

CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

DẠNG 1: TỔNG LŨY THỪA

Phương pháp:

So sánh các số hạng trong tổng với các số hạng trong tổng liên tiếp để tìm mối quan hệ, Nếu muốn chứng minh lớn hơn 1 giá trị k nào đó, ta cần so sánh với số hạng có mẫu lớn hơn, và ngược lại

Bài 1: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

HD:

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$A < \frac{1}{1} - \frac{1}{100} < 1$$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

HD:

Ở bài toán này, ta phải chứng minh hai chiều, chiều thứ nhất ta cần chứng minh:

$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} \text{ và Chứng minh } A > \frac{1}{6}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} \text{ đến đây, ta sẽ so sánh } \frac{96}{505} \text{ với } \frac{1}{6} \text{ như sau:}$$

$$\text{Ta có: } \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \text{ bằng cách ta nhân cả tử và mẫu của phân số } \frac{1}{6} \text{ với 96 để được hai phân số}$$

$$\text{cùng tử rồi so sánh khi đó ta có: } A > \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\text{Chiều thứ hai, ta cần chứng minh: } A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Ta làm tương tự như sau :

$$A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{1}{6} < A < \frac{1}{4}$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$

HD :

$$\text{Ta biến đổi: } A = \frac{1}{4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

HD :

Nhận thấy bài này là tổng cùng lũy thừa nhưng cơ số lại chẵn, nên ta sẽ đưa về tổng lũy thừa hai liên tiếp như sau :

$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} < \frac{1}{2}$$

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{100}{2^{100}} < 2$

HD :

Nhận thấy bài này có dạng tổng lũy thừa cùng cơ số, nên ta sẽ thực hiện phép tính tổng A. Việc tính chính xác được tổng A sẽ giảm bớt sự sai số, tuy nhiên không phải tổng nào cũng có thể tính được,

Ta tính tổng A như sau: $2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{99}{2^{98}} + \frac{100}{2^{99}}$

Sau đó lấy $2A$ trừ A theo vế và nhóm các phân số có cùng mẫu ta được :

$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}}, \text{ đặt } B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \text{ và tính tổng } B \text{ theo cách như trên ta}$$

$$\text{được : } B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}}, \text{ thay vào } A \text{ ta được : } A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} < 2$$

Bài 6: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$

HD :

Tính tương tự như bài 5, ta có: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{9^{99}} - \frac{100}{3^{100}},$

Đặt $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}},$ và tính B rồi thay vào tổng A ta được

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^{99}} \Rightarrow 2A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 7: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

HD :

Ta có : $A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{n.n} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

Bài 8: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

HD :

Ta có : $A = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}$

Bài 9: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ với $\frac{1}{2}$

HD :

$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{2}$$

Bài 10: Chứng minh rằng với số tự nhiên $n > 2$ thì $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ không là số tự nhiên

HD :

Ta có : $A < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < 2$ mặt khác ta thấy $A > 1$ vậy ta có : $1 < A < 2$

Bài 11: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{2004}{2005}$

HD :

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2004.2005} = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$$

Bài 12: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{100}{101}$

HD :

$$A > 1 > \frac{100}{101}$$

Bài 13: Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} < \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{1}{3}$

HD :

$$4A = 1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2005}} \right) - \frac{2016}{5^{2016}}, \text{ Đặt tổng trong ngoặc bằng B rồi tính B ta có :}$$

$$4B = 1 - \frac{1}{5^{2015}} \Rightarrow B = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5^{2015}}, \text{ thay vào A ta được :}$$

$$4A = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{5^{2015}} - \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{5}{4} \Rightarrow A < \frac{5}{16} < \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác : } A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} > \frac{1}{5} + \frac{2}{25} = \frac{7}{25} > \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được ĐPCM

Bài 14: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$

HD :

Tính tổng A , ta được : $4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}}$, Đặt tổng trong ngoặc bằng B

$$B = \frac{3}{4} - \frac{1}{4.3^{99}} \Rightarrow 4A = \frac{3}{4} - \frac{1}{3^{99}.4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$$

Bài 15: Chứng minh rằng: $A = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \dots + \frac{19}{9^2.10^2} < 1$

HD :

$$\text{Ta có : } A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2.2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2.3^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2.10^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} \right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

Bài 16: CMR : $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \dots + \frac{4019}{2009^2.2010^2} < 1$

HD :

$$\text{Ta có : } A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2.2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2.3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2.4^2} + \dots + \frac{2010^2 - 2009^2}{2009^2.2010^2}$$

$$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2009^2} - \frac{1}{2010^2} = 1 - \frac{1}{2010^2} < 1$$

Bài 17: Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{2002}} - \frac{1}{2^{2004}} < \frac{1}{5}$

HD :

$$\frac{1}{2^2} S = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{10}} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} - \frac{1}{2^{2006}} \Rightarrow S + \frac{S}{4} = \frac{5S}{4} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2006}} < \frac{1}{4} \Rightarrow S < \frac{1}{5}$$

Bài 18: Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2005}} < \frac{1}{2}$

HD :

$$\frac{1}{3}B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2006}} \Rightarrow B - \frac{1}{3}B = \frac{2B}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2006}} < \frac{1}{3} \Rightarrow B < \frac{1}{2}$$

Bài 19: Chứng minh rằng: $M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2015}{3^{2015}}$ có giá trị không nguyên

HD :

Tính $M \Rightarrow M < \frac{3}{4}$ nên $M < 1$ và $M > 0$ vậy M không có giá trị nguyên

Bài 20: Chứng minh rằng: $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$

HD :

$$A < \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{2006.2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Bài 21: Chứng minh rằng: $S = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \dots + \frac{3}{n(n+3)} < 1$

HD :

$$S = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) = 1 - \frac{1}{n+3} < 1$$

Bài 22: Chứng minh rằng: $B = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{2004^2} > \frac{1}{2004}$

HD:

$$B = 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2004^2}\right), \text{ Đặt tổng trong ngoặc bằng } A \text{ ta có:}$$

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2003.2004} < 1 - \frac{1}{2004} \Rightarrow -A > -1 + \frac{1}{2004}$$

$$B > 1 - A = 1 - 1 + \frac{1}{2004} \Rightarrow B > \frac{1}{2004}$$

Bài 23: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{2002}} - \frac{1}{2^{2004}} < 0,2$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{4}A = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \dots + \frac{1}{2^{2004}} - \frac{1}{2^{2006}} \Rightarrow A + \frac{1}{4}A = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2006}} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{5A}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow A < \frac{1}{5} = 0.2$$

Bài 24: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$ thì $\frac{1}{4} < A < \frac{4}{9}$

HD:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{5.5} + \dots + \frac{1}{50.50} > \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{3} - \frac{1}{51} = \frac{48}{153} > \frac{48}{192} = \frac{1}{4}$$

Mặt khác :

$$A = \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{5.5} + \dots + \frac{1}{50.50} < \frac{1}{9} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{49.50} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{50} = \frac{191}{450} < \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{4} < A < \frac{4}{9}$$

Bài 25: Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$, CMR: $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$

HD:

$$\text{CMR: } A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{75} \right) + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{77} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

$$\text{TH1: } A > \frac{1}{75} \cdot 25 + \frac{1}{100} \cdot 25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\text{TH2: } A < \frac{1}{50} \cdot 25 + \frac{1}{75} \cdot 25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Bài 26: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$, CMR: $A < 2$

HD:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \dots + \frac{1}{50.50} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} = 2 - \frac{1}{50} < 2$$

Bài 27: CMR:

$$\text{a, } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$$

$$\text{b, } \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$$

HD:

$$\text{a, Ta có: } A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$$

$$\text{Nên } 2A + A = 3A = 1 - \frac{1}{64} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$$

$$\text{b, Ta có: } 3A + A = 4A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\text{Đặt } B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{3^{99}} \Rightarrow B = \frac{3}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3^{99}}, \text{ Thay vào A ta được:}$$

$$4A = \frac{3}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$$

Bài 28: CMR: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

HD:

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \text{ Nhân } 49 \text{ A} \Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Bài 29: Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$, CMR: $A < \frac{1}{50}$

Bài 30: CMR: $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4019}{2009^2 \cdot 2010^2} < 1$

Bài 31: CMR: $A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{99}} < \frac{1}{4}$

Bài 32: CMR: $1 < \frac{2012}{2011^2 + 1} + \frac{2012}{2011^2 + 2} + \frac{2012}{2011^2 + 3} + \dots + \frac{2012}{2011^2 + 2011} < 2$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{2012}{2011^2 + 1} < \frac{2012}{2011^2}, \frac{2012}{2011^2 + 2} < \frac{2012}{2011^2}, \text{ tương tự như vậy:}$$

$$A < \frac{2012}{2011^2} + \frac{2012}{2011^2} + \dots + \frac{2012}{2011^2} = \frac{2012 \cdot 2011}{2011^2} = \frac{2012}{2011} < 2 \Rightarrow A < 2$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{2012}{2011^2 + 1} > \frac{2012}{2011^2 + 2011}, \frac{2012}{2011^2 + 2} > \frac{2012}{2011^2 + 2011}, \text{ Tương tự như vậy:}$$

$$A > \frac{2012}{2011^2 + 2011} + \frac{2012}{2011^2 + 2011} + \dots + \frac{2012}{2011^2 + 2011} = \frac{2012 \cdot 2011}{2011^2 + 2011} = \frac{2012 \cdot 2011}{2011(2011 + 1)} = 1$$

Bài 33: CMR: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$

HD:

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{10}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{10}; \dots; \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$ vậy

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

Bài 34: CMR: $E = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 48$

HD:

$$E = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2500}\right)$$

$$= 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) > 48$$

Bài 35: Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$, CMR: $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$

HD:

$$\text{CMR: } A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{75}\right) + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{77} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$\text{TH1: } A > \frac{1}{75} \cdot 25 + \frac{1}{100} \cdot 25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\text{TH2: } A < \frac{1}{50} \cdot 25 + \frac{1}{75} \cdot 25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Bài 36: CMR: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}} > 45$

Bài 37: CMR: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$

HD:

Xét số hạng tổng quát: $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), (n \geq 1)$

Do đó: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \dots + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{1} - \sqrt{0})$

Với $n=2500$ ta có: $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 2 \cdot \sqrt{2500} = 100$

Bài 38: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{18.19.20} < \frac{1}{4}$

HD:

$$2A = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{19.20}\right) \Rightarrow C = \frac{1}{4} - \frac{1}{19.40} < \frac{1}{4}$$

Bài 39: Chứng minh rằng: $D = \frac{36}{1.3.5} + \frac{36}{3.5.7} + \frac{36}{5.7.9} + \dots + \frac{36}{25.27.29} < 3$

HD:

$$D = 9 \left(\frac{4}{1.3.5} + \frac{4}{3.5.7} + \frac{4}{5.7.9} + \dots + \frac{4}{25.27.29} \right) = 9 \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{27.29} \right) = 3 - \frac{1}{3.29} < 3$$

Bài 40: CMR: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{1990^2} < \frac{3}{4}$

Bài 41: CMR: $\frac{99}{202} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{99}{100}$

DẠNG 2: TỔNG PHÂN SỐ TỰ NHIÊN

Phương pháp:

Với tổng phân số tự nhiên, với chương trình lớp 6 -7 ta nên cho học sinh làm theo cách nhóm đầu cuối và so sánh giữa các nhóm với nhau, để tạo ra các ngoặc có cùng tử, rồi so sánh bình thường

Bài 1: CMR: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} < \frac{1}{2}$

HD:

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{14^2} < \frac{1}{2}$$

Bài 2: CMR: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{113} < \frac{1}{2}$

HD:

$$< \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

Bài 3: CMR: $\frac{11}{15} < \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} < \frac{3}{2}$

HD:

$$< \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{20} \text{ hoặc } > \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}$$

Bài 4: CMR: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Nhóm thành 2 ngoặc: Khi đó ta có: } VT &= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{80} \right) \\ \Rightarrow VT &> \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} \right) = \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Bài 5: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

HD:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2011} \right) + \left(1 - \frac{1}{2012} \right) + \left(1 + \frac{2}{2010} \right) = 3 + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2012} \right) > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{17} \right) < \frac{5}{3} + \frac{5}{8} + \frac{5}{10} \quad \text{Tổng B có 15 số}$$

Bài 6: Cho $M = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{17}$, CMR: $M < 2$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < \frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \quad \text{và} \quad \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{17} < \frac{1}{8} \cdot 8 = 1 \quad \text{Tổng M có 13 số}$$

Bài 7: Cho $S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14}$, CMR: $1 < S < 2$

HD:

$$S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14} > \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} = \frac{15}{15} = 1 \Rightarrow S > 1$$

$$S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14} < \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{15}{10} = 1,5 < 2 \Rightarrow S < 2$$

Bài 8: Cho $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \dots + \frac{5}{49}$, CMR: $3 < S < 8$

HD:

Tổng trên có 30 số hạng:

$$\text{Ta có: } S > \frac{5}{50} + \frac{5}{50} + \dots + \frac{5}{50} = 30 \cdot \frac{5}{50} = 3 \Rightarrow S > 3$$

$$\text{Ngược lại: } S < \frac{5}{20} + \frac{5}{20} + \frac{5}{20} + \dots + \frac{5}{20} = 30 \cdot \frac{5}{20} = 75 \Rightarrow S < 8$$

Bài 9: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$ thì $\frac{5}{8} < A < \frac{3}{4}$

HD:

Ta thấy tổng A có 100 số, như vậy ta sẽ nhóm thành 50 ngoặc, mỗi ngoặc sẽ có hai phân số, gồm 1 phân số đứng đầu và 1 phân số đứng cuối, cứ như vậy dồn sâu vào trong tổng

$$A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{200} \right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{199} \right) + \dots + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{151} \right) = \frac{301}{101 \cdot 200} + \frac{301}{102 \cdot 199} + \dots + \frac{301}{150 \cdot 151} \quad (50 \text{ ngoặc})$$

$$A = 301 \left(\frac{1}{101 \cdot 200} + \frac{1}{102 \cdot 199} + \dots + \frac{1}{150 \cdot 151} \right), \text{ lúc này ta sẽ so sánh tất cả với chung 1 phân số đầu hoặc cuối,}$$

TH1: Ta chứng minh $A > \frac{5}{8}$ thì ta có:

$$A > 301 \cdot \left(\frac{1}{150 \cdot 151} + \frac{1}{150 \cdot 151} + \dots + \frac{1}{150 \cdot 151} \right) = 301 \cdot \frac{50}{150 \cdot 151} = \frac{301}{453} > \frac{300}{453} > \frac{300}{480} = \frac{5}{8} \quad (1)$$

TH2: Ta chứng minh $A < \frac{3}{4}$ ta có:

$$A < 301 \cdot \left(\frac{1}{101 \cdot 200} + \frac{1}{101 \cdot 200} + \dots + \frac{1}{101 \cdot 200} \right) = 301 \cdot \frac{50}{101 \cdot 200} = \frac{301}{404} < \frac{303}{404} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 10: Chứng minh rằng: $\frac{7}{12} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$

HD:

Nhận thấy tổng $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$ chính là tổng bài 1

Nên ta chứng minh được $A > \frac{5}{8}$, mà $\frac{5}{8} > \frac{7}{12} \Rightarrow A > \frac{7}{12}$

Bài 11: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$ Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

HD:

Thấy rằng tổng A có 60 số hạng

TH1: Ta chứng minh $A > \frac{4}{3}$ bằng cách nhóm 2 số một ngoặc thông thường

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{70} \right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{69} \right) + \dots + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{41} \right) = \frac{81}{11 \cdot 70} + \frac{81}{12 \cdot 69} + \dots + \frac{81}{40 \cdot 41} \quad (30 \text{ ngoặc})$$

$$A > \frac{81}{40 \cdot 41} + \frac{81}{40 \cdot 41} + \dots + \frac{81}{40 \cdot 41} = \frac{81 \cdot 30}{40 \cdot 41} = \frac{243}{164} > \frac{240}{164} > \frac{240}{180} = \frac{4}{3}$$

TH2: Tuy nhiên để chứng minh $A < \frac{5}{2}$, nếu chúng ta làm như trên thì sẽ không chứng minh được

Lý do: vì việc chứng minh nhỏ hơn mà chúng ta so sánh lớn hơn lượng dư thừa, dẫn đến tổng A lớn hơn $\frac{5}{2}$, do đó để giảm bớt lượng dư, tùy vào bài toán, chúng ta nên nhóm thành 6 ngoặc

$$A = \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60}\right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{70}\right)$$

$$A < \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{41}\right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{51}\right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{61}\right)$$

$$A < \frac{10}{11} + \frac{10}{21} + \frac{10}{31} + \frac{10}{41} + \frac{10}{51} + \frac{10}{61} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 2 + 0,5 = \frac{5}{2}$$

Bài 12: Cho $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{60}$, Chứng minh rằng: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

HD:

Nhóm tổng S thành 3 ngoặc

$$S = \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60}\right) < \frac{10}{31} + \frac{10}{41} + \frac{10}{51} < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{4}{5}$$

$$\text{Mặt khác: } S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} > \frac{3}{5}$$

Bài 13: Cho $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}$, Chứng minh rằng: $0,2 < A < 0,4$

HD:

Tách tổng A thành:

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) = \frac{13}{60} + \dots > \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\text{Và: } A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) - \dots - \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{98}\right) - \frac{1}{99} < \frac{2}{5} = 0,4$$

Bài 14: Chứng minh rằng: $\frac{3}{5} < \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \dots + \frac{1}{4006} < \frac{3}{4}$

HD:

Thấy rằng tổng A có 2003 số hạng, số hạng ở giữa là $\frac{1}{3005}$

$$\text{TH1: } A = \left(\frac{1}{2004} + \frac{1}{4006}\right) + \left(\frac{1}{2005} + \frac{1}{4005}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3004} + \frac{1}{3006}\right) + \frac{1}{3005}$$

$$= 6010 \left(\frac{1}{2004.4006} + \frac{1}{2005.4005} + \dots + \frac{1}{3004.3006}\right) + \frac{1}{3005}$$

$$A > 6010 \cdot \frac{1}{3004.3006} \cdot 1001 + \frac{1}{3005} > \frac{6010.1001}{3005.3005} + \frac{1}{3005} > \frac{2002}{3005} > \frac{1803}{3005} = \frac{3}{5}$$

$$\text{TH2: } A < 6010 \cdot \frac{1}{2004.4006} \cdot 1001 + \frac{1}{3005} = \frac{6012.1001}{2004.4006} = \frac{3003}{4006} < \frac{3003}{4004} = \frac{3}{4}$$

Bài 15: Cho $A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$, Chứng minh rằng $\frac{3}{5} < A < \frac{31}{40}$

HD:

Tổng A có 50 số hạng

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{99}\right) + \dots + \left(\frac{1}{75} + \frac{1}{76}\right) = 151 \left(\frac{1}{51.100} + \frac{1}{52.99} + \dots + \frac{1}{75.76}\right) \quad (25 \text{ ngoặc})$$

$$A < \frac{151.25}{51.100} = \frac{151}{204} < \frac{155}{204} < \frac{155}{200} = \frac{31}{40} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } A > 151 \cdot \frac{25}{75.76} = \frac{151}{228} > \frac{150}{228} > \frac{150}{250} = \frac{3}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có ĐPCM

Bài 16: Cho $A = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{80}$, Chứng minh rằng: $1 < A < 2$

HD:

Tổng A có 60 số hạng: $A = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{80}\right) + \left(\frac{1}{22} + \frac{1}{79}\right) + \dots + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{51}\right)$ (30 ngoặc)

$$A = 101 \left(\frac{1}{21.80} + \frac{1}{22.79} + \dots + \frac{1}{50.51} \right) < 101 \cdot \frac{30}{21.80} = \frac{303}{168} = \frac{101}{56} < \frac{112}{56} = 2$$

$$\text{Mặt khác: } A > 101 \cdot \frac{30}{50.51} = \frac{303}{255} > 1$$

Bài 17: Chứng minh rằng: $A = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 48$

HD:

Nhận thấy các mẫu của tổng A là bình phương của các số tự nhiên liên tiếp, còn tử số kém mẫu số là 1

nên ta tách A như sau:

$$A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2500}\right) = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right)$$

$$\text{Mà } B = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) < 1 \Rightarrow -B > -1 \Rightarrow A = 49 - B > 49 - 1 = 48$$

Bài 18: Chứng minh rằng: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2016}-1} > \frac{2016}{2}$

HD :

Nhận thấy tổng A có phân số cuối có dạng $\frac{1}{2^n}$, nên muốn Chứng minh tổng A lớn hơn 1 số ta nhóm

sao cho phân số có dạng $\frac{1}{2^n}$ ở cuối ngoặc :

$$\text{Ta có : } A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2005}+1} + \dots + \frac{1}{2^{2006}}\right) - \frac{1}{2^{2006}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2006}} + \dots + \frac{1}{2^{2006}}\right) - \frac{1}{2^{2006}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2005} \cdot \frac{1}{2^{2006}} - \frac{1}{2^{2006}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = 1 + 2016 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2016}} = \frac{2016}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2016}}\right) > \frac{2016}{2}$$

Bài 19: Cho : $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}$, chứng minh rằng $A > 50$ và $A < 100$

HD :

Nhận thấy tổng A giống với bài 10, muốn chứng minh lớn hơn ta để phân số dạng $\frac{1}{2^n}$ ở cuối ngoặc :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}} = \frac{100}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) > 50$$

Mặt khác muốn chứng minh $A < 100$, ta nhóm sao cho phân số có dạng $\frac{1}{2^n}$ nằm ở đầu ngoặc :

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100} - 1}\right)$$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{99}} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 100 \text{ vậy } A < 100$$

Bài 20: Chứng minh rằng: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} > 4$

HD :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^5 + 1} + \dots + \frac{1}{2^6}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^5 \cdot \frac{1}{2^6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 4$$

Bài 21: Cho $A = \frac{455}{1} + \frac{454}{2} + \frac{453}{3} + \dots + \frac{2}{454} + \frac{1}{455}$, So sánh A với 2007

HD:

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{454}{2} + 1\right) + \left(\frac{453}{3} + 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{455} + 1\right) + 1$$

$$= \frac{456}{2} + \frac{456}{3} + \dots + \frac{456}{455} + \frac{456}{456} = 456 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{456}\right) = 456.B$$

Xét

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{456} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^7 + 1} + \dots + \frac{1}{2^8}\right) + \left(\frac{1}{257} + \frac{1}{258} + \dots + \frac{1}{456}\right)$$

$$> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8}\right) + \left(\frac{1}{456} + \dots + \frac{1}{456}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \dots + \frac{2^7}{2^8} + \frac{200}{456} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right) + \frac{200}{456} = 4 + \frac{200}{456} = \frac{2024}{456}$$

$$\text{Khi đó: } A > 456 \cdot \frac{2024}{456} = 2024 > 2007$$

Bài 22: Chứng minh rằng luôn tồn tại số tự nhiên n để: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1000$

HD :

$$\text{Chọn } n = 2^{2000} \text{ Khi đó : } A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{2000}} > \frac{2000}{2} = 1000$$

Bài 23: Cho $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$, So sánh B với 50

HD :

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{99}}\right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{98} \cdot \frac{1}{2^{99}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{99}{2} > 50$$

Bài 24: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1$

HD :

$$A = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right), \text{ có } n^2 - (n+1) + 1 = n^2 - n \text{ số hạng}$$

$$A > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{n}{n^2} = 1 \text{ vậy } A > 1$$

Bài 25: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{144} > 1$

HD:

Tổng này là 1 trường hợp của bài 15: Áp dụng cách làm bài 15 ta có:

$$A = \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{12^2} \right) > \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{12^2} = \frac{1}{12} + \frac{12^2 - 12}{12^2} = 1$$

Bài 26: Chứng minh rằng: $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{36} > 1$

HD:

Tương tự tổng này có dạng của bài 15, nên ta có:

$$A = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{6^2} \right) > \frac{1}{6} + \frac{6^2 - 6}{6^2} = 1 \Rightarrow A > 1$$

Bài 27: Chứng minh rằng: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2016}} < 2016$

HD:

$$\text{Ta có: } A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2015}} + \dots + \frac{1}{2^{2016} - 1} \right) + \frac{1}{2^{2016}}$$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2015} \cdot \frac{1}{2^{2015}} + \frac{1}{2^{2016}} < 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2^{2016}} = 2015 + \frac{1}{2^{2016}} < 2016$$

Bài 28: CMR luôn tồn tại số tự nhiên n để $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > 1000$

HD:

Chọn $n = 2^{1999}$

Bài 29: CMR: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} > 1000$

HD:

$$VT = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{1998} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} \right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{1998} \cdot \frac{1}{2^{1999}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1999 > 1000$$

Bài 30: CMR: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2016} < 5$

Bài 31: CMR: $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \dots + \frac{1999}{2000} > \frac{2013}{18892}$

HD:

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{8} - \dots + \frac{1999}{2000} = 1 + \left(\frac{3}{4} - 1 \right) + \left(\frac{7}{8} - \frac{5}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1999}{2000} - \frac{1997}{1998} \right)$$

$$= 1 + \frac{2}{8} + \frac{2}{60} + \frac{2}{112} + \dots + \frac{2}{2000 \cdot 1998} > 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 473}{4 \cdot 473} = \frac{2365}{1892} > \frac{2013}{1892} > \frac{2013}{18892}$$

Bài 32: CMR: $\frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} < \frac{1}{15}$

Bài 33: CMR: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{14}, \forall n \geq 2$

DẠNG 3: TÍCH CỦA 1 DẪY

Phương pháp:

Với dạng tích ta sử dụng tính chất: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ với $m > 0$, và ngược lại

Bài 1: Cho $A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \dots \frac{200}{199}$ Chứng minh rằng: $14 < A < 20$

HD:

Ta thấy: Phân số $\frac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$ nên ta có:

$$A > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{201}{200} \text{ khi đó : } A^2 > \frac{(2.4.6\dots 200)(3.5.7\dots 201)}{(1.3.5\dots 199)(2.4.6\dots 200)} \Rightarrow A^2 > 201 > 196 = 14^2 \Rightarrow A > 14$$

Mặt khác : $\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}$ nên ta có :

$$A < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{199}{198} \text{ khi đó : } A^2 < \frac{(2.4.6\dots 200)(2.3.5.7\dots 199)}{(1.2.4.6\dots 198)(1.3.5.7\dots 199)} \Rightarrow A^2 < 200.2 = 20^2 \Rightarrow A < 20$$

Bài 2: Cho $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{208}{210}$ Chứng minh rằng $A < \frac{1}{25}$

HD :

Ta thấy A có dạng $\frac{n}{n+2} < 1 \Rightarrow \frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n+1} < \frac{n-1}{n}$,

$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{207}{208} \Rightarrow A^2 < \frac{(1.4.7.10\dots 208)(1.3.6\dots 207)}{(3.6.9\dots 210)(3.4.7\dots 208)} \Rightarrow A^2 < \frac{1}{3.210} = \frac{1}{630} < \frac{1}{625} \Rightarrow A < \frac{1}{25}$$

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100}$ Chứng minh rằng $\frac{1}{15} < A < \frac{1}{10}$

HD :

A có dạng $\frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ khi đó ta có :

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{100}{101} \text{ khi đó : } A^2 < \frac{(1.3.5\dots 99)(2.4.6\dots 100)}{(2.4.6\dots 100)(3.5.7\dots 101)} \Rightarrow A^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \Rightarrow A < \frac{1}{10}$$

Mặt khác :

$$A > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{98}{99} \Rightarrow A^2 > \frac{(1.3.5\dots 99)(1.2.4\dots 98)}{(2.4.6\dots 100)(2.3.5.7\dots 99)} = \frac{1}{200} \Rightarrow A^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225} = \frac{1}{15^2} \Rightarrow A > \frac{1}{15}$$

Bài 4: Chứng minh rằng $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{244}{246} < \frac{1}{27}$

HD :

$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{243}{244} \Rightarrow A^2 < \frac{(1.4.7\dots 244)(1.3.6\dots 243)}{(3.6.9\dots 246)(3.4.7\dots 244)} \Rightarrow A^2 < \frac{1}{3.246} = \frac{1}{738} < \frac{1}{27^2} \Rightarrow A < \frac{1}{27}$$

Bài 5: Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{199}{200}$ Chứng minh rằng $P^2 < \frac{1}{201}$

HD :

$$\text{Ta có : } P < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{200}{201} \Rightarrow P^2 < \frac{(1.3.5\dots 199)(2.4.6\dots 200)}{(2.4.6\dots 200)(3.5.7.9\dots 201)} \Rightarrow P^2 < \frac{1}{201}$$

Bài 6: Cho $S = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{200}{199}$ Chứng minh rằng: $101 < S^2 < 400$

HD :

$$\text{Ta có : } S < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{199}{198} \Rightarrow S^2 < \frac{(2.4.6 \dots 200)(2.3.5 \dots 199)}{(1.3.5.7 \dots 199)(1.2.4.6 \dots 198)} = 400$$

$$\text{Mặt khác : } S > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \dots \cdot \frac{201}{200} \Rightarrow S^2 > \frac{(2.4.6 \dots 200)(3.5.7 \dots 201)}{(1.3.5 \dots 199)(2.4.6 \dots 200)} = 201 > 101$$

Bài 7: Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ So sánh A với $-\frac{1}{2}$

HD :

Ta thấy tích A gồm 99 số âm :

$$A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{9} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{10000} - 1\right) = - \left(\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \dots \cdot \frac{99.101}{100.100}\right) = \frac{-101}{200}, \text{ Mà : } \frac{101}{200} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-101}{200} < \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{-1}{2}$$

DẠNG 4: BẤT ĐẲNG THỨC CHỮ

Phương pháp:

Với chương trình lớp 6-7 các dạng bài toán chứng minh bất đẳng thức chữ, ta thường sử dụng tính chất: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}, m > 0$ hoặc ngược lại và đưa về cùng mẫu

Bài 1: Cho $a, b, c > 0$, Chứng minh rằng: $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ có giá trị không nguyên

HD:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+b} &> \frac{a}{a+b+c} & \frac{a}{a+b} &< \frac{a+c}{a+b+c} \\ \text{Ta có: } \frac{b}{b+c} &> \frac{b}{a+b+c} & \text{và } \frac{b}{b+c} &< \frac{b+a}{a+b+c}, & \text{Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có:} \\ \frac{c}{c+a} &> \frac{c}{a+b+c} & \frac{c}{c+a} &< \frac{c+b}{a+b+c} \\ \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} &< M &< \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c}, & \text{hay } 1 < M < 2, \\ \text{Vậy } M &\text{ không nguyên} \end{aligned}$$

Bài 2: Cho x, y, z, t là số tự nhiên khác 0, Chứng minh rằng:

$$M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t} \text{ có giá trị không nguyên}$$

HD:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y+z} &> \frac{x}{x+y+z+t} & \frac{x}{x+y+z} &< \frac{x+t}{x+y+z+t} \\ \frac{y}{x+y+t} &> \frac{y}{x+y+z+t} & \frac{y}{x+y+t} &< \frac{y+z}{x+y+z+t} \\ \text{Ta có: } \frac{z}{y+z+t} &> \frac{z}{x+y+z+t} & \text{và } \frac{z}{y+z+t} &< \frac{z+x}{x+y+z+t}, & \text{Cộng theo về ta được:} \\ \frac{t}{x+z+t} &> \frac{t}{x+y+z+t} & \frac{t}{x+z+t} &< \frac{t+y}{x+y+z+t} \\ 1 < M < 2, & \text{Vậy } M \text{ không nguyên} \end{aligned}$$

Bài 3: Cho a, b, c, d Chứng minh rằng: $A = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+d} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$ Có giá trị không nguyên

HD:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+b+c} &> \frac{a}{a+b+c+d} & \frac{a}{a+b+c} &< \frac{a+d}{a+b+c+d} \\ \frac{b}{a+b+d} &> \frac{b}{a+b+c+d} & \frac{b}{a+b+d} &< \frac{b+c}{a+b+c+d} \\ \text{Ta có: } \frac{c}{b+c+d} &> \frac{c}{a+b+c+d} & \text{và } \frac{c}{b+c+d} &< \frac{c+a}{a+b+c+d} & \text{Cộng theo về ta được:} \\ \frac{d}{a+c+d} &> \frac{d}{a+b+c+d} & \frac{d}{a+c+d} &< \frac{d+b}{a+b+c+d} \end{aligned}$$

$1 < A < 2$ Vậy A có giá trị không nguyên

Bài 4: Cho a, b, c là các số dương, và tổng hai số luôn lớn hơn số còn lại. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

HD:

Chúng ta có thể làm theo cách ở trên, hoặc làm theo cách thứ hai như sau:

Giả sử: $a \geq b \geq c \Rightarrow a+b > a+c > b+c$

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c}$$

Khi đó: $\frac{b}{c+a} < \frac{b}{b+c}$, cộng theo vế ta được: VT $< \frac{a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{a}{b+c} < 1+1=2$

$$\frac{c}{a+b} < \frac{c}{b+c}$$

Bài 5: Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

HD:

$$\begin{array}{l} \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d} \quad \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \\ \frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d} \quad \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d} \\ \frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d} \quad \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{a+b+c+d} \\ \frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d} \quad \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d} \end{array} \quad \text{Ta có:} \quad \text{và} \quad \text{Cộng theo vế ta được: } 1 < A < 2$$

Bài 6: Cho a, b, c, d > 0, Chứng minh rằng: $2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$

HD:

Ta có:

$$\begin{array}{l} \frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \\ \frac{b+c}{a+b+c+d} < \frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \\ \frac{c+d}{a+b+c+d} < \frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d} \\ \frac{d+a}{a+b+c+d} < \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d} \end{array} \quad \text{Cộng theo vế ta được: } 2 < A < 3$$

Bài 7: Cho các số x, y, z nguyên dương, CMR: $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

HD:

Ngoài hai cách như trên, ta cũng có thể hướng dẫn học sinh làm theo cách như sau:

Ta có: $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > 1$, Tương tự ta cũng có: $\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} > 1$

Mà $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} \right) = 3$ Nên $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

Bài 8: Cho các số x, y, z nguyên dương, CMR: $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

HD:

Ta có: $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > 1$, Tương tự ta cũng có: $\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} > 1$

Mà $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} \right) = 3$ Nên $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

Bài 9 : Cho a, b, c là ba cạnh của 1 tam giác : CMR : $2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2$

HD :

Trong tam giác, tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại nên ta có :

$$b+c > a \Rightarrow a(b+c) > a^2 \Rightarrow ab+ac > a^2$$

Tương tự ta có :

$$bc+ba > b^2 \text{ và } ac+cb > c^2$$

Cộng theo vế ta được : $2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2$

Bài 10: Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, CMR: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

HD:

$$\text{Vì } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a-1 \leq 0 \\ b-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab-a-b+1 \geq 0$$

$$\Rightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}, (c \geq 0)$$

$$\text{Mà } \frac{c}{a+b} \leq \frac{2c}{a+b+c}, (c \geq 0) \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{b}{ac+1} \leq \frac{2b}{a+b+c} \text{ và } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{2a}{a+b+c}$$

$$\text{Cộng theo vế ta được: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2 \text{ (ĐPCM)}$$