

## CHUYÊN ĐỀ: CHIA HẾT CỦA ĐA THỨC

### DẠNG 1: SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ BEZOUT TÌM SỐ DƯ

Định lý Be zout: "Dư của phép chia  $f(x)$  cho nhị thức bậc nhất  $x-a$  là 1 hằng số có giá trị là  $f(a)$ "

Bài 1: Không thực hiện phép chia, hãy xét xem,  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 9x + 2$  có chia hết cho  $x-2$  không, có chia hết cho  $x+2$  không?

**HD:**

Theo định lý Bơ- zu thì dư của  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 9x + 2$  khi chia cho nhị thức bậc nhất  $x-2$  có giá trị là:  $f(2) = 2.2^3 - 2.2^2 - 9.2 + 2 = 0$ . Vậy  $f(x) : (x-2)$

Tương tự:

Số dư của  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 9x + 2$  khi chia cho  $x+2$  có giá trị là:

$$f(-2) = 2.(-2)^3 - 2.(-2)^2 - 9.(-2) + 2 = -4$$

Vậy  $f(x) \not\vdots (x+2)$

Bài 2: Tìm số  $a$  để  $2x^3 - 3x^2 + x + a : x + 2$

**HD:**

Theo định lý Bơ- zu thì dư của  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + a$  khi chia cho nhị thức bậc nhất  $x+2$ , có giá trị là:  $f(-2) = 2.(-8) - 3.4 - 2 + a = a - 22$

Để  $f(x)$  chia hết cho  $x+2$  thì  $a-22=0$  hay  $a=22$

Bài 3: Tìm số  $a$  để:  $4x^2 - 6x + a : x - 3$

**HD:**

Theo định lý Bơ- zu thì dư của  $f(x) = 4x^2 - 6x + a$  khi chia cho nhị thức bậc nhất  $x - 3$ , có giá trị là:  $f(3) = 4.9 - 6.3 + a = a + 18$

Để  $f(x)$  chia hết cho  $x - 3$  thì  $a + 18 = 0$  hay  $a = -18$

Bài 4: Tìm số  $a$  để:  $2x^2 + x + a : x + 3$

**HD:**

Theo định lý Bơ- zu thì dư của  $f(x) = 2x^2 + x + a$  khi chia cho nhị thức bậc nhất  $x + 3$ , có giá trị là:  $f(-3) = 2.9 - 3 + a = a + 15$

Để  $f(x)$  chia hết cho  $x + 3$  thì  $a + 15 = 0$  hay  $a = -15$

Bài 5: Tìm số  $a$  để:  $10x^2 - 7x + a : 2x - 3$

**HD:**

Hạ phép chia ta có:  $10x^2 - 7x + a = (2x - 3)(5x + 4) + (a + 12)$

Để  $10x^2 - 7x + a : 2x - 3 \Rightarrow a + 12 = 0 \Rightarrow a = -12$

Bài 6: Tìm số  $a$  để:  $2x^2 + ax + 1 : x - 3$  dư 4

**HD :**

Theo định lý Bơ- Zu ta có :

Dư của  $f(x) = 2x^2 + ax + 1$ , khi chia cho  $x-3$  là  $f(3) = 2.9 + 3a + 1 = 3a + 19$

Để có số dư là 4 thì  $3a + 19 = 4 \Rightarrow 3a = -15 \Rightarrow a = -5$

Bài 7: Tìm số  $a$  để:  $ax^5 + 5x^4 - 9 : x - 1$

**HD :**

Theo định lý Bơ- Zu ta có :

Dư của  $f(x) = ax^5 + 5x^4 - 9$ , khi chia cho  $x - 1$  là  $f(1) = a + 5 - 9 = a - 4$

Để có phép chia hết thì  $a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

Bài 8: Tìm hệ số a để:  $8x^2 - 26x + a : 2x - 3$

HD :

Hạ phép chia ta có:

$$8x^2 - 26x + a = (2x - 3)(4x - 7) + a - 21$$

$$\text{Để } 8x^2 - 26x + a : 2x - 3 \Rightarrow a - 21 = 0 \Rightarrow a = 21$$

Bài 9: Tìm hệ số a để:  $x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a : x^2 - x + 5$

HD :

Hạ phép chia hoặc đồng nhất, ta có:

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a = (x^2 - x + 5)(x^2 + 1) + a - 5$$

$$\text{Để phép chia là phép chia hết thì } a - 5 = 0 \text{ hay } a = 5$$

Bài 10: Tìm hệ số a, b để:  $x^3 + ax + b : x^2 + x - 2$

HD :

Hạ phép chia ta có:

$$x^3 + ax + b = (x^2 + x - 2)(x - 1) + (a + 3)x + b - 2$$

$$\text{Để là phép chia hết thì } a + 3 = 0 \text{ và } b - 2 = 0 \text{ hay } a = -3 \text{ và } b = 2$$

Bài 11: Tìm hệ số a để:  $x^3 + ax^2 - 4 : x^2 + 4x + 4$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$x^3 + ax^2 - 4 = (x^2 + 4x + 4)(x + a - 4) + (12 - 4a)x + 12 - 4a$$

$$\text{Để được phép chia hết thì } 12 - 4a = 0 \text{ hay } a = 3$$

Bài 12: Tìm hệ số a để:  $x^4 + ax + b : x^2 - 4$

HD :

$$\text{Để } x^4 + ax + b : x^2 - 4 \text{ thì } \begin{cases} x^4 + ax + b : x - 2 \\ x^4 + ax + b : x + 2 \end{cases}$$

Áp dụng định Bơ- Zu ta có:

$$f(x) = x^4 + ax + b \Rightarrow f(2) = 16 + 2a + b = 0$$

$$\text{Và: } f(-2) = 16 - 2a + b = 0$$

$$\text{Giải hệ ta được } a = 0 \text{ và } b = -16$$

Bài 13: Tìm hệ số a để:  $x^4 + ax^3 + bx - 1 : x^2 - 1$

HD :

$$\text{Để } x^4 + ax^3 + bx - 1 : x^2 - 1 \text{ thì } \begin{cases} x^4 + ax^3 + bx - 1 : x - 1 \\ x^4 + ax^3 + bx - 1 : x + 1 \end{cases}$$

Áp dụng định Bơ- Zu ta có:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx - 1 \Rightarrow f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$$

$$\text{Và: } f(-1) = 1 - a + b - 1 = 0$$

$$\text{Giải hệ ta được } a \text{ tùy ý và } b = -a$$

Bài 14: Tìm hệ số a để:  $x^3 + ax + b : x^2 + 2x - 2$

Hạ phép HD :

chia ta có :

$$x^3 + ax + b = (x^2 + 2x - 2)(x - 2) + (a + b)x + b - 4$$

$$\text{Để phép chia là phép chia hết thì : } a + b = 0 \text{ và } b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4 \text{ và } a = -4$$

Bài 15: Tìm hệ số a để:  $x^4 + ax^2 + b : x^2 - x + 1$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + a) + (a - 1)x + a - b$$

$$\text{Để là phép chia hết thì } a - 1 = 0 \text{ và } a - b = 0 \Rightarrow a = b = 1$$

Bài 16: Tìm hệ số a để:  $ax^3 + bx^2 + 5x + 50 : x^2 + 3x - 10$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$ax^3 + bx^2 + 5x + 50 = (x^2 + 3x - 10)(ax + 3a - b) + (a + 3b + 5)x + (30a - 10b + 50)$$

Để là phép chia hết thì  $a + 3b + 5 = 0$  và  $30a - 10b + 50 = 0$

Bài 17: Tìm hệ số a để:  $ax^4 + bx^3 + 1 : (x - 1)^2$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$ax^4 + bx^3 + 1 = (x^2 - 2x + 1)[a.x^2 + (2a + b)x + (3a + 2b)] + (8a + 5b)x - (3a + 2b - 1)$$

Để là phép chia hết thì :

$$8a + 5b = 0 \text{ và } 3a + 2b - 1 = 0$$

Bài 18: Tìm hệ số a để:  $x^4 + 4 : (x^2 + ax + b)$

HD :

$$\text{Tách: } x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

Vậy  $b = 2$  và  $a = 2$  hoặc  $a = -2$

Bài 19: Tìm hệ số m để:  $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + m : x^2 - 2x + 1$

HD :

$$\text{Ta có: } x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + m = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - x + 3) + m - 3$$

Để là phép chia hết thì  $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

Bài 20: Tìm hệ số a để:  $10x^2 - 7x + a : 2x - 3$

HD :

Hạ phép chia ta có:

$$10x^2 - 7x + a = (2x - 3)(5x + 4) + a + 12$$

Để là phép chia hết thì  $a + 12 = 0$  hay  $a = -12$

Bài 21: Tìm hệ số a để:  $2x^2 + ax - 4 : x + 4$

HD :

Theo định lý Bơ- Zu ta có, Dư của  $f(x) = 2x^2 + a.x - 4$  khi chia cho  $x + 4$  là:

$$f(-4) = 2.16 - 4a - 4 = 28 - 4a$$

Để là phép chia hết thì  $28 - 4a = 0 \Rightarrow a = 7$

Bài 22: Tìm hệ số a để:  $x^3 - ax^2 + 5x + 3 : x^2 + 2x + 3$

HD :

Hạ phép chia ta có:

$$x^3 - ax^2 + 5x + 3 = (x^2 + 2x + 3)[x - (a + 2)] + (2a + 6)x - 3a - 3$$

Để là phép chia hết thì  $-3a - 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

Bài 23: Tìm hệ số a để:  $x^2 - ax - 5a^2 - \frac{1}{4} : x + 2a$

HD :

Theo định lý Bơ- Zu ta có, Dư của  $f(x) = x^2 - a.x - 5a^2 - \frac{1}{4}$  khi chia cho  $x + 2a$  là:

$$f(-2a) = 4a^2 + 2a^2 - 5a^2 - \frac{1}{4} = a^2 - \frac{1}{4}$$

Để là phép chia hết thì  $a^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$

Bài 24: Tìm số dư của  $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81}$  khi chia cho  $x - 1$

HD :

Ta có :  $P(x) = (x - 1) + (x^3 - 1) + (x^9 - 1) + (x^{27} - 1) + (x^{81} - 1) + 5$  nên số dư là 5

Bài 25: Tìm số dư của :  $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81}$  khi chia cho  $x^2 - 1$

HD :

$$\text{Ta có : } P(x) = (x^3 - x) + (x^9 - x) + (x^{27} - x) + (x^{81} - 1) + 5x \Rightarrow \text{Dư } 5x$$

Bài 26: Xác định dư của:  $P(x) = 1 + x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$  khi chia cho  $x^3 - x$

HD :

$$P(x) = (x^9 - x) + (x^{25} - x) + (x^{49} - x) + (x^{81} - x) + 5x + 1$$

$$= x(x^8 - 1) + x(x^{24} - 1) + x(x^{48} - 1) + x(x^{80} - 1) + 5x - 1$$

Vậy số dư là :  $5x - 1$

Bài 27: Tìm n nguyên để:  $3n^3 + 10n^2 - 5 : 3n + 1$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$3n^3 + 10n^2 - 5 = (3n + 1)(n^2 + 3n - 1) - 4$$

$$\text{Đề } 3n^3 + 10n^2 - 5 : 3n + 1 \Rightarrow 4 : 3n - 1 \Rightarrow 3n - 1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Bài 28: Tìm n nguyên để  $2n^2 - n + 2 : 2n + 1$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$2n^2 - n + 2 = (2n + 1)(n - 1) + 3$$

$$\text{Đề : } 2n^2 - n + 2 : 2n + 1 \Rightarrow 3 : 2n + 1 \Rightarrow 2n + 1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Bài 29: Tìm các số x nguyên để  $4x^3 - 6x^2 + 8x : 2x - 1$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$4x^3 - 6x^2 + 8x = (2x - 1)(2x^2 - 2x + 3) + 3$$

$$\text{Đề } 4x^3 - 6x^2 + 8x : 2x - 1 \Rightarrow 3 : 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Bài 30: Tìm các số x nguyên để:  $4x^3 - 3x^2 + 2x - 83 : x - 3$

HD :

Theo định Bơ zơ thì dư của  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 83$ , khi chia cho  $x - 3$  là :

$$f(3) = 4.27 - 3.9 + 2.3 - 83 = 4$$

$$\text{Đề } 4x^3 - 3x^2 + 2x - 83 : x - 3 \Rightarrow x - 3 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Bài 31: Tìm các số x nguyên để:  $4n^3 - 4n^2 - n + 4 : 2n + 1$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$4n^3 - 4n^2 - n + 4 = (2n + 1)(2n^2 - 3n + 1) + 3$$

$$\text{Đề } 4n^3 - 4n^2 - n + 4 : 2n + 1 \Rightarrow 3 : 2n + 1 \Rightarrow 2n + 1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Bài 32: Tìm các số x nguyên để:  $8n^2 - 4n + 1 : 2n + 1$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$8n^2 - 4n + 1 = (2n + 1)(4n - 4) + 5$$

$$\text{Đề } 8n^2 - 4n + 1 : 2n + 1 \Rightarrow 5 : 2n - 1 \Rightarrow 2n - 1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Bài 33: Tìm các số x nguyên để:  $3n^3 + 8n^2 - 15n + 6 : 3n - 1$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$3n^3 + 8n^2 - 15n + 6 = (3n - 1)(n^2 + 3n - 4) + 2$$

$$\text{Đề } 3n^3 + 8n^2 - 15n + 6 : 3n - 1 \Rightarrow 2 : 3n - 1 \Rightarrow 3n - 1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

Bài 34: Tìm các số x nguyên để:  $4n^3 - 2n^2 - 6n + 5 : 2n - 1$

HD :

Hạ phép chia ta có :

$$4n^3 - 2n^2 - 6n + 5 = (2n - 1)(2n^2 - 3) + 2$$

$$\text{Để } 4n^3 - 2n^2 - 6n + 5 : 2n - 1 \Rightarrow 2 : 2n - 1 \Rightarrow 2n - 1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

Bài 35: Tìm phần dư của phép chia  $f(x) = x^{2012} + x^{2011} + 1$  cho đa thức :

a,  $x^2 - 1$

b,  $x^2 + x + 1$

Bài 36: Cho đa thức:  $P(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 - 40x + m - 1979$

a, Tìm m sao cho P(x) chia hết cho x-2

b, Với m tìm được, hãy giải thích phương trình  $P(x) = 0$

Bài 37: Tìm số nguyên n sao cho:  $3n^3 + 10n^2 - 5$  chia hết cho  $3n + 1$

## DẠNG 2: TÌM ĐA THỨC

Bài 1: Tìm a,b sao cho  $f(x) = x^3 + ax + b$ , chia cho  $x+1$  dư 7, chia cho  $x-3$  dư -5

HD :

Theo bài ra ta có: 
$$\begin{cases} f(x) = (x+1).A(x) + 7 \\ f(x) = (x-3).B(x) - 5 \end{cases}, \text{ Cho } x=-1, x=3 \Rightarrow \begin{cases} a-b = -8 \\ 3a+b = -32 \end{cases}$$

Bài 2: Tìm hằng số a,b,c sao cho:  $ax^3 + bx^2 + c$  chia hết cho  $x+2$ , chia cho  $x^2 - 1$  dư 5

HD :

Theo bài ra ta có:  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Khi đó ta có :

$$f(x) = a.x^3 + bx^2 + c = (x+2)A(x)$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)B(x) + 5$$

Cho  $x = -2$  khi đó ta có :  $-8a + 4b + c = 0$

Cho  $x=1 \Rightarrow a + b + c = 5$

Cho  $x=-1 \Rightarrow -a + b + c = 5$

Khi đó ta có hệ: 
$$\begin{cases} -8a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 5 \\ -a + b + c = 5 \end{cases}$$

Bài 3: Xác định a, b biết:  $2x^3 + ax + b$  chia cho  $x+1$  dư -6, chia cho  $x-2$  dư 21

HD :

Theo bài ra ta có :

$$f(x) = 2x^3 + a.x + b = (x+1)A(x) - 6$$

và  $f(x) = 2x^3 + a.x + b = (x-2)B(x) + 21$

Cho  $x = -1 \Rightarrow -2 - a + b = -6$

Cho  $x = 2 \Rightarrow 16 + 2a + b = 21$

Khi đó ta có hệ: 
$$\begin{cases} -2 - a + b = -6 \\ 16 + 2a + b = 21 \end{cases}$$

Bài 4: Tìm hệ số a,b sao cho:  $x^4 - x^3 - 3x^2 + ax + b$  chia cho  $x^2 - x - 2$  được dư là  $2x-3$

HD :

Theo bài ra ta có :

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Nên ta có :

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + a.x + b = (x-2)(x+1) + 2x - 3$$

Cho  $x = 2 \Rightarrow 16 - 8 - 12 + 2a + b = 1$

Cho  $x = -1 \Rightarrow 1 + 1 - 3 - a + b = -6$

Khi đó ta có hệ 
$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -a + b = -5 \end{cases}$$

Bài 5: Cho  $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + ax + b, Q(x) = x^2 + x - 2$ , Xác định a,b để  $P(x) : Q(x)$

HD :

Đặt phép chia ta có :

$$P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + a.x + b = (x^2 + x - 2)A(x) + (a-1)x + b + 2$$

Để  $P(x) : Q(x) \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 0 \\ b+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

Bài 6: Xác định các số hữu tỉ a,b,c sao cho:  $2x^4 + ax^2 + bx + c$  chia hết cho  $x-2$ , chia cho  $x^2 - 1$  dư  $2x$

**HD :**

Theo bài ra ta có :  $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-2)A(x)$

Và  $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x+1).B(x) + 2x$

Cho  $x = 2 \Rightarrow 32 + 4a + 2b + c = 0$

Cho  $x = 1 \Rightarrow 2 + a + b + c = 2$

Cho  $x = -1 \Rightarrow 2 + a - b + c = -2$ . Khi đó ta có hệ : 
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -32 \\ a + b + c = 0 \\ a - b + c = -4 \end{cases}$$

Bài 7: Xác định a,b sao cho:  $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1; Q(x) = (x-1)^2$

**HD :**

Đặt phép chia:  $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1 = (x-1)^2.A(x) + (4a+3b)x + 1 - 3a - 2b$

Để  $P(x):Q(x) \Rightarrow \begin{cases} 4a + 3b = 0 \\ 1 - 3a - 2b = 0 \end{cases}$

Bài 8: Xác định a,b sao cho:  $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 : x^2 - x + b$

**HD :**

Đặt phép chia

$6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 = (x^2 - x + b)A(x) + (a - 5b + 2)x + (6b^2 - ab + b + 2)$

Để là phép chia hết thì  $\begin{cases} a - 5b + 2 = 0 \\ 6b^2 - ab + b + 2 = 0 \end{cases}$

Bài 9: Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi khai triển:  $(x^7 - 4x + 4)^9$

**HD :**

Tổng các hệ số của đa thức sau khi triển khai là giá trị của đa thức tại  $x=1$

Thay  $x=1$  vào ta được:  $(1 - 4 + 4)^9 = 1$

Bài 10: Tìm đa thức  $f(x)$  biết:  $f(x)$  chia cho  $x+4$  dư là 9, còn  $f(x)$  chia cho  $x-3$  dư là 2, và  $f(x):x^2 + x - 12$  có thương là  $x^2 + 3$  và còn dư

**HD :**

$f(x) = (x^2 + x - 12)(x^2 + 3) + ax + b = (x-3)(x+4)(x^2 + 3) + ax + b$

Cho  $x = -4, x = 3 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -4a + b = 9 \\ f(x) = 3a + b = 2 \end{cases}$ . Khi đó ta có hệ :  $\begin{cases} -4a + b = 9 \\ 3a + b = 2 \end{cases}$

Bài 11: Xác định đa thức  $A(x) = ax^3 + bx^2 + c$ , biết:  $A(x)$  chia hết cho  $x-2$  và  $A(x):x^2 + x - 2$  dư là  $3x+2$

**HD :**

Ta có :  $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Khi đó ta có :  $A(x) = ax^3 + bx^2 + c = (x-2)B(x)$

Và  $A(x) = ax^3 + bx^2 + c = (x-1)(x+2)C(x) + 3x + 2$

Cho  $x = 2 \Rightarrow 8a + 4b + c = 0$ , Cho  $x = 1 \Rightarrow a + b + c = 5$ , Cho  $x = -2 \Rightarrow -8a + 4b + c = -4$

Khi đó ta có hệ :  $\begin{cases} 8a + 4b + c = 0 \\ -8a + 4b + c = -4 \\ a + b + c = 5 \end{cases}$

Bài 12: Tìm đa thức  $f(x)$  biết:  $f(x)$  chia cho  $x-3$  dư 2,  $f(x)$  chia cho  $x+4$  dư 9, và  $f(x):x^2+x-12$  được thương là  $x^2+3$  và còn dư

**HD :**

Do  $f(x)$  chia cho  $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$  được thương là  $x^2+3$  còn dư nên ta có :

$$f(x)=(x+4)(x-3)(x^2+3)+a.x+b$$

$$\text{Cho } x=-4 \Rightarrow f(x)=-4a+b=9$$

$$\text{Cho } x=3 \Rightarrow f(x)=3a+b=2$$

$$\text{Khi đó ta có hệ: } \begin{cases} -4a+b=9 \\ 3a+b=2 \end{cases}$$

Bài 13: Tìm 1 đa thức bậc 3  $P(x)$  biết,  $P(x)$  chia cho các đa thức  $(x-1)$ ,  $(x-2)$ ,  $(x-3)$  đều được dư là 6, và  $P(-1)=-18$

**HD :**

Ta có:  $f(x)-6$  chia hết cho  $x-1, x-2, x-3$

Vì  $f(x)$  là đa thức bậc 3 nên  $f(x)$  có dạng  $f(x)-6=m(x-1)(x-2)(x-3)$ ,  
m là hằng số

$$\text{Lại có: } f(-1)=-18 \Rightarrow -18-6=m(-2)(-3)(-4) \Leftrightarrow m=1$$

$$\text{Vậy } f(x)-6=(x-2)(x-3)(x-4) \Rightarrow f(x)=x^3-6x^2+11x$$

Bài 14: Tìm đa thức bậc 4 biết:  $P(-1)=0, P(x)-P(x-1)=x(x+1)(2x+1)$

**HD :**

$$\text{Cho } x=0 \Rightarrow P(0)-P(-1)=0 \text{ mà } P(-1)=0 \Rightarrow P(0)=0$$

$$\text{Lần lượt cho } x=-2, 1, 2 \text{ ta có: } P(-2)=0, P(1)=6, P(2)=36$$

$$\text{Đặt } P(x)=e+d(x+2)+c(x+2)(x+1)+b(x+2)(x+1)x+a(x+2)(x+1)x(x-1)$$

$$\text{Chọn } x=-2 \Rightarrow e=0 \quad x=-1 \Rightarrow d=0 \quad x=0 \Rightarrow c=0 \quad x=1 \Rightarrow b=1 \quad x=2 \Rightarrow a=1/2$$

$$\text{Vậy đa thức cần tìm là: } P(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x+1)x(x-1)+(x+2)(x+1)$$

Bài 15: Tìm đa thức  $P(x)$  thỏa mãn:  $P(x)$  chia cho  $x+3$  dư 1,  $P(x)$  chia cho  $x-4$  dư 8, chia cho  $(x+3)(x-4)$  được thương là  $3x$ , còn dư

**HD :**

Vì  $P(x)$  chia cho  $(x+3)(x-4)$  được thương là  $3x$  còn dư nên ta có:

$$P(x)=(x+3)(x-4)3x+ax+b$$

$$\text{Và } P(x)=(x+3)A(x)+1$$

$$\text{Và } P(x)=(x-4)B(x)+8$$

$$\text{Cho } x=-3 \Rightarrow P(x)=1=-3a+b$$

$$\text{Cho } x=4 \Rightarrow P(x)=8=8a+b$$

Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} -3a+b=1 \\ 8a+b=8 \end{cases}$$

Bài 16: Tìm đa thức bậc hai  $P(x)$  biết:  $P(0)=19, P(1)=5, P(2)=1995$

**HD :**

$$\text{Đặt: } P(x)=c+b(x-0)+a(x-0)(x-1)$$

$$\text{Cho } x=0 \Rightarrow c=19 \quad x=1 \Rightarrow b=-14 \quad x=2 \Rightarrow a=1002$$

$$\text{Vậy đa thức cần tìm là: } P(x)=1002x(x-1)-14x+19$$



Bài 17: Tìm đa thức bậc ba  $P(x)$  biết:  $P(0)=10, P(1)=12, P(2)=4, P(3)=1$

**HD :**

$$\text{Đặt } P(x) = d + cx + bx(x-1) + ax(x-1)(x-2)$$

$$\text{Cho } x=0 \Rightarrow P(0)=10=d$$

$$\text{Cho } x=1 \Rightarrow P(1)=12=c+d \Rightarrow c=2$$

$$\text{Cho } x=2 \Rightarrow P(2)=4=d+2c+2b \Rightarrow b=-5$$

$$\text{Cho } x=3 \Rightarrow P(3)=1=d+3c+6b+6a \Rightarrow a=\frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy đa thức cần tìm là: } P(x) = \frac{5}{2}x(x-1)(x-2) - 5x(x-1) + 2x + 10$$

Bài 18: Tìm đa thức bậc hai biết:  $P(0)=19, P(1)=85, P(2)=1985$

**HD :**

$$\text{Đặt } P(x) = a.x(x-1) + bx + c$$

$$\text{Cho } x=0 \Rightarrow P(0)=19=c \Rightarrow c=19$$

$$\text{Cho } x=1 \Rightarrow P(1)=85=b+c \Rightarrow b=66$$

$$\text{Cho } x=2 \Rightarrow P(2)=1985=2a+2b+c \Rightarrow a=917$$

$$\text{Vậy đa thức bậc hai cần tìm là: } P(x) = 917x(x-1) + 66x + 19$$

Bài 19: Cho đa thức:  $P(x) = x^4 + ax^2 + 1$  và  $Q(x) = x^3 + ax + 1$ , xác định  $a$  để  $P(x)$  và  $Q(x)$  có nghiệm chung

**HD :**

Giả sử nghiệm chung là  $c$

$$\Rightarrow P(x) - xQ(x) = x - 1 \Rightarrow P(c) - cQ(c) = c - 1$$

vì  $x = c$  là nghiệm

$$\text{Nên } P(c) = Q(c) = 0 \Rightarrow c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1,$$

$$\text{Khi } c=1 \Rightarrow P(1)=Q(1)=a+2=0 \Rightarrow a = -2$$

Vậy  $a = -2$  thì  $P(x)$  và  $Q(x)$  có nghiệm chung

Bài 20: Tìm đa thức  $f(x)$  biết  $f(x)$  chia  $x-2$  dư 3, chia cho  $x-5$  dư 6 và chia cho  $x^2 - 7x + 10$  được thương là  $x^2 + 4$  và còn dư

Bài 21: Xác định các số hữu tỉ  $a, b$  sao cho  $x^3 + ax + b$  chia hết cho  $x^2 - 2x - 3$

Bài 22: Cho đa thức bậc hai :  $P(x) = ax^2 + bx + c$  biết  $P(x)$  thỏa mãn cả hai điều kiện sau :  $P(0)=-2,$

$4.P(x)-P(2x-1)=6x-6$ . CMR :  $a+b+c=0$  và xác định đa thức  $P(x)$

Bài 23: Cho đa thức:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , Xác định  $a, b, c$  biết  $f(0)=2, f(1)=7, f(-2)=-14$

Bài 24: Cho đa thức bậc nhất  $f(x)=ax+b$ , Hãy tìm điều kiện của  $b$  để thỏa mãn hệ thức:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ với mọi } x$$

Bài 25: Cho đa thức:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , Xác định các hệ số  $f(0)=2, f(1)=7, f(-2)=-14$

Bài 26: Cho đa thức:  $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ , CMR  $f(x)$  luôn dương với mọi giá trị của  $x$

Bài 27: Cho  $a$  và  $b$  là hai số tự nhiên. Số  $a$  chia 5 dư 1, số  $b$  chia 5 dư 2, CMR:  $ab$  chia 5 dư 2

Bài 28: Cho đa thức:  $f(x) = x^3 + 2ax^2 + 4x - 3b$ . Tìm các hệ số  $a, b$  biết khi chia đa thức cho  $x-3$  ta được đa thức dư là  $-5$  và khi chia đa thức cho  $x+1$  thì được dư là  $-1$

Bài 29: Xác định các hệ số của  $a, b$  để  $x^4 + a.x^2 + b$  chia hết cho  $x^2 + x + 1$

Bài 30: Cho đa thức:  $A = x^4 - 2x^3 - 2x + m - 1$  và đa thức:  $B = x^2 - 2x - 1$ , Tìm  $m$  để đa thức  $A$  chia cho đa thức  $B$  có dư là giá trị của ẩn làm cho đa thức  $B$  bằng 0

### DẠNG 3: TỔNG HỢP

Bài 1: CMR với mọi số tự nhiên  $n$  ta có :  $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

HD :

$$\text{Ta có: } 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59 = 51.5^n + 8.64^n = (59-8).5^n + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n)$$

Vì  $(64^n - 5^n) : (64-5)$  nên ta có đpcm

Bài 2: CMR:  $n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$  chia hết cho 24 với mọi  $n \in \mathbb{Z}$

HD :

$$\text{Ta có: } n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n = n[n^2(n-2) - (n-2)] = n(n-1)(n+1)(n-2)$$

là tích 4 số tự nhiên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2 và 1 số chia hết cho 4 nên chia hết cho 8 và chia hết cho 3

Bài 3: Cho  $a, b$  là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp, CMR:  $ab - a - b + 1$  chia hết cho 48

ta có:  $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ ,

HD :

Vì  $a, b$  là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp nên:

$$a = (2n+1)^2; b = (2n+3)^2 \text{ với } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Nên } ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1) = [(2n+1)^2 - 1][(2n+3)^2 - 1] = 16n(n+1)^2(n+2)$$

Nên chia hết cho 16 và chia hết cho 3 nên chia hết cho 48

Bài 4:

a, Tìm giá trị của  $a$  để  $(21x^2 - 9x^3 + x + x^4 + a) : (x^2 - x - 2)$

b, Xác định các hệ số  $a, b$  để đa thức  $f(x) = x^3 + ax + b$  chia hết cho đa thức  $x^2 + x - 6$

HD :

a, Thực hiện phép chia ta được thương là  $x^2 - 8x + 15$  và dư là  $a+30$

b,  $f(x) : x^2 + x - 6$  khi  $f(x) : (x+3)(x-2)$ , Ta có:  $f(-3)=0 \Rightarrow -3a+b=27$  và  $f(2)=0 \Rightarrow 2a+b=-8$

$$\text{Khi đó ta có: } M = (a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = 3a^3 + 6a = 3a(a-1)(a+1) + 9a : 9$$

Bài 5: Cho đa thức  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , Tìm  $a, b, c, d$  biết rằng khi chia đa thức lần lượt cho nhị thức  $(x-1), (x-2), (x-3)$  đều có số dư là 6 và tại  $x=-1$  thì đa thức nhận giá trị là -18

HD :

Ta có:  $f(x) - 6 : (x-1), (x-2), (x-3)$  vì  $f(x)$  là bậc 3 nên  $f(x)$  có dạng

$$f(x) - 6 = m(x-1)(x-2)(x-3) \text{ với } m \text{ là hằng số:}$$

$$\text{lại có: } f(-1) = -18 \Rightarrow m = 1 \text{ vậy } f(x) - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$$

Bài 6: CMR giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của  $x$ :  $(x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1)$

HD :

$$\text{Biểu thức } \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - x^4 - 6x^2 + 4x^3 + 4x = 1$$

Bài 7: Tìm  $a$  để đa thức  $3x^4 + x^3 + x + a$  chia hết cho đa thức  $x^2 + 1$

HD :

Đem chia ta được dư là  $a+3$

Bài 8: Tìm các số  $a$  và  $b$  sao cho  $x^3 + ax + b$  chia hết cho  $x+1$  dư 7 chia cho  $x-3$  dư -5

HD :

$$\text{Ta có: } x^3 + ax + b = (x+1)P(x) + 7 = (x-3)Q(x) - 5$$

Thay  $x=-1$  và  $x=3$  vào biểu thức trên ta được :  $a = -10, b = -2$

Bài 9: CMR: Tổng các lũy thừa bậc ba của ba số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 9

HD:

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $a-1, a, a+1$

Bài 10: Cho a,b là hai số nguyên, CMR : Nếu  $3a^2 + 11ab - 4b^2 : 169$  thì  $\overline{ab} : 13$

Bài 11: Tìm phần dư của phép chia  $f(x) = x^{2012} + x^{2011} + 1$  cho đa thức :

a,  $x^2 - 1$

b,  $x^2 + x + 1$

Bài 12: Tìm giá trị của a để  $(21x^2 - 9x^3 + x + x^4 + a) : (x^2 - x - 2)$

HD:

Thực hiện phép chia ta được thương là  $x^2 - 8x + 15$  và dư là  $a + 30$

Bài 13: Cho đa thức  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , Tìm a,b,c,d biết rằng khi chia đa thức lần lượt cho nhị thức  $(x-1)$ ,  $(x-2)$ ,  $(x-3)$  đều có số dư là 6 và tại  $x=-1$  thì đa thức nhận giá trị là -18

HD:

Ta có:  $f(x) - 6 : (x-1), (x-2), (x-3)$  vì  $f(x)$  là bậc 3 nên  $f(x)$  có dạng

$f(x) - 6 = m(x-1)(x-2)(x-3)$  với m là hằng số:

lại có:  $f(-1) = -18 \Rightarrow m = 1$  vậy  $f(x) - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$

Bài 14: CMR giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$(x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1)$$

HD:

$$\text{Biểu thức} \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - x^4 - 6x^2 + 4x^3 + 4x = 1$$

Bài 15: Tìm a để đa thức  $3x^4 + x^3 + x + a$  chia hết cho đa thức  $x^2 + 1$

HD :

Đem chia ta được dư là  $a+3$

Bài 16: Cho đa thức:  $P(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 - 40x + m - 1979$

a, Tìm m sao cho  $P(x)$  chia hết cho  $x-2$

b, Với m tìm được, hãy giải thích phương trình  $P(x)=0$

Bài 17: Tìm đa thức  $f(x)$  biết  $f(x)$  chia  $x-2$  dư 3, chia cho  $x-5$  dư 6 và chia cho  $x^2 - 7x + 10$  được thương là  $x^2 + 4$  và còn dư

Bài 18: Xác định các số hữu tỉ a, b sao cho  $x^3 + ax + b$  chia hết cho  $x^2 - 2x - 3$

Bài 19: Cho đa thức  $f(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + \dots + 2x^2 + x + 1$ , Gọi m là số dư của phép chia đa thức cho

$$3x-1, \text{ CMR : } m < \frac{7}{4}$$

Bài 20: Có tồn tại hay không đa thức  $f(x)$  với hệ số nguyên thỏa mãn :  $f(3) = 1931, f(26) = 2012$

Bài 21: Tìm các số a và b sao cho  $x^3 + ax + b$  chia hết cho  $x+1$  dư 7 chia cho  $x-3$  dư -5

HD :

$$\text{Ta có : } x^3 + ax + b = (x+1)P(x) + 7 = (x-3)Q(x) - 5$$

Thay  $x = -1$  và  $x=3$  vào biểu thức trên ta được :  $a = -10, b = -2$

Bài 22: CMR :  $p = n^2 + 3n + 5$ , không chia hết cho 121 với mọi số tự nhiên n

Bài 23: CMR với mọi số nguyên n thì  $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$  chia hết cho 23

Bài 24: CMR với mọi n thì  $n^3 + 11n : 6$  với n là số nguyên

Bài 25: Xác định các hệ số a, b để đa thức  $f(x) = x^3 + ax + b$  chia hết cho đa thức  $x^2 + x - 6$

HD:

$$f(x) : x^2 + x - 6 \text{ khi } f(x) : (x+3)(x-2), \text{ Ta có: } f(-3)=0 \Rightarrow -3a+b=27 \text{ và } f(2)=0 \Rightarrow 2a+b=-8$$

$$\text{Khi đó ta có: } M = (a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = 3a^3 + 6a = 3a(a-1)(a+1) + 9a : 9$$

Bài 26: Cho đa thức  $f(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + \dots + 2x^2 + x + 1$ , Gọi m là số dư của phép chia đa thức cho

$$3x-1, \text{ CMR : } m < \frac{7}{4}$$

Bài 27: Có tồn tại hay không đa thức  $f(x)$  với hệ số nguyên thỏa mãn :  $f(3) = 1931, f(26) = 2012$

Bài 28: CMR với mọi số nguyên  $n$  thì  $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$  chia hết cho 23

a, CMR: Tổng các lũy thừa bậc ba của ba số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 9

HD:

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $a-1, a, a+1$

Bài 29: CMR với mọi  $n$  thì  $n^3 + 11n : 6$  với  $n$  là số nguyên

Bài 30: Cho đa thức:  $P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ , CMR:  $P(x)$  luôn dương với mọi giá trị của  $x$

Bài 31: Cho đa thức:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thỏa mãn:  $f(1) = f(-1)$

a, Tìm  $b$

b, CMR:  $f(m) = f(-m)$  với  $m$  bất kỳ

Bài 32: Tính giá trị của đa thức sau biết:  $x + y - 2 = 0 : M = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2006$

HD:

Biến đổi đa thức theo hướng làm xuất hiện  $x + y - 2 = 0$

Ta có:  $M = (x^3 + x^2y - 2x^2) - (xy + y^2 - 2y) + (x + y - 2) + 2006 =$

$x^2(x + y - 2) - y(x + y - 2) + (x + y - 2) + 2006$

Bài 33: Số  $a$  gồm 31 chữ số 1, số  $b$  gồm 38 chữ số 1, CMR:  $ab - 2$  chia hết cho 3

Bài 34: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  thì:

a,  $(n^2 + 3n - 1)(n + 2) - n^3 + 2$  chia hết cho 5

b,  $n(n + 5) - (n - 3)(n + 2)$  chia hết cho 6

c,  $(n - 1)(n + 1) - (n - 7)(n - 5)$  chia hết cho 12

Bài 35: Tìm giá trị của  $m$  để cho phương trình  $6x - 5m = 3 + 3mx$ , có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình:  $(x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 = 3$

HD:

Ta có:  $(x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 3 \Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$

Để phương trình  $6x - 5m = 3 + 3mx$  có nghiệm gấp ba lần nghiệm của phương trình

$(x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 = 3$  hay  $x = -6$

Thay vào ta có:  $6(-6) - 5m = 3 + 3m(-6) \Leftrightarrow m = 3$