

CHUYÊN ĐỀ CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình bậc hai một ẩn

- Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

trong đó a, b, c là các số thực cho trước, x là ẩn số.

- Giải phương trình bậc hai một ẩn là đi tìm tập nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn đó.

2. thức nghiệm của phương trình bậc hai

Trường hợp 1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Trường hợp 3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với $b = 2b'$. Gọi biệt thức $A' = b'^2 - ac$.

Trường hợp 1. Nếu $A' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $A' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}.$$

Trường hợp 3. Nếu $A' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{A'}}{a}.$$

Chú ý: Trong trường hợp hệ số b có dạng $2b'$ ta nên sử dụng để giải phương trình sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Không dùng công thức nghiệm, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước

Phương pháp giải: Ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1. Đưa phương trình đã cho về dạng tích.

Cách 2. Đưa phương trình đã cho về phương trình mà vế trái một bình phương còn vế phải là một hằng số.

1.1. Giải các phương trình:

a) $5x^2 - 7x = 0$;

b) $-3x^2 + 9 = 0$;

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$; d) $3x^2 + 12x + 1 = 0$.

1.2. Giải các phương trình:

a) $-\sqrt{3}x^2 + 6x = 0$; b) $-\frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{2} = 0$;

c) $x^2 - x - 9 = 0$; d) $3x^2 + 6x + 5 = 0$.

2.1. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4x^2 + m^2x + 4m = 0$ có nghiệm $x = 1$?

2.2. Cho phương trình $4mx^2 - x - 10m^2 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x = 2$.

Dạng 2. Giải phương trình bậc hai bằng cách sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn:

Phương pháp giải: Sử dụng công thức nghiệm, công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai để giải.

3.1. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình:

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; b) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$; d) $-3x^2 + 4x - 4 = 0$.

3.2. Xác định hệ số a, b, c ; Tính biệt thức Δ (hoặc Δ' nếu $b = 2b'$) rồi tìm nghiệm của các phương trình:

a) $x^2 - x - 11 = 0$ b) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

c) $-5x^2 - 4x + 1 = 0$; d) $-2x^2 + x - 3 = 0$

4.1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$ b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$;

c) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$; d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$.

4.2. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0$; b) $152x^2 - 5x + 1 = 0$;

c) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$; d) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.

Dạng 3. Sử dụng công thức nghiệm, xác định số nghiệm của phương trình dạng bậc hai

Phương pháp giải: Xét phương trình dạng bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

1. Phương trình có hai nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

3. Phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$.

4. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta < 0 \end{cases}$.

Chú ý: Nếu $b = 2b'$ ta có thể thay điều kiện của Δ tương ứng bằng Δ' .

5.1. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m-3 = 0$ (m là tham số).

Tìm các giá trị của m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt;
- b) Có nghiệm kép;
- c) Vô nghiệm;
- d) Có đúng một nghiệm;
- e) Có nghiệm.

5.2. Cho phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (m là tham số).

Tìm các giá trị của m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt;
- b) Có nghiệm kép;
- c) Vô nghiệm;
- d) Có đúng một nghiệm;
- e) Có nghiệm.

Dạng 4. Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai

Phương pháp giải:

* Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai theo tham số m là tìm tập nghiệm của phương trình tùy theo sự thay đổi của m .

* Xét phương trình dạng bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (hoặc } \Delta' = b'^2 - ac).$$

- Nếu $a = 0$, ta đưa về biện luận phương trình bậc nhất.

- Nếu $a \neq 0$, ta biện luận phương trình bậc hai theo A .

6.1. Giải và biện luận các phương trình sau: (a là tham số).

- a) $x^2 + (1-m)x - a = 0$;
- b) $(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$.

6.2. Giải và biện luận các phương trình sau: (a là tham số).

- a) $mx^2 + (2m-1)x + a + 2 = 0$;
- b) $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$.

Dạng 5. Một số bài toán liên quan đến tính có nghiệm của phương trình bậc hai; Nghiệm chung của các phương trình dạng bậc hai; Hai phương trình dạng bậc hai tương đương

Phương pháp giải:

1. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \text{ (hoặc } \Delta' \geq 0).$$

2. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0$ có nghiệm chung, ta làm như sau:

Bước 1. Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Thay x_0 vào 2 phương trình để tìm được điều kiện của tham số.

Bước 2. Với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình có nghiệm chung hay không và kết luận.

3. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c' = 0$ tương đương, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Hai phương trình cùng vô nghiệm.

Trường hợp 2. Hai phương trình cùng có nghiệm. Khi đó:

- Điều kiện cần để hai phương trình tương đương là chúng có nghiệm chung. Từ đó tìm được điều kiện của tham số.

- Điều kiện đủ với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem 2 phương trình tập nghiệm bằng nhau hay không và kết luận.

7.1. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình $b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ luôn vô nghiệm.

7.2. Cho phương trình $x^2 + (a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$ với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình trên luôn vô nghiệm.

8.1. Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$. Chứng minh nếu hai phương trình trên có nghiệm chung thì:

$$(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0.$$

8.2. Cho hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + bx + a = 0$ trong đó $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

9.1. Cho hai phương trình $x^2 + x - m = 0$ và $x^2 - mx + 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Hai phương trình có nghiệm chung;

b) Hai phương trình tương đương.

9.2. Cho hai phương trình $x^2 - 2ax + 3 = 0$ và $x^2 - x + a = 0$, (a là tham số). Với giá trị nào của a thì:

a) Hai phương trình trên có nghiệm chung?

b) Hai phương trình trên tương đương?

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1.1. a) Ta có $5x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 7) = 0$. Tìm được $x \in \left\{0; \frac{7}{5}\right\}$

b) Ta có $-3x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3$. Tìm được $x = \pm\sqrt{3}$

c) Ta có $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$. Tìm được $x \in \{1; 5\}$

d) Ta biến đổi thành $3(x + 2)^2 = 11$. Tìm được $x = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{3}$

1.2. Tương tự 1.1

a) Tìm được $x = \{2\sqrt{3}; 0\}$. b) Vô nghiệm.

c) Tìm được $x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$. d) Vô nghiệm.

2.1. Thay $x = 1$ vào phương trình ta có $4.1^2 + m^2 + 4m = 0$. Tìm được $m = -2$.

2.2 Tương tự 2.1

$$\text{Tìm được } m = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{5}$$

3.1.

a) Ta có $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$. Tính được $\Delta = 49 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x \in \left\{-1; \frac{5}{2}\right\}$$

b) ta có $a = 1$, $b = -6$, $b' = -3$, $c = 8$. Tính được $\Delta' = 1$. Ta tìm được $x \in \{4; 2\}$.

c) Ta có $a = 9$, $b = -12$, $c = 4$. Tính được $\Delta = 0$. Phương trình có nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$.

d) Ta có $a = -3$, $b = 4$, $c = -4$. Tính được $\Delta = -32 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

3.2. Tương tự 3.1

a) Tìm được $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ b) Tìm được $x = 2$.

c) Tìm được $x \in \left\{-1; \frac{1}{5}\right\}$ d) Tìm được $x \in \emptyset$.

4.1. Tương tự 3.1

a) Tìm được $x \in \left\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right\}$

b) Tìm được $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) Tìm được $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -1$

d) Tìm được $x \in \left\{\frac{6 + 2\sqrt{6}}{3}; \frac{-6 + 2\sqrt{6}}{3}\right\}$

4.2. Tương tự 3.1., 4.1

a) Tìm được $x_{1,2} = \frac{-\sqrt{11} \pm 5}{2}$ b) Tìm được $x \in \emptyset$

c) Tìm được $x \in \{2; \sqrt{3}\}$ b) Tìm được $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5.1. Xét $\Delta' = (m - 1)^2 - m(m - 3) = m + 1$

a) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Tìm được $m \neq 0, m > -1$.

b) Xét $m = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (TM)$

Xét $m \neq 0$. Phương trình có nghiệm kép khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

c) Tương tự, ta tìm được $m < -1$

d) Tìm được $m = 0$

e) Tìm được $m \geq 1; m \neq 0$.

5.2. Tương tự 5.1

a) Tìm được $m > \frac{-1}{4}, m \neq 2$ b) Tìm được $m = \frac{-1}{4}$

d) Tìm được $m < \frac{-1}{4}$ d) Tìm được $m = 2$

e) Tìm được $m = 2$ hoặc $m > \frac{-1}{4}$.

6.1

a) Ta có $\Delta = m^2 + 2m + 1 \geq 0, \forall m \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |m + 1|$

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$: Phương trình đã cho có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m-1}{2}$

* $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$: Phương trình đã cho có nghiệm phân biệt: $x_1 = m, x_2 = -1$

b) Với $m = 3 \Rightarrow$ Phương trình có dạng: $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Với $m \neq 3 \Rightarrow \Delta' = 9m - 18$

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 2$: Phương trình vô nghiệm.

* $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{m}{m-3}$

* $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 2 \end{cases}$: Phương trình có nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{9m-18}}{m-3}$

6.2. Tương tự 6.1

a) Với $m = 0 \Rightarrow x = 2$;

Với $n \neq 0 \Rightarrow \Delta = -12m + 1$

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$: Phương trình vô nghiệm.

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{1-2m}{2m}$

$$* \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{12} \end{cases} : \text{Phương trình hai có nghiệm phân biệt: } x_{1,2} = \frac{1-2m \pm \sqrt{1-12m}}{2m}$$

$$b) \text{ Với } m = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3};$$

$$\text{Với } m \neq 2 \Rightarrow \Delta' = 4m + 1:$$

$$* \Delta' < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-1}{4} : \text{Phương trình vô nghiệm.}$$

$$* \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4} : \text{Phương trình có nghiệm kép: } x_1 = x_2 = \frac{m+1}{m-2}$$

$$* \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > \frac{-1}{4} \end{cases} : \text{Phương trình có hai nghiệm kép: } x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{4m+1}}{m-2}$$

7.1. Ta có $\Delta = (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$. Từ đó chứng minh được $\Delta < 0$.

$$\mathbf{7.2.} \text{ Ta có } \Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

Vì $a < b+c \Rightarrow a^2 < ab+ca$. Tương tự ta có $b^2 < ab+bc$ và $c^2 < ca+bc$. Từ đó suy ra $\Delta < 0$.

8.1. Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta có: $(a-c)x_0 = d-b$

Nếu $a \neq c$ thì $x_0 = \frac{d-b}{a-c}$. Thay x_0 vào phương trình ta được ĐPCM.

Nếu $a = c$ thì $b = d \Rightarrow$ ĐPCM.

$$\mathbf{8.2.} \text{ Ta có } \Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a+b). \text{ Từ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = \frac{1}{2}ab.$$

Từ đó ta có $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow$ ĐPCM.

9.1. a) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta biến đổi được $(1+m)x_0 = m+1$. Tìm được $m = -1$ hoặc $m = 2$.

b) Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Hai phương trình cùng vô nghiệm $\Rightarrow -2, m < \frac{-1}{4}$

Trường hợp 2: Hai phương trình cùng có nghiệm và tập nghiệm giống nhau $\Rightarrow m = -1$.

Vậy $-2 < m < \frac{-1}{4}$ thì hai phương trình tương đương.

9.2 Tương tự 9.1

$$a) \text{ Tìm được } a \in \emptyset \qquad b) \text{ Tìm được } \frac{1}{4} < a < \sqrt{3}$$

B.NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

Bài 1. Cho phương trình $4x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ (1) ($a; b$ là tham số)

a) Giải phương trình (1) với $a = 1; b = \sqrt{2}$

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $a; b$

Bài 2. Cho a, b, c, d là các số thực $a^2 + b^2 < 1$. Chứng minh rằng phương trình:

$$(a^2 + b^2 - 1)x^2 - 2(ac + bd - 1)x + c^2 + d^2 - 1 = 0 \text{ luôn có hai nghiệm.}$$

Bài 3. Cho phương trình $ax^2 + bx + 1 = 0$ với $a; b$ là các số hữu tỉ. Tìm $a; b$ biết $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ là nghiệm

của phương trình

Bài 4. Với giá trị nào của b thì hai phương trình $2011x^2 + bx + 1102 = 0$ (1) và $1102x^2 + bx + 2011 = 0$

(2) có nghiệm chung.

Bài 5. Tìm số nguyên a để hai phương trình sau đây có ít nhất một nghiệm chung

$$x^2 + ax + 8 = 0 \text{ (1) và } x^2 + x + a = 0 \text{ (2)}$$

Bài 6. Cho hai phương trình $x^2 + mx + n = 0$ và $x^2 - 2x - n = 0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m và n , ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Bài 7. Chứng minh rằng với điều kiện $\begin{cases} c > 0 \\ (a+c)^2 < ab + bc - 2ac \end{cases}$

thì phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm

Tóm lại, phương trình luôn có nghiệm

Bài 8. Cho phương trình ẩn x tham số m : $x^2 - 2(m+1)x - (m^2 + 2m - 3) = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho:

$$2008 < x_2 < x_1 < 2013$$

Bài 9. Chứng minh rằng phương trình:

$$(x^2 + ax + b - 1)(x^2 + bx + a - 1) = 0 \text{ luôn có nghiệm với mọi giá trị của } a \text{ và } b$$

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Cho phương trình $4x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ (1) ($a; b$ là tham số)

a) Giải phương trình (1) với $a = 1; b = \sqrt{2}$

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $a; b$

Lời giải

a) Với $a = 1; b = \sqrt{2}$ phương trình có dạng: $4x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

$$\text{Xét } \Delta' = (1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})}{4} = \frac{1}{2}$$

b) Xét $\Delta' = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$ với mọi $a; b$

Vậy phương trình luôn có nghiệm

Bài 2. Cho a, b, c, d là các số thực $a^2 + b^2 < 1$. Chứng minh rằng phương trình:

$$(a^2 + b^2 - 1)x^2 - 2(ac + bd - 1)x + c^2 + d^2 - 1 = 0 \text{ luôn có hai nghiệm.}$$

Lời giải

$$\text{Xét } \Delta' = (ac + bd - 1)^2 - (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1) \quad (*)$$

$$+ \text{ Do } a^2 + b^2 < 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - 1 < 0$$

$$\text{Nếu } c^2 + d^2 \geq 1 \Rightarrow c^2 + d^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \Delta' \geq 0$$

$$\text{Nếu } c^2 + d^2 < 1. \text{ Đặt } u = 1 - a^2 - b^2; v = 1 - c^2 - d^2$$

$$(\text{Điều kiện } 0 < u \leq 1; 0 < v \leq 1)$$

$$\text{Xét } 4\Delta' = (2 - 2ac - 2bd)^2 - 4uv$$

$$= (a^2 + b^2 + u + p^2 + d^2 + v - 2ac - 2bd)^2 - 4uv$$

$$= \left[(a-c)^2 + (b-d)^2 + u+v \right]^2 - 4uv \geq (u+v)^2 - 4uv = (u-v)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta' \geq 0. \text{ Vậy phương trình luôn luôn có nghiệm}$$

Bài 3. Cho phương trình $ax^2 + bx + 1 = 0$ với $a; b$ là các số hữu tỉ. Tìm $a; b$ biết $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ là nghiệm

của phương trình

Lời giải

$$\text{Ta có: } x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{5 - 3} = 4 - \sqrt{15} \text{ là nghiệm của phương trình nên:}$$

$$a(4 - \sqrt{15})^2 + b(4 - \sqrt{15}) + c = 0 \Leftrightarrow (31a + 4b + 1) - (8a + b)\sqrt{15} = 0$$

$$\text{Do } a \text{ và } b \text{ là các số hữu tỷ nên: } \begin{cases} 31a + 4b + 1 = 0 \\ 8a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \end{cases}$$

Bài 4. Với giá trị nào của b thì hai phương trình $2011x^2 + bx + 1102 = 0$ (1) và $1102x^2 + bx + 2011 = 0$ (2) có nghiệm chung.

Lời giải

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{cases} 2011x_0^2 + bx_0 + 1102 = 0 \\ 1102x_0^2 + bx_0 + 2011 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1102x_0^2 + bx_0 + 2011 = 0 \\ 909x_0^2 = 909 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1102x_0^2 + bx_0 + 2011 = 0 & (1) \\ x_0 = \pm 1 & (2) \end{cases}$$

Với $x_0 = 1$ thay vào phương trình (1) ta được $b = -3113$

Với $x_0 = -1$ thay vào phương trình (1) ta được $b = 3113$

Thử lại:

• Với $b = -3113$, thì phương trình (1) là $2011x^2 - 3113x + 1102 = 0$ có nghiệm $x = 1; x = \frac{1102}{2011}$ và

phương trình (2) là $1102x^2 - 3113x + 2011 = 0$ có nghiệm là $x = 1; x = \frac{2011}{1102}$, nghiệm chung là $x = 1$

• Với $b = 3113$, thì phương trình (1) là $2011x^2 + 3113x + 1102 = 0$ có nghiệm $x = -1; x = -\frac{1102}{2011}$ và

phương trình (2) là $1102x^2 + 3113x + 2011 = 0$ có nghiệm là $x = -1; x = -\frac{2011}{1102}$, nghiệm chung là $x = -1$

Vậy với $b = \pm 3113$ thì hai phương trình đã cho có nghiệm chung

Bài 5. Tìm số nguyên a để hai phương trình sau đây có ít nhất một nghiệm chung

$$x^2 + ax + 8 = 0 \quad (1) \text{ và } x^2 + x + a = 0 \quad (2)$$

Lời giải

Đặt x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có: $\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 8 = 0 & (1) \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 & (2) \end{cases}$, ta có:

Từ phương trình (1) và (2) trừ từng vế ta được:

$$(a-1).x_0 + 8 - a = 0 \Leftrightarrow (a-1).x_0 = a-8 \quad (*)$$

Với $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$ thì từ (*) không tồn tại x_0 nên điều kiện $a \neq 1$

Từ phương trình (*) ta có: $x_0 = \frac{a-8}{a-1}$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$\frac{(a-8)^2}{(a-1)^2} + \frac{a-8}{a-1} + a = 0 \Leftrightarrow a^3 - 24a + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+6)(a^2 - 6a + 12) = 0 \quad (**)$$

Ta có: $a^2 - a + 12 = (a-3)^2 + 3 > 0$ nên $(**) \Leftrightarrow a+6=0 \Leftrightarrow a=-6$

Với $a = -6$ thì phương trình (1) là $x^2 - 6x + 8 = 0$ có nghiệm $x_1 = 2; x_2 = 4$

Phương trình (2) là $x^2 + x - 6 = 0$ có nghiệm $x_1 = 2; x_2 = -3$ nên hai phương trình có nghiệm chung $x = 2$

Vậy với $a = -6$ thì hai phương trình có nghiệm chung là $x = 2$

Bài 6. Cho hai phương trình $x^2 + mx + n = 0$ và $x^2 - 2x - n = 0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m và n , ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Lời giải

• Phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có $\Delta_1 = m^2 - 4n$

• Phương trình $x^2 - 2x - n = 0$ có $\Delta_2 = 4n + 4$

Suy ra: $\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + 4 > 0$ với mọi m, n . Do đó trong hai số Δ_1, Δ_2 luôn có ít nhất một Δ không âm.

Hay nói cách khác trong hai phương trình đã cho luôn có ít nhất một phương trình có nghiệm

Bài 7. Chứng minh rằng với điều kiện
$$\begin{cases} c > 0 \\ (a+c)^2 < ab+bc-2ac \end{cases}$$

thì phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm

Lời giải

Xét các trường hợp sau:

• Nếu $a = 0; b \neq 0$ thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = -\frac{c}{b}$

• Nếu $a = 0; b = 0$ thì $c^2 < 0$ vô lí

• Nếu $a \neq 0$ từ $(a+c)^2 < ab+bc-2ac \Rightarrow -2ac > (a+c)^2 - b(a+c)$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac > b^2 + 2(a+c)^2 - 2b(a+c) = (a+c-b)^2 + (a+c)^2 \geq 0$

Vậy $\Delta > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm

Tóm lại, phương trình luôn có nghiệm

Bài 8. Cho phương trình ẩn x tham số m : $x^2 - 2(m+1)x - (m^2 + 2m - 3) = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho:

$2008 < x_2 < x_1 < 2013$

Lời giải

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2m - 3) = 4$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = m+3; x_2 = m-1$

Phương trình có hai nghiệm:

$2008 < x_2 < x_1 < 2013 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m+3 < 2013 \\ x_2 = m-1 > 2008 \end{cases} \Leftrightarrow 2009 < m < 2010$

Bài 9. Chứng minh rằng phương trình:

$$(x^2 + ax + b - 1)(x^2 + bx + a - 1) = 0 \text{ luôn có nghiệm với mọi giá trị của } a \text{ và } b$$

Lời giải

$$(x^2 + ax + b - 1)(x^2 + bx + a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b - 1 = 0(1) \\ x^2 + bx + a - 1 = 0(2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \Delta_1 = a^2 - 4b + 4; \Delta_2 = b^2 - 4a + 4$$

Suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 = (a - 2)^2 + (b - 2)^2 \geq 0$ với mọi $a; b$ do đó có ít nhất một trong hai giá trị $\Delta_1; \Delta_2$ không âm. Vậy phương trình ban đầu luôn có nghiệm với mọi giá trị của a và b

C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ

Câu 1. Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

A. $x^2 - \sqrt{x} + 1 = 0$. B. $2x^2 - 2018 = 0$. C. $x + \frac{1}{x} - 4 = 0$. D. $2x - 1 = 0$.

Câu 2. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$. Phương trình đã cho vô nghiệm khi:

A. $\Delta < 0$. B. $\Delta = 0$. C. $\Delta \geq 0$. D. $\Delta \leq 0$.

Câu 3. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, khi đó phương trình đã cho:

A. vô nghiệm. B. có nghiệm kép. C. có hai nghiệm phân biệt. D. có 1 nghiệm.

Câu 4. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm là:

A. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. B. $x_1 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
C. $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. D. $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{a}$.

Câu 5. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm là:

A. $x_1 = x_2 = \frac{b}{2a}$. B. $x_1 = -\frac{b}{2a}; x_2 = \frac{b}{2a}$.
C. $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. D. $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Câu 6. Không dùng công thức nghiệm, tính tổng các nghiệm của phương trình $6x^2 - 7x = 0$.

- A. $-\frac{7}{6}$. B. $\frac{7}{6}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $-\frac{6}{7}$.

Câu 7. Không dùng công thức nghiệm, tính tổng các nghiệm của phương trình $-4x^2 + 9 = 0$.

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 8. Tìm tích các giá trị của m để phương trình $4mx^2 - x - 14m^2 = 0$ có nghiệm $x = 2$.

- A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{8}{7}$.

Câu 9. Tìm tổng các giá trị của m để phương trình $(m-2)x^2 - (m^2+1)x + 3m = 0$ có nghiệm $x = -3$.

- A. -5. B. -4. C. 4. D. 6.

Câu 10. Tính biệt thức Δ từ đó tìm nghiệm của phương trình $9x^2 - 15x + 3 = 0$.

- A. $\Delta = 117$ và phương trình có nghiệm kép.
 B. $\Delta = -117$ và phương trình vô nghiệm.
 C. $\Delta = 117$ và phương trình có hai nghiệm phân biệt.
 D. $\Delta = -117$ và phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 11. Tính biệt thức Δ từ đó tìm nghiệm (nếu có) của phương trình $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$.

- A. $\Delta = 0$ và phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$.
 B. $\Delta < 0$ và phương trình vô nghiệm.
 C. $\Delta = 0$ và phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\sqrt{2}$.
 D. $\Delta > 0$ và phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \sqrt{2}$.

Câu 12. Tính biệt thức Δ từ đó tìm nghiệm (nếu có) của phương trình $\sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3}-1)x - 1 = 0$.

- A. $\Delta > 0$ và phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.
 B. $\Delta < 0$ và phương trình vô nghiệm.
 C. $\Delta = 0$ và phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$.
 D. $\Delta > 0$ và phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}; x_2 = -1$.

Câu 13. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $-x^2 + 2mx - m^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

- A. $m \geq 0$. B. $m = 0$. C. $m > 0$. D. $m < 0$.

Câu 14. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

- A.** $m < -1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m > -1$. **D.** $m \leq -1$.

Câu 15. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + mx - m = 0$ có nghiệm kép.

- A.** $m = 0; m = -4$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 0; m = 4$.

Câu 16. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + (3 - m)x - m + 6 = 0$ có nghiệm kép.

- A.** $m = 3; m = -5$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = 5; m = -3$. **D.** $m = 5$.

Câu 17. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $x^2 + (1 - m)x - 3 = 0$ vô nghiệm.

- A.** $m = 0$. **B.** Không tồn tại m . **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Câu 18. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $2x^2 + 5x + m - 1 = 0$ vô nghiệm.

- A.** $m > \frac{8}{33}$. **B.** Không tồn tại m . **C.** $m < \frac{33}{8}$. **D.** $m > \frac{33}{8}$.

Câu 19. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $(m + 2)x^2 + 2x + m = 0$ vô nghiệm.

- A.** $\begin{cases} m \geq 1 + \sqrt{2} \\ m \leq 1 - \sqrt{2} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m > -1 + \sqrt{2} \\ m < -1 - \sqrt{2} \end{cases}$. **C.** $1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}$. **D.** $1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}$.

Câu 20. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $mx^2 - 2(m - 2)x + m + 5 = 0$ vô nghiệm.

- A.** $m > \frac{8}{19}$. **B.** $m > \frac{19}{8}$. **C.** $m = \frac{19}{8}$. **D.** $m < \frac{9}{18}$.

Câu 21. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ có nghiệm.

- A.** $m \geq 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \geq -1$. **D.** $m \leq -1$.

Câu 22. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $mx^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0$ có nghiệm.

- A.** $m \neq 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Câu 23. Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - m = 0$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A.** Phương trình vô nghiệm với mọi m . **B.** Phương trình có nghiệm kép với mọi m .
C. Phương trình hai nghiệm phân biệt với mọi m . **D.** Phương trình có nghiệm với mọi m .

Câu 24. Biết rằng phương trình $(x)^2 - 2(3m + 2)x + 2m^2 - 3m - 10 = 0$ có một trong các nghiệm bằng -1 . Tìm nghiệm còn lại với $m > 0$.

- A.** $x = 11$. **B.** $x = -11$. **C.** $x = 10$. **D.** $x = -10$.

Câu 25. Biết rằng phương trình $mx^2 - 4(m - 1)x + 4m + 8 = 0$ có một trong các nghiệm bằng 3 . Tìm nghiệm còn lại của phương trình.

A. $x = -\frac{6}{5}$. B. $x = -3$. C. $x = \frac{5}{6}$. D. $x = \frac{6}{5}$.

Câu 26. Tìm m để hai phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ và $x^2 + x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

A. 1. B. 2. C. -1. D. -2.

Câu 27. Tìm m để hai phương trình $x^2 + mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

A. 1. B. -3. C. -1. D. 3.

Câu 28. Cho hai phương trình $x^2 - 13x + 2m = 0$ (1) và $x^2 - 4x + m = 0$ (2). Xác định m để một nghiệm phương trình (1) gấp đôi 1 nghiệm phương trình (2).

A. -45. B. -5. C. 0 và -5. D. Đáp án khác.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án B.

Phương trình bậc hai một ẩn (hay gọi tắt là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ trong đó } a, b, c \text{ là các số thực cho trước, } x \text{ là ẩn số.}$$

Câu 2. Đáp án A.

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

TH1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

TH2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

TH3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Câu 3. Đáp án C.

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

TH1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

TH2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

TH3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Câu 4. Đáp án C.

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

TH1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

TH2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

TH3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Câu 5. Đáp án D.

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

TH1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

TH2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

TH3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Câu 6. Đáp án B.

$$\text{Ta có } 6x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(6x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Nên tổng các nghiệm của phương trình là $0 + \frac{7}{6} = \frac{7}{6}$.

Câu 7. Đáp án D.

$$\text{Ta có } -4x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Phương trình có hai nghiệm $x = \frac{3}{2}; x = -\frac{3}{2}$.

Câu 8. Đáp án A.

Thay $x = 2$ vào phương trình $4mx^2 - x - 14m^2 = 0$, ta có

$$4m \cdot 2^2 - 2 - 14m^2 = 0 \Leftrightarrow 14m^2 - 16m + 2 = 0 \Leftrightarrow (14m - 2)(m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{7} \\ m = 1 \end{cases}$$

Suy ra tích các giá trị của m là $\frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$.

Câu 9. Đáp án B.

Thay $x = -3$ vào phương trình $(m - 2)x^2 - (m^2 + 1)x + 3m = 0$, ta có

$$(m - 2)(-3)^2 - (m^2 + 1)(-3) + 3m = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 9m - 18 + 3m^2 + 3 + 3m = 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 12m - 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 5m - 5 = 0 \\
&\Leftrightarrow m(m-1) + 5(m-1) = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+5) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra tổng các giá trị của m là $(-5) + 1 = -4$.

Câu 10. Đáp án C.

Ta có $9x^2 - 15x + 3 = 0 (a = 9; b = -15; c = 3)$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4.9.3 = 117 > 0.$$

nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 11. Đáp án A.

Ta có $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0 (a = 1; b = -2\sqrt{2}; c = 2)$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4.1.2 = 0$$

nên phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Câu 12. Đáp án D.

Ta có $\sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - 1 = 0 (a = \sqrt{3}; b = \sqrt{3} - 1; c = -1)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Delta &= b^2 - 4ac = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4.\sqrt{3}.(-1) \\
&= 4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 > 0
\end{aligned}$$

suy ra $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} + 1$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = -1
\end{aligned}$$

Câu 13. Đáp án D.

Phương trình $-x^2 + 2mx - m^2 - m = 0$

$(a = -1; b = 2m; c = -m^2 - m)$.

$$\Rightarrow \Delta = (2m)^2 - 4.(-1).(-m^2 - m) = 4m^2 - 4m^2 - 4m = -4m$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 0 \\ -4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy với $m < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 14. Đáp án A.

Phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$

$$(a = 1; b = -2(m-2); c = m^2 - 3m + 5)$$

$$\Rightarrow \Delta = [-2(m-2)]^2 - 4.1.(m^2 - 3m + 5)$$

$$= 4m^2 - 16m + 16 - 4m^2 + 12m - 20 = -4m - 4$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ -4m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$$

Vậy với $m < -1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 15. Đáp án A.

Phương trình $x^2 + mx - m = 0 (a = 1; b = m; c = -m)$

$$\Rightarrow \Delta = m^2 - 4.1.(-m) = m^2 + 4m$$

$$\text{Để phương trình đã cho có nghiệm kép thì } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ m^2 + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$$

Vậy với $m = 0; m = -4$ thì phương trình có nghiệm kép.

Câu 16. Đáp án C.

Phương trình: $x^2 + (3-m)x - m + 6 = 0$, có: $a = 1; b = 3-m; c = -m+6$.

$$\text{Ta có } \Delta = (3-m)^2 - 4.1.(-m+6) = m^2 - 6m + 9 + 4m - 24 = m^2 - 2m - 15.$$

$$\text{Để phương trình đã cho có nghiệm kép thì } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ m^2 - 2m - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \quad (*).$$

Phương trình (*) có $\Delta_m = (-2)^2 - 4.1.(-15) = 64 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta_m} = 8$ nên có hai nghiệm phân

$$\text{biệt } m_1 = \frac{2+8}{2} = 5; m_2 = \frac{2-8}{2} = -3$$

Vậy với $m = 5; m = -3$ thì phương trình có nghiệm kép.

Câu 17. Đáp án B.

Phương trình $x^2 + (1-m)x - 3 = 0 (a = 1; b = 1-m; c = -3)$

$$\Rightarrow \Delta = (1-m)^2 - 4.1.(-3) = (1-m)^2 + 12 \geq 12 > 0; \forall m.$$

Nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt

Hay không có giá trị nào của m để phương trình vô nghiệm.

Câu 18. Đáp án D.

Phương trình $2x^2 + 5x + m - 1 = 0 (a = 2; b = 5; c = m-1)$

$$\Rightarrow \Delta = 5^2 - 4.2(m-1) = 25 - 8m + 8 = 33 - 8m$$

Để phương trình đã cho vô nghiệm thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \neq 0 (ld) \\ 33 - 8m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{33}{8}$

Với $m > \frac{33}{8}$ thì phương trình vô nghiệm.

Câu 19. Đáp án B.

Phương trình $(m+2)x^2 + 2x + m = 0 (a = m+2; b = 2; c = m)$ TH1: $m+2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ ta có

phương trình: $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

TH2: $m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

Ta có $\Delta = 2^2 - 4(m+2).m = -4m^2 - 8m + 4$

Để phương trình đã cho vô nghiệm thì

$$\begin{cases} m \neq -2 \\ -4m^2 - 8m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ 2 - (m+1)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ (m+1)^2 > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq -2 \\ \begin{cases} m+1 > \sqrt{2} \\ m+1 < -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 + \sqrt{2} \\ m < -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 20. Đáp án A.

Phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + m + 5 = 0$

$(a = m; b = -2(m-2); c = m+5).$

TH1: $m = 0$ ta có phương trình: $4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{4}$

TH2: $m \neq 0$. Ta có $\Delta = [-2(m-2)]^2 - 4m(m+5) = -36m + 16$

Để phương trình đã cho vô nghiệm thì $\begin{cases} m \neq 0 \\ -36m + 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 36m > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > \frac{8}{19} \end{cases} \Rightarrow m > \frac{8}{19}$

Vậy với $m > \frac{8}{19}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 21. Đáp án C.

Phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

$(a = m; b = -2(m-1); c = m-3).$

TH1: $m = 0$ ta có phương trình TH2: $m \neq 0$, ta có

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 4m.(m-3) = 4m + 4$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì $m \geq -1$.

Câu 22. Đáp án D.

Phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + 1 = 0$

TH1: $m = 0$ ta có phương trình $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ nên nhận $m = 0$ (1)

TH2: $m \neq 0$, ta có $\Delta = 4(m+1)^2 - 4m.1 = 4m^2 + 4m + 4 = 4m^2 + 4m + 1 + 3 = (2m+1)^2 + 3$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 \geq -3$ (luôn đúng với mọi m) (2)

Từ (1) và (2) ta thấy phương trình đã cho có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 23. Đáp án D.

Phương trình $x^2 - (m-1)x - m = 0$

$a = 1; b = -(m-1); c = -m$.

Suy ra $\Delta = [-(m-1)]^2 - 4.1.(-m) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 \geq 0, \forall m$

Nên phương trình đã cho có nghiệm với mọi m .

Câu 24. Đáp án A.

Thay $x = -1$ vào phương trình: $(-1)^2 - 2(3m+2).(-1) + 2m^2 - 3m - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 5 = 0 \Leftrightarrow (2m+5)(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{2} (L) \\ m = 1 (N) \end{cases}$$

+) Với $m = 1$ ta có phương trình $x^2 - 10x - 11 = 0 \Leftrightarrow (x-11)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -1 \end{cases}$

Vậy nghiệm còn lại của phương trình là $x = 11$.

Câu 25. Đáp án D.

Thay $x = 3$ vào phương trình: $m.3^2 - 4(m-1).3 + 4m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -20$

Với $m = -20$ ta có phương trình $-20x^2 + 84x - 72 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 21x + 18 = 0$

Phương trình trên có $\Delta = (-21)^2 - 4.5.18 = 81 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9$

$$\text{nên có hai nghiệm phân} \begin{cases} x = \frac{21+9}{2.5} = 3 \\ x = \frac{21-9}{2.5} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Vậy nghiệm còn lại của phương trình là $x = \frac{6}{5}$.

Câu 26. Đáp án D.

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì x_0 phải thỏa mãn hai phương trình trên.

$$\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + x_0 + m = 0 \end{cases}$$

Thay $x = x_0$ vào hai phương trình trên ta được

$$\Rightarrow (m-1)x_0 + 1 - m = 0 \Leftrightarrow (m-1)(x_0 - 1) = 0(*)$$

Xét phương trình (*)

+) Nếu $m = 1$ thì $0 = 0$ (luôn đúng) hay hai phương trình trùng nhau.

Lúc này phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm nên cả hai phương trình đều vô nghiệm.

Vậy $m = 1$ không thỏa mãn.

+) Nếu $m \neq 1$ thì $x_0 = 1$.

Thay $x_0 = 1$ vào phương trình $x_0^2 + mx_0 + 1 = 0$ ta được $m = -2$.

Vậy $m = -2$ thì hai phương trình có nghiệm chung.

Câu 27. Đáp án B.

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì x_0 phải thỏa mãn hai phương trình trên.

$$\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 2 = 0 \\ x_0^2 + 2x_0 + m = 0 \end{cases}$$

Thay $x = x_0$ vào hai phương trình trên ta được

$$\Rightarrow (m-2)x_0 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (m-2)(x_0 - 1) = 0$$

+) Nếu $m = 2$ thì $0 = 0$ (luôn đúng) hay hai phương trình trùng nhau.

Lúc này phương trình $x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -1$ vô nghiệm nên cả hai phương trình đều vô nghiệm.

Vậy $m = 2$ không thỏa mãn.

+) Nếu $m \neq 2$ thì $x_0 = 1$.

Thay $x_0 = 1$ vào phương trình $x_0^2 + mx_0 + 2 = 0$ ta được $1 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy $m = -3$ thì hai phương trình có nghiệm chung.

Câu 28. Đáp án A.

Gọi nghiệm phương trình (2) là $x_0 (x_0 \neq 0)$ thì nghiệm phương trình (1) là $2x_0$.

Thay $x_0, 2x_0$ lần lượt vào phương trình (2) và (1) ta

$$\text{được } \begin{cases} (2x_0)^2 - 13.2x_0 + 2m = 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0^2 - 26x_0 + 2m = 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0^2 - 26x_0 + 2m = 0 \\ 4x_0^2 - 16x_0 + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 10x_0 = -2m \Leftrightarrow x_0 = -\frac{m}{5}$$

Do $x_0 \neq 0$ nên $m \neq 0$.

$$\text{Thay } x_0 = -\frac{m}{5} \text{ vào phương trình (2) ta được } \left(-\frac{m}{5}\right)^2 - 4\left(-\frac{m}{5}\right) + m = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2}{25} + \frac{4m}{5} + m = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{25} + \frac{9m}{5} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -45 \end{cases}$$

Kết hợp $m \neq 0$ ta được $m = -45$.

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c .

a. $2x^2 - 2x = 5 + x$

b. $x^2 + 2x = mx + m$, m là một hằng số

c. $2x^2 + \sqrt{2}(3x - 1) = 1 + \sqrt{2}$

Bài 2: Lập phương trình bậc hai có các hệ số là các số hữu tỉ có một nghiệm là $\sqrt{2} + 1$. Xác định các hệ số của phương trình

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $x^2 - 5 = 0$

b. $x^2 - 3x = 0$

c. $2x^2 + 3 = 0$

Bài 4: Biến đổi về trái thành tích, rồi giải các phương trình sau:

a. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

b. $x^2 - x - 12 = 0$

c. $x^2 - 3(x - 1)^2 = 0$

Bài 5: Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng $a.(x + m)^2 = m$

a. $x^2 + 6x - 16 = 0$

b. $2x^2 - 6x + 1 = 0$

Bài 6: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ hệ số a, b, c

a. $3x^2 + 5x = 7 - 2x$

b. $2x^2 + m^2 = 2(m-1)x$, m là một hằng số

Bài 7: Giải phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Bài 8: Khi giải phương trình $3x^2 + 6 = 0$, bạn Bảo trình bày như sau

$$3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = -2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-2} \text{ . Vô lí}$$

Vậy phương trình vô nghiệm. Theo em, trong cách trình bày của bạn Bảo có chỗ nào cần sửa, và nên sử dụng như thế nào?

Bài 9 : Giải phương trình $3x^2 + 18x + 12 = 0$ bằng cách biến đổi thành những phương trình mà vế trái là một bình phương, còn vế phải là một hằng số

Bài 10: Cho phương trình $ax^2 + c = 0$, với a khác 0, với điều kiện nào của a và c thì phương trình có nghiệm

Bài 11 : Giải phương trình $\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x = 0$

Bài 12: Cho phương trình $(2x+1)^2 - (x-2)^2 = 0$. Viết phương trình dưới dạng $ax^2 + bx + c = 0$. Tính giá trị $a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 13: Cho $\sqrt{3}$ là một nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{Q}$). Tìm nghiệm còn lại.

Bài 14: Nhận thấy rằng phương trình tích $(x-1)(x-2) = 0$ hay phương trình bậc hai $x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2$. Tương tự hãy lập những phương trình bậc hai mà nghiệm mỗi phương trình là một trong những cặp số sau:

a. $x_1 = 2; x_2 = 5$

b. $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 3$

c. $x_1 = 1 - \sqrt{2}; x_2 = 1 + \sqrt{2}$

Bài 15 : Biết rằng $x = 1 - \sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + 3 = a$. Tính a .

Bài 16: Tìm a, b, c để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -2; x_2 = 3$.

Có thể tìm được bao nhiêu bộ ba số a, b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán?

Bài 17: Biết rằng phương trình $3x^2 - 4x + mx = 0$ có nghiệm nguyên dương bé hơn 3. Tìm m

Bài 18: Cho phương trình $(m^2 + 1)x^2 + m = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm

Bài 19: Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2x = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Bài 20: Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có thể có nghiệm kép được không? Khi nào thì điều đó xảy

ra?

Bài 21 : Cho a, b, c là các số thực có tổng khác 0. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm

$$a(x-a)(x-c) + b(x-c)(x-a)(x-b) = 0 \quad (1)$$

Bài 22: Cho a, b, c thỏa mãn $3a + 4b + 6c = 0$. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Bài 23: Cho các số thực dương m, n, p thỏa mãn $m < n; mp < n^2$ và $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0$. Chứng minh rằng

phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0; 1)$

HƯỚNG DẪN

Bài 1:

a. $2x^2 - 2x = 5 + x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 : a = 2; b = -3; c = -5$

b. $x^2 + 2x = mx + m \Leftrightarrow x^2 + (2 - m)x - m = 0 : a = 1; b = 2 - m; c = -m$

c. $2x^2 + \sqrt{2}(3x - 1) = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 1 = 0 : a = 2; b = 3\sqrt{2}; c = -2\sqrt{2} - 1$

Bài 2: Gọi phương trình bậc hai phải tìm là $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x = \sqrt{2} + 1$

$$\Leftrightarrow a(\sqrt{2} + 1)^2 + b(\sqrt{2} + 1) + c = 0 \Leftrightarrow (3a + b + c) + \sqrt{2}(2a + b) = 0$$

$$\text{Vì } a, b, c \in \mathbb{Q}; \sqrt{2} \in \mathbb{I} \text{ nên } \begin{cases} 3a + b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -a \end{cases}$$

Thay vào phương trình ta được: $ax^2 - 2ax - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

Vậy hệ số $a = 1; b = -2; c = -1$

Bài 3:

a. $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}$

b. $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$

c. $2x^2 + 3 = 0$

Ta có: $2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 3 > 0$

Vậy phương trình vô nghiệm

Bài 4:

a. $2x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-1; -\frac{3}{2}\right\}$

$$\text{b. } x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-3; 4\}$

$$\text{c. } x^2 - 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - [\sqrt{3}(x-1)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3}x + 1)(x + \sqrt{3}x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \sqrt{3}) + 1 = 0 \\ x(1 + \sqrt{3}) - 1 = 0 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}-1}; \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right\}$

Bài 5:

$$\text{a. } x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 16 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 16 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 5 \\ x+3 = -5 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-8; 2\}$

$$\text{b. } 2x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ x - \frac{3}{2} = \frac{-\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{\frac{3+\sqrt{7}}{2}; \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right\}$

Bài 6:

$$\text{a. } 3x^2 + 5x = 7 - 2x \Leftrightarrow 3x^2 + 7x - 7 = 0 \quad (a=3; b=7; c=-7)$$

$$\text{b. } 2x^2 + m^2 = 2(m-1)x \Leftrightarrow 2x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0 \quad (a=2; b=2(m-1); c=m^2)$$

Bài 7:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x-2) - 3(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ hoặc } x-3=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=3$$

Bài 8: Cách trình bày của Bảo có một chỗ chưa hợp lí đó là $x = \pm\sqrt{-2}$, vì không tồn tại căn bậc hai của số -2

Có hai cách trình bày :

Cách 1: $3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = -2$ (khẳng định sai) vậy phương trình vô nghiệm

Cách 2: Vì $3x^2 \geq 0$ nên $3x^2 + 6 \geq 6 \Rightarrow$ Không thỏa mãn $3x^2 + 6 = 0$, vậy phương trình vô nghiệm

Bài 9:

$$3x^2 + 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 18x = -12 \Leftrightarrow x^2 + 6x = -4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2.3x + 9 = -4 + 9 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{5}$$

Bài 10: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$.

Vì $x^2 \geq 0$ nên muốn cho phương trình có nghiệm thì $\frac{-c}{a} \geq 0$

Vậy điều kiện để phương trình $ax^2 + c = 0$ có nghiệm là $c = 0$ hoặc a và c trái dấu

Bài 11: $\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{5}{6}$

Bài 12:

Ta có: $(2x + 1)^2 - (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0$

Nên $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 8^2 + (-3)^2 = 82$

Bài 13:

Ta có $\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ nên:

$$3.a + \sqrt{3}.b + c = 0 \text{ mà } a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow c = -3a$$

Thay vào phương trình ta được: $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

Bài 14:

a. Hai số 2 và 5 là nghiệm của phương trình:

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

b. Hai số $-\frac{1}{2}$ và 3 là nghiệm của phương trình:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

c. Hai số $1 - \sqrt{2}$ và $1 + \sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình:

$$\left[x - (1 - \sqrt{2}) \right] \left[x - (1 + \sqrt{2}) \right] = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

Bài 15: Thay $x = 1 - \sqrt{2}$ vào phương trình $a = (1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) + 3 = 4$

Bài 16:

$x = -2$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ta có: $4a - 2b + c = 0$

$x = 3$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ta có: $9a + 3b + c = 0$

Khi đó bộ số a, b, c là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 5b = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ 4a - 2(-a) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = -6a \end{cases}$$

Do đó với mọi $a \neq 0$ ta có: $\begin{cases} a \\ b = -a \\ c = -6a \end{cases}$ suy ra $ax^2 - ax - 6a = 0 \Leftrightarrow a(x^2 - x - 6) = 0$

Với $a = 1$ ta có phương trình: $x^2 - x - 6 = 0$

Với $a = 1$ ta có phương trình: $2x^2 - 2x - 12 = 0$

Vậy có vô số bộ số a, b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 17:

Ta có: $x(3x - 4 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4 - m}{3} \end{cases}$

Để phương trình có nghiệm nguyên dương bé hơn 3 thì:

$$\begin{cases} \frac{4 - m}{3} = 1 \\ \frac{4 - m}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Bài 18: $(m^2 + 1)x^2 + m = 0 \Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 = -m$. Vì $(m^2 + 1)x^2 \geq 0$, nên muốn cho phương trình có nghiệm thì $-m \geq 0 \Rightarrow m \leq 0$

Bài 19: $(m - 1)x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x[(m - 1)x - 2] = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } (m - 1)x - 2 = 0$$

Muốn cho phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(m - 1)x^2 - 2x = 0$ phải có nghiệm khác 0. Vậy $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Bài 20: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$. Nếu phương trình có nghiệm thì $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

Do đó để phương trình có nghiệm kép thì $\sqrt{\frac{-c}{a}} = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ hay $2\sqrt{\frac{-c}{a}} = 0 \Rightarrow c = 0$. Vậy phương trình có nghiệm kép khi $c = 0$

Bài 21 : Gọi $f(x)$ là vế trái của phương trình (1). Ta có

$$f(0) = -3abc; f(a) = a(a-b)(a-c); f(b) = b(b-a)(b-c); f(c) = c(c-a)(c-b)$$

$$\Rightarrow f(0).f(a).f(b).f(c) = -3[abc(a-b)(b-c)(c-a)]^2 \leq 0$$

$\Rightarrow$ Trong 4 số $f(0); f(a); f(b); f(c)$ luôn tồn tại hai số có tích không dương

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Bài 22: Ta có $f(0) = c; f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c = \frac{9a+12b+16c}{16} = \frac{3(3a+4b+6c)-2c}{16} = \frac{-c^2}{8}$

$$\Rightarrow f(0).f\left(\frac{3}{4}\right) \leq 0. \text{ Vậy phương trình luôn có nghiệm}$$

Bài 23: Để chứng minh phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0;1)$ ta sẽ chỉ ra các số thực

$\alpha; \beta \in (0;1)$ sao cho $f(\alpha).f(\beta) < 0$. Vì $\alpha, \beta \in (0;1)$ và giả thiết $n < m \Leftrightarrow \frac{n}{m} < 1$ nên ta xét

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = a \frac{n^2}{m^2} + b \frac{n}{m} + c. \text{ Mặt khác từ: } \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0 \Rightarrow \frac{m}{n^2} \left(a \cdot \frac{n^2}{m^2} + b \cdot \frac{m}{n} + c \right) + c \left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{n^2} f\left(\frac{n}{m}\right) + c \cdot \frac{n^2 - pm}{pn^2} = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pm - n^2}{pm} c = \frac{pm - n^2}{pm} f(0)$$

- Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x)$ là đa thức không, do đó $f(x)$ sẽ có nghiệm trong $(0;1)$

- Nếu $a \neq 0$, từ giả thiết $\Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{n}{m} < 1$ và $f(x) = x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a} \in (0;1)$

* Xét $c \neq 0$ ta có : $f\left(\frac{n}{m}\right).f(0) = \frac{pm - n^2}{pm} f^2(0) < 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{n}{m}\right) \subset (0;1)$

-----**Toán Học Sơ Đồ**-----