

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A- Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.

1- Dạng chung của bài toán cực trị hình học :

“ Trong tất cả các hình có chung một tính chất , tìm những hình mà một đại lượng nào đó (độ dài đoạn thẳng , số đo góc, số đo diện tích ...) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.” và có thể được cho dưới các dạng :

a) Bài toán về dựng hình .

Ví dụ : Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn , xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

b) Bài toán về chứng minh .

Ví dụ : Chứng minh rằng trong các dây đi qua điểm P trong một đường tròn (O) , dây vuông góc với OP có độ dài nhỏ nhất.

c) Bài toán về tính toán.

Ví dụ : Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm P nằm trong đường tròn có $OP = h$, Tính độ dài nhỏ nhất của dây đi qua P .

2- Hướng giải bài toán cực trị hình học :

a) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được :

+Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \leq m$ (m là hằng số)

+Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

b) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được :

+Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \geq m$ (m là hằng số)

+Xác định vị trí của hình H trên miền D để $f = m$

3 - Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học .

+ *Cách1* :Trong các hình có tính chất của đề bài, chỉ ra một hình rồi chứng minh mọi hình khác đều có giá trị của đại lượng phải tìm cực trị nhỏ hơn (hoặc lớn hơn) giá trị của đại lượng đó của hình đã chỉ ra.

+ *Cách2* :Biến đổi tương đương điều kiện để đại lượng này đạt cực trị bởi đại lượng khác đạt cực trị cho đến khi trả lời được câu hỏi mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ : Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn (P không trùng với O). Xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

Giải :

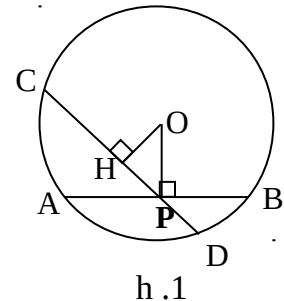
+Cách 1 :

Gọi AB là dây vuông góc với OP tại P , và dây CD là dây bất kỳ đi qua P và không trùng với AB (h.1).

Kẻ $OH \perp CD$.

ΔOHP vuông tại $H \Rightarrow OH < OP \Rightarrow CD > AB$

Như vậy trong tất cả các dây đi qua P , dây vuông góc với OP tại P có độ dài nhỏ nhất.



h.1

+Cách 2 :

Xét dây AB bất kỳ đi qua P (h.2). Kẻ $OH \perp AB$

Theo liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

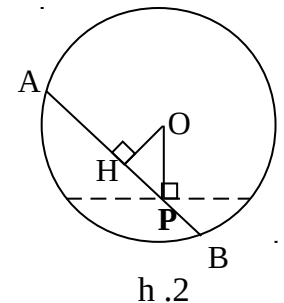
AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow OH$ lớn nhất

Ta lại có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$

Do đó $\max OH = OP$

Khi đó dây AB vuông góc với OP tại P .

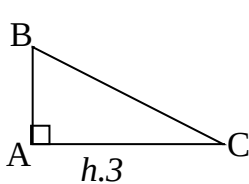


h.2

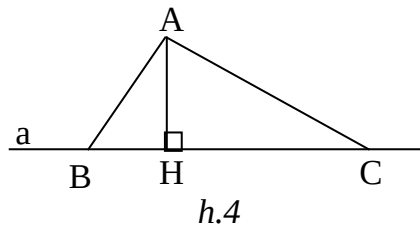
B-Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học.

1- Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu.

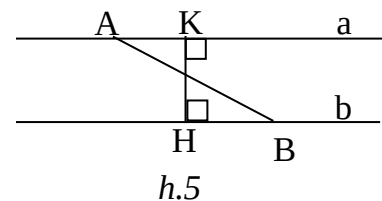
a-Kiến thức cần nhớ:



h.3



h.4



h.5

a₁) ΔABC vuông tại A (có thể suy biến thành đoạn thẳng) $\Rightarrow AB \leq BC$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv C$. (h.3)

a₂) (h.4)

+ $AH \perp a \Rightarrow AH \leq AB$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$.

+ $AB < AC \Leftrightarrow HB < HC$

a₃) (h.5)

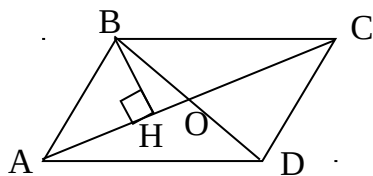
$A, K \in a; B, H \in b; a \parallel b; HK \perp a \Rightarrow HK \leq AB$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv K$ và $B \equiv H$.

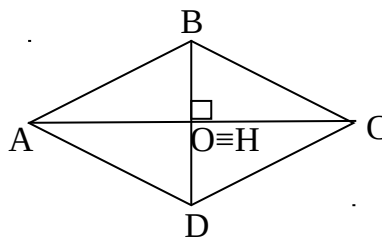
b-Các ví dụ:

Ví dụ 1: Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm ,hình nào có diện tích lớn nhất ? Tính diện tích lớn nhất đó.

Giải :



h.6



h.7

Xét hình bình hành ABCD có $AC = 8 \text{ cm}$; $BD = 6 \text{ cm}$ (h.6)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo . Kẻ $BH \perp AC$.

Ta có : $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC.BH$

Ta có $AC = 8\text{cm}$, $BH \leq BO = 3\text{cm}$. Do đó :

$$S_{ABCD} \leq 8.3 = 24 (\text{cm}^2)$$

$$S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow BH \equiv BO \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow BD \perp AC$$

Vậy $\max S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2$. Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi (h.7) có diện tích 24cm^2 .

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD . Trên các cạnh AB,BC ,CD,DA ta lấy theo thứ tự các điểm E,F,G,H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E, F,G,H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất .

Giải :

$$\Delta HAE = \Delta EBF = \Delta FCG = \Delta GHD$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH$$

$\Rightarrow$ EFGH là hình thoi .

$$\angle AHE = \angle BEF$$

$$\Rightarrow \angle AHE + \angle AEH = 90^\circ \Rightarrow \angle BEF + \angle AEH = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HEF = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ EFGH là hình vuông

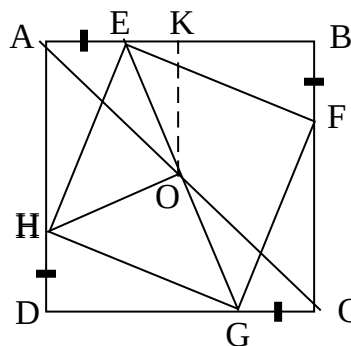
Gọi O là giao điểm của AC và EG . Tứ giác AECG có $AE = CG$, $AE \parallel CG$ nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG , do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

$$\Delta HOE \text{ vuông cân : } HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$$

Chu vi EFGH $= 4HE = 4\sqrt{2} OE$. Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất $\Leftrightarrow OE$ nhỏ nhất

Kẻ $OK \perp AB \Rightarrow OE \geq OK$ (OK không đổi)

$$OE = OK \Leftrightarrow E \equiv K$$



h.8

Do đó $\min OE = OK$

Như vậy, chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Ví dụ 3: Cho đoạn thẳng AB có độ dài $2a$. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua trung điểm M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích tam giác đó.

Giải:

Gọi K là giao điểm của CM và DB

$$MA = MB; \angle A = \angle B = 90^\circ, \angle AMC = \angle BMK$$

$$\Rightarrow \triangle MAC = \triangle MBK \Rightarrow MC = MK$$

Mặt khác $DM \perp CK$

$$\Rightarrow \triangle DCK \text{ cân} \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$$

Kẻ $MH \perp CD$.

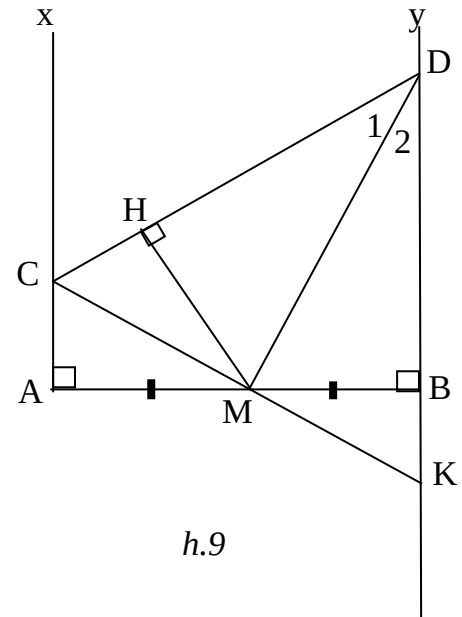
$$\triangle MHD = \triangle MBD \Rightarrow MH = MB = a$$

$$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{2} CD \cdot MH \geq \frac{1}{2} AB \cdot MH = \frac{1}{2} 2a \cdot a = a^2$$

$$S_{MCD} = a^2 \Leftrightarrow CD \perp Ax \text{ khi đó } \angle AMC = 45^\circ;$$

$$\angle BMD = 45^\circ.$$

Vậy $\min S_{MCD} = a^2$. Các điểm C, D được xác định trên Ax; By sao cho $AC = BC = a$.



h.9

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $\angle B$ là góc tù, điểm D di chuyển trên cạnh BC. Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi S là diện tích $\triangle ABC$ Khi D di chuyển trên cạnh BC ta có:

$$S_{ABD} + S_{ACD} = S$$

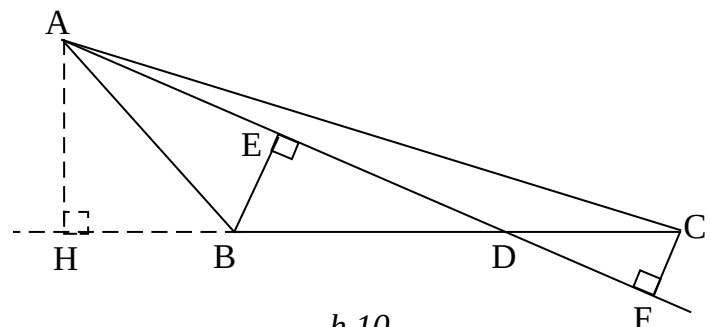
Kẻ $BE \perp AD$, $CF \perp AD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AD \cdot BE + \frac{1}{2} AD \cdot CF = S$$

$$\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}$$

Do đó $BE + CF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ hình chiếu HD nhỏ nhất

Do $HD \geq HB$ (do $\angle ABD > 90^\circ$) và $HD = HB \Leftrightarrow D \equiv B$



h.10

Vậy Khi $D \equiv B$ thì tổng các khoảng cách từ B và C đến AD có giá trị lớn nhất .

2- Sử dụng quan hệ giữa đường thẳng và đường gấp khúc.

a-Kiến thức cần nhớ:

Với ba điểm A,B,C bất kỳ ta có : $AC + CB \geq AB$

$AC + CB = AB \Leftrightarrow C$ thuộc đoạn thẳng AB

b-Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho góc $\angle xOy$ và điểm A nằm trong góc đó . Xác định điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho $OB = OC$ và tổng $AB + AC$ là nhỏ nhất .

Giải:

Kẻ tia Om nằm ngoài góc $\angle xOy$ sao cho $\angle yOm = \angle xOA$. Trên tia Om lấy điểm D sao cho $OD = OA$. Các điểm D và A cố định .

$OD = OA, OC = OB, \angle COD = \angle BOA$

$\Rightarrow \triangle DOC = \triangle AOB \Rightarrow CD = AB$

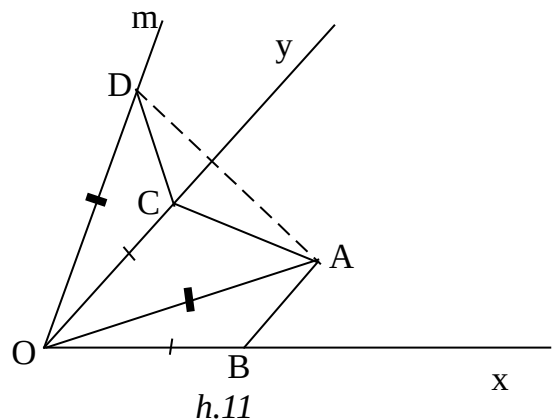
Do đó $AC + AB = AC + CD$

Mà $AC + CD \geq AD$

$\Rightarrow AC + AB \geq AD$

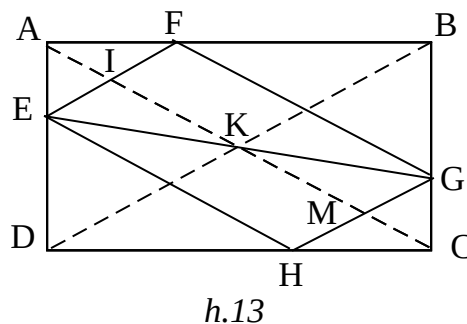
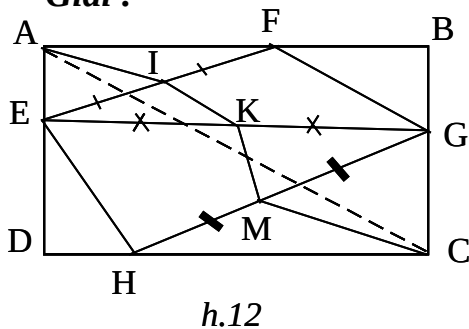
Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $C \in AD$

Vậy $\min(AC + AB) = AD$. Khi đó C là giao điểm của AD và Oy , B thuộc tia Ox sao cho $OB = OC$.



Ví dụ 6: Cho hình chữ nhật ABCD và điểm E thuộc cạnh AD . Xác định vị trí các điểm F thuộc cạnh AB , G thuộc cạnh BC , H thuộc cạnh CD sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải :



Gọi I ,K, L theo thứ tự là trung điểm của EF, EG , EH (h.12).

$\triangle AEF$ vuông tại A có AI là trung tuyến $\Rightarrow AI = 1/2EF$

$\triangle CGH$ vuông tại C có CM là trung tuyến $\Rightarrow CM = 1/2GH$

IK là đường trung bình của $\triangle EFG \Rightarrow IK = 1/2FG$

KM là đường trung bình của $\triangle EGH \Rightarrow KM = 1/2EH$

Do đó : chu vi EFGH = EF + FG + GH + EH = 2(AI + IK + KM + MC)

Ta lại có : AI + IK + KM + MC ≥ AC

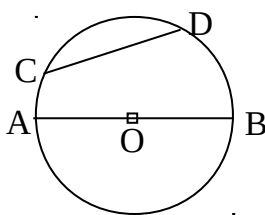
Suy ra chu vi EFGH ≥ 2AC (độ dài AC không đổi)

Chu vi EFGH nhỏ nhất bằng 2AC ⇔ A,I,K,M,C thẳng hàng.

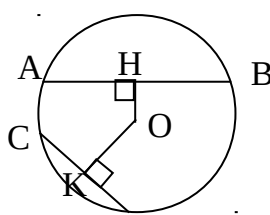
Khi đó ta có EH//AC, FG//AC, ∠AEI = ∠EAI = ∠ADB nên EF//DB , tương tự GH//DB .Suy ra tứ giác EFGH là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật ABCD (h.13).

3- Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.

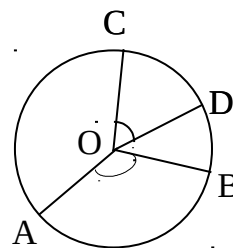
a-Kiến thức cần nhớ:



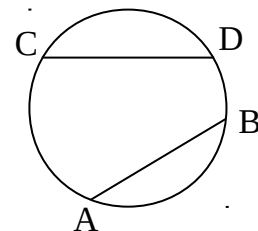
h.14



h.15



h.16



h.17

a₁) AB là đường kính , CD là dây bất kỳ ⇒ $CD \leq AB$ (h.14)

a₂) OH, OK là các khoảng cách từ tâm đến dây AB và CD :

$AB \geq CD \Leftrightarrow OH \leq OK$ (h.15)

a₃) AB, CD là các cung nhỏ của (O) : $AB \geq CD \Leftrightarrow \angle AOB \geq \angle COD$ (h.16)

a₄) AB, CD là các cung nhỏ của (O) : $AB \geq CD \Leftrightarrow \widehat{AB} \geq \widehat{CD}$ (h.17)

b-Các ví dụ:

Ví dụ 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B . một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D . Xác định vị trí của cát tuyến CBD để ΔACD có chu vi lớn nhất.

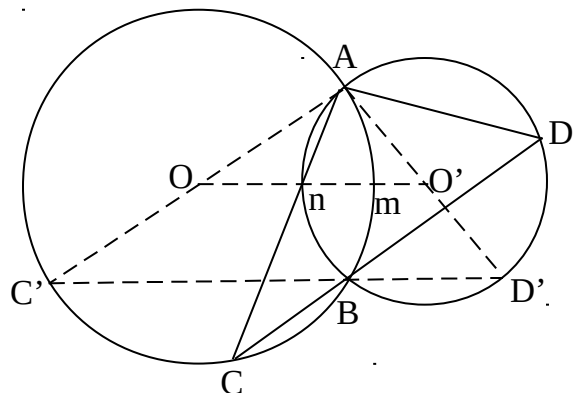
Giải:

$$sđ \widehat{C} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AOB}; \quad sđ \widehat{D} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AOB}$$

⇒ số đo các góc ΔACD không đổi

⇒ ΔACD có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất , chẳng hạn AC là lớn nhất.

AC là dây của đường tròn (O) , do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường



h.18

tròn (O), khi đó AD là đường kính của đường tròn (O'). Cát tuyến CBD ở vị trí C'BD' vuông góc với dây chung AB.

Ví dụ 8: Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn. Xác định dây AB đi qua P sao cho $\angle AOB$ có giá trị lớn nhất.

Giải:

Xét tam giác cân OAB, góc ở đáy $\angle OAB$ lớn nhất nếu góc ở đỉnh $\angle AOB$ nhỏ nhất.

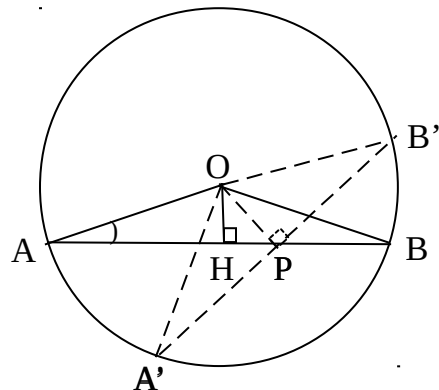
$$\angle AOB = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{AB}$$

Góc $\angle AOB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Cung $\widehat{AB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ dây AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.

Ta có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$ nên $\max OH = OP \Leftrightarrow AB \perp OP$

Suy ra dây AB phải xác định là dây A'B' vuông góc với OP tại P.



h.19

4- Sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai.

a-Kiến thức cần nhớ:

Các bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai được sử dụng dưới dạng:

$$A^2 \geq 0 ; -A^2 \leq 0$$

Do đó với m là hằng số, ta có:

$$f = A^2 + m \geq m ; \min f = m \text{ với } A = 0$$

$$f = -A^2 + m \leq m ; \max f = m \text{ với } A = 0$$

b-Các ví dụ:

Ví dụ 9: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Tính độ dài AE sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải:

$$\triangle AHE = \triangle BEF = \triangle CFG = \triangle DGH$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH, \angle HEF = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ HEFG là hình vuông nên chu vi EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất.

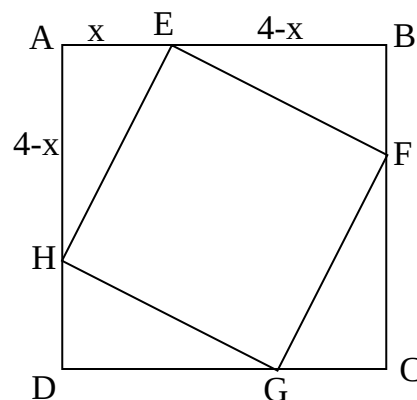
$$\text{Đặt } AE = x \text{ thì } HA = EB = 4-x$$

$\triangle HAE$ vuông tại A nên:

$$HE^2 = AE^2 + AH^2 = x^2 + (4-x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x-2)^2 + 8 \geq 8$$

$$HE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$$

Chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất bằng $8\sqrt{2}$ cm, khi đó $AE = 2$ cm.



h.20

Ví dụ 10: Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC . Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ADME$.

Giải:

$ADME$ là hình chữ nhật.

Đặt $AD = x$ thì $ME = x$

$$ME \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CE}{8} \Rightarrow CE = \frac{4}{3}x$$

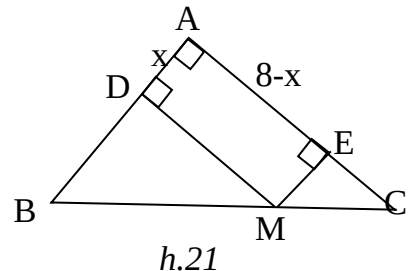
$$\Rightarrow AE = 8 - \frac{4}{3}x$$

$$\text{Ta có : } S_{ADME} = AD \cdot AE = x \left(8 - \frac{4}{3}x \right) = 8x - \frac{4}{3}x^2$$

$$= -\frac{4}{3}(x - 3)^2 + 12 \leq 12$$

$$S_{ADME} = 12 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow x = 3$$

Diện tích lớn nhất của tứ giác $ADME$ bằng 12 cm^2 , khi đó D là trung điểm của AB , M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AC .



5- Sử dụng bất đẳng thức Cô-si .

a-Kiến thức cần nhớ:

Bất đẳng thức Cô-si : Với $x \geq 0$; $y \geq 0$ ta có : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Bất đẳng thức Cô-si thường được sử dụng dưới các dạng sau :

+ Dạng 1: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 2: $\frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4$; $\frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} \leq 2$$
 ; $\frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 3: Với $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y$ không đổi thì xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 4: Với $x \geq 0$; $y \geq 0$; xy không đổi thì $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$

b-Các ví dụ:

Ví dụ 11: Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy. Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB. Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất.

Giải :

Đặt $MA = x$, $MB = y$

Ta có : $x + y = AB$ ($0 < x, y < AB$)

Gọi S và S' theo thứ tự là diện tích của hai hình tròn có đường kính là MA và MB.

Ta có :

$$S + S' = \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4}$$

Ta có bất đẳng thức : $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$ nên :

$$S + S' \geq \pi \cdot \frac{(x + y)^2}{8} = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Do đó $\min(S + S') = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$. Khi đó M là trung điểm của AB.

Ví dụ 12: Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Giải :

$$\text{Ta có : } S_{MCD} = \frac{1}{2} MC \cdot MD$$

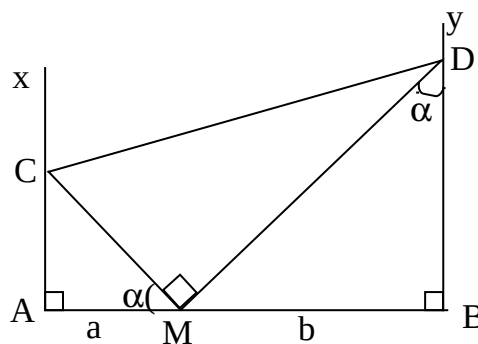
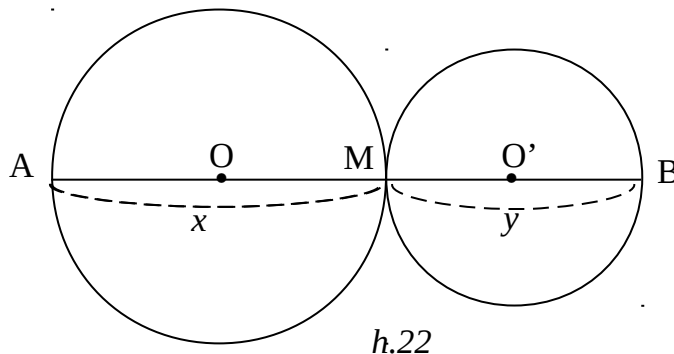
Đặt $MA = a$, $MB = b$

$\angle AMC = \angle BDM = \alpha$

$$MC = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad MD = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} \frac{ab}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.



Theo bất đẳng thức $2xy \leq x^2 + y^2$ ta có :

$$2\sin\alpha.\cos\alpha \leq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{nên} \quad S_{MCD} \geq ab$$

$$S_{MCD} = ab \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

$\Leftrightarrow \Delta AMC$ và ΔBMD vuông cân.

Vậy $\min S_{MCD} = ab$. Khi đó các điểm C, D được xác định trên tia Ax ; By sao cho $AC = AM$, $BD = BM$.

Ví dụ 13: Cho ΔABC , điểm M di động trên cạnh BC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và với AB, chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành ADME có diện tích lớn nhất.

Giải :

$$S_{ADME} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} \text{ lớn nhất}$$

Kẻ $BK \perp AC$ cắt MD ở H.

$$S_{ADME} = MD \cdot HK$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$$

$$\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2 \cdot \frac{MD}{AC} \cdot \frac{HK}{BK}$$

Đặt $MB = x$, $MC = y$,

$$MD \parallel AC \text{ ta có : } \frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{x+y} \quad ; \quad \frac{HK}{BK} = \frac{MC}{BC} = \frac{y}{x+y}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức } \frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$

Vậy $\max S_{ADME} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ khi đó M là trung điểm của BC.

Ví dụ 14: Cho ΔABC vuông cân có cạnh huyền $BC = a$. Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC. Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH. Khi đó hình thang trở thành hình gì ?

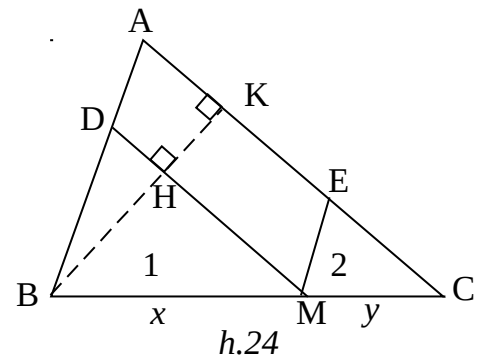
Giải:

Ta có :

$$2S_{DEKH} = (DH + EK) \cdot HK = (BH + KC) \cdot HK$$

$$\text{Mà } (BH + KC) + HK = BC = a \text{ không đổi}$$

$$\text{Nên } (BH + KC) \cdot HK \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow BH + KC = HK = \frac{a}{2}$$



Do đó :

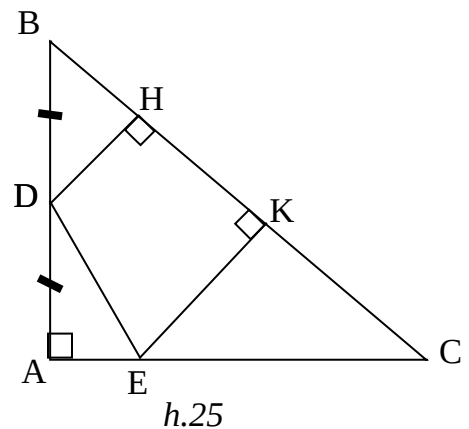
$$\max S_{DEKH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$$

Khi đó đường cao $HK = \frac{a}{2}$ suy ra :

$$KC = BC - BH - HK = a - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$$

$$\text{Do đó } DH = HB = \frac{a}{4}, EK = KC = \frac{a}{4}.$$

Hình thang $DEKH$ là hình chữ nhật, E là trung điểm của AC .



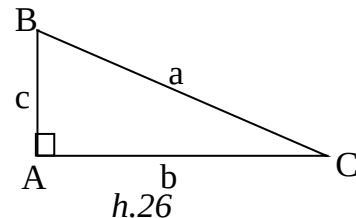
6- Sử dụng tỉ số lượng giác.

a-Kiến thức cần nhớ:

Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

$$+ b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$$

$$+ b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$$



b-Các ví dụ:

Ví dụ 15: Chứng minh rằng trong các tam giác cân có cùng diện tích tam giác có cạnh đáy nhỏ hơn là tam giác có góc ở đỉnh nhỏ hơn.

Giải:

Xét các tam giác ABC cân tại A có cùng diện tích S . Kẻ đường cao AH . Đặt $\angle BAC = \alpha$

$\triangle AHC$ vuông tại H , ta có :

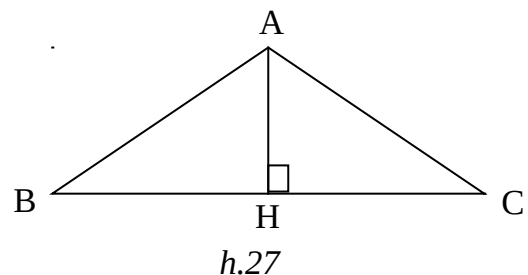
$$\angle HAC = \frac{\alpha}{2},$$

$$AH = HC \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} BC \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Do đó : } S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{1}{2} BC \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} BC^2 \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{4S}{\cot \frac{\alpha}{2}}} = 2\sqrt{S \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}$$

Do S không đổi nên :



$$BC \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \alpha \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \angle BAC \text{ nhỏ nhất}$$

Ví dụ 16: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy các điểm K, M sao cho $BK : KC = 4 : 1$, $CM : MD = 4 : 1$. Tìm tỉ số $AB : BC$ để số đo góc KAM lớn nhất.

$$(\text{Cho công thức biến đổi } \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y})$$

Giải:

$$\text{Đặt } \angle BAK = x, \angle DAM = y \quad (x + y < 90^\circ)$$

$$\angle KAM \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \angle BAK + \angle DAM \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow x + y \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \tan(x+y) \text{ nhỏ nhất}$$

$$\text{Giả sử } AB : BC = 1 : m \quad (m > 0)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{BK}{AB} = \frac{BK}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{4m}{5}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{DM}{AD} = \frac{DM}{DC} \cdot \frac{DC}{AD} = \frac{1}{5m}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \left(\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \right) \left(1 - \frac{4m}{5} \cdot \frac{1}{5m} \right) = \frac{25}{21} \left(\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \right)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \text{ nhỏ nhất}$$

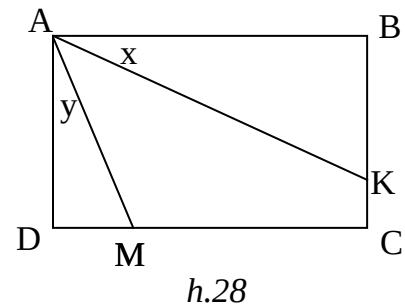
Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \geq 2\sqrt{\frac{4m}{5} \cdot \frac{1}{5m}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{4m}{5} = \frac{1}{5m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } x + y \text{ nhỏ nhất khi và chỉ khi } m = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } \angle KAM \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } AB : BC = 2 : 1$$



Phần 3: Bài tập ôn luyện

Bài 1 : Cho hình vuông ABCD . Hãy xác định đường thẳng d đi qua tâm hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là :

- Lớn nhất
- Nhỏ nhất

Hướng dẫn:

Xét trường hợp d cắt hai cạnh đối BC và AD (h.29)

Gọi m là tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến d.

$$m = 2(AA' + BB')$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A'B'

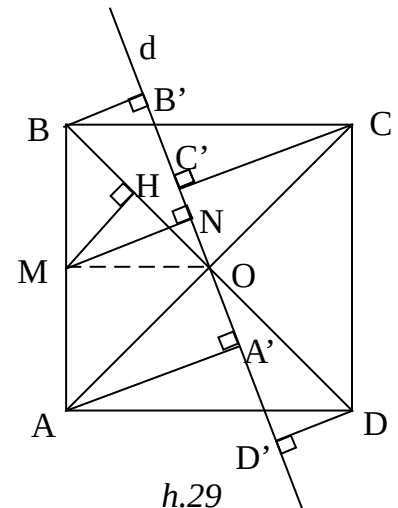
Suy ra : $m = 4MN$ do đó:

m lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

m nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

a) $MN \leq MO \Rightarrow m$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv O \Leftrightarrow d \parallel AB$

b) kẻ $MH \perp OB$. Chứng minh $MN \geq MH \Rightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow N \equiv H \Leftrightarrow d \equiv BD$ hoặc $d \equiv AC$.



Bài 2 : Cho ΔABC vuông cân tại A các điểm D,E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB ,AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí các điểm D,E sao cho :

- DE có độ dài nhỏ nhất .
- Tứ giác BDEC có diện tích lớn nhất .

Hướng dẫn: (h.30)

a)Gọi M là trung điểm của BC .

$$\Delta BDM = \Delta AEM \Rightarrow \angle BMD = \angle AME$$

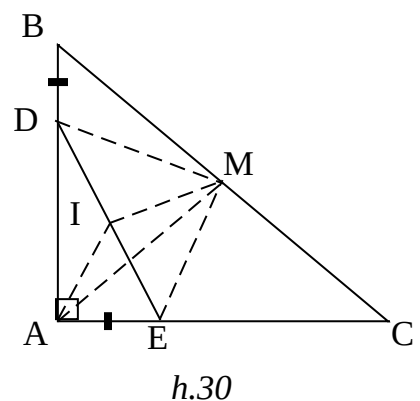
$$\Rightarrow \angle DME = \angle DMA + \angle AME = \angle DMA + \angle BMD = \angle BMA = 90^\circ$$

Gọi I là trung điểm của DE .

$$DE = DI + IE = AI + IM \geq AM$$

Min $DE = AM \Leftrightarrow I$ là trung điểm của AM

$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC



$$b) \text{Đặt } AE = x, AB = AC = a \text{ thì } AD = a - x, S_{ADE} = \frac{x(a-x)}{2}$$

$$S_{BDEC} \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow S_{ADE} \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow x(a-x) \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Do } x + (a-x) = a \text{ không đổi nên } x(a-x) \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = a/2$$

Khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

Bài 3 : Cho ΔABC vuông tại A có $BC = a$, diện tích là S . Gọi m là trung điểm của BC . Hai đường thẳng thay đổi qua M và vuông góc với nhau cắt các cạnh AB , AC ở D , E .Tìm :

a) Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE .

b) Giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔMDE

Hướng dẫn:

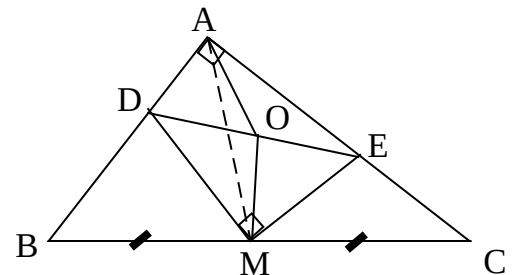
a) (h.31)Gọi O là trung điểm của DE

Ta có $OA = OD = OE = OM$

$$\Rightarrow DE = OA + OM \geq AM = \frac{a}{2}$$

$\min DE = a/2 \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AM

$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC



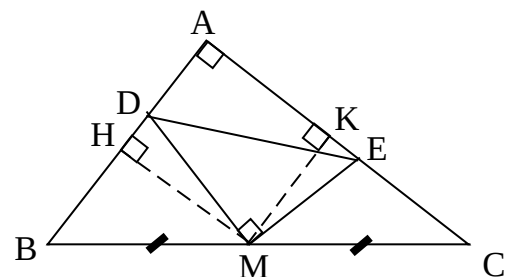
h.31

b) (h.32)Kẻ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$

$ME \geq MK$, $MD \geq MH$.

$$2S_{MDE} = MD \cdot ME \geq MH \cdot MK = \frac{AC}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{S}{2}$$

$$\min S_{MDE} = \frac{S}{4} \Leftrightarrow D \equiv H \text{ và } E \equiv K$$



h.32

Bài 4 : Cho điểm m di chuyển trên đoạn thẳng AB .Vẽ các tam giác đều AMC và BMD về một phía của AB . Xác định vị trí của M để tổng diện tích hai tam giác đều trên là nhỏ nhất .

Hướng dẫn: (h.33)

Gọi K là giao điểm của AC và BD .

Các tam giác AMC , BMD đồng dạng với ΔAKB

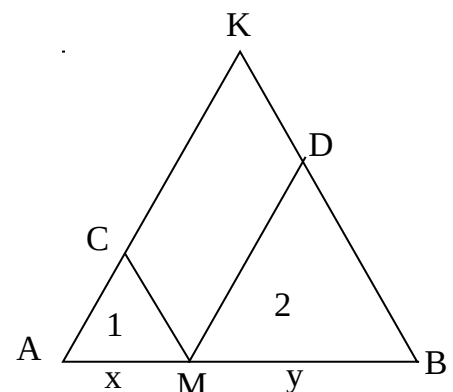
Đặt $AM = x$, $BM = y$, $AB = a$ ta có :

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 ; \frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \geq \frac{(x + y)^2}{2a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Do đó : $\min (S_1 + S_2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB .



h.33

Bài 5 : Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a,b,c tương ứng đường cao AH =H. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC sao cho nó có diện tích lớn nhất . Biết $M \in AB$; $N \in AC$; $P,Q \in BC$.

Hướng dẫn: (h.34)

Gọi I là giao điểm của AH và MN

Đặt $NP = x$; $MN = y$; $AI = h - x$

$\triangle AMN \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow y = a \cdot \frac{h-x}{h}$$

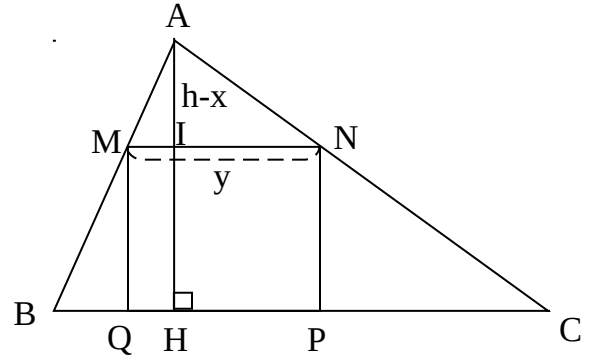
$$\Rightarrow S_{MNPQ} = xy = \frac{a}{h} \cdot x(h-x)$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x(h-x) \text{ lớn nhất}$$

$$x + (h-x) = h \text{ không đổi nên}$$

$$x(h-x) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x = h-x \Leftrightarrow x = h/2$$

Khi đó MN là đường trung bình của $\triangle ABC$



h.34

Bài 6 : Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IK \perp AB$. Tìm vị trí của I sao cho tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.35)

Kẻ $AH \perp BC$, $IE \perp AH$

ANIK ,IMHE là các hình chữ nhật.

$$IK^2 + IN^2 = IK^2 + AK^2 = AI^2 \geq AE^2$$

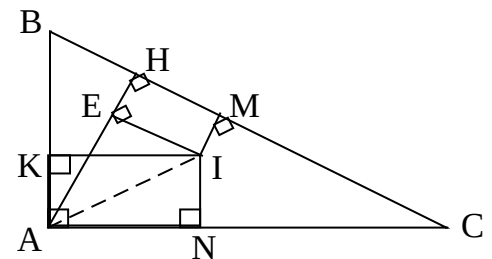
$$IM = EH$$

$$\text{ nên } IK^2 + IN^2 + IM^2 = AI^2 + EH^2 \geq AE^2 + EH^2$$

$$\text{Đặt } AE = x, EH = y \text{ ta có : } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$$

$$\Rightarrow IK^2 + IN^2 + IM^2 \geq \frac{AH^2}{2} .$$

Dấu “=” xảy ra khi I là trung điểm của đường cao AH.



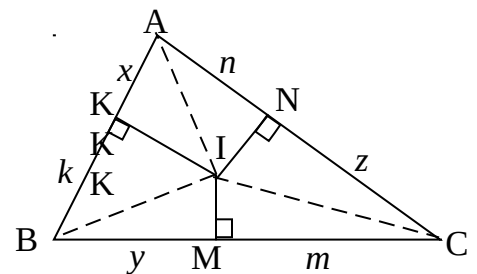
h.35

Bài 7 : Cho tam giác nhọn ABC .Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IK \perp AB$. Đặt $AK = x$; $BM = y$; $CN = z$. Tìm vị trí của I sao cho tổng $x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.36)

Đặt $BK = k$, $CM = m$, $AN = n$,

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.



h.36

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &= \\
 &= (IA^2 - IK^2) + (IB^2 - IM^2) + (IC^2 - IN^2) \\
 &= (IA^2 - IN^2) + (IB^2 - IK^2) + (IC^2 - IM^2) = n^2 + k^2 + m^2 \\
 \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) &= x^2 + y^2 + z^2 + n^2 + k^2 + m^2 \\
 &= (x^2 + k^2) + (y^2 + m^2) + (z^2 + n^2) \\
 x^2 + k^2 &\geq \frac{(x+k)^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{c^2}{2} \\
 y^2 + m^2 &\geq \frac{(y+m)^2}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2} \\
 z^2 + n^2 &\geq \frac{(z+n)^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{b^2}{2} \\
 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} . \\
 \min(x^2 + y^2 + z^2) &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Leftrightarrow x = k, y = m, z = n.
 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow I$ là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC .

Bài 8 : Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 10$ cm .Một dây CD có độ dài 6cm có hai đầu di chuyển trên nửa đường tròn . Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của A và B trên CD . Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ABFE$.

Hướng dẫn: (h.37)

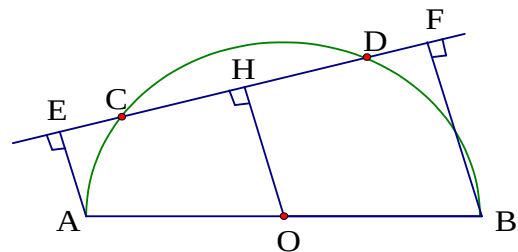
Kẻ $OH \perp CD$, ta tính được $OH = 4$ cm

$$S_{ABFE} = 1/2(AE + BF).EF$$

$$= OH.EF \leq OH. AB = 4.10 = 40$$

$$\max S_{ABFE} = 40 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow EF \parallel AB, \text{ khi đó } OH \perp AB$$



h.37

Bài 9 : Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a .Vẽ cung BD tâm A bán kính a (nằm trong hình vuông) .một tiếp tuyến bất kỳ với cung đó cắt BC , CD theo thứ tự ở M và N . Tính độ dài nhỏ nhất của MN .

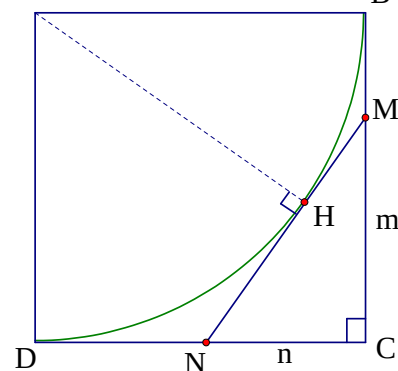
Hướng dẫn:(h.38)

$$\text{Đặt } CM = m, CN = n, MN = x$$

$$m + n + x = 2CD = 2a \text{ và } m^2 + n^2 = x^2$$

$$\text{Do đó : } x^2 = m^2 + n^2 \geq \frac{(m+n)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 \geq (2a - x)^2 \Rightarrow x\sqrt{2} \geq 2a - x$$



h.38

$$\Rightarrow x \geq \frac{2a}{\sqrt{2}+1} = 2a(\sqrt{2}-1)$$

$\min MN = 2a(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow m = n$. Khi đó tiếp tuyến $MN \parallel BD$, AM là tia phân giác của $\angle BAC$, AN là phân giác của $\angle DAC$

Bài 10 : Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau, chúng cắt các đường tròn (O) , (O') lần lượt tại B và C . Xác định vị trí của các tia đó để ΔABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn: (h.39)

Kẻ $OD \perp AB$; $O'E \perp AC$ ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2AD \cdot 2AE = 2 \cdot AD \cdot AE$$

Đặt $OA = R$; $O'A = r$; $\angle AOD = \angle O'AE = \alpha$

$$AD = R \sin \alpha; AE = r \cos \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = Rr \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

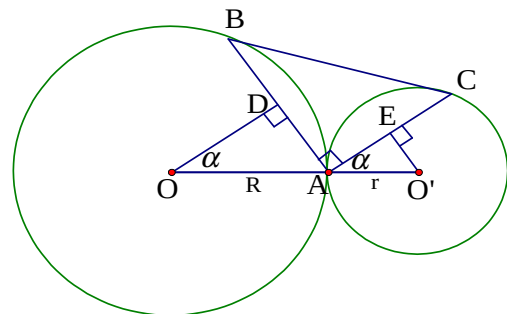
$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq Rr$$

Do đó :

$$\max S_{ABC} = Rr \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy nếu ta vẽ các tia AB, AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc $\angle OAB = \angle O'AC = 45^\circ$ thì ΔABC có diện tích lớn nhất.



h.39

Bài 11 : Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC , A là một điểm di động trên đường tròn. Vẽ tam giác đều ABM có A và M nằm cùng phía đối với BC . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống MB . Gọi D, E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OC, CM, MH, OH . Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác $DEFG$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn: (h.40)

$DEFG$ là hình bình hành.

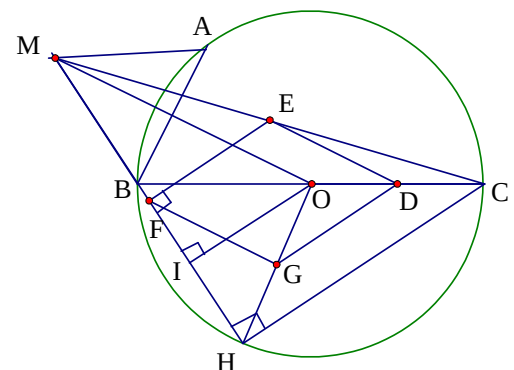
Kẻ $OI \perp FH$, ta có OI là đường trung bình của ΔBHC nên $OI = \frac{1}{2} HC = GD$

MO là đường trung trực của AB nên $\angle IMO = 30^\circ$

$$\Rightarrow OI = \frac{1}{2} OM \Rightarrow GD = \frac{1}{2} OM$$

$$\text{Mà } ED = \frac{1}{2} OM \Rightarrow EG = GD$$

$\Rightarrow DEFG$ là hình thoi



h.40

$$HFG = HMO = 30^\circ \Rightarrow EFG = 60^\circ \Rightarrow \Delta EFG \text{ đều}$$

$$\Rightarrow S_{DEFG} = 2S_{EFG} = 2 \cdot \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\left(\frac{HC}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{2} \leq \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\max S = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow H \equiv B \Leftrightarrow \angle MBC = 90^\circ \Leftrightarrow \angle ABC = 30^\circ \Leftrightarrow AC = R.$$

Bài 12 : Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) D là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A và không trùng với B,C. Gọi H,I,K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng BC, AC, AB. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $DH = x$, $DI = y$, $DK = z$.

a) Chứng minh rằng : $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x}$

b) Tìm vị trí của điểm D để tổng $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.41)

a) Lấy E trên BC sao cho $\angle CDE = \angle ADB$

ΔCDE đồng dạng với ΔADB

$$\Rightarrow \frac{DH}{DK} = \frac{CE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{CE}{c} \Rightarrow \frac{c}{z} = \frac{CE}{x}$$

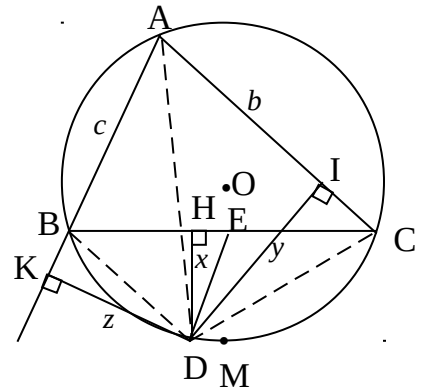
Tương tự ΔBDE đồng dạng với ΔADC

$$\Rightarrow \frac{DH}{DI} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{BE}{b} \Rightarrow \frac{b}{y} = \frac{BE}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{BE + CE}{x} = \frac{a}{x}$$

b) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x} = \frac{2a}{x}$ Do đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x$ lớn nhất $\Leftrightarrow$

$D \equiv M$ (M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A)



h.41

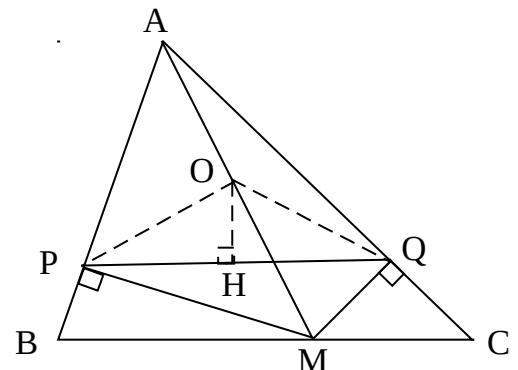
Bài 13 : Cho ΔABC nhọn, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Gọi P, Q là hình chiếu của M trên AB, AC. Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.42)

Tứ giác APMQ là tứ giác nội tiếp. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ.

Kẻ $OH \perp PQ$. Đặt $\angle BAC = \alpha$ thì $\angle POH = \alpha$

$$PQ = 2PH = 2 \cdot OP \sin \alpha = AM \sin \alpha$$



h.42

Do α không đổi nên

PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM \perp BC$.

Bài 14 : Cho đoạn thẳng AB và một điểm C trên AB . Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các nửa đường tròn có đường kính AB, AC, BC . Xác định vị trí của điểm C trên đoạn AB để diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn: (h.43)

Gọi $(O_1; r_1); (O_2; r_2); (O_3; r_3)$ là các đường tròn có đường kính là AB, AC, BC

Đặt $AB = 2a$, $AC = 2x$ thì $r_1 = a$, $r_2 = x$ Suy ra $BC = 2a - 2x$ và $r_3 = a - x$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi ba đường tròn

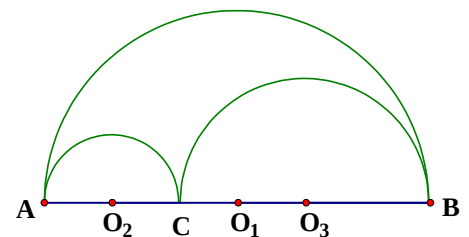
$$\text{Ta có : } S = \frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi x^2}{2} - \frac{\pi (a-x)^2}{2} = \pi x(a-x)$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow x(a-x)$ lớn nhất

Mặt khác $x + (a-x) = a$ không đổi nên

$$x(a-x) \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow C \equiv O_1$$

$$\text{Lúc đó ta có } S = \frac{\pi a^2}{4}$$



h.43

Bài 15 : Cho đường tròn $(O; R)$. Trong đường tròn (O)

vẽ hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc trong với (O) trong đó bán kính đường tròn (O_2) gấp đôi bán kính đường tròn (O_1) . Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài các hình tròn (O_1) và (O_2) .

Hướng dẫn:

Gọi x là bán kính đường tròn (O_1) Khi đó $2x$ là bán kính đường tròn (O_2) (h.44)

Xét $\triangle OO_1O_2$ ta có : $O_1O_2 \leq OO_1 + OO_2$

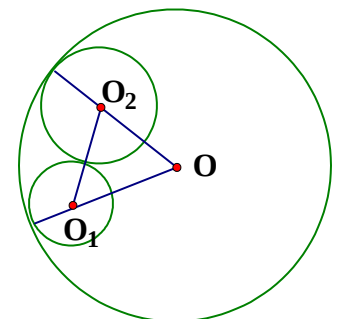
$$\Rightarrow 3x \leq (R-x) + (R-2x) \Rightarrow 6x \leq 2R \Rightarrow x \leq \frac{R}{3}$$

Gọi S là phần diện tích hình tròn (O) nằm ngoài các đường tròn (O_1) và (O_2) , ta có :

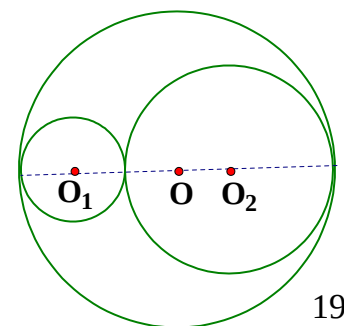
$$S = \pi R^2 - \pi x^2 - \pi 4x^2 = \pi (R^2 - 5x^2)$$

$$\text{Do } x \leq \frac{R}{3} \text{ nên } x^2 \leq \frac{R^2}{9} \Rightarrow S \geq \frac{4\pi R^2}{9};$$

$$\min S = \frac{4\pi R^2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$$



h.44



h.45

Khi đó O_1, O, O_2 thẳng hàng và bán kính các đường tròn (O_1) và (O_2) là $\frac{R}{3}$ và $\frac{2R}{3}$ (h.45).

Đề kiểm tra (tham khảo)

Thời gian : 45 phút

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1 , điểm M nằm trên đường chéo BD .

a) Nêu cách dựng đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AD và CD.
Nêu cách dựng đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AB,BC.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường chéo BD thì tổng chu vi hai đường tròn không đổi .

c) Xác định vị trí của điểm M trên BD để tổng diện tích của hai hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất .

2-Đáp án , biểu điểm :

a) Qua M kẻ đường vuông góc với BD cắt AB, BC, CD, DA tại P, Q, F, E .

Do AB, BC tiếp xúc với (K) nên $K \in MB$

$PQ \perp KM$ nên PQ là tiếp tuyến của (K)

Vậy (K) là đường tròn nội tiếp ΔPBQ

Tương tự (I) là đường tròn nội tiếp ΔEDF (2 đ)

b) Tổng chu vi hai đường tròn (I) và (K) bằng:

$$2\pi \cdot IM + 2\pi \cdot MK = 2\pi \cdot IK$$

$$MD = ID + IM =$$

$$\sqrt{2} \cdot IJ + IM = \sqrt{2} \cdot IM + IM = (\sqrt{2} + 1) \cdot IM$$

$$MB = KB + MK =$$

$$\sqrt{2} \cdot KH + KM = \sqrt{2} \cdot KM + KM = (\sqrt{2} + 1) \cdot KM$$

$$\Rightarrow BD = MD + MB = (\sqrt{2} + 1)(IM + MK) =$$

$$(\sqrt{2} + 1) IK$$

$$\Rightarrow IK = \frac{BD}{\sqrt{2} + 1} = BD(\sqrt{2} - 1) \quad \text{Do } BD = AB\sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow IK = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

Vậy tổng chu vi hai đường tròn bằng $2\pi(2 - \sqrt{2})$ (4 đ)

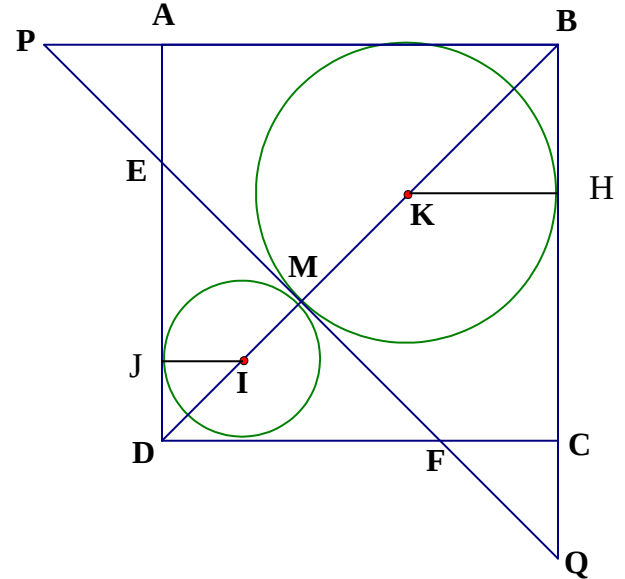
c) Gọi x và y là bán kính các đường tròn (I) và (K)

$$\text{Ta có : } x + y = 2 - \sqrt{2}$$

Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình tròn trên

$$S_1 + S_2 = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi(x^2 + y^2) \geq \pi \frac{(x+y)^2}{2} = \pi \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$$

$$S_1 + S_2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } BD. \text{ (4đ)}$$



h.46