

CHUYÊN ĐỀ 25: ĐA THỨC MỘT BIẾN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

- + Đa thức một biến (gọi tắt là đa thức) là tổng của những đơn thức của cùng một biến; mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.
- + Số 0 cũng được gọi là một đa thức, gọi là đa thức không.
- + Kí hiệu: Ta thường kí hiệu đa thức bằng một chữ cái in hoa. Đôi khi còn viết thêm kí hiệu biến trong ngoặc đơn.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Thu gọn và sắp xếp đa thức một biến.

I. Phương pháp giải:

- + Thu gọn đa thức một biến: Thực hiện phép tính cộng các đơn thức cùng bậc.
- + Sắp xếp đa thức một biến (đa thức khác 0): Viết đa thức dưới dạng thu gọn và sắp xếp các hạng tử của nó theo lũy thừa giảm của biến.

II. Bài toán.

* Mức độ nhận biết

Bài 1. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến $P(x) = -x^3 + x + x^3 - 2x + 1$.

Lời giải:

$$P(x) = -x^3 + x + x^3 - 2x + 1$$

$$P(x) = (-x^3 + x^3) + (x - 2x) + 1$$

$$P(x) = -x + 1$$

Sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm dần: $P(x) = -x + 1$.

Bài 2. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến $Q(x) = -x^2 + 2 - 3x^2 + 5x$.

Lời giải:

$$Q(x) = -x^2 + 2 - 3x^2 + 5x$$

$$Q(x) = (-x^2 - 3x^2) + 5x + 2$$

$$Q(x) = -4x^2 + 5x + 2$$

Sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa tăng dần: $Q(x) = 2 + 5x - 4x^2$.

Bài 3. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$M(x) = -x^2 - 3 + 7x^2 - 2x$$

Lời giải:

$$M(x) = -x^2 - 3 + 7x^2 - 2x$$

$$M(x) = (-x^2 + 7x^2) - 2x - 3$$

$$M(x) = 6x^2 - 2x - 3$$

Sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm dần: $M(x) = 6x^2 - 2x - 3$.

Bài 4. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$N(y) = y^3 + 3y - y^2 + 2y$$

Lời giải:

$$N(y) = y^3 + 3y - y^2 + 2y$$

$$N(y) = y^3 - y^2 + (2y + 3y)$$

$$N(y) = y^3 - y^2 + 5y$$

Sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa tăng dần: $N(y) = 5y - y^2 + y^3$.

Bài 5. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - x^3 + 2x - 1.$$

Lời giải:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - x^3 + 2x - 1$$

$$P(x) = (2x^3 - x^3) - 3x^2 + (x + 2x) - 1$$

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

*** Mức độ thông hiểu**

Bài 6. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến. Xác định các hạng tử của đa thức $E(u) = 3 - 2u + 5u^2 - 3u$.

Lời giải:

$$E(u) = 3 - 2u + 5u^2 - 3u$$

$$E(u) = 5u^2 + (-3u - 2u) + 3$$

$$E(u) = 5u^2 - 5u + 3.$$

Đa thức $E(u)$ có ba hạng tử là $5u^2$, $-5u$ và 3 .

Bài 7. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến. Xác định các hạng tử của đa thức $H = 3u^2 - 2u^5 + 2u^7 - 3u^2 - 5$.

Lời giải:

$$H = 3u^2 - 2u^5 + 2u^7 - 3u^2 - 5$$

$$H = 2u^7 - 2u^5 + (3u^2 - 3u^2) - 5$$

$$H = 2u^7 - 2u^5 - 5$$

$$H = -5 - 2u^5 + 2u^7$$

Đa thức H có ba hạng tử là $2u^7$, $-2u^5$ và -5 .

Bài 8. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$Q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3x^2 + 5x - 2.$$

Lời giải:

$$Q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3x^2 + 5x - 2$$

$$Q(x) = x^3 + (-x^2 - 3x^2) + (2x + 5x) - 2$$

$$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 2$$

Bài 9: Cho đa thức $P(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - x^2 + 3x^4 + 4x^3 - 3$. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức $P(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.

Lời giải:

Thu gọn và sắp xếp đa thức $P(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.

$$P(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - x^2 + 3x^4 + 4x^3 - 3$$

$$P(x) = 3x^4 + (4x^3 - 4x^3) + (2x^2 - x^2) + 5x - 3$$

$$P(x) = 3x^4 + x^2 + 5x - 3.$$

Bài 10. Thu gọn và sắp xếp đa thức $B(x) = 3x - 5 + 4x^3 - 8x + 10$ theo lũy thừa giảm dần của biến.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B(x) = 3x - 5 + 4x^3 - 8x + 10$$

$$B(x) = 4x^3 + (3x - 8x) + (-5 + 10)$$

$$B(x) = 4x^3 - 5x + 5.$$

*** Mức độ vận dụng**

Bài 11. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$G = \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2 - 2b^4 + \frac{4}{3}b^3 + \frac{5}{2}b^2 - 2.$$

Lời giải:

$$G = \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2 - 2b^4 + \frac{4}{3}b^3 + \frac{5}{2}b^2 - 2$$

$$G = -2b^4 + \left(\frac{4}{3}b^3 + \frac{2}{3}b^3\right) + \left(\frac{5}{2}b^2 + \frac{1}{2}b^2\right) - 2$$

$$G = -2b^4 + 2b^3 + 3b^2 - 2.$$

Bài 12. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến.

$$M(x) = -x^5 + 3x^2 - 3 + 7x^2 + x^5 - 2x.$$

Lời giải:

$$M(x) = -x^5 + 3x^2 - 3 + 7x^2 + x^5 - 2x$$

$$M(x) = (x^5 - x^5) + (3x^2 + 7x^2) - 2x - 3$$

$$M(x) = 10x^2 - 2x - 3$$

$$M(x) = -3 - 2x + 10x^2.$$

Bài 13. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến.

$$D(u) = 2u^3 + (2u^2)\left(\frac{3}{2}u\right) - 2u + 5.$$

Lời giải:

$$D(u) = 2u^3 + (2u^2)\left(\frac{3}{2}u\right) - 2u + 5$$

$$D(u) = 2u^3 + 3u^3 - 2u + 5$$

$$D(u) = 5u^3 - 2u + 5$$

Bài 14. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến.

$$A = \frac{2}{3}a^3 - (15a^2)\left(\frac{3}{5}a^3\right) - 2a + 5a^3 - a^5$$

Lời giải:

$$A = \frac{2}{3}a^3 - (15a^2)\left(\frac{3}{5}a^3\right) - 2a + 5a^3 - a^5$$

$$A = \frac{2}{3}a^3 - 9a^5 - 2a + 5a^3 - a^5$$

$$A = (-a^5 - 9a^5) + \left(5a^3 + \frac{2}{3}a^3\right) - 2a$$

$$A = -10a^5 + \frac{17}{3}a^3 - 2a$$

$$A = -2a + \frac{17}{3}a^3 - 10a^5.$$

Bài 15. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 4x^3 + 6x + 8x - 2.$$

Lời giải:

$$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 4x^3 + 6x + 8x - 2$$

$$P(x) = (4x^3 - 4x^3) + 5x^2 + (6x + 8x) - 2$$

$$P(x) = 5x^2 + 14x - 2$$

$$P(x) = -2 + 14x + 5x^2.$$

*** Mức độ vận dụng cao**

Bài 16. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$A(x) = 15x^4 - 8x^3 + 9x^4 + 5x^3 - 2x + 1 + 9x.$$

Lời giải:

$$A(x) = 15x^4 - 8x^3 + 9x^4 + 5x^3 - 2x + 1 + 9x$$

$$A(x) = (15x^4 + 9x^4) + (-8x^3 + 5x^3) + (-2x + 9x) + 1$$

$$A(x) = 24x^4 - 3x^3 + 7x + 1.$$

Bài 17. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$B(x) = \frac{4}{7}x^2 + \frac{5}{9}x^4 - x^2 + \frac{4}{9}x^4 - \frac{4}{7}x^3 - \frac{4}{7}x^2 - 2.$$

Lời giải:

$$B(x) = \frac{4}{7}x^2 + \frac{5}{9}x^4 - x^2 + \frac{4}{9}x^4 - \frac{4}{7}x^3 - \frac{4}{7}x^2 - 2$$

$$B(x) = \left(\frac{4}{7}x^2 - \frac{4}{7}x^2 - x^2\right) + \left(\frac{5}{9}x^4 + \frac{4}{9}x^4\right) - \frac{4}{7}x^3 - 2$$

$$B(x) = -x^2 + x^4 - \frac{4}{7}x^3 - 2$$

$$B(x) = x^4 - \frac{4}{7}x^3 - x^2 - 2.$$

Bài 18. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$C(x) = 5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 2x^4 + 7x^2 - 9.$$

Lời giải:

$$C(x) = 5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 2x^4 + 7x^2 - 9$$

$$C(x) = (5 - 9) + (2x^4 - 2x^4) - 5x^3 + (-2x^2 + 7x^2)$$

$$C(x) = -4 - 5x^3 + 5x^2$$

$$C(x) = -5x^3 + 5x^2 - 4.$$

Bài 19. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$D(x) = 5x^3 - 7x^2 + 9x^4 - 2x^3 - 5x^4 + 8 - x.$$

Lời giải:

$$D(x) = 5x^3 - 7x^2 + 9x^4 - 2x^3 - 5x^4 + 8 - x$$

$$D(x) = (5x^3 - 2x^3) - 7x^2 + (9x^4 - 5x^4) + 8 - x$$

$$D(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x^4 + 8 - x$$

$$D(x) = 8 - x - 7x^2 + 3x^3 + 4x^4$$

Bài 20. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$Q(y) = 8y - 5y^4 + 7y^2 - 6y^3 + 9y^4 - 6y - 7y^2 + 5y^3 - 2.$$

Lời giải:

$$Q(y) = 8y - 5y^4 + 7y^2 - 6y^3 + 9y^4 - 6y - 7y^2 + 5y^3 - 2$$

$$Q(y) = (8y - 6y) + (-5y^4 + 9y^4) + (7y^2 - 7y^2) + (-6y^3 + 5y^3) - 2$$

$$Q(y) = 2y + 4y^4 - y^3 - 2$$

$$Q(y) = -2 + 2y - y^3 + 4y^4.$$

Dạng 2: Tìm bậc và các hệ số của một đa thức.

I. Phương pháp giải:

Trong một đa thức thu gọn và khác đa thức không:

- Bậc của hạng tử có bậc cao nhất gọi là bậc của đa thức đó.
- Hệ số của hạng tử có bậc cao nhất gọi là hệ số cao nhất của đa thức đó.
- Hệ số của hạng tử có bậc 0 gọi là hệ số tự do của đa thức đó.

Chú ý:

- Đa thức không thì không có bậc.
- Trong một đa thức thu gọn, hệ số cao nhất phải khác 0 (các hệ số khác có thể bằng 0).
- Muốn tìm bậc của một đa thức chưa thu gọn, ta phải thu gọn đa thức đó.

II. Bài toán.

*** Mức độ nhận biết**

Bài 1. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $B(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 4x^2 + 4$.

Lời giải:

Đa thức $B(x)$ có bậc 4.

Hệ số cao nhất là 2, hệ số lũy thừa bậc 3 là -3, hệ số lũy thừa bậc 2 là -4, hệ số lũy thừa bậc 1 là 1 hệ số tự do là 4.

Bài 2. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $C(x) = 3x^2 - 2x + x^3$.

Lời giải:

Đa thức $C(x)$ có bậc 3.

Hệ số cao nhất là 1, hệ số lũy thừa bậc 2 là 3, hệ số lũy thừa bậc 1 là -2.

Bài 3. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $D(y) = 5y^5 - 2y^3 + y^4$.

Lời giải:

Đa thức $D(y)$ có bậc 5.

Hệ số cao nhất là 5, hệ số lũy thừa bậc 4 là 1, hệ số lũy thừa bậc 3 là -2.

Bài 4. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $E(y) = 5y^5 - 2y^3 + 3y^4 - 5y^5$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } E(y) = 5y^5 - 2y^3 + 3y^4 - 5y^5 = (5y^5 - 5y^5) + 3y^4 - 2y^3 = 3y^4 - 2y^3.$$

Đa thức $E(y)$ có bậc 4.

Hệ số cao nhất là 3, hệ số lũy thừa bậc 3 là -2.

Bài 5. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau:

$$G(y) = 5y^5 - 2y^3 + 3y^4 - 5y^5 + 2y^3 - 3y^4 + 2022.$$

Lời giải:

$$G(y) = 5y^5 - 2y^3 + 3y^4 - 5y^5 + 2y^3 - 3y^4 + 2022$$

$$G(y) = (5y^5 - 5y^5) + (-2y^3 + 2y^3) + (3y^4 - 3y^4) + 2022$$

$$G(y) = 2022.$$

Đa thức $G(y)$ có bậc 0.

Hệ số tự do là 2022.

*** Mức độ thông hiểu**

Bài 6: Cho đa thức: $P(x) = 7x^3 + 3x^4 - x^2 + 5x^2 - 6x^3 - 2x^4 + 2017 - x^3$.

a) Chỉ ra bậc của $P(x)$.

b) Viết các hệ số của $P(x)$. Nêu rõ hệ số cao nhất và hệ số tự do.

Lời giải:

Ta có: $P(x) = 7x^3 + 3x^4 - x^2 + 5x^2 - 6x^3 - 2x^4 + 2017 - x^3$.

$$P(x) = (3x^4 - 2x^4) + (7x^3 - 6x^3 - x^3) + (-x^2 + 5x^2) + 2017$$

$$P(x) = x^4 + 4x^2 + 2017.$$

a) Đa thức $P(x)$ có bậc bằng 4.

b) Hệ số của hạng tử bậc 4 là 1; hệ số của hạng tử bậc 2 là 4; hệ số của hạng tử bậc 0 là 2017.

Trong đó, hệ số cao nhất là 1; hệ số tự do là 2017.

Bài 7: Cho đa thức: $P(x) = 2 + 7x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - x^3 + 6x^5$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo lũy thừa giảm.

b) Viết các hệ số khác 0 của đa thức $P(x)$.

c) Xác định bậc của đa thức, hệ số cao nhất, hệ số tự do.

Lời giải:

$$a) P(x) = 2 + 7x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - x^3 + 6x^5$$

$$P(x) = (6x^5 + 7x^5) + (-4x^3 - x^3) + 3x^2 - 2x + 2$$

$$P(x) = 13x^5 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 2$$

b) Các hệ số khác 0 của đa thức $P(x)$ tương ứng với bậc giảm dần là 13; -5; 3; -2; 2.

c) Bậc của $P(x)$ là 5. Hệ số cao nhất là 13, hệ số tự do là 2.

Bài 8. Cho đa thức $f(x) = x + 7x^2 - 6x^3 + 3x^4 + 2x^2 + 6x - 2x^4 + 5$.

a) Thu gọn và sắp xếp các số hạng của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Xác định bậc của đa thức, hệ số tự do, hệ số cao nhất.

Lời giải:

$$a) f(x) = x + 7x^2 - 6x^3 + 3x^4 + 2x^2 + 6x - 2x^4 + 5$$

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 7x + 5.$$

b) Bậc 4. Hệ số tự do là 5. Hệ số cao nhất là 1.

Bài 9. Tìm bậc mỗi đa thức sau:

$$a) A = 2x^5 - 3x^4 + x^5 + 4x^4 - 3x^5$$

$$b) B = ax^3 + 4x^2 + 8x + 1 \text{ (a là hằng số)}$$

$$c) C = mx^4 + x^4 - 1 \text{ (m là hằng số)}$$

Lời giải:

$$a) A = 2x^5 - 3x^4 + x^5 + 4x^4 - 3x^5$$

$$A = x^4. \text{ Bậc 4.}$$

$$b) B = ax^3 + 4x^2 + 8x + 1. \text{ Bậc của B là 3 khi a khác 0; bậc B là 2 khi } a = 0.$$

c) $C = mx^4 + x^4 - 1$. Bậc C là 4 khi m khác -1 ; bậc C là 0 khi m bằng -1.

Bài 10. Thu gọn và sắp xếp đa thức $E(x) = -2x^5 - 5ax + bx^2 + 3x^4 + \frac{x^3}{5} - 3x^2 - 1$ (a, b là các hằng số khác 0) theo lũy thừa giảm dần của biến rồi xác định các hệ số của đa thức trên.

Lời giải:

$$E(x) = -2x^5 - 5ax + bx^2 + 3x^4 + \frac{x^3}{5} - 3x^2 - 1$$

$$E(x) = -2x^5 + 3x^4 + \frac{x^3}{5} + (bx^2 - 3x^2) - 5ax - 1$$

$$E(x) = -2x^5 + 3x^4 + \frac{x^3}{5} + (b-3)x^2 - 5ax - 1$$

Hệ số cao nhất là -2.

Hệ số lũy thừa bậc 4 là 3.

Hệ số lũy thừa bậc 3 là $\frac{1}{5}$.

Hệ số lũy thừa bậc 2 là $b-3$.

Hệ số lũy thừa bậc 1 là $-5a$.

Hệ số tự do là -1.

*** Mức độ vận dụng**

Bài 11. Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau:

a) $A = 3x^2 + 7x^3 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2$;

b) $B = 3x^2 + x - 3x^2 - 5$

Lời giải

a) $A = 3x^2 + 7x^3 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2 = (7x^3 - 3x^3 + 6x^3) + (3x^2 - 3x^2) = 10x^3$ có bậc là 3.

b) $B = 3x^2 + x - 3x^2 - 5 = (3x^2 - 3x^2) + x - 5 = x - 5$ có bậc là 1.

Bài 12. Cho đa thức: $A(x) = -2x^2 + 3x - x^4 + 5 + 3x^2 - 4x$;

a) Thu gọn, sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Xác định các hệ số của các đa thức.

Lời giải

a) $A(x) = -2x^2 + 3x - x^4 + 5 + 3x^2 - 4x = -x^4 + (3x^2 - 2x^2) + (3x - 4x) + 5 = -x^4 + x^2 - x + 5$.

b) Đa thức $A(x)$ có hệ số cao nhất là -1, hệ số lũy thừa bậc 2 là 1, hệ số lũy thừa bậc 1 là -1, hệ số tự do là 5.

Bài 13. Cho đa thức: $B(x) = 3x - 5 + 4x^3 - 8x + 10$;

a) Thu gọn, sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa tăng dần của biến.

b) Xác định các hệ số của các đa thức

Lời giải

a) $B(x) = 3x - 5 + 4x^3 - 8x + 10 = 4x^3 + (3x - 8x) + (10 - 5) = 4x^3 - 5x + 5 = 5 - 5x + 4x^3$.

b) Đa thức $B(x)$ có hệ số cao nhất là 4, hệ số lũy thừa bậc 1 là -5, hệ số tự do là 5.

Bài 14. Cho đa thức: $C(x) = -3x^2 + 5 - 8x + 2x^4 + x^3 - 4$

a) Thu gọn, sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Xác định các hệ số của các đa thức.

Lời giải

a) $C(x) = -3x^2 + 5 - 8x + 2x^4 + x^3 - 4 = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 8x + (5 - 4) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 8x + 1$.

b) Đa thức $C(x)$ có hệ số cao nhất là 2, hệ số lũy thừa bậc 3 là 1, hệ số lũy thừa bậc 2 là -3, hệ số lũy thừa bậc 1 là -8, hệ số tự do là 1.

Bài 15. Thu gọn và sắp xếp đa thức $A(x) = -2x^2 + 3x - x^4 + 5 + 3x^2 - 4x$ theo lũy thừa giảm dần của biến rồi xác định các hệ số của đa thức trên.

Lời giải

Ta có: $A(x) = -2x^2 + 3x - x^4 + 5 + 3x^2 - 4x$

$$A(x) = -x^4 + (-2x^2 + 3x^2) + (3x - 4x) + 5$$

$$A(x) = -x^4 + x^2 - x + 5.$$

Đa thức $A(x)$ có hệ số cao nhất là -1 , hệ số lũy thừa bậc 2 là 1, hệ số lũy thừa bậc 1 là -1 , hệ số tự do là 5.

Bài 16. Ở Đà Lạt giá Táo là x (đồng/kg) và giá Nho gấp đôi giá Táo.

- a) Hãy viết đa thức biểu thị số tiền khi mua 5 kg táo và 4 kg nho. Tìm bậc của đa thức đó.
b) Hãy viết biểu thức biểu thị số tiền khi mua 10 hộp táo và 10 hộp nho, biết mỗi hộp táo có 10 kg và mỗi hộp nho có 12 kg. Tìm bậc của đa thức đó.

Lời giải:

- a) Đa thức biểu thị số tiền khi mua 5 kg táo và 4 kg nho là $5.x + 4.2x = 13x$. Đa thức có bậc 1.
b) Đa thức biểu thị số tiền khi mua 10 hộp táo và 10 hộp nho, biết mỗi hộp táo có 10 kg và mỗi hộp nho có 12 kg là $10.10x + 10.12.2x = 340x$. Đa thức có bậc 1.

Bài 17. Một hãng taxi quy định giá cước như sau: 1km đầu tiên giá 11 nghìn đồng. Từ kilômét thứ hai trở đi giá 10 nghìn đồng/km.

- a) Người thuê xe taxi của hãng đó đi x km ($x > 1$). Hãy viết đa thức tính số tiền mà người đó phải trả?
b) Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức đó?

Lời giải:

a) Đa thức số tiền người đó trả là $A(x) = 11 + 10(x - 1)$ nghìn đồng.

b) Ta có $A(x) = 11 + 10(x - 1) = 10x + 1$

Đa thức bậc 1, hệ số cao nhất là 10, hệ số tự do là 1.

*** Mức độ vận dụng cao**

Bài 18: Với a, b, c là các hằng số, tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức $A(x) = x^2 + (a + b)x - 5a + 3b + 2$?

Lời giải:

Đa thức $A(x)$ có bậc bằng 2; hệ số cao nhất bằng 1, hệ số tự do bằng $-5a + 3b + 2$.

(Với a, b, c là các hằng số).

Bài 19. Cho đa thức $N = 4x^5 - 3x^4 + 7x^4 + ax^5$ (a là hằng số). Biết rằng bậc của đa thức N bằng 4. Tìm a ?

Lời giải

Ta có $N = 4x^5 - 3x^4 + 7x^4 + ax^5 = (a + 4)x^5 + 4x^4$ (a là hằng số).

Vì bậc của đa thức N bằng 4 nên $a + 4 = 0$ suy ra $a = -4$.

Bài 20. Cho đa thức $ax^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x^4 - 7x + 1$. Biết rằng đa thức này có bậc bằng 4 và a là số nguyên tố nhỏ hơn 5. Tìm a ?

Lời giải

Ta có $ax^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x^4 - 7x + 1 = (a - 2)x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1$.

Vì đa thức này có bậc bằng 4 nên $a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ và a là số nguyên tố nhỏ hơn 5 nên $a = 3$

Bài 21. Cho đa thức

$$A(x) = bx + (b - 2)x^5 - (a - 12)x^6 + 0,5ax^3 - 5x^2 - bx^3 + 4cx^4 - 10 + 11x^5 + 6x^6 + ax - c(x - 1)$$

Viết đa thức dưới dạng thu gọn với các hệ số bằng số, biết rằng $A(x)$ có bậc là 5; hệ số cao nhất là 19 và hệ số tự do là -15.

Lời giải

Ta có:

$$A(x) = bx + (b-2)x^5 - (a-12)x^6 + 0,5ax^3 - 5x^2 - bx^3 + 4cx^4 - 10 + 11x^5 + 6x^6 + ax - c(x-1)$$

$$A(x) = 6x^6 - (a-12)x^6 + 11x^5 + (b-2)x^5 + 4cx^4 + 0,5ax^3 - bx^3 - 5x^2 + (a-c)x + bx + c - 10$$

$$= (-a+18)x^6 + (b+9)x^5 + 4cx^4 + (0,5a-b)x^3 - 5x^2 + (a-c+b)x + (c-10)$$

$$\text{Theo đề bài ra, ta có } \begin{cases} -a+18=0 \\ b+9=19 \\ c-10=-15 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a=18 \\ b=10 \\ c=-5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A(x) = 19x^5 - 20x^4 - x^3 - 5x^2 + 33x - 15.$$

Bài 22. Xác định đa thức bậc hai $Q(x) = ax^2 + bx + c$ biết rằng $Q(-1) = 6$; $Q(2) = 3$ và tổng các hệ số của đa thức bằng 0.

Lời giải

Xét đa thức: $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\text{Do } Q(-1) = 6 \text{ nên } a - b + c = 6 \quad (1)$$

$$Q(2) = 3 \text{ nên } 4a + 2b + c = 3 \quad (2)$$

$$\text{và tổng các hệ số của đa thức bằng 0 nên } a + b + c = 0 \quad (3)$$

Lấy (3) trừ (1), ta được $b = -3$, khi đó $4a + c = 9$ và $a + c = 3$ nên $a = 2; c = 1$.

$$\text{Vậy } Q(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Dạng 3: Tính giá trị của đa thức

I. Phương pháp giải:

+ Để tính giá trị của đa thức ta thực hiện theo các bước

Bước 1: Thu gọn, sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.

Bước 2: Thay giá trị cụ thể của biến vào đa thức và thực hiện các phép tính.

Bước 3: Kết luận.

II. Bài toán.

* Mức độ nhận biết

Bài 1: Tính giá trị của đa thức $A(y) = 7y^2 - 3y + \frac{1}{2}$ tại $y = -2$.

Lời giải

$$A(-2) = 7.(-2)^2 - 3.(-2) + \frac{1}{2} = 28 + 6 + \frac{1}{2} = \frac{69}{2}.$$

Vậy tại $y = -2$ đa thức $A(y)$ có giá trị bằng $\frac{69}{2}$.

Bài 2: Tính giá trị của đa thức $B(x) = -4x^5 - 3x - \frac{1}{2} + 7x^3 + 4x^5 + \frac{1}{2}$ tại $x = 5$;

Lời giải

$$B(x) = -4x^5 - 3x - \frac{1}{2} + 7x^3 + 4x^5 + \frac{1}{2} = 7x^3 - 3x.$$

$$B(5) = 7.5^3 - 3.5 = 875 - 15 = 860.$$

Vậy tại $x = 5$ đa thức $B(x)$ có giá trị bằng 860.

Bài 3. Cho đa thức: $P(x) = 2x^3 + x^2 + 5 - 3x + 3x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 1$. Tính giá trị của $P(x)$ tại $x = 0$; $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $P(x) = 2x^3 + x^2 + 5 - 3x + 3x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 1$.

$$P(x) = (2x^3 - 2x^3) + (x^2 + 3x^2 - 4x^2) - 3x + (5 + 1).$$

$$P(x) = -3x + 6.$$

*) Thay $x = 0$ vào đa thức $P(x)$, ta có: $P(0) = -3 \cdot 0 + 6 = 6$.

Vậy tại $x = 0$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 6.

*) Thay $x = -1$ vào đa thức $P(x)$, ta có: $P(-1) = -3 \cdot (-1) + 6 = 9$.

Vậy tại $x = -1$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 9.

*) Thay $x = \frac{1}{3}$ vào đa thức $P(x)$, ta có: $P\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{3} + 6 = 5$.

Vậy tại $x = \frac{1}{3}$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 5.

Bài 4. Cho đa thức: $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 5 - 3x - 4x^2 + x^3 - 4x^2 - 3$. Tính $P(2)$.

Lời giải

Ta có: $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 5 - 3x - 4x^2 + x^3 - 4x^2 - 3$

$$P(x) = (5x^3 + x^3) + (2x^2 - 4x^2 - 4x^2) - 3x + (5 - 3)$$

$$P(x) = 6x^3 - 6x^2 - 3x + 2$$

Thay $x = 2$ vào đa thức $P(x)$, ta có:

$$P(2) = 6 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2$$

$$P(2) = 48 - 24 - 6 + 2$$

$$P(2) = 20.$$

Vậy $P(2) = 20$. Hay tại $x = 2$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 20.

Bài 5. Cho đa thức: $P(x) = -2x^4 - 7x - 2 + 3x^4 + 2x^2 - x$. Tính $P(-1)$.

Lời giải

Ta có: $P(x) = x^4 - 8x - 2 + 2x^2$

Thay $x = -1$ vào đa thức $P(x)$, ta có:

$$P(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1) - 2 + 2 \cdot (-1)^2$$

$$P(-1) = 1 + 8 - 2 + 2$$

$$P(-1) = 9$$

Vậy $P(-1) = 9$. Hay tại $x = -1$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 9.

*** Mức độ thông hiểu**

Bài 6. Cho đa thức: $Q(x) = 3x^3 + x^4 - 5x^2 - x^3 - 6x + 3$. Tính $Q(-2)$

Lời giải

Ta có: $Q(x) = 2x^3 + x^4 - 5x^2 - 6x + 3$

Thay $x = -2$ vào đa thức $P(x)$, ta có:

$$Q(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 3$$

$$Q(-2) = -16 + 16 - 20 + 12 + 3$$

$$Q(-2) = -5$$

Vậy $Q(-2) = -5$. Hay tại $x = -2$ đa thức $Q(x)$ có giá trị bằng -5 .

Bài 7. Cho đa thức: $P(x) = x^3 - 2x^4 + 6x + 3 - 2x + 5$. Tính $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải:

$$P(x) = x^3 - 2x^4 + 6x + 3 - 2x + 5$$

$$P(x) = -2x^4 + x^3 + 4x + 8$$

Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào đa thức $P(x)$, ta có:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 8$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{8} - \frac{1}{8} - 2 + 8$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{4}$$

Vậy $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{4}$. Hay tại $x = -\frac{1}{2}$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng $\frac{23}{4}$.

Bài 8. Cho đa thức: $Q(x) = ax^3 + 2x^4 - 5x^2 - 2x^3 - 6x + 3$ (a là hằng số). Tính $Q(1)$.

Lời giải:

Ta có: $Q(x) = ax^3 + 2x^4 - 5x^2 - 2x^3 - 6x + 3$

$$Q(x) = 2x^4 + (a - 2)x^3 - 5x^2 - 6x + 3$$

Thay $x = 1$ vào đa thức $Q(x)$, ta có:

$$Q(1) = 2 \cdot 1^4 + (a - 2) \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3$$

$$Q(1) = 2 + a - 2 - 5 - 6 + 3$$

$$Q(1) = a - 8$$

Vậy $Q(1) = a - 8$. Hay tại $x = 1$ đa thức $Q(x)$ có giá trị bằng $a - 8$.

Bài 9. Cho đa thức: $B(x) = (a + 1)x^3 + 2x^4 - 5ax^2 - 6x + 3a$ (a là hằng số). Tính $B(-1)$.

Lời giải:

Ta có: $B(x) = (a + 1)x^3 + 2x^4 - 5ax^2 - 6x + 3a$

Thay $x = -1$ vào đa thức $B(x)$, ta có:

$$B(-1) = (a + 1)(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^4 - 5a(-1)^2 - 6(-1) + 3a$$

$$B(-1) = -a - 1 + 2 - 5a + 6 + 3a$$

$$B(-1) = -3a + 7$$

Vậy $B(-1) = -3a + 7$. Hay tại $x = -1$ đa thức $B(x)$ có giá trị bằng $-3a + 7$.

Bài 10. Cho đa thức: $B(x) = x^3 + 2x^4 - 5x^2 + 6x + 3$. Tính $B\left(\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải:

Thay $x = \frac{1}{3}$ vào đa thức $B(x)$, ta có:

$$B\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 3$$

$$B\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{2}{81} - \frac{5}{9} + 2 + 3$$

$$B\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{365}{81}$$

Vậy $B\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{365}{81}$. Hay tại $x = \frac{1}{3}$ đa thức $B(x)$ có giá trị bằng $\frac{365}{81}$.

*** Mức độ vận dụng**

Bài 11. Cho đa thức: $B(x) = (2a+1)x^3 - 2x^4 + 6x + 3$. Tính $B\left(\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải:

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đa thức $B(x)$, ta có:

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = (2a+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3$$

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = (2a+1) \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 + 3$$

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 6$$

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a + 6$$

Vậy $B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a + 6$. Hay tại $x = \frac{1}{2}$ đa thức $B(x)$ có giá trị bằng $\frac{1}{4}a + 6$.

Bài 12. Xác định đa thức bậc nhất $P(x) = ax + b$ biết rằng $P(-1) = 5$ và $P(-2) = 7$;

Lời giải:

Đa thức bậc nhất $P(x) = ax + b$

Do $P(-1) = 5$ nên $-a + b = 5$ và $P(-2) = 7$ nên $-2a + b = 7$.

Khi đó: $a = -2; b = 3$ hay $P(x) = -2x + 5$.

Bài 13: Cho đa thức: $P(x) = 2x^3 + x^2 + 5 - 3x + 3x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 1$

a) Thu gọn $P(x)$.

b) Tính giá trị của $P(x)$ tại $x = 0$; $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $P(x) = 0$; $P(x) = 1$.

Lời giải:

a) $P(x) = -3x + 6$.

b) HS tự làm.

c) $P(x) = 0$ nên $-3x + 6 = 0$ hay $x = 2$.

$P(x) = 1$ nên $-3x + 6 = 1$ hay $x = \frac{5}{3}$.

Bài 14: Lan có 150 nghìn đồng tiết kiệm. Lan mua một bộ dụng cụ học tập hết 45 nghìn đồng và 10 quyển vở giá x nghìn đồng.

a) Hãy tìm đa thức (biến x) biểu thị số tiền còn lại (đơn vị: nghìn đồng). Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức đó.

b) Sau khi mua vở thì Lan còn dư 5 nghìn đồng. Hỏi giá tiền của mỗi quyển vở?

Lời giải

a) Đa thức biểu thị số tiền còn lại của Lan là: $A(x) = 150 - 45 - 10x$ (nghìn đồng)

hay $A(x) = 105 - 10x$ (nghìn đồng)

Đa thức $A(x)$ có bậc bằng 1; hệ số cao nhất bằng -10 ; hệ số tự do bằng 105.

b) Sau khi mua vở thì Lan còn dư 5 nghìn đồng nên $A(x) = 5$ hay $105 - 10x = 5$

Suy ra $100 = 10x$ nên $x = 10$.

Vậy giá mỗi quyển vở là 10 nghìn đồng.

Bài 15: Cuối năm An nhận được phần thưởng là 100 nghìn đồng. An dùng số tiền này để mua một cuốn sách giáo khoa môn Toán 7 giá 20 nghìn đồng; mua bộ thước hết 10 nghìn đồng và mua một cuốn sách tham khảo môn Toán 7 với giá x nghìn đồng.

a) Hãy tìm đa thức biểu thị số tiền còn lại của An (đơn vị: nghìn đồng). Tìm bậc của đa thức đó.

b) Nếu sau khi mua An còn lại số tiền là 20 nghìn đồng thì hỏi giá tiền cuốn sách tham khảo là bao nhiêu?

Lời giải:

a) Đa thức biểu thị số tiền còn lại của An (đơn vị: nghìn đồng) là

$$B(x) = 100 - (20 + 10 + x) = 70 - x \text{ (nghìn đồng)}$$

Bậc của đa thức là 1.

b) Số tiền còn lại của An sau khi mua là 20 nghìn đồng nên $B(x) = 20$

suy ra $70 - x = 20 \Rightarrow x = 70 - 10 = 50$ (nghìn đồng)

Vậy giá cuốn sách tham khảo là 50 nghìn đồng.

*** Mức độ vận dụng cao**

Bài 16. Cho đa thức $M(x) = ax^4 + 6x - 4$. Tìm a biết $M(-2) = 3$

Lời giải:

Ta có $M(-2) = 3$ nên $a(-2)^4 + 6(-2) - 4 = 3$

Hay $16a - 12 - 4 = 3$

$16a = 19$

$a = \frac{19}{16}$.

Vậy $a = \frac{19}{16}$ thì $M(-2) = 3$.

Bài 17. Cho biểu thức $A = 5x + 1$

a) Tính giá trị của A tại $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{9} = 1$

b) Tính giá trị của A tại $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) = 0$

Lời giải:

a) Ta có: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{9} = 1$ nên $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9}$ hay $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Khi đó: $x - \frac{1}{2} = \pm \frac{2}{3}$. Suy ra $\begin{cases} x = \frac{7}{6} \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$

+) Thay $x = \frac{7}{6}$ vào biểu thức A ta được: $A = 5 \cdot \frac{7}{6} + 1 = \frac{35}{6} + 1 = \frac{41}{6}$.

+) Thay $x = -\frac{1}{6}$ vào biểu thức A ta được: $A = 5 \cdot -\frac{1}{6} + 1 = -\frac{5}{6} + 1 = \frac{1}{6}$.

b) Ta có: $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x^2 = -1(VL) \\ x = -1 \end{cases}$ suy ra $x = -1$.

Thay $x = -1$ vào biểu thức A ta được: $A = 5 \cdot (-1) + 1 = -5 + 1 = -4$

Bài 18. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $f(0) = 2017$; $f(1) = 2018$; $f(-1) = 2019$. Tính $f(2)$.

Lời giải:

Ta có: $f(0) = 2017$ nên $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 2017$ hay $c = 2017$.

$f(1) = 2018$ nên $a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 2018$ hay $a + b + 2017 = 2018$. Suy ra $a + b = 1$ (*)

$f(-1) = 2019$ nên $a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = 2019$ hay $a - b + 2017 = 2019$. Suy ra $a - b = 2$ hay $a = b + 2$.

Thay $a = b + 2$ vào (*) ta được: $b + 2 + b = 1$ suy ra $2b = -1$ nên $b = -\frac{1}{2}$. Khi đó $a = 2 + b = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2017$$

Khi đó, $f(2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 2017 = 2022$.

Bài 19. Cho $P(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \dots + 2x^2 + x$. Tính $P(1)$.

Lời giải:

Thay $x = 1$ vào biểu thức $P(x)$ ta có:

$$P(1) = 100 + 99 + 98 + \dots + 39 + 2 + 1 = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 101.50 = 5050.$$

Vậy $P(1) = 5050$. Hay tại $x = 1$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 5050.

Bài 20. Cho $P(x) = x^{99} - 100x^{98} + 100x^{97} - 100x^{96} + \dots + 100x - 1$. Tính $P(99)$.

Lời giải:

Ta có: $x = 99$ nên $x + 1 = 100$.

Suy ra: $P(x) = x^{99} - 100x^{98} + 100x^{97} - 100x^{96} + \dots + 100x - 1$

$$P(x) = x^{99} - (x+1)x^{98} + (x+1)x^{97} - (x+1)x^{96} + \dots + (x+1)x - 1$$

$$P(x) = x^{99} - x^{99} - x^{98} + x^{98} + x^{97} - x^{97} - x^{96} + \dots + x^2 + x - 1$$

$$P(x) = x - 1$$

$$P(99) = 99 - 1 = 98.$$

Vậy $P(99) = 98$. Hay tại $x = 99$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 98.

Dạng 4: Nghiệm của đa thức một biến.

I. Phương pháp giải:

Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

- a là nghiệm của $P(x)$ khi $P(a) = 0$.
- Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm.
- Số nghiệm số của một đa thức không vượt quá bậc của nó.

Để tìm nghiệm của đa thức $P(x)$ ta cho $P(x) = 0$ rồi tìm giá trị x thỏa mãn.

Để chứng minh $x = a$ là nghiệm của đa thức $P(x)$, ta chỉ ra $P(a) = 0$.

Để chứng minh $x = a$ là không nghiệm của đa thức $P(x)$, ta chỉ ra $P(a) \neq 0$.

Gọi ẩn, lập biểu thức chứa biến biểu diễn mối quan hệ giữa đại lượng theo ẩn.

II. Bài toán.

* Mức độ nhận biết

Bài 1: Kiểm tra xem 1 có phải là nghiệm của các đa thức sau không?

a) $M(x) = 2022x^2 - 2022$;

b) $N(y) = y^2 - 7y + 6$;

c) $P(u) = 2u + 1$.

Lời giải:

a) Thay $x = 1$ vào đa thức $M(x)$, ta có: $M(1) = 2022.1^2 - 2022 = 0$.

Suy ra $x = 1$ là nghiệm của đa thức $M(x)$.

b) Thay $y = 1$ vào đa thức $N(y)$, ta có: $N(1) = 1^2 - 7.1 + 6 = 0$.

Suy ra $y = 1$ là nghiệm của đa thức $N(y)$.

c) Thay $u = 1$ vào đa thức $P(u)$, ta có: $P(1) = 2.1 + 1 = 3 \neq 0$.

Suy ra $u = 1$ không là nghiệm của đa thức $P(u)$.

Bài 2: Cho đa thức: $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$. Số nào sau đây là nghiệm của đa thức $P(x)$: 0; 1; -1; -3.

Lời giải:

+ Ta có: $P(0) = 0^3 + 2.0^2 - 3.0 = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

+ Tương tự: $P(1) = 1^3 + 2.1^2 - 3.1 = 0 \Rightarrow x = 1$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

+ $P(-1) = (-1)^3 + 2.(-1)^2 - 3.(-1) = 4 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ không phải là nghiệm của đa thức $P(x)$.

+ $P(-3) = (-3)^3 + 2.(-3)^2 - 3.(-3) = 0 \Rightarrow x = -3$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

Vậy các số: 0; 1; -3 là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Bài 3: Cho đa thức $P(x) = x^3 - x$. Trong các số sau: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$. Số nào là nghiệm của đa thức $P(x)$? Vì sao?

Lời giải:

+ $P(0) = P(-1) = P(1) = 0$ nên $x = 0; x = -1; x = 1$ là các nghiệm của $P(x)$.

+ $P(-2) = -6 \neq 0; P(2) = 6 \neq 0; P(-3) = -24 \neq 0; P(3) = 24 \neq 0$ nên $x = -2; x = 2; x = -3; x = 3$ không phải là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Bài 4: Cho đa thức $P(x) = x^2 + 5x + 6$. Chứng tỏ rằng $x = -2; x = -3$ là hai nghiệm của đa thức đó.

Lời giải:

Ta có: $P(-2) = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0;$

Ta có: $P(-3) = (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6 = 0.$

Vậy $x = -2; x = -3$ là các nghiệm của đa thức $P(x)$.

Bài 5: Tìm nghiệm của đa thức sau:

a) $A(x) = 2 + x;$

b) $B(y) = 2y^2 + 1;$

c) $C(x) = x^2 + 2x;$

d) $D(y) = x^2 - 2x + 1.$

Lời giải:

a) Ta có: $A(x) = 2 + x = 0 \Rightarrow x = -2.$

Vậy $x = -2$ là nghiệm của đa thức $A(x)$.

b) Ta có: $B(y) = 2y^2 + 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 = -1$ (vô lí vì $2y^2 \geq 0; -1 < 0$ với mọi số thực y).

Vậy đa thức $B(y)$ không có nghiệm.

c) Ta có: $C(x) = x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -2.$

Vậy đa thức $C(y)$ có nghiệm $x = 0; x = 2.$

d) Ta có: $D(y) = x^2 - 2x + 1 = 0. \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy đa thức $D(y)$ có nghiệm $x = 1.$

*** Mức độ thông hiểu**

Bài 6: Cho đa thức: $f(x) = (2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - 7x - 2)$

a) Thu gọn đa thức $f(x)$.

b) Chứng minh rằng -1 và -3 là các nghiệm của $f(x)$.

Lời giải:

a) $f(x) = (2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - 7x - 2) = x^2 + 4x + 3$

b) Ta có: $f(-1) = f(-3) = 0.$

Vậy -1 và -3 là các nghiệm của $f(x)$.

Bài 7: Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $(2x - 4)(x + 9);$

b) $(x + 1)(x - 1)(3 - 2x)$

Lời giải:

a) Ta có: $(2x - 4)(x + 9) = 0$. Khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ x + 9 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ x = -9 \end{cases}$

b) Ta có: $(x+1)(x-1)(3-2x)=0$ Khi và chỉ khi $\begin{cases} x+1=0 \\ x-1=0 \\ 3-2x=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$

Bài 12: Chứng tỏ rằng $x=1$ là nghiệm của cả ba đa thức sau:

$$f(x) = x^2 - 1;$$

$$g(x) = x^3 - 1;$$

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Lời giải:

Ta có: $f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x=1$ là một nghiệm của đa thức $f(x)$;

$g(1) = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x=1$ là một nghiệm của đa thức $g(x)$;

$h(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 0 \Rightarrow x=1$ là một nghiệm của đa thức $h(x)$.

Vậy $x=1$ là nghiệm của cả ba đa thức trên.

Bài 13: Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Chứng tỏ rằng:

a) Nếu $a+b+c+d=0$ thì $x=1$ là một nghiệm của $P(x)$.

b) Nếu $a+c=b+d$ thì $x=-1$ là một nghiệm của $P(x)$.

Lời giải:

a) Ta có: $P(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d = 0$.

Vậy $x=1$ là một nghiệm của $P(x)$.

b) Ta có: $a+c=b+d \Rightarrow -a+b-c+d=0$.

$$P(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = -a + b - c + d = 0.$$

Vậy $x=-1$ là một nghiệm của $P(x)$.

Bài 14: Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $x^2 + 4x + 3$;

b) $2x^2 + 5x + 3$

Lời giải:

a) Ta có: $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$x^2 + x + 3x + 3 = 0$$

$$x(x+1) + 3(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x+3) = 0.$$

Khi và chỉ khi $\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

Vậy đa thức $x^2 + 4x + 3$ có hai nghiệm $x = -1; x = -3$.

b) Ta có: $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$$2x^2 + 2x + 3x + 3 = 0$$

$$2x(x+1) + 3(x+1) = 0$$

$$(x+1)(2x+3) = 0$$

Khi và chỉ khi $\begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy đa thức $2x^2 + 5x + 3$ có hai nghiệm $x = -1; x = -\frac{3}{2}$.

Bài 15: Hãy xác định hệ số a và b để đa thức $f(x) = x^2 + 2ax + b$ nhận các số $0; 2$ làm nghiệm.

Lời giải:

Do $f(x)$ nhận $x=0$ là nghiệm nên thay $x=0$ vào $f(x)$, ta được: $f(0)=0^2+2a.0+b=0 \Rightarrow b=0$.

Do $f(x)$ nhận $x=2$ là nghiệm nên thay $x=2$ vào $f(x)$ ta được: $f(2)=2^2+2a.2+b=0$
 $\Rightarrow 4a+b=-4 \Rightarrow 4a+0=-4 \Rightarrow a=-1$.

Vậy $a=-1; b=0$ thì đa thức $f(x)=x^2+2ax+b$ nhận các số 0; 2 làm nghiệm.

*** Mức độ vận dụng cao**

Bài 16: Cho hai đa thức $P(x)=x^2$ và đa thức $Q(x)=4x-4$. Với giá trị nào của x thì $P(x)=Q(x)$?

Lời giải:

Ta có $P(x)=Q(x)$

Hay $x^2=4x-4$

$$x^2-4x+4=0$$

$$x^2-2x-2x+4=0$$

$$x(x-2)-2(x-2)=0$$

$$(x-2)(x-2)=0$$

$$(x-2)^2=0.$$

Khi và chỉ khi $x-2=0$ hay $x=2$

Vậy $x=2$ thì $P(x)=Q(x)$.

Bài 17: Cho hai đa thức $P(x)=x^3+3x^2+3x+1$ và đa thức $Q(x)=x^3+2x^2+8x-5$. Với giá trị nào của x thì $P(x)=Q(x)$?

Lời giải:

Ta có $P(x)=Q(x)$

Hay $x^3+3x^2+3x+1=x^3+2x^2+8x-5$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x^2-2x-3x+6=0$$

$$x(x-2)-3(x-2)=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

Khi và chỉ khi $\begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

Vậy $x=2$ hoặc $x=3$ thì $P(x)=Q(x)$.

Bài 18: Chứng tỏ đa thức sau không có nghiệm: x^2+x+2 .

Lời giải:

Biến đổi $f(x)$, ta có:

$$f(x)=x^2+x+2=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}$$

$$=x\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{4}$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}$$

Suy ra, với mọi $x \in R$, ta có $f(x) \neq 0$.

Vậy đa thức $f(x)$ không có nghiệm với mọi $x \in R$.

Bài 19: Hãy xác định hệ số a và b để đa thức $f(x) = x^2 + ax + b + 1$ nhận các số $0; -2$ làm nghiệm.

Lời giải:

Do $f(x)$ nhận $x = 0$ là nghiệm nên thay $x = 0$ vào $f(x)$, ta được $f(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$.

Do $f(x)$ nhận $x = -2$ là nghiệm nên thay $x = -2$ vào $f(x)$ ta được:

$$f(-2) = (-2)^2 + a \cdot (-2) + b + 1 = 0 \Rightarrow -2a + b = -5$$

$$\text{Hay } -2a + (-1) = -5 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2.$$

Vậy $a = 2; b = -1$ thì đa thức $f(x) = x^2 + ax + b + 1$ nhận các số $0; -2$ làm nghiệm.

Bài 20: Chứng minh rằng đa thức: $P(x) = -x^8 + x^5 - x^2 + x + 1$ không có nghiệm với mọi $x \in R$.

Lời giải:

$$\text{Ta có : } P(x) = x^5(1 - x^3) + x(1 - x) - 1$$

$$\text{Nếu } x \geq 1 \text{ thì } 1 - x^3 \leq 0; 1 - x \leq 0 \Rightarrow P(x) < 0$$

$$\text{Nếu } 0 \leq x \leq 1 \text{ thì } P(x) = -x^8 + x^2(x^3 - 1) + (x - 1) < 0.$$

$$\text{Nếu } x < 0 \text{ thì } P(x) < 0.$$

Vậy, $P(x)$ không có nghiệm với mọi $x \in R$.

Bài 21. Cho hai đa thức: $f(x) = (x-1)(x+2)$ và $g(x) = x^3 + a \cdot x^2 + bx + 2$. Xác định a, b biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f(x) = 0 \text{ nên } (x-1) \cdot (x+2) = 0 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{Vì nghiệm của đa thức } f(x) \text{ cũng là nghiệm của đa thức } g(x) \text{ nên } \begin{cases} g(1)=0 \\ g(-2)=0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } g(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow 1 + a + b + 2 = 0$$

$$\text{Hay } a + b + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 - b \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } g(-2) = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 2 = 0 \Rightarrow -8 + 4a - 2b + 2 = 0$$

$$4a - 2b - 6 = 0 \Rightarrow 2a - b - 3 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Thay } a = -3 - b \text{ vào (2) ta được: } 2 \cdot (-3 - b) - b = 3$$

$$-6 - 2b - b = 3$$

$$b = -3 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{Vậy } a = 0; b = -3.$$

Bài 22. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $x \cdot f(x+1) = (x+2) \cdot f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1 .

Lời giải:

$$\text{Với } x = 0 \text{ ta có } 0 \cdot f(1) = 2 \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ là một nghiệm của } f(x).$$

$$\text{Với } x = -2 \text{ ta có } (-2) \cdot f(-1) = 0 \cdot f(-2) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ là một nghiệm của } f(x).$$

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1 .

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Thu gọn và sắp xếp đa thức một biến.

Bài 1. Tìm đa thức một biến trong các biểu thức sau.

a) $A = 2x^2 + 3y + 5$.

b) $B = 2x^3 - x^2 + 5$.

c) $C = 5ax + x^3 - 1$ (a là hằng số)

d) $D = xyz - 2xy + 5$.

d) $E = 2x^2$

f) $F = \frac{3}{5}z$.

Bài 2. Thu gọn các đa thức sau rồi sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến

a) $P(x) = 2x^3 + 5x^4 + x^2 - x^3 - 3x^4 + 2022 + 3x^2 - x^3$

b)

$B(x) = 3x^4 + x^2 - 5 - 2x^3 + 4x^2 - 6x^4$

c) $C(x) = \frac{2}{3} - x^3 + 4x - 4x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

d) $D(x) = 2x^3 + x^2 - x - 2x^3 + 15$.

Bài 3. Thu gọn các đa thức sau rồi sắp xếp theo lũy thừa tăng dần của biến

$F(x) = 2x + 10(x^3 - 1) + 20x^6 - 5(x^7 + x^5) + 1,5x^4 - 10 + 6x$.

$G(x) = 2(x^3 + x^5) - 5x^7 - 7x^2 - 11x^3 + 2,5x^4 - 9 + 4,2x^2 + 1,5x^4 + 13x^8$

Dạng 2: Tìm bậc và các hệ số của một đa thức

Bài 1: Cho đa thức $3x^4 + x^2 - 5 - 2x^3 + 4x^2 - 6x^4$. Xác định bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức trên?

Bài 2: Thu gọn và sắp xếp hai đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến. Xác định rõ bậc, hệ số tự

do, hệ số cao nhất của $A(x)$ và $B(x)$.

$A(x) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^4 + 7x^3 + 3x - \frac{1}{4} - x + \frac{1}{3}$

$B(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + \frac{1}{12}$

Dạng 3: Tính giá trị của đa thức

Bài 1: Cho đa thức: $P(x) = x^2 - 4x + 4$. Tính giá trị biểu thức tại $x = 2$; $x = -1$; $x = \frac{1}{2}$.

Bài 2: Cho hai đa thức $F(x) = x + 3$ và $G(x) = 3x^3 - 2x + 4$. So sánh $F(0)$ và $G(1)$.

Bài 3: Tính giá trị của đa thức $x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{99}$ tại $x = 1$.

Bài 4: Giá trị của đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại $x = -1$, (a, b, c, d là hằng số).

Bài 5: Giá trị của đa thức $P(x) = 5.x^{100} + 5.x^{99} + 5.x^{98} + \dots + 5.x + 9$ tại $x = -1$.

Bài 6: Tính giá trị của đa thức $F(x) = 2x - x^2 - 2.(x+1)$ tại $x = -\frac{3}{2}$.

Bài 7: Tìm đa thức dạng $y = f(x) = ax + b$ biết rằng $f(-1) = -15$ và $f(2) = -9$.

Bài 8: Tìm các hệ số a, b, c, d của đa thức $B(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biết rằng

$$B(0) = 2; B(-1) = 2; B(1) = 8 \text{ và } a = 2c.$$

Dạng 4: Nghiệm của đa thức một biến.

Bài 1: Tìm nghiệm của đa thức:

a) Cho $M(x) = 2x^3$.

b) $N(x) = 2023x - 1$.

c) $F(x) = \frac{3}{8}x + 2 - \frac{1}{6}x$.

d) $G(x) = (1 + 7x)(5x^2 - 5)$.

Bài 2: Cho hai đa thức:

$$P(x) = -2x^3 - 7x + x^3 - x^2 + \frac{1}{2}; Q(x) = -x^2 + 2x^3 - 3x^2 - \frac{1}{4}$$

a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Chứng tỏ rằng $x = 0$ không là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Bài 3: Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in R$ và $a \neq 0$ nếu có nghiệm -1 thì $b = a + c$.

Bài 4: Có ba bể ứng ba vòi nước: vòi nước nhất đã có sẵn 100 lít nước; mỗi phút vòi thứ hai chảy được 30 lít, vòi thứ ba chảy được 40 lít.

a) Viết biểu thức tính lượng nước có trong cả ba bể trong x phút.

b) Tính lượng nước có trong ba bể trong 2 giờ.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Thu gọn và sắp xếp đa thức một biến.

Bài 1. Các đa thức một biến là.

b) $B = 2x^3 - x^2 + 5$.

c) $C = 5ax + x^3 - 1$ (a là hằng số)

d) $E = 2x^2$

f) $F = \frac{3}{5}z$.

Bài 2. Thu gọn đa thức các đa thức sau rồi sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến.

a) $P(x) = 2x^4 + 4x^2 + 2022$

b) $B(x) = -3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5$

c) $C(x) = -x^3 - 4x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{3}$

d) $D(x) = x^2 - x + 15$.

Bài 3. Thu gọn đa thức các đa thức sau rồi sắp xếp theo lũy thừa tăng dần của biến.

$$F(x) = 2x + 10x^3 - 10 + 20x^6 - 5x^7 - 5x^5 + 1,5x^4 - 10 + 6x.$$

$$F(x) = -10 + 8x + 10x^3 + 1,5x^4 - 5x^5 + 20x^6 - 5x^7$$

$$G(x) = 2x^3 + 2x^5 - 5x^7 - 7x^2 - 11x^3 + 2,5x^4 - 9 + 4,2x^2 + 1,5x^4 + 13x^8.$$

$$G(x) = -9 - 2,8x^2 - 9x^3 + 4x^4 + 2x^5 - 5x^7 + 13x^8$$

Dạng 2: Tìm bậc và các hệ số của một đa thức

Bài 1: Ta có: $3x^4 + x^2 - 5 - 2x^3 + 4x^2 - 6x^4 = -3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5$

Đa thức có bậc bằng 4, hệ số cao nhất bằng -3 , hệ số tự do của đa thức trên bằng -5 .

Bài 2:

Ta có: $A(x) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^4 + 7x^3 + 3x - \frac{1}{4} - x + \frac{1}{3}$

$$A(x) = 2x^4 + 5x^3 + 2x + \frac{1}{12}.$$

Đa thức $A(x)$ có bậc bằng 4, hệ số cao nhất bằng 2, hệ số tự do bằng $\frac{1}{12}$.

Ta có: $B(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + \frac{1}{12}$

$$B(x) = 4x^3 + x^2 - 2x + \frac{1}{12}.$$

Đa thức $B(x)$ có bậc bằng 3, hệ số cao nhất bằng 4, hệ số tự do bằng $\frac{1}{12}$.

Dạng 3: Tính giá trị của đa thức

Bài 1: Xét đa thức: $P(x) = x^2 - 4x + 4$.

Ta có: $P(2) = 2^2 - 4.2 + 4 = 0$.

$$P(-1) = (-1)^2 - 4.(-1) + 4 = 9.$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4.\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{9}{4}.$$

Bài 2: Xét hai đa thức $F(x) = x + 3$ và $G(x) = 3x^3 - 2x + 4$.

Ta có: $F(0) = 0 + 3 = 3$ và $G(1) = 3.1^3 - 2.1 + 4 = 5$.

Suy ra: $F(0) < G(1)$.

Bài 3: Xét đa thức $x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{99}$

Thay $x=1$ vào đa thức trên ta được: $1+1+1+1+\dots+1=50$

Bài 4: Xét đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là hằng số).

Thay $x=-1$ vào đa thức trên ta có: $a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = -a + b - c + d$.

Bài 5: Xét đa thức $P(x) = 5.x^{100} + 5.x^{99} + 5.x^{98} + \dots + 5.x + 9$.

Thay $x=-1$ vào đa thức $P(x)$, ta có: $P(-1) = 5.(-1)^{100} + 5.(-1)^{99} + 5.(-1)^{98} + \dots + 5.(-1) + 9$

$$P(-1) = 5 - 5 + 5 - 5 + \dots - 5 + 9 = 9$$

Bài 6:

Khi đó, $F(x) = 2x - x^2 - 2x - 2 \Rightarrow F(x) = -x^2 - 2$

$$\text{Suy ra: } F\left(\frac{-3}{2}\right) = -\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2 = -\frac{9}{4} - 2 = -\frac{17}{4}.$$

Bài 7:

Ta có $f(-1) = a(-1) + b = -a + b = -15 \Rightarrow b = a - 15$

$$f(2) = a \cdot 2 + b = -9 \text{ hay } 2a + b = -9$$

$$\text{Thay } b = a - 15 \text{ vào ta có } 2a + a - 15 = -9 \Rightarrow 3a = 6$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 2 - 15 = -13.$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2x - 13.$$

Bài 8:

$$B(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2 \text{ nên } d = 2.$$

$$B(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 2 = 8 \Rightarrow a + b + c = 6 \text{ mà } a = 2c \Rightarrow 3c + b = 6 \quad (1)$$

$$B(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + 2 = 2 \Rightarrow -a + b - c = 0$$

$$\text{mà } a = 2c \Rightarrow -3c + b = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$\text{Thay } b = 3 \text{ vào (1) ta có: } 3c + 3 = 6 \Rightarrow c = 1. \text{ Do } a = 2c \text{ nên } a = 2.$$

$$\text{Vậy đa thức là } B(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 2.$$

Dạng 4: Nghiệm của đa thức một biến

Bài 1: Tìm nghiệm của đa thức:

$$\text{a) Cho } M(x) = 2x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\text{Vậy đa thức } M(x) \text{ có nghiệm } x = 0.$$

$$\text{b) } N(x) = 2023x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2023}.$$

$$\text{Vậy đa thức } N(x) \text{ có nghiệm } x = \frac{1}{2023}.$$

$$\text{c) } F(x) = \frac{3}{8}x + 2 - \frac{1}{6}x = 0 \Rightarrow \frac{5}{24}x = -2 \Rightarrow x = -\frac{48}{5}$$

$$\text{Vậy đa thức } F(x) \text{ có nghiệm } x = -\frac{48}{5}.$$

$$\text{d) } G(x) = (1 + 7x)(5x^2 - 5) = 0 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} 1 + 7x = 0 \\ 5x^2 - 5 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy đa thức } G(x) \text{ có nghiệm } x = \pm 1; x = -\frac{1}{7}.$$

Bài 2:

a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức theo thứ tự giảm dần của biến:

$$P(x) = -2x^3 - 7x + x^3 - x^2 + \frac{1}{2} = (-2x^3 + x^3) - 7x - x^2 + \frac{1}{2} = -x^3 - x^2 - 7x + \frac{1}{2}.$$

$$Q(x) = -x^2 + 2x^3 - 3x^2 - \frac{1}{4} = (-x^2 - 3x^2) + 2x^3 - \frac{1}{4} = -4x^2 + 2x^3 - \frac{1}{4} = 2x^3 - 4x^2 - \frac{1}{4}.$$

$$\text{b) Ta có: } P(0) = -0^3 - 0^2 - 7 \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$$\text{Vậy } x = 0 \text{ không là nghiệm của đa thức } P(x).$$

Bài 3:

$$F(x) = ax^2 + bx + c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } a \neq 0 \text{ có nghiệm } -1 \text{ có nghĩa là:}$$

$$F(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \text{ hay } a - b + c = 0$$

Suy ra $b = a + c$ (đpcm)

Bài 4:

a) Biểu thức tính lượng nước có trong cả ba bể trong x phút là: $100 + x.(30 + 40)$ hay $100 + 70x$ (lít)

b) Lượng nước có trong ba bể trong 2 giờ là: $100 + 70.2.60 = 8500$ (lít)

PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1. Thu gọn và sắp xếp đa thức một biến.

Bài 1. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến
 $P(x) = -x^3 + x + x^3 - 2x + 1$.

Bài 2. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến
 $Q(x) = -x^2 + 2 - 3x^2 + 5x$.

Bài 3. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:
 $M(x) = -x^2 - 3 + 7x^2 - 2x$.

Bài 4. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:
 $N(y) = y^3 + 3y - y^2 + 2y$.

Bài 5. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:
 $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - x^3 + 2x - 1$.

* Mức độ thông hiểu

Bài 6. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến. Xác định các hạng tử của đa thức $E(u) = 3 - 2u + 5u^2 - 3u$.

Bài 7. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến. Xác định các hạng tử của đa thức $H = 3u^2 - 2u^5 + 2u^7 - 3u^2 - 5$.

Bài 8. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:
 $Q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3x^2 + 5x - 2$.

Bài 9: Cho đa thức $P(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - x^2 + 3x^4 + 4x^3 - 3$. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức $P(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.

Bài 10. Thu gọn và sắp xếp đa thức $B(x) = 3x - 5 + 4x^3 - 8x + 10$ theo lũy thừa giảm dần của biến.

* Mức độ vận dụng

Bài 11. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$G = \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2 - 2b^4 + \frac{4}{3}b^3 + \frac{5}{2}b^2 - 2$$

Bài 12. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến.

$$M(x) = -x^5 + 3x^2 - 3 + 7x^2 + x^5 - 2x$$

Bài 13. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến.

$$D(u) = 2u^3 + (2u^2)\left(\frac{3}{2}u\right) - 2u + 5$$

Bài 14. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến.

$$A = \frac{2}{3}a^3 - (15a^2)\left(\frac{3}{5}a^3\right) - 2a + 5a^3 - a^5$$

Bài 15. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 4x^3 + 6x + 8x - 2.$$

*** Mức độ vận dụng cao**

Bài 16. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$A(x) = 15x^4 - 8x^3 + 9x^4 + 5x^3 - 2x + 1 + 9x.$$

Bài 17. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$B(x) = \frac{4}{7}x^2 + \frac{5}{9}x^4 - x^2 + \frac{4}{9}x^4 - \frac{4}{7}x^3 - \frac{4}{7}x^2 - 2.$$

Bài 18. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$C(x) = 5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 2x^4 + 7x^2 - 9.$$

Bài 19. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$D(x) = 5x^3 - 7x^2 + 9x^4 - 2x^3 - 5x^4 + 8 - x.$$

Bài 20. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến:

$$Q(y) = 8y - 5y^4 + 7y^2 - 6y^3 + 9y^4 - 6y - 7y^2 + 5y^3 - 2.$$

Dạng 2: Tìm bậc và các hệ số của một đa thức.

*** Mức độ nhận biết**

Bài 1. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $B(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 4x^2 + 4.$

Bài 2. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $C(x) = 3x^2 - 2x + x^3.$

Bài 3. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $D(y) = 5y^5 - 2y^3 + y^4.$

Bài 4. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $E(y) = 5y^5 - 2y^3 + 3y^4 - 5y^5.$

Bài 5. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau:

$$G(y) = 5y^5 - 2y^3 + 3y^4 - 5y^5 + 2y^3 - 3y^4 + 2022.$$

*** Mức độ thông hiểu**

Bài 6: Cho đa thức: $P(x) = 7x^3 + 3x^4 - x^2 + 5x^2 - 6x^3 - 2x^4 + 2017 - x^3.$

a) Chỉ ra bậc của $P(x).$

b) Viết các hệ số của $P(x).$ Nêu rõ hệ số cao nhất và hệ số tự do.

Bài 7: Cho đa thức: $P(x) = 2 + 7x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - x^3 + 6x^5$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo lũy thừa giảm.

b) Viết các hệ số khác 0 của đa thức $P(x).$

c) Xác định bậc của đa thức, hệ số cao nhất, hệ số tự do.

Bài 8. Cho đa thức $f(x) = x + 7x^2 - 6x^3 + 3x^4 + 2x^2 + 6x - 2x^4 + 5.$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Xác định bậc của đa thức, hệ số tự do, hệ số cao nhất.

Bài 9. Tìm bậc mỗi đa thức sau:

a) $A = 2x^5 - 3x^4 + x^5 + 4x^4 - 3x^5$

b) $B = ax^3 + 4x^2 + 8x + 1$ (a là hằng số)

c) $C = mx^4 + x^4 - 1$ (m là hằng số)

Bài 10. Thu gọn và sắp xếp đa thức $E(x) = -2x^5 - 5ax + bx^2 + 3x^4 + \frac{x^3}{5} - 3x^2 - 1$ (a, b là các hằng số khác 0) theo lũy thừa giảm dần của biến rồi xác định các hệ số của đa thức trên.

*** Mức độ vận dụng**

Bài 11. Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau:

a) $A = 3x^2 + 7x^3 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2$; b) $B = 3x^2 + x - 3x^2 - 5$.

Bài 12. Cho đa thức: $A(x) = -2x^2 + 3x - x^4 + 5 + 3x^2 - 4x$;

a) Thu gọn, sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm của biến.

b) Xác định các hệ số của các đa thức

Bài 13. Cho đa thức: $B(x) = 3x - 5 + 4x^3 - 8x + 10$;

a) Thu gọn, sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa tăng dần của biến.

b) Xác định các hệ số của các đa thức

Bài 14. Cho đa thức: $C(x) = -3x^2 + 5 - 8x + 2x^4 + x^3 - 4$

a) Thu gọn, sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm của biến.

b) Xác định các hệ số của các đa thức.

Bài 15. Thu gọn và sắp xếp đa thức $A(x) = -2x^2 + 3x - x^4 + 5 + 3x^2 - 4x$ theo lũy thừa giảm dần của biến rồi xác định các hệ số của đa thức trên.

Bài 16. Ở Đà Lạt giá Táo là x (đồng/kg) và giá Nho gấp đôi giá Táo.

a) Hãy viết đa thức biểu thị số tiền khi mua 5 kg táo và 4 kg nho. Tìm bậc của đa thức đó.

b) Hãy viết biểu thức biểu thị số tiền khi mua 10 hộp táo và 10 hộp nho, biết mỗi hộp táo có 10 kg và mỗi hộp nho có 12 kg. Tìm bậc của đa thức đó.

Bài 17. Một hãng taxi quy định giá cước như sau: 1km đầu tiên giá 11 nghìn đồng. Từ kilômét thứ hai trở đi giá 10 nghìn đồng/ km.

a) Nếu người thuê xe taxi của hãng đó đi x km ($x > 1$). Hãy viết đa thức tính số tiền mà người đó phải trả?

b) Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức đó?

* Mức độ vận dụng cao

Bài 18: Với a, b, c là các hằng số, tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức:

$$A(x) = x^2 + (a+b)x - 5a + 3b + 2?$$

Bài 19. Cho đa thức $N = 4x^5 - 3x^4 + 7x^4 + ax^5$ (a là hằng số). Biết rằng bậc của đa thức N bằng 4. Tìm a ?

Bài 20. Cho đa thức $ax^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x^4 - 7x + 1$. Biết rằng đa thức này có bậc bằng 4 và a là số nguyên tố nhỏ hơn 5. Tìm a ?

Bài 21: Cho đa thức

$$A(x) = bx + (b-2)x^5 - (a-12)x^6 + 0,5ax^3 - 5x^2 - bx^3 + 4cx^4 - 10 + 11x^5 + 6x^6 + ax - c(x-1)$$

Viết đa thức dưới dạng thu gọn với các hệ số bằng số, biết rằng $A(x)$ có bậc là 5; hệ số cao nhất là 19 và hệ số tự do là -15.

Bài 22. Xác định đa thức bậc hai $Q(x) = ax^2 + bx + c$ biết rằng $Q(-1) = 6$; $Q(2) = 3$ và tổng các hệ số của đa thức bằng 0.

Dạng 3: Tính giá trị của đa thức.

* Mức độ nhận biết

Bài 1: Tính giá trị của đa thức $A(y) = 7y^2 - 3y + \frac{1}{2}$ tại $y = -2$.

Bài 2: Tính giá trị của đa thức $B(x) = -4x^5 - 3x - \frac{1}{2} + 7x^3 + 4x^5 + \frac{1}{2}$ tại $x = 5$;

Bài 3. Cho đa thức: $P(x) = 2x^3 + x^2 + 5 - 3x + 3x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 1$. Tính giá trị của $P(x)$ tại $x = 0$; $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho đa thức: $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 5 - 3x - 4x^2 + x^3 - 4x^2 - 3$. Tính $P(2)$.

Bài 5. Cho đa thức: $P(x) = -2x^4 - 7x - 2 + 3x^4 + 2x^2 - x$. Tính $P(-1)$.

*** Mức độ thông hiểu**

Bài 6. Cho đa thức: $Q(x) = 3x^3 + x^4 - 5x^2 - x^3 - 6x + 3$. Tính $Q(-2)$

Bài 7. Cho đa thức: $P(x) = x^3 - 2x^4 + 6x + 3 - 2x + 5$. Tính $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Bài 8. Cho đa thức: $Q(x) = ax^3 + 2x^4 - 5x^2 - 2x^3 - 6x + 3$ (a là hằng số). Tính $Q(1)$.

Bài 9. Cho đa thức: $B(x) = (a+1)x^3 + 2x^4 - 5ax^2 - 6x + 3a$ (a là hằng số). Tính $B(-1)$.

Bài 10. Cho đa thức: $B(x) = x^3 + 2x^4 - 5x^2 + 6x + 3$. Tính $B\left(\frac{1}{3}\right)$.

*** Mức độ vận dụng**

Bài 11. Cho đa thức: $B(x) = (2a+1)x^3 - 2x^4 + 6x + 3$. Tính $B\left(\frac{1}{2}\right)$.

Bài 12. Xác định đa thức bậc nhất $P(x) = ax + b$ biết rằng $P(-1) = 5$ và $P(-2) = 7$;

Bài 13: Cho đa thức: $P(x) = 2x^3 + x^2 + 5 - 3x + 3x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 1$

a) Thu gọn $P(x)$.

b) Tính giá trị của $P(x)$ tại $x = 0$; $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $P(x) = 0$; $P(x) = 1$.

Bài 14: Lan có 150 nghìn đồng tiết kiệm. Lan mua một bộ dụng cụ học tập hết 45 nghìn đồng và 10 quyển vở giá x nghìn đồng.

a) Hãy tìm đa thức (biến x) biểu thị số tiền còn lại (đơn vị: nghìn đồng). Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức đó.

b) Sau khi mua vở thì Lan còn dư 5 nghìn đồng. Hỏi giá tiền của mỗi quyển vở?

Bài 15: Cuối năm An nhận được phần thưởng là 100 nghìn đồng. An dùng số tiền này để mua một cuốn sách giáo khoa môn Toán 7 giá 20 nghìn đồng; mua bộ thước hết 10 nghìn đồng và mua một cuốn sách tham khảo môn Toán 7 với giá x nghìn đồng.

a) Hãy tìm đa thức biểu thị số tiền còn lại của An (đơn vị: nghìn đồng). Tìm bậc của đa thức đó.

b) Nếu sau khi mua An còn lại số tiền là 20 nghìn đồng thì hỏi giá tiền cuốn sách tham khảo là bao nhiêu?

*** Mức độ vận dụng cao**

Bài 16. Cho đa thức $M(x) = ax^4 + 6x - 4$. Tìm a biết $M(-2) = 3$

Bài 17. Cho biểu thức $A = 5x + 1$

a) Tính giá trị của A tại $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{9} = 1$

b) Tính giá trị của A tại $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) = 0$

Bài 18. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $f(0) = 2017$; $f(1) = 2018$; $f(-1) = 2019$. Tính $f(2)$.

Bài 19. Cho $P(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \dots + 2x^2 + x$. Tính $P(1)$.

Bài 20. Cho $P(x) = x^{99} - 100x^{98} + 100x^{97} - 100x^{96} + \dots + 100x - 1$. Tính $P(99)$.

Dạng 4: Nghiệm của đa thức một biến.

*** Mức độ nhận biết**

Bài 1: Kiểm tra xem 1 có phải là nghiệm của các đa thức sau không?

a) $M(x) = 2022x^2 - 2022$

b) $N(y) = y^2 - 7y + 6$

c) $P(u) = 2u + 1$

Bài 2: Cho đa thức: $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$. Số nào sau đây là nghiệm của đa thức $P(x)$: 0; 1; -1; -3.

Bài 3: Cho đa thức $P(x) = x^3 - x$. Trong các số sau: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. Số nào là nghiệm của đa thức $P(x)$? Vì sao?

Bài 4: Cho đa thức $P(x) = x^2 + 5x + 6$. Chứng tỏ rằng $x = -2$; $x = -3$ là hai nghiệm của đa thức đó.

Bài 5 : Tìm nghiệm của đa thức sau

a) $A(x) = 2 + x$

b) $B(y) = 2y^2 + 1$

c) $C(x) = x^2 + 2x$

d) $D(y) = x^2 - 2x + 1$

*** Mức độ thông hiểu**

Bài 6: Cho đa thức: $f(x) = (2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - 7x - 2)$

a) Thu gọn đa thức $f(x)$.

b) Chứng minh rằng -1 và -3 là các nghiệm của $f(x)$.

Bài 7: Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $(2x - 4)(x + 9)$;

b) $(x + 1)(x - 1)(3 - 2x)$

Bài 8: Chứng tỏ các đa thức sau không có nghiệm:

a) $x^2 + 1$;

b) $5x^2 + 3$;

c) $(x - 1)^2 + 0,1$.

Bài 9: Cho đa thức $P(x) = 2x + a - 1$ Tìm a để $P(x)$ có nghiệm:

a) $x = 0$;

b) $x = 1$

Bài 10: Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $(x - 5)(7 + x)$;

b) $(x^2 - 4)(4 - x)$

*** Mức độ vận dụng thấp**

Bài 11: Chứng tỏ $x = -1$ là nghiệm của cả ba đa thức sau:

$f(x) = x^2 - 1$

$g(x) = 1 + x^3$

$h(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Bài 12: Chứng tỏ rằng $x = 1$ là nghiệm của cả ba đa thức sau:

$f(x) = x^2 - 1$

$g(x) = x^3 - 1$

$h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Bài 13: Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Chứng tỏ rằng:

a) Nếu $a + b + c + d = 0$ thì $x = 1$ là một nghiệm của $P(x)$.

b) Nếu $a+c=b+d$ thì $x=-1$ là một nghiệm của $P(x)$.

Bài 14: Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) x^2+4x+3 ;

b) $2x^2+5x+3$

Bài 15: Hãy xác định hệ số a và b để đa thức $f(x)=x^2+2ax+b$ nhận các số $0; 2$ làm nghiệm.

*** Mức độ vận dụng cao**

Bài 16: Cho hai đa thức $P(x)=x^2$ và đa thức $Q(x)=4x-4$. Với giá trị nào của x thì $P(x)=Q(x)$?
 $P(x)=Q(x)$.

Bài 17: Cho hai đa thức $P(x)=x^3+3x^2+3x+1$ và đa thức $Q(x)=x^3+2x^2+8x-5$. Với giá trị nào của x thì $P(x)=Q(x)$?

Bài 18: Chứng tỏ đa thức sau không có nghiệm: x^2+x+2 .

Bài 19: Hãy xác định hệ số a và b để đa thức $f(x)=x^2+ax+b+1$ nhận các số $0;-2$ làm nghiệm.

Bài 20: Chứng minh rằng đa thức: $P(x)=-x^8+x^5-x^2+x+1$ không có nghiệm với mọi $x \in R$.

Bài 21. Cho hai đa thức: $f(x)=(x-1)(x+2)$ và $g(x)=x^3+ax^2+bx+2$. Xác định a, b biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

Bài 22. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $x.f(x+1)=(x+2).f(x)$
Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1 .

-----Hết-----