

CHUYÊN ĐỀ CHỨNG MINH CHIA HẾT

DẠNG 1: CHỨNG MINH CHIA HẾT

Bài 1: Chứng minh rằng:

a, $\overline{ab} + \overline{ba} : 11$

b, $\overline{ab} - \overline{ba} : 9$ ($a > b$)

c, $\overline{abcabc} : 7, 11, 13$

HD:

a, Ta có : $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11b + 11a : 11$

b, Ta có : $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b : 9$

c, Ta có : $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 : 7, 11, 13$

Bài 2: Chứng minh rằng:

a, $(n+10)(n+15) : 2$

b, $n(n+1)(n+2) : 2, 3$

c, $n^2 + n + 1$ không : 4, 2, 5

HD:

a, Ta có: Nếu n là số lẻ thì $n+15 : 2$

Nếu n là số chẵn thì $n+10 : 2$, Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì : $(n+10)(n+15) : 2$

b, Ta có: Vì $n(n+1)(n+2)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có 1 số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3

c, Ta có : $n(n+1)+1$ là 1 số lẻ nên không : cho 4, 2 và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

Bài 3: Chứng minh rằng:

a, $(n+3)(n+6) : 2$

b, $n^2 + n + 6$ không : 5

c, $\overline{aaabbb} : 37$

HD:

a, Ta có: Nếu n là số chẵn thì $n+6 : 2$

Nếu n lẻ thì $n+3 : 2$, Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì $(n+3)(n+6) : 2$

b, Ta có : $n^2 + n + 6 = n(n+1) + 6$, Vì $n(n+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên chỉ có chữ số tận

cùng là : 0, 2, 6, Do đó : $n(n+1) + 6$ sẽ có tận cùng là 6, 8, 2 nên không : 5

c, Ta có : $\overline{aaabbb} = \overline{aaa000} + \overline{bbb} = a.11100 + b.111 = a.300.37 + b.3.37$ chia hết cho 37

Bài 4: Chứng minh rằng:

a, $\overline{aaa} : a, 37$

b, $ab(a+b) : 2$

c, $\overline{abc} - \overline{cba} : 99$

HD:

a, Ta có : $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$ chia hết cho a và chia hết cho 37

b, Ta có: Vì a, b là hai số tự nhiên nên a, b có các TH sau:

TH1: a, b cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow (a+b)$ là 1 số chẵn như vậy $a+b$ chia hết cho 2

TH2: a, b khác tính chẵn lẻ thì 1 trong 2 số phải có 1 số chẵn khi đó số đó chia hết cho 2

c, Ta có: $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) : 99$

Bài 5: CMR : $\overline{ab} + 8\overline{ba} : 9$

HD:

Ta có: $\overline{ab} + 8\overline{ba} = 10a + b + 8(10b + a) = 18a + 18b = 18(a + b) : 9$

Bài 6: Chứng minh rằng: $ab(a+b) : 2, \forall a, b \in N$

Bài 7: Chứng minh rằng số có dạng : $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11

HD :

Ta có : $\overline{abcabc} = a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + b.10 + c = a.10^2(10^3 + 1) + b.10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$
 $= (10^3 + 1)(a.10^2 + b.10 + c) = 1001(a.10^2 + b.10 + c) = 11.91.\overline{abc} : 11$

Bài 8: Tìm n là số tự nhiên để: $A = (n+5)(n+6) : 6n$

HD:

Ta có: $A = 12n + n(n-1) + 30$, Để $A:6n \Rightarrow n(n-1) + 30:6n$

Ta có: $n(n-1):n \Rightarrow 30:n \Rightarrow n \in U(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

Và $n(n-1):6 \Rightarrow n(n-1):3 \Rightarrow n \in \{1; 3; 6; 10; 15; 30\}$

Thử vào ta thấy $n \in \{1; 3; 10; 30\}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài

Bài 9: CMR: $2x+y:9$ thì $5x+7y:9$

HD:

Ta có: $2x+y:9 \Rightarrow 7(2x+y):9 \Rightarrow 14x+7y:9 \Rightarrow 9x+5x+7y:9 \Rightarrow 5x+7y:9$

Bài 10: Chứng minh rằng:

a, Nếu $\overline{ab+cd}:11$ thì $\overline{abcd}:11$

b, Cho $\overline{abc}-\overline{deg}:7$ cmr $\overline{abcdeg}:7$

HD:

a, Ta có: $\overline{ab+cd} = a.10 + b + 10c + d = (a+c)10 + b + d = \overline{(a+c)(b+d)}:11$ hay $(a+c) - (b+d):11$

Khi đó $\overline{abcd}:11$ vì có $(a+c) - (b+d):11$

b, Ta có:

Ta có $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$ mà $\overline{abc} - \overline{deg}:7$ nên $\overline{abcdeg}:7$

Bài 11: Chứng minh rằng:

a, CMR: $\overline{ab} = 2.\overline{cd} \rightarrow \overline{abcd}:67$

b, Cho $\overline{abc}:27$ cmr $\overline{bca}:27$

HD:

a, Ta có: Ta có $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 200\overline{cd} + \overline{cd} = 201\overline{cd}:67$

b, Ta có: Ta có $\overline{abc}:27 \Rightarrow \overline{abc0}:27 \Rightarrow 1000a + \overline{bc0}:27 \Rightarrow 999a + a + \overline{bc0}:27 \Rightarrow 27.37a + \overline{bca}:27$

Nên $\overline{bca}:27$

Bài 12: Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcdeg}:23, 29$ nếu $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$

b, Cmr nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}):11$ thì $\overline{abcdeg}:11$

HD:

a, Ta có: $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1000.2\overline{deg} + \overline{deg} = 2001\overline{deg} = \overline{deg}.23.29.3$

b, Ta có: $\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg} = 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}):11$

Bài 13: Chứng minh rằng:

a, Cho $\overline{abc} + \overline{deg}:37$ cmr $\overline{abcdeg}:37$

b, Nếu $\overline{abcd}:99$ thì $\overline{ab} + \overline{cd}:99$

HD:

a, Ta có: $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg}):37$

b, Ta có: $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd}):99 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd}:9$

Bài 14: Chứng minh rằng: m, Nếu $\overline{abcd}:101$ thì $\overline{ab} - \overline{cd}:101$

HD:

Ta có: $\overline{abcd}:101 \Rightarrow 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - \overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - (\overline{ab} - \overline{cd}):101 \Rightarrow \overline{ab} - \overline{cd}:101$

Bài 15: Chứng minh rằng:

a, $2a - 5b + 6c : 17$ nếu $a - 11b + 3c : 17$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) b, $3a + 2b : 17 \Leftrightarrow 10a + b : 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

HD:

a, Ta có: $a - 11b + 3c : 17$ và $17a - 34b + 51c : 17$ nên $18a - 45b + 54c : 17 \Rightarrow 9(2a - 5b + 6c) : 17$

b, Ta có: $3a + 2b : 17$ và $17a - 34b : 17$ nên $20a - 32b : 17 \Leftrightarrow 10a - 16b : 17$

$\Leftrightarrow 10a + 17b - 16b : 17 \Leftrightarrow 10a + b : 17$

Bài 16: Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcd}:29 \Leftrightarrow a + 3b + 9c + 27d:29$

b, $\overline{abc}:21 \Leftrightarrow a - 2b + 4c:21$

HD:

a, Ta có: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d:29 \Rightarrow 2000a + 200b + 20c + 2d:29$

$\Rightarrow 2001a - a + 203b - 3b + 29c - 9c + 29d - 27d:29$

$$\Rightarrow (2001a+203b+29c+29d) - (a+3b+9c+27d) : 29 \Rightarrow (a+3b+9c+27d) : 29$$

$$b, \text{Ta có: } \overline{abc} = 100a + 10b + c : 21 \Rightarrow 100a - 84a + 10b - 42b + c + 63c : 21$$

$$\Rightarrow 16a - 32b + 64c : 21 \Rightarrow 16(a - 2b + 4c) : 21$$

Bài 17: Chứng minh rằng:

$$a, \overline{abcd} : 4 \leftrightarrow d + 2c : 4 \quad b, \overline{abcd} : 16 \rightarrow d + 2c + 4b + 8a : 16 \text{ (c chẵn)}$$

HD:

$$a, \text{Ta có: Vì e, } \overline{abcd} : 4 \rightarrow \overline{cd} : 4 \rightarrow 10c + d : 4 \rightarrow 2c + d : 4$$

$$b, \text{Ta có: Vì } \overline{abcd} : 16 \Rightarrow 1000a + 100b + 10c + d : 16 \Rightarrow 992a + 8a + 96b + 4b + 8c + 2c + d : 16$$

$$\Rightarrow (992a + 96b + 8c) + (8a + 4b + 2c + d) : 16, \text{ mà c chẵn nên } 8c : 16 \Rightarrow (8a + 4b + 2c + d) : 16$$

Bài 18: Chứng minh rằng:

$$a, \text{Cho } a - b : 7 \text{ cmr } 4a + 3b : 7 \text{ (a, b} \in \mathbb{Z}) \quad b, \text{Cmr } m + 4n : 13 \leftrightarrow 10m + n : 13$$

HD:

$$a, \text{Ta có: } a - b : 7 \text{ nên } 4(a - b) : 7 \Rightarrow 4a - 4b + 7b : 7 \Rightarrow 4a + 3b : 7$$

$$b, \text{Ta có: } m + 4n : 13 \Rightarrow 10(m + 4n) : 13 \Rightarrow 10m + 40n - 39n : 13 \Rightarrow 10m + n : 13$$

Bài 19: Cho a, b là các số nguyên, CMR nếu $6a + 11b : 31$ thì $a + 7b$ cũng $: 31$, điều ngược lại có đúng không?

HD:

$$\text{Ta có: } 6a + 11b : 31 \Rightarrow 6(a + 7b) - 31b : 31 \Rightarrow a + 7b : 31$$

Bài 20: Cho a, b là các số nguyên, CMR $5a + 2b : 17$ khi và chỉ khi $9a + 7b : 17$

HD:

$$\text{Ta có: } 5a + 2b : 17 \Rightarrow 5a - 68a + 2b - 51b : 17 \Rightarrow -63a - 49b : 17 \Rightarrow -7(9a + 7b) : 17 \Rightarrow 9a + 7b : 17$$

Bài 21: Cho a, b là các số nguyên, CMR nếu $2a + 3b : 7$ thì $8a + 5b : 7$

HD:

$$\text{Ta có: } 2a + 3b : 7 \Rightarrow 4(2a + 3b) : 7 \Rightarrow 8a + 12b : 7 \Rightarrow 8a + 12b - 7b : 7 \Rightarrow 8a + 5b : 7$$

Bài 22: Cho a, b là các số nguyên, CMR nếu $a - 2b : 7$ thì $a - 9b : 7$, điều ngược lại có đúng không?

HD:

$$\text{Ta có: } a - 2b : 7 \Rightarrow a - 2b - 7b : 7 \Rightarrow a - 9b : 7, \text{ Điều ngược lại vẫn đúng}$$

Bài 23: Cho a, b là các số nguyên và $5a + 8b : 3$ cmr

$$a, -a + 2b : 3 \quad b, 10a + b : (-3) \quad c, a + 16b : 3$$

HD:

$$a, \text{Ta có: } 5a + 8b : 3 \Rightarrow 5a - 6a + 8b - 6b : 3 \Rightarrow -a + 2b : 3$$

$$b, \text{Ta có: } 5a + 8b : 3 \Rightarrow 2(5a + 8b) : 3 \Rightarrow 10a + 16b : 3 \Rightarrow 10a + 16b - 15b : 3$$

$$c, \text{Ta có: } 5a + 8b : 3 \Rightarrow 5(a + 16b) - 72b : 3 \Rightarrow a + 16b : 3$$

Bài 24: Cho biết $a - b : 6$, CMR các biểu thức sau cũng chia hết cho 6

$$a, a + 5b \quad b, a + 17b \quad c, a - 13b$$

HD:

$$a, \text{Ta có: } a - b : 6 \Rightarrow a - b + 6b : 6 \Rightarrow a + 5b : 6$$

$$b, \text{Ta có: } a - b : 6 \Rightarrow a - b + 18b : 6 \Rightarrow a + 17b : 6$$

$$c, \text{Ta có: } a - b : 6 \Rightarrow a - b - 12b : 6 \Rightarrow a - 13b : 6$$

Bài 25: CMR : nếu $x + 2 : 5$ thì $3x - 4y : 5$ và ngược lại

Bài 26: Cho hai số nguyên a và b không chia hết cho 3, nhưng khi chia cho 3 thì có cùng số dư:

$$\text{CMR: } (ab - 1) : 3$$

HD:

$$\text{Ta có: } a = 3p + r, b = 3q + r \text{ (p, q, r} \in \mathbb{Z}, r = 1, 2) \text{ khi đó}$$

$$ab - 1 = (3p + r)(3q + r) - 1 = 3p(3q + r) + r(3q + r) - 1 = 9pq + 3pr + 3qr + r^2 - 1 \begin{cases} r = 1 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 : 3 \\ r = 2 \Rightarrow r^2 - 1 = 3 : 3 \end{cases}$$

Bài 27: Chứng minh rằng nếu viết thêm vào đằng sau 1 số tự nhiên có hai chữ số gồm chính hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì được 1 số chia hết cho 11.

HD:

Ta có : Gọi số tự nhiên có 2 chữ số là $\overline{ab}$ theo bài ra ta có

$$\overline{abba} : 11 \text{ vì } \overline{abba} = 1001a + 110b = 7 \cdot 11 \cdot 13a + 11 \cdot 10b$$

Bài 28: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 3, còn tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp thì không chia hết cho 4

HD:

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2$ xét tổng

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$ xét tổng, ta được

$$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6 \not\vdots 4$$

Bài 29: Chứng minh rằng tổng của 5 số chẵn liên tiếp thì chia hết cho 10, còn tổng của 5 số lẻ liên tiếp thì không chia hết cho 10

HD:

Gọi 5 số chẵn liên tiếp là $a, a+2, a+4, a+6, a+8$ xét tổng, ta được:

$$a + (a+2) + (a+4) + (a+6) + (a+8) = 5a + 20 \vdots 10 \text{ Vì } a \text{ là số chẵn}$$

Tương tự với 5 số lẻ liên tiếp : $2a-1, 2a+1, 2a+3, 2a+5, 2a+7$, xét tổng ta được :

$$(2a-1) + (2a+1) + (2a+3) + (2a+5) + (2a+7) = 10a + 15 \not\vdots 10$$

Bài 30: Khi chia 135 cho 1 số tự nhiên ta được thương là 6 và còn dư, Tìm số chia và thương

HD:

Gọi số chia là x và số dư là r , Khi đó $135 = 6x + r (0 < r < x)$

$$\Rightarrow r = 135 - 6x \Rightarrow 0 < 135 - 6x < x$$

$$\text{Từ } 135 - 6x > 0 \Rightarrow 6x < 135 \Rightarrow x < 22\frac{1}{2}$$

$$\text{Từ } 135 - 6x < x \Rightarrow x > \frac{135}{7} \Rightarrow x > 19\frac{2}{7}, \text{ Vậy } x = 20, 21, 22$$

Bài 31: Bạn Thắng học sinh lớp 6A viết 1 số có hai chữ số mà tổng các chữ số của nó là 14, sau đó bạn Thắng đem chia số đó cho 8 thì được dư là 4, nhưng khi chia cho 12 thì được dư là 3

a, CMR bạn Thắng làm sai ít nhất 1 phép chia

b, Nếu phép chia thứ nhất đúng, thì phép chia cho 12 dư bao nhiêu?

HD:

Gọi số cần tìm là $n = \overline{ab}$

a, n chia 8 dư 4 $\Rightarrow n$ chẵn và n chia 12 dư 3 $\Rightarrow n$ lẻ $\Rightarrow$ mâu thuẫn

b, Vì $a+b=14$ nên $\overline{ab} : 3$ dư 2 khi đó $4\overline{ab}$ chia 12 dư 8

Nếu phép chia thứ nhất đúng thì $\overline{ab}$ chia 8 dư 4 $\Rightarrow \overline{ab} : 4 \Rightarrow 3\overline{ab} : 12 \Rightarrow n$ chia 12 dư 8

Bài 32: Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ chia hết cho 37 thì $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$ đều chia hết cho 37

Bài 33: Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Bài 34: Tìm 1 số tự nhiên biết nếu chia cho 17 thì được số dư đúng bằng hai lần bình phương của số thương

Bài 35: Chứng minh rằng không thể tồn tại 1 số tự nhiên khi chia cho 21 dư 7 và khi chia cho 84 lại dư 3

Bài 36: Cho 4 số nguyên dương khác nhau thỏa mãn : tổng của hai số bất kì chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kì chia hết cho 3, Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số đó

Bài 37: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 5 và 27, biết rằng hai số giữa của nó là 97

HD:

Gọi số cần tìm là $\overline{a97b}$ vì $\overline{a97b} : 5$ nên $b = 0$ hoặc $b = 5 \Rightarrow 2$ trường hợp

TH1: Với $b = 0 \Rightarrow \overline{a970} : 27 \Rightarrow a + 9 + 7 + 0 = a + 16 : 9 \Rightarrow a = 2$, Khi đó số cần tìm là 2970 thỏa mãn chia hết cho 27

TH2: Với $b = 5 \Rightarrow \overline{a975} : 27 \Rightarrow a + 9 + 7 + 5 = a + 21 : 9 \Rightarrow a = 6$, Khi đó số cần tìm là 6975 không chia hết cho 27

Bài 38: Tìm 1 số có hai chữ số biết số đó chia hết cho tích các chữ số của nó

HD:

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 10a + b \text{ Mà } \overline{ab} : a.b \Rightarrow 10a + b : ab \Rightarrow 10a + b : a \Rightarrow b : a \Rightarrow b = k.a (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{Và } 10a + b : b \Rightarrow 10a : b, \text{ mà do } b \text{ chia hết cho } a \Rightarrow 10a = b.q \Rightarrow 10a = z.k.q \Rightarrow 10 = k.q$$

Do k là số có 1 chữ số nên $k = 1; 2; 5$

Với $k=1 \Rightarrow a=b$, ta có các số 11, 22, 33, ..., 99, có số 11 thỏa mãn

Với $k=2 \Rightarrow b=2a$, ta có các số 12, 24, 36, 48, có các số 12, 24, 36 thỏa mãn

Với $k=5 \Rightarrow b=5a$ ta có số 15 thỏa mãn.

Vậy các số cần tìm là 11, 12, 24, 36, 15

Bài 39: Cho số tự nhiên $\overline{ab}$ bằng ba lần tích các chữ số của nó, cmr $b : a$

HD:

$$\text{Ta có: } \overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \Rightarrow 10a + b : a \Rightarrow b : a$$

Bài 40: Tìm a, b, c biết: $\overline{2009abc} : 315$

HD:

$$\text{Ta có: } 315 = 5.7.9, \text{ Mà } (5; 7; 9) = 1 \Rightarrow \overline{2009abc} : BCNN(5; 7; 9)$$

$$\text{Ta có: } \overline{2009abc} = 2009000 + \overline{abc} = 315.6377 + 245 + \overline{abc}$$

$$\Rightarrow (245 + \overline{abc}) : 315 \Rightarrow 315 \in U(245 + \overline{abc})$$

$$\text{Mà } 100 \leq \overline{abc} \leq 999 \Rightarrow 345 \leq 245 + \overline{abc} \leq 1244 \Rightarrow 245 + \overline{abc} \in \{630; 945\} \Rightarrow \overline{abc} \in \{385; 700\}$$

Bài 41: Tìm a, b biết: $a-b=3$ và $(14a3 + 35b2) : 9$

HD:

$$\text{Ta có: Đề: } \overline{14a3} + \overline{35b2} : 9 \Rightarrow 1 + 4 + a + 3 + 3 + 5 + b + 2 = a + b + 18 : 9 \Rightarrow a + b : 9$$

mà a và b là số có 1 chữ số nên $a + b = 0, a + b = 9, a + b = 18$

kết hợp với $a - b = 3$ để tìm a và b

Bài 42: Tìm a, b biết: c, $\overline{5a6b2} : 3$ và $a - b = 4$

HD:

$$\text{Đề } \overline{5a6b2} : 3 \Rightarrow 5 + a + 6 + b + 2 = a + b + 13 : 3 \Rightarrow a + b + 1 : 3$$

Do a, b là hai số tự nhiên có 1 chữ số nên:

$a + b = 2, a + b = 5, a + b = 8, a + b = 11, a + b = 14, a + b = 17, \dots$ Kết hợp với $a - b = 4$ để tìm a, b

Bài 43: Tìm a, b biết rằng: $(1999 + \overline{1a6}) : 29$

Bài 44: Tìm a biết rằng: $(1999 + \overline{19a8}) : 1997$

Bài 45: Cho $x - y = 7 (x, y \in \mathbb{Z})$, CMR các biểu thức sau chia hết cho 7

a/ $22x - y$

b/ $8x + 20y$

c/ $11x + 10y$

HD:

$$\text{a, Ta có: } x - y = 7 \Rightarrow x - y : 7 \Rightarrow x - y + 21x : 7 \Rightarrow 22x - y : 7$$

$$\text{b, Ta có: } x - y = 7 \Rightarrow (x - y) + (7x + 21y) : 7 \Rightarrow 8x + 20y : 7$$

$$\text{c, Ta có: } x - y : 7 \Rightarrow 11x - 11y : 7 \Rightarrow 11x - 11y + 21y : 7 \Rightarrow 11x + 10y : 7$$

Bài 46: Cho $A = \overline{111...1}$ Gồm 20 chữ số 1: hỏi A có chia hết cho 111 không?

HD:

$$\text{Ta có: } 111 = 3.37, \text{ nên để } \overline{111...1} : 111 \Rightarrow \overline{111...1} : 3 \text{ và chia hết cho } 37$$

$$\text{Ta có: } \overline{111...1} \text{ (20 số 1) có tổng các chữ số là } 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 20$$

không chia hết cho 3 nên $\overline{111...1} \nmid 111$

Bài 47: CMR: nếu $7x+4y : 29$ thì $9x+y : 29$

HD:

$$\text{Ta có: } 7x+4y:9 \Rightarrow 36x-29x+4y:9 \Rightarrow 36x+4y:9 \Rightarrow 4(9x+y):9 \Rightarrow 9x+y:9$$

Bài 48: CMR nếu $\overline{abcd} : 29$ thì $a+3b+9c+27d$ chia hết cho 29

HD:

$$\text{Ta có: } \overline{abcd} : 29 \Leftrightarrow 1000a+100b+10c+d : 29$$

$$\Leftrightarrow 200a+200b+20c+2d : 29 \Leftrightarrow (2001a-1)+(203b-3b)+(29c-9c)+(29d-2d):29$$

$$\Leftrightarrow (2001a+203b+29c+29d)-(a+3b+9c+27d):29$$

$$\Leftrightarrow (69.29a+7.29b+29c+29d)-(a+3b+9c+27d):29$$

$$\text{Khi đó: } a+3b+9c+27d : 29$$

Bài 49: Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên sao cho $(7x+3y):13$ thì $(5x+4y)$ cũng chia hết cho 13 và ngược lại

HD:

$$\text{Ta có: } 5x+4y:13 \Rightarrow 4(5x+4y):13 \Rightarrow 20x+16y:13 \Rightarrow 7x+3y:13. \text{ Từ đó ta đi ngược lại là ra}$$

Bài 50: Cho $A = n^2 + n + 2$, CMR A không chia hết cho 15 với mọi số tự nhiên n

HD:

$$n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2, \text{ Vì } n(n+1) \text{ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên chỉ có chữ số tận cùng là:}$$

$$0, 2, 6, \text{ Do đó: } n(n+1) + 2 \text{ sẽ có tận cùng là } 2, 4, 8 \text{ nên không : } 5, \text{ vậy A không chia hết cho } 5$$

Bài 51: Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp, CMR : $(a-1)(b-1):192$

HD:

$$\text{Ta có: Vì } a, b \text{ là số lẻ nên } (a-1)(b-1):4$$

$$\text{Đặt } a = (2k-1)^2, b = (2k+1)^2 \Rightarrow (a-1) = 4k(k-1), (b-1) = 4k(k+1)$$

$$\text{Khi đó: } (a-1)(b-1) = 16k^2(k-1)(k+1), \text{ Mà } k(k+1)(k+2):3$$

$$\text{Và } k(k-1), k(k+1) \text{ đều chia hết cho } 2$$

$$\text{Nên } k^2(k-1)(k+1):12 \Rightarrow (a-1)(b-1) = 16k^2(k-1)(k+1):192,$$

$$\text{Khi } a, b \text{ là số chính phương lẻ liên tiếp}$$

Bài 52: Tìm số nguyên tố tự nhiên n biết $2n+7$ chia hết cho $n+1$ và $12n+1$

HD:

$$\text{Ta có: } 2n+7:n+1 \Rightarrow 2x+2+5:n+1 \Rightarrow 2(n+1)+5:n+1 \Rightarrow n+1 \in U(5)$$

$$\text{Tương tự:}$$

$$2n+7:12n+1 \Rightarrow 6(2n+7):12n+1 \Rightarrow 12n+42:12n+1 \Rightarrow 12n+1+41:12n+1 \Rightarrow 12n+1 \in U(41)$$

Bài 53: Tìm x, y nguyên dương biết $(x+1)$ chia hết cho y và $(y+1)$ chia hết cho x

HD:

$$\text{Ta có: Vì vai trò của } x, y \text{ bình đẳng nên giả sử: } x \leq y$$

$$\text{Nếu } x=1 \Rightarrow x+1=2: y \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (1; 1), (1; 2)$$

$$\text{Nếu } x \geq 2 \Rightarrow 2 \leq x \leq y \Rightarrow \begin{cases} x+1: y \\ y+1: x \end{cases} \Rightarrow (x+1)(y+1) = (xy+x+y+1):xy \Rightarrow (x+y+1):xy$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \text{ là số nguyên dương}$$

$$\text{Mà } 2 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{5}{2x} \Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x = 2, \text{ Thay vào (1) ta có:}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2y} = 1 \Rightarrow y = 3$$

Vậy các cặp số $(x; y)$ phải tìm là: $(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 2)$

Bài 54: Tìm 1 số có ba chữ số biết số đó chia cho 11 được thương bằng tổng các chữ số của số đó

HD:

Ta có: Gọi số cần tìm là: $\overline{abc}$

$$\text{Theo bài ra ta có: } \overline{abc} = 11(a+b+c) \Rightarrow 100a+10b+c = 11a+11b+11c$$

$$\Rightarrow 89a = b+10c \Rightarrow 89a = \overline{cb}, \text{ Vì } \overline{cb} \text{ là số có hai chữ số nên } 0 < a < 2$$

$$\Rightarrow a = 1, \text{ Khi đó ta có: } 89 = \overline{cb} \Rightarrow \overline{bc} = 98 \Rightarrow \overline{abc} = 198$$

Bài 55: Chứng minh rằng: $(n:6)=1$ thì $(n-1)(n+1):24$

HD:

$$\text{Vì } (n:6)=1 \Rightarrow n \not\vdots 2, n \not\vdots 3 \Rightarrow n = 2k+1, n = 3k+1, n = 3k+2$$

$$\text{Với: } n = 2k+1 \Rightarrow A = (2k+1-1)(2k+1+1) = 4k(k+1):8$$

$$\text{TH1: } n = 3k+1 \Rightarrow A = 3k(3k+2):3 \Rightarrow A:24$$

$$\text{TH2: } n = 3k+2 \Rightarrow A = (3k+1)(3k+3):3 \Rightarrow A:24$$

Bài 56: CMR: $a^{n+4} - a^n : 30$, với mọi n là số nguyên dương

Bài 57: Chứng minh rằng $2x+3y$ chia hết cho 17 khi và chỉ khi $9x+5y$ chia hết cho 17

HD:

$$\text{Ta có: } 2x+3y:17 \Rightarrow 9(2x+3y):17 \Rightarrow 18x+27y:17 \Rightarrow 18x+10y:17 \Rightarrow 2(8x+5y):17$$

Khi đó: $8x+5y:17$, Chứng minh tương tự điều ngược lại

Bài 58: CMR: $M = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ chia hết cho 12, Với a, b, c, d là các số nguyên

HD:

$$\text{Ta có: } M = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

Trong 4 số a, b, c, d chắc chắn có hai số chia cho 3 có cùng số dư, Nên hiệu của chúng chia hết cho 3, Như vậy M đã chia hết cho 3

Lại có trong 4 số nguyên a, b, c, d hoặc có 2 số chẵn hoặc có 2 số lẻ, Giả sử a, b là số chẵn, c, d là số lẻ

$$\text{Khi đó } (a-b), (c-d):2 \Rightarrow (a-b)(c-d):4 \Rightarrow M:4$$

Hoặc nếu không phải như trên thì trong 4 số trên tồn tại 2 số chia 4 có cùng số dư nên hiệu của chúng chia hết cho 4, Khi đó $M:4$

Như vậy M chia hết cho cả 3 và 4 nên M chia hết cho 12

Bài 59: Một số chia cho 7 dư 3, Chia cho 17 dư 12 chia 23 dư 7, hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

HD:

$$\text{Gọi số đã cho là } A, \text{ theo bài ra ta có: } A=7a+3=17b+12=23c+7$$

$$\text{Mặt khác: } a+39=7a+42=17b+51=23c+46=7(a+6)=17(b+3)=23(c+2) \text{ vậy } a+39 \text{ đồng thời chia hết cho } 7, 17, 23$$

$$\text{Mà } 7, 17, 23 \text{ đôi 1 nguyên tố nên } A+39 \text{ chia hết cho } 7.17.23=2737, \text{ vậy } A \text{ chia } 2737 \text{ dư } 2698$$

Bài 60: CMR: $A = 8^8 + 2^{20}$, chia hết cho 17

HD:

$$\text{Ta có: } A = 8^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20}(2^4 + 1) = 2^{20}.17:17$$

Bài 61: Khi chia 1 số tự nhiên gồm 3 chữ số giống nhau cho 1 số tự nhiên gồm 3 chữ số giống nhau ta được thương là 2 và còn dư, Nếu xóa 1 chữ số ở số bị chia và xóa 1 chữ số ở số chia thì thương của phép chia vẫn bằng 2 nhưng số dư giảm hơn trước là 100, Tìm số chia và số bị chia lúc đầu?

HD:

Gọi số bị chia lúc đầu là $\overline{aaa}$ và số chia lúc đầu là $\overline{bbb}$, số dư lúc đầu là r

Ta có: $\overline{aaa} = 2.\overline{bbb} + r$ và $\overline{aa} = 2.\overline{bb} + r - 100$ nên

$$\overline{aaa} - \overline{aa} = 2(\overline{bbb} - \overline{bb}) + 100 \Rightarrow \overline{a00} = 2.\overline{b00} + 100 \Rightarrow a = 2b + 1$$

Do a, b là các chữ số nên ta có bảng:

Bài 62: Cho $D = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$

a, D có chia hết cho 2 không, cho 3, cho 5 không? vì sao?

b, D có bao nhiêu ước số tự nhiên, bao nhiêu ước số nguyên?

HD:

a, Ta tính được $D = -50$, nên D có chia hết cho 2, và 5 nhưng không chia hết cho 3

b, $D = -50 = -2.5^2$ nên có $(1+1)(1+2) = 6$ ước tự nhiên, và có 12 ước nguyên

Bài 63: CMR: $10^{2011} + 8$ chia hết cho 72

HD:

$10^{2011} + 8 = \underbrace{1000\dots008}_{2010}$ Có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9, và có chữ số tận cùng là 008 nên

chia hết cho 8, Như vậy chia hết cho $8.9 = 72$

Bài 64: Cho $A = 999993^{1999} - 555557^{1997}$, CMR A chia hết cho 5

HD:

Ta có: $A = (999993)^{1996+3} - (555557)^{1996+1} = 999993^{1996}.999993^3 - 555557^{1996}.555557$

$$A = \overline{.....1.....7} - \overline{.....1.....7} = \overline{....0}:5 \Rightarrow A:5$$

Bài 65: Cho 4 số tự nhiên liên tiếp l cho 5, khi chia cho 5 được các số dư khác nhau,

CMR: tổng của chúng : 5

Bài 66: Cho $a, n \in \mathbb{N}^*$, biết $a^n : 5$, cmr $a^2 + 150$ chia hết cho 25

HD:

Ta có: $a^5 : 5$ mà 5 là số nguyên tố $\Rightarrow a : 5 \Rightarrow a^2 : 25 \Rightarrow a^2 + 150 : 25$

Bài 67: Chứng minh rằng nếu a không là bội của 7 thì $a^6 - 1$ chia hết cho 7

Bài 68: Chứng minh rằng $a^5 - a : 10$

Bài 69: CMR: $p = n^2 + 3n + 5$, không chia hết cho 121 với mọi số tự nhiên n

Bài 70: Cho a, b là hai số nguyên, CMR: Nếu $3a^2 + 11ab - 4b^2 : 169$ thì $\overline{ab} : 13$

Bài 71: CMR nếu a, b là các số tự nhiên sao cho $5a + 3b, 13a + 8b$ cùng chia hết cho 2003, thì a và b cùng chia hết cho 2013

Bài 72: Chứng minh rằng: $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ chia hết cho 405

Bài 73: Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$, thỏa mãn số $M = (9a + 11b)(5b + 11a)$ chia hết cho 19, Hãy giải thích vì sao M chia hết cho 361

HD:

Ta có: $M = (9a + 11b)(5b + 11a) : 19$ mà 19 là số nguyên tố nên $9a + 11b : 19$ hoặc $5b + 11a : 19$

$$\text{Xét } M = 3(9a + 11b) + (5b + 11a) = 27a + 33b + 5b + 11a = 38a + 38b = 19(2a + 2b) : 19$$

$$+ \text{ Nếu } 9a + 11b : 19 \Rightarrow 3(9a + 11b) : 19 \text{ mà } N : 19 \Rightarrow 5b + 11a : 19 \quad (1)$$

$$+ \text{ Nếu } 5b + 11a : 19, \text{ mà } N : 19 \Rightarrow 3(9a + 11b) : 19 \Rightarrow 9a + 11b : 19 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } (9a + 11b) : 19 \text{ và } (5b + 11a) : 19 \Rightarrow M : 19^2 = 361$$

Bài 73: Cho hai số tự nhiên a và b thỏa mãn : $m = (16a + 17b)(17a + 16b)$ là 1 bội số của 11, CMR : Số m cũng là một bội số của 121

HD:

Vì 11 là số nguyên tố: mà $m = (16a + 17b)(17a + 16b):11 \Rightarrow 16a + 17b:11$ hoặc $17a + 16b:11$

Không mất tính tổng quát: giả sử: $16a + 17b:11$, ta cần chứng minh $(17a + 16b):11$

Thật vậy: $16a + 17b:11 \Rightarrow 2(16a + 17b):11 \Rightarrow 33(a + b) + b - a:11 \Rightarrow b - a:11 \Rightarrow a - b:11$

Lại có: $2(17a + 16b) = 33(a + b) - a + b:11 \Rightarrow (17a + 16b):11$

Vậy $(16a + 17b)(17a + 16b):11.11 = 121$

Bài 73: Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn: $(17a + 5b)(5a + 17b)$ chia hết cho 11,

Chứng minh rằng : $(17a + 5b)(5a + 17b):121$

Bài 73: Cho a, b là hai số tự nhiên. CMR: $ab(a^2 - b^2)(4a^2 - b^2):5$

Bài 73 : Cho a, b là hai số nguyên. CMR: $ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2):30$

Bài 74: Cho a, b là các số nguyên dương sao cho : $a + 1, b + 2007$ chia hết cho 6. CMR: $4^a + a + b:6$

HD:

Vì $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 4^a \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^a + 2 \equiv 0 \pmod{3}$

Mà $4^a + 2 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 4^a + 2:6$

Khi đó ta có: $4^a + a + b = 4^a + 2 + a + 1 + b + 2017 - 2010:6$

Mà $a + 1:6, b + 2017:6 \Rightarrow 4^a + a + b:6$

Bài 75: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{40}$, CMR : A không là số tự nhiên

HD:

Ta quy đồng tổng A, Khi đó mẫu số sẽ là tích của 2^5 với các thừa số lẻ nhỏ hơn 40 và lớn hơn 10
Gọi k11, k12, k13, ..., k40 là các thừa số phụ tương ứng

Khi đó tổng A có dạng : $A = \frac{(k11 + k12 + \dots + k40)}{2^5.11.13.....39}$, Trong 30 phân số của tổng A, chỉ có duy nhất

phân số $\frac{1}{32}$ có mẫu chứa 2^5 , nên trong các thừa số phụ k11, k12, ... k40 chỉ có k32 là số lẻ, còn lại các thừa

số phụ khác đều chẵn vì có ít nhất 1 thừa số 2, Khi đó phân số A có Mẫu chia hết cho 2, còn tử không chia hết cho 2 nên A không là số tự nhiên

Bài 76: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$, CMR : A không là số tự nhiên

HD:

Ta quy đồng tổng A, Khi đó mẫu số sẽ là tích của 2^6 với các thừa số lẻ nhỏ hơn 100

Gọi k1, k2, k3, ..., k100 là các thừa số phụ tương ứng

Khi đó tổng A có dạng : $A = \frac{(k1 + k2 + \dots + k100)}{2^5.3.5.7.....99}$,

Trong 100 phân số của tổng A, chỉ có duy nhất phân số $\frac{1}{64}$ có mẫu chứa 2^6 ,

nên trong các thừa số phụ k1, k2, ..., k100 chỉ có k62 là số lẻ, còn lại các thừa số phụ khác đều chẵn vì có ít nhất 1 thừa số 2, Khi đó phân số A có Mẫu chia hết cho 2, còn tử không chia hết cho 2 nên A không là số tự nhiên

Bài 77: CMR: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}$ thì A không là số tự nhiên

HD:

Ta quy đồng tổng A, Khi đó mẫu số sẽ là tích của 2^5 với các thừa số lẻ nhỏ hơn 50, lớn hơn 1
Gọi $k_2, k_3, k_4, \dots, k_{50}$ là các thừa số phụ tương ứng

Khi đó tổng A có dạng : $A = \frac{(k_2 + k_3 + \dots + k_{50})}{2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 50}$,

Trong 49 phân số của tổng A, chỉ có duy nhất phân số $\frac{1}{32}$ có mẫu chứa 2^5 ,

nên trong các thừa số phụ $k_2, k_3, \dots, k_{50}$ chỉ có k_{32} là số lẻ, còn lại các thừa số phụ khác đều chẵn vì có ít nhất 1 thừa số 2, Khi đó phân số A có Mẫu chia hết cho 2, còn tử không chia hết cho 2 nên A không là số tự nhiên

Bài 78: Cho $50A = \frac{49}{1} + \frac{48}{2} + \dots + \frac{2}{48} + \frac{1}{49}$, CMR A không là số tự nhiên?

HD:

$$50A = \left(1 + \frac{48}{2}\right) + \left(1 + \frac{47}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{2}{48}\right) + \left(1 + \frac{1}{49}\right) + 1$$

$$50A = \frac{50}{2} + \frac{50}{3} + \frac{50}{4} + \dots + \frac{50}{49} + \frac{50}{50} = 50 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50}, \text{ Theo chứng minh của bài 24 thì A không là số tự nhiên}$$

Bài 79: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{18} = \frac{a}{b}$, Chứng minh rằng $b \nmid 2431$

HD :

Tách $2431 = 17 \cdot 13 \cdot 11$

Quy đồng A ta thấy rằng $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 18$ có chứa $17 \cdot 13 \cdot 11$

DẠNG 2 : CHỮ SỐ TẬN CÙNG VÀ ĐỒNG DƯ THỨC

A. Lý thuyết:

+ Một số có chữ số tận cùng là : 0; 1; 5; 6 khi nâng lên lũy thừa $n \neq 0$ thì được số có chữ số tận cùng là chính nó (0; 1; 5; 6)

+ Số có chữ số tận cùng là 2; 4; 6 khi nâng lên lũy thừa 4 được số có chữ số tận cùng là 6

+ Số có chữ số tận cùng là 3; 7; 9 khi nâng lên lũy thừa 4 được số có chữ số tận cùng là 1

Chú ý 1:

+ 1 số tự nhiên bất kỳ nâng lên lũy thừa $4k+1$ thì chữ số tận cùng không thay đổi

+ Số có tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 7

+ Số có tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 3

+ Số có tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 8

+ Số có tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được số có chữ số tận cùng là 2

+ Còn lại chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 khi nâng lên lũy thừa $4n+3$ được tận cùng là chính nó

+ 4. Nếu a và b có cùng số dư khi chia cho m thì a được gọi là đồng dư với b theo modum m

KH: $a \equiv b \pmod{m}$

Ví dụ: $3 \equiv -1 \pmod{4}$

$5 \equiv 11 \pmod{6}$

$18 \equiv 0 \pmod{6}$

+ 5. Một số tính chất về đồng dư:

+ Nếu: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ b \equiv c \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

+ Nếu: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$

+ Nếu: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

+ Nếu: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

+ Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và d là UC(a; b) thỏa mãn: $(d; m) = 1$ thì $a : d \equiv b : d \pmod{m}$

+ Nếu $a \equiv b \pmod{m}, d \in \mathbb{Z}$, thỏa mãn: $d \in UC(a; b; d) \Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$

Chú ý : Không được chia 2 vế của đồng dư thức :

Ví dụ : $2 \equiv 12 \pmod{10} \Rightarrow 1 \equiv 6 \pmod{10}$, điều này là sai.

B. Bài tập áp dụng :

Bài 1: Tìm số dư trong phép chia 2004^{2004} khi chia cho 11

HD:

Dấu hiệu chia hết cho 11 là hiệu chữ số hàng lẻ với chữ số hàng chẵn tính từ bên trái chia hết cho 11

Ta có: $2002 : 11 \Rightarrow 2004 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} \equiv 2^{2004} \pmod{11}$

Mà $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2004^{2004} = 2^4 \cdot 2^{2000} \equiv 2^4 \cdot (2^{10})^{200} \pmod{11} \equiv 2^4 \pmod{11} \equiv 5 \pmod{11}$

Vậy 2004^{2004} chia cho 11 dư 5

Bài 2: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7

HD:

Ta có: $1944 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod{7}$

Mà $(-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2004} \equiv (-2^3)^{668} \pmod{7} \equiv (-1)^{668} \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$

Vậy $1944^{2005} \equiv 1 \cdot (-2) \pmod{7}$ hay A chia cho 7 dư 5

Bài 3: Chứng minh rằng: $A = 6^{1000} - 1, B = 6^{1001} + 1$ đều là bội số của 7

HD:

$$\text{Ta có: } 6 \equiv (-1) \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow A \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow A:7$$

Chứng minh tương tự với B

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia: $1532^5 - 1$ khi chia cho 9

HD:

$$\text{Ta có: } 1532 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \pmod{9} \equiv 5 \pmod{9}, \text{ Nên } 1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod{9}$$

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n : 19$

HD:

$$\text{Ta có: } A = 7.25^n + 12.6^n, \text{ Vì } 25^n \equiv 6^n \pmod{19} \Rightarrow 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow A \equiv 7.6^n + 12.6^n \pmod{19} \equiv 19.6^n \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow A:19$$

Bài 6: Tìm dư trong phép chia: 3^{2003} chia cho 13

HD:

$$\text{Ta có: } 3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{667} . 3^2 \equiv 3^2 \pmod{13}, \text{ Vậy số dư là } 9$$

Bài 7: Chứng minh rằng : $2^{2002} - 4 : 31$

HD :

$$\text{Ta có : } 2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow (2^5)^{400} . 2^2 \equiv 4 \pmod{31} \Rightarrow A = 2^{2002} - 4 \equiv 0 \pmod{31}$$

Bài 8: Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222} : 7$

HD :

$$\text{Ta có : } 2222 \equiv (-4) \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv (-4)^{5555} \pmod{7}$$

$$\text{Và } 5555 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod{7}, \text{ Khi đó :}$$

$$A \equiv (-4)^{5555} + 4^{2222} \pmod{7}$$

$$\text{Mà : } (-4)^{5555} = (-4)^{3333} . 4^{2222} \Rightarrow A \equiv 4^{2222} (-3^{3333} + 1) \pmod{7}$$

$$\text{Xét } (4^{3333} - 1), \text{ có } 4^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4^{3333} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod{7}, \text{ hay } A:7$$

Bài 9: Tìm dư trong phép chia : $5^{70} + 7^{50}$ khi chia cho 12

HD:

$$\text{Ta có: } 5^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow 5^{70} \equiv 1 \pmod{12}$$

$$\text{Và } 7^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow 7^{50} \equiv 1 \pmod{12}, \text{ Khi đó số dư là } 2$$

Bài 10: Tìm số dư của $A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$, khi chia cho 3 và 5

HD :

$$\text{Ta có : } 776 \equiv (-1) \pmod{3} \Rightarrow 776^{776} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$777 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 777^{777} \equiv 0 \pmod{3}$$

$$778 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 778^{778} \equiv 1 \pmod{3}, \text{ Khi đó } A \text{ chia } 3 \text{ có dư là } 2$$

$$\text{Mặt khác : } 776 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 776^{776} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$777 \equiv -3 \pmod{5} \Rightarrow 777^{777} \equiv (-3)^{777} \pmod{5}$$

$$778 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 778^{778} \equiv 3^{778} \pmod{5}$$

$$\text{Khi đó } A \equiv 1 - 3^{777} + 3^{778} \pmod{5} \equiv 1 + 3.3^{777} - 3^{777} \pmod{5} \equiv 1 + 3^{777}(3-1) \pmod{5} \equiv 1 + 2.3^{777} \pmod{5}$$

$$\text{Mà } 3^3 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{777} \equiv (3^2)^{388} . 3 \pmod{5} \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\text{Vậy } A \equiv 1 + 2.3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{5} \text{ hay } A \text{ chia } 5 \text{ dư } 2$$

Bài 11: Tìm số dư của $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia A cho 11 và khi chia cho 13

HD:

$$\text{Ta có: } 3^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (3^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\text{Và } 4^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (4^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}, \text{ Khi đó A chia cho 11 dư 2}$$

$$\text{Mặt khác: } 3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{668} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$\text{Và } 4^3 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (4^3)^{668} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{13}, \text{ Khi đó A chia cho 13 dư 7}$$

Bài 12: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

$$2000^{2008}; 1111^{2019}; 2007^{2017}; 1358^{2018}; 2^{34567}; 52^{35}; 204^{402}; 2013^{3102}; 1020^{1040}$$

Bài 13: Tìm chữ số tận cùng của:

$$\text{a, } 9^{9^9} \quad \text{b, } 4^{5^{6^7}}$$

HD:

$$\text{a, Ta có: } 9^9 \text{ là 1 số lẻ nên chỉ 4 có 2 TH là } \begin{cases} 4k+1 \\ 4k+3 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } 9^{4k+1} = 9^{4k} \cdot 9 = \overline{....1} \cdot 9 = \overline{....9}$$

$$\text{TH2: } 9^{4k+3} = 9^{4k} \cdot 9^3 = \overline{....1} \cdot 9^3 = \overline{....9}$$

$$\text{b, Ta thấy: } 5^{6^7} \text{ là 1 số lẻ nên chia 4 có 2 TH là: } \begin{cases} 4k+1 \\ 4k+3 \end{cases}$$

Bài 14: Cho $A = 17^{2008} - 11^{2008} - 3^{2008}$, Tìm chữ số tận cùng của A

HD:

$$\text{Ta có: } A = \overline{....1} - \overline{....1} - \overline{....1} = \overline{....0} - \overline{....1} = \overline{....9}$$

Bài 15: Cho $M = 17^{25} + 24^4 - 13^{21}$, Chứng minh rằng: $M : 10$

HD:

$$\text{Ta có: } M = \overline{...7} + \overline{...6} - \overline{...3} = \overline{...0} \Rightarrow M : 10$$

Bài 16: Chứng minh rằng: $C = 9^{2^n} + 3 : 2 (\forall n \in N, n \geq 1)$

HD:

$$\text{Ta có: } C = 9^{2^n} = 9^{2 \cdot 2^{n-1}} = 81^{2^{n-1}} = \overline{...1} \Rightarrow C = \overline{...1} + 3 = \overline{....4} : 2$$

Bài 17: Chứng minh rằng: $A = 8^{102} - 2^{102} : 10$

Bài 18: Tìm chữ số tận cùng của các số sau: $2222^{2003}; 2018^{2024}; 2005^{2005}$

Bài 19: Chứng minh rằng:

$$\text{a, } 2^{4n+1} + 3 : 5 \quad \text{b, } 9^{2n+1} + 1 : 10 \quad \text{c, } 7^{4n} - 1 : 5$$

Bài 20: Chứng minh rằng: $2^{4n+2} + 1 : 5$

Bài 21: Chứng minh rằng số có dạng: $A = 2^{4^n} + 1 (n \in N, n \geq 1)$ có chữ số tận cùng là 7

HD:

$$\text{Ta có: } 4^n = 4^{1+n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow A = 2^{4^n} + 1 = 2^{4 \cdot 4^{n-1}} + 1 = (16)^{4^{n-1}} + 1 = \overline{....7}$$

Bài 22: Chứng minh rằng số có dạng: $B = 3^{2^n} + 4 : 5 (\forall n \in N, n \geq 2)$

HD:

$$\text{Ta có: } 2^n = 2^{2+n-2} = 4 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow B = 3^{2^n} + 4 = 3^{4 \cdot 2^{n-1}} + 4 = \overline{....1} + 4 = \overline{....5} : 5$$

Bài 23: Chứng minh rằng số có dạng $C = 3^{4^n} - 1 : 10 (\forall n \in N, n \geq 1)$

HD:

$$\text{Ta có: } 4^n = 4^{1+n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow C = 3^{4^n} - 1 = (3^4)^{4^{n-1}} - 1 = (81)^{4^{n-1}} - 1 = \overline{....1} - 1 = \overline{...0} : 10$$

Bài 24: Tìm chữ số hàng đơn vị của:

a, $6666^{1111} + 1111^{1111} - 66^{5555}$

b, $10^n + 555^n + 666^n, (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

c, $9999^{2n} + 999^{2n+1} + 10^n, (n \in \mathbb{N}^*)$

d, $2018^{4n} + 2019^{4n} + 2007^{4n}, (n \in \mathbb{N}^*)$

Bài 25: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a, $A = 2^{4n} - 5 (n > 0, n \in \mathbb{N})$

b, $B = 2^{4n+2} + 1 (n \in \mathbb{N})$

c, $C = 7^{4n} - 1 (n \in \mathbb{N})$

HD:

a, Ta có : $A = 2^{4n} - 5 = (2^4)^n - 5 = (\overline{16})^n - 5 = \overline{...6} - 5 = \overline{...1}$

b, Ta có : $B = 2^{4n+2} + 1 = 2^{4n} \cdot 4 + 1 = \overline{...6} \cdot 4 + 1 = \overline{...5}$

c, Ta có : $C = 7^{4n} - 1 = \overline{...1} - 1 = \overline{...0}$

Bài 26: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a, $D = 2^{2^n} + 1$

b, $E = 2^{4^n} + 1$

HD:

a, Ta có : $2^n = 2^{2+n-2} = 2^2 \cdot 2^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2^n} = 2^{4 \cdot 2^{n-2}} = (2^4)^{2^{n-2}} = \overline{...6}$

b, Ta có : $4^n = 4^{1+n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 2^{4^n} = 2^{4 \cdot 4^{n-1}} = (2^4)^{4^{n-1}} = \overline{...6}$

Bài 27: Chứng minh rằng:

a, $A = 2^{2^2} - 1 : 5$

b, $B = 2^{4^n} + 4 : 10$

c, $C = 9^{2^n} - 1 : 10$

HD:

a, Ta có : $2^{2^2} - 1 = 2^4 - 1 = 15 : 5$

b, Ta có : Ta có 2^{4^n} có tận cùng là 6

c, Ta có : $2^n = 2^{1+n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 9^{2^n} - 1 = 9^{2 \cdot 2^{n-1}} - 1 = (9^2)^{2^{n-1}} - 1 = \overline{...1} - 1 = \overline{...0} : 10$

Bài 28: Chứng minh rằng:

a, $E = 2^{4n+1} + 3 : 5$

b, $F = 9^{2n+1} + 1 : 10$

c, $H = 7^{4n} - 1 : 5$

HD:

a, Ta có : $2^{4n+1} + 3 = 2^{4n} \cdot 2 + 3 = \overline{...6} \cdot 2 + 3 = \overline{...5}$

b, Ta có : $9^{2n+1} + 1 = 9^{2n} \cdot 9 + 1 = \overline{...1} \cdot 9 + 1 = \overline{...0}$

c, Ta có : $7^{4n} - 1 = \overline{...1} - 1 = \overline{...0}$

Bài 29: Chứng minh rằng:

a, $I = 2^{4n+2} + 1 : 5$

b, $K = 3^{2^n} + 4 : 5 (n \geq 2)$

c, $M = 3^{4^n} - 1 : 10 (n \geq 1)$

HD:

a, Ta có : $2^{4n+2} + 1 = 2^{4n} \cdot 2^2 + 1 = \overline{...6} \cdot 4 + 1 = \overline{...0}$

b, Ta có : $2^n = 2^{2+n-2} = 2^2 \cdot 2^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} \Rightarrow 3^{2^n} + 4 = 3^{4 \cdot 2^{n-2}} + 4 = \overline{...1} + 4 = \overline{...5}$

c, Ta có : $4^n = 4^{1+n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 3^{4^n} - 1 = 3^{4 \cdot 4^{n-1}} - 1 = \overline{...1} - 1 = \overline{...0}$

Bài 30: Chứng minh rằng:

a, $D = 3^{4n+1} + 2 : 5$

b, $G = 9^{2n} - 1 : \text{cả } 2 \text{ và } 5$

HD:

a, Ta có : $3^{4n+1} + 2 = 3^{4n} \cdot 3 + 2 = \overline{...1} \cdot 3 + 2 = \overline{...5} : 5$

b, Ta có : $9^{2n} - 1 = \overline{...1} - 1 = \overline{...0}$

Bài 31: Trong các số sau số nào chia hết cho 2, 5, 10

a, $3^{4n+1} + 1 (n \in \mathbb{N})$

b, $2^{4n+1} - 2 (n \in \mathbb{N})$

HD:

a, Ta có : $3^{4n+1} + 1 = 3^{4n} \cdot 3 + 1 = \overline{...1} \cdot 3 + 1 = \overline{...4}$

b, Ta có : $2^{4n+1} - 2 = 2^{4n} \cdot 2 - 2 = \overline{...6.2} - 2 = \overline{...0}$

Bài 32: Trong các số sau số nào chia hết cho 2,5 10

a, $2^{2^n} + 4 (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ b, $9^{4^n} - 6 (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

HD:

a, Ta có : $2^n = 2^{2+n-2} = 2^2 \cdot 2^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2^n} + 4 = 2^{4 \cdot 2^{n-2}} + 4 = \overline{...6} + 4 = \overline{...0}$

b, Ta có : $4^n = 4^{1+n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 9^{4^n} - 6 = 9^{4 \cdot 4^{n-1}} - 6 = \overline{...1} - 6 = \overline{...5}$

Bài 33: Chứng minh rằng:

a, $942^{60} - 351^{37} : 5$

b, $99^5 - 98^4 + 97^3 - 96^2 : 2$ và 5

HD:

a, Ta có : $(942^4)^{15} - (351)^{37} = \overline{...6} - \overline{...1} = \overline{...5} : 5$

b, Ta có : $99^5 - 98^4 + 97^3 - 96^2 = 99^4 \cdot 99 - 98^4 + 97^3 - 96^2$
 $= \overline{...1.99} - \overline{...6} + \overline{...3} - \overline{...6} = \overline{...0}$ Hiển nhiên chia hết cho cả 2 và 5

Bài 34: Chứng minh rằng:

a, $17^{25} + 24^4 - 13^{21} : 10$

b, $8^{102} - 2^{102} : 10$

HD:

a, Ta có : $17^{25} + 24^4 - 13^{21} = 17^{24} \cdot 17 + 24^4 - 13^{20} \cdot 13 = \overline{...1.17} + \overline{...6} - \overline{...1.13} = \overline{...0}$ thì chia hết cho 10

b, Ta có : $8^{102} - 2^{102} = 8^{100} \cdot 8^2 - 2^{100} \cdot 2^2 = \overline{...6.64} - \overline{...6.4} = \overline{...4} - \overline{...4} = \overline{...0}$ nên chia hết cho 10

Bài 35: Chứng minh rằng:

a, $36^{36} - 9^{10} : 45$

b, $10^{28} + 8 : 72$

HD:

a, Ta có : $36^{36} - 9^{10} = \overline{...6} - 9^8 \cdot 9^2 = \overline{...6} - \overline{...1.81} = \overline{...6} - \overline{...1} = \overline{...5}$

Chia hết cho 5, và ta thấy $36 : 9 \Rightarrow 36^{36} : 9, 9^{10} : 9 \Rightarrow \text{đpcm}$

b, Ta có : $10^{28} + 8 = 10 \dots 00 + 8 = 1000 \dots 008 : 8$ và có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9
 Khi đó chia hết cho 72

Bài 36: Chứng minh rằng:

a, $8^8 + 2^{20} : 17$

b, $16^5 + 2^{15} : 33$

HD:

a, Ta có : $8^8 + 2^{20} = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20} (2^4 + 1) = 2^{20} \cdot 17 : 17$

b, Ta có : $16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} (2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33 : 33$

Bài 37: Chứng minh rằng:

a, $10^6 - 5^7 : 59$

b, $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$

HD:

a, Ta có : $10^6 - 5^7 = (2.5)^6 - 5^7 = 2^6 \cdot 5^6 - 5^7 = 5^6 (2^6 - 5) = 5^6 \cdot 59 : 59$

b, Ta có : $81^7 - 27^9 - 9^{13} = (3^4)^7 - (3^3)^9 - (3^2)^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26} (3^2 - 3 - 1) = 3^{26} \cdot 5 = 3^{24} \cdot 45 : 45$

Bài 38: CMR:

a, $2008^{100} + 2008^{99} : 2009$

b, $12345^{678} - 12345^{677} : 12344$

HD:

a, Ta có : $2008^{100} + 2008^{99} = 2008^{99} (2008 + 1) = 2008^{99} \cdot 2009 : 2009$

b, Ta có : $12345^{678} - 12345^{677} = 12345^{677} (12345 - 1) = 12345^{677} \cdot 12344 : 12344$

Bài 39: Cho n là số tự nhiên, CMR : $A = 17n + 111 \dots 1$ (n chữ số 1) : 9

HD:

Ta có : $A = 18n - n + 111 \dots 1$

Số 1111...1 có tổng các chữ số là 1+1+1+1+...+1 có n số 1 nên bằng n

Khi đó $A = 18n - n + 111 \dots 1$ có $18n : 9$ nên cần 1111...1-n chia hết cho 9

mà 1111...1 - n có tổng các chữ số là 0 nên chia hết cho 9

Vậy A chia hết cho 9

Bài 40: Tìm chữ số tận cùng của tổng sau: $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$

HD:

Ta thấy mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1

Nên tổng S có chữ số tận cùng là: $2 + 3 + 4 + \dots + 2004 = 9009 \Rightarrow S$ có chữ số tận cùng là 9

Bài 41: Tìm chữ số tận cùng của: $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$

HD:

Ta thấy mọi lũy thừa trong T đều có dạng chia 4 dư 3,

Nên tổng T có chữ số tận cùng là :

$$(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 = 9019$$

Vậy chữ số tận cùng của T là 9

Bài 42 : Tìm số dư của :

a, $A = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2003^{8005}$ khi chia cho 5

b, $B = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2003^{8007}$ khi chia cho 5

Bài 43: Tìm chữ số tận cùng của :

a, $C = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + \dots + 2004^{8010}$

b, $D = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \dots + 2004^{8016}$

Bài 44: Chứng minh rằng chữ số tận cùng của 2 số sau giống nhau:

a, $A = 2 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2005^{8013}$ và $B = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2005^{8015}$

Bài 45: Tìm chữ số tận cùng của:

a, $A = 10^5 + 12^9 + 14^{13} + \dots + 2014^{4013} + 2016^{4017}$

b, $B = 9^9 + 11^{13} + \dots + 2015^{4021} + 2017^{4025}$

c, $C = 5^7 + 7^{11} + 9^{15} + \dots + 2015^{4027} + 2017^{4031}$

d, $D = 21^5 + 23^9 + 25^{13} + \dots + 2017^{3997} + 2019^{4001}$

e, $E = 20^{43} + 22^{47} + 24^{51} + \dots + 98^{203} + 100^{207}$

f, $F = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \dots + 2004^{8016}$

Bài 46: Tìm chữ số tận cùng của:

a, $A = 19^{4^n} + 7, (n \geq 2)$

b, $2017^{2^n} + 2016 (n \geq 2)$

Bài 47: Tìm chữ số tận cùng của: $C = 1999^{4^n} + 1997^{2^n} + 1996^{4^n} + 2017 (n \geq 2)$

Bài 48: Tìm số tự nhiên n để $n^{10} + 1 : 10$

HD:

Ta có: $10 = 4 \cdot 2 + 2$, nên $n^{10} + 1 = (n^4)^2 \cdot n^2 + 1 : 10 \Rightarrow (n^4)^2 \cdot n^2$ phải có tận cùng là 9 $\Rightarrow n=3$ hoặc $n=7$

Bài 49: CMR: $999993^{1999} - 55557^{1997} : 5$

Chú ý:**Đối với tìm 2 chữ số tận cùng:**

+ Với các chữ số có tận cùng là 01, 25, 76 thì nâng lên lũy thừa bao nhiêu (Khác 0) đều có 2 chữ số tận cùng là chính nó

+ Các số 26^n luôn có tận cùng là 76 ($n > 1$)

+ Các số: $2^{10}, 3^{20}$ có tận cùng là 76 và 01

+ Còn lại đưa lên lũy thừa 2,4,5 thì sẽ trở về 76 hoặc 01

Bài 1: Tìm 2 chữ số tận cùng của: $2^{100}, 3^{100}$

HD:

$$\text{Ta có: } 2^{100} = (2^{10})^{10} = (\overline{...76})^{10} = \overline{...76} \quad \text{Và } 3^{100} = (3^{20})^5 = (\overline{...01})^5 = \overline{...01}$$

Bài 2: Tìm 2 chữ số tận cùng của : $51^{51}, 99^{99}, 6^{666}, 14^{101}, 16^{101}$

HD:

$$\text{Ta có: } 51^{51} = (51^2)^{25} \cdot 51 = (\overline{...01})^{25} \cdot 51 = \overline{...51}$$

$$99^{99} = (99^2)^{49} \cdot 99 = (\overline{...01})^{49} \cdot 99 = \overline{...99}$$

$$6^{666} = (6^{5133}) = \overline{...76} \cdot 6 = \overline{...56}$$

$$14^{101} \cdot 16^{101} = 224^{101} = (224^2)^{50} \cdot 224 = \overline{...76} \cdot 224 = \overline{...24}$$

Bài 3: Tìm 2 chữ số tận cùng của: $51^{2k}, 51^{2k+1}, 99^{2n}, 99^{2n+1}, 99^{99}, 6^{5n}, 6^{5n+1}, 6^{66}$

HD:

$$\text{Ta thấy: } 99^{99}; \text{ thấy } 99^{99} \text{ là 1 số lẻ nên } 99^{99} = 2n+1 \Rightarrow 99^{99} = 99^{2n+1} (n \in N, n > 1)$$

$$\Rightarrow 99^{2n+1} = 99 \cdot (99^2)^n = 99 \cdot \overline{...01} = \overline{...99}$$

Bài 4: Tìm 2 chữ số tận cùng của : $7^{2003}, 9^9, 74^{2003}, 18^{2004}, 68^{2005}, 74^{2004}$

Bài 5 : Tìm 2 chữ số của :

a, $49^{2n}; 49^{2n+1} (n \in N)$

b, $2^{4n} \cdot 3^{8n} (n \in N)$

c, $2^{3n} \cdot 3^n$ và $2^{3n+3} \cdot 3^{n+1} (n \in N)$

d, $74^{2n}, 74^{2n+1} (n \in N)$

HD :

$$\text{b, } 2^{4n} \cdot 3^{8n} = 2^{4n} \cdot (3^2)^{4n} = (18)^{4n}$$

Bài 6 : Chứng minh rằng :

a, $A = 26^{2n} - 26 : 5$ và $: 10 (n \in N, n > 1)$

b, $B = 24^{2n+1} + 76 : 100 (n \in N)$

c, $M = 51^{2000} \cdot 74^{2000} \cdot 99^{2000}$

HD:

c, Có 2 chữ số tận cùng là 76

Bài 7: Chứng minh rằng: $A = 10^{2008} + 125 : 45$

HD:

A có chữ số tận cùng là 5 nên $A : 5$

Mặt khác A có tổng các chữ số là $: 1+1+2+5=9 : 9$ nên $A : 9$

Chú ý :

Để đơn giản tìm 2 chữ số tận cùng của 1 số a, ta có 2 TH :

+ a chẵn $\Rightarrow$ Tìm n nhỏ nhất sao cho $a^n - 1 : 25$

+ a lẻ $\Rightarrow$ Tìm n nhỏ nhất sao cho $a^n - 1 : 100$

Bài 8: Tìm dư của 2^{2003} khi chia cho 100

HD:

Ta có: 2^{10} tận cùng là 76

Bài 9 : Tìm số dư của 7^{99} khi chia cho 100

HD :

Ta có : 7 là số lẻ $\Rightarrow$ cần tìm $7^n - 1 : 100 \Rightarrow n = 4$

Khi đó : 7^4 có tận cùng là 01

Bài 10 : Tìm số dư của : 3^{517} khi chia cho 25

HD :

Tìm 2 chữ số tận cùng của 3^{517} là 43 $\Rightarrow 3^{517}$ chia cho 25 dư 18

Bài 11 : Tìm 2 chữ số tận cùng của : $A = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + \dots + 2004^{2002}$

HD :

Dựa vào tính chất : $a \in N, (a; 5) = 1 \Rightarrow a^{20} - 1 : 25$

Thấy a chẵn $\Rightarrow a^2 : 4$, còn nếu a lẻ $\Rightarrow a^{100} - 1 : 4 \Rightarrow a : 5 \Rightarrow a^2 : 25$

$\Rightarrow A = 1^{2002} + 2^2(2002 - 1) + \dots + 2004^2(2004^{2002} - 1) + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$

2 chữ số tận cùng của A chính là 2 chữ số tận cùng của tổng

$B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ với $n = 2004$

DẠNG 3 : NHÓM HỢP LÝ

Bài 1: Chứng minh rằng:

a, $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10$

b, $3^{n+2} - 2^{n+4} + 3^n + 2^n : 30$

HD :

a, Ta có: $VT = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n = 3^n(9+1) - 2^n \cdot 8 - 2^n \cdot 2 = 3^n \cdot 10 - 2^{n+1} \cdot 10 : 10$

b, Ta có: $VT = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 16 + 3^n + 2^n = 3^n(9+1) - 2^n(16-1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 15 : 30$

Bài 2: Chứng minh rằng:

a, $8 \cdot 2^n + 2^{n+1} : 10$

b, $3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} : 6$

HD:

a, Ta có: $8 \cdot 2^n + 2^{n+1} = 8 \cdot 2^n + 2^n \cdot 2 = 2^n(8+2) = 10 \cdot 2^n : 10$

b, Ta có: $VT = 3^n \cdot 27 + 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 8 + 2^n \cdot 4 = 3^n \cdot 30 + 2^n \cdot 12 : 6$

Bài 3: Chứng minh rằng: $3^{2n+1} + 2^{2n+2} : 7$

HD :

Ta có : $A = 3 \cdot 3^{2n} + 4 \cdot 2^{2n} = 3(7+2)^n + 4 \cdot 2^n = 7 \cdot M + 7 \cdot 2^n : 7$

Bài 4: Chứng minh rằng:

a, $10^n + 18n - 1 : 27$

b, $D = 10^n + 72n - 1 : 81$

HD:

a, Ta có: $VT = (10^n - 1) + 18n = 999...9 + 18n$ (có n chữ số 9)

$VT = 9.1111...1 + 9.2n = 9(111...1 + 2n) : 9$

mặt khác: $111...1 + 2n$ (có n chữ số 1) = $(1111...1 - n) + 3n$

Xét: $111...1 - n$ có tổng các chữ số là $1+1+1+...+1-n=0$ nên chia hết cho 3
vậy $111...1 + 2n$ chia hết cho 3 $\Rightarrow VT$ chia hết cho 27

b, Ta có:

$D = 10^n - 1 + 72n = 9.111...1 - 9n + 81n = 9(111...1 - n) + 81n$

Xét $111...1 - n$ chia hết cho 9 $\Rightarrow D$ chia hết cho 81

Bài 5: CMR : $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$ chia hết cho 13 với mọi n

HD:

Ta có: $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} = 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 9 + 3^n \cdot 27 = 3^n \cdot 3(1+3+9) = 3^{n+1} \cdot 13 : 13$

b, Chứng minh rằng : $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + ... + 3^{x+100}$ chia hết cho 120

Bài 6: Chứng minh rằng:

a, $5^5 - 5^4 + 5^3 : 7$

b, $7^6 + 7^5 - 7^4 : 11$

c, $10^9 + 10^8 + 10^7 : 222$ và $: 555$

d, $10^6 - 5^7 : 59$

HD:

a, Ta có: $= 5^3(5^2 - 5 + 1) = 5^2 \cdot 21 : 7$

b, Ta có: $= 7^4(7^2 + 7 - 1) = 7^4 \cdot 55 : 11$

c, Ta có : $= 10^7(10^2 + 10 + 1) = 10^7 \cdot 111 : 222$ và $: 555$

d, Ta có : $= (2 \cdot 5)^6 \cdot 5^7 = 5^6(2^6 - 1) = 5^6 \cdot 59 : 59$

Bài 7 : Chứng minh rằng : $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 45$

HD :

Ta có : $= (3^4)^7 - (3^3)^9 - (3^2)^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26}(3^2 - 3 - 1) = 3^{26} \cdot 5 : 9 \cdot 5 = 45$

Bài 8 : Chứng minh rằng : $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2004} : 3; 7; 15$

Bài 9 : Chứng minh rằng :

a, $8^{10} - 8^9 - 8^8 : 55$

b, $45^{45} \cdot 15^{15} : 75^{30}$

c, $24^{54} \cdot 54^{24} \cdot 2^{10} : 72^{63}$

d, $45^{10} - 5^{40} : 25^{20}$

Bài 10: Cho $10^k - 1 : 19 (k > 1)$, CMR: $10^{2k} - 1 : 19$

HD:

Ta có: $10^{2k} - 1 = 10^{2k} - 10^k + 10^k - 1 = 10^k (10^k - 1) + (10^k - 1)$

Nhận thấy: $10^k - 1 : 19$

Bài 11: Chứng minh rằng: $n^2 + n + 1 \nmid 4$

HD:

Ta có: $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$, mà $n(n+1)$ là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp nên chẵn

Mà VP +1 nên là số lẻ vậy không chia hết cho 4

Bài 12: Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 6 \nmid 5$

HD:

Vì $n^2 + n + 6 = n(n+1) + 6$,

Vì $n(n+1)$ là tích 2 số tự nhiên liên tiếp nên có chữ số tận cùng là 0; 2; 6

Khi đó: $n(n+1) + 6$ sẽ có tận cùng là 6; 8; 2 nên không chia hết cho 5

Bài 13: Chứng minh rằng: Với mọi n thì $60n + 45 : 15$ nhưng không chia hết cho 30

Bài 14: Chứng minh rằng: $n^2 + n + 1 \nmid 2$ và 5 với mọi số tự nhiên n

HD:

Ta có: $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ là số lẻ nên không chia hết cho 2

Tương tự chứng minh có chữ số tận cùng khác 0 và 5 nên không chia hết cho 5

Bài 15: Chứng minh rằng:

a, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} : 4$

b, $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8 : 30$

HD:

a, Ta có: $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10} + 3^{11} = (1+3) + 3^2(1+3) + \dots + 3^{10}(3+1)$

$A = 4 + 3^2 \cdot 4 + 3^4 \cdot 4 + \dots + 3^{10} \cdot 4 : 4$

b, Ta có: $B = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^8 = (5+5^2) + (5^3+5^4) + \dots + (5^7+5^8)$

$B = 30 + 5^2 \cdot 30 + \dots + 5^6 \cdot 30$

Bài 16: Chứng minh rằng:

a, $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} : 15$

b, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{119} : 13$

HD:

a, Ta có: $C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + \dots + 2^8) + \dots + (2^{57} + \dots + 2^{60})$

$C = 2(1+2+4+8) + 2^5(1+2+4+8) + \dots + 2^{57}(1+2+4+8) \Rightarrow C = 15 \cdot (2 + 2^5 + \dots + 2^{57})$

b, Ta có: $D = (1+3+3^2) + (3^3+3^4+3^5) + \dots + (3^{17}+3^{18}+3^{19})$

$D = 13 + 3^3 \cdot 13 + \dots + 3^{17} \cdot 13 = 13(1 + 3^3 + \dots + 3^{17}) : 13$

Bài 17: Chứng minh rằng:

a, $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60} : 3, 7, 15$

b, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991} : 13, 41$

HD:

a, Ta có: $A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{59} + 2^{60})$

$A = 2(1+2) + 2^3(1+2) + \dots + 2^{59}(1+2) \Rightarrow A : 3$

$$\text{lại có: } A = (2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \dots + (2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$$

$$A = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4 (1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58} (1 + 2 + 2^2) : 7$$

$$\text{Lại có: } A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \dots + (2^{57} + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60})$$

$$A = 2 \cdot 15 + 2^5 \cdot 15 + \dots + 2^{57} \cdot 15 : 15$$

$$\text{b, Ta có: } B = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + \dots + (3^{1989} + 3^{1990} + 3^{1991})$$

$$B = 13 + 3^3 \cdot 13 + \dots + 3^{1989} \cdot 13 : 13$$

Lại có:

$$B = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7) + \dots + (3^{1984} + 3^{1986} + 3^{1988} + 3^{1990}) + (3^{1985} + 3^{1987} + 3^{1989} + 3^{1991})$$

$$= 820(1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1095}) : 41$$

Bài 18: Chứng minh rằng:

$$\text{a, } 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} : 31$$

$$\text{b, } 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1998} : 12, 39$$

HD:

$$\text{a, Ta có: } A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$$

$$A = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31 : 31$$

$$\text{b, Ta có: } S = (3 + 3^2) + (3^3 + 3^4) + \dots + (3^{1997} + 3^{1998})$$

$$S = 12 + 3^2 \cdot 12 + \dots + 3^{1996} \cdot 12 : 12$$

$$\text{mặt khác: } S = (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots + (3^{1996} + 3^{1997} + 3^{1998})$$

$$S = 39 + 3^3 \cdot 39 + \dots + 3^{1995} \cdot 39 : 39$$

Bài 19: Chứng minh rằng:

$$\text{a, } 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000} : 120$$

$$\text{b, } 11 + 11^2 + 11^3 + \dots + 11^8 : 12$$

HD:

a, Ta thấy ngay tổng B chia hết cho 3, ta cần chứng minh tổng B chia hết cho 40

$$B = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + (3^{997} + 3^{998} + 3^{999} + 3^{1000})$$

$$= 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{997}(1 + 3 + 3^2 + 3^3) : 40$$

Như vậy A : 120

$$\text{b, Ta có: } C = (11 + 11^2) + (11^3 + 11^4) + \dots + (11^7 + 11^8)$$

$$C = 11(1 + 11) + 11^3(1 + 11) + \dots + 11^7(1 + 11)$$

$$C = 11 \cdot 12 + 11^3 \cdot 12 + \dots + 11^7 \cdot 12 : 12$$

Bài 20: Chứng minh rằng:

$$\text{a, } 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{210} : 210$$

$$\text{b, } 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{404} : 31$$

HD:

a, Tổng A hiển nhiên chia hết cho 2 (1)

Nên ta cần chứng minh tổng A chia hết cho 105 = 5.21

$$A = (4 + 4^2) + (4^3 + 4^4) + \dots + (4^{209} + 4^{210})$$

$$A = 4(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + \dots + 4^{209}(1 + 4) = 4 \cdot 5 + 4^3 \cdot 5 + 4^{209} \cdot 5 : 5 \quad (2)$$

$$A = (4 + 4^2 + 4^3) + (4^4 + 4^5 + 4^6) + \dots + (4^{208} + 4^{209} + 4^{210})$$

$$A = 4(1 + 4 + 16) + 4^4(1 + 4 + 16) + \dots + 4^{208}(1 + 4 + 16) : 21 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta thấy: A : 210

$$\text{b, Ta có: } B = (1 + 5 + 5^2) + (5^3 + 5^4 + 5^5) + \dots + (5^{402} + 5^{403} + 5^{404})$$

$$B = 31 + 5^3(1 + 5 + 5^2) + \dots + 5^{402}(1 + 5 + 5^2) : 31$$

Bài 21: Chứng minh rằng:

a, $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100} : 3$

b, $3^{21} + 3^{22} + 3^{23} + \dots + 3^{29} : 13$

HD:

a, Ta có : $A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{99} + 2^{100})$

$$A = 2(1+2) + 2^3(1+2) + \dots + 2^{99}(1+2) = 2.3 + 2^3.3 + \dots + 2^{99}.3 : 3$$

b, Ta có : $B = (3^{21} + 3^{22} + 3^{23}) + (3^{24} + 3^{25} + 3^{26}) + (3^{27} + 3^{28} + 3^{29})$

$$B = 3^{21}(1+3+3^2) + 3^{24}(1+3+3^2) + 3^{27}(1+3+3^2)$$

$$B = 3^{21}.13 + 3^{24}.13 + 3^{27}.13 : 13$$

Bài 22: CMR $A = 75.(4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 : 100$

HD:

Đặt $B = 4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4^2 + 4 + 1$, Tính B rồi thay vào A ta được :

$$A = 75.(4^{2005} - 1) : 3 + 25 = 25(4^{2005} - 1) + 25 = 25(4^{2005} - 1 + 1) = 25.4^{2005} : 100$$

Bài 23: CMR: $M = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + \dots + 2012^{2010} : 2013$

HD:

$$M = (2012 + 2012^2) + (2012^3 + 2012^4) + \dots + (2012^{2009} + 2012^{2010})$$

$$M = 2012(1 + 2012) + 2012^3(1 + 2012) + \dots + 2012^{2009}(1 + 2012)$$

$$M = 2012.2013 + 2012^3.2013 + \dots + 2012^{2009}.2013 : 2013$$

Bài 24: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2008}$, Tìm dư của A khi chia cho 7

HD:

$$A = 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots + (2^{2006} + 2^{2007} + 2^{2008})$$

$$A = 3 + 2^2(1 + 2 + 2^2) + 2^5(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{2006}(1 + 2 + 2^2)$$

$$A = 3 + 2^2.7 + 2^5.7 + 2^{2006}.7, \text{ Nhận thấy ngay } A \text{ chia } 7 \text{ dư } 3$$

Bài 25: CMR : $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{5n-3} + 2^{5n-2} + 2^{5n-1}$ chia hết cho 31 nếu n là số nguyên dương bất kỳ

HD:

$$A = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9) + \dots + (2^{5n-5} + 2^{5n-4} + 2^{5n-3} + 2^{5n-2} + 2^{5n-1})$$

$$A = 31 + 2^5.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{5n-5}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$A = 31 + 2^5.31 + \dots + 2^{5n-5}.31 : 31$$

Bài 26: Cho n là số nguyên dương, CMR : $3^n + 1$, là bội của 10 thì $3^{n+4} + 1$ cũng là bội của 10

HD:

Nếu $3^n + 1$, Là bội của 10 thì $3^n + 1$ có tận cùng là số 0 $\Rightarrow 3^n$ có tận cùng là 9

$$\text{Mà } 3^{n+4} + 1 = 3^n.3^4 + 1 = \overline{9}.81 + 1 = \overline{9}.9 + 1 = \overline{0} : 10 \text{ (đpcm)}$$

Bài 27: CMR : $N = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2012}$ là bội của 30

HD:

$$N = (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + \dots + (5^{2011} + 5^{2012})$$

$$N = 30 + 5^2(5 + 5^2) + \dots + 5^{2010}(5 + 5^2) = 30 + 5^2.30 + \dots + 5^{2010}.30 : 30$$

Bài 28: Cho $S = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2004}$, CMR S chia hết cho 10 và $3S + 4$ chia hết cho 4^{2004}

HD:

$$S = (4 + 4^2) + (4^3 + 4^4) + \dots + (4^{2003} + 4^{2004})$$

$$S = 4.(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + \dots + 4^{2003}(1 + 4) = 4.5 + 4^3.5 + \dots + 4^{2003}.5 \Rightarrow S : 5, S : 2 \Rightarrow S : 10$$

$$\text{Mặt khác: } 4S = 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{2005}$$

$$\Rightarrow 4S - S = 3S = 4^{2005} - 4 \Rightarrow 3S + 4 = 4^{2005} : 4^{2004}$$

Bài 29: Cho $N = 0,7(2007^{2009} - 2013^{1999})$, CMR: N là 1 số nguyên

HD:

$N = \frac{7}{10} \cdot (2007^{2009} - 2013^{1999})$, Để Chứng minh N là 1 số nguyên thì N chia hết cho 10 hay:

$$2007^{2009} - 2013^{1999} = 2007^{2008} \cdot 2007 - 2013^{1996} \cdot 2013^3 = \overline{...1}2007 - \overline{...1...}7 = \overline{...}7 - \overline{...}7 = \overline{...}0:10$$

Vậy N chia hết cho 10, Khi đó N là 1 số nguyên

Bài 30: CMR: $a^3 - a : 6$

Bài 31: Chứng minh rằng : $B = 5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006} : 31$

HD :

$$\text{Ta có : } B = 5^{2006} (5^2 + 5 + 1) = 31 \cdot 5^{2006} : 31$$

Bài 32: Chứng minh rằng : $8^8 + 2^{20} : 17$

HD :

$$\text{Ta có: } C = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20} = 2^{20} (2^4 + 1) = 2^{20} \cdot 17 : 17$$

Bài 33: Chứng minh rằng: $D = 313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36 : 7$

HD:

$$\text{Ta có: } D = 313^5 (299 - 313 \cdot 36) = 313^5 \cdot (-1567) : 7$$

Bài 34: Chứng minh rằng: $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{4n-1} + 7^{4n} : 400$

HD:

Ta có: $400 = 1 + 7 + 7^2 + 7^3$, vậy nhóm 4 số hạng của tổng A

Bài 35: Chứng minh rằng:

a, $A = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 : 2^3$

b, $B = 3 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{2n+1} : 30$

Bài 36: Tìm số dư của A khi chia A cho 7 biết: $A = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008} + 2^{2002})$

HD:

Nhóm 3 số hạng

Bài 37: Chứng minh rằng:

a, $8^7 - 2^{18} : 14$

b, $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 405$

c, $10^{99} + 2^3 : 9$

d, $10^{28} + 8 : 72$

e, $4^{39} + 4^{40} + 4^{41} : 28$

HD:

$$\text{a, } = 2^{18} (2^3 - 1)$$

c, Tổng chữ số

Bài 38: Chứng minh rằng:

a, $7^0 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{101} : 8$

b, $4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{16} : 5$

c, $2000 + 2000^2 + 2000^3 + \dots + 2000^{2008} : 2001$

Bài 39: Chứng minh rằng: $A = 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{1991} : 13$ và $: 41$

HD:

Nhóm 3 và nhóm 4

Bài 40: Chứng minh rằng:

a, $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8 : 30$

b, $B = 3 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{29} : 273$

HD:

b, Nhóm 3

Bài 41: Chứng minh rằng: $A = 2 + 2^2 = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{120} : 217$

HD:

$$\text{Ta có: } 217 = 7 \cdot 31$$

Bài 42: Cho $C = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$, CMR: $A \vdots 40$

HD:

Nhóm 4

Bài 43: Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 với mọi x là số tự nhiên

HD :

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120 (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) \vdots 120 \end{aligned}$$

Bài 44: Cho biểu thức : $B = 3^6 + 3^8 + 3^{648}$, Tìm số dư khi chia B cho 91