

CUNG CHỨA GÓC

A. TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc a ($0^\circ < a < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = a$ là hai cung chứa góc a dựng trên đoạn AB .

Chú ý:

- Hai cung chứa góc a nói trên là hai cung tròn *đối xứng nhau* qua AB . Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.
- Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .

2. Cách vẽ cung chứa góc a

- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB ;
- Vẽ tia Ax tạo với AB một góc a ;
- Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- Vẽ cung $\widehat{AmB}$, tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .
Cung $\widehat{AmB}$ được vẽ như trên là *một cung chứa góc a* .

3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

Phần thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H .

Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T .

Từ đó đi đến kết luận quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H .

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Quỹ tích là cung chứa góc α

Phương pháp giải: Thực hiện theo ba bước sau:

Bước 1. Tìm đoạn cô định trong hình vẽ;

Bước 2. Nối điểm phải tìm với hai đầu đoạn thẳng cố định đó, xác định góc α không đổi;

Bước 3. Khẳng định quỹ tích điểm phải tìm là cung chứa góc α dựng trên đoạn cố định.

1.1. Cho tam giác ABC có BC cố định và góc A bằng 50° . Gọi D là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác. Tìm quỹ tích điểm D .

1.2. Cho tam giác ABC vuông tại A , có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm I khi điểm A thay đổi.

Dạng 2. Chứng minh nhiều điểm thuộc đường tròn

Phương pháp giải: Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là AB và cùng nhìn đoạn cố định AB dưới một góc không đổi.

2.1. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Gọi M là điểm chính giữa của cung AB . Trên cung AM lấy điểm N . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MB$, trên tia đối của tia NB lấy điểm E sao cho $NA = NE$, trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Chứng minh 5 điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

2.2. Cho I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh các điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn.

Dạng 3. Dựng cung chứa góc

Phương pháp giải: Thực hiện theo bốn bước sau:

Bước 1. Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB ;

Bước 2. Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α ;

Bước 3. Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .

Bước 4. Vẽ cung $\widehat{AmB}$, tâm O bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax . Cung $\widehat{AmB}$ được vẽ như trên là một cung chứa góc α .

3.1. Dựng một cung chứa góc 55° trên đoạn thẳng $AB = 3\text{cm}$.

3.2. Dựng tam giác ABC , biết $BC = 3\text{cm}$, $AB = 3,5\text{cm}$ và $\hat{A} = 50^\circ$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E , trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CE = CF$. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF . Tìm quỹ tích của điểm M khi E di động trên cạnh BC .

5. Cho tam giác ABCD vuông tại A, phân giác BF. Từ điểm I nằm giữa B và F vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB, BC lần lượt tại M và N. Vẽ đường trong ngoại tiếp tam giác BIN cắt AI tại D. Hai đường thẳng DN và BF cắt nhau tại E. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn;

b) Năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra BE vuông góc với CE.

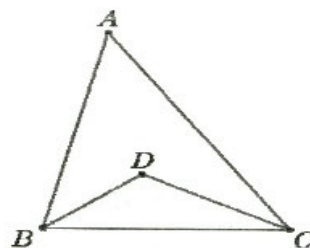
6. Dựng cung chứa góc 45° trên đoạn thẳng AB = 5cm.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1.1. Ta có $\widehat{A} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 130^\circ$

$$\widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 115^\circ$$

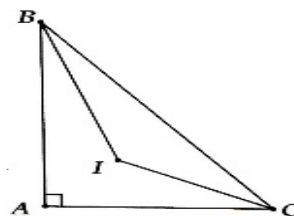
$\Rightarrow$ Quỹ tích của điểm D là hai cung chứa góc 115° dựng trên đoạn BC.



1.2. Tương tự 1.1.

Tính được $\widehat{BIC} = 135^\circ$

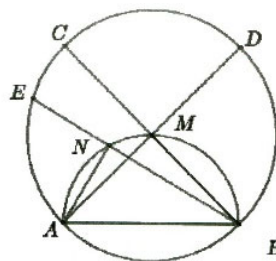
$\Rightarrow$ Quỹ tích của điểm I là hai cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC.



2.1. Các tam giác $\triangle ANE$, $\triangle AMC$ và $\triangle BMD$ vuông cân

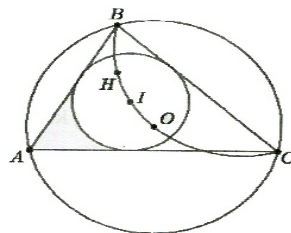
$$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 45^\circ$$

Mà AB cố định nên các điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.



2.2. Chứng minh được $\widehat{BIC} = 120^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $\Rightarrow \widehat{BHC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm)



Bước 3: Vẽ $Ay \perp Ax$ cắt d ở O;

$\widehat{AmB}$ là cung cần vẽ.

$$\widehat{CBF} + \widehat{BEM} = \widehat{MDF} + \widehat{DEC} = 90^0$$
$$\Rightarrow \text{BC là đường kính} \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$$

4. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ - THCS.TOANMATH.com

B.NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Kẻ cát tuyến MAB đi qua O và các tiếp tuyến MC, MD. Gọi K là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm B, C, M, K cùng thuộc một đường tròn.

b) MK vuông góc với AB.

Bài 2. Cho tam giác ABC đường cao AH, đường trung tuyến AM (H, M phân biệt và thuộc cạnh BC) thỏa mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Bài 3. Cho đường tròn tâm O và dây AB cố định (O không thuộc AB), P là điểm di động trên đoạn AB (P khác A, B). Qua A, P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với (O) tại A. Qua B, P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N (khác P).

a) Chứng minh: $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$

b) Chứng minh: $\widehat{PNO} = 90^\circ$

c) Chứng minh khi P di động thì N luôn nằm trên một cung tròn cố định.

Bài 4. Cho tam giác EFG có $\widehat{FEG}$ là góc tù. Xác định đường tròn có bán kính nhỏ nhất sao cho không có đỉnh nào của tam giác EFG nằm bên ngoài đường tròn.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và dây cung $BC = R\sqrt{3}$. Dựng điểm $A \in (O; R)$ sao cho tam giác ABC có $(AB + AC) \cdot AC = 3R^2$

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AB và AC. Gọi giao điểm của MN với AB và AC lần lượt là F và E. Chứng minh rằng:

a) Năm điểm A, M, B, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Ba đường thẳng AH, BE và CF đồng qui.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD. Lấy mỗi cạnh làm đường kính vẽ một nửa hình tròn vào trong tứ giác. Chứng minh rằng bốn nửa hình tròn đó phủ kín tứ giác.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Kẻ cát tuyến MAB đi qua O và các tiếp tuyến MC, MD. Gọi K là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm B, C, M, K cùng thuộc một đường tròn.

b) MK vuông góc với AB.

Lời giải

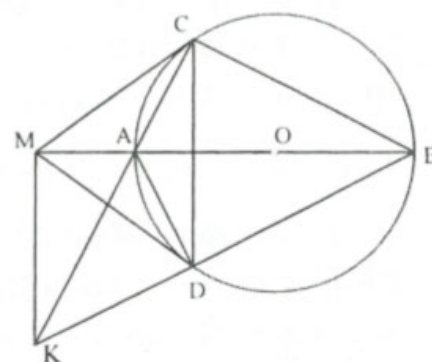
a) Dễ dàng chứng minh $AB \perp CD$ nên $\widehat{AC} = \widehat{AD}$

Do đó $\widehat{ACM} = \widehat{ABD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây và góc nội tiếp chắn hai dây cung bằng nhau)

Tức là $\widehat{KCM} = \widehat{KBM}$.

Tứ giác BCMK có các điểm B và C cùng nhìn KM dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểm B, C, M, K thuộc cùng một đường tròn.

b) Từ câu a suy ra $\widehat{BMK} = \widehat{BCK} = 90^\circ$. Vậy $KM \perp AB$.



Bài 2. Cho tam giác ABC đường cao AH, đường trung tuyến AM (H, M phân biệt và thuộc cạnh BC) thỏa mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$

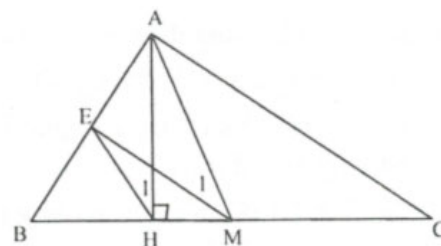
Lời giải

Gọi E là trung điểm AB.

Ta có $\widehat{H_1} = \widehat{BAH} = \widehat{MAC} = \widehat{M_1}$ nên bốn điểm A, M, H, E thuộc cùng một đường tròn.

Suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$

Do $EM \parallel AC$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$



Bài 3. Cho đường tròn tâm O và dây AB cố định (O không thuộc AB), P là điểm di động trên đoạn AB (P khác A, B). Qua A, P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với (O) tại A. Qua B, P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N (khác P).

a) Chứng minh: $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$

b) Chứng minh: $\widehat{PNO} = 90^\circ$

c) Chứng minh khi P di động thì N luôn nằm trên một cung tròn cố định.

Lời giải

a) Vì (O) và (C) tiếp xúc trong tại A nên A, C, O thẳng hàng.

Vì (O) và (C) tiếp xúc trong tại B nên B, D, O thẳng hàng.

Xét (C) có $\widehat{ANP} = \frac{1}{2} \widehat{ACP}$

Tam giác ACP cân tại C, tam giác AOB cân tại O nên suy ra: $\widehat{APC} = \widehat{ABO} (= \widehat{CPA}) \Rightarrow CP \parallel OB$

$$\widehat{ACP} = \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{ANP} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \quad (1)$$

Tương tự ta có $DP \parallel OA \Rightarrow \widehat{BDP} = \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{BNP} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$

b) Gọi H là giao điểm của NP và CD;

I là giao điểm của OP và CD.

Theo chứng minh trên ta có: $CP \parallel OB$; $DP \parallel CO$.

Suy ra tứ giác CPDO là hình bình hành.

Do đó $IO = IP$. (C) và (D) cắt nhau tại P và N suy ra $CD \perp NP \quad (3)$

$HN = HP$ do đó HI là đường trung bình của tam giác PNO nên: $HI \parallel NO$ hay $CD \parallel NO \quad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra: $NO \perp NP \Leftrightarrow \widehat{PNO} = 90^\circ$

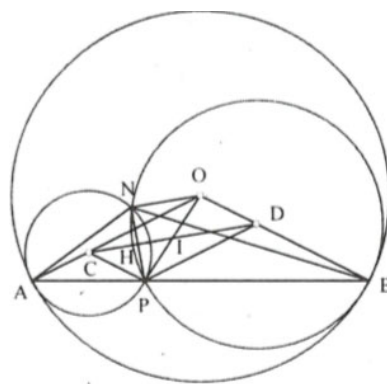
c) Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{ANB} = \widehat{ANP} + \widehat{PNB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AOB}$ (không đổi) Dễ thấy N, O thuộc nửa mặt phẳng bờ AB.

Suy ra điểm N thuộc cung chứa góc AOB dựng trên đoạn thẳng AB nên N thuộc cung tròn cố định.

Nhận xét. Dựa vào kết quả câu a, chúng ta chứng minh được: Khi P di động thì NP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho tam giác EFG có $\widehat{FEG}$ là góc tù. Xác định đường tròn có bán kính nhỏ nhất sao cho không có đỉnh nào của tam giác EFG nằm bên ngoài đường tròn.

Lời giải



Gọi O là trung điểm $FG \Rightarrow EO < FO = GO$

Xét đường tròn (O) đường kính FG Suy ra các đỉnh của tam giác EFG không nằm bên ngoài của (O).

Gọi (O; R) là đường tròn tùy ý sao cho các đỉnh của tam giác EFG không nằm bên ngoài của (O; R)

Suy ra F, G nằm trên hoặc nằm bên trong của (O; R) $\Rightarrow FG \leq 2R$

Vậy (J) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và dây cung $BC = R\sqrt{3}$. Dựng điểm $A \in (O; R)$ sao cho tam giác ABC có $(AB + AC) \cdot AC = 3R^2$

Lời giải

• Xét A thuộc cung lớn BC.

a) Phân tích. OD cắt (O) tại E, F và E nằm giữa O và D.

Giả sử dựng được A thuộc cung lớn BC sao cho $(AB + AC) \cdot AC = 3R^2$

Trên tia đối của tia AB lấy D sao cho $AD = AC; BC = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow BC$ là cạnh của tam giác đều nội tiếp (O; R)

$$\Rightarrow \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

$\triangle AFD \sim \triangle EBD$ (vì $\widehat{D}$ chung,

$$\widehat{AFD} = \widehat{EBD}) \Rightarrow \frac{DA}{DE} = \frac{DF}{DB} \Rightarrow DA \cdot DB = DE \cdot DF$$

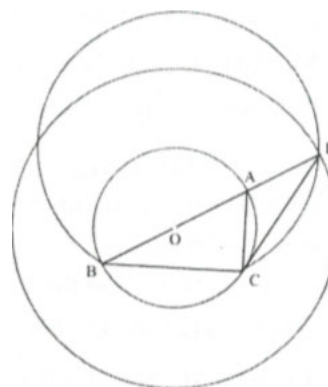
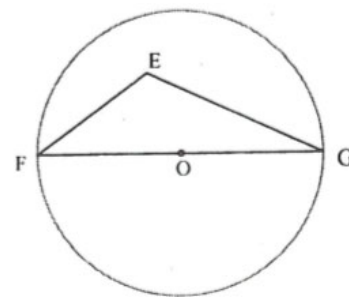
Mà $DA = AC; DB = AB + AD = AB + AC$

$$DE \cdot DF = (OD - OE)(OD + OF) = (OD - R)(OD + R) = OD^2 - R^2$$

$$\text{Do đó } (AB + AC) \cdot AC = 3R^2 \Leftrightarrow OD^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow OD^2 = 4R^2 \Leftrightarrow OD = 2R$$

Do đó D là giao điểm của (O; 2R) và cung chứa góc 30° dựng trên đoạn BC. D xác định được $\Rightarrow A$ xác định được.

b) Cách dựng.



- Dựng đường tròn $(O; R)$.

- Dựng cung chứa góc 30° dựng trên đoạn BC

Gọi D là giao điểm của $(O; 2R)$ và cung chứa góc trên.

Dựng đoạn thẳng BD; BD cắt $(O; R)$ tại A.

Chú ý: Có thể nhận ra rằng A là điểm đối xứng của B qua O.

c) Chứng minh.

Chứng minh được $DA \cdot DB = OD^2 - R^2 = 3R^2$ (Xem ở phần phân tích)

$$\widehat{BAC} = 60^\circ; \widehat{ADC} = 30^\circ$$

Do đó $\widehat{ACD} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. $\triangle ADC$ cân tại A (vì $\widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 30^\circ$)

$$\Rightarrow AD = AC. \text{ Do đó } (AB + AC) \cdot AC = (AB + AD) \cdot AD = BD \cdot DA = 3R^2$$

d) Biện luận.

Trên cung lớn BC có một điểm A sao cho $(AB + AC) \cdot AC = 3R^2$

• Bạn đọc hãy xét trường hợp điểm A nằm trên nhỏ cung BC.

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AB và AC. Gọi giao điểm của MN với AB và AC lần lượt là F và E. Chứng minh rằng:

a) Năm điểm A, M, B, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Ba đường thẳng AH, BE và CF đồng quy.

Lời giải

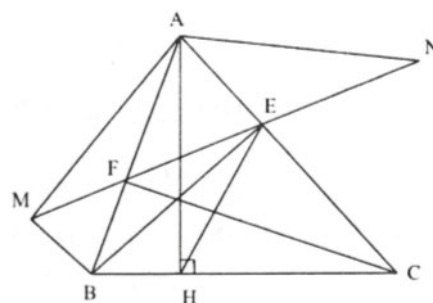
a) $\triangle AMB = \triangle AHB$ (c.c.c) nên $\widehat{AMB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$

Suy ra M, H cùng thuộc đường tròn đường kính AB (1)

Ta có $AM = AN$ ($= AH$) nên $\triangle AMN$ cân tại A do đó $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$

Mà $\triangle AEH = \triangle AEN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ANE} = \widehat{AHE}$

Suy ra $\widehat{AME} = \widehat{AHE}$, H và M là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn AE dưới một góc bằng nhau



$\Rightarrow A, M, H, E$ cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm A, M, B, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có A, M, B, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AEB} = 90^\circ$ hay $BE \perp AC$ (3)

Chứng minh tương tự ta có năm điểm A, F, H, C, N cùng thuộc một đường tròn đường kính AC nên $\widehat{AFC} = 90^\circ$ hay $CF \perp AB$. (4)

Từ (3) và (4) ta có BE, CF cùng là đường cao trong tam giác ABC nên AH, BE, CF đồng qui.

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$. Lấy mỗi cạnh làm đường kính vẽ một nửa hình tròn vào trong tứ giác. Chứng minh rằng bốn nửa hình tròn đó phủ kín tứ giác.

Lời giải

Ta chứng minh bằng phản chứng.

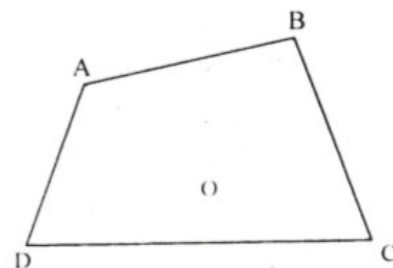
Giả sử O là điểm nằm trong tứ giác $ABCD$ mà không bị phủ bởi một nửa hình tròn nào.

Khi đó điểm O nằm ngoài cả bốn nửa hình tròn.

Do đó $\widehat{AOB} < 90^\circ; \widehat{BOC} < 90^\circ; \widehat{COD} < 90^\circ; \widehat{DOA} < 90^\circ$

Suy ra $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOA} < 360^\circ$ (vô lí)

Vậy bốn nửa hình tròn phủ kín cả tứ giác.



C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ

Câu 1. Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là.

A. Đường tròn đường kính AB .

B. Nửa đường tròn đường kính AB .

C. Đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$.

D. Đường tròn bán kính AB .

Câu 2. Đường tròn đường kính CD là quỹ tích của điểm nào dưới đây?

A. Quỹ tích các điểm P nhìn đoạn thẳng CD cho trước dưới một góc 60° . B. Quỹ tích các điểm N nhìn đoạn thẳng CD cho trước dưới một góc 45° .

C. Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng CD cho trước dưới một góc vuông.

D. Quỹ tích các điểm Q thuộc đường trung trực của CD .

Câu 3. Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn

$\widehat{AMB} = \alpha$ là:

- A. Hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB . Hai cung này không đối xứng nhau qua AB .
- B. Hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB và không lấy đoạn AB .
- C. Hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB . Hai cung này đối xứng nhau qua AB .
- D. Một cung chứa góc α dựng trên đoạn AB .

Câu 4. Cho tam giác ABC có BC cố định và góc A bằng 50° . Gọi D là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác. Tìm quỹ tích điểm D .

- A. Một cung chứa góc 115° dựng trên đoạn BC .
- B. Một cung chứa góc 115° dựng trên đoạn AC .
- C. Hai cung chứa góc 115° dựng trên đoạn AB .
- D. Hai cung chứa góc 115° dựng trên đoạn BC .

Câu 5. Cho tam giác ABC có BC cố định và góc A bằng 60° . Gọi D là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác. Tìm quỹ tích điểm D .

- A. Hai cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC .
- B. Một cung chứa góc 120° dựng trên đoạn AC .
- C. Hai cung chứa góc 60° dựng trên đoạn AB .
- D. Hai cung chứa góc 115° dựng trên đoạn BC .

Câu 6. Cho các hình thoi $ABCD$ có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường thẳng chéo nhau của hình thoi đó.

- A. Quỹ tích điểm O là 2 cung chứa góc 120° dựng trên AB .
- B. Quỹ tích điểm O là nửa đường tròn đường kính AB , trừ hai điểm A và B .
- C. Quỹ tích điểm O là 2 cung chứa góc 60° dựng trên AB .
- D. Quỹ tích điểm O là 2 cung chứa góc 30° dựng trên AB .

Câu 7. Cho các hình vuông $ABCD$ có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo của các hình vuông đó.

- A. Quỹ tích điểm O là 2 cung chứa góc 120° dựng trên AB .
- B. Quỹ tích điểm O là nửa đường tròn đường kính AB , trừ hai điểm A và B .
- C. Quỹ tích điểm O là 2 cung chứa góc 60° dựng trên AB .
- D. Quỹ tích điểm O là 2 cung chứa góc 30° dựng trên AB .

Câu 8. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Gọi M là điểm chính giữa của cung AB . Trên cung AM lấy điểm N . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MB$, trên tia đối của tia NB lấy điểm E sao cho $NA = NE$, trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Các điểm nào dưới đây thuộc một đường tròn?

- A. A, B, C, M, E .
- B. M, B, C, D, N .
- C. A, B, C, D, E .
- D. A, B, C, D, N .

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E , trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CE = CF$. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF . Tìm quỹ tích của điểm M khi E di động trên cạnh BC .

- A. Nửa đường tròn đường kính BD .
- B. Cung BC của đường tròn đường kính BD .
- C. Cung BC của đường tròn đường kính BD trừ điểm B, C .
- D. Đường tròn đường kính BD .

Câu 10. Cho tam giác ABC đều. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác đó sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

- A. Quỹ tích điểm M là hai cung chứa góc 150° dựng trên BC , trừ hai điểm B và C .
- B. Quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính BC .
- C. Quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính BC trừ hai điểm B và C .
- D. Quỹ tích điểm M là 2 cung chứa góc 150° dựng trên BC .

Câu 11. Cho tam giác ABC đều. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác đó sao cho $MB^2 = MA^2 + MC^2$.

- A. Quỹ tích điểm M là hai cung chứa góc 150° dựng trên BC , trừ hai điểm B và C .
- B. Quỹ tích điểm M là hai cung chứa góc 150° dựng trên AC , trừ hai điểm A và C .

C. Quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính BC trừ hai điểm B và C .

D. Quỹ tích điểm M là 2 cung chứa góc 150^0 dựng trên AC .

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác đó sao cho $2MA^2 = MB^2 - MC^2$.

A. Quỹ tích điểm M là cung chứa góc 135^0 dựng trên AC , trừ hai điểm A và C .

B. Quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính AC .

C. Quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính AC trừ hai điểm A và C .

D. Quỹ tích điểm M là cung chứa góc 135^0 dựng trên AC .

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông cân tại B . Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác đó sao cho $2MB^2 = MA^2 - MC^2$.

A. Quỹ tích điểm M là cung chứa góc 135^0 dựng trên BC .

B. Quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính BC .

C. Quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính BC trừ hai điểm B và C .

D. Quỹ tích điểm M là cung chứa góc 135^0 dựng trên BC , trừ hai điểm B và C .

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại I . Từ A kẻ các đường vuông góc với BC, CD, DB thứ tự tại H, E, K . Xét các khẳng định sau:

I. Bốn điểm A, H, C, E nằm trên một đường tròn.

II. Bốn điểm A, K, D, E nằm trên một đường tròn.

III. Bốn điểm A, H, K, B nằm trên một đường tròn.

IV. Bốn điểm K, I, E, H nằm trên một đường tròn.

Chọn khẳng định đúng.

A. Cả bốn khẳng định đều sai.

B. Cả bốn khẳng định đều đúng.

C. Có ít nhất một khẳng định sai.

D. Có nhiều nhất một khẳng định sai.

Câu 15. Cho đường tròn đường kính AB cố định, M là một điểm chạy trên đường tròn. Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = 2MB$. Quỹ tích các điểm I là:

A. Quỹ tích điểm I là 2 cung chứa góc 30^0 dựng trên AB .

B. Quỹ tích điểm I là 2 cung chứa góc a^0 dựng trên AB với $\tan a = 2$.

C. Quỹ tích điểm I là 2 cung chứa góc a^0 dựng trên AB với $\tan a = \frac{1}{2}$.

D. Quỹ tích điểm I là 2 cung chứa góc 60^0 dựng trên AB .

Câu 16. Cho tam giác ABC , gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, P là một điểm trong tam giác thỏa mãn $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$. Xét các khẳng định sau:

I. P nhìn đoạn BC dưới một góc $90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

II. I nhìn đoạn BC dưới một góc $90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Kết luận nào sau đây đúng?

A. Cả hai khẳng định đều sai.

B. Cả hai khẳng định đều đúng.

C. Chỉ có I đúng và II sai.

D. Chỉ có I sai và II đúng.

Câu 17. Cho tam giác ABC cân tại A , M là điểm trên cạnh đáy BC . Qua M kẻ các đường thẳng song song với hai cạnh bên cắt hai cạnh đó tại D và E . Gọi N là điểm đối xứng của M qua DE . Quỹ tích các điểm N là:

A. Quỹ tích các điểm N là cung chứa góc bằng $\widehat{BAC}$ dựng trên đoạn BC .

B. Quỹ tích các điểm N là cung chứa góc bằng $\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ dựng trên đoạn BC .

C. Quỹ tích các điểm N là cung chứa góc bằng $2\widehat{BAC}$ dựng trên đoạn BC .

D. Quỹ tích các điểm N là cung chứa góc bằng $180^0 - \widehat{BAC}$ dựng trên đoạn BC .

Câu 18. Cho đoạn thẳng AB cố định và điểm C di chuyển trên đường tròn tâm B bán kính BA . Dựng hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Tìm quỹ tích các điểm O khi C di chuyển trên đường tròn $(B; BA)$.

A. Quỹ tích điểm O là 2 cung chứa góc 120^0 dựng trên AB .

B. Quỹ tích điểm O là đường tròn đường kính AB

C. Quỹ tích điểm O là 2 cung chứa góc 60^0 dựng trên AB .

D. Quỹ tích điểm O là đường tròn đường kính AB , trừ hai điểm A và B .

Câu 19. Cho đoạn thẳng $AB = 10cm$, M là trung điểm của AB . Quỹ tích các điểm C trong mặt phẳng thỏa mãn tam giác ABC có $CA^2 + CB^2 = 100$ là:

A. Nửa đường tròn đường kính AB .

B. Đường tròn tâm M bán kính $10cm$.

C. Đường tròn tâm M bán kính $5cm$.

D. Đường tròn tâm M đường kính $5cm$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án A.

Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .

Câu 2. Đáp án C.

Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng CD cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính CD .

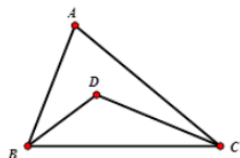
Câu 3. Đáp án C.

Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa

mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB .

Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB . Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.

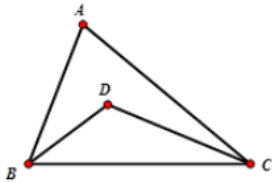
Câu 4. Đáp án D.



Ta có $\hat{A} = 50^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 130^\circ$ nên $\widehat{BDC} + \widehat{DBC} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 115^\circ$

Quỹ tích của điểm D là hai cung chứa góc 115° dựng trên đoạn BC .

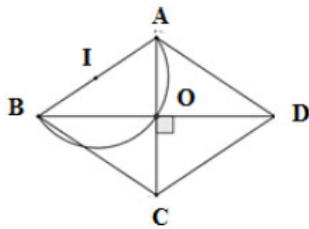
Câu 5. Đáp án A.



Ta có $\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 120^\circ$ nên $\widehat{BDC} + \widehat{DBC} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 120^\circ$

Quỹ tích của điểm D là hai cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC .

Câu 6. Đáp án B.



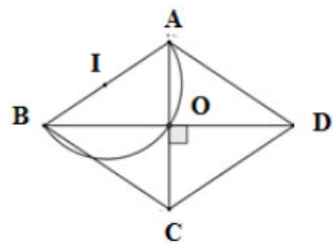
Xét hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Suy ra $AO \perp BO \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{AOB} = 90^\circ$ không đổi mà A, B cố định

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm O là nửa đường tròn đường kính AB trừ hai điểm A và B .

Câu 7. Đáp án B.

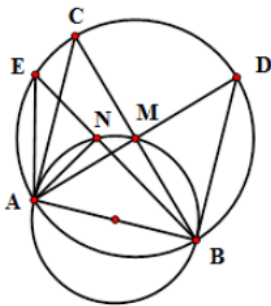


Xét hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Suy ra $AO \perp BO \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{AOB} = 90^\circ$ không đổi mà A, B cố định $\Rightarrow$ Quỹ tích điểm O là nửa đường tròn đường kính AB trừ hai điểm A và B .

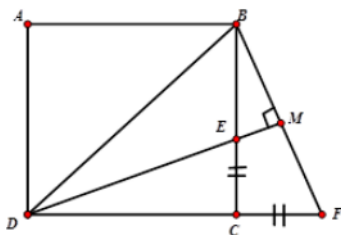
Câu 8. Đáp án C.



Các tam giác $\triangle ANE, \triangle AMC, \triangle BMD$ lần lượt vuông cân tại N, M, M

nên $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 45^\circ$ Mà AB cố định nên các điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Câu 9. Đáp án B.

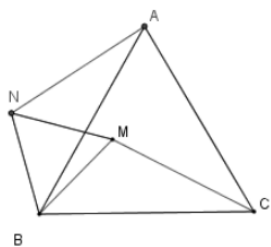


Ta có $\triangle DEC = \triangle BFC (c - g - c) \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{EBM}$

$\Rightarrow \widehat{EDC} + \widehat{DEC} = \widehat{EBM} + \widehat{BEM} \Rightarrow \widehat{EMB} = 90^\circ$

Hay $\widehat{BMD} = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn đường kính BD . Mà $E \in BC$ nên quỹ tích của điểm M là cung BC của đường tròn đường kính BD .

Câu 10. Đáp án A.



Vẽ tam giác BMN đều (N khác phía CC đối với BM).

Xét $\triangle BNA$ và $\triangle BMC$ có:

$BN = BM$ (vì tam giác BMN đều)

$BA = BC$ (vì tam giác ABC đều)

$\widehat{NBA} = \widehat{MBC}$ (vì cùng bằng $60^\circ - \widehat{ABM}$)

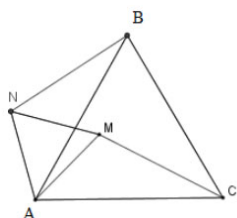
Suy ra $\triangle BNA = \triangle BMC$ (c.g.c) nên ta có $NA = MC$.

Ta có: $MA^2 = MB^2 + MC^2 = MN^2 + NA^2$ nên $\widehat{MNA} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{BNA} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, do đó $\widehat{BMC} = \widehat{BNA} = 150^\circ$.

B, C cố định $\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M là hai cung chứa góc 150° dựng trên BC , trừ hai điểm B và C .

Câu 11. Đáp án B.



Vẽ tam giác AMN đều (N khác phía C đối với AM).

Xét $\triangle BNA$ và $\triangle AMC$ có:

$AN = AM$ (vì tam giác AMN đều)

$BA = BC$ (vì tam giác ABC đều)

$\widehat{NAB} = \widehat{MAC}$ (vì cùng bằng $60^\circ - \widehat{BAM}$)

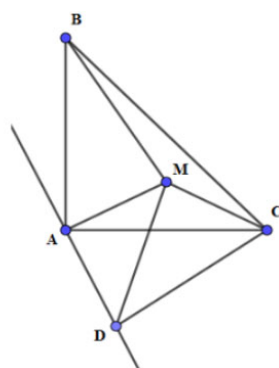
Suy ra $\triangle ANB = \triangle AMC$ (c.g.c) nên ta có $NB = MC$.

Ta có: $MB^2 = MA^2 + MC^2 = MN^2 + NB^2$ nên $\widehat{MNB} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{BNA} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, do đó $\widehat{AMC} = \widehat{BNA} = 150^\circ$

B, C cố định $\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M là hai cung chứa góc 150° dựng trên AC , trừ hai điểm A và C .

Câu 12. Đáp án A.



Vẽ tam giác MAD vuông cân tại A (M và D khác phía đối với AC).

Xét $\triangle BAM$ và $\triangle CAD$ có:

$AM = AD$ (vì tam giác MAD vuông cân tại A)

$BA = AC$ (vì tam giác ABC vuông cân tại A)

$$\widehat{MAB} = \widehat{CAD} \text{ (vì cùng bằng } 90^\circ - \widehat{MAC} \text{)}$$

Suy ra $\triangle BAM = \triangle CAD (c - g - c)$ nên ta có $BM = CD$.

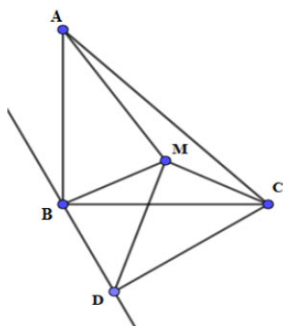
$$\text{Ta có: } 2MA^2 = MB^2 - MC^2$$

$$\Rightarrow 2MA^2 + MC^2 = MB^2 \Rightarrow \left(MA\sqrt{2}\right)^2 + MC^2 = CD^2 \Rightarrow MD^2 + MC^2 = CD^2$$

nên $\widehat{DMC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AMC} = 135^\circ$.

Mà A, C cố định $\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M là cung chứa góc 135° dựng trên AC , trừ hai điểm A và C .

Câu 13. Đáp án D.



Vẽ tam giác MBD vuông cân tại B (M và D khác phía đối với BC).

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle CBD$ có:

$$BM = BD \text{ (vì tam giác } MBD \text{ vuông cân tại } B \text{)}$$

$$BA = BC \text{ (vì tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } B \text{)}$$

$$\widehat{MBA} = \widehat{CBD} \text{ (vì cùng bằng } 90^\circ - \widehat{MBC} \text{)}$$

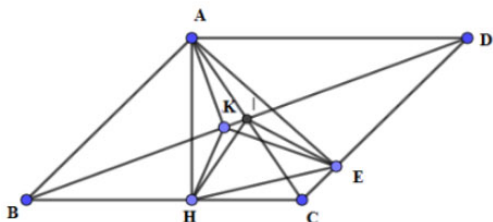
Suy ra $\triangle ABM = \triangle CBD (c - g - c)$ nên ta có $AM = CD$.

$$\text{Ta có: } 2MB^2 = MA^2 - MC^2$$

$$\Rightarrow 2MB^2 + MC^2 = MA^2 \Rightarrow \left(MB\sqrt{2}\right)^2 + MC^2 = CD^2 \Rightarrow MD^2 + MC^2 = CD^2$$

nên $\widehat{DMC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{BMD} + \widehat{DMC} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ Mà B, C cố định $\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M là cung chứa góc 135° dựng trên BC , trừ hai điểm B và C .

Câu 14. Đáp án B.



$AH \perp BC, AE \perp CD \Rightarrow$ bốn điểm A, H, C, E nằm trên đường tròn đường kính AC , I là trung điểm của $AC \Rightarrow I$ là tâm đường tròn đường kính AC

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{HIE} &= 2\widehat{HAE} = 2(90^\circ - \widehat{ACB} + 90^\circ - \widehat{ACE}) \\ &= 2(180^\circ - \widehat{BCD})(\widehat{HAC} + \widehat{EAC}) \end{aligned}$$

Lại có $AH \perp BC, AK \perp BD, AE \perp CD$ nên bốn đỉnh A, K, E, D nằm trên đường tròn đường

kính AD và bốn đỉnh A, K, H, B nằm trên đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \widehat{EKD} = \widehat{EAD}$

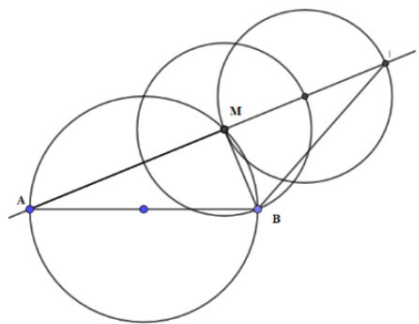
và $\widehat{BKH} = \widehat{BAH}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{HKE} &= 180^\circ - \widehat{EKD} - \widehat{BKH} = 180^\circ - \widehat{EAD} - \widehat{BAH} \\ &= 90^\circ - \widehat{EAD} + 90^\circ - \widehat{BAH} = \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 2(180^\circ - \widehat{BCD}) \end{aligned}$$

Suy ra K và I cùng nhìn đoạn HE dưới một góc $2(180^\circ - \widehat{BCD})$.

Vậy K, I, E, H nằm trên một đường tròn.

Câu 15. Đáp án C.



Tam giác AMB vuông tại M , ta $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Mặt khác ta có: $\widehat{AMB} + \widehat{IMB} = 180^\circ$, suy

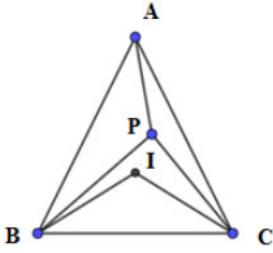
ra $\widehat{IMB} = 90^\circ$ hay tam giác BMI vuông tại M Trong tam giác vuông BMI ta

$$\text{có } \tan \widehat{MIB} = \frac{MB}{MI} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\widehat{MIB} = a^\circ$ không đổi hay $\widehat{AIB} = a^\circ$ không đổi.

Mà A, B cố định $\Rightarrow$ Quỹ tích điểm I là 2 cung chứa góc a° dựng trên AB với $\tan a = \frac{1}{2}$.

Câu 16. Đáp án B.



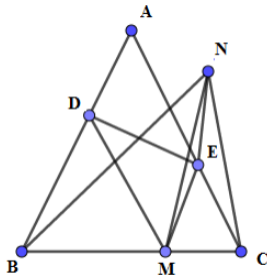
Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{PBA} + \widehat{PCA} &= \widehat{PBC} + \widehat{PCB} \Rightarrow \widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = 2(\widehat{PBC} + \widehat{PCB}) \\ \Rightarrow 2(\widehat{PBC} + \widehat{PCB}) &= \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow 2(180^\circ - \widehat{BPC}) = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \widehat{BAC} \\ \Rightarrow \widehat{BPC} &= 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC}.\end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$$

Suy ra P và I luôn nhìn đoạn BC về cùng một phía dưới cùng một góc $90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Câu 17. Đáp án A.



$$\text{Ta có } MD \parallel AC, ME \parallel AB \Rightarrow \widehat{BDM} = \hat{A} = \widehat{MEC} \Rightarrow DB = DM, EC = EM.$$

$$M, N \text{ đối xứng nhau qua } DE \Rightarrow DN = DM; EM = EN.$$

$\Rightarrow D$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN

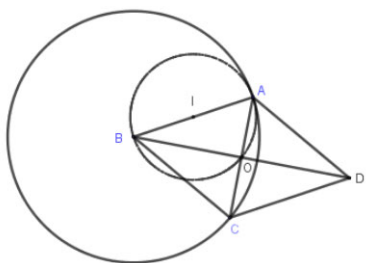
$$\Rightarrow \widehat{BNM} = \frac{1}{2}\widehat{BDM} = \frac{1}{2}\hat{A} \text{ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung } BM).$$

Tương tự, E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN .

$$\Rightarrow \widehat{MNC} = \frac{1}{2}\widehat{MEC} = \frac{1}{2}\hat{A} \Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BNM} + \widehat{MNC} = \hat{A}$$

Suy ra N nhìn đoạn BC dưới một góc bằng $\widehat{BAC}$ không đổi.

Nên quỹ tích các điểm N là cung chứa góc bằng $\widehat{BAC}$ dựng trên đoạn BC .

Câu 18. Đáp án B

Do $ABCD$ là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi, do đó hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O

Suy ra $AO \perp BO \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{AOB} = 90^\circ$ không đổi, A, B cố định $\Rightarrow$ Quỹ tích điểm O là đường tròn đường kính AB .

Nếu $C \equiv A$ thì $O \equiv A$ nên A thuộc quỹ tích.

Nếu C đối xứng với A qua B thì $O \equiv B$.

Vậy hai điểm A, B cũng thuộc quỹ tích.

Câu 19. Đáp án C.

Vì $CA^2 + CB^2 = 100 = AB^2$ nên $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại C hay điểm

C luôn nhìn đoạn AB một góc 90° .

Do đó quỹ tích các điểm C là đường tròn đường kính $AB = 10cm$ hay đường tròn tâm M bán kính $5cm$.

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Bài 1: Cho ba điểm cố định M, N, P không thẳng hàng. Tìm quỹ tích các đỉnh của tam giác đều có các cạnh theo thứ tự đi qua M, N, P .

Bài 2: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . C là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn. Trên tia AC lấy D sao cho $AD = BC$. Tìm tập hợp các điểm D .

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$; BC là một dây cung cố định ($BC \neq 2R$). A là điểm chuyển động trên cung lớn BC . Xác định vị trí của A để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Bài 4: Cho đường tròn $(O; R)$; BC là một dây cung cố định. A là điểm chuyển động trên cung lớn BC . I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Xác định vị trí của A để chu vi tam giác IBC lớn nhất.

Bài 5: Dựng tam giác ABC biết bán kính đường tròn ngoại tiếp R , bán kính đường tròn nội tiếp r và $C = \alpha$.

Bài 6: Dựng hình thang $ABCD$ biết bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Độ dài đáy $CD = 1$ và góc tạo bởi hai đường chéo là α .

Bài 7: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, gọi H là trực tâm, I và O là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC , đồng thời AH bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh ba điểm O, H, I nằm trên cùng một đường thẳng và nhìn về một phía của BC dưới góc 120°

Bài 8: Cho nửa đường tròn đường kính AB , dây MN có độ dài bằng bán kính R

của đường tròn, M thuộc cung AN . Các tia AM và BN cắt nhau ở I , dây

AN và BM cắt nhau ở K . Với vị trí nào của dây MN thì diện tích tam giác

IAB lớn nhất? Tính diện tích đó theo bán kính R .

HƯỚNG DẪN

Bài 1:

a) *Phần thuận:*

Gọi A, B, C là các đỉnh của một tam giác đều có các cạnh đi qua ba điểm M, N, P .

Rõ ràng $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$ hay $\widehat{PAM} = \widehat{MBN} = \widehat{NCP} = 60^\circ$. Ta thấy điểm A nhìn đoạn thẳng cố định MP dưới một góc không đổi bằng 60° .

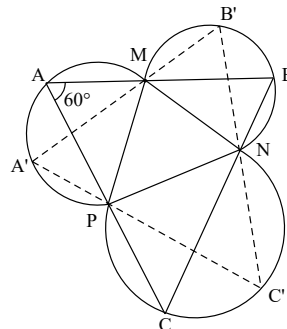
Do đó A thuộc cung chứa góc 60° dựng

trên đoạn thẳng MP . Chứng minh tương

tự ta có B thuộc cung chứa góc

60° dựng trên đoạn thẳng MN và C

thuộc cung chứa góc 60° nhận NP làm dây cung.



b) *Phần đảo:*

Lấy một điểm A bất kỳ thuộc cung $\widehat{MAP}$

Nối AM cắt cung $\widehat{MBN}$ tại B' . Các đường $A'P$ và $B'N$ cắt nhau tại C' . Ta thấy: A' thuộc cung

$\widehat{MAP}$ có số đo bằng 60° . Tương tự B' thuộc cung $\widehat{MBN}$ nên có số đo bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$. Do đó C'

nằm trên cung chứa góc 60° dựng trên đoạn thẳng NP , do đó $\Delta A'B'C'$ là tam giác đều.

Kết luận:

Quĩ tích các đỉnh của tam giác đều ABC có các cạnh đi qua ba điểm M, N, P cho trước là ba cung chứa các góc 60° phía ngoài tam giác MNP .

Bài 2:

a) *Phần thuận:*

vẽ tia tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn (O) , tia Ax

nằm trên nửa mặt phẳng bờ Ab có chứa nửa đường

tròn (O) , trên tia Ax lấy ba điểm E sao cho

$$AE = AB \Rightarrow E \text{ cố định.}$$

Xét ΔABC và ΔEAD có:

$$\widehat{AB} = \widehat{AE}, \widehat{ABC} = \widehat{EAD}$$

(hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$$BC = AD$$

Do đó: $\Delta ABC = \Delta EAD$ (c.g.c)

$$\text{Suy ra: } \widehat{ACB} = \widehat{EDA}$$

Mà $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Do đó: $\widehat{EDA} = 90^\circ$, AE cố định.

Vậy D thuộc đường tròn cố định đường kính AE .

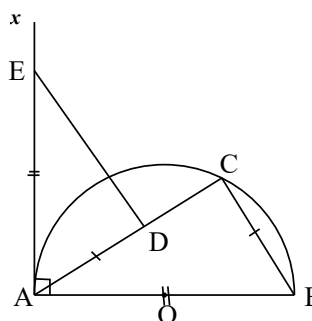
- Giới hạn:

Khi $C \equiv A$ thì $D \equiv E$

Khi $C \equiv B$ thì $D \equiv A$

Vậy D chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AE nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ax có chứa điểm B (loại trừ A).

b) *Phần đảo:*



Lấy điểm D bất kỳ thuộc nửa đường tròn bán kính AE ($D \neq A$), AD cắt (O) tại C .

Ta có: $\widehat{ADE} = 90^\circ$,

$\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle ABC$ ($\widehat{C} = 90^\circ$) và $\triangle EAD$ ($\widehat{D} = 90^\circ$)

Ta có: $AE = AB, \widehat{ABC} = \widehat{EAD}$

Do đó: $\triangle ABC = \triangle EAD$

Suy ra: $BC = AD$

Vậy tập hợp các điểm D là nửa đường tròn đường kính AE (trừ A)

(với E thuộc tia tiếp tuyến Ax của (O) , $AE = AB$), nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ax có chứa điểm B .

Bài 3:

$CV(ABC) = AB + AC + BC \Rightarrow BC$ không đổi

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$

$\triangle ADC$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{ADC}$

$\widehat{BAC}$ không đổi

$\Rightarrow \widehat{ADC}$ không đổi

$\widehat{BDC}$ không đổi, BC cố định

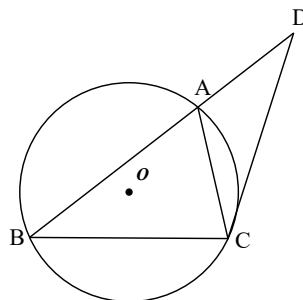
$\Rightarrow D$ thuộc cung chứa góc có số đo $\frac{1}{4} sđ \widehat{BC}$ của (O) dựng trên đoạn thẳng BC

$CV(ABC)$ lớn nhất $\Leftrightarrow (AB + AC)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow (AB + AD)$ lớn nhất

BD là đường kính của cung chứa góc nói trên

Khi đó $\widehat{BCD} = 90^\circ$



$$\text{Mà } \widehat{ABC} + \widehat{BDC} = \widehat{ACB} + \widehat{ADC} = 90^\circ$$

$$\widehat{BDC} = \widehat{ACD} (AC = AD)$$

$$\text{Do đó: } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow A \text{ là trung điểm cung lớn } BC$$

Vậy khi A là trung điểm cung lớn BC thì chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Bài 4:

$$\text{Ta có: } \widehat{IBC} = \frac{1}{2}B \text{ (BI là phân giác } \angle ABC \text{)}$$

$$\widehat{ICB} = \frac{1}{2}C \text{ (CI là phân giác } \angle ACB \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BIC} \text{ có } \widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 90^\circ + \frac{A}{2} \text{ (không đổi)}$$

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{A}{2} = \alpha \text{ (không đổi), } BC \text{ cố định}$$

Do đó I chuyển động trên cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC

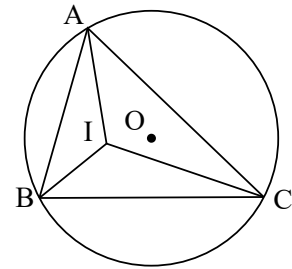
$$\text{mà } CV(IBC) = IB + IC + BC, BC \text{ không đổi}$$

Do đó: $CV(IBC)$ lớn nhất.

$$\Leftrightarrow IB + IC \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow I \text{ là trung điểm } BC \text{ của cung chứa góc } \alpha \text{ dựng trên đoạn thẳng } BC.$$

$$\Leftrightarrow A \text{ là trung điểm cung lớn } BC \text{ (vận dụng bài toán 158)}$$



Bài 5:

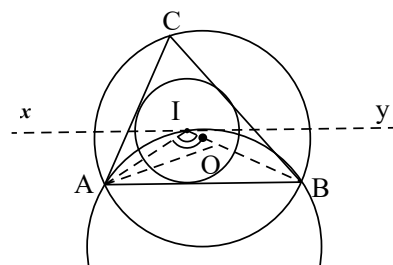
a) *Phân tích:*

Giả sử tam giác ABC đã dựng được thỏa mãn:

- Nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$

- Có đường tròn nội tiếp $(I; r)$ và góc $C = \alpha \Rightarrow \widehat{AOB} = 2\alpha$.

Do tam giác ABC dựng được.



Ta lại có: $\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$

Và $\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = 180^\circ - \widehat{AIB}$

Vậy $\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ không đổi

A, B cố định nằm trên cung chứa góc $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Vậy I xác định.

b) *Cách dựng:*

- Dựng tam giác AOB có $OA = OB = R$ và $\widehat{AOB} = 2\alpha$

- Dựng cung chứa góc $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ vẽ trên đoạn AB

- Dựng đường thẳng $XY \parallel AB$ và cách AB một khoảng bằng r

- Dựng đường tròn $(O; R)$; tia Bt hợp với BI một góc $\widehat{Ibc} = \widehat{ABI}$. Tia Bt cắt $(O; R)$ tại C . Ta được $\triangle ABC$ cần dựng.

c) *Chứng minh:*

Tam giác ABC rõ ràng nội tiếp trong $(O; R)$

Và $C = \alpha = \frac{\widehat{AOB}}{2}$. Ta có I nằm trên tia phân giác góc B và

$$\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{IAB} = 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2}$$

Vậy I nằm trên đường phân giác góc A .

Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC bán kính r .

d) *Biện luận:*

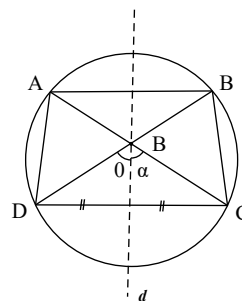
Bài toán có một nghiệm hình nếu XY nếu cung chứa góc $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ vẽ trên đoạn AB .

Bài toán có hai nghiệm hình nếu XY tiếp xúc với cung chứa góc trên.

Bài toán vô nghiệm khi XY không cắt cung chứa góc đó.

Bài 6:

27. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ - THCS.TOANMATH.com



a) *Phân tích:*

Giả sử hình thang $ABCD$ dựng được thỏa mãn các điều kiện:

- Nối tiếp đường tròn $(O; R)$, đáy $CD = 1$. Hai đường chéo AC

và BD cắt nhau tại I sao cho: $\widehat{CID} = \alpha$.

Nhận thấy:

$CD = 1$ nên hai đỉnh C, D xác định được ngay cần xác định hai đỉnh B và A . Việc xác định A và B đưa về xác định I .

- Để nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thì hình thang phải cân, do đó I thuộc đường trung trực của CD . Mặt khác $\widehat{CID} = \alpha$ nên I thuộc cung tròn nhìn CD dưới một góc bằng α .

b) *Cách dựng:*

- Trong đường tròn $(O; R)$ dựng dây $\widehat{CD} = 1$

- Dựng cung chứa góc nhìn $\widehat{CD}$ dưới một góc bằng α

- Dựng đường trung trực d của CD

- Lấy I là giao điểm của d và cung chứa góc α

- Kéo dài CI, DI cắt đường tròn $(O; R)$ tại A và B .

c) *Chứng minh:* Hiển nhiên theo cách dựng.

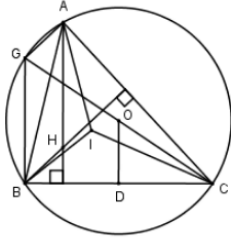
d) *Biện luận:*

- $l < 2R$ bài toán có 2 nghiệm hình

- $l = 2R$ bài toán có 1 nghiệm hình

- $l > 2R$ bài toán vô nghiệm.

Bài 7:



Gọi D là trung điểm của BC . Suy ra $OD \perp BC$.

Kéo dài OC cắt đường tròn tại điểm G ta có: $\widehat{CBG} = 90^\circ \Rightarrow BG \perp BC \Rightarrow BG \parallel AH$

$\Rightarrow OD = \frac{1}{2}BG$ (tính chất đường trung bình).

Ta có: $\widehat{CAG} = 90^\circ \Rightarrow AG \perp AC \Leftrightarrow AG \parallel BH \Rightarrow AHBG$ là hình bình

hành $\Rightarrow BG = AH \Rightarrow AH = 2OD$

Theo giả thiết $AH = R \Rightarrow R = OB = 2OD$

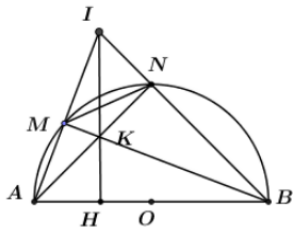
Tam giác OBD là tam giác vuông có $OB = 2OD \Rightarrow \widehat{OBD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$

H là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow CH \perp AB, BH \perp AC \Rightarrow \widehat{BHC} = 120^\circ$.

$\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 120^\circ$

Ta thấy $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC} = 120^\circ$ nên ba điểm O, H, I nằm trên cung tròn nhìn về một phía của BC dưới góc 120° (ĐPCM)

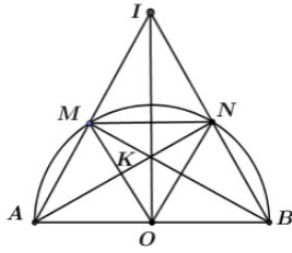
Bài 8:



Gọi H là chân đường cao kẻ từ I đến cạnh AB .

Khi đó ta có: $S_{IAB} = \frac{1}{2}IH.AB$.

Ta có AB là đường kính $\Rightarrow S_{IAB} \text{ Max} \Leftrightarrow IH \text{ Max} \Leftrightarrow H$ trùng với O .



Khi H trùng với O thì OI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác $\Rightarrow \triangle IAB$ cân tại I .

Lại có $\frac{MN}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel BC$.

Xét $\triangle MON$ có $MO = ON = MN = R \Rightarrow \triangle MON$ là tam giác đều.

Tam giác IAB cân tại I có MN là đường trung bình $\Rightarrow M$ và N lần lượt là trung điểm của AI và BI .

Lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow OM; ON$ cũng là hai đường trung bình của tam giác IAB .

$\Rightarrow \begin{cases} ON \parallel IM \\ OM \parallel IN \end{cases} \Rightarrow$ tứ giác $IMON$ là hình bình hành.

Lại có hai đường chéo OI và MN vuông góc với nhau (do $MN \parallel AB; OI \perp AB$).

$\Rightarrow IMON$ là hình thoi $\Rightarrow MI = IN = OM = R \Rightarrow IA = 2IM = 2R$.

Xét tam giác AOI vuông tại O ta có:

$$OI = \sqrt{IA^2 - OA^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2} OI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot 2R = R^2\sqrt{3}.$$

-----**Toán Học Sơ Đồ**-----