

CHUYÊN ĐỀ .CHỮ SỐ TẬN CÙNG

A.TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tìm 1 chữ số tận cùng

Tính chất 1:

- a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n \quad n \in \mathbb{N}$ thì chữ số tận cùng là 1.
- d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n \quad n \in \mathbb{N}$ thì chữ số tận cùng là 6.

Chú ý: Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a :

- Nếu chữ số tận cùng của a là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 3, 7, 9:

Phân tích: $a^m = a^{4n+r} = a^{4n} \cdot a^r$ với $r=0, 1, 2, 3$

Từ tính chất 1c $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r .

- Nếu chữ số tận cùng của a là 2, 4, 8: cũng như trường hợp trên

Từ tính chất 1d $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6a^r$.

Tính chất 2:

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+1 \quad n \in \mathbb{N}$ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Tính chất 3:

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Tính chất 4:

Nếu $a \in \mathbb{N}$ và $a, 5 = 1$ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 125.

Chứng minh:

Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

$\Rightarrow a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5.

Vậy $a^{100} - 1 = a^{20} - 1 \cdot a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1$ chia hết cho 125.

*** Phương pháp dùng cấu tạo số để tìm chữ số tận cùng của số $A = n^k$ với $n, k \in \mathbb{N}$.**

- Giả sử $A = 10q + r$. Khi đó, $A^k = (10q + r)^k = 10^t p + r^k$ với $r \in \mathbb{N}; 0 \leq r \leq 9$

Suy ra, chữ số cuối cùng của A chính là chữ số cuối cùng của số r^k .

- Nếu $A = 100a + \overline{bc} = \overline{abc}$ thì $\overline{bc}$ là hai chữ số cuối cùng của A .

- Nếu $A = 1000a + \overline{bcd} = \overline{abcd}$ thì $\overline{bcd}$ là ba chữ số cuối cùng của A .

- Nếu $A = 10^m \cdot a_m + \overline{a_{m-1} \dots a_0} = \overline{a_m \dots a_1 a_0}$ thì $\overline{a_{m-1} \dots a_0}$ là m chữ số cuối cùng của A .

2. Tìm hai chữ số tận cùng

Việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 100.

Phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^n$:

Trước hết, ta có nhận xét sau:

$$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}$$

$$3^{20} \equiv 01 \pmod{100}$$

$$6^5 \equiv 76 \pmod{100}$$

$$7^4 \equiv 01 \pmod{100}$$

Mà: $76^n \equiv 76 \pmod{100}$ với $n \geq 1$,

$$5^n \equiv 25 \pmod{100} \text{ với } n \geq 2.$$

Suy ra kết quả sau với $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a^{20k} \equiv 00 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 25 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 76 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}.$$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta lấy số mũ n chia cho 20.

Dạng 1.

- Các số có tận cùng bằng 01; 25; 76 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 01; 25; 76

- Các số 3^{20} (hoặc 81^5); 7^4 ; 51^2 ; 99^2 có tận cùng bằng 01.

- Các số 2^{20} ; 6^5 ; 18^4 ; 24^2 ; 68^4 ; 74^2 có tận cùng bằng 76.

- Số 26^n ($n > 1$) có tận cùng bằng 76.

- Các số có chữ số tận cùng là 01; 25; 76 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì khác 0 thì hai chữ số tận cùng vẫn không thay đổi. (1)

- Các số 3^{20} ; 7^4 ; 9^{10} ; 51^2 ; 81^5 ; 99^2 có chữ số tận cùng là 01. (2)

- Các số 4^{10} ; 6^5 ; 18^4 ; 24^2 ; 68^4 ; 74^2 có chữ số tận cùng là 76. (3)

- Số 26^n ($n > 1$) có chữ số tận cùng là 76. (4)

Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a .

Dạng 2. CHÚ Ý:

- 4^{10} có 2 chữ số tận cùng là 76.

- 5^2 có 2 chữ số tận cùng là 25.

- 8^{20} có 2 chữ số tận cùng là 76.

- 9^{10} có 2 chữ số tận cùng là 01.

3. Tìm ba chữ số tận cùng trở lên

Việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.

Giả sử $n = 100k + r$ với $0 \leq r < 100$, khi đó: $a^n = a^{100k+r} = a^{100k} \cdot a^r$.

Giả sử: $a \equiv x \pmod{10}$, $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Ta có: $a^{100} = 10k + x^{100} \equiv x^{100} \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng của a^{100} cũng chính là 3 chữ số tận cùng của x^{100} .

Dùng quy nạp với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$625^n \equiv 625 \pmod{1000},$$

$$376^n \equiv 376 \pmod{1000}.$$

- Nếu $x = 0$ thì $x^{100} \equiv 000 \pmod{1000}$

- Nếu $x = 5$ thì $x^4 = 5^4 = 625 \Rightarrow x^{100} = 5^{4 \cdot 25} \equiv 625 \pmod{10^3}$

- Nếu $x = 1; 3; 7; 9$ ta có tương ứng:

$$x^4 = 1; 81; 2401; 6561 \equiv 1 \pmod{40} \Rightarrow x^{100} = 40k + 1^{25} \equiv 1 \pmod{10^3}$$

- Nếu $x = 2; 4; 6; 8$ thì $x^{100} : 2^{100} : 8$.

Ta có: $x, 125 = 1$ nên $x^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ (Định lý Euler).

Giả sử 3 chữ số tận cùng của x^{100} là $\overline{abc}$ ta có:

$$x^{100} = 1000k + \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} : 8 \text{ và } \overline{abc} \equiv 1 \pmod{125}$$

Trong các số 1; 126; 376; 501; 626; 751; 876 (các số có 3 chữ số chia cho 125 dư 1) chỉ có duy nhất

một số chia hết cho 8 là 376. Vậy $x^{100} \equiv 376 \pmod{1000}$.

Do đó ta có kết quả sau:

$$a^{100k} \equiv 000 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 001 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 625 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 376 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}$$

Vậy để tìm ba chữ số tận cùng của a^n ta tìm 2 chữ số tận cùng của số mũ n .

Dạng 3. Một số trường hợp cụ thể về 3 chữ số tận cùng

□ Các số có tận cùng bằng 001; 376; 625 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 001; 376; 625.

□ Các số có tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0625.

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tìm 1 chữ số tận cùng

Ví dụ 1.1: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 32^{40}

b) 2018^{2019}

c) 27^{50}

d) 2019^{2020}

Phân tích:

- Ta biết rằng các số tận cùng là 2; 4; 6; 8 khi nâng lên lũy thừa $4n$ đều cho tận cùng là 6.

Còn các số tận cùng là 1; 3; 7; 9 khi nâng lên lũy thừa $4n$ đều cho tận cùng là 1.

- Để đưa về lũy thừa $4n$ thì em cần viết số mũ dưới dạng công thức của phép chia có dư với số chia là 4.

- Để tìm chữ số tận cùng của mỗi lũy thừa trên ta chỉ cần tìm chữ số tận cùng của hàng đơn vị.

Lời giải

a) Để tìm chữ số tận cùng của 32^{40} ta tìm chữ số tận cùng của 2^{40}

Ta xét 2^{40} , ta có $2^{40} = 2^{4 \cdot 10} = \overline{\dots 6}$

Vậy 32^{40} có chữ số tận cùng là 6.

b) Để tìm chữ số tận cùng của 2018^{2019} ta tìm chữ số tận cùng của 8^{2019}

Ta xét, ta có $8^{2019} = 8^{4 \cdot 502} \times 8 = \overline{\dots 6} \times 8 = \overline{\dots 8}$

Vậy 2018^{2019} có tận cùng là 8.

c) Chữ số tận cùng của 27^{50} cũng là chữ số tận cùng của 7^{50}

Ta có $7^{50} = 7^{4 \cdot 12} \times 7^2 = \overline{\dots 1} \times 49 = \overline{\dots 9}$

Vậy chữ số tận cùng của 27^{50} là 9.

d) Chữ số tận cùng của 2019^{2020} cũng là chữ số tận cùng của 9^{2020}

Ta có $9^{2020} = 9^{4 \cdot 505} = \overline{\dots 1}$

Vậy chữ số tận cùng của 2019^{2020} là 1.

Bình luận:

Với phần d) ta có thể giải như sau:

Vì chữ số tận cùng là 9 mà khi nâng lên lũy thừa chẵn sẽ ra tận cùng là 1, do vậy 2019^{2020} có tận cùng là 1.

Với cách giải này ta hoàn toàn có thể mở rộng số cho phần d), chẳng hạn số $2019^{2020^{2021}}$,

$2019^{2020^{2050}}$, ...

Ví dụ 1.2: Tìm chữ số tận cùng của 3^{2020}

Phân tích:

Để tìm được chữ số tận cùng của số trên ta phải đưa về số có tận cùng là 1 hoặc 6.

Lời giải

Ta thấy $3^4 = 81$, số tận cùng bằng 1 nâng lên bậc lũy thừa nào cũng có chữ số tận cùng bằng 1 nên ta phân tích $3^{2020} = 3^{4 \cdot 505} = 81^{505}$.

Vậy số 3^{2020} có chữ số tận cùng bằng 1.

Ví dụ 1.3: Tìm chữ số tận cùng của các số sau

a) $26^{25^{24}}$

b) $2013^{2014^{2015}}$

c) $78^{50^{51^{52}}}$

Phân tích:

Trong bài này ta không thể viết ngay số mũ ở dạng $4n$, để cho dễ biểu diễn ta dùng đồng dư thức để tìm dư của phép chia số mũ cho 4.

Lời giải

a) Trước hết ta tìm số dư của phép chia 25^{24} khi chia cho 4.

Ta có $25 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 25^{24} \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 25^{24} = 4k + 1 \quad k \in \mathbb{N}^*$

Suy ra, $26^{25^{24}} = 26^{4k+1} = 26^{4k} \times 26 = \overline{...6} \times 26 = \overline{...6}$

Vậy $26^{25^{24}}$ có tận cùng là 6.

Nhận xét: Trong phần này rõ ràng dựa vào nhận xét ‘Số có tận cùng là 6 khi nâng lên lũy thừa bất kỳ luôn có tận cùng là 6’ thì lời giải rất đơn giản.

b) Tương tự, ta tìm số dư khi chia số mũ của 2013 cho 4.

$$\left. \begin{array}{l} 2014 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 2014^{2015} \equiv 2^{2015} \pmod{4} \\ \text{Ta có } 2^{2015} = 2^{2 \cdot 1002} \times 2 = 4^{1002} \times 2 \\ \Rightarrow 2014^{2015} = 4k \quad k \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow 2014^{2015} \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\text{Do đó } 2013^{2014^{2015}} = 2013^{4k} = 2013^{4k} = \overline{...1}$$

Vậy $2013^{2014^{2015}}$ có tận cùng là 1.

c) Trước hết ta tìm số dư trong phép chia $50^{51^{52}}$ khi chia cho 4.

$$\text{Ta có } 50 \equiv 2 \pmod{4}; 50^2 \equiv 0 \pmod{4}; 50^k \equiv 0 \pmod{4} \quad k > 2$$

$$\text{Suy ra } 50^{51^{52}} \equiv 0 \pmod{4} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Mà } 51^{52} \text{ là số lẻ nên } 50^{51^{52}} \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 50^{51^{52}} = 4m (m \in \mathbb{N})$$

$$\text{Từ đó ta có } 78^{50^{51^{52}}} = 78^{4m} = 78^{4m} = \overline{...6}$$

Vậy $78^{50^{51^{52}}}$ có tận cùng là 6.

Bình luận:

Với bài toán ở dạng lũy thừa tầng thì ta luôn chú ý tìm cách viết số mũ dưới dạng công thức của phép chia có dư với số chia là 4. Tuy nhiên, nếu tận cùng là một trong các số đặc biệt như:

0; 1; 5; 6 thì ta nhận xét ngay mà không cần quan tâm đến giá trị của số mũ. Còn nếu tận cùng là 4 hoặc 9 thì ta có thể xem xét tính chẵn lẻ của số mũ để suy ra kết quả.

Ví dụ 1.4: Tìm chữ số tận cùng của

$$a) 7^{89} - 4^{81}$$

$$b) 2^{2014} \cdot 9^{1955}$$

Lời giải

a) Ta có: $7^{89} = 7^{4 \cdot 21 + 1} = 7^{4 \cdot 21} \cdot 7 = 7^{2401} \cdot 7$ nên số này có số tận cùng bằng 7.

$$4^{81} = 4^{2 \cdot 40 + 1} = 16^{40} \cdot 4 \text{ nên số này có số tận cùng bằng 4.}$$

Vậy số $7^{89} - 4^{81}$ có chữ số tận cùng bằng 3

b) Ta có: $2^{2014} = 2^{4 \cdot 506 + 2} = 16^{506} \cdot 4$ nên số này có số tận cùng bằng 4.

$$9^{1955} = 9^{2 \cdot 977 + 1} = 81^{977} \cdot 9 \text{ nên số này có số tận cùng bằng 9.}$$

Vậy số $2^{2014} \cdot 9^{1955}$ có chữ số tận cùng bằng 6.

Ví dụ 1.5: Tìm chữ số tận cùng của các tích sau:

a) $26^{27} \cdot 27^{28}$

b) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2019^{2020}$

c) $8 \cdot 18 \cdot 28 \cdot 38 \cdot \dots \cdot 198^{200 \cdot 202}$

d) $1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 2019^{100}$

Phân tích:

Để tìm chữ số tận cùng của tích ta có thể tìm chữ số tận cùng của từng thừa số hoặc nhóm các thừa số.

Lời giải

a) Ta thấy 26 có tận cùng là 6, mà số tận cùng là 6 nâng lên lũy thừa bao nhiêu vẫn tận cùng là 6.

Do đó, 26^{27} có tận cùng là 6.

$$\text{Có } 27^{28} = 27^{4 \cdot 7} = \dots 1$$

$$\text{Suy ra } 26^{27} \times 27^{28} = \dots 6 \times \dots 1 = \dots 6$$

Vậy tích có tận cùng là 6.

Khai thác: - Vì tích có tận cùng là 6 nên ta có thể yêu cầu khác như sau:

Chứng minh rằng số $\frac{26^{27} \times 27^{28} + 4}{10}$ là số tự nhiên.

- Nếu để ý đến công thức lũy thừa của một tích ta có thể làm như sau:

$$\begin{aligned} 26^{27} \times 27^{28} &= 26^{27} \times 27^{27} \times 27 = 26 \times 27^{27} \times 27 = \dots 2^{4 \times 6 + 3} \times 27 \\ &= \dots 2^{4 \times 6} \times \dots 2^3 \times 27 = \dots 6 \times \dots 8 \times 27 = \dots 6 \end{aligned}$$

) Ta biết rằng tích của 5 với bất kỳ số lẻ nào cũng có tận cùng là 5, do đó tích $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2019$ sẽ có tận cùng là 5. Mặt khác, số có tận cùng là 5 khi nâng lên lũy thừa bất kỳ vẫn tận cùng là 5.

Vậy $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2019^{2020}$ có tận cùng là 5.

Khai thác: Ta biết rằng tích của hai số tự nhiên liên tiếp sẽ có tận cùng là 1 trong các số sau:

0;2;6 do đó, ta có thể ra bài toán như sau:

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho:

$$a) n^2 + n = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2019^{2020}; \quad b) 2n + 1 \mid 2n + 2 = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2019^{2020}$$

c) Đặt $A = 8 \times 18 \times 28 \times 38 \times \dots \times 198$. Số thừa số của tích này là: $198 - 8 : 10 + 1 = 20$ (số hạng) (1)

Ta thấy tích 4 thừa số có tận cùng là 8 sẽ có tận cùng là 6. Vì có 20 thừa số ta kết hợp được 5 nhóm mỗi nhóm có 4 thừa số, tích mỗi nhóm này có chữ số tận cùng là 6. Do đó kết quả của tích A có chữ số tận cùng là 6. Mà số có tận cùng là 6 nâng lên lũy thừa bất kỳ sẽ có tận cùng là 6, suy ra $A^{200^{202}}$ sẽ có tận cùng là 6.

Vậy lũy thừa của tích có tận cùng là 6.

Khai thác: - Ta để ý, chữ số tận cùng của A cũng là chữ số tận cùng của $8 \times 8 \times 8 \times \dots \times 8$ (20 thừa số), do đó ta có thể quy về việc tìm chữ số tận cùng của $8^{20^{200^{202}}}$

- Ta có mở rộng bài toán bằng cách cho tăng số lượng các thừa số của tích.

- Hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể thay đổi chữ số tận cùng của mỗi thừa số trong tích bởi một chữ số khác.

Chẳng hạn, tìm chữ số tận cùng của các số sau:

$$A = 2 \times 12 \times 22 \times \dots \times 2022^{2020}$$

$$B = 7 \times 17 \times 27 \times \dots \times 2017^{100^{200}}$$

d) Ta để ý rằng các nhóm $1 \times 3 \times 7 \times 9; 11 \times 13 \times 17 \times 19; \dots; 2011 \times 2013 \times 2017 \times 2019$ đều có tận cùng giống nhau, nên ta đi tìm chữ số tận cùng của 1 nhóm.

$$\text{Ta có } 1 \times 3 \times 7 \times 9 = \overline{\dots 9}$$

Có số nhóm là: $(2011 - 1) : 10 + 1 = 202$ (nhóm)

Suy ra

$$1 \times 3 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 17 \times \dots \times 2019 = \overline{\dots 9}^{202} = \overline{\dots 9}^{4 \times 50 + 2} = \overline{\dots 9}^{4 \times 50} \times \overline{\dots 9}^2 = \overline{\dots 1} \times \overline{\dots 1} = \overline{\dots 1}$$

Vậy $1 \times 3 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 17 \times \dots \times 2019 \stackrel{100}{=} \overline{\dots 1}^{100} = \overline{\dots 1}$ nên có tận cùng là 1.

Khai thác: Ta thấy tất cả các thừa số của tích đều không chia hết cho 5, nên ta có thể thay đổi cách phát biểu bài toán như sau:

Cho số $A = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times \dots \times 2019$, sau khi gạch bỏ tất cả các số chia hết cho 5 của A, ta được số B. Tìm chữ số tận cùng của B^{100} .

- Bài toán trên có thể thay đổi các thừa số lẻ bằng các thừa số chẵn, chẳng hạn: Tìm chữ số tận cùng của số $B = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 12 \times 14 \times 16 \times \dots \times 2018 \stackrel{2019}{}$

Ví dụ 1.6: Tìm chữ số tận cùng của các tổng sau:

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}.$$

Phân tích:

Trong dạng bài này ta phải tìm được quy luật của tổng, quy luật ở đây chính là số mũ của các số hạng trong S, các số mũ này đều chia 4 dư 1. Mà ta biết các số khi nâng lên lũy thừa dạng $4n + 1$ sẽ có tận cùng không đổi.

Lời giải:

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng n^{4n-2+1} , n thuộc $2; 3; 4; \dots; 2004$)

Theo tính chất, suy ra mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$2 + 3 + \dots + 9 + 199. \quad 1 + 2 + \dots + 9 + 1 + 2 + 3 + 4 = 200 \quad 1 + 2 + \dots + 9 + 9 = 9009.$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Tổng quát hóa:

Tìm chữ số tận cùng của tổng sau: $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + n^{4n-2+1}$

Ví dụ 1.7: Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$.

Lời giải:

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc $2; 3; 4; \dots; 2004$)

Theo quy tắc 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8; 3^7 có chữ số tận cùng là 7; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4;

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 \\ = 200.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 8 + 7 + 4) = 9019$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9

Tương tự hóa:

Tìm chữ số tận cùng của $S = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + n^{4(n-2)+3}$

Ví dụ 1.8: Tìm số dư của phép chia:

a) $Q = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2003^{8005}$ cho 5

b) $R = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2003^{8007}$ cho 5

Lời giải:

a) **Nhận xét:** Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+1}$, n thuộc $2; 3; 4; \dots; 2003$)

Theo quy tắc 2, Chữ số tận cùng của tổng Q các lũy thừa bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng S.

Mọi lũy thừa trong Q và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$(2 + 3 + \dots + 9) + 199.(1 + 2 + \dots + 9) + 1 + 2 + 3 = 200(1 + 2 + \dots + 9) + 5 = 9005$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng Q là 5 nên chia 5 không có dư.

b) **Nhận xét:** Mọi lũy thừa trong R đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc $2; 3; 4; \dots; 2003$)

Theo quy tắc 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8; 3^7 có chữ số tận cùng là 7; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4

Như vậy, tổng R có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 \\ = 200.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 8 + 7 = 9015$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng R là 5 nên chia 5 không có dư.

Ví dụ 1.9: Cho $H = 1234567891011121314151617 \dots$ được viết bởi các số tự nhiên liên tiếp và có 121 chữ số. Số H^{2019} có chữ số tận cùng là chữ số nào?

Phân tích:

Trước hết ta phải tìm được chữ số tận cùng của H, muốn vậy ta phải tính xem với 121 chữ số thì chữ số cuối cùng được viết là chữ số nào. Ta dựa vào bài toán ngược của bài toán “Đánh số trang sách”.

Lời giải:

Ta có từ 1 đến 9 có 9 số, mỗi số gồm 1 chữ số.

Từ 10 đến 99 có 90 số, mỗi số gồm 2 chữ số nên khi viết chúng liên tiếp ta có $90 \cdot 2 = 180$ (chữ số).

Mà $9 < 121 < 180$ nên chữ số tận cùng của H phải ở số có hai chữ số.

Số chữ số của các số có 2 chữ số viết ở H là: $121 - 9 = 112$ (chữ số)

Số các số có 2 chữ số viết ở H là $112 : 2 = 56$

Số thứ 56 kể từ 10 có 2 chữ số là: $10 + 56 - 1 = 65$

suy ra chữ số tận cùng của H là chữ số 5 (là chữ số hàng đơn vị của số 65).

Mặt khác, 5^{2019} có tận cùng là 5. Vậy chữ số tận cùng của H^{2019} là chữ số 5.

Tổng quát hóa:

Bài toán có thể mở rộng cho số các chữ số của số đã cho.

Cho $H = 1234567891011121314151617 \dots$ được viết bởi các số tự nhiên liên tiếp và có n chữ số ($n \in \mathbb{N}^*$). Số H^{2019} có chữ số tận cùng là chữ số nào?

Với mỗi giá trị của n ta được một bài toán mới.

Ví dụ 1.10: Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $10 \times A + x^2 = 14^{14} + 9^9 + 2^{34}$ với A là số tự nhiên khác 0.

Phân tích:

Rõ ràng ta không thể tính được giá trị về phải, để ý rằng x chính là chữ số tận cùng của biểu thức $10 \times A + x$ nên ta suy nghĩ theo hướng tìm chữ số tận cùng của về phải.

Lời giải

Ta biết rằng, số có tận cùng là 4 (hoặc 9) khi nâng lên lũy thừa chẵn cho tận cùng là 6 (hoặc 1), còn khi nâng lên lũy thừa lẻ sẽ tận cùng không đổi.

Do đó, chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ là 6, chữ số tận cùng của 9^{9^9} là 9

$$\text{Mặt khác, } 2^{3^4} = 2^{81} = 2^{4 \times 20 + 1} = 2^{4 \times 20} \times 2 = \overline{\dots 6} \times 2 = \overline{\dots 2}$$

suy ra chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2.

Do vậy, chữ số tận cùng của về phải giống chữ số tận cùng của $6 + 9 + 2 = 17$, tức là 7.

Ta thấy $10 \times A + x$ có tận cùng là x nên $10 \times A + x^2$ có tận cùng bằng tận cùng của x^2

Vì không có số nào lũy thừa bậc 2 lên để có tận cùng là 7, nên không tìm được x thỏa mãn.

Vậy không có x thỏa mãn.

Bình luận:

Việc phát hiện ra x là chữ số tận cùng của biểu thức trong ngoặc là mấu chốt để giải bài toán.

Tổng quát hóa:

Vì không có số nào lũy thừa với số mũ khác $4n+1$ hoặc $4n+3$ lại có tận cùng là 7, nên ta có thể tổng quát bài toán như sau:

Với mỗi số tự nhiên n , hãy tìm số tự nhiên x thỏa mãn:

a) $10 \times A + x^{4n+2} = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$ với A là số tự nhiên khác 0.

b) $10 \times A + x^{4n} = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$ với A là số tự nhiên khác 0.

Ví dụ 1.11: Chứng minh $N = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi n là số nguyên dương.

Lời giải

Ta có $2012^{4n} = (\dots 6)^n$ nên số này có số tận cùng bằng 6

$2013^{4n} = (\dots 1)^n$ nên số này có số tận cùng bằng 1

$2014^{4n} = (\dots 6)^n$ nên số này có số tận cùng bằng 6

2015^{4n} số này có số tận cùng bằng 5

Suy ra số N có chữ số tận cùng bằng 8, mà số chính phương không có chữ số tận cùng bằng 8.

Vậy số N không là số chính phương.

Ví dụ 1.12: Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}

Lời giải:

1995^{2000} tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5. Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không?

Ta có $n^2 + n = n(n+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0; 2; 6 $\Rightarrow n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1; 3; 7 $\Rightarrow n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}

Sử dụng tính chất: “*một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 0; 1; 5; 6; 9*”, ta có thể giải được bài toán sau:

Ví dụ 1.13: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^{8n} + 3.p^{4n} - 4$ chia hết cho 5.

Lời giải:

Theo tính chất trên, ta có p là số nguyên tố lớn hơn 5 vậy chữ số tận cùng của p là các chữ số 1; 3; 7; 9, các lũy thừa của p có dạng $4n \Rightarrow$ Chữ số tận cùng của $p^{8n}; p^{4n}$ là 1.

Vậy chữ số tận cùng của $p^{8n} + 3.p^{4n} - 4$ là 0 nên chia hết cho 5 (dpcm).

Dạng 2: Tìm hai chữ số tận cùng

Ví dụ 2.1: Tìm hai số tận cùng của 2^{100}

Lời giải

Chú ý rằng: $2^{10} = 1024$ bình phương của số có tận cùng bằng 24 thì tận cùng bằng 76, số có tận cùng bằng 76 thì nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 76.

$$\text{Do đó } 2^{100} = 2^{10 \cdot 10} = 1024^{10} = 1024^2 \cdot 5 = \overline{\dots 76}^5 = \overline{\dots 76}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{100} là 76.

Ví dụ 2.2: Tìm hai chữ số tận cùng của 7^{1991}

Lời giải

Ta thấy: $7^4 = 2401$, số có tận cùng bằng 01 nâng lên lũy thừa nào cũng tận cùng bằng 01.

$$\text{Do đó: } 7^{1991} = 7^{1988} \cdot 7^3 = 7^4 \cdot 7^{497} \cdot 7^3 = \overline{\dots 01}^{497} \cdot 343 = \overline{\dots 01} \cdot 343 = \overline{\dots 43}.$$

Vậy 7^{1991} có hai chữ số tận cùng là 43.

Bài toán tương tự

Tìm hai chữ số tận cùng của:

$$\text{a) } 51^{51}; \quad \text{b) } 99^{99^{99}}; \quad \text{c) } 6^{666}; \quad \text{d) } 14^{101} \cdot 16^{101}$$

Hướng dẫn:

$$\text{a) } 51^{51} = 51^{2^{25}} \cdot 51 = \overline{\dots 01}^{25} \cdot 51 = \overline{\dots 51}.$$

$$\text{b) } 99^{99^{99}} = 99^{2^{k+1}} = 99^{2^k} \cdot 99 = \overline{\dots 01}^k \cdot 99 = \overline{\dots 99}.$$

$$\text{c) } 6^{666} = 6^{5^{133}} \cdot 6 = \overline{\dots 76} \cdot 6 = \overline{\dots 56}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 14^{101} \cdot 16^{101} &= 14 \cdot 16^{101} = 224^{101} = 224^{2^{50}} \cdot 224 = \overline{\dots 76}^{50} \cdot 224 \\ &= \overline{\dots 76} \cdot 224 = \overline{\dots 24}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.3: Tìm 2 chữ số tận cùng của $1976^{56} \cdot 2015^{77}$

Lời giải

Ta thấy:

Chữ số tận cùng của 1976^{56} cũng là chữ số tận cùng của 76^{56} mà $76^{56} = \overline{\dots 76}$

Chữ số tận cùng của 2015^{77} cũng là chữ số tận cùng

$$\text{của } 15^{77} \text{ mà } 15^{77} = 3 \cdot 5^{77} = 3^{77} \cdot 5^{77} = 3^{20 \cdot 3 + 17} \cdot 5^{77} = 3^{17} \cdot \overline{\dots 01} \cdot \overline{\dots 25} = \overline{\dots 63} \cdot \overline{\dots 25} = \overline{\dots 75}.$$

$$\text{Suy ra: } 1976^{56} \cdot 2015^{77} = \overline{\dots 76} \cdot \overline{\dots 75} = \overline{\dots 00}.$$

Vậy $1976^{56} \cdot 2015^{77}$ có 2 chữ số tận cùng là 00.

Ví dụ 2.4: Tìm hai chữ số tận cùng của số $C = 2^{999}$

Lời giải

Ta có: $2^{10} + 1 = 1024 + 1 = 1025 : 25$ suy ra $2^{20} - 1 = 2^{10} + 1 \cdot 2^{10} - 1 : 25$

Ta lại có $2^{1000} - 1 = 2^{20 \cdot 50} - 1 : 2^{20} - 1$ suy ra $2^{1000} - 1 : 25$

Do đó 2^{1000} chữ số tận cùng là 26; 51; 76 nhưng $2^{1000} : 4$

Suy ra 2^{1000} tận cùng là 76 $\Rightarrow 2^{999}$ tận cùng là 38 hoặc 88 vì $2^{999} : 4$

Vậy 2^{999} tận cùng là 88

Vậy $C = 2^{999}$ có hai chữ số tận cùng là 88.

Ví dụ 2.5: Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng

$$a) S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + \dots + 2004^{2002}$$

$$b) S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + \dots + 2004^{2003}$$

Phân tích:

Trong bài tập này ta sử dụng tính chất sau:

Nếu $a \in N$ và $a, 5 = 1$ thì $a^{20} - 1 : 25$. (*)

Lời giải

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất (*) ta suy ra với mọi $a \in N$ và $a, 5 = 1$ ta có $a^{100} - 1 : 25$.

Vậy với mọi $a \in N$ ta có $a^2 \cdot a^{100} - 1 : 100$.

$$\text{Do đó } S_1 = 1^{2002} + 2^2 \cdot 2^{2000} - 1 + \dots + 2004^2 \cdot 2004^{2000} - 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2.$$

Nên hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2.$$

$$\text{Ta có: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 2004^2 = 2005.4009.334 = 2684707030, \text{ tận cùng là } 30.$$

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a,

$$S_2 = 1^{2003} + 2^3 \cdot 2^{2000} - 1 + \dots + 2004^3 \cdot 2004^{2000} - 1 + 2^3 + 3^3 + 2004^3.$$

Nên hai chữ số tận cùng của tổng S_2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2004^3.$$

Áp dụng công thức: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

$$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + 2004^3 = (2005 \cdot 1002)^2 = 4036121180100, \text{ tận cùng là } 00.$$

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_2 là 00.

Ví dụ 2.6: Tìm 2 chữ số tận cùng của 4^{2004}

Lời giải

Do 4 là số chẵn nên ta tìm số n nhỏ nhất để $4^n - 1 \vdots 25$. Ta tìm được $n = 10$ thỏa mãn.

Mặt khác $2004 = 10 \cdot 200 + 4$.

$$\text{Nên } 4^{2004} = 4^{10 \cdot 200 + 4} = 4^4 \left[(4^{10})^{200} - 1 \right] + 4^4 = 100k + 256$$

Vậy chữ số tận cùng của 4^{2004} là 56.

Ví dụ 2.7: Tìm 2 chữ số tận cùng của 51^{2020}

Lời giải

Ta có $2020 = 2 \cdot 1010$ nên $51^{2020} = (51^2)^{1010} = 2601^{1010}$. Khi đó theo quy tắc (1) chữ số tận cùng của 51^{2020} là 01.

Ví dụ 2.8: Tìm 2 chữ số tận cùng của a) 7^{2015} b) 57^{66}

Lời giải

a) Ta có: $7^4 = 2401$ nên $7^{2015} = 7^{4 \cdot 503 + 3} = (7^4)^{503} \cdot 7^3 = 2401^{503} \cdot 343 = (\dots 01) \cdot 343 = \dots 43$

Chữ số tận cùng của 7^{2015} là 43.

b) ta có $57^{66} = (57^4)^{16} \cdot 57^2 = (\dots 01)^{16} \cdot 3249 = \dots 49$

Bình luận:

Ở ví dụ này ta đã áp dụng tính chất:

Nếu A có 2 chữ số tận cùng là ab và B có 2 chữ số tận cùng là cd thì 2 chữ số tận cùng của A.B là 2 chữ số tận cùng của tích ab và cd

Ví dụ 2.9: Tìm 2 chữ số tận cùng của

a) 2098^{123}

b) 1996^{19^2}

Phân tích:

+ Ta thấy 2 chữ số tận cùng của 2098^{123} cũng là 2 chữ số tận cùng của 98^{123}

+ tương tự ta thấy 2 chữ số tận cùng của 1996^{19^2} cũng là 2 chữ số tận cùng của 96^{19^2} .

Lời giải

a) Ta có: $98^{123} = (49.2)^{123} = 49^{123} \cdot 2^{123}$ mà:

$$49^{123} = 49^{2.61+1} = 2401^{61} \cdot 49 = (\dots 01) \cdot 49 = \dots 49$$

$$2^{123} = 2^{20.6+3} = (2^{20})^6 \cdot 2^3 = (\dots 76)^6 \cdot 8 = \dots 08$$

$$\Rightarrow 98^{123} = (49.2)^{123} = 49^{123} \cdot 2^{123} = (\dots 49) \cdot (\dots 08) = \dots 92$$

Vậy 2 chữ số tận cùng của 2098^{123} là 92.

b) ta có: $96^{19^2} = 96^{361} = (32.3)^{361} = 32^{361} \cdot 3^{361} = (2^5)^{361} \cdot 3^{361} = 2^{1805} \cdot 3^{361}$.

Mà

$$2^{1805} = 2^{20.90+5} = (2^{20})^{90} \cdot 2^5 = (\dots 76)^{90} \cdot 32 = \dots 32$$

$$3^{361} = 3^{20.18+1} = (3^{20})^{18} \cdot 3 = (\dots 01)^{18} \cdot 3 = \dots 03$$

$$\Rightarrow 96^{19^2} = 96^{361} = (32.3)^{361} = 32^{361} \cdot 3^{361} = (2^5)^{361} \cdot 3^{361} = 2^{1805} \cdot 3^{361} = (\dots 32) \cdot (\dots 03) = \dots 96$$

Vậy 2 chữ số tận cùng của 1996^{19^2} là 96.

Dạng 3: Tìm ba chữ số tận cùng

Ví dụ 3.1: Tìm 3 chữ số tận cùng của 123^{101}

Phân tích:

Nhận thấy rằng $(123, 5) = 1$ nên ta sẽ áp dụng tính chất 4, khi đó chia hết cho 125.

Lời giải:

+ Vì $(123,5)=1$ nên áp dụng tính chất ta có $123^{101}-1$ chia hết cho 125. (1)

+ Ta lại có chia hết cho 8 (2)

Vì $(8;125)=1$ và kết hợp (1),(2) ta có chia hết cho 1000

Khi đó

Vậy 3 chữ số tận cùng của là 123

Ví dụ 3.2: Tìm 3 chữ số tận cùng của 2004^{200}

Phân tích:

Cách 1: Ta dễ dàng chứng minh được chia hết cho 8, khi đó ta sẽ tìm 3 chữ số tận cùng bằng cách gián tiếp: tìm dư phép chia số đó cho 125 từ đó suy ra các khả năng 3 chữ số tận cùng, cuối cùng kiểm tra điều kiện chia hết cho 8

+ Ta có nên suy ra chia hết cho 8

+ Ta lại có $(2014,5)=1$ nên $2004^{100} \equiv 1 \pmod{125} \Rightarrow 2004^{200} \equiv 1 \pmod{125}$

Hay $(2004^{200}-1)$ chia hết cho 125 khi đó số 2004^{200} có các khả năng 3 chữ số tận cùng là 126;251;376;501;626;751;876

Vì 2004^{200} chia hết cho 8 nên số đó có chữ số tận cùng là 376

Cách 2.

Ta thấy $2004 \equiv 4 \pmod{10}$ khi đó $2004^{200} \equiv 2004^{2 \cdot 100} \equiv 376 \pmod{1000}$

Vậy số đó có chữ số tận cùng là 376

Từ bài toán trên ta có bài toán tổng quát:

Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Tìm 3 chữ số tận cùng của A^{200}

Phân tích:

Vì A là một số chẵn không chia hết cho 10 nên $(A,5)=1$. Khi đó ta áp dụng tính chất ta có $A^{100}-1$ chia hết cho 125.

Lời giải:

+ Do A là một số chẵn nên $A^{200} = 2n^{200} = 2^{200} \cdot n^{200} \equiv 0 \pmod{8}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $(n;5)=1$)

Suy ra A^{200} chia hết cho 8 (1)

+ Vì A là một số chẵn không chia hết cho 10 nên $(A,5)=1$. Khi đó áp dụng tính chất ta có

$$A^{100} \equiv 1 \pmod{125} \Rightarrow A^{200} \equiv 1 \pmod{125}$$

Hay $(A^{200} - 1)$ chia hết cho 125 khi đó số A^{200} có các khả năng 3 chữ số tận cùng là

126;251;376;501;626;751;876

Vì A^{200} chia hết cho 8 nên số đó có chữ số tận cùng là 376

Bình luận:

Bài toán tổng quát này cũng có thể coi là phần chứng minh ý (4) trong phần chú ý

Ví dụ 3.3: Tìm 3 chữ số tận cùng của $2^{9^{2003}}$

Lời giải

- Tìm 2 chữ số tận cùng của 9^{2003}

$$\text{Ta có } 9^{2003} = 9^3 \cdot 9^{2000} = 9^3 \cdot (3^{20})^{50} \equiv 29 \pmod{100}$$

- Khi đó ta có $2^{9^{2003}} = 2^{100k+29} = 2^{29} \cdot 2^{100k} \equiv 912 \cdot 376 \equiv 912 \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng là 912

Ví dụ 3.4: Tìm 3 chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$

Lời giải

$$\text{Ta có } 7^{213} \equiv 7^{26 \cdot 8 + 5} \equiv 7^8 \cdot 7^5 \equiv 1^{26} \cdot 7^5 \equiv 7^5 \equiv 7 \pmod{100}$$

$$\text{Khi đó } 3^{7^{213}} = 3^{100k+7} = 3^{100k} \cdot 3^7 \equiv 1 \cdot 3^7 \equiv 187 \pmod{1000}$$

Vậy 3 chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$ là 187

Ví dụ 3.5: Cho $(a, 10) = 1$. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a.

Phân tích:

Để chứng minh ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a thì ta cần đưa ra dạng $a^{101} = 100k + a$.

Ta thấy $(a,10)=1$ thì a chỉ có thể là các số lẻ tận cùng khác 5

Lời giải.

+ Do $(a, 10) = 1$ nên khi đó ta có $a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$

Áp dụng chú ý phần (2) ta có $a^{100} \equiv 1 \pmod{1000}$

Ta xét $a^{101} = a^{100} \cdot a \equiv 1 \cdot a \pmod{1000} = a \pmod{1000} \Rightarrow a^{101} = 1000k + a$ (với $k \in \mathbb{N}^*$)

Điều này có nghĩa ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a . (đpcm)

Ví dụ 3.6: Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{1992}

Lời giải

$$5^{1992} = 5^4 \cdot 5^{498} = 625 \cdot 5^{498} = 0625 \cdot 5^{498} = \dots 0625$$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1992} là 0625

Ví dụ 3.7: Tìm ba chữ số tận cùng của số $T = 5^{946}$

Lời giải

Ta có 5^3 có ba chữ số tận cùng là 125

$$\text{Suy ra } T = 5^{946} = (5^3)^{315} \cdot 5 = (\overline{n125})^{315} \cdot 5 = \overline{m125} \cdot 5 = \overline{t625}$$

(Với $n, m, t \in \mathbb{N}$)

Vậy $T = 5^{946}$ có ba chữ số tận cùng là 125.

Ví dụ 3.8: Tìm ba chữ số tận cùng của số: $P = 5^{1994}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{array}{lll} 5^4 = 0625 \text{ tận cùng là } 0625; & 5^5 \text{ tận cùng là } 3125; & 5^6 \text{ tận cùng là } 5625 \\ 5^7 \text{ tận cùng là } 8125; & 5^8 \text{ tận cùng là } 0625; & 5^9 \text{ tận cùng là } 3125; \\ 5^{10} \text{ tận cùng là } 5625; & 5^{11} \text{ tận cùng là } 8125; & 5^{12} \text{ tận cùng là } 0625 \end{array}$$

Chu kỳ lặp là 4.

Suy ra:

$$\begin{array}{ll} 5^{4m} \text{ tận cùng là } 0625; & 5^{4m+1} \text{ tận cùng là } 3125 \\ 5^{4m+2} \text{ tận cùng là } 5625; & 5^{4m+3} \text{ tận cùng là } 8125 \end{array}$$

Mà 1994 có dạng $4m + 2$, do đó $M = 5^{1994}$ có 4 chữ số tận cùng là 5625.

Ví dụ 3.9: Tìm ba chữ số tận cùng của số: $R = 123^{101}$

Lời giải

Do $123,5 = 1 \Rightarrow 123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác: $123^{100} - 1 = 123^{25} - 1 \cdot 123^{25} + 1 \cdot 123^{50} + 1 \Rightarrow 123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $8,125 = 1$, từ (1) và (2) suy ra: $123^{100} - 1$ chỉ hết cho 1000

$$\Rightarrow 123^{101} = 123 \cdot 123^{100} - 1 + 123 = 1000k + 123 \quad k \in \mathbb{N}.$$

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Ví dụ 3.10: Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$

Lời giải

Do $9,5 = 1 \Rightarrow 9^{100} - 1$ chỉ hết cho 125 (1).

Ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $8,125 = 1$, từ (1) và (2) suy ra: $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000

$$\Rightarrow 3^{399 \dots 98} = 9^{199 \dots 9} = 9^{100p+99} = 9^{99} \cdot 9^{100p} - 1 + 9^{99} = 1000q + 9^{99} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99} .

Lại vì $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 $\Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9$

$\Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (để kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân $??9 \times 9 = \dots 001$ để xác định $??9 = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ là 889.

Ví dụ 3.11: Tìm ba chữ số tận cùng của 2004^{200}

Lời giải

Do $2004,5 = 1$

$\Rightarrow 2004^{100}$ chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200} = (2004^{100})^2$ chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200}$ chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876.

Do 2004^{200} chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

Ví dụ 3.12: Tìm ba chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$.

Lời giải

Nhận thấy: lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1

(các lũy thừa đều có dạng n^{4k-2+1} , k thuộc $2, 3, \dots, 2004$).

Mọi lũy thừa trong S đều có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của cơ số tương ứng:

$\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng:

$$2 + 3 + \dots + 9 + 199. 0 + 1 + 2 + \dots + 9 + 1 + 2 + 3 + 4 \\ = 200. 1 + 2 + \dots + 9 + 9 = 9009.$$

Vậy ba chữ số tận cùng sẽ là 009

Ví dụ 3.13: Tìm ba chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$.

Lời giải

Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng n^{4n-2+3} , n thuộc $2, 3, \dots, 2004$).

2^3 có chữ số tận cùng là 8; 3^7 có chữ số tận cùng là 7; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4; ...

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 199. 1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 1 + 8 + 7 + 4 \\ = 200. 1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 8 + 7 + 4 = 9019.$$

ba chữ số tận cùng của tổng T là 019.

Dạng 4: Vận dụng chứng minh chia hết, chia có dư

Ví dụ 4.1: Chứng minh rằng $8^{102} - 2^{102}$ chia hết cho 10

Lời giải

Ta thấy các số có tận cùng bằng 2 hoặc 8 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng là 6. Một số có tận cùng bằng 6 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 6.

Do đó ta biến đổi như sau:

$$8^{102} = (8^4)^{25} \cdot 8^2 = (\dots 6)^{25} \cdot 64 = (\dots 6) \cdot 64 = \dots 4$$

$$2^{102} = (2^4)^{25} \cdot 2^2 = 16^{25} \cdot 4 = (\dots 6) \cdot 4 = \dots 4$$

Vậy $8^{102} - 2^{102}$ tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 10

Ví dụ 4.2: Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Lời giải

Theo tính chất 1a $\Rightarrow 1995^{2000}$ tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5.

Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không?

Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

$\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0; 2; 6

$\Rightarrow n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1; 3; 7

$\Rightarrow n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Ví dụ 4.3: Chứng minh rằng 26^{1570} chia hết cho 8

Lời giải

Ta thấy: $26^5 = 11881376$, số có tận cùng bằng 376 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng có tận cùng bằng 376. Do đó:

$$26^{1570} = (26^5)^{314} = (\dots 376)^{314} = (\dots 376)$$

Mà 376 chia hết cho 8

Một số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 thì chia hết cho 8

Vậy 26^{1570} chia hết cho 8

Ví dụ 4.4: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n.

- a) $7^{4n} - 1$ chia hết cho 5;
- b) $3^{4n+1} + 2$ chia hết cho 5;
- c) $2^{4n+1} + 3$ chia hết cho 5;
- d) $2^{4n+2} + 1$ chia hết cho 5;
- e) $9^{2n+1} + 1$ chia hết cho 10.

Lời giải

a) $7^{4n} - 1 = (7^4)^n - 1 = 2401^n - 1 = \dots = \overline{\dots 1} - 1$, tận cùng bằng 0.

Vậy $7^{4n} - 1 : 5$.

b) $3^{4n+1} + 2 = (3^4)^n \cdot 3 + 2 = 81^n \cdot 3 + 2 = \overline{\dots 1} \cdot 3 + 2$, tận cùng bằng 5.

Vậy $3^{4n+1} + 2 : 5$.

c) $2^{4n+1} + 3 = (2^4)^n \cdot 2 + 3 = 16^n \cdot 2 + 3 = \overline{\dots 6} \cdot 2 + 3$, tận cùng bằng 5.

Vậy $2^{4n+1} + 3 : 5$.

d) $2^{4n+2} + 1$ tận cùng bằng 5 nên chia hết cho 5.

e) $9^{2n+1} + 1 = (9^2)^n \cdot 9 + 1 = 81^n \cdot 9 + 1 = \overline{\dots 1} \cdot 9 + 1$, tận cùng bằng 0.

Vậy $9^{2n+1} + 1$ chia hết cho 10.

Ví dụ 4.5: Chứng minh rằng 26^{1570} chia hết cho 8

Lời giải

Ta thấy: $26^5 = 11881376$, số có tận cùng bằng 376 nâng lên lũy thừa

Nào (khác 0) cũng có tận cùng bằng 376. Do đó:

$$26^{1570} = (26^5)^{314} = (\dots 376)^{314} = (\dots 376)$$

Mà 376 chia hết cho 8

Một số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 thì chia hết cho 8

Vậy 26^{1570} chia hết cho 8

Ví dụ 4.6: Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho số $n^2 + n + 1$ chia hết cho 2005^{2005}

Lời giải

Số 2005^{2005} có tận cùng là 5. nên nó chia hết cho 5

Ta có $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ chỉ có thể có các chữ số tận cùng là 1, 3, 7. nên nó không chia hết cho 5

Vậy không tồn tại n .

Ví dụ 4.7: Cho P là số nguyên tố lớn hơn 5. chứng minh rằng $(P^{8n} + 3P^{4n} - 4) : 5$.

Lời giải

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên tận cùng của p chỉ có thể là các chữ số: 1; 3; 7; 9

Nếu P có tận cùng là 1 thì $P^{8n} + 3P^{4n} - 4$ có tận cùng là 0 nên nó chia hết cho 5

Nếu P có tận cùng là 3 thì $p^{4n} = 10k + 3^{4n} = 10k + 81^n$ có tận cùng là 1. p^{8n} có tận cùng là 1. nên: $P^{8n} + 3P^{4n} - 4$ có tận cùng là 0. nên nó chia hết cho 5

Nếu p có tận cùng là 7 thì tương tự. tận cùng của p^{4n} và p^{8n} cũng có tận cùng là 1. nên tổng chia hết cho 5

Nếu p có tận cùng là 9 thì: $p^{4n} = 10k + 9^{4n} = 10k + 81^{2n}$ có tận cùng là 1 và $p^{8n} = (p^{4n})^2$ có tận cùng là 1

Nên tổng trên cũng chia hết cho 5.

Tóm lại với p nguyên tố lớn hơn 5 thì tổng luôn chia hết cho 5

Nhận xét chung về phương pháp:

1. Tách a^n dưới dạng $(10k + a_1)^n$ với $a_1 = \{0, 1, \dots, 9\}$
2. Viết n dưới dạng $n = 4q + r$ ($r = 0, 1, 2, 3$)
3. Sử dụng nhận xét 1, 2, 3 đã chứng minh ở trên.

Ví dụ 4.8: Chứng minh rằng n^5 và n có chữ số tận cùng giống nhau

Lời giải

Để chứng minh n^5 và n có cùng chữ số tận cùng là đi chứng minh $n^5 - n : 10$

Ta có: $A = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1).n(n+1).(n^2 + 1)$

Ta có $10 = 2.5$ và $(2.5) = 1$

$(n-1), n, n+1$ là các số tự nhiên liên tiếp

Suy ra $A : 2$

Chứng minh $A : 5$ nếu $n : 5$ thì $A : 5$

Nếu $n : 5$ dư 1 suy ra $n-1 : 5 \Rightarrow A : 5$

$n : 5$ dư 2 suy ra $n^2 + 1 = (5k+2)^2 + 1 = (5k)^2 + 20k + 4 + 1 : 5 \Rightarrow A : 5$

$n : 5$ dư 3 suy ra $n^2 + 1 = (5k+3)^2 + 1 = (5k)^2 + 30k + 9 + 1 : 5 \Rightarrow A : 5$

$n: 5 \text{ dư } 4 \text{ suy ra } n+1 : 5 \Rightarrow A: 5$

Vậy $A: 2$ và $A: 5 \Leftrightarrow A: 10$

Vậy n^5 và n có cùng chữ số tận cùng.

Dạng 5: Vận dụng chữ số tận cùng vào bài toán chính phương

Ví dụ 5.1: Cho $n = 2016^2 + 2017^2 + 2018^2 - 2019^2$. Chứng minh n không là số chính phương.

Phân tích:

Để chứng minh n không là số chính phương ta chỉ ra số này có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.

Lời giải

Ta có

2016^2 có chữ số tận cùng là 6

2017^2 có chữ số tận cùng là 9

2018^2 có chữ số tận cùng là 4

2019^2 có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 2016^2 + 2017^2 + 2018^2 - 2019^2$ có chữ số tận cùng giống với chữ số tận cùng của $6 + 9 + 4 - 1 = 18$.

$\Rightarrow 2016^2 + 2017^2 + 2018^2 - 2019^2$ có chữ số tận cùng là 8.

$\Rightarrow 2016^2 + 2017^2 + 2018^2 - 2019^2$ không phải là số chính phương.

Bình luận:

Bài toán này giáo viên có thể thay đổi các cơ số tùy thích sao cho tổng hiệu các chữ số tận cùng của các số trong tổng hiệu là một số có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.

Việc chứng một số n không là số chính phương còn có một số cách khác:

- ☐ Chứng minh n không viết được dưới dạng k^2 ($k \in \mathbb{Z}$).
- ☐ Dựa vào phép chia cho 3, 4, 5, 8.
- ☐ Chỉ ra n nằm giữa hai số chính phương liên tiếp, tức là $k^2 < n < (k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 5.2: Cho $n = 1.3.5.7 \dots 2021$. Chứng minh rằng $n + 3$ không là số chính phương.

Phân tích

Để ý ta thấy rằng n là tích của các số tự nhiên lẻ từ 1 đến 2021 nên n là số lẻ, mà n chia hết cho 5 do đó n có chữ số tận cùng là 5. Vì thế bài toán này có thể vận dụng chữ số tận cùng để chứng minh $n + 3$ không là số chính phương.

Lời giải

$n \vdots 5, n \text{ lẻ} \Rightarrow$ chữ số tận cùng của n là 5.

$\Rightarrow n + 3$ có chữ số tận cùng là 8.

$\Rightarrow n + 3$ không là số chính phương.

Bình luận:

Bài toán này có thể sử dụng tính chất một số chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 thì số đó không phải là số chính phương.

Thật vậy, $n \vdots 3$ và $n \not\vdots 9$

$\Rightarrow n + 3 \vdots 3$ nhưng $n + 3 \not\vdots 9$

$\Rightarrow n + 3$ không là số chính phương.

Ví dụ 5.3: Biết $a \in \mathbb{N}$ và $a > 2$. Tìm a sao cho $\overline{a(a-1)}, \overline{a(a-1)} = \overline{(a-2)aa(a-1)}$.

Lời giải

Đẳng thức đã cho được viết lại như sau: $\overline{a(a-1)}^2 = \overline{(a-2)aa(a-1)}$.

Do vế trái là một số chính phương nên vế phải cũng là một số chính phương.

Một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ số 0, 1, 4, 5, 6, 9 nên a chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ số 1, 2, 5, 6, 7, 0 (1)

Do a là chữ số nên $a \leq 9$, kết hợp với điều kiện đề bài ta có $a \in \mathbb{N}$ và $2 < a \leq 9$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra a có thể nhận được một trong các giá trị 5, 6, 7.

Thử trực tiếp với $a = 5, 6, 7$ chỉ có với $a = 7$ thì $\overline{(a-2)aa(a-1)} = 5776 = 76^2$.

Ví dụ 5.4: Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị và số chính phương đó viết dưới dạng $(5n + 4)^2$ với $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Số $5n + 4$ tận cùng bằng 4 hoặc 9. Xét hai trường hợp:

Trường hợp $5n + 4$ tận cùng bằng 4 thì $(5n + 4)^2$ tận cùng bằng 6. Cần tìm số có dạng $\overline{6*6}$ là bình phương của một số tận cùng bằng 4. Không có số nào thỏa mãn điều kiện trên vì $74^2 = 5476 < \overline{6*6} < 7056 = 84^2$.

Trường hợp $5n + 4$ tận cùng bằng 9 thì $(5n + 4)^2$ tận cùng bằng 1. Cần tìm số có dạng $\overline{1*1}$ là bình phương của một số tận cùng bằng 9. Ta thấy $29^2 = 841 < \overline{1*1} < 2401 = 49^2$, còn $39^2 = 1521$.

Vậy số chính phương phải tìm là 1521.

Ví dụ 5.5: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n! + 2019$ là một số chính phương. (Ở đây $n! = 1.2.3 \dots n$)

(Đề thi IMISO 2019)

Phân tích:

Bài toán yêu cầu tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n! + 2019$ là một số chính phương nên các số n là hữu hạn. Do đó ta có thể tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n! + 2019$ không là số chính phương, sau đó thử trực tiếp các giá trị n còn lại vào $n! + 2019$ để tìm ra n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải

Dựa vào nhận xét một số có 2 chữ số lẻ tận cùng không là số chính phương.

Nếu $n \geq 5$ thì $n! = 1.2.3.4.5 \dots n$ có hai chữ số tận cùng là $y0$ trong đó y là chữ số chẵn nên $n! + 2019$ có hai chữ số lẻ tận cùng nên không là số chính phương.

Thử trực tiếp với $n = 1, 2, 3, 4$ chỉ có với $n = 3$ thì $n! + 2019 = 2025 = 45^2$.

Bình luận:

Bài toán này có thể sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.

□ Dựa vào nhận xét một số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 thì không là số chính phương.

Nếu $n \geq 6$ thì $n! = 1.2.3.4.5.6 \dots n$ chia hết cho 9.

Do $2019 \div 3$ nhưng $2019 \not\div 9$

Nên với $n \geq 6$ thì $n! + 2019$ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Thử trực tiếp với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ chỉ có với $n = 3$ thì $n! + 2019 = 2025 = 45^2$.

□ Dựa vào nhận xét một số chia hết cho 4 dư 3 không là số chính phương.

Do 2019 chia hết cho 4 dư 3 nên với $n \geq 4$ thì $n! = 1.2.3.4 \dots n$ chia hết cho 4 và $n! + 2019$ chia cho 4 dư 3 nên không là số chính phương.

Thử trực tiếp với $n = 1, 2, 3$ chỉ có với $n = 3$ thì $n! + 2019 = 2025 = 45^2$.

1. Định nghĩa số chính phương:

Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên

2. Tính chất số chính phương (tính chất liên quan đến chữ số tận cùng)

- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0; 1; 4; 5; 6; 9 không thể có chữ số tận cùng bằng 2; 3; 7; 8.

- Số chính phương có chữ số tận cùng bằng 1; 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

- Số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

- Số chính phương có chữ số tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Ví dụ 5.6: Tìm số chính phương có 4 chữ số gồm các chữ số 0; 2; 3; 5

Lời giải

Một số chính phương có chữ số tận cùng không thể là 2 hoặc 3.

Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 0 thì chữ số hàng chục cũng là 0.

Do đó số chính phương cần tìm có chữ số tận cùng là 5.

Mà số chính phương có chữ số tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2

Nên số chính phương cần tìm chỉ có thể là 3025

Thử lại: $3025 = 55^2$

Vậy chính phương cần tìm là 3025

Ví dụ 5.7: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng khi nhân số đó với 135 ta được một số chính phương.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{ab}$ $9 < \overline{ab} < 100; a; b < 10$

Theo đề bài ta có $\overline{ab.135}$ là số chính phương

Có $9.135 < \overline{ab.135} < 100.135$

$$\Rightarrow 1215 < \overline{ab.135} < 13500$$

Có $\overline{ab.135}$ là số chính phương chia hết cho 135 nên $\overline{ab.135}$ là số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5

$$\overline{x \ x-1} \cdot \overline{x \ x-1} = \overline{x-2 \ xx \ x-1}$$

$$\Rightarrow \overline{ab.135} \in 35^2; 40^2; 45^2; 50^2; 55^2; 60^2; 65^2; 70^2; 75^2; 80^2; 85^2; 90^2; 95^2; 100^2; 105^2; 110^2; 115^2$$

Mà $\overline{ab.135}$ là số chính phương chia hết cho 135 nên $\overline{ab.135} \in 45^2; 90^2$

$$\Rightarrow \overline{ab} \in 15; 60$$

Vậy số phải tìm là 15; 60

Ví dụ 5.8: Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho $A = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Lời giải

Với $n = 1$ thì $A = 1! = 1 = 1^2$ là số chính phương

+) Với $n = 2$ thì $A = 1! + 2! = 3$ không là số chính phương

+) Với $n = 3$ thì $A = 1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$ là số chính phương

+) Với $n \geq 4$ ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 33$

Mà $5!; 6!; 7!; \dots; n!$ đều có tận cùng là 0 do đó A là số có chữ số tận cùng là 3 nên A không là số chính phương.

Vậy $n = 1; n = 3$

Ví dụ 5.9: Cho 5 số chính phương bất kỳ có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương.

Lời giải

Số chính phương có chữ số hàng đơn vị à 6 thì chữ số hàng chục của số đó là số lẻ.

Mà chữ số hàng chục của 5 số chính phương đã cho khác nhau

Vì vậy chữ số hàng chục của 5 số chính phương đã cho là 1; 3; 5; 7; 9 do đó tổng của chúng là:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2 \text{ là số chính phương.}$$

Ví dụ 5.10: Chứng minh rằng $N = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương

Lời giải

Ta có 2012^4 có chữ số tận cùng bằng 6 nên 2012^{4n} có chữ số tận cùng bằng 6

Có 2013^4 có chữ số tận cùng bằng 1 nên 2013^{4n} có chữ số tận cùng bằng 1

Có 2014^4 có chữ số tận cùng bằng 6 nên 2014^{4n} có chữ số tận cùng bằng 6

Mà 2015^{4n} có chữ số tận cùng bằng 5

Do đó $N = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ có chữ số tận cùng bằng 8

Mặt khác, không có số chính phương nào có chữ số tận cùng bằng 8.

Vậy N không là số chính phương.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của các số:

a) 7^{99} b) 14^{1414} c) 4^{567}

Lời giải:

a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4 :

$$99 = 4 \cdot 24 + 3 \Rightarrow 7^{99} = 7^{96+3} = 7^{4 \cdot 24 + 3} = 7^{4 \cdot 24} \cdot 7^3$$

Từ kết luận (II) $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của 7^{99} chính là chữ số tận cùng của $7^3 = 343$ là 3.

b) Chữ số tận cùng của 14 là 4

Ta có: $1414 = 4.353 + 2$

$14^{1414} = 14^{4.353+2} = 14^{4.353} \cdot 14^2$ từ kết luận (III) $\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của 14^{1414} là chữ số tận cùng của 14^2 là 6.

c) Ta có: $567 = 4.141 + 3$

$4^{567} = 4^{4.141+3} = 4^{4.141} \cdot 4^3$ từ kết luận (III) $\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của 4^{567} là chữ số tận cùng của $4^3 = 64$ là 4.

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của các số:

a) 187^{324} . b) 12^{2020} . c) 14^{2020} .

Lời giải

a) Ta thấy các số có tận cùng bằng 7 nâng lên lũy thừa bậc 4 thì được số có tận cùng bằng 1. Các số có tận cùng bằng 1 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 1.

$$\text{Do đó } 187^{324} = 187^{\overline{81}^4} = \overline{\dots 1}^{\overline{81}^4} = \overline{\dots 1}$$

Vậy chữ số tận cùng của 187^{324} là 1.

b) Ta có: $12^{2020} = 6^{2020} \cdot 2^{2020}$

Nhận thấy: 6^1 có tận cùng là 6;

$$6^2 \text{ có tận cùng là } 6;$$

$$6^3 \text{ có tận cùng là } 6;$$

Vậy 6^n có tận cùng là 6 suy ra 6^{2020} có tận cùng là 6.

Lại có: $2^4 = 16$ có tận cùng là 6;

Suy ra $2^{2020} = 2^{\overline{505}^4} = 16^{\overline{505}} \text{ có tận cùng là } 6$

Vậy $12^{2020} = 6^{2020} \cdot 2^{2020} = \overline{\dots 6} \cdot \overline{\dots 6} = \overline{\dots 6}$ có tận cùng là 6.

c) Ta thấy: $14^{2020} = 2^{2020} \cdot 7^{2020}$.

Mà: $2^{2020} = 2^{\overline{505}^4} = 16^{\overline{505}} = \overline{\dots 6}$ có tận cùng là 6.

Và $7^{2020} = 7^{\overline{1010}^2} = 49^{\overline{1010}} = 49^2 \cdot 49^{\overline{505}} = 2401^{\overline{505}} = \overline{\dots 1}$ có tận cùng là 1.

Vậy $14^{2020} = \overline{\dots 6} \cdot \overline{\dots 1}$ có tận cùng là 6.

Bài 3: Tìm chữ số tận cùng của các số:

a/ 7^{9^9} ;

b/ $14^{14^{14}}$;

c/ $3^{5^{6^7}}$

Lời giải

a/ Có: $9^9 = 8 + 1^9 = 4k + 1$, với $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 7^{9^9} = 7^{4k+1} = 7 \cdot 7^{4k} = 7 \cdot 49^{2k}$ có chữ số tận cùng là $7 \cdot 1 = 7$.

b/ Ta có $14^{14} = 196^7 = 49 \cdot 4^7 = 4k$ với $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 14^{14^{14}} = 2^{4k} \cdot 7^{4k} = 16^k \cdot 2401^k$ nên có chữ số tận cùng là 6.

c/ Có $5^{6^7} = 4 + 1^{6^7} = 4k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 3^{5^{6^7}} = 3^{4k+1} = 3 \cdot 3^{4k} = 3 \cdot 81^k$ có tận cùng là $3 \cdot 1 = 3$.

Bài 4: Chứng minh rằng:

a/ $8^{102} - 2^{102}$ chia hết cho 10.

b/ $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 2015^{2020} với mọi $n \in \mathbb{N}$.

c/ $p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ chia hết cho 5 với p là số nguyên tố lớn hơn 5 và $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

a/ Ta thấy các số có tận cùng bằng 2 hoặc 8 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng là 6.
6. Một số có tận cùng bằng 6 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng có tận cùng bằng 6.

Do đó ta biến đổi như sau:

$8^{102} = 8^{4 \cdot 25} \cdot 8^2 = \overline{\dots 6}^{25} \cdot 64 = \overline{\dots 6} \cdot 64 = \overline{\dots 4}$ có tận cùng là 4.

$2^{102} = 2^{4 \cdot 25} \cdot 2^2 = 16^{25} \cdot 4 = \overline{\dots 6}^{25} \cdot 4 = \overline{\dots 4}$ có tận cùng là 4.

Vậy $8^{102} - 2^{102}$ có tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 10.

b/ Ta thấy số 2015^{2020} có chữ số tận cùng là 5, nên nó chia hết cho 5

Ta có $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ chỉ có thể có các chữ số tận cùng là 1, 3, 7 (vì $n(n+1)$ có tận cùng là 0, 2, 6), nên nó không chia hết cho 5

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

c/ Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên tận cùng của p chỉ có thể là các chữ số: 1; 3; 7; 9.

- Nếu p có tận cùng là 1 thì $p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ có tận cùng là 0 nên nó chia hết cho 5;

- Nếu p có tận cùng là 3 thì $p^{4n} = 10k + 3^{4n} = 10k + 81^n$ có tận cùng là 1;

p^{8n} có tận cùng là 1, nên: $p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ có tận cùng là 0, nên nó chia hết cho 5.

- Nếu p có tận cùng là 7 thì tương tự: tận cùng của p^{4n} và p^{8n} cũng có tận cùng là 1, nên tổng đó chia hết cho 5.

- Nếu p có tận cùng là 9 thì: $p^{4n} = 10k + 9^{4n} = 10k + 81^{2n}$ có tận cùng là 1 và

$p^{8n} = p^{2 \cdot 4n}$ có tận cùng là 1, nên tổng trên cũng chia hết cho 5.

Tóm lại với p là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ luôn chia hết cho 5, với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 5: Tìm hai chữ số tận cùng của 5^{1991}

Lời giải

Vì 25 lũy thừa bao nhiêu lên cũng có tận cùng là 25 nên ta tìm cách tách 5^{1991} thành tích của lũy thừa có cơ số 25 và một bộ phận còn lại: $5^{1991} = 5^{1990} \cdot 5 = (5^2)^{995} \cdot 5 = 25^{995} \cdot 5$

Vì 25^{995} có hai số tận cùng là 25 mà $25 \cdot 5 = 125$ nên $25^{995} \cdot 5$ có hai số tận cùng là 25

Bài 6: Tìm hai chữ số tận cùng của $24^{24^{24}}$

Lời giải

Vì 24^{24} là một số tự nhiên chẵn nên đặt $24^{24} = 2k$ (k là số tự nhiên đủ lớn), từ đó

$$24^{24^{24}} = 24^{2k} = (24^2)^k = 576^k$$

Vì những số tự nhiên có tận cùng bằng 76 thì lũy thừa lên bao nhiêu cũng là số có tận cùng bằng 76 nên hai chữ số tận cùng của $24^{24^{24}}$ là 76

Bài 7: Tìm hai chữ số tận cùng của $45^{236} + 11$

Lời giải

Ta có

$$45^{236} = 45^{2^{118}} = 2025^{118} = \overline{\dots 25}$$

$$\Rightarrow 45^{236} + 11 = \overline{\dots\dots\dots 36}$$

Hai chữ số tận cùng của $45^{236} + 11$ là 36

Bài 8: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{39}$

Tìm hai chữ số tận cùng của A

Lời giải

$$A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{39}$$

$$2.A = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{40}$$

$$A = 2^{40} - 2$$

Có $2^{40} = 2^{20 \cdot 2} = 1048576^2$, mà những số có hai số tận cùng là 76 nâng lên lũy thừa khác 0 đều bằng số tự nhiên có hai số tận cùng là 76 nên 2^{40} có hai số tận cùng là 76. Từ đó $A = 2^{40} - 2$ có hai số tận cùng là 74

Bài 9: Tìm hai chữ số tận cùng của 7^{1991}

Lời giải

$$7^{1991} = 7^{1988} \cdot 7^3 = (7^4)^{497} \cdot 343 = (2401)^{497} \cdot 343 = \overline{\dots\dots\dots 01.343} = \overline{\dots\dots\dots 43}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 7^{1991} là 43

Bài 10: Tìm hai chữ số tận cùng của 51^{51}

Lời giải

$$51^{51} = 51^{50} \cdot 51 = (51^2)^{25} \cdot 51 = (\overline{\dots\dots\dots 01})^{25} \cdot 51 = \overline{\dots\dots\dots 01.51} = \overline{\dots\dots\dots 51}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 51^{51} là 51

Bài 11: Tìm hai chữ số tận cùng của $99^{99^{99}}$

Lời giải

Vì 99^{99} là số lẻ nên đặt $99^{99} = 2k + 1$. Ta có

$$99^{99^{99}} = 99^{2k+1} = 99^{2k} \cdot 99 = (99^2)^k \cdot 99 = \overline{\dots\dots\dots 9801}^k \cdot 99 = \overline{\dots\dots\dots 01.99} = \overline{\dots\dots\dots 99}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của $99^{99^{99}}$ là 99

Bài 12: Chứng minh rằng $45^{236} + 11$ chia hết cho 4

Lời giải

Ta có

$$45^{236} = 45^{2 \cdot 118} = 2025^{118} = \overline{\dots 25}$$

$$\Rightarrow 45^{236} + 11 = \overline{\dots 36}$$

Vì có hai chữ số tận cùng là 36 mà 36 chia hết cho 4 nên $45^{236} + 11$ chia hết cho 4

Bài 13: Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) 2^{2003}

b) 7^{99}

Phân tích:

a) Do 2^{2003} là số chẵn, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^{n-1} : 25$.

Viết $m = p^n + q$ $p, q \in \mathbb{N}$, trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q : 4$ ta có:

$$x = 2^{2003} = 2^q(2^{p^n} - 1) + 2^q$$

trong đó $2^q(2^{p^n} - 1) : 100$

b) Nếu 7^{99} lẻ, gọi n là số tự nhiên sao cho $7^{n-1} : 100$.

Viết $m = u^n + v$ $u, v \in \mathbb{N}, 0 \leq v < n$ ta có $x = 7^{99} = 7^v(7^{u^n} - 1) + 7^v$.

Trong đó $7^v(7^{u^n} - 1) : 100$

Lời giải:

a) Ta có

$$2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 : 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = 2^{10} + 1 \quad 2^{10} - 1 : 25$$

$$\Rightarrow 2^3 \quad 2^{20} - 1 : 100$$

Mặt khác: $2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3[(2^{20})^{100} - 1] + 2^3 = 100k + 8 \quad (k \in \mathbb{N})$.

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

b) **Cách 1:** Ta có $7^4 = 2401 \Rightarrow 7^4 - 1 = 2400 : 100$

Mặt khác: $9^9 - 1 : 4 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$

Vậy $7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7 \quad (q \in \mathbb{N})$. Vậy hai chữ số tận cùng của 7^{99} là 07.

Cách 2: Ta có $7^4 = 2401$, số có tận cùng bằng 01 nâng lên lũy thừa nào cũng có tận cùng bằng 01. Do đó

$$7^{9^k} = 7^{4k+1} = 7^4 \cdot 7 = 2401 \cdot 7 = \dots 01 \cdot 7 = \dots 07$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 7^{9^k} là 07.

Bài toán tương tự:

Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) 3^{517} b) 7^{1991}

Bài 14: Tìm hai chữ số tận cùng của các số:

a) 2^{999} b) 3^{999}

Lời giải:

a) **Cách 1:** Ta thấy rằng $2^{999} = 2^{1000} : 2$. Mặt khác ta có:

+) 2^{1000} chia 25 dư 1, do đó hai chữ số tận cùng của 2^{1000} có thể là 01; 26; 51; 76

+) 2^{1000} là bội của 4

Suy ra 2^{1000} có hai chữ số tận cùng phải là 76.

Như vậy hai chữ số tận cùng của 2^{999} có thể là 38 ($= 76 : 2$) hoặc 88 ($= 176 : 2$). Nhưng do 2^{999} cũng là bội của 4 nên hai chữ số tận cùng của nó là 88.

Cách 2: Ta có $2^{10} = 1024$, bình phương của hai số có tận cùng bằng 24 thì tận cùng bằng 76, số có tận cùng bằng 76 thì nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng có tận cùng là 76. Do đó

$$2^{1000} = 2^{10 \cdot 100} = 1024^{100} = 1024^{2 \cdot 50} = \dots 76^{50} = \dots 76$$

Làm tiếp tục làm như Cách 1

b) Ta có

$$3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100};$$

$$3^8 \equiv 19^2 \equiv 61 \pmod{100}$$

$$3^{10} \equiv 61 \cdot 9 \equiv 49 \pmod{100}$$

$$3^{100} \equiv 49^{10} \equiv 01 \pmod{100}$$

Nghĩa là hai chữ số tận cùng của 3^{1000} là 01. Vì 3^{1000} là bội của 3, nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải cho số dư là 2 (chia tiếp thì số 201 chia hết cho 3, nếu số dư là 0 hay 1 thì số 001, 101 không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ số tận cùng là 76 ($=201:3$).

Bài 15: Tìm hai chữ số tận cùng của tổng:

$$S = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + \dots + 2004^{2002}$$

Lời giải:

Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.

Mặt khác, với mọi $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 1) = 1$ (a, 5) = 1 ta có $a^{20} - 1 : 25 \Rightarrow a^{100} - 1 : 25$.

Vậy với mọi $a \in \mathbb{N}$ ta có $a^2(a^{100} - 1) : 100$.

Do đó $S = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$.

Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$. áp dụng công thức:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2 = 2684707030$$

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S là 30.

Bài toán tương tự:

Tìm hai chữ số tận cùng của tổng: $S = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + \dots + 2004^{2003}$

Tìm hai chữ số tận cùng của $2^{2015} + 2^{2016} + 2^{2017}$.

Lời giải:

Ta có $2^{2015} + 2^{2016} + 2^{2017} = 2^{2000}(2^{15} + 2^{16} + 2^{17})$.

Ta lại có $2^{2000} = (2^{20})^{100}$.

Vì $2^{20} \equiv 76 \pmod{100}$ nên $2^{20 \cdot 100} \equiv 76 \pmod{100}$ hay 2^{2000} có hai chữ số tận cùng là 76. Từ đó suy ra hai chữ số tận cùng của tổng trên là hai chữ số tận cùng của tích 76.76 là

Bài 16: Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$.

Lời giải:

$$\text{Do } 9,5 = 1 \Rightarrow 9^{100} - 1 : 125 \quad (1)$$

$$\text{Mà } 9^{100} - 1 : 8 = 2.$$

$$\text{Lại có } 8, 125 = 1,$$

từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} 9^{100} - 1 : 1000 &\Rightarrow 3^{399 \dots 98} = 9^{199 \dots 9} = 9^{100p + 99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} \\ &= 1000q + 9^{99} \quad p, q \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99} .

Lại vì $9^{100} - 1 : 1000 \Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9 \Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ là 889 (để kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân $\overline{??9} \cdot 9 = \overline{...001??9} \cdot 9 = \overline{...001}$ để xác định $\overline{??9} = 889$ vì $\overline{??9} \cdot 9 = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ là 889.

Tìm 3 chữ số tận cùng của $A = 3.7.11 \dots 2011$

Lời giải:

Gọi x là 3 chữ số tận cùng của A , ta có $A \equiv x \pmod{1000}$ và x lẻ.

Vì trong A chứa 15, 35, 55 nên $A : 125 \Rightarrow x : 125 \Rightarrow x \in \{125; 375; 625; 875\}$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 3.7.11 \dots 2011 \equiv 3.(4.1 + 3)(4.2 + 3) \dots (4.502 + 3) \\ &\equiv \underbrace{3.7 \cdot 3.7 \dots 3.7}_{251} \cdot 3 \equiv \underbrace{5.5 \dots 5}_{251} \cdot 3 \equiv 1.1 \dots 1.5.3 \equiv 7 \pmod{8} \\ &\Rightarrow x \equiv 7 \pmod{8} \Rightarrow x = 375 \end{aligned}$$

Vậy 3 chữ số tận cùng của A là 375

Bài 17: Tìm 3 chữ số tận cùng là tích A của 11 số nguyên dương đầu tiên.

Lời giải:

Ta có: $A = 1.2.3.4 \dots 11$

Trong biểu thức A có thừa số 2; 5; 10 nên A chia hết cho 100

Vậy 2 chữ số tận cùng của A là 00.

$$\text{Ta có: } \frac{A}{100} = 1.3.4.6.7.8.9.11 \equiv 2.6.7.8.9.11$$

$$\equiv 2.7.8.9.11 \equiv 4.8.9.11 \equiv 2.9.11 \equiv 8.11 \equiv 8 \pmod{10}$$

Vậy 3 chữ số tận cùng của A là 800.

Bài 18: Chứng minh rằng $8^{102} - 2^{102}$ chia hết cho 10

Lời giải

Ta thấy các số có tận cùng bằng 2 hoặc 8 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng là 6. Một số có tận cùng bằng 6 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 6.

Do đó ta biến đổi như sau:

$$8^{102} = (8^4)^{25} \cdot 8^2 = (\dots 6)^{25} \cdot 64 = (\dots 6) \cdot 64 = \dots 4$$

$$2^{102} = (2^4)^{25} \cdot 2^2 = 16^{25} \cdot 4 = (\dots 6) \cdot 4 = \dots 4$$

Vậy $8^{102} - 2^{102}$ tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 10

Bài 19: Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Lời giải

Theo tính chất 1a $\Rightarrow 1995^{2000}$ tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5.

Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không?

Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

$\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6

$\Rightarrow n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7

$\Rightarrow n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Bài 20: Chứng minh rằng 26^{1570} chia hết cho 8

Lời giải

Ta thấy: $26^5 = 11881376$, số có tận cùng bằng 376 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng có tận cùng bằng 376. Do đó:

$$26^{1570} = (26^5)^{314} = (\dots 376)^{314} = (\dots 376)$$

Mà 376 chia hết cho 8

Một số có ba chữ số tận cùng chia hết cho 8 thì chia hết cho 8

Vậy 26^{1570} chia hết cho 8

Bài 21: Chứng minh số $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

Phân tích:

Số chính phương chỉ có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 nếu các số tận cùng là 2, 3, 7, 8 thì không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta thấy chữ số tận cùng của các số $2004^2, 2003^2, 2002^2, 2001^2$ lần lượt là 6, 9, 4, 1. Do đó số n có chữ số tận cùng là 8, 8 nên n không phải là số chính phương.

Bài 22: Chứng tỏ rằng $A = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$ không phải là số chính phương.

Phân tích:

- Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3 .
- Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2 .
- Các số có chữ số tận cùng là 0,1,4,5,6,9 , khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Lời giải

$$A = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{2^{3^4}}$$

Ta có: $14^{14^{14}}$ có chữ số tận cùng là 6

9^{9^9} có chữ số tận cùng là 9

$2^{2^{3^4}}$ có chữ số tận cùng là 2

Suy ra A có chữ số tận cùng là $6 + 9 + 2 = ..7$

Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 23: Chứng tỏ rằng $C = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2020}$ không phải là số chính phương.

Lời giải

$$C = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2020}$$

Ta có: $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2020} : 5$

$$5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2020} : 25$$

$$C = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2020} \text{ không chia hết cho } 25$$

Vậy C không phải là số chính phương.

Bài 24: Chứng minh 1234567890 không phải là số chính phương **Lời giải**

Ta thấy số chia hết cho 5 vì chữ số tận cùng là 0 nhưng lại không chia hết cho 25 vì hai chữ số tận cùng là 90. Vì vậy, số 1234567890 không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta thấy số 1234567890 chia hết cho 5 vì chữ số tận cùng là 0 nhưng lại không chia hết cho 25 vì hai chữ số tận cùng là 90. Vì vậy, số 1234567890 không phải là số chính phương.

Bài 25: Cho $B = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2021$ chứng tỏ B là số chính phương.

Lời giải

$$B = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2021$$

$$\text{Số số hạng: } \frac{2021 - 1}{2} + 1 = \frac{2021 + 1}{2}$$

$$\text{Tổng } B = \frac{2021 + 1}{2} \cdot \frac{2021 + 1}{2} = \left(\frac{2021 + 1}{2} \right)^2 = 1011^2$$

Vậy B là số chính phương.

Bài 26: Cho $A = 200 \cdot 9^{2013} + 9^{2012} + 9^{2011} + \dots + 9^2 + 9 + 1$. Chứng minh rằng $A + 25$ là số chính phương.

Lời giải

$$\text{Đặt } B = 9^{2013} + 9^{2012} + 9^{2011} + \dots + 9^2 + 9 + 1$$

$$\Rightarrow 9B = 9^{2014} + 9^{2013} + \dots + 9^3 + 9^2 + 9$$

$$\Rightarrow 8B = 9^{2014} - 1 \Rightarrow B = \frac{9^{2014} - 1}{8}$$

$$\Rightarrow A = 200 \cdot B = 200 \cdot \frac{9^{2014} - 1}{8} = 25 \cdot 9^{2014} - 25$$

$$\Rightarrow A + 25 = 25 \cdot 9^{2014} = 5 \cdot 9^{1007}^2$$

Vậy $A + 25$ là số chính phương.

B.BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI HSG VÀ CHUYÊN TOÁN 6

Bài 1.

a) Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau: $2^{100}; 7^{1991}$

b) Tìm 4 chữ số tận cùng của số sau: 5^{1992}

Bài 2. Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{1999}

b) 93^{1999}

Bài 3.

Cho $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{48} + 3^{49}$

Tìm chữ số tận cùng của S

Bài 4. (Đề HSG 6 trường Lê Quý Đôn năm 2014-2015)

Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{100} ?

Bài 5. (Đề HSG 6 trường Võ Thị Sáu năm 2014-2015)

Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

Bài 6.

Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{2011}

b) 93^{1999}

Bài 7. (Đề HSG 2019-2020)

Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{1999}

b) 93^{1999}

Bài 8. (Đề HSG 2017-2018)

Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A

HƯỚNG DẪN

Bài 1.

a) Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau: $2^{100}; 7^{1991}$

b) Tìm 4 chữ số tận cùng của số sau: 5^{1992}

Lời giải

a) *Tìm hai số tận cùng của 2^{100}

$2^{10} = 1024$, bình phương của hai số có tận cùng là 24 thì tận cùng bằng 76, có số tận cùng bằng 76 nên nâng lên lũy thừa nào cũng bằng 76.

Do đó: $2^{100} = (2^{10})^{10} = (1024^2)^5 = (\dots 76)^5 = \dots 76$

Vậy hai số tận cùng của 2^{100} là 76.

*Tìm hai chữ số tận cùng của 7^{1991}

Ta thấy $7^4 = 2401$, số có tận cùng bằng 01 nâng lên lũy thừa nào cũng bằng 01.

$$\text{Do đó: } 7^{1991} = 7^{1988} \cdot 7^3 = (7^4)^{497} \cdot 343 = (\dots 01)^{497} \cdot 343 = (\dots 01) \cdot 343 = \dots 43$$

Vậy 7^{1991} có hai số tận cùng bằng 43.

b) Tìm 4 số tận cùng của 5^{1992}

$$\text{Ta có: } 5^{1992} = (5^4)^{498} = 0625^{498} = \dots 0625$$

Bài 2. Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{1999}

b) 93^{1999}

Lời giải

a) Ta có: $7^{1999} = (7^4)^{499} \cdot 7^3 = 2401^{499} \cdot 343 \Rightarrow$ nên chữ số tận cùng là 3

Vậy số 57^{1999} có chữ số tận cùng là 3

b) $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$ nên có chữ số tận cùng là 7

Bài 3.

Cho $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{48} + 3^{49}$

Tìm chữ số tận cùng của S

Lời giải

$$S = (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{44} + 3^{45} + 3^{46} + 3^{47}) + 3^{48} + 3^{49}$$

Các tổng 4 số hạng đều chia hết cho 10, do đó tận cùng bằng 0

Mặt khác: $3^{48} + 3^{49} = 3^{4 \cdot 12} + 3^{48} \cdot 3 = \dots 1 + \dots 1 \cdot 3 = \dots 4$

Vậy S có tận cùng bằng 4

Bài 4. (Đề HSG trường Lê Quý Đôn năm 2014-2015)

Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{100} ?

Lời giải

Ta có: $2^{10} = 1024$; $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = (1024^2)^5$

Mà 1024^2 có hai chữ số tận cùng là 76

$$\Rightarrow (1024^2)^5 \text{ có hai chữ số tận cùng là } 76$$

Vậy 2^{100} có hai chữ số tận cùng là 76

Bài 5. (Đề HSG 6 trường Võ Thị Sáu năm 2014-2015)

Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

Lời giải

$$A \cdot 2 = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}) \cdot 2 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21}.$$

$$\text{Nên } A \cdot 2 - A = 2^{21} - 2$$

$$\Rightarrow A = 2^{21} - 2$$

$$\text{Ta có : } 2^{21} = 2^{4 \cdot 5 + 1} = (2^4)^5 \cdot 2 = 16^5 \cdot 2$$

... 16^5 có tận cùng là 6 . Nên $16^5 \cdot 2$ có tận cùng là 6. 2 có tận cùng là 2.

Vậy A có tận cùng là 2.

Bài 6.

Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 57^{2011}

b) 93^{1999}

Lời giải

a) Tìm chữ số tận cùng của số 57^{2011}

$$\text{Xét } 7^{2011}; \text{ ta có: } 7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 3

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3.

b) Tìm chữ số tận cùng của số 93^{1999}

$$\text{Xét } 3^{1999}; \text{ ta có: } 3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số 3^{1999} có chữ số tận cùng là 7.

Bài 7. (Đề HSG 2019-2020)

Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

b) 57^{1999}

b) 93^{1999}

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } 7^{1999} = (7^4)^{499} \cdot 7^3 = 2401^{499} \cdot 343 \Rightarrow \text{nên chữ số tận cùng là 3}$$

Vậy số 57^{1999} có chữ số tận cùng là 3

$$\text{b) } 3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27 \text{ nên có chữ số tận cùng là 7}$$

Bài 8. (Đề HSG 2017-2018)

Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A

Lời giải

$$A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96} \Rightarrow 5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{96} + 5^{97}$$

$$\Rightarrow 5A - A = 5^{97} - 5 \Rightarrow A = \frac{5^{97} - 5}{4}$$

Ta có: 5^{97} có chữ số tận cùng là 5 $\Rightarrow 5^{97} - 5$ có chữ số tận cùng là 0

Vậy chữ số tận cùng của A là 0.