

CHUYÊN ĐỀ: ĐA THỨC LỚP 7

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH ĐA THỨC VÀ TÍNH GIÁ TRỊ

Bài 1: Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$, Xác định các hệ số a, b, c biết: $f(0) = 2$; $f(1) = 7$; $f(-2) = -14$

Bài 2: Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$, Xác định a, b, c biết: $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$ và a là số lớn hơn c ba đơn vị

Bài 3: Cho đa thức bậc hai: $P(x) = ax^2 + bx + c$, biết rằng P(x) thỏa mãn cả hai điều kiện sau:

$$P(0) = -2, 4P(x) - P(2x-1) = 6x-6, \text{ CMR: } a+b+c=0 \text{ và xác định đa thức } P(x)$$

Bài 4: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn: $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f(1) = 7$,

Xác định giá trị a, b, c và d

Bài 5: Xác định đa thức: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, biết: $P(0) = 2017$, $P(1) = 2$, $P(-1) = 6$, $P(2) = -6033$

Bài 6: Cho hàm số: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ cho biết $f(0) = 2010$, $f(1) = 2011$, $f(-1) = 2012$, Tính $f(-2)$

HD:

Theo gt ta có: $f(0) = 2010 \Rightarrow c = 2010$, $f(1) = 2011 \Rightarrow a + b + c = 2011 \Rightarrow a + b = 1$

và $f(-1) = 2012 \Rightarrow a - b + c = 2012 \Rightarrow a - b = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ khi đó hàm số có dạng

$$y = f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2010 \Rightarrow f(2) = 2017$$

Bài 7: Cho đa thức $G(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các hệ số)

a, Hãy tính $G(-1)$ biết $a+c=b-8$

b, Tìm a, b, c biết: $G(0) = 4$, $G(1) = 9$, $G(2) = 14$

Bài 8: Cho đa thức: $f(x) = x^2 - ax - 3$ và $g(x) = (x^3 - x^2 - x - a - 1)^{2015}$

a, Tìm a biết -1 là nghiệm của f(x)

b, Với a tìm được ở câu a, Tìm nghiệm còn lại của f(x) và tính g(2)

Bài 9: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ và biết $f(0) = 2014$, $f(1) = 2015$, $f(-1) = 2017$,

Tính $f(-2)$

HD:

Ta có: $f(0) = 2014 \Rightarrow c = 2014$

$$f(1) = 2015 \Rightarrow a + b + c = 2015 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f(-1) = 2017 \Rightarrow a - b + c = 2017 \Rightarrow a - b = 3$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -1, \text{ khi đó: } f(x) = 2x^2 - x + 2014 \Rightarrow f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 2014 = 2024$$

Bài 10: Xác định a, b, c để hai đa thức sau là hai đa thức sau đồng nhất:

$$A = ax^2 - 9x + 6x^2 - (4x^2 - 3x) \text{ và } B = 2x^2 - 3bx + c - 1$$

Bài 11: Xác định các hệ số a, b của đa thức: $f(x) = x^2 + ax + b$ trong mỗi trường hợp sau:

a, $f(0) = 4$ và f(x) nhận x = 1 là nghiệm của nó

b, Các nghiệm của đa thức $g(x) = (x+1)(x-2)$ cũng là nghiệm của f(x)

Bài 12: Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$, trong đó a, b, c là các hằng số

Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

Bài 13: Cho hai đa thức: $P(x) = x^2 + 2mx + m^2$ và $Q(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2$, Tìm m để

$$P(1) = Q(-1)$$

Bài 14: Cho hai đa thức: $p(x) = x^2 + 2mx + m^2$ & $q(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2$,

Tìm m biết rằng: $p(2) = q(-2)$

Bài 15: Cho hai biểu thức: $P(x) = x^3 - 2ax + a^2$, $Q(y) = y^2 + (3a+1)y + a^2$. Tìm số a sao cho $P(1) = Q(3)$

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x) = ax + 4$ có đồ thị đi qua điểm $A(a+1; a^2 - a)$

a, Tìm a

b, Với a vừa tìm được, tính giá trị của x thỏa mãn: $f(3x-1) = f(1-3x)$

HD:

a, Đồ thị hàm số $y = ax + 4$ đi qua điểm $A(a+1; a^2 - a)$ nên ta có: $a^2 - a = a(a+1) + 4$

$\Rightarrow a^2 - a = a^2 + a + 4 \Rightarrow a = -2$. Vậy $a = -2$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm A

b, Với $a = -2$ ta có hàm số $y = f(x) = -2x + 4 \Rightarrow f(3x+1) = -6x + 6$ và $f(1-3x) = 6x + 2$

$$\text{Để } f(3x-1) = f(1-3x) \Rightarrow -6x + 6 = 6x + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bài 17: Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$, Trong đó a, b, c là các hằng số,

Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

HD :

Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 - 4x + 8 = (a+4)x^3 - 4x + 8$

Và $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$

$$\text{Do } f(x) = g(x) \text{ nên ta có: } \begin{cases} a+4=1 \\ -4b=0 \\ c-3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3; b=0; c=11 \end{cases}$$

Bài 18: Tìm đa thức bậc hai sao cho: $f(x) - f(x-1) = x$. Áp dụng tính tổng: $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$

HD :

Vì đa thức là bậc hai nên có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Ta có: $f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$$\text{Và } f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{1}{2} \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + c$, c là hằng số

Áp dụng:

Với $x = 1 \Rightarrow f(1) - f(0) = 1$

Với $x = 2 \Rightarrow f(2) - f(1) = 2$

...

Với $x = n \Rightarrow f(n) - f(n-1) = n \Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4} + c - c = \frac{n(n+1)}{4}$

Bài 19: Cho đa thức $P(x)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, Biết rằng với mọi x ta đều có: $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$

Tính $f(2)$

HD:

$$\text{Ta có: } f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \quad (1) \text{ và } f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow 9f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Trừ từng vế của (2) cho (1) ta có: } 8f(2) = \frac{-13}{4}, \text{ do đó: } f(2) = \frac{-13}{24}$$

Bài 20: Cho $f(x) = x^{17} - 2015x^{16} + 2015x^{15} - 2015x^{14} + \dots + 2015x - 1$, Tính $f(2014)$

Bài 21: Cho đa thức:

$$f(x) = 4 - 4x^4 + 3x^2 + 6x + 4x^4 - 2x^2 - 2x, \text{ Tính giá trị của } f(x) \text{ khi } |x-1|=1$$

Bài 22: Tính giá trị của đa thức sau biết $x+y=0$

$$\text{a, } A = 2x = 2y + 3xy(x+y) + 5(x^3y^2 + x^2y^3) + 2$$

$$\text{b, } B = 3xy(x+y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 5$$

Bài 23: Cho $x^2 + y^2 = 1$, Tính giá trị của biểu thức: $P = 2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$

Bài 24: Tính giá trị của biểu thức: $N = xyz^2z^3 + x^2y^3z^4 + x^3y^4z^5 + \dots + x^{2014}y^{2015}z^{2016}$, tại $x=-1, y=-1, z=-1$

HD :

$$\text{Ta có } N = xyz.yz^2 + x^2y^2z^2.yz^2 + x^3y^3z^3.yz^2 + \dots + x^{2014}y^{2014}z^{2014}.yz^2$$

$$\text{Thay } y=-1, z=-1 \text{ vào ta được: } N = -xyz - x^2y^2z^2 - x^3y^3z^3 - \dots - x^{2014}y^{2014}z^{2014}$$

$$= -(xyz) - (xyz)^2 - (xyz)^3 - \dots - (xyz)^{2014}$$

$$\text{Thay } xyz=-1 \text{ vào ta được: } N = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = 0$$

Bài 25: Cho đa thức: $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 5(x-403)$. Tính giá trị của A khi $x=4$, Tìm x để $A=2015$

Bài 26: Cho đa thức: $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^{3z^2})$

a, Tìm bậc của A

b, Tính A nếu $15x-2y=1004z$

HD:

$$\text{Thu gọn } A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 = 2xyz(15x - 2y - 1004z)$$

Bài 27: Tính giá trị của biểu thức: $5x^2 + 6x - 2$ khi $|x-1|=2$

Bài 28: Tính giá trị của biểu thức: $x^5 - 2009x^4 + 2009x^3 - 2009x^2 + 2009x - 2010$ tại $x=2008$

Bài 29: Tính giá trị của biểu thức: $2x^5 - 5y^3 + 4$, biết $(x-1)^{20} + (y+2)^{30} = 0$

Bài 30: Cho đa thức: $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100}$,

a, CMR: $x=-1$ là nghiệm của $A(x)$

b, Tính giá trị của $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

HD:

a, $A(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots - 1 + 1 = 0$ nên -1 là nghiệm của A , hoặc

$$A(x) = x(x+1) + x^2(x+1) + \dots + x^{99}(x+1)$$

$$\text{b, Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$$

Bài 31: Tính giá trị của đa thức: $N = xyz^2z^3 + x^2y^3z^4 + x^3y^4z^5 + \dots + x^{2014}y^{2015}z^{2016}$, Tại $x = -1; y = -1; z = -1$

HD:

$$\text{Ta có: } = xyz.yz^2 + x^2y^2z^2.yz^2 + x^3y^3z^3.yz^2 + \dots + x^{2014}y^{2014}z^{2014}.yz^2$$

$$\text{Thay } y = -1; z = -1 \text{ vào ta được: } N = -xyz - x^2y^2z^2 - x^3y^3z^3 - \dots - x^{2014}y^{2014}z^{2014}$$

$$\text{Thay } xyz = -1 \Rightarrow N = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = 0$$

Bài 32: Cho biểu thức: $M = a.x + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Lương nói: Giá trị của biểu thức M tại $x=23$ là 2009

Mình nói: Giá trị của biểu thức M tại $x=18$ là: 1458

CMR trong hai bạn trên có ít nhất 1 bạn nói sai !

HD:

Giả sử cả hai bạn cùng đúng, ta có:

$$23a + b = 2009 \text{ và } 18a + b = 1458 \text{ do đó:}$$

$$(23a + b) - (18a + b) = 2009 - 1458 \Rightarrow 5a = 551 \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \text{ (Vô lý) vậy có ít nhất 1 bạn nói sai}$$

Bài 33: Tính giá trị của biểu thức : $B = 9x^{10} - 12x^7 + 6x^4 + 3x + 2010$, tại x thỏa mãn : $3x^9 - 4x^6 + 2x^3 + 1 = 0$

Bài 34: Cho đa thức: $B(x) = a.x^2 + bx + c$

a, Cho biết: $5a + b + 2c = 0$, CMR: $A(2).A(1) \leq 0$

b, Cho $A(x) = 0$ với mọi x, CMR: $a = b = c$

c, Nếu $13a - b + 2c = 0$ thì $f(2).f(-3) \leq 0$

Bài 35: Cho đa thức: $B(x) = a.x^2 + bx + c$

a, Cho biết $5a + b + 2c = 0$, CMR: $A(2).A(1) \leq 0$

b, Cho $A(x) = 0, \forall x$, Chứng minh rằng $a = b = c = 0$

Bài 36: Cho đa thức: $f(x) = a.x^2 + bx + c$

a, CMR nếu: $5a + b + 2c = 0$ thì $f(-1).f(2) \leq 0$

b, CMR: Nếu $13a - b + 2c = 0$ thì $f(2).f(-3) \leq 0$

Bài 37: Cho $P(x) = a.x^2 + bx + c$, CMR nếu: $5a + b + 2c = 0$ thì $P(2).P(-1) \leq 0$

HD:

$$\text{Ta có: } P(2) + P(-1) = 5a + b + 2c = 0 \Rightarrow P(2) = -P(-1) \text{ vậy } P(2).P(-1) \leq 0$$

Bài 38: Cho đa thức : $P(x) = a.x^2 + bx + c$, CMR nếu $5x - b + 2c = 0$ thì $P(1).P(-2) \leq 0$

HD :

$$\text{Ta có: } P(1) + P(-2) = a + b + c + 4a - 2b + c = 5a - b + 2c = 0 \text{ nên } P(1) = -P(-2)$$

Bài 39: Cho đa thức $f(x) = a.x^2 + bx + c$, $f(0), f(1), f(2)$ có giá trị nguyên, CMR:

a, $a+b+c, 2a, 2b$ đều là các số nguyên

b, $f(n)$ là số nguyên với mọi giá trị nguyên của n

Bài 40: Cho đa thức $f(x) = a.x^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên, biết rằng giá trị của $f(x):3$ với mọi giá trị nguyên của x, CMR a,b,c đều : cho 3

Bài 41: Cho $P = xyz - xy^2 - xz^2, Q = x^3 + y^3$, CMR: nếu $x-y=z$ thì $P+Q=0$

Bài 42: Cho đa thức bậc nhất : $f(x) = a.x + b$, Hãy tìm điều kiện của hằng số b để thỏa mãn hệ thức :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Bài 43: Cho đa thức $f(x) = a.x^2 + bx + c$ biết rằng $f(0), f(1), f(2)$ có giá trị nguyên, CMR:

a, $a+b+c, c, 2a, 2b$ đều là các số nguyên

b, $f(n)$ là số nguyên với mọi giá trị của n

Bài 44: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, Trong đó a, b, c là các số nguyên, biết rằng giá trị của $f(x)$ chia hết cho 3 với mọi giá trị của x , CMR a, b, c đều chia hết cho 3

Bài 45: Cho đa thức: $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{Z})$, Biết $Q(x)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên x , CMR: các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 3

Bài 46: Cho hàm số: $f(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Biết $f(1)$ chia hết cho 3, $f(0)$ chia hết cho 3, và $f(-1)$ cũng chia hết cho 3, CMR a, b, c đều chia hết cho 3

HD:

Ta có $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$, Vì $f(0) \vdots 3$ nên $c \vdots 3$, Vì $f(-1) \vdots 3$ nên $a+b+c \vdots 3 \Rightarrow a+b \vdots 3$ (1) và $f(1) \vdots 3$ nên $a+b+c \vdots 3 \Rightarrow a-b \vdots 3$ (2), Từ (1) và (2) nên $(a+b)+(a-b) \vdots 3 \Rightarrow 2a \vdots 3 \Rightarrow a \vdots 3 \Rightarrow b \vdots 3$

Bài 47: Cho $f(x) = -2010x$, CMR: $f(a+b) = f(a) + f(b)$

Bài 48: Cho đa thức: $a.x^2 + bx + c = 0$ với mọi giá trị của x , CMR: $a=b=c=0$

HD:

Vì đa thức $a.x^2 + bx + c = 0$ với mọi x , Ta cho x nhận các giá trị $x=0$, $x=1$ và $x=-1$
Ta có: $c=0$, $a+b+c=0$ và $a-b+c=0 \Rightarrow a=b=c=0$

Bài 49: Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$, CMR nếu $f(x)$ nhân 1 và -1 là nghiệm thì a và c là hai số trái dấu

HD:

Ta có 1 là nghiệm của $f(x)$ nên $f(1)=0$ hay $a+b+c=0$, và -1 là nghiệm nên $a-b+c=0$
Cộng theo về ta được: $2a+2c=0 \Rightarrow a=-c$, vậy a và c là hai số đối nhau

Bài 50: Cho $f(x) = a.x^2 + bx + c$ nhận giá trị nguyên với mọi giá trị nguyên của x , CMR: $2a$, $a+b$ và c là các số nguyên

HD:

Ta có: $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c \in \mathbb{Z}$ và $f(1) = a + b + c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$
 $f(2) = 4a + 2b + c \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2a + 2(a+b) + c \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2a \in \mathbb{Z}$

Bài 51: Cho đa thức $P(x) = a.x^3 + bx^2 + cx + d$ với $P(0)$ và $P(1)$ là 1 số lẻ, CMR: $P(x)$ không thể có nghiệm là 1 số nguyên

HD:

$P(0)=d$ lẻ và $P(1)=a+b+c+d$ lẻ, do đó $-P(1)$ là 1 số lẻ

Giả sử $P(x)$ có 1 nghiệm nguyên là m ta có $P(m)=0 \Rightarrow (am^3 + bm^2 + cm + d) - (a + b + c + d)$ lẻ
 $\Rightarrow a(m^3 - 1) + b(m^2 - 1) + c(m - 1)$ lẻ $\Rightarrow m$ chẵn $\Rightarrow P(m)$ lẻ, Điều này mâu thuẫn

Bài 52: Cho $f(x) = a.x^2 + bx + c$ có tính chất $f(1), f(4), f(9)$ là các số hữu tỉ, CMR khi đó a, b, c là các số hữu tỉ

HD:

$f(1) = a + b + c \in \mathbb{Q}$, $f(4) = 16a + 4b + c \in \mathbb{Q}$ và $f(9) = 81a + 9b + c \in \mathbb{Q}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (16a + 4b + c) - (a + b + c) = 15a + 3b = 3(5a + b) \in \mathbb{Q}$ do đó $5a + b \in \mathbb{Q}$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow (81a + 9b + c) - (16a + 4b + c) = 65a + 5b = 5(13a + b) \in \mathbb{Q} \Rightarrow 13a + b \in \mathbb{Q}$

Nên $(13a + 5b) - (5a + b) \in \mathbb{Q} \Rightarrow 8a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$

Khi $a \in \mathbb{Q}$ thì $b \in \mathbb{Q}$ và $c \in \mathbb{Q}$

Bài 53: Cho đa thức bậc hai thỏa mãn: $P(1) = P(-1)$, CMR: $P(x) = P(-x)$ với mọi x

HD :

Giải sử : $P(x) = a.x^2 + b.x + c$,

ta có : $P(1) = P(-1) \leftrightarrow a + b + c = a - b + c \leftrightarrow 2b = 0 \leftrightarrow b = 0$ Vậy $P(x) = a.x^2 + c$

Do vậy $P(-x) = a(-x)^2 + c = a.x^2 + c = P(x)$

Bài 54: Cho hàm số $f(x) = \frac{100^x}{100^x + 10}$, CMR : nếu a,b là hai số thỏa mãn : $a+b=1$ thì $f(a) + f(b) = 1$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } f(a) + f(b) &= \frac{100^a}{100^a + 10} + \frac{100^b}{100^b + 10} = \frac{100^a(100^b + 10) + 100^b(100^a + 10)}{(100^a + 10)(100^b + 10)} \\ &= \frac{2.100^{a+b} + 10(100^a + 100^b)}{100^{a+b} + 10(100^a + 100^b) + 100} = \frac{200 + 10(100^a + 100^b)}{200 + 10(100^a + 100^b)} = 1 \end{aligned}$$

Bài 55: Cho đa thức bậc 4 đối với biến x và $P(1)=P(-1)$, $P(2)=P(-2)$, CMR : $P(x)=P(-x)$ với mọi x

HD :

$P(x)$ là đa thức bậc 4 nên có dạng : $P(x) = a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e$

Ta có : $P(1)=P(-1)$ và $P(2)=P(-2) \Rightarrow d+b = -d-b \Leftrightarrow 2d+8b = -2d-8b \Rightarrow b=d=0$

Vậy $P(x) = a.x^4 + c.x^2 + d$ và $P(-x) = a.x^4 + c.x^2 + d = P(x)$

Bài 56: Cho đơn thức : $\left(19t + \frac{5}{t}\right)x^{1890}y^{2010}$, Tìm t thỏa mãn :

a, Đơn thức dương với mọi x,y khác 0

b, Âm với mọi x,y khác 0

HD :

$$\text{a, } \left(19t + \frac{5}{t}\right)x^{1890}y^{2010} = \frac{19t^2 + 5}{t} \cdot x^{1890}y^{2010} \text{ mà } 19t^2 + 5 > 0 \text{ và } x^{1890}y^{2010} > 0$$

Bài 57: Cho $A = 4mx^4y^2 + (-15x^4y^2) + mx^4y^2$, x và y khác 0. Với giá trị nào của m thì :

a, A dương với mọi x,y

b, A âm với mọi x,y khác 0

Bài 58: Cho đa thức: $P = 9x^2 - 7xy + 11y^2$ và $Q = -4x^2 + 7xy - 6y^2$, CMR P và Q không thể cùng có giá trị âm

HD :

Xét tổng hai đa thức $\Rightarrow$ Tổng luôn dương

Bài 59: Cho hai đa thức : $A = -13x^2 + 10xy + 3y^2$ và $B = 7x^2 - 5xy - y^2$, CMR: A và B không thể có cùng giá trị âm

Bài 60: Cho đa thức: $P(x) = ax^2 + bx + c$ và $6a + 2b = -3c$, CMR: Trong ba số $P(1)$, $P(2)$, $P(-1)$ có ít nhất một số không âm, ít nhất một số không dương

Bài 61: Cho đa thức: $P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$, CMR: $P(x)$ luôn dương với mọi giá trị của x thuộc $\mathbb{P}$

Bài 62: Cho hai đa thức: $M = 6x^2 + 3xy - 2y^2$ & $N = 3y^2 - 2x^2 - 3xy$, CMR không tồn tại giá trị nào của x và y để hai đa thức cùng có giá trị âm

Bài 63: Cho các đa thức : $A = 5x^2 + 6xy - 7y^2$, $B = -9x^2 - 8xy + 11y^2$ và $C = 6x^2 + 2xy - 3y^2$

CMR A ,B ,C không thể cùng âm

Bài 64: Cho các đa thức: $M = -6x^2 + 5xy - 13y^2$ và $N = x^2 - xy + 2y^2$, CMR: M, N không thể cùng có giá trị dương

Bài 65: Cho hai đa thức: $M = 6x^2 + 3xy - 2y^2$, $N = 3y^2 - 2x^2 - 3xy$ CMR không tồn tại giá trị nào của x và y để hai đa thức này có cùng giá trị âm

Bài 66: Cho hai đa thức : $A(x) = 4x^2 - 7x^3 + 5x^4 - 7$, $B(x) = 3x^2 - 3x^4 + 7x^3 + 9$, CMR trong hai đa thức trên có 1 đa thức có giá trị dương

HD:

Xét tổng bằng dương

Bài 67: Cho hai đa thức : $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ và $Q(x) = -5x^3 - 4x^2 + 9x + 5$, CMR: không tồn tại giá trị nào của x để đa thức P(x) và Q(x) cùng có giá trị không dương

HD:

Xét tổng bằng dương

Bài 68: Cho 3 đơn thức: $M = -5x^{19}y$, $N = 11xy^{12}$, $P = \frac{6}{5}x^2y^3$, CMR ba đơn thức này không thể có cùng giá trị dương

Bài 69: Cho hai đa thức: $M = 6x^2 + 3xy - 2y^2$ và $N = 3y^2 - 2x^2 - 3xy$ chứng minh rằng không tồn tại giá trị nào của x và y để hai đa thức cùng có giá trị âm

Bài 70: Cho đa thức $A = -4x^2 + 7xy - 6y^2$ và $B = 9x^2 - 7xy + 11y^2$, CMR A và B không thể cùng có giá trị âm

Bài 71: Cho $P = x^2 - 5xy + 2y^2$, $Q = -6x^2 + 5xy - 13y^2$, CMR: P và Q không thể có cùng giá trị dương

Bài 72: Cho đa thức : $P(x) = ax^2 + bx + c$ Cho biết $9a - b = -3c$, CMR : Trong ba số P(-1) ; P(-2) ; P(2) có ít nhất 1 số âm, ít nhất 1 số không dương

HD :

Ta có : $P(-1) + P(-2) + P(2) = 9a - b + 3c = 0$ do đó trong ít nhất ba số trên có 1 số không âm, ít nhất 1 số không dương

Bài 73: Tính tổng các hệ số của đa thức sau khi bỏ dấu ngoặc : $P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2008} (8x^2 + x - 10)^{2009}$

HD:

Sau khi bỏ ngoặc ta được : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với $n = 2.2008 + 2.2009$

Thay x=1, thì giá trị của $P(1)$ bằng tổng các hệ số của P(x)

Ta có $P(1) = (8.1^2 + 3.1 - 10)^{2008} (8.1^2 + 1 - 10)^{2009} = -1$

Bài 74: Tính tổng các hệ số của đa thức F(x) sau khi thu gọn:

$$f(x) = (1999x^2 - 2000x + 2)^{2011} \cdot (2002x^3 - 2003x^2 + 2005x - 2005)^{2008}$$

Bài 75: Tìm tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức:

$$(3 - 4x + x^2)^{2016} \cdot (3 + 4x + x^2)^{2019}$$

DẠNG 2. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Bài 1: Chứng minh rằng đa thức sau không có nghiệm với mọi x : $f(x) = x^{2016} - x^{2015} + x^2 - x + 1$

Bài 2: Chứng minh rằng đa thức: $f(x) = 5x^3 + 2x^4 - x^2 + 3x^2 - x^3 - x^4 + 1 - 4x^3$ không có nghiệm.

Bài 3: CMR đa thức $x^2 + x + 1$ không có nghiệm

Bài 4: CMR: đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm nếu: $x.f(x-2) = (x-4)f(x)$ với mọi x

Bài 5: CMR: đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm nếu: $(x-3)f(x) = (2x-1)f(x-2)$ với mọi x

Bài 6: CMR đa thức $P(x)$ có ít nhất hai nghiệm, biết: $(x-6)P(x) = (x+1)P(x-4)$

HD :

Vì $(x-6)P(x) = (x+1)P(x-4)$ với mọi x nên

Khi $x=6$ thì $(6-6)P(6) = (6+1)P(6-4) \Rightarrow 0 = 7P(2) \Rightarrow P(2) = 0 \Rightarrow 2$ là nghiệm của $P(x)$

Khi $x=-1$ thì $(-1-6)P(x) = (-1+1)P(-1-4) \Rightarrow -7P(-1) = 0 \Rightarrow P(-1) = 0$

$\Rightarrow -1$ là nghiệm của $P(x)$

Bài 7: Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $xP(x+2) = (x^2-9).P(x)$, CMR đa thức có ít nhất ba nghiệm

HD:

Xét $x=0$, $x=3$ và $x=-3$

Bài 8: Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện: $(x-5)P(x+4) = (x+3)P(x)$ CMR đa thức trên có ít nhất hai nghiệm

Bài 9: Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $xP(x+2) = (x-5)P(x)$, CMR đa thức có ít nhất hai nghiệm

Bài 10: Cho đa thức $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện $(x-1)Q(x+2) = (x^2-9)Q(x)$, CMR đa thức có ít nhất 3 nghiệm

Bài 11: Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $P(x) = a.P(1-x) = (a-1).x$ với mọi giá trị của x , biết $a \neq \{0; 1; -1\}$

Bài 12: Tìm 1 đa thức có bậc nhỏ nhất nhận 19; 5 và 2017 làm nghiệm

HD :

$A(x) = (x-19)(x-5)(x-2017)$

Bài 13: Tìm 1 đa thức có bậc nhỏ nhất nhận 1 ; 3 ; 5 ; ... ; 2019 làm nghiệm

Bài 14: Cho đa thức: $Q(x) = x^2 + mx - 12$ (m là hằng số). Tìm các nghiệm của $Q(x)$, biết rằng $Q(x)$ có 1 nghiệm là -3

Bài 15: Cho hàm số: $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), CMR không thể đồng thời có $f(17)=71$, $f(12)=35$

Bài 16: Xét hai đa thức $P(x) = x^2 + a.x + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ và $x_1; x_2$ là hai số khác nhau. CMR nếu $P(x)$ và $Q(x)$ cùng nhận $x_1; x_2$ làm nghiệm thì $P(x) = Q(x)$

HD :

Ta có: $x_1^2 + a.x_1 + b = x_1^2 + cx_1 + d = 0$

$x_2^2 + a.x_2 + b = x_2^2 + cx_2 + d = 0$ Nên $a(x_1 - x_2) = c(x_1 - x_2) \Rightarrow a = c$

Do đó: $a.x_1 + b = cx_1 + d$ và $a.x_2 + b = cx_2 + d \Rightarrow b = d$ Vậy $P(x) = Q(x)$

Bài 17: Cho đa thức: $q(x) = x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{x}{3}\right)$

a, Tìm bậc của $q(x)$

b, Tính $q\left(\frac{-1}{2}\right)$

c, CMR: đa thức $q(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên

Bài 18: Cho hàm số $y = f(x) \neq 0 (\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$, có tính chất $f(x_1; x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

Hãy CMR: a $f(1) = 1$ b, $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

Bài 19: Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, biết rằng với mọi x ta đều có:

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) = x^2, \text{ Tính } f(2)$$

HD:

$$\text{Ta có: } x = 2 \Rightarrow f(2) + 3 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$\text{Và } x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{47}{32}$$

Bài 20: Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $(x^2 - 5x) \cdot f(x - 2) = (x^2 + 3x + 2) \cdot f(x + 1)$, với mọi x

CMR: $f(x)$ có ít nhất 4 nghiệm.