CHUYÊN ĐỀ : CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

MỤC LỤC

Chủ đề 1. CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC LÀ SỐ TỐI GIẢN 2
Chủ đề 2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ 3
Dạng 1. Tính giá trị biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước của biến. 3
Dạng 2. Tính giá trị biểu thức số bằng cách biến đổi từ công thức tổng quát. 17
Chủ đề 3. RÚT GỌN BIỂU THỨC 19
Dạng 1. Rút gọn biểu thức bằng cách sử dụng tính chất cơ bản của phân thức 19
Dạng 2. Rút gọn biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước của biến. 22
Dạng 3. Rút gọn các biểu thức có tính quy luật 26
Chủ đề 4. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC CHỨA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ 29
Dạng 1. Biến đổi vế này thành vế kia 29
Dạng 2. Biến đổi cả hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba 31
Dạng 3. Từ điều kiện tạo ra thành phần một vế 33
Dạng 4. Phương pháp biến đổi tương đương 40
Dạng 5. Phương pháp đổi biến số 41
Dạng 6. Phân tích đi lên từ kết luận 43
Dạng 7. Phương pháp tách hạng tử 44
Chủ đề 5. BÀI TOÁN TỔNG HỢP 45

Chủ đề 1. *CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC LÀ SỐ TỐI GIẢN*

- ***Phương pháp:***

Để chứng minh phân số đã cho tối giản, ta sẽ chứng tỏ rằng tử và mẫu chỉ có ƯC là ± 1

- Một số tính chất cần sử dụng khi chứng minh:

+ Nếu nếu d $=$ ƯCLN(a; b) thì $a \vdots d$ và $b \vdots d$, khi đó ta có: $(a \pm b) \vdots d$

+ Nếu $a \vdots d$ thì $k.a \vdots d$ và $a^n \vdots d$

- ***Bài tập áp dụng***

Bài 1. ***Chứng minh với mọi số nguyên n thì phân số $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản.***

HD:

Để chứng minh phân số đã cho tối giản, ta sẽ chứng tỏ rằng tử và mẫu chỉ có ƯC là ± 1

Gọi d là ước chung của n^3+2n và n^4+3n^2+1.

Ta có: $n^3+2n \vdots d \Rightarrow n(n^3+2n) \vdots d \Rightarrow n^4+2n^2 \vdots d$ (1)

$$n^4+3n^2+1-(n^4+2n^2) = n^2+1 \vdots d \Rightarrow (n^2+1)^2 = n^4+2n^2+1 \vdots d \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(n^4+2n^2+1)-(n^4+2n^2) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = \pm 1$

Vậy $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản

Bài 2. ***Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì:***

a) $\dfrac{n^3-1}{n^5+n+1}$ ***là phân số không tối giản.*** b) $\dfrac{6n+1}{8n+1}$ ***là phân số tối giản.***

HD:

a) Ta có $\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^5-n^2+n^2+n+1} = \dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2(n^3-1)+(n^2+n+1)} = \dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n^3-n^2+1)(n^2+n+1)}$

vì với số nguyên dương n thì $n^2+n+1>1$ nên $\dfrac{n^3-1}{n^5+n+1}$ là phân số không tối giản.

b) Đặt ƯCLN$(6n+1; 8n+1) = d$ với $d \in N^*$

$\Rightarrow 6n+1 \vdots d \Rightarrow 24n+4 \vdots d$

$8n+1 \vdots d \Rightarrow 24n+3 \vdots d$

$\Rightarrow (24n+4)-(24n+3) \vdots d \Leftrightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1.$

$\Rightarrow$ ƯCLN$(6n+1; 8n+1) = 1 \Rightarrow$ Phân số đã cho là phân số tối giản.

Bài 3. ***Cho $P = \dfrac{n^2+4}{n+5}$ với n là số tự nhiên. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2020 sao cho giá trị của P chưa tối giản.***

HD:

Ta có: $P = \dfrac{n^2+4}{n+5} = n-5+\dfrac{29}{n+5}$ với $n \in \mathbb{N}$

Để phân số P chưa tối giản thì ƯCLN$(29; n+5) = d$ $(d \neq 1)$

Khi đó $n+5 \vdots d$ và $29 \vdots d \Rightarrow d = 29 \Rightarrow n+5 \vdots 29$

Hay $n+5 = 29k\ (k \in N^+) \Rightarrow n = 29k-5$

Mà $1 < n < 2020 \Rightarrow 1 < 29k - 5 < 2020 \Leftrightarrow 29k < 2025$

$\Rightarrow \frac{6}{29} < k < 69\frac{24}{29} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3...., 69\}$

Vậy các số tự nhiên n cần tìm có dạng $n = 29k - 5$ với $k \in \{1; 2; 3;....; 69\}$

Bài 4. ***Cho phân số $\frac{m}{n}$ là phân thức tối giản. Chứng minh phân số $\frac{m}{m+n}$ là phân thức tối giản.***

HD: Giả sử m, n là các số nguyên và ƯCLN(m, n) = 1 (vì $\frac{m}{n}$ tối giản)

Gọi d = ƯCLN(m, m + n), khi đó ta có: $(m + n) \vdots d$ và $m \vdots d \Rightarrow [(m + n) - m] = n \vdots d$

$\Rightarrow d \in$ ƯC (m, n) $\Rightarrow d = 1$ (vì $\frac{m}{n}$ tối giản) .

Vậy nếu phân thức $\frac{m}{n}$ là phân thức tối giản thì phân thức $\frac{m}{m+n}$ cũng là phân thức tối giản.

Bài 5. ***Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản***

HD: Gọi d là ƯCLN của $10n^2 + 9n + 4$ và $20n^2 + 20n + 9$

$\Rightarrow \begin{cases} 10n^2 + 9n + 4 \vdots d \\ 20n^2 + 20n + 9 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20n^2 + 18n + 8 \vdots d \\ 20n^2 + 20n + 9 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 \vdots d \Rightarrow$ d là số tự nhiên lẻ

Mặt khác : $2n + 1 \vdots d \Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 \vdots d \Rightarrow 20n^2 + 20n + 5 \vdots d \Rightarrow 4 \vdots d$, mà d lẻ nên d = 1

Vậy phân số trên tối giản

- ***Bài tập tự giải:***

Bài 1. *Chứng minh rằng phân số $\frac{n^7 + n^2 + 1}{n^8 + n + 1}$ không tối giản với mọi số nguyên dương n*

Bài 2. *Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi số tự nhiên n.*

a) $\frac{3n+1}{5n+2}$ b) $\frac{12n+1}{30n+2}$ c) $\frac{2n+1}{2n^2-1}$ d) $\frac{3n+1}{5n+2}$

e) $\frac{-n+3}{n-4}$ f) $\frac{2n+1}{5n+3}$ g) $\frac{3n-2}{4n-3}$ h) $\frac{2n+5}{3n+7}$

i) $\frac{3n}{3n+1}$ j) $\frac{2n-1}{4n^2-2}$ k) $\frac{5n+7}{7n+10}$

Chủ đề 2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước của biến.

a. Phương pháp: Biến đổi điều kiện rồi thay vào biểu thức đã cho hoặc biến đổi biểu thức đã cho làm xuất hiện biểu thức của điều kiện.

b. Bài tập áp dụng

Bài 1. ***Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$, biết rằng:***

a) $x + \frac{1}{x} = 3$ $(x \neq 0)$ b) $\frac{1}{x^2} + x^2 = 14$ $(x \neq 0)$.

HD:

a) Áp dụng HĐT: $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$ ĐS: A = 18

b) Áp dụng HĐT: $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$ và $A^3+B^3=(A+B)(A^2+AB+B^2)$

Ta được: $\frac{1}{x^2}+x^2=\left(\frac{1}{x}+x\right)^2-2\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+x\right)^2=16\Rightarrow\frac{1}{x}+x=\pm4$

$\frac{1}{x^3}+x^3=\left(\frac{1}{x}+x\right)\left(\frac{1}{x^2}+x^2-1\right)$

Với $x<0\Rightarrow\frac{1}{x}+x=-4$ thì $\frac{1}{x^3}+x^3=-4.(14-1)=-52$

Với $x>0\Rightarrow\frac{1}{x}+x=4$ thì $\frac{1}{x^3}+x^3=4.(14-1)=52$

Bài 2. ***Tính giá trị biểu thức*** $A=x^3+\frac{1}{x^3}$ và $B=x^5+\frac{2}{x^5}$

Cho biết x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\frac{1}{x^2}=7$.

HD: Từ $x^2+\frac{1}{x^2}=7\Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=9\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$ (vì $x>0$)

Ta có $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3.7\Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}=21\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3=21\Rightarrow A=18$

Ta có: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=7.18\Leftrightarrow x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}=126$

$\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}+3=126\Rightarrow B=123$

Bài 3. ***a) Cho a + b = 2 và*** $a^2+b^2=20$***. Tính giá trị của biểu thức*** $M=a^3+b^3$

b) Cho $a+b+c=0$ ***và*** $a^2+b^2+c^2=14$***. Tính giá trị của biểu thức*** $N=a^4+b^4+c^4$

HD:

a) Từ $a^2+b^2=20\Rightarrow(a+b)^2-2ab=20\Leftrightarrow 4-2ab=20\Rightarrow ab=-8$

$M=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=2^3-3.(-8).2=56$

b) Từ $a^2+b^2+c^2=14\Rightarrow(a^2+b^2+c^2)^2=196$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=196-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Ta lại có: $a+b+c=0\Rightarrow(a+b+c)^2=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$\Rightarrow ab+bc+ca=-7\Rightarrow(ab+bc+ca)^2=49$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=49\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=49$

Do đó: $N=a^4+b^4+c^4=196-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=196-2.49=98$

Bài 4. ***a) Cho a – b = 7. Tính giá trị của biểu thức*** $M=a^2(a+1)-b^2(b-1)+3ab^2-2ab-3a^2b$

b) Cho $x^2+x=1$. ***Tính giá trị biểu thức*** $Q=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

c) Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^2+x^2y^2-2y=0$ ***và*** $x^3+2y^2-4y+3=0$***. Tính*** $Q=x^2+y^2$

HD:

a) $M = a^3 + a^2 - b^3 - b^2 + 3ab(b-a) - 2ab = (a-b)(a^2+ab+b^2) + a^2 + b^2 + 3ab(-7) - 2ab$

$= 7(a^2+ab+b^2) + a^2 + b^2 - 23ab = 8(a-b)^2 = 8.7^2 = 392$

b) Ta có: $Q = x^2.(x^4+2x^3+x^2) + (x^4+2x^3+x^2) + x^2 + x + x + 1$

$= x^2(x^2+x)^2 + (x^2+x)^2 + x + 2 = x^2 + x + 3 = 4$ Vậy $Q = 4$

c) Từ $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{2y}{y^2+1} \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$ (1)

$x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 - 2(y-1)^2 \le -1 \Rightarrow x \le -1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$

Ta có: $\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y^2 = 1$. Vậy $Q = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$

Bài 5. ***a) Tính giá trị của biểu thức*** $P = \dfrac{x-y}{x+y}$***. Biết*** $x^2 - 2y^2 = xy\ (x+y \ne 0; y \ne 0)$

b) Cho a và b thỏa mãn: a + b = 1. Tính giá trị của biểu thức $B = a^3 + b^3 + 3ab$

HD:

a) Từ giả thiết $x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = 0$

Vì $x + y \ne 0$ nên $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$

Khi đó $P = \dfrac{2y-y}{2y+y} = \dfrac{y}{3y} = \dfrac{1}{3}$

b) Ta có: $B = a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + b^3 + 3ab.1 = a^3 + b^3 + 3ab.(a+b) = (a+b)^3 = 1$

Bài 6. ***a) Cho*** $4a^2 + b^2 = 5ab$ ***và*** $2a > b > 0$***. Tính*** $P = \dfrac{ab}{4a^2 - b^2}$

b) Cho a > b > 0 và $2(a^2+b^2) = 5ab$ ***Tính giá trị của biểu thức:*** $P = \dfrac{3a-b}{2a+b}$

HD:

a) Biến đổi được: $4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (4a-b)(a-b) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4a \\ b = a \end{array}\right.$

Mà $2a > b > 0 \Rightarrow 4a > 2b > b$ nên $a = b$. Vậy ta được: $P = \dfrac{a^2}{4a^2 - a^2} = \dfrac{1}{3}$

b) Biến đổi được: $2(a^2+b^2) = 5ab \Leftrightarrow (2a^2 - 4ab) + (2b^2 - ab) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2a \\ a = 2b \end{array}\right.$

Trường hợp $b = 2a$. (Loại) vì $a > b > 0$

Trường hợp $a = 2b$. Ta có: $P = \dfrac{3a-b}{2a+b} = \dfrac{6b-b}{4b+b} = 1$

Bài 7. ***a) Cho a > b > 0 thỏa mãn*** $3a^2 + 3b^2 = 10ab$***. Tính giá trị của biểu thức*** $P = \dfrac{a-b}{a+b}$

b) Cho $2x + y = 11z$; $3x - y = 4z$***. Tính giá trị*** $Q = \dfrac{2x^2 - 3xy}{x^2 + 3y^2}$.

c) Cho a, b thỏa mãn $5a^2+2b^2=11ab$ và $b>2a>0$. Tính GT của biểu thức $A=\dfrac{4a^2-5b^2}{a^2+2ab}$

HD:

a) Xét $P^2=\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{3a^2+3b^2-6ab}{3a^2+3b^2+6ab}=\dfrac{10ab-6ab}{10ab+6ab}=\dfrac{1}{4}$

Vì $a>b>0\Rightarrow P>0\Rightarrow P=\dfrac{1}{2}$

b) Từ $2x+y=11z$ và $3x-y=4z$ suy ra $5x=15z\Rightarrow x=3z$

Từ $2x+y=11z$ và $x=3z$ suy ra $y=5z$

Thay vào biểu thức Q ta được: $Q=\dfrac{2x^2-3xy}{x^2+3y^2}=\dfrac{18z^2-45z^2}{9z^2+75z^2}=\dfrac{-9}{28}$

c) Từ giả thiết: $5a^2+2b^2=11ab\Leftrightarrow(5a-b)(a-2b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5a=b\ (\text{thỏa mãn})\\ a=2b\ (\text{loại})\end{array}\right.$

Thay $5a=b$ vào A ta được: $A=\dfrac{4a^2-125a^2}{a^2+10a^2}=-11$

Bài 8. ***Cho $a^2+a+1=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^{2013}+\dfrac{1}{a^{2013}}$***

HD:

a) Từ $a^2+a+1=0$ với $a\neq1$ ta có: $(a-1)(a^2+a+1)=0\Rightarrow a^3-1=0\Rightarrow a^3=1$

Ta lại có $a^{2013}=(a^3)^{671}$

Do đó: $P=a^{2013}+\dfrac{1}{a^{2013}}=(a^3)^{671}+\dfrac{1}{(a^3)^{671}}=1+1=2$

Bài 9. ***Cho biết $10x^2+5x=3$. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{2x-1}{3x-1}+\dfrac{5-x}{3x+1}$ (với $x\neq\pm\dfrac{1}{3}$)***

HD:

Ta có: $A=\dfrac{(2x-1)(3x+1)+(5-x)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)}=\dfrac{6x^2+2x-3x-1+15x-5-3x^2+x}{9x^2-1}$

$$=\dfrac{3x^2+15x-6}{9x^2-1}=\dfrac{3(x^2-5x-2)}{9x^2-1}\quad(1)$$

Từ điều kiện $10x^2+5x+3\Rightarrow5x=3-10x^2$ thay vào (1) ta được:

$$A=\dfrac{3(x^2+3-10x^2-2)}{9x^2-1}=\dfrac{3(1-9x^2)}{9x^2-1}=-3$$

Bài 10. ***Cho $0<x<y$ và $2x^2+2y^2=5xy$. Tính giá trị của $P=\dfrac{2016x+2017y}{3x-2y}$.***

HD:

Phân tích: Quan sát, chúng ta nhận thấy giả thiết chứa đa thức bậc hai đối với biến x, y, còn kết luận là phân thức mà tử và mẫu là đa thức bậc nhất đối với biến x, y. Do vậy chúng ta tìm mối quan hệ giữa x và y từ giả thiết để biểu diễn x theo y hoặc ngược lại. Với suy nghĩ ấy, chúng ta phân tích đa thức thành nhân tử từ điều kiện thứ hai.

Ta có: Từ $2x^2+2y^2=5xy\Leftrightarrow2x^2-5xy+2y^2=0$

$$2x^2-4xy-xy+2y^2=0 \Leftrightarrow (2x-y)(x-2y)=0$$

Ta có $y>x>0 \Rightarrow 2y>x \Rightarrow x-2y<0 \Rightarrow 2x-y=0 \Rightarrow y=2x$

Từ đó ta có: $P=\dfrac{2016x+2017.2x}{3x-2.2x}=-6050.$

Bài 11. ***Cho biết $\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{2}{3}$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $Q=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$***

HD:

Áp dụng HĐT: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

Từ $\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow x\neq 0$, do đó : $\dfrac{x^2-x+1}{x}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$

Ta có: $Q=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1} \Rightarrow \dfrac{1}{Q}=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+1=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-1=\dfrac{21}{4}$

Suy ra $Q=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{4}{21}$

Bài 12. ***Cho x, y thỏa mãn $x^2+2y^2+2xy-6x-2y+13=0$. Tính $H=\dfrac{x^2-7xy+52}{x-y}$.***

HD:

Từ giả thiết suy ra $x^2+2xy+y^2+y^2-6x-2y+13=0.$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-6(x+y)+9+y^2+4y+4=0 \Leftrightarrow (x+y-3)^2+(y+2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow H=\dfrac{25-7.5.(-2)+52}{5+2}=21.$$

Bài 13. ***a) Cho x thỏa mãn $\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{x^4-3x^3+18x-1}{x^3-2x^2+7x+1}$***

b) Cho x,y thỏa mãn $x^2-2xy+2y^2-2x+6y+5=0$. Tính giá trị của biểu thức $N=\dfrac{3x^2y-1}{4xy}$

HD: a) Từ giả thiết: $\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$ suy ra $x^2-x+1=2x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$

Ta có: $x^4-3x^2+18x-1=(x^2-3x+1)(x^2-1)+15x.$

$x^3-2x^2+7x+1=(x^2-3x+1)(x+1)+9x$

Với $x^2-3x+1=0$ ta có $P=\dfrac{(x^2-3x+1)(x^2-1)+15x}{(x^2-3x+1)(x+1)+9x}=\dfrac{15x}{9x}=\dfrac{5}{3}.$

b) Ta có: $x^2-2xy+2y^2-2x+6y+5=0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+y^2-2x+2y+4y+5=0$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)^2+(y+2)^2=0$$

Dấu bằng xảy ra khi $x-y-1=0$ và $y+2=0$ hay $y=-2; x=-1.$

Từ đó suy ra $N=\dfrac{3(-1)^2(-2)-1}{4(-1)(-2)}=-\dfrac{7}{8}$

Bài 14. ***a) Tính giá trị của biểu thức sau:*** $\dfrac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}$ ***với x = 2011***

b) Cho $(x+3y)^3-6(x+3y)^2+12(x+3y)=-19$. ***Tìm giá trị của biểu thức P = x + 3y***

HD:

a) Ta có: $x^{16}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

$$\Rightarrow \frac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}=x-1$$

Thay x = 2011 ta được kết quả 2010

b) Ta có: $(x+3y)^3-6(x+3y)^2+12(x+3y)-8=-27$

$$\Leftrightarrow (x+3y-2)^3=(-3)^3\Rightarrow x+3y-2=-3\Rightarrow x+3y=-1$$

Bài 15. ***Cho x, y, z thỏa mãn*** $x+y+z=7;\ x^2+y^2+z^2=23;\quad xyz=3$

Tính giá trị của biểu thức $H=\dfrac{1}{xy+z-6}+\dfrac{1}{yz+x-6}+\dfrac{1}{zx+y-6}$

HD: Vì $x+y+z=7\Rightarrow z=-x-y+7\Rightarrow z-6=1-x-y$

$\Rightarrow xy+z-6=xy+1-x-y=(xy-x)-(y-1)=(x-1)(y-1)$

Tương tự ta có: $yz+x-6=(y-1)(z-1);\qquad zx+y-6=(z-1)(y-1)$

Vậy $H=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}+\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}+\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}=\dfrac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$=\dfrac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1}=\dfrac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1}=\dfrac{4}{9-(xy+yz+xz)}$

Ta lại có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)\Rightarrow 7^2=23+2(xy+yz+xz)$

$\Rightarrow xy+yz+xz=13\qquad$ Vậy $H=\dfrac{4}{9-13}=-1$

Bài 16. ***Cho x, y, z đôi một khác nhau và*** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{yz}{x^2+2yz}+\dfrac{xz}{y^2+2xz}+\dfrac{xy}{z^2+2xy}$

HD: Ta có: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\Rightarrow \dfrac{xy+yz+xz}{xyz}=0\Leftrightarrow xy+yz+xz=0\Rightarrow yz=-xy-xz$

$x^2+2yz=x^2+yz+yz=x^2+yz-xy-xz=x(x-y)-z(x-y)=(x-y)(x-z)$

Tương tự: $y^2+2xz=(y-x)(y-z);\quad z^2+2xy=(z-x)(z-y)$

Do đó: $A=\dfrac{yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{xz}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}=1$

Bài 17. ***Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=3xyz$ và $xyz\neq 0$.***

Tính giá trị của biểu thức: $B=\dfrac{16(x+y)}{z}+\dfrac{3(y+z)}{x}-\dfrac{2038(z+x)}{y}$.

HD: Ta có: $x^3+y^3+z^3=3xyz\ \ (x\neq y\neq z;\ xyz\neq 0)$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3-3z(x+y)(x+y+z)-3xy(x+y+z)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-z \\ y+z=-x \\ z+x=-y \end{cases} \\ x=y=z \text{ (loai)} \end{array}\right.$$

Vậy $B=\dfrac{16(x+y)}{z}+\dfrac{3(y+z)}{x}-\dfrac{2038(z+x)}{y}=\dfrac{16(-z)}{z}+\dfrac{3(-x)}{x}-\dfrac{2038(-y)}{y}=2019$

Bài 18. ***Tính*** $M=\dfrac{2004a}{ab+2004a+2004}+\dfrac{b}{bc+b+2004}+\dfrac{c}{ac+c+1}$ ***, biết abc = 2004***

HD:

Thay $2004=abc$ vào M ta được:

$$M=\frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc}+\frac{b}{bc+b+abc}+\frac{c}{ac+c+1}=\frac{a^2bc}{ab(1+ac+c)}+\frac{b}{b(c+1+ac)}+\frac{c}{ac+c+1}$$

$$=\frac{ac}{1+ac+c}+\frac{1}{c+1+ac}+\frac{c}{ac+c+1}=\frac{ac+1+c}{1+ac+c}=1$$

Bài 19. ***Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn:*** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

HD: Từ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow ab+ac+bc=0$

$\dfrac{a^2}{a^2+2bc}=\dfrac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}$. Tương tự: $\dfrac{b^2}{b^2+2ac}=\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}$;

$\dfrac{c^2}{c^2+2ac}=\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

Vậy $P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$$

Bài 20. ***Cho*** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\ (x,y,z\neq 0)$. ***Tính giá tri của biểu thức*** $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}$

HD: Vì $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{z}=-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x^3}+3.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{y}+3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = -3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = 3.\frac{1}{xyz}$$

Do đó: $xyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{xyz}{x^3}+\frac{xyz}{y^3}+\frac{xyz}{z^3} = 3 \Leftrightarrow \frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2} = 3$

Bài 21. ***Cho a + b + c = 0 và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:***

$$P = \frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{a^2+c^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

HD:

Từ giả thiết $a+b+c=0$ ½ $a = -(b+c)$ hoặc $b = -(a+c)$ hoặc $c = -(a+b)$

$$P = \frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{a^2+c^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

$$= \frac{1}{b^2+c^2-(b+c)^2}+\frac{1}{a^2+c^2-(a+c)^2}+\frac{1}{a^2+b^2-(a+b)^2} = \frac{1}{-2ab}+\frac{1}{-2ac}+\frac{1}{-2ab} = 0$$

Bài 22. ***Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn: $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$***

Tính giá trị biểu thức $P = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

HD:

Đặt $ab = x; bc = y; ca = z$

Ta có: $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 = 3a^2b^2c^2 \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3 = 3xyz$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) = 0$

$\Leftrightarrow x+y+z=0$ hoặc $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=0$

TH1: $x+y+z=0$

Sử dụng hằng đẳng thức : $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = 3(x+y)(y+z)(x+z)$

$\Rightarrow -xyz = (x+y)(y+z)(x+z)$

Ta có: $-a^2b^2c^2 = (ab+bc)(bc+ca)(ca+ab)$

$-abc = (a+b)(b+c)(c+a) \Rightarrow P = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) = -1$

TH2: $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=0$

$\Rightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0 \Rightarrow x=y=z \Rightarrow ab=bc=ca \Rightarrow a=b=c \Rightarrow P=8$

Bài 23. ***Cho x, y hỏa mãn đẳng thức: $x^2+y^2+10 = 2(x-3y)$. Tính giá trị biểu thức:***

$$P = \frac{2}{x}-\left(\frac{x^2}{x^2+xy}+\frac{y^2-x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy+y^2}\right).\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \quad \text{với } x\neq 0; y\neq 0; x\neq -y$$

HD: Với $x \ne 0;\ y \ne 0;\ x \ne -y$ ta có:

$$P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2y - (x^2 - y^2)(x+y) - xy^2}{xy(x+y)} \right) . \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy(x+y)} . \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x+y)} . \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{2}{x} + \frac{x-y}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

Ta có: $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Nên thay $x = 1;\ y = -3$ vào biểu thức $P = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1+(-3)}{1.(-3)} = \dfrac{2}{3}$

Bài 24. ***Cho biểu thức*** $\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$. ***Tính giá trị*** $\boldsymbol{Q = \dfrac{x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2020}{x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x + 2020}}$.

HD:

Ta không thể tìm x để rồi thay vào biểu thức được, bởi kết quả x không phải số hữu tỉ, thay vào Q tính rất phức tạp. Do vậy ta có hai định hướng:

- Hướng suy nghĩ thứ nhất, viết tử thức và mẫu thức dưới dạng $(x^2 - x - 1).q(x) + r(x)$
- Hướng suy nghĩ thứ hai, chúng ta quan sát thấy có dạng hằng đẳng thức, biến đổi giả thiết khéo léo để xuất hiện thành tử thức và mẫu thức.

Cách 1. Ta có: $x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2020 = (x^2 - x - 1)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1) + 2021$

$$x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x + 2020 = (x^2 - x - 1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1) + 2021$$

Với $x^2 - x - 1 = 0$ thì tử số là 2011; mẫu số là 2021. Vậy $Q = \dfrac{2021}{2021} = 1.$

Cách 2. Ta có: $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^6 = (x+1)^3$

$$\Rightarrow x^6 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x = 1$$

Suy ra mẫu số bằng: $1 + 2020 = 2021.$

Ta có: $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow (x^2 - x)^3 = 1 \Rightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = 1$

Suy ra tử số bằng: $1 + 2020 = 2021.$ Vậy $Q = \dfrac{2021}{2021} = 1.$

Bài 25. ***Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn:*** $\boldsymbol{ab + bc + ca = 1}$

Tính giá trị của biểu thức $\boldsymbol{A = \dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$

HD:

Ta có: $1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = a(a+b) + c(a+b) = (a+b)(a+c)$

Tương tự: $1 + b^2 = (b+a)(b+c)$ và $1 + c^2 = (c+a)(c+b)$

Do đó: $A=\dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)(a+c)(b+a)(b+c)(c+a)(c+b)}=1$

Bài 26. ***Cho*** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=2$ ***(1) và*** $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=2$ ***(2). Tính*** $D=\left(\dfrac{a}{x}\right)^2+\left(\dfrac{b}{y}\right)^2+\left(\dfrac{c}{z}\right)^2$

HD:

Từ (1) suy ra bcx + acy + abz = 0 (3)

Từ (2) suy ra $\left(\dfrac{a}{x}\right)^2+\left(\dfrac{b}{y}\right)^2+\left(\dfrac{c}{z}\right)^2+2\left(\dfrac{ab}{xy}+\dfrac{ac}{xz}+\dfrac{bc}{yz}\right)=4$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{a}{x}\right)^2+\left(\dfrac{b}{y}\right)^2+\left(\dfrac{c}{z}\right)^2=4-2\left(\dfrac{ab}{xy}+\dfrac{ac}{xz}+\dfrac{bc}{yz}\right)$ (4)

Thay (3) vào (4) ta có $D = 4 - 2.0 = 4$

Bài 27. ***a) Cho a + b + c = 1 và*** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$. ***Tính*** $P=a^2+b^2+c^2$

b) Cho $a+b+c=2014$ ***và*** $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{2014}$ ***. Tính*** $S=\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}$

HD:

a) Ta có: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0\Leftrightarrow\dfrac{bc+ac+ab}{abc}=0\Leftrightarrow bc+ac+ab=0$ (1)

$a+b+c=1\Leftrightarrow(a+b+c)^2=1\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=1$ (2)

Kết hợp (1) và (2) suy ra $P=a^2+b^2+c^2=1$

b) Ta có: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{2011}$

$a+b+c=2014\Rightarrow a=2014-(b+c);\ b=2014-(a+c);\ c=2014-(a+b)$

Do đó: $S=\dfrac{2014-(b+c)}{b+c}+\dfrac{2014-(a+c)}{a+c}+\dfrac{2014-(a+b)}{a+b}=\dfrac{2014}{b+c}-1+\dfrac{2014}{a+c}-1+\dfrac{2014}{a+b}-1$

$=2014.\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}\right)-3=2014.\dfrac{1}{2014}-3=1-3=-2$ Vậy $S=-2$

Bài 28. ***Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn*** $x+y+z=0$ ***và*** $xyz\neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$.

HD: Từ $x+y+z=0\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Từ giả thiết, ta có $y+z=-x\Leftrightarrow y^2+z^2-x^2=-2xy$.

Làm tương tự, thay vào P, ta được:

$P=\dfrac{x^2}{-2yz}+\dfrac{y^2}{-2xz}+\dfrac{z^2}{-2xy}=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{-2xyz}=\dfrac{3xyz}{-2xyz}=\dfrac{-3}{2}$

Bài 29. ***Cho*** $ax+by=c;\ by+cz=a;\ cz+ax=b$ ***và*** $a+b+c\neq 0$***. Tính*** $P=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}$.

Cho a, b thỏa mãn $4a^2+2b^2-7ab=0$ và $4a^2-b^2\neq 0$. Tính: $A=\frac{3a-b}{2a-b}+\frac{5b-3a}{2a+b}$.

HD: a) Từ giả thiết suy ra:

$$a+b+c=2(ax+by+cz)\Rightarrow a+b+c=2(c+cz)=2c(1+z)$$

Nên: $\frac{1}{z+1}=\frac{2c}{a+b+c}$. Tương tự: $\frac{1}{x+1}=\frac{2a}{a+b+c};\frac{1}{y+z}=\frac{2b}{a+b+c}$.

Suy ra: $P=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2$

b) Ta có: $A=\frac{6a^2+ab-b^2+10ab-6a^2+3ab}{4a^2-b^2}=\frac{14ab-6b^2}{7ab-3b^2}=2$

Bài 30.* *Cho biết $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=3$. Tính giá trị của biểu thức: $M=\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$.

HD: Từ giả thiết $\Rightarrow\frac{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}=3\Leftrightarrow\frac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4}=3\Rightarrow\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}=\frac{3}{2}$

Ta có: $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\frac{(x^4+y^4)^2+(x^4-y^4)^2}{(x^4-y^4)(x^4+y^4)}$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2(x^8+y^8)}{x^8-y^8}\Rightarrow\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12}\Rightarrow M=\frac{13}{12}+\frac{12}{13}=\frac{313}{156}$$

Bài 31.* *Cho hai số thực a, b thỏa điều kiện $ab=1$, $a+b\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

HD: Với $ab=1$, $a+b\neq 0$, ta có:

$$P=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3(ab)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4(ab)^2}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5(ab)}$$

$$=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6(a+b)}{(a+b)^5}=\frac{a^2+b^2-1}{(a+b)^2}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2-1)(a+b)^2+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}=\frac{(a^2+b^2-1)(a^2+b^2+2)+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)+4}{(a+b)^4}=\frac{(a^2+b^2+2)^2}{(a+b)^4}=\frac{(a^2+b^2+2ab)^2}{(a+b)^4}=\frac{\left[(a+b)^2\right]^2}{(a+b)^4}=1$$

Vậy P = 1, với $ab=1$, $a+b\neq 0$.

Bài 32.* *Cho $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $y=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$. Tính giá trị biểu thức $P=xy+x+y$

HD: Ta có: $P=xy+x+y=(x+1)(y+1)-1$

Xét $x+1=\dfrac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}$

Xét $y+1=\dfrac{b^2+2bc+c^2-b^2+2bc-c^2}{(b+c-a)(b+c+a)}=\dfrac{4bc}{(b+c-a)(b+c+a)}$

Vậy $P=\dfrac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}\dfrac{4bc}{(b+c-a)(b+c+a)}-1=2-1=1$

Bài 33. ***Giả sử x, y, z là các số thực khác không, thỏa mãn hệ đẳng thức:***

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+y\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)+z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=-2 \\ x^3+y^3+z^3=1\end{cases}$$ ***. Hãy tính giá trị của biểu thức:*** $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

HD:

Phân tích. Bài toán này thuộc dạng tính giá trị biết điều kiện của biến số. Quan sát, nhận thấy bài toán có hai điều kiện nhưng có ba biến số (số biến nhiều hơn số điều kiện). Do điều kiện hai đơn giản, không phân tích tiếp được. Với điều kiện thứ nhất, chúng ta biến đổi và nhận thấy phân tích thành nhân tử được, tìm được mối quan hệ giữa hai trong ba biến. Từ đó tìm được cách giải sau.

Từ đẳng thức: $x\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+y\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)+z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=-2$

Ta có: $2xyz+x^2z+x^2y+y^2z+z^2y+z^2x=0$

$\Leftrightarrow (xyz+x^2z)+(xyz+y^2z)+(x^2y+y^2x)+(z^2x+z^2y)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0\\ y+z=0\\ z+x=0\end{array}\right.$

Không mất tổng quát, giả sử $x+y=0\Rightarrow x^3+y^3=0$

Từ $x^3+y^3+z^3=1$ thì $z^3=1\Rightarrow z=1$. Vậy $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{1}{1}=0+1=1$

Bài 34. ***Cho x, y, z thỏa mãn*** $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ ***và xyz = 1. Tính*** $M=\dfrac{x^6+y^6+z^6}{x^3+y^3+z^3}$

HD: Ta có: $x+y+z=0\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz=3$ (vì xyz = 1) (1)

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\Leftrightarrow xy+yz+zx=0\Leftrightarrow x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3=3xy.yz.zx=3(xyz)^2=3$

$x^6+y^6+z^6=(x^3+y^3+z^3)^2-2(x^3y^3-y^3z^3-z^3x^3)=0-2.3=3.$ (2)

Kết hợp (1) và (2) suy ra M = 1

Bài 35. ***a) Cho x, y dương và*** $x^{2010}+y^{2010}=x^{2011}+y^{2011}=x^{2012}+y^{2012}$***. Tính*** $S=x^{2020}+y^{2020}$

b) Cho a, b dương và $a^{2000}+b^{2000}=a^{2001}+b^{2001}=a^{2002}+b^{2002}$***. Tính*** $M=a^{2011}+b^{2011}$

HD:

a) Ta có $x^{2012}+y^{2012}=(x^{2011}+y^{2011})(x+y)-(x^{2010}+y^{2010}).xy$ (1)

Do x, y là hai số dương và $x^{2010}+y^{2010}=x^{2011}+y^{2011}=x^{2012}+y^{2012}$

Nên đặt $m=x^{2010}+y^{2010}=x^{2011}+y^{2011}=x^{2012}+y^{2012}$

$$(1)\Leftrightarrow m=m(x+y)-mxy\Leftrightarrow 1=x+y-xy\Leftrightarrow (x-1)(1-y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ y=1\end{array}\right.$$

Với $x=1$ ta có: $1^{2010}+y^{2010}=1^{2011}+y^{2011}\Leftrightarrow y^{2010}=y^{2011}\Rightarrow y=1$ hoặc $y=0$ (loại)

Với $y=1\Rightarrow x^{2010}=x^{2011}\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=0$ (ktm)

Vậy cả hai trường hợp ta đều có: $S=x^{2020}+y^{2020}=1+1=2$

b) Ta có: $\left(a^{2001}+b^{2001}\right)(a+b)-\left(a^{2000}+b^{2000}\right)ab=a^{2002}+b^{2002}$

$$\Rightarrow (a+b)-ab=1\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ b=1\end{array}\right.$$

Với $a=1\Rightarrow b^{2000}=b^{2001}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}b=1\ (tm)\\ b=0\ (ktm)\end{array}\right.$

Với $b=1\Rightarrow a^{2000}=a^{2001}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\ (tm)\\ a=0\ (ktm)\end{array}\right.$

Vậy $a=1;\ b=1\Rightarrow M=a^{2011}+b^{2011}=2$

Bài 36. ***Cho $x+y+z=1$ và $x^3+y^3+z^3=1$. Tính $A=x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}$***

HD:

Từ $x+y+z=1\Leftrightarrow (x+y+z)^3=1$ Mà $x^3+y^3+z^3=1$

$$\Rightarrow (x+y+z)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=0\Leftrightarrow (x+y+z)^3-z^3-\left(x^3+y^3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z-z)\left[(x+y+z)^2+(x+y+z)z+z^2\right]-(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz+xz+yz+z^2+z^2-x^2+xy-y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(3z^2+3xy+3yz+3xz\right)=0\Leftrightarrow (x+y)3(y+z)(x+z)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=0\\ y+z=0\\ x+z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-y\\ y=-z\\ x=-z\end{array}\right.$$

*Nếu $x=-y\Rightarrow z=1\Rightarrow A=x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}=1$

*Nếu $y=-z\Rightarrow x=1\Rightarrow A=x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}=1$

*Nếu $x=-z\Rightarrow y=1\Rightarrow A=x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}=1$

Bài 37. ***Cho $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1$. Tính $S=a^2+b^{2012}+c^{2013}$***

HD:

Ta có: $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1\Rightarrow a;b;c\in[-1;1]$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)\le 0$$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3\le 1\Rightarrow a;\ b;\ c$ nhận hai giá trị là 0 hoặc 1

$\Rightarrow b^{2012}=b^2;c^{2013}=c^2\Rightarrow S=a^2+b^{2012}+c^{2013}=1$

Bài 1. ***Cho ba số x, y, z thỏa mãn*** $4x^2+2y^2+2z^2-4xy-4xz+2yz-6y-10z+34=0$,

Tính gia trị của biểu thức $T=(x-4)^{2014}+(y-4)^{2014}+(z-4)^{2014}$.

HD: Ta có

$$4x^2+2y^2+2z^2-4xy-4xz+2yz-6y-10z+34=0$$

$$\Leftrightarrow\left[4x^2-4x(y+z)+(y+z)^2\right]+\left(y^2+z^2-6y-10z+34\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(2x-y-z)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=0\Leftrightarrow y=3;\quad z=5;\quad x=4$$

Khi đó $T=(4-4)^{2014}+(3-4)^{2014}+(5-4)^{2014}=2$.

Bài 38. ***Cho*** $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1$. ***Tính*** $S=a^2+b^{2012}+c^{2013}$

HD:

Ta có: $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1\Rightarrow a;b;c\in[-1;1]$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)\le 0$$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3\le 1\Rightarrow a;b;c$ nhận hai giá trị là 0 hoặc 1

$$\Rightarrow b^{2012}=b^2;c^{2013}=c^2;\Rightarrow S=a^2+b^{2012}+c^{2013}=1$$

Bài 39. ***Cho 3 số a, b, c khác 0, thỏa mãn*** $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$. ***Tính giá trị của biểu thức***

$$M=\left(a^{2015}+b^{2015}\right)\left(b^{2017}+c^{2017}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)$$

HD:

Ta có: c)$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1\Leftrightarrow(a+b+c).\frac{ab+bc+ac}{abc}=1$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc=0\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=0\\b+c=0\\c+a=0\end{array}\right.$$

Nếu $a+b=0\Rightarrow a=-b\Rightarrow\left(a^{2015}+b^{2015}\right)=0\Rightarrow M=0$

Nếu $b+c=0\Rightarrow b=-c\Rightarrow\left(b^{2017}+c^{2017}\right)=0\Rightarrow M=0$

Nếu $a+c=0\Rightarrow a=-c\Rightarrow a^{2019}+c^{2019}=0\Rightarrow M=0$

Bài 40. ***Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn*** $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=210$

Tính giá trị của biểu thức $B=|a-b|+|b-c|+|c-a|$

HD:

Đặt $a-b=x;\ b-c=y;\ c-a=z\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow z=-(x+y)$

Ta có: $x^3+y^3+z^3=210\Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210\Leftrightarrow -3xy(x+y)=210\Leftrightarrow xyz=70$

Do x,y,z la số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=70=(-2).(-5).7$

nên $\{x;y;z\}\in\{-2;-5;7\}\ \Rightarrow A=|a-b|+|b-c|+|c-a|=14$

Bài 41. ***Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện:*** $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6$.

Tính $P=x^{2020}+y^{2020}+z^{2020}$.

HD:

Từ giả thiết chuyển vế, ta có:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=6 \Leftrightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}+y^2-2+\frac{1}{y^2}+z^2-2+\frac{1}{z^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{x} \\ y=\frac{1}{y} \\ z=\frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \\ z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{2020}=1 \\ y^{2020}=1 \\ z^{2020}=1 \end{cases} \Rightarrow P=1+1+1=3.$$

Bài 42. ***Cho a +b +c $\neq$ 0 và $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính $N=\dfrac{a^{2016}+b^{2016}+c^{2016}}{(a+b+c)^{2016}}$***

HD: Ta có:

$$a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3ab(a+b)-3abc=0 \Rightarrow (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab(a+b+c)=0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \text{ (vì } a+b+c=0)$$

$$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Rightarrow a-b=0 \text{ và } b-c=0 \text{ và } c-a=0 \Rightarrow a=b=c$$

Vì $(a-b)^2\geq 0\ \ \forall a,\ b;\ \ (b-c)^2\geq 0\ \ \forall b,c;\ \ (c-a)^2\geq 0\ \ \forall a,\ c.$

Mà $a+b+c\neq 0 \Rightarrow a=b=c\neq 0$ (*)

Thay (*) vào N ta có: $N=\dfrac{a^{2016}+a^{2016}+a^{2016}}{(a+a+a)^{2016}}=\dfrac{3a^{2016}}{(3a)^{2016}}=\dfrac{3a^{2016}}{(3a)^{2016}}=\dfrac{1}{3^{2015}}$

Dạng 2. ***Tính giá trị biểu thức số bằng cách biến đổi từ công thức tổng quát.***

Bài 2. ***Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{3^3+1^3}{2^3-1^3}+\dfrac{5^3+2^3}{3^3-2^3}+\dfrac{7^3+3^3}{4^3-3^3}+...+\dfrac{101^3+50^3}{51^3-50^3}$***

HD: Xét phân thức tổng quát:

$$\frac{(2n+1)^3+n^3}{(n+1)^3-n^3}=\frac{(3n+1)\left[(2n+1)^2-n(2n+1)+n^2\right]}{3n^2+3n+1}=\frac{(3n+1)(3n^2+3n+1)}{3n^2+3n+1}=3n+1$$

Do đó: $A=(3.1+1)+(3.2+1)+(3.3+1)+...+(3.5+1)=3(1+2+3+...+50)+50=3875.$

Bài 3. ***Tìm tích: $M=\dfrac{1^4+4}{3^4+4}.\dfrac{5^4+4}{7^4+4}.\dfrac{9^4+4}{11^4+4}....\dfrac{17^4+4}{19^4+4}$***

HD:

Nhận xét được: $n^4+4=\left[(n-1)^2+1\right]\left[(n+1)^2+1\right].$

Do đó: $M=\dfrac{1.(2^2+1)}{(2^2+1).(4^2+1)}.\dfrac{(4^2+1).(6^2+1)}{(6^2+1).(8^2+1)}......\dfrac{(16^2+1).(18^2+1)}{(18^2+1).(20^2+1)}=\dfrac{1}{20^2+1}=\dfrac{1}{401}$

Bài 4. ***Tính giá trị của biểu thức*** $A=\dfrac{\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)..........\left(29^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)..........\left(30^4+\frac{1}{4}\right)}$

HD: Ta xét biểu thức tổng quát: $a^4+\frac{1}{4}=\left(a^2+\frac{1}{2}\right)^2-a^2=\left(a^2+a+\frac{1}{2}\right)\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)$

Khi cho a các giá trị chạy từ 1 đến 30 với a thì:

Tử thức viết được thành

$$\left(1^2+1+\frac{1}{2}\right)\left(1^2-1+\frac{1}{2}\right)\left(3^2+3+\frac{1}{2}\right)\left(3^2-3+\frac{1}{2}\right)......\left(29^2+29+\frac{1}{2}\right)\left(29^2-29+\frac{1}{2}\right)$$

Mẫu thức viết được thành

$$\left(2^2+2+\frac{1}{2}\right)\left(2^2-2+\frac{1}{2}\right)\left(4^2+4+\frac{1}{2}\right)\left(4^2-4+\frac{1}{2}\right)......\left(30^2+30+\frac{1}{2}\right)\left(30^2-30+\frac{1}{2}\right)$$

Mặt khác $(k+1)^2-(k+1)+\frac{1}{2}=............=k^2+k+\frac{1}{2}$.

Do đó: $2^2-2+\frac{1}{2}=1^2+1+\frac{1}{2}$; $3^2-3+\frac{1}{2}=2^2+2+\frac{1}{2}$; $4^2-4+\frac{1}{2}=3^2+3+\frac{1}{2}$; ....

Vậy $A=\left(1^2-1+\frac{1}{2}\right):\left(30^2+30+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1861}$

Bài 5. ***Tính tổng*** $\boldsymbol{S=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}}$ ***với*** $\mathbf{x=\sqrt{2}}$

HD: Ta có:

$$S=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}$$
$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{16}{1-x^{16}}$$

Thay $x=\sqrt{2}$ ta được kết quả

Bài 6. ***Cho*** $\boldsymbol{a_1, a_2 ... a_9}$ ***được xác định bởi công thức:*** $\boldsymbol{a_k=\dfrac{3k^2+3k+1}{\left(k^2+k\right)^3}}$ ***với mọi*** $k\ge 1$

Hãy tính giá trị của tổng: $\boldsymbol{1+a_1+a_2+...+a_9}$.

HD:

Phân tích. Bài toán có tính quy luật, thay số vào tính là không khả thi. Do vậy chúng ta nghĩ đến việc tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức, rồi khử liên tiếp. Nhận thấy $3k^2+3k+1=(k+1)^3-k^3$, nên chúng ta có lời giải sau:

Ta có: $a_k=\dfrac{3k^2+3k+1}{\left(k^2+k\right)^3}=\dfrac{(k+1)^3-k^3}{k^3(k+1)^3}=\dfrac{1}{k^3}-\dfrac{1}{(k+1)^3}$

Do đó: $S=1+a_1+a_2+...+a_9=1+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)+...+\left(\frac{1}{9^3}-\frac{1}{10^3}\right)=2-\frac{1}{10^3}=\frac{1999}{1000}$.

Chủ đề 3. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Dạng 1. Rút gọn biểu thức bằng cách sử dụng tính chất cơ bản của phân thức

***Bài 1.** Rút gọn biểu thức:*

a) $\dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$ b) $N=\dfrac{(a-1)^4-11(a-1)^2+30}{3(a-1)^4-18(a^2-2a)-3}$

HD:

a) $\dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}=\dfrac{2x^3-6x^2-x^2+3x-15x+45}{3x^3-9x^2-10x^2+30x+3x-9}=\dfrac{(2x+5)(x-3)}{(3x-1)(x-3)}=\dfrac{2x+5}{3x-1}$

b) $N=\dfrac{(a-1)^4-11(a-1)^2+30}{3(a-1)^4-18(a^2-2a)-3}=\dfrac{\left[(a-1)^2-5\right]\left[(a-1)^2-6\right]}{3(a-1)^4-18(a-1)^2-15}=\dfrac{a^2-2a-5}{3a^2-6a}.$

***Bài 2.** Rút gọn biểu thức:*

a) $A=\dfrac{n^3+2n^2-1}{n^3+2n^2+2n+1}$; b) $M=\dfrac{x^5-2x^4+2x^3-4x^2-3x+6}{x^2+2x-8}$

HD:

a) $A=\dfrac{n^3+2n^2-1}{n^3+2n^2+2n+1}=\dfrac{n^3+n^2+n^2-1}{n^3+n^2+n^2+n+n+1}=\dfrac{n^2(n+1)+(n-1)(n+1)}{n^2(n+1)+n(n+1)+n+1}=\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n+1}$

b) $M=\dfrac{x^5-2x^4+2x^3-4x^2-3x+6}{x^2+2x-8}=\dfrac{x^4(x-2)+2x^2(x-2)-3(x-2)}{(x-2)(x+4)}=\dfrac{(x^2-1)(x^2+3)}{x+4}$

***Bài 3.** Rút gọn biểu thức:*

a) $N=\dfrac{xy^2+y^2(y^2-x)+1}{x^2y^4+2y^4+x^2+2}$ b) $A=\dfrac{x^5-2x^4+2x^3-4x^2-3x+6}{x^2-x-2}$

HD:

a) $N=\dfrac{xy^2+y^2(y^2-x)+1}{x^2y^4+2y^4+x^2+2}=\dfrac{y^4+1}{(x^2+2)(y^4+1)}=\dfrac{1}{x^2+2}$

b) Ta có: $A=\dfrac{x^4(x-2)+2x^2(x-2)-3(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{(x-2)(x^4+2x^2-3)}{(x+1)(x-2)}=(x^2+3)(x-1)$

Bài 4. *Rút gọn biểu thức* $B=\dfrac{x^3-y^3-z^3-3xyz}{(x+y)^2+(y-z)^2+(x+z)^2}$

HD: Ta có:

$$*)\ x^3-y^3-z^3-3xyz=(x-y)^3+3xy(x-y)-z^3-3xyz$$
$$=(x-y-z)^3+3(x-y)z(x-y-z)+3xy(x-y-z)$$
$$=(x-y-z)\left[(x-y-z)^2+3xz-3yz+3xy\right]$$
$$=(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy-yz+xz)$$
$$*)(x+y)^2+(y-z)^2+(x+z)^2$$
$$=x^2+2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+x^2+2xz+z^2=2(x^2+y^2+z^2+xy-yz+xz)$$
$$\text{Vậy } B=\frac{(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy-yz+xz)}{2(x^2+y^2+z^2+xy-yz+xz)}=\frac{x-y-z}{2}$$

Bài 5. ***Rút gọn biểu thức:***

a) $P=\dfrac{abc+a+b+c-(ab+bc+ca+1)}{a^2b+1-(a^2+b)}$. b) $Q=\dfrac{1+x^4+x^8+...+x^{2020}}{1+x^2+x^4+...+x^{2022}}$

HD:

a) $P=\dfrac{abc-bc+a-1-ab+b-ac+c}{a^2b-a^2-b+1}=\dfrac{(a-1)(bc+1-b-c)}{(b-1)(a^2-1)}=\dfrac{(a-1)(b-1)(c-1)}{(b-1)(a+1)(a-1)}=\dfrac{c-1}{a+1}$.

b) Ta có: $Q=\dfrac{1+x^4+x^8+...+x^{2020}}{(1+x^4+x^8+...+x^{2020})+(x^2+x^6+x^{10}+...+x^{2022})}$

$$=\frac{1+x^4+x^8+...+x^{2020}}{(1+x^2)(1+x^4+x^8+...+x^{2020})}=\frac{1}{1+x^2}$$

Bài 6. ***Rút gọn biểu thức:*** $B=\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}$.

HD:

Phân tích. Quan sát các phân thức, chúng ta nhận thấy không có mẫu của hạng tử nào phân tích được thành nhân tử nên việc quy đồng mẫu thức tất cả các hạng tử là không khả thi. Nhận thấy mẫu của hai phân thức đầu có dạng a – b và a + b, thực hiện trước tổng của hai phân thức này cho ta kết quả gọn.Với suy luận ấy, chúng ta tiếp tục cộng kết quả ấy với phân thức tiếp theo.

Ta có: $B=\dfrac{2a}{a^2-b^2}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}$

$$\Rightarrow B=\frac{4a^3}{a^4-b^4}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}\Rightarrow B=\frac{8a^7}{a^8-b^8}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}\Rightarrow B=\frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}$$

Bài 7. ***Rút gọn biểu thức:*** $A=\dfrac{20x^2+120x+180}{(3x+5)^2-4x^2}+\dfrac{5x^2-125}{9x^2-(2x+5)^2}-\dfrac{(2x+3)^2-x^2}{3(x^2+8x+15)}$.

HD: Ta có: $A=\dfrac{20(x+3)^2}{(x+5).5(x+1)}+\dfrac{5(x-5)(x+5)}{5(x+1)(x-5)}-\dfrac{(x+3).3.(x+1)}{3(x+3)(x+5)}$

$$=\frac{4(x+3)^2}{(x+5)(x+1)}+\frac{x+5}{x+1}-\frac{x+1}{x+5}=\frac{4(x+3)^2+(x+5)^2-(x+1)^2}{(x+1)(x+5)}$$

$$=\frac{4x^2+24x+36+x^2+10x+25-x^2-2x-1}{(x+1)(x+5)}$$

$$=\frac{4x^2+32x+60}{(x+5)(x+1)}=\frac{4(x+3)(x+5)}{(x+5)(x+1)}=\frac{4(x+3)}{x+1}$$

Bài 8. ***Rút gọn biểu thức:*** $A=\frac{2x+3y}{xy+2x-3y-6}-\frac{6-xy}{xy+2x+3y+6}-\frac{x^2+9}{x^2-9}$.

HD:

Ta có: $A=\frac{2x+3y}{x(y+2)-3(y+2)}-\frac{6-xy}{x(y+2)+3(y+2)}-\frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)}$

$$=\frac{2x+3y}{(y+2)(x-3)}-\frac{6-xy}{(y+2)(x+3)}-\frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{(2x+3y)(x+3)-(6-xy)(x-3)-(x^2+9)(y+2)}{(x-3)(x+3)(y+2)}$$

$$=\frac{2x^2+6x+3xy+9y-6x+18+x^2y-3xy-x^2y-2x^2-2y-18}{(x-3)(x+3)(y+2)}=0$$

Bài 9. ***Rút gọn biểu thức*** $P=\dfrac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}$

HD: Ta có: $P=\dfrac{\frac{x^2+y^2+xy}{xy}\left(\frac{x-y}{xy}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x^2+y^2}{xy}}=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}.\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}:\frac{x^4+y^4-(x^2+y^2)xy}{x^2y^2}$

$$=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}.\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}:\frac{x^4+y^4-x^3y-y^3x}{x^2y^2}$$

$$=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}.\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}.\frac{x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)}=\frac{1}{xy}$$

Bài 10. ***Chứng minh giá trị biểu thức*** $P=\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$ ***không phụ thuộc vào biến x***

HD:

Ta có: $P=\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}=\frac{x^2+ax^2+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-ax^2-a+a^2+a^2x^2+1}$

$$=\frac{\left(1+x^2\right)+\left(1+x^2\right)a+\left(1+x^2\right)a^2}{\left(1+x^2\right)-\left(1+x^2\right)a+\left(1+x^2\right)a^2}=\frac{\left(1+x^2\right)\left(1+a+a^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1-a+a^2\right)}=\frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}$$

Vậy giá trị biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của x.

- ***Bài tập tự giải***

Bài 1. ***Rút gọn các phân thức sau với n là số tự nhiên:***

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!(n+2)}$ b) $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ c) $\dfrac{(n+1)!-(n+2)!}{(n+1)!+(n+2)!}$

Bài 2. ***Rút gọn biểu thức***

a) $A=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}+\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

b) $B=(ab+bc+ca)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-abc\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$

c) $A=\dfrac{1}{a^2+a}+\dfrac{1}{a^2+3a+2}+\dfrac{1}{a^2+5a+6}+\dfrac{1}{a^2+7a+12}+\dfrac{1}{a^2+9a+20}$

Dạng 2. ***Rút gọn biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước của biến.***

Bài 1. ***Cho*** $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$. ***Rút gọn biểu thức:*** $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2}$

HD: Đặt $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ suy ra: $x=ak$; $y=bk$; $z=ck$.

Từ đó ta có $P=\dfrac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{\left(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2\right)^2}=\dfrac{k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$ Suy ra $P=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Bài 2. ***Cho abc = 2; rút gọn biểu thức*** $A=\dfrac{a}{ab+a+2}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{2c}{ac+2c+2}$

HD: Ta có :

$$A=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{2c}{ac+2c+2}=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{2+ab+a}+\frac{2c}{ac+2c+abc}$$

$$=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{2+ab+a}+\frac{2c}{c(a+2+ab)}=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{2+ab+a}+\frac{2}{a+2+ab}=\frac{ab+a+2}{ab+a+2}=1$$

Bài 3. ***Cho x + y + z = 1. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến số:*** $P=\dfrac{(x+y)^2}{xy+z}.\dfrac{(y+z)^2}{yz+x}.\dfrac{(z+x)^2}{zx+y}$

HD:

Phân tích: Khai thác điều kiện bài toán, nhận thấy với điều kiện này chúng ta có thể cân bằng bậc ở mẫu và phân tích thành nhân tử được $xy+z=xy+z(x+y+z)=(z+x)(z+y)$.

Do vậy chúng ta có lời giải sau:

Lời giải

Thay $1=x+y+z$ vào mẫu số, ta được:

$xy+z=xy+z(x+y+z)=(z+x)(z+y)$

Tương tự ta có: $yz+x=(x+y)(x+z)$

$zx+y=(x+y)(y+z)$

Từ đó suy ra: $P=\dfrac{(x+y)^2}{(x+z)(y+z)}.\dfrac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)}.\dfrac{(z+x)^2}{(x+y)(y+z)}\Rightarrow P=1$

Vậy giá trị biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến.

Bài 4. ***Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Rút gọn biểu thức sau:***

$$B=\frac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

HD:

Thay $1=ab+bc+ca$, ta được:

$a^2+2bc-1=a^2+bc-ab-ca=a(a-b)-c(a-b)=(a-c)(a-b)$

Tương tự: $b^2+2ca-1=(b-c)(b-a)$; $c^2+2ab-1=(c-a)(c-b)$

Vậy $B=\dfrac{(a-b)(a-c)(b-a)(b-c)(c-a)(c-b)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=\dfrac{-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}=-1$

Bài 5. ***Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn ab + bc + ca = 1***

Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$.

HD: **Phân tích:** Nhận thấy mẫu thức có thể phân tích thành nhân tử bằng cách sử dụng giả thiết. Do vậy nên thay $1=ab+bc+ca$ vào mẫu và phân tích đa thức thành nhân tử. Những bài toán rút gọn có điều kiện, chúng ta nên vận dụng và biến đổi khéo léo điều kiện.

Lời giải

Thay $1=ab+bc+ca$, ta được $1+a^2=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

Tương tự: $1+b^2=(b+c)(c+a)$; $1+c^2=(c+a)(c+b)$

Vậy $A=\dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)(a+c)(b+a)(b+c)(c+a)(c+b)}=1$.

Bài 6. ***Cho a + b + c = 0; rút gọn biểu thức*** $B=\dfrac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\dfrac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\dfrac{c^2}{c^2-b^2-a^2}$

HD: Từ $a+b+c=0$ ½ $a=-(b+c)\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2bc\Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc$

Tương tự ta có: $b^2-a^2-c^2=2ac$; $c^2-b^2-a^2=2ab$ (Hoán vị vòng quanh), nên

$B=\dfrac{a^2}{2bc}+\dfrac{b^2}{2ac}+\dfrac{c^2}{2ab}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$ (1)

$a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có $B=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}=\dfrac{3abc}{2abc}=\dfrac{3}{2}$ (Vì $abc\neq 0$)

Bài 7. ***Cho a + b+ c = abc. Chứng minh rằng:*** $\dfrac{a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)}{ab+bc+ca-3}=abc.$

HD: Xét tử thức ta có:

$$ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c$$
$$=\left(ab^2+a^{2b}+abc\right)+\left(ac^2+a^2c+abc\right)+\left(bc^2+bc^2+abc\right)-3abc$$
$$=ab\left(a+b+c\right)+ac\left(a+b+c\right)+bc\left(a+b+c\right)-3abc$$
$$=\left(a+b+c\right)\left(ab+ac+bc\right)-3abc=abc\left(ab+ac+bc-3\right)$$

Vậy suy ra: $\dfrac{a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)}{ab+bc+ca-3}=abc.$ (đpcm)

Bài 8. ***Cho a + b + c = 0. Chứng minh rằng tích sau không phụ thuộc vào biến số:***

a) $M=\dfrac{4bc-a^2}{bc+2a^2}\cdot\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}\cdot\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}$ b) $N=\left(1+\dfrac{a}{b}\right).\left(1+\dfrac{b}{c}\right).\left(1+\dfrac{c}{a}\right)$

HD:

a) Ta có: $\dfrac{4bc-a^2}{bc+2a^2}=\dfrac{4bc-\left(b+c\right)^2}{bc+a^2-a\left(b+c\right)}=\dfrac{-\left(b^2-2bc+c^2\right)}{bc+a^2-ab-ac}=\dfrac{-\left(b-c\right)^2}{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}$ (1)

Tương tự ta có: $\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}=\dfrac{-\left(c-a\right)^2}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)}$ (2)

$\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}=\dfrac{-\left(a-b\right)^2}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}$ (3)

Từ (1) và (2), (3) ta có: $M=\dfrac{4bc-a^2}{bc+2a^2}\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}=\dfrac{-\left(a-b\right)^2\left(b-c\right)^2\left(c-a\right)^2}{-\left(a-b\right)^2\left(b-c\right)^2\left(c-a\right)^2}=1$

Vậy giá trị biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến.

b) Ta có: $N=\left(1+\dfrac{a}{b}\right).\left(1+\dfrac{b}{c}\right).\left(1+\dfrac{c}{a}\right)=\dfrac{a+b}{b}\cdot\dfrac{c+b}{c}\cdot\dfrac{a+c}{a}=\dfrac{\left(-c\right)\left(-a\right)\left(-b\right)}{abc}=-1$

Vậy giá trị biểu thức N không phụ thuộc vào giá trị của biến.

Bài 9. ***Cho*** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\neq 0$***. Rút gọn biểu thức*** $A=\dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(ax+by+cz\right)^2}$

HD: Đặt $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=k\neq 0\Rightarrow x=ka;\ y=kb;\ z=kc$

Ta có: $A=\dfrac{\left(k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(aka+bkb+ckc\right)^2}=\dfrac{k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=1$

Bài 10. ***Cho*** $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2$***. Rút gọn biểu thức:*** $P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}.$

HD:

Phân tích. Nhận thấy nếu quy đồng mẫu trực tiếp là không khả thi bởi các mẫu hiện tại không phân tích thành nhân tử được và nếu quy đồng thì biểu thức rất phức tạp, mặt khác chưa khai thác được giả thiết. Phân tích giả thiết ta được $ab+bc+ca=0$, khai thác yếu tố này vào mẫu thức ta được: $a^2+2bc=a^2+2bc-ab-bc-ca$ và phân tích thành nhân tử được. Do vậy ta có lời giải sau:

Lời giải:

Từ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2$

nên $ab+bc+ca=0$

Xét $a^2+2bc=a^2+2bc-ab-bc-ca=a^2-ab-ca+bc=(a-b)(a-c)$.

Tương tự ta có: $b^2+2ac=(b-a)(b-c); c^2+2ab=(c-a)(c-b)$.

Do đó ta có: $P=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$\Rightarrow P=-\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

Bài 11. ***Cho ax + by + cz = 0. Rút gọn phân thức:*** $A=\dfrac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ac(x-z)^2+ab(x-y)^2}$

HD:

Áp dụng HĐT: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$

$ax+by+cz=0 \Rightarrow (ax+by+cz)^2=0 \Rightarrow a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(axby+axcz+bycz)=0$

$\Rightarrow a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=-2(axby+axcz+bycz)$ (1)

Biến đổi mẫu thức:

$bc(y-z)^2+ac(x-z)^2+ab(x-y)^2$

$=bcy^2+bcz^2+acx^2+acz^2+abx^2+aby^2-2(abxy+acxz+bcyz)$ (2)

Thay (1) và (2) thì mẫu thức bằng

$(bcy^2+acx^2+c^2z^2)+(bcz^2+abx^2+b^2y^2)+(acz^2+aby^2+a^2x^2)$

$=c(by^2+ax^2+cz^2)+b(cz^2+ax^2+by^2)+a(cz^2+by^2+ax^2)$

$=(cz^2+by^2+ax^2)(a+b+c)$

Vậy $A=\dfrac{1}{a+b+c}$

Bài 12. ***Rút gọn biểu thức*** $A=2\left|\dfrac{y-x}{xy}\right|+\left|\dfrac{y+x}{xy}-\dfrac{2}{z}\right|+\dfrac{y+x}{xy}+\dfrac{2}{z}$

Trong đó $x>5$ ***và*** $y=\dfrac{x^2-25}{x+\dfrac{10x+25}{x}}$; $z=\dfrac{x^2-25}{x+\dfrac{15x+25}{x-5}}$

HD:

Ta có $y=\dfrac{(x-5)(x+5)}{\dfrac{x+10x+5}{x}}=\dfrac{x(x-5)(x+5)}{(x+5)^2}=\dfrac{x(x-5)}{(x+5)}$

$$z=\frac{(x-5)(x+5)}{\dfrac{x^2-5x+15x+25}{x-5}}=\frac{(x-5)^2(x+5)}{(x+5)^2}=\frac{(x-5)^2}{x+5}$$

Từ đó suy ra: $xy=\dfrac{x^2(x-5)}{x+5}$

$$y-x=\frac{x^2-5x}{x+5}-x=\frac{x^2-5x-x^2-5x}{x+5}=\frac{-10x}{x+5}$$

$$\Rightarrow\frac{y-x}{xy}=\frac{-10x}{x+5}:\frac{x^2(x-5)}{x+5}=\frac{-10x}{x+5}.\frac{x+5}{x^2(x-5)}=\frac{-10}{x(x-5)}$$

$$y+x=\frac{x^2-5x}{x+5}+x=\frac{x^2-5x+x^2+5x}{x+5}=\frac{2x^2}{x+5}$$

$$\Rightarrow\frac{y+x}{xy}=\frac{2x^2}{x+5}:\frac{x^2(x-5)}{x+5}=\frac{2x^2}{x+5}\cdot\frac{x+5}{x^2(x-5)}=\frac{2}{x-5}$$

Do vậy $A=2\left|\dfrac{-10}{x(x-5)}\right|+\left|\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{2(x+5)}{(x-5)^2}\right|+\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{2(x+5)}{(x-5)^2}$

$$=2\frac{10}{x(x-5)}+\left|\frac{2(x-5)-2(x+5)}{(x-5)^2}\right|+\frac{2(x-5)+2(x+5)}{(x-5)^2}$$

$$=\frac{20}{x(x-5)}+\left|\frac{-20}{(x-5)^2}\right|+\frac{4x}{(x-5)^2}=\frac{20}{x(x-5)}+\frac{20}{(x-5)^2}+\frac{4x}{(x-5)^2}$$

$$=\frac{20(x-5)+20x+4x^2}{x(x-5)^2}=\frac{4x^2+40x-100}{x(x-5)^2}$$

Dạng 3. ***Rút gọn các biểu thức có tính quy luật***

Bài 1. ***Rút gọn biểu thức*** $P=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Nhận xét:

$\dfrac{1}{1.3}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)$; $\dfrac{1}{3.5}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$; $\dfrac{1}{5.7}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)$

$$\Rightarrow\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được kết quả:

$$L(n)=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

Bài 2. ***Rút gọn biểu thức*** $M=\dfrac{1}{1.5}+\dfrac{1}{5.9}+\dfrac{1}{9.13}+...+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

HD: Nhận xét: $\dfrac{1}{1.5}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{5}\right)$; $\dfrac{1}{5.9}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}\right)$; $\dfrac{1}{9.13}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{13}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$$ Cộng vế theo các đẳng thức trên ta được:

$$M = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

Bài 3. ***Rút gọn các biểu thức***

a) $\frac{150}{5.8} + \frac{150}{8.11} + \frac{150}{11.14} + ... + \frac{150}{47.50}$ b) $D = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

HD: a) $C = \frac{150}{5.8} + \frac{150}{8.11} + \frac{150}{11.14} + ... + \frac{150}{47.50} = 150.\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + ... + \frac{1}{47} - \frac{1}{50}\right) = 45$

b) Nhận xét:

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right); \quad \frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right); \quad \frac{1}{3.4.5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Bài 4. ***Rút gọn biểu thức*** $D = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2).(n+3)}$

HD: **Ta có**

$$\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4}\right); \ \frac{1}{2.3.4.5} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5}\right); \ \frac{1}{3.4.5.6} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3.4.5} - \frac{1}{4.5.6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$D = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right) = \frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Bài 5. ***Rút gọn biểu thức:*** $B = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + ... + \frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$

HD: Ta tách từng phân thức thành hiệu của hai phân thức rồi dùng phương pháp khử liên tiếp, ta được:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - k^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Do đó $B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

Bài 6. ***Rút gọn biểu thức*** $A = \left(1 + \frac{2}{1.4}\right)\left(1 + \frac{2}{2.5}\right)\left(1 + \frac{2}{3.6}\right)...\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$ ***với n nguyên dương:***

HD: **Phân tích.** Với phép nhân các biểu thức theo quy luật, chúng ta thường xét phân thức có dạng tổng quát. Sau đó phân tích thành nhân tử cả tử và mẫu dạng tổng quát ấy. Cuối cùng thay các giá trị từ 1 đến *n* vào biểu thức và rút gọn.

Xét $1+\dfrac{2}{k(k+3)}=\dfrac{k^2+3k+2}{k(k+3)}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$

Thay $k=1;\ 2;\ 3;...;n$ ta được:

$$A=\frac{2.3}{1.4}.\frac{3.4}{2.5}.\frac{4.5}{3.6}...\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}=\frac{2.3.4...(n+1)}{1.2.3...n}.\frac{3.4.5...(n+2)}{4.5.6...(n+3)}=\frac{3(n+1)}{n+3}$$

Bài 7. ***Rút gọn các biểu thức***

a) $A=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right).\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right).\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)........\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ b) $B=\dfrac{1^2}{2^2-1}\cdot\dfrac{3^2}{4^2-1}\cdot\dfrac{5^2}{6^2-1}\cdot....\cdot\dfrac{n^2}{(n+1)^2-1}$

HD:

a) Ta có $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k^2-1}{k^2}=\dfrac{(k+1)(k-1)}{k^2}$. Nên ta có:

$$A=\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{2.4}{3^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1.3.2.4.3.5...(n-1)(n+1)}{2^2.3^2.4^2...n^2}$$

$$=\frac{1.2.3...(n-1)}{2.3.4...(n-1)n}\cdot\frac{3.4.5...(n+1)}{2.3.4...n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

b) Ta có: $2^2-1=1.3$, $4^2-1=3.5$, $6^2-1=5.7$,..., $(n+1)^2-1=n(n+2)$

Suy ra $B=\dfrac{1^2}{1.3}\cdot\dfrac{3^2}{3.5}\cdot\dfrac{5^2}{5.7}\cdot....\cdot\dfrac{n^2}{n(n+2)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{7}\cdot...\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{n+2}$

Bài 8. ***Rút gọn các biểu thức***

a) $A=\dfrac{3^2-1}{5^2-1}\cdot\dfrac{7^2-1}{9^2-1}\cdot\dfrac{11^2-1}{13^2-1}\cdots\dfrac{43^2-1}{45^2-1}$ b) $P=\dfrac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)...(21^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)...(23^4+4)}$

HD:

a) $A=\dfrac{2.4}{4.6}\cdot\dfrac{6.8}{8.10}\cdot\dfrac{10.12}{12.14}\cdots\dfrac{42.44}{44.46}=\dfrac{2}{46}=\dfrac{1}{23}$

b) Xét $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=\left[(n-1)^2+1\right]\left[(n+1)^2+1\right]$

Do đó: $P=\dfrac{(0^2+1)(2^2+1)}{(2^2+1)(4^2+1)}\cdot\dfrac{(4^2+1)(6^2+1)}{(6^2+1)(8^2+1)}\cdots\dfrac{(20^2+1)(22^2+1)}{(22^2+1)(24^2+1)}=\dfrac{1}{24^2+1}=\dfrac{1}{557}$

Bài 9. ***a) Cho*** $A=\dfrac{n-1}{1}+\dfrac{n-2}{2}+...+\dfrac{2}{n-2}+\dfrac{1}{n-1}$; $B=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{n}$. ***Tính A : B***

b) $A=\dfrac{1}{1.(2n-1)}+\dfrac{1}{3.(2n-3)}+...+\dfrac{1}{(2n-3).3}+\dfrac{1}{(2n-1).1}$; $B=1+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2n-1}$. ***Tính*** $\dfrac{A}{B}$

HD: ***a)*** Ta có $A=\dfrac{n-1}{1}+\dfrac{n-2}{2}+...+\dfrac{n-(n-2)}{n-2}+\dfrac{n-(n-1)}{n-1}$

$$=\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+...+\frac{n}{n-2}+\frac{n}{n-1}-\Big(\underbrace{1+1+...+1}_{n-1}\Big)=n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+...+\frac{n}{n-1}-(n-1)$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+...+\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n}=n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=nB$$ Vậy A : B = n

b) Ta có: $\dfrac{1}{k(2n-k)}=\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2n+k}\right)$. Do đó

$$A=\frac{1}{2n}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}\right)+...+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\left(1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}+......+\frac{1}{3}+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2n}.2.\left(1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}\right)=\frac{1}{2n}.2.B\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{1}{n}$$

Chủ đề 4. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC CHỨA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Dạng 1. Biến đổi vế này thành vế kia

Bài 1. ***Với n nguyên dương. Chứng minh rằng:*** $\dfrac{1}{4+1^4}+\dfrac{3}{4+3^4}+...+\dfrac{2n-1}{4+(2n-1)^4}=\dfrac{n^2}{4n^2+1}$

HD: Phân tích. Quan sát đẳng thức, chúng ta nhận thấy vế trái là tổng những phân thức viết theo quy luật và vế trái dài, phức tạp hơn vế phải. Những bài toán có một vế phức tạp và một vế đơn giản, chúng ta biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản. Do đó chúng ta định hướng biến đổi vế trái thành vế phải.

Nhận thấy nếu vế trái là tổng những phân thức viết theo quy luật, thì chúng ta tách mỗi phân thức thành hiệu hai phân thức để khử liên tiếp.

Ta có: $4+m^4=(m^4+4m^2+4)-4m^2=(m^2+2)^2-(2m)^2$

$$=(m^2+2m+2)(m^2-2m+2)=\left[(m+1)^2+1\right]\left[(m-1)^2+1\right]$$

Thay m = 2k – 1 ta có: $4+(2k-1)^4=\left[(2k)^2+1\right]\left[(2k-2)^2+1\right]$

Nên $\dfrac{1}{(2k-2)^2+1}-\dfrac{1}{(2k)^2+1}=\dfrac{(2k)^2+1-(2k-2)^2-1}{4+(2k-1)^4}=\dfrac{4(2k-1)}{4+(2k-1)^4}$

$$\Rightarrow\frac{2k-1}{4+(2k-1)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2k-2)^2+1}-\frac{1}{(2k)^2+1}\right]$$

Cho k = 1, 2, 3, …, n ta được:

$$VT=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{0^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+...+\frac{1}{(2n-2)^2+1}-\frac{1}{(2n)^2+1}\right]=\frac{n^2}{1+4n^2}$$

Suy ra VT = VP. Điều phải chứng minh.

Bài 2. ***Với mọi n nguyên dương, chứng minh rằng:*** $\dfrac{3}{1.2}+\dfrac{7}{2.3}+\dfrac{13}{3.4}+...+\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\dfrac{n^2+2n}{n+1}$

HD: Ta có: $\dfrac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\dfrac{1}{k(k+1)}=1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

Thay lần lượt $k=1,2,3,...,n$ ta được:

$$VT=\left(1+1-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$$

Nhận xét. Ta cũng có thể biến đổi bài toán như sau: $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}+\frac{k}{k+1}$

Thay lần lượt $k=1,2,3,...,n$ ta được:

$$VT=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}\right)=n+\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$$

Bài 3. ***Chứng minh rằng:*** $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ***Biết*** $a+b+c=2p$.

HD: Xét vế trái: $VT=\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{p-b+p-a}{(p-a)(p-b)}+\frac{p-p+c}{p(p-c)}$

$$=\frac{c}{(p-a)(p-b)}+\frac{c}{p(p-c)}=\frac{c[p(p-c)+(p-a)(p-b)]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{c[2p^2-p(a+b+c)+ab]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Bài 4. ***Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn*** $a+b+c=0$. ***Chứng minh rằng:*** $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$

HD: Thật vậy, ta có: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{ab+bc+ca}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$ (vì $a + b + c = 0$) (Đpcm)

Nhận xét. Nếu a, b, c là các số hữu tỉ thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ là số hữu tỉ nên bạn có thể chứng minh được bài toán sau: Cho a, b, c là các số hữu tỉ khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Nếu đặt $a=x-y$; $b=y-z$; $c=z-x$ thì ta được bài toán hay và khó sau:

Chứng minh rằng $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 5. ***Cho ba số a, b, c thỏa mãn*** $b\neq c$; $a+b\neq c$ ***và*** $a^2+b^2=(a+b-c)^2$

Chứng minh đẳng thức $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$

HD: Từ $a^2+b^2=(a+b-c)^2\Rightarrow a^2=(a+b-c)^2-b^2$; $b^2=(a+b-c)^2-a^2$

Suy ra $VT=\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a+b-c)^2-b^2+(a-c)^2}{(a+b-c)^2-a^2+(b-c)^2}=\frac{(a+2b-c)(a-c)+(a-c)^2}{(b+2a-c)(b-c)+(b-c)^2}$

$$=\frac{(a-c)(2a+2b-2c)}{(b-c)(2a+2b-2c)}=\frac{a-c}{b-c}=VP$$

Bài 6. ***Cho $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$. Chứng minh rằng:***

a) $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=1$ b) $\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}=1$

HD:

Từ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

Suy ra $ab+bc+ca=0$

Xét $a^2+2bc=a^2+2bc-ab-bc-ca=a^2-ab-ca+bc=(a-b)(a-c)$

Tương tự ta có $b^2+2ac=(b-c)(b-a);c^2+2ab=(c-a)(c-b)$

a) Xét vế trái ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b+c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(b-c)\left(a^2+bc-ab-ac\right)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$$

b) Xét vế trái, ta có:

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}=\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{bc(b-c)+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(b-c)\left(bc+a^2-ab-ac\right)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$$

Bài 7. ***Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn a + b + c = 0***

Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{a-b}.\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)=1+\frac{2c^3}{abc}$

HD: Biến đổi vế trái:

Ta có: $VT=\frac{a+b}{a-b}.\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\left(\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)$

$$=1+\frac{c}{b-a}\left(\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}\right)=1+\frac{c}{b-a}\left(\frac{bc-b^2+a^2-ac}{ab}\right)$$

$$=1+\frac{c}{b-a}.\frac{(a-b)(a+b-c)}{ab}=1+\frac{-c}{a-b}.\frac{(a-b)(-c-c)}{ab}=1+\frac{2c^2}{ab}=1+\frac{2c^3}{abc}$$

Vế trái bằng vế phải, ta có điều phải chứng minh.

Dạng 2. *Biến đổi cả hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba*

Bài 1. ***Chứng minh đẳng thức:*** $\dfrac{a^2+3ab}{a^2-9b^2}+\dfrac{2a^2-5ab-3b^2}{6ab-a^2-9b^2}=\dfrac{a^2+ab+ac+bc}{3bc-a^2-ac+3ab}$

HD:

Phân tích. Đẳng thức này nhận thấy vế phải có c, vế trái không có c. Tức là có thể biến đổi rút gọn nhằm triệt tiêu c. Vế trái là tổng hai phân thức, vế phải là một phân thức, do vậy ta có thể biến đổi vế trái thành một phân thức và rút gọn.

Những bài toán hai vế đều phức tạp, chúng ta có thể biến đổi cả hai vế, và chứng tỏ cùng bằng biểu thức thứ ba.

- Biến đổi vế phải. $VP=\dfrac{(a+b)(a+c)}{3b(c+a)-a(a+c)}=\dfrac{(a+b)(a+c)}{(a+c)(3b-a)}=\dfrac{a+b}{3b-a}\quad (1)$
- Biến đổi vế trái. $VT=\dfrac{a(a+3b)}{(a-3b)(a+3b)}+\dfrac{(a-3b)(2a+b)}{-(a-3b)^2}$

$$=\frac{a}{a-3b}-\frac{2a+b}{a-3b}=\frac{-a-b}{a-3b}=\frac{a+b}{3b-a}\quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có vế trái bằng vế phải, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2. ***Cho a, b, c đôi một khác nhau và các đa thức: Chứng minh rằng:*** $P^2(x)=Q(x)$. ***Biết***

$$P(x)=a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$Q(x)=a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

HD: Xét $P(x)=\dfrac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

$$P(x)=\frac{a(x-b)(x-c)(c-b)+b(x-a)(x-c)(a-c)+c(x-a)(x-b)(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

$$P(x)=\frac{a(x-b)(x-c)(c-b)-b(x-a)(x-c)(c-b)-b(x-a)(x-c)(b-a)+c(x-a)(x-b)(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

$$P(x)=\frac{(x-c)(c-b)[a(x-b)-b(x-a)]-(x-a)(b-a)[b(x-c)-c(x-b)]}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

$$P(x)=\frac{(x-c)(c-b)(ax-bx)-x(x-a)(b-a)(b-c)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=\frac{x(a-b)(c-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(c-b)}=x$$

* Xét $Q(x)=\dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

$$Q(x)=\frac{a^2(x-b)(x-c)(c-b)+b^2(x-a)(x-c)(a-c)+c^2(x-a)(x-c)(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

Xét tử số:

$$a^2(x-b)(x-c)(c-b)+b^2(x-a)(x-c)(a-c)+c^2(x-a)(x-c)(b-a)$$

$$=a^2(x-b)(x-c)(c-b)-b^2(x-a)(x-c)(c-b)-b^2(x-a)(x-c)(b-a)+c^2(x-a)(x-b)(b-a)$$

$$=(x-c)(c-b)\left[a^2(x-b)-b^2(x-a)\right]-(x-a)(b-a)\left[b^2(x-c)-c^2(x-b)\right]$$

$$= (x-c)(c-b)(a-b)(ax+bx-ab) - (x-a)(b-a)(b-c)(bx+cx-bc)$$
$$= (a-b)(c-b)\left[(x-c)(ax+bc-ab) - (x-a)(bc+cx-bc)\right]$$
$$= (a-b)(c-b)\left[ax^2+bx^2-abx-acx-bcx+abc-bx^2-cx^2+bcx+abx+acx-abc\right]$$
$$= (a-b)(c-b)\left[ax^2-cx^2\right] = x^2(a-b)(c-b)(a-c)$$
$$\Rightarrow Q(x) = \frac{x^2(a-b)(c-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(c-b)} = x^2 \qquad \text{Vậy suy ra } P^2(x) = Q(x)$$

Dạng 3. Từ điều kiện tạo ra thành phần một vế

Bài 1. ***Cho*** $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$. ***Chứng minh rằng:*** $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$

HD:

Phân tích. Quan sát kĩ phần giả thiết và phần kết luận. Chúng ta thấy có phần giống nhau và phần khác nhau. Từ giả thiết chúng ta có thể tạo ra vế trái của đẳng thức. Do vậy từ giả thiết chúng ta cần nhân với bộ phận thích hợp để tạo ra vế trái của đẳng thức, sau đó biến đổi phần còn lại triệt tiêu.

Nhận xét: Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=-c \\ a+c=-b \\ c+a=-b \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=-3$

Vậy $a+b+c \neq 0$

Nhân cả 2 vế của $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$ với $a+b+c$ ta được:

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=a+b+c$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c \Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

Bài 2. ***a) Biết*** $a^3-3ab^2=5$ ***và*** $b^3-3a^2b=10$. ***Tính*** $M=\dfrac{a^2+b^2}{2018}$

b) Cho $abc=1$. ***Chứng minh rằng*** $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ac+c+1}=1$

HD:

a) Từ $a^3-3ab^2=5 \Rightarrow a^6-6a^4b^2+9a^2b^4=25 \qquad (1)$

$b^3-3a^2b=10 \Rightarrow b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=100 \qquad (2)$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được: $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=125 \Leftrightarrow (a^2+b^2)^3=5^3$

$\Rightarrow (a^2+b^2)=5 \Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2018}=\dfrac{5}{2018}$. Vậy $M=\dfrac{5}{2018}$

b) Ta có: $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ac+c+1}=\dfrac{ac}{abc+ac+c}+\dfrac{abc}{abc^2+abc+ac}+\dfrac{c}{ac+c+1}$

$$=\frac{ac}{1+ac+c}+\frac{abc}{c+1+ac}+\frac{c}{ac+c+1}=\frac{abc+ac+1}{abc+ac+1}=1$$

Bài 3. ***Cho*** $x+y=1$ ***và*** $xy\neq 0$***. Chứng minh rằng:*** $P=\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}+\dfrac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$

HD: Ta có: $x+y=1\Rightarrow y=1-x$ hay $-y=x-1$ và $-x=y-1$

Biến đổi $\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}=\dfrac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)}=\dfrac{(x^4-y^4)-(x-y)}{xy(y^2+y+1)(x^2+x+1)}$

$$=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy\left[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2\right]}\qquad (*)$$

$$=\frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy\left[x^2y^2+(x+y)^2+2\right]}=\frac{(x-y)\left[x(x-1)+y(y-1)\right]}{xy(x^2y^2+3)}\qquad (**)$$

$$=\frac{(x-y)\left[x(-y)+y(-x)\right]}{xy(x^2y^2+3)}=\frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)}=\frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}$$

Suy ra $P=-\dfrac{2(x-y)}{x^2y^2+3}+\dfrac{2(x-y)}{x^2y^2+3}=0$ (đpcm)

Chú ý: Ở bước (**) ta đã thay x + y = 1 vào biểu thức x^2+y^2-1 và $xy(x+y)$ ở bước (*) đồng thời áp dụng HĐT: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

Bài 4. ***Cho*** $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$ ***và*** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$***. Chứng minh rằng:*** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

HD:

Từ $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0\Leftrightarrow\dfrac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0\Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$

Ta có: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2-2.\left(\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{xz}{ac}+\dfrac{yz}{bc}\right)=1-2\cdot\dfrac{cxy+bxz+ayz}{abc}=1-2.0=1$

Bài 5. ***a) Chứng minh rằng: Nếu*** $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ ***thì*** $x=y=z$

b) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn : $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}$***. CMR:*** $a=b=c$

HD:

a) Ta có: $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx\Rightarrow 2x^2+2y^2+2z^2=2xy+2yz+2zx$

$$\Rightarrow(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=0$$

$$\Rightarrow(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0\qquad (1)$$

Ta có: $(x-y)^2\geq 0,(y-z)^2\geq 0,(z-x)^2\geq 0$

Do đó $(1)\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\y-z=0\Rightarrow x=y=z\\z-x=0\end{cases}$

b) Ta có: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\Leftrightarrow a^4c^2+b^4a^2+c^4b^2=abc\left(a^2c+c^2a+b^2c\right)$

Đặt $x=a^2c,\ y=b^2a,\ z=c^2b$. Ta được: $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$

Áp dụng kết quả câu a ta được:

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0\Rightarrow x=y=z$

$\Rightarrow a^2c=b^2a=c^2b\Rightarrow ac=b^2;\ bc=a^2;\ ab=c^2\Rightarrow a=b=c$

Bài 6. ***Chứng minh rằng: Nếu*** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ ***và*** $a+b+c=abc$ ***thì ta có*** $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$

HD: Theo giả thiết: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ nên $a\neq 0;\ b\neq 0;\ c\neq 0$

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=4$

$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=4$

Vì $a+b+c=abc\Rightarrow\frac{a+b+c}{abc}=1\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2=4\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$ (đpcm)

Bài 7. ***Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:***

Nếu $a+b+c=0$ ***thì*** $P=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$

HD: Đặt $\frac{a-b}{c}=x;\ \frac{b-c}{a}=y;\ \frac{c-a}{b}=z\Rightarrow\frac{c}{a-b}=\frac{1}{x};\ \frac{a}{b-c}=\frac{1}{y};\ \frac{b}{c-a}=\frac{1}{z}$ (1)

Suy ra $P\Leftrightarrow(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9$

Ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$ (2)

Ta lại có: $\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\frac{c}{a-b}=\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}.\frac{c}{a-b}$

$$=\frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)}=\frac{c(c-a-b)}{ab}=\frac{c\left[2c-(a+b+c)\right]}{ab}=\frac{2c^2}{ab}$$

Tương tự ta có: $\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc};\ \frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}$

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3\right)$

Vì $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Do đó: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2}{abc}.3abc=3+6=9$

Bài 8. ***Cho*** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ ***(1) và*** $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$ ***(2). Chứng minh rằng: a + b + c = abc***

HD:

Từ (1) suy ra

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2.\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=4\Rightarrow 2.\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=4-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=1\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc}=1\Leftrightarrow a+b+c=abc$$

Bài 9. ***Cho*** $a+b+c=1$; $a^2+b^2+c^2=1$ ***và*** $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ***Chứng minh rằng:*** $xy+yz+zx=0$

HD: Từ $a+b+c=1\Rightarrow (a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$

Mà $a^2=b^2+c^2=1$ nên $ab+bc+ca=0$

Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ suy ra $x=ak$; $y=bk$; $z=ck$

Xét $xy+yz+zx=abk^2+bck^2+cak^2=k^2(ab+bc+ca)=k^2.0=0$

Bài 10. ***Cho a, b, c khác 0 và thỏa mãn a + b + c = 0. Chứng minh rằng:***

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}=\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$$

HD:

Từ giả thiết $a+b=-c\Rightarrow a^2=b^2+2ab=c^2\Rightarrow a^2+b^2=c^2-2ab$

Suy ra $\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{c^2-2ab}{-c}=-c+\frac{2ab}{c}$

Tương tự ta có: $\frac{b^2+c^2}{b+c}=-a+\frac{2bc}{a}$; $\frac{c^2+a^2}{c+a}=-a+\frac{2ca}{b}$

Từ đó suy ra vế trái là:

$$VT=-a-b-c+\frac{2ab}{c}+\frac{2bc}{a}+\frac{2ca}{b}=\frac{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{acb}\quad (1)$$

Mặt khác ta có: $(a+b+c)^2=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

Bình phương hai vế ta được:

$$a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2+8abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^2=2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 11. ***Cho*** $\frac{x^2-3y}{x(1-3y)}=\frac{y^2-3x}{y(1-3x)}$ ***với*** $x;\ y\neq 0;\ x;\ y\neq\frac{1}{3}$; $x\neq y$. ***CMR :*** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x+y+\frac{8}{3}$

HD:

Từ giả thiết suy ra $(x^2-3y)(y-3xy)=(y^2-3x)(x-3xy)$

$$\Leftrightarrow x^2y - 3x^3y - 3y^2 + 9xy^2 = xy^2 - 3xy^3 + 9x^2y$$
$$\Leftrightarrow 8xy^2 - 8x^2y + 3xy^3 - 3x^3y - 3y^2 + 3x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y - x)(8xy + 3xy)(y + x) - 3(x + y) = 0$$

Do $x \neq y$ nên $8xy + 3xy(y + x) - 3(y + x) = 0 \Rightarrow 3(y + x) = 3xy(y + x) + 8xy$

Chia cả hai vế cho 3x; y khác 0, ta được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = x + y + \frac{8}{3}$ (đpcm)

Bài 12. ***Chứng minh rằng nếu ba số x, y, z thỏa mãn*** $\boldsymbol{x + y + z = 2020}$ ***và*** $\boldsymbol{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2020}}$ ***thì ít nhất một trong ba số x, y, z phải bằng 2020.***

HD: Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$

$\Leftrightarrow (yz + xz + xy)(x + y + z) = xyz$

$\Leftrightarrow xyz + y^2z + yz^2 + x^2z + xyz + xz^2 + x^2y + xy^2 + xyz = xyz$

$\Leftrightarrow xyz + y^2z + yz^2 + x^2z + xyz + xz^2 + x^2y + xy^2 = 0$

$\Leftrightarrow yz(x + y) + z^2(x + y) + xz(x + y) + xy(x + y) = 0$

$(x + y)(yz + z^2 + xz + xy) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 0$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right.$

Nếu $x + y = 0$ thì từ $x + y + z = 2020 \Rightarrow z = 2020$

Nếu $y + z = 0$ thì từ $x + y + z = 2020 \Rightarrow x = 2020$

Nếu $x + z = 0$ thì từ $x + y + z = 2020 \Rightarrow z = 2020$

Suy ra điều phải chứng minh

Bài 13. ***Cho các số thực a, b, c khác nhau từng đôi một và thỏa mãn điều kiện*** $\boldsymbol{a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a}$***. Chứng minh rằng:*** $\boldsymbol{(a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1) = -1}$

HD:

Từ $a^2 - b = b^2 - c = a^2 - b^2 = b - c \Rightarrow (a = b)(a - b) = b - c$

$\Rightarrow a + b = \frac{b - c}{a - b} \Rightarrow a + b + 1 = \frac{a - c}{a - b}$ (1)

Tương tự, từ $a^2 - b = c^2 - a \Rightarrow a + c + 1 = \frac{b - c}{a - c}$ (2)

$b^2 - c = c^2 - a \Rightarrow b + c + 1 = \frac{b - a}{b - c}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) nhân từng vế ta được: $(a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1) = -1$

Bài 14. ***Cho x, y, z khác không, khác nhau từng đôi một và*** $\boldsymbol{zx \neq 1}$; $\boldsymbol{yz \neq 1}$ ***thỏa mãn điều kiện:*** $\boldsymbol{\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}}$***. Chứng minh rằng*** $\boldsymbol{x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$

HD:

Từ giả thiết, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2-yz}{x-xyz}=\frac{y^2-xz}{y-xyz}=\frac{x^2-yz-y^2+xz}{x-xyz-y+xyz}=\frac{(x-y)(x+y+z)}{x-y}=x+y+z \quad (1)$$

$$\frac{x^2-yz}{x-xyz}=\frac{y^2-xz}{y-xyz}=\frac{x^2y-y^2z}{xy-xy^2z}=\frac{xy^2-x^2z}{xy-x^2yz}=\frac{x^2y-y^2z-xy^2+x^2z}{xy-xy^2z-xy+x^2yz}$$

$$=\frac{xy(x-y)+z(x^2-y^2)}{x^2yz-xy^2z}=\frac{(x-y)(xy+xz+yz)}{(x-y)xyz}=\frac{xy+xz+yz}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Bài 15. ***Cho x, y là hai số thực khác 0 sao cho*** $\boldsymbol{x+\frac{1}{x};y+\frac{1}{y}}$ ***là các số nguyên.***

Chứng minh rằng $\boldsymbol{x^3y^3+\frac{1}{x^3y^3}\in\mathbb{Z}}$

HD: Từ giả thiết, suy ra $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow xy+\frac{1}{xy}\in\mathbb{Z}$

Xét $x^3y^3+\frac{1}{x^3y^3}=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)\left(x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}-1\right)=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)\left[\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2-3\right]$

Suy ra $x^3y^3+\frac{1}{x^3y^3}\in\mathbb{Z}$, điều phải chứng minh.

Bài 16. ***Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện*** $\boldsymbol{x+y+z=xyz}$.

Chứng minh rằng: $\boldsymbol{\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$

HD:

Ta có: $\frac{x}{1+x^2}=\frac{xyz}{yz+x^2yz}=\frac{xyz}{yz+x(x+y+z)}=\frac{xyz}{(x+y)(x+z)} \quad (1)$

Tương tự: $\frac{2y}{1+y^2}=\frac{2xyz}{(y+z)(y+x)} \quad (2)$

$\frac{3z}{1+z^2}=\frac{3xyz}{(z+x)(z+y)} \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3); cộng vế với vế, ta có:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz}{(x+y)(x+z)}+\frac{2xyz}{(y+z)(y+x)}+\frac{3xyz}{(z+x)(z+y)}$$

$$=\frac{xyz[y+z+2(z+x)+3(x+y)]}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Bài 17. ***Cho a, b, x, y thỏa mãn*** $\boldsymbol{\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}}$ ***và*** $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$

Chứng minh rằng $\boldsymbol{\frac{x^{2n}}{a^n}+\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{2}{(a+b)^n}}$ ***với n là số nguyên dương.***

HD: Từ giả thiết ta có $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a+b}\Leftrightarrow b(a+b)x^4+a(a+b)y^4=\left(x^2+y^2\right)^2ab$

$\Leftrightarrow abx^4+b^2x^4+a^2y^4+aby^4=abx^4+2abx^2y^2+aby^4\Leftrightarrow b^2x^4-2abx^2y^2+a^2y^4=0$

$\Leftrightarrow \left(bx^2-ay^2\right)^2=0\Leftrightarrow bx^2-ay^2=0\Leftrightarrow \frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

$\Rightarrow \frac{x^{2n}}{a^n}=\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{1}{(a+b)^n}\Rightarrow \frac{x^{2n}}{a^n}\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{2}{(a+b)^n}$

Bài 18. ***Cho x, y, z là 3 số thực khác 0 thỏa mãn*** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. ***CMR:*** $\frac{xy}{z^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{yz}{x^2}=3$

HD: Từ giả thiết, suy ra xy + yz + zx = 0. Đặt xy = a ; yz = b ; zx = c, khi đó:
Ta có $a^3+b^3+c^3=3abc$
Suy ra $\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3$ (đpcm)

Bài 19. ***Cho*** $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=2$. ***Chứng minh rằng:*** $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=x+y+z$

HD: Từ giả thiết suy ra $\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).(x+y+z)=2(x+y+z)$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+x+\frac{y^2}{z+x}+y+\frac{z^2}{x+y}+z=2x+2y+2z$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=x+y+z$ (đpcm)

Bài 20. ***Cho*** $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ ***(1). CMR : trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau***

HD:

Từ (1) $\Rightarrow a^2c+ab^2+b^2c=b^2c+ac^2+a^2b\Rightarrow a^2(b-c)-a\left(c^2-b^2\right)+bc(c-b)=0$

$\Rightarrow$ (c – b)(a^2 – ac = ab + bc) = 0 $\Rightarrow$ (c – b)(a – b)(a – c) = 0 $\Rightarrow$ đpcm

Bài 21. ***Cho*** $\left(a^2-bc\right)(b-abc)=\left(b^2-ac\right)(a-abc)$; ***abc ≠ 0 và a ≠ b***

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$

HD:

Từ GT $\Rightarrow a^2b-b^2c-a^3bc+ab^2c^2=ab^2-a^2c-ab^3c+a^2bc^2$

$\Leftrightarrow \left(a^2b-ab^2\right)+\left(a^2c-b^2c\right)=abc^2(a-b)+abc(a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow (a-b)(ab+ac+bc)=abc(a-b)(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \frac{ab+ac+bc}{abc}=a+b+c\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+c+b$

Bài 22. ***Cho*** $a+b+c=x+y+z=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$***; Chứng minh rằng:*** $ax^2+by^2+cz^2=0$

HD:

Từ $x+y+z=0\Rightarrow x^2=(y+z)^2$; $y^2=(x+z)^2$; $z^2=(y+x)^2$

$ax^2+by^2+cz^2=a(y+z)^2+b(x+z)^2+c(y+x)^2=\ldots$

$=(b+c)x^2+(a+c)y^2+(a+b)z^2+2(ayz+bxz+cxy)$ (1)

Từ $a+b+c=0\Rightarrow -a=b+c$; $-b=a+c$; $-c=a+b$ (2)

Từ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0\Rightarrow ayz+bxz+cxy=0$ (3). Thay (2), (3) vào (1)

Ta có: $ax^2+by^2+cz^2=-(ax^2+by^2+cz^2)ax^2+by^2+cz^2=0$

Bài 23. ***Cho*** $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$ ***. Chứng minh rằng:*** $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

HD:

Từ $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0\Rightarrow\frac{a}{b-c}=\frac{b}{a-c}+\frac{c}{b-a}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)}$

$\Rightarrow\frac{a}{(b-c)^2}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (1) (Nhân hai vế với $\frac{1}{b-c}$)

Tương tự, ta có:

$\frac{b}{(c-a)^2}=\frac{c^2-bc+ab-a^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (2) ; $\frac{c}{(a-b)^2}=\frac{a^2-ac+cb-c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta có đpcm

Bài 24. ***Cho a + b + c = 2009. Chứng minh răng*** $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}=2009$

Dạng 4. Phương pháp biến đổi tương đương

Bài 1. ***Với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn đẳng thức*** $(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}$

HD:

Phân tích. Bài toán này là chứng minh đẳng thức có điều kiện. Bài toán này có thể vận dụng điều kiện và biến đổi cả hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba.

Tuy nhiên, trong ví dụ này chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương. Phương pháp biến đổi tương đương là muốn chứng minh $A=B$, là chúng ta chứng minh $A=B\Leftrightarrow C=D\Rightarrow\ldots X=Y$. Nếu x = y hiển nhiên đúng hoặc là giả thiết, thì chúngta kết luận $A=B$.

Biến đổi tương đương:

$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}\left(1-\frac{b}{b+c}\right)+\frac{b}{b+c}\left(1-\frac{c}{c+a}\right)+\frac{c}{c+a}\left(1-\frac{a}{a+b}\right)=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac}{(a+b)(b+c)}+\frac{ba}{(b+c)(c+a)}+\frac{cb}{(c+a)(a+b)}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=\frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=6abc$$

$$\Leftrightarrow ac(a+c)+b(a+b+c)(a=c)=8abc$$

$$\Leftrightarrow (a+c)\left(ac+ab+b^2+bc\right)=8abc$$

$$\Leftrightarrow (a+c)(b+c)(b+a)=8abc$$

Đẳng thức này đúng nên điều phải chứng minh là đúng.

Bài 2. ***Giả sử x, y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn***

$$\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=4.$$ ***Chứng minh rằng:5y = 4x***

HD: Ta có: $4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2\left(x^4-y^4\right)+8y^8}{\left(x^4+y^4\right)\left(x^4-y^4\right)}$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4-y^4}\Leftrightarrow 4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2\left(x^2-y^2\right)+4y^4}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}=\frac{y(x-y)+2y^2}{x^2-y^2}\Leftrightarrow 4=\frac{y}{x-y}\Leftrightarrow 4x-4y=y\Leftrightarrow 4x=5y$$

Dạng 5. *Phương pháp đổi biến số*

Bài 1. ***Với a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn đẳng thức*** $(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}$

HD:

Phân tích. Ví dụ này, trong phần trước chúng ta đã chứng minh bằng phương pháp biến đổi tương đương. Trong phần này, chúng ta sử dụng phương pháp đổi biến để giải. Quan sát phần kết luận, chúng ta nhận thấy hai vế của đẳng thức có phần giống nhau: vế trái là tổng ba phân thức, phần biến vế phải là tích của từng cặp hai phân thức trong ba phân thức ấy, do đó chúng ta nghĩ tới đặt biến phụ: Đặt $x=\frac{a}{a+b}$; $y=\frac{b}{b+c}$; $z=\frac{c}{c+a}$ và chỉ cần chứng minh $x+y+z=\frac{3}{4}+xy+yz+zx$. Do vậy ta có lời giải sau:

Đặt $x=\frac{a}{a+b}$; $y=\frac{b}{b+c}$; $z=\frac{c}{c+a}$. Từ giả thiết, suy ra $xyz=\frac{1}{8}$

Ta có: $1-x=1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b};1-y=1-\frac{b}{b+c}=\frac{c}{b+c};1-z=1-\frac{c}{c+a}=\frac{a}{c+a}$

Từ đó suy ra: $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)\Leftrightarrow 2xyz=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow x+y+z=\frac{3}{4}+xy+yz+zx$$

Vậy $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{ca}{(c+a)(a+b)}$ (đpcm)

Bài 2. ***Cho a, b, c là ba số thực phân biệt. Chứng minh rằng:***

$$3+\frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)}=\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2b+c}{b-c}+\frac{2c+a}{c-a}$$

HD:

Phân tích. Quan sát phần kết luận, chúng ta nhận thấy hai vế của đẳng thức có phần giống nhau: vế phải là tổng ba phân thức, phần biến vế trái là tích của từng cặp hai phân thức trong ba phân thức ấy. Do đó cũng như ví dụ trước chúng ta nghĩ tới đặt biến phụ: Đặt $x=\frac{2a+b}{a-b}$; $y=\frac{2b+c}{b-c}$; $z=\frac{2c+a}{c-a}$ và chỉ cần chứng minh $3+xy+yz+zx=x+y+z$.

Do vậy ta có lời giải sau:

Đặt $x=\frac{2a+b}{a-b}$; $y=\frac{2b+c}{b-c}$; $z=\frac{2c+a}{c-a}$

Khi đó $x+1=\frac{3a}{a-2}$; $y+1=\frac{3b}{b-c}$; $z+1=\frac{3c}{c-a}$

Và $x-2=\frac{3b}{a-b}$; $y-2=\frac{3c}{b-c}$; $z-2=\frac{3c}{c-a}$

Từ đó suy ra $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-2)(y-2)(z-2)$

Khai triển và rút gọn ta được:

$9+3(xy+yz+zx)=3(x+y+z)\Leftrightarrow 3+xy+yz+zx=x+y+z$

Suy ra: $3+\frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)}=\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2b+c}{b-c}+\frac{2c+a}{c-a}$

Bài 3. ***Cho a + b + c = 0. Chứng minh***: $\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$ **(1)**

HD:

Đặt $\frac{a-b}{c}=x$; $\frac{b-c}{a}=y$; $\frac{c-a}{b}=z\Rightarrow\frac{c}{a-b}=\frac{1}{x}$; $\frac{a}{b-c}=\frac{1}{y}$; $\frac{b}{c-a}=\frac{1}{z}$

(1) $\Leftrightarrow$ $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9$

Ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$ (2)

Ta lại có: $\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\frac{c}{a-b}=\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}\cdot\frac{c}{a-b}$

$$\frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)}=\frac{c(c-a-b)}{ab}=\frac{c[2c-(a+b+c)]}{ab}=\frac{2c^2}{ab}\quad(3)$$

Tương tự, ta có: $\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc}$ (4) ; $\frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}$ (5)

Thay (3), (4) và (5) vào (2) ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3) \quad (6)$$

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (7)

Thay (7) vào (6) ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2}{abc}.3abc=3+6=9$

Dạng 6. Phân tích đi lên từ kết luận

Bài 1. ***Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn hệ thức:*** $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$

Chứng minh rằng:

a) Trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng tổng hai số còn lại.

b) Trong ba phân thức trên, tồn tại hai phân thức bằng 1, một phân thức bằng -1.

HD:

Phân tích. Đọc kỹ phần kết luận câu a, chúng ta nhận thấy phần chứng minh tương đương với: a = b + c hoặc b = c + a hoặc $c=a+b \Leftrightarrow b+c-a=0$ hoặc $c+a-b=0$ hoặc $a+b-c=0 \Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$. Với suy nghĩ ấy, chúng ta biến đổi giả thiết và định hướng biến đổi phân tích đa thức thành nhân tử để đưa về $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$.

Lời giải

a) Từ giả thiết: $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2-c^2}{2ab}+\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+\frac{(a+c)^2-b^2}{2ac}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}+\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}+\frac{(a+c-b)(a+c+b)}{2ac}=0$$

$$\Leftrightarrow c(a-b-c)(a-b+c)+a(b-c-a)(b-c+a)+b(a+c-b)(a+c+b)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)\big(c(a-b-c)-a(b-c+a)+b(a+b+c)\big)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)\big(ac-bc-c^2-a(b-c+a)+ab+b^2+bc\big)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)\big(ac+ab+b^2-c^2-a(b-c+a)\big)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ a+b-c=0 \\ b+c-a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+c=b \\ a+b=c \\ b+c=a \end{array}\right.$$

Vậy trong ba số a, b, c có một số bằng tổng hai số còn lại.

b) Không giảm tính tổng quát, giả sử $a=b+c$

\- Xét $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(b+c)^2+b^2-c^2}{2(b+c)b}=\frac{2bc+2b^2}{2bc+2b^2}=1$;

- Xét $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-(b+c)^2}{2bc}=\dfrac{-2bc}{2bc}=-1;$

- Xét $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\dfrac{c^2+(b+c)^2-b^2}{2(b+c).c}=\dfrac{2c^2+2bc}{2c^2+2bc}=1$

Vậy trong ba phân thức có một phân thức bằng -1; hai phân thức còn lại bằng 1.

Dạng 7. *Phương pháp tách hạng tử*

Bài 1. ***Chứng minh rằng:*** $\dfrac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{c^2-a^2}{(b+c)(b+c)}+\dfrac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}=\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{a-b}{a+b}$

Biết $a\neq -b, b\neq -c, c\neq -a$.

HD:

Phân tích. Quan sát đẳng thức này, chúng ta có thể có ba cách giải:

Cách 1. Biến đổi cả hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba. Cách này tuy dài nhưng cho chúng ta kết quả là biểu thức thứ ba rất đẹp.

Cách 2. Sử dụng phương pháp đổi biến. Nhận thấy hai vế có phần mẫu có thể đặt biến phụ được. Đặt $a+b=z;\ a+c=y;\ b+c=x$, sau đó biến đổi tử thức theo x, y, z. Ta có lời giải hay.

Cách 3. Nhận thấy rằng, vế trái của đẳng thức có thể tách tử thức để đưa mỗi phân thức thành tổng của hai phân thức có mẫu thức trùng với hai trong ba mẫu thức của vế phải. Với cách suy luận như vậy chúng ta có lời giải hay.

Lời giải:

Cách 1. Xét vế trái: $\dfrac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{c^2-a^2}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}$

$$=\frac{b^3+b^2c-bc^2-c^3+c^3+ac^2-a^2c-a^3+a^3+a^2b-ab^2-b^3}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{bc(b-c)-a(b+c)(b-c)+a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=\frac{(b-c)(c-a)(b-a)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\qquad(1)$$

Xét vế phải: $\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(b-c)(c+a)+(c-a)(b+c)}{(b+c)(c+a)}+\dfrac{a-b}{a+b}$

$$=\frac{bc+ab-c^2-ac+bc+c^2-ab-ac}{(b+c)(c+a)}+\frac{a-b}{a+b}$$

$$=\frac{2bc-2ac}{(b+c)(c+a)}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2c(b-a)(a+b)+(a-b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(b-a)(ac-ab+bc-c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(b-a)(c-a)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{c^2-a^2}{(b+c)(b+c)}+\dfrac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}=\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{a-b}{a+b}$

Cách 2. Đặt $a+b=z$; $a+c=y$; $b+c=x$

Đẳng thức được chứng minh tương đương với:

$$\frac{x(z-y)}{yz}+\frac{y(x-z)}{xz}+\frac{z(y-x)}{xy}=\frac{x-z}{y}+\frac{y-x}{z}+\frac{z-y}{x}$$

Biến đổi vế trái ta có:

$$\frac{xz-xy}{yz}+\frac{xy-yz}{xz}+\frac{yz-xz}{xy}=\frac{x}{y}-\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-\frac{z}{y}=\frac{z-y}{x}+\frac{x-z}{y}+\frac{y-z}{x}=(VP)$$

Cách 3. Ta có: $\frac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}=\frac{b^2-a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{a^2-c^2}{(a+b)(a+c)}=\frac{b-a}{a+c}+\frac{a-c}{a+b}$ (3) (3)

Tương tự, ta có: $\frac{c^2-a^2}{(b+c)(b+a)}=\frac{c-b}{b+a}+\frac{b-a}{b+c}$ (4)

$\frac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}=\frac{a-c}{c+b}+\frac{c-b}{c+a}$ (5)

Từ (3) (4) và (5) cộng vế với vế, ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tự luyện

1) cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$; tính giá trị biểu thức $A=\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}$

HD: $A=\frac{xyz}{x^3}+\frac{xyz}{y^3}+\frac{xyz}{z^3}$; vận dụng $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

2) Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$; Tính giá trị biểu thức $A=\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)$

3) Cho $x+y+z=0$; chứng minh rằng: $\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+3=0$

4) Cho $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$; $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$. Chứng minh $xy+yz+xz=0$

Chủ đề 5. BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Bài 1. ***Cho biểu thức*** $A=\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$

a) Rút gọn A ***b) Tìm x để A = 0***

c) Tìm giá trị của A khi $|2x-1|=7$

HD:

a) ĐKXĐ: $x\neq\pm1$ và $x\pm3$

Với $x\neq\pm1$; $x\neq\pm3$ thì $A=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$

b) $A=0 \Leftrightarrow x=\pm2$

c) $|2x-1|=7 \Leftrightarrow x=4$ hoặc $x=-3$

- Với $x=4$ thì $A=\frac{12}{7}$
- Với $x=-3$ thì A không xác định

Bài 2. ***Cho biểu thức*** $\frac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$

a) Rút gọn B ***b) Tìm x để B > 0***

HD:

a) ĐKXĐ: $x \neq 3$ và $x \neq \frac{1}{3}$

b) Với $x \neq 3$ và $x \neq \frac{1}{3}$ Thì $\frac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}=\frac{(x-3)^2(2x+5)}{(x-3)^2(3x-1)}=\frac{2x+5}{3x-1}$

c) $B>0 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{3x-1}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{3} \\ x<-\frac{5}{2} \end{array}\right.$

Bài 3. ***Cho biểu thức*** $C=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức C
b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên

HD:

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

$$C=\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}=\left[\frac{1+x+2(1-x)-5}{(1-x)(1+x)}\right].\frac{(x-1)(x+1)}{1-2x}=\frac{-2}{2x-1}$$

b) B có giá trị nguyên khi x là số nguyên thì $\frac{-2}{2x-1}$ có giá trị nguyên

$\Leftrightarrow$ 2x – 1 là Ư(2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=1,5 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Đối chiếu ĐKXĐ thì chỉ có x = 0 thoả mãn

Bài 4. ***Cho biểu thức*** $D=\frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}$

a) Rút gọn biểu thức D ***b) Tìm x nguyên để D có giá trị nguyên***
c) Tìm giá trị của D khi x = 6

HD:

a) Nếu $x+2>0$ thì $|x+2|=x+2$ nên

$$D=\frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}=\frac{x^3+x^2-2x}{x(x+2)-x^2+4}=\frac{x^2-x}{2}$$

Nếu $x+2<0$ thì $|x+2|=-(x+2)$ nên

$$D=\frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}=\frac{x^3+x^2-2x}{-x(x+2)-x^2+4}=\frac{-x}{2}$$

Nếu $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ thì biểu thức D không xác định

b) Để D có giá trị nguyên thì $\frac{x^2-x}{2}$ hoặc $\frac{-x}{2}$ có giá trị nguyên

- $\frac{x^2-x}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x \,\vdots\, 2 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \,\vdots\, 2 \\ x>-2 \end{cases}$

Vì x(x – 1) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 với mọi x > – 2

- $\frac{-x}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} x \vdots 2 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k \ (k \in \mathbb{Z};\ k < -1)$

Bài 5. ***Cho biểu thức*** $M = \dfrac{x^4+2}{x^6+1} + \dfrac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \dfrac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

HD:

a) $M = \dfrac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \dfrac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \dfrac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+3)}$

$= \dfrac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \dfrac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}$

$= \dfrac{x^4+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \dfrac{x^2.(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$ Vậy $M = \dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$

b) Ta có : $M = \dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$

- Nếu $x = 0$ ta có $M = 0$
- Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của **M** cho x^2 ta có: $M = \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 1}$

Ta có: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2.x.\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) + 1 = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 1 \geq 1$

Nên ta có: $M = \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{1}{x^2-1}} \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi x = 1

Vậy Max**M** = 1 khi x = 1

Bài 6. ***Cho*** x, y ***là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn*** $\dfrac{1-2x}{1-x} + \dfrac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ ***là bình phương của một số hữu tỷ.***

HD:

Ta có $\dfrac{1-2x}{1-x} + \dfrac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$

$\Leftrightarrow 1 - y - 2x + 2xy + 1 - x - 2y + 2xy = 1 - x - y + xy \Leftrightarrow x + y = \dfrac{3xy+1}{2}$

Ta có : $M = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = \left(\dfrac{3xy+1}{2}\right)^2 - 3xy = ... = \left(\dfrac{3xy-1}{2}\right)^2$

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $\dfrac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ , Vậy **M** là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 7. ***Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thoả mãn:***

$\frac{2a+b}{a+b}+\frac{2b+c}{b+c}+\frac{2c+d}{c+d}+\frac{2d+a}{d+a}=6$. *Chứng minh $A=abcd$ là số chính phương*

HD:

Ta có: $\frac{2a+b}{a+b}+\frac{2b+c}{b+c}+\frac{2c+d}{c+d}+\frac{2d+a}{d+a}=6 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{a+b}+1+\frac{b}{b+c}+1+\frac{c}{c+d}+1+\frac{d}{d+a}=6$

$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}=2 \Leftrightarrow 1-\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b+c}+1-\frac{c}{c+d}-\frac{d}{d+a}=0$

$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b}-\frac{b}{b+c}+\frac{d}{c+d}-\frac{d}{d+a}=0 \Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)}+\frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)}=0$

$\Leftrightarrow b(c+d)(d+a)-d(a+b)(b+c)=0 \Leftrightarrow abc-acd+bd^2-b^2d=0$

$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd)=0 \Leftrightarrow ac-bd=0 \Leftrightarrow ac=bd \quad (\text{vì } b\neq d)$

Vậy $A=abcd=(ac)^2$ là số chính phương

Bài 8. ***Cho biểu thức :*** $P=\frac{2}{x}-\left(\frac{x^2}{x^2+xy}+\frac{y^2-x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy+y^2}\right).\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ ***với*** $x\neq 0, y\neq 0, x\neq -y$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P biết x, y thỏa mãn đẳng thức: $x^2+y^2+10=2(x-3y)$.

HD:

Với $x\neq 0,\ y\neq 0,\ x\neq -y$ ta có:

$P=\frac{2}{x}-\left(\frac{x^2y-(x^2-y^2)(x+y)-xy^2}{xy(x+y)}\right).\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}=\frac{2}{x}+\frac{x-y}{xy}=\frac{x+y}{xy}$

Ta có: $x^2+y^2+10=2(x-3y) \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=0$

Lập luận suy ra $x=1;\ y=-3$

Ta thấy x = 1; y = – 3 thỏa mãn điều kiện: $x\neq 0,\ y\neq 0,\ x\neq -y$ nên thay x = 1; y = – 3 vào biểu thức $P=\frac{x+y}{xy}$ ta được: $P=\frac{1+(-3)}{1.(-3)}=\frac{2}{3}$

Bài 9. ***Cho biểu thức*** $P=\frac{x^2+x}{x^2-2x+1}:\left(\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2-x^2}{x^2-x}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P=\frac{-1}{2}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x>1$.

HD:

a) ĐKXĐ : $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

b) $P=\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}:\frac{x+1}{x(x-1)}=\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{x(x-1)}{x+1}=\frac{x^2}{x-1}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

c) $P=\frac{x^2}{x-1}=\frac{(x^2-1)+1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z}$. Để P nguyên thì $\dfrac{1}{x-1}$ nguyên

$\Rightarrow x-1$ là ước của 1. $\Rightarrow x-1 \in \{-1; 1\}$

d) $P = \dfrac{x^2}{x-1} = x+1+\dfrac{1}{x-1} = x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$ Vì x > 1 nên x – 1 > 0 và $\dfrac{1}{x-1} > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương x – 1 và $\dfrac{1}{x-1}$,

Ta có $x-1+\dfrac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}} = 2 \Rightarrow P \geq 4$

Đẳng thức xảy ra khi $x-1 = \dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow$ x – 1 = 1 (vì x – 1 > 0)

$\Leftrightarrow$ x = 2 (TMĐK)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi x = 2

Bài 10. ***Cho biểu thức :*** $P = \dfrac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2-x^2}{x^2-x}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P
b) Tìm x để P < 1
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi x > 1

HD:

a) ĐKXĐ: $x \neq 0;\ x \neq 1;\ x \neq -1$

Rút gọn P ta có: $P = \dfrac{x^2}{x-1}$

b) $P < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

Vậy với x < 1 và $x \neq 0;\ x \neq -1$ thì P < 1

c) Ta có: $P = \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{x^2-1+1}{x-1} = x+1+\dfrac{1}{x-1} = x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$

Khi $x > 1;\ x-1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x-1+\dfrac{1}{x-1} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = 2. Vậy MaxP = 4 khi x = 2

- ***Bài tập tự luyện***

Bài 1. Cho $A = \left[\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \dfrac{1}{1-x}\right] : \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị thực của x để A và $\dfrac{2}{A}$ có giá trị là số nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{2-x}{x+3} - \dfrac{3-x}{x+2} + \dfrac{2-x}{x^2+5x+6}\right) : \left(1-\dfrac{x}{x-1}\right)$

a) Rút gọn A
b) Tìm x để A = 0; A > 0

Bài 3. Cho biểu thức $B = \dfrac{3y^3 - 7y^2 + 5y - 1}{2y^3 - y^2 - 4y + 3}$

a) Rút gọn B

b) Tìm số nguyên y để $\dfrac{2D}{2y+3}$ có giá trị nguyên

c) Tìm số nguyên y để B $\geq$ 1

Bài 4. Cho biểu thức $A = \dfrac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

a) Tìm giá trị của x để biểu thức A xác định
b) Tìm giá trị của x để biểu thức A có giá tri bằng 0
c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức : $A = \left(\dfrac{2+x}{2-x} - \dfrac{4x^2}{x^2-4} - \dfrac{2-x}{2+x}\right) : \left(\dfrac{x^2 - 3x}{2x^2 - x^3}\right)$

a) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức A ?
b) Tìm giá trị của x để A > 0?
c) Tính giá trị của A trong trường hợp : $|x - 7| = 4$.

Bài 6. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{2}{2-x} + \dfrac{1}{x+2}\right) : \left(x - 2 + \dfrac{10 - x^2}{x+2}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị của A, biết $|x| = \dfrac{1}{2}$
c) Tìm giá trị của x để A < 0
d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Bài 7. Cho biểu thức $Q = \left(\dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} + \dfrac{2x^2}{x^2(x-2) + 4(x-2)}\right)\left(\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}\right)$, với $x \neq 0$ và $x \neq 2$.

a) Rút gọn biểu thức Q.
b) Tìm giá trị của x để Q có giá trị là $\dfrac{1}{4}$.

Bài 8. Cho biểu thức $P = \left[\dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{x+1}.\left(\dfrac{x+1}{3x} - x - 1\right)\right] : \dfrac{x-1}{x}$

a) Rút gọn P
b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên
c) Tìm x để $P \leq 1$

Bài 9. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{2017}{x-1} - \dfrac{2016}{x+1} - \dfrac{2014 + 2016}{x^2 - 1}\right) : \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định
b) Rút gọn biểu thức A
c) Tìm x để $A \geq 0$ và biểu diễn tập các giá trị tìm được của x trên trục số
d) Tìm tất cả các số nguyên x để A có giá trị là số nguyên