

CĂN BẬC HAI - CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Căn bậc hai số học

• Căn bậc hai của một số không âm a là số x sao cho $x^2 = a$

• Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau:

Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$, số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$

• Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$

• Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là căn **bậc hai số học** của a . Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.

• Với hai số không âm a, b , ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

II. Căn thức bậc hai

• Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là **căn thức bậc hai** của A .

• $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi $A \geq 0$.

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & .A \geq 0 \\ -A & .A < 0 \end{cases}$$

B. BÀI MINH HỌA

I. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG BÀI TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn có nghĩa

Bài 1. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{-3x}$ b) $\sqrt{4-2x}$ c) $\sqrt{-3x+2}$
d) $\sqrt{3x+1}$ e) $\sqrt{9x-2}$ f) $\sqrt{6x-1}$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ b) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$ c) $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$
d) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ e) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ f) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{x^2+1}$ b) $\sqrt{4x^2+3}$ c) $\sqrt{9x^2-6x+1}$
d) $\sqrt{-x^2+2x-1}$ e) $\sqrt{-|x+5|}$ f) $\sqrt{-2x^2-1}$

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{4-x^2}$ b) $\sqrt{x^2-16}$ c) $\sqrt{x^2-3}$
d) $\sqrt{x^2-2x-3}$ e) $\sqrt{x(x+2)}$ f) $\sqrt{x^2-5x+6}$

Lời giải

Bài 1:

a) $x \leq 0$ b) $x \leq 2$ c) $x \leq \frac{2}{3}$
d) $x \geq \frac{-1}{3}$ e) $x \geq \frac{2}{9}$ f) $x \geq \frac{1}{6}$

Bài 2:

1. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ - THCS.TOANMATH.com

$$a) \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$$

$$\text{Điều kiện của biểu thức là } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x > 2$

$$b) \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$$

$$\text{Điều kiện của biểu thức là } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \geq 2$

$$c) \frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x > 2$

$$d) \sqrt{\frac{1}{3-2x}} \text{ dạng } \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ với } A > 0$$

$$\Rightarrow \text{Điều kiện } \frac{1}{3-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x < \frac{3}{2}$

$$e) \sqrt{\frac{4}{2x+3}} \cdot \text{Dạng } \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ với } A > 0$$

$$\Rightarrow \text{Điều kiện } \frac{4}{2x+3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x > -\frac{3}{2}$

$$f) \sqrt{\frac{-2}{x+1}} \text{ dạng } \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ với } A < 0$$

$$\Rightarrow \text{Điều kiện } \frac{-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x < -1$

Bài 3.

a) Vì $x^2 + 1 > 0 \forall x$. Vậy hàm số luôn xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Vì $4x^2 + 3 > 0 \forall x$. Vậy hàm số luôn xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{(3x-1)^2}$. Vì $(3x-1)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số xác định với mọi x

$$d) \sqrt{-x^2 + 2x - 1} = \sqrt{-(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{-(x-1)^2}$$

Hàm số xác định $\Leftrightarrow -(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy hàm số xác định khi $x = 1$

e) $\sqrt{-|x+5|}$

Điều kiện $-|x+5| \geq 0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

f) $\sqrt{-2x^2-1}$

Điều kiện $-2x^2-1=-(2x^2+1)<0 \forall x$

Vậy không tồn tại giá trị x để hàm số có nghĩa

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) Điều kiện của biểu thức là $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Vậy điều kiện của biểu thức là $-2 \leq x \leq 2$

b) Điều kiện của biểu thức là $x^2-16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4$ hoặc $x \leq -4$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \geq 4$ hoặc $x \leq -4$

c) Điều kiện của biểu thức là $x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$ hoặc $x \leq -\sqrt{3}$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \geq \sqrt{3}$ hoặc $x \leq -\sqrt{3}$

d) $x^2-2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$
 $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1$

Vậy biểu thức xác định khi $x \geq 3$ hoặc $x \leq -1$

e) Điều kiện của biểu thức là $x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 0$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \leq -2$ hoặc $x \geq 0$

f) Điều kiện của biểu thức là $x^2-5x+6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ hoặc $x \geq 3$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \leq 2$ hoặc $x \geq 3$

Dạng 2. Tính giá trị biểu thức

Trong các bài toán tính giá trị biểu thức và bài toán rút gọn thường xuất hiện các dạng biểu thức “ẩn” của các hằng đẳng thức. Để tính toán và giải quyết nhanh bài toán, các em cần biến đổi, và sử dụng thành thạo các dạng của các hằng đẳng thức đáng nhớ.

Để đơn giản hoá việc nhận dạng và xử lý bài toán, các em có thể tham khảo sơ đồ bên dưới.

Sử dụng hằng đẳng thức trong bài toán chứa căn

Chú ý: $x = (\sqrt{x})^2$ $x \geq 0$; $x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$

Các hằng đẳng thức đáng nhớ	Ví dụ minh họa
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$1. 6 + 2\sqrt{5} = 5 + 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} + 1)^2$ $2. \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3} + 1$ $3. x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$1. 6 - 2\sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} - 1)^2$ $2. \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + 2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$ $3. \sqrt{x^2 + 3 - 4\sqrt{x^2 - 5}} = \sqrt{x^2 - 5 - 4\sqrt{x^2 - 5} + 4 + 4}$ $= \sqrt{(\sqrt{x^2 - 5})^2 - 4\sqrt{x^2 - 5} + 4 + 4} = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 5} - 2)^2 + 4} \geq 2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$1. \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 1$ $2. \frac{4-a}{2-\sqrt{a}} = \frac{2^2 - (\sqrt{a})^2}{2-\sqrt{a}} = \frac{(2-\sqrt{a})(2+\sqrt{a})}{2-\sqrt{a}} = 2 + \sqrt{a}$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$1. x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ $2. \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{1-(\sqrt{a})^3}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}$ $= 1 + \sqrt{a} + a + \sqrt{a} = (1+\sqrt{a})^2$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$1. x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ $2. \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}[(\sqrt{x})^3 + 1]}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$ $= \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)^3} = \sqrt{3} + 1$ $(\sqrt{x} + 1)^3 = x\sqrt{x} + 3x + 3\sqrt{x} + 1$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} = \sqrt[3]{3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^3} = \sqrt{3} - 1$ $(\sqrt{x} - 1)^3 = x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1$

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$ b) $\sqrt{(-2)^6}$ c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$ b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$
c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$
e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$ f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} & \text{b)} \sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}} & \text{c)} \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} \\ \text{d)} \sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} & \text{e)} \sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}} & \text{f)} \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}} \end{array}$$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}} & \text{b)} \left(\frac{8-4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right)^2 \\ \text{c)} \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} & \text{d)} \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} \end{array}$$

Lời giải

Bài 1:

a) Biến đổi biểu thức $-0,8\sqrt{(-0,125)^2} = -0,8|-0,125| = -0,8 \cdot 0,125 = -0,1$

Vậy biểu thức có giá trị là: -0,1

b) Biến đổi biểu thức $\sqrt{(-2)^6} = |(-2)^3| = |-8| = 8$

Vậy biểu thức có giá trị là: 8

c) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$ vì $\sqrt{3}-2 < 0$

Vậy biểu thức có giá trị là $2-\sqrt{3}$

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} = |2\sqrt{2}-3| = 3-2\sqrt{2}$ vì $3-2\sqrt{2} = 3-\sqrt{8} = \sqrt{9}-\sqrt{8} > 0$

Vậy biểu thức có giá trị là $3-2\sqrt{2}$

Bài 2:

a) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} = |3-2\sqrt{2}| + |3+2\sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2} + 3+2\sqrt{2} = 6$

(vì $3-2\sqrt{2} > 0$)

Vậy biểu thức có giá trị là: 6

b) Biến đổi biểu thức $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2} = |5-2\sqrt{6}| - |5+2\sqrt{6}| = (5-2\sqrt{6}) - (5+2\sqrt{6}) = -4\sqrt{6}$

(vì $5-2\sqrt{6} > 0$)

Vậy biểu thức có giá trị là: $-4\sqrt{6}$

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 1$

(Vì $2-\sqrt{3} > 0; 1-\sqrt{3} < 0$)

Vậy biểu thức có giá trị là: 1

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |3+\sqrt{2}| - |1-\sqrt{2}| = 3+\sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) = 4$

(vì $3+\sqrt{2} > 0; 1-\sqrt{2} < 0$)

Vậy biểu thức có giá trị là: 4

e) Biến đổi biểu thức $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{5}-\sqrt{2}| + |\sqrt{5}+\sqrt{2}| = \sqrt{5}-\sqrt{2} + \sqrt{5}+\sqrt{2} = 2\sqrt{5}$

vì $\sqrt{5}-\sqrt{2} > 0; \sqrt{5}+\sqrt{2} > 0$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2\sqrt{5}$

f) Biến đổi biểu thức $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2} = |\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}-5| = \sqrt{2}+1 - (5-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-4$

(Vì $\sqrt{2}+1 > 0$; $\sqrt{2}-5 < 0$)

Vậy biểu thức có giá trị là $2\sqrt{2}-4$

Bài 3:

a) $\sqrt{\sqrt{5}+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Ta có: $5+2\sqrt{6} = 3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2 = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; $5-2\sqrt{6} = 3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

Nên $\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}+\sqrt{2}| - |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = (\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2})$
 $= 2\sqrt{2}$ vì $\sqrt{3}+\sqrt{2} > 0$; $\sqrt{3}-\sqrt{2} > 0$

Vậy biểu thức có giá trị là $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}$

Ta có: $7-2\sqrt{10} = 5-2\sqrt{5}\sqrt{2}+2 = (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$; $7+2\sqrt{10} = 5+2\sqrt{5}\sqrt{2}+2 = (\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

Nên

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{5}-\sqrt{2}| - |\sqrt{5}+\sqrt{2}| = (\sqrt{5}-\sqrt{2}) - (\sqrt{5}+\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$

vì $\sqrt{5}-\sqrt{2} > 0$; $\sqrt{5}+\sqrt{2} > 0$

Vậy biểu thức có giá trị là $-2\sqrt{2}$

c) Biến đổi biểu thức

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-1| + \sqrt{3}+1 = \sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1 = 2\sqrt{3}$$

Vậy biểu thức có giá trị $2\sqrt{3}$

d) Biến đổi biểu thức

$$\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4(6+2\sqrt{5})} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4(5+2\sqrt{5}+1)} + \sqrt{5-4\sqrt{5}+4}$$

$$= \sqrt{4(\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}+1)} + \sqrt{\sqrt{5}^2-2\sqrt{5}\cdot 2+2^2}$$

$$= \sqrt{4(\sqrt{5}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$$

$$= 2|\sqrt{5}+1| + |\sqrt{5}-2|$$

$$= 2\sqrt{5}+2 + \sqrt{5}-2 = 3\sqrt{5}$$

Vậy biểu thức có giá trị $3\sqrt{5}$

e) Biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned}
& \sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{9-12\sqrt{2}+8} + \sqrt{8+4\sqrt{2}+1} \\
&= \sqrt{3^2-2.3.2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2})^2+2.2\sqrt{2}+1^2} \\
&= \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} \\
&= |3-2\sqrt{2}| + |2\sqrt{2}+1| \\
&= 3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+1=4
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là 4

f) Biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned}
& \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{4-4\sqrt{2}+2} + \sqrt{18-12\sqrt{2}+4} \\
&= \sqrt{2^2-2.2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2} + \sqrt{(3\sqrt{2})^2-2.3.\sqrt{2}.2+2^2} \\
&= \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-2)^2} \\
&= |2-\sqrt{2}| + |3\sqrt{2}-2| \\
&= 2-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2=2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị $2\sqrt{2}$

Bài 4.

a) Biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}} \\
&= (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \\
&= (\sqrt{3}-\sqrt{2})|\sqrt{3}+\sqrt{2}| \\
&= (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\
&= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3-2=1
\end{aligned}$$

b) Ta có: $\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1} = (\sqrt{3}-1)$

và $\frac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1+\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+1)$

Suy ra $\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)^2 - \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2 = (\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{3}+1)^2 = (4-2\sqrt{3}) - (4+2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$

Vậy biểu thức có giá trị $-4\sqrt{3}$

c) Biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{20-12\sqrt{5}+9}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2}}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-(2\sqrt{5}+3)}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{1} = 1
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị 1

d) Biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned}
& \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} \\
&= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)}} \\
&= \sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} \\
&= \sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{43+30\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{25+2.5.3\sqrt{2}+18} = \sqrt{(5+3\sqrt{2})^2} = 5+3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị $5+3\sqrt{2}$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}
& \text{a) } x+3+\sqrt{x^2-6x+9} \quad (x \leq 3) \quad \text{b) } \sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2} \quad (-2 \leq x \leq 0) \\
& \text{c) } \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \quad (x > 1) \quad \text{d) } |x-2|+\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} \quad (x < 2)
\end{aligned}$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}
& \text{a) } \sqrt{1-4a+4a^2}-2a \quad \text{b) } x-2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2} \\
& \text{c) } x^2+\sqrt{x^4-8x^2+16} \quad \text{d) } 2x-1-\frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5} \\
& \text{e) } \frac{\sqrt{x^4-4x^2+4}}{x^2-2} \quad \text{f) } \sqrt{(x-4)^2}+\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+16}}
\end{aligned}$$

Bài 3. Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$

a) Với giá trị nào của x thì A có nghĩa?

b) Tính A nếu $x \geq \sqrt{2}$

Bài 4. Cho 3 số dương x,y,z thỏa điều kiện $xy+yz+xz=1$

$$\text{Tính } A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Lời giải

Bài 1.

$$a) x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} \quad (x \leq 3)$$

$$= x + 3 + \sqrt{(x-3)^2} = x + 3 + |x-3|$$

$$(\text{vì } x \leq 3 \text{ nên } |x-3| = -(x-3))$$

$$= x + 3 - (x-3) = 6$$

$$b) \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2} \quad (-2 \leq x \leq 0)$$

$$= \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{x^2} = |x+2| + |x|$$

$$\text{vì } x \geq -2 \text{ nên } |x+2| = x+2 \text{ và } x \leq 0 \text{ nên } |x| = -x$$

$$= x + 2 - x = 2$$

$$c) \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} \quad (x > 1)$$

$$= \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\text{Vì } x > 1 \text{ nên } |x-1| = x-1$$

$$d) |x-2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x-2} = |x-2| + \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$$

$$\text{vì } x < 2 \text{ nên } |x-2| = -(x-2)$$

$$\text{Biểu thức} = |x-2| + \frac{|x-2|}{x-2} = -(x-2) + \frac{-(x-2)}{x-2} = -x + 2 - 1 = -x + 1$$

Bài 2.

$$a) \text{Biến đổi biểu thức } \sqrt{1-4a+4a^2} - 2a = \sqrt{(1-2a)^2} - 2a = |1-2a| - 2a$$

$$\text{Với } a \leq \frac{1}{2} \text{ thì } 1-2a \geq 0 \text{ nên } |1-2a| = 1-2a \text{ ta có:}$$

$$\sqrt{1-4a+4a^2} - 2a = |1-2a| - 2a = 1-2a-2a = 1-4a$$

$$\text{Với } a \geq \frac{1}{2} \text{ thì } 1-2a \leq 0 \text{ nên } |1-2a| = 2a-1 \text{ ta có: } \sqrt{1-4a+4a^2} - 2a = |1-2a| - 2a = 2a-1-2a = -1$$

$$b) \text{Biến đổi biểu thức } x-2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2} = x-2y-\sqrt{(x-2y)^2} = x-2y-|x-2y|$$

$$\text{Với } x-2y \leq 0 \text{ thì } |x-2y| = -(x-2y) \text{ ta có}$$

$$x-2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2} = x-2y-|x-2y| = x-2y+(x-2y) = 2x-4y$$

$$\text{Với } x-2y \geq 0 \text{ thì } |x-2y| = x-2y \text{ ta có}$$

$$x-2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2} = x-2y-|x-2y| = x-2y-(x-2y) = 0$$

$$c) x^2 + \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = x^2 + \sqrt{(x^2-4)^2} = x^2 + |x^2-4|$$

$$\text{với } x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \text{ thì } |x^2-4| = -(x^2-4) \text{ ta có:}$$

$$x^2 + \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = x^2 + |x^2-4| = x^2 - (x^2-4) = 4$$

Với $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$ thì $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ ta có:

$$x^2 + \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = x^2 + |x^2 - 4| = x^2 + (x^2 - 4) = 2x^2 - 4$$

$$d) 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{\sqrt{(x - 5)^2}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{|x - 5|}{x - 5}$$

Với $x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ thì $|x - 5| = -(x - 5)$ ta có:

$$2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{|x - 5|}{x - 5} = 2x - 1 + \frac{x - 5}{x - 5} = 2x$$

Với $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ thì $|x - 5| = (x - 5)$ ta có:

$$2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{|x - 5|}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{x - 5}{x - 5} = 2x - 2$$

Bài 3. Biểu thức $A = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}}$

a) Biểu thức xác định khi $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 1$

b) Tính A với $x \geq \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \sqrt{(x^2 - 1) + 2\sqrt{x^2 - 1} + 1} - \sqrt{(x^2 - 1) - 2\sqrt{x^2 - 1} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2} \\ &= |\sqrt{x^2 - 1} + 1| + |\sqrt{x^2 - 1} - 1| \end{aligned}$$

Với $x \geq \sqrt{2}$ thì $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} - 1 \geq 0$

$$\text{Vậy } A = |\sqrt{x^2 - 1} + 1| + |\sqrt{x^2 - 1} - 1| = \sqrt{x^2 - 1} + 1 + \sqrt{x^2 - 1} - 1 = 2\sqrt{x^2 - 1}$$

Bài 4. Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện: $xy + yz + zx = 1$.

$$\text{Tính } A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

$$\text{Ta có: } 1 + y^2 = (xy + yz + zx) + y^2 = xy + y^2 + yz + zx = y(x + y) + z(y + x) = (x + y)(y + z)$$

$$\text{Tương tự } 1 + z^2 = (y + z)(z + x)$$

$$1 + x^2 = (z + x)(x + y)$$

Suy ra

$$*x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(x+z)(y+z)}{(x+y)(x+z)}} = x\sqrt{(y+z)^2} = x(y+z)$$

$$*y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} = y\sqrt{\frac{(z+x)(y+z)(x+z)(x+y)}{(x+y)(y+z)}} = y\sqrt{(x+z)^2} = y(x+z)$$

$$*z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = z\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)(x+y)(y+z)}{(x+z)(y+z)}} = z\sqrt{(x+y)^2} = z(x+y)$$

Vậy $A = x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 2(xy + yz + xz) = 2$

Dạng 4. Giải phương trình

Để đơn giản hoá việc nhận dạng và xử lý bài toán, các em có thể tham khảo sơ đồ bên dưới.

Một số dạng phương trình cơ bản

Dạng toán	Ví dụ minh họa
$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$	$1. x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2$ $2. (x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = x \Leftrightarrow 0x = 1 \text{ (PTVN)} \\ x-1 = -x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$
$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$	$\sqrt{2x+5} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x+5 = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = \frac{-2}{3} \end{cases} \text{ (thỏa)}$
$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ Nếu $B < 0$ thì phương trình vô nghiệm	$\sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1-x^2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 1 \text{ (TM)} \end{cases}$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$
$ A = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$	$ 2-3x = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x = 5 \\ 2-3x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-1; \frac{7}{3}\right\}$ $\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = 2x \Leftrightarrow \left x + \frac{1}{2}\right = 2x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} = 2x \\ x + \frac{1}{2} = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ x = -\frac{1}{6} \text{ (loại)} \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình $x = \frac{1}{2}$
$ A = B \Leftrightarrow A = B \text{ hay } A = -B$	$ 3x+1 = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = x+3 \\ 3x+1 = -x-3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 4x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-1; 1\}$

$ A + B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$	$ x+5 + x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ x^2-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=5 \\ x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5$ Vậy nghiệm của phương trình: $x = -5$
$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$ Vậy nghiệm của phương trình: $x = -1$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$ b) $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$
c) $\sqrt{1-12x+36x^2} = 5$ d) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} = 2$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$ b) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x}$
c) $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$ d) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+x} = x$ b) $\sqrt{1-x^2} = x-1$
c) $\sqrt{x^2-4x+3} = x-2$ d) $\sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1$ b) $\sqrt{4x^2-4x+1} = x-1$
c) $\sqrt{x^4-2x^2+1} = x-1$ d) $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = x$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $|3x+1| = |x+1|$ b) $|x^2-3| = |x-\sqrt{3}|$
c) $\sqrt{9x^2-12x+4} = \sqrt{x^2}$ d) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$

Lời giải

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x \Leftrightarrow |x-3| = 3-x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 = 3-x \\ x-3 = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x = 6 \\ 0x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 3 \\ 0x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 3$

Vậy tập nghiệm của PT là $x \leq 3$

b) $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-5)^2} = 5-2x$

$$\Leftrightarrow |2x-5|=5-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ 2x-5=5-2x \\ 2x-5=2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x = \frac{5}{2} \text{ (TM)} \\ 0x=0 \left(\text{dung } \forall x \leq \frac{5}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

Vậy tập nghiệm của PT là $x \leq \frac{5}{2}$

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{1-12x+36x^2}=5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-6x)^2}=5 \Leftrightarrow |1-6x|=5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-6x=5 \\ 1-6x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{2}{3}; 1 \right\}$

d) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$ ĐK: $x \geq 1$

Biến đổi biểu thức $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}=2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1|=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}+1=2 \\ \sqrt{x-1}+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{x-1}=-1 \text{ (PTVN)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2 \text{ (TM)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$

Bài 2.

a) Biến đổi biểu thức $\sqrt{2x+5}=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2x+5=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$

Vậy nghiệm của PT là $x = -\frac{4}{3}$

b) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2-x}=\sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2-x=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x=\sqrt{3} \text{ (TM)} \\ x=-\sqrt{3} \text{ (TM)} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\sqrt{3}; \sqrt{3} \right\}$

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{2x^2-3}=\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \geq 0 \\ 2x^2-3=4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ 2x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x=0 \text{ (k TM)} \\ x=2 \text{ (TM)} \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$

$$d) \sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (kTM)} \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

Bài 3.

$$a) \text{ Biến đổi biểu thức } \sqrt{x^2+x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$

$$b) \text{ Biến đổi biểu thức } \sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^2 + (x-1)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)[(x-1) + (x+1)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \text{ (kTM)} \Leftrightarrow x = 1 \\ x = 1 \text{ (TM)} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$

c) Biến đổi biểu thức

$$\sqrt{x^2-4x+3} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4x+3 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-4x+3 = x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0x = 1 \end{cases} \text{ (PTVN)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

$$d) \text{ Biến đổi biểu thức } \sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1 = (x^2-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ (x^2-1)[1-(x^2-1)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ (x^2-1)(2-x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-1=0 \\ 2-x^2=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=1 \\ x^2=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \text{ (TM)}$$

$$\Leftrightarrow x = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

$$a) \text{ Biến đổi biểu thức } \sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = x^2-1 \Leftrightarrow |x-1| = x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 1 = x^2 - 1 \\ x - 1 = -(x^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \\ x - 1 + (x - 1)(x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x(x - 1) = 0 \\ (x - 1)(x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x = 0 \text{ (KTM)} \\ x = 1 \text{ (TM)} \\ x = 1 \text{ (TM)} \\ x = -2 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 1\}$

b, Biến đổi biểu thức $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)^2} = x - 1 \Leftrightarrow |2x - 1| = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = x - 1 \\ 2x - 1 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (KTM)} \\ x = \frac{2}{3} \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)^2} = x - 1 \Leftrightarrow |x^2 - 1| = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 = x - 1 \\ x^2 - 1 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \\ (x^2 - 1) + (x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x - 1) = 0 \\ (x - 1)(x + 1) + (x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x - 1) = 0 \\ (x - 1)(x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (KTM)} \\ x = 1 \\ x = 1 \\ x = -2 \text{ (KTM)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x = 1$

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = x \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} = x \\ x + \frac{1}{2} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0x = -\frac{1}{2} \\ 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0x = -\frac{1}{2} \text{ (PTVN)} \\ x = -\frac{1}{4} \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) Biến đổi biểu thức $|3x+1| = |x+1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = x+1 \\ 3x+1 = -(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}$

b) Biến đổi biểu thức $|x^2-3| = |x-\sqrt{3}| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 = x-\sqrt{3} \\ x^2-3 = -(x-\sqrt{3}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) - (x-\sqrt{3}) = 0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) + (x-\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}-1) = 0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3} = 0 \\ x+\sqrt{3}-1 = 0 \\ x-\sqrt{3} = 0 \\ x+\sqrt{3}+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = 1-\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \\ x = -1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{9x^2-12x+4} = \sqrt{x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x-2)^2} = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow |3x-2| = |x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 = x \\ 3x-2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 4x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) = 0 \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -2$

Bài 5. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2 + 9}} + \sqrt{x^2} - 7 = 0$;

b) $\sqrt{2x+4} - 6\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x-4} + 2\sqrt{2x-5} = 4$.

Lời giải

a) $\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2 + 9}} + \sqrt{x^2} - 7 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(|x|-3)^2} + |x| - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow ||x| - 3| + |x| - 7 = 0$$

Trường hợp 1: Xét $|x| \geq 3$ phương trình có dạng:

$$|x| - 3 + |x| - 7 = 0 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow x = \pm 5.$$

Trường hợp 2: Xét $0 \leq x < 3$ phương trình có nghiệm: $3 - |x| + |x| - 7 = 0$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-5; 5\}$.

b) $\sqrt{2x+4} - 6\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x-4} + 2\sqrt{2x-5} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5} - 6\sqrt{2x-5} + 9 + \sqrt{2x-5} + 2\sqrt{2x-5} + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x-5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5}+1)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2x-5}-3| + \sqrt{2x-5}+1 = 4$$

Ta có: $|\sqrt{2x-5}-3| = |3-\sqrt{2x-5}| \geq 3-\sqrt{2x-5}$

Vậy về trái $\geq 3-\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x-5} + 1 = 4$.

Do vậy về trái bằng về phải khi:

$$\sqrt{2x-5} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq 2x-5 \leq 9 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 7.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ x / \frac{5}{2} \leq x \leq 7 \right\}$.

Dạng 6. Nâng cao

Bài 1: Rút gọn biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$; b) $B = a+1 - \sqrt{a^2-2a+1}$ với $a < 1$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

a) $A = 3 + \sqrt{2x^2 - 8x + 33}$; b) $B = \sqrt{x^2 - 8x + 18} - 1$;

c) $C = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 10} + 2y^2 - 8y + 2020$.

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = \sqrt{x^2 - 12x + 36} + \sqrt{x^2 - 16x + 64} \quad \text{b) } B = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-9)^2} + \sqrt{(x-1945)^2}.$$

Bài 4. Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab + bc + ca = 2020$. Chứng minh rằng biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{(a^2 + 2020)(b^2 + 2020)}{c^2 + 2020}}$$
 là một số hữu tỉ.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^4 + 8b^2} + \sqrt{b^4 + 8a^2} = 6 \quad (1)$$

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = \sqrt{(x-2019)^2} + \sqrt{(x-2020)^2};$$

$$\text{b) } B = \sqrt{(x-2018)^2} + \sqrt{(y-2019)^2} + \sqrt{(x-2020)^2};$$

$$\text{c) } C = \sqrt{(x-2017)^2} + \sqrt{(x-2018)^2} + \sqrt{(x-2019)^2} + \sqrt{(x-2020)^2}.$$

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}} + \sqrt{a+15-8\sqrt{a-1}}.$

Bài 8. Cho x, y thỏa mãn $0 < x < 1, 0 < y < 1$ và $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}.$$

Bài 9. Tính $\frac{x}{y}$ biết $x > 1; y < 0$ và $\frac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{(1-\sqrt{4x-1})^2}}{(1-\sqrt{4x-1})(x^2y^2+xy^3+y^4)} = -6$

Lời giải

Bài 1: Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}};$$

$$\text{b) } B = a+1-\sqrt{a^2-2a+1} \text{ với } a < 1$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$A = \sqrt{5+2\sqrt{5}+1} - \sqrt{5-2\sqrt{5}+1}$$

$$A = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$A = (\sqrt{5}+1) - (\sqrt{5}-1) = 2.$$

$$\text{b) } B = a+1-\sqrt{a^2-2a+1} \text{ với } a < 1$$

$$B = a+1-\sqrt{(a-1)^2}$$

$$B = a+1-|a-1| = a+1-(1-a) = 2a.$$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$\text{a) } A = 3 + \sqrt{2x^2 - 8x + 33};$$

$$\text{b) } B = \sqrt{x^2 - 8x + 18} - 1;$$

$$\text{c) } C = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 10} + 2y^2 - 8y + 2020.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = 3 + \sqrt{2x^2 - 8x + 33} = 3 + \sqrt{2(x-2)^2 + 25} \geq 3 + \sqrt{25} = 8.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 8 khi $x = 2$.

b) Ta có: $B = \sqrt{x^2 - 8x + 18} - 1 = \sqrt{(x-4)^2 + 2} - 1 \geq \sqrt{2} - 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là $\sqrt{2} - 1$ khi $x = 4$.

c) Ta có: $C = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 10} + 2y^2 - 8y + 2020$

$$\Rightarrow C = \sqrt{(x-y+1)^2 + 9} + 2(y-2)^2 + 2012$$

$$\Rightarrow C \geq \sqrt{9} + 2012 = 2015.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là 2015.

Khi $\begin{cases} x-y+1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = \sqrt{x^2 - 12x + 36} + \sqrt{x^2 - 16x + 64}$

b) $B = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-9)^2} + \sqrt{(x-1945)^2}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \sqrt{x^2 - 12x + 36} + \sqrt{x^2 - 16x + 64} = \sqrt{(x-6)^2} + \sqrt{(x-8)^2}$$

$$A = |x-6| + |x-8| = |x-6| + |8-x| \geq |x-6+8-x| = 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $(x-6)(8-x) \geq 0$ hay $6 \leq x \leq 8$.

b) Ta có:

$$B = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-9)^2} + \sqrt{(x-1945)^2}$$

$$B = |x-2| + |x-9| + |x-1945|$$

$$B = |x-2| + |1945-x| + |x-9| \geq |x-2+1945-x| + 0 = 1943.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 1943 khi $(x-2)(1945-x) \geq 0$ và $x-9=0$ tức là $x=9$.

Bài 4. Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=2020$. Chứng minh rằng biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{(a^2+2020)(b^2+2020)}{c^2+2020}}$$
 là một số hữu tỉ.

Lời giải

• Ta có: $a^2 + 2020 = a^2 + ab + bc + ca$

$$\Rightarrow a^2 + 2020 = (a+b)(a+c) \quad (1)$$

• Tương tự, ta có: $b^2 + 2020 = (b+a)(b+c) \quad (2)$

$$c^2 + 2020 = (c+a)(c+b) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $A = \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)}{(c+a)(c+b)}} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$

$$\Rightarrow A = |a+b|.$$

Vì a, b là các số hữu tỉ nên $a+b$ cũng là số hữu tỉ. Vậy A là một số hữu tỉ.

Lưu ý: Các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa của các số hữu tỉ có kết quả cũng là một số hữu tỉ.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$

Chứng minh rằng: $\sqrt{a^4 + 8b^2} + \sqrt{b^4 + 8a^2} = 6$ (1)

Lời giải

Cách 1. Thay $a^2 + b^2 = 2$ vào (1) ta có:

$$\begin{aligned} \text{Vế trái: } & \sqrt{a^4 + 4b^2(a^2 + b^2)} + \sqrt{b^4 + 4a^2(a^2 + b^2)} \\ &= \sqrt{a^4 + 4a^2b^2 + 4b^2} + \sqrt{b^4 + 4a^2b^2 + 4a^4} \\ &= \sqrt{(a^2 + 2b^2)^2} + \sqrt{(b^2 + 2a^2)^2} = a^2 + 2b^2 + b^2 + 2a^2 \\ &= 3(a^2 + b^2) = 3 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải. Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Từ giả thiết suy ra: $b^2 = 2 - a^2$; $a^2 = 2 - b^2$ thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^4 + 8(2 - a^2)} + \sqrt{b^4 + 8(2 - b^2)} = \sqrt{(a^2 - 4)^2} + \sqrt{(b^2 - 4)^2} \\ &= |a^2 - 4| + |b^2 - 4| \quad (\text{do } a^2 < 4; b^2 < 4) \\ &= 4 - a^2 + 4 - b^2 = 6. \text{ Vế trái bằng vế phải. Suy ra điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{(x - 2019)^2} + \sqrt{(x - 2020)^2}; \\ \text{b) } B &= \sqrt{(x - 2018)^2} + \sqrt{(y - 2019)^2} + \sqrt{(x - 2020)^2}; \\ \text{c) } C &= \sqrt{(x - 2017)^2} + \sqrt{(x - 2018)^2} + \sqrt{(x - 2019)^2} + \sqrt{(x - 2020)^2}. \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= |x - 2019| + |x - 2020| \\ &= |x - 2019| + |2020 - x| \geq x - 2019 + 2020 - x = 1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1 khi $x - 2019 \geq 0$ và $2020 - x \geq 0$ hay $2019 \leq x \leq 2020$.

b) Giá trị nhỏ nhất của B là 2 khi $2018 \leq x \leq 2020$ và $y = 2019$.

c) Giá trị nhỏ nhất của C là 4 khi $2018 \leq x \leq 2019$.

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \sqrt{a + 3 - 4\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a + 15 - 8\sqrt{a - 1}}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{a - 1 - 4\sqrt{a - 1} + 4} + \sqrt{a - 1 - 8\sqrt{a - 1} + 16} \\ \Leftrightarrow A &= \sqrt{(\sqrt{a - 1} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a - 1} - 4)^2} \\ \Rightarrow A &= |\sqrt{a - 1} - 2| + |4 - \sqrt{a - 1}| \geq \sqrt{a - 1} - 2 + 4 - \sqrt{a - 1} \\ \Rightarrow A &\geq 2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $2 \leq \sqrt{a - 1} \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq a - 1 \leq 16$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $5 \leq a \leq 17$.

Bài 8. Cho x, y thỏa mãn $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ và $\frac{x}{1 - x} + \frac{y}{1 - y} = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.

Lời giải

Từ giả thiết, suy ra: $x(1-y) + y(1-x) = (1-x)(1-y)$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 1 = 3xy \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2$$

$$\text{Vậy } P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2} = x + y + |x + y - 1|$$

Từ giả thiết, ta lại có: $\frac{x}{1-x} < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

Tương tự ta có: $y < \frac{1}{2}$. Suy ra $0 < x + y < 1$, ta có $P = x + y + 1 - x - y = 1$.

Bài 9. Tính $\frac{x}{y}$ biết $x > 1; y < 0$ và $\frac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{(1-\sqrt{4x-1})^2}}{(1-\sqrt{4x-1})(x^2y^2+xy^3+y^4)} = -6$

Lời giải

Ta có: Với $x > 1 \Rightarrow 4x > 4 \Rightarrow 4x-1 > 3 \Rightarrow \sqrt{4x-1} > \sqrt{3}$

$$\text{Do đó } \sqrt{(1-\sqrt{4x-1})^2} = \sqrt{4x-1} - 1$$

$$\text{Từ đó } \frac{(x+y)(x^3-y^3)(\sqrt{4x-1}-1)}{(1-\sqrt{4x-1})(x^2y^2+xy^3+y^4)} = -6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x^3-y^3)}{x^2y^2+xy^3+y^4} = 6 \Leftrightarrow \frac{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y^2(x^2+xy+y^2)} = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 6y^2 \Leftrightarrow x^2 = 7y^2 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{y} \right| = \sqrt{7}$$

Mà $x > 1; y < 0$ nên $\frac{x}{y} = -\sqrt{7}$.

II. TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẦN XẠ

Câu 1. Cho số thực $a > 0$. Số nào sau đây là căn bậc hai số học của a ?

- A. $\sqrt{a}$. B. $-\sqrt{a}$. C. $\sqrt{2a}$. D. $2\sqrt{a}$.

Câu 2. Số nào sau đây là căn bậc hai số học của số $a = 0,36$?

- A. $-0,6$. B. $0,6$. C. $0,9$. D. $-0,18$.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\sqrt{A^2} = A$ khi $A \geq 0$. B. $\sqrt{A^2} = -A$ khi $A < 0$.
C. $\sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow 0 \leq A < B$. D. $A > B \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{A} < \sqrt{B}$.

Câu 3. Biểu thức $\sqrt{10 + 100x}$ có nghĩa khi

- A. $x < 10$. B. $x \geq -\frac{1}{10}$. C. $x \geq \frac{1}{10}$. D. $x \geq 10$.

Câu 4. So sánh hai số 5 và $\sqrt{50} - 2$

- A. $5 > \sqrt{50} - 2$. B. $5 = \sqrt{50} - 2$. C. $5 < \sqrt{50} - 2$. D. Chưa đủ điều kiện so sánh.

Câu 5. Tìm các số x không âm thỏa mãn $\sqrt{5x} < 10$

- A. $0 \leq x < 20$. B. $x < 20$. C. $x > 0$. D. $x < 2$.

Câu 6. Tìm giá trị biểu thức $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$.

- A. 3. B. 1. C. $2\sqrt{3}$. D. 2.

Câu 8. Tính giá trị biểu thức $9\sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2} + \sqrt{(-0,8)^2}$.

- A. 24,64. B. 32. C. -24,8. D. 24,8.

Câu 9. Tính giá trị biểu thức $6\sqrt{(-2,5)^2} - 8\sqrt{(-0,5)^2}$.

- A. 15. B. -11. C. 11. D. -13.

Câu 10. Tìm điều kiện xác định của $\sqrt{125 - 5x}$

- A. $x \leq 15$. B. $x \geq 25$. C. $x \leq 25$. D. $x \geq 0$.

Câu 11. Tìm điều kiện xác định của $\sqrt{5 - 3x}$

- A. $x \leq \frac{5}{3}$. B. $x \geq \frac{5}{3}$. C. $x \geq \frac{3}{5}$. D. $x \leq \frac{3}{5}$.

Câu 12. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{144a^2} - 9a$ với $a > 0$.

- A. $-9a$. B. $-3a$. C. $3a$. D. $9a$.

Câu 13. Tìm x để $\sqrt{\frac{(-5)^2}{6 - 3x}}$ có nghĩa

- A. $x < 2$. B. $x > 2$. C. $x \leq 2$. D. $x \geq 2$.

Câu 14. Tìm x để $\sqrt{\frac{-2}{3x - 1}}$ có nghĩa

- A. $x < \frac{1}{3}$. B. $x \leq \frac{1}{3}$. C. $x \geq \frac{1}{3}$. D. $x > \frac{1}{3}$.

Câu 15. Giá trị của biểu thức $\frac{2}{5}\sqrt{25} - \frac{9}{2}\sqrt{\frac{16}{81}} + \sqrt{169}$ là:

- A. 12. B. 13. C. 14. D. 15.

Câu 16. Tìm giá trị của x không âm biết $2\sqrt{x} - 30 = 0$.

- A. $x = -15$. B. $x = 225$. C. $x = 25$. D. $x = 15$.

Câu 17. Tìm giá trị của x không âm biết $5\sqrt{2x} - 125 = 0$

- A. $x = \frac{25}{2}$. B. $x = 125$. C. $x = 25$. D. $x = \frac{625}{2}$.

Câu 18. Tính giá trị biểu thức $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}} + \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$.

- A. $2\sqrt{3}$. B. $8 + 2\sqrt{3}$. C. 6. D. 8.

Câu 19. Tính giá trị biểu thức $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} - \sqrt{15 - 6\sqrt{6}}$

- A. $2\sqrt{6}$. B. $\sqrt{6}$. C. 6. D. 12.

Câu 20. Rút gọn biểu thức $\sqrt{a^2 + 8a + 16} + \sqrt{a^2 - 8a + 16}$ với $-4 \leq a \leq 4$ ta được:

- A. $2a$. B. 8. C. -8 . D. a .

Câu 21. Rút gọn biểu thức $\sqrt{4a^2 + 12a + 9} + \sqrt{4a^2 - 12a + 9}$ với $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ ta được:

- A. $-4a$. B. $4a$. C. -6 . D. 6.

Câu 22. Tìm x thỏa mãn phương trình $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$.

- A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Câu 24. Tìm x thỏa mãn phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 4}$.

- A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = 1$. D. $x = 1; x = 2$.

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 + 2} = 3x - 1$ là:

- A. $x = 2$. B. $x = 5$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 3 - 4x$ là:

- A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 4 - x$ là:

- A. $x = 2$. B. $x = \frac{1}{4}$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = 3$.

Câu 27. Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{-5 - x}$ với $x < -5$ ta được:

- A. -1 . B. 1. C. 2. D. -2 .

Câu 28. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $4(x - y)\sqrt{\frac{3}{x - y}} = 4\sqrt{3(x - y)}$ với mọi $x > y > 0$.

B. $\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} = \frac{\sqrt{1 + a}}{a}$ với mọi $a > 0$.

C. $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{12}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{3}.$

D. $\sqrt{\frac{1}{500}} = \frac{\sqrt{5}}{50}.$

Câu 29. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \sqrt{4a^2 - 4a + 1} + \sqrt{4a^2 - 12a + 9}$$

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 10.

Câu 30. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{m^2 + 2m + 1} + \sqrt{m^2 - 8m + 16}$$

A. 2.

B. 9.

C. 5.

D. 10.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án A.

Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a .

Câu 2. Đáp án B.

Căn bậc hai số học của $a = 0,36$ là $\sqrt{0,36} = 0,6$.

Câu 3. Đáp án D.

- Với hai số a, b không âm ta $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ nên C đúng.

- Với hai số a, b không âm ta có $a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ nên D sai.

- Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0 \end{cases}$ nên A, B đúng.

Câu 3. Đáp án B.

Ta có: $\sqrt{10 + 100x}$ có nghĩa khi $10 + 100x \geq 0 \Leftrightarrow 100x \geq -10 \Leftrightarrow x \geq -110$.

Câu 4. Đáp án C.

Tách $5 = 7 - 2 = \sqrt{49} - 2$

Vì $49 < 50 \Leftrightarrow \sqrt{49} < \sqrt{50} \Leftrightarrow 7 < \sqrt{50} \Leftrightarrow 7 - 2 < \sqrt{50} - 2 \Leftrightarrow 5 < \sqrt{50} - 2$. **Câu 5. Đáp án A.**

Điều kiện: $5x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Vì $10 = \sqrt{100}$ nên $\sqrt{5x} < 10 \Leftrightarrow \sqrt{5x} < \sqrt{100} \Leftrightarrow 5x < 100 \Leftrightarrow x < 20$

Kết hợp điều kiện $x \geq 0$ ta có $0 \leq x < 20$

Vậy $0 \leq x < 20$.

Câu 6. Đáp án B.

$\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}|$ mà $2 = \sqrt{4} > \sqrt{3}$ (vì $4 > 3$) nên $2 - \sqrt{3} > 0$.

Từ đó $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$.

Ta có $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}|$ mà $1 = \sqrt{1} < \sqrt{3}$ (vì $1 < 3$) nên $1 - \sqrt{3} < 0$. Từ đó

$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$.

Nên $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1$.

Câu 8. Đáp án D.

Ta có: $\sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2} = \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3}$ và $\sqrt{(-0,8)^2} = |-0,8| = 0,8$

Nên $9\sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2} + \sqrt{(-0,8)^2} = 9 \cdot \frac{8}{3} + 0,8 = 24 + 0,8 = 24,8$.

Câu 9. Đáp án C.

Ta có $\sqrt{(-2,5)^2} = |-2,5| = 2,5$ và $\sqrt{(-0,5)^2} = |-0,5| = 0,5$

Nên $6\sqrt{(-2,5)^2} - 8\sqrt{(-0,5)^2} = 6.2,5 - 8.0,5 = 15 - 4 = 11$.

Câu 10. Đáp án C.

Ta có: $\sqrt{125 - 5x}$ có nghĩa khi $125 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow 5x \leq 125 \Leftrightarrow x \leq 25$.

Câu 11. Đáp án A.

Ta có $\sqrt{5 - 3x}$ có nghĩa khi $5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$.

Câu 12. Đáp án C.

Ta có: $\sqrt{144a^2} = \sqrt{(12a)^2} = |12a|$ mà $a > 0 \Rightarrow 12a > 0$ nên $|12a| = 12a$ hay $\sqrt{144a^2} = 12a$

Từ đó: $A = \sqrt{144a^2} - 9a = 12a - 9a = 3a$.

Câu 13. Đáp án A.

Ta có: $\sqrt{\frac{(-5)^2}{6 - 3x}}$ có nghĩa khi $\frac{(-5)^2}{6 - 3x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{25}{6 - 3x} \geq 0$ mà $25 > 0$

$\Rightarrow 6 - 3x > 0 \Leftrightarrow 6 > 3x \Leftrightarrow x < 2$.

Câu 14. Đáp án A.

Ta có $\sqrt{\frac{-2}{3x - 1}}$ có nghĩa khi $\frac{-2}{3x - 1} \geq 0$ mà $-2 < 0 \Rightarrow 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

Câu 15. Đáp án B.

Ta có: $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5$; $\sqrt{\frac{16}{81}} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \left|\frac{4}{9}\right| = \frac{4}{9}$

$\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = |13| = 13$

Nên $\frac{2}{5}\sqrt{25} - \frac{9}{2}\sqrt{\frac{16}{81}} + \sqrt{169} = \frac{2}{5}.5 - \frac{9}{2}.\frac{4}{9} + 13 = 2 - 2 + 13 = 13$.

Câu 16. Đáp án B.

Với x không âm ta có $2\sqrt{x} - 30 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 30$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 15$ mà $15 > 0$ nên $\sqrt{x} = 15 \Leftrightarrow x = 15^2 \Leftrightarrow x = 225$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 225$.

Câu 17. Đáp án D.

Điều kiện: $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Ta có: $5\sqrt{2x} - 125 = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{2x} = 125 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = 25$ mà $25 > 0$ nên

$\sqrt{2x} = 25 \Leftrightarrow 2x = 25^2 \Leftrightarrow 2x = 625 \Leftrightarrow x = \frac{625}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $x = \frac{625}{2}$.

Câu 18. Đáp án D.

Ta có: $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{4^2 + 2.4.\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(4 + \sqrt{3})^2} = |4 + \sqrt{3}| = 4 + \sqrt{3}$ Và

$$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{4^2 - 2.4.\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = |4 - \sqrt{3}| = 4 - \sqrt{3}$$

(vì $4 = \sqrt{16} > \sqrt{3} \Rightarrow 4 - \sqrt{3} > 0$)

Nên $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}} + \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = 4 + \sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} = 8$.

Câu 19. Đáp án A.

Ta có $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} = \sqrt{3^2 + 2.3.\sqrt{6} + 6} = \sqrt{(3 + \sqrt{6})^2} = |3 + \sqrt{6}| = 3 + \sqrt{6}$

$$\text{Và } \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{3^2 - 2.3.\sqrt{6} + 6} = \sqrt{(3 - \sqrt{6})^2} = |3 - \sqrt{6}| = 3 - \sqrt{6}$$

(vì $3 = \sqrt{9} > \sqrt{6} \Rightarrow 3 - \sqrt{6} > 0$)

Nên $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} - \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = 3 + \sqrt{6} - (3 - \sqrt{6}) = 3 + \sqrt{6} - 3 + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Câu 20. Đáp án B.

Ta có $\sqrt{a^2 + 8a + 16} = \sqrt{(a + 4)^2} = |a + 4|$

Mà $-4 \leq a \leq 4 \Rightarrow a + 4 \geq 0 \Rightarrow |a + 4| = a + 4$

Hay $\sqrt{a^2 + 8a + 16} = a + 4$ với $-4 \leq a \leq 4$

Ta có $\sqrt{a^2 - 8a + 16} = \sqrt{(a - 4)^2}$

Mà $-4 \leq a \leq 4 \Rightarrow a - 4 \leq 0 \Rightarrow |a - 4| = 4 - a$

Hay $\sqrt{a^2 - 8a + 16} = 4 - a$ với $-4 \leq a \leq 4$

Khi đó $\sqrt{a^2 + 8a + 16} + \sqrt{a^2 - 8a + 16} = a + 4 + 4 - a = 8$.

Câu 21. Đáp án D.

Ta có: $\sqrt{4a^2 + 12a + 9} = \sqrt{(2a)^2 + 2.3.2a + 3^2} = \sqrt{(2a + 3)^2} = |2a + 3|$

Mà $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -3 \leq 2a \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3 \geq 0 \Rightarrow |2a + 3| = 2a + 3 \\ 2a - 3 \leq 0 \Rightarrow |2a - 3| = 3 - 2a \end{cases}$

Hay: $\sqrt{4a^2 + 12a + 9} = 2a + 3$ và $\sqrt{4a^2 - 12a + 9} = 3 - 2a$ với $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ Khi

đó: $\sqrt{4a^2 + 12a + 9} + \sqrt{4a^2 - 12a + 9} = 2a + 3 + 3 - 2a = 6$.

Câu 22. Đáp án D.

ĐK: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Với điều kiện trên, ta có $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) + (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(N) \\ x = -1(L) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

Câu 24. Đáp án A.

ĐK: $3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$ Với điều kiện trên, ta có: $\sqrt{2x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 4}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 3x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(L) \\ x = 2(N) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Câu 24. Đáp án C.

ĐK: $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

Với điều kiện trên ta có:

$$\sqrt{2x^2 + 2} = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = (3x - 1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 7x(x - 1) + (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{7}(L) \\ x = 1(N) \end{cases}$$

Câu 25. Đáp án D.

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 3 - 4x \Leftrightarrow \sqrt{(2x + 1)^2} = 3 - 4x$$

$$\Leftrightarrow |2x + 1| = 3 - 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 - 4x \\ 2x + 1 = 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2 \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1}{3}; x = 2$.

Câu 26. Đáp án C.

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 4 - x \Leftrightarrow \sqrt{(x + 3)^2} = 4 - x$$

$$\Leftrightarrow |x + 3| = 4 - x \text{ ĐK : } x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 4 - x \\ x + 3 = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(TM) \\ 3 = -4(L) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Câu 27. Đáp án B.

Ta có: $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = \sqrt{(x + 5)^2} = |x + 5| = -(x + 5) \text{ (vì } x < -5).$

Nên $\frac{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{-5 - x} = \frac{-(x + 5)}{-(x + 5)} = 1.$

Câu 28. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $4(x - y)\sqrt{\frac{3}{x - y}} = 4\sqrt{3(x - y)}$ với mọi $x > y > 0.$

B. $\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} = \frac{\sqrt{1 + a}}{a}$ với mọi $a > 0.$

C. $\sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{12}} = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3}.$

D. $\sqrt{\frac{1}{500}} = \frac{\sqrt{5}}{50}.$

Chọn C

Ta có $\sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{12}} = \frac{|1 - \sqrt{3}|}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \neq \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3}.$

Câu 29. Đáp án A.

Ta có $B = \sqrt{4a^2 - 4a + 1} + \sqrt{4a^2 - 12a + 9}$

$= \sqrt{(2a - 1)^2} + \sqrt{(2a - 3)^2} = |2a - 1| + |2a - 3|$

Ta có $|2a - 1| + |2a - 3| = |2a - 1| + |3 - 2a| \geq |2a - 1 + 3 - 2a| = 2$

Dấu “=” xảy ra khi $2a - 1 = 3 - 2a \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$

Suy ra GTNN của B là $2 \Leftrightarrow a = 1.$

Câu 30. Đáp án C.

Ta có $A = \sqrt{m^2 + 2m + 1} + \sqrt{m^2 - 8m + 16}$

$= \sqrt{(m + 1)^2} + \sqrt{(m - 4)^2} = |m + 1| + |m - 4|.$

Ta có $|m + 1| + |m - 4| = |m + 1| + |4 - m| \geq |m + 1 + 4 - m| = 5$

Dấu “=” xảy ra khi $m + 1 = 4 - m \Leftrightarrow 2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Suy ra GTNN của B là $5 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$

III. TỰ LUYỆN

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai

Bài 1: Tính

a. $\sqrt{\frac{64}{25}}$

b. $\sqrt{(2,5)^2}$

c. $\sqrt{(-2)^2}$

d. $\sqrt{-\left(\frac{-36}{169}\right)}$

Bài 2: Tính

a. $\sqrt{196} \cdot \sqrt{25} - 5\sqrt{81}$

b. $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} - \sqrt{10}$

c. $\sqrt{(5 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$

d. $(81 : \sqrt{9} + \sqrt{169}) \cdot \sqrt{225}$

Bài 3: Thực hiện các phép tính sau:

a. $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

b. $\sqrt{49 - 12\sqrt{5}} + \sqrt{49 + 12\sqrt{5}}$

c. $\sqrt{31 - 12\sqrt{3}} - \sqrt{31 + 12\sqrt{3}}$

d. $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}} + \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$

Bài 4: Tính

1) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$

2) $2\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + 3\sqrt{6} - \sqrt{150}$

3) $2\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{175} + \sqrt{112}$

4) $10\sqrt{28} + 2\sqrt{175} - 3\sqrt{343} - \frac{3}{2}\sqrt{448}$

5) $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$ 6) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - 2$

7) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$

Bài 5: Tính:

1) $(2\sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{5} + \sqrt{7})$

2) $2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}}$

3) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$ 4)

$\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 4}$

5) $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}}$

Bài 6: Tính:

1) $(\sqrt{3} + 4)\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$

2) $\sqrt{17 - 3\sqrt{32}} + \sqrt{17 + 3\sqrt{32}}$

3) $(5 + 4\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{1 + \sqrt{2}})(3 - 2\sqrt{1 + \sqrt{2}})$

4) $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{2})\sqrt{3}$

5) $2 + \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$

6) $\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}$

7) $\sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$

Bài 7: Tính:

1) $\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \sqrt{175} - \frac{6\sqrt{2} - 4}{3 - \sqrt{2}}$

3) $\sqrt{\sqrt{7 + \sqrt{48}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

4) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

5) $\frac{(5 + 2\sqrt{6})(49 - 20\sqrt{6})\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$

$$6) \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$7) \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24} + \sqrt{25}}$$

Dạng 2: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn bậc hai có nghĩa

Bài 1: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a. $\sqrt{\frac{15}{x-2}}$ b. $\sqrt{\frac{-17}{12-x}}$ c. $\sqrt{72x}$ d. $\sqrt{24+10x}$ e. $\sqrt{\frac{-13}{3x}}$ f. $\sqrt{27-6x}$

Bài 2: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a. $\sqrt{x^2+11}$ b. $\sqrt{x^2+5x+6}$ c. $\sqrt{\frac{10-3x}{3x^2+1}}$ d. $\sqrt{\frac{4x+2}{x^2+4x+5}}$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a. $\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$ b. $\sqrt{(\sqrt{11}+3)^2}$ c. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ d. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a. $-2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$ b. $\sqrt{16a^2} + 4a$ với $a < 0$
c. $\sqrt{(a-1)^2}$ với $a \geq 1$ d. $\sqrt{9a^2-6a+1} + 3a$ với $a < \frac{1}{3}$
e. $\sqrt{a^2+6a+9}$ với $a \geq -3$ f. $\sqrt{25a^4-3a^2}$

Dạng 4: So sánh

Bài 1. So sánh

a. 5 và $\sqrt{17}+1$. b. 3 và $\sqrt{15}-1$.

Bài 2. Tìm giá trị của x biết

a. $\sqrt{-x+1} \geq 6$. b. $\sqrt{2x} \leq \sqrt{x^2}$.

Bài 3: So sánh A và B :

a) $A = \sqrt{2013} + \sqrt{2015}$; $B = 2\sqrt{2014}$.
b) $A = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$; $B = \sqrt{12} + \sqrt{11}$.
c) $A = \frac{1}{\sqrt{1.2014}} + \frac{1}{\sqrt{2.2013}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2014.1}}$; $B = \frac{4028}{2015}$.

Dạng 4: Phân tích đa thức thành nhân tử

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

a. $x^2 - 7$ b. $4x^2 - 3$
c. $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7$ d. $9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử

a. $x^2 - 3$ b. $9x^2 - 5$
c. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ d. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3$

Dạng 5: Giải phương trình

Bài 1: Giải phương trình

a. $\sqrt{x^2} = 3$

b. $\sqrt{9x^2} = 10$

c. $\sqrt{4x^2} - 19 = 0$

d. $\sqrt{49x^2} = |-14|$

Bài 2: Giải phương trình

a. $\sqrt{(x+2)^2} = 2$

b. $\sqrt{4-4x+x^2} = 3$

c. $\sqrt{x^2-4x+4} = 3+x$

d. $\sqrt{9x^2+6x+1} = x-1$

e. $x^2 + 2\sqrt{3x+3} = 0$

f. $x - 4\sqrt{x} + 4 = 0$

Bài 3: Giải phương trình:

1) $\sqrt{x^2+9} = 5$

2) $\sqrt{4x^2-20x+25} = 1$

3) $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} = 2$

4) $\sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{x-2}$

5) $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{3-x}$

6) $\sqrt{x-1}+1 = x$

7) $\sqrt{25x^2-30x+9} = x+7$

8) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 5$

9) $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x-2} = 0$

10) $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2+4x+4}$

11) $\sqrt{25x-50} - \frac{\sqrt{x-2}+1}{2} = 8\sqrt{\frac{9x-18}{16}}$

12) $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{7+x+6\sqrt{x-2}} = 2$

HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai

Bài 1: Tính

a. $\sqrt{\frac{64}{25}}$

b. $\sqrt{(2,5)^2}$

c. $\sqrt{(-2)^2}$

d. $\sqrt{-\left(\frac{-36}{169}\right)}$

Lời giải

a. $\sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$

b. $\sqrt{(2,5)^2} = 2,5$

c. $\sqrt{(-2)^2} = 2$

d. $\sqrt{-\left(\frac{-36}{169}\right)} = \frac{6}{13}$

Bài 2: Tính

a. $\sqrt{196} \cdot \sqrt{25} - 5\sqrt{81}$

b. $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} - \sqrt{10}$

c. $\sqrt{(5 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$

d. $(81 : \sqrt{9} + \sqrt{169}) \cdot \sqrt{225}$

Lời giải

a. $\sqrt{196} \cdot \sqrt{25} - 5\sqrt{81}$
 $= 13 \cdot 5 - 5 \cdot 9$
 $= 65 - 45$
 $= 20$

b. $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} - \sqrt{10}$
 $= |\sqrt{10} - 3| - \sqrt{10}$
 $= \sqrt{10} - 3 - \sqrt{10}$
 $= -3$

c. $\sqrt{(5 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$
 $= |5 + \sqrt{7}| - \sqrt{(1 - \sqrt{7})^2}$
 $= 5 + \sqrt{7} - |1 - \sqrt{7}|$
 $= 5 + \sqrt{7} + 1 - \sqrt{7}$
 $= 6$

d. $(81 : \sqrt{9} + \sqrt{169}) \cdot \sqrt{225}$
 $= (81 : 3 + 13) \cdot 15$
 $= 30 \cdot 15$
 $= 450$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a. $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

b. $\sqrt{49 - 12\sqrt{5}} + \sqrt{49 + 12\sqrt{5}}$

c. $\sqrt{31 - 12\sqrt{3}} - \sqrt{31 + 12\sqrt{3}}$

d. $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}} + \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$

Lời giải

$$a. \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$= |\sqrt{3}+\sqrt{2}| - |\sqrt{3}-\sqrt{2}|$$

$$= \sqrt{3}+\sqrt{2} - \sqrt{3}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$c. \sqrt{31-12\sqrt{3}} - \sqrt{31+12\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(3\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{(3\sqrt{3}+2)^2}$$

$$= -4.$$

$$b. \sqrt{49-12\sqrt{5}} + \sqrt{49+12\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{(3\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(3\sqrt{5}+2)^2}$$

$$= |3\sqrt{5}-2| + |3\sqrt{5}+2|$$

$$= 6\sqrt{5}.$$

$$d. \sqrt{21+12\sqrt{3}} + \sqrt{21-12\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3}+3)^2} + \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}$$

$$= 4\sqrt{3}.$$

Bài 4: Tính

$$1) 3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$$

$$2) 2\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + 3\sqrt{6} - \sqrt{150}$$

$$3) 2\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{175} + \sqrt{112}$$

$$4) 10\sqrt{28} + 2\sqrt{175} - 3\sqrt{343} - \frac{3}{2}\sqrt{448}$$

$$5) \sqrt{13-4\sqrt{3}}$$

$$6) \sqrt{7-4\sqrt{3}} - 2 \quad 7) \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}}$$

Lời giải

$$1) 3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50} = 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -6\sqrt{2}.$$

$$2) 2\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + 3\sqrt{6} - \sqrt{150} = 4\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = -4\sqrt{6}.$$

$$3) 2\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{175} + \sqrt{112} = 4\sqrt{7} + 6\sqrt{7} - 15\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = -\sqrt{7}$$

$$4) 10\sqrt{28} + 2\sqrt{175} - 3\sqrt{343} - \frac{3}{2}\sqrt{448} = 20\sqrt{7} + 10\sqrt{7} - 21\sqrt{7} - 12\sqrt{7} = -3\sqrt{7}.$$

$$5) \sqrt{13-4\sqrt{3}} = \sqrt{4-2.2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}.$$

$$6) \sqrt{7-4\sqrt{3}} - 2 = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - 2 = |\sqrt{3}-2| - 2 = 2-\sqrt{3}-2 = -\sqrt{3}.$$

$$7) \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}} = \sqrt{9-2.3.\sqrt{6}+6} + \sqrt{9-2.3.2\sqrt{6}+24} \\ = \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{6})^2} = 3-\sqrt{6} + 2\sqrt{6}-3 = \sqrt{6}$$

Bài 5: Tính:

$$1) (2\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{5}+\sqrt{7})$$

$$2) 2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}}$$

$$3) \frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}}$$

$$4) \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} - \frac{5-2\sqrt{6}}{2\sqrt{5}-4}$$

$$5) \frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$$

Lời giải

$$1) (2\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{5}+\sqrt{7}) = (2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2 = 20-7=13$$

$$2) 2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}} = 2\sqrt{\frac{4^2}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{3^2 \cdot 3}} - 6\sqrt{\frac{2^2}{5^2 \cdot 3}}$$

$$= 2 \cdot 4\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 6 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{3}} = \left(8 - \frac{3}{3} - \frac{12}{5}\right)\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{23\sqrt{3}}{15}.$$

$$3) \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 2} - \sqrt{5 \cdot 3}}{\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 3}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{5}}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$4) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{\sqrt{5 \cdot 3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 4}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{5} - 4)}{2\sqrt{5} - 4} - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{10 - 4\sqrt{5} - 5 + 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{5 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 4}$$

$$5) \frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{5} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{5} + 3\sqrt{3})} = \frac{-2(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})} - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Bài 6: Tính:

$$1) (\sqrt{3} + 4)\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$$

$$2) \sqrt{17 - 3\sqrt{32}} + \sqrt{17 + 3\sqrt{32}}$$

$$3) (5 + 4\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{1 + \sqrt{2}})(3 - 2\sqrt{1 + \sqrt{2}})$$

$$4) (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{2})\sqrt{3}$$

$$5) 2 + \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$$

$$6) \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}$$

$$7) \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$$

Lời giải

$$1) (\sqrt{3} + 4)\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 4)\sqrt{16 - 2 \cdot 4\sqrt{3} + 3} = (\sqrt{3} + 4)\sqrt{4^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}$$

$$= (\sqrt{3} + 4)\sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = (\sqrt{3} + 4)(4 - \sqrt{3}) = 16 - 3 = 13.$$

$$2) \sqrt{17 - 3\sqrt{32}} + \sqrt{17 + 3\sqrt{32}} = \sqrt{17 - 3 \cdot 4\sqrt{2}} + \sqrt{17 + 3 \cdot 4\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{17 - 2 \cdot 6\sqrt{2}} + \sqrt{17 + 2 \cdot 6\sqrt{2}} = \sqrt{9 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2} + \sqrt{9 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})^2} = 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6.$$

$$3) (5 + 4\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{1 + \sqrt{2}})(3 - 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}) = (5 + 4\sqrt{2})(3^2 - 4(1 + \sqrt{2}))$$

$$= (5 + 4\sqrt{2})(5 - 4\sqrt{2}) = 25 - 16 \cdot 2 = -7$$

$$4) (\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{2})\sqrt{3} = \sqrt{15-2.3\sqrt{6}} + \sqrt{6} = \sqrt{9-2.3\sqrt{6}+6} + \sqrt{6} \\ = \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{6} = 3-\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3.$$

$$5) 2 + \sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}} = 2 + \sqrt{17-4\sqrt{5+4\sqrt{5}+4}} = 2 + \sqrt{17-4\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}} \\ = 2 + \sqrt{17-4(\sqrt{5}+2)} = 2 + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = 2 + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} \\ = 2 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5}$$

$$6) \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \sqrt{16-2.4\sqrt{2}+2} = \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} \\ = \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}+4} = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$7) \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}} = \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}}}} \\ = \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}}} = \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10(2+\sqrt{3})}}} \\ = \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}} = \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{25-10\sqrt{3}+3}}} \\ = \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}} = \sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+25-5\sqrt{3}}} = \sqrt{4+5} = 3$$

Bài 7: Tính:

$$1) \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} \quad 2) \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} + \sqrt{175} - \frac{6\sqrt{2}-4}{3-\sqrt{2}} \\ 3) \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{48}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 4) \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}} \\ 5) \frac{(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} \quad 6) \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} \\ 7) \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$$

Lời giải

$$1) \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}} \\ = \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2}) - (\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + 4 - 3 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4 - 3 + 2\sqrt{2}}{1} = 2$$

$$\begin{aligned} 2) & \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \sqrt{175} - \frac{6\sqrt{2} - 4}{3 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{(\sqrt{8} - \sqrt{7})(\sqrt{8} + \sqrt{7})} + 5\sqrt{7} - \frac{2\sqrt{2} \cdot 3 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{8 - 7} + 5\sqrt{7} - \frac{2\sqrt{2}(3 - \sqrt{2})}{3 - \sqrt{2}} = \sqrt{8} - \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{7} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) & \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{48}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{7} + 4\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1) - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\ &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2) + (\sqrt{6} + \sqrt{8} + 2)}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2) + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2)}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) & \frac{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2}}{\frac{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2} - \frac{2\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{6}} + \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2 + \sqrt{6} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2 + \sqrt{6} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\frac{3\sqrt{3} \cdot (2 + \sqrt{6}) - 4 \cdot 3 + 3(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{3+\sqrt{6}-\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{4+2\sqrt{3}})} + \frac{4-2\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{4-2\sqrt{3}})} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4+2(\sqrt{3}+1)} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4-2(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{6+2\sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{6-2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}} \\ &= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1}+\sqrt{2})(\sqrt{1}-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{\sqrt{24}-\sqrt{25}}{(\sqrt{24}+\sqrt{25})(\sqrt{24}-\sqrt{25})} \\ &= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{24}-\sqrt{25}}{-1} \\ &= -(\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{24}-\sqrt{25}) = -(1-\sqrt{25}) = 4 \end{aligned}$$

Dạng 2: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn bậc hai có nghĩa

Bài 1: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a. $\sqrt{\frac{15}{x-2}}$

b. $\sqrt{\frac{-17}{12-x}}$

c. $\sqrt{72x}$

d. $\sqrt{24+10x}$

e. $\sqrt{\frac{-13}{3x}}$

f. $\sqrt{27-6x}$

Lời giải

a. $\sqrt{\frac{15}{x-2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x-2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq 2$

b. $\sqrt{\frac{-17}{12-x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 12-x \leq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq 12$

c. $\sqrt{72x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 72x \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq 0$

d. $\sqrt{24+10x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 24+10x \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{-12}{5}$

$$\begin{aligned} \text{e. } \sqrt{\frac{-13}{3x}} \text{ có nghĩa} &\Leftrightarrow \frac{-13}{3x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } \sqrt{27-6x} \text{ có nghĩa} &\Leftrightarrow 27-6x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{27}{6} \end{aligned}$$

Bài 2: Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

$$\text{a. } \sqrt{x^2+11}$$

$$\text{b. } \sqrt{x^2+5x+6}$$

$$\text{c. } \sqrt{\frac{10-3x}{3x^2+1}}$$

$$\text{d. } \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+4x+5}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a. } \sqrt{x^2+11} \text{ có nghĩa} &\Leftrightarrow x^2+11 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \sqrt{x^2+5x+6} \text{ có nghĩa} &\Leftrightarrow x^2+5x+6 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\text{c. } \sqrt{\frac{10-3x}{3x^2+1}} \text{ có nghĩa} \quad \frac{10-3x}{3x^2+1} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{vì } 3x^2+1 &\geq 1 \text{ nên } 10-3x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 10 \geq 3x \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\text{d. } \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+4x+5}} \text{ có nghĩa} \quad \frac{4x+2}{x^2+4x+5} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{vì } x^2+4x+5 &= (x+2)^2+1 \geq 1 \\ \text{nên } 4x+2 &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a. } \sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$$

$$\text{b. } \sqrt{(\sqrt{11}+3)^2}$$

$$\text{c. } \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$\text{d. } \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

Lời giải

$$\text{a. } \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = |3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$$

$$\text{b. } \sqrt{(\sqrt{11}+3)^2} = |\sqrt{11}+3| = \sqrt{11}+3$$

$$\text{c. } \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$$

$$\text{d. } \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a. } -2\sqrt{a^2} \text{ với } a \geq 0$$

$$\text{b. } \sqrt{16a^2}+4a \text{ với } a < 0$$

$$\text{c. } \sqrt{(a-1)^2} \text{ với } a \geq 1$$

$$\text{d. } \sqrt{9a^2-6a+1}+3a \text{ với } a < \frac{1}{3}$$

$$\text{e. } \sqrt{a^2+6a+9} \text{ với } a \geq -3$$

$$\text{f. } \sqrt{25a^4-3a^2}$$

Lời giải

$$a. -2\sqrt{a^2} \text{ với } a \geq 0$$

$$= -2|a| = -2a$$

$$c. \sqrt{(a-1)^2} \text{ với } a \geq 1$$

$$= |a-1| = a-1 (a \geq 1)$$

$$e. \sqrt{a^2 + 6a + 9} \text{ với } a \geq -3$$

$$= \sqrt{(a+3)^2} = |a+3| = a+3$$

$$b. \sqrt{16a^2} + 4a \text{ với } a < 0$$

$$= 4|a| + 4 = -4a + 4$$

$$d. \sqrt{9a^2 - 6a + 1} + 3a \text{ với } a < \frac{1}{3}$$

$$= \sqrt{(3a-1)^2} = |3a-1| = 1-3a \left(a < \frac{1}{3} \right)$$

$$f. \sqrt{25a^4} - 3a^2$$

$$= 5a^2 - 3a^2 = 2a^2$$

Dạng 4: So sánh

Bài 1. So sánh

$$a. 5 \text{ và } \sqrt{17} + 1.$$

$$b. 3 \text{ và } \sqrt{15} - 1.$$

Lời giải

$$a. \text{Ta có } \sqrt{16} + 1 < \sqrt{17} + 1$$

$$\Leftrightarrow 5 < \sqrt{17} + 1.$$

$$b. \text{Ta có } \sqrt{16} - 1 > \sqrt{15} - 1$$

$$\Leftrightarrow 3 > \sqrt{15} - 1.$$

Bài 2. Tìm giá trị của x biết

$$a. \sqrt{-x+1} \geq 6.$$

$$b. \sqrt{2x} \leq \sqrt{x^2}.$$

Lời giải

$$a. \text{Điều kiện } -x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1. \text{ Ta có}$$

$$-x+1 \geq 36 \Leftrightarrow x \leq -35 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$b. \text{Điều kiện } x \geq 0. \text{ Ta có}$$

$$2x \leq x^2 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có $x = 0$ hoặc $x \geq 2$.

Bài 3: So sánh A và B :

$$a) A = \sqrt{2013} + \sqrt{2015}; B = 2\sqrt{2014}.$$

$$b) A = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}; B = \sqrt{12} + \sqrt{11}.$$

$$c) A = \frac{1}{\sqrt{1.2014}} + \frac{1}{\sqrt{2.2013}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2014.1}}; B = \frac{4028}{2015}.$$

Lời giải

$$a) A = \sqrt{2013} + \sqrt{2015}; B = 2\sqrt{2014}.$$

Ta có:

$$\sqrt{2013} < \sqrt{2015}$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{2013} + \sqrt{2014} < \sqrt{2015} + \sqrt{2014}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2013} + \sqrt{2014}} > \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2014}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2014} - \sqrt{2013}}{(\sqrt{2014} + \sqrt{2013})(\sqrt{2014} - \sqrt{2013})} > \frac{\sqrt{2015} - \sqrt{2014}}{(\sqrt{2015} + \sqrt{2014})(\sqrt{2015} - \sqrt{2014})}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2014} - \sqrt{2013} > \sqrt{2015} - \sqrt{2014}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2014} > \sqrt{2015} + \sqrt{2013}$$

$$\Rightarrow B > A.$$

Cách khác :

$$\text{Ta có } A = \sqrt{2013} + \sqrt{2015} > 0 \Leftrightarrow A^2 = 4028 + 2\sqrt{2013 \cdot 2015} = 2 \cdot 2014 + 2\sqrt{2014^2 - 1}$$

$$A^2 < 2 \cdot 2014 + 2 \cdot 2014 = 4 \cdot 2014$$

$$B = 2\sqrt{2014} > 0 \Leftrightarrow B^2 = 4 \cdot 2014$$

$$\text{Suy ra } A^2 < B^2 \Leftrightarrow A < B \text{ (do } A, B > 0)$$

$$\text{b) So sánh } A = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}; B = \sqrt{12} + \sqrt{11}.$$

$$\text{Ta có: } A^2 = \left(\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} \right)^2$$

$$A^2 = 12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}} + 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + 2 \cdot \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$$

$$A^2 = 18 + \sqrt{12 + \sqrt{12}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + 2 \cdot \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$$

$$B^2 = (\sqrt{12} + \sqrt{11})^2 = 23 + 2\sqrt{132}$$

$$\text{Dễ thấy } \sqrt{12 + \sqrt{12}} > \sqrt{9} \text{ và } \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \sqrt{4} \Rightarrow 18 + \sqrt{12 + \sqrt{12}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > 23.$$

$$\Rightarrow \text{Để so sánh } A^2 \text{ và } B^2 \text{ ta chỉ cần so sánh } \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} \text{ và } \sqrt{132}.$$

$$\text{Ta có: } \left(12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}} \right) \cdot \left(6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \right)$$

$$= 72 + 12\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + 6\sqrt{12 + \sqrt{12}} + \sqrt{12 + \sqrt{12}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}$$

$$\text{Mà } \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \sqrt{9} = 3 \text{ và } \sqrt{12 + \sqrt{12}} > \sqrt{9} = 3 \text{ nên}$$

$$12\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > 12 \cdot 3 = 36$$

$$6\sqrt{12 + \sqrt{12}} > 6 \cdot 3 = 18$$

$$\sqrt{12 + \sqrt{12}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > 3 \cdot 3 = 9$$

$$\Rightarrow 72 + 12\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + 6\sqrt{12 + \sqrt{12}} + \sqrt{12 + \sqrt{12}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > 72 + 36 + 18 + 9.$$

$$\Rightarrow 72 + 12\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + 6\sqrt{12 + \sqrt{12}} + \sqrt{12 + \sqrt{12}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > 135.$$

$$\Rightarrow 72 + 12\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + 6\sqrt{12 + \sqrt{12}} + \sqrt{12 + \sqrt{12}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > 132.$$

$$\Rightarrow \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} > \sqrt{132}.$$

$$\Rightarrow A^2 > B^2.$$

$$\Rightarrow A > B \text{ (Do } A > 0 \text{ và } B > 0).$$

Dạng 4: Phân tích đa thức thành nhân tử

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

a. $x^2 - 7$

c. $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7$

b. $4x^2 - 3$

d. $9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2$

Lời giải

a. $x^2 - 7 = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$

c. $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7 = (x + \sqrt{7})^2$

b. $4x^2 - 3 = (2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

d. $9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2 = (3x + \sqrt{2})^2$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử

a. $x^2 - 3$

c. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

b. $9x^2 - 5$

d. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3$

Lời giải

a. $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

c. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = (x + \sqrt{2})^2$

b. $9x^2 - 5 = (3x + \sqrt{5})(3x - \sqrt{5})$

d. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = (2x + \sqrt{3})^2$

Dạng 5: Giải phương trình**Bài 1: Giải phương trình**

a. $\sqrt{x^2} = 3$

c. $\sqrt{4x^2} - 19 = 0$

b. $\sqrt{9x^2} = 10$

d. $\sqrt{49x^2} = |-14|$

Lời giải

a. $\sqrt{x^2} = 3$

$\Leftrightarrow |x| = 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Vậy $S = \{-3; 3\}$

b. $\sqrt{9x^2} = 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x)^2} = 10$

$\Leftrightarrow |3x| = 10$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 10 \\ 3x = -10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = \frac{-10}{3} \end{cases}$

Vậy $S = \left\{ \frac{10}{3}; \frac{-10}{3} \right\}$

c. $\sqrt{4x^2} - 19 = 0$

$\Leftrightarrow |2x| = 19$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 19 \\ 2x = -19 \end{cases}$

d. $\sqrt{49x^2} = |-14|$

$\Leftrightarrow |7x| = 14$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 7x = -14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{2} \\ x = \frac{-19}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{19}{2}; \frac{-19}{2} \right\}$$

Bài 2: Giải phương trình

$$\text{a. } \sqrt{(x+2)^2} = 2$$

$$\text{c. } \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3 + x$$

$$\text{e. } x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$\text{Vậy } S = \{2; -2\}$$

$$\text{b. } \sqrt{4 - 4x + x^2} = 3$$

$$\text{d. } \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = x - 1$$

$$\text{f. } x - 4\sqrt{x} + 4 = 0$$

Lời giải

$$\text{a. } \sqrt{(x+2)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=2 \\ x+2=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0; -4\}$$

$$\text{b. } \sqrt{4 - 4x + x^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow |2-x| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=3 \\ 2-x=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{5; -1\}$$

$$\text{c. } \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3 + x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ |x-2| = 3+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x-2=3+x \\ x-2=-(3+x) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x=5 \\ 2x=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$$

$$\text{e. } x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$$

$$\text{d. } \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ |3x+1| = x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} 3x+1=x-1 \\ 3x+1=-(x-1) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-2 \\ 4x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$$

$$\text{f. } x - 4\sqrt{x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Vậy } S = \{-2\}$$

Vậy $S = \{-\sqrt{3}\}$

Bài 4: Giải phương trình:

- 1) $\sqrt{x^2+9}=5$
- 2) $\sqrt{4x^2-20x+25}=1$
- 3) $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}=2$
- 4) $\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{x-2}$
- 5) $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{3-x}$
- 6) $\sqrt{x-1}+1=x$
- 7) $\sqrt{25x^2-30x+9}=x+7$
- 8) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}=5$
- 9) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x-2}=0$
- 10) $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^2+4x+4}$
- 11) $\sqrt{25x-50}-\frac{\sqrt{x-2}+1}{2}=8\sqrt{\frac{9x-18}{16}}$
- 12) $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{7+x+6\sqrt{x-2}}=2$

Lời giải

1) $\sqrt{x^2+9}=5$ (ĐK : $x^2+9 \geq 0$ với mọi x)
 $\Leftrightarrow x^2+9=25$

$\Leftrightarrow x^2-16=0 \Leftrightarrow (x-4).(x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=4 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=4, x=-4$

2) $\sqrt{4x^2-20x+25}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-5)^2}=1$
 $\Leftrightarrow 2x-5=1 \Leftrightarrow x=3$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$

3) $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}=2$ ĐK: $x \geq 2$

$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2+2\sqrt{x-2}+1}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2}=2$

$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+1=2$ (vì với $x \geq 2$ thì $\sqrt{x-2} \geq 0$ nên $\sqrt{x-2}+1 \geq 1 > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1$

$\Leftrightarrow x-2=1$

$\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện)

4) $\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{x-2}$ ĐK: $x \geq 2$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=x-2 \Leftrightarrow x^2-x-x-2+2=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (KTM)} \\ x=2 \text{ (TM)} \end{cases}$

$S=\{2\}$

$$5) \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{3 - x} \quad \text{ĐK: } \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 3x - 12 = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) - 3(x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ (TM)} \\ x = 3 \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$S = \{-4; 3\}$$

$$6) \sqrt{x - 1} + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} = x - 1 \quad x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (TM)}$$

$$S = \{1; 2\}$$

$$7) \sqrt{25x^2 - 30x + 9} = x + 7 \quad \text{ĐK: } x \geq -7$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 30x + 9 = x^2 + 14x + 49 \Leftrightarrow 24x^2 - 44x - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 11x - 10 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 4x + 15x - 10 = 0 \Leftrightarrow (2x + 5)(3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -5 \\ 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{2} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ (TM)}$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{-5}{2} \right\}$$

$$8) \sqrt{x + 3} + \sqrt{2 - x} = 5(*) \quad \text{ĐK: } -3 \leq x \leq 2$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x + 3} = u \\ \sqrt{2 - x} = v \end{cases} \quad (u, v \geq 0)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - u \\ u^2 + (5 - u)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - u \\ u^2 - 5u + 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Xét (2) $u^2 - 5u + 10 = 0$ có $\Delta = -15 < 0$ nên phương trình (2) vô nghiệm

Suy ra hệ phương trình trên vô nghiệm

Vậy phương trình (*) vô nghiệm

$$9) \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0 \quad \text{ĐK: } x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x} + \sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{x+2} > 0, \forall x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TM)}$$

$$S = \{1\}$$

$$10) \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có : } \sqrt{(x-1)^2} \geq 0, \forall x$$

$$\sqrt{(x+2)^2} \geq 0, \forall x$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} (L)$$

Vậy phương trình vô nghiệm

$$11) \sqrt{25x-50} - \frac{\sqrt{x-2}+1}{2} = 8\sqrt{\frac{9x-18}{16}}$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{x-2} - \frac{\sqrt{x-2}+1}{2} = 6\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-2} - \frac{\sqrt{x-2}+1}{2} = 6\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2} - 10\sqrt{x-2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} = -1 \text{ (vô lý)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

$$12) \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-2} + \sqrt{7+x+6\sqrt{x-2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2})^2} + 2\sqrt{x-2} + 1 + \sqrt{(\sqrt{x-2})^2 + 6\sqrt{x-2} + 9} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2}+3)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 1 + \sqrt{x-2} + 3 = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = -1 \text{ (vô lý)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm

----- TOÁN HỌC SƠ ĐỒ -----