

TỨ GIÁC NỘI TIẾP**CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM THUỘC 1 ĐƯỜNG TRÒN****C. TỨ GIÁC NỘI TIẾP – CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM THUỘC 1 ĐƯỜNG TRÒN****MỤC LỤC****C. TỨ GIÁC NỘI TIẾP – CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM THUỘC 1 ĐƯỜNG TRÒN...1**

📁. TỨ GIÁC NỘI TIẾP	2
📁. Lý thuyết	2
📁. Bài tập	4
📁. CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CÙNG THUỘC MỘT ĐƯỜNG TRÒN.....	11
📁. Lý thuyết	11
📁. Bài tập.....	11
📁. BÀI TẬP THAM KHẢO (tự luyện).....	14
Dạng 1: Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới góc bằng nhau	14
Dạng 2: Tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180^0	15
Dạng 3: Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện	16
Dạng 4: Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm	17
Dạng 5: Chứng minh 5 điểm nằm trên một đường tròn	17

Trong bài hình học trong đề thi tuyển sinh vào 10, câu a sẽ thường yêu cầu các em chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp hoặc chứng minh các điểm cùng thuộc một đường tròn. Đây là một ý dễ trong bài toán nên các em hãy kiểm điểm tối đa từ ý này nhé!

Chủ đề dưới đây đã hệ thống một số biện pháp chứng minh tứ giác là tứ giác nội tiếp mà các em thường gặp. Hãy nắm vững kiến thức đã học trước đó để phục vụ cho lời giải nhé!

Chúc các em đạt kết quả cao trong học tập!

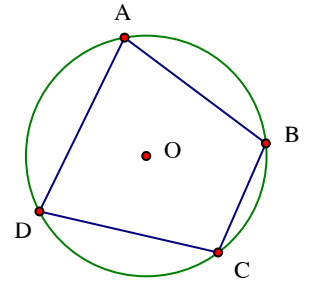
TƯ GIÁC NỘI TIẾP

Lý thuyết

1. Định nghĩa .

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là *tứ giác nội tiếp*).

Hình bên :Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.



2. Định lý. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .

3. Định lý đảo. Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

4. Một số phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp.

Phương pháp 1:	Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° .
Phương pháp 2:	Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
Phương pháp 3:	Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α
Phương pháp 4:	Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện. (tương tự phương pháp 1)
Phương pháp 5: Định lý Ptoleme hay đẳng thức Ptoleme	Thuận: Nếu một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện
	Đảo: Nếu một tứ giác thỏa mãn điều kiện tổng các tích của các cặp cạnh đối diện bằng tích của hai đường chéo thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho tam giác ABC, 2 đường cao BB', CC'. Chứng minh tứ giác BCB'C' nội tiếp.

Hướng dẫn giải**Cách 1: Phương pháp 2: Chứng minh 4 đỉnh cách đều 1 điểm**

Gọi O là trung điểm của BC. Xét $\triangle BB'C$ có: $\widehat{BB'C} = 90^\circ$ (GT)

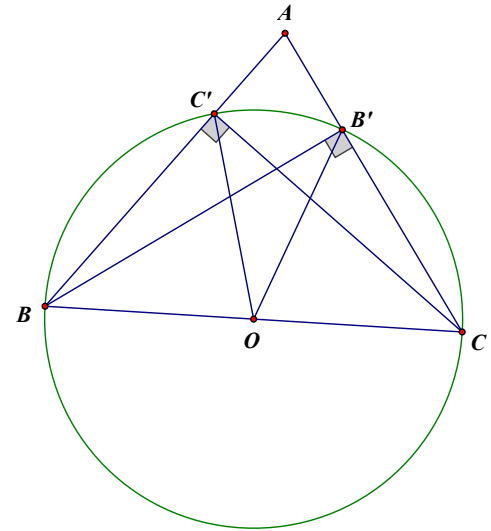
OB' là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

$$\Rightarrow OB' = OB = OC = r \quad (1)$$

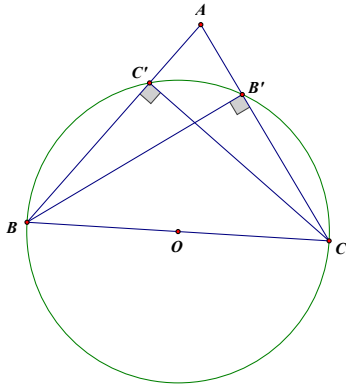
Xét $\triangle BC'C$ có: $\widehat{BC'C} = 90^\circ$ (GT)

Tương tự trên $\Rightarrow OC' = OB = OC = r \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B, C', B', C \in (O; r) \Rightarrow$ Tứ giác BCB'C' nội tiếp đường tròn.



Cách 2: Phương pháp 3: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp.



Ta có: $BB' \perp AC$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BB'C} = 90^\circ$.

$CC' \perp AB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BC'C} = 90^\circ$.

$\Rightarrow B', C'$ cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông

$\Rightarrow B', C'$ nằm trên đường tròn đường kính BC

Hay tứ giác BCB'C' nội tiếp đường tròn đường kính BC.

Cách 3: Phương pháp 1 và phương pháp 4: Tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180° và Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

Ta có: $BB' \perp AC$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BB'A} = 90^\circ$.

$CC' \perp AB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{CC'A} = 90^\circ$.

Xét $\triangle AB'B$ và $\triangle AC'C$ có $\widehat{AB'B} = \widehat{AC'C} = 90^\circ$ và $\widehat{BAC}$ chung.

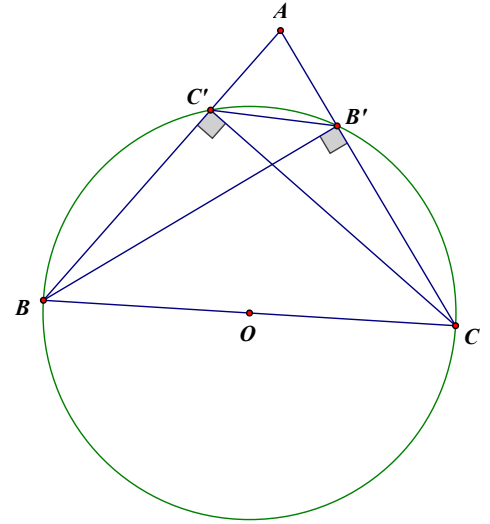
$$\text{Vậy } \triangle AB'B \sim \triangle AC'C \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

Xét $\triangle AB'C'$ và $\triangle ABC$ ta có $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ và $\widehat{BAC}$ chung.

Vậy $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$. Tứ giác $BC'B'C$ có góc ngoài tại đỉnh B' bằng góc trong tại đỉnh B . Vậy tứ giác $BC'B'C$ nội tiếp. (Phương pháp 2)

Để sử dụng theo **phương pháp 1** có thể chỉ ra tứ giác $BC'B'C$ có $\widehat{C'BC} + \widehat{C'B'C} = 180^\circ$ nên tứ giác $BC'B'C$ là tứ giác nội tiếp



Bài tập

Bài 1: Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C) là tiếp điểm. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh BC, CA, AB. Gọi giao điểm của BM và IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

- Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được;
- Chứng minh $MI^2 = MH.MK$;
- Chứng minh tứ giác IPMQ nội tiếp rồi suy ra $PQ \perp MI$;

Hướng dẫn giải

a) * $\widehat{BIM} = \widehat{BKM} = 90^\circ$ suy ra tứ giác BIMK nội tiếp. (phương pháp 1)

* $\widehat{CIM} = \widehat{CHM} = 90^\circ$ suy ra tứ giác CIMH nội tiếp. (phương pháp 1)

b) Tứ giác BIMK nội tiếp nên $\widehat{IKM} = \widehat{IBM}$; (nội tiếp cùng chắn cung MI); $\widehat{KIM} = \widehat{KBM}$. (nội tiếp cùng chắn cung KM) (1)

Tứ giác CIMH nội tiếp nên $\widehat{ICM} = \widehat{IHM}$; (cùng chắn cung MI); $\widehat{MIH} = \widehat{MCH}$. (cùng chắn cung MH) (2)

Xét đường tròn tâm (O) có : $\widehat{KBM} = \widehat{BCM}$; (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); $\widehat{MBI} = \widehat{MCH}$. (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{KIM} = \widehat{IHM}; \widehat{MKI} = \widehat{MIH}$.

Do đó $\triangle IMK \sim \triangle MHI(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{MK}{MI} = \frac{MI}{MH} \Rightarrow MI^2 = MK.MH.$$

c) * Ta có $\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = \widehat{BMC} + \widehat{PIM} + \widehat{QIM}$

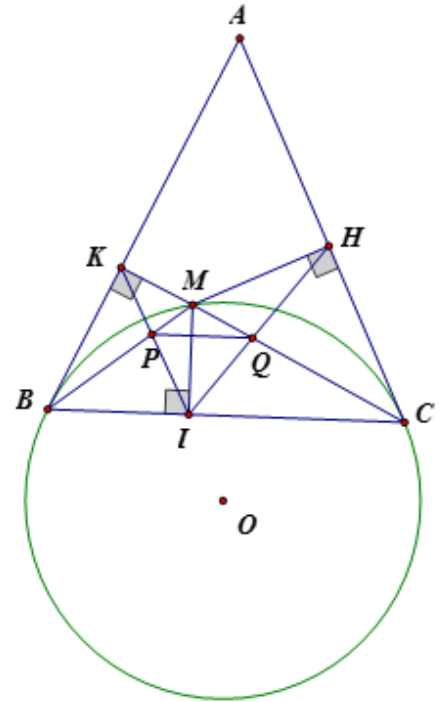
$$= \widehat{BMC} + \widehat{MCI} + \widehat{MBC} = 180^\circ$$

$$\text{Hay } \widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác MPIQ nội tiếp. (phương pháp 1)

* Từ đó ta có $\widehat{MPQ} = \widehat{MIQ} \Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{MBC}$

$$\Rightarrow PQ \parallel BC \text{ mà } MI \perp BC \text{ nên } MI \perp PQ$$



Bài 2: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính

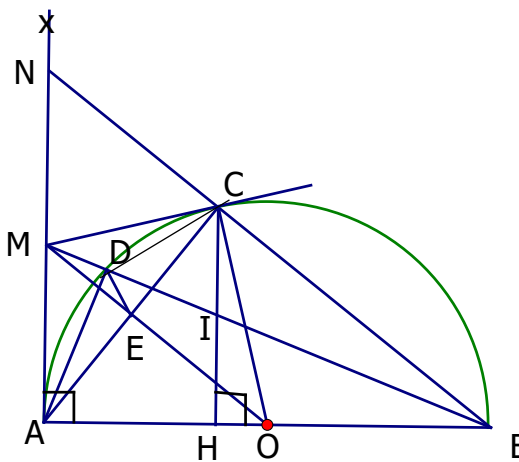
$AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường

tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

a) Chứng minh: AMCO và AMDE là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh MBCD là tứ giác nội tiếp (xem cách giải Bài 3)

Hướng dẫn giải



Vì MA, MC là tiếp tuyến nên: $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^\circ$. Tứ giác AMCO có $\widehat{MAO} + \widehat{MCO} = 180^\circ$
 $\Rightarrow$ AMCO là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MO.

$$\widehat{ADB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \Rightarrow \widehat{ADM} = 90^\circ \text{ (1)}$$

Lại có: $OA = OC = R$; $MA = MC$ (tính chất tiếp tuyến).

Suy ra OM là đường trung trực của AC

$$\Rightarrow \widehat{AEM} = 90^\circ \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{AEM} = 90^\circ$. Tứ giác $AMDE$ có hai đỉnh A, E kề nhau cùng nhìn cạnh MA dưới một góc không đổi. Vậy là tứ giác $AMDE$ nội tiếp đường tròn đường kính MA .

Bài 3: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E)

1. Chứng minh: $\widehat{ABD} = \widehat{DFB}$.

2. Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải

1) $\triangle ADB$ có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 90^\circ$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°) (1)

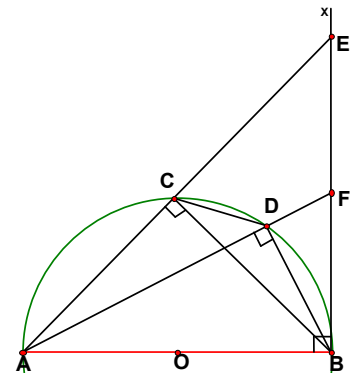
$\triangle ABF$ có $\widehat{ABF} = 90^\circ$ (BF là tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{AFB} + \widehat{BAF} = 90^\circ$
(vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DFB}$

2) Tứ giác $ACDB$ nội tiếp (O) $\Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180^\circ$.

mà $\widehat{ECD} + \widehat{ACD} = 180^\circ$ (Vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{DBA}$

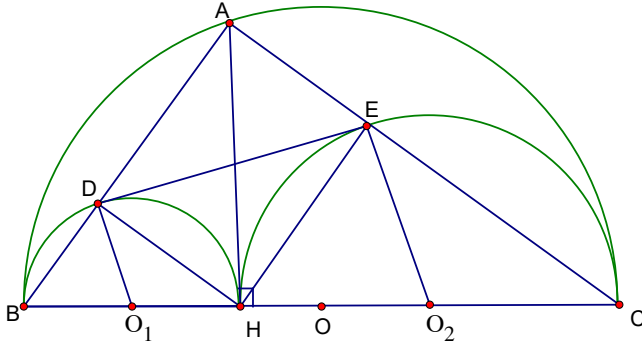
Theo trên $\widehat{ABD} = \widehat{DFB}$, $\widehat{ECD} = \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{DFB}$. Mà $\widehat{EFD} + \widehat{DFB} = 180^\circ$ (Vì là hai góc kề bù) nên $\Rightarrow \widehat{ECD} + \widehat{AEFD} = 180^\circ$, do đó tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.



Bài 4: Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH \perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH , CH lần lượt có tâm O_1 ; O_2 cắt AB và CA thứ tự tại D và E .

- a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết $R = 25$ và $BH = 10$
 b) Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{BDH} = \widehat{CEH} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ADHE$ có $\hat{A} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$
 hay $ADHE$ là hình chữ nhật.

Từ đó $DE = AH$ mà $AH^2 = BH \cdot CH$ (Hệ thức

lượng trong tam giác vuông)

$$\text{hay } AH^2 = 10 \cdot 40 = 20^2 \quad (BH = 10; CH = 2 \cdot 25 - 10 = 40) \Rightarrow DE = 20$$

b) Ta có: $\widehat{BAH} = \hat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{DAH} = \widehat{ADE}$ (1)

(Vì $ADHE$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow \hat{C} = \widehat{ADE}$ do $\hat{C} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ nên tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Lưu ý: Có thể hướng dẫn học sinh một cách sử dụng hệ thức lượng và tam giác đồng dạng như sau:

Tam giác AHB vuông tại H , đường cao AH . Ta có $AH^2 = AD \cdot AB$

Tam giác AHC vuông tại H , đường cao AE . Ta có $AH^2 = AE \cdot AC$

$$\text{Ta có } AD \cdot AB = AE \cdot AC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

Xét tam giác ADE và tam giác ACB có $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$, $\widehat{BAC} = \widehat{DAE} = 90^\circ$ (góc chung)

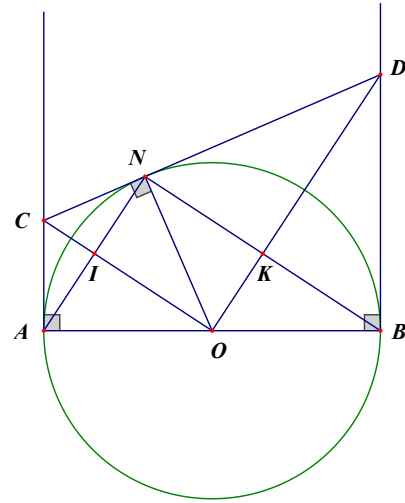
$$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACB \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACB} \text{ mà } \widehat{ADE} + \widehat{EDB} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{ADE} + \widehat{ECB} = 180^\circ$$

Tứ giác $BDEC$ có $\widehat{ADE} + \widehat{ECB} = 180^\circ$ nên tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Bài 5:

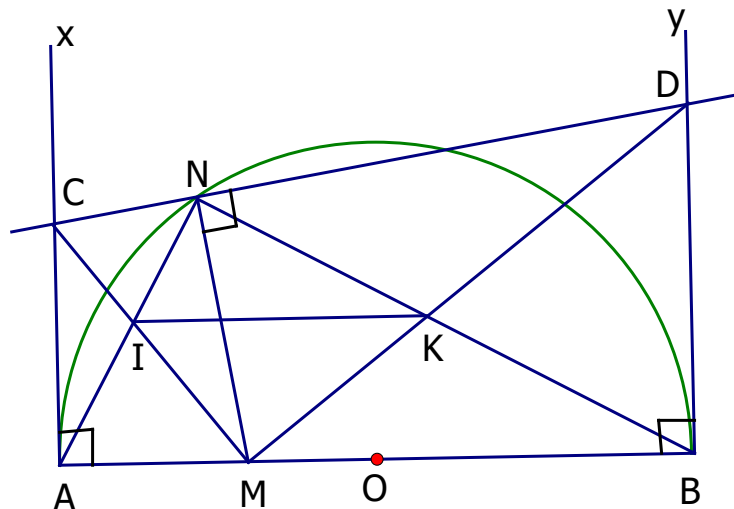
Từ bài toán quen thuộc cho (O, R) . Trên nửa mặt phẳng bờ AB kẻ tiếp tuyến Ax và By với (O) , lấy N thuộc (O) , kẻ tiếp tuyến với (O) tại N cắt Ax tại C , cắt By tại D . Gọi I và K lần lượt là giao điểm của AN và CO , MN và OD . Chứng minh $NIOK$ là hình chữ nhật.

Ta có bài toán sau:



Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA , điểm N thuộc nửa đường tròn (O) . Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By . Đường thẳng qua N và vuông góc với NM cắt Ax , By thứ tự tại C và D .

- Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle CMD$ từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.



a) Ta có tứ giác $ACNM$ có: $\widehat{MNC} = 90^\circ$ (gt) $\widehat{MAC} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow \widehat{MNC} + \widehat{MAC} = 180^\circ$ $ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC . Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MD

b) $\triangle ANB$ và $\triangle CMD$ có:

$$\widehat{ABN} = \widehat{CDM} \text{ (do tứ giác } BDNM \text{ nội tiếp)}$$

$$\widehat{BAN} = \widehat{DCM} \text{ (do tứ giác } ACNM \text{ nội tiếp) nên } \triangle ANB \sim \triangle CMD \text{ (g.g)}$$

c) $\triangle ANB \sim \triangle CMD \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (do $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Suy ra $\widehat{IMK} = \widehat{INK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{INK} + \widehat{IMK} = 180^\circ$. Vậy $IMKN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

Bài 6: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) , M là điểm chính giữa của cung AB . Nối M với D , M với C cắt AB lần lượt ở E và P . Chứng minh tứ giác $PEDC$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } \widehat{MEP} = \frac{sd(\widehat{AD} + \widehat{MB})}{2} \text{ (góc có đỉnh nằm bên trong (O))}$$

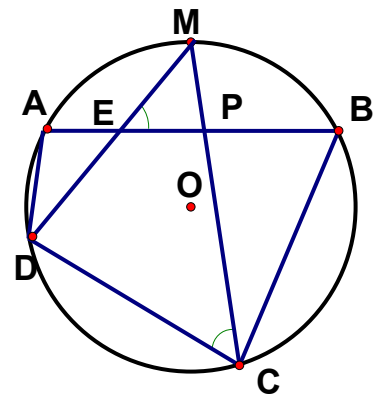
$$\text{Mà } \widehat{DCP} = \frac{sd \widehat{DM}}{2} \text{ (góc nội tiếp)}$$

$$\text{Hay } \Rightarrow \widehat{DCP} = \frac{sd(\widehat{AD} + \widehat{MA})}{2}$$

$$\text{Lại có : } \widehat{AM} = \widehat{MB}$$

$$\text{Nên : } \widehat{MEP} = \widehat{DCP}$$

Nghĩa là: Tứ giác $PEDC$ có góc ngoài tại đỉnh E bằng góc trong tại đỉnh C . Vậy tứ giác $PEDC$ nội tiếp đường tròn.



Bài 7: Định lý Ptoleme.

Ta có : Tứ giác ABCD nội tiếp (O) Ta phải chứng minh: $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

Hướng dẫn giải

Lấy $E \in BD$ sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$

$\Rightarrow \triangle DAE \sim \triangle CAB$ (g. g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DE \quad (1)$$

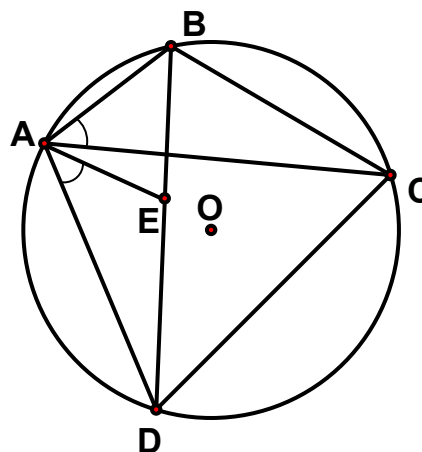
Tương tự: $\triangle BAE \sim \triangle CAD$ (g. g)

$$\Rightarrow \frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow BE \cdot AC = CD \cdot AB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot DE + EB \cdot AC$$

$$\Rightarrow AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot DB \quad (\text{đpcm})$$



📁. CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CÙNG THUỘC MỘT ĐƯỜNG TRÒN

📁. Lý thuyết

Phương pháp: - Chỉ ra khoảng cách từ một điểm tới tất cả các điểm đều bằng nhau.

- ✧ Lợi dụng các tam giác vuông có cạnh huyền chung
- ✧ Chứng minh các đỉnh của một đa giác cùng nằm trên một đường tròn.
- ✧ Sử dụng cung chứa góc.
- ✧ Chứng minh các tứ giác nội tiếp.

📁. Bài tập.

Bài 1: Cho hình thoi ABCD có góc A bằng 60° , $AB = a$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn đó theo a.

Hướng dẫn giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD ta có

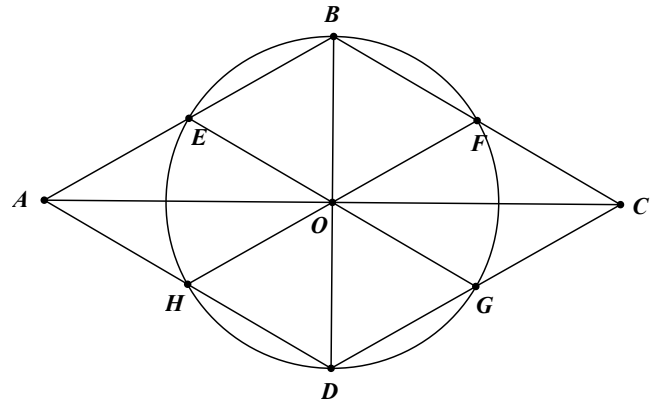
$$OB = OD$$

Do ABCD là hình thoi nên ta có $AC \perp BD$.

Ta có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\widehat{BAO} = 30^\circ$ (tính chất đường chéo hình thoi)

Tam giác ABO vuông tại O có

$$OB = AB \sin \widehat{BAO} \Rightarrow OB = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$$



Xét tam giác vuông ABO có $\widehat{ABO} + \widehat{BAO} = 90^\circ$ (hai góc phụ nhau) mà $\widehat{BAO} = 30^\circ$ suy ra $\widehat{ABO} = 60^\circ$ hay $\widehat{EBO} = 60^\circ$

$OE = \frac{1}{2} AB = EB = EA$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông và E là trung điểm của AB.

Tam giác EOB là tam giác cân tại E có $\widehat{EBO} = 60^\circ$ nên tam giác EBO là tam giác đều

$$\Rightarrow OE = OB$$

Chứng minh tương tự với các tam giác vuông BOC, COD và DOA ta có :

$$OE = OB = OF = OC = OG = OD = OH$$

Vậy 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn tâm O. Bán kính $OB = \frac{a}{2}$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AC lấy điểm D. Hình chiếu của D lên BC là E, điểm đối xứng của E qua BD là F. Chứng minh 5 điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

Hướng dẫn giải

$$\text{Do } DE \perp BC \Rightarrow \widehat{DBE} = 90^\circ$$

Vì E và F đối xứng với nhau qua BD nên BD là đường trung trực của đoạn thẳng EF

$$\Rightarrow BF = BE; DF = DE$$

$$\triangle BFD = \triangle BED \text{ (c-c-c)} \Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BED} = 90^\circ$$

Cách 1.

Gọi O là trung điểm của BD.

Xét tam giác vuông ABD vuông tại A có AO là trung tuyến nên

$$AO = \frac{1}{2}BD = OB = OD \quad (1)$$

Tam giác vuông BDE vuông tại E có OE là trung tuyến nên $EO = \frac{1}{2}BD = OB = OD \quad (2)$

Tam giác vuông BFD vuông tại F có OF là trung tuyến nên $FO = \frac{1}{2}BD = OB = OD \quad (3)$

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow OA = OB = OD = OE = OF$. Vậy 5 điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn tâm O với O là trung điểm của BC.

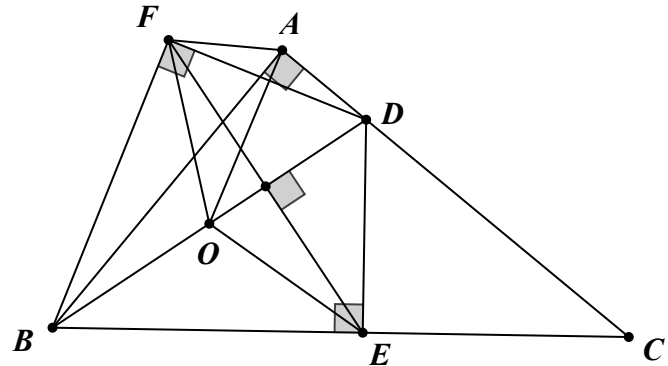
Cách 2:

① Tứ giác BADE có $\widehat{BAD} + \widehat{DEB} = 180^\circ$ nên tứ giác BADE là tứ giác nội tiếp.

Tâm của đường tròn này là trung điểm của BD

② Tứ giác BFDE có $\widehat{BFD} + \widehat{DEB} = 180^\circ$ nên tứ giác BFDE là tứ giác nội tiếp.

Tâm của đường tròn này là trung điểm của BD



Từ ① và ② suy ra 5 điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn tâm O với O là trung điểm của BC.

Bài 3: Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến AB, AC. Cát tuyến ADE không đi qua tâm O (D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của DE.

Chứng minh 5 điểm O, B, A, C, I cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải

Do AC và AB là các tiếp tuyến nên

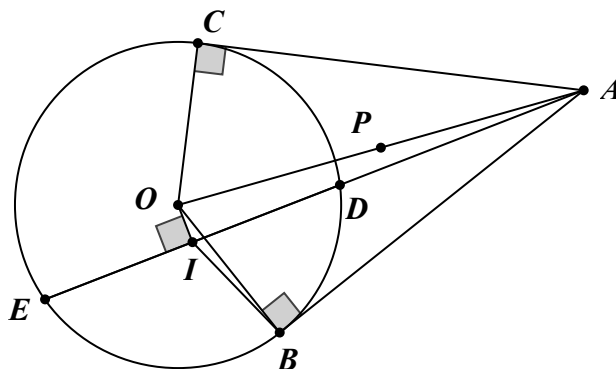
$$\widehat{OCA} = \widehat{OBA} = 90^\circ$$

Do I là trung điểm của ED nên $OI \perp ED$

(đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây cung)

$$\text{hay } \widehat{OID} = \widehat{OIA} = 90^\circ$$

Gọi P là trung điểm của OA



Xét tam giác vuông OCA có CP là đường trung tuyến nên $CP = \frac{1}{2}AO = OP = PA$

Xét tam giác vuông OBA có BP là đường trung tuyến nên $BP = \frac{1}{2}AO = OP = PA$

Xét tam giác vuông OIA có IP là đường trung tuyến nên $IP = \frac{1}{2}AO = OP = PA$

Vậy $OP = PA = PC = PI = PB$ nên 5 điểm O, B, A, C, I cùng thuộc một đường tròn.

BÀI TẬP THAM KHẢO (tự luyện)

Dạng 1: Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới góc bằng nhau

Bài 1: Cho đường tròn đường kính AB, C là một điểm trên đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm D, gọi M là một điểm chính giữa cung BD. Đường thẳng MC cắt đường tròn tại E, đường thẳng DE cắt AM tại K. Đường thẳng đi qua C và song song với AD cắt DE tại F. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác AKCE nội tiếp một đường tròn
- b) $CK \perp AD$
- c) $CF = CB$

Bài 2: Cho đường tròn tâm O có đường kính BC. Gọi A là một điểm thuộc cung BC ($\widehat{AB} > \widehat{AC}$); D là điểm thuộc bán kính OC. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E, cắt tia BA tại F.

- a) Chứng minh tứ giác ADCF là tứ giác nội tiếp
- b) Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: $\widehat{AME} = 2\widehat{ACB}$
- c) Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- d) Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng BC, BA và cung nhỏ AC của đường tròn (O) biết $BC = 8\text{cm}$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$

Bài 3: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC, AD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $\widehat{EAF} = 45^\circ$. Biết BD cắt AE, AF theo thứ tự tại G, H. Chứng minh rằng

- a) ADFG; GHFE là các tứ giác nội tiếp
- b) Tam giác CGH và tứ giác GHFE có diện tích bằng nhau

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

- a) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 2\widehat{BDC}$
- b) Gọi M là điểm trên cung AC, trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho $ME = MC$. Chứng minh rằng bốn điểm B; D; E; C thuộc một đường tròn

Bài 5: Trên đường tròn (O) lấy hai điểm B và D. Gọi A là điểm chính giữa cung lớn BD. Các tia AD, AB cắt tiếp tuyến Bx và Dy của đường tròn lần lượt tại N và M. Chứng minh.

- a) Tứ giác BDNM nội tiếp đường tròn

- b) $MN \parallel BD$
- c) $MA.MB = MD^2$

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, với $AC > AB$. Trên AC lấy điểm M, vẽ đường tròn tâm O đường kính MC. Tia BM cắt đường tròn (O) tại D. Đường thẳng qua A và D cắt đường tròn (O) tại S.

- a) Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$
- c) Chứng minh AC là tia phân giác của góc SCB
- d) Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
- e) Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE
- f) Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE
- k) Biết bán kính đường tròn (O) là R và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính độ dài cung MS.

Bài 7: Cho đường tròn (O;R) có AB là đường kính cố định, còn CD là đường kính thay đổi. Gọi (d) là tiếp tuyến của đường tròn tại B; AC, AD lần lượt cắt (d) tại P, Q.

- a) Chứng minh tứ giác CPQD nội tiếp đường tròn
- b) Chứng minh đường trung tuyến AI của tam giác AQP vuông góc với DC
- c) Khi CD thay đổi thì tâm E của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPD chuyển động trên đường nào ?

Dạng 2: Tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180°

Bài 1: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại F; E. Gọi H là giao điểm của BE, CF; D là giao điểm của AH với BC.

1. Chứng minh rằng:

- a) Các tứ giác AEHF; AEDB nội tiếp đường tròn
- b) $AF.AB = AE.AC$

2. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $AD + BE + CF = 9r$ thì tam giác ABC đều.

Bài 2: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AC > BC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại A và B, các tiếp tuyến này cắt nhau tại M. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên MC.

- Chứng minh rằng: MAOH là tứ giác nội tiếp
- Tia HM là phân giác của góc AHB
- Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt các đường thẳng MA, MB lần lượt tại E và F. Nối HE cắt AC tại F, nối HF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng $PQ \parallel EF$.

Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- Chứng minh rằng các tứ giác BFEC, BFHD nội tiếp
- Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF
- AD cắt cung BC tại M. Chứng minh rằng tam giác BHM cân.

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điểm M thuộc nửa đường tròn, điểm C thuộc đoạn OA. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa M vẽ tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua M và vuông góc với MC cắt Ax, By tại P và Q. AM cắt CP tại E; BM cắt CQ tại F.

- Chứng minh rằng tứ giác APMC nội tiếp.
- Chứng minh rằng $\widehat{PCQ} = 1^\circ$
- Chứng minh rằng $EF \parallel AB$

Bài 5: Cho nửa đường tròn đường kính AB. C là một điểm thuộc nửa đường tròn. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên đoạn AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$; DE cắt BC tại H; AH cắt nửa đường tròn tại K. Chứng minh:

- $\widehat{DAH} = \widehat{BAH}$
- $OK \perp BC$
- Tứ giác ACHE nội tiếp
- B, K, D thẳng hàng

Dạng 3: Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện

Bài 1: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Kẻ tiếp tuyến Bx với nửa đường tròn. Gọi C, D là hai điểm di động trên đường tròn. Các tia AC, AD cắt Bx lần lượt tại E và F (F nằm giữa B và E).

- a) Chứng minh rằng $\triangle ABF \sim \triangle BDF$
- b) Chứng minh tứ giác CEFD nội tiếp được
- c) Khi C, D di động trên nửa đường tròn. Chứng minh $AC.AE = AD.AF$ có giá trị không đổi.
- d) Cho $\widehat{BOD} = 30^\circ$, $\widehat{DOC} = 60^\circ$. Hãy tính diện tích của tứ giác ACDB.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, vẽ nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

- a) Chứng minh tứ giác AFHE là hình chữ nhật
- b) Chứng minh BEFC là tứ giác nội tiếp
- c) Chứng minh: $AE.AB = AF.AC$
- d) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F, G. Chứng minh:

- a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
- b) Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp được
- c) $AC \parallel FG$.
- d) Các đường thẳng AC, DE, BF đồng quy.

Dạng 4: Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm

Bài 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A của hai đường tròn (O'); (O) cắt đường tròn (O); (O') lần lượt tại C và D. Trung trực của AC và trung trực của AD cắt nhau tại S.

- a) Tứ giác AOSO' là tứ giác gì? Vì sao? Chứng $SB \perp AB$.
- b) Lấy E đối xứng với A qua B. Chứng minh tứ giác ACDE nội tiếp

Dạng 5: Chứng minh 5 điểm nằm trên một đường tròn

Bài 1: Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB; AC và cát tuyến AMN. Gọi I là trung điểm của MN.

- a) Chứng minh $AB^2 = AM.AN$.
- b) Chứng minh rằng 5 điểm A, B, I, C, O cùng nằm trên một đường tròn
- c) Gọi K là giao điểm của BC và AI. Chứng minh rằng: $\frac{IB}{IC} = \frac{KB}{KC}$

Bài 2: Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng xy theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) đi qua hai điểm B và C. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM, AN (M, N thuộc đường tròn). Gọi E là hình chiếu của O trên xy; AO cắt MN tại F.

- Chứng minh $AM^2 = AB \cdot AC$
- Chứng minh 5 điểm A, N, O, E, M cùng nằm trên một đường tròn
- Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh rằng $IN \parallel AB$
- Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Bài 3: Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AN, AM. Trên nửa mặt phẳng bờ AN không chứa M lấy điểm B sao cho $\widehat{ABO} = 90^\circ$. Đường thẳng BO cắt AN tại D, cắt đường thẳng AM tại C. Đường thẳng BM cắt AN tại K. Gọi I là trung điểm của AC. BI cắt AN tại E. Chứng minh:

- Năm điểm A, B, N, O, M cùng nằm trên một đường tròn.
- BD là phân giác của tam giác BKN.
- $DN \cdot AK = AN \cdot DK$
- Tam giác BEN cân

Bài 4: Cho hình vuông ABCD và một điểm M trên cạnh BC. Vẽ hình vuông AMPQ sao cho P và Q thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AM không chứa đỉnh B. Chứng minh rằng:

- Ba điểm Q, C, D thẳng hàng
- Năm điểm A, M, C, P, Q cùng thuộc một đường tròn
- điểm P chạy trên một đoạn thẳng cố định khi M chuyển động trên cạnh BC

Bài 5: Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B và C là tiếp điểm) và cát tuyến AMN (M nằm giữa A và N) với đường tròn. Gọi E là hình chiếu của O trên MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

- Chứng minh rằng năm điểm A, O, E, C, B cùng nằm trên một đường tròn
- Chứng minh $\widehat{AEC} = \widehat{BIC}$
- Chứng minh $BI \parallel MN$
- Xác định vị trí của cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.