

CHUYÊN ĐỀ BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

+ Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$

+ Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

+ Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$

+ Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

+ Với $A.B \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$

4. Trục căn thức ở mẫu

+ Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

+ Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}$

+ Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}$

5. Rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai

Bước 1. Dùng các phép biến đổi đơn giản để đưa các căn thức bậc hai phức tạp thành căn thức bậc hai đơn giản.

Bước 2. Thực hiện phép tính theo thứ tự đã biết.

Để đơn giản hóa việc nhận dạng và xử lý bài toán, các em có thể tham khảo bảng dưới đây

Dạng toán	Ví dụ minh họa
Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$	$\sqrt{49.5} = \sqrt{7^2.5} = 7\sqrt{5}$
Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$	$\sqrt{(-3)^2.13} = -(-3).\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$
Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$	* $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{12}$
Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$	* $-3\sqrt{7} = -\sqrt{(-3)^2.7} = -\sqrt{63}$ * $x\sqrt{y} = -\sqrt{x^2.y} = -\sqrt{x^2 y}$ với $x < 0$
Với $A.B \geq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{ B }$	* $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5.7}{7^2}} = \frac{\sqrt{35}}{ 7 } = \frac{\sqrt{35}}{7}; \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{xy}{y^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{ y }$ với $xy > 0$
Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$	* $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$	$\begin{aligned} * \frac{3}{\sqrt{5}+2} &= \frac{3(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\ &= \frac{3(\sqrt{5}-2)}{5-2^2} = \frac{3(\sqrt{5}-2)}{1} = 3(\sqrt{5}-2) \\ * \frac{5}{\sqrt{7}-2} &= \frac{5(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} \\ &= \frac{5(\sqrt{7}+2)}{7-2^2} = \frac{5(\sqrt{7}+2)}{3} \end{aligned}$
Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$	$\begin{aligned} * \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} \\ * \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} \\ &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2} = \sqrt{7}-\sqrt{5} \end{aligned}$

B. CÁC DẠNG TOÁN MINH HỌA

1. DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai các dạng cơ bản.

Ví dụ 1. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$; $5\sqrt{2}$; $2\sqrt{5}$; b) $\sqrt{15}$; $2\sqrt{6}$; $6\sqrt{\frac{1}{3}}$; $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Đưa các thừa số vào trong dấu căn, ta được:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{48}; \quad 3\sqrt{5} = \sqrt{45};$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{50}; \quad 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$$

$$\text{Mà } \sqrt{20} < \sqrt{45} < \sqrt{48} < \sqrt{50}.$$

Suy ra thứ tự tăng dần là $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$; $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$.

b) Đưa các thừa số vào trong dấu căn, ta được:

$$\sqrt{15}; \quad 2\sqrt{6} = \sqrt{24};$$

$$6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}; \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{18}.$$

$$\text{Mà } \sqrt{12} < \sqrt{15} < \sqrt{18} < \sqrt{24}.$$

Suy ra thứ tự tăng dần là $6\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{15}$; $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{6}$

Ví dụ 2.

a) Khử căn thức ở mẫu số: $A = \frac{59}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$

b) Rút gọn các biểu thức sau: b1) $\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ b2) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{2 - \sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

a)

$$A = \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 7} = \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{2\sqrt{15} + 1} = \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1)}{60 - 1}$$

$$A = (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1).$$

b)

b1) Cách 1: Phân tích tử thành nhân tử rồi rút gọn.

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Cách 2: Trục căn thức ở mẫu.

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{3 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3}{1 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

b2) Cách 1: Phân tích tử thành nhân tử rồi rút gọn.

$$\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Cách 2: Trục căn thức ở mẫu.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{14}-\sqrt{7})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{14}-2\sqrt{7}+\sqrt{28}-\sqrt{14}}{2^2-(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{14}-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{4-2} = \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$; b) $\frac{15}{\sqrt{10}-\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}+\sqrt{80}}$; c) $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:
$$\begin{aligned} \frac{1}{(2+\sqrt{5})+\sqrt{2}(2+\sqrt{5})} &= \frac{1}{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{(2-\sqrt{5})(1-\sqrt{2})}{(4-5)(1-2)} = (2-\sqrt{5})(1-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{15}{\sqrt{10}-2\sqrt{5}+2\sqrt{10}+\sqrt{5}+4\sqrt{5}} &= \frac{15}{3\sqrt{10}+3\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} \\ &= \frac{5(\sqrt{10}-\sqrt{5})}{10-5} = \sqrt{10}-\sqrt{5}. \end{aligned}$$

c)
$$\frac{2\sqrt{10}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-7} = \frac{2\sqrt{10}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})}{7+2\sqrt{10}-7} = \sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}.$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}};$ b) $B = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}}.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:
$$A = \frac{3-2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{1}{3-\sqrt{6}+\sqrt{6}+2} = \frac{1}{5}.$$

b) Ta có:
$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} : \left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{6}} \right) \\ B &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

$$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \left(\frac{(\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{3} - 4 + \sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}} \right)$$

$$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \frac{3+\sqrt{3}-4+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}$$

$$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau bằng cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{245.35}$ b) $\sqrt{63a^2}$ với $a < 0$ c) $\frac{2xy^2}{3ab} \cdot \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}$ với $a, b, x, y > 0$

Hướng dẫn giải

a) Biểu thức $\sqrt{245.35} = \sqrt{49.5.5.7}$
 $= \sqrt{49} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 7.5 \cdot \sqrt{7} = 35\sqrt{7}$

b) Biểu thức $\sqrt{63a^2} = \sqrt{9.7.a^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} = 3\sqrt{7} \cdot |a|$

Vì $a < 0$ nên $|a| = -a$. Do đó: $\sqrt{63a^2} = -3\sqrt{7}a$.

c) Biểu thức $\frac{2xy^2}{3ab} \cdot \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}} = \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \sqrt{\frac{9a^2 \cdot a \cdot b^4}{4.2 \cdot x \cdot y^2 \cdot y}}$
 $= \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^4}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2xy} \cdot \sqrt{y^2}}$
 $= \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \frac{3 \cdot |a|b^2 \cdot \sqrt{a}}{2 \cdot |y| \sqrt{2xy}}$
 $= \frac{2xy^2 \cdot 3 \cdot |a|b^2}{3ab \cdot 2 \cdot |y|} \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}}$

Vì $a, b, x, y > 0$ nên $|a| = a$; $|y| = y$, ta có: $\frac{2xy^2}{3ab} \cdot \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}$
 $= \frac{2xy^2 \cdot 3 \cdot ab^2}{3ab \cdot 2 \cdot y} \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}} = bxy \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}}$

Ví dụ 6. Thực hiện phép tính.

a) $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$;

b) $B = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\sqrt{3} - 4\sqrt{\frac{1}{3}} + 2 \right) \cdot \sqrt{0,2}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$
 $A = 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = -11\sqrt{5}$.

b) Ta có: $B = \frac{(\sqrt{5}+1)(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})^2 - 5} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + 2 \right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$B = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{15} - 5 + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{15} + 5 - 1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{3} - 1} \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$B = \frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$B = \frac{10\sqrt{3} \cdot (6 - \sqrt{3})}{15(2\sqrt{3} - 1)} = \frac{2(6\sqrt{3} - 3)}{3(2\sqrt{3} - 1)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{3} - 1)}{3 \cdot (2\sqrt{3} - 1)} = 2$$

Ví dụ 7. Rút gọn biểu thức: $R = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1. Mỗi phân thức nhân cả tử và mẫu với $\sqrt{2}$, ta được:

$$R = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2 - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$$

$$R = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{5} + 1} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2 - (\sqrt{5} - 1)}$$

$$R = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{3 - \sqrt{5}}$$

$$R = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{10})(3 - \sqrt{5}) + (3\sqrt{2} - \sqrt{10})(3 + \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}$$

$$R = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{10} + 3\sqrt{10} - 5\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{9 - 5}$$

$$R = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}.$$

Cách 2. Nhân hai vế với $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ta được:

$$R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$$

$$R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5} + 1} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5} + 1}$$

$$R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = 2$$

Suy ra: $R = 2\sqrt{2}$.

Dạng 2. Nâng cao phát triển tư duy

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $P = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2\sqrt{5} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}} - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2\sqrt{5} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$$P = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 1} - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 1}$$

$$P = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{3\sqrt{5} + 1} - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{3\sqrt{5} - 1}$$

$$P = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{10})(3\sqrt{5} - 1) - (3\sqrt{2} - \sqrt{10})(3\sqrt{5} + 1)}{(3\sqrt{5} - 1)(3\sqrt{5} + 1)}$$

$$P = \frac{9\sqrt{10} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - \sqrt{10} - 9\sqrt{10} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} + \sqrt{10}}{45 - 1}$$

$$P = \frac{24\sqrt{2}}{44} = \frac{6\sqrt{2}}{11}.$$

Ví dụ 2. Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \sqrt{175} - 2\sqrt{2};$

b) $B = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}.$

Hướng dẫn giải

a) $A = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{8 - 7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2} = \sqrt{8} - \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2}.$

$$A = 4\sqrt{7}$$

b) $B = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{9-12\sqrt{2}+8}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{9+12\sqrt{2}+8}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})^2}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})^2}}$

$$B = \sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{1}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}} - \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1)}{2-1} = 2.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{6}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$B = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{6}) + \sqrt{3}(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2 + \sqrt{6}}{-2} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{-\sqrt{2}-2+\sqrt{6}}{-2} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}).3\sqrt{2}}{-6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{2} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}).\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2-\sqrt{2}}{2}$$

$$B = 0.$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad \text{b) } T = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2-(2+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-(2-\sqrt{3})}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{b) Ta có: } T = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} + \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}}$$

$$S = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}$$

$$S = 4.$$

$$\text{Ví dụ 5. Cho } A = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{2(3+\sqrt{5})}} \text{ và } B = \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}. \text{ Tính } A^3 - B^3.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}+1} = \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25-5}$$

$$A = \frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{20} = \frac{10+2\sqrt{5}}{20} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{2(3-\sqrt{5})}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4-(\sqrt{5}-1)} = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5}$$

$$B = \frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{20} = \frac{10-2\sqrt{5}}{20} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Suy ra: $A - B = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} - \frac{5 - \sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $A.B = \frac{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{10.10} = \frac{1}{5}$.

Ta có: $A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{25}$.

Ví dụ 6. Xác định a, b biết: $\frac{13}{3\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{17}{4\sqrt{7} + 2\sqrt{11}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

Xét về trái:
$$\begin{aligned} & \frac{13(3\sqrt{7} - \sqrt{11})}{9.7 - 11} + \frac{17(4\sqrt{7} - 2\sqrt{11})}{16.7 - 4.11} \\ &= \frac{13(3\sqrt{7} - \sqrt{11})}{52} + \frac{17(4\sqrt{7} - 2\sqrt{11})}{4.17} \\ &= \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{11}}{4} + \frac{4\sqrt{7} - 2\sqrt{11}}{4} = \frac{7}{4}\sqrt{7} - \frac{3}{4}\sqrt{11}. \end{aligned}$$

Đồng nhất hai vế ta được: $a = \frac{7}{4}; b = -\frac{3}{4}$.

Ví dụ 7. Cho $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$. Với $|x| < 1; x \neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{x-1}{x+1} = 12\sqrt{2} - 17$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{1+x - (1-x)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1+x + 2\sqrt{1-x^2} + 1-x}{2x} = \sqrt{2}$

ĐKXD: $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + 2\sqrt{1-x^2}}{2x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}.x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}.x - 1.$$

Bình phương hai vế, ta được: $1 - x^2 = 2x^2 - 2\sqrt{2}.x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$.

Vì $x \neq 0$ nên $3x - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{Xét } \frac{x-1}{x+1} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} - 1}{\frac{2\sqrt{2}}{3} + 1} = \frac{2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} + 3} = \frac{(2\sqrt{2} - 3)^2}{8 - 9} = \frac{8 - 12\sqrt{2} + 9}{-1} = 12\sqrt{2} - 17.$$

Điều phải chứng minh.

Ví dụ 8. Tính giá trị biểu thức $M = x^5 - 6x^3 + x$ tại $x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $x = \frac{(3 + \sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1)}{8 - 1} = \frac{7\sqrt{2} + 7}{7} = \sqrt{2} + 1$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Ta có: $x^3 = x \cdot x^2 = (\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} + 7$

$x^5 = x^2 \cdot x^3 = (3 + 2\sqrt{2})(5\sqrt{2} + 7) = 29\sqrt{2} + 41$

Thay vào biểu thức M ta có:

$M = 29\sqrt{2} + 41 - 6(5\sqrt{2} + 7) + \sqrt{2} + 1 \Rightarrow M = 0.$

Ví dụ 9. Cho biểu thức: $M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{3}} \right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

a) Rút gọn M ;

b) Tìm giá trị lớn nhất của M .

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{3 + (2\sqrt{x} + 1)^2} + \frac{3}{3 + (2\sqrt{x} - 1)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{3 + 4x + 4\sqrt{x} + 1} + \frac{3}{3 + 4x - 4\sqrt{x} + 1} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{4x + 4\sqrt{x} + 4} + \frac{3}{4x - 4\sqrt{x} + 4} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 1 + x + \sqrt{x} + 1}{(x + 1)^2 - x} \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{2020}{x^2 + x + 1} \cdot \text{TXĐ: } x \geq 0.$

b) Ta có: $x^2 + x + 1 \geq 1$. Vì $x \geq 0$

nên $M = \frac{2020}{x^2 + x + 1} \leq \frac{2020}{1} = 2020.$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 2020 khi $x = 0$.

Ví dụ 10. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{3x - 6\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 4$)

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $A = 2\sqrt{x} - 1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \frac{2(2\sqrt{x} + 1) + 3(\sqrt{x} - 2) - 5\sqrt{x} + 7}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3x - 6\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 3}$

$$A = \frac{4\sqrt{x} + 2 + 3\sqrt{x} - 6 - 5\sqrt{x} + 7}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$$

$$\text{b) } A = 2\sqrt{x} - 1 \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} = 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow (2\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1) = 3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(4\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1, \text{ thuộc tập xác định.}$$

Vậy với $x = 1$ thì $A = 2\sqrt{x} - 1$.

II. TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẦN XẠ

Câu 1. Cho các biểu thức A, B mà $A.B \geq 0; B \neq 0$, khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{B}$. B. $\sqrt{\frac{A}{B}} = -\frac{\sqrt{AB}}{B}$. C. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{B}$. D. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{AB}{\sqrt{B}}$.

Câu 2. Cho biểu thức với $A < 0$ và $B \geq 0$, khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$. B. $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$. C. $\sqrt{A^2B} = -B\sqrt{A}$. D. $\sqrt{A^2B} = B\sqrt{A}$.

Câu 3. Đưa thừa số $\sqrt{81(2-y)^4}$ ra ngoài dấu căn ta được?

- A. $9(2-y)$. B. $81(2-y)^2$. C. $9(2-y)^2$. D. $-9(2-y)^2$.

Câu 4. Đưa thừa số $\sqrt{144(3+2a)^4}$ ra ngoài dấu căn ta được?

- A. $12(3+2a)^4$. B. $144(3+2a)^2$. C. $-12(3+2a)^2$. D. $12(3+2a)^2$.

Câu 5. Đưa thừa số $5y\sqrt{y}$ ($y \geq 0$) vào trong dấu căn ta được.

- A. $\sqrt{5y^2}$. B. $\sqrt{25y^3}$. C. $\sqrt{5y^3}$. D. $\sqrt{25y\sqrt{y}}$.

Câu 6. Đưa thừa số $x\sqrt{\frac{-35}{x}}$ ($x < 0$) vào trong dấu căn ta được.

- A. $\sqrt{-35x}$. B. $-\sqrt{-35x}$. C. $\sqrt{35}$. D. $\sqrt{35x^2}$.

Câu 7. Đưa thừa số $5x\sqrt{\frac{-12}{x^3}}$ ($x < 0$) vào trong dấu căn ta được:

- A. $\sqrt{\frac{300}{x}}$. B. $\sqrt{\frac{-300}{x}}$. C. $-\sqrt{\frac{-300}{x}}$. D. $-\sqrt{\frac{-60}{x}}$.

Câu 8. So sánh hai số $5\sqrt{3}$ và $4\sqrt{5}$

- A. $5\sqrt{3} > 4\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{3} = 4\sqrt{5}$. C. $5\sqrt{3} \geq 4\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{3} < 4\sqrt{5}$.

Câu 9. So sánh hai số $9\sqrt{7}$ và $8\sqrt{8}$

- A. $8\sqrt{8} < 9\sqrt{7}$. B. $8\sqrt{8} = 9\sqrt{7}$. C. $8\sqrt{8} \geq 9\sqrt{7}$. D. $9\sqrt{7} < 8\sqrt{8}$.

Câu 10. Khử mẫu biểu thức sau $xy\sqrt{\frac{4}{x^2y^2}}$ với $x > 0; y > 0$ ta được

- A. 4. B. $\sqrt{-xy}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 11. Khử mẫu biểu thức sau $-2x^2y\sqrt{\frac{-9}{x^3y^2}}$ với $x < 0; y > 0$ ta được:

- A. $-6\sqrt{x}$. B. $-6\sqrt{-x}$. C. $6\sqrt{x}$. D. $-6\sqrt{x}$.

Câu 12. Khử mẫu biểu thức sau $-xy\sqrt{\frac{3}{xy}}$ với $x < 0; y < 0$ ta được

- A. $\sqrt{xy}$. B. $\sqrt{-xy}$. C. $\sqrt{3xy}$. D. $-\sqrt{3xy}$.

Câu 13. Sau khi rút gọn biểu thức $\frac{1}{5+3\sqrt{2}} + \frac{1}{5-3\sqrt{2}}$ ta được phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó $2a$ có giá trị

A. 20. B. 10. C. 7. D. 14.

Câu 14. Sau khi rút gọn biểu thức $\frac{2}{7+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7-3\sqrt{5}}$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó $a + b$ có giá trị là:

A. 28. B. 7. C. 8. D. 14.

Câu 15. Rút gọn biểu thức $\sqrt{32x} + \sqrt{50x} - 2\sqrt{8x} + \sqrt{18x}$ với $x \geq 0$ ta được kết quả là:

A. $8\sqrt{2x}$. B. $10\sqrt{2x}$. C. $20\sqrt{x}$. D. $2\sqrt{10x}$.

Câu 16. Rút gọn biểu thức $\sqrt{27x} - \sqrt{48x} + 4\sqrt{75x} + \sqrt{243x}$ với $x \geq 0$ ta được kết quả là:

A. $40\sqrt{3x}$. B. $28\sqrt{3x}$. C. $39\sqrt{x}$. D. $28\sqrt{x}$.

Câu 17. Rút gọn biểu thức $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - \sqrt{9a}$ với $a \geq 0, b \geq 0$ ta được kết quả là:

A. $2\sqrt{2a}$. B. $4\sqrt{a}$. C. $8\sqrt{a}$. D. $2\sqrt{a}$.

Câu 18. Rút gọn biểu thức $7\sqrt{x} + 11y\sqrt{36x^5} - 2x^2\sqrt{16xy^2} - \sqrt{25x}$ với $x \geq 0, y \geq 0$ ta được kết quả là:

A. $2\sqrt{x} + 58x^2y\sqrt{x}$. B. $2\sqrt{x} - 58x^2y\sqrt{x}$. C. $2\sqrt{x} + 56x^2y\sqrt{x}$. D. $12\sqrt{x} + 58x^2y\sqrt{x}$.

Câu 19. Giá trị của biểu thức $2\sqrt{\frac{16a}{3}} - 3\sqrt{\frac{a}{27}} - 6\sqrt{\frac{4a}{75}}$ là

A. $\frac{23\sqrt{3a}}{15}$. B. $\frac{\sqrt{3a}}{15}$. C. $\frac{23\sqrt{a}}{15}$. D. $\frac{3\sqrt{3a}}{15}$.

Câu 20. Rút gọn biểu thức $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + 5\sqrt{\frac{4a}{25}}$ với $a > 0$, ta được kết quả là:

A. $12\sqrt{a}$. B. $8\sqrt{a}$. C. $6\sqrt{a}$. D. $10\sqrt{a}$.

Câu 21. Trong căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{2a}{2-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0; a \neq 4$ ta được:

A. $\frac{-2a\sqrt{a} + 4a}{4-a}$. B. $\frac{2a\sqrt{a} - 4a}{4-a}$. C. $\frac{2a\sqrt{a} + 4a}{4-a}$. D. $-\frac{2a\sqrt{a} + 4a}{4-a}$.

Câu 22. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{3}{6+\sqrt{3a}}$ với $a \geq 0; a \neq 12$ ta được:

A. $\frac{6+\sqrt{3a}}{12+a}$. B. $\frac{6-\sqrt{3a}}{12+a}$. C. $\frac{6+\sqrt{3a}}{12-a}$. D. $\frac{6-\sqrt{3a}}{12-a}$.

Câu 23. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{6}{\sqrt{x} + \sqrt{2y}}$ với $x \geq 0; y \geq 0$ ta được

A. $\frac{6(\sqrt{x} - \sqrt{2y})}{x - 4y}$. B. $\frac{6(\sqrt{x} + \sqrt{2y})}{x - 2y}$. C. $\frac{6(\sqrt{x} - \sqrt{2y})}{x - 2y}$. D. $\frac{6(\sqrt{x} + \sqrt{2y})}{x + 2y}$.

Câu 24. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{4}{3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$ với $x \geq 0; y \geq 0; x \neq \frac{4}{9}y$ ta được:

A. $\frac{3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{9x - 4y}$. B. $\frac{12\sqrt{x} - 8\sqrt{y}}{3x + 2y}$. C. $\frac{12\sqrt{x} + 8\sqrt{y}}{9x + 4y}$. D. $\frac{12\sqrt{x} - 8\sqrt{y}}{9x - 4y}$.

Câu 25. Tính giá trị của biểu thức $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$.

A. -3. B. -2. C. 2. D. 3.

Câu 26. Tính giá trị biểu thức $\left(\frac{10 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{30} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - 1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{5} - \sqrt{6}}$

A. 28. B. 14. C. -14. D. 15.

Câu 27. Giá trị biểu thức $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$ là giá trị nào sau đây?

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 28. Cho ba biểu thức $P = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}; Q = x\sqrt{x} + y\sqrt{y};$

$R = x - y$. Biểu thức nào bằng với biểu thức $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

với x, y không âm.

A. P . B. Q . C. R . D. $P - Q$.

Câu 29. Cho ba biểu thức

$M = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2; N = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}; P = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Biểu thức nào bằng với biểu thức $x + \sqrt{xy} + y$ với $x, y, x \neq y$ không âm

A. M . B. N . C. P . D. $M.N$.

Câu 30. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$ là:

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 31. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{9x^2 - 16} = 3\sqrt{3x - 4}$ là

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 32. Phương trình $\frac{2}{3}\sqrt{9x - 9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x - 16} + 27\sqrt{\frac{x - 1}{81}} = 4$

có mấy nghiệm?

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 33. Phương trình $\sqrt{4x - 8} - 2\sqrt{\frac{x - 2}{4}} + \sqrt{9x - 18} = 8$ có nghiệm là?

A. $x = 8$. B. $x = 4$. C. $x = 2$. D. $x = 6$.

Câu 34. Giá trị của biểu thức $\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}}$ là:

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 35. Rút gọn biểu thức $\frac{a}{\sqrt{5}+1} + \frac{a}{\sqrt{5}-2} - \frac{a}{3-\sqrt{5}} - \sqrt{5}a$ ta được:

- A.** $2a$. **B.** a . **C.** $3a$. **D.** $12a$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án A.

Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Với các biểu thức A, B mà $A.B \geq 0; B \neq 0$,

$$\text{ta có } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|} = \begin{cases} \frac{\sqrt{AB}}{B} & \text{khi } B > 0 \\ -\frac{\sqrt{AB}}{B} & \text{khi } B < 0 \end{cases}$$

Câu 2. Đáp án B.

Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$ ta có

$$\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}.$$

Câu 3. Đáp án C.

$$\text{Ta có: } \sqrt{81(2-y)^4} = \sqrt{81 \cdot [(2-y)^2]^2} = |(2-y)^2| \sqrt{81} = 9(2-y)^2.$$

Câu 4. Đáp án D.

$$\text{Ta có: } \sqrt{144(3+2a)^4} = \sqrt{12^2 \cdot [(3+2a)^2]^2} = 12 \cdot |(3+2a)^2| = 12(3+2a)^2$$

Câu 5. Đáp án B.

$$\text{Ta có: } 5y\sqrt{y} = \sqrt{(5y)^2 y} = \sqrt{25y^2 \cdot y} = \sqrt{25y^3}.$$

Câu 6. Đáp án B.

$$\text{Ta có: } x\sqrt{\frac{-35}{x}} = -\sqrt{x^2 \cdot \frac{-35}{x}} = -\sqrt{-35x}$$

Câu 7. Đáp án C.

$$\text{Ta có } 5x\sqrt{\frac{-12}{x^3}} = -\sqrt{(5x)^2 \cdot \frac{-12}{x^3}} = \sqrt{25x^2 \left(\frac{-12}{x}\right)} = -\sqrt{\frac{-300}{x}}$$

Câu 8. Đáp án D.

$$\text{Ta có } 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{80}$$

$$\text{Vì } 75 < 80 \Leftrightarrow \sqrt{75} < \sqrt{80} \Leftrightarrow 5\sqrt{3} < 4\sqrt{5}.$$

Câu 9. Đáp án A.

$$\text{Ta có } 9\sqrt{7} = \sqrt{9^2 \cdot 7} = \sqrt{81 \cdot 7} = \sqrt{567}; \quad 8\sqrt{8} = \sqrt{8^2 \cdot 8} = \sqrt{64 \cdot 8} = \sqrt{512}$$

$$512 < 567 \Leftrightarrow \sqrt{512} < \sqrt{567} \Leftrightarrow 8\sqrt{8} < 9\sqrt{7}$$

Câu 10. Đáp án D.

$$\text{Vì } x > 0; y > 0 \text{ nên } xy > 0. \text{ Từ đó ta có } xy\sqrt{\frac{4}{x^2 y^2}} = xy \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{x^2 y^2}} = xy \cdot \frac{2}{xy} = 2.$$

Câu 11. Đáp án B.

Vì $x < 0; y > 0$ nên ta có: $-2x^2y\sqrt{\frac{-9}{x^3y^2}} = -2x^2y\frac{\sqrt{-9x^3y^2}}{|x^3y^2|} = -2x^2y\frac{\sqrt{-9x.x^2.y^2}}{(-x^3y^2)}$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{-3^2x} \cdot |x| \cdot |y|}{xy} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{-x} \cdot (-x) \cdot y}{xy} = -6\sqrt{-x}.$$

Câu 12. Đáp án D.

Vì $x < 0; y < 0$ nên $xy > 0$.

Từ đó ta có: $-xy\sqrt{\frac{3}{xy}} = -xy \cdot \frac{\sqrt{3xy}}{xy} = -\sqrt{3xy}.$

Câu 13. Đáp án A.

Ta có $\frac{1}{5+3\sqrt{2}} + \frac{1}{5-3\sqrt{2}} = \frac{5-3\sqrt{2}}{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})} + \frac{5+3\sqrt{2}}{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})} = \frac{10}{5^2 - (3\sqrt{2})^2} = \frac{10}{25-18} = \frac{10}{7}$

Suy ra $a = 10; b = 7 \Rightarrow 2a = 2 \cdot 10 = 20$.

Câu 14. Đáp án C.

Ta có: $\frac{2}{7+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7-3\sqrt{5}} = \frac{2(7-3\sqrt{5})}{(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})} + \frac{2(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}$

$$= \frac{14-6\sqrt{5}}{7^2 - (3\sqrt{5})^2} + \frac{14+6\sqrt{5}}{7^2 - (3\sqrt{5})^2} = \frac{14-6\sqrt{5}+14+6\sqrt{5}}{49-9 \cdot 5} = \frac{28}{4} = \frac{7}{1}$$

Suy ra $a = 7; b = 1 \Rightarrow a + b = 7 + 1 = 8$.

Câu 15. Đáp án A.

Ta có $\sqrt{32x} + \sqrt{50x} - 2\sqrt{8x} + \sqrt{18x}$

$$= \sqrt{16 \cdot 2x} + \sqrt{25 \cdot 2x} - 2\sqrt{4 \cdot 2x} + \sqrt{9 \cdot 2x} = \sqrt{4^2 \cdot 2x} + \sqrt{5^2 \cdot 2x} - 2\sqrt{2^2 \cdot 2x} + \sqrt{3^2 \cdot 2x}$$

$$= 4\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 4\sqrt{2x} + 3\sqrt{2x} = \sqrt{2x}(4+5-4+3) = 8\sqrt{2x}.$$

Câu 16. Đáp án B.

Ta có $\sqrt{27x} - \sqrt{48x} + 4\sqrt{75x} + \sqrt{243x} = \sqrt{9 \cdot 3x} - \sqrt{16 \cdot 3x} + 4\sqrt{25 \cdot 3x} + \sqrt{81 \cdot 3x}$

$$= \sqrt{3^2 \cdot 3x} - \sqrt{4^2 \cdot 3x} + 4\sqrt{5^2 \cdot 3x} + \sqrt{9^2 \cdot 3x}$$

$$= 3\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 4 \cdot 5\sqrt{3x} + 9\sqrt{3x} = \sqrt{3x}(3-4+20+9) = 28\sqrt{3x}$$

Câu 17. Đáp án D.

Ta có: $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - \sqrt{9a}$

$$= 5\sqrt{a} - 4\sqrt{25a^3b^2} + 5\sqrt{16ab^2 \cdot a^2} - \sqrt{9 \cdot a}$$

$$= 5\sqrt{a} - 4\sqrt{25 \cdot a^3b^2} + 5\sqrt{16 \cdot a^3b^2} - 3\sqrt{a} = (5\sqrt{a} - 3\sqrt{a}) - (4 \cdot 5\sqrt{a^3b^2} - 5 \cdot 4\sqrt{a^3b^2}) = 2\sqrt{a}$$

Câu 18. Đáp án A.

$$7\sqrt{x} + 11y\sqrt{36x^5} - 2x^2\sqrt{16xy^2} - \sqrt{25x} = 7\sqrt{x} + 11y\sqrt{6^2x^4 \cdot x} - 2x^2\sqrt{4^2xy^2} - \sqrt{5^2x}$$

$$= 7\sqrt{x} + 11y \cdot 6x^2\sqrt{x} - 2x^2 \cdot 4y\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = 7\sqrt{x} + 66x^2y\sqrt{x} - 8x^2y\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$$

$$= (7\sqrt{x} - 5\sqrt{x}) + (66x^2y\sqrt{x} - 8x^2y\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 58x^2y\sqrt{x}.$$

Câu 19. Đáp án A.

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{\frac{16a}{3}} - 3\sqrt{\frac{a}{27}} - 6\sqrt{\frac{4a}{75}} = 2\sqrt{4^2 \cdot \frac{a}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{a}{3}} - 6\sqrt{\frac{4}{25} \cdot \frac{a}{3}} \\ &= 2 \cdot 4 \sqrt{\frac{a}{3}} - 3 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} - 6 \cdot \frac{2}{5} \sqrt{\frac{a}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{3}} \cdot \left(8 - 1 - \frac{12}{5} \right) = \frac{23}{5} \sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{23}{5} \cdot \frac{\sqrt{3a}}{3} = \frac{23\sqrt{3a}}{15}. \end{aligned}$$

Câu 20. Đáp án B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + 5\sqrt{\frac{4a}{25}} = 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{1}{4} \cdot a} - a\sqrt{4 \cdot \frac{1}{a}} + 5\sqrt{\frac{4}{25} \cdot a} \\ &= 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a} - a\sqrt{2^2 \cdot \frac{1}{a}} + 5\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot a} = 5\sqrt{a} + 6 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a} - 2a\sqrt{\frac{1}{a}} + 5 \cdot \frac{2}{5} \sqrt{a} \\ &= 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2a \frac{\sqrt{a}}{a} + 2\sqrt{a} = 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 8\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Câu 21. Đáp án C.

$$\text{Ta có } \frac{2a}{2 - \sqrt{a}} = \frac{2a(2 + \sqrt{a})}{(2 - \sqrt{a})(2 + \sqrt{a})} = \frac{2a\sqrt{a} + 4a}{4 - a}.$$

Câu 22. Đáp án D.

$$\text{Ta có } \frac{3}{6 + \sqrt{3a}} = \frac{3(6 - \sqrt{3a})}{(6 + \sqrt{3a})(6 - \sqrt{3a})} = \frac{3(6 - \sqrt{3a})}{6^2 - (\sqrt{3a})^2} = \frac{3(6 - \sqrt{3a})}{36 - 3a} = \frac{6 - \sqrt{3a}}{12 - a}.$$

Câu 23. Đáp án C.

$$\text{Ta có } \frac{6}{\sqrt{x} + \sqrt{2y}} = \frac{6(\sqrt{x} - \sqrt{2y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{2y})(\sqrt{x} - \sqrt{2y})} = \frac{6(\sqrt{x} - \sqrt{2y})}{x - 2y}$$

Câu 24. Đáp án D.

$$\text{Ta có } \frac{4}{3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} = \frac{4(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} = \frac{4(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2} = \frac{12\sqrt{x} - 8\sqrt{y}}{9x - 4y}.$$

Câu 25. Đáp án B.

$$\text{Ta có } \left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{1-\sqrt{3}} \right) \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{5}) = (-\sqrt{7}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{5})$$

$$= -(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = -(7-5) = -2.$$

Câu 26. Đáp án B.

$$\text{Ta có } \left(\frac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}-1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{100}-\sqrt{40}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{20}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$$

$$= (2\sqrt{5}+\sqrt{6})(2\sqrt{5}-\sqrt{6}) = (2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 = 20-6=14$$

Câu 27. Đáp án A.

$$\text{Ta có } \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} - 4\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{4}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Câu 28. Đáp án C.

$$P = x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 \sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$Q = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$$

$$R = x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\text{Vậy } R = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

Câu 29. Đáp án B.

$$M = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$$

$$N = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = x + \sqrt{xy} + y$$

$$P = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$$

$$\text{Vậy } N = x + \sqrt{xy} + y.$$

Câu 30. Đáp án D.

$$\text{Ta có } \sqrt{4x^2-9} = 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-9} = \sqrt{4(2x+3)} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-9} = \sqrt{8x+12}$$

$$8x+12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$$

Điều kiện:

$$\text{Với điều kiện trên ta có } \sqrt{4x^2-9} = \sqrt{8x+12} \Leftrightarrow 4x^2-9 = 8x+12$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 21 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 14x - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x + 3) - 7(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 7)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ (TM)} \quad \text{Vậy phương}$$

trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{7}{2}; x = -\frac{3}{2}$

Câu 31. Đáp án D.

$$\text{Ta có: } \sqrt{9x^2 - 16} = 3\sqrt{3x - 4} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 - 16} = \sqrt{9(3x - 4)} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 - 16} = \sqrt{27x - 36}$$

$$\text{Điều kiện: } 27x - 36 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

$$\text{Với điều kiện trên ta có: } \sqrt{9x^2 - 16} = \sqrt{27x - 36} \Leftrightarrow 9x^2 - 16 = 27x - 36 \Leftrightarrow 9x^2 - 27x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 15x - 12x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(3x - 5) - 4(3x - 5) = 0 \Leftrightarrow (3x - 4)(3x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 = 0 \\ 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ (TM)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x = \frac{4}{3}; x = \frac{5}{3}$.

Câu 32. Đáp án A.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 9x - 9 \geq 0 \\ 16x - 16 \geq 0 \\ \frac{x-1}{81} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(x-1) \geq 0 \\ 16(x-1) \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Ta có } \frac{2}{3}\sqrt{9x-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x-16} + 27\sqrt{\frac{x-1}{81}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{9(x-1)} - \frac{1}{4}\sqrt{16(x-1)} + 27\sqrt{\frac{1}{81}} \cdot (x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{x-1} - \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{x-1} + 27 \cdot \frac{1}{9} \cdot \sqrt{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TM)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2$.

Câu 33. Đáp án D.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 4x - 8 \geq 0 \\ 9x - 18 \geq 0 \\ x - 24 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-2) \geq 0 \\ 9(x-2) \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Ta có: $\sqrt{4x-8} - 2\sqrt{\frac{x-2}{4}} + \sqrt{9x-18} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{4(x-2)} - 2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot (x-2)} + \sqrt{9 \cdot (x-2)} = 8$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = 8$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x-2 = 4 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (TM)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 6$.

Câu 34. Đáp án B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}} &= \frac{\sqrt{3 \cdot 20}}{20} + \frac{\sqrt{60}}{60} - \frac{2\sqrt{15}}{15} \\ &= \frac{3\sqrt{60} + \sqrt{60} - 4 \cdot \sqrt{4 \cdot 15}}{60} = \frac{4\sqrt{60} - 4\sqrt{60}}{60} = 0. \end{aligned}$$

Câu 35. Đáp án B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{a}{\sqrt{5}+1} + \frac{a}{\sqrt{5}-2} - \frac{a}{3-\sqrt{5}} - \sqrt{5}a \\ &= \frac{a(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} + \frac{a(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} - \frac{a(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} - \sqrt{5}a \\ &= \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4} + \frac{a(\sqrt{5}+2)}{1} - \frac{a(3+\sqrt{5})}{4} - \sqrt{5}a \\ &= \frac{a(\sqrt{5}-1) + 4a(2+\sqrt{5}) - a(3+\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}a}{4} \\ &= \frac{a(\sqrt{5}-1+8+4\sqrt{5}-3-\sqrt{5}-4\sqrt{5})}{4} = \frac{4a}{4} = a \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{49.360}$

b) $-\sqrt{500.162}$

c) $\sqrt{125a^2}$ với $a < 0$

d) $\frac{1}{3}\sqrt{225a^2}$ với a tùy ý

Bài 2: Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $5\sqrt{2}$

b) $-2\sqrt{5}$

c) $x\sqrt{\frac{13}{xy}}$ với $x > 0; y > 0$ d) $x\sqrt{\frac{-37}{x}}$ với $x < 0$

Bài 3: Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

a) $5\sqrt{2}; 2\sqrt{5}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{27}; 6\sqrt{\frac{1}{3}}; 2\sqrt{28}; 5\sqrt{7}$

c) $4\sqrt{2}; \sqrt{37}; 3\sqrt{7}; 2\sqrt{15}$

d) $3\sqrt{6}; 2\sqrt{7}; \sqrt{39}; 5\sqrt{2}$

Bài 4: So sánh:

a) $\sqrt{15} - \sqrt{14}$ và $\sqrt{14} - \sqrt{13}$

b) $\sqrt{105} - \sqrt{101}$ và $\sqrt{101} - \sqrt{97}$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức:

a) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18}$

b) $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{507}$

c) $\sqrt{25a} + \sqrt{49a} - \sqrt{64a}$ với $a \geq 0$

d) $-\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b}$ với $b \geq 0$

Bài 6: Giải các phương trình:

a) $5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} = 14$

b) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

c) $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$

d) $\sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5 + \sqrt{x-2})$

Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $3 - \sqrt{3} + \sqrt{15} - 3\sqrt{5}$

b) $\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a^2}$ với $-1 < a < 1$

c) $\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + \sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2}$ với $a > 0; b > 0$

d) $x - y + \sqrt{xy^2} - \sqrt{y^3}$ với $a > 0; b > 0$

Bài 8: Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được):

a) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ b) $\sqrt{\frac{7}{20}}$ c) $\sqrt{\frac{11}{12}}$ d) $\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3}}$

Bài 9: Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được):

a) $-xy\sqrt{\frac{y}{x}}$ với $x > 0; y \geq 0$ b) $\sqrt{\frac{-3x^3}{35}}$ với $x < 0$

c) $\sqrt{\frac{5a^3}{49b}}$ với $a \geq 0; b > 0$ d) $-7xy\sqrt{\frac{3}{xy}}$ với $x < 0; y < 0$

Bài 10: Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$ d) $\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$

Bài 11: Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ b) $\frac{37}{7+2\sqrt{3}}$
c) $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$ d) $\frac{1+\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}}$ với $a > 0; a \neq 4$

Bài 12: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{5\sqrt{60} \cdot 3\sqrt{15}}{15\sqrt{50} \cdot 2\sqrt{18}}$ b) $\sqrt{27(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$
c) $\frac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ với $x > 0; y > 0$ d) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ với $x \neq 2$

Bài 13: Thực hiện phép tính:

a) $\frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{3\sqrt{2}-4} - \frac{2}{3\sqrt{2}+4}$
c) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ d) $\frac{3}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$

Bài 14: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2}-1$ b) $\sqrt{3x+11} = 3+\sqrt{2}$
c) $\sqrt{x+5} = \sqrt{3}-2$ d) $\sqrt{x+38} = 3+\sqrt{5}$

Bài 15: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{(1+\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ với $x = 2$ b) $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}$ với $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$
c) $\frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{x^3y^2+2x^2y^3+xy^4}{x^2+2xy+y^2}}$ với $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) Biểu thức $\sqrt{49.360} = \sqrt{49.36.10}$
 $= \sqrt{49}.\sqrt{36}.\sqrt{10} = 7.6.\sqrt{10} = 42\sqrt{10}$

Vậy biểu thức có giá trị là $42\sqrt{10}$

b) Biểu thức $-\sqrt{500.162} = -\sqrt{100.5.81.2}$
 $= -\sqrt{100}.\sqrt{81}.\sqrt{10} = -10.9.\sqrt{10} = -90\sqrt{10}$

Vậy biểu thức có giá trị là $-90\sqrt{10}$

c) Biểu thức $\sqrt{125a^2} = \sqrt{25.5.a^2} = \sqrt{25}.\sqrt{a^2}.\sqrt{5} = 5|a|.\sqrt{5}$

với $a < 0$ nên $|a| = -a$. Vậy $\sqrt{125a^2} = -5a\sqrt{5}$

d) Biểu thức $\frac{1}{3}\sqrt{225a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{225}.\sqrt{a^2} = \frac{1}{3}.15.|a| = 5|a|$

Vậy biểu thức có giá trị là $5|a|$

Bài 2: Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2.2} = \sqrt{50}$

b) $-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2.5} = -\sqrt{20}$

c) $x\sqrt{\frac{13}{xy}} = \sqrt{x^2.\frac{13}{xy}} = \sqrt{\frac{13x}{y}}$ với $x > 0; y > 0$

d) $x\sqrt{\frac{-37}{x}} = -\sqrt{x^2.\frac{-37}{x}} = -\sqrt{-37x}$ với $x < 0$

Bài 3: Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

a) Ta có: $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$; $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$; $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

Vì $\sqrt{12} < \sqrt{18} < \sqrt{20} < \sqrt{50}$

Do đó: $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27}$; $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}$; $2\sqrt{28} = \sqrt{112}$; $5\sqrt{7} = \sqrt{175}$

Vì $\sqrt{12} < \sqrt{27} < \sqrt{112} < \sqrt{175}$

Do đó: $6\sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt{27} < 2\sqrt{28} < 5\sqrt{7}$

c) Ta có: $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$; $\sqrt{37}$; $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$; $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$

Vì $\sqrt{32} < \sqrt{37} < \sqrt{60} < \sqrt{63}$

Do đó: $4\sqrt{2} < \sqrt{37} < 2\sqrt{15} < 3\sqrt{7}$

d) Ta có: $3\sqrt{6} = \sqrt{54}$; $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$; $\sqrt{39}$; $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$

Vì $\sqrt{28} < \sqrt{39} < \sqrt{50} < \sqrt{54}$

Do đó: $2\sqrt{7} < \sqrt{39} < 5\sqrt{2} < 3\sqrt{6}$

Bài 4: So sánh:

a) $\sqrt{15} - \sqrt{14}$ và $\sqrt{14} - \sqrt{13}$

Ta có:

$$* \sqrt{15} - \sqrt{14} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{14})(\sqrt{15} + \sqrt{14})}{\sqrt{15} + \sqrt{14}}$$

$$= \frac{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{14})^2}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} = \frac{15 - 14}{\sqrt{15} + \sqrt{14}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}}$$

$$* \sqrt{14} - \sqrt{13} = \frac{(\sqrt{14} - \sqrt{13})(\sqrt{14} + \sqrt{13})}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$$

$$= \frac{(\sqrt{14})^2 - (\sqrt{13})^2}{\sqrt{14} + \sqrt{13}} = \frac{14 - 13}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$$

Vì $\sqrt{15} + \sqrt{14} > \sqrt{14} + \sqrt{13} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} < \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$

Vậy $\sqrt{15} - \sqrt{14} < \sqrt{14} - \sqrt{13}$

b) $\sqrt{105} - \sqrt{101}$ và $\sqrt{101} - \sqrt{97}$

Ta có: $\sqrt{105} - \sqrt{101} = \frac{(\sqrt{105} - \sqrt{101})(\sqrt{105} + \sqrt{101})}{\sqrt{105} + \sqrt{101}}$

$$= \frac{(\sqrt{105})^2 - (\sqrt{101})^2}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} = \frac{105 - 101}{\sqrt{105} + \sqrt{101}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{105} + \sqrt{101}}$$

$$\sqrt{101} - \sqrt{97} = \frac{(\sqrt{101} - \sqrt{97})(\sqrt{101} + \sqrt{97})}{\sqrt{101} + \sqrt{97}}$$

$$= \frac{(\sqrt{101})^2 - (\sqrt{97})^2}{\sqrt{101} + \sqrt{97}} = \frac{101 - 97}{\sqrt{101} + \sqrt{97}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{101} + \sqrt{97}}$$

Vì $\sqrt{105} + \sqrt{101} > \sqrt{101} + \sqrt{97} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} < \frac{1}{\sqrt{101} + \sqrt{97}}$

Vậy $\sqrt{105} - \sqrt{101} < \sqrt{101} - \sqrt{97}$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức:

a) Biểu thức $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18} = 3\sqrt{2} + 4.2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$$= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Biểu thức rút gọn là: $8\sqrt{2}$

b) Biểu thức $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{507} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}.3\sqrt{3} + 2.13\sqrt{3}$
 $= \sqrt{3} - \sqrt{3} + 26\sqrt{3} = 26\sqrt{3}$

Biểu thức rút gọn là: $26\sqrt{3}$

c) Biểu thức $\sqrt{25a} + \sqrt{49a} - \sqrt{64a} = 5\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - 8\sqrt{a}$
 $= (5+7-8)\sqrt{a} = 4\sqrt{a}$ với $a \geq 0$

Biểu thức rút gọn là: $4\sqrt{a}$

d) Biểu thức $-\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} = -6\sqrt{b} - \frac{1}{3}.3\sqrt{6a} + \frac{1}{5}.5\sqrt{6b}$
 $= -6\sqrt{b} - \sqrt{6b} + \sqrt{6b} = -6\sqrt{b}$ với $b \geq 0$

Biểu thức rút gọn là: $-6\sqrt{b}$

Bài 6: Giải các phương trình:

a) $5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} = 14$

Điều kiện: $x \geq 0$

Phương trình biến đổi về dạng:

$$5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} = 14$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 8\sqrt{3x} = 14$$

$$\Leftrightarrow (10 - 4 + 8)\sqrt{3x} = 14$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{3x} = 14$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x} = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

b) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

Điều kiện: $x \geq 5$

$$\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}.3\sqrt{x-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x-5 = 4 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 9$

c) $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3\sqrt{x}-5) - 2(2\sqrt{x}-7)}{6} = \sqrt{x}-1$$

$$\Leftrightarrow 3(3\sqrt{x}-5) - 2(2\sqrt{x}-7) = 6(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x} - 15 - 4\sqrt{x} + 14 = 6\sqrt{x} - 6$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x} = 15 - 14 - 6$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 25$

$$\text{d) } \sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5 + \sqrt{x-2})$$

Điều kiện: $x \geq 2$

$$\sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5 + \sqrt{x-2})$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2} - 15 \cdot \frac{1}{5}\sqrt{x-2} = 20 + 4\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x-2} = 20$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x-2} = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = -20$$

Ta có: $\forall x \geq 2 \Rightarrow VT = \sqrt{x-2} \geq 0; VP = -20 < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$\text{a) Biểu thức } 3 - \sqrt{3} + \sqrt{15} - 3\sqrt{5} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{5}(\sqrt{3} - 3)$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)(1 - \sqrt{5})$$

$$\text{b) Biểu thức } \sqrt{1-a} + \sqrt{1-a^2} = \sqrt{1-a} + \sqrt{(1-a)(1+a)}$$

$$= \sqrt{1-a}(1 + \sqrt{1+a}) \text{ với } -1 < a < 1$$

$$\text{c) Biểu thức } \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + \sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2} \text{ với } a > 0; b > 0$$

$$= (\sqrt{a^3} - \sqrt{ab^2}) + (\sqrt{a^2b} - \sqrt{b^3})$$

$$= \sqrt{a}(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}) + \sqrt{b}(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})$$

$$= \sqrt{a}(a-b) + \sqrt{b}(a-b)$$

$$= (a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\text{d) } x - y + \sqrt{xy^2} - \sqrt{y^3} \text{ với } x > 0; y > 0$$

$$= (x - y) + (y\sqrt{x} - y\sqrt{y})$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + y)$$

Bài 8: Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được):

a) Biểu thức $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) Biểu thức $\sqrt{\frac{7}{20}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{10}$

c) Biểu thức $\sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$

d) Biểu thức $\sqrt{\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{|\sqrt{3} - \sqrt{2}|}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$$

Bài 9: Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được):

a) Biểu thức $-xy\sqrt{\frac{y}{x}} = -xy\sqrt{\frac{xy}{x^2}} = -xy \cdot \frac{1}{|x|} \sqrt{xy}$

$$= -xy \cdot \frac{1}{x} \sqrt{xy} = -y\sqrt{xy} \text{ với } x > 0; y \geq 0$$

b) Biểu thức $\sqrt{\frac{-3x^3}{35}} = \sqrt{\frac{-3x^2 \cdot x \cdot 35}{35^2}} = \frac{|x|}{35} \cdot \sqrt{-105x} = -\frac{x}{35} \cdot \sqrt{-105x} \text{ với } x < 0$

c) Biểu thức $\sqrt{\frac{5a^3}{49b}} = \sqrt{\frac{5a^2 \cdot ab}{49b^2}} = \frac{|a|}{7|b|} \cdot \sqrt{5ab} = \frac{a}{7b} \cdot \sqrt{5ab} \text{ với } a \geq 0; b > 0$

d) Biểu thức $-7xy\sqrt{\frac{3}{xy}} = -7xy\sqrt{\frac{3xy}{(xy)^2}} = -7xy \cdot \frac{1}{|xy|} \sqrt{3xy}$

$$= -7xy \cdot \frac{1}{(-xy)} \sqrt{3xy} = 7\sqrt{3xy} \text{ với } x < 0; y < 0$$

Bài 10: Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{(2 - \sqrt{3})\sqrt{6}}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{18}}{18} = \frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{18}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

c) $\frac{1}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{8 - 27}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{-19}$$

d) $\frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{(1 + \sqrt{a})\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} + a}{a}$ với $a > 0$

Bài 11: Trục căn thức ở mẫu

a) Biểu thức $\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}$

$$= \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{(\sqrt{5})^2 - 1} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

b) Biểu thức $\frac{37}{7 + 2\sqrt{3}} = \frac{37(7 - 2\sqrt{3})}{(7 + 2\sqrt{3})(7 - 2\sqrt{3})}$

$$= \frac{37(7 - 2\sqrt{3})}{7^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{37(7 - 2\sqrt{3})}{37} = 7 - 2\sqrt{3}$$

c) Biểu thức $\frac{2\sqrt{10} - 5}{4 - \sqrt{10}} = \frac{(2\sqrt{10} - 5)(4 + \sqrt{10})}{(4 - \sqrt{10})(4 + \sqrt{10})}$

$$= \frac{8\sqrt{10} + 20 - 20 - 5\sqrt{10}}{4^2 - (\sqrt{10})^2} = \frac{3\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

d) Biểu thức $\frac{1 + \sqrt{a}}{2 - \sqrt{a}} = \frac{(1 + \sqrt{a})(2 + \sqrt{a})}{(2 - \sqrt{a})(2 + \sqrt{a})}$

$$= \frac{2 + \sqrt{a} + 2\sqrt{a} + a}{2^2 - (\sqrt{a})^2} = \frac{2 + 3\sqrt{a} + a}{4 - a} \text{ với } a > 0; a \neq 4$$

Bài 12: Rút gọn các biểu thức sau:

a) Biểu thức $\frac{5\sqrt{60} \cdot 3\sqrt{15}}{15\sqrt{50} \cdot 2\sqrt{18}} = \frac{15\sqrt{60 \cdot 15}}{30\sqrt{50 \cdot 18}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 15 \cdot 15}}{2\sqrt{50 \cdot 2 \cdot 9}} = \frac{2 \cdot 15}{2 \cdot 10 \cdot 3} = \frac{1}{2}$

b) Biểu thức $\sqrt{27(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = 3\sqrt{3} \cdot |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = 3\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

c) Biểu thức $\frac{x + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{x}$ với $x > 0; y > 0$ và $x \neq y$

d) Biểu thức $\frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{x - 2}{\sqrt{(x - 2)^2}} = \frac{x - 2}{|x - 2|}$ với $x \neq 2$

Nếu $x < 2$ thì $|x-2| = -(x-2)$, ta có: $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{x-2}{|x-2|} = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1$

Nếu $x > 2$ thì $|x-2| = x-2$, ta có: $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{x-2}{|x-2|} = \frac{x-2}{x-2} = 1$

Bài 13: Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} \text{a) Biểu thức } & \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} \\ & = \frac{6}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{6}{9-2} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\frac{6}{7}$

$$\begin{aligned} \text{b) Biểu thức } & \frac{2}{3\sqrt{2}-4} - \frac{2}{3\sqrt{2}+4} = \frac{2(3\sqrt{2}+4) - 2(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)} \\ & = \frac{6\sqrt{2}+8-6\sqrt{2}+8}{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \frac{16}{18-16} = 8 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 8

$$\begin{aligned} \text{c) Biểu thức } & \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\ & = \frac{5-2\sqrt{15}+3+5+2\sqrt{15}+3}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{16}{5-3} = \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 8

$$\begin{aligned} \text{d) Biểu thức } & \frac{3}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}} = 3 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3} - (2\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})} \right) \\ & = 3 \cdot \left(\frac{6\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} \right) = 3 \cdot \left(\frac{6\sqrt{3}}{8-27} \right) = -\frac{18\sqrt{3}}{19} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $-\frac{18\sqrt{3}}{19}$

Bài 14: Giải các phương trình:

$$\text{a) Điều kiện: } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Biến đổi phương trình về dạng: } \sqrt{2x-1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow 2x-1 = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3-2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 2 - \sqrt{2}$

b) Điều kiện: $x \geq \frac{-11}{3}$

Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{3x+11} = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow 3x+11 = (3+\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow 3x+11 = 11+6\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 2\sqrt{2}$

c) Điều kiện: $x \geq -5$

Ta có: với mọi giá trị của $x \geq -5$ thì $VT = \sqrt{x+5} \geq 0, VP = \sqrt{3} - 2 < 0$

Suy ra, phương trình $\sqrt{x+5} = \sqrt{3} - 2$ vô nghiệm.

d) Điều kiện: $x \geq -38$

Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{x+38} = 3 + \sqrt{5} \Leftrightarrow x+38 = (3+\sqrt{5})^2$

$\Leftrightarrow x+38 = 14+6\sqrt{5} \Leftrightarrow x = -24+6\sqrt{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -24+6\sqrt{5}$

Bài 15: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) Biểu thức
$$\frac{(1+\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{1+2\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1-2\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{1-\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x}$$

Với $x=2$, thay vào biểu thức đã rút gọn ta được: $1-\sqrt{x} = 1-\sqrt{2}$

Vậy biểu thức có giá trị là $1-\sqrt{2}$ khi $x=2$

b) Biểu thức
$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy}(\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{xy}(\sqrt{y})^2}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{1+\sqrt{xy}}$$

Với $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, thay vào biểu thức đã rút gọn ta được: $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1+\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$

Vậy biểu thức có giá trị là $1+\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

c) Biểu thức
$$\frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{x^3y^2+2x^2y^3+xy^4}{x^2+2xy+y^2}}$$

$$= \frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{xy^2(x^2+2xy+y^2)}{x^2+2xy+y^2}} = \frac{x+y}{y} \cdot y\sqrt{x} = \sqrt{x}(x+y)$$

Với $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, thay vào biểu thức đã rút gọn ta được: $\sqrt{x}(x+y) = \sqrt{2}(2+1) = 3\sqrt{2}$

Vậy biểu thức có giá trị là $3\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

----- **Toán Học Sơ Đồ** -----