CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

DẠNG 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA: A>B TA XÉT HIỆU A-B >0, CHÚ Ý BĐT $A^2 \geq 0$

Bài 1: CMR : với mọi x,y,z thì $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

HD:

Xét hiệu ta có:

$2\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right) \geq 0 <=> (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi x = y = z

Bài 2: CMR : với mọi x,y,z thì $x^2+y^2+z^2 \geq 2xy+2yz-2zx$

HD:

Xét hiệu ta có:

$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx \geq 0 <=> (x-y+z)^2 \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi x+z=y

Bài 3: CMR : với mọi x,y,z thì $x^2+y^2+z^2+3 \geq 2(x+y+z)$

HD:

Xét hiệu ta có:

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \geq 0$

Dấu bằng khi x=y=z=1

Bài 4: CMR : với mọi a,b ta có : $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

HD :

Xét hiệu ta có :

$\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq 0$ $<=> 2a^2+2b^2-\left(a^2-2ab+b^2\right) \geq 0$

$<=> a^2+2ab+b^2 \geq 0 <=> (a+b)^2 \geq 0$

Dấu bằng khi a=b

Bài 5: CMR : với mọi a,b,c ta có : $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

HD:

Ta có:

$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{9}$

$<=> 3a^2+3b^2+3c^2-\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right) \geq 0$

$<=> 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \geq 0$

$<=> (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, Dấu bằng khi a=b=c

Bài 6: CMR : $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$

HD:

Ta có:

$3a^2+3b^2+3c^2 \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$<=> 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \geq 0$

$<=> (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, Dấu bằng khi a=b=c

Bài 7: CMR : $a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2} \ge 2ab$

HD:

Ta chứng minh: $a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$

$<=> 2a^2+2b^2 \ge a^2+2ab+b^2$

$<=> a^2+b^2-2ab \ge 0 <=> (a-b)^2 \ge 0$

Dấu bằng khi a=b

Ta chứng minh $\frac{(a+b)^2}{2} \ge 2ab$

$<=> a^2+2ab+b^2 \ge 4ab <=> (a-b)^2 \ge 0$

Dấu bằng khi a=b

Bài 8: Cho a,b,c là các số thực, CMR: $a^2+\frac{b^2}{4} \ge ab$

HD:

Ta có:

$4a^2+b^2-4ab <=> (2a-b)^2 \ge 0$

Dấu bằng khi b=2a

Bài 9: Cho a,b,c là các số thực, CMR : $a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$

HD:

Ta có:

$a^2+b^2+1-ab-a-b \ge 0$

$<=> 2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b \ge 0$

$<=> (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \ge 0$

$<=> (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \ge 0$

Dấu bằng khi a=b=1

Bài 10: Cho a,b,c,d là các số thực : CMR : $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$

HD:

Ta có:

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-ab-ac-ad-ae \ge 0$

$<=> 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2-4ab-4ac-4ad-4ae \ge 0$

$<=> (a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ae+4e^2) \ge 0$

$<=> (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2 \ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi a=2b=2c=2d=2e

Bài 11: Cho a,b thỏa mãn: a+b = 1, a>0, b>0 CMR: $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \ge 9$

HD:

ta có: VT $=\left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)=4+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1$

$=5+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \ge 5+2.2=9$

Dấu bằng khi $\frac{a}{b}=\frac{b}{a} => a^2+b^2 <=> a=b=\frac{1}{2}$

Bài 12: Cho $x, y \ge 0, CMR: \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \ge xy$

HD:

Ta có:

$x^2 + y^2 + 2xy \ge 4xy <=> x^2 - 2xy + y^2 \ge 0 <=> (x-y)^2 \ge 0$, Dấu bằng khi x=y

Bài 13: Cho a > 0, b > 0, CMR: $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2$

HD:

Ta có:

$(a^3 - a^2b) + (b^3 - ab^2) \ge 0 <=> a^2(a-b) - b^2(a-b) \ge 0$

$<=> (a-b)(a^2 - b^2) \ge 0 <=> (a-b)^2(a+b) \ge 0$

Dấu bằng khi a=b

Bài 14: Cho $a \ge b \ge 1$, CMR: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \ge \frac{2}{1+ab}$

HD:

Xét hiệu:

$\left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab}\right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab}\right) \ge 0$

$<=> \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \ge 0$

$<=> \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+ab)(a^2+1)(b^2+a)} \ge 0$

Dấu bằng khi a=b hoặc a=b=1

Bài 15: CMR : với mọi số thực x,y,z,t ta luôn có : $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \ge x(y+z+t)$

HD:

Ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - xy - xz - xt \ge 0$

$<=> 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 - 4xy - 4xz - 4xt \ge 0$

$<=> (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (x^2 - 4xt + 4t^2) + x^2 \ge 0$

Dấu bằng khi x= 2y=2z=2t=0

Bài 17: CMR : $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \ge ab - ac + 2bc$

HD:

Ta có:

$a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 4ac - 8bc \ge 0$

$<=> a^2 - 4a(b-c) + 4(b^2 + c^2 - 2bc) \ge 0$

$<=> a^2 - 4a(b-c) + 4(b-c)^2 \ge 0$

$<=> (a - 2a + 2c)^2 \ge 0$

Bài 19: CMR : $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy - 2zx + 2yz$

HD:

Ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx \ge 0$

$x^2 - 2x(y-z) + y^2 - 2yz + z^2 \ge 0$

$x^2 - 2x(y-z) + (y-z)^2 \ge 0 <=> (x-y+z)^2 \ge 0$

Bài 20: CMR : $x^4+y^4+z^4+1\ge 2x\left(xy^2-x-z+1\right)$

HD:

Ta có:

$x^4+y^4+z^4+1-2x^2y^2+2x^2-2xz-2x\ge 0$

$\left(x^4+y^4-2x^2y^2\right)+\left(x^2-2xz+z^2\right)+\left(x^2-2x+1\right)\ge 0$

$\left(x^2-y^2\right)^2+\left(x-z\right)^2+\left(x-1\right)^2\ge 0$

Dấu bằng khi x=z=1, y=$\pm$1

Bài 21: CMR : $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

HD:

Ta có :

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

$<=> 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$

$<=> \left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\ge 0$

Bài 22: CMR : $a^2+b^2\ge ab$

HD:

ta có:

$a^2+b^2-ab\ge 0 \;<=> a^2-2a.\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}\ge 0 <=> \left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\ge 0$

Bài 23: CMR : $x^2+xy+y^2\ge 0$

HD:

Ta có:

$x^2+2x.\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{3y^2}{4}\ge 0 <=> \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\ge 0$

Bài 24: CMR : $a\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(a+b+c\right)+b^2c^2\ge 0$

HD:

$<=> a\left(a+b+c\right)\left(a+b\right)\left(a+c\right)+b^2c^2\ge 0$

$<=> \left(a^2+ab+ac\right)\left(a^2+ab+ac+bc\right)+b^2c^2\ge 0$

Đặt $\begin{cases} a^2+ab+ac=x \\ bc=y \end{cases}$

Khi đó ta có: $x\left(x+y\right)+y^2\ge 0 <=> x^2+xy+y^2\ge 0$

Bài 25: CMR : $\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\ge\left(a^3+b^3\right)^2$

HD:

Ta có:

$a^6+a^2b^4+a^4b^2+b^6\ge a^6+2a^3b^3+b^6$

$<=> \left(a^4b^2-a^3b^3\right)+\left(a^2b^4-a^3b^3\right)\ge 0$

$<=> a^3b^2\left(a-b\right)+a^2b^3\left(b-a\right)\ge 0$

$<=> \left(a-b\right)\left(a^3b^2-a^2b^3\right)\ge 0 <=> a^2b^2\left(a-b\right)^2\ge 0$

Bài 26: CMR : $\left(a+b\right)\left(a^3+b^3\right)\le 2\left(a^4+b^4\right)$

HD:

Ta có:

$a^4+ab^3+a^3b+b^4\le 2a^4+2b^4 \;<=> a^4-ab^3+b^4-a^3b\ge 0$

$<=> a^3\left(a-b\right)+b^3\left(b-a\right)\ge 0 \;<=> \left(a^3-b^3\right)\left(a-b\right)\ge 0 <=> \left(a-b\right)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 0$

Bài 27: Cho a,b > 0, CMR : $2\left(a^3+b^3\right)\ge\left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right)$

HD:

Ta có:

$2a^3+2b^3\ge a^3+ab^2+a^2b+b^3$

$<=> a^3-a^2b+b^3-ab^2\ge 0$

$<=> a^2\left(a-b\right)+b^2\left(b-a\right)\ge 0$

$<=> \left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\ge 0$

Bài 28: Cho a, b > 0, CMR: $4\left(a^3+b^3\right)\ge\left(a+b\right)^3$

HD:

Ta có:

$4a^3+4b^3\ge a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$<=> 3a^3-3a^2b+3b^3-3ab^2\ge 0$

$<=> 3a^2\left(a-b\right)+3b^2\left(b-a\right)\ge 0 <=> 3\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)\ge 0$

$<=> 3\left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\ge 0$

Bài 29: Cho a,b,c > 0, CMR: $a^3+b^3+abc\ge ab\left(a+b+c\right)$

HD:

Ta có:

$a^3+b^3+abc\ge a^2b+ab^2+abc$

$<=> a^3-a^2b+b^3-ab^2\ge 0$

$<=> a^2\left(a-b\right)+b^2\left(b-a\right)\ge 0$

$<=> \left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\ge 0$

Bài 30: CMR: $\left(a^2+b^2\right)^2\ge ab\left(a+b\right)^2$

HD:

Ta có:

$a^4+2a^2b^2+b^4\ge ab\left(a^2+2ab+b^2\right)=a^3b+2a^2b^2+ab^3$

$<=> \left(a^4-a^3b\right)+\left(b^4-ab^3\right)\ge 0$

$<=> a^3\left(a-b\right)+b^3\left(b-a\right)\ge 0$

$<=> \left(a^3-b^3\right)\left(a-b\right)\ge 0 <=> \left(a-b\right)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 0$

Bài 31: CMR: $a^2+b^2+c^2\ge a\left(b+c\right)$

HD:

ta có:

$a^2+b^2+c^2-ab-ac\ge 0$

$<=> 4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac\ge 0$

$<=> \left(a^2-4ab+4b^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)+2a^2\ge 0$

$<=> \left(a-2b\right)^2+\left(a-2c\right)^2+2a^2\ge 0$

Bài 32: CMR: $a^2+b^2+c^2+d^2\ge a\left(b+c+d\right)$

HD:

$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad\ge 0$

$<=> 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2-4ab-4ac-4ad\ge 0$

$<=> \left(a^2-4ab+4b^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)+\left(a^2-4ad+4d^2\right)+a^2\ge 0$

$<=> \left(a-2b\right)^2+\left(a-2c\right)^2+\left(a-2d\right)^2+a^2\ge 0$

Bài 33: CMR: $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}\ge (a+b+c)$

HD:

Ta có:

$\left(a^2-a\right)+\left(b^2-b\right)+\left(c^2-c\right)+\frac{3}{4}\ge 0$

<=> $\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+\left(b^2-b+\frac{1}{4}\right)+\left(c^2-c+\frac{1}{4}\right)\ge 0$

<=> $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$

Bài 34: CMR: $a^4+b^4+2\ge 4ab$

HD:

ta có:

$a^4+b^4-4ab+2\ge 0$

<=> $a^4+b^4-2a^2b^2+2a^2b^2-4ab+2\ge 0$

<=> $\left(a^2-b^2\right)^2+2\left(a^2b^2-2ab+1\right)\ge 0$

<=> $\left(a^2-b^2\right)^2+2(ab-1)^2\ge 0$

Bài 35: CMR: $x^4-4x+5>0$

HD:

ta có:

$\left(x^4-4x^2+4\right)+\left(4x^2-4x+1\right)>0$

<=> $\left(x^2-2\right)^2+(2x-1)^2>0$

Không xảy ra dấu bằng

Bài 36: CMR: $x^4-x+\frac{1}{2}>0$

HD:

Ta có:

$\left(x^4-x^2+\frac{1}{4}\right)+\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\ge 0$

<=> $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$

Bài 37: CMR: $x^3+4x+1>3x^2 (x>0)$

HD:

ta có: $x^3-3x^2+4x+1>0$

<=> $x\left(x^2-x+4\right)+x^2+1>0$

<=> $x(x-2)^2+x^2+1>0$, Vì x > 0

Bài 39: CMR: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ge -1$

HD:

$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)+1\ge 0$

<=> $\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)+1\ge 0$

Đặt $x^2-5x+5=t$

Khi đó ta có: $(t-1)(t+1)+1\ge 0$

<=> $t^2\ge 0$, Dấu bằng khi t=0

Bài 40: CMR: $x^4+x^3+x^2+x+1>0$

HD:

Ta có : $x^3(x+1)+(x+1)+x^2>0$

$<=> (x+1)(x^3+1)+x^2>0$ x

$<=> (x+1)^2(x^2-x+1)+x^2>0$ (ĐPCM)

Bài 41: CMR : $a^2+4b^2+4c^2\geq 4ab+8bc-4ac$

HD:

Ta có:

$a^2+4b^2+4c^2-4ab-8bc+4ac\geq 0$

$<=> a^2+(2b)^2+(2c)^2-2.a.2b-2.2b.2c+2.a.2c\geq 0$

$<=> (a-b+c)^2\geq 0$

Bài 42: CMR : $8(a^3+b^3+c^3)\geq (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$ với a, b, c >0

HD:

Ta có:

$8a^3+8b^3+8c^3\geq 2a^3+2b^3+2c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3a^2c+3ac^2$

$<=> 6a^3+6b^3+6c^3-3a^2b-3ab^2-3b^2c-3bc^2-3a^2c-3ac^2\geq 0$

$<=> (3a^3-3a^2b)+(3a^3-3a^2c)+(3b^3-3b^2a)+(3b^3-3b^2c)+(3c^3-3bc^2)+(3c^3-3ac^3)\geq 0$

$<=> 3a^2(a-b)+3a^2(a-c)+3b^2(b-a)+3b^2(b-c)+3c^2(c-b)+3c^2(c-a)\geq 0$

$<=> 3(a-b)(a^2-b^2)+3(a-c)(a^2-c^2)+3(b-c)(b^2-c^2)\geq 0$

$<=> 3(a-b)^2(a+b)+3(a-c)(a+c)+3(b-c)^2(b+c)\geq 0$

Bài 43: CMR: $(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$ với a,b,c>0

HD:

Ta có:

$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\geq a^3+b^3+c^3+24abc$

$<=> 3(a+b)(b+c)(c+a)\geq 24abc$

Vì $\begin{cases} a+b\geq 2\sqrt{ab} \\ b+c\geq 2\sqrt{bc} \\ c+a\geq 2\sqrt{ca} \end{cases}$, Nhân theo vế ta được ĐPCM

Bài 44: CMR: Với mọi x, y # 0 ta có: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

HD:

Ta có:

$x^4+y^4+4x^2y^2\geq 3xy(x^2+y^2)$

$<=> (x^2+y^2)^2-xy(x^2+y^2)+2x^2y^2-2xy(x^2+y^2)\geq 0$

$<=> (x^2+y^2)(x^2+y^2-xy)+2xy(xy-x^2-y^2)\geq 0$

$<=> (x^2+y^2-xy)(x^2+y^2-2xy)\geq 0$

$<=> (x-y)^2(x^2-xy+y^2)\geq 0$

Bài 45: CMR : Nếu $a+b\ge 1$, thì $a^3+b^3\ge \frac{1}{4}$

HD:

Ta có:

$b\ge 1-a \Rightarrow b^3\ge 1-3a+3a^2-a^3$

$\Leftrightarrow a^3+b^3\ge 3a^2-3a+1=3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\ge \frac{1}{4}$

Bài 46: Cho a,b,c > 0, CMR : $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$

HD:

Ta có:

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

Bài 47: CMR : $\frac{a^2+a+1}{a^2-a+1}>0$

HD:

Ta có:

$a^2+a+1=\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}>0,\forall a$

$a^2-a+1=\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}>0,\forall a$

Nên VT > 0

Bài 48: CMR : $4a(a+b)(a+1)(a+b+1)+b^2\ge 0$

HD:

Ta có:

$4a(a+b+1)(a+1)(a+b)+b^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 4(a^2+ab+a)(a^2+ab+a+b)+b^2\ge 0$. đặt $\begin{matrix} a^2+ab+a=x \\ b=y \end{matrix}$

$\Leftrightarrow 4x(x+y)+y^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 4x^2+4xy+y^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (2x+y)^2\ge 0$, Dấu bằng khi $2x=-y \Rightarrow 2a^2+2ab+2a=-b \Rightarrow b=-\frac{2a(a+1)}{2a+1}$

Bài 49: CMR : $x^2+y^2\ge \frac{(x+y)^2}{2}\ge 2xy$

HD:

Ta có:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2\ge \frac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow 2x^2+2y^2\ge x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0 \\ \frac{(x+y)^2}{2}\ge 2xy \Rightarrow x^2+y^2+2xy\ge 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0 \end{array}\right.$$

Bài 50: CMR : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$, Với a,b > 0

HD:

Ta có:

$\frac{(a+b)}{ab}\ge \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$

Bài 51: CMR : $a^4+b^4 \ge ab\left(a^2+b^2\right)$

HD:

Ta có: $a^4+b^4-a^3b-ab^3 \ge 0$

$<=> a^3(a-b)+b^3(a-b) \ge 0$

$<=> (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right) \ge 0$

Bài 52: CMR : $\dfrac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$

HD:

Ta có:

$8a^4+8b^4 \ge a^4+b^4+4a^2b^2+2a^2b^2+4a^3b+4ab^3$

$<=> 7a^4+7b^4-4a^2b^2-2a^2b^2-4a^3b-4ab^3 \ge 0$

$<=> \left(a^4+b^4+2a^2b^2\right)+\left(6a^4+6b^4\right)-4ab\left(a^2+b^2\right)-8a^2b^2 \ge 0$

$<=> \left(a^2+b^2\right)^2-4ab\left(a^2+b^2\right)+4a^2b^2+6\left(a^4+b^4\right)-12a^2b^2 \ge 0$

$<=> \left(a^2+b^2-2ab\right)^2+6\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right) \ge 0$

$<=> (a-b)^4+6\left(a^2-b^2\right)^2 \ge 0$

Bài 53: Cho a+b+c=0, CMR : $ab+bc+ca \le 0$

HD:

Ta có: $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$<=> 2(ab+bc+ca)=-\left(a^2+b^2+c^2\right) \le 0$

Dấu bằng khi a=b=c=0

Bài 54: Cho x,y,z $\in R$, CMR : $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$

HD:

Ta có:

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \le 3x^2+3y^2+3z^2$

$<=> x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \ge 0$

$<=> (x+y+z)^2 \ge 0$

Bài 55: CMR : Với mọi x,y khác 0, ta luôn có : $x^4+y^4 \le \dfrac{x^6}{y^2}+\dfrac{y^6}{x^2}$

HD:

Ta có: $x^2y^2\left(x^4+y^4\right) \le x^8+y^8$

$<=> x^8+y^8-x^6y^2-x^2y^6 \ge 0$

$<=> x^6\left(x^2-y^2\right)-y^6\left(x^2-y^2\right) \ge 0$

$<=> \left(x^6-y^6\right)\left(x^2-y^2\right) \ge 0$

$<=> \left(x^2-y^2\right)\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)\left(x^2-y^2\right) \ge 0$

$<=> \left(x^2-y^2\right)^2\left(x^4+x^2y^2+y^4\right) \ge 0$

Bài 56: CMR : $2a^2+b^2+c^2 \ge 2a(b+c)$

HD:

Ta có: $2a^2+b^2+c^2-2ab-2ac \ge 0$

$<=> \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right) \ge 0$

$<=> (a-b)^2+(a-c)^2 \ge 0$

Bài 57: CMR : $a^4+a^3b+ab^3+b^4\ge 0$

HD:

ta có:

$a^3(a+b)+b^3(a+b)\ge 0$

$<=>(a^3+b^3)(a+b)\ge 0$

$<=>(a+b)^2(a^2-ab+b^2)\ge 0$

Bài 58: CMR : $a^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3+b^4\ge 0$

HD:

Ta có:

$(a^4-2a^2.ab+a^2b^2)+(b^4-2ab.b^2+a^2b^2)\ge 0$

$<=>(a^2-ab)^2+(b^2-ab)^2\ge 0$

Bài 59: CMR : $a^4+b^4+c^2+1\ge 2a(ab^2-a+c+1)$

HD:

Ta có:

$a^4+b^4+c^2+1-2a^2b^2+2a^2-2ac-2a\ge 0$

$<=>(a^4+b^4-2a^2b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(a^2-2a+1)\ge 0$

$<=>(a^2-b^2)^2+(a-c)^2+(a-1)^2\ge 0$

Bài 60: CMR : $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

HD:

Ta có:

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2abc^2+2a^2bc-3a^2bc-3ab^2c-3abc^2\ge 0$

$<=>a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-ab^2c-abc^2-a^2bc\ge 0$

Đặt $\begin{cases} ab=x \\ bc=y \\ ca=z \end{cases}$ => $\quad x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 0$

$<=>(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$

Bài 61: CMR : $y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)\le\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z)$, Với $0<x\le y\le z$

HD:

Ta có:

$\frac{y(x+z)}{xz}+\frac{x+z}{y}-\frac{(x+z)^2}{xz}\le 0$

$<=> y^2+xz-y(x+z)\le 0$

$<=> y^2+xz-xy-yz\ge 0$

$<=>(y-x)(z-y)\ge 0$

Bài 62: Cho a,b dương có tổng 1, CMR : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\ge\frac{4}{3}$

HD:

Ta có:

Quy đồng $<=> 3(a+b+2)\ge 4(a+1)(b+1)$

$<=> 4(ab+a+b+1)\le 9 <=> 1\ge 4ab <=> (a+b)^2\ge 4ab$

$<=>(a-b)^2\ge 0$ (đúng)

Bài 63: CMR : Với a,b,c > 0 thì $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

HD:

Ta có: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 0$

$<=> VT\ge\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2$

$<=> \left(\frac{a^2}{b^2}-2.\frac{a}{b}+1\right)+\left(\frac{b^2}{a^2}-2.\frac{b}{a}+1\right)\ge 0$

Bài 64: CMR : $\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},(a,b,c>0)$

HD:

Ta có: $a^8+b^8+c^8\ge a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=\left(a^2b^2\right)^2+\left(b^2c^2\right)^2+\left(c^2a^2\right)^2$

$VT>a^2b^4c^2+b^2c^4a^2+a^4b^2c^2=a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge a^2b^2c^2\left(ab+bc+ca\right)$

$<=> \frac{a^8+b^8+c^8}{a^2b^2c^2}\ge ab+bc+ca <=> \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Bài 65: CMR : $\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a^8+b^8\right)\left(a^4+b^4\right)$

HD:

Ta có: $a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12}\ge a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}$

$<=> \left(a^{10}b^2-a^8b^4\right)+\left(a^2b^{10}-a^4b^8\right)\ge 0$

$<=> a^8b^2\left(a^2-b^2\right)+a^2b^8\left(b^2-a^2\right)\ge 0$

$<=> a^2b^2\left(a^2-b^2\right)\left(a^6-b^6\right)\ge 0$

$<=> a^2b^2\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)\ge 0$

Bài 66: Cho a,b,c dương có abc=1, và $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, CMR : $(a-1)(b-1)(c-1)>0$

HD:

Ta có: $a+b+c>ab+bc+ca$,

Xét $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1$

$=(a+b+c)-(ab+bc+ca)>0$

Bài 67: Cho a,b>0, thỏa mãn : $a^3+b^3=a-b$, CMR : $a^2+b^2+ab<1$

HD:

Ta có:

$a^3+b^3>a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$<=> (a-b)>(a-b)\left(a^2+b^2+ab\right)$ $<=> a^2+b^2+ab<1$

Bài 68: CMR : $2\left(a^8+b^8\right)\ge\left(a^3+b^3\right)\left(a^5+b^5\right)$

HD:

Ta có: $2a^8+2b^8\ge a^8+a^3b^5+a^5b^3+b^8$

$<=> \left(a^8-a^5b^3\right)+\left(b^8-a^3b^5\right)\ge 0$

$<=> a^5\left(a^3-b^3\right)-b^5\left(a^3-b^3\right)\ge 0$

$<=> \left(a^5-b^5\right)\left(a^3-b^3\right)\ge 0$, Giả sử a > b => $a^3>b^3,a^5>b^5$ => ĐPCM

Nếu a<b => $a^3<b^3,a^5<b^5$ => ĐPCM

Bài 79: CMR : $3\left(a^8+b^8+c^8\right)\ge\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^5+b^5+c^5\right)$

HD:

Ta có:

$2\left(a^8+b^8\right)\ge\left(a^3+b^3\right)\left(a^5+b^5\right)$

$2\left(b^8+c^8\right)\ge\left(b^3+c^3\right)\left(b^5+c^5\right)$

$2\left(c^8+a^8\right)\ge\left(a^3+c^3\right)\left(a^5+c^5\right)$

Cộng theo vế ta được:

$4\left(a^8+b^8+c^8\right)\ge\left(a^8+b^8+c^8\right)+a^3\left(a^5+b^5+c^5\right)+b^3\left(a^5+b^5+c^5\right)+c^3\left(a^5+b^5+c^5\right)$

$<=>3\left(a^8+b^8+c^8\right)\ge\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^5+b^5+c^5\right)$

Bài 70: Cho a+b=2, CMR : $a^8+b^8\ge a^7+b^7$

HD:

Ta có: $2\left(a^8+b^8\right)\ge(a+b)\left(a^7+b^7\right)=a^8+b^8+ab^7+a^7b$

$<=>a^8+b^8-a^7b-ab^7\ge0<=>(a-b)\left(a^7-b^7\right)\ge0$

Giả sử $a>b=>\begin{cases}a-b>0\\a^7-b^7>0\end{cases}$ Nếu $a<b=>\begin{cases}a-b<0\\a^7-b^7<0\end{cases}$

Bài 71: CMR : $a^6+b^6+c^6\ge a^5b+b^5c+c^5a,(a,b,c>0)$

HD:

Ta có:

$a^5(a-b)+b^5(b-c)+c^5(c-a)=(a-b)\left(a^5-b^5\right)+(c-a)\left(c^5-b^5\right)\ge0$

Giả sử : $a\ge b\ge c=>\begin{cases}c-a<0\\c^5-b^5<0\end{cases}$ và $\begin{cases}a-b>0\\a^5-b^5>0\end{cases}$ => ĐPCM

Bài 72: CMR : Với mọi a,b,c > 0 thì $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\ge\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$

HD:

Xét $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}-\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{a^2(b+c)-a\left(b^2+c^2\right)}{(b+c)\left(b^2+c^2\right)}=\dfrac{ab(a-b)+ac(a-c)}{(b+c)\left(b^2+c^2\right)}$

Giả sử $a\ge b\ge c=>$ Các ngoặc đều dương => ĐPCM

Bài 73: Cho a, b là hai số dương, CMR : $(a+b)\left(a^3+b^3\right)\le2\left(a^4+b^4\right)$

HD:

Ta có: $2a^4+2b^4-a^4-ab^3-a^3b-b^4\ge0$

$<=>\left(a^4-a^3b\right)+\left(b^4-ab^3\right)\ge0$

$<=>a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge0$

Bài 74: Cho a,b là hai số dương, CMR : $(a+b)\left(a^4+b^4\right)\ge\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)$

HD:

Ta có: $a^5+ab^4+a^4b+b^5-a^5-a^2b^3-a^3b^2-b^5\ge0$

$<=>\left(a^4b-a^3b^2\right)+\left(ab^4-a^2b^3\right)\ge0$

$<=>a^3b(a-b)+ab^3(b-a)\ge0$

$<=>(a-b)\left(a^3b-ab^3\right)\ge0$ $<=>ab(a-b)\left(a^2-b^2\right)\ge0$

Bài 75: CMR : $a^2+b^2+4\ge ab+2(a+b)$

HD:

Ta có:

$a^2+b^2+4-ab-2a-2b\ge 0$

$<=> 2a^2+2b^2+8-2ab-4a-4b\ge 0$

$<=> (a^2-2ab+b^2)+(a^2-4a+4)+(b^2-4b+4)\ge 0$

Bài 76: Cho a,b là hai số có tổng bằng 2, CMR : $a^4+b^4\ge a^3+b^3$

HD:

Ta có:

$2(a^4+b^4)\ge (a+b)(a^3+b^3)$

$<=> 2a^4+2b^4-a^4-ab^3-a^3b-b^4\ge 0$

$<=> (a^4-a^3b)+(b^4-ab^3)\ge 0 <=> a^3(a-b)+b^3(b-a)\ge 0 <=> (a-b)(a^3-b^3)\ge 0$

Bài 77: Cho a,b,c là ba số thỏa mãn : a+b+c=3, CMR : $a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$

HD:

Ta có:

$3(a^4+b^4+c^4)\ge (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$

$<=> (a-b)^2\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]+(b-c)^2(b^2+bc+c^2)+(c-a)^2(c^2+ac+a^2)\ge 0$

Bài 78: Cho $0\le x,y,z\le 1$, CMR : $0\le x+y+z-xy-yz-zx\le 1$

HD:

Ta có:

Xét tích $(1-x)(1-y)(1-z)=-(xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1)\ge 0$

mà $\begin{cases} x>xy \\ y>yz \\ z>zx \end{cases} => x+y+z-xy-yz-zx\le 1-xyz$

mà $0\le xyz\le 1 <=> 1-xyz\le 1$

Bài 79: Cho $-1\le x,y,z\le 2$ và x+y+z=0, CMR : $x^2+y^2+z^2\le 6$

HD:

Ta có:

Xét $\begin{cases} (x-2)(x+1)\le 0 \\ (y-2)(y+1)\le 0 \\ (z-2)(z+1)\le 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x^2-x-2\le 0 \\ y^2-y-2\le 0 \\ z^2-z-2\le 0 \end{cases}$, Cộng theo vế ta có:

$x^2+y^2+z^2-6\le 0 <=> x^2+y^2+z^2\le 6$

Bài 80: Cho x > 0, y > 0, z > 0, CMR : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}<\frac{1}{xyz}$, Với $x^2+y^2+z^2=\frac{5}{3}$

HD:

Ta có:

$(x+y-z)^2\ge 0 <=> x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx\ge 0$

$<=> \frac{5}{3}+2(xy-yz-zx)\ge 0$

$<=> 2(xy-yz-zx)\ge \frac{-5}{3} <=> yz+zx-xy\le \frac{5}{6}\le 1$

$<=> \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}<\frac{1}{xyz}$

Bài 81: Cho 0 < a,b,c < 1, CMR : $2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$

HD:

Do $a<1 => a^2<1, b<1$

$=> (1-a^2)(1-b)>0 <=> 1+a^2b-a^2-b>0 \quad <=> 1+a^2b>a^2+b$

Mặt khác: 0< a, b<1=> $a^2>a^3, b>b^3 => a^2+b>a^3+b^3$

Vậy $1+a^2b<a^3+b^3$, Chứng minh tương tự => ĐPCM

Bài 82: CMR : $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$

HD:

Chuyển vế ta có: $a^4+b^4+c^4-a^2bc-ab^2c-abc^2\ge 0$

$<=> (a^2-b^2)^2+2a^2b^2+(b^2-c^2)^2+2b^2c^2+(c^2-a^2)^2+2a^2c^2-2a^2bc-2b^2ac-2abc^2\ge 0$

$<=> (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2$

$+(a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2)+(a^2b^2-2ab^2c+b^2c^2)+(a^2b^2-2ab^2c+b^2c^2)+(a^2c^2-2abc^2+b^2c^2)\ge 0$

Bài 83: Cho a,b,c,d > 0 thỏa mãn: $a>c+d$, $b>c+d$, CMR: $ab>ad+bc$

HD:

Ta có: $\begin{cases} a>c+d \\ b>c+d \end{cases} => \begin{cases} a-c>d>0 \\ b-d>c>0 \end{cases} => (a-c)(b-d)>cd$, Nhân vào ta được ĐPCM

Bài 84: Cho $0<a,b,c,d<1$, CMR : $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d$

HD:

Ta có: $(1-a)(1-b)=1-a-b+ab>1-a-b$ (do ab >0)

Do $c<1 => 1-c>0 => (1-a)(1-b)(1-c)>(1-a-b)(1-c)>1-a-b-c$

Chứng minh tương tự => ĐPCM

Bài 85: Cho a.b.c=1, $a^3>36$, CMR : $\frac{a^2}{3}+b^2+c^2>ab+bc+ca$

HD:

Xét hiệu $\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}+b^2+c^2-ab-bc-ac>0 \quad <=> \left(\frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab-ac+2bc\right)+\frac{a^2}{12}-3bc>0$

$<=> \left(\frac{a}{2}-b-c\right)^2+\frac{a^3-36abc}{12a}$, Do $a^3>36 => \frac{a^3-36abc}{12a}>0$ ĐPCM

Bài 86 : Chứng minh rằng : Nếu $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ và a,b,c,d là các số dương thì a= b= c= d

Bài 87: Cho hai số a, b thỏa mãn: $a+b\ne 0$, Chứng minh rằng: $a^2+b^2+\left(\frac{ab+1}{a+b}\right)^2\ge 2$

HD:

Ta có: $a^2+b^2+\left(\frac{ab+1}{a+b}\right)^2\ge 2 <=> (a^2+b^2)(a+b)^2+(ab+1)^2\ge 2(a+b)^2$

$<=> (a+b)^2\left[(a+b)^2-2ab\right]-2(a+b)^2+(ab+1)^2\ge 0$

$<=> (a+b)^4-2ab(a+b)^2-2(a+b)^2+(ab+1)^2\ge 0$

$<=> (a+b)^4-2(a+b)^2(ab+1)+(ab+1)^2\ge 0$

$<=> \left[(a+b)^2-ab-1\right]^2\ge 0 \quad$ (ĐPCM)

Bài 88: Cho $x > y > 0$ hãy so sánh : $A = \frac{x-y}{x+y}$, và $B = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

HD:

Vì $x > 0, y > 0 => x + y \neq 0$

$A = \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}$, lại có: $x^2 + y^2 + 2xy > x^2 + y^2, x^2 - y^2 > 0$

$=> A = \frac{x^2-y^2}{2xy + x^2 + y^2} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = B$

Bài 89: Cho x, y > 0 thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$, Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 \leq 2$, Dấu bằng xảy ra khi nào?

HD:

Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có:

$x + x^3 \geq 2x^2, y^2 + y^4 \geq 2y^3$, Do vậy

$x + x^3 + y^2 + y^4 \geq 2x^2 + 2y^3 => x + y^2 \geq (x^2 + y^3) + (x^2 + y^3 - x^3 - y^4) \geq x^2 + y^3 ,(x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4)$

Mà: $x^2 + 1 \geq 2x, y^4 + 1 \geq 2y^2$, nên $1 + x^2 + 1 + y^4 \geq 2x + 2y^2 \geq 2x^2 + 2y^3 \geq x^2 + y^3 + x^3 + y^4$

Do vậy $x^3 + y^3 \leq 2$

Dấu bằng xảy ra khi: $x = y = 1$

Bài 90: Chứng minh BĐT sau: $x^2 + y^2 - xy \geq x + y - 1$

HD:

Ta có: $x^2 + y^2 - xy \geq x + y - 1 <=> 2(x^2 + y^2 - xy) \geq 2(x + y - 1)$

$<=> 2x^2 + 2y^2 - 2xy \geq 2x + 2y - 2 <=> (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$

Bài 91: Cho a, b là các số dương thỏa mãn: $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$, Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \leq 1 + ab$

HD:

Ta có: $a^2 + b^2 \leq 1 + ab <=> a^2 + b^2 - ab \leq 1 <=> (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \leq a + b$

$<=> a^3 + b^3 \leq a + b <=> (a^3 + b^3)(a^3 + b^3) \leq (a+b)(a^5 + b^5) <=> 2a^3b^3 \leq ab^5 + a^5b$

$<=> ab(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) \geq 0 <=> ab(a^2 - b^2)^2 \geq 0, \forall a, b > 0$

Bài 92: Cho các số a, b, c $\in [0;1]$, chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

HD:

Do a, b,c $\in [0;1]$, nên:

$(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0 => 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \geq 0$

$=> a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 - abc \leq 1$

Do $a, b, c \in [0;1] => b^2 \leq b, c^3 \leq c$, từ đó ta có:

$a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq a + b + c - ab - bc - ca \leq 1$

DẠNG 2 : SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ

Các BĐT phụ hay dùng :

$a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$ $\qquad (x+y)^2 \ge 4xy$ $\qquad \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$

Bài 1: Cho a+b > 1, CMR : $a^4+b^4 > \frac{1}{8}$

HD:

Ta có: $(a+b)^2 > 1 => \begin{cases} a^2+b^2+2ab > 1 \\ a^2+b^2-2ab \ge 0 \end{cases} <=> a^2+b^2 > \frac{1}{2}$

$=> \left(a^2+b^2\right)^2 > \frac{1}{4} => \begin{cases} a^4+b^4+2a^2b^2 > \frac{1}{4} \\ a^4+b^2-2a^2b^2 \ge 0 \end{cases} => 2a^4+2b^4 > \frac{1}{4}$

Vậy $a^4+b^4 > \frac{1}{8}$

Bài 2: Cho a+b = 1, CMR : $a^2+b^2 \ge \frac{1}{2}$

HD:

Ta có: $(a+b)^2 = 1 => \begin{cases} a^2+2ab+b^2 = 1 \\ a^2-2ab+b^2 \ge 0 \end{cases} => 2a^2+2b^2 \ge 1 => a^2+b^2 \ge \frac{1}{2}$

Bài 3: Cho a+b > 2, CMR : $a^2+b^2 > 2$

HD:

Ta có: $(a+b)^2 > 4 => \begin{cases} a^2+2ab+b^2 > 4 \\ a^2-2ab+b^2 \ge 0 \end{cases} => 2a^2+2b^2 > 4 => a^2+b^2 > 2$

Bài 4: Cho $a^2+b^2 \le 2$, CMR: $a+b \le 2$

HD:

Ta có:

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \ge 2ab => 2ab \le a^2+b^2 < 2 \end{cases}$

Cộng theo vế ta được: $a^2+b^2+2ab \le 4 <=> (a+b)^2 \le 4 => a+b \le 2$

Bài 5: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$

HD:

Ta có: Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nên ta có:

$\begin{cases} a < b+c \\ b < a+c \\ c < a+b \end{cases} => \begin{cases} a^2 < ab+ac \\ b^2 < ab+bc \\ c^2 < ac+bc \end{cases} => a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$

Bài 6: Cho a,b là hai số thực bất kỳ có tổng bằng 1, CMR: $a^3+b^3 \ge \frac{1}{4}$

HD:

Ta có: $a+b=1 => b=1-a => b^3=(1-a)^3$

$=> a^3+b^3 = a^3+1-3a+3a^2-a^3 = 3a^2-3a+1$

$= 3\left(a^2-a+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = 3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \ge \frac{1}{4}$

Bài 7: Cho $x, y, z \ge 0$, CMR : $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz$

HD:

Ta có: $\begin{cases} x+y \ge 2\sqrt{xy} \\ y+z \ge 2\sqrt{yz} \\ z+x \ge 2\sqrt{zx} \end{cases}$, Nhân theo vế ta được: $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz$

Bài 8: Cho a,b,c > 0, CMR : $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc} + \dfrac{1}{b^3+c^3+abc} + \dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \le \dfrac{1}{abc}$

HD:

Ta có: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \ge (a+b)ab$, Do $a^2-ab+b^2 \ge ab$

Khi đó $^3+b^3+abc \ge (a+b)ab+abc = ab(a+b+c)$

Chứng minh tương tự ta có:

$b^3+c^3+abc \ge bc(a+b+c)$ và $c^3+a^3+abc \ge ac(a+b+c)$

Khi đó ta có: $VT \le \dfrac{1}{a+b+c}\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right) = \dfrac{1}{a+b+c}.\dfrac{a+b+c}{abc} = \dfrac{1}{abc}$

Bài 9: CMR: Với mọi a,b,c > 0 thì $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$

HD:

Ta có: $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}$

Nhân theo vế ta có: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$

Bài 10: Cho a,b,c > 0, CMR : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$

HD:

Ta có:

Từ $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \ge 9$, Đặt $\begin{cases} x = a+b \\ y = b+c \\ z = c+a \end{cases}$

=> $2(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right) \ge 9$

<=> $\dfrac{a+b+c}{a+b}+\dfrac{a+b+c}{b+c}+\dfrac{a+b+c}{c+a} \ge \dfrac{9}{2}$ => $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a} \ge \dfrac{9}{2}-3 = \dfrac{3}{2}$

Bài 11: Cho a,b > 0, CMR : $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}+\dfrac{1}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$

HD:

Ta có: $\left(\dfrac{a}{b+1}+1\right)+\left(\dfrac{b}{a+1}+1\right)+\left(\dfrac{1}{a+b}+1\right)+3 = (a+b+1)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\right)-3 \ge \dfrac{9}{2}-3 = \dfrac{3}{2}$

Bài 12: Cho a,b,c là ba số dương, CMR : $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$

HD:

Ta có: $VT = \left(\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4}\right)+\left(\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c+a}{4}\right)+\left(\dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a+b}{4}\right)-\dfrac{a+b+c}{2}$

$VT \ge a+b+c-\dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} = VP$

Bài 13: Cho a,b,c > 0, CMR : $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{c^2+a^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

HD:

Ta có: $\begin{cases}a^2+b^2\ge 2ab\\ b^2+c^2\ge 2bc\\ c^2+a^2\ge 2ca\end{cases} => VT\le\frac{a}{2ab}+\frac{b}{2bc}+\frac{c}{2ca}=\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Bài 14: CMR: với a,b,c > 0 thì : $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

HD:

Ta có: $\left(\frac{a^2}{b}+b\right)+\left(\frac{b^2}{c}+c\right)+\left(\frac{c^2}{a}+a\right)-(a+b+c)\ge 2a+2b+2c-(a+b+c)=a+b+c=VP$

Bài 15: CMR : $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}\ge -a-b-c$

HD:

Ta có: $\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right)+\left(b^2+b+\frac{1}{4}\right)+\left(c^2+c+\frac{1}{4}\right)\ge 0$

Bài 16: Cho a,b,c dương có tổng là 1, CMR : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$

HD:

Vì $(a+b+c)=1 => (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

Bài 17: Cho a,b,c là các số không âm và $a+b+c\le 3$,CMR :
$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3}{2}\le\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$

HD:

Ta có: $\begin{cases}1+a^2\ge 2a\\ 1+b^2\ge 2b\\ 1+c^2\ge 2c\end{cases} => \frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{a}{2a}+\frac{b}{2b}+\frac{c}{2a}=\frac{3}{2}$

Đặt $\begin{cases}1+a=x\\ 1+b=y\\ 1+c=z\end{cases} => x+y+z=a+b+c+3\le 6 \;=>\; B=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{3}{2},$

Khi đó: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9 => \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\ge\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

Bài 18: Cho x,y,z > 0, CMR : $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$

HD:

Ta có: $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\ge 2$, Tương tự $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ và $-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\le -2$

Cộng theo vế ta có: $VT\ge 2+2-2=2$

Bài 19: Cho a,b là các số dương thỏa mãn: a+b < ab, CMR : a+b > 4

HD:

Ta có:

$(a+b)^2\ge 4ab => \frac{a+b}{ab}\ge\frac{4}{a+b}$ Do $a+b<ab => \frac{a+b}{ab}<\frac{ab}{ab}=1 => 1>\frac{4}{a+b} => a+b>4$

Bài 20: Cho a,b,c > 0, CMR : $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

HD:

Ta có:

$\left(\frac{a^3}{b}+b^2\right)+\left(\frac{b^3}{c}+c^2\right)+\left(\frac{c^3}{a}+a^2\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Mà: $\frac{a^3+b^3}{b}\ge\frac{ab(a+b)}{b}=a(a+b)=a^2+ab$

Tương tự => $\frac{b^3}{c}+c^2\ge b^2+bc,\frac{c^3}{a}+a^2\ge c^2+ca$

Khi đó VT $\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(ab+bc+ca\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)=ab+bc+ca$

Bài 21: Cho a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$, CMR: $ab+bc+ca+a+b+c\le 6$

HD:

Ta có: $\begin{cases}a^2+b^2\ge 2ab\\ b^2+c^2\ge 2bc\\ c^2+a^2\ge 2ac\end{cases}$ $\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2\left(ab+bc+ca\right)\Rightarrow 2.3\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$

=> $ab+bc+ca\le 3$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases}a^2+1\ge 2a\\ b^2+1\ge 2b\\ c^2+1\ge 2c\end{cases}$ $\Rightarrow 3+3\ge 2\left(a+b+c\right)\Rightarrow a+b+c\le 3$ (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được ĐPCM

Bài 22: CMR: $\frac{x^2}{1+16x^4}+\frac{y^2}{1+16y^4}\le\frac{1}{4}$, với mọi x,y là số thực

HD:

Ta có: $1+16x^4\ge 2.\sqrt{16x^4}=2.4x^2=8x^2\Rightarrow\frac{x^2}{1+16x^4}\le\frac{1}{8}$ (1)

Tương tự: $\frac{y^2}{1+16y^4}\le\frac{y^2}{8y^2}=\frac{1}{8}$ (2)

Cộng theo vế ta được : $VT\le\frac{1}{4}$

Bài 23: CMR với a,b,c > 0 thì $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$

HD:

Ta có: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}=c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 2c$, Tương tự ta có: $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge 2a,\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2b$

Cộng theo vế ta được : $2VT\ge 2VP\Rightarrow VT\ge VP$

Bài 24: CMR: với a,b > 0 và a > b > 0 thì $\frac{a-b}{a+b}<\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

HD:

Ta có: $\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}=\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$, Mà $a^2+2ab+b^2\ge a^2+b^2$

Khi đó $VT<\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

Bài 25: Cho 3 số a,b,c dương thoă mãn: a+b+c = 4, CMR : $a+b\geq abc$

HD:

Ta có: $(a+b)^2\geq 4ab => \left[(a+b)+c\right]^2\geq 4(a+b)c => 16\geq 4(a+b)c$

$=> 4\geq (a+b)c => 4(a+b)\geq (a+b)^2 c => 4(a+b)\geq \left(2\sqrt{ab}\right)^2 c = 4abc$

$=> a+b\geq abc$

Bài 26: Cho 2 số x,y > 0 thỏa mãn: $x^3+y^3=x-y$, CMR : $x^2+y^2<1$

HD:

Ta có: $x^3+y^3>0 => x-y>0 <=> x^2+y^2<1 <=> (x-y)(x^2+y^2)<x^3+y^3$

$<=> x^3+xy^2-x^2y-y^3<x^3+y^3 <=> 2y^3+x^2y-xy^2>0 <=> y(2y^2+x^2-xy)>0$

Bài 27: Cho a+b = 1, CMR: $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$

HD:

Ta có: $(a+b)^2=1 => \begin{cases} a^2+2ab+b^2=1 \\ a^2-2ab+b^2\geq 0 \end{cases} <=> 2a^2+2b^2\geq 1 <=> a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$

Bài 28: Cho a+b=1, CMR: $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$

HD:

Ta có: $\begin{cases} a^2+2ab+b^2=1 \\ a^2-2ab+b^2\geq 0 \end{cases} <=> 2a^2+2b^2\geq 1 => a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$

Mặt khác: $\begin{cases} a^4+b^4+2a^2b^2\geq\frac{1}{4} \\ a^4+b^4-2a^2b^2\geq 0 \end{cases} <=> 2a^4+2b^4\geq\frac{1}{4} <=> a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$

Bài 29: Cho 3 số x,y,z >0, CMR: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 3$

HD:

Ta có: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}}=3$, Dấu bằng khi $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x} => \begin{cases} x^2=yz \\ y^2=xz \\ z^2=xy \end{cases} => x=y=z$

Bài 30: Cho a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$, CMR: $abc+2(1+a+b+c+ab+bc+ca)\geq 0$

HD:

Vì $a^2+b^2+c^2=1 => |a|,|b|,|c|\leq 1 => -1\leq x,y,z\leq 1$

Khi đó:

$(a+1)(b+1)(c+1)\geq 0 <=> abc+ab+bc+ca+a+b+c+1\geq 0$ (1)

mà $(a+b+c+1)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)+1\geq 0$

$<=> a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+1\geq 0$

$<=> ab+bc+ca+a+b+c+1\geq 0$ (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được: $abc+2(ab+bc+ca+a+b+c+1)\geq 0$

DẠNG 3: BẤT ĐẲNG THỨC COSI VÀ SCHAWRZ

BĐT Cô Si: Với hai số a,b không âm ta có: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, Dấu = xảy ra khi a=b

Mở rộng ta có: $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

Co si ngược dấu: $a.b\leq \frac{(a+b)^2}{4}$ và $abc\leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

BĐT Schwarz: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq \frac{4}{x+y}$ với x, y > 0, Dấu = khi x = y

Mở rộng : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq \frac{9}{x+y+z}$, dấu = khi x = y = z

Bài 1: Cho x, y>0. Chứng minh BĐT : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq \frac{4}{x+y}$

HD :

Ta có: gt $<=> \frac{x+y}{xy}\geq \frac{4}{x+y} <=> (x+y)^2\geq 4xy <=> (x-y)^2\geq 0$

Dấu ‘ = ‘ khi x=y

Bài 2: CMR: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq \frac{9}{x+y+z}$

HD :

Ta có : $<=> (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

Bài 3: CMR: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}$

HD:

Ta có : $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2.\frac{a}{c}$, tương tự : $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 2.\frac{b}{a}$, và $\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\geq 2.\frac{c}{b}$

Cộng theo vế ta được : 2VT $\geq$2VP => VT> VP

Bài 4: Cho a,b,c là ba số dương, CMR: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$

HD:

Ta có : $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

Nhân theo vế ta được : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$

Bài 5: Cho a,b,c là ba số dương, CMR: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{3}{2}$

HD:

Ta có : Áp dụng bất đẳng thức : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

Đặt $\begin{cases} x=a+b \\ y=b+c \\ z=c+a \end{cases} => 2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9$

$<=> \frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}\geq \frac{9}{2} <=> \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$

Bài 6: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

HD :

Vì a, b, c là ba cạnh của 1 tam giác nên các mẫu đều dương

Áp dụng BĐT schawzr ta có : $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\ge \frac{4}{2b}=\frac{2}{b}$

Tương tự ta cũng có : $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge \frac{2}{c}$ và $\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\ge \frac{2}{a}$

Cộng theo vế ta được điều phải chứng minh

Bài 7: Cho $x,y,z\ge 0$, CMR: $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$

HD :

Ta có : $\begin{cases} x+y\ge 2\sqrt{xy} \\ y+z\ge 2\sqrt{yz} \\ z+x\ge 2\sqrt{zx} \end{cases}$, Nhân theo vế ta được : $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$

Bài 8: Cho $x>0, y>0, x+y\le 1$, CMR: $\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{y^2+xy}\ge 4$

HD :

Áp dụng BĐT schawzr ta có :

$\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{y^2+xy}\ge \frac{4}{(x+y)^2}\ge 4$, Vì $x+y\le 1 => (x+y)^2\le 1 => \frac{1}{(x+y)^2}\ge 1$

Bài 9: Cho a,b,c dương có tích bằng 1, CMR: $(a+1)(b+1)(c+1)\ge 8$

HD :

Ta có : $\begin{cases} a+1\ge 2\sqrt{a} \\ b+1\ge 2\sqrt{b} \\ c+1\ge 2\sqrt{c} \end{cases} => (a+1)(b+1)(c+1)\ge 8\sqrt{abc}=8$

Bài 10: Cho a,b không âm, CMR: $(a+b)(ab+1)\ge 4ab$

HD :

Ta có : $\begin{cases} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ ab+1\ge 2\sqrt{ab} \end{cases} => (a+b)(ab+1)\ge 4ab$

Bài 11: Cho a,b,c,d dương có tích bằng 1, CMR: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\ge 6$

HD :

Ta có : $\begin{cases} a^2+b^2\ge 2ab \\ c^2+d^2\ge 2cd \end{cases} => a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\ge 3(ab+cd)\ge 3.2\sqrt{abcd}=6$

Bài 12: CMR: $\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)^2\ge (a+c)(b+d)$

HD :

Ta có : $VT=\left(\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}\right)^2\ge 4\frac{(a+c)(b+d)}{4}=(a+c)(b+d)$

Do áp dụng BĐT : $(a+b)^2\ge 4ab$

Bài 13: CMR: $8(a^4+b^4)\ge (a+b)^4$

HD :

Ta có : $a^4+b^4\ge 2a^2b^2 <=> 2(a^4+b^4)\ge (a^2+b^2)^2$ (1)

Mặt khác : $a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)\ge (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2\ge \frac{(a+b)^2}{2}$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2\ge \frac{(a+b)^4}{4}$, Thay vào (1) ta được : $2\left(a^4+b^4\right)\ge \frac{(a+b)^4}{4}$

Bài 14: CMR: $a^4+b^4+c^4+d^4\ge 4abcd$

HD :

Vì a^4,b^4,c^4,d^4 là 4 số dương => $a^4+b^4+c^4+d^4\ge 4\sqrt[4]{(abcd)^4}=4abcd$

Bài 15: Cho a,b > 0, CMR: $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}+\frac{1}{a+b}\ge \frac{3}{2}$

HD :

$$VT=\left(\frac{a}{b+1}+1\right)+\left(\frac{b}{a+1}+1\right)+\left(\frac{1}{a+b}+1\right)-3=(a+b+1)\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+1)+(b+1)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+b}\right)-3\ge \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

Bài 16: CMR: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge \frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}$

HD :

Ta có : $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\ge \frac{2a}{c}$, Tương tự ta có : $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge \frac{2b}{a}$ và $\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\ge \frac{2c}{b}$

Cộng theo vế ta có :

$2VT\ge 2VP$

Bài 17: Cho a,b,c > 0, CMR: $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$

HD :

Ta có : $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=c\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\ge 2c$, Tương tự ta có : $\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}=a\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\ge 2a$ và

$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}=b\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 2b$

Cộng theo vế ta được : $2VT\ge 2VP$

Bài 18: Cho a,b,c>0, CMR: $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

HD :

Ta có : $\begin{cases}\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\ge \frac{2}{b}\\ \frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\ge \frac{2}{c}\\ \frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\ge \frac{2}{a}\end{cases} \Rightarrow VT+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ => ĐPCM

Bài 19: Cho a,b > 0, a+b = 1, CMR: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\ge 6$

HD :

Ta có : $\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{1}{2ab}\ge \frac{4}{(a+b)^2}+\frac{1}{2ab}=4+\frac{1}{2ab}$

Ta lại có : $1=a+b\ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 1\ge 4ab \Rightarrow \frac{1}{4ab}\ge 1 \Rightarrow \frac{1}{2ab}\ge 2$

Khi đó $VT\ge 4+2=6$

Bài 20: CMR với mọi a,b > 0 thỏa mãn: ab=1, ta có BĐT: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{a+b}\ge 3$

HD :

Ta có : $<=> \frac{a+b}{ab}+\frac{2}{a+b}=a+b+\frac{2}{a+b}=\frac{a+b}{2}+\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)\ge\frac{2\sqrt{ab}}{2}+2=1+2=3$

Bài 21: Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn: $a+b+c=4$, CMR: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge a^3b^3c^3$

HD :

Áp dụng BĐT : $(a+b)^2\ge 4ab => (a+b+c)^2\ge 4(a+b)c <=> 16\ge 4(a+b)c$

$<=> 4(a+b)\ge (a+b)^2c\ge 4abc <=> a+b\ge abc$

Tương tự ta có : $b+c\ge abc, c+a\ge abc$

Khi đó nhân theo vế ta được : $(a+b)(b+c)(c+a)\ge abc.abc.abc=(abc)^3$

Bài 22: CMR: với a,b,c > 0 thì $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}$

HD :

Áp dụng BĐT :

$(a+b)^2\ge 4ab <=> (a+b)(a+b)\ge 4ab => \frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}$

Tương tự ta có : $\frac{bc}{b+c}\le\frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a}\le\frac{c+a}{4}$, Cộng theo vế ta được ĐPCM

Bài 23: Cho a,b,c > 0, CMR: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$

HD :

Ta có : $\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\right)\ge a$, Tương tự ta có : $\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\ge b$ và $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge c$

Cộng theo vế ta được :

$VT+\frac{a+b+c}{2}\ge a+b+c => VT\ge\frac{a+b+c}{2}$

Bài 24: Cho a,b không âm, CMR: $(a+b)(ab+1)\ge 4ab$

HD :

Ta có : $\begin{cases} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ ab+1\ge 2\sqrt{ab} \end{cases} => (a+b)(ab+1)\ge 4ab$

Bài 25: Cho a,b,c > 0, CMR: $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{a+b+c}{2abc}$

HD :

Co si cho hai số : a^2, bc, Ta được:

$a^2+bc\ge 2a\sqrt{bc} => \frac{1}{a^2+bc}\le\frac{1}{2a\sqrt{bc}} => \frac{2}{a^2+bc}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}\right)$

Tương tự ta có :

$\frac{2}{b^2+ac}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}\right)$ và $\frac{2}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ca}+\frac{1}{cb}\right)$

Cộng thoe vế ta được : $2VT\le\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc} => VT\le\frac{a+b+c}{2abc}$

Bài 26: CMR: Trong tam giác ABC ta có: $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$

HD :

Ta có : $VT\ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$

Lại có : $(b+c-a)+(c+a-b)\ge 2\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$

=> $2c\ge 2\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$, Tương tự ta có :

$a\ge\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}$ và $b\ge\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}$

=> $abc\ge(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ => $\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\ge 1 \Rightarrow VT\ge 3\sqrt[3]{1}=3$

Bài 27: Cho a, b là các số thực không nhỏ hơn 1, CMR: $\frac{a}{2a-1}+\frac{b}{2b-1}\ge\frac{4}{1+ab}$

HD :

Ta có : $2a\le a^2+1 \Rightarrow 2a-1\le a^2 \Rightarrow \frac{a}{2a-1}\ge\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}$

Chứng minh tương tự ta có :

$\frac{b}{2a-1}\ge\frac{1}{b} \Rightarrow VT\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ Vì $a,b>1\Rightarrow(a-1)(b-1)\ge 0$

$\Rightarrow ab-a-b+1\ge 0 \Leftrightarrow a+b\le ab+1 \Rightarrow \frac{4}{a+b}\ge\frac{4}{ab+1}$

Bài 28: Cho a,b,c dương thỏa mãn: abc = 1, CMR: $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{9}{2(a+b+c)}\ge\frac{9}{2}$

HD :

Ta có : $\frac{a^2}{c}+c\ge 2a$, $\frac{b^2}{a}+a\ge 2b, \frac{c^2}{b}+b\ge 2c$

Ki đó $VT\ge a+b+c+\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}+\left(\frac{a+b+c}{2}+\frac{9}{2(a+b+c)}\right)\ge\frac{9}{2}$

$VT\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}+\frac{2.3}{2}=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

Bài 29: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$, CMR: $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le 1$

HD :

Áp dụng BĐT : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{a+y}$

Dấu ''='' xảy ra khi $a=b=c=\frac{3}{4} \Rightarrow 2a=b+c$

Khi đó ta có :

$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{2a+b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

tương tự ta có :

$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{a+2b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{a+c}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2b}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\right]=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$

$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{a+b+2c}\right)\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, Khi đó $VT\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)=1$

Bài 30: Cho a,b,c là các số thực dương, Tìm GTNN của: $P=\frac{a+3c}{a+b}+\frac{c+3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}$

Bài 31: Cho a,b,c là các số thực dương, Tìm GTNN của : $P=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}$

Bài 32: Cho a,b,c là các số thực dương, CMR: $\frac{b+c}{a}+\frac{2a+c}{b}+\frac{4(a+b)}{a+c}\geq 9$

Bài 33: Cho a,b,c là các số thực dương, Tìm GTNN của : $P=\frac{9b+16c}{a}+\frac{25(4a+16c)}{b}+\frac{64(4a+9b)}{c}$

Bài 34: CMR với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1, thì: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

Bài 35: Giả sử có: 2015 số nguyên dương: $a_1;a_2;...a_{2015}$ thỏa mãn: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2015}}=1008$, CMR có ít nhất 2 trong 2015 số nguyên dương đã cho bằng nhau

Bài 36: Cho $a^3+b^3+c^3=0$, CMR: $a^3b^3+2b^3c^3+2b^3c^3+3a^3c^3\leq 0$

HD:

Từ: $a^3+b^3+c^3=0 => b^3+c^3=-a^3; a^3+b^3=-c^3$

Do đó :

$a^3b^3+2b^3c^3+3c^3a^3=a^3b^3+c^3a^3+2c^3a^3+2b^3c^3=a^3(b^3+c^3)+2c^3(a^3+b^3)=-a^6-2c^6\leq 0$

Bài 37: Cho hai số a,b khác 0 và trái dấu nhau trong đó: $a^{2008}=b^{2009}$. xác định dấu của mỗi số

HD:

Vì $a\neq 0$ nên $a^{2008}>0$ nên $b^{2009}>0$ mà a ,b trái dấu nên a <0

Bài 38: Cho x>y>0 và $x^5+y^5=x-y$, CMR: $x^4+y^4<1$

HD:

Vì x>y>0=>x - y>0, $x^5-y^5<x^5+y^5; x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4>x^4+y^4$

Do đó : $(x-y)(x^4+y^4)<(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=x^5-y^5<x^5+y^5=x-y$

=> $(x-y)(x^4+y^4)<x-y => x^4+y^4<1$

Bài 39: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn : $a+b+c=1$, CMR: $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\geq 16$

HD:

Cách 1:

Ta có: $1=(a+b+c)^2=\left[(a+b)+c\right]^2\geq 4(a+b)c$

Vì $(a-b)^2\geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2\geq 4ab$

Khi đó: $1\geq 4(a+b)c \Leftrightarrow (a+b)\geq 4(a+b)^2c$, Mà: $(a+b)^2\geq 4ab => a+b\geq 4.4ab.c$

$a+b\geq 16abc => \frac{a+b}{ab}\geq 16c => \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 16c$ $=> \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 16 => \frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\geq 16$

Cách 2:

Ta có: $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq\frac{1}{c}.\frac{4}{a+b}=\frac{1}{c}.\frac{4}{1-c}=\frac{4}{-c^2+c}$

Mặt khác ta lại có: $-c^2+c=-\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$ Nên $\frac{4}{-c^2+c}\geq 16$,

Dấu ‘’=’’ khi $c=\frac{1}{2}, a=b=\frac{1}{4}$

Bài 40: Cho $a,b,c>0, a+b+c\le 1$, Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$ (1)

HD:

Đặt $\begin{cases} x=a^2+2bc \\ y=b^2+2ac => x+y+z=\left(a+b+c\right)^2\le 1 \\ z=c^2+2ab \end{cases}$, Khi đó:

(1) $<=> \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$, Với $x+y+z\le 1, \left(x,y,z>0\right)$

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz}$, ĐT xảy ra khi x=y=z

$<=> \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$, ĐT xảy ra khi $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$

$=> \left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$, mà $x+y+z\le 1 => \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$, Đẳng thức xảy ra khi :

$x=y=z=\frac{1}{3} => a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 41: Cho a, b,c là ba số dương và $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, CMR : $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\ge 4$

HD:

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b} => 2a-b=\frac{ab}{c}$ và $2c-b=\frac{bc}{a}$

$=> \frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c+b}=\frac{a+b}{\frac{ab}{c}}+\frac{c+b}{\frac{bc}{a}}=\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\ge 4\sqrt[4]{\frac{ac}{b^2}}\ge 4$

Áp dụng BĐT co si cho ba số dương a, b, c , Dấu bằng xảy ra khi a= b= c

DẠNG 4: SẮP SẾP CÁC BIẾN VÀ BĐT TAM GIÁC:

Bài 1: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

HD :

Ta có : $\frac{a}{b+c}<1 \Rightarrow \frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c}$

Tương tự ta có: $\frac{b}{c+a}<1 \Rightarrow \frac{b}{c+a}<\frac{2b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$, cộng theo vế $VT<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$

Bài 2: Cho a,b,c > 0, CMR: $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$

HD :

Ta có : $\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c}$ và $\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{b+c}<\frac{b+a}{a+b+c}$ và $\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{c+a}<\frac{c+b}{a+b+c}$

Cộng theo vế ta được :

$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}<M<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}$$

$$\frac{a+b+c}{a+b+c}<M<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c} \Leftrightarrow 1<M<2$$

Bài 3: Cho a,b,c,d > 0, CMR: $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

HD :

Ta có : $\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ và $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c+d}$

$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{c+b}{a+b+c+d}$ và $\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d}$

Cộng theo vế ta có :

$$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}<M<\frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} \Leftrightarrow 1<M<2$$

Bài 4: Cho a,b,c,d > 0, CMR: $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$

HD :

Ta có : $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$

Chứng minh tương tự :

$\frac{b+c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d}, \frac{c+d}{a+b+c+d}<\frac{c+d}{c+d+a}<\frac{c+d+b}{a+b+c+d}$

Và $\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d}$

Cộng theo vế ta có :

$$\frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d}<M<\frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d}$$

Bài 5: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

HD :

Ta có : $\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{a+b+c}$ và $\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{c+a}<\frac{b+b}{a+b+c}$ và $\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{a+b}<\frac{c+c}{a+b+c}$

Cộng theo vế ta được : $\frac{a+b+c}{a+b+c}<M<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$

Bài 6: CMR nếu a,b,c > 0 thì $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

HD :

Áp dung BĐT : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$, Đặt $\begin{cases} b+c=x \\ c+a=y => x+y+z=2(a+b+c) \\ a+b=z \end{cases}$

Khi đó ta có : $2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9 <=> \frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}\geq\frac{9}{2}$

=> ĐPCM

Bài 7: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$

HD :

Đặt : $\begin{cases} b+c-a=x \\ a+c-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} => \begin{cases} x+y=2c \\ y+z=2a \\ z+a=2b \end{cases}$, Khi đó : $2A=\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}$

$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geq 6 => A\geq 3$

Bài 8: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,

CMR: $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

HD :

Áp dụng BĐT Schawzr : $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\geq\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}$

Tương tự ta có :

$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{2}{c}$ và $\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{2}{a}$, Cộng theo vế ta được : ĐPCM

Bài 9: CMR với a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó thì:

$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

HD :

Ta có : $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geq\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c}$

Tương tự ta có : $\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{4}{a}$ và $\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\geq\frac{4}{b}$

Cộng theo vế ta được điều phải chứng minh

Bài 10: Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a,b,c chu vi là 2p, CMR: $\frac{abc}{8}\geq(p-a)(p-b)(p-c)$

HD :

ta có : $(p-a)+(p-b)\geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)} => c\geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$

Chứng minh tương tự ta có : $a\geq 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$ và $b\geq 2\sqrt{(p-a)(p-c)}$

Nhân theo vế ta được : $abc\geq 8(p-a)(p-b)(p-c)$

Bài 11: CMR: Nếu a,b,c là chiều dài ba cạnh của tam giác thì: $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\le 2(ab+bc+ca)$

HD :

Ta chứng minh : $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Chuyển vế ta được : $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0 <=> (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

Ta chứng minh : $a^2+b^2+c^2\le 2(ab+bc+ca)$

Ta có : $\begin{cases} a<b+c \\ b<a+c \\ c<a+b \end{cases} => \begin{cases} a^2<ab+ac \\ b^2<bc+ba \\ c^2<ac+bc \end{cases}$, Cộng theo vế ta được : $a^2+b^2+c^2\le 2(ab+bc+ca)$

Bài 12: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $abc\ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

HD :

Ta có : $(a+b-c)+(b+c-a)\ge 2\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} => 2b\ge 2\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$

Tương tự ta có : $2c\ge 2\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$ và $2a\ge 2\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}$

Nhân theo vế ta được ĐPCM

Bài 13: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $a^4+b^4+c^4<2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

HD :

Ta có : $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2<0 <=> a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2-4a^2b^2<0$

$<=> (a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2<0 <=> (a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)<0$

$<=> (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)<0$ (Luôn đúng)

Bài 14: Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác, CMR: $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ với $a\ge b\ge c$

HD :

Nhân 2 vế với a,b,c ta có : $b^2c+c^2a+a^2b\ge a^2c+ab^2+bc^2$

$<=> c(b^2-a^2)+a(c^2-b^2)+b(a^2-c^2)\ge 0 <=> (c-a)(b-c)(b-a)\ge 0$ Đúng

Bài 15: CMR với a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác thì: $4a^2b^2>(a^2+b^2-c^2)^2$

HD :

Xét hiệu : $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)>0 <=> (2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)>0$

$<=> (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)>0$ đúng

Bài 16: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2<a^3+b^3+c^3$

HD :

Ta xét : $a(b-c)^2-a^3=a\left[(b-c)^2-a^2\right]=a(b-c-a)(b-c+a)<0$

Chứng minh tương tự ta có : Tổng của 3 số âm là 1 số âm

Bài 17: Cho $a+b+c=1, CMR: a^2+b^2+c^2\ge \frac{1}{3}$

HD :

Đặt $\begin{cases} a=x+\frac{1}{3} \\ b=y+\frac{1}{3} \\ c=z+\frac{1}{3} \end{cases} => \begin{cases} a^2=x^2+\frac{2}{3}.x+\frac{1}{9} \\ b^2=y^2+\frac{2}{3}.y+\frac{1}{9} \\ c^2=z^2+\frac{2}{3}.z+\frac{1}{9} \end{cases}$ Cộng theo vế ta được :

$$a^2+b^2+c^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{2}{3}(x+y+z)+\frac{1}{3} \qquad (1)$$

Mà : $a+b+c=x+y+z+1 \Rightarrow x+y+z=0$, Thay vào (1)

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2+\frac{1}{3}\geq\frac{1}{3}$

Bài 18: Cho a,b,c là dộ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

HD :

Ta có : $\begin{cases} a<b+c \\ b<c+a \\ c<a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2<ab+ac \\ b^2<ab+bc \\ c^2<ac+bc \end{cases}$, Cộng theo vế ta được ĐPCM

Bài 19: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $\frac{1}{a+b},\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a}$, cũng là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác

HD :

Ta cần chứng minh : $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}=\frac{2}{a+b+c}>\frac{2}{(a+c)+(a+c)}=\frac{1}{a+c}$

Tương tự ta cũng có : $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{1}{a+b}$ và $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}>\frac{1}{b+c}$

Bài 20: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 2, hãy so sánh a,b,c với 1,
CMR: $a^2+b^2+c^2+2abc<2$

HD :

Giải sử : $a\geq b\geq c \Rightarrow a<b+c \Rightarrow 2a<a+b+c=2 \Rightarrow a<1 \Rightarrow b,c<1$

Khi đó : $(1-a)(1-b)(1-c)>0 \Rightarrow ab+bc+ca>1+abc$

lại có :

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2+2(1+abc)$

$\Leftrightarrow 4>a^2+b^2+c^2+2+2abc \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc<2$

Bài 21: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,
CMR: $abc>(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

HD :

Ta có : $(a+b-c)+(b+c-a)\geq 2\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \Rightarrow 2b\geq 2\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$

Tương tự ta có : $2c\geq 2\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$ và $2a\geq 2\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}$

Nhân theo vế ta được ĐPCM

Bài 22: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR : $ab+bc+ca<a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

HD :

Ta chứng minh : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

Chuyển vế ta được : $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$

Ta chứng minh : $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$

ta có :

$\begin{cases} a<b+c \\ b<a+c \\ c<a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2<ab+ac \\ b^2<bc+ba \\ c^2<ac+bc \end{cases}$, Cộng theo vế ta được : $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$

Bài 23: Cho a,b,c là chiều dài ba cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 2,CMR: $a^2+b^2+c^2+2abc<2$

HD :

Giải sử : $a\ge b\ge c \Rightarrow a<b+c \Rightarrow 2a<a+b+c=2 \Rightarrow a<1 \Rightarrow b,c<1$

Khi đó : $(1-a)(1-b)(1-c)>0 \Rightarrow ab+bc+ca>1+abc$

lại có :

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2+2(1+abc)$

$\Leftrightarrow 4>a^2+b^2+c^2+2+2abc \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc<2$

Bài 24: Cho a,b,c là ba cạnh của 1 tam giác: CMR: $\frac{3a+b}{2a+c}+\frac{3b+c}{2b+a}+\frac{3c+a}{2c+b}\ge 4$

HD :

Ta có : $VT \Leftrightarrow \left(\frac{3a+b}{2a+c}-1\right)+\left(\frac{3b+c}{2b+a}-1\right)+\left(\frac{3c+a}{2c+b}-1\right)\ge 1$

$\Leftrightarrow \frac{a+b-c}{2a+c}+\frac{b+c-a}{2b+a}+\frac{c+a-b}{2c+b}\ge 1$, Lại có :

$\Leftrightarrow \frac{(a+b-c)^2}{(2a+c)(a+b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(2b+a)(b+c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(2c+b)(c+a-b)}\ge 1$

$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{(2a+c)(a+b-c)+(2b+a)(b+c-a)+(2c+b)(c+a-b)}=1$

Bài 25: Cho a,b,c > 0 thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a+b+c$,

Tìm Max của: $T=\frac{1}{2+a^2}+\frac{1}{2+b^2}+\frac{1}{2+c^2}$

HD :

Ta có : $2T=\left(1-\frac{a^2}{a^2+2}\right)+\left(1-\frac{b^2}{b^2+2}\right)+\left(1-\frac{c^2}{c^2+2}\right)=3-\left(\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\right)=3-A$

Schawzr ta có :

$$A\ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+6} \qquad (1)$$

Mà : $abc(a+b+c)\ge ab+bc+ca \Rightarrow (ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$, Tự chứng minh

$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2\ge 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca\ge 3$ thay vào (1) ta được :

$A\ge 1 \Rightarrow 2T\le 2 \Rightarrow T\le 1$

Bài 26: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác: CMR :

$\frac{a^{2016}}{b+c-a}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}\ge a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}$

HD :

Xét hiệu ta có :

$\left(\frac{a^{2016}}{b+c-a}-a^{2015}\right)=a^{2015}\left(\frac{a}{b+c-a}-1\right)=a^{2015}\left(\frac{(a-b)+(a-c)}{b+c-a}\right)$

Tương tự ta cũng có :

$b^{2015}\left(\frac{(b-a)+(b-c)}{c+a-b}\right)$ và $c^{2015}\left(\frac{(c-a)+(c-b)}{a+b-c}\right)$

Khi đó

$VT=(a-b)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a}-\frac{b^{2015}}{c+a-b}\right)+(b-c)\left(\frac{b^{2015}}{c+a-b}-\frac{c^{2015}}{a+b-c}\right)+(a-c)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a}-\frac{c^{2015}}{a+b-c}\right)$

Giả sử : $a \ge b \ge c =>$ Ngoặc 2, 3 ≥ 0

ta có ngoặc 1= $\dfrac{a^{2015}}{(b+c-a)} - \dfrac{b^{2015}}{(c+a-b)} = \dfrac{c\left(a^{2015}-b^{2015}\right)+(a-b)\left(a^{2015}+b^{2015}\right)}{(b+c-a)(c+a-b)} \ge 0$, ĐPCM

Bài 27: Cho $a+b+c=1, CMR: a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{1}{3}$

HD :

Đặt $\begin{cases} a = x+\dfrac{1}{3} \\ b = y+\dfrac{1}{3} \\ c = z+\dfrac{1}{3} \end{cases} => \begin{cases} a^2 = x^2+\dfrac{2}{3}.x+\dfrac{1}{9} \\ b^2 = y^2+\dfrac{2}{3}.y+\dfrac{1}{9} \\ c^2 = z^2+\dfrac{2}{3}.z+\dfrac{1}{9} \end{cases}$ Cộng theo vế ta được :

$a^2+b^2+c^2 = \left(x^2+y^2+z^2\right)+\dfrac{2}{3}(x+y+z)+\dfrac{1}{3}$ (1)

mà : $a+b+c = x+y+z+1 => x+y+z=0$, Thay vào (1)

=> $a^2+b^2+c^2 = x^2+y^2+z^2+\dfrac{1}{3} \ge \dfrac{1}{3}$

Bài 28: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác, CMR: $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{c}{a+b-c} \ge 3$

HD :

Đặt : $\begin{cases} b+c-a = x \\ a+c-b = y \\ a+b-c = z \end{cases} => \begin{cases} x+y = 2c \\ y+z = 2a \\ z+a = 2b \end{cases}$, Khi đó : $2A = \dfrac{y+z}{x}+\dfrac{x+z}{y}+\dfrac{x+y}{z}$

$= \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)+\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right) \ge 6 => A \ge 3$

Bài 29: Cho a,b,c,d>0, CMR: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b} \ge 2$

Bài 30: Chứng minh với ba số a, b, c đôi 1 khác nhau thì :

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c$$

Bài 31: Cho a, b, c đôi 1 khác nhau thỏa mãn : $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b} = 0$, CMR :

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2} = 0$$

Bài 32: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng chu vi

HD:

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z (x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy = 2(x+y+z)$ (1) và $x^2+y^2 = z^2$ (2)

Từ (2) => $z^2 = (x+y)^2 - 2xy$, thay vào (1) ta có:

$z^2 = (x+y)^2 - 4(x+y+z) <=> z^2+4z = (x+y)^2 - 4(x+y)$

$z^2+4z+4 = (x+y)^2 - 4(x+y)+4 <=> (z+2)^2 = (x+y-2)^2$

$=> z+2=x+y-2 <=> z=x+y-4$, thay vào (1) ta được :

$xy=2\left(x+y+x+y-4\right) <=> xy-4x-4y=-8 <=> \left(x-4\right)\left(y-4\right)=8=1.8=2.4$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là : $\left(5;12;13\right);\left(12;5;13\right);\left(6;8;10\right);\left(8;6;10\right)$

DẠNG 5, TÌM ĐIỂM RƠI CỦA BĐT CO SI:

Bài 1: Cho $a \ge 2, CMR: a + \frac{1}{a} \ge \frac{5}{2}$

HD :

Ta có : Dấu bằng khi a = 2 => $\frac{1}{a} = \frac{1}{2} = k.a = k.2 => k = \frac{1}{4}$

Khi đó ta có :

$$VT = \frac{1}{a} + \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} \ge 2\sqrt{\frac{a}{4a}} + \frac{3a}{4} = 1 + \frac{3a}{4} \ge 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Dấu bằng khi $\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{a}{4} \\ a = 2 \end{cases}$

Bài 2: Cho a,b > 0, $a + b \le 1, CMR: a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge 5$

HD :

Ta có : Dấu bằng khi $\begin{cases} a + b = 1 \\ a = b \end{cases} => a = b = \frac{1}{2} => \frac{1}{a} = 2 = k.\frac{1}{2} => k = 4$

Khi đó : $VT = \left(\frac{1}{a} + a\right) + \left(\frac{1}{b} + b\right) = \left(\frac{1}{a} + 4a\right) + \left(\frac{1}{b} + 4b\right) - 3(a+b)$

$\ge 2\sqrt{4} + 2\sqrt{4} - 3(a+b)$, Mà $a + b \le 1 => -3(a+b) \ge -3$

$=> VT \ge 4 + 4 - 3 = 5$

Bài 3: Cho $x > 2y > 0$, Tìm GTNN của: $P = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

HD :

Ta có : $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, đặt $\frac{x}{y} = a => a \ge 2 => P = a + \frac{1}{a}$

Dấu bằng khi $a = 2 => \frac{1}{a} = \frac{1}{2} = k.2 => k = \frac{1}{4} => P = \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{4}\right) + \frac{3a}{4}$

$$P \ge \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{3.2}{4} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Bài 4: Cho a$\ge$3, Tìm GTNN của: $S = a + \frac{1}{a}$

HD :

Ta có : Dấu bằng khi $a = 3 => \frac{1}{a} = \frac{1}{3} = k.3 => k = \frac{1}{9}$

$$S = \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{9}\right) + \frac{8a}{9} \ge \frac{2}{\sqrt{9}} + \frac{8.3}{9} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

Vậy Min $S = \frac{10}{3}$

Bài 5: Cho x$\ge$1, Tìm Min của: $A = 3x + \frac{1}{2x}$

HD :

Ta có : Dấu bằng khi $x = 1 => \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} = k.3 => k = \frac{1}{6}$

Khi đó : $A = \left(\frac{1}{2x} + \frac{3x}{6}\right) + \frac{5x}{2} \ge \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{5.1}{2} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

Bài 6: Cho x,y là các sớ thực dương thỏa mãn: x+y$\ge$6, Tìm Min của: $P=5x+3y+\frac{10}{x}+\frac{8}{y}$

HD :

Dấu bằng khi $x\ne y$, Dự đoán sẽ có các cặp (x ; y) là (1 ;5),(2 ;4) , (5 ;1) và (4 ;2) và nhận thấy cặp (2 ;4) thì P có giá trị nhỏ nhất

Khi đó ta có :

$x=2=>\frac{10}{x}=5=k.5.2=>k=\frac{1}{2},,\frac{8}{4}=2=3.4.h=>h=\frac{1}{6}$

$=>P=\left(\frac{10}{x}+\frac{5x}{2}\right)+\left(\frac{8}{y}+\frac{3y}{6}\right)+\frac{5x}{2}+\frac{5y}{2}\ge 2.5+2.2+\frac{5}{2}.6=29$

Bài 7: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn : a+2b+3c$\ge$20,

Tìm Min của: $P=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$

HD :

Dấu bằng khi a=2, b=3, c=4

Khi đó : $P=\left(\frac{3}{a}+\frac{3a}{4}\right)+\left(\frac{9}{2b}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{4}{c}+\frac{c}{4}\right)+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}$

$P\ge 3+3+2+\frac{1}{4}(a+2b+3c)\ge 8+\frac{1}{4}.20$

Bài 8: Cho a$\ge$2, Tìm Min của: $S=a+\frac{1}{a^2}$

HD :

Dấu bằng khi a=2=> $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}=h.2=>h=\frac{1}{8}$, Khi đó ta có :

$S=\left(\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{3a}{4}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{64}}+\frac{3.2}{4}=\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=\frac{9}{4}$

Bài 9: Cho $0<a\le\frac{1}{2}$, Tìm Min của: $S=2a+\frac{1}{a^2}$

HD ;

Dấu bằng khi $a=\frac{1}{2}=>\frac{1}{a^2}=4=k.2.\frac{1}{2}=>k=4$, Khi đó ta có :

$S=\left(\frac{1}{a^2}+8a+8a\right)-14a\ge 3\sqrt[3]{64}-14a$, mà $a\le\frac{1}{2}=>-14a\ge -7=>S\ge 3.4-7=5$

Bài 10: Cho a$\ge$10, b$\ge$100, c$\ge$1000, Tìm Min của: $A=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}$

HD :

Dấu bằng khi $a=10=>\frac{1}{a}=\frac{1}{10}=k.10=>k=\frac{1}{100}$, Tương tự với b và c,

Khi đó ta có :

$B=\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{100}\right)+\frac{99a}{100}\ge\frac{2}{\sqrt{100}}+\frac{99.10}{100}=\frac{101}{10}$, Tương tự với b và c

Bài 11: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: $a+b+c\le 1$, Tìm Min của: $P=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

HD :

Dấu bằng khi $a=b=c=\frac{1}{3}$, Khi đó $P=\left(\frac{1}{a}+9a\right)+\left(\frac{1}{b}+9b\right)+\left(\frac{1}{c}+9c\right)-8(a+b+c)$

$P\ge 2\sqrt{9}+2\sqrt{9}+2\sqrt{9}-8(a+b+c)$ Mà $a+b+c\le 1=>-8(a+b+c)\ge -8$

Vậy $P\ge 6+6+6-8=10$

Bài 12: Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn: a+b+c=1, Tìm Max của: $P=\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}$

HD :

Ta có : Dấu bằng khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ => $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{a.b.\frac{1}{3}}\le\sqrt[3]{3}.\frac{a+b+\frac{1}{3}}{3}$

Tương tự ta có : $\sqrt[3]{bc}\le\sqrt[3]{3}.\frac{b+c+\frac{1}{3}}{3}$, $\sqrt[3]{ca}\le\sqrt[3]{3}.\frac{c+a+\frac{1}{3}}{3}$

Cộng theo vế ta được : $P\le\sqrt[3]{3}\left(\frac{2a+2b+2c}{3}+\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{3}$

Bài 13: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: $a+b+c\le\frac{3}{2}$, Tìm Min của: $P=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

HD :

Dấu bằng khi $a=b=c=\frac{1}{2}$ => $P=\left(\frac{1}{a}+4a\right)+\left(\frac{1}{b}+4b\right)+\left(\frac{1}{c}+4c\right)-3(a+b+c)$

$P\ge4+4+4-3.\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$

Bài 14: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: $a+b+c\le1$,

Tìm Min của: $P=a+b+c+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

HD :

Dấu bằng khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ => $P=\left(18a+\frac{2}{a}\right)+\left(18b+\frac{2}{b}\right)+\left(18c+\frac{2}{c}\right)-17(a+b+c)$

=> $P\ge19$

Bài 15: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=1$, , Tìm Min của:

$A=\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{b^3}{(1-b)^2}+\frac{c^3}{(1-c^2)}$

HD :

Dấu bằng khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ Khi đó :

$\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{1-a}{8}+\frac{1-a}{8}\ge\frac{3}{4}a$, Tương tự ta cũng có : $\frac{b^3}{(1-b)^2}+\frac{1-b}{8}+\frac{1-b}{8}\ge\frac{3}{4}b$

$\frac{c^3}{(1-c)^2}+\frac{1-c}{8}+\frac{1-c}{8}\ge\frac{3}{4}c$

Cộng theo vế ta được : $A\ge\frac{3}{4}(a+b+c)=\frac{1}{4}$

Bài 16: Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn: $a+b\le1$, Tìm min của: $S=ab+\frac{1}{ab}$

HD :

Ta có : Dấu bằng khi $a=b=\frac{1}{2}$ => $\frac{1}{ab}=4=16ab$

Khi đó ta có : $S=\left(16ab+\frac{1}{ab}\right)-15ab\ge2\sqrt{16}-15ab$

mà $a+b\ge2\sqrt{ab}$ => $1\ge2\sqrt{ab}$ => $ab\le\frac{1}{4}$ => $-15ab\ge\frac{-15}{4}$

Vậy $S \geq 2.4 - \frac{15}{4} = 8 - \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$

Bài 17: Cho a,b là các số thực thỏa mãn: $a + b \leq 1$, Tìm min của $A = a + b + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

HD :

Dấu bằng khi $a = b = \frac{1}{2}$ => $A = \left(8a + 8a + \frac{1}{a^2}\right) + \left(8b + 9b + \frac{1}{b^2}\right) - 15(a + b)$

=> $S \geq 3.4 + 3.4 - 15.1 = 9$

Bài 18: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, Tìm Min $P = a + b + c + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

HD :

Dấu bằng khi $a = b = c = \frac{1}{2}$

Khi đoa : $P = \left(8a + 8a + \frac{1}{a^2}\right) + \left(8b + 8b + \frac{1}{b^2}\right) + \left(8c + 8c + \frac{1}{c^2}\right) - 15(a + b + c)$

$P \geq 3.4 + 3.4 + 3.4 - 15.\frac{3}{2} = 36 - \frac{45}{2} = \frac{27}{2}$

Bài 19: Cho a,b,c là các sơ thực dương thỏa mãn: $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, Tìm Min: $A = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

HD :

Dấu bằng khi : $a = b = c = \frac{1}{2}$

=> $P = \left(a^2 + \frac{1}{8a} + \frac{1}{8a}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{8b} + \frac{1}{8b}\right) + \left(c^2 + \frac{1}{8c} + \frac{1}{8c}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$P \geq \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{9}{a + b + c}\right) = \frac{27}{4}$

Bài 20: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn: $x + y \leq 1$

Tìm Min của: $A = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$

HD :

Dấu bằng khi : $x = y = \frac{1}{2}$ => $A = 9$, Ta cần chứng minh $A \geq 9$

Xét $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \geq 9 \iff (x^2 - 1)(y^2 - 1) \geq 9x^2y^2$

=> $1 \geq x^2 + y^2 + 8x^2y^2$, do $1 \geq (x + y)^2$, Nên ta cần chứng minh :

$(x + y)^2 \geq x^2 + y^2 + 8x^2y^2 \iff 2xy(1 - 4xy) \geq 0$

BĐT này đúng do: $0 < xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} \leq \frac{1}{4}$ => $Min.A = 9$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Bài 21: Cho a,b>0 Tìm Min của: $P = \frac{a + b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a + b}$

HD :

Dấu bằng khi : $\begin{cases} \frac{a + b}{m\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a + b} \\ a = b \end{cases}$ => $m = 4$

Khi đó ta có :

$$P=\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{3}{4}.\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\ge 2\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{3.2\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}}=1+\frac{3.2}{4}=\frac{5}{2}$$

Bài 22: Cho $a+b\le 1$ và a,b>0, Tìm min của: $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}$

HD :

Dấu bằng khi $a=b=\frac{1}{2}$

Khi đó : $P=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{1}{2ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{1}{2ab}$

$$P\ge\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{2}{4ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{2}{(a+b)^2}=\frac{6}{(a+b)^2}\ge 6$$

Bài 23: Cho a,b>0 và $a+b\le 1$, Tìm Min của: $P=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$

HD :

Dấu bằng khi : $a=b=\frac{1}{2}$. Khi đó : $\frac{1}{1+a^2+b^2}=\frac{1}{3.2ab}$

$$=> P=\left(\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}\right)+\frac{1}{3ab}\ge\frac{4}{\left(a^2+b^2+6ab+1\right)}+\frac{1}{3ab}\ => P\ge\frac{4}{(a+b)^2+4ab+1}+\frac{1}{3ab}$$

Mặt khác : $a+b\ge 2\sqrt{ab} => ab\le\frac{1}{4} => P\ge\frac{4}{2+1}+\frac{1}{3.\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$

Dấu bằng khi $\begin{cases}1+a^2+b^2=6ab\\ a=b\\ a+b=1\end{cases} => a=b=\frac{1}{2}$

Bài 24: Cho a,b>0, $a+b\le 1$, Tìm Min của: $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$

HD :

Dấu bằng khi $a=b=\frac{1}{2}$

Khi đó : $P=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\left(\frac{1}{2ab}+4ab\right)\ge\frac{4}{(a+b)^2}+\left(4ab+\frac{1}{4ab}\right)+\frac{1}{4ab}$

$P\ge\frac{4}{(a+b)^2}+2.\sqrt{\frac{4ab}{4ab}}+\frac{1}{4.\frac{1}{4}}\ge 7$. Dấu bằng khi $\begin{cases}a^2+b^2=2ab\\ a^2b^2=\frac{1}{16}\\ a+b=1\end{cases} => a=b=\frac{1}{2}$

Bài 25: Cho a,b>0 và $a+b\le 1$, Tìm Min của: $S=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$

HD :

Dấu bằng khi $a=b=\frac{1}{2}$ và $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=(a+b)^3$

Khi đó : $\frac{1}{a^3+b^3}=\frac{1}{2a^2b}=\frac{1}{2ab^2}$

$$S=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}\ge\frac{25}{(a+b)^3+ab(a+b)}$$

$$S \ge \frac{25}{(a+b)^3 + \frac{(a+b)^3}{4}}$$, Vì $4ab \le (a+b)^2 \Rightarrow ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow S \ge 20$, Dấu bằng khi $a = b = \frac{1}{2}$

Bài 26: Cho a,b,c>0 và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, Tìm Min của: $P = a + b + c + \frac{1}{abc}$

HD :

Dấu bằng khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, Khi đó : $\frac{1}{abc} = 3\sqrt{3}, a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Tìm m sao cho : $\frac{1}{m.abc} = a = b = c \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$P = \left(a + b + c + \frac{1}{9abc}\right) + \frac{8}{9abc} \ge 4\sqrt[4]{\frac{abc}{9abc}} + \frac{8}{9abc}$$

$P \ge \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{8}{9abc}$, Ta lại có : $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Leftrightarrow 1 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow a^2b^2c^2 \le \frac{1}{27}$

$$\Rightarrow 9abc \le \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{9abc} \ge \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow P \ge \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Bài 27: Cho x,y,z>0 và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$, Tìm Max của : $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$

HD :

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{4} \Rightarrow 2x = y + z \Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}$

Nên : $P \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right)$

$$\le \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z}\right) = 1$$

Bài 28 : Cho a,b,c là các số thực dương và $a + b + c = 1$, CMR: $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$

HD :

Dấu bằng khi : $a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = b + c = c + a = \frac{2}{3}$

Khi đó ta có : $\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} + \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} + \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \le 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} \le \frac{\frac{2}{3} + a + b}{2}$,

Tương tự ta có : $VT \le \frac{\frac{2}{3} + a + b}{2} + \frac{\frac{2}{3} + b + c}{2} + \frac{\frac{2}{3} + c + a}{2} = 2$

Bài 29: Cho a,b,c dương thỏa mãn: a+b+c=1, Tìm Max của $A = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a}$

HD :

Dấu bằng khi : $a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = b + c = c + a = \frac{2}{3}$

Nên : $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{(a+b).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{9}{3}}.\frac{a + b + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}$

Tương tự ta có :

$\sqrt[3]{b+c} \le \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{b + c + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}$ và $\sqrt[3]{c+a} \le \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{a + c + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}$

Cộng theo vế ta được : $P \le \sqrt[3]{\frac{9}{4}.\frac{2(a+b+c)+4}{3}} = \sqrt[3]{18}$

Bài 30: Cho x,y,z>0 và xyz=1, CMR: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \ge \frac{3}{2}$

HD :

Ta có Dấu bằng khi $x = y = z = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1+y} = \frac{1}{2} = \frac{1+y}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 4$

Khi đó : $\frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \ge x$, tương tự ta có : $\frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \ge y$ và $\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \ge z$

Cộng theo vế ta được : $P \ge (x+y+z) - \frac{1}{4}(x+y+z) - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(x+y+z) - \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$

Bài 31: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn : $xy + yz + zx = 5$, Tìm Min của : $P = 3x^2 + 3y^2 + z^2$

HD :

Ta có : $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 2xy \\ 2x^2 + \frac{1}{2}z^2 \ge 2xz \\ 2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \ge 2yz \end{cases}$, Cộng theo vế ta được : $P \ge 2(xy + yz + zx) = 10$

Dấu bằng khi x=y=1, z=2

Bài 32: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn : $x + y + xy = 8$, Tìm Min của : $P = x^2 + y^2$

HD :

Ta có : $8 = x + y + xy \le x + y + \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{t^2}{4} + t \ge 8 \Rightarrow t \le -8$ hoặc $t \ge 4$

Hay $(x+y)^2 \ge 16 \Rightarrow P = x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} = 8$

Dấu bằng khi $\begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \\ x + y + xy = 8 \end{cases} \Rightarrow x = y = 2$

Bài 33 : Cho a,b là các số thực thỏa mãn : $0 \le a \le 3, 8 \le b \le 11$ và a+b=11,

Tìm Max của : $P = ab$

HD :

Dấu bằng khi $a = 3, b = 8 \Rightarrow 8a = 3b$

Khi đó : $P = \frac{1}{24}(8a.3b) \le \frac{1}{24}.\frac{(8a+3b)^2}{4} = \frac{1}{96}.\left[3(a+b)+5a\right]^2 \le \frac{1}{96}(3.11+5a)^2 \le \frac{(33+5.3)^2}{96} = 24$

Bài 34: Cho x,y > 0, $x + y \ge 6, CMR: A = x(x-1) + y(y-1) \ge 12$

HD :

Dấu bằng khi $x = y = 3$

Khi đó : $A = (x^2 + y^2) - (x+y) = (x^2 + 9) + (y^2 + 9) - (x+y) - 18$

$A \ge 2.3x + 2.3y - (x+y) - 18 \Rightarrow A \ge 6(x+y) - (x+y) - 18 = 5(x+y) - 18 \ge 30 - 18 = 12$

Bài 35: Cho a,b,c > 0, Thỏa mãn : $a + b + c = 1, CMR: S = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le 16$

HD :

Dấu bằng khi $a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = b + c = c + a = \frac{2}{3}$

Co si ngược ta có : $\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} \le \frac{\frac{2}{3}+a+b}{2}$,

Tương tự ta có : $\sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} \le \frac{\frac{2}{3}+b+c}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \le \frac{\frac{2}{3}+c+a}{2}$

Cộng theo vế ta được : $\sqrt{\frac{2}{3}}.S \le 1+\frac{2(a+b+c)}{2} = 2 => S \le 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$

Bài 36: Cho a,b > 1, CMR: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \le ab$

HD :

Dấu bằng khi : $b-1=a-1=1 => a=b=2$

Co si ngược ta có :

$$a\sqrt{(b-1).1} \le a.\frac{(b-1)+1}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$b\sqrt{(a-1).1} \le b.\frac{a-1+1}{2} = \frac{ab}{2}$$

Cộng theo vế ta được :

$$a\sqrt{(b-1)}+b\sqrt{(a-1)} \le \frac{ab}{2}+\frac{ab}{2} = ab$$

Bài 37: Cho x,y,z > 0, x+y+z = 2, tìm GTNN của: $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}$

HD :

Dáu bằng khi $x=y=z=\frac{2}{3}$

Khi đó : $\frac{x^2}{y+z}=\frac{1}{3}=\frac{y+z}{k} => k=4$

Nên : $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4} \ge x$, Tương tự ta có :

$$P+\frac{x+y+z}{2} \ge x+y+z => P \ge \frac{x+y+z}{2} = 1$$

Bài 38: Cho x,y > 1, CMR : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \ge 8$

HD :

Dấu bằng khi $x=y$, Thay vào ta được :

$$\frac{x^2}{x-1}+\frac{x^2}{x-1} = 8 => x=y=2$$

Khi đó : $\frac{x^2}{y-1}+4(y-1) \ge 4x$ và $\frac{y^2}{x-1}+4(x-1) \ge 4y$

$$VT \ge 4(x+y)-4(y-1)-4(x-1) = 8$$

Bài 39: Cho a,b,c > 0, thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$, CMR: $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$

HD :

Dấu bằng khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Khi đó : $\left(\dfrac{a}{b^2+c^2}\right)^2=\dfrac{a^2}{\left(1-a^2\right)^2}=\dfrac{a^2.2a^2}{\left(1-a^2\right)\left(1-a^2\right).2a^2}\geq\dfrac{2a^4}{\dfrac{8}{27}}=\dfrac{27a^4}{4}\geq\dfrac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$

Tương tự ta có : $VT\geq a^2.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+b^2.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+c^2.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

BẤT ĐẲNG THỨC CHƯA SOẠN

Bài 1 : Cho $a+b=x+y, a^2+b^2=x^2+y^2$, Chứng minh rằng : $a^{2010}+b^{2010}=x^{2010}+y^{2010}$

HD:

Từ $a+b=x+y => a-x=y-b$

Mặt khác: $a^2+b^2=x^2+y^2 => a^2-x^2=y^2-b^2 => (a+x)(a-x)=(y+b)(y-b)$

$$=> (a+x)(a-x)=(y+b)(a-x) => \left[\begin{array}{l} a-x=0,(1) \\ a+x=b+y,(2) \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} a-x=0 \\ a+b=x+y \end{cases} => b=y => a^{2010}+b^{2010}=x^{2010}+y^{2010}$

Với $\begin{cases} a+b=x+y \\ a+x=b+y \end{cases} => a=y => b=c => a^{2010}+b^{2010}=x^{2010}+y^{2010}$

Bài 2 : Cho x+y=2, CMR: $x^{2011}+y^{2011} \le x^{2012}+y^{2012}$

HD :

Xét $\left(x^{2012}+y^{2012}\right)-\left(x^{2011}+y^{2011}\right)=x^{2011}(x-1)+y^{2011}(y-1)=x^{2011}(1-y)+y^{2011}(y-1)$

Do x-1=1-y

Vậy $\left(x^{2012}+y^{2012}\right)-\left(x^{2011}+y^{2011}\right)=(1-y)\left(x^{2011}-y^{2011}\right)$

Giả sử : $x \ge y => x^{2011} \ge y^{2011}$ và $x_1 \ge 1 \ge y$ do đó : $(1-y)\left(x^{2011}-y^{2011}\right) \ge 0(dpcm)$

Tương tự nếu lấy $y \ge x => y^{2011} \ge x^{2011}$ và $y \ge 1 \ge x$ đo đó $(1-y)\left(x^{2011}-y^{2011}\right) \ge 0(dpcm)$ dấu = khi x=y=1

Bài 3: CMR: $A=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3$

HD:

Đặt $b+c-a=x>0, c+a-b=y>0, a+b-c=z>0$, từ đó:

$a=\frac{y-z}{2}, b=\frac{x+z}{2}, c=\frac{x+y}{2}$ thay vào A ta được

$$A=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right] \ge \frac{1}{2}(2+2+2) \ge 3$$

Bài 4: CMR: nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì A<0

HD:

Ta có:

$b+c-a>0$

$b+c+a>0$

$b-c-a<0$

$b-c+a>0$ Vậy A<0

Bài 5: Cho a,b,c,d > 0, Chứng tỏ rằng: $N=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}$ có giá trị không nguyên

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2 \le xy+3y+2z-4$

HD:

Ta có gt=> $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2 \le 0 =>$

Bài 7: Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c\le 1$, CMR: $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$

HD:

Đặt $x=a^2+2bc, y=b^2+2ac, z=c^2+2ab$

Khi đó x+y+z=$\left(a+b+c\right)^2\le 1$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ với $x+y+z\le 1$

Áp dụng Co si cho 3 số : $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$ ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

=>$\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$ mà $x+y+z\le 1$ => $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ đẳng thức xảy ra khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

Bài 8: Cho a, b, c là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn: a+b+c=3. CMR: $a^2+b^2+c^2\le 5$

HD:

Theo giả thiết ta có: $\left(2-x\right)\left(2-b\right)\left(2-c\right)\ge 0 <=> 8+2\left(ab+bc+ca\right)-4\left(a+b+c\right)-abc\ge 0$

Cộng hai vế với $a^2+b^2+c^2$ sau đó thu gọn ta được:

$\left(a+b+c\right)^2\ge a^2+b^2+c^2+abc+4 <=> a^2+b^2+c^2+abc\le 5$, Mà $abc\ge 0 => a^2+b^2+c^2\le 5$

Đẳng thức xảy ra khi trong ba số a,b,c có 1 số bằng 0, một số bằng 2 và 1 số bằng 1

Bài 9: Cho x,y >0 thỏa mãn: $x^2+y^3\ge x^3+y^4$, CMR : $x^3+y^3\le 2$, dấu bằng xảy ra khi nào ?

HD:

Áp dụng BĐT cô si cho hai số dương ta có: $x+x^3\ge 2x^2, y^2+y^4\ge 2y^3$ do vậy

$x+x^3+y^2+y^4\le 2x^2+2y^3 => x+y^2\ge\left(x^2+y^3-x^3-y^4\right)\ge x^2+y^3$

Do $x^2+y^3\ge x^3+y^4$. Mà $x^2+1\ge 2x, y^4+1\ge 2y^2$ Nên

$1+x^2+1+y^4\ge 2x+2y^2\ge 2x^2+2y^3\ge x^2+y^3+x^3+y^4$ do vậy $x^3+y^3\le 2$ dấu bằng khi x=y=1

Bài 10: CM: $x^2+y^2-xy\ge x+y-1$

HD:

$x^2+y^2-xy\ge x+y-1 => 2\left(x^2+y^2-xy\right)\ge 2\left(x+y-1\right) => 2x^2+2y^2-2xy\ge 2x+2y-2$

=>$\left(x-y\right)^2+\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2\ge 0$ luôn đúng, dấu bằng khi x=y=1

Bài 11: CMR không có giá trị nào của x thỏa mãn: $\frac{-4}{x^2-2x+2}-5>0$

HD:

Ta có: $\frac{-4}{\left(x-1\right)^2+1}-5$ mà $\frac{-4}{\left(x-1\right)^2+1}<0, -5<0 =>$ đpcm

Bài 12: Cho a, b là các số dương thỏa mãn: $a^3+b^3=a^5+b^5$, CMR: $a^2+b^2\le 1+ab$

HD:

Ta có: $a^2+b^2\le 1+ab => a^2+b^2-ab\le 1 => \left(a+b\right)\left(a^2+b^2-ab\right)\le a+b => a^3+b^3\le a+b$

=> $\left(a^3+b^3\right)\left(a^3+b^3\right)\le\left(a+b\right)\left(a^5+b^5\right) => 2a^3b^3\le ab^5+a^5b$

=> $ab\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)\ge 0 => ab\left(a^2-b^2\right)\ge 0$ luôn đúng do a, b dương

Bài 13: Cho các số a, b, c$\in\left[0;1\right]$, CMR: $a+b^2+c^3-ab-bc-ca\le 1$

HD:

Do a,b,c $\in\left[0;1\right]$ Nên $\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)\ge 0 => 1-a-b-c+ab+bc+ca-abc\ge 0$

=>$a+b+c-ab-bc-ca\le 1-abc\le 1$, Do a,b,c$\in\left[0;1\right]$ nên $b^2\le b, c^3\le c$, từ đó ta có:

$a+b^2+c^3-ab-bc-ca\le a+b+c-ab-bc-ca\le 1$

Bài 14: Cho a>0, b>0 và a+b=1, CMR: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\geq\frac{4}{3}$

HD:

$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\geq\frac{4}{3} => 3\left(a+1+b+1\right)\geq 4\left(a+1\right)\left(b+1\right) => 9\geq 4\left(ab+a+b+1\right)$ do a+b=1

=> $9\geq 4ab+8 => 1\geq 4ab => \left(a+b\right)^2\geq 4ab => \left(a-b\right)^2\geq 0$ đúng với mọi a, b

Bài 15: Cho a, b, c là ba số dương và $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, CMR : $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geq 4$

HD:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b} => 2a-b=\frac{ab}{c}$ và $2c-b=\frac{bc}{a}$

=> $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c+b}=\frac{a+b}{\frac{ab}{c}}+\frac{c+b}{\frac{bc}{a}}=\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\geq 4\sqrt[4]{\frac{ac}{b^2}}\geq 4$

Áp dụng BĐT Cô si cho 3 số a, b, c dương , dấu bằng khi a=b=c

Bài 16: Cho a,b,c là các số thỏa mãn hai điều kiện sau: $0<a<b, ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm,

CMR: $\frac{a+b+c}{b-a}=3$

HD:

Do $0<a<b$ nên ta có $\frac{a+b+c}{b-a}>3 => a+b+x>3\left(b-a\right) => 4a+c>2b$ (*)

Vì phương trình $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm nên $b^2<4ac$

=> $c>\frac{b^2}{4a} => 4a+c>4a+\frac{b^2}{4a}\geq 2\sqrt{4a\frac{b^2}{4a}}=2b$ từ đó suy ra: (*) đúng hay $\frac{a+b+c}{b-a}>3$

Bài 17: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn : $a^3+b^3=a-b$, CMR : $a^2+b^2+ab<1$

Bài 18: Cho x,y,z là ba cạnh của 1 tam giác: CMR: $A=4x^2y^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)>0$

Bài 19: CMR : $x^4+2012x^2-2011x+2012>0$ với mọi x

Bài 20: Cho a, b, c, d thỏa mãn: $-2\leq a,b,c,d\leq 5$ và $a+2b+3c+5d=10$. CMR:

$a^2+2b^2+3c^2+5d^2\leq 140$

Bài 21 : CMR : $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)$

HD :

Ta có : $x^2+yz\geq 2\sqrt{x^2yz}=2x\sqrt{yz}$ Khi đó : $VT\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{xz}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{xyz}\right)$

$VT\leq\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{y+z}{2}+\frac{x+z}{2}+\frac{x+y}{2}\right)}{xyz}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\right)$, Dấu ‘’=’’ khi x=y=z

Bài 22 : CHứng minh rằng nếu : $x_1+\frac{1}{x_2}=x_2+\frac{1}{x_3}=x_3+\frac{1}{x_4}=...=x_n+\frac{1}{x_1}$, thì $x_1=x_2=x_3=....=x_n$

hoặc : $\left|x_1.x_2.x_3....x_n\right|=1$

Bài 23 : Cho a, b, c, d >0, CMR : $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$

Bài 24: Chứng minh rằng nếu a, b, c là các sớ thực thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ và $a+b+c=abc$, thì $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$

Bài 25: Cho $a+b+c=2p$, CMR: $2bc+b^2+c^2-a^2=4p\left(p-a\right)$

Bài 26: Cho $x+y=a,x^2+y^2=b,x^3+y^3=c$, CMR: $a^3-3ab+2c=0$

Bài 27: Cho $a+b+c=0,a^2+b^2+c^2=1$, Tính giá trị của: $M=a^4+b^4+c^4$

Bài 28: Cho a, b, c đôi 1 khác nhau thỏa mãn: $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2$, CMR: $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=1$

Bài 29: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, tính giá trị của: $M=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

Bài 30: Cho $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$, CMR: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$

Bài 31: Cho $a.x+b.y+c.z=0$, Rút gọn: $A=\frac{a.x^2+b.y^2+c.z^2}{bc\left(y-z\right)^2+ac\left(x-z\right)^2+ab\left(x-y\right)^2}$

Bài 32: Cho $a+b+c=0,x+y+z=0,\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, CMR: $a.x^2+by^2+cz^2=0$

Bài 33: Cho $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, CMR: $\frac{a}{\left(b-c\right)^2}+\frac{b}{\left(c-a\right)^2}+\frac{c}{\left(a-b\right)^2}=0$

Bài 34: Chứng minh rằng nếu: $x+y+z=-3$ thì:

Bài 35: C$\left(x+1\right)^3+\left(y+1\right)^3+\left(z+1\right)^3=3\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)$ho a ,b thỏa mãn: $a\ge 1,b\ge 1$, CMR: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$

Bài 36: Cho a, b không âm thỏa mãn: $a^{2018}+b^{2018}=a^{2020}+b^{2020}$, Tìm GTLN của: $P=\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2$

HD:

Ta có: $P=a^2+b^2+2\left(a+b\right)+2\le 4+2\left(a+b\right)$,

Bài 37: Cho a, b, c là các số thỏa mãn hai điều kiện $0<a<b,a.x^2+bx+c=0$ vô nghiệm,

Chứng minh rằng: $\frac{a+b+c}{b-a}>3$

HD:

Do $0<a<b$, nên bất đẳng thức: $\frac{a+b+c}{b-a}>3 => a+b+c>3\left(b-a\right) => 4a+c>2b$

Vì phương trình: $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm nên $b^2<4ac$

$=> c>\frac{b^2}{4a} => 4a+c>4a+\frac{b^2}{4a}\ge 2\sqrt{4a.\frac{b^2}{4a}}=2b$

Từ đó suy ra: $\frac{a+b+c}{b-a}>3$