

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. BÀI GIẢNG

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Ví dụ 1. Ta gọi hệ thức:

- $2x + 3 < x - 2$ là một bất phương trình với ẩn số x .
- $3y - 2 \geq y$ là một bất phương trình với ẩn số y .

...

Từ đó ta có được định nghĩa về bất phương trình một ẩn:

Một bất phương trình với ẩn x có dạng:

$$A(x) > B(x) \text{ hoặc } A(x) < B(x), A(x) \geq B(x), A(x) \leq B(x)$$

Trong đó về trái $A(x)$ và về phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x .

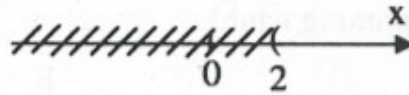
2. TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình được gọi là tập nghiệm của bất phương trình đó.

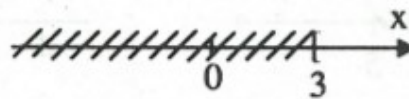
Khi bài toán yêu cầu *giải một bất phương trình*, ta phải tìm *tập nghiệm* của bất phương trình đó.

Ví dụ 2: Ta có:

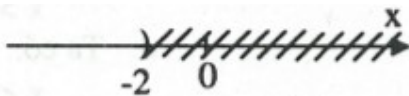
a. Tập nghiệm của bất phương trình $x > 2$ là tập hợp các số lớn hơn 2, tức là tập $\{x | x > 2\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



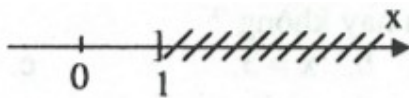
b. Tập nghiệm của bất phương trình $x \geq 3$ là tập hợp các số lớn hơn hoặc bằng 3, tức là tập $\{x | x \geq 3\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



c. Tập nghiệm của bất phương trình $x < -2$ là tập hợp các số nhỏ hơn -2, tức là tập $\{x | x < -2\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



d. Tập nghiệm của bất phương trình $x \leq 1$ là tập hợp các số nhỏ hơn hoặc bằng 1, tức là tập $\{x | x \leq 1\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



Ví dụ 3. Cho bất phương trình: $x^2 - 4x < 3x$

Kiểm tra xem các giá trị $x = -2; x = 1; x = 3$ có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không?

Giải

a. Thay $x = -2$ vào bất phương trình, ta được:

$$(-2)^2 - 4(-2) < 3(-2) \Leftrightarrow 4 + 8 < -6 \Leftrightarrow 12 < -6, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy $x = -2$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

b. Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được:

$$1^2 - 4 \cdot 1 < 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 - 4 < 3 \Leftrightarrow -3 < 3, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình.

c. Thay $x = 3$ vào bất phương trình, ta được:

$$3^2 - 4 \cdot 3 < 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 9 - 12 < 9 \Leftrightarrow -3 < 9, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

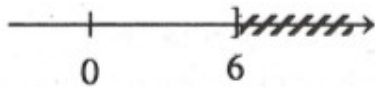
Hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

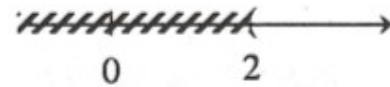
Dạng toán 1: TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: Hình vẽ sau đây biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào? (Chỉ nêu một bất phương trình).

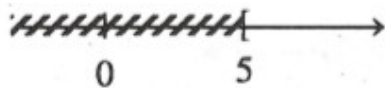
a.



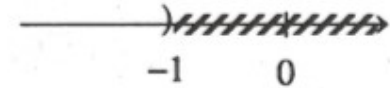
b.



c.



d.



Giải

a. Ta có:

$$x \leq 6.$$

b. Ta có:

$$x > 2$$

c. Ta có:

$$x \geq 5$$

d. Ta có:

$$x < -1$$

Ví dụ 2. Cho bất phương trình $x^2 - 4x \leq 2x - 8$.

Kiểm tra xem các giá trị sau của x có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không?

a. $x = 0$

b. $x = 3$

c. $x = 4$

Giải

a. Thay $x = 0$ vào bất phương trình, ta được:

$$0 \leq -8, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

b. Thay $x = 3$ vào bất phương trình, ta được:

$$3^2 - 4.3 \leq 2.3 - 8 \Leftrightarrow 9 - 12 \leq 6 - 8 \Leftrightarrow -3 \leq -2, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

c. Thay $x = 4$ vào bất phương trình, ta được:

$$4^2 - 4.4 \leq 2.4 - 8 \Leftrightarrow 16 - 16 \leq 8 - 8 \Leftrightarrow 0 \leq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình.

Chú ý: Ta có $0 \leq 0$ cũng là một bất đẳng thức đúng, bởi: $a \geq b$ khi và chỉ khi $a > b$ hoặc $a = b$.

Ví dụ 3. Kiểm tra xem giá trị $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau:

a. $2x + 3 < 9$

b. $-4x > 2x + 5$

c. $5 - x > 3x - 12$

Giải

a. Thay $x = 3$ vào bất phương trình, ta có:

$$2.3 + 3 < 9 \Leftrightarrow 9 < 9, \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy, $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

b. Thay $x = 3$ vào bất phương trình, ta được:

$$(-4).3 > 2.3 + 5 \Leftrightarrow -12 > 11 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy, $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

c. Thay $x = 3$ vào bất phương trình, ta được:

$$5 - 3 > 3.3 - 12 \Leftrightarrow 2 > -3, \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy, $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 4: Viết thành bất phương trình và chỉ ra một nghiệm của nó từ các mệnh đề sau:

a. Tổng của một số nào đó và 4 lớn hơn 9.

b. Hiệu của 8 và 3 lần số nào đó nhỏ hơn 11.

Giải

a. Gọi số cần tìm là x .

Từ giả thiết “Tổng của x và 4 lớn hơn 9”, ta được $x + 4 > 9$.

Ta có thể chọn $x = 6$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

b. Gọi số cần tìm là x .

Từ giả thiết “Hiệu của 8 và 3 lần số x nhỏ hơn 11”, ta được $8 - 3x < 11$.

Ta có thể chọn $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

Ví dụ 5. Hãy lập bất phương trình cho bài toán sau:

Quãng đường đi từ A đến B dài 50km. Một ô tô đi từ A đến B, khởi hành lúc 7 giờ. Hỏi ô tô phải đi với vận tốc bao nhiêu km/h để đến B trước 9 giờ cùng ngày?

Giải

Gọi x là vận tốc trung bình của ô tô ($x > 0$, đơn vị: km/h).

Ô tô đi từ 7 giờ và đến trước 9 giờ tức là ô tô đi từ A đến B chưa tới 2 giờ.

Do đó, nếu ô tô đi đúng 2 giờ thì quãng đường ô tô đi được sẽ dài hơn quãng đường $AB = 50\text{km}$.

Suy ra, ta có bất phương trình:

$$2x > 50 \Leftrightarrow x > 25$$

Vậy, ô tô phải đi với vận tốc lớn hơn 25km/h thì mới đến được B trước 9 giờ.

Ví dụ 6. Hãy chỉ ra hai nghiệm trái dấu cho các bất phương trình sau:

a. $|x-3| < 6$

b. $|x+1| \geq 8$

Giải

a. Ta chọn được hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 6$, thật vậy:

▪ Với $x = -1$, ta có:

$$|-1-3| < 6 \Leftrightarrow |-4| < 6 \Leftrightarrow 4 < 6, \text{ luôn đúng.}$$

▪ Với $x = 6$, ta có:

$$|6-3| < 6 \Leftrightarrow |3| < 6 \Leftrightarrow 3 < 6, \text{ luôn đúng.}$$

b. Ta chọn được hai nghiệm là $x = -9$ và $x = 8$, thật vậy:

▪ Với $x = -9$, ta có:

$$|-9+1| \geq 8 \Leftrightarrow |-8| \geq 8 \Leftrightarrow 8 \geq 8, \text{ luôn đúng.}$$

▪ Với $x = 8$, ta có:

$$|8+1| \geq 8 \Leftrightarrow |9| \geq 8 \Leftrightarrow 9 \geq 8, \text{ luôn đúng.}$$

Dạng toán 2: HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 1. Cặp bất phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

a. $x^2 - 2 > x$ và $x^2 > x + 2$

b. $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ và $x < 1$.

Giải

a. Với bất phương trình:

$$x^2 - 2 > x \text{ cộng 2 vào hai vế của bất phương trình, ta được: } x^2 - 2 + 2 < x + 2 \Leftrightarrow x^2 > x + 2$$

Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.

b. Nhận xét rằng, số 0 là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

Ví dụ 2. Các cặp bất phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

a. $x+1 < 2x$ và $3x < 4x-1$.

b. $x > 3$ và $x^2 - 4x + 3 > 0$

Giải

a. Với bất phương trình:

$$x+1 < 2x \text{ cộng } 2x-1 \text{ vào hai vế của bất phương trình, ta được:}$$

$$x+1+2x-1 < 2x+2x-1 \Leftrightarrow 3x < 4x-1$$

Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.

b. Nhận xét rằng, $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Phiếu 1: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

Dạng 1: Nhận dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bài 1: Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn không?

a) $0x + 3 \geq 0$

b) $x - 1 < 0$

c) $\frac{2}{3}x \leq 0$

d) $\frac{2x^2}{5} + 1 > 0$

Bài 2: Tìm m để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất ẩn x :

a) $(2m^2 - 4)x - m \geq 0$

b) $(3m - 1)x^3 - x - 6 < 0$

c) $\frac{x}{m^2 - 3m - 4} - 2m \leq 0$

d) $\frac{(2m + 9)x + 5}{5m + 10} > 0$

Bài 3: Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m.

a) $(m^2 + 3)x + 1 \leq 0$

b) $-(m^2 + m + 4)x > -2m + 3$

Dạng 2: Giải bất phương trình.

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $2x - 8 > 0$

b) $9 - 3x \leq 0$

c) $5 - \frac{1}{3}x < 1$

d) $\frac{3x + 5}{2} - x \geq 1 + \frac{x + 2}{3}$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau và viết tập nghiệm bằng kí hiệu tập hợp.

a) $(2x + 3)(2x - 1) < (2x - 5)^2$

b) $(x - 1)(x + 2) < (x - 1)^2 + 3$

Bài 6: Tìm giá trị nguyên của x thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình sau:

$$\frac{x + 17}{5} - \frac{3x - 7}{4} > -2 \text{ và } x - \frac{x - 1}{3} - \frac{2x - 5}{5} + \frac{x + 8}{6} > 7$$

Bài 7: Giải các bất phương trình sau:

a) $(x + 1)(x - 1) < 0$

b) $\frac{x + 1}{x + 2} > 0$

Dạng 3: Các dạng toán khác.

Bài 8: Giải bất phương trình $ax + 1 \geq a^2 + x$ (với a là tham số).

Bài 9: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{6} + \frac{x+5}{3} > \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$

b) $\frac{x-2}{1007} + \frac{x-1}{1008} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}$

Bài 10: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và số đó lớn hơn 13 nhưng nhỏ hơn 29.

LỜI GIẢI PHIẾU LUYỆN

Bài 1: Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn không?

Giải:

a) $0x + 3 \geq 0$

Không là bất phương trình bậc nhất một ẩn vì hệ số $a = 0$

b) $x - 1 < 0$

Có là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

c) $\frac{2}{3}x \leq 0$

Có là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

d) $\frac{2x^2}{5} + 1 > 0$

Không là bất phương trình bậc nhất một ẩn vì x^2 là ẩn bậc hai chứ không phải bậc nhất.

Bài 2: Tìm m để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất ẩn x :

Giải: Dựa vào định nghĩa của bất phương trình bậc nhất một ẩn ta có:

a) $2m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}$

b) $3m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

c) $m^2 - 3m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2m + 9 \neq 0 \\ 5m + 10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{9}{2} \\ m \neq -2 \end{cases}$

Bài 3: Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m .

Giải:

$$a) (m^2 + 3)x + 1 \leq 0$$

$$\forall m^2 + 3 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$$

$$b) -(m^2 + m + 4)x > -2m + 3$$

$$\forall m^2 + m + 4 = -\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right] < 0 \forall m \in \mathbb{R}$$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

Giải:

$$a) 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$$

$$b) 9 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow 9 \leq 3x \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$c) 5 - \frac{1}{3}x < 1 \Leftrightarrow 5 - 1 < \frac{1}{3}x \Leftrightarrow 4 < \frac{1}{3}x \Leftrightarrow x > 12$$

$$d) \frac{3x+5}{2} - x \geq 1 + \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow \frac{9x+15-6x}{6} \geq \frac{6+2x+4}{6} \Leftrightarrow 3x+15 \geq 10+2x \Leftrightarrow x \geq -5$$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau và viết tập nghiệm bằng kí hiệu tập hợp.

Giải:

$$a) (2x+3)(2x-1) < (2x-5)^2 \Leftrightarrow 4x-3 < -20x+25 \Leftrightarrow x < \frac{7}{6}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là } S = \left\{x \mid x < \frac{7}{6}\right\}$$

$$b) (x-1)(x+2) < (x-1)^2 + 3 \Leftrightarrow x-2 < -2x+4 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là } S = \{x \mid x < 2\}$$

Bài 6: Tìm giá trị nguyên của x thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình sau:

$$\text{Giải: } \frac{x+17}{5} - \frac{3x-7}{4} > -2 \quad (1)$$

$$x - \frac{x-1}{3} - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} > 7 \quad (2)$$

Giải bất phương trình (1):

$$\frac{x+17}{5} - \frac{3x-7}{4} > -2 \Leftrightarrow 4(x+7) - 5(3x-7) > -2 \cdot 20 \Leftrightarrow -11x > -143 \Leftrightarrow x < 13 \quad (3)$$

Giải bất phương trình (2):

$$x - \frac{x-1}{3} - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} > 7$$

$$\Leftrightarrow 30x - 10(x-1) - 6(2x-5) + 5(x+8) > 7 \cdot 30$$

$$\Leftrightarrow 13x + 80 > 210$$

$$\Leftrightarrow x > 10 \quad (4)$$

Vì x là nghiệm chung của hai bất phương trình (1) và (2), do đó từ (3) và (4) ta suy ra:

$$10 < x < 13$$

Mặt khác x nguyên nên $x = 11, x = 12$

Bài 7: Giải các bất phương trình sau:

Giải:

a) $(x+1)(x-1) < 0$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < 1$

b) $\frac{x+1}{x+2} > 0$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình trên là $x > -1$ hoặc $x < -2$

Bài 8: Giải bất phương trình $ax+1 \geq a^2+x$ (với a là tham số).

Giải: Bất phương trình tương đương với $(a-1)x \geq a^2-1$ hay $(a-1)x \geq (a-1)(a+1)$

+) Nếu $a-1 > 0$ hay $a > 1$, bất phương trình có nghiệm là $x \geq a+1$

+) Nếu $a-1 < 0$ hay $a < 1$, bất phương trình có nghiệm là $x \leq a+1$

+) Nếu $a-1 = 0$ hay $a = 1$, bất phương trình có dạng $0x \geq 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x .

Bài 9: Giải các bất phương trình sau:

Giải:

a) Cộng thêm 1 vào mỗi phân thức ta có:

$$\frac{x+8}{6} + \frac{x+8}{3} > \frac{x+8}{5} + \frac{x+8}{2} \Leftrightarrow (x+8) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) > 0$$

Vì $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} < 0$ nên $x+8 < 0$ hay $x < -8$

b) $\frac{x-2}{1007} + \frac{x-1}{1008} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015} \Leftrightarrow \frac{2x-4}{2014} + \frac{2x-2}{2016} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}$

Cộng thêm -1 vào mỗi phân thức ta được:

$$\frac{2x-2018}{2014} + \frac{2x-2018}{2016} < \frac{2x-2018}{2017} + \frac{2x-2018}{2015}$$

$$\Leftrightarrow (2x-2018) \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \right) < 0$$

Vì $\frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} > 0$ nên $2x-2018 < 0$ hay $x < 1009$

Bài 10: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và số đó lớn hơn 13 nhưng nhỏ hơn 29.

Giải: Gọi số cần tìm là: $\overline{ab} = 10a + b (a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0)$

Từ giả thiết ta có: $\overline{ab} = 10a + b = 10a + a - 2 = 11a - 2$.

Mặt khác: $13 < \overline{ab} < 29 \Leftrightarrow 13 < 11a - 2 < 29 \Leftrightarrow \frac{15}{11} < a < \frac{31}{11}$

Suy ra $a = 2, b = 0$.

Vậy số cần tìm là 20.

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====

.