

PHAN NHẬT LINH

CHINH PHỤC VDC HÌNH HỌC 2023

(Biên soạn mới nhất dành cho học sinh luyện thi THPT năm 2023)

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy cô và bạn đọc thân mến!

Cuốn sách “**Chinh phục Vận dụng – Vận dụng cao Hình học 2023**” này được nhóm tác giả biên soạn với mục đích giúp các em học sinh khá giỏi trên toàn quốc chinh phục được các câu khó trong đề thi của Bộ giáo dục trong các năm gần đây. Trong mỗi cuốn sách, chúng tôi trình bày một cách rõ ràng và khoa học, tạo sự thuận lợi nhất cho các em học tập và tham khảo. Tất cả các bài tập trong sách chúng tôi đều tóm tắt lý thuyết và tiến hành giải chi tiết 100% để các em tiện lợi cho việc ôn tập, so sánh đáp án và tra cứu thông tin.

Để có thể biên soạn đầy đủ và hoàn thiện bộ sách này, nhóm tác giả có sưu tầm, tham khảo một số bài toán trích từ đề thi của các Sở, trường Chuyên trên các nước và một số thầy cô trên toàn quốc. Chân thành cảm ơn quý thầy cô đã sáng tạo ra các bài toán hay và các phương pháp giải toán hiệu quả nhất. Mặc dù nhóm tác giả đã tiến hành biên soạn và phản biện kỹ lưỡng nhất nhưng vẫn không tránh khỏi sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến phản hồi và đóng góp từ quý thầy cô, các em học sinh và bạn đọc để cuốn sách trở nên hoàn thiện hơn. Mọi đóng góp vui lòng liên hệ:

- **Tác giả:** Phan Nhật Linh
- **Số điện thoại/Zalo:** 0817.098.716
- **Gmail:** linh.phannhat241289@gmail.com
- **Facebook:** fb.com/nhatlinh.phan.1401/

Cuối cùng, nhóm tác giả xin gửi lời chúc sức khỏe đến quý thầy cô, các em học sinh và quý bạn đọc. Chúc quý vị có thể khai thác hiệu quả nhất các kiến thức khi cầm trên tay cuốn sách này!

Trân trọng./

Phan Nhật Linh

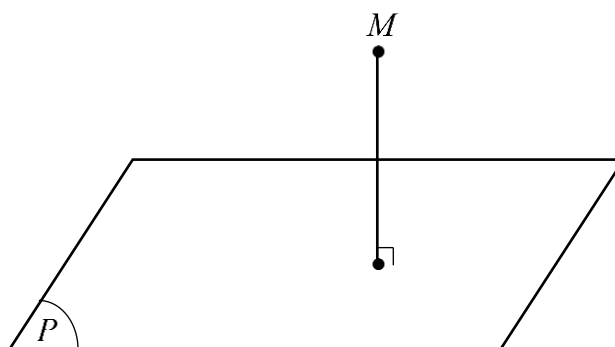
MỤC LỤC

CHƯƠNG 1: KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC TRONG KHÔNG GIAN	Trang
Chủ đề 01. Khoảng cách trong không gian.....	1
Chủ đề 02. Góc trong không gian.....	58
CHƯƠNG 2: KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN	
Chủ đề 03. Thể tích khối chóp.....	112
Chủ đề 04. Thể tích khối lăng trụ.....	159
Chủ đề 05. Tỷ lệ thể tích khối đa diện.....	190
Chủ đề 06. Cực trị hình học không gian.....	241
CHƯƠNG 3: KHỐI TRÒN XOAY VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY	
Chủ đề 07. Khối nón - trụ - cầu.....	290
Chủ đề 08. Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện.....	322
CHƯƠNG 4: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	
Chủ đề 09. Phương trình mặt phẳng.....	363
Chủ đề 10. Phương trình đường thẳng.....	387
Chủ đề 11. Phương trình mặt cầu.....	426
Chủ đề 12. Ứng dụng phương pháp tọa độ trong không gian.....	477

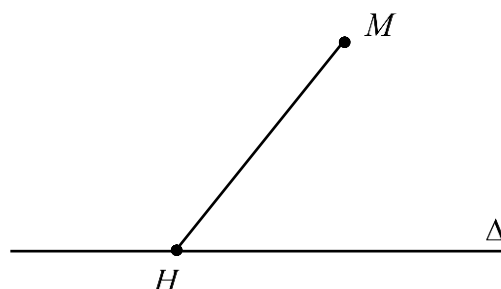
1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, từ một điểm đến một đường thẳng

- Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) (hoặc đến đường thẳng Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H , trong đó H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (P) (hoặc đến đường thẳng Δ).

Kí hiệu khoảng cách từ M đến (P) là $d(M; (P))$



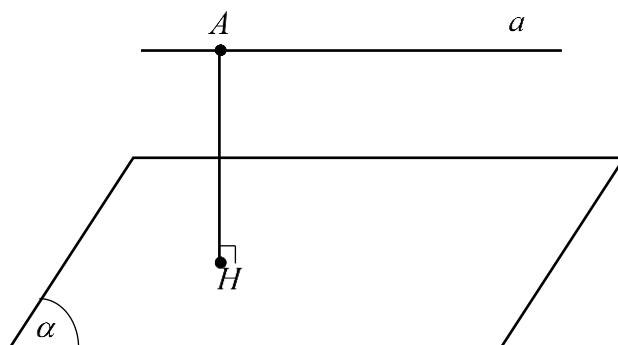
Kí hiệu khoảng cách từ M đến (P) là $d(M; \Delta)$

**2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song**

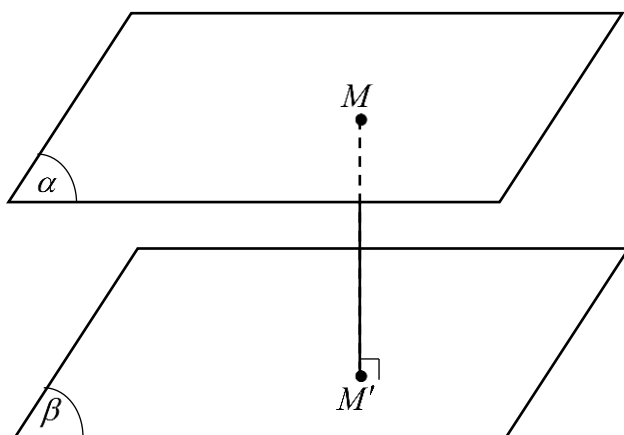
- Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì của a tới mặt phẳng (α) , cụ thể: $d(a; (\alpha)) = d(A; (\alpha))$ với A thuộc a

Ta có: $d(a; (\alpha)) = d(A; (\alpha)) = AH$

Với A thuộc a và H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (α) .

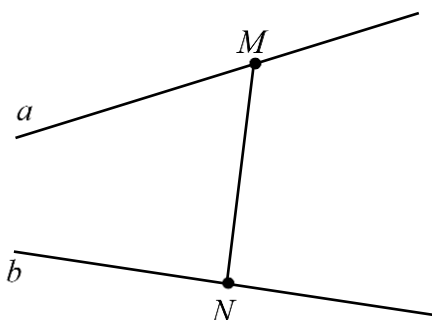


- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này tới mặt phẳng kia, cụ thể: $d((\alpha);(\beta)) = d(M;(\beta))$ với M thuộc mặt phẳng (α)



3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Đường thẳng MN cắt và vuông góc với cả a và b gọi là đường vuông góc chung của a và b



- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau đó, cụ thể: $d(a;b) = MN$.

B // **VÍ DỤ MINH HỌA**

CÂU 1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SC ; P là điểm trên cạnh SD sao cho $SP = 2PD$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (MNP) .

A. $\frac{a\sqrt{34}}{34}$.

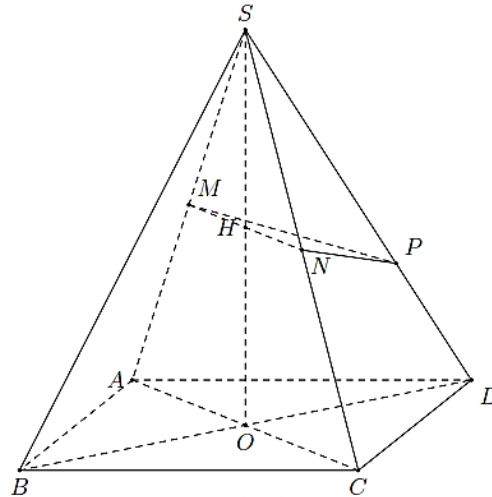
B. $\frac{a\sqrt{17}}{34}$.

C. $\frac{2a\sqrt{17}}{41}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{16}$.

LỜI GIẢI

Chọn A



$$\text{Ta có } V_{D.MNP} = \frac{1}{2} V_{S.MNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SP}{SD} V_{S.ACD} = \frac{1}{12} V_{S.ACD}.$$

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$$\text{Suy ra } OA = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } V_{S.ACD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{D.MNP} = \frac{a^3\sqrt{2}}{144}.$$

$$\text{Do } MN \text{ là đường trung bình của tam giác } SAC \text{ nên } MN = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SAD \text{ và } SCD \text{ đều cạnh } a \text{ nên } PM^2 = PN^2 = SM^2 + SP^2 - 2SM \cdot SP \cdot \cos 60^\circ = \frac{13a^2}{36}.$$

Do tam giác MNP cân tại P nên gọi H là trung điểm MN thì $PH \perp MN$.

$$\text{Suy ra } PH = \sqrt{PM^2 - \frac{MN^2}{4}} = \sqrt{\frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{34}}{12}.$$

$$\text{Vậy } d(D, (MNP)) = \frac{3V_{D.MNP}}{S_{MNP}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{144}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{34}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{34}}{34}.$$

CÂU 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng

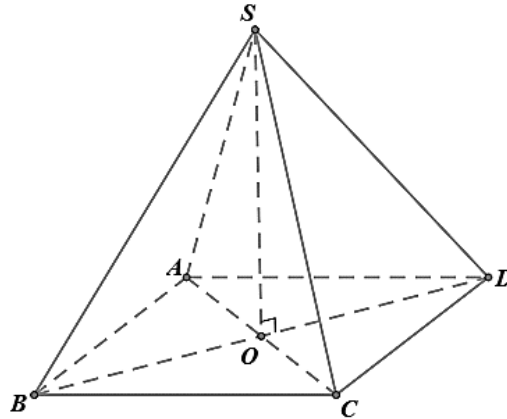
A. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

C. $a\sqrt{14}$.

D. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

LỜI GIẢI



Chọn D

Gọi $O = AC \cap DB$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông.

Ta có: $\frac{d(A, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$.

Tam giác $\triangle ACD$ vuông tại D có: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OD = OC = a\sqrt{2}$.

Tam giác $\triangle SCO$ vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = a\sqrt{7}$.

Do SO, OC, OD đôi một vuông góc nên gọi $h = d(O, (SCD))$ thì

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{8}{7a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a}{3}$.

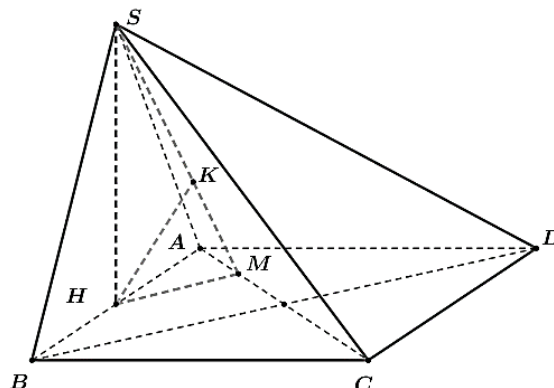
B. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a}{6}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Tam giác SAB vuông cân tại S , H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Từ H dựng $HM \perp AC$ tại M , từ H dựng $HK \perp SM$ tại K . Ta có

$$\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp SH \text{ (} SH \perp (ABCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHM) \Rightarrow AC \perp HK.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC) \text{ tại } K \text{ nên } d(H, (SAC)) = HK.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \\ HM = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \end{cases}. \text{ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông } SHM. \text{ Ta có}$$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \text{ Vậy } d(H, (SAC)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

CÂU 4. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

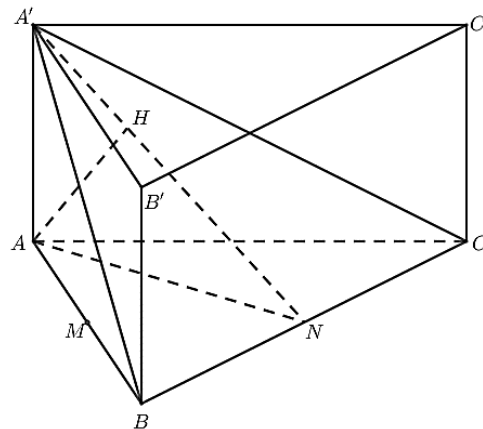
B. $3a$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{3a}{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn A



Gọi N là trung điểm của BC .

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $BC \perp AN, AA'$ và $AN = 2a\sqrt{3}$. Suy ra $BC \perp (A'AN)$. Từ đó ta có: $((A'BC), (ABC)) = A'NA = 30^\circ$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'N$, do $BC \perp (A'AN)$ nên: $AH \perp AN, BC \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH$.

Xét tam giác AHN vuông tại H có: $AH = AN \sin A'NA = a\sqrt{3}$. Suy ra $d(A, (A'BC)) = a\sqrt{3}$.

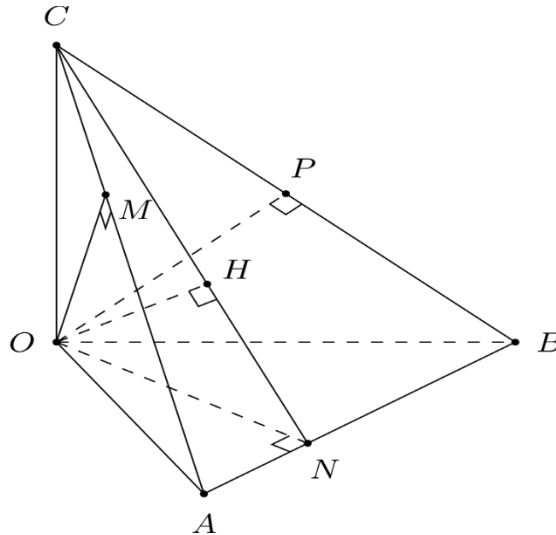
Mặt khác, M là trung điểm của cạnh AB nên $d(M, (A'BC)) = \frac{1}{2}d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 5. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a

- A. $2a$. B. $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. C. $\frac{11a}{6}$. D. $\frac{2a\sqrt{33}}{11}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Kẻ $OM \perp AC$ ($M \in AC$), $ON \perp AB$ ($N \in AB$), $OP \perp BC$ ($P \in BC$).

Khi đó ta có $OP = a$, $OM = a\sqrt{2}$, $ON = a\sqrt{3}$.

Trong (OCN) kẻ $OH \perp CN$ ($H \in CN$) ta có:

$$\begin{cases} AB \perp ON \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCN) \Rightarrow AB \perp OH$$

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp CN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Lại có:

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2}; \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}; \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} = 2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{11}{12a^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{11}{12a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$$

Vậy $d(O, (ABC)) = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$.

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° . $AB = 2CD = 2a$, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc 45° . Hình chiếu vuông góc của S lên đáy trùng với giao điểm của AC và BD . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

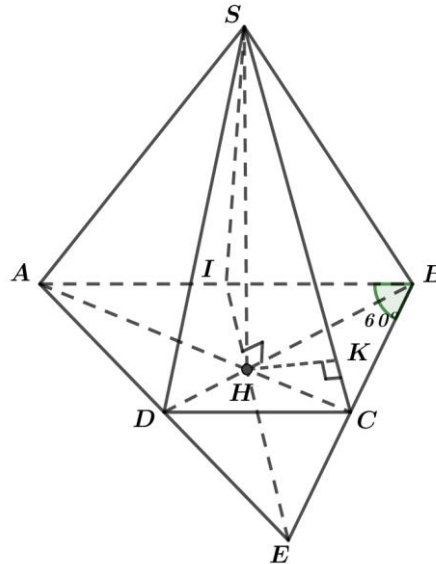
B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E , lấy I là trung điểm AB . Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên đáy, kẻ HK vuông góc với SC tại K .

Xét tam giác ABE có $ABE = BAE = 60^\circ$ nên ABE là tam giác đều và H là trực tâm

$$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BC \\ HI \perp AB \\ HI = HC = \frac{1}{3}EI = \frac{1}{3}2a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Delta SHA = \Delta SHB \Rightarrow SA = SB \Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = SIH = 45^\circ \Rightarrow SH = IH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK, \text{ ta lại có } \begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$$

$$\text{Suy ra khoảng cách từ } H \text{ đến } (SBC) \text{ là } HK = \frac{HS \cdot HC}{\sqrt{HS^2 + HC^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Tam giác } HAB \text{ đồng dạng với tam giác } HCD \text{ và } AB = 2CD \text{ nên } \frac{AH}{HC} = \frac{AB}{CD} = 2$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ } A \text{ đến } (SBC) \text{ bằng 3 lần khoảng cách từ } H \text{ đến } (SBC) = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Chủ đề 01: Khoảng cách trong không gian

CÂU 7. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 45° , M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

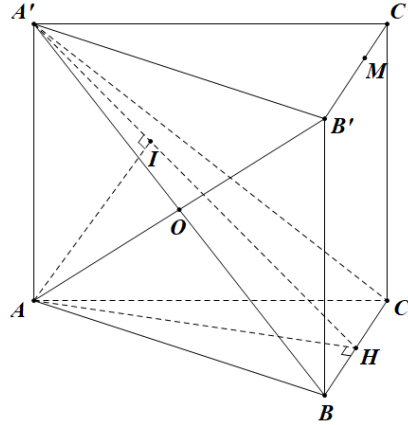
B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác đều.

Ta có $B'C' \parallel (A'BC)$ nên $d(M, (A'BC)) = d(B', (A'BC))$.

Mà $AB' \cap (A'BC) = O$ với O là trung điểm AB' nên $d(B', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC , I là hình chiếu của A lên $A'H$, ta chứng minh được $AI \perp (A'BC)$, suy ra $d(A, (A'BC)) = AI$.

Mà $((A'BC), (ABC)) = A'HA = 45^\circ$ nên tam giác $A'AH$ vuông cân tại A , do đó

$$A'H = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Mặt khác, AI là đường cao của tam giác $A'AH$ nên $AI = \frac{A'H}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B ; $AB = BC = a$; $AD = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của cạnh AD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{11}$.

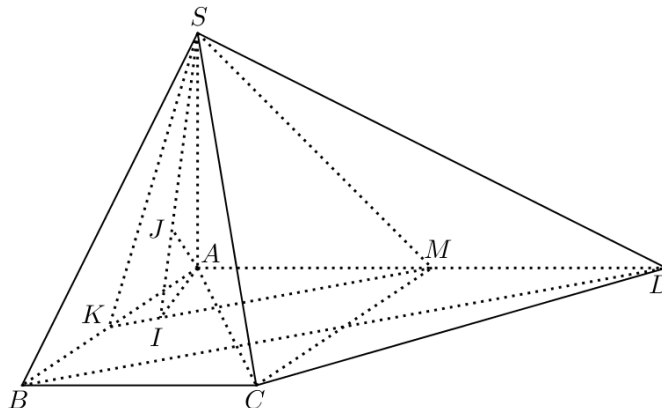
B. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

C. $\frac{a\sqrt{11}}{22}$.

D. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Ta có $(SC, (ABCD)) = SCA = 45^\circ \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

Gọi K là trung điểm của AB , khi đó AB song song với (SMK) .

Do đó $d(BD, SM) = d(BD, (SMK)) = d(B, (SMK)) = d(A, (SMK))$.

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MK và SI .

Khi đó $MK \perp AI, MK \perp SA \Rightarrow MK \perp AJ$. Do $AJ \perp MK$ và $AJ \perp SI$ nên $AJ \perp (SMK)$ hay $d(A, (AMK)) = AJ$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow AJ = \frac{a\sqrt{22}}{11}$$

CÂU 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC và diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và AB' .

A. $2\sqrt{2}a$.

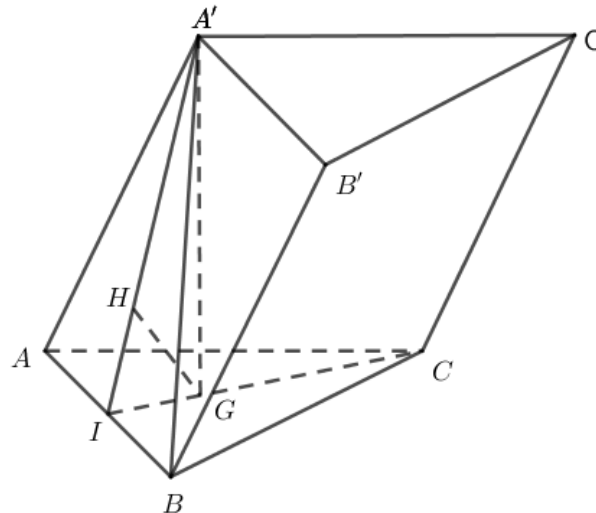
B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Chọn mặt phẳng $(AA'B'A')$ chứa AB' và song song với CC' .

Khi đó $d(AB', CC') = d(CC', (AA'B'B)) = d(C, (AA'B'B))$.

Gọi I là trung điểm của AB . Vì tam giác ABC đều nên $CI \perp AB \Rightarrow GI \perp AB$.

$$\text{Vì } \begin{cases} A'G \perp AB \\ GI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'GI) \Rightarrow AB \perp A'I. \quad GI = \frac{1}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vì diện tích tam giác } A'AB \text{ bằng } \frac{a^2}{4} \text{ nên } \frac{1}{2}A'I \cdot AB = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow A'I = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Suy ra } A'G = \sqrt{A'I^2 - GI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong mặt phẳng $(A'GI)$ kẻ $GH \perp A'I$ ($H \in A'I$).

$$\text{Khi đó } \begin{cases} GH \perp A'I \\ GH \perp AB \quad (AB \perp (A'GI)) \end{cases} \text{ suy ra } GH \perp (AA'B'B) \Rightarrow d(G, (AA'B'B)) = GH.$$

Xét tam giác $\Delta A'GI$ vuông tại G có

$$GH.A'I = A'G.GI \Rightarrow d(G, (AA'B'B)) = GH = \frac{A'G.GI}{A'I} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Ta lại có } \frac{d(C, (AA'B'B))}{d(G, (AA'B'B))} = \frac{CI}{GI} = 3 \Rightarrow d(C, (AA'B'B)) = 3.d(G, (AA'B'B)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB', CC') = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

CÂU 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

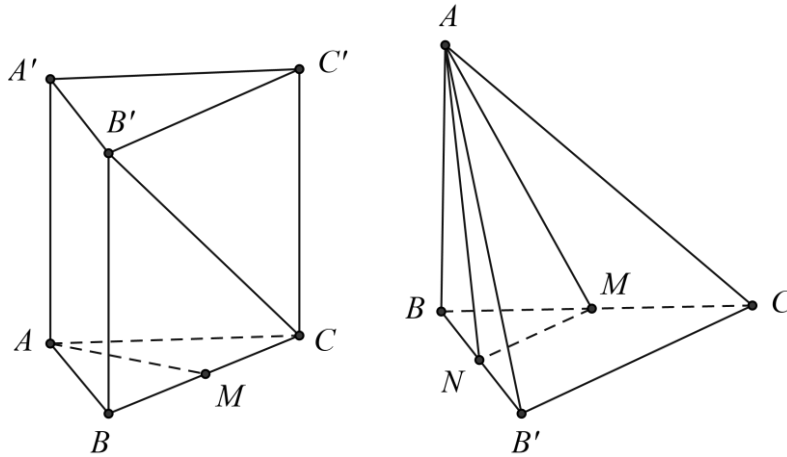
B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Tam giác ABC vuông và $AB = BC = a$ nên $\triangle ABC$ chỉ có thể vuông tại B .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCB').$$

$$\text{Kẻ } MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$$

$$\Rightarrow d = d(B'C, MN) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN)) = d(B, (AMN)).$$

Vì tứ diện $BAMN$ là tứ diện vuông nên

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bằng a , $SA = a$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AH và SC bằng

A. $a\sqrt{19}$.

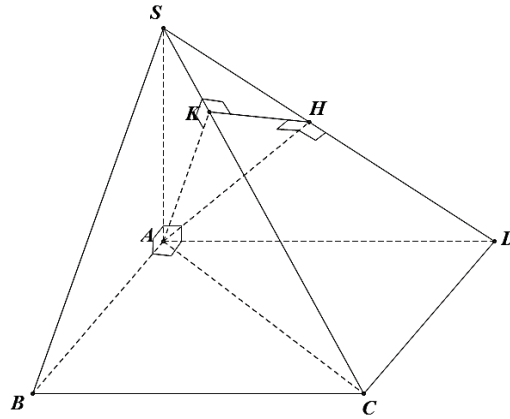
B. $\frac{a\sqrt{19}}{10}$.

C. $\frac{a\sqrt{19}}{19}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Theo đề ra mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Trong mặt phẳng (SAC) từ A kẻ đường thẳng vuông góc với SC tại K .

Ta có: $AH \perp SC, AK \perp SC \Rightarrow SC \perp HK$.

Lại có: $CD \perp AD, SA \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH; CD \perp SD$ mà $AH \perp SD$

$\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \perp HK$ hay $d(AH; SC) = HK$.

Xét tam giác ABC vuông tại B có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAD vuông cân tại A có: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ và H là trung điểm của $SD \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\triangle SDC \sim \triangle SKH \Rightarrow \frac{SC}{SH} = \frac{DC}{HK} \Leftrightarrow HK = \frac{SH \cdot DC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow d(SC; AH) = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

CÂU 12. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

A. $\frac{a}{2}$.

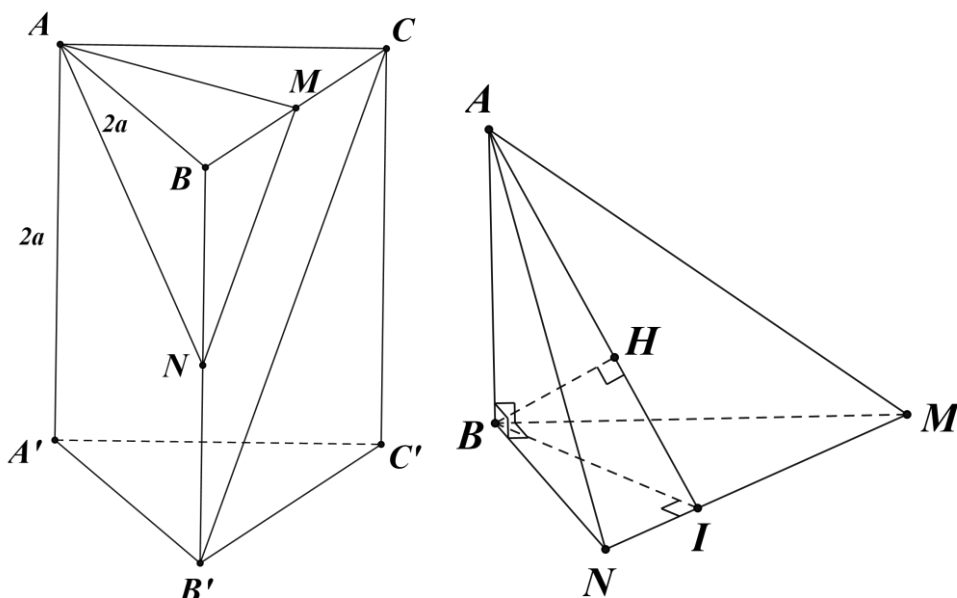
B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

D. $a\sqrt{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Chủ đề 01: Khoảng cách trong không gian

Gọi N là trung điểm $BB' \Rightarrow MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$.

Khi đó $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Ta có $BC \cap (AMN) = M$ và $MB = MC$ nên $d(C, (ABM)) = d(B, (ABM))$.

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ABM) . Tứ diện $BAMN$ có BA, BM, BN đôi một vuông góc

nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$

$$AB = 2a = BC.$$

$$BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}AA' = \frac{2a}{2} = a.$$

$$BM = \frac{1}{2}BC = a. \text{ Suy ra } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{2a}{3}.$$

C **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

- Câu 1:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác $\triangle ABC$ đều cạnh a , $AA' = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của CC' . Tính khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BM)$.
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.
- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 8. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD . Biết góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° và $SA = SB = SI$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng
- A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. B. $4\sqrt{2}$. C. $\frac{25\sqrt{2}}{16}$. D. $8\sqrt{2}$.
- Câu 3:** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông tại A , có $AB = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $AA' = 4a$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BB', CC' . Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(A'BK)$.
- A. $\frac{2a\sqrt{93}}{31}$. B. $\frac{4a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{4a\sqrt{93}}{31}$. D. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $BCD = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng
- A. $\sqrt{\frac{3}{7}}a$. B. $\sqrt{\frac{4}{5}}a$. C. $\sqrt{\frac{2}{3}}a$. D. $\sqrt{\frac{3}{5}}a$.
- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $SA = \sqrt{6}a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng
- A. $\frac{6\sqrt{7}a}{7}$. B. $\frac{\sqrt{7}a}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. D. $\sqrt{7}a$.
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAO cân tại S , mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .
- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a}{2}$.
- Câu 7:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60° . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng
- A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a}{8}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{3a}{8}$.
- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi có $\angle ABC = 60^\circ$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh

Chủ đề 01: Khoảng cách trong không gian

AB, SA, SD và G là trọng tâm tam giác SBC . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (HMN)

biết khối chóp $S.ABCD$ có thể tích $V = \frac{a^3}{4}$

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{15}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{30}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{20}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{10}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, hình chiếu vuông góc của S lên đáy là trung điểm cạnh AB , $ASB = 90^\circ$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $\frac{2\sqrt{6}a}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$. Các cạnh bên có độ dài bằng nhau và bằng 2. Cạnh bên SA tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{33}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. 1.

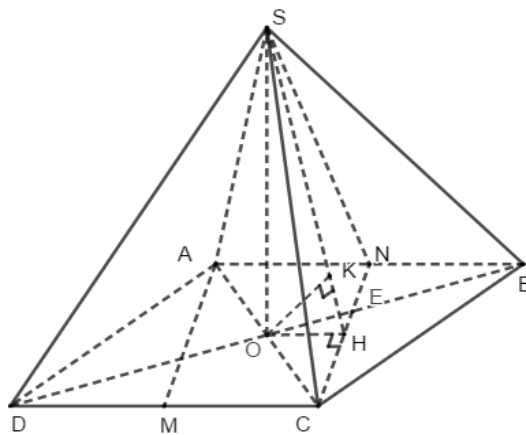
Câu 11: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC , d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) . Khi đó $d = d_1 + d_2$ có giá trị là.

- A. $\frac{8a\sqrt{2}}{11}$. B. $\frac{8a\sqrt{2}}{33}$. C. $\frac{8a\sqrt{22}}{33}$. D. $\frac{2a\sqrt{2}}{11}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang cân, AD là cạnh đáy ngắn; $AD = a, bc = 2a, ABC = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) .

- A. $\frac{a}{\sqrt{37}}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{37}}$. C. $\frac{3a}{\sqrt{37}}$. D. $\frac{6a}{\sqrt{37}}$.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy tâm O và cạnh đáy bằng a , $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB . Tính khoảng cách giữa AM và SN .



- A. $\frac{a\sqrt{510}}{102}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. C. $\frac{a\sqrt{510}}{204}$. D. $\frac{a\sqrt{510}}{51}$.

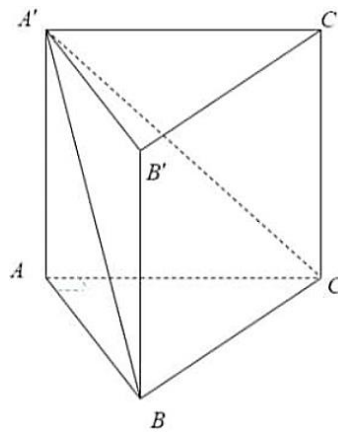
Câu 14: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác cân đỉnh A , $AB = 2a$ và $BAC = 120^\circ$. Biết $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. a .

Câu 15: Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác cân tại A biết $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB đều cạnh bằng a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SBC , Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAG') theo a

- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}a$. B. $\frac{2\sqrt{15}}{15}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{5}a$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{3}a$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Cạnh bên $AA' = a$, ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BC)$



- A. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A với $AC = a$. Biết hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC . Mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $B'CC'$. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng $(ABB'A')$.

- A. $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = 4a$, $AC = 3a$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết tam giác SAB vuông tại S và $SBA = 30^\circ$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

- A. $d = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$. B. $d = \frac{9a\sqrt{13}}{13}$. C. $d = \frac{6a\sqrt{13}}{13}$. D. $d = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$, $AB = 10a$, $BC = 14a$, $AC = 6a$. Gọi M là trung điểm AC , N là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AN = \frac{3}{5}AB$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN .

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD) theo a .

A. $d = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. B. $d = a\sqrt{3}$. C. $d = \frac{4a\sqrt{5}}{3}$. D. $d = a\sqrt{5}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = a$, $AB = 2a$, $BC = 3a$, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{66}}{22}$. C. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = b$, $BC = b\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) tính theo b bằng

A. $\frac{2b\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2b\sqrt{57}}{3}$. C. $\frac{2b\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{2b\sqrt{57}}{19}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $BC = a$, $AB = 2a$ và $SA = 3a$. Biết rằng mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{82}a}{41}$. B. $\frac{4\sqrt{82}a}{41}$. C. $\frac{\sqrt{82}a}{41}$. D. $\frac{\sqrt{82}a}{82}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn AB . Tính chiều cao hạ từ đỉnh H của khối chóp $H.SBD$ theo a .

A. $\frac{3a}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Câu 25: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a .

A. $\frac{2a\sqrt{33}}{11}$. B. $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. C. $\frac{11a}{6}$. D. $2a$.

Câu 26: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $BAA' = DAA' = BAD = 60^\circ$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng $(DA'C')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{22}}{66}$. B. $\frac{4a\sqrt{11}}{11}$. C. $\frac{2a\sqrt{11}}{11}$. D. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật $AB = a, AD = \sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) :

A. $d = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$. B. $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $d = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BAD = 60^\circ$, $SB = a$ và mặt phẳng (SBA) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. B. $\frac{\sqrt{5}a}{7}$. C. $\frac{\sqrt{21}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{15}a}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = 2a$. Tam giác SAB vuông tại S , mặt phẳng (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Biết góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng α , $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Tính khoảng cách từ C đến (SBD) theo a .

A. $\frac{2a}{3}$. B. a . C. $2a$. D. $\frac{a}{3}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $BD = 2a$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD) .

A. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a$. D. $\frac{2\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 31: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC , d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) . Tính $d = d_1 + d_2$.

A. $d = \frac{8a\sqrt{22}}{33}$. B. $d = \frac{2a\sqrt{22}}{33}$. C. $d = \frac{8a\sqrt{22}}{11}$. D. $d = \frac{2a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$. B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $BAD = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $(SC, (ABCD)) = 45^\circ$. Gọi I là trung điểm SC . Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD)

A. $\frac{a\sqrt{15}}{10}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{15}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , H là trung điểm của AB , $SH \perp (ABCD)$

Biết $SC = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}, AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng:

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = a, AB = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

A. $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. B. $d = \frac{a\sqrt{57}}{19}$. C. $d = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$. D. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 37: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = 1$, mặt phẳng $(ABC) \perp (ABD)$ và $(ACD) \perp (BCD)$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) là:

A. $2\sqrt{6}$. B. $\frac{6}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết rằng $SA = a, AB = a, AD = 2a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD)

A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{4a}{3}$.

Câu 39: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a .

A. $\frac{2a\sqrt{33}}{11}$. B. $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. C. $\frac{11a}{6}$. D. $2a$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác đều cạnh a . Biết $SB = a\sqrt{5}$, khoảng cách từ trung điểm của SA đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. D. $\frac{a\sqrt{57}}{38}$.

Câu 41: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. O là giao điểm của AC và BD . Gọi M là trung điểm của AO . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD) theo a

A. $d = a\sqrt{6}$. B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. D. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 42: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A với $AC = a$. Biết hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC . Mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $B'CC'$. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng $(ABB'A')$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật $AB = a, AD = \sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) :

A. $d = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

B. $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 44: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD) theo a .

A. $d = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

B. $d = a\sqrt{3}$.

C. $d = \frac{4a\sqrt{5}}{3}$.

D. $d = a\sqrt{5}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết $AB = BC = 1, AD = 2$. Các mặt chéo (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) là

A. $2\sqrt{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC .

A. $\frac{2a\sqrt{19}}{19}$.

B. $\frac{a\sqrt{10}}{19}$.

C. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{2a\sqrt{19}}{5}$.

Câu 47: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao $9\sqrt{\frac{3}{35}}a$. Biết rằng tam giác $A'BC$ là tam giác nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ cùng tạo với đáy các góc bằng nhau. Góc $BAC = 60^\circ, AC = 3AB = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$ bằng

A. $\frac{2a}{3}$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. a .

D. $\frac{3a}{2}$.

Câu 48: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng $AM, B'C$.

A. $h = \frac{a\sqrt{2}}{7}$.

B. $h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

C. $h = \frac{a}{7}$.

D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với hai đáy là AB và CD . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a}{2}$, khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a}{3}$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy là điểm H nằm bên trong hình thang đáy $ABCD$. Khoảng cách SH bằng.

A. $\frac{a}{2+\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. C. $\frac{a}{4-\sqrt{2}}$. D. $\frac{2a}{2+\sqrt{3}}$.

Câu 50: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 6. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng 3; khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là 2. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{5}{4}; \frac{11}{8}\right)$. B. $\left(\frac{11}{8}; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(\frac{7}{8}; \frac{5}{4}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{8}\right)$.

Câu 51: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA'} = 3\overrightarrow{GA'}$. Biết rằng $AA' = AB'$ và $A'B' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AG và BE là

A. a . B. $a\sqrt{3}$. C. $2a$. D. $5a$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách từ trung điểm I của đoạn thẳng SD đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{1377}}{81}$. B. $\frac{2a\sqrt{1513}}{89}$. C. $\frac{a\sqrt{1513}}{89}$. D. $\frac{2a\sqrt{1377}}{81}$.

Câu 53: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tâm O và góc BAD bằng 120° . Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60° . Đỉnh A' cách đều các điểm $A; C; D$. Tính khoảng cách từ D đến $(A'BC)$.

A. $\frac{3}{5}a$. B. $\frac{4}{3}a$. C. $\frac{3}{4}a$. D. $\frac{5}{3}a$.

Câu 54: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có I, K lần lượt thỏa $\overrightarrow{ID'} + 2\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$, $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0}$. Gọi E là giao điểm của CD' và $C'D$; G, G' lần lượt là trọng tâm tứ diện $MBB'A'$ và ΔEIA ; M là trung điểm của CD . Biết rằng ΔABC đều cạnh a và $(IBD) \perp (ABCD)$, $S_{\Delta IBD} = 6a^2\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng GG' và CK bằng

A. $4a$. B. $6a$. C. $8a$. D. $12a$.

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là nửa lục giác đều với $AD = 2a, BC = a$. SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$. O, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, SB . $d(O, (MND))$ bằng.

A. $\frac{4a\sqrt{561}}{187}$. B. $\frac{4a\sqrt{75}}{187}$. C. $\frac{a\sqrt{935}}{187}$. D. $\frac{4a\sqrt{150}}{187}$.

Câu 56: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và cạnh $AC = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AC . Biết góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ bằng 30° ; góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'H$ và $B'C$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 57: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$. Điểm A' cách đều ba điểm A, B, C . Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng

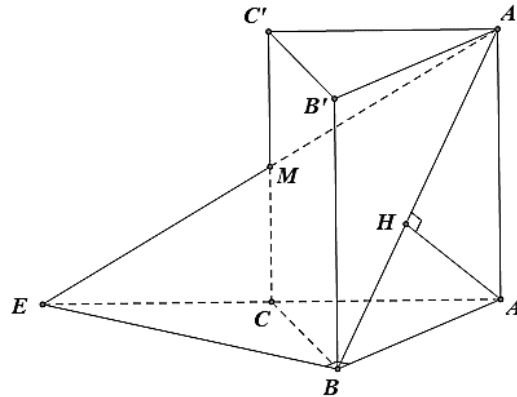
- A. $\frac{a\sqrt{21}}{29}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 58: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, tam giác $A'AB$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ D đến $(A'BC)$ bằng $\frac{2a}{5}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC là :

- A. $\frac{a\sqrt{26}}{26}$. B. $\frac{2a\sqrt{26}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{26}}{13}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A



Gọi $E = AC \cap A'M$, vì M là trung điểm của CC' nên dễ thấy C là trung điểm của AE .

$$\text{Ta có, } d(C', (A'BM)) = d(C, (A'BM)) = \frac{1}{2} d(A, (A'BM))$$

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ABE$ ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2 \cdot AB \cdot AE \cdot \cos 60^\circ = 3a^2 \Rightarrow BE = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác ABE có $AB^2 + BE^2 = AE^2 \Rightarrow \triangle ABE$ vuông tại $B \Rightarrow AB \perp BE$.

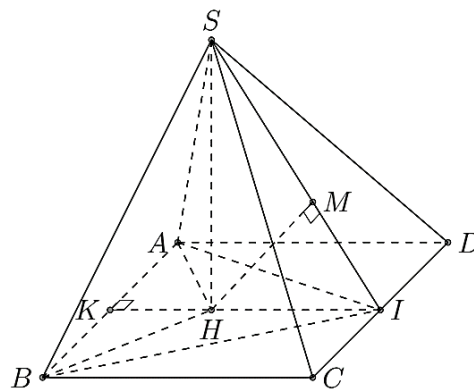
Kẻ $AH \perp A'B$ (1), khi đó $BE \perp AB, BE \perp AA' \Rightarrow BE \perp (ABA') \Rightarrow BE \perp AH$ (2)

Từ và ta có $d(A, (A'BM)) = AH$

$$\text{Lại có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(C'; (A'BM)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 2: Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$. Vì $SA = SB = SI$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI .

Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng AB . Vì $AB \parallel CD$ và $AB \not\subset (SCD), CD \subset (SCD)$ nên $AB \parallel (SCD)$.

$$\text{Suy ra } d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(K, (SCD)).$$

Ta có $AB = 8, AI = BI = 4\sqrt{5}, S_{ABI} = \frac{1}{2}IK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI . Ta có $R = \frac{AB \cdot AI \cdot BI}{4 \cdot S_{ABI}} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{4 \cdot 32} = 5$

Suy ra $HA = HB = HI = 5 \Rightarrow KI = \frac{8}{5}HI$. Do đó $d(K, (SCD)) = \frac{8}{5}d(H, (SCD))$.

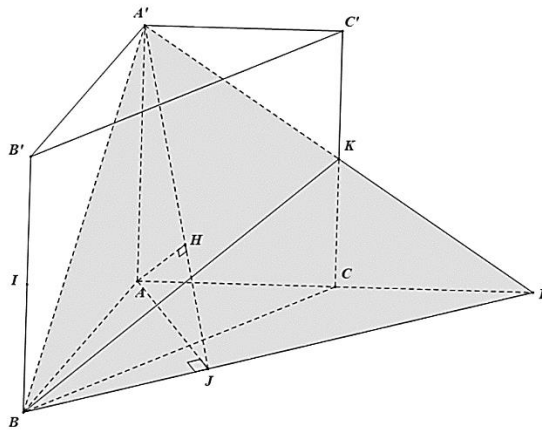
Góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $SBH = 45^\circ$. Suy ra $SH = BH = 5$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của H lên đường thẳng SI .

Ta có $HM \perp SI$ và $HM \perp CD \Rightarrow HM \perp (SCD) \Rightarrow d(H, (SCD)) = HM$.

$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} \Rightarrow HM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AB, SC) = \frac{8}{5} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

Câu 3: Chọn D



Gọi $D = A'K \cap AC$; J, H lần lượt là hình chiếu của A lên $BD, A'J$.

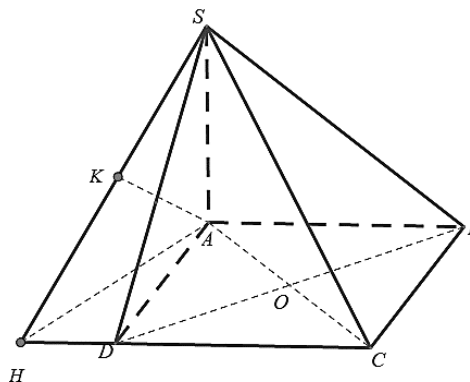
Ta có: $d(I, (A'BK)) = \frac{1}{2}d(B', (A'BD)) = \frac{1}{2}d(A, (A'BD)) = \frac{1}{2}AH$.

Xét tam diện vuông $A.A'BD$, có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$.

Mà $AA' = 4a, AB = 2a, AD = 2 \cdot AC = 2a\sqrt{3}$ nên $AH = \frac{4a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d(I, (A'BK)) = \frac{1}{2}AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 4: Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên CD , K là hình chiếu vuông góc của A lên SH .

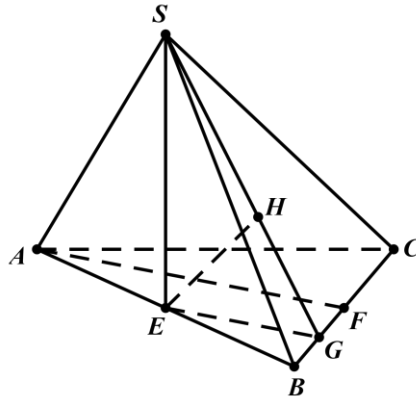
Khi đó:

$$\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH); AK \subset (SAH) \Rightarrow CD \perp AK \text{ mà } AK \perp SH \text{ nên } AK \perp (SCD)$$

Vậy $AK = d(A, (SCD))$; do $AB // (SCD)$ nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK$.

$$\text{Ta có } AH = AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SA = a\sqrt{3} \text{ nên } AK = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}a.$$

Câu 5: Chọn A



Gọi E là trung điểm cạnh AB . Khi đó: $SE \perp AB$. Mà $(SAB) \perp (ABC)$. Suy ra: $SE \perp (ABC)$.

Gọi F, G lần lượt là trung điểm đoạn BC, BF . Tam giác ABC đều nên $AF \perp BC$.

Xét tam giác ABF có E, G lần lượt là trung điểm AB, BF nên $EG // AF$ suy ra: $EG \perp BC$.

Ta có: $SE \perp (ABC) \Rightarrow SE \perp BC$ và $EG \perp BC$. Suy ra: $BC \perp (SEG) \Rightarrow (SEG) \perp (SBC)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của E trên SG .

Suy ra: $EH \perp (SBC)$. Nên $d(E, (SBC)) = EH$.

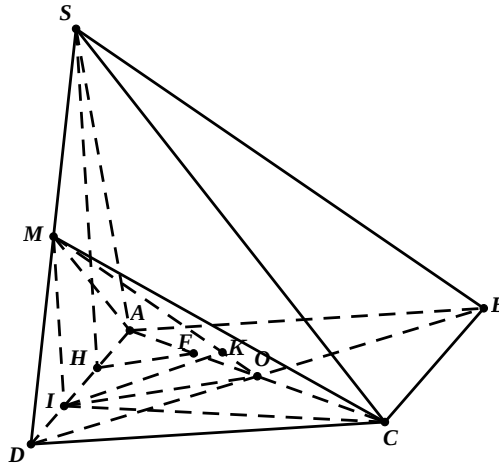
Do ΔSAB vuông cân tại S ; $SA = a\sqrt{6}$ nên $AB = SA \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}a \Rightarrow SE = a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC đều cạnh $AB = 2\sqrt{3}a$ nên $AF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3}a = 3a$. Suy ra: $EG = \frac{1}{2}AF = \frac{3}{2}a$.

$$\text{Tam giác } SEG \text{ vuông tại } E, EH \perp SG \text{ nên } EH = \frac{ES \cdot EG}{SG} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}a}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}a.$$

$$\text{Suy ra: } d(A, (SBC)) = 2 \cdot EH = \frac{6\sqrt{7}}{7}a.$$

Câu 6: Chọn B



Kẻ $SH \perp AD$, $H \in AD$ thì $SH \perp (ABCD)$.

Gọi M , I , F lần lượt là trung điểm đoạn thẳng SD , DH , AO .

Vì $SB \parallel MO$ nên $SB \parallel (MAC)$.

Suy ra $d(SB, AC) = d(SB, (MAC)) = d(B, (MAC)) = d(D, (MAC))$.

H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$ nên DH là hình chiếu của SD trên $(ABCD)$.

Suy ra $(SD, (ABCD)) = (SD, HD) = SDH \Rightarrow SDH = 60^\circ$.

Vì tam giác SAO cân tại S và F là trung điểm AO nên $SF \perp AO$.

Vì $AC \perp SF$ và $AC \perp SH$ nên $AC \perp HF$.

Xét tam giác ADC vuông tại D ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 2a$.

Xét hai tam giác AFH và ADC đồng dạng ta có: $\frac{AH}{AC} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AH = \frac{AF \cdot AC}{AD} = \frac{\frac{a}{2} \cdot 2a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $DH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Suy ra H là trung điểm của đoạn thẳng AI .

Ta có $DA = \frac{3}{2}IA \Rightarrow d(D, (MAC)) = \frac{3}{2}d(I, (MAC))$. Ta có $IO \parallel HF$ nên $IO \perp AC$.

Lại có MI là đường trung bình của tam giác SHD nên $MI \parallel SH$, mà $SH \perp (ABCD)$

suy ra $MI \perp (ABCD) \Rightarrow MI \perp AC$. Từ trên ta có $(MOI) \perp AC$.

Trong (MOI) , dựng $IK \perp MO$. Ta có $IK \perp AC \Rightarrow IK \perp (MAC) \Rightarrow d(I, (MAC)) = IK$.

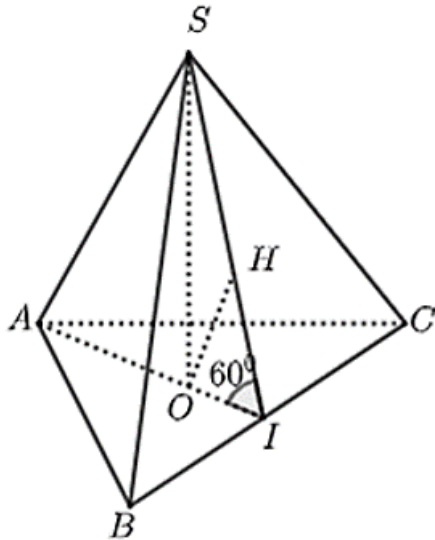
Xét tam giác AIO vuông tại O ta có $IO = \sqrt{AI^2 - AO^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Xét tam giác MID vuông tại I ta có $MI = DI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Xét tam giác MIO vuông tại I ta có: $\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IM^2} + \frac{1}{IO^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow IK = \frac{a}{2}$.

Ta có: $d(I, (MAC)) = IK = \frac{a}{2}$. Vậy $d(SB, AC) = \frac{3a}{4}$.

Câu 7: Chọn C



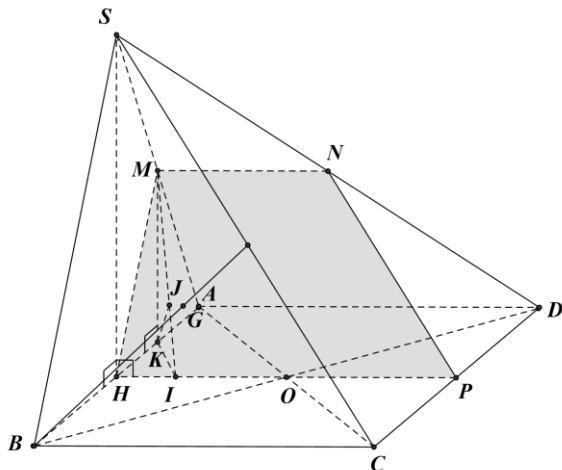
Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow SI \perp BC$.
 Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$ và $OI \perp BC$.

$$\left. \begin{aligned} (SBC) \cap (ABC) &= BC \\ BC \perp SI &\subset (SBC) \\ BC \perp OI &\subset (ABC) \end{aligned} \right\} \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (SI, OI) = SIO = 60^\circ .$$

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow d(O; (SBC)) = OH = OI . \sin 60^\circ = \frac{1}{3} . \frac{a\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}$

Ta có: $\frac{d(O, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{OI}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(A, (SBC)) = 3d(O, (SBC)) = \frac{3a}{4}$

Câu 8: Chọn D



Gọi x là cạnh hình thoi, ta có: $AC = x, BD = x\sqrt{3}, SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} AC . BD . SH = \frac{x^3}{4} = \frac{a^3}{4} \Rightarrow x = a$$

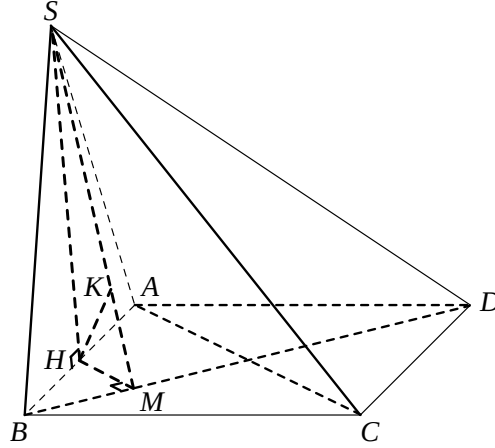
 Đặt $MK // SH, KI \perp HO, KJ \perp MI \Rightarrow KJ \perp (HMN) \equiv (\alpha)$.

Chúng minh được $(SBC) // (\alpha) \Rightarrow d(G;(\alpha)) = d(S;(\alpha)) = d(A;(\alpha)) = 2d(K;(\alpha)) = 2KJ$.

Tính được $KI = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$, $MK = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Suy ra $KJ = \frac{KI \cdot KM}{\sqrt{KI^2 + KM^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{20}$.

Vậy $d(G;(\alpha)) = 2KJ = 2 \cdot \frac{a\sqrt{15}}{20} = \frac{a\sqrt{15}}{10}$.

Câu 9: Chọn D



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD))$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $HM \perp BD$ tại M . Trong (SHM) , kẻ $HK \perp SM$ tại K .

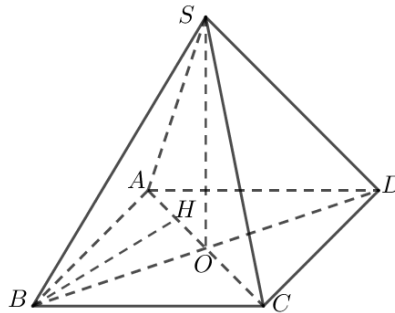
Ta có: $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM) \Rightarrow BD \perp HK$

Lại có: $\begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp BD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SDB) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HK$.

Xét tam giác SHM có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(C, (SBD)) = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 10: Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, theo bài ra các tam giác SAC, SBD cân tại S nên $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases}$ suy ra

$SO \perp (ABCD)$. Từ đó, góc giữa SA với mặt phẳng đáy bằng $\angle SAO = 60^\circ$ và $(SAC) \perp (ABCD)$

Chủ đề 01: Khoảng cách trong không gian

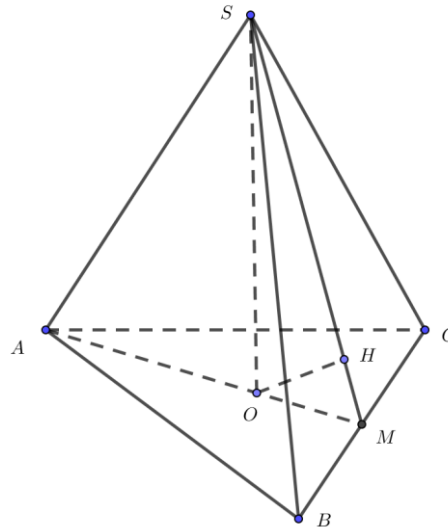
Ta có, $(SAC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AC , kẻ $BH \perp AC$ suy ra $BH \perp (SAC)$ hay $d(B, (SAC)) = BH$

Xét tam giác vuông SOA : $OA = SA \cdot \cos \angle SAO = 2 \cdot \cos 60^\circ = 1$.

Trong tam giác vuông ABC , O là trung điểm của AC nên $BO = \frac{1}{2} AC = OA = 1$. Suy ra tam

giác ABO là tam giác đều cạnh 1 suy ra $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ hay $d(B, (SAC)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có: $AM \perp BC, SO \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$.

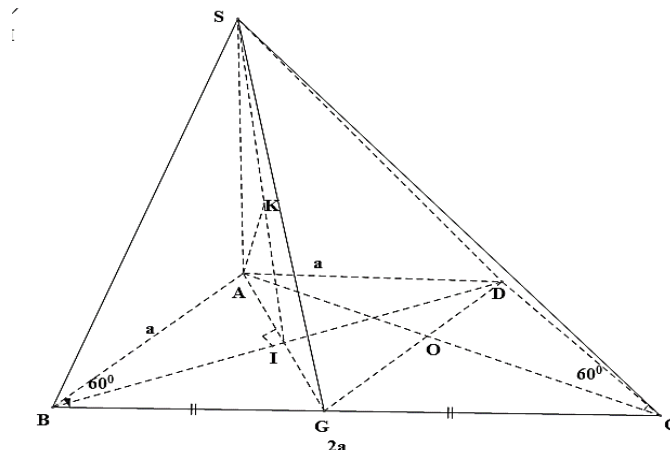
Kẻ $OH \perp SM (H \in SM) \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d_2 = OH$.

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}, OM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{12}{a^2} + \frac{3}{8a^2} = \frac{99}{8a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{2}}{3\sqrt{11}} \Rightarrow d_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}.$$

$$\text{Do } AM = 3OH \Rightarrow d_1 = 3d_2 \Rightarrow d_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}. \text{ Vậy } d = d_1 + d_2 = \frac{8a\sqrt{2}}{3\sqrt{11}} = \frac{8a\sqrt{22}}{33}.$$

Câu 12: Chọn D



Gọi G là trung điểm của BC . Khi đó $ADGB$ là hình thoi, nên $AG \perp DB, I = AG \cap DB$.

Khi đó $AG \perp DB, SA \perp DB \Rightarrow (SAG) \perp (SDB), (SAG) \cap (SDB) = SI$. Kẻ $AK \perp SI = K$.

Suy ra $d(A, (SDB)) = d(A, SI) = AK; (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = SCA = 60^\circ$

$ADCG$ là hình thoi. Gọi $O = AC \cap GD$ thì $OG = OD$, ADG là tam giác đều nên

$$AC = 2AO = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

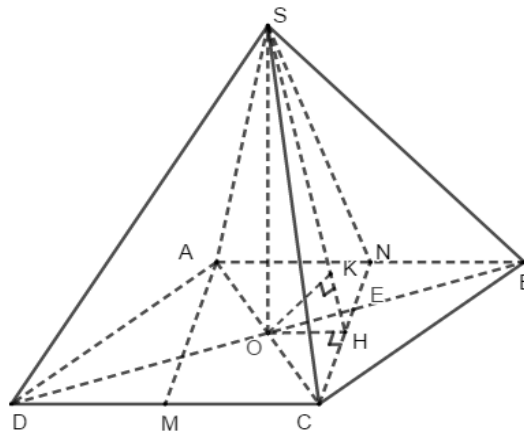
Tam giác SAC vuông tại A : $SA = AC \cdot \tan C = a\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3a$

ABG là tam giác đều nên $AI = \frac{AG}{2} = \frac{a}{2}$.

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{37}{9a^2} \Rightarrow AK = \frac{3a}{\sqrt{37}};$$

Ta có: $DC \parallel GI, DC = 2GI$, nên $d(C, (SDB)) = 2d(G, (SDB)) = 2d(A, (SDB)) = 2AK = \frac{6a}{\sqrt{37}}$

Câu 13: Chọn D



Ta có $\begin{cases} AN \parallel MC \\ AN = MC \end{cases} \Rightarrow AMCN$ là hình bình hành. Do đó $AM \parallel CN \Rightarrow AM \parallel (SCN)$.

Từ đó suy ra $d(AM, SN) = d(AM, (SCN)) = d(A, (SCN)) = 2d(O, (SCN))$

Kẻ $OH \perp CN$ tại H mà $SO \perp CN$. Suy ra $CN \perp (SHO)$ (1). Kẻ $OK \perp SH$ tại K (2).

Từ (1) $\Rightarrow OK \perp CN$ (3). Từ (2)(3) $\Rightarrow OK \perp (SCN) \Rightarrow d(O, (SCN)) = OK$.

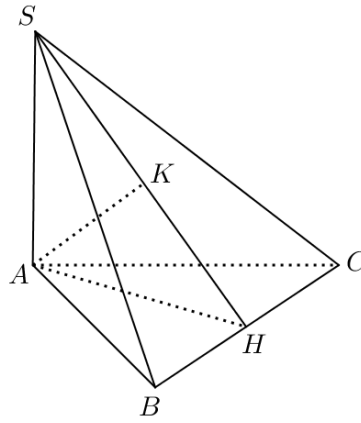
Gọi $E = CN \cap OB$. Khi đó E là trọng tâm $\triangle ABC$. Do đó $OE = \frac{1}{3}OB = \frac{1}{6}BD = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Xét $\triangle ACE$ vuông tại O có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{10}$.

Xét $\triangle SOH$ vuông tại O có $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SC^2 - OC^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{510}}{102}$

Vậy $d(AM, SN) = \frac{a\sqrt{510}}{51}$.

Câu 14: Chọn C



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC và SH .

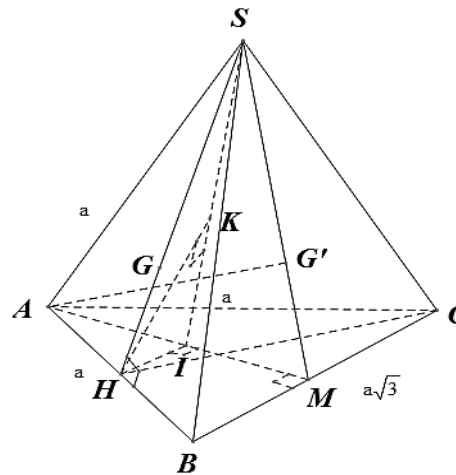
Ta có $BC \perp AH, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AK$.

Do $AK \perp BC$ và $AK \perp SH$ nên $AK \perp (SBC)$ hay $d(A, (SBC)) = AK$.

Ta có $AH = AB \cdot \sin 30^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$. Trong tam giác vuông SAH ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ hay } d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 15: Chọn A



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, BC .

Vì $\triangle SAB$ đều cạnh a và $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC), SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $d_{G, (SAG')} = \frac{2}{3} d_{H, (SAG')} = \frac{2}{3} d_{H, (SAM)}$ vì $\frac{GS}{HS} = \frac{2}{3}$.

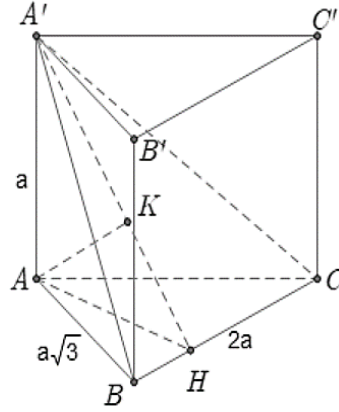
Dựng $HI \perp AM$. Ta có: $\begin{cases} AM \perp HI \\ AM \perp SH \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SHI) \Rightarrow AM \perp SI$.

Dựng $HK \perp SI$. Ta có: $\begin{cases} HK \perp SI \\ HK \perp AM \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAM)$. Suy ra: $d_{G, (SAG')} = \frac{2}{3} d_{H, (SAM)} = \frac{2}{3} HK$.

Vì $\begin{cases} HI \perp AM \\ BM \perp AM \end{cases} \Rightarrow HI \parallel BM$ và $HI = \frac{1}{2} BM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{20}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{15}}{10}a.$$

$$\text{Vậy } d_{G,(SAG')} = \frac{2}{3}d_{H,(SAM)} = \frac{2}{3}HK = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{10}a = \frac{\sqrt{15}}{15}a.$$

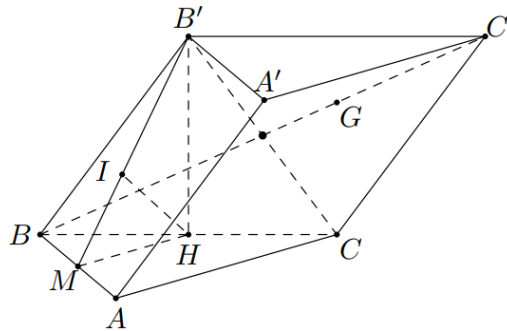
Câu 16: Chọn C

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$$

Dựng $AH \perp BC$ và $AK \perp A'H$. Khi đó $AK = d(A, (A'BC))$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 17: Chọn D

Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó $HM \perp AB$, suy ra $AB \perp (AHM)$, do đó

$$B'MH = ((ABB'A'), (ABC)) = 60^\circ.$$

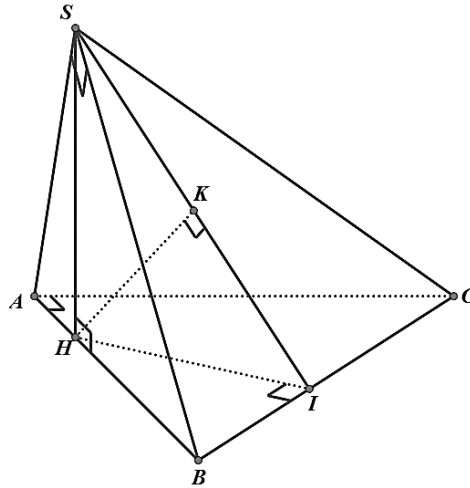
Gọi I là hình chiếu của H trên $B'M$. Khi đó $HI \perp AB$ nên $HI \perp (ABB'A')$. Ta có

$$d(G, (ABB'A')) = \frac{2}{3}d(C', (ABB'A')) = \frac{2}{3}d(C, (ABB'A')) = \frac{4}{3}d(H, (ABB'A')) = \frac{4}{3}HI$$

Xét tam giác vuông $B'HM$, ta có $MH = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$, $B'H = HM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy

$$d(G, (ABB'A')) = \frac{4HI}{3} = \frac{4HM \cdot HB'}{3\sqrt{HM^2 + HB'^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 18: Chọn C



Trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc AB tại H . Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có: $d(A, (SBC)) = \frac{AB}{HB} d(H, (SBC))$.

Trong tam giác ABC kẻ HI vuông góc BC tại I . Trong tam giác SHI kẻ HK vuông góc SI tại K .

Ta có: $\begin{cases} SH \perp BC \\ HI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHI)$. Nên $BC \perp HK$. Mà $HK \perp SI$ suy ra: $HK \perp (SBC)$.

Hay $d(H, (SBC)) = HK$.

Ta có tam giác SAB vuông tại S nên: $SA = AB \cdot \sin SBA = 4a \cdot \sin 30^\circ = 2a$ và $SB = AB \cdot \cos SBA = 4a \cdot \cos 30^\circ = 2a\sqrt{3}$.

Tam giác SHB vuông tại H nên $HB = SB \cdot \cos SBA = 2a\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 3a$ và $SH = SB \cdot \sin SBA = 2a\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}$. Suy ra: $d(A, (SBC)) = \frac{AB}{HB} d(H, (SBC)) = \frac{4}{3} HK$.

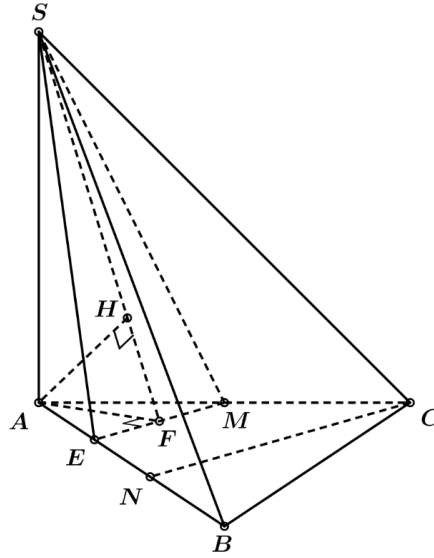
Ta có tam giác IBH đồng dạng với tam giác ABC nên: $\frac{HI}{AC} = \frac{HB}{BC}$.

Suy ra: $HI = \frac{AC \cdot HB}{BC} = \frac{3a \cdot 3a}{\sqrt{16a^2 + 9a^2}} = \frac{9a}{5}$.

Ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HK = \frac{HI \cdot SH}{\sqrt{HI^2 + SH^2}} = \frac{\frac{9a}{5} \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{81a^2}{25} + 3a^2}} = \frac{9\sqrt{13}}{26} a$

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{4}{3} HK = \frac{6a\sqrt{13}}{13}$.

Câu 19: Chọn D



Ta có: $\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = -\frac{1}{2} \Rightarrow BAC = 120^\circ$.

Khi đó: $AN = \frac{3}{5}AB = 6a$; $AM = \frac{1}{2}AC = 3a$.

Gọi E là trung điểm $AN \Rightarrow ME \parallel NC$ (EM là đường trung bình của $\triangle ANC$).

$$\begin{cases} NC \parallel EM \\ EM \subset (SEM) \end{cases} \Rightarrow NC \parallel (SEM) \text{ mà } SM \subset (SEM) \Rightarrow d(CN, SM) = d(N, (SEM)).$$

$$AN \cap (SEM) = E \Rightarrow \frac{d(N, (SEM))}{d(A, (SEM))} = \frac{AE}{EN} = 1 \Rightarrow d(N, (SEM)) = d(A, (SEM)).$$

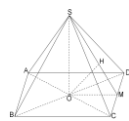
Gọi F là hình chiếu của A lên $EM \Rightarrow F$ là trung điểm của EM ($AE = AM = 3a$)

Gọi H là hình chiếu của A lên $SF \Rightarrow d(A, (SEM)) = AH$.

$$AF = AE \cdot \cos EAF = \frac{3a}{2}. \text{ Suy ra: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(SM, CN) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 20: Chọn A



Gọi O, M lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và trung điểm của CD

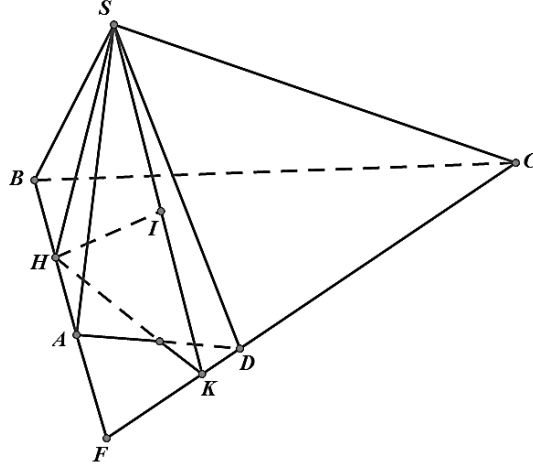
$$\text{Ta có: } d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$$

$$\text{Kẻ } OH \perp SM; \begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH$$

Từ đó ta có $OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OH$; ΔSOM vuông tại O có $SO = a\sqrt{2}$, $OM = \frac{a}{2}$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = \frac{2\sqrt{2}a}{3}.$$

Câu 21: Chọn C



Gọi H là trung điểm của AB . Kẻ HK vuông góc với CD , HI vuông góc với SK . AB cắt CD tại F .

Ta có $d(H, (SCD)) = HI$. Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{FA}{FB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{3}$ do đó $FA = \frac{1}{2}AB = a = AD$

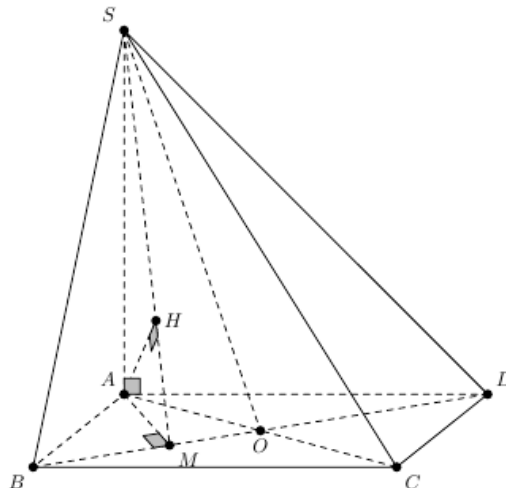
. Suy ra ΔFAD vuông cân tại D do đó $AFK = 45^\circ$. Suy ra ΔHFK vuông cân tại K , $FK = 2a \Rightarrow HK = a\sqrt{2}$. Mặt khác SH là đường cao trong tam giác đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.

Xét ΔFHK vuông tại H có $HK = a\sqrt{2}$, $SH = a\sqrt{3}$.

$$\text{Do đó } \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{30}}{5} \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

$$\text{Ta có } \frac{d(A, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{FA}{FH} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{d(H, (SCD))}{2} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 22: Chọn D



Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{b^2 + 3b^2} = 2b$

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy là góc giữa đường SC và đường thẳng AC hay góc $SCA = 45^\circ \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = 2b$.

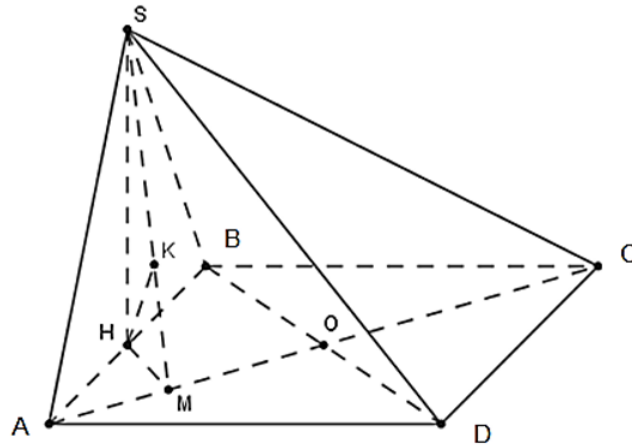
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên cạnh BD và SM . Khi đó $BD \perp (SAM) \Rightarrow BD \perp AH$. Suy ra $AH \perp (SBD)$. Vậy $d(A, (SBD)) = AH$.

Trong ΔBAD vuông tại A ta có $AM \cdot BD = AB \cdot AD \Leftrightarrow AM = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{b \cdot b\sqrt{3}}{2b} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSAM vuông tại A ta có $AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2b \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4b^2 + \frac{3b^2}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{19}} = \frac{2b\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d(A, (SBD)) = AH = \frac{2b\sqrt{57}}{19}$.

Câu 23: Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD ; H là trung điểm của AB , do ΔSAB cân tại S nên $SH \perp AB$. Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Có $BD \cap (SAC) = O$, O là trung điểm BD nên $d(D; (SAC)) = d(B; (SAC)) = 2d(H; (SAC))$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của H lên AC ; K là hình chiếu vuông góc của H lên SM

khi đó $\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHM) \Rightarrow \begin{cases} AC \perp HK \\ HK \perp SM \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC)$.

Vậy $d(D; (SAC)) = 2d(H; (SAC)) = 2HK$.

Ta có: $\Delta AMH \sim \Delta ABC \Rightarrow HM = \frac{BC \cdot AH}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

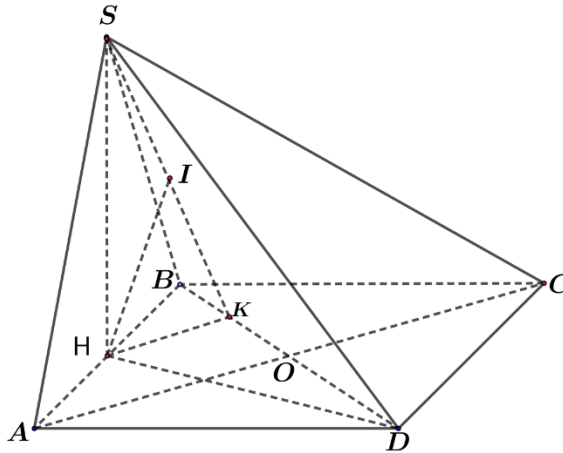
Tam giác SHA vuông tại H ; $AH = a$; $SA = 3a \Rightarrow SH = 2\sqrt{2}a$.

Tam giác SHM vuông tại H có:

$SH = 2\sqrt{2}a$; $HM = \frac{\sqrt{5}}{5}a$; $SM = \frac{a\sqrt{41}}{\sqrt{5}} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HM}{SM} = \frac{2\sqrt{82}a}{41}$.

Vậy $d(D; (SAC)) = \frac{4\sqrt{82}a}{41}$.

Câu 24: Chọn C



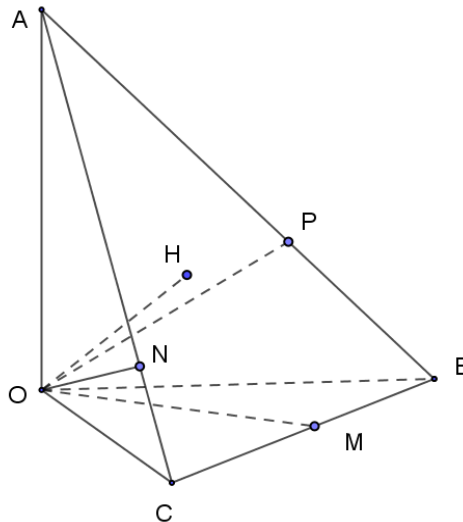
Gọi K, I lần lượt là hình chiếu của H lên $BD, SC \Rightarrow d(H, (SBD)) = HI$

$$\text{Ta có } SH^2 = SD^2 - HD^2 = SD^2 - (AH^2 + AD^2) = \frac{17a^2}{4} - \left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = 3a^2 \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta HBD} = \frac{1}{2}HK.BD \Leftrightarrow \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{2}HK.BD \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}HK.a\sqrt{2} \Leftrightarrow HK = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SHK: \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow HI = \frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}$$

Câu 25: Chọn A

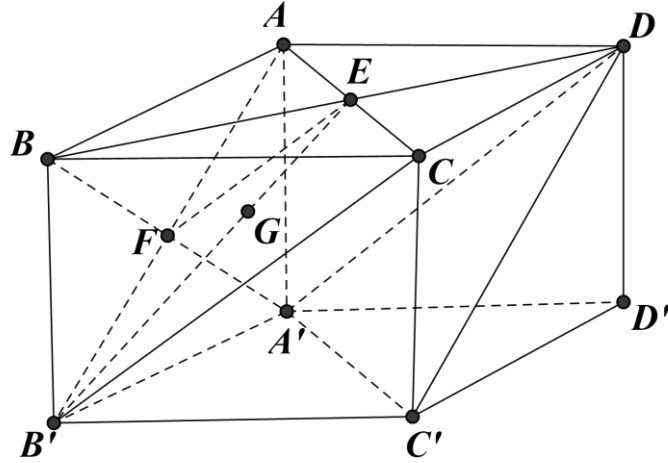


Gọi M, N, P, H lần lượt là hình chiếu của O trên $BC, CA, AB, (ABC)$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}; \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2}; \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} \right) = \frac{11}{12a^2}.$$

$$\Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11} \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11}.$$

Câu 26: Chọn D

Do $AB = AA' = AD = a$ và $BAA' = DAA' = BAD = 60^\circ$ nên $ABDA'$ là tứ diện đều cạnh a

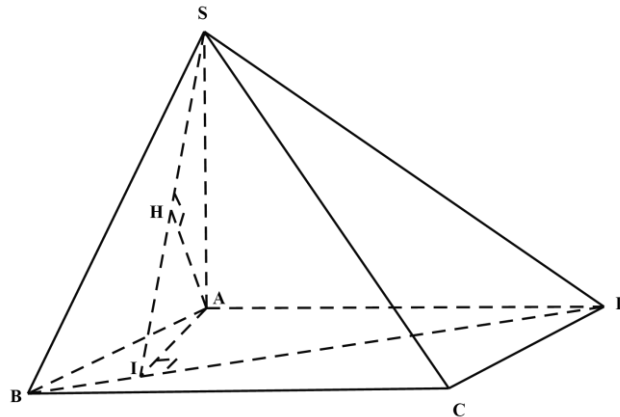
Suy ra $V_{ABDA'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC và AB' .

Ta có $V_{ABEF} = \frac{1}{4} V_{ABDA'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$. Mặt khác do $(AB'C) // (DA'C')$ nên

$$d(G; (DA'C')) = d(A'; (AB'C)) = d(B; (AB'C)) = d(B; (AEF)).$$

Xét tam giác AEF có $AE = AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}; EF = \frac{a}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{a^2 \sqrt{11}}{16}$.

$$\text{Mà } V_{ABEF} = \frac{1}{3} \cdot S_{AEF} \cdot d(B; (AEF)) \Rightarrow d(B; (AEF)) = \frac{3V_{ABEF}}{S_{AEF}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}}{\frac{a^2 \sqrt{11}}{16}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Câu 27: Chọn A

Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của A lên BD và SI .

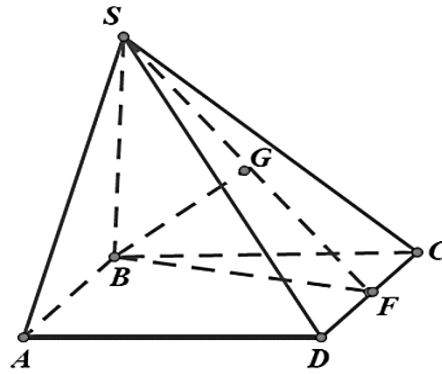
Ta có: $AH \perp (SBD)$ nên $d(A, (SBD)) = AH$.

Vì đáy $ABCD$ là hình chữ nhật nên $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = AH$.

Xét tam giác vuông $\triangle ABD$ ta có: $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông $\triangle SAI$ ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 28: Chọn A



$$\left. \begin{array}{l} (SBA) \perp (ABCD) \\ (SBC) \perp (ABCD) \\ (SBC) \cap (SBA) = SB \end{array} \right\} \Rightarrow SB \perp (ABCD); \angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABCD \text{ đều.}$$

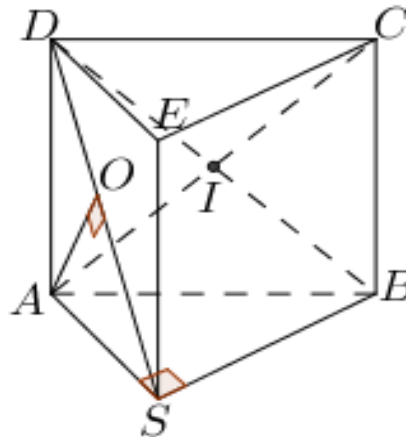
Gọi F là trung điểm CD . Trong $\triangle SBF$: kẻ $BG \perp SF$ (1).

$$\text{Ta có: } \left\{ \begin{array}{l} CD \perp BF \\ CD \perp SB \\ BG \subset (SBF) \end{array} \right. \Rightarrow CD \perp BG \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BG \perp (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = BG$.

$$\text{Trong } \triangle SBF: BG = \frac{SB \cdot BF}{\sqrt{SB^2 + BF^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Câu 29: Chọn A



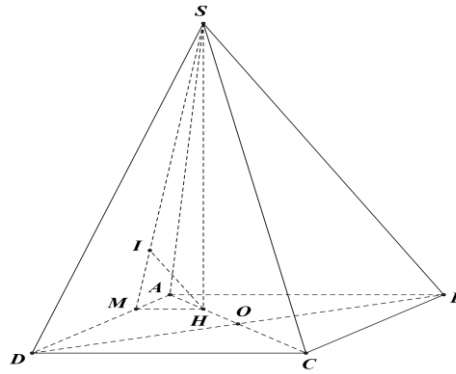
Dựng hình lăng trụ đứng $EDC.SAB$ có đáy $\triangle SAB$ vuông tại $S \Rightarrow AD // SE \Rightarrow AD // (SBC)$.

$$\text{Ta có } \angle(SD, SBC) = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{d(D, SBC)}{SD} = \frac{d(A, SBC)}{SD} = \frac{SA}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow SD = 3.SA.$$

Kẻ $AO \perp SD \Rightarrow d(C, SBD) = d(A, SBD) = AO$.

$$\text{Theo hệ thức lượng trong } \triangle DSA \text{ vuông tại } A: AO = \frac{DA \cdot SA}{SD} = \frac{DA \cdot SA}{3SA} = \frac{2a}{3}.$$

Câu 30: Chọn D



Gọi $AC \cap BD = O$, H là hình chiếu vuông góc của S xuống AC ; M là hình chiếu vuông góc của H lên AD , I là hình chiếu vuông góc của H lên SM .

Ta có $(SAC) \cap (ABCD) = AC$, $(SAC) \perp (ABCD)$; $SH \subset (SAC)$, $SH \perp AC$

Suy ra $SH \perp (ABCD)$. Ta có $AD \perp HM$; $AD \perp SH$; $HM \cap SH = H$; $HM, SH \subset (SHM)$

Từ đó suy ra $AD \perp (SHM)$. Suy ra $HI \perp AD$ ($AD \perp (SHM)$; $HI \subset (SHM)$)

Mà $HI \perp SM$; $AD \cap SM = M$; $AD, SM \subset (SAD)$

Vậy $HI \perp (SAD)$, suy ra $d(H, (SAD)) = HI$ (*).

Lại có $BC \parallel AD$; $AD \subset (SAD)$; $BC \not\subset (SAD)$

Suy ra $BC \parallel (SAD)$, từ đó ta có $d(B, (SAD)) = d(C, (SAD)) = \frac{CA}{HA} d(H, (SAD)) = \frac{CA}{HA} \cdot HI$ (**)

Xét tam giác SAC vuông tại S , ta có $AC = BD = 2a$

$$SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a, \text{ mà } SH \cdot AC = SA \cdot SC \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

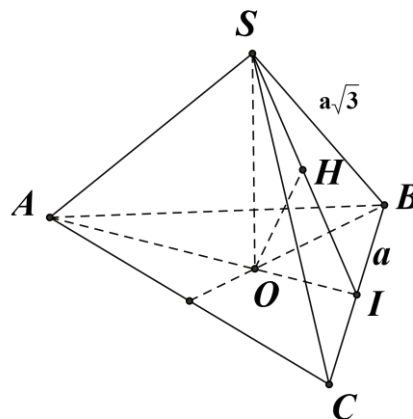
$$\text{Do tam giác } SHC \text{ vuông tại } H \text{ nên ta có } HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Từ (**) suy ra } d(B, (SAD)) = \frac{2a}{2a - \frac{3a}{2}} HI = 4HI$$

$$\text{Ta có } AH = \frac{a}{2}, \frac{AH}{AC} = \frac{MH}{DC} \Rightarrow MH = \frac{AH}{AC} \cdot DC = \frac{a}{2 \cdot 2a} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\Delta SHM \text{ vuông tại } H, \text{ ta có } HI = \frac{HM \cdot HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \frac{\sqrt{21}}{14} a. \text{ Vậy } d(B, (SAD)) = \frac{2\sqrt{21}}{7} a.$$

Câu 31: Chọn A



Chủ đề 01: Khoảng cách trong không gian

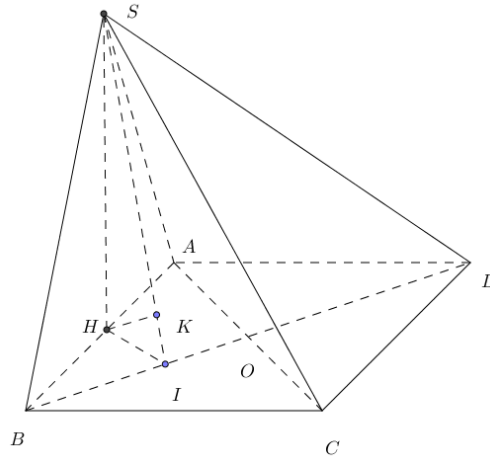
Gọi I là trung điểm của BC nên $AI = 3AO$.

Do đó, $d_1 = 3d_2$ suy ra $d = d_1 + d_2 = 4d_2$.

$$\text{Ta có } OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}, OB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Khi đó } d_2 = OH = \frac{SO \cdot OI}{SI} = \frac{\frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}} = \frac{2a\sqrt{22}}{33}. \text{ Vậy } d = 4d_2 = \frac{8a\sqrt{22}}{33}.$$

Câu 32: Chọn B



Gọi H là trung điểm AB .

Tam giác $\triangle SAB$ đều có SH là trung tuyến nên cũng là đường cao và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ suy ra $SH \perp (ABCD)$.

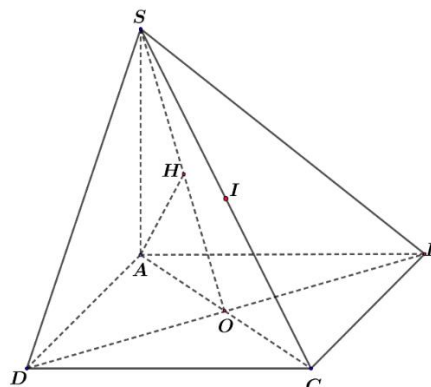
$$\text{Ta có } AH \cap (SBD) = B, \text{ suy ra } \frac{d(A; (SBD))}{d(H; (SBD))} = \frac{BA}{BH} = 2 \Rightarrow d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD))$$

$$\text{Kẻ } HI \perp BD, HK \perp SI, \text{ suy ra } HK \perp (SBD) \text{ hay } d(H; (SBD)) = HK \Rightarrow HI = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Xét } \triangle AHI \text{ vuông tại } H \text{ có } HK \text{ là đường cao, ta có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}$$

$$\text{Suy ra } d(A; (SBD)) = 2HK = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Câu 33: Chọn A



Ta có tam giác ABD cân tại A và $BAD = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều cạnh a

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}. \text{ Mặt khác } (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = SCA = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{3}.$$

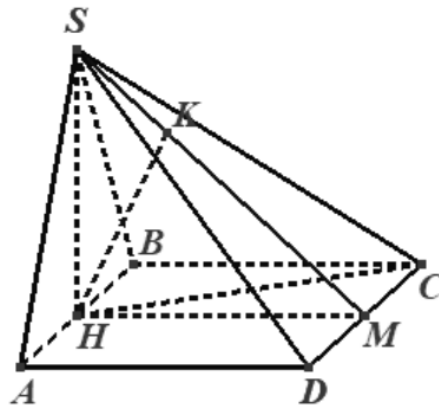
$$\text{Ta có } d(I, (SBD)) = \frac{1}{2}d(C, (SBD)) = \frac{1}{2}d(A, (SBD))$$

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } A \text{ lên } AO \Rightarrow d(A, (ABD)) = AH.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SAO: \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow d(I, (SBD)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{15}}{10}.$$

Câu 34: Chọn C



$$\text{Ta có } HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = a\sqrt{2}.$$

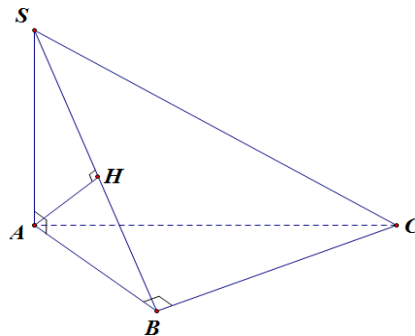
Gọi M là trung điểm của CD , K là hình chiếu của H trên SM .

Vì $DC \perp SH, DC \perp HM \Rightarrow DC \perp (SHM) \Rightarrow DC \perp HK$. Mà $SM \perp HK \Rightarrow (SCD) \perp HK$.

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Ta có } d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 35: Chọn B

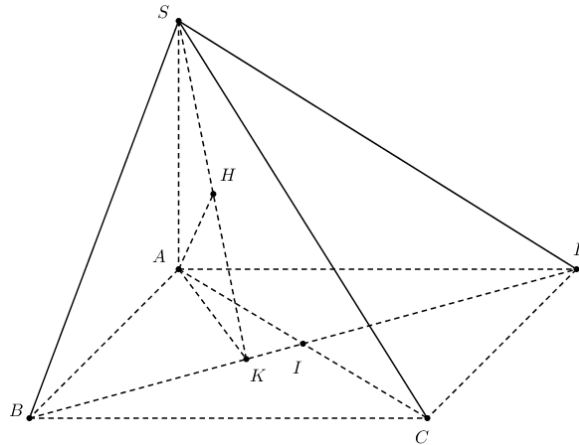


Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$$

$$\text{Có } \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 36: Chọn C



Ta có $AC \cap (SBD) = I$ là trung điểm của đoạn $AC \Rightarrow d(C; (SBD)) = d(A; (SBD))$

Trong tam giác ABD kẻ $AK \perp BD$ suy ra $BD \perp (SAK)$

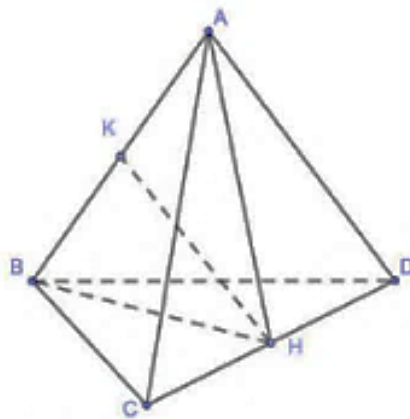
Trong tam giác SAK kẻ $AH \perp SK$

Khi đó ta có $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A; (SBD)) = AH$

Trong $\triangle ABD$ vuông tại A suy ra $AK = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong $\triangle SAK \perp$ tại A suy ra $AH = \frac{SA \cdot AK}{\sqrt{SA^2 + AK^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Câu 37: Chọn B



Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $AH = x, (x > 0)$

Xét tam giác ACD và BCD lần lượt cân tại A và D nên AH và BH là hai đường cao tương ứng.

$$\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \Rightarrow AH \perp (BCD) \\ (ACD) \supset AH \perp CD \end{cases}$$

Do đó $AH \perp BH$. Xét tam giác $\triangle ACD = \triangle BCD (c.c.c)$ nên ta suy ra $AH = BH$

Do đó $\triangle AHB$ vuông cân tại $H \Rightarrow AB = AH = x\sqrt{2}$.

Chúng minh tương tự ta được tam giác CKD vuông cân tại K .

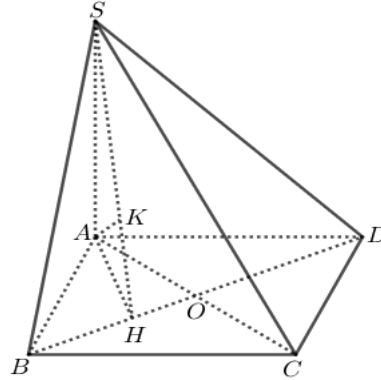
$$\Rightarrow CK = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{2HD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-x^2}.$$

Mặt khác, ACD cân tại A có CK là đường cao nên:

$$\Rightarrow AB = 2AK = 2\sqrt{AC^2 - CK^2} = 2\sqrt{1-2(1-x^2)}$$

$$\text{Ta có: } \Rightarrow AB = x\sqrt{2} = 2\sqrt{1-2(1-x^2)} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(A; (BCD)) = \frac{\sqrt{6}}{3}..$$

Câu 38: Chọn A



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow d(C; (SBD)) = d(A; (SBD))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $BD \Rightarrow AH \perp BD$. Vì $\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp BD$.

Vậy $\left. \begin{array}{l} AH \perp BD \\ SA \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAH)$.

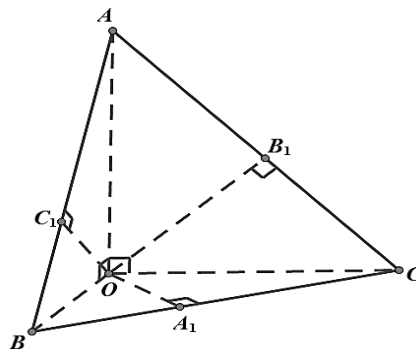
Trong (SAH) gọi K là hình chiếu của A lên $SH \Rightarrow AK \perp SH$ mà

$\left. \begin{array}{l} BD \perp (SAH) \\ AK \subset (SAH) \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp AK$. Từ đó suy ra: $AK \perp (SBD) \Rightarrow AK = d(A; (SBD))$.

$$AH = \frac{2S_{\triangle ABD}}{BD} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}; \quad AK = \frac{AH \cdot SA}{\sqrt{AH^2 + SA^2}} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot a}{\sqrt{\frac{4a^2}{5} + a^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(C; (SBD)) = \frac{2a}{3}$.

Câu 39: Chọn A



Chủ đề 01: Khoảng cách trong không gian

Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC) vì OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau

nên $OABC$ là tứ diện vuông do vậy $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

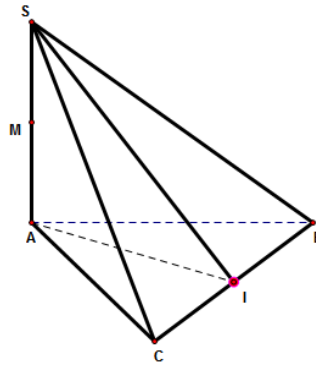
Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của O lên BC, CA, AB khi đó trong 3 tam giác vuông

$\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OAC$ ta có $\frac{1}{OA_1^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$; $\frac{1}{OB_1^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OA^2}$ và $\frac{1}{OC_1^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

do vậy $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OA_1^2} + \frac{1}{OB_1^2} + \frac{1}{OC_1^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} \right) = \frac{11}{12a^2}$.

Do đó $\frac{1}{OH^2} = \frac{11}{12a^2}$ suy ra $d = OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Câu 40: Chọn C



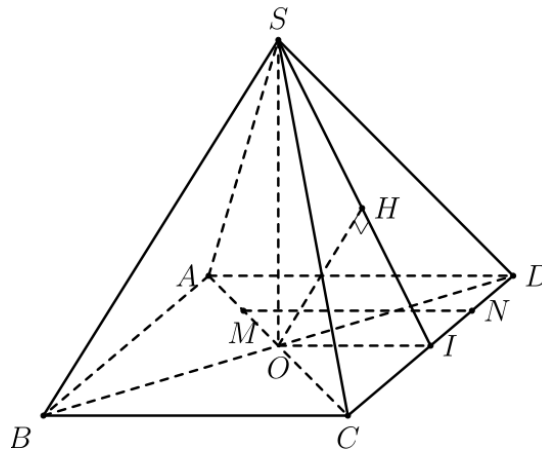
Gọi M, I lần lượt là trung điểm của SA và BC .

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a$, $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \frac{a\sqrt{19}}{2}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{M.SBC} = \frac{1}{2} \cdot V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

$S_{SBC} = \frac{1}{2} SI \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{19}}{4}$. Do đó $d(M, (SBC)) = \frac{3V_{M.SBC}}{S_{SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{19}}{4}} = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 41: Chọn B



Ta có $\frac{d(M, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{MC}{OC} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(M, (SCD)) = \frac{3}{2} d(O, (SCD))$.

Trong $\triangle SAO$ có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm CD thì $OI \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOI)$.

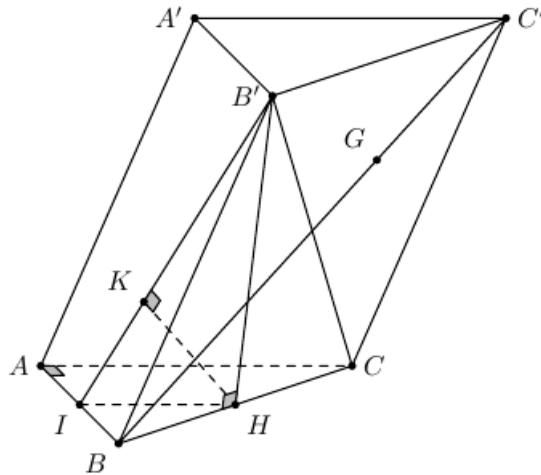
Kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OH$.

Tam diện vuông $S.OCD$ tại O

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow d(M, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 42: Chọn D



Gọi I là trung điểm cạnh AB . Suy ra $IH = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$ và $IH \parallel AC \Rightarrow IH \perp AB$ (1).

Mặt khác $B'H \perp AB$ (2). Từ và suy ra $AB \perp (B'IH) \Rightarrow AB \perp IH$ và $AB \perp B'I$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ với mặt phẳng (ABC) là góc $B'IH$ hay $B'IH = 60^\circ$.

Trong $(B'IH)$ kẻ $HK \perp B'I$ với $K \in B'I$.

Mà $HK \perp AB$ nên ta có $HK \perp (ABB'A')$. Vậy $d(H, (ABB'A')) = HK$.

$$\text{Ta có } \frac{GB}{C'B} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G, (ABB'A')) = \frac{2}{3}d(C', (ABB'A')) = \frac{2}{3}d(C, (ABB'A')).$$

$$\text{Do } \frac{CB}{HB} = 2 \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = 2d(H, (ABB'A')).$$

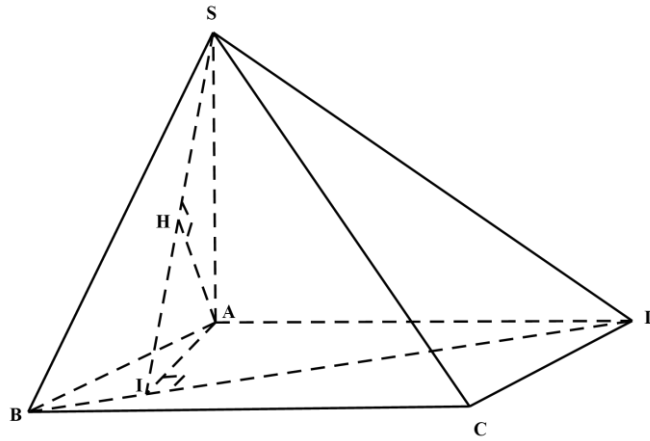
$$\text{Suy ra } d(G, (ABB'A')) = \frac{4}{3}d(H, (ABB'A')) = \frac{4}{3}HK.$$

$$\text{Trong } \triangle B'IH \text{ vuông tại } H \text{ ta có } B'H = IH \cdot \tan B'IH = IH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{B'H^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(G, (ABB'A')) = \frac{4}{3}HK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 43: Chọn A



Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của A lên BD và SI .

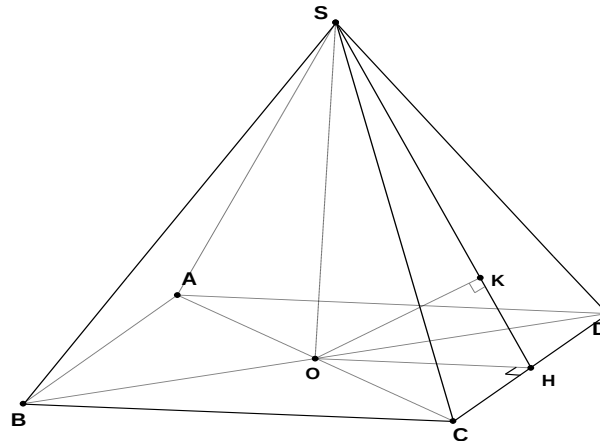
Ta có: $AH \perp (SBD)$ nên $d(A, (SBD)) = AH$.

Vì đáy $ABCD$ là hình chữ nhật nên $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = AH$.

Xét tam giác vuông $\triangle ABD$ ta có: $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông $\triangle SAI$ ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 44: Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

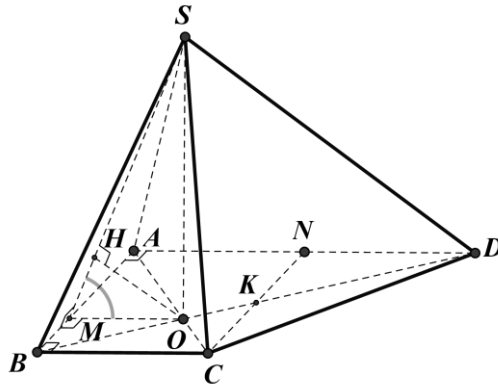
Vẽ OH vuông góc với CD tại H thì H là trung điểm CD , $OH = \frac{a}{2}$.

Ta có $CD \perp OH, CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow (SCD) \perp (SOH)$. Dựng OK vuông góc với SH tại K thì $OK \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OK$.

Tam giác vuông SOH có OK là đường cao nên $OK = \frac{OS \cdot OH}{\sqrt{OS^2 + OH^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 45: Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Từ O kẻ $OM \perp AB \Rightarrow SMO = 60^\circ$.

Gọi N là trung điểm AD .

Suy ra tứ giác $ABCN$ là hình vuông và $d(D, (SAB)) = 2d(N, (SAB)) = 2d(C, (SAB))$.

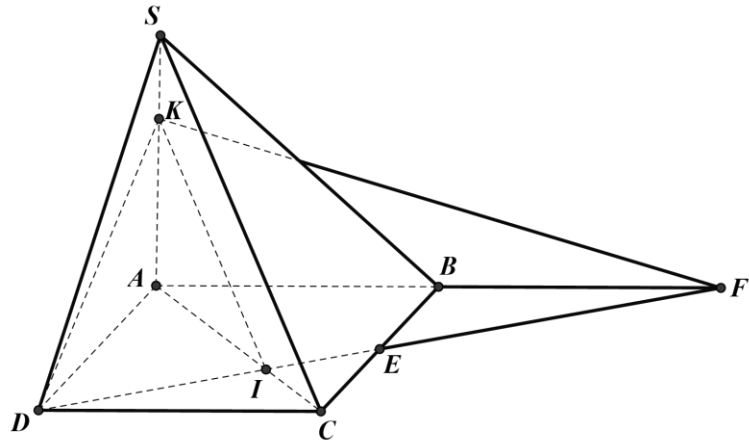
Gọi $K = CN \cap BD$. Suy ra K là trung điểm CN và $\frac{CA}{OA} = \frac{3}{2}$

Do đó $d(C, (SAB)) = \frac{3}{2}d(O, (SAB))$. Từ O kẻ $OH \perp SM \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$.

Có $\frac{OM}{DA} = \frac{BO}{BD} = \frac{BO}{2BK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow OM = \frac{2}{3}$; $SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow OH = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy $d(D, (SAB)) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Câu 46: Chọn A



Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a$.

Góc giữa SC và đáy là $\angle SCA = 45^\circ \Rightarrow SA = AC = 2a$.

Gọi $I = AC \cap DE$, có $\frac{IA}{IC} = \frac{DA}{CE} = 2$, gọi K là điểm trên SA sao cho

$IK \parallel SC \Rightarrow \frac{KA}{SA} = \frac{IA}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow AK = \frac{4a}{3}$ và $SC \parallel (DKI)$.

Do đó $d(AC, DE) = d(C, (DKI)) = \frac{1}{2}d(A, (DKI))$.

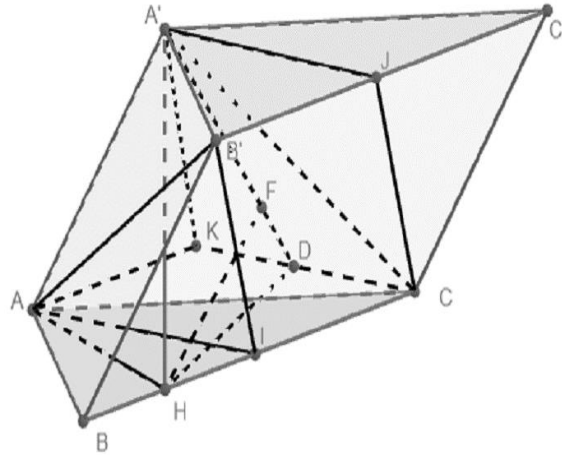
Gọi $F = DE \cap AB$, do $BE \parallel AD$ và $BE = \frac{1}{2}AD$ nên B là trung điểm của AF .

Đặt $h = d(A, (DKF))$, do $ADKF$ là tam diện vuông tại A nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{\left(\frac{4a}{3}\right)^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{8a^2} = \frac{19}{16a^2} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{19}a}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, DE) = \frac{2\sqrt{19}a}{19}.$$

Câu 47: Chọn A



Do tam giác $A'BC$ là tam giác nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên kẻ $A'H \perp BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ và H nằm trong đoạn BC .

Hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ cùng tạo với đáy các góc bằng nhau nên H cách đều AB và AC do đó H là chân đường phân giác trong của BAC .

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{BH}{CH} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow CH = 3BH$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$ suy ra $(AB'I) \parallel (CA'J)$ do đó $d(AB', A'C) = d((AB'I), (CA'J)) = d(I, (CA'J))$.

Kẻ $KC \parallel AI \Rightarrow KC \parallel A'J$ khi đó $d(I, (CA'J)) = d(I, (CKA'J))$

$$\text{Ta có: } \frac{d(I, (CKA'J))}{d(H, (CKA'J))} = \frac{IC}{HC} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow d(I, (CKA'J)) = \frac{2}{3} d(H, (CKA'J)).$$

Kẻ $HD \perp KC, HF \perp A'D \Rightarrow d(H, (CKA'J)) = HF$ và $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HA'^2} + \frac{1}{HD^2}$.

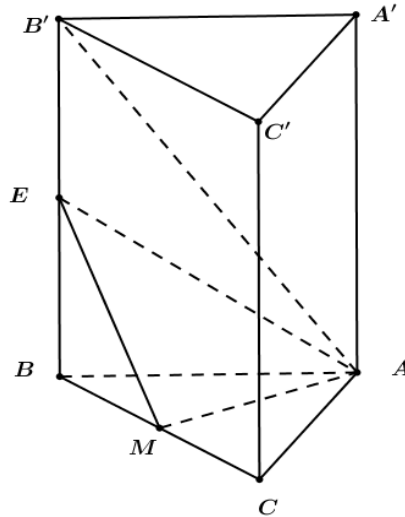
$$\text{Ta có: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 7a^2$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{7}, AI^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow AI = a \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Xét tam giác AIC có: $\cos AIC = \frac{AI^2 + IC^2 - AC^2}{2AI \cdot IC} = -\frac{8}{\sqrt{91}}$. Do $AICK$ là hình bình hành nên

$$\Rightarrow \cos ICK = \frac{8}{\sqrt{91}} \Rightarrow \sin ICK = 3\sqrt{\frac{3}{91}} \Rightarrow HD = HC \cdot \sin HCD = \frac{9}{4}\sqrt{\frac{3}{13}}a \text{ thay vào ta được}$$

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HA'^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow HF = a \Rightarrow d(I, (CKA'J)) = \frac{2}{3}a.$$

Câu 48: Chọn B

Từ giả thiết ta suy ra tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B

Thể tích của khối lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$

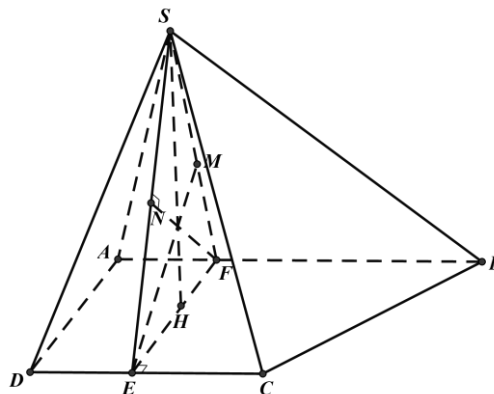
Gọi E là trung điểm của BB' . Khi đó mặt phẳng (AME) song song với $B'C$ nên khoảng cách giữa 2 đường thẳng $AM, B'C$ bằng khoảng cách giữa $B'C$ và mặt phẳng (AME)

Nhận thấy, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME) bằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AME)

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME) . Do đó tứ diện $BAME$ có BA, BM, BE đôi

một vuông góc với nhau nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{2}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

Vậy khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM và $B'C$ bằng $h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 49: Chọn B

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Qua H kẻ đường thẳng Δ vuông góc với AB, CD , cắt AB, CD lần lượt tại E, F .

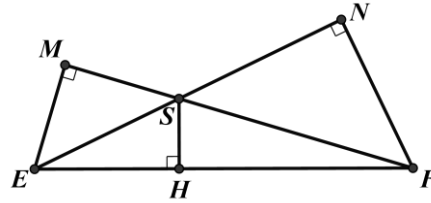
Khi đó ta có: $\begin{cases} CD \perp EF \\ CD \perp SH \\ EF \cap SH = H \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow (SCD) \perp (SEF)$

Chủ đề 01: Khoảng cách trong không gian

Mà: $(SCD) \cap (SEF) = SE$. Nên suy ra: $FN \perp (SCD)$, với N là hình chiếu vuông góc của F lên $SE \Rightarrow d(F; (SCD)) = FN$.

Mặt khác, do $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = d(F; (SCD)) = \frac{a}{2}$ nên $FN = \frac{a}{2}$.

Tương tự: gọi M là hình chiếu vuông góc của E lên SF , khi đó ta có: $d(C; (SAB)) = d(E; (SAB)) = EM = \frac{a}{3}$.



Xét tam giác EFN vuông tại N , $FN = \frac{a}{2}$, $EF = a$ nên $\sin FEN = \frac{1}{2} \Rightarrow FEN = 30^\circ$.

Xét tam giác EFM vuông tại M , $EM = \frac{a}{3}$, $EF = a$ nên $\sin MFE = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos MFE = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ta có: $SEF + SFE + ESF = 180^\circ \Rightarrow ESF + SFE + 30^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow ESF + SFE = 150^\circ \Rightarrow ESF = 150^\circ - SFE$

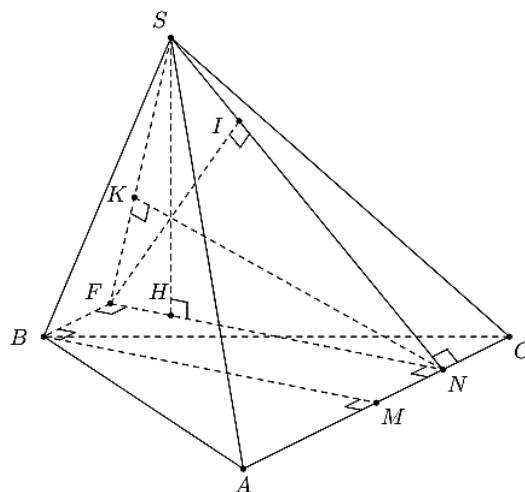
Nên $\sin ESF = \sin(150^\circ - SFE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SEF ta có: $\frac{EF}{\sin ESF} = \frac{SF}{\sin SEF} \Rightarrow SF = \frac{EF \cdot \sin SEF}{\sin ESF} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}} = \frac{3a}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Xét tam giác: SHF vuông tại H có

$\sin SFH = \frac{SH}{SF} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{SH}{SF} \Rightarrow SH = \frac{1}{3} SF = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$. Vậy $SH = \frac{a}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Câu 50: Chọn A



Kẻ $BM \perp AC$, $SN \perp AC$. Dựng hình chữ nhật $BMNF$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp FN \\ AC \perp SN \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SFN)$$

$$\text{Từ } F \text{ kẻ } FI \perp FN \Rightarrow d(B; (SAC)) = d(F; (SAC)) = FI = 3$$

$$\text{Từ } N \text{ kẻ } NK \perp SF \Rightarrow d(AC; SB) = d(AC; (SBF)) = d(N; (SBF)) = NK = 2$$

$$\text{Từ } S \text{ kẻ } SH \perp NF, SH \in (SFN) \Rightarrow SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

$$\text{Ta có } FN = BM = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } FNI : \sin N = \frac{FI}{FN} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot N = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 N} - 1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Trong } \triangle SNH : \cot N = \frac{NH}{SH} = \sqrt{2} \Rightarrow NH = \sqrt{2}SH \quad (1)$$

$$\text{Trong tam giác vuông } FKI : \sin F = \frac{NK}{FN} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \cot F = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 F} - 1} = \frac{\sqrt{23}}{2}$$

$$\text{Trong } \triangle SFH : \cot F = \frac{FH}{SH} = \frac{\sqrt{23}}{2} \Rightarrow FH = \frac{\sqrt{23}}{2}SH \quad (2)$$

$$\text{Từ và suy ra } FH + NH = SH \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{23}}{2} \right) = FN = 3\sqrt{3} \Rightarrow SH = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}} \approx 1,363.$$

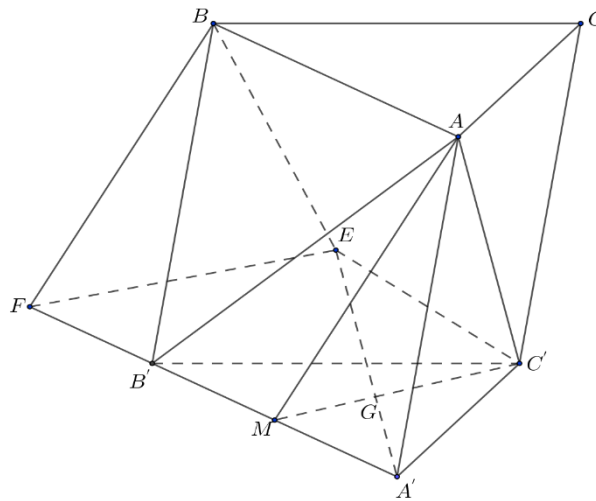
Câu 51: Chọn C

Gọi M là trung điểm của $A'B'$ và điểm F thỏa mãn B' là trung điểm của FM .

Ta có $\overrightarrow{EA'} = 3\overrightarrow{GA'} \Rightarrow EG = 2GA'$, suy ra $\triangle EGC'$ đồng dạng với tam giác $\triangle A'GM$.

Do đó $EC' \parallel MA'$ và $FM = EC' = 2MA'$, suy ra tứ giác $FEC'M$ là hình bình hành.

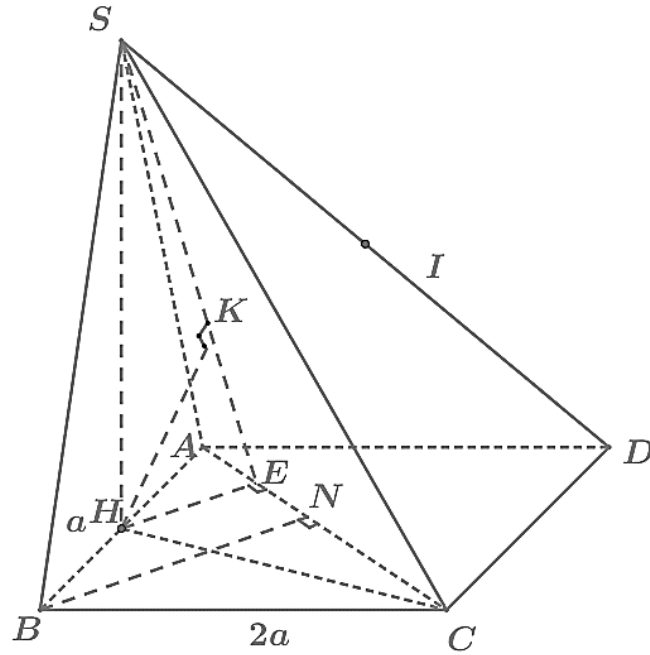
$$\text{Khi đó } \begin{cases} FB \parallel MA \\ FE \parallel MC' \end{cases} \Rightarrow (FBE) \parallel (MAC') \Rightarrow d(AG, BE) = d((FBE), (MAC')) = d(F, (MAC')).$$



Mặt khác hai tam giác: $\triangle AA'B'$ và $\triangle C'A'B'$ lần lượt cân tại A và C' nên:

$$\begin{cases} B'A' \perp AM \\ B'A' \perp C'M \end{cases} \Rightarrow B'A' \perp (AMC') \Rightarrow d(F, (AMC')) = FM = 2a.$$

$$\text{Vậy } d(AG, BE) = 2a.$$



Gọi H là trung điểm AB suy ra $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có: } \frac{d(I, (SAC))}{d(D, (SAC))} = \frac{SI}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I, (SAC)) = \frac{1}{2} d(D, (SAC)) = \frac{1}{2} d(B, (SAC))$$

$$\text{Và } \frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{AB}{AH} = 2 \Rightarrow d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$$

Nên $d(I, (SAC)) = d(H, (SAC))$. Trong $(ABCD)$: kẻ $BN \perp AC$ tại N , $HE \perp AC$ tại E .

Trong (SHE) : kẻ $HK \perp SE$ tại E . Ta có
$$\begin{cases} HK \perp SE \\ HK \perp AC \text{ (Vì } AC \perp (SHE)) \Rightarrow HK \perp (SAC) \text{ hay} \\ SE \cap AC = E \text{ trong } (SAC) \end{cases}$$

$$d(H, (SAC)) = HK.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } B: \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BN = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow HE = \frac{1}{2} BN = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } B: HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

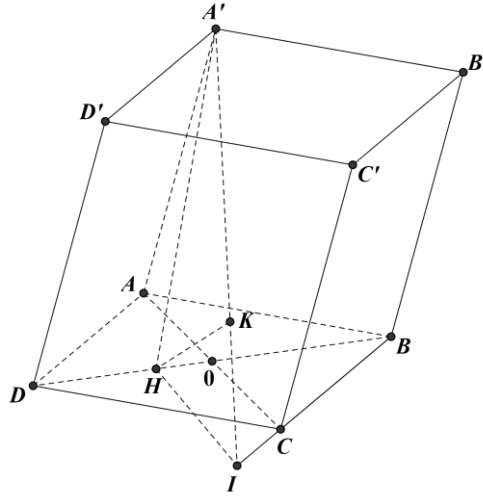
Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\angle SCH = 45^\circ$.

$$\text{Suy ra } \triangle SHC \text{ vuông cân tại } H, \text{ nên } SH = HC = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SHE \text{ vuông tại } H: \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{89}{17a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{1513}}{89}.$$

$$\text{Vậy } d(I, (SAC)) = d(H, (SAC)) = HK = \frac{a\sqrt{1513}}{89}.$$

Câu 53: Chọn C



Gọi H là trọng tâm của tam giác đều ACD .

Vì đỉnh A' cách đều các điểm $A; C; D$ nên $A'H \perp (ABCD)$.

Kẻ $HI \perp BC$. Khi đó $(A'HI) \perp (A'BC)$.

Kẻ $HK \perp A'I$, suy ra $HK \perp (A'BC)$. Do đó $d_{(H, (A'BC))} = HK$.

Theo đề góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60° nên góc $A'AH$ bằng 60° .

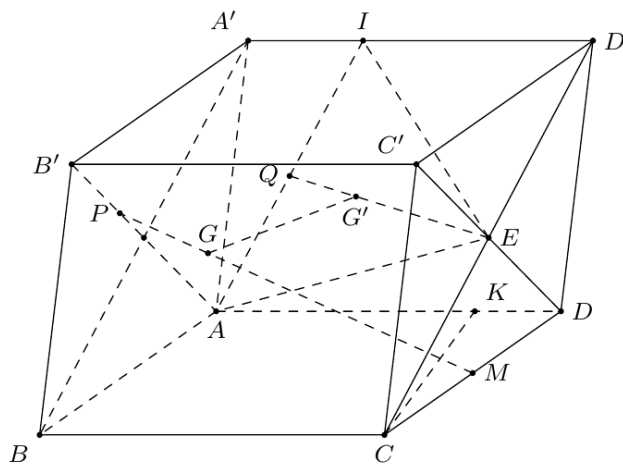
Do đó $A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = a$.

Trong tam giác vuông HIB ta có $HI = HB \cdot \sin 30^\circ = \frac{4}{3} \cdot OB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông $A'HI$ ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{HI^2}$. Tính ra ta được $HK = \frac{a}{2}$.

Ta có $\frac{d_{(D, (A'BC))}}{d_{(H, (A'BC))}} = \frac{BD}{BH} = \frac{3}{2}$. Do đó $d_{(D, (A'BC))} = \frac{3}{2} d_{(H, (A'BC))} = \frac{3}{4} a$.

Câu 54: Chọn B



Gọi P là trọng tâm của $\triangle B'A'B$ và Q là trung điểm của AI .

Vì G là trọng tâm của tứ diện $MBB'A'$ nên $\vec{GM} + \vec{GB} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GM} + 3\vec{GP} = \vec{0}$.

Do đó $d(G, (ABCD)) = \frac{3}{4} d(P, (ABCD)) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} d(B', (ABCD)) = \frac{1}{2} d(B', (ABCD))$.

Ta có $d(Q, (ABCD)) = \frac{1}{2} d(I, (ABCD)) = \frac{1}{2} d(D', (ABCD)) = d(E, (ABCD))$.

Suy ra $QE \parallel (ABCD)$. Vì $G' \in EQ$ nên:

$$d(G', (ABCD)) = d(Q, (ABCD)) = \frac{1}{2}d(I, (ABCD)) = \frac{1}{2}d(B', (ABCD)) = d(G, (ABCD)).$$

Suy ra $GG' \parallel (ABCD)$. Như vậy ta có được $(GG'E) \parallel (ABCD)$.

$$\text{Khi đó } d(GG', CK) = d((GG'E), (ABCD)) = d(G, (ABCD)) = \frac{1}{2}d(I, (ABCD)).$$

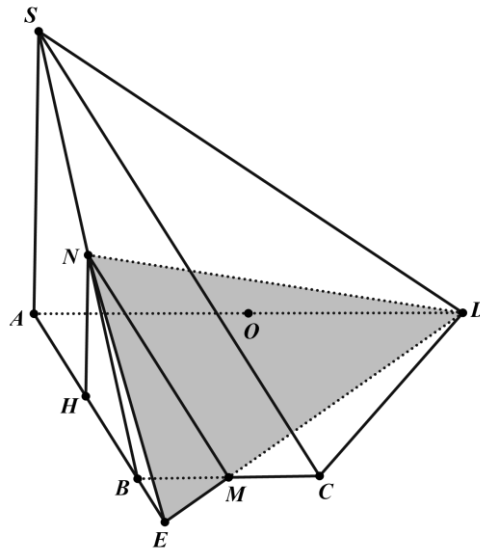
Trong mặt phẳng (IBD) , kẻ $IH \perp BD$. Vì $(IBD) \perp (ABCD)$ nên $IH \perp (ABCD)$.

Suy ra $d(I, (ABCD)) = IH$. Vì $\triangle ABC$ đều cạnh a nên $BD = a\sqrt{3}$.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle IBD} = \frac{1}{2}IH.BD \Leftrightarrow 6a^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}IH.a\sqrt{3} \Leftrightarrow IH = 12a.$$

$$\text{Vậy } d(GG', CK) = \frac{1}{2}d(I, (ABCD)) = \frac{1}{2}IH = \frac{1}{2}.12a = 6a.$$

Câu 55: Chọn A



$$\text{Ta có: } \frac{d(O; (MND))}{d(A; (MND))} = \frac{OD}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O; (MND)) = \frac{1}{2}d(A; (MND)).$$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow NH \parallel SA$ và $NH = \frac{SA}{2} = a \Rightarrow NH$ vuông góc với mp $(ABCD)$.

Kéo dài AB và DM cắt nhau tại E . Xét tam giác AED có: $BM \parallel AD$

$$\Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{BM}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow BE = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow HE = HB + BE = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{5a}{6} \text{ và } AE = AB + BE = \frac{4a}{3} \Rightarrow \frac{HE}{AE} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{d(A; (MND))}{d(H; (MND))} = \frac{AE}{HE} = \frac{8}{5} \Rightarrow d(O; (MND)) = \frac{4}{5}d(H; (MND))$$

$$\text{Tính } d(H; (MND)). \text{ Ta có: } DE = \sqrt{AE^2 + AD^2 - 2AE.AD.\cos 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{7}}{3}$$

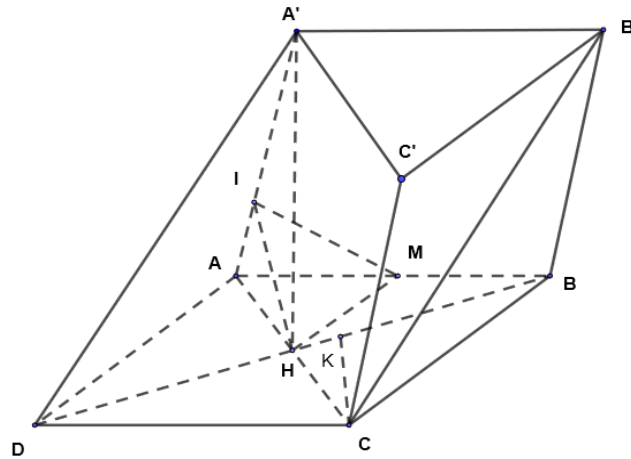
$$\Rightarrow d(A, DE) = \frac{2.S_{ADE}}{DE} = \frac{AE.AD.\sin 60^\circ}{DE} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{d(H;DE)}{d(A;DE)} = \frac{HE}{AE} = \frac{5}{8} \Rightarrow d(H;DE) = \frac{5a\sqrt{21}}{28}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d^2(H;(MND))} = \frac{1}{d^2(H;DE)} + \frac{1}{HN^2} \Rightarrow d(H;(MND)) = a\sqrt{\frac{75}{187}}.$$

$$\Rightarrow d(O;(MND)) = \frac{4}{5}.d(H;(MND)) = \frac{4a\sqrt{561}}{187}.$$

Câu 56: Chọn A



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ta có: $B'C \parallel A'D \Rightarrow B'C \parallel (A'HD) \Rightarrow d(B'C; A'H) = d(B'C; (A'HD)) = d(C; (A'BD))$

Kẻ $CK \perp BD \Rightarrow CK \perp (A'BD) \Rightarrow d(C; (A'BD)) = CK$. Kẻ $HM \parallel BC \Rightarrow HM \perp AC$

Ta có: $\begin{cases} HM \perp AC \\ HM \perp A'H \end{cases} \Rightarrow HM \perp (A'AC) \Rightarrow HM \perp AA'$

Kẻ $HI \perp AA' \Rightarrow AA' \perp (HMI) \Rightarrow AA' \perp IM$

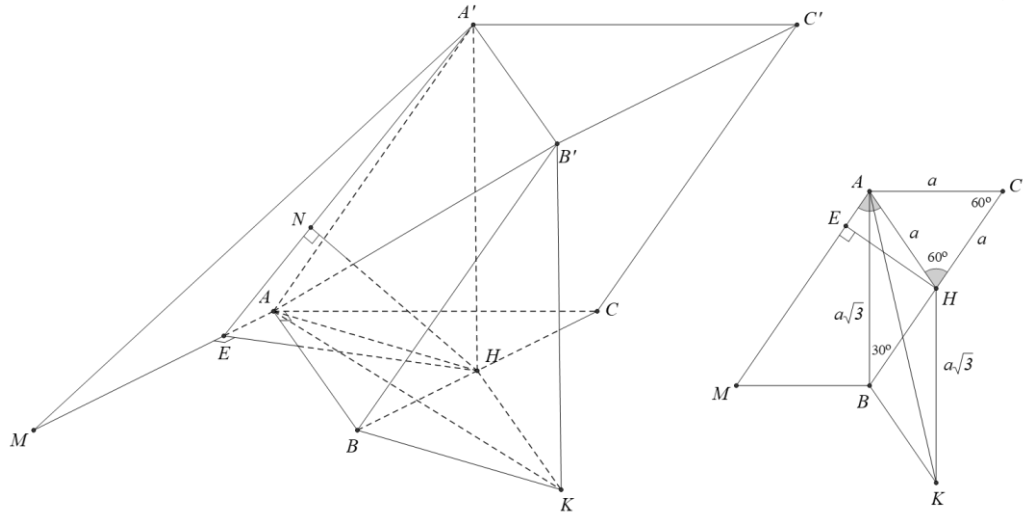
Do đó: góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ chính là HIM và $HIM = 30^\circ$

Lại có: $(AA'; (ABC)) = A'AH = 60^\circ$

$$IH = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HM = HI \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2} \Rightarrow BC = a.$$

$$\text{Do đó } d(B'C; A'H) = CK = \frac{CH \cdot CB}{\sqrt{CH^2 + CB^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 57: Chọn C



Ta có $BC = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) . Do A' cách đều A, B, C nên hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Do đó H là trung điểm của cạnh BC và $\triangle AHC$ đều cạnh a .
 Dựng hình bình hành $HABK \Rightarrow K$ là hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt phẳng (ABC) .

Do đó $\left(AB', (ABC) \right) = \left(AB', AK \right) = A'AK = 60^\circ$.

Áp dụng định lý côsin trong $\triangle AHK$ ta có:

$$AK = \sqrt{AH^2 + HK^2 - 2AH \cdot HK \cdot \cos(150^\circ)} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2 - 2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = a\sqrt{7}.$$

$$\Rightarrow A'H = B'K = AK \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{21}.$$

Dựng hình bình hành $ACBM$ ta có:

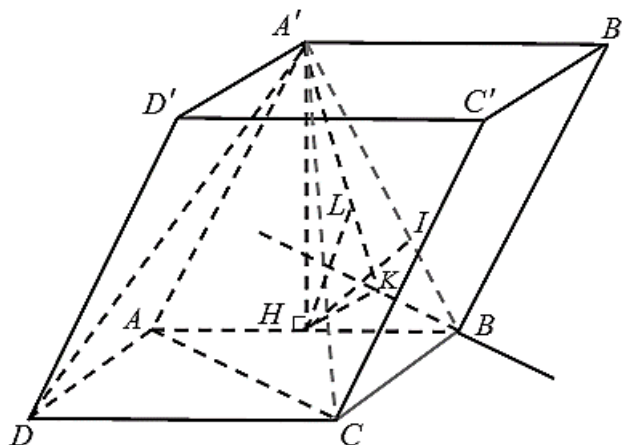
$$BC \parallel AM \Rightarrow d(BC, A'A) = d(BC, (A'AM)) = d(H, (A'AM))$$

Kẻ $HE \perp AM, HN \perp A'E \Rightarrow d(H, (A'AM)) = HN$.

$$\text{Ta có } HE = AH \cdot \sin 60^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{A'H^2} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{609}}{29} = \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}.$$

$$\text{Vậy } d(AA', BC) = d(H, (A'AM)) = \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}.$$

Câu 58: Chọn C



Gọi H là trung điểm của AB khi đó $A'H \perp (ABCD)$

Vẽ đường thẳng d qua B và song song với AC

Gọi K, I, L lần lượt là hình chiếu của H lên $d, A'B, A'K$

$$d(D, (A'BC)) = d(A, (A'BC)) = 2d(H, (A'BC)) = 2HI = \frac{2a}{5} \Rightarrow HI = \frac{a}{5}$$

Xét tam giác vuông $A'HB$ ta có:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{HB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{HI^2} - \frac{1}{HB^2} \Leftrightarrow A'H = \frac{HI \cdot HB}{\sqrt{HB^2 - HI^2}}$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{\frac{a}{5} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{5}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{21}$$

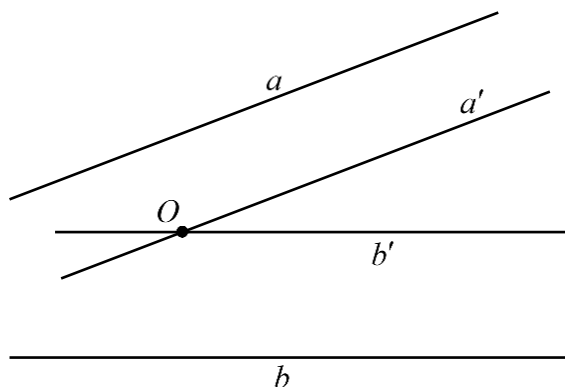
$$\text{Vì } KBH = CAB \text{ nên ta có } \sin KBH = \sin CAB \Leftrightarrow \frac{HK}{HB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow HK = \frac{HB \cdot BC}{AC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC là

$$d(AC, A'B) = d(A, (A'BK)) = 2d(H, (A'BK)) = 2HL = 2 \frac{A'H \cdot HK}{A'K} = 2 \frac{A'H \cdot HK}{\sqrt{A'H^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{26}}{13}.$$

1. Góc giữa hai đường thẳng

- Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b .

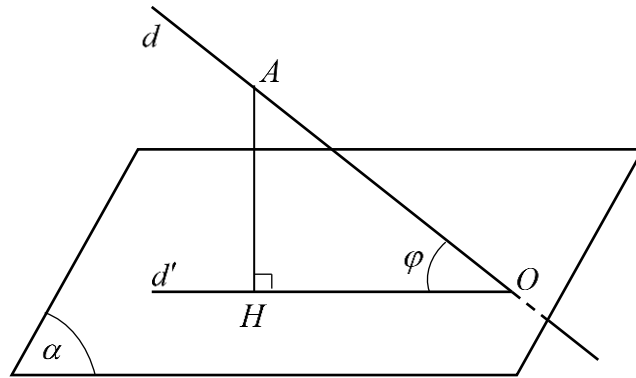


- Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a và b , đồng thời $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.
- Nếu a và b là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .
- Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian, ta thường có hai phương pháp để giải quyết cho dạng toán này:
 - Phương pháp 1:** Sử dụng định nghĩa góc giữa hai đường thẳng, kết hợp sử dụng hệ thức lượng trong tam giác (định lý cos, công thức đường trung tuyến,...).
 - Phương pháp 2:** Sử dụng tích vô hướng của hai vectơ

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α)

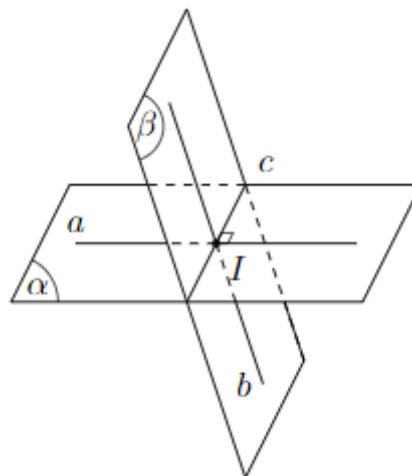
- Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90° .
- Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa đường thẳng d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) .



- Để xác định góc giữa d và (P) , ta thường làm như sau:
 - Xác định giao điểm O của d và (P)
 - Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc H của A lên (P) , khi đó $(d; (P)) = \angle AOH$.
- **Lưu ý:** Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

3. Góc giữa hai mặt phẳng

- **Định nghĩa:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0° .
- **Diện tích hình chiếu của một đa giác:** Cho đa giác H nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích là S và H' là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (β) . Khi đó diện tích S' của hình H' được tính theo công thức: $S' = S \cdot \cos \varphi$, với φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .
- Cách xác định góc của hai mặt phẳng cắt nhau:



- **Bước 1:** Tìm giao tuyến c của (α) và (β) .
- **Bước 2:** Tìm hai đường thẳng a và b lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c tại một điểm.
- **Bước 2:** Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b .

Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng ta có thể tìm góc giữa hai nửa đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của chúng.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi F là trung điểm cạnh AB và G là trung điểm của SF . Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng CG và BD . Tính $\cos \alpha$?

A. $\frac{\sqrt{82}}{41}$.

B. $\frac{\sqrt{41}}{41}$.

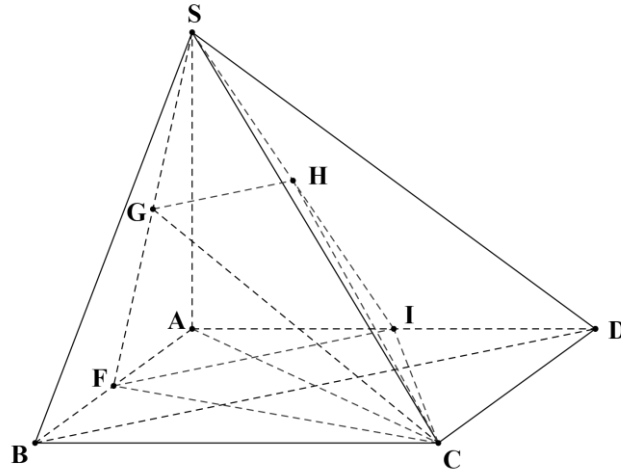
C. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

D. $\frac{\sqrt{82}}{82}$.

LỜI GIẢI

Chọn D

Cách 1.



Gọi I là trung điểm AD và H là trung điểm SI .

Để thấy $GH \parallel FI$ (vì GH là đường trung bình của tam giác SFI)

$BD \parallel FI$ (vì FI là đường trung bình của tam giác ABD)

Nên $GH \parallel BD$ suy ra $(CG; BD) = (CG; GH)$.

$$\text{Ta có } CI = \sqrt{CD^2 + DI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow CF = CI = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$SF = SI = \sqrt{SA^2 + AF^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}; \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Khi đó } CG^2 = \frac{CF^2 + CS^2}{2} - \frac{SF^2}{4} = \frac{\frac{5a^2}{4} + 6a^2}{2} - \frac{9a^2}{4} = \frac{41a^2}{16} \Rightarrow CH = CG = \frac{a\sqrt{41}}{4};$$

$$GH = \frac{1}{2}FI = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Ta có } \cos CGH = \frac{GC^2 + GH^2 - HC^2}{2 \cdot GC \cdot GH} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{41}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{41}}{4}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{41}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{82}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{\sqrt{82}}{82}.$$

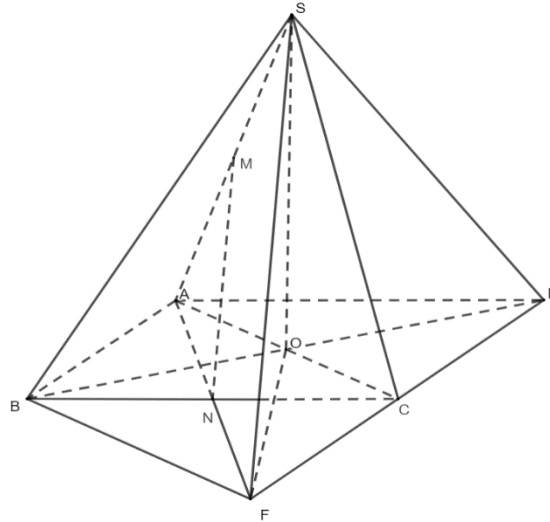
CÂU 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

LỜI GIẢI**Chọn C**

Ta có $AN \cap CD = F$ (suy ra N là trung điểm của AF , NC là đường trung bình trong tam giác AFD)
 $\Rightarrow MN \parallel SF$; $(MN, (ABCD)) = (SF, (ABCD)) = SFO = 60^\circ$.

$$\text{Với } OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; CF = CD = a \Rightarrow OF = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2} - 2a \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos 135^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } SF = \frac{OF}{\cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{2} : \frac{1}{2} = a\sqrt{10}.$$

Ta có $OC \perp BD, OC \perp SO \Rightarrow OC \perp (SBD)$, lại có $OC \parallel BF \Rightarrow BF \perp (SBD)$

Do vậy $(MN, (SBD)) = (SF, (SBD)) = FSB$.

$$BF = 2OC = a\sqrt{2} \text{ (} OC \text{ là đường trung bình trong tam giác } BDF \text{), } SB = \sqrt{SF^2 - BF^2} = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Vậy } \cos BSF = \frac{SB}{SF} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

CÂU 3. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh bằng a và tam giác BCD cân tại D với $DC = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AD > AB$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , khi đó cosin góc giữa hai đường thẳng AG, CD bằng bao nhiêu biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng 30°

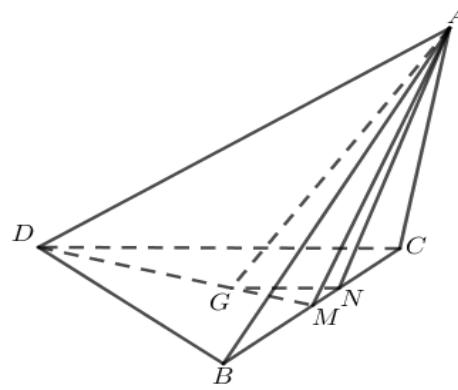
A. $\frac{-13\sqrt{5}}{35}$.

B. $\frac{\sqrt{65}}{13}$.

C. $\frac{-\sqrt{65}}{13}$.

D. $\frac{13\sqrt{5}}{35}$.

LỜI GIẢI**Chọn D**



Theo giả thiết ta có góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng 30° . Suy ra góc giữa MA và MD bằng 30° . Kẻ $GN \parallel CD$ và nối AN .

Vì $AD > AB > AM$ nên góc giữa MA, MD bằng 150° .

$$\text{Góc } DMA = 150^\circ. \text{ Ta có: } MD = \sqrt{DC^2 - MC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = a \Rightarrow MG = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều nên } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Áp dụng định lí Côsin trong } \triangle AMG \text{ ta có: } AG = \frac{7a}{6}, GN = \frac{CD}{3} = \frac{a\sqrt{5}}{6}.$$

$$\text{Trong } \triangle ANC \text{ có } AN = \frac{a\sqrt{7}}{3}. \text{ Trong } \triangle ANG \text{ có } \cos AGN = \frac{AG^2 + GN^2 - AN^2}{2AG \cdot GN} = \frac{13}{7\sqrt{5}}.$$

$$\text{Gọi góc } (AG; CD) = \alpha \text{ thì ta có } \cos \alpha = \frac{13}{7\sqrt{5}} = \frac{13\sqrt{5}}{35}.$$

CÂU 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng $(SAB), (SAD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3}{3}$. Tính góc φ giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) .

A. $\varphi = 45^\circ$.

B. $\varphi = 90^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

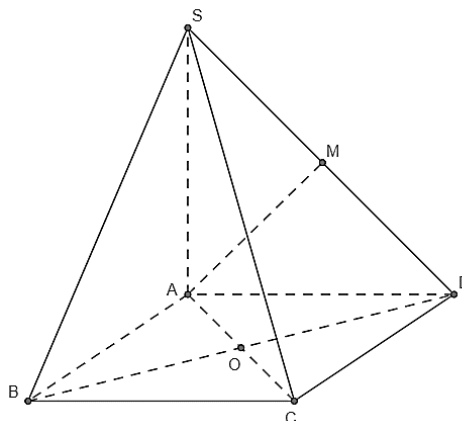
D. $\varphi = 60^\circ$.

LỜI GIẢI

Chọn C

Vì $(SAB), (SAD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ mà $(SAB) \cap (SAD) = SA$.

$$\text{Suy ra } SA \perp (ABCD). \text{ Ta có } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} AB^2 \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \cdot SA = \frac{a^3}{3} \Rightarrow SA = a.$$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SCD) . Có $SB \cap (SCD) = S$.

$\Rightarrow SH$ là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(SCD) \Rightarrow (SB, (SCD)) = (SB, SH) = BSH = \varphi$.

$$\text{Ta có: } \sin \varphi = \frac{BH}{SB} = \frac{d(B, (SCD))}{SB} = \frac{d(A, (SCD))}{SB} = \frac{SA \times AD}{SD \times SB} = \frac{a \times a}{a\sqrt{2} \times a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Vậy góc φ giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng $\varphi = 30^\circ$.

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , O là giao điểm của AC và BD , $ABC = 60^\circ$; SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(53^\circ; 61^\circ)$.

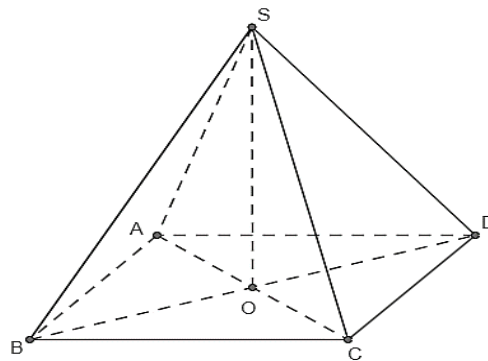
B. $(62^\circ; 66^\circ)$.

C. $(27^\circ; 33^\circ)$.

D. $(25^\circ; 27^\circ)$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Ta có: $BD \perp AC$ (do $ABCD$ là hình thoi) và $BD \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$)
nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

Mà $(SBD) \cap (SAC) = SO \Rightarrow (SB, (SAC)) = (SB, SO) = BSO$.

$$\text{Ta có: } \tan BSO = \frac{OB}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow BSO = \arctan \frac{1}{2} \approx 26,56^\circ.$$

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và $SBA = 30^\circ$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của AB . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, BD) .

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

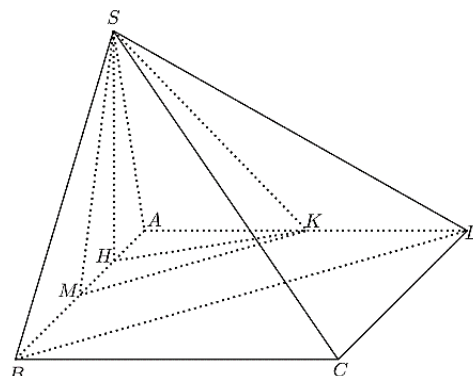
B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Chủ đề 02: Góc trong không gian

Đặt $AB = a$ ($a > 0$).

Ta có $SM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $SA = SA \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$ nên tam giác SAM cân tại S .

Gọi H là hình chiếu của S lên AB , do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ nên $SH \perp (ABCD)$ hay H là trung điểm của AM .

Gọi K là trung điểm của AD , khi đó $(SM, BD) = (SM, MK)$ và $MK = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $SH = HB \cdot \tan 30^\circ = \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $SK^2 = SH^2 + HK^2 = SH^2 + AH^2 + AK^2 = \frac{a^2}{2}$.

Ta có $\cos SMK = \frac{SM^2 + MK^2 - SK^2}{2 \cdot SM \cdot MK} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

CÂU 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $BA = 2AC = 2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, M là trung điểm BC . Cosin góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

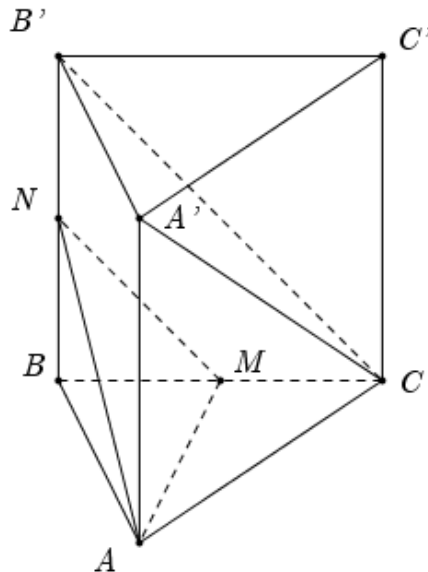
B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Gọi N là trung điểm BB' , ta có $MN \parallel B'C$ nên $(AM, B'C) = (AM, MN)$.

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a$.

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a.$$

$$MN = \frac{B'C}{2} = \frac{\sqrt{BC^2 + BB'^2}}{2} = \frac{\sqrt{5a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{3}{2}a.$$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác MNA ta có:

$$\cos NMA = \frac{MN^2 + MA^2 - AN^2}{2 \cdot MN \cdot MA} = \frac{\frac{9}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - 5a^2}{2 \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy } \cos(AM, B'C) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

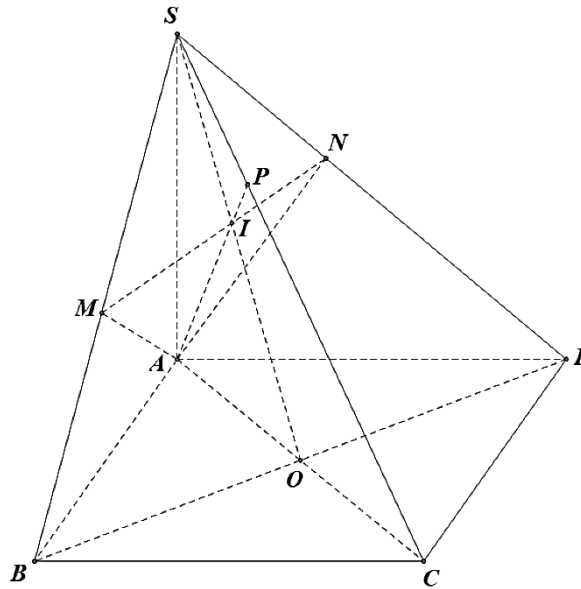
CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD .

Khi đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) bằng

A. 45° B. 60° C. 30° D. 90°

LỜI GIẢI

Chọn B



Cách 1:

Gọi $AC \cap BD = O$, $SO \cap MN = I$, $AI \cap SC = P$.

$AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$ và $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$, do đó: $SC \perp (AMN)$ hay $SC \perp (AMPN)$.

Suy ra: $(SB, (AMN)) = (SM, (AMPN)) = SMP$.

$$\text{Ta có: } SM = \frac{SA^2}{SB} = \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; \quad SP = \frac{SA^2}{SC} = \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 + 2a^2}} = a.$$

$$\text{Nên } \sin SMP = \frac{SP}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SMP = 60^\circ.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } AM = AN = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ và } \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel BD; \frac{MN}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra } MN = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Diện tích tam giác } AMN : S_{\triangle AMN} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$$

$$V_{S.AMN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{S.ABD} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{2\sqrt{2} \cdot a^3}{27} \Rightarrow d(S; (AMN)) = \frac{3V_{S.AMN}}{S_{\triangle AMN}} = a$$

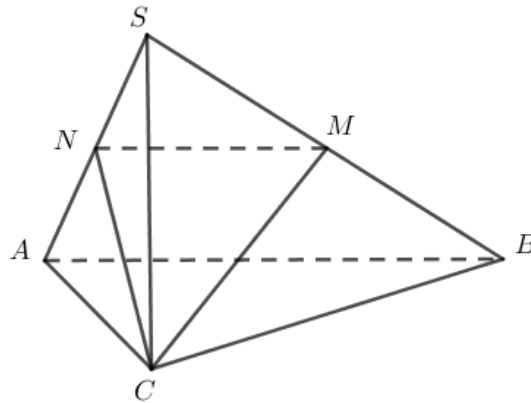
$$\text{Do đó } \sin(SB, AMN) = \frac{d(S; (AMN))}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (SB, AMN) = 60^\circ.$$

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Tam giác SAB vuông cân tại S và $BSC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh SB , φ là góc giữa đường thẳng AB và CM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Đặt $SA = a$. Suy ra $SB = CA = CB = a$ và $AB = a\sqrt{2}$.

Lại có $BSC = 60^\circ$. Suy ra tam giác SBC đều nên $SC = a$.

Suy ra $CM = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (Với N là trung điểm của SA).

Hay MN song song với AB .

Khi đó $(AB, CM) = (MN, CM)$. Áp dụng định lí cosin vào tam giác CMN ta có:

$$\cos CMN = \frac{MC^2 + MN^2 - CN^2}{2MC.MN} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

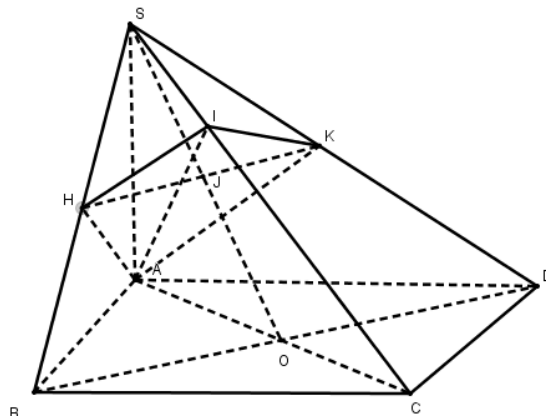
$$\Rightarrow \cos(AB, CM) = \cos(MN, CM) = |\cos CMN| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD . Tang của góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn A



Theo đề ta có $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow SC \perp AH$

Tương tự $AK \perp (SCD) \Rightarrow SC \perp AK$

Từ và ta có $SC \perp (AHK)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD , J là giao điểm của SO và HK , I là giao điểm của AJ và SC .

Vì $SC \perp (AHK)$ nên I là hình chiếu của S lên (AHK) .

Suy ra KI là hình chiếu của SD lên $(AHK) \Rightarrow (SD, (AHK)) = (SD, KI) = SKI$.

Tam giác SAD cân tại A nên $SD = a\sqrt{2}$; $SK = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAC có $SA^2 = SI \cdot SC \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{SC} = \frac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SIK có $IK = \sqrt{SK^2 - SI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Vậy $\tan SKI = \frac{SI}{IK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{2}$

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB = a, SD = a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SCD) thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0^\circ; 20^\circ)$.

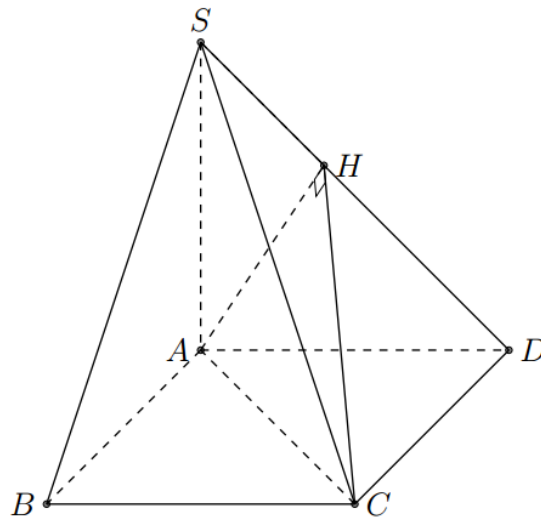
B. $(20^\circ; 40^\circ)$.

C. $(40^\circ; 60^\circ)$.

D. $(60^\circ; 80^\circ)$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Kẻ $AH \perp SD$ tại H . Ta có $AH \perp CD$ (vì $CD \perp (SAD)$ và $AH \subset (SAD)$). Suy ra $AH \perp (SCD)$.

Khi đó HC là hình chiếu vuông góc của AC lên mặt phẳng (SCD) .

Suy ra $(AC, (SCD)) = (AC, HC) = ACH$.

Tam giác SAD vuông tại A và AH là đường cao nên $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = 2a$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$$

Tam giác AHC vuông tại H nên $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow C = 39,23^\circ$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $ABC = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính $\sin$ của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC)
- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.
- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAD đều cạnh a . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính $\sin$ của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) .
- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 3a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm trên BC sao cho $\overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BC}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SM với mặt phẳng (SDN) , khi đó $\tan \alpha$ bằng
- A. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{5\sqrt{31}}{31}$. C. $\frac{\sqrt{186}}{31}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{5}$.
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AOD$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AIC) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$
- A. $2\sqrt{5}$. B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- Câu 5:** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm H của trung tuyến $B'M$. Gọi α là góc tạo bởi mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$. Biết $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{103}}$. Độ dài cạnh bên CC' bằng
- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2a$.
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi F là trung điểm cạnh AB và G là trung điểm của SF . $\cos$ của góc tạo bởi hai đường thẳng CG và BD bằng
- A. $\frac{\sqrt{82}}{41}$. B. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. C. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. D. $\frac{\sqrt{82}}{82}$.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 4, AD = 2$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Lấy các điểm M và N thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NS} + 4\overrightarrow{ND} = \vec{0}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) . Giá trị của $\cos^2 \alpha$ là

- A. $\frac{514}{1465}$. B. $\frac{516}{1465}$. C. $\frac{506}{1465}$. D. $\frac{504}{1465}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = SD = 3a$, $AD = SB = 4a$, $AC \perp (SBD)$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

- A. $\frac{5}{12}$. B. $\frac{15}{16}$. C. $\frac{16}{25}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 9: Cho tứ diện $SBCD$ có $BC = 3a$, $CD = 4a$, $SBC = BCD = SDC = 90^\circ$, góc giữa đường thẳng SD và BC bằng 60° . M là điểm thuộc đoạn BC thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$. Tính sin của góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{33}}{11}$. D. $\frac{\sqrt{33}}{22}$.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , độ dài cạnh bên bằng b . Tìm mối liên hệ giữa a và b để góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng 60° .

- A. $b = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $b = a\sqrt{3}$. C. $b = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ có $SA = AB = 1$ và $AD = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SB , tính cosin của góc giữa tạo bởi hai mặt phẳng (MAD) và (SAC) .

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 12: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $\triangle ABC$ cân tại B ; $AC = a$; $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, khoảng cách hai đáy là $2a$, hình chiếu của A lên $(A'B'C')$ là trung điểm cạnh $A'C'$, gọi N là trung điểm của AA' , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA'}$, $AB' \cap NM = K$, tính góc tạo bởi $((A'KC'), (ABC))$.

- A. 30° . B. 45° . C. 55° . D. 60° .

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm của các cạnh AB . Tính Cosin của góc giữa SC và mặt phẳng (SHD) là.

- A. $\sqrt{\frac{3}{5}}$. B. $\sqrt{\frac{5}{3}}$. C. $\sqrt{\frac{2}{5}}$. D. $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Biết cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(ACC'A')$ bằng $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và AA' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AB .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B và có độ dài các cạnh $AB = BC = 6, AD = 12$. Tam giác SAC vuông tại S và có hình chiếu của S xuống $(ABCD)$ là H thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AH}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Khi đó $\tan(MN, (SAC))$ bằng

A. $\frac{\sqrt{57}}{57}$. B. $\frac{\sqrt{19}}{19}$. C. $\frac{\sqrt{57}}{19}$. D. $\frac{3\sqrt{57}}{19}$.

Câu 16: Cho hai tia $Ax; By$ chéo nhau, hợp với nhau góc 60° nhận $AB = a$ làm đoạn vuông góc chung của chúng, trên By lấy điểm C sao cho $BC = a$. Gọi D là hình chiếu của C trên Ax , φ là góc giữa AC và BD , $\cos \varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{20}$. C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh CD , điểm E trên cạnh SA sao cho $SE = a$, cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (BME) bằng:

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{33}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = CD = DA = 1$. Biết góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng 45° . Gọi α là góc tạo bởi mặt phẳng (ACD) và mặt phẳng (BCD) . Tính $\sin \alpha$?

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sin \alpha = 1$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 2a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính số đo góc giữa đường thẳng SM và (SAD) ;

A. $\arctan \frac{2}{\sqrt{35}}$. B. $\arctan \frac{2}{\sqrt{34}}$. C. $\arctan \frac{2}{\sqrt{37}}$. D. $\arctan \frac{2}{\sqrt{33}}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB vuông cân tại A , cạnh $SD = a\sqrt{5}$. Tính cosin góc giữa (SDC) và (SBC) .

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình thang vuông tại A và B , SA vuông góc với đáy. Biết $AB = 3a$, $AD = SA = 2a$, $BC = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. D. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. SA vuông góc với $(ABCD)$, góc tạo bởi SC và đáy là 60° . Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB . Tính tan của góc tạo bởi (CDG) và $(ABCD)$.

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB = AD = 2a$, $AC = a\sqrt{2}$. Trên các cạnh CB, CD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE = \frac{2}{3}CB$, $CF = \frac{2}{5}CD$. Tính góc tạo bởi $mp(AEF)$ và $mp(BCD)$.

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = a$, $BAD = 60^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SA và $mp(SCD)$.

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Câu 25: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a$, $AB = a\sqrt{7}$ và tam giác ABC vuông tại A , $AA' = a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$, O' trung điểm $B'C'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng BM và CO' .

- A. $\frac{13}{6\sqrt{21}}$. B. $\frac{17}{6\sqrt{21}}$. C. $\frac{17}{12\sqrt{21}}$. D. $\frac{13}{6\sqrt{21}}$.

Câu 26: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. M là một điểm di động trên đoạn AB . Gọi H là hình chiếu của A' trên đường thẳng CM . Tính số đo góc ACM khi tam giác AHC có diện tích lớn nhất.

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 27: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $A'A = A'B = A'C = 2a$. Gọi D là điểm trên cạnh AA' sao cho $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DA'} = \vec{0}$. Tính cosin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (DBC) và $(A'B'C')$.

- A. $\frac{4}{\sqrt{57}}$. B. $\frac{3}{\sqrt{57}}$. C. $\frac{5}{\sqrt{57}}$. D. $\frac{6}{\sqrt{57}}$.

Câu 28: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = 2a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và (SCD) .

- A. 30° . B. 60° . C. $\arcsin \frac{2\sqrt{3}}{7}$. D. $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAC cân và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC . Tính góc tạo bởi BC và (AHK) .

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 15° .

Câu 30: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$ và cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm của SB . Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (MCD) bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 31: . Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD = 2\text{ cm}$, $DC = 1\text{ cm}$, $\angle ADC = 120^\circ$. Cạnh bên $SB = \sqrt{3}\text{ cm}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi SD và mặt phẳng (SAC) . Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.

Câu 32: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân với $AB = AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên $BB' = 2a$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính cosin của góc giữa hai mặt (ABC) và $(AB'I)$.
Biết khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau AA' và BC là $\frac{a}{2}$.

- A. $\sqrt{\frac{7}{39}}$. B. $\sqrt{\frac{7}{71}}$ C. $\sqrt{\frac{7}{13}}$ D. $\sqrt{\frac{7}{37}}$

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\frac{a^3}{12}$ và có $AC = CD = DB = a$. Biết hình chiếu vuông góc của A và B trên cạnh CD lần lượt là M và N sao cho C, M, N, D theo thứ tự cách đều nhau. Biết góc giữa hai đường thẳng AM và BN bằng φ . Giá trị $\cos \varphi$ bằng:

- A. $\frac{9}{16}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{5\sqrt{7}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{13}}{6}$.

Câu 34: Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết $SA = SB = SC = a$ và góc giữa SA với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) . Giá trị của $\cos \varphi$ bằng

- A. $\frac{11}{42}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{10}$. D. $\frac{11}{43}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB , $SH = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SBC) . Tính $\cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ D. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

Câu 36: Cho tam giác đều ABC có chiều cao $AH = 5a$. Điểm O thuộc đoạn thẳng AH sao cho $AO = a$. Điểm S trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O và $SO = 2a$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

- A. $\frac{1}{2\sqrt{85}}$. B. $\frac{85}{2\sqrt{85}}$. C. $\frac{7}{\sqrt{85}}$. D. $\frac{7}{2\sqrt{85}}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết $AB = BC = a, AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm AD và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) , khi đó

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{10}$. C. $\cos \alpha = 0$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$, $BC = a$, tam giác ABC vuông tại B . Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , (α) là mặt phẳng chứa CG và song song với AB . Giá trị của cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (SAB) là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 39: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A ; $AB = AC = a$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt đáy bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BB', CC' và G là trọng tâm tam giác $AB'C'$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (GMN) và $(GB'C')$.

- A. $\frac{\sqrt{35}}{16}$. B. $\frac{\sqrt{70}}{35}$. C. $\frac{2\sqrt{70}}{35}$. D. $\frac{\sqrt{35}}{8}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $BD = a$, $SO \perp (ABCD)$. M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SD . Đường thẳng MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) . Tính $\sin \alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{14}}{28}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{14}$. C. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$. D. $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Biết $AD = 6a$ và $AB = BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy trùng với trung điểm cạnh CD . Gọi φ là góc giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SBD) biết rằng $\sin \varphi = \frac{\sqrt{465}}{155}$. Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .

Câu 42: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm AB . Tính cosin của góc tạo bởi đường thẳng $D'M$ và mặt phẳng $(ACC'A')$.

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi E, N lần lượt là trung điểm AB, BC . M là trung điểm AE , Khi đó cosin góc giữa hai đường thẳng DM và SN bằng

- A. $\frac{2\sqrt{17}}{51}$. B. $\frac{2\sqrt{34}}{51}$. C. $\frac{\sqrt{17}}{51}$. D. $\frac{\sqrt{105}}{14}$.

Câu 44: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , độ dài cạnh bên cũng bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC . Góc giữa MN và SC bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

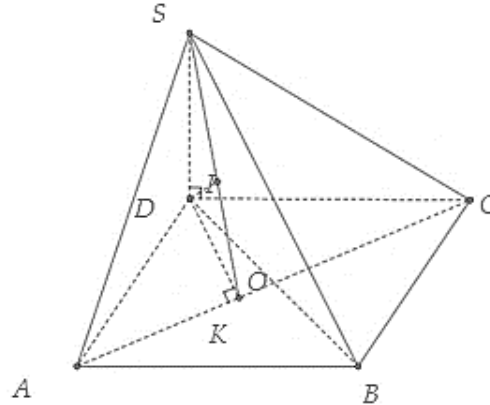
Câu 45: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'ACD$ là tứ diện đều, cạnh a . Gọi G là trọng tâm ΔACD , M là trung điểm của CC' . Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(A'GC)$.

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

- Câu 46:** Cho tam giác ABC có $BC = a$, $BAC = 135^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB , SC lần lượt là M , N . Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là?
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .
- Câu 47:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AC = a$, góc $ABC = 30^\circ$ và cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.
- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{70}}{10}$. D. $\frac{\sqrt{70}}{6}$.
- Câu 48:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình vuông cạnh a . $SH \perp (ABCD)$, H là trung điểm AB ; $SH = a$. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$; điểm N trung điểm cạnh CD . Tính tang góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SMN)
- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{13}{5}$. D. $\frac{12}{5}$.
- Câu 49:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Các tam giác SAB , SAD vuông tại A . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD biết $SA = 3a$, $AB = a$, $AD = 4a$
- A. $\frac{13}{\sqrt{442}}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{14}{\sqrt{442}}$. D. $\frac{15}{\sqrt{442}}$.
- Câu 50:** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách giữa hai đáy bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{5}}{3}$, $AC = AB = a\sqrt{2}$, $A'C = A'B = a$, biết $BC < 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng
- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C



$$\text{Ta có } \sin(SB; (SAC)) = \frac{d(B; (SAC))}{SB} = \frac{d(D; (SAC))}{SB}.$$

$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ ta có } AC = \sqrt{BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos ABC} = a\sqrt{7}.$$

$$BO = \sqrt{\frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{2} - \frac{7a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BD = a\sqrt{3} \text{ và } SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Xét tam giác } ADC \text{ ta có } \frac{AD}{\sin C} = \frac{AC}{\sin D} \Rightarrow \sin C = \frac{AD \cdot \sin D}{AC} = \frac{a \cdot \sin 120^\circ}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Gọi K là hình chiếu của D lên AC, và I là hình chiếu của D lên SK. Ta có

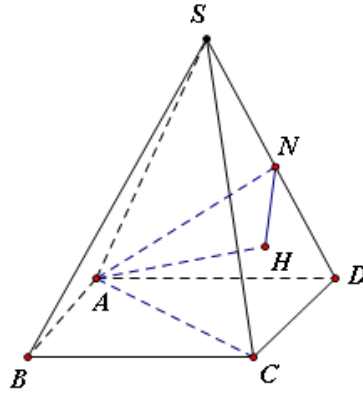
$$\begin{cases} AC \perp DK \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp DI. \text{ Do đó } \begin{cases} DI \perp SK \\ DI \perp AC \end{cases} \Rightarrow d(D; (SAC)) = DI.$$

$$\text{Mặt khác } \sin C = \frac{DK}{DC} \Rightarrow DK = DC \cdot \sin C = 2a \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Xét tam giác } SDK \text{ ta có } DI = \frac{SD \cdot DK}{\sqrt{SD^2 + DK^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7}}{\sqrt{3a^2 + \frac{21}{49}a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

$$\text{Vậy } \sin(SB; (SAC)) = \frac{d(D; SAC)}{SB} = \frac{DI}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{4}.$$

Câu 2: Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A trên (SCD) .

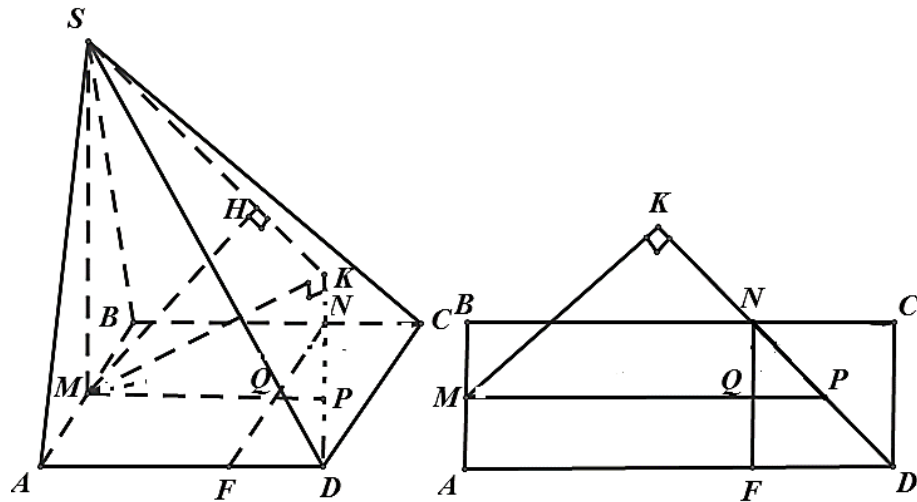
Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $AH = d(A, (SCD)) = d(B, (SCD)) = \frac{a}{2}$.

Gọi N là trung điểm của $SD \Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SD \perp AN$ (do tam giác SAD đều)

Do đó $SD \perp HN$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) là ANH .

$$\text{Ta có: } \sin ANH = \frac{AH}{AN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 3: Chọn A



M là trung điểm của AB thì $SM \perp (ABCD)$. Ta có $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AB , đường thẳng này cắt AD tại F .

Qua M kẻ đường thẳng song song với BC , đường thẳng này cắt NF, ND lần lượt tại Q và P

Trong mp $(ABCD)$, kẻ $MK \perp DN$. Do $\begin{cases} MK \perp DN \\ DN \perp SM \end{cases} \Rightarrow DN \perp (SMK)$.

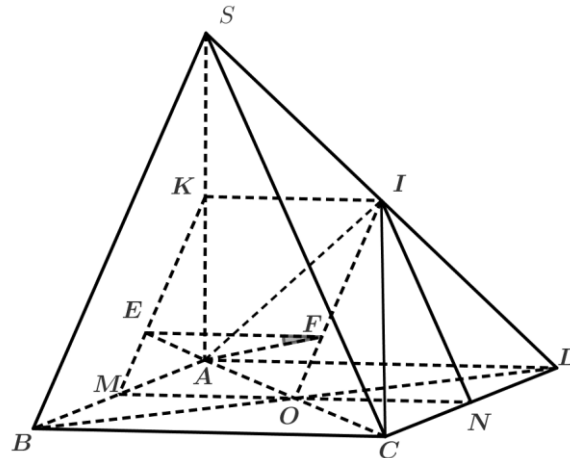
Kẻ $MH \perp SK$, vì $DN \perp MH$ nên $MH \perp (SDN) \Rightarrow (SM; (SDN)) = (SM; SH) = MSH$.

Ta có ΔPQN vuông cân nên ΔKMP vuông cân tại K suy ra $MK = \frac{MP}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{5a}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5a\sqrt{2}}{4}$.

Trong tam giác SMK có $\tan MSH = \frac{MK}{MS} = \frac{\frac{5a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.

Câu 4: Chọn D

Cách 1.



Gọi I là trung điểm của SD ta chứng minh I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AOD$

Thật vậy: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OD \perp SA$ mà $OD \perp AO \Rightarrow OD \perp (SAO) \Rightarrow \Delta SOD$ vuông tại $O \Rightarrow OI = IS = ID$. Mặt khác ΔSAD vuông tại $A \Rightarrow OA = IS = ID$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AOD$.

Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AB, CD . Dễ dàng nhận thấy mặt phẳng $(IKMN) \parallel (SBC)$. Khi đó góc giữa mặt phẳng (AIC) và (SBC) bằng góc giữa mặt phẳng (AIC) và $(IKMN)$.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên KM ta chứng minh được E cũng là hình chiếu của A lên mặt phẳng $(IKMN)$.

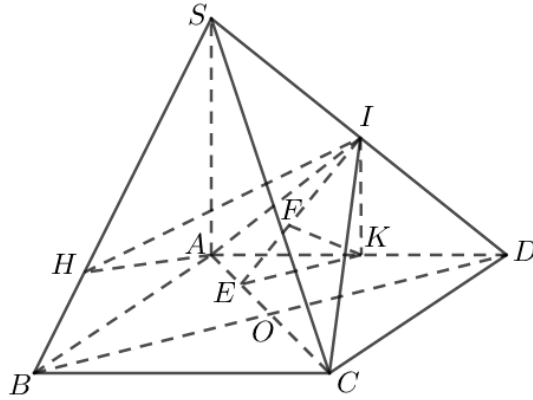
Thật vậy: $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp AE$, mặt khác $AE \perp KM \Rightarrow AE \perp (IKMN)$.

Kẻ EF song song với IK với F là điểm thuộc IO . Ta có $EF \perp IO$ khi đó do $OI \parallel KM$; $KM \perp (AEF) \Rightarrow OI \perp (AEF) \Rightarrow AF \perp OI$. Suy ra $\angle AFE = \alpha$.

Tam giác AKM vuông tại A có AE là đường cao.

Ta có $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AE = \frac{AK \cdot AM}{\sqrt{AK^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác AEF vuông tại E nên $\tan \alpha = \frac{AE}{EF} = \frac{a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



Do $SAD = SOD = 90^\circ$ nên I là trung điểm của SD thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AOD$.

Gọi H là hình chiếu của A lên SB thì $AH \perp (SBC)$ và $AH = \frac{AS \cdot SB}{\sqrt{AS^2 + SB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Khi đó $\left((ACI), (SBC) \right) = 90^\circ - \left((ACI), AH \right)$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sin \left((ACI), AH \right) = \frac{d(H, (ACI))}{AH} = \frac{d(D, (ACI))}{AH}.$$

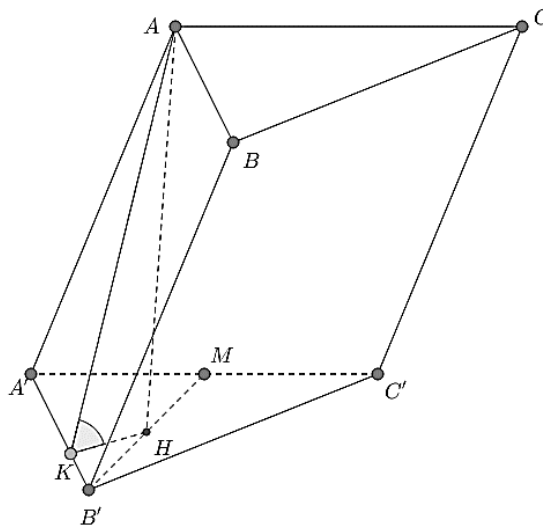
Gọi K là trung điểm của AD thì $IK \perp (ABCD)$ và $IK = a$.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của K lên AC, IE thì $KF \perp (ACI)$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{KF^2} = \frac{1}{KE^2} + \frac{1}{KI^2} = \frac{16}{BD^2} + \frac{1}{KI^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow KF = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Do đó } \cos \alpha = \frac{d(D, (ACI))}{AH} = \frac{2d(K, (ACI))}{AH} = \frac{2 \cdot KF}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{3}. \text{ Vậy } \tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

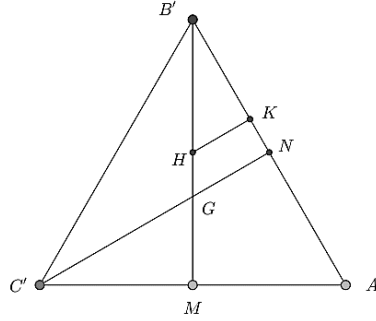
Câu 5: Chọn B



Từ H kẻ HK vuông góc với $A'B'$, $K \in A'B'$. Khi đó $\alpha = AKH$ là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$.

Ta có: $A'B'C'$ là tam giác đều, gọi N là trung điểm của $A'B'$, G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Khi đó HK song song với $C'N$ và $\frac{HK}{C'N} = \frac{HK}{3GN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{B'H}{B'G} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow HK = \frac{1}{4}a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

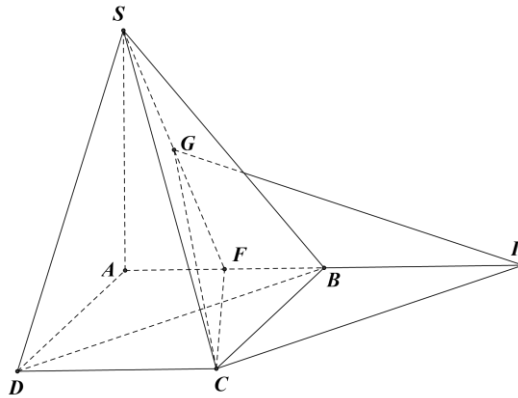


Gọi cạnh $CC' = x = AA'$. Khi đó $A'H = \sqrt{HM^2 + A'M^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$

$$AH = \sqrt{x^2 - A'H^2} = \sqrt{x^2 - \frac{7a^2}{16}}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{103} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2 - \frac{7a^2}{16}}}{\frac{a\sqrt{3}}{8}} \Rightarrow x = a\sqrt{2}.$$

Vậy $CC' = a\sqrt{2}$.

Câu 6: Chọn D



Gọi I là điểm đối xứng của A qua B . Ta có $BDCI$ là hình bình hành nên $CI \parallel BD \Rightarrow \cos(CG, BD) = \cos(CG, CI)$.

$$\text{Mặt khác: } SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

$$CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; SF = \sqrt{SA^2 + AF^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

$$CG = \sqrt{\frac{SC^2 + CF^2}{2} - \frac{SF^2}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{6})^2}{2} - \frac{\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2}{4}} = \frac{a\sqrt{41}}{4}.$$

$$\text{Mà } CI = BD = a\sqrt{2}; IF = \frac{3}{2}BI = \frac{3a}{2}.$$

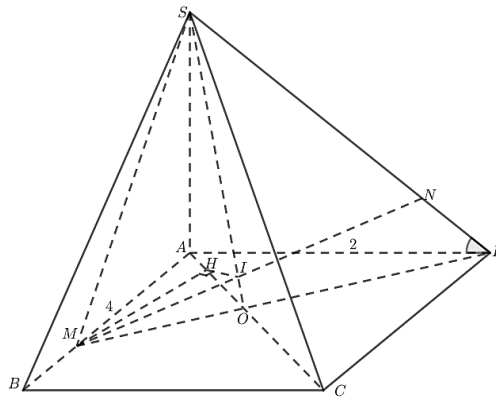
$$SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2a\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow IG = \sqrt{\frac{IF^2 + SI^2}{2} - \frac{SF^2}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (2a\sqrt{2})^2}{2} - \frac{\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2}{4}} = \frac{a\sqrt{65}}{4}.$$

$$\text{Do đó } \cos GCI = \frac{CG^2 + CI^2 - IG^2}{2CG \cdot CI} = \frac{\sqrt{82}}{82}. \text{ Vậy } \cos(CG, BD) = \cos(CG, CI) = \frac{\sqrt{82}}{82}.$$

Câu 7: Chọn D

Cách 1:



$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SAD) \supset SD \perp CD \\ (ABCD) \supset AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = SDA = 45^\circ.$$

Tam giác SAD vuông tại A : $SA = AD \cdot \tan 45^\circ = 2 \cdot 1 = 2$.

Gọi $MD \cap AC = \{O\}$. Trong mặt phẳng (SMD) : $SO \cap MN = \{I\}$.

Suy ra $MN \cap (SAC) = \{I\}$ (1)

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $MH \perp AC$, ta lại có $MH \perp SA$ suy ra $MH \perp (SAC)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $(MN, (SAC)) = \angle MIH = \alpha$.

Ta tính được $SM = \sqrt{MA^2 + SA^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

$$MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

$$\text{Trong tam giác } SMD \text{ ta có } \cos MSD = \frac{SM^2 + SD^2 - MD^2}{2 \cdot SM \cdot SD} = \frac{(\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

Theo bài ra $SN = \frac{4}{5}SD = \frac{4}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SMN có

$$MN = \sqrt{SM^2 + SN^2 - 2 \cdot SM \cdot SN \cdot \cos MSN} = \frac{\sqrt{293}}{5}.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác MND với bộ 3 điểm O, I, S thẳng hàng

$$\frac{OM}{OD} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{SD}{SN} = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{5}{4} = 1 \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{16}{15}.$$

Mà $MN = \frac{\sqrt{293}}{5}$ nên $IM = \frac{3\sqrt{293}}{31}$.

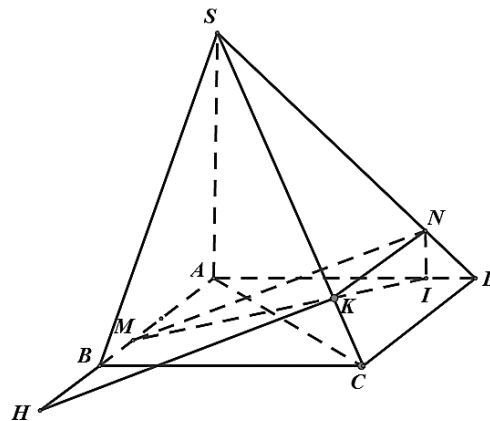
Xét tam giác ABC vuông tại B có $\sin BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác AMH vuông tại H ta có $MH = AM \sin MAH = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Do $MH \perp (SAC)$ (chứng minh trên) nên $MH \perp HI$ hay tam giác MHI vuông tại H suy ra

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 MIH = \frac{HI^2}{MI^2} = \frac{MI^2 - MH^2}{MI^2} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{293}}{31}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2}{\frac{3\sqrt{293}}{31}} = \frac{504}{1465}.$$

Cách 2:



Do $CD \perp (SAD) \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = SDA = 45^\circ \Rightarrow SA = 2$.

Gọi I là hình chiếu của N xuống AD .

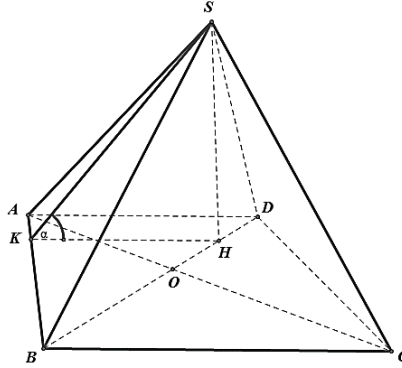
Khi đó $IN = \frac{1}{5}SA = \frac{2}{5}$, $IM = \sqrt{AI^2 + AM^2} = \frac{17}{5} \Rightarrow MN = \sqrt{IN^2 + IM^2} = \frac{\sqrt{293}}{5}$.

Dựng hình bình hành $MNKH$, $K \in SC, NK \parallel CD$ thì $NK = \frac{16}{5} \Rightarrow HB = \frac{11}{5}$.

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \sin(HK, (SAC)) = \frac{d(H, (SAC))}{HK} = \frac{HA}{AB} \cdot \frac{d(AB, AC)}{HK} = \frac{31}{20} \cdot \frac{d(AB, AC)}{HK} = \frac{31}{\sqrt{1465}}.$$

$$\text{Vậy } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{504}{1465}.$$

Câu 8: Chọn B



Ta có $AC \perp (SBD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$ và $(ABCD) \cap (SBD) = BD$.

Trong mặt phẳng (SBD) , dựng $SH \perp BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$; $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ (1).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng $HK \parallel AD \Rightarrow HK \perp AB$ (2).

Mặt khác $\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp SH \text{ (do } SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow SK \perp AB$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ là $(HK, SK) = SKH = \alpha$.

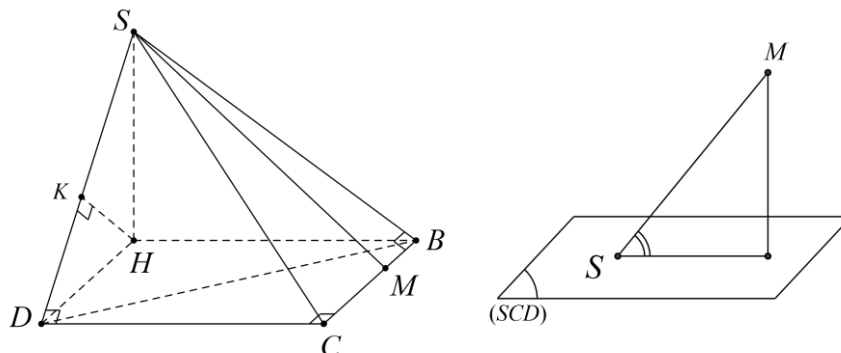
Ta có $SB^2 + SD^2 = AD^2 + AB^2 = BD^2 = 25a^2 \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S và $BD = 5a$.

$$\text{Suy ra } SH \cdot BD = SB \cdot SD \Rightarrow SH = \frac{SB \cdot SD}{BD} = \frac{12a}{5}; \quad SB^2 = BD \cdot BH \Leftrightarrow \frac{BH}{BD} = \frac{SB^2}{BD^2} = \frac{16a^2}{25a^2} = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Trong tam giác } ABD \text{ có } HK \parallel AD \text{ nên } \frac{HK}{AD} = \frac{BH}{BD} = \frac{16}{25} \Rightarrow HK = \frac{16}{25} \cdot 4a = \frac{64}{25}a.$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \frac{SH}{HK} = \frac{15}{16}.$$

Câu 9: Chọn D



Dựng $SH \perp (BCD), H \in (BCD)$. Ta có: $\begin{cases} BC \perp SB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBH) \Rightarrow BC \perp HB$.

$\begin{cases} CD \perp SD \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHD) \Rightarrow CD \perp HD$. Suy ra tứ giác $HBCD$ là hình chữ nhật.

Ta có $(SD, BC) = (SD, DH) = 60^\circ \Rightarrow SDH = 60^\circ \Rightarrow SH = HD\sqrt{3} = 3\sqrt{3}a$.

Gọi α là góc giữa đường thẳng SM và (SCD) , ta có: $\sin \alpha = \frac{d(M, (SCD))}{SM}$.

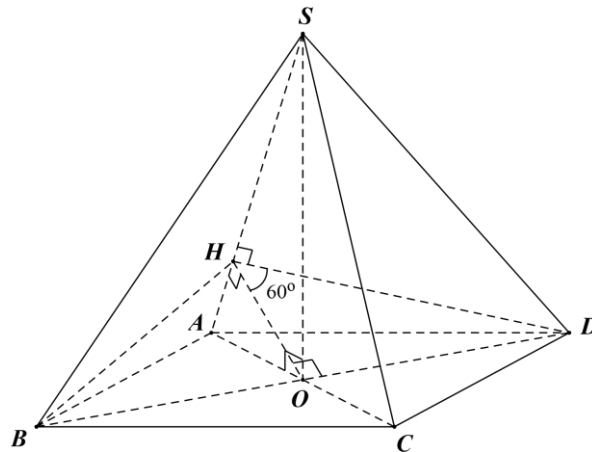
$$\begin{aligned} SM &= \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{SH^2 + HB^2 + BM^2} = \sqrt{SH^2 + CD^2 + \left(\frac{BC}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{3}a)^2 + (4a)^2 + a^2} = 2a\sqrt{11}. \end{aligned}$$

Dựng $HK \perp SD$ tại K , ta có $\begin{cases} HK \perp SD \\ HK \perp CD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H, (SCD)) = HK$.

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{27a^2} + \frac{1}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

$$d(M, (SCD)) = \frac{2}{3}d(B, (SCD)) = \frac{2}{3}d(H, (SCD)) = \frac{2HK}{3} = \sqrt{3}a. \text{ Vậy } \sin \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{22}.$$

Câu 10: Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và H là hình chiếu của O lên SA .

Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ SA \perp OH \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BHD)$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} (SAB) \cap (SAD) = SA \\ (BHD) \perp SA \\ (BHD) \cap (SAB) = BH \\ (BHD) \cap (SAD) = DH \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SAD)) = (BH, DH) = 180^\circ - BHD = 60^\circ$$

$$\Rightarrow BHD = 120^\circ \text{ (do } BHD > BAD = 90^\circ \text{)}.$$

Để thấy rằng $\triangle BHD$ cân tại H nên $OHD = 60^\circ$.

$$\text{Xét tam giác } OHD \text{ vuông tại } O \text{ ta có } OH = \frac{OD}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAO \text{ vuông tại } O \text{ và } OH \text{ là đường cao ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OS = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Lúc đó ta có } SA = \sqrt{OA^2 + OS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra } b = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 11: Chọn D

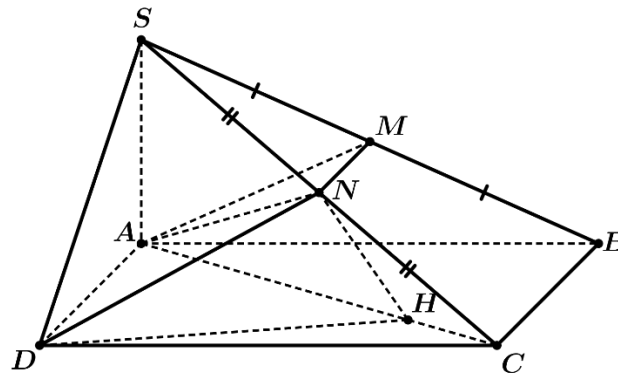
$$\text{Gọi } (MAD) \cap (SBC) = \Delta, \text{ suy ra } M \in \Delta. \text{ Ta có } \begin{cases} AD \subset (MAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AD \parallel BC.$$

Suy ra Δ là đường thẳng đi qua M và song song với BC .

Trong mặt phẳng (SBC) , gọi N là trung điểm SC , suy ra $MN \parallel BC \Rightarrow \Delta \equiv MN$.

Ta có $(MAD) \equiv (MADN)$ và có $(MADN) \cap (SAC) = AN$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vẽ $DH \perp AC$ tại H .



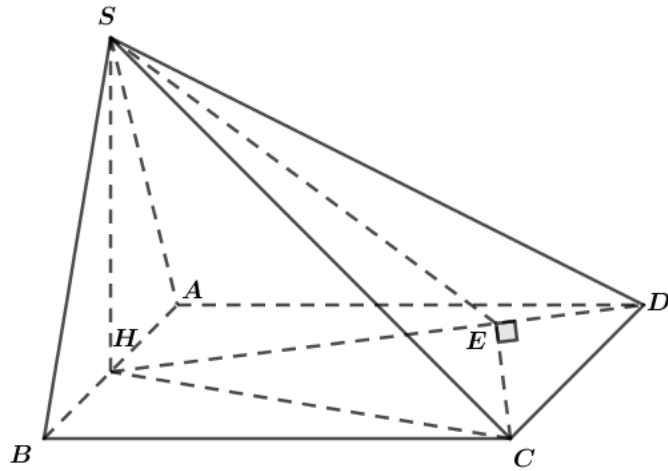
$$\text{Ta có } \begin{cases} DH \perp AC \\ DH \perp SA \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAC).$$

$$\text{Gọi } \varphi = ((MAD), (SAC)) \Rightarrow \varphi = ((ADN), (SAC)), \text{ ta có } \cos \varphi = \frac{S_{\triangle AHN}}{S_{\triangle ADN}}.$$

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2 \Rightarrow DH = \frac{AD \cdot CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{3}{4}.$$

Suy ra $IB = \frac{2}{3}a$. Khi đó: $\tan KHB' = \frac{KI}{IH} = 1 \Rightarrow KHB' = 45^\circ$.

Câu 13: Chọn A



Ta có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2$ suy ra ΔSBC vuông tại $B \Rightarrow BC \perp SB$ mà $BC \perp AB$
 $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$ mà $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

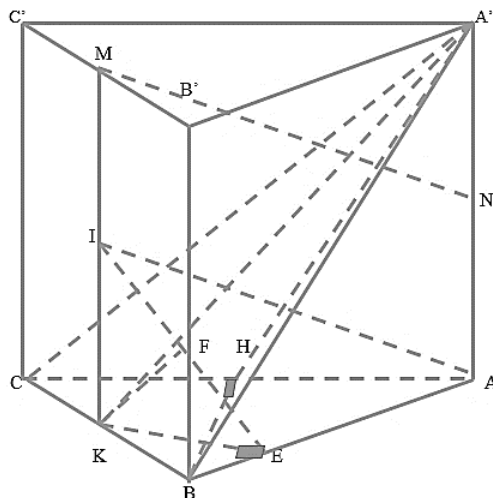
Kẻ $CE \perp HD$ mà $CE \perp SH \Rightarrow CE \perp (SHD) \Rightarrow (SC, (SHD)) = (SC, SE) = CSE$

Ta có $S_{\Delta CDH} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}CE.HD = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Leftrightarrow CE.HD = a^2 \Rightarrow CE = \frac{a^2}{HD}$

Mà $HD = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow CE = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$

$\Rightarrow SE = \sqrt{SC^2 - CE^2} = \frac{a\sqrt{30}}{5} \Rightarrow \cos CSE = \frac{SE}{SC} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Câu 14: Chọn D



Gọi H là trung điểm của AC . Ta có $BH \perp (ACC'A')$.

Vậy tam giác $A'CH$ là hình chiếu vuông góc của tam giác $A'CB$ trên mặt phẳng $(ACC'A')$.

Gọi $AA' = x$. Ta có $S_{A'CH} = \frac{1}{2}ax$.

Gọi K là trung điểm của BC . Ta có: $A'B = \sqrt{4a^2 + x^2} \Rightarrow A'K = \sqrt{3a^2 + x^2}$.

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2}A'K \cdot BC = a\sqrt{3a^2 + x^2}.$$

Vì cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(ACC'A')$ bằng $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ nên

$$S_{A'CH} = S_{A'BC} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}ax = a\sqrt{3a^2 + x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}.$$

Gọi I là trung điểm của MK .

Vì tứ giác $MNAI$ là hình bình hành nên $MN \parallel AI \Rightarrow MN \parallel (ABI)$.

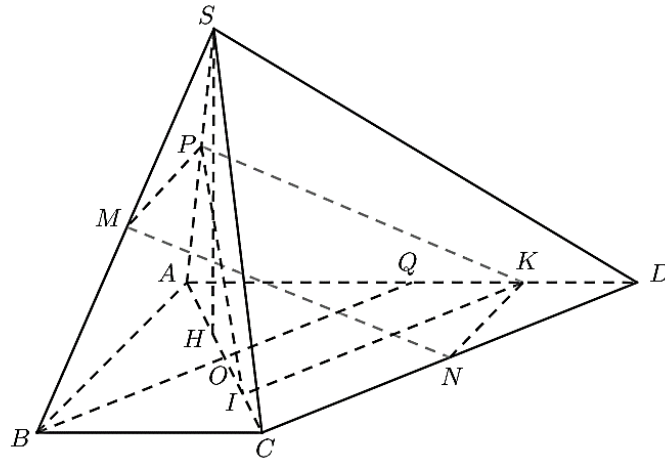
$$\text{Vậy } d(MN, AB) = d(MN, (ABI)) = d(M, (ABI)) = d(K, (ABI)).$$

Từ K dựng $KE \perp AB$. Dựng $KF \perp IE \Rightarrow d(K, (ABI)) = KF$.

$$\text{Xét tam giác } KIE \text{ có } KE = \frac{a\sqrt{3}}{2}; IK = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{KF^2} = \frac{1}{KE^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{8}{3a^2} \Rightarrow KF = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Vậy } d(MN; AB) = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 15: Chọn D



Gọi P, Q, K lần lượt là trung điểm của SA, AD, QD . Khi đó $MNKP$ là hình bình hành nên $(MN, (SAC)) = (PK, (SAC)) = \alpha$. Gọi O, I lần lượt là trung điểm của AC, OC .

Ta có $QO \perp (SAC)$ nên $IK \perp (SAC)$. Suy ra $\alpha = KPI$.

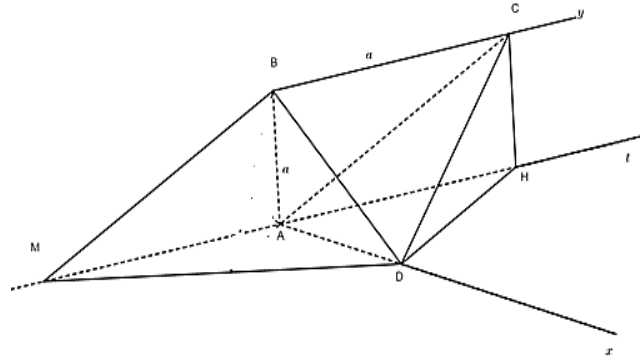
$$\text{Do } AC = 6\sqrt{2} \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}, HC = 4\sqrt{2} \Rightarrow SH^2 = HA \cdot HC \Leftrightarrow SH = 4.$$

$$\cos SAH = \frac{HA}{\sqrt{SH^2 + HA^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Lại có: +) $AI = \frac{3}{4}AC = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $IP^2 = AP^2 + AI^2 - 2AP.AI.\cos SAH = \frac{57}{2}$.

$KI = \frac{3}{2}QO = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. Vậy $\tan \alpha = \frac{IK}{PI} = \frac{3\sqrt{57}}{19}$.

Câu 16: Chọn D
Cách 1.



Gọi At là đường thẳng song song với By suy ra $AB \perp mp(At; Ax)$

Gọi H là hình chiếu của C trên At thì $CH \parallel AB$, ta có $\left. \begin{array}{l} AD \perp CD \\ AD \perp CH \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp HD$

Vậy tam giác AHD vuông tại D có $DAH = 60^\circ \Rightarrow AD = AH.\cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

Gọi M đối xứng với H qua A nên M nằm trên đường thẳng At và $BM \parallel AC \Rightarrow \varphi = (AC, BD) = (BM, BD)$.

Tam giác BAD vuông tại $A \Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$, $BM = AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý hàm số cosin cho tam giác AMD : $MD^2 = MA^2 + AD^2 - 2MA.AD.\cos MAD$

$$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a.\frac{a}{2}\cos 120^\circ = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow MD^2 = \frac{7a^2}{4}.$$

Áp dụng hệ quả của định lý hàm số cosin cho tam giác BMD :

$$\cos MBD = \frac{MB^2 + BD^2 - MD^2}{2MB.BD} = \frac{2a^2 + \frac{5a^2}{4} - \frac{7a^2}{4}}{2.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

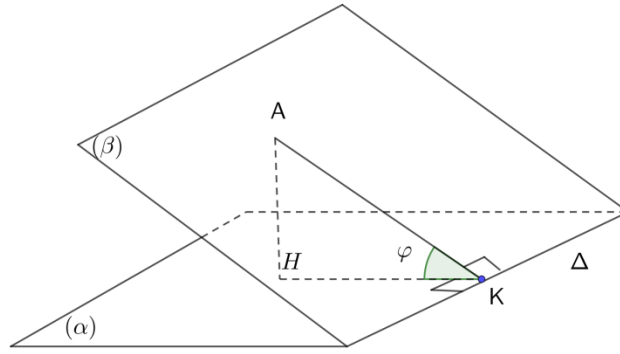
Do $\cos MBD > 0$ nên $\varphi = (AC, BD) = MBD \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3\sqrt{10}}{20}$.

Gọi H là hình chiếu của C trên At thì $CH \parallel AB$, ta có $\left. \begin{array}{l} AD \perp CD \\ AD \perp CH \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp HD$

Ta có $BD = \frac{\sqrt{5}}{2}a, AC = \sqrt{2}a$.

$$\text{Suy ra } \cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{AC \cdot BD} = \frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

89 | Facebook tác giả: Phan Nhật Linh - SĐT: 0817.098.716



Trong $(ABCD)$ gọi $G = BM \cap AC \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác BCD ; $BM \cap AD = F$, ta có:

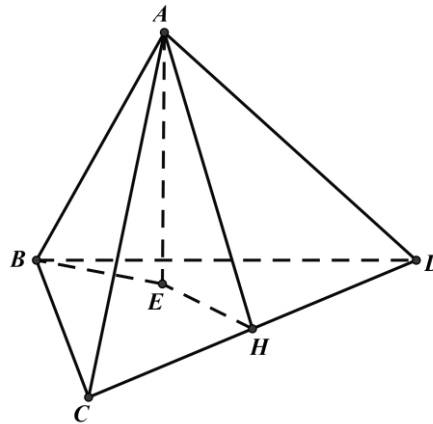
$MD \parallel AB; AB = 2MD \Rightarrow D$ là trung điểm $AF \Rightarrow AF = 2a$.

Ta có: $(SAC) \cap (BME) = EG \Rightarrow \sin \varphi = \frac{d(A, (BME))}{d(A, EG)}$, với $((SAC), (BME)) = \varphi$

Gọi $h = d(A, (BEF)) \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Gọi $k = d(A, EG) \Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AG^2} \Rightarrow k = \frac{2a\sqrt{22}}{11} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{33}}{6} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 18: Chọn C



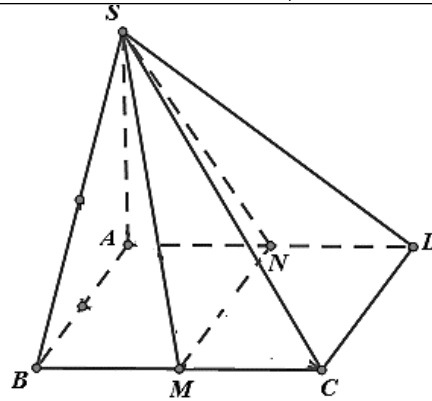
Gọi E là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) . Gọi H là trung điểm của CD .

$\Rightarrow (AB, (BCD)) = (AB, BE) = 45^\circ \Rightarrow AE = AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có tam giác $\triangle ADC$ đều $\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mà $((ACD), (BCD)) = (AH, EH) = AHE = \alpha$. Do đó $\sin \alpha = \sin AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 19: Chọn D



Đặt α là góc giữa SM và (SAD) . Dựng $MN \perp AD, N \in AD$.

Lập luận $MN \perp (SAD)$ vì $MN \perp AD, MN \perp SA$

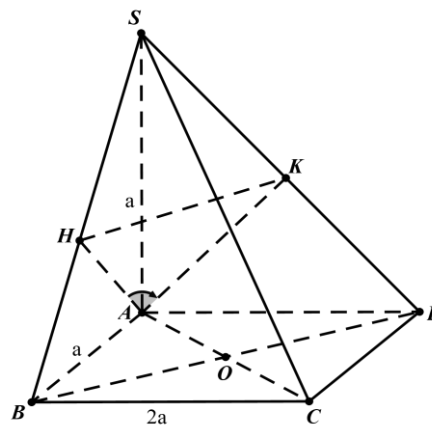
Suy ra: SM có hình chiếu là SN trên (SAD) . Vậy $\alpha = (SM, SN) = MSN$

Lập luận $MN = a, SN = \frac{a\sqrt{33}}{2}$

Trong $\triangle SMN$ có $\tan \alpha = \frac{MN}{SN} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{33}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{33}}$. Suy ra $\alpha = \arctan \frac{2}{\sqrt{33}}$.

Vậy góc giữa SM và (SAD) là $\alpha = \arctan \frac{2}{\sqrt{33}}$

Câu 20: Chọn B

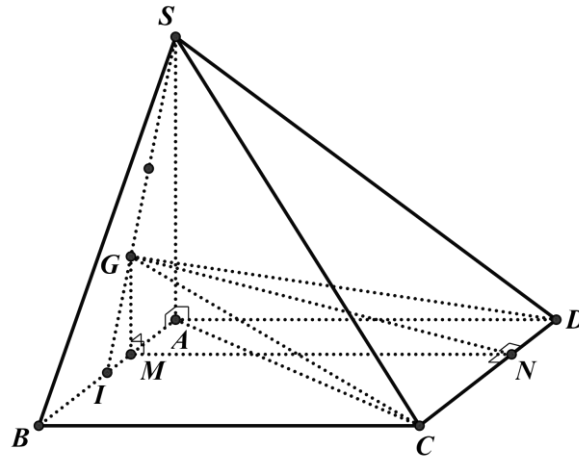


$\triangle SAB$ vuông cân tại A, suy ra $SA = AB = a$

Lại có $SA^2 + AD^2 = 5a^2 = SD^2 \Rightarrow \triangle SAD$ vuông tại A. Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD , ta chứng minh được $AH \perp (SBC)$ và $AK \perp (SCD)$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SBC) là góc giữa AH và AK chính là góc HAK hoặc $180^\circ - HAK$.

Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông SAB và SAD , ta có:



Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = SCA = 60^\circ$.

$$AC = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}, SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a$$

Gọi I là trung điểm của AB .

Đường thẳng qua G song song với SA cắt AB tại M , suy ra $MG \perp AB$.

Đường thẳng qua M song song với AD cắt CD tại N , suy ra $MN \perp CD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MG \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MG \perp (ABCD) \Rightarrow MG \perp CD$$

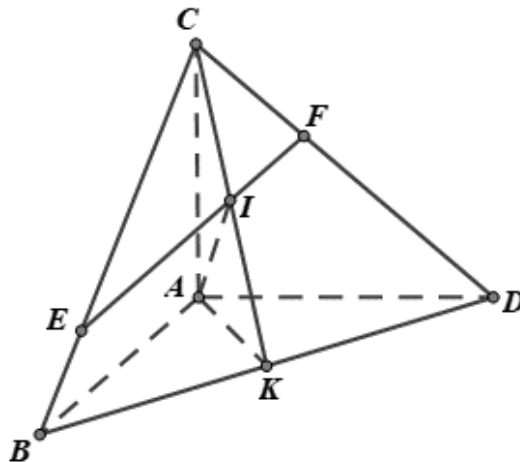
mà $MN \perp CD$ nên $CD \perp (MGN) \Rightarrow CD \perp NG$.

Do đó $((CDG), (ABCD)) = MNG$.

$$\text{Ta có: } MG \parallel SA \Rightarrow \frac{MG}{SA} = \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3} \Rightarrow MG = \frac{1}{3}SA = \frac{1}{3} \cdot 3a = a$$

$$\tan MNG = \frac{MG}{MN} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 23: Chọn D



Gọi K là trung điểm của BD . Dễ thấy $AK \perp BD$. Gọi I là giao điểm của CK và EF .

$$\begin{cases} CA \perp AD \\ CA \perp AB \end{cases} \Rightarrow CA \perp (ABD) \Rightarrow CA \perp BD.$$

Mà $AK \perp BD$ nên $BD \perp (ACK) \Rightarrow BD \perp AI$ (1)

Để dàng tính được $AK = a\sqrt{2} \Rightarrow AK = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ACK$ vuông cân tại A (2)

Ta tính $\frac{IK}{IC}$. Ta có $S_{\Delta CEF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot S_{\Delta BCD}$

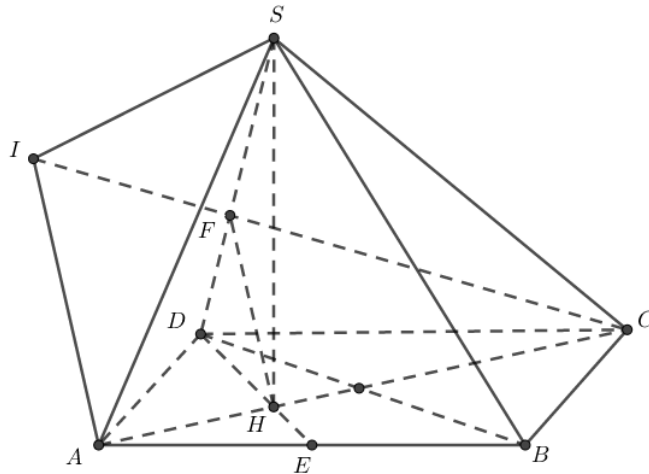
và $S_{CEKF} = S_{\Delta CEK} + S_{\Delta CFK} = \frac{2}{3} \cdot S_{\Delta CBK} + \frac{2}{5} \cdot S_{\Delta CDK} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BCD} + \frac{1}{5} \cdot S_{\Delta BCD} = \frac{8}{15} \cdot S_{\Delta BCD}$.

$\Rightarrow S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} \cdot S_{CEKF} \Rightarrow \frac{IC}{IK} = \frac{d(C, EF)}{d(K, EF)} = \frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta KEF}} = 1 \Rightarrow IC = IK$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow AI \perp CK$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow AI \perp (CBD)$. Vậy $((AEF), (BCD)) = 90^\circ$.

Câu 24: Chọn D



Ta có: $ABCD$ là hình thoi, $BAD = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABD$ đều, cạnh a .

Gọi H là trọng tâm ΔABD . Ta có: $DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $SA = SB = SD = a \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

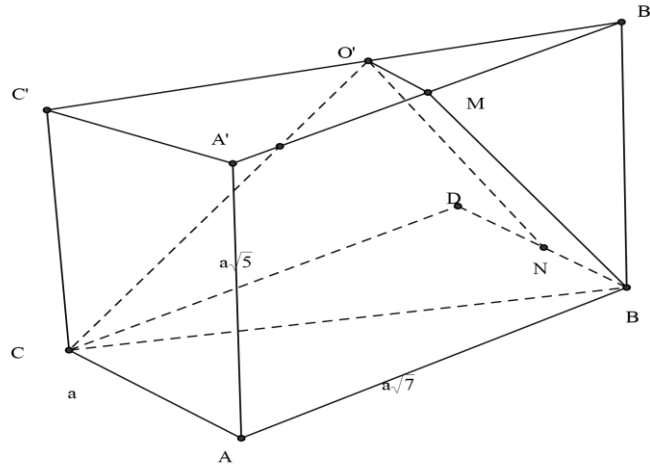
Gọi $AI \perp (SCD) \Rightarrow (SA, (SCD)) = \angle ASI$

Gọi $HF \perp SD \Rightarrow HF \perp (SCD) \Rightarrow AI \parallel HF$

Xét $\Delta SDH \Rightarrow HF \cdot SD = SH \cdot DH \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Xét ΔCAI , theo Ta - lét $\Rightarrow \frac{FH}{AI} = \frac{CH}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow AI = \frac{3}{2} FH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔSAI có: $\sin \angle ASI = \frac{AI}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle ASI = 45^\circ \Rightarrow (SA, (SCD)) = 45^\circ$.



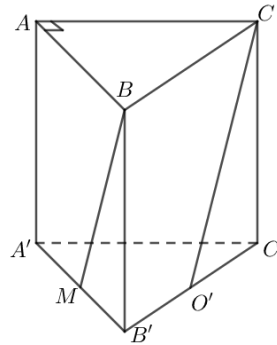
Gọi D là điểm sao cho $ABDC$ là hình chữ nhật N là trung điểm của $BD \Rightarrow BM \parallel O'N$
 $\Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng BM và CO' chính là góc giữa hai đường thẳng CO' và $O'N$

Ta có: $BD = \sqrt{a^2 + 7a^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow C'O' = \sqrt{2}a \Rightarrow CO' = \sqrt{CC'^2 + C'O'^2} = \sqrt{7}a$.

$$O'N = BM = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{5})^2} = a\frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(CO', O'N) = \left| \frac{CO'^2 + O'N^2 - CN^2}{2CO' \cdot O'N} \right| = \left| \frac{7a^2 + \frac{27}{4}a^2 - \frac{29}{4}a^2}{2 \cdot \sqrt{7}a \cdot \frac{\sqrt{27}}{2}a} \right| = \frac{13}{6\sqrt{21}}.$$

Cách 2:



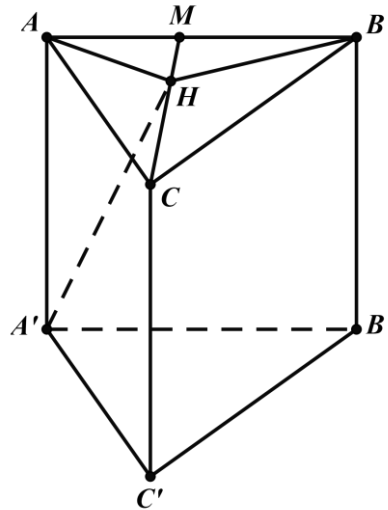
Ta có $BC = 2\sqrt{2}a, CO' = \sqrt{7}a, BM = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$

$$\text{Xét } \overrightarrow{CO'} \cdot \overrightarrow{BM} = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} \right)$$

$$= BB'^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BB'^2 - \frac{1}{4} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{13}{4} a^2$$

$$\text{Vậy } \cos(CO', BM) = \frac{|\overrightarrow{CO'} \cdot \overrightarrow{BM}|}{CO' \cdot BM} = \frac{13}{6\sqrt{21}}.$$

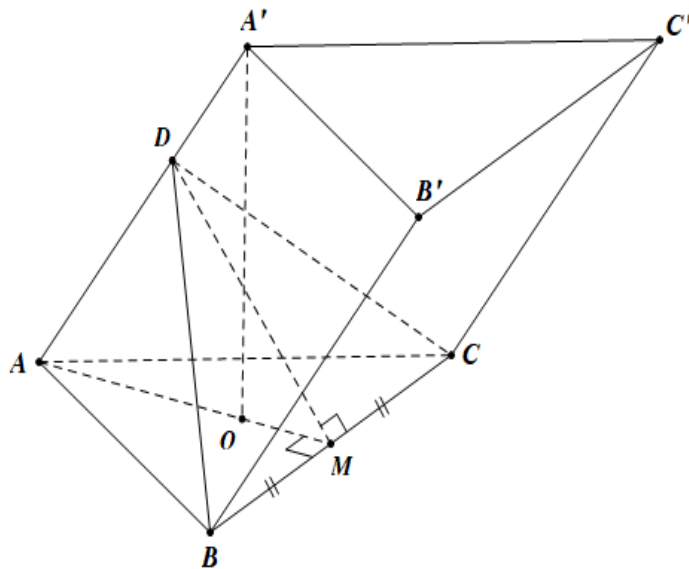
Câu 26: Chọn D



Ta có $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp CM$. Mặt khác $A'H \perp CM$. Do đó $CM \perp (AA'H)$. Suy ra $CM \perp AH$. Vậy H còn là hình chiếu của A trên CM .

Ta có $S_{AHC} = \frac{1}{2} AH \cdot HC \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (AH^2 + HC^2) = \frac{AC^2}{4} = \frac{a^2}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $AH = HC$, tức là khi $ACM = 45^\circ$. Vậy tam giác AHC có diện tích lớn nhất khi M ở vị trí sao cho $ACM = 45^\circ$.

Câu 27: Chọn C



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , suy ra $A'O \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$. Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'O \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp DM$.

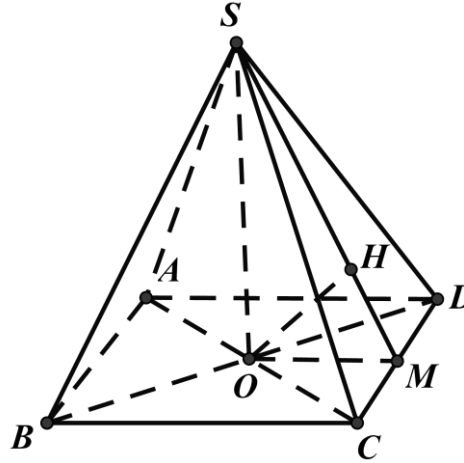
Vậy $((DBC), (A'B'C')) = ((DBC), (ABC)) = (AM, DM) = AMD$.

$\triangle A'AB$ có $A'A = A'B = AB$ nên là tam giác đều. Suy ra $BAD = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{7}}{3} \Rightarrow DM = \sqrt{BD^2 - BM^2} = \frac{\sqrt{19}}{3}.$$

$$\text{Ta có } AD^2 = AM^2 + DM^2 - 2AM \cdot DM \cdot \cos AMD \Rightarrow \cos AMD = \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2AM \cdot DM} = \frac{5}{\sqrt{57}}.$$

Câu 28: Chọn D

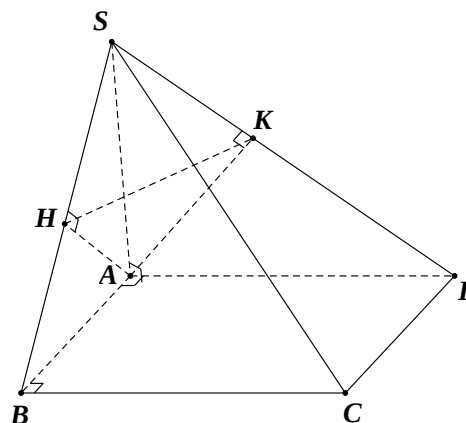


Gọi hình chiếu của B trên (SCD) là I . SB có hình chiếu là SI trên (SCD) . Gọi α là góc giữa SB và (SCD)

$$\text{Suy ra } \sin \alpha = \frac{d(B, (SCD))}{SB} = \frac{2d(O, (SCD))}{SB} = \frac{2OH}{SB}$$

$$\text{Ta có } SO = a\sqrt{6}, OH = \frac{a\sqrt{6} \cdot a}{\sqrt{6a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \text{ suy ra } \sin \alpha = \frac{a\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Câu 29: Chọn A



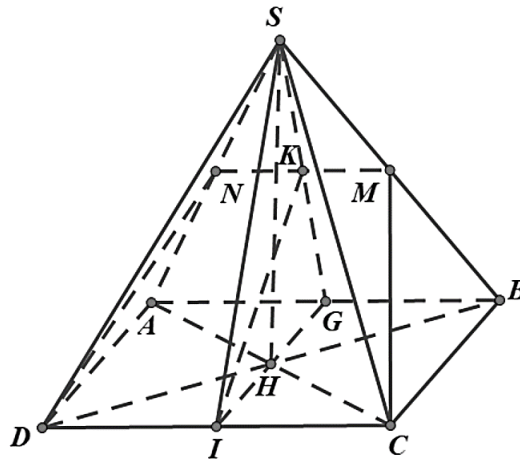
$$\text{Ta có } BC \perp (SAC) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC; CD \perp (SAD) \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$$

$$\text{Do đó } SC \perp (AHK). \text{ Suy ra } \tan(BC, (AHK)) = \cot(BC, SC) = \cot SCB = \frac{BC}{SB}$$

$$\text{Mà } SA = AC = BC\sqrt{2} \text{ nên } SB = BC\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } \tan(\angle BC, (AHK)) = \frac{BC}{BC\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow (\angle BC, (AHK)) = 30^\circ$$

Câu 30: Chọn D



Hai mặt phẳng (SAB) và (MCD) có điểm chung M và chứa hai đường thẳng song song với nhau là AB , CD nên có giao tuyến là đường thẳng d đi qua M và song song với AB . Gọi giao điểm của d và SA là N .

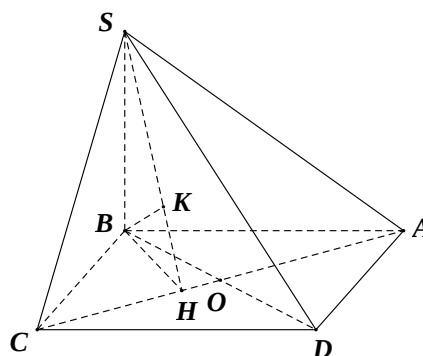
Gọi I, H, G lần lượt là trung điểm của CD, AC, AB ; gọi K là giao điểm của SG và MN .

Để chứng minh được $IK \perp MN$ và $GK \perp MN$ nên góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (MCD) là góc IKG .

Ta có $SI = SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$ mà $IG = 2a$, suy ra tam giác SIG là tam giác đều. Mặt khác, ta có K là trung điểm SG nên $IK \perp SG$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (MCD) bằng 90° .

Câu 31: Chọn A



Ta có $SB \perp (ABCD)$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{3} \Rightarrow SD = SB \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2 - 2DA \cdot DC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{7}$$

Gọi H là hình chiếu của B lên AC và K là hình chiếu của B lên SH .

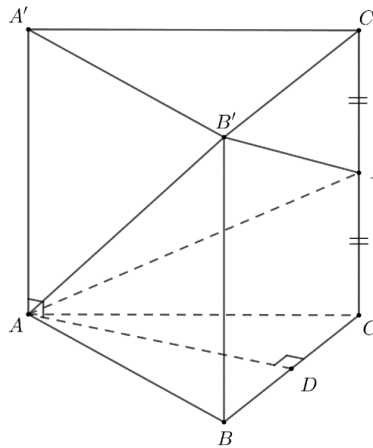
$$\text{Khi đó } BK \perp (SAC) \Rightarrow BK = d(B, (SAC)) = d(D, (SAC))$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot BA \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$BK = \frac{BS \cdot BH}{\sqrt{BS^2 + BH^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}. \text{ Ta có } \sin \alpha = \frac{d(D, (SAC))}{SD} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

Câu 32: Chọn B



Gọi D là trung điểm của BC , vì tam giác ABC cân tại A suy ra $AD \perp BC$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'D) \Rightarrow d(AA'; BC) = AD = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Ta có } BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$$

$$AB' = \sqrt{AB^2 + B'B^2} = a\sqrt{6}$$

$$AI = \sqrt{AC^2 + IC^2} = a\sqrt{3}$$

$$B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = a2\sqrt{2}$$

Mặt khác, hình chiếu của tam giác $A'BI$ lên mặt phẳng (ABC) là tam giác ABC

Áp dụng công thức hình chiếu của đa giác ta có

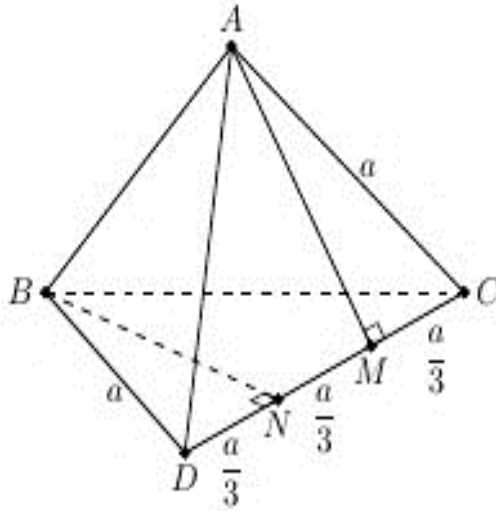
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BI} \cdot \cos((AB'I), (ABC)) \Rightarrow \cos((AB'I), (ABC)) = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'BI}}$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{7} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

$$S_{\triangle A'BI} = \sqrt{P(P - AB')(P - AI)(P - B'I)} = \frac{a^2\sqrt{71}}{4} \text{ với } P = \frac{1}{2}(a\sqrt{6} + a\sqrt{3} + a2\sqrt{2})$$

$$\text{Vậy } \cos((AB'I), (ABC)) = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'BI}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{71}}$$

Câu 33: Chọn C



Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD)$

Lại có $V_{ABMN} = \frac{1}{6} AB \cdot MN \cdot d(AB, MN) \cdot \sin(AB, MN) = \frac{1}{6} AB \cdot MN \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD)$

Suy ra $\frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{AB \cdot MN}{AB \cdot CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{ABMN} = \frac{V_{ABCD}}{3} = \frac{a^3}{36}$

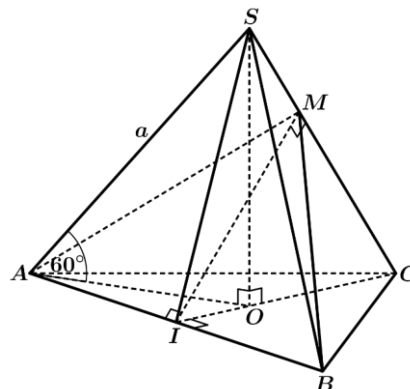
Mặt khác ta có:
$$\begin{cases} AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3} \\ BN = \sqrt{BD^2 - ND^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Lại có MN là đoạn vuông góc chung của AM và BN nên suy ra $d(AM, BN) = MN = \frac{a}{3}$

Khi đó $V_{ABMN} = \frac{1}{6} AM \cdot BN \cdot d(AM, BN) \cdot \sin(AM, BN)$

$\Leftrightarrow \frac{a^3}{36} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2a\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \sin(AM, BN) \Rightarrow \sin(AM, BN) = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Câu 34: Chọn D



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC . Khi đó $SO \perp (ABC)$ và góc giữa SA với mặt phẳng (ABC) là góc SAO . Suy ra $SAO = 60^\circ$.

Gọi I là trung điểm AB . Ta có $\begin{cases} AB \perp IC \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp SC$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I lên SC . Khi đó $(ABM) \perp SC$ và $(ABM) \cap (SAC) = AM$, $(ABM) \cap (SBC) = BM$. Suy ra $\cos \varphi = |\cos \angle AMB|$.

Xét tam giác vuông SAO , ta có $AO = SA \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$, $SO = SA \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi x là độ dài cạnh đáy. Khi đó $AO = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

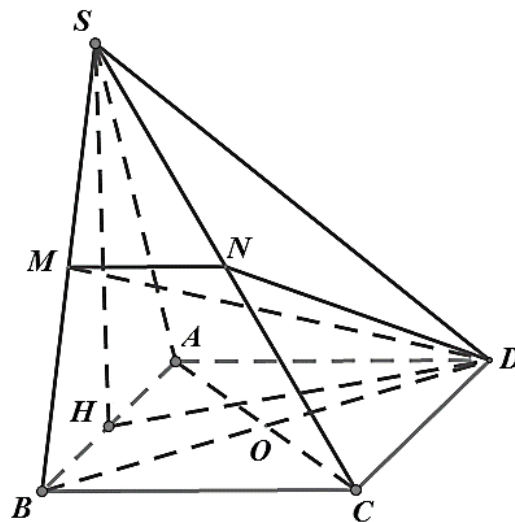
Xét tam giác SIC , ta có $SO \cdot IC = IM \cdot SC \Rightarrow IM = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$.

Ta lại có tam giác AMB cân tại M nên $AMI = \frac{1}{2} \angle AMB$.

Xét tam giác vuông AMI , ta có $\cos \angle AMI = \frac{IM}{AM} = \frac{IM}{\sqrt{AI^2 + IM^2}} = \frac{3\sqrt{129}}{43}$.

Vậy $\cos \varphi = |\cos \angle AMB| = |2\cos^2 \angle AMI - 1| = \frac{11}{43}$.

Câu 35: Chọn D



Gọi M là trung điểm của SB , N là trung điểm của SC .

Khi đó MN là đường trung bình của $\triangle SBC \Rightarrow MN \parallel BC$.

Mà $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow MN \perp SB$.

$$\Delta SBD \text{ có } SB = 2a; BD = 2a\sqrt{2}; SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \sqrt{SH^2 + HA^2 + AD^2} = 2a\sqrt{2}$$

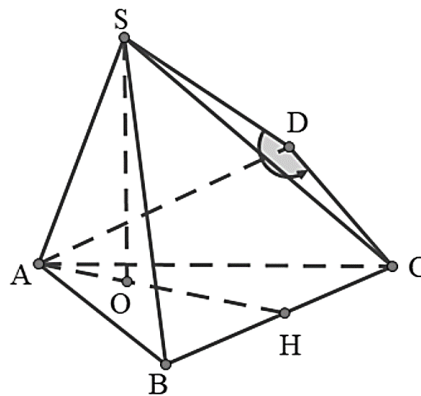
$$\Rightarrow \Delta SBD \text{ cân tại } D \Rightarrow DM \perp SB. \text{ Suy ra } ((SBD), (SBC)) = (MN, DM)$$

$$\text{Trong } \Delta SDC \text{ có } SD = SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}, CD = 2a \Rightarrow DN = \sqrt{\frac{DS^2 + DC^2}{2} - \frac{SC^2}{4}} = 2a.$$

$$\text{Xét } \Delta DMN \text{ có } MN = \frac{1}{2}BC = a, MD = \sqrt{DB^2 - BM^2} = a\sqrt{7}, DN = 2a$$

$$\Rightarrow \cos DMN = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2DM.MN} = \frac{2\sqrt{7}}{7}. \text{ Vậy } \cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 36: Chọn D



$$\text{Dễ thấy } BC = \frac{10a}{\sqrt{3}}; SA^2 = SO^2 + AO^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$$

$$SC^2 = SO^2 + OH^2 + HC^2 = \frac{85a^2}{3}; AC^2 = \frac{100a^2}{3}.$$

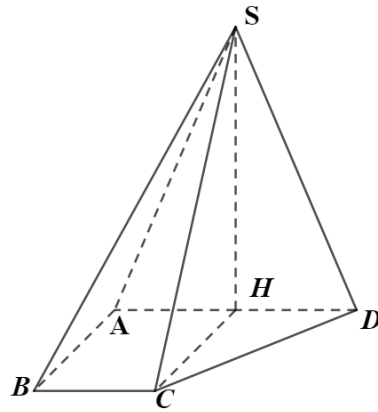
$$\text{Ta có } SA^2 + SC^2 = AC^2 \Rightarrow SA \perp SC.$$

$$\text{Kẻ } AD \parallel BC \text{ sao cho } AD = BC \text{ thì ta có } (AB, SC) = (CD, SC) = \begin{cases} SCD \\ 180^\circ - SCD \end{cases}.$$

Dễ thấy $SA \perp BC$, do $AD \parallel BC$ nên $SA \perp AD$ tức là tam giác SAD vuông.

$$\text{Do đó } SD^2 = SA^2 + AD^2 = \frac{115a^2}{3}.$$

$$\text{Mặt khác } SD^2 = SC^2 + DC^2 - 2SC.DC.\cos SCD \Rightarrow \cos SCD = \frac{7}{2\sqrt{85}}.$$

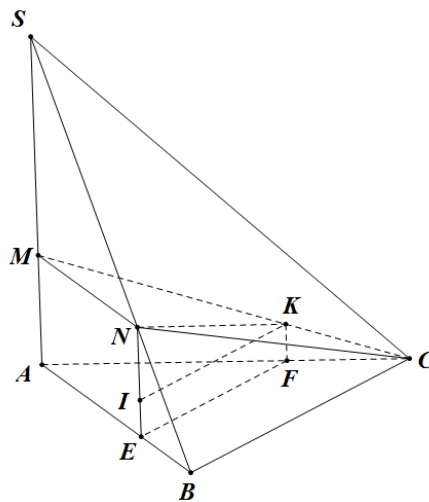


Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) , khi đó góc giữa (SCD) và (SHD) cũng bằng α . Ta có (SHD) là hình chiếu của (SCD) . Khi đó $S_{SHD} = S_{SCD} \cos \alpha$.

Tính được $S_{SHD} = \frac{1}{2}SH.HD = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ và $S_{SCD} = \frac{1}{2}SI.CD = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$ (I là trung điểm CD)

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{S_{SHD}}{S_{SCD}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 38: Chọn C



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (α) với SA, SB ta có giao tuyến của (α) và (SAB) là MN

Ta có MN đi qua G và song song với AB .

Kẻ NE song song với SA , $E \in AB \Rightarrow NE \perp (ABC), NE = a$.

Kẻ EF song song với BC , $F \in AC \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}$

Kẻ FK song song với SA , $K \in CM \Rightarrow FK = \frac{a}{3}$

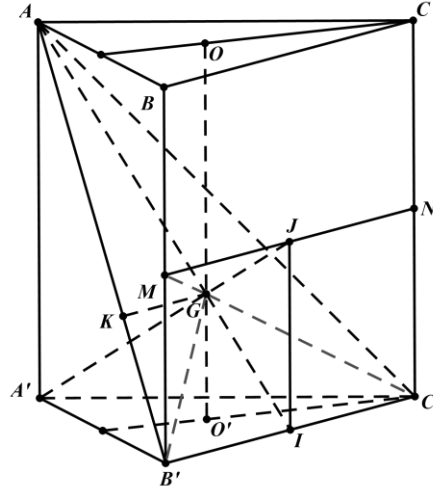
Để thấy $AB \perp (NEFK) \Rightarrow MN \perp (NEFK) \Rightarrow EN \perp MN, NK \perp MN$

Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (SAB) là (NE, NK)

Kẻ KI song song với EF , $I \in NE \Rightarrow IN = \frac{2a}{3}$

Khi đó tam giác NIK vuông cân tại $I \Rightarrow \cos(NE, NK) = |\cos \angle INK| = |\cos 45^\circ| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 39: Chọn C



Do $C'A'$ là hình chiếu vuông góc của $C'A$ lên mặt đáy $(A'B'C')$, nên $(C'A, (A'B'C')) = (C'A, C'A') = \angle C'A'A = 60^\circ \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$.

Xét hai mặt phẳng (GMN) và $(GB'C')$ có:

G là điểm chung và $MN \parallel B'C' \Rightarrow (GMN) \cap (GB'C') = GK$ ($GK \parallel MN \parallel B'C'$).

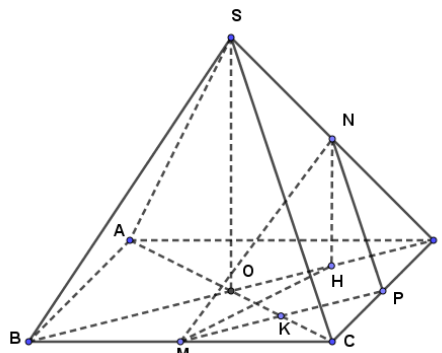
Gọi I, J lần lượt là trung điểm $MN, B'C'$. Ta có $\triangle GMN$ và $\triangle GB'C'$ cân tại $G \Rightarrow GI \perp GK, GJ \perp GK \Rightarrow$ góc tạo bởi hai mặt phẳng (GMN) và $(GB'C')$ là (GI, GJ) .

Dễ thấy A', G, I thẳng hàng.

Ta tính được: $A'I = \frac{a}{\sqrt{2}}; GA' = \frac{2}{3}A'J = \frac{2}{3}\sqrt{A'I^2 + IJ^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

$GI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}\sqrt{AA'^2 + A'I^2} = \frac{a\sqrt{14}}{6}$. Vậy $\cos(GI, GJ) = \frac{\left|\frac{5a^2}{9} + \frac{7a^2}{18} - \frac{a^2}{2}\right|}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{6}} = \frac{2\sqrt{70}}{35}$.

Câu 40: Chọn D



Gọi H là trung điểm của OD . Khi đó $NH \parallel SO$. Suy ra $NH \perp (ABCD)$ và $NMH = 45^\circ$.

Xét $\triangle BMH$ ta có $BH = \frac{3a}{4}$, $BM = \frac{a}{2}$, $\angle MBH = 60^\circ$.

$$\text{Do đó } MH = \sqrt{BM^2 + BH^2 - 2BM \cdot BH \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

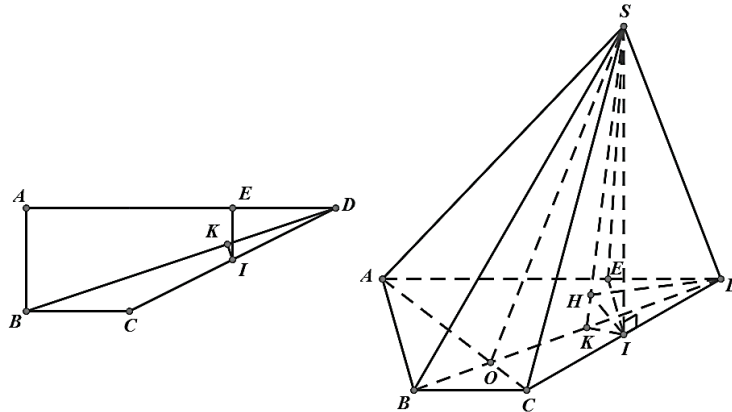
$$\text{Do } \triangle MHN \text{ vuông cân tại } H \text{ nên } HN = \frac{a\sqrt{7}}{4}, MN = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

Kẻ MK vuông góc với OC tại K , $MK \cap CD = P$. Suy ra K, P lần lượt là trung điểm của OC , CD và $MK \perp (SAC)$. Do vậy $\sin \alpha = \cos \angle NMK = \cos \angle NMP$.

Từ $MK \perp (SAC)$ ta có $MK \perp SC$. Mặt khác $NP \parallel SC$. Suy ra $MK \perp NP$ hay $MP \perp NP$.

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{MP}{MN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{14}}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Câu 41: Chọn C



Gọi I là trung điểm của CD ta có $SI \perp (ABCD)$.

Gọi E là điểm trên cạnh AD sao cho $ED = 2a$ ta có $IE \parallel AB$ do đó $IE \perp AD$ suy ra $AD \perp (SEI)$ vì vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc SEI .

Gọi K là hình chiếu của I lên BD và H là hình chiếu của I lên SK ta có $\begin{cases} IK \perp BD \\ SI \perp BD \end{cases}$ suy ra $BD \perp (SIK)$ do đó $BD \perp IH$.

Ta có $\begin{cases} IH \perp SK \\ IH \perp BD \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SBD)$ do đó $(CD, (SBD)) = \angle IDH$ và $\sin \angle IDH = \frac{IH}{ID}$.

$$\text{Ta có } IK = \frac{1}{2}d(C, BD) = \frac{1}{6}d(A, BD) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2a \cdot 6a}{\sqrt{(2a)^2 + (6a)^2}} = \frac{a\sqrt{10}}{10} \text{ và } ID = \frac{1}{2}CD = a\sqrt{5}.$$

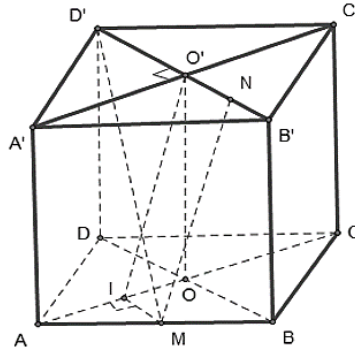
$$\text{Đặt } x = SI \text{ ta có } IH = \frac{x \cdot IK}{\sqrt{x^2 + IK^2}} \text{ và } \tan \angle SEI = \frac{SI}{EI} = \frac{x}{EI}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \sin IDH = \frac{\sqrt{465}}{155} \Leftrightarrow \frac{IH}{ID} = \frac{\sqrt{465}}{155} \text{ hay } \frac{x \cdot \frac{a}{\sqrt{10}}}{a\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{10}}} = \frac{\sqrt{465}}{155}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{50x^2 + 5a^2}} = \frac{\sqrt{465}}{155} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{3} \text{ suy ra } \tan SEI = \sqrt{3} \text{ hay } SEI = 60^\circ.$$

Vậy số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là 60° .

Câu 42: Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$ và I là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng AC , N là trung điểm $O'B'$.

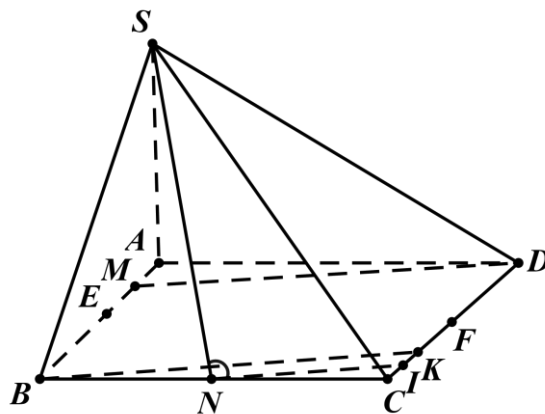
Do $D'O', MI$ cùng vuông góc với $(ACC'A')$ nên $O'I$ là hình chiếu của $D'M$ trên $(ACC'A')$

Ta có $(D'M, (ACC'A')) = (D'M, O'I)$.

Mặt khác, $IM // O'N // \frac{1}{2}BO // \frac{1}{2}B'O'$ nên $IMNO'$ là hình bình hành, suy ra $O'I // MN$. Do đó, $(D'M, (ACC'A')) = (D'M, O'I) = D'MN$.

$$D'M = \sqrt{a^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}; MN = O'I = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}; \cos D'MN = \frac{MN}{D'M} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 43: Chọn A



Gọi F là trung điểm CD , K là trung điểm CF , I là trung điểm CK .

Ta có $\begin{cases} BM // DK \\ BM = DK = \frac{3a}{4} \end{cases}$ nên tứ giác $BMDK$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} DM // BK \\ NI // BK \end{cases} \Rightarrow DM // NI \Rightarrow (DM, SN) = (NI, SN) = \alpha$.

$$(SB, (ABCD)) = (SB, AB) = SBA = 45^\circ.$$

Nên $\triangle SAB$ là tam giác vuông cân tại A do đó $SA = AB = a$.

$$DM = BK = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{4}; NI = \frac{1}{2}BK = \frac{a\sqrt{17}}{8}$$

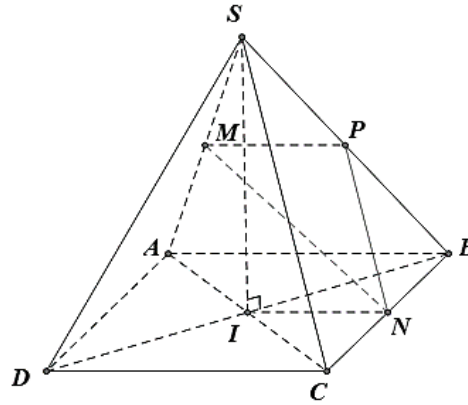
$$AN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; AI = \sqrt{DA^2 + DI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{7a}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}a}{8};$$

$$SN = \sqrt{SA^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}; SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{113}a}{8}\right)^2} = \frac{a\sqrt{177}}{8}.$$

$$\text{Xét } \triangle SNI \text{ ta có } \cos SNI = \frac{SN^2 + NI^2 - SI^2}{2SN \cdot NI} = -\frac{2\sqrt{17}}{51}.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \cos (NI, SN) = \cos (180^\circ - SNI) = \frac{2\sqrt{17}}{51}.$$

Câu 44: Chọn A

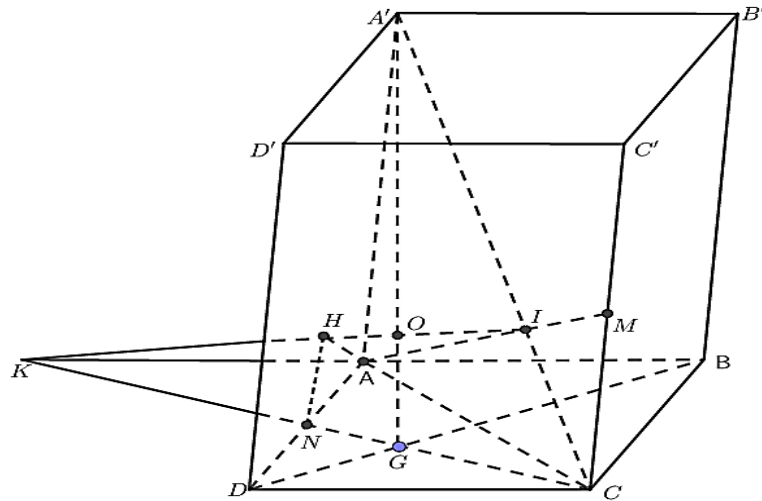


Gọi P là trung điểm của SB , ta có $SC // NP \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP) = MNP$.

$$\text{Mà } MP = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}; NP = \frac{1}{2}SC = \frac{a}{2}; MC^2 = \frac{2(SC^2 + AC^2) - SA^2}{4} = \frac{2(a^2 + 2a^2) - a^2}{4} = \frac{5a^2}{4};$$

$$MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MN^2 = \frac{2(MC^2 + MB^2) - BC^2}{4} = \frac{2\left(\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right) - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Do đó } \cos MNP = \frac{NP^2 + MN^2 - MP^2}{2 \cdot NP \cdot MN} = \frac{MN}{2NP} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } MNP = 30^\circ.$$



Gọi $I = A'C \cap AM$ trong $(A'C'CA)$; $K = GC \cap AB$ trong $(ABCD) \Rightarrow IK = (MAB) \cap (A'GC)$

Gọi N là trung điểm của $AD \Rightarrow AN \perp (A'GC)$. Kẻ $NH \perp KI (H \in KI)$

$$\Rightarrow ((MAB), (A'GC)) = \angle NHA. \text{ Ta có } \frac{GC}{CK} = \frac{CI}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow GI \parallel A'K$$

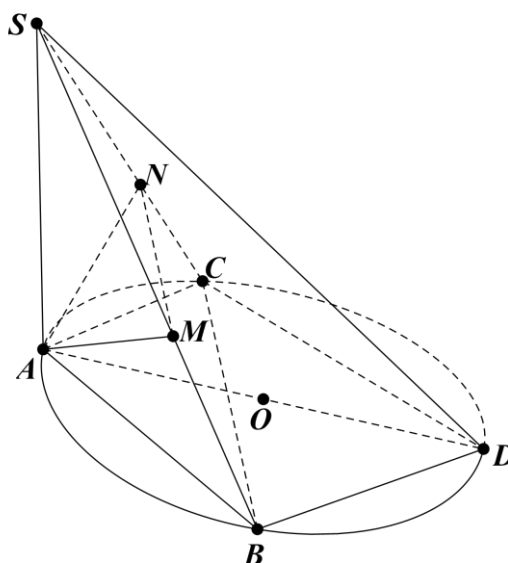
$$\Rightarrow OG = \frac{1}{3} A'O \Rightarrow OG = \frac{1}{4} A'G = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$OK = \sqrt{OG^2 + GK^2} = \sqrt{OG^2 + \left(\frac{2}{3} KC\right)^2} = \frac{\sqrt{22}}{4} a$$

$$\sin IKC = \sin HKN \Rightarrow \frac{NH}{KN} = \frac{OG}{OK} \Rightarrow NH = \frac{\sqrt{11}}{22} a; \tan NHA = \frac{AN}{HN} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle NHA = 30^\circ$$

Vậy $((MAB), (A'GC)) = 30^\circ$.

Câu 46: Chọn B



Gọi AD là đường kính của đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC .

Khi đó, ta có: $\begin{cases} SA \perp DC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow \begin{cases} DC \perp AN \\ SC \perp AN \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SDC) \Rightarrow AN \perp SD \quad (1).$

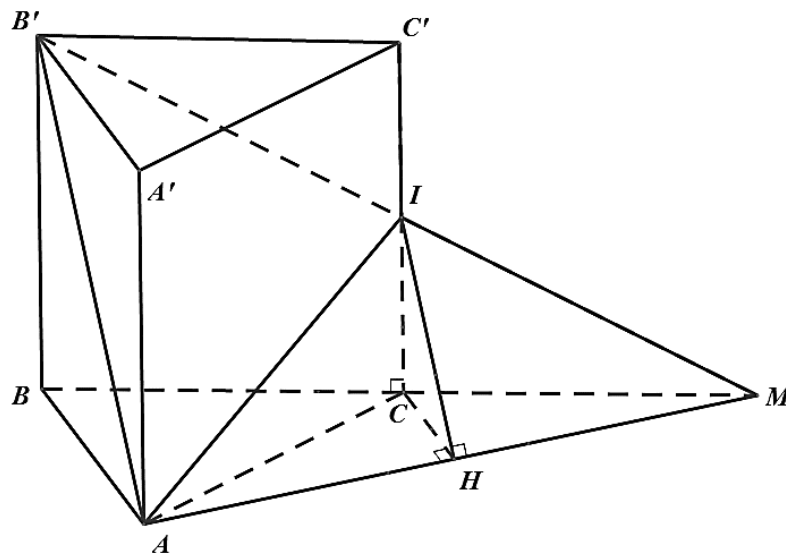
Tương tự: $\begin{cases} SA \perp DB \\ AB \perp DB \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} DB \perp AM \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AMN)$. Mà $SA \perp (ABC)$.

Suy ra $((ABC);(AMN)) = (SA;SD) = ASD$.

Ta có: $AD = 2R = \frac{BC}{\sin A} = a\sqrt{2}$. ΔASD có: $\tan ASD = \frac{AD}{SA} = 1 \Rightarrow ASD = 45^\circ$.

Câu 47: Chọn C



Trong mặt phẳng $(BCC'B')$ gọi $M = BC \cap B'I$, khi đó $((ABC);(AB'I)) = ((ACM);(AIM))$

Tong mặt phẳng (IAM) kẻ $IH \perp AM$, $(H \in AM)$ và $IC \perp (ACM)$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ACM) và mặt phẳng (AIM) là CHI .

Mặt khác $\begin{cases} CI // BB' \\ CI = \frac{1}{2}BB' \end{cases} \Rightarrow C$ là trung điểm của BM .

Do tam giác ABC cân tại A nên $ABC = 30^\circ \Rightarrow BAC = 120^\circ$.

$$\Rightarrow S_{\Delta ACM} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}a.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

Theo định lí cosin $CM^2 = CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$
 $\Rightarrow BM = 2BC = 2a\sqrt{3}$.

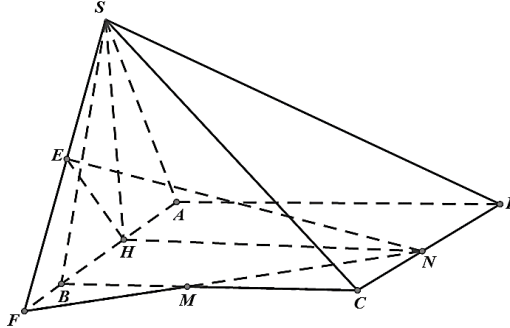
$$\text{Và } AC^2 = \frac{AB^2 + AM^2}{2} - \frac{BM^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{a^2 + AM^2}{2} - 3a^2 \Rightarrow AM^2 = 7a^2 \Rightarrow AM = a\sqrt{7}.$$

$$\text{Xét tam giác } ACM \text{ có } S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}CH.AM \Rightarrow CH = \frac{2.S_{\Delta ACM}}{AM} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{CI^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{21a^2}{14^2}} = \frac{a\sqrt{70}}{14}.$$

$$\text{Xét tam giác } ICH \text{ ta có: } \sin CHI = \frac{CI}{IH} = \frac{a}{2} \cdot \frac{14}{a\sqrt{70}} = \frac{\sqrt{70}}{10} \Rightarrow \sin((ABC), (AB'I)) = \frac{\sqrt{70}}{10}.$$

Câu 48: Chọn B



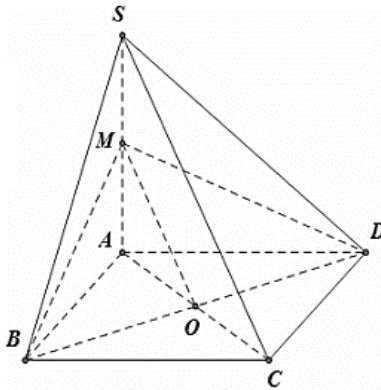
Gọi $F = AB \cap MN \Rightarrow (SMN) \cap (SAB) = SF$. Ta có $NH \perp (SAB)$. Trong tam giác SHF dựng đường cao HE ; $SF \perp HE \Rightarrow SF \perp NE$.

$$\text{Vậy } ((SAB), (SMN)) = (HE, NE) = HEN = \varphi$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SHF \text{ ta có } \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HE = \frac{3}{5}a$$

$$\text{Trong tam giác vuông } NHE \text{ ta có } \tan \varphi = \frac{HN}{HE} = \frac{a}{\frac{3a}{5}} = \frac{5}{3}$$

Câu 49: Chọn D



Ta có SAB, SAD là các tam giác vuông tại A . Nên $SA \perp AB, SA \perp AD \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Và M là trung điểm của SA . Do đó $OM \parallel SC$.

$(SC, BD) = (OM, BD) = MOB$. Ta tính góc MOB .

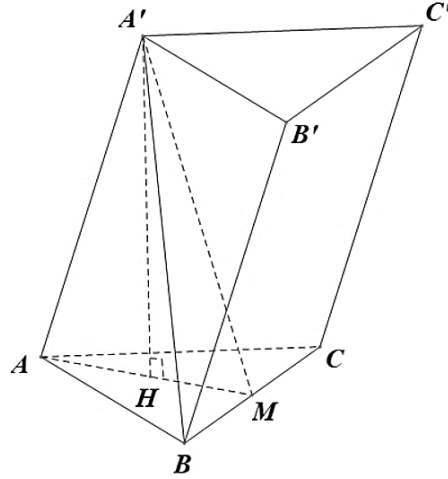
$$\text{Có } BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + AB^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}, MO = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{26}}{2}.$$

$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}. \text{ Áp dụng định lý cosin trong tam giác } MOB.$$

$$\text{Ta được } \cos MOB = \frac{OM^2 + OB^2 - BM^2}{2OM \cdot OB} = \frac{15}{\sqrt{442}} > 0.$$

$$\text{Vậy } MOB \text{ nhọn nên } \cos(SC, BD) = \frac{15}{\sqrt{442}}$$

Câu 50: Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC .

Xét $\triangle ABC$ cân tại A và $\triangle A'BC$ cân tại A' nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AM)$

$$\Rightarrow ((A'BC), (A'B'C')) = ((A'BC), (ABC)) = \angle AMA'.$$

Kẻ $A'H$ vuông góc với AM tại $H \Rightarrow A'H \perp AM$.

Mà $BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABC)$. Suy ra $A'H = d(A', (ABC)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Đặt $BC = 2x$.

$$\text{Suy ra } AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{2a^2 - x^2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = x\sqrt{2a^2 - x^2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow A'M = \sqrt{A'C^2 - CM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

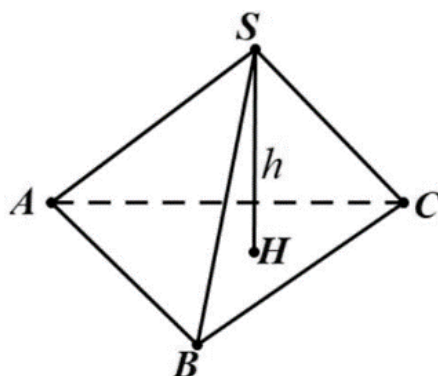
$$\text{Xét tam giác } A'HM \text{ vuông tại } H \text{ có } \sin \angle A'MH = \frac{A'H}{A'M} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \angle AMA'$$

$$\Rightarrow \angle AMA' = 45^\circ \Rightarrow ((ABC), (A'BC)) = 45^\circ.$$

A

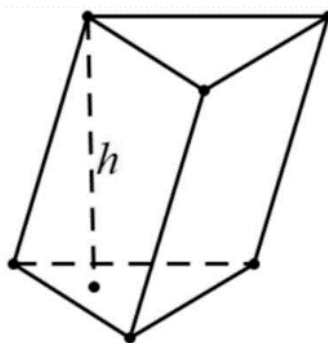
TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Thể tích khối chóp



- Công thức tính thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} \cdot S_d \cdot h$ với S_d là diện tích mặt đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Thể tích khối lăng trụ



- Công thức tính thể tích khối lăng trụ: $V = S_d \cdot h$ với S_d là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của khối lăng trụ.
- Công thức tính thể tích khối hộp chữ nhật: $V = abc$
- Công thức tính thể tích khối lập phương: $V = a^3$

3. Một số công thức tính nhanh thể tích tứ diện

- **Tính thể tích tứ diện khi biết độ dài, góc và khoảng cách giữa hai cạnh đối nhau:**

Cho tứ diện $ABCD$, gọi d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD , α là góc giữa hai đường thẳng AB và CD , khi đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha$.

- **Tính thể tích tứ diện khi biết diện tích 2 mặt bên, góc nhị diện giữa chúng và độ dài giao tuyến của chúng.**

Cho tứ diện $ABCD$, gọi $g((ABC);(ABD)) = \alpha$, khi đó: $V = \frac{2}{3} \frac{S_{ABC} \cdot S_{ABD} \cdot \sin \alpha}{AB}$

- **Tính thể tích khi biết số đo 3 góc ở đỉnh và độ dài các cạnh**

Cho tứ diện $ABCD$ có $ASB = \gamma; BSC = \alpha; CSA = \beta$; ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$$

4. Các lưu ý khi giải toán

- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$
- Đường chéo của hình chữ nhật có kích thước a, b, c là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- Diện tích của tam giác đều cạnh a là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- Thể tích tứ diện đều cạnh a là $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
- Công thức Hê rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- Các hệ thức lượng: $R = \frac{abc}{4S}; r = \frac{S}{p}$

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB và SD . Biết (AMC) và (CMN) cùng vuông góc nhau. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. $72a^3$.

B. $108a^3$.

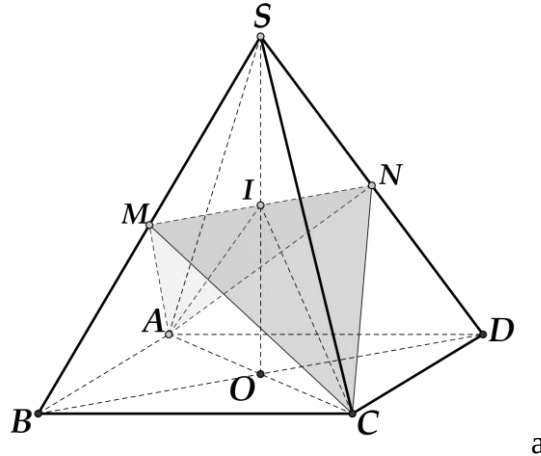
C. $36a^3$.

D. $216a^3$.

LỜI GIẢI

Chọn C

Gọi $O = AC \cap BD$. Dễ thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$ và $MN = (AMN) \cap (CMN)$.



Ta có: $MC = NC$ (2 đường trung tuyến của 2 tam giác bằng nhau $\triangle SBC$ và $\triangle SCD$)

Gọi I là trung điểm $MN \Rightarrow IC \perp MN$.

Tương tự ta có $AM = AN \Rightarrow AI \perp MN$.

Vậy $[(AMN), (CMN)] = (IA; IC) = 90^\circ \Rightarrow IA \perp IC \Rightarrow IO = \frac{AC}{2} = 3a$.

Mặt khác I là trung điểm SO do $MN \cap SO = I$ với MN là đường trung bình $\triangle SBD$

Suy ra $SO = 2OI = 6a$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 6a \cdot \left(\frac{6a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 36a^3$.

CÂU 2. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{16\sqrt{2}}{3}a^3$.

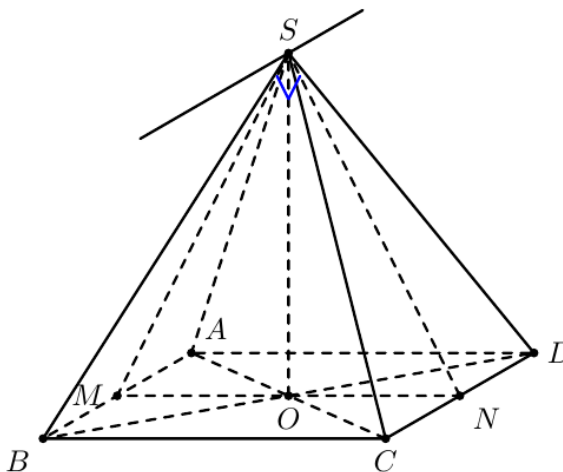
B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

C. $16a^3$.

D. $\frac{16}{3}a^3$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Gọi M, O, N lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD nên $AB \perp SM, CD \perp SN$.

Qua S dựng đường thẳng $Sx \parallel AB$. Vì $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$ nên $(SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$.

Ta có $\begin{cases} Sx \perp SM \\ Sx \perp SN \end{cases} \Rightarrow Sx \perp (SMN) \Rightarrow MSN = 90^\circ$.

Hình chóp $S.ABCD$ đều $\Rightarrow ABCD$ là hình vuông, có $AC = 4a \Rightarrow AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow MN = 2\sqrt{2}a \Rightarrow SO = \frac{MN}{2} = a\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a \cdot (2a\sqrt{2})^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

CÂU 3. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết rằng mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

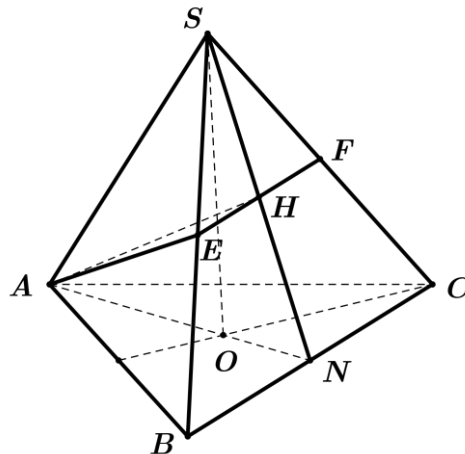
B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{16}$.

LỜI GIẢI

Chọn A



Gọi N là trung điểm của BC , O là tâm đường tròn đáy.

Gọi H là giao điểm của EF và SN , tam giác AEF là tam giác cân tại A nên $AH \perp EF$

Vì $(AEF) \perp (SBC)$ nên ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SN$. Suy ra tam giác SAN cân tại A .

$$\text{Khi đó } SA = AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Ta lại có } AO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}.$$

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$.

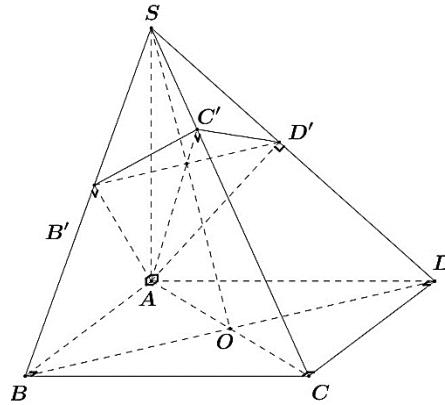
B. $\frac{9\sqrt{3}a^3}{20}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{10}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{40}$.

LỜI GIẢI

Chọn A



Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a^2$; $AC' \perp SC$ (do $SC \perp (P)$, $AC' \subset (P)$).

$$\begin{cases} AD' \perp SC \text{ (do } SC \perp (P), AD' \subset (P)) \\ AD' \perp CD \text{ (do } CD \perp AD, CD \perp SA) \end{cases} \Rightarrow AD' \perp SD.$$

$$\begin{cases} AB' \perp SC \text{ (do } SC \perp (P), AB' \subset (P)) \\ AB' \perp BC \text{ (do } BC \perp AB, BC \perp SA) \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SB.$$

Trong $\triangle SAB$ vuông tại A có: $SA^2 = SB' \cdot SB \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3}{4}$.

Trong $\triangle SAD$ vuông tại A có: $SA^2 = SD' \cdot SD \Rightarrow \frac{SD'}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{3}{4}$.

Trong $\triangle SAC$ vuông tại A có: $SA^2 = SC' \cdot SC \Rightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{5}$.

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{9}{20} \text{ và } \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{9}{20}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABC}} = \frac{2 \cdot V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{9}{10}.$$

Vậy $V_{S.AB'C'D'} = \frac{9}{20} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$.

CÂU 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$.

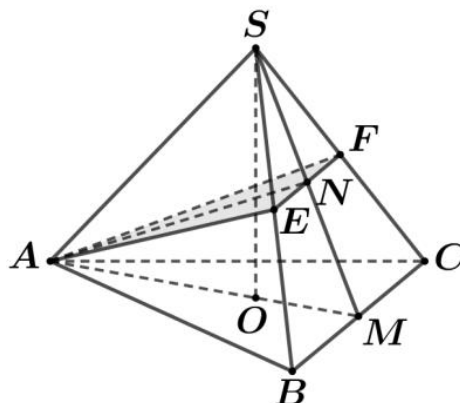
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC , O là trọng tâm tam giác ABC .

Suy ra $SO \perp (ABC)$. Gọi $N = SM \cap EF \Rightarrow \begin{cases} SN \perp EF \\ AN \perp EF \end{cases}$ nên $(AEF), (SBC) = SNA = 90^\circ$.

Xét tam giác SAM , có AN là đường trung tuyến và cũng là đường cao nên tam giác SAM cân tại A
 $\Rightarrow SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SAO , có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{a^3 \sqrt{5}}{24}$.

CÂU 6. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh x và $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $a\sqrt{2}$. Biết thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ACD$ là $\frac{\sqrt{m}}{n} a^3, (m, n \in \mathbb{Z})$.

Tính $P = m + n$.

A. 10.

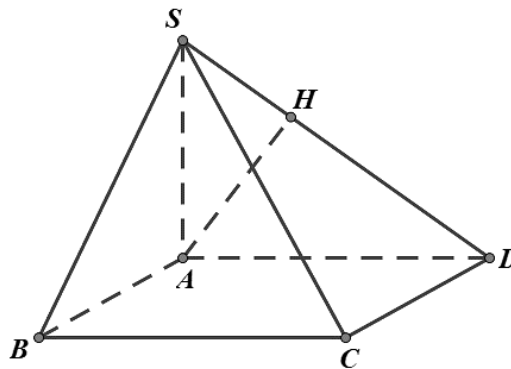
B. 9.

C. 8.

D. 11.

LỜI GIẢI

Chọn C



Kẻ $AH \perp SD$ (1). Ta có $\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ AH \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow AH \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AH \perp (SCD)$ suy ra $d(A, (SCD)) = AH = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSAD ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AS = \sqrt{\frac{AD^2 \cdot AH^2}{AD^2 - AH^2}} = \frac{\sqrt{2}ax}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$.

Diện tích tam giác ΔACD là $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{x^2}{2}$

Vậy thể tích của khối chóp $S.ACD$ là $V_{S.ACD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 2a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$.

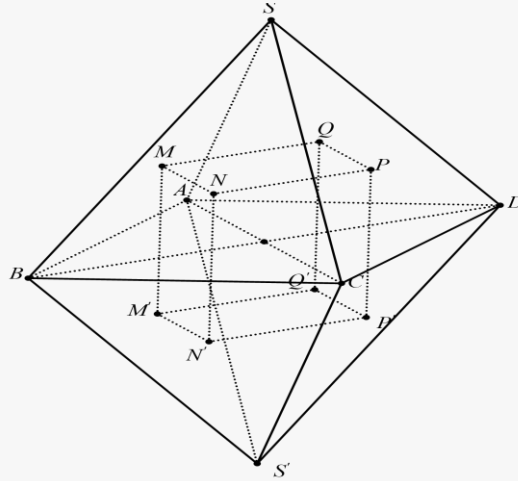
Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$ với $x > a\sqrt{2}$. Có $f'(x) = \frac{2x^4 - 6x^2a^2}{(x^2 - 2a^2)\sqrt{(x^2 - 2a^2)}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (ktm)} \\ x = -a\sqrt{3} \text{ (ktm)} \\ x = a\sqrt{3} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow \frac{\sqrt{6}a^3}{2} \nearrow$	

Vậy ta có $P = m + n = 8$.

CÂU 7. Cho khối bát diện đều có cạnh a . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA ; gọi M', N', P', Q' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $S'AB, S'BC, S'CD, S'DA$ (như hình vẽ dưới). Thể tích của khối lăng trụ $MNPQ.M'N'P'Q'$ là



A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$.

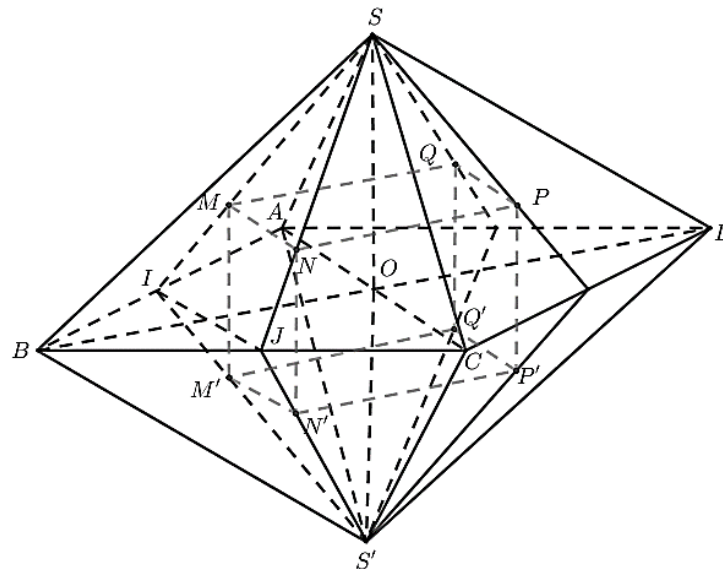
B. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{81}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

D. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{27}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$; I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC .

Do M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC nên ta có $MN = \frac{2}{3}IJ = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Do $SABCD S'$ là bát diện đều nên hoàn toàn tương tự ta có tất cả các cạnh còn lại của của khối lăng trụ $MNPQ.M'N'P'Q'$ cũng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Mặt khác $AC \perp BD$, mà $MN \parallel AC \parallel PQ, MQ \parallel BD \parallel NP$ nên $MNPQ$ là hình vuông.

Tương tự ta có tất cả các mặt còn lại của lăng trụ $MNPQ.M'N'P'Q'$ cũng là hình vuông.

Suy ra lăng trụ $MNPQ.M'N'P'Q'$ là hình lập phương có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$.

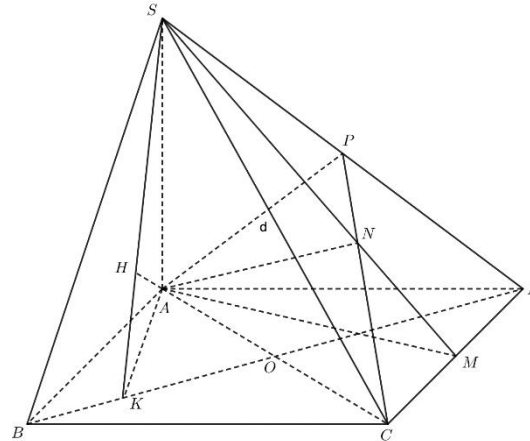
CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD . Trung tuyến CN của tam giác SCM kéo dài cắt SD tại P . Biết rằng $AB = 3$, $\cos(SC, (ABCD)) = \frac{5}{\sqrt{26}}$ và $d(C, (SBD)) = \frac{12}{13}$. Tính $V_{S.ANP}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{1}{6}$.

LỜI GIẢI**Chọn D**

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SMD với cát tuyến CNP ta có

$$\frac{SP}{PD} \cdot \frac{DC}{CM} \cdot \frac{MN}{NS} = 1 \Rightarrow \frac{SP}{PD} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{SP}{PD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.AMD}} = \frac{SN}{SM} \cdot \frac{SP}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Kẻ $AK \perp BD$ tại K , $AH \perp AK$ tại H .

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{9 + AD^2}$, $\tan(SC, (ABCD)) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(SC, (ABCD))} - 1} = \frac{1}{5}$.

AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \tan(SC, (ABCD)) = \tan(SC, AC) = \tan SCA = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = \frac{1}{5} \sqrt{9 + AD^2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AD}{AC} = \frac{3AD}{\sqrt{9 + AD^2}}$$

$$AH = \frac{SA \cdot AK}{SK} = \frac{SA \cdot AK}{\sqrt{SA^2 + AK^2}} = \frac{\frac{1}{5} \sqrt{9 + AD^2} \cdot \frac{3AD}{\sqrt{9 + AD^2}}}{\sqrt{\frac{1}{25}(9 + AD^2) + \frac{9AD^2}{9 + AD^2}}} = 3AD \sqrt{\frac{9 + AD^2}{AD^4 + 243AD^2 + 81}}$$

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AK \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAK) \Rightarrow BD \perp AH$

mà $SK \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AH$.

$$AC \cap (SBD) = O \Rightarrow \frac{d(C, (SBD))}{d(A, (SBD))} = \frac{CO}{AO} = 1 \Rightarrow d(C, (SBD)) = AH$$

$$\Rightarrow \frac{12}{13} = 3AD \sqrt{\frac{9 + AD^2}{AD^4 + 243AD^2 + 81}} \Rightarrow \frac{16}{169} = \frac{AD^2(9 + AD^2)}{AD^4 + 243AD^2 + 81}$$

$$\Rightarrow 153AD^4 - 2367AD^2 - 1296 = 0 \Rightarrow AD = 4 \Rightarrow SA = 1$$

$$\Rightarrow V_{S.AMD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{AMD} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot MD = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \Rightarrow V_{S.ANP} = \frac{1}{6}$$

CÂU 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $BC = 2a$ và $\angle ABC = 60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $B'BC$ là góc nhọn, mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) , góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ

A. $\frac{6a^3}{\sqrt{7}}$.

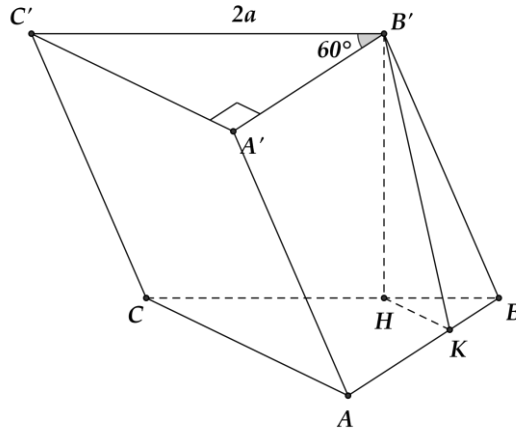
B. $\frac{a^3}{\sqrt{7}}$.

C. $\frac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

D. $\frac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $\angle ABC = 60^\circ$.

$$AB = 2a \cdot \cos 60^\circ = a, AC = 2a \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3} \text{ suy ra } S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Dựng $B'H$ vuông góc với BC tại H . Vì $(BCC'B') \perp (ABC)$ nên $B'H \perp (ABC) \Rightarrow B'H \perp AB$.

Trong (ABC) dựng $HK \perp AB$ tại K .

$$\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp B'H \end{cases} \Rightarrow AB \perp (B'HK) \Rightarrow AB \perp B'K.$$

$$\begin{cases} HK \perp AB, HK \subset (ABC) \\ B'K \perp AB, B'K \subset (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow ((ABB'A'), (ABC)) = B'KH = 45^\circ.$$

Vậy $\Delta B'HK$ vuông cân tại $H \Rightarrow B'H = HK$. Đặt $B'H = HK = x$.

Xét $\Delta B'HB$ vuông tại $H \Rightarrow BH = \sqrt{4a^2 - x^2}$.

Ta lại có HK song song AC (cùng vuông góc với AB).

$$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{HK}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2a} = \frac{x}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow a\sqrt{3} \cdot \sqrt{4a^2 - x^2} = 2a \cdot x \Leftrightarrow 4x^2 = 3(4a^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}. \text{ Vậy thể tích hình lăng trụ là } V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3a^3}{\sqrt{7}} \text{ (đvtt).}$$

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi α là góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) , với $\tan \alpha = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CD và vuông góc với $(ABCD)$. Trên (P) lấy điểm M bất kỳ, thể tích khối tứ diện $S.ABM$ bằng

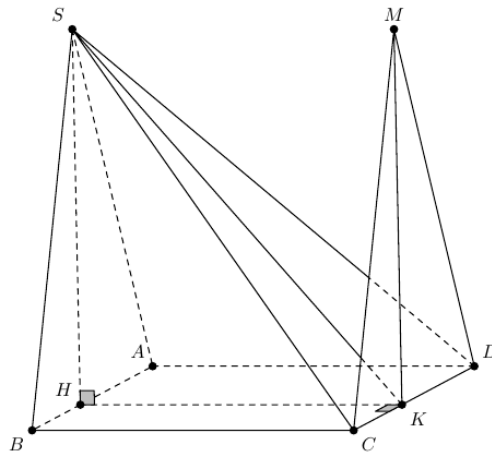
A. $a^3\sqrt{3}$.

B. $\frac{2a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

LỜI GIẢI

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của S đường thẳng AB . Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của S đường thẳng CD .

Khi đó góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) là $HSK = \alpha$.

Trong $\triangle SHK$ vuông tại H ta có $\tan HSK = \frac{HK}{SH} \Leftrightarrow SH = \frac{HK}{\tan \alpha} = a$.

Do $\left. \begin{array}{l} (P) \perp (ABCD) \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // (SAB)$.

Khi đó $d(M, (SAB)) = d(K, (SAB)) = HK = 2a$.

Ta có $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} SH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABM$ là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle SAB} \cdot HK = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = \frac{2a^3}{3}$.

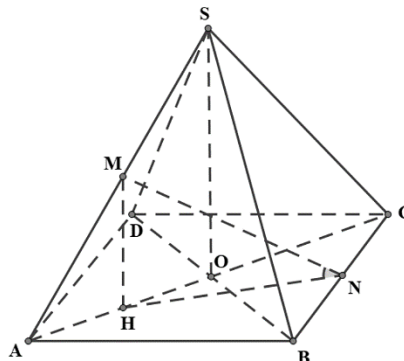
CÂU 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm của đáy là O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{10}}{6}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{30}}{2}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{30}}{6}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{10}}{3}$.

LỜI GIẢI**Chọn C**

Gọi H là trung điểm $AO \Rightarrow MH // SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$. Khi đó góc giữa MN và $(ABCD)$ là MNH .

Ta có $HN = \sqrt{CN^2 + CH^2 - 2CN \cdot CH \cdot \cos 45^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

$$\text{Suy ra } MH = HN \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = 2MH = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

$$\text{Do đó thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{30}}{6}.$$

CÂU 12. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AA' = 2$, đáy $ABCD$ là hình thoi với ABC là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $B'C', C'D', DD'$ và Q thuộc cạnh BC sao cho $QC = 3QB$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$.

A. $3\sqrt{3}$.

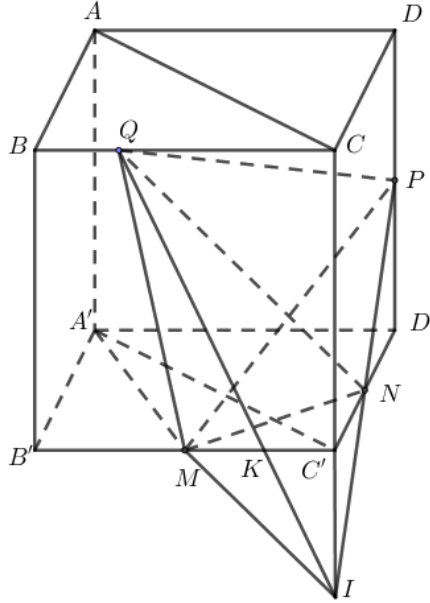
B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi $I = NP \cap CC'$; $K = IQ \cap B'C'$. Do N, P lần lượt là trung điểm của $C'D', DD'$ nên N là trung điểm của IP và $IC' = D'P = \frac{1}{2}CC'$. Suy ra: $V_{MNPQ} = V_{MNIQ} = \frac{1}{3}S_{\Delta IMQ} \cdot d(N, (IMQ))$ (1).

Theo giả thiết $\Delta A'B'C'$ đều nên $A'M \perp B'C'$, mà $A'M \perp B'B$ (do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng). Suy ra: $A'M \perp (BB'C'C)$.

$$\text{Do đó: } d(N, (IMQ)) = \frac{1}{2}d(D', (IMQ)) = \frac{1}{2}d(A', (BCC'B')) = \frac{1}{2}A'M = \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{IK}{IQ} = \frac{IC'}{IC} = \frac{KC'}{QC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IQ}{KQ} = \frac{3}{2}; KC' = \frac{1}{3}QC = \frac{1}{4}BC = 1.$$

$$\text{Suy ra: } S_{\Delta IMQ} = \frac{IQ}{KQ} S_{\Delta KMQ} = \frac{3}{2} S_{\Delta KMQ} = \frac{3}{4} MK \cdot BB' = \frac{3}{4} (MC' - KC') BB' = \frac{3}{4} (2 - 1) \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy từ (1) ta có: } V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $a^3\sqrt{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{18}$.

Câu 3: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = 2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB = a\sqrt{3}$, góc $BSC = 45^\circ$ và góc $ASB = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V . Tỉ số $\frac{a^3}{V}$ là

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, góc $ACB = 60^\circ$ cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , có $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. SA vuông góc mặt phẳng đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{3a^3}{8}$. B. $\frac{a^3}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{13}}{52}$. D. $\frac{a^3}{24}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , có $AB = AC = 1$, Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là trung điểm M của cạnh BC , góc giữa SM và (SAB) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{36}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{18}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{36}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt bên (SCD) hợp với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10: Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. B. $\frac{a^3}{48}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$. D. $\frac{a^3}{16}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABD$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , cạnh $AB = a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SC và mặt phẳng (SAD) bằng 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích của khối chóp đó bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

- Câu 16:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $SA \perp (ABCD)$, cạnh bên SC tạo với $(ABCD)$ một góc 60° và tạo với (SAB) một góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối chóp $SABCD$ bằng
- A. $\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $2a^3$. D. $\frac{2a^3}{3}$.
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, hai đường chéo $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$ và cắt nhau tại O , hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $ABCD$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.
- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 18:** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = 2a$ và SA tạo với mặt phẳng (ABC) góc 30° . Tam giác ABC vuông cân tại B , G là trọng tâm tam giác ABC . Hai mặt phẳng (SGB) và (SGC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a .
- A. $\frac{9a^3}{10}$. B. $\frac{9a^3}{40}$. C. $\frac{27a^3}{10}$. D. $\frac{81a^3}{10}$.
- Câu 19:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa AB và SC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.
- A. $\sqrt{3}a^3$. B. $2\sqrt{3}a^3$. C. a^3 . D. $3\sqrt{3}a^3$.
- Câu 20:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:
- A. $\frac{a^3\sqrt{17}}{9}$. B. $\frac{a^3\sqrt{17}}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{a^3\sqrt{17}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{17}}{6}$.
- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $ABC = BAS = BCS = 90^\circ$, sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
- Câu 22:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 23: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OB = OC = a$. Gọi H là hình chiếu của điểm O trên mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích khối tứ diện $OABH$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Câu 24: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang cân. $AB = 2a$; $BC = CD = DA = a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 45° . Tính thể tích của khối chóp đã cho.

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho khối chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAD) bằng 30° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ theo a .

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{16}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{48}$.

Câu 26: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AC = a$, $ACB = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(A'C'CA)$ góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $a^3\sqrt{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

- A. $\frac{\sqrt{310}}{20}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. C. $\frac{3\sqrt{310}}{20}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC) , góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là 60° , $SB = a\sqrt{2}$, $BSC = 45^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a là:

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{15}$. B. $V = 2\sqrt{3}a^3$. C. $V = 2\sqrt{2}a^3$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{15}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân với đáy lớn $AB = 2a$, $AD = BC = CD = a$ mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $ABCD$. Biết khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$, tính theo a thể tích V của khối chóp.

$$\text{A. } V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}. \quad \text{B. } V = \frac{3a^3}{4}. \quad \text{C. } V = \frac{3a^3\sqrt{5}}{4}. \quad \text{D. } V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}.$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C , $AB = 2a$, $AC = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

$$\text{A. } \frac{a^3\sqrt{6}}{4}. \quad \text{B. } \frac{a^3\sqrt{2}}{2}. \quad \text{C. } \frac{a^3\sqrt{2}}{6}. \quad \text{D. } \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$; $BC = 2a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng 45° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$\text{A. } \frac{2a^3}{15}. \quad \text{B. } \frac{2\sqrt{5}a^3}{15}. \quad \text{C. } \frac{2a^3}{5}. \quad \text{D. } \frac{2a^3\sqrt{15}}{15}.$$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = a$, SA vuông góc với đáy, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC , góc giữa MN và mặt phẳng (SAC) bằng α thỏa mãn $\cot \alpha = \sqrt{11}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$\text{A. } a^3. \quad \text{B. } \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}. \quad \text{C. } \frac{2a^3}{3}. \quad \text{D. } \frac{a^3}{3}.$$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $\cos \angle CSD = \frac{5}{6}$. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{A. } \frac{a^3\sqrt{3}}{2}. \quad \text{B. } \frac{a^3}{3}. \quad \text{C. } \frac{a^3\sqrt{3}}{3}. \quad \text{D. } \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc có cosin bằng $\frac{1}{\sqrt{7}}$. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{A. } \frac{a^3\sqrt{3}}{2}. \quad \text{B. } \frac{a^3}{3}. \quad \text{C. } \frac{a^3\sqrt{3}}{6}. \quad \text{D. } \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 35: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh cạnh SD, DC . Thể tích khối tứ diện $ACMN$ là

$$\text{A. } \frac{a^3\sqrt{2}}{4}. \quad \text{B. } \frac{a^3}{8}. \quad \text{C. } \frac{a^3\sqrt{3}}{6}. \quad \text{D. } \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60° . Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M và N . Thể tích khối chóp $S.ABMN$ là

$$\text{A. } \frac{a^3\sqrt{3}}{2}. \quad \text{B. } \frac{a^3\sqrt{3}}{4}. \quad \text{C. } \frac{a^3\sqrt{3}}{3}. \quad \text{D. } a^3\sqrt{3}.$$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích hình chóp biết $\cos$ góc giữa đường thẳng SC và (SBD) bằng $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, ABC là tam giác đều cạnh a . Tính thể tích hình chóp biết khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a}{4}$

- A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 39: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $A'A = A'B = A'D = 2a$. Biết khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. a^3 . D. $3a^3$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên (SAB) , (SAC) lần lượt tạo với đáy các góc bằng 60° và 30° . Biết hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trên đoạn BC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. C. $\frac{a^3}{32}$. D. $\frac{a^3}{16}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{3a^3}{8}$. B. $\frac{a^3}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tam giác ABC có các cạnh $AB = 15$; $BC = 14$; $CA = 13$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $V_{S.ABC} = 112\sqrt{3}$. B. $V_{S.ABC} = 336$. C. $V_{S.ABC} = \frac{98\sqrt{3}}{3}$. D. $V_{S.ABC} = 336\sqrt{3}$.

Câu 43: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$; góc giữa AA' với $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' , DD' cùng bằng 1. Góc giữa hai mặt phẳng $(BB'C'C)$ và $(C'CDD')$ bằng 60° . Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $2\sqrt{3}$. B. 2. C. $\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{3}$.

Câu 44: Cho hình chóp tam giác $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh 6. Biết khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng 3; khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng 2. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{5}{4}; \frac{11}{8}\right)$. B. $\left(\frac{11}{8}; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(\frac{7}{8}; \frac{5}{4}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{8}\right)$.

Câu 45: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là V , khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

- A. $\frac{27V}{4}$. B. $\left(\frac{9}{2}\right)^2 V$. C. $\frac{81V}{8}$. D. $\frac{9V}{4}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có $BAC = 90^\circ$, $AB = 3a$, $AC = 4a$. Hình chiếu của đỉnh S là một điểm H nằm trong tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa các cặp đường thẳng chéo nhau của hình chóp là $d(SA, BC) = \frac{6a\sqrt{34}}{17}$, $d(SB, CA) = \frac{12a}{5}$, $d(SC, AB) = \frac{12a\sqrt{13}}{13}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $9a^3$. B. $12a^3$. C. $18a^3$. D. $6a^3$.

Câu 47: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$, $DAB = CBD = 90^\circ$, $ABC = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30° . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. C. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 48: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3$; $AD = 4$; $BAD = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng và. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

- A. $\sin \alpha \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$. B. $\sin \alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $\sin \alpha \in \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D. $\sin \alpha \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$; khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCA) bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$; khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$:

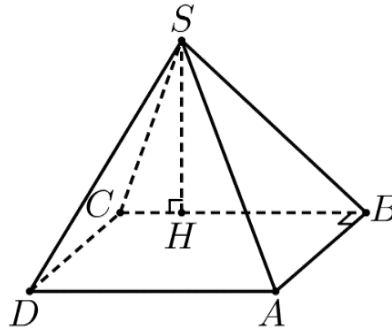
- A. $\frac{1}{24}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{36}$. D. $\frac{1}{48}$.

Câu 50: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D



Kẻ $SH \perp BC$. Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Xác định được hình chiếu vuông góc của D lên (SBC) là điểm C .

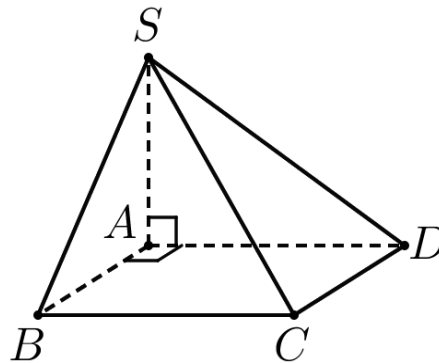
Do đó: $(SD, (SBC)) = (SD, SC) = DSC = 60^\circ$.

Tam giác vuông SCD vuông tại C có $SC = DC \cdot \cot DSC = a$.

Tam giác vuông SBC vuông tại S có $SB = \sqrt{BC^2 - SC^2} = a\sqrt{2}$, $SH = \frac{SB \cdot SC}{BC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} AB^2 \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$.

Câu 2: Chọn B

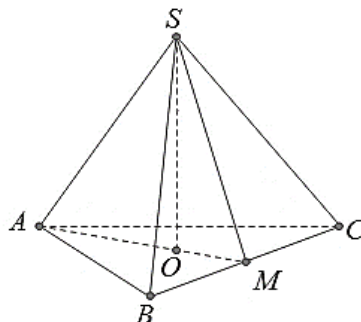


Xác định: $(SD; (SAB)) = (SD; SA) = DSA = 30^\circ$.

Tam giác SAD vuông tại A có: $SA = AD \cdot \cot DSA = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Câu 3: Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC và O là tâm của đáy ABC

Do hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều nên ta có $SO \perp (ABC)$, $AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$,

$$OM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

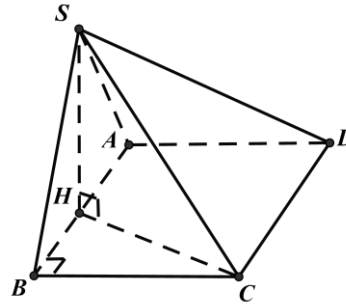
Ta có diện tích đáy ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ = a^2\sqrt{3}$. Lại có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases}$$

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là góc $SMA = 60^\circ$

Xét tam giác SOM vuông tại O có: $\tan SMA = \frac{SO}{OM} \Rightarrow SO = OM \cdot \tan SMA = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Câu 4: Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB . Theo bài tam giác SAB cân tại S nên ta có $SH \perp AB$

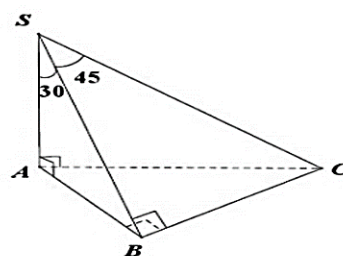
Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

Xét tam giác BHC vuông tại B có: $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Xét tam giác SHC vuông tại H có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot (a\sqrt{2})^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$$

Câu 5: Chọn A



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$; $\begin{cases} (SBC) \perp (SAB), (ABC) \perp (SAB) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \Delta ABC, \Delta SBC$ là các tam giác vuông tại B

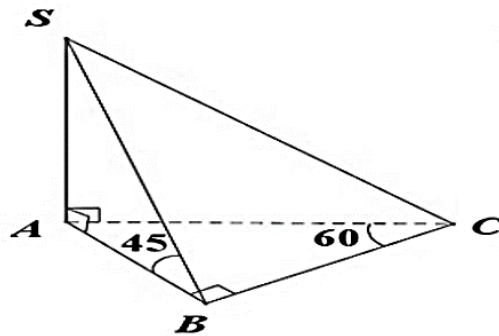
Xét ΔSAB vuông tại A có:

$$AB = SB \cdot \sin ASB = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = SB \cdot \cos ASB = \frac{3a}{2} \text{ xét } \Delta SBC \text{ vuông tại B có:}$$

$$BC = SB \cdot \tan BSC = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3}{8} \Rightarrow \frac{a^3}{V} = \frac{8}{3}.$$

Câu 6: Chọn B



Tam giác ΔABC vuông tại B nên $BC = AB \cdot \cot ACB = a \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

Ta có AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC)

$$\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = SBA = 45^\circ$$

ΔSAB vuông tại A nên $SA = AB \cdot \tan SBA = AB \cdot \tan 45^\circ = a$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}.$$

Câu 7: Chọn B

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC} = a\sqrt{3}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi M là trung điểm BC. Do ΔABC cân nên $AM \perp BC$, $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{a}{2}$.

Do vậy $BC \perp (SAM)$ (BC vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau SA, AM trong mặt phẳng (SAM)).

Kẻ $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Do AH vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau SM, BC trong mặt phẳng (SBC) . $\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Ta lại có: } \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{8}$$

Câu 8: Chọn A

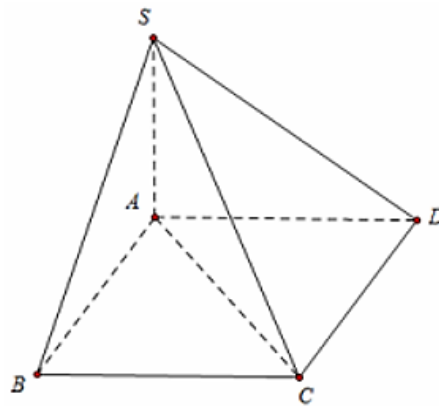
Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow AB \perp MN (MN \parallel AC)$ và $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$

Do vậy $AB \perp (SMN)$ (Vì AB vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau SM, MN trong mặt phẳng (SMN)).

Kẻ $MH \perp SN \Rightarrow MH \perp (SAB)$. Do MH vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau SN, AB trong mặt phẳng (SAB) . $\Rightarrow (SM, (SAB)) = (SM, SH) = MSH = MSN = 60^\circ$.

$$\tan MSN = \frac{MN}{SM} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

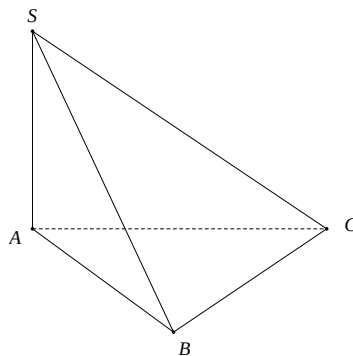
Câu 9: Chọn A

$$\text{Do } \begin{cases} AD \perp CD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA) \Rightarrow CD \perp SD$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \subset (ABCD), AD \perp CD \Rightarrow ((ABCD), (SCD)) = SDA = 60^\circ \\ SD \subset (SCD), SD \perp CD \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } SA = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 10: Chọn B

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } B, AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ nên } AB = BC = \frac{a}{2}, S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC = \frac{a^2}{8}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \subset (ABC), AB \perp BC \Rightarrow ((ABC), (SBC)) = SBA = 45^\circ \\ SB \subset (SBC), SB \perp BC \end{cases}$$

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $SA = AB = \frac{a}{2}$. Vậy: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{8} = \frac{a^3}{48}$.

Câu 11: Chọn D

Giao điểm của SA và mặt phẳng (SBC) là S .

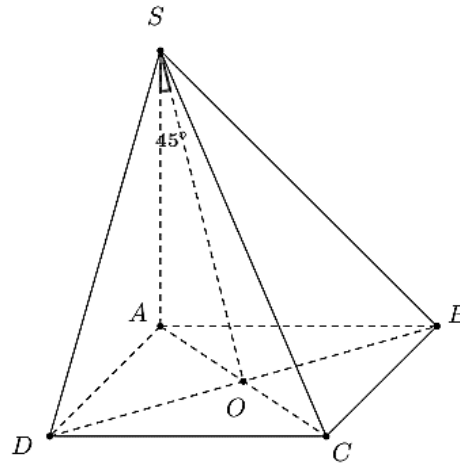
Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$.

Có $SA \perp BC$ nên $(SAM) \perp BC$. Từ đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là góc $\angle ASM = 45^\circ$

Xét tam giác SAM vuông tại A : $SA = AM \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 12: Chọn D



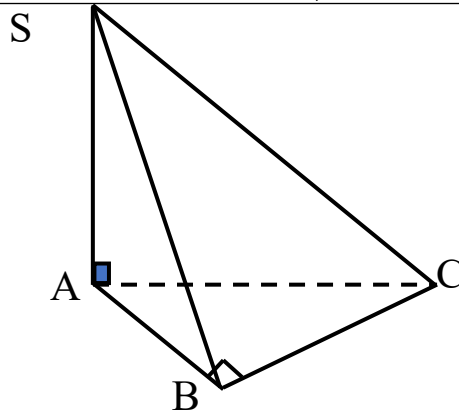
Giao điểm của SA và mặt phẳng (SBD) là S . Gọi O là trung điểm BD thì $AO \perp BD$.

Có $SA \perp BD$ nên $(SAO) \perp BD$. Từ đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\angle ASO = 45^\circ$

Xét tam giác SAO vuông cân tại A : $SA = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{S.ABD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 13: Chọn D



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} a^2. \text{ Ta có } AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}.$$

$$SC \cap (ABC) = \{C\}, SA \perp (ABC) \text{ tại } A$$

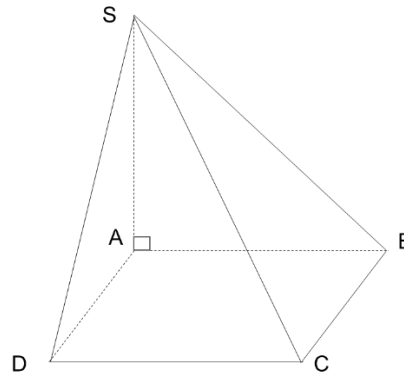
Suy ra AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 60^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Khi đó: } V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a\sqrt{6} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}.$$

Câu 14: Chọn A



$$S_{ABCD} = a^2. SC \cap (SAD) = \{S\}.$$

Vì $CD \perp AD; CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD)$ tại D .

Suy ra SD là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAD)

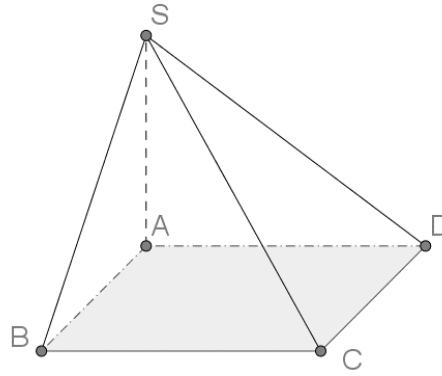
$$\Rightarrow (SC, (SAD)) = (SC, SD) = \widehat{CSD} = 30^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \frac{DC}{SD} \Rightarrow SD = \frac{DC}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}.$$

$$SA^2 + AD^2 = SD^2 \Rightarrow SA^2 = SD^2 - AD^2 = (a\sqrt{3})^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó: } V = \frac{1}{3} \cdot S_{S.ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Câu 15: Chọn D



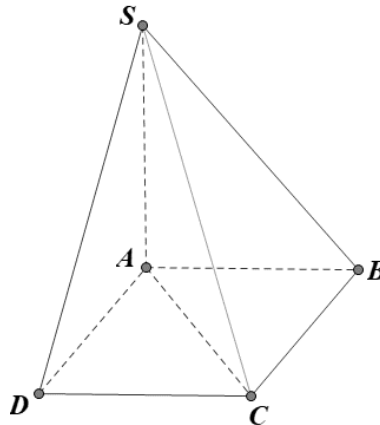
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \text{ là hình chiếu của } SC \text{ lên mặt phẳng } (SAB).$

$$\Rightarrow (SC, (SAB)) = (SC, SB) = BSC = 30^\circ.$$

Trong tam giác SCB , ta có $\tan 30^\circ = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{SB} \Leftrightarrow SB = a\sqrt{3}$; $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy thể tích khối chóp là } V_{SABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 16: Chọn C



Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC \text{ là hình chiếu của } SC \text{ lên mặt phẳng } (ABCD).$

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = SCA = 60^\circ.$$

Mặt khác: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \text{ là hình chiếu của } SC \text{ lên mặt phẳng } (SAB).$

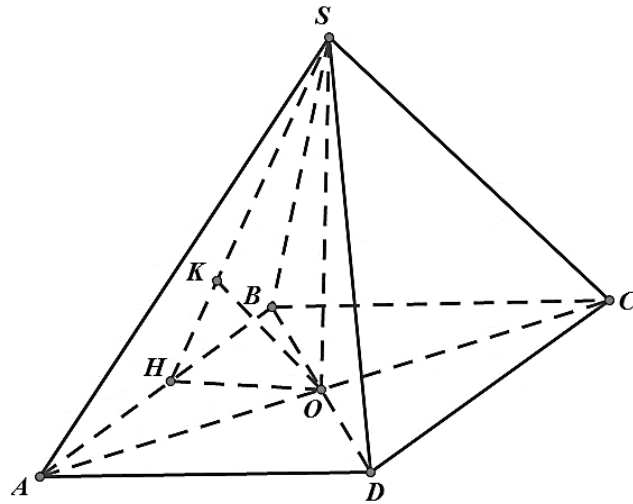
$$\Rightarrow (SC, (SAB)) = (SC, SB) = BSC = \alpha. \text{ Xét tam giác } SBC \text{ có } \sin \alpha = \frac{BC}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Đặt } BC = x, \text{ ta có } SC = \frac{4x}{\sqrt{3}}, AC = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{SC} \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{3}} = \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2a \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } SABCD \text{ bằng } V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3} = 2a^3.$$

Câu 17: Chọn D



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD). \text{ Kẻ } OH \perp AB \text{ tại } H \text{ và } OK \perp SH \text{ tại } K.$$

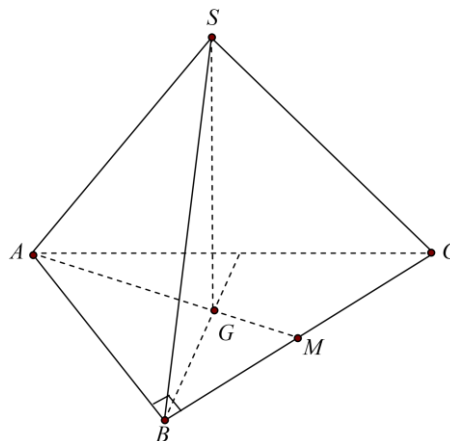
$$\text{Suy ra } OK \perp (SAB) \Rightarrow d(O, (SAB)) = OK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} \text{ nên } OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ nên } SO = \frac{a}{2}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2\sqrt{3}. \text{ Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 18: Chọn A



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SGB) \perp (ABC) \\ (SGC) \perp (ABC) \\ (SGB) \cap (SGC) = SG \end{cases} \Leftrightarrow SG \perp (ABC). \text{ Suy ra hình chiếu của } SA \text{ lên } (ABC) \text{ là } AG.$$

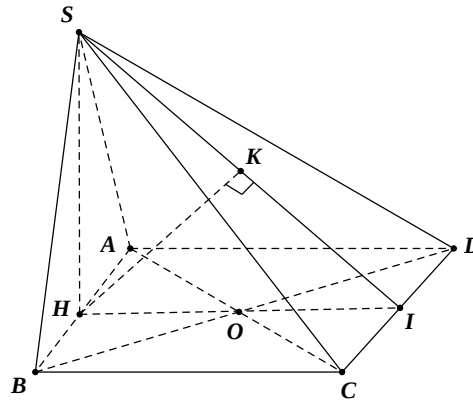
$$\text{Do đó } (SA, (ABC)) = (SA, AG) = \angle SAG = 30^\circ.$$

$$\text{Nên } AG = SA \cdot \cos 30^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; \quad AM = \frac{3}{2} AG = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra } AB^2 + BM^2 = AM^2 \Leftrightarrow \frac{5}{4} AB^2 = \frac{27a^2}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} SG \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3a\sqrt{15}}{5} \right)^2 = \frac{9a^3}{10}.$$

Câu 19: Chọn A



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, CD , kẻ $HK \perp SI$.

Vì tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

$$\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIH) \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SCD)$$

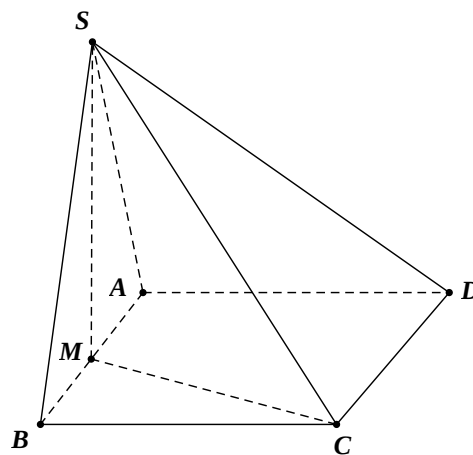
$$CD \parallel AB \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$$

$$\text{Suy ra } HK = \frac{3a}{2}; HI = AD = a\sqrt{3}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SHI \text{ ta có } SH = \sqrt{\frac{HI^2 \cdot HK^2}{HI^2 - HK^2}} = 3a$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} 3a \cdot a^2 \sqrt{3} = a^3 \sqrt{3}.$$

Câu 20: Chọn C



$$\text{Ta có có: } S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2.$$

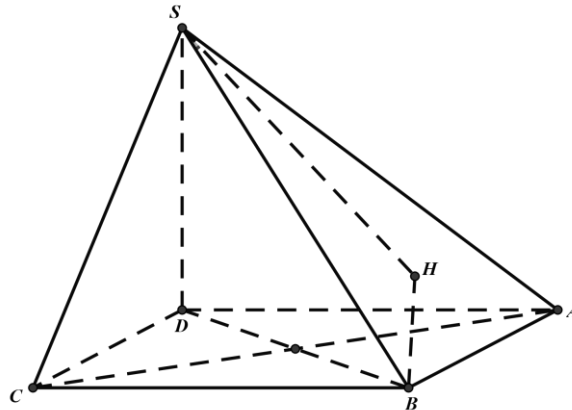
Gọi M là trung điểm của AB , khi đó $SM \perp AB \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

Do đó $\left(SC, (ABCD) \right) = \left(SC, MC \right) = \angle SCM = 45^\circ$.

Khi đó $SM = MC = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SM \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3\sqrt{17}}{3}$.

Câu 21: Chọn D



Dựng hình chữ nhật $ABCD$. Suy ra $DA = BC = a\sqrt{2}$, $DC = AB = a$.

Ta có: $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp SD$ và $\begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SD$

$\Rightarrow SD \perp (ABCD)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $(SAC) \Rightarrow BSH$ là góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) .

Ta có: $\frac{\sqrt{11}}{11} = \sin BSH = \frac{BH}{SB} = \frac{d(B; (SAC))}{SB} = \frac{d(D; (SAC))}{SB} \Rightarrow \frac{1}{d^2(D; (SAC))} = \frac{11}{SB^2}$ (1).

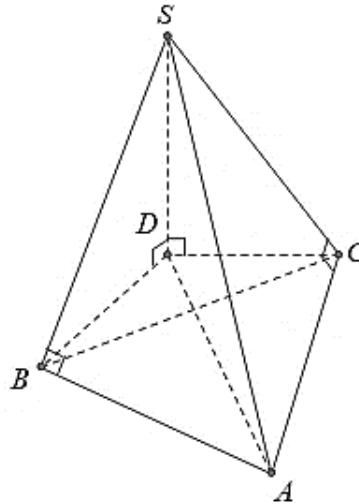
Mà: $\frac{1}{d^2(D; (SAC))} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{SB^2 - BD^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{SB^2 - 3a^2} + \frac{3}{2a^2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{11}{SB^2} = \frac{1}{SB^2 - 3a^2} + \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} SB^2 = 6a^2 \\ SB^2 = \frac{11}{3}a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SB = a\sqrt{6} \\ SB = a\sqrt{\frac{11}{3}} \end{cases}$.

Theo giả thiết $SB > 2a \Rightarrow SB = a\sqrt{6} \Rightarrow SD = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3} SD \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 22: Chọn D



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) . Suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB(gt)$. Suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C .

Để thấy $\triangle SBA = \triangle SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông). Suy ra $SB = SC$.

Từ đó ta chứng minh được $\triangle SBD = \triangle SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC nên cũng là đường phân giác của góc BAC .

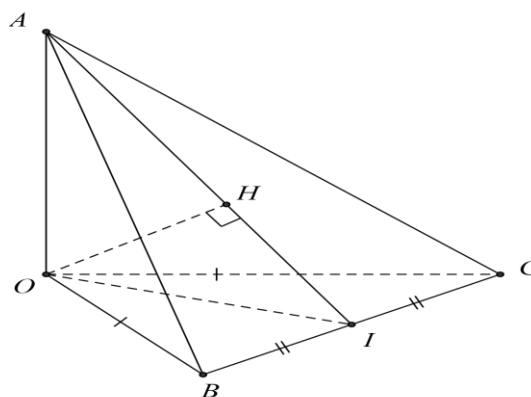
Ta có $\angle DAC = 30^\circ$. Suy ra $DC = AC \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\angle SBD = 60^\circ$.

Ta có $\tan \angle SBD = \frac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \tan \angle SBD = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Câu 23: Chọn D



Gọi I là trung điểm của BC , ta có: $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp AO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOI)$

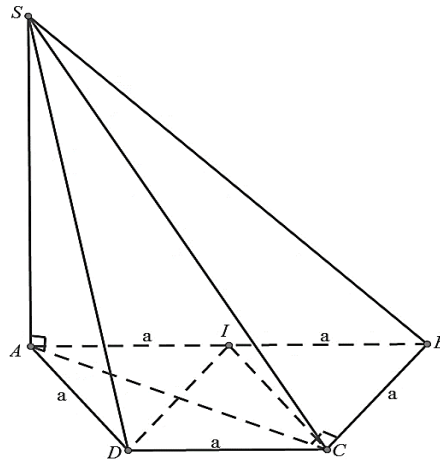
Trong (OAI) dựng $OH \perp AI$, ta có: $\begin{cases} OH \perp AI \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$

Từ giả thiết suy ra: $\triangle OBC$ vuông cân tại O nên $OI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, do đó tam giác OAI vuông cân tại $O \Rightarrow H$ là trung điểm của AI và $OH = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{2}OA \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{2}$

$$\text{Khi đó: } S_{ABH} = \frac{1}{2}S_{ABI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AI \cdot BI = \frac{1}{4} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối tứ diện } OABH \text{ là: } V = \frac{1}{3}OH \cdot S_{ABH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}.$$

Câu 24: Chọn A



Từ giả thiết, ta có hai đáy của hình thang cân là AB và CD .

Gọi I là trung điểm của AB . Ta có $AICD$ là hình bình hành ($AI = CD, AI \parallel CD$), mà $AI = AD$ nên $AICD$ là thoi $\Rightarrow AC \perp ID$ và $IC = AD = a$. Tương tự ta có $IBCD$ là thoi và $ID = BC = a$

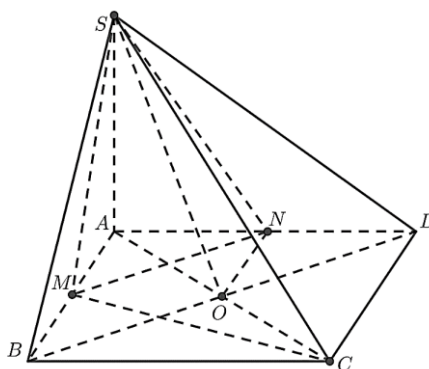
Trong $(ABCD)$, $BC \parallel ID$ và $ID \perp AC \Rightarrow BC \perp AC$ mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$. Khi ấy góc giữa (SBC) và đáy là $\angle SCA = 45^\circ$.

$\triangle SAC \perp$ cân tại A nên $SA = AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ADI} + S_{\triangle ICD} + S_{\triangle IBC} = 3S_{\triangle IBC} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (các tam giác đều cạnh } a \text{)}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}.$$

Câu 25: Chọn D



Ta có: $\begin{cases} ON // AB \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow ON \perp AD$

Có $\begin{cases} ON \perp AD \\ ON \perp SA \end{cases} \Rightarrow ON \perp (SAD) \Rightarrow N \text{ là hình chiếu của } O \text{ lên mặt phẳng } (SAD).$

$\Rightarrow SN$ là hình chiếu của SO trên (SAD)

$$\Rightarrow (SO; (SAD)) = (SO; SN) = NSO = 30^0$$

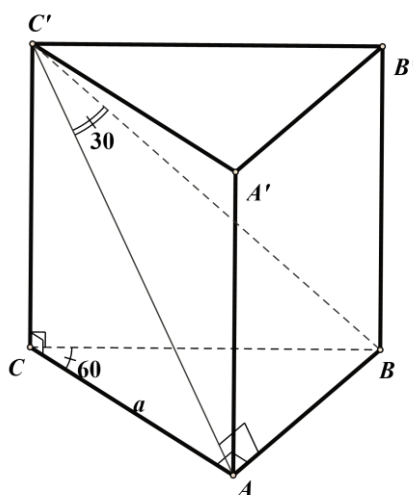
Trong tam giác SON vuông tại N có $NSO = 30^\circ$ suy ra $SO = 2NO = a$

Trong tam giác SOA vuông tại A có $SA = \sqrt{SO^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta lại có $S_{CDNM} = S_{ABCD} - (S_{AMN} + S_{BCM}) = a^2 - \left(\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} \right) = \frac{5a^2}{8}$.

$$\text{Vậy } V_{S.CDNM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a^2}{8} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^3\sqrt{2}}{48}.$$

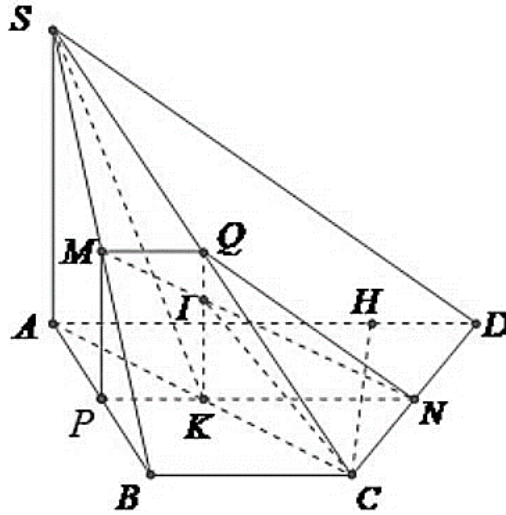
Câu 26: Chọn B



Ta có $AB = a\sqrt{3}$, vì $AB \perp (A'C'CA)$ nên góc giữa đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng

$(A'C'CA)$ là góc $BC'A = 30^\circ$. Suy ra $\tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{AC'} \Rightarrow AC' = 3a \Rightarrow C'C = 2\sqrt{2}a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 2\sqrt{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{6}$.

Câu 27: Chọn A

Giả sử (α) là mặt phẳng chứa MN và song song với mặt phẳng (SAD) . Gọi P, Q và K lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AB, SC và AC với mặt phẳng (α) . Khi đó P, Q và K lần lượt là trung điểm của AB, SC và AC . Gọi I là giao điểm của MN và QK suy ra $I \in (SAC)$.

Theo giả thiết, $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$ nên $AD = 2a$ và $AB = BC = CD = a$ do đó $KN = \frac{1}{2}AD = a$ và $NP = \frac{3a}{2}$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ CH

vuông góc với AD , với $H \in AD$. Khi đó, ta có $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $KC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và

$$S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Với $CN = \frac{a}{2}$ nên $KC^2 + NC^2 = KN^2$ suy ra tam giác KNC vuông tại C . Do đó C là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC) suy ra góc giữa MN và (SAC) là góc NIC .

$$\text{Mặt khác, ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a \Rightarrow MP = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } MNP \text{ vuông tại } P, \text{ ta có } MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

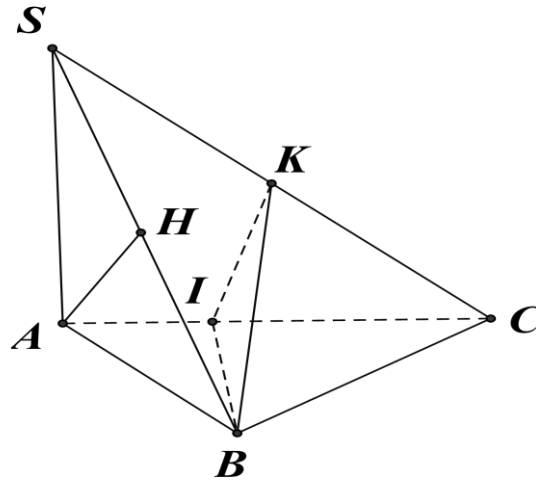
Vì MP, KQ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle SAB$ và $\triangle SAC$ suy ra $MP \parallel KQ \parallel SA$

$$\text{nên } \frac{IN}{MN} = \frac{KN}{NP} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow IN = \frac{2}{3} \cdot MN \Rightarrow NI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow IN = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } NIC \text{ vuông tại } C, \text{ ta có } IC = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{10}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{31}}{6} \text{ và } \cos NIC = \frac{IC}{IN} \text{ suy ra}$$

$$\cos NIC = \frac{a\sqrt{31}}{6} : \frac{a\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{310}}{20}.$$

Câu 28: Chọn D



Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC}$. Kẻ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Do $BC \perp SA$ và $BC \perp AH$ nên $BC \perp (SAB)$, do đó tam giác ABC vuông tại B .

Kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp SC$ và kẻ $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BIK)$

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là $BKI = 60^\circ$.

Do $BSC = 45^\circ$ nên $SB = BC = a\sqrt{2}$ và K là trung điểm của SC nên $BK = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = a$.

Trong tam giác vuông BIK có $BI = BK.\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông ABC có $\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow AB = \frac{BI.BC}{\sqrt{BC^2 - BI^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{15}}{2}$; $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{15}$.

Câu 29: Chọn B

Gọi O, I là trung điểm của AB, BC ; H là hình chiếu vuông góc của O lên SI .

Tam giác SAB cân tại $S \Rightarrow SO \perp AB$. Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Mà $ABCD$ là hình thang cân với đáy $AB = 2a, AD = BC = CD = a$

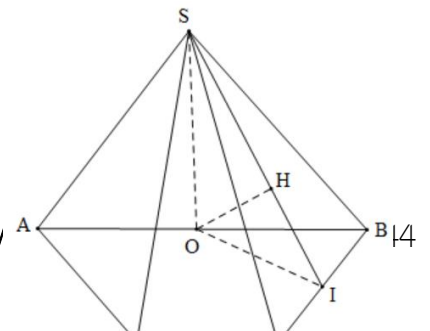
$\Rightarrow \triangle OAD, \triangle OCD, \triangle OBC$ là các tam giác đều, cạnh a

$\Rightarrow S_{ABCD} = 3.S_{OBC} = 3.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do O là trung điểm của AB nên $d(A; (SBC)) = 2.d(O; (SBC))$ (1)

$\triangle OBC$ đều, I là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} OI \perp BC \\ OI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Mà $BC \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$)



$$\Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$$

$$\text{Lại có: } SI \perp OH \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O; (SBC)) = OH \quad (2)$$

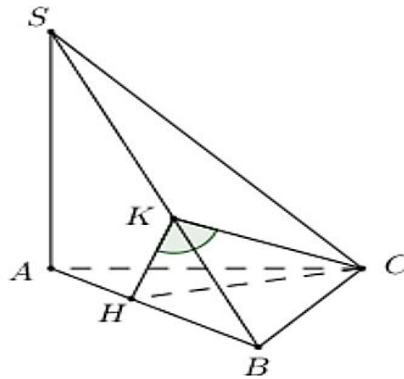
$$\text{Từ (1), (2) suy ra } d(A; (SBC)) = 2.OH = \frac{2a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

ΔSOI vuông tại O , $OH \perp SI$

$$\Rightarrow \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{\frac{3}{5}a^2} \Leftrightarrow SO = a\sqrt{3}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là: } V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Câu 30: Chọn C



$$\text{Trong } (ABC) \text{ kẻ } CH \perp AB \text{ ta có: } \begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB$$

$$\text{Trong } (SBC) \text{ kẻ } CK \perp SB \text{ ta có: } \begin{cases} CH \perp SB \\ CK \perp SB \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CHK) \Rightarrow HK \perp SB.$$

$$\Rightarrow ((SAB), (SBC)) = (HK, CK) = CKH = 60^\circ.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } ABC \text{ ta có: } BC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}; CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } CHK \text{ có: } HK = HC \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}.$$

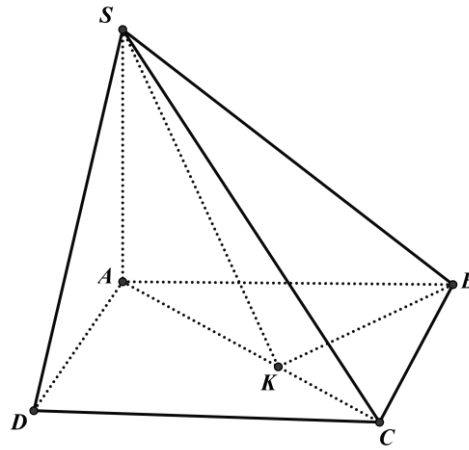
$$HB = \frac{BC^2}{AB} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Ta có } \Delta BHK \sim \Delta BSA (g.g) \Rightarrow \frac{HK}{SA} = \frac{HB}{SB} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{SA} = \frac{\frac{3a}{2}}{\sqrt{SA^2 + 4a^2}} \Rightarrow 3SA = \sqrt{SA^2 + 4a^2}$$

$$\Leftrightarrow 9SA^2 = SA^2 + 4a^2 \Leftrightarrow 8SA^2 = 4a^2 \Leftrightarrow SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 31: Chọn D



Kẻ BK vuông góc với AC tại K . Ta có
$$\begin{cases} BK \perp AC \\ BK \perp SA \\ AC \cap SA = A \\ AC, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC)$$

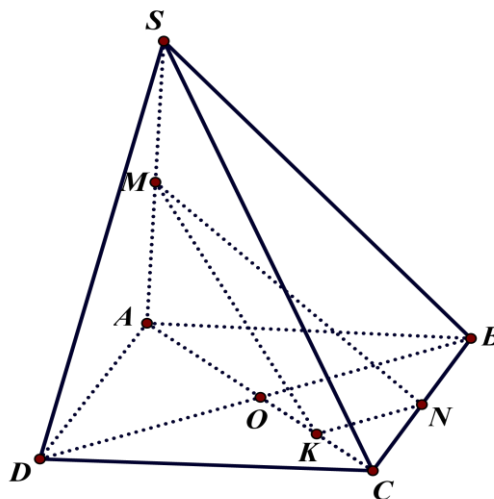
Do đó góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là góc $BSK = 45^\circ$

Suy ra

$$SK = BK = \frac{BC \cdot AB}{AC} = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SB = \sqrt{SK^2 + KB^2} = \frac{2a\sqrt{10}}{5} \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{5} \cdot 2a^2 = \frac{2\sqrt{15}a^3}{15}.$$

Câu 32: Chọn D



Kẻ NK vuông góc với AC tại K . Ta có
$$\begin{cases} NK \perp AC \\ NK \perp SA \\ AC \cap SA = A \\ AC, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow NK \perp (SAC).$$

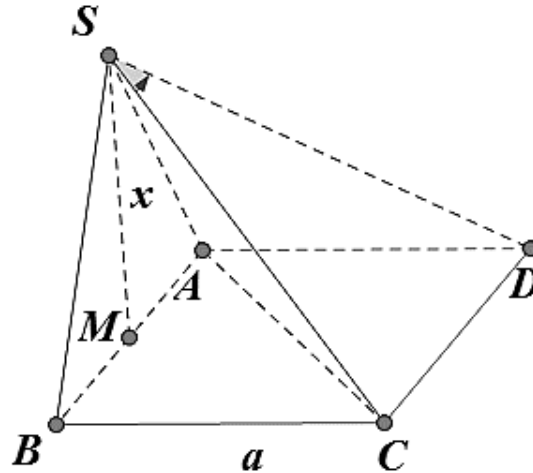
Do đó góc giữa MN và mặt phẳng (SAC) là góc NMK .

nên $MK = \cot \alpha \cdot KN = \sqrt{11} \cdot \frac{1}{2} BO = \frac{a\sqrt{22}}{4}$ suy ra

$$AM = \sqrt{KM^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{22}}{4}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

$$SA = 2AM = a \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}.$$

Câu 33: Chọn C



Gọi M là trung điểm AB .

Vì SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên trung tuyến SM (vừa là đường cao) vuông góc với đáy.

Đặt $SM = x$. Ta có:

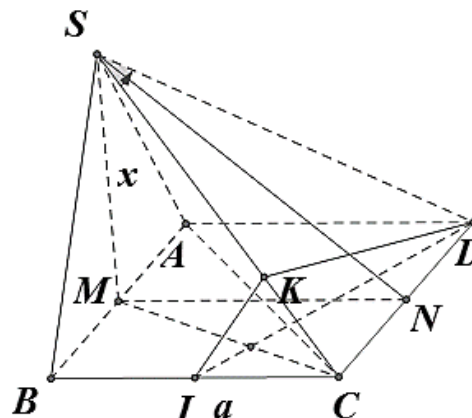
$$SC^2 = SD^2 = SM^2 + MA^2 + AD^2 = SM^2 + MD^2 = x^2 + a^2 + \frac{a^2}{4} = x^2 + \frac{5a^2}{4}.$$

Định lý Cosin trong tam giác SCD , ta có:

$$\cos CSD = \frac{SC^2 + SD^2 - CD^2}{2SC.SD} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{2x^2 - a^2}{2x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Thể tích hình chóp cần tìm: } V = \frac{1}{3}SM.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 34: Chọn C



Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm AB, CD, BC .

Vì SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên trung tuyến SM (vừa là đường cao) vuông góc với đáy.

Ta dễ chứng minh được $MC \perp DI$.

Từ I kẻ $IK \perp SC$ tại K .

Ta có $\begin{cases} ID \perp MC \\ ID \perp SM \end{cases} \Rightarrow ID \perp SC$. Mà $IK \perp SC$ nên $DK \perp SC$. Nên góc tạo bởi (SBC) và (SCD)

bằng góc tạo bởi IK và KD . Đặt $SM = x$. Khi đó $SN^2 = SM^2 + MN^2 = x^2 + a^2$,

$$SC^2 = SD^2 = SM^2 + MA^2 + AD^2 = SM^2 + MD^2 = x^2 + a^2 + \frac{a^2}{4} = x^2 + \frac{5a^2}{4}.$$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

$$\text{Nên } \triangle BCS \sim \triangle KCI; SB^2 = SM^2 + MB^2 = x^2 + \frac{a^2}{4}, ID^2 = IC^2 + CD^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

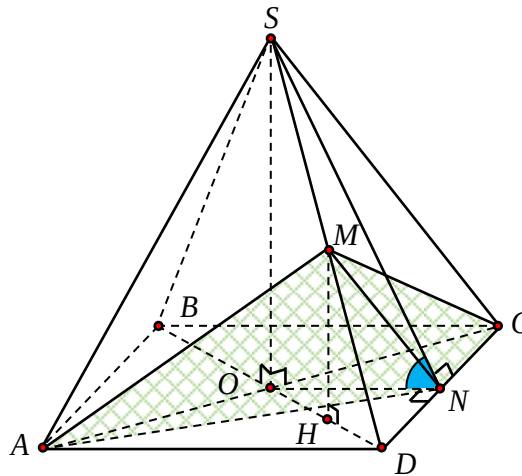
$$\text{Suy ra } IK = \frac{CI}{CS} BS = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4x^2 + a^2}{4x^2 + 5a^2}}. \text{ Hơn nữa: } SN \cdot CD = KD \cdot SC \Rightarrow KD = 2a \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{4x^2 + 5a^2}}.$$

Xét tam giác IKD có $IK^2 + KD^2 - ID^2 = -2a^4 < 0$ nên góc IKD tù.

$$\text{Do đó ta có: } \cos IKD = \frac{-1}{\sqrt{7}} = \frac{IK^2 + KD^2 - ID^2}{2IK \cdot KD} = \frac{-a^2}{\sqrt{(4x^2 + a^2)(x^2 + a^2)}} \Leftrightarrow x = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi đó thể tích cần tìm là: } V = V = \frac{1}{3} SM \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

Câu 35: Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có:

$\triangle SCD$ cân tại S ; N là trung điểm CD , suy ra $SN \perp CD$.

$ABCD$ là hình vuông tâm O ; N là trung điểm CD , suy ra $ON \perp CD$.

Mà $(SCD) \cap (ABCD) = CD$ nên $\left((SCD), (ABCD) \right) = (SN, ON) = SNO = 60^\circ$.

Xét tam giác $\triangle SNO$, ta có $SO = NO \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

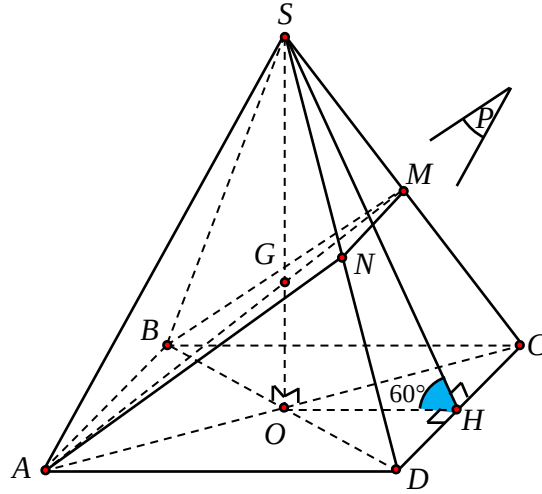
$$\text{Lại có } M \text{ là trung điểm của } SD \text{ nên } d(M, (ABCD)) = \frac{1}{2} d(S, (ABCD)) = \frac{1}{2} SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

N là trung điểm của CD nên

$$S_{\triangle ACN} = \frac{1}{2} AD \cdot CN = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{1}{2} CD = \frac{1}{4} AD \cdot CD = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} 4a^2 = a^2.$$

Do đó, thể tích khối $MACN$ là $V_{MACN} = \frac{1}{3} \cdot d(M, (ABCD)) \cdot S_{ACN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 36: Chọn A



Gọi H là trung điểm cạnh CD và O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau

Khi đó, $\left((SCD), (ABCD) \right) = SHO = 60^\circ$

Tam giác SHO vuông tại O có $SO = OH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác: $\begin{cases} (P) \cap (SCD) = MN \\ AB \subset (P), MN \subset (SCD) \Rightarrow MN \parallel CD \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{cases}$

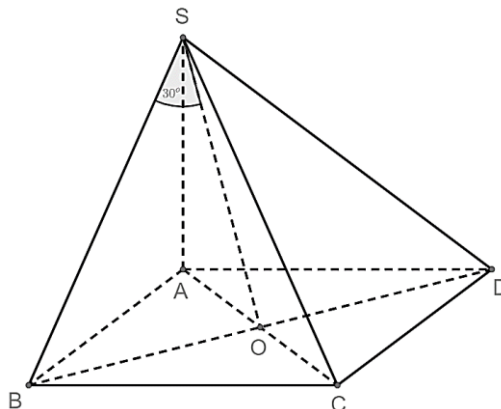
Mà G là trọng tâm tam giác SAC nên G cũng là trọng tâm tam giác $SBD \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}$.

Ta lại có $\frac{V_{SABM}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SABM} = \frac{1}{2} V_{SABC} = \frac{1}{4} V_{SABCD}$

$\frac{V_{SAMN}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SAMN} = \frac{1}{4} V_{SACD} = \frac{1}{8} V_{SABCD}$

Khi đó $V_{SABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) V_{SABCD} = \frac{3}{8} V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37: Chọn B



Dễ dàng chứng minh được $BD \perp (SAC)$. Suy ra: $(SBD) \perp (SAC)$

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAC) \cap (SBD) = SO \\ SC \subset (SAC) \end{cases} \text{ suy ra } (SC, (SBD)) = (SO, SC) = CSO$$

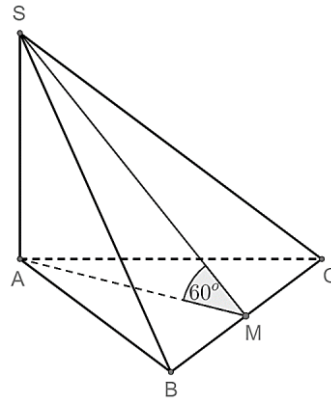
$ABCD$ là hình vuông cạnh a , suy ra $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Đặt } SA = x (x > 0) \Rightarrow \begin{cases} SO = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}} \\ SC = \sqrt{x^2 + 2a^2} \end{cases}$$

$$\text{Xét tam giác } SOC \text{ ta có: } \cos(CSO) = \frac{SC^2 + SO^2 - OC^2}{2SC \cdot SO} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{x^2 + 2a^2 + x^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{2 \cdot \sqrt{(x^2 + 2a^2)} \left(x^2 + \frac{a^2}{2} \right)}$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên } SA = x = a. \text{ Suy ra } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}.$$

Câu 38: Chọn B



$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Trong (ABC) , hạ AM vuông góc với BC . Suy ra M là trung điểm của BC và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

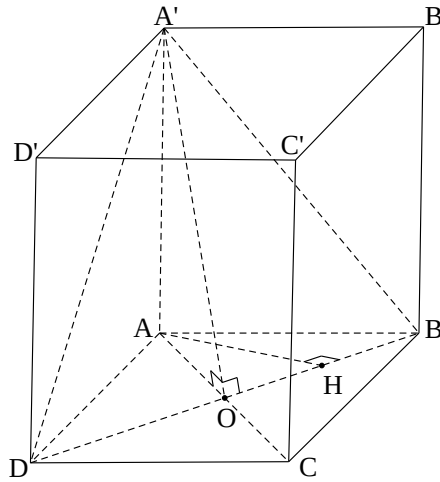
$$\text{Ta có } \begin{cases} G \in AM \\ AM \cap (SBC) = M \end{cases} \text{ suy ra: } \frac{d_{(G, (SBC))}}{d_{(A, (SBC))}} = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow d_{(A, (SBC))} = 3 \cdot d_{(G, (SBC))} = \frac{3a}{4}$$

$$\text{Trong } (SAM) \text{ hạ } AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d_{(A, (SBC))} = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SAM \text{ ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{AH^2 \cdot AM^2}{AM^2 - AH^2}} = \frac{3}{2}a. \text{ Suy ra}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 39: Chọn D



Gọi O là hình chiếu vuông góc của A' xuống $(ABCD)$.

Ta có $A'A = A'B = A'D = 2a$ nên $\triangle A'OA = \triangle A'OD = \triangle A'OB \Rightarrow OA = OB = OD$

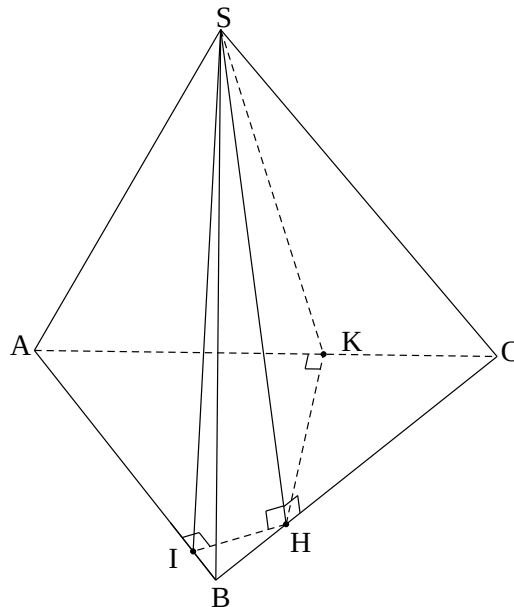
Mà $\triangle ADB$ vuông tại A nên O là trung điểm của BD .

Kẻ $AH \perp DB$ ($H \in DB$) $\Rightarrow AH \perp (A'DB)$; $d(B', (A'DB)) = d(A, (A'DB)) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABD$ vuông tại A có đường cao AH nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow AD = a\sqrt{3}$

Suy ra $AO = a$ và $A'O = a\sqrt{3}$. Vậy $V_{(H)} = A'O \cdot AD \cdot AB = 3a^3$.

Câu 40: Chọn B



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) , H thuộc đoạn BC .

Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC .

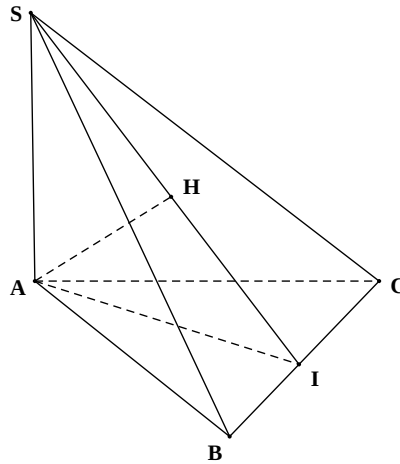
Ta có:

$$SIH = 60^\circ; SKH = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \tan SIH = \frac{SH}{HI} = \sqrt{3} \\ \tan SKH = \frac{SH}{HK} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HI = \frac{SH}{\sqrt{3}} \\ HK = SH\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow HI = \frac{HK}{3}$$

$$\begin{cases} \sin IBH = \frac{IH}{BH} \\ \sin HCK = \frac{KH}{HC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{IH}{BH} \\ \sin 60^\circ = \frac{KH}{HC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HC = 3HB \\ BH = \frac{a}{4} \\ IH = \frac{a\sqrt{3}}{8} \end{cases} . \text{ Suy ra } SH = \sqrt{3}.HI = \frac{3a}{8}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{8} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}.$$

Câu 41: Chọn B



Gọi I là trung điểm của BC . Tam giác ABC đều suy ra $AI \perp BC$.

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$

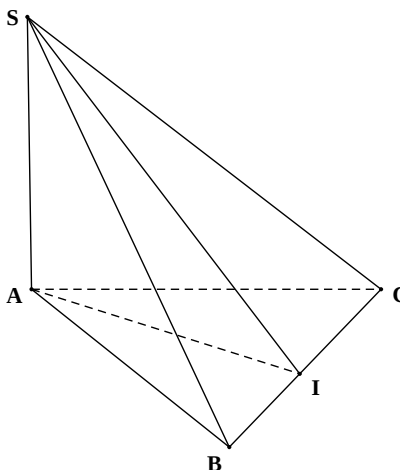
Từ đó suy ra $BC \perp (SAI) \Rightarrow (SAI) \perp (SBC) = SI$. Trong mặt phẳng (SAI) kẻ $AH \perp SI$.

Ta có: $d(A; (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$; $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác vuông ASI có $\frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{16}{6a^2} - \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.

Câu 42: Chọn A



Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $AI \perp BC$ tại I . Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \text{ mà } BC \subset (SBC) \Rightarrow \begin{cases} (SAI) \perp (SBC) \\ (SAI) \cap (SBC) = SI \end{cases}$

Từ đó suy ra hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC) là điểm H thuộc SI .

Góc $(SA; (SBC)) = (SA; SH) = (SA; SI) = ASI = 60^\circ$.

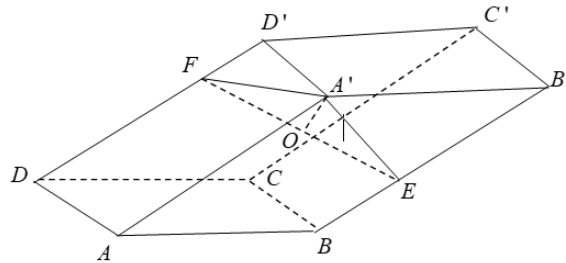
Ta có: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$.

Lại có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AI \Rightarrow AI = \frac{2S_{ABC}}{BC} = 12$.

Trong tam giác vuông ASI có $SA = \frac{AI}{\tan 60^\circ} = 4\sqrt{3}$.

Vậy: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 84 = 112\sqrt{3}$.

Câu 43: Chọn C



Tạo mặt phẳng (α) đi qua A cắt DD' tại F và BB' tại E sao cho $A'F \perp DD'$; $A'E \perp BB'$

$\Rightarrow d(A', BB') = d(A', DD') = A'E = A'F = 1$

Mà $\angle[(BCC'B'); (CDD'C')] = \angle[(ABB'A'); (ADD'A')] = \angle EA'F = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta A'EF$ đều có cạnh bằng 1; Kẻ $A'O \perp EF \Rightarrow A'O \perp (BDD'B')$

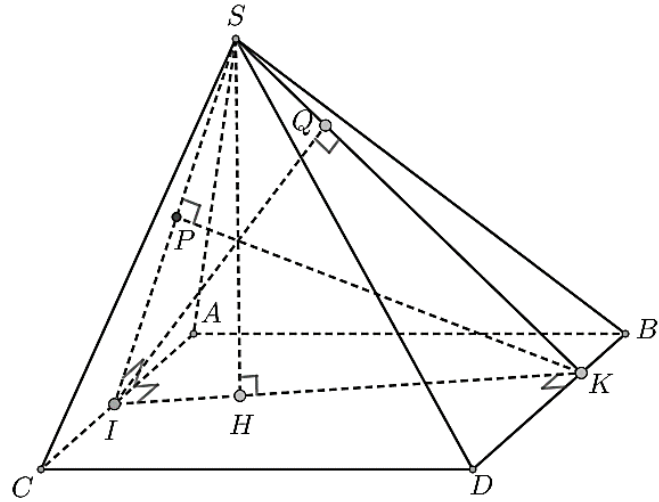
Mặt khác góc giữa AA' với $(ABCD)$ bằng $45^\circ \Rightarrow AB = A'B' = \sqrt{2} = A'B$

$\Rightarrow DD' = BB' = 2$ mà $EF = d(BB', DD')$ nên $S_{BDD'B'} = EF \cdot DD' = 1 \cdot 2 = 2$.

$$\begin{cases} \Rightarrow V_{A'BDD'B'} = \frac{1}{3} A'O \cdot S_{BDD'B'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ V_{A'BDD'B'} = \frac{2}{3} V_{BADB'A'D} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{tru} \end{cases}$$

Suy ra $V_{tru} = 3V_{A'BDD'B'} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Câu 44: Chọn A



Dựng hình bình hành $ABDC$. Do ABC là tam giác đều nên $ABDC$ là hình thoi.

Dựng $SI \perp AC$ ($I \in AC$), $SH \perp (ABC)$ ($H \in (ABC)$).

Gọi $IH \cap BD = K$ suy ra $AC \perp (SIK)$ và $IK = d(B, AC) = 3\sqrt{3}$.

Trong tam giác SIK , dựng $IQ \perp SK, KP \perp SI$ với $Q \in SK, P \in SI$.

Ta có: $AC \perp (SIK) \Rightarrow \begin{cases} AC \perp KP \\ AC \perp IQ \end{cases}$ suy ra $KP \perp (SAC), IQ \perp (SBD)$.

Khi đó: $d(K, (SAC)) = KP$ mà $d(B, (SAC)) = d(K, (SAC))$ nên $KP = 3$;

$d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(I, (SBD)) = IQ$ suy ra $IQ = 2$.

Xét tam giác SIK : $IQ \cdot SK = SI \cdot PK \Rightarrow \frac{SK}{SI} = \frac{PK}{IQ} = \frac{3}{2}$.

Đặt $SI = x$ suy ra $SK = \frac{3x}{2}$.

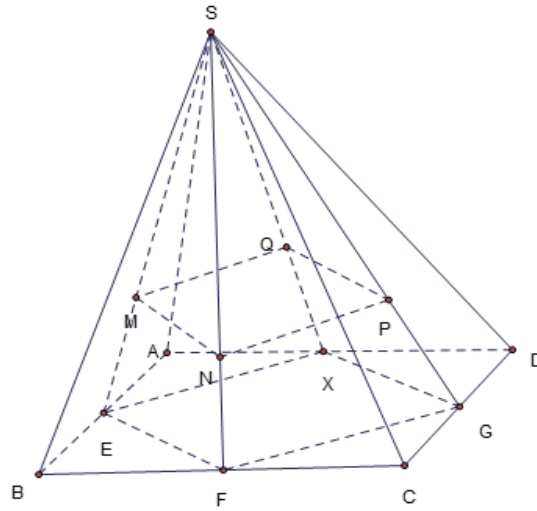
Ta có: $SH \cdot IK = SI \cdot PK \Rightarrow SH = \frac{SI \cdot PK}{IK} = \frac{3x}{3\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

Mặt khác $IH + HK = IK = 3\sqrt{3}$ nên $\sqrt{SI^2 - SH^2} + \sqrt{SK^2 - SH^2} = 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - \frac{3x^2}{9}} + \sqrt{\frac{9x^2}{4} - \frac{3x^2}{9}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x\sqrt{6}}{3} + \frac{x\sqrt{69}}{6} = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{18\sqrt{3}}{2\sqrt{6} + \sqrt{69}}$

Vậy $SH = \frac{18}{2\sqrt{6} + \sqrt{69}} \approx 1,363$.

Câu 45: Chọn A



Gọi E, F, G, X lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2.4S_{\triangle AEX}$$

$$S_{EFGX} = S_{ABCD} - 4S_{\triangle AEX} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

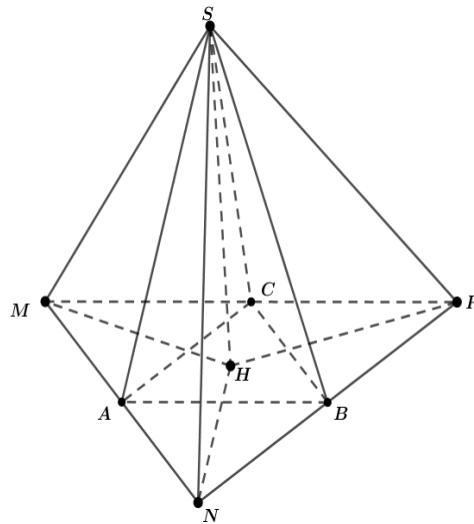
Từ giả thiết suy ra: $MN \parallel EF, MN = \frac{2}{3}EF$; $NP \parallel FG, NP = \frac{2}{3}FG$; $PQ \parallel GX, PQ = \frac{2}{3}GX$

$$QM \parallel XE, QM = \frac{2}{3}XE \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{4}{9}S_{EFGX} = \frac{2}{9}S_{ABCD}$$

$$V = V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3}d(S, (MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}d(S, (ABCD)) \cdot \frac{2}{9}S_{ABCD} = \frac{4}{27}V_{SABCD}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABCD} = \frac{27}{4}V.$$

Câu 46: Chọn D



Gọi M, N, P sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của MN, NP, PM .

Ta có $BC \parallel MN \Rightarrow BC \parallel (SMN)$. Mà $SA \subset (SMN) \Rightarrow d(BC, SA) = d(B, (SMN))$.

$$\text{Ta có } d(B, (SMN)) = \frac{1}{2}d(P, (SMN)) \Rightarrow d(P, (SMN)) = \frac{12a\sqrt{34}}{17}.$$

Để thấy $d(P, MN) = \frac{24}{5}a$. Gọi $\varphi = \left((SMN), (MNP) \right)$. Ta có $\sin \varphi = \frac{d(P, (SMN))}{d(P, MN)} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

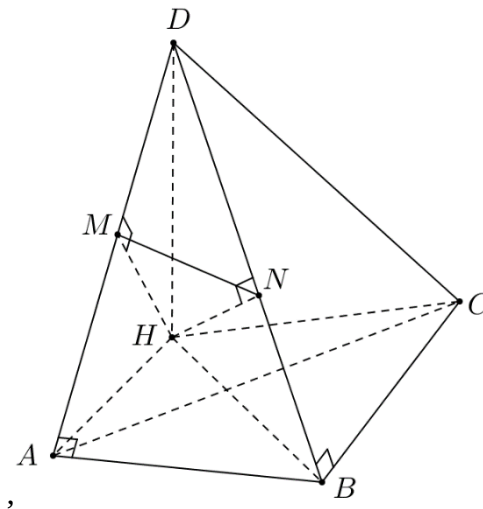
$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{5}{3}.$$

Mặt khác ta có $\tan \varphi = \frac{SH}{d(H, MN)} \Rightarrow d(H, MN) = \frac{3}{5}SH$.

Tương tự ta có $d(H, MP) = \frac{2}{3}SH, d(H, NP) = \frac{3}{4}SH$.

Ta có $S_{\Delta MNP} = S_{\Delta HMN} + S_{\Delta HNP} + S_{\Delta HMP} \Rightarrow SH = 3a$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = 6a^3$.

Câu 47: Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng (ABC) .

Ta có: $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp (DHA) \Rightarrow BA \perp AH$.

Tương tự: $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (DHB) \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác ABH vuông tại A và $ABH = 45^\circ \Rightarrow \Delta ABH$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$ và $HB = a\sqrt{2}$.

Dựng HM vuông góc với DA tại M và dựng HN vuông góc với DB tại N .

Suy ra $HM \perp (DAB)$ và $HN \perp (DBC) \Rightarrow ((DBA), (DBC)) = (HM, HN) = MHN = 30^\circ$.

$$\text{Đặt } DH = x \Rightarrow HM = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}; HN = \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}.$$

Trong tam giác HMN vuông tại M ta có:

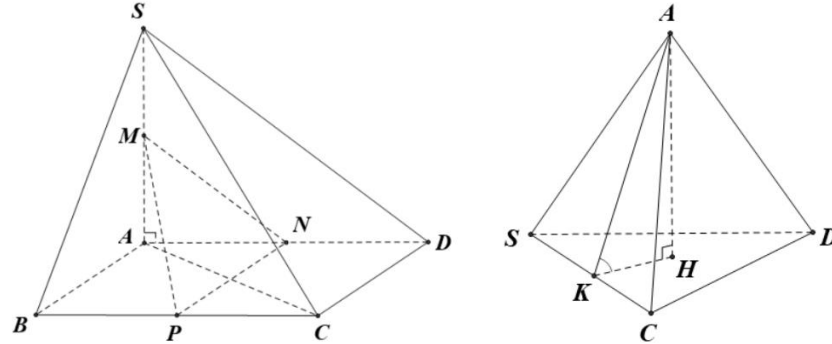
$$\cos MHN = \frac{HM}{HN} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + x^2}}{\sqrt{2a^2 + 2x^2}} \Rightarrow x = a \Rightarrow DH = a.$$

Theo định lý cosin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 135^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{6}.$$

Câu 48: Chọn A



Ta có

$$\begin{cases} MN \parallel SD \Rightarrow MN \parallel (SCD) \\ NP \parallel CD \Rightarrow NP \parallel (SCD) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SCD) \Rightarrow ((MNP), (SAC)) = ((SCD), (SAC)) = \alpha$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (SCD) .

$$K \text{ là hình chiếu vuông góc của } H \text{ trên } SC. \text{ Khi đó } \begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp HK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK) \Rightarrow \alpha = \angle AKH$$

$$\text{Ta có: } AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = 13$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 5; SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow S_{SCD} = \sqrt{p(p-SC)(p-SD)(p-CD)} = 3\sqrt{6} \text{ với } p = \frac{SD+SC+CD}{2} = 4 + \sqrt{7}$$

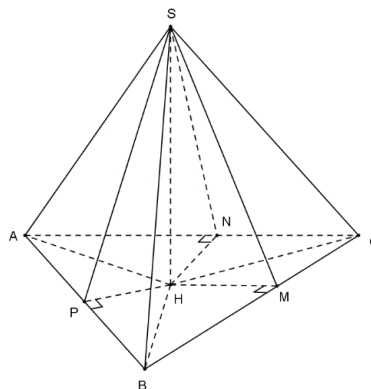
$$V_{SACD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 6$$

$$\text{Mà } V_{SACD} = V_{ASCD} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{SCD} \Rightarrow AH = \frac{3V_{SACD}}{S_{SCD}} = \sqrt{6}$$

$$\Delta SAC \text{ tại } A \text{ có } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AK = \frac{2\sqrt{39}}{5}$$

$$\Delta AHK \text{ có } \sin \alpha = \frac{AH}{AK} = \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \sin \alpha \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$$

Câu 49: Chọn D



Chủ đề 03: Thể tích khối đa diện

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) ; M ; N ; P lần lượt là hình chiếu của H trên BC ; CA ; AB

$$\Rightarrow BC \perp (SHM); CA \perp (SHN); AB \perp (SHP) \Rightarrow BC \perp SM; CA \perp SN; AB \perp SP$$

$$\text{Mà } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}d(A;(SBC)).S_{\Delta SBC} = \frac{1}{3}d(B;(SCA)).S_{\Delta SCA} = \frac{1}{3}d(C;(SAB)).S_{\Delta SAB}$$

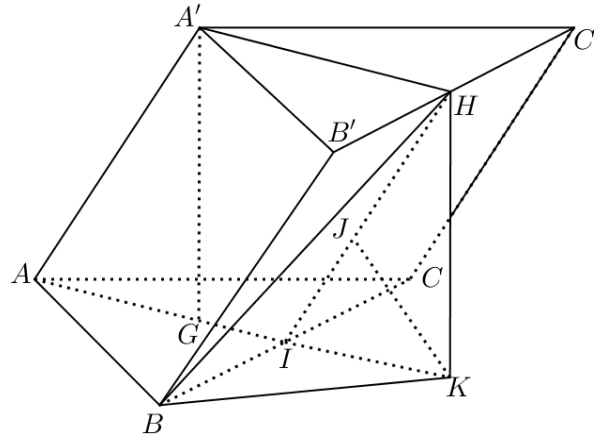
$$\Rightarrow SH \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{1}{2}SM \cdot BC = \frac{\sqrt{15}}{10} \cdot \frac{1}{2}SN \cdot CA = \frac{\sqrt{30}}{20} \cdot \frac{1}{2}SP \cdot AB$$

$$\Rightarrow SM = SH \cdot \sqrt{2}; SN = SH \cdot \sqrt{5}; SP = SH \cdot \sqrt{10} \Rightarrow HM = SH; HN = 2SH; HP = 3SH$$

$$\text{Lại có: } S_{\Delta ABC} = S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA} + S_{\Delta HAB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}HM \cdot BC + \frac{1}{2}HN \cdot CA + \frac{1}{2}HP \cdot AB \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{48}.$$

Câu 50: Chọn C



Gọi G là trọng tâm của ΔABC , I, H lần lượt là trung điểm của BC , $B'C'$.

Dựng hình chữ nhật $GKHA' \Rightarrow A'G \parallel HK$ mà $A'G \perp (ABC) \Rightarrow HK \perp (ABC)$.

$$\text{Ta có } KI = AG = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Do AA' song song với mặt phẳng $(BCC'B')$ nên

$$d(AA', BC) = d(A, (BCC'B')) = \frac{3}{2}d(K, (BCC'B')).$$

$$\text{Suy ra } d(K, (BCC'B')) = \frac{2}{3}d(AA', BC) = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Gọi J là hình chiếu vuông góc của K lên $HI \Rightarrow KJ \perp HI$ (1).

Mặt khác $BC \perp HK$ (do $HK \perp (ABC)$), $BC \perp IK$ (do ΔABC đều)

$$\Rightarrow BC \perp (HKI) \Rightarrow BC \perp KJ$$
 (2).

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow KJ \perp (BCC'B') \Rightarrow d(K, (BCC'B')) = KJ = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Xét } \Delta HKI \text{ vuông tại } K \text{ ta có: } \frac{1}{KJ^2} = \frac{1}{KI^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow \frac{12}{a^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot HK = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

A // BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 45° . Gọi M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $C'M$ bằng $\sqrt{3}a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng
- A. $16\sqrt{3}a^3$. B. $12a^3$. C. $24a^3$. D. $8\sqrt{3}a^3$.
- Câu 2:** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(A'B'C')$ bằng 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.
- Câu 3:** Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , đường thẳng DB_1 tạo với mặt phẳng (BCC_1B_1) góc 30° . Thể tích khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là
- A. a^3 . B. $a^3\sqrt{3}$. C. $a^3\sqrt{2}$. D. $a^3\sqrt{6}$.
- Câu 4:** Cho hình hộp chữ nhật có đường chéo $d = \sqrt{21}$. Độ dài ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho là
- A. $V = 8$. B. $V = \frac{8}{3}$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = 6$.
- Câu 5:** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = 1$. Cạnh $A'B$ tạo với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.
- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{1}{2}$.
- Câu 6:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $ACB = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với $(ACC'A')$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối trụ $ABC.A'B'C'$
- A. $a^3\sqrt{6}$. B. $3a^3$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $BC = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ bằng 60° . Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = 3a^3$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc ABC bằng 60° . Đường chéo $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ tính theo a bằng:

- A. $\frac{1}{4}a^3$.. B. $\frac{1}{6}a^3$.. C. $\frac{1}{2}a^3$. D. $\frac{3}{2}a^3$.

Câu 9: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, tam giác đáy $m \geq f(1)$ cân tại $m \leq f(6) - \log 6$, $BAC = 30^\circ$, $AB = a\sqrt{3}$, $AA' = a$ Gọi $h(x) = \log x - f(x)$ là trung điểm của $(1;6)$. Tính thể tích khối đa diện $MC'ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $f'(x) < 0, \forall x \in (1;6)$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $h(x)$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 10: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 11: Cho lăng trụ đứng tam giác $MNP.M'N'P'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Biết rằng góc giữa đường thẳng MP' và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ B. $\frac{3a^3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 12: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$; $AA' = 2\sqrt{3}a$. Gọi M ; N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Biết mặt bên $BCC'B'$ là hình chữ nhật và mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng $(BCC'B')$. Tính thể tích lăng trụ đã cho theo a :

- A. $3\sqrt{3}a^3$. B. $24\sqrt{3}a^3$. C. $12\sqrt{3}a^3$. D. $4\sqrt{3}a^3$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

- A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = 5$. Hình chiếu vuông góc của A và C lên $A'B'$ trùng nhau. Khoảng cách từ A đến $A'B'$ bằng 3; khoảng cách từ C đến $A'B'$ bằng 4. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3\sqrt{3}$.

B. 15.

C. 30.

D. $6\sqrt{3}$.

Câu 15: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt bên $BB'C'C$ là hình thoi có $B'BC$ nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng CC' và AB' lần lượt bằng $\frac{4\sqrt{35}}{7}$; α với $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $12\sqrt{3}$.

B. $12\sqrt{5}$.

C. $3\sqrt{6}$.

D. $9\sqrt{6}$.

Câu 16: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' bằng $6a$; góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $84\sqrt{21}a^3$

B. $108a^3$.

C. $324\sqrt{3}a^3$.

D. $24\sqrt{6}a^3$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $BAC = 120^\circ$ và các cạnh bên hợp với đáy một góc 45° . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Biết $ABB'A'$ là hình thoi cạnh $2a$, $AA'B' = 60^\circ$ và góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng 30° . Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Thể tích khối tứ diện $ACMC'$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$.

B. $\frac{a^3}{48}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $BAC = 120^\circ$ và các cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 45° . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Biết khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng AC và DC' lần lượt là $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ và α , $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Thể tích lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{21}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{7}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{2}$.

D. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là $2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng a . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

- A. $2\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. D. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

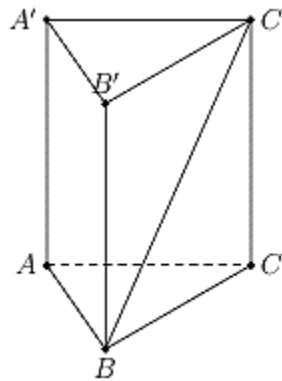
Câu 22: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

- A. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. B. $V = 2\sqrt{3}a^3$. C. $V = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $V = 2\sqrt{6}a^3$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a , góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. B. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 2$.



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{33}}{8}a^3$. B. $\frac{4\sqrt{11}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{11}}{8}a^3$. D. $\frac{2\sqrt{33}}{3}a^3$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông; khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng AC và DC' lần lượt bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$ và φ với $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $3a^3$. B. $9a^3$. C. $3\sqrt{3}a^3$. D. $\sqrt{3}a^3$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt bên $BB'C'C$ là hình thoi và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa CC' và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $\frac{a\sqrt{12}}{5}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{21}}{14}$.

C. $\frac{3a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{21}}{7}$.

Câu 28: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , $BD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(ADD'A')$ bằng 60° . Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 29: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$; góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' , DD' cùng bằng 1. Góc giữa hai mặt phẳng $(BB'C'C)$ và $(C'CDD')$ bằng 60° . Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. 2.

B. $3\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V , có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $BA = a$, $AC = 2a$. Mặt bên $(BB'A'A)$ là hình thoi có góc $ABB' = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm của BC' . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'A'$ và BI bằng $\frac{3a}{4}$. Biết rằng $V > \frac{a^3}{2}$. Giá trị V bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{39}}{20}$.

B. $\frac{9a^3\sqrt{39}}{20}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{39}}{8}$.

D. $\frac{3a^3(\sqrt{3} + \sqrt{39})}{32}$.

Câu 31: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V , có đáy là tam giác đều cạnh a . Biết rằng $BAA' = 90^\circ$, $AC' = 2a$, góc nhị diện tạo bởi mặt phẳng $(AB'C')$ và đáy bằng 60° . Nếu $V > \frac{a^3}{3}$ thì giá trị của V tính theo a bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3a^3\sqrt{66}}{40}$.

B. $\frac{6\sqrt{6} + 3\sqrt{3}}{28}a^3$.

C. $\frac{3a^3(\sqrt{66} + 1)}{40}$.

D. $\frac{6\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{28}a^3$.

Câu 32: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tam giác $AA'C$ là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng $(AA'B)$ trùng với trực tâm của tam giác $AA'B$. Biết cạnh $AB = 2a$ và chu vi tam giác $A'BC$ bằng $5a$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{11}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{11}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{33}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{33}}{12}$.

Câu 33: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và DD' bằng 1. Góc giữa mặt $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng 60° . Thể tích khối hộp đã cho là

A. $3\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. 2.

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC . Mặt phẳng (P) vuông góc với các cạnh bên và cắt các

Chủ đề 04: Thể tích khối lăng trụ

cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại $D; E; F$. Biết rằng mặt phẳng $(ABB'A')$ vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ và chu vi tam giác DEF bằng 4. Thể tích của khối hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

- A. $12(10-7\sqrt{2})$. B. $4(10+7\sqrt{2})$. C. $6(10-7\sqrt{2})$. D. $12(10+7\sqrt{2})$.

Câu 35: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi I là trung điểm của BB' . Mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần. Tính tỷ số thể tích phần bé chia phần lớn.

- A. $\frac{7}{17}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 36: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. M, N lần lượt là trung điểm AB, AC ; P thuộc đoạn CC' sao cho $\frac{CP}{CC'} = x$. Tìm x để mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện có tỉ lệ thể tích là $\frac{1}{2}$.

- A. $\frac{8}{5}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{5}{4}$.

Câu 37: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, B'C', DD'$. Gọi thể tích khối tứ diện $CMNP$ là V' . Khi đó thể tích $\frac{V'}{V}$ bằng:

- A. $\frac{1}{64}$. B. $\frac{3}{64}$. C. $\frac{1}{16}$. D. $\frac{3}{16}$.

Câu 38: Suy ra $\frac{V'}{V} = \frac{3}{16}$. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD . Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm C', G và song song với đường thẳng BD , chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 ($V_1 < V_2$). Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

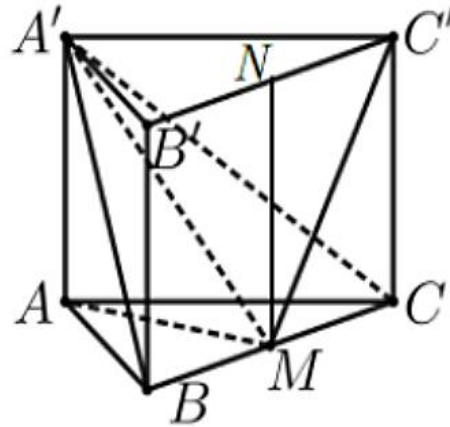
- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{17}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{77}$.

Câu 39: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Trên tia đối của tia $B'A'$ lấy điểm M sao cho $B'M = \frac{1}{2}B'A'$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của $A'C', BB'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có chứa đỉnh A' có thể tích V_1 và khối đa diện chứa đỉnh C' có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{95}{144}$. B. $\frac{97}{59}$. C. $\frac{49}{144}$. D. $\frac{49}{95}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C



Đặt độ dài cạnh đáy của lăng trụ là x ($x > 0$).

$$\text{Ta có } \begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \\ AM, AA' \subset (AMA') \end{cases} \text{ nên } BC \perp (AA'M).$$

Suy ra $((A'BC), (ABC)) = A'MA = 45^\circ$. Do đó $AA' = AM = \frac{\sqrt{3}x}{2}$.

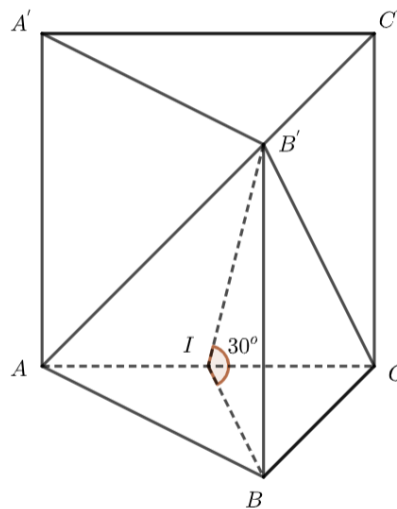
Gọi N là trung điểm $B'C'$. Khi đó

$$BN \parallel C'M \Rightarrow d(C'M, A'B) = d(C'M, (A'BN)) = d(C', (A'BN)) = d(B', (A'BN)).$$

$$\frac{1}{d^2(B', (A'BN))} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{B'N^2} = \frac{4}{3x^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{16}{3x^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow x = 4a.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{3}{8}x^3 = 24a^3$$

Câu 2: Chọn A



Gọi I là trung điểm của AC , ta có $AC \perp BI, AC \perp BB' \Rightarrow AC \perp B'I$

Do $mp(ABC)$ song song với $mp(A'B'C')$ nên

$$((AB'C), (A'B'C')) = ((AB'C), (ABC)) = B'IB = 30^\circ.$$

$$\text{Ta có } BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ xét } \triangle B'BI \text{ vuông tại } B \text{ có } \tan 30^\circ = \frac{BB'}{IB} \Rightarrow BB' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 3: Chọn C

Diện tích $ABCD$ là $S = a^2$; $(DB_1, (BCC_1B_1)) = DB_1C = 30^\circ$

$$\tan \angle AB_1C = \frac{DC}{CB_1} \Rightarrow CB_1 = \frac{DC}{\tan \angle AB_1C} = \frac{a}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Chiều cao: } C_1C = \sqrt{CB_1^2 - C_1B_1^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ: } V = S \cdot C_1C = a\sqrt{2} \cdot a^2 = a^3\sqrt{2}.$$

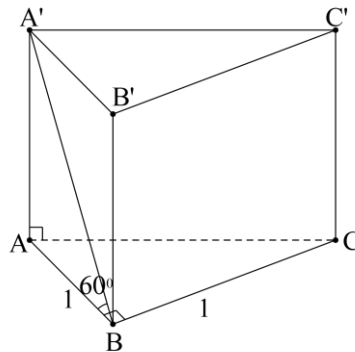
Câu 4: Chọn A

Gọi ba kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c ($0 < a < b < c$). Do a, b, c lập thành cấp số nhân nên $b = 2a$; $c = 4a$.

$$\text{Theo giả thiết: } a^2 + b^2 + c^2 = 21 \Leftrightarrow 21a^2 = 21 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{Vậy thể tích khối hộp chữ nhật là } V = abc = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

Câu 5: Chọn C



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \left(A'B, (ABC) \right) = \left(A'B, AB \right) = A'BA = 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra thể tích } V \text{ của khối lăng trụ đã cho là } V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 6: Chọn A

Xét tam giác ABC vuông tại A ta có:

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

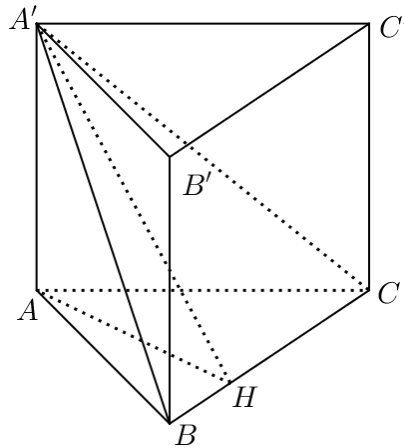
$$AC' \text{ là hình chiếu của } BC' \text{ lên } (ACC'A') \Rightarrow \angle BC'A = 30^\circ.$$

$$\text{Xét tam giác } ABC' \text{ vuông tại } A \text{ ta có: } \tan 30^\circ = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = 3a$$

$$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = a^3\sqrt{6}.$$

Câu 7: Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC , khi đó $\left((A'BC), (ABC) \right) = \angle AHA' = 60^\circ$.

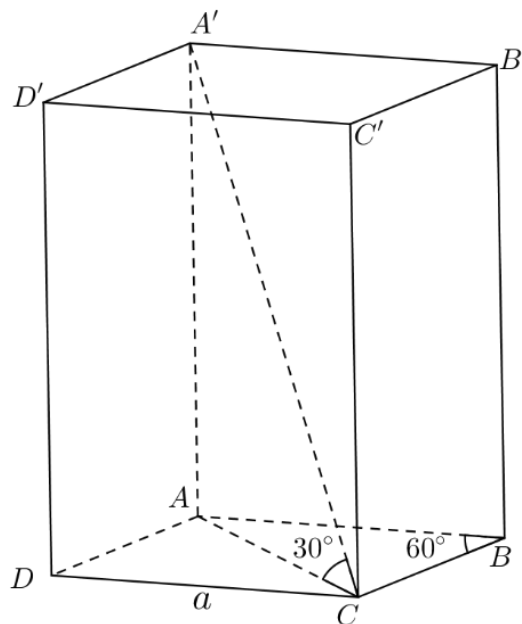
Áp dụng công thức diện tích hình chiếu ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A'BC} \cdot \cos 60^\circ = 2a^2 \cdot \frac{1}{2} = a^2$

Mặt khác, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH.BC \Rightarrow AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2a^2}{2a} = a.$

Khi đó $AA' = AH.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'BC} = S_{\Delta ABC} \cdot A'A = a^2 \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Câu 8: Chọn C



Góc giữa $A'C$ và $(ABCD)$ là góc ACA' .

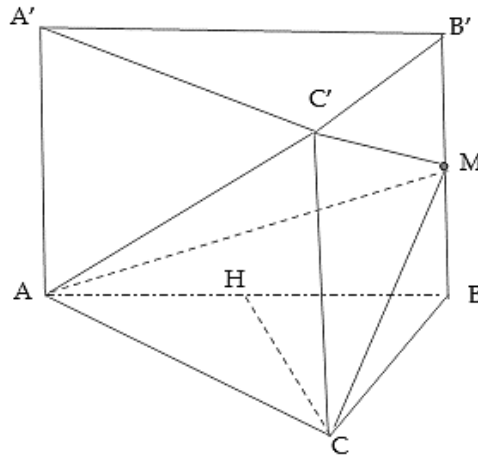
Tam giác ABC cân tại B có $\angle ABC = 60^\circ$ nên tam giác ABC là đều $\Rightarrow AC = a$.

Diện tích hình thoi : $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle A'AC$ vuông tại $A \Rightarrow AA' = AC \cdot \tan \angle ACA' = a \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = S_{ABCD}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{2}$.

Câu 9: Chọn A



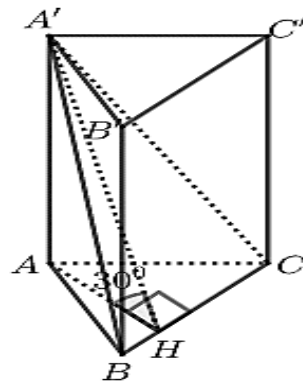
Ta có ABC cân tại C , H là trung điểm của AB nên $CH \perp AB \Rightarrow CH = AH \cdot \tan 30^\circ$
 $= \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích $V_{C'.AA'B'M} = \frac{1}{3} \cdot CH \cdot S_{A'AMB'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3} \left(a + \frac{a}{2} \right)}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Thể tích $V_{MC'.ABC} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C'.AA'B'M} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} - \frac{a^3\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 10: Chọn D



Trong $\triangle ABC$, kẻ $AH \perp BC$. Ta có: $\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \perp BC$.

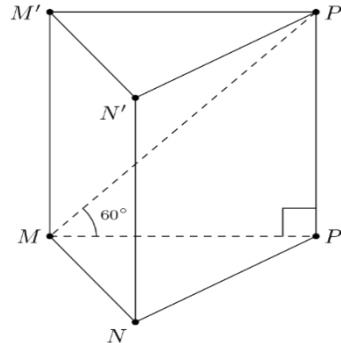
Khi đó: $\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \\ AA' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow (AA'H) \perp BC \Rightarrow A'H \perp BC$.

$\left\{ \begin{array}{l} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AH \subset (ABC) \\ BC \perp A'H \subset (A'BC) \end{array} \right. \Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = (A'H, AH) = A'HA = 30^\circ$.

$AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$AA' = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}.$$

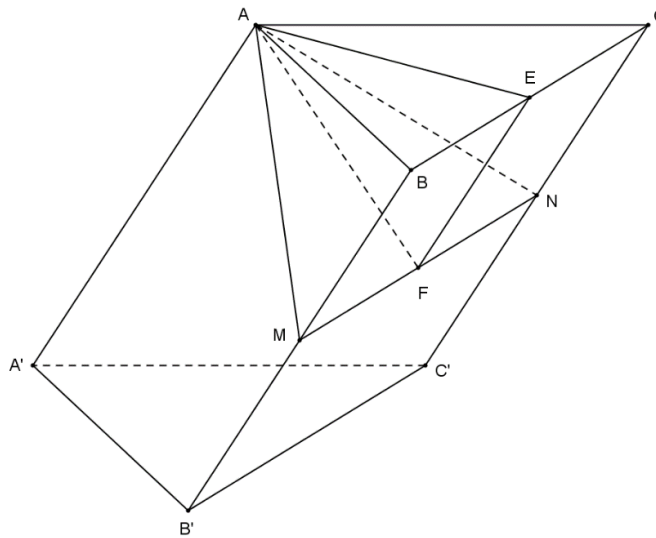
$$V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = AA' \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 11: Chọn B

Ta có $(MP'; (MNP)) = 60^\circ \Rightarrow P'MP = 60^\circ$. Vậy $PP' = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Do MNP là tam giác đều cạnh a nên $S_{MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{MNP.M'N'P'} = PP' \cdot S_{MNP} = a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 12: Chọn C

Từ gt $\Rightarrow BB' \perp MN$

Mà $(AMN) \perp (BCC'B')$ nên $BB' \perp (AMN) \Rightarrow AA' \perp (AMN)$

Gọi E ; F lần lượt là trung điểm BC và MN

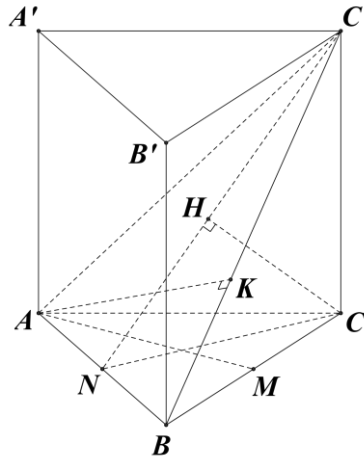
$\Rightarrow$ Tam giác AEF vuông tại F ; tam giác AMN cân tại A .

Ta có: $MN = 4a$; $AE = 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a$; $EF = \frac{1}{2}AA' = \sqrt{3}a$

$\Rightarrow AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}a)^2 - (\sqrt{3}a)^2} = 3a \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}AF \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a = 6a^2$

Vậy thể tích lăng trụ đã cho là: $V = h \cdot S_{\triangle ABC} = AA' \cdot S_{\triangle AMN} = 2\sqrt{3}a \cdot 6a^2 = 12\sqrt{3}a^3$ (h là chiều cao của hình lăng trụ).

Câu 13: Chọn D



Đặt $AB = x, AA' = y, x > 0, y > 0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB . Kẻ $CH \perp C'N$ tại H và $AK \perp C'B$ tại K .

$$\text{Ta có: } d(A, (BCC'B')) = AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}, C'N = \sqrt{CC'^2 + CN^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4} + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3x^2 + 4y^2}.$$

$$C'B = \sqrt{CC'^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Delta AC'B \text{ cân tại } C' \Rightarrow S_{AC'B} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot C'B = \frac{1}{2} \cdot C'N \cdot AB \Rightarrow AK = \frac{C'N \cdot AB}{C'B} = \frac{x\sqrt{3x^2 + 4y^2}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\Rightarrow \sin((ABC'), (BCC'B')) = \frac{d(A, (BCC'B'))}{d(A, BC')} = \frac{AM}{AK} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3x^2 + 4y^2}}$$

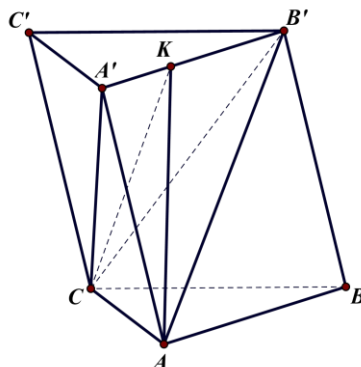
$$\Rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3x^2 + 4y^2}} \Leftrightarrow 3x^2 = 8y^2 \Leftrightarrow y = \frac{x\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Mặt khác: } d(C, (ABC')) = CH = \frac{CC' \cdot CN}{C'N} = \frac{\sqrt{3}xy}{\sqrt{3x^2 + 4y^2}} = a \Leftrightarrow a^2(3x^2 + 4y^2) = 3x^2y^2$$

$$\text{Thay và ta tìm được } x = 2a \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

Câu 14: Chọn C



Gọi K là hình chiếu của A và C lên $A'B'$.

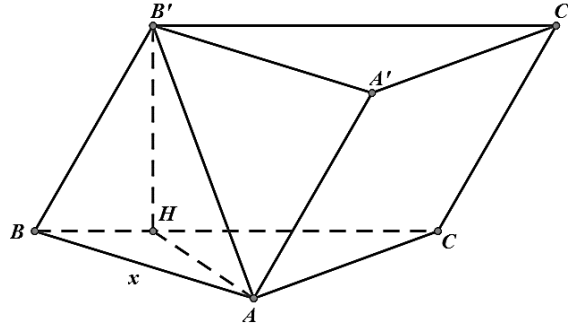
Theo giả thiết ta có $CK = 4; AK = 3; AC = 5$, suy ra tam giác ACK vuông tại K , hay $CK \perp AK$.

Mà $CK \perp A'B'$ nên $CK \perp (A'B'A)$.

$$\text{Do đó } V_{A'B'AC} = \frac{1}{3}CK.S_{A'B'A} = \frac{1}{3}CK.\frac{1}{2}AK.A'B' = \frac{1}{6}.3.4.5 = 10.$$

Mặt khác, dễ thấy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'B'CA}$ nên $V_{ABC.A'B'C'} = 30$.

Câu 15: Chọn B



Trong mp $(BB'C'B)$ hạ $B'H \perp BC$. Suy ra $B'H \perp (ABC)$.

Ta có: $BB' // CC' \Rightarrow (CC', AB') = (BB', AB') = B'BA$

$$\Delta ABB' \text{ có } \cos B'BA = \frac{BB'^2 + AB'^2 - AB^2}{2BB'.AB'} = \frac{AB'}{2x} \Leftrightarrow AB' = \frac{x\sqrt{7}}{2}.$$

$$\Delta AHB' \text{ có } AB'^2 = B'H^2 + AH^2$$

$$\Delta ABH \text{ có } AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB.BH.\cos 60^\circ = x^2 + BH^2 - x.BH$$

$$\Delta B'BH \text{ có } B'H^2 = BB'^2 - BH^2 = x^2 - BH^2$$

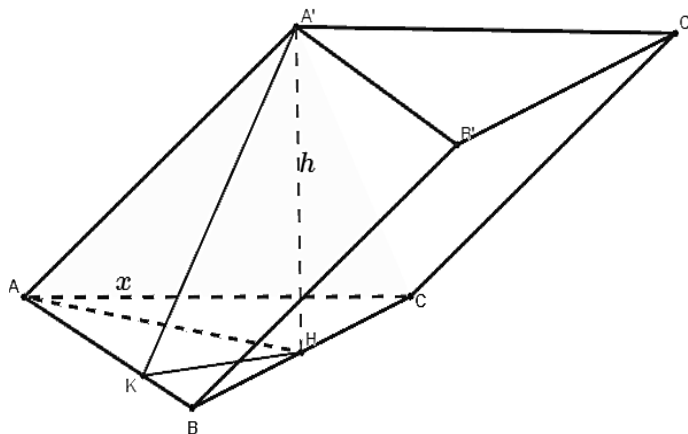
$$\text{Từ đó ta có } \frac{7x^2}{4} = 2x^2 - x.BH \Leftrightarrow BH = \frac{x}{4}.$$

$$\text{Suy ra } B'H = \frac{x\sqrt{15}}{4}. \text{ Lúc đó } V_{ABC.A'B'C'} = B'H.S_{ABC} = \frac{3x^3\sqrt{5}}{16}$$

$$\text{Lại có } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}d(CC', ABB'A').AB'.BB'.\sin BB'A = \frac{3x^2\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Suy ra } \frac{3x^2\sqrt{5}}{4} = \frac{3x^3\sqrt{5}}{16} \Leftrightarrow x = 4. \text{ Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{5}..$$

Câu 16: Chọn D



Chủ đề 04: Thể tích khối lăng trụ

Gọi cạnh hình đáy là x , chiều cao lăng trụ là h .

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC), AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$.

Ta có: $V_{LT} = 3V_{AA'B'C'} = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot AA' \cdot B'C' \cdot d(AA'; B'C') \cdot \sin(AA'; B'C')$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{h^2 + \frac{3x^2}{4}} \cdot 6a \cdot \sin 90^\circ. \text{ Mặt khác: } V_{LT} = 3V_{A'ABC} = h \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$$

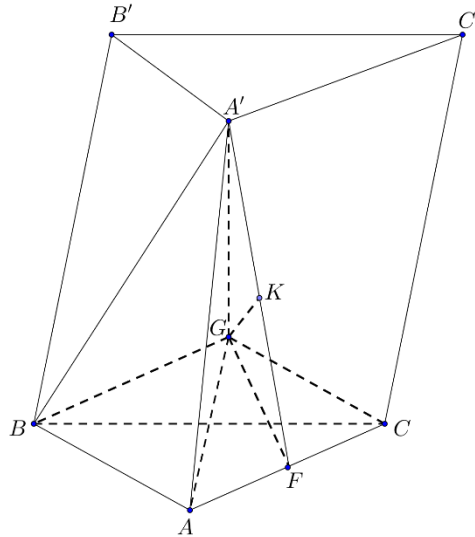
K là hình chiếu của H lên $AB \Rightarrow ((ABB'A'), (ABC)) = A'KH = 60^\circ$.

$$KH = HB \sin HBK = \frac{x\sqrt{3}}{4}; h = HK \tan A'KH = \frac{3x}{4}.$$

$$\text{Từ,, ta có: } x \cdot 3a \cdot \sqrt{\frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{4}x^2} = \frac{3x^3 \sqrt{3}}{13} \Rightarrow x = 4a\sqrt{7}.$$

Vậy tích khối lăng trụ đã cho bằng $24\sqrt{6}a^3$.

Câu 17: Chọn C



Đặt $AB = AC = x$. Dựng hình thoi $ABGC$ trong mặt phẳng (ABC) .

Vì $BAC = 120^\circ \Rightarrow GA = GB = GC$ và G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$\Rightarrow A'G \perp (ABC)$.

Gọi F là trung điểm của $AC \Rightarrow GF \perp AC \Rightarrow AC \perp (AGF)$.

Dựng $GK \perp A'F \Rightarrow GK \perp (AA'C'C)$.

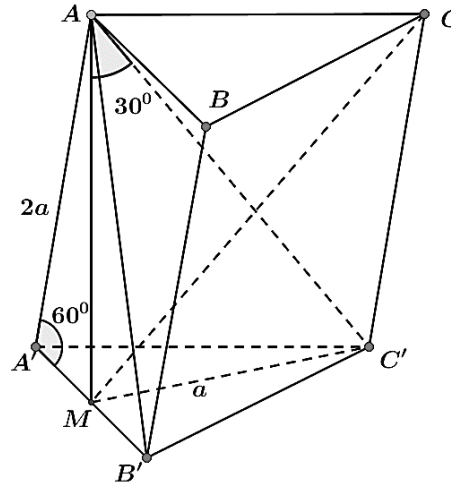
$$\text{Do } BG \parallel AC \Rightarrow BG \parallel (AA'C'C) \Rightarrow d[B, (ACC'A')] = d[G, (ACC'A')] = GK \Rightarrow GK = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ta có: $A'G \perp (ABC) \Rightarrow (AA', (ABC)) = A'AG = 45^\circ \Rightarrow$ tam giác $AA'G$ vuông cân tại G

$$\Rightarrow A'G = GA = GB = GC = AB = x. \text{ Vì } \triangle GAC \text{ đều} \Rightarrow GF = \frac{\sqrt{3}}{2} GA = \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{GF^2} = \frac{1}{GK^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\frac{3}{4}x^2} = \frac{7}{3} \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot S_{ABC} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 18: Chọn D

Vì $\triangle AA'B'$ là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AM = a\sqrt{3}$.

Vì $\triangle A'B'C'$ vuông cân tại C' nên $C'M = \frac{A'B'}{2} = a$. Ta có: $\begin{cases} A'B' \perp AM \\ A'B' \perp C'M \Rightarrow A'B' \perp (AMC') \end{cases}$

Kẻ $C'I \perp AM$. Ta có: $\begin{cases} C'I \perp AM \\ C'I \perp A'B' \end{cases} \Rightarrow C'I \perp (ABB'A')$.

Do đó: $(AC', (ABB'A')) = (AC', AI) = C'AI = 30^\circ \Rightarrow C'AM = 30^\circ$.

Xét $\triangle AMC'$ có: $\frac{MC'}{\sin MAC'} = \frac{AM}{\sin AC'M} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin AC'M} \Leftrightarrow \sin AC'M = \frac{\sqrt{3}}{2}$

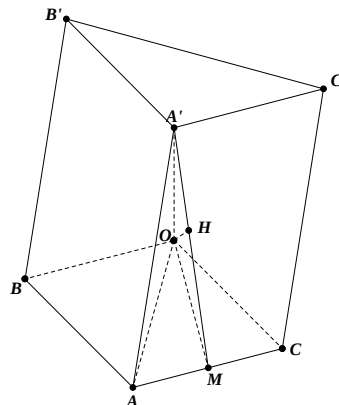
$$\Rightarrow \begin{cases} AC'M = 60^\circ \\ AC'M = 120^\circ \end{cases} \Rightarrow S_{AMC'} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MC' \cdot \sin AMC' = \begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \end{cases}$$

Ta có: $d(C, (AB'C')) = d(A', (AB'C')) = A'M = a$.

$$\text{Do đó: } V_{ACMC'} = \frac{1}{3} \cdot d(C, (AB'C')) \cdot S_{AMC'} = \begin{cases} \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \\ \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

Câu 19: Chọn C

Đặt $AB = AC = x$, ta có $\frac{x}{\sin 30^\circ} = 2R \Leftrightarrow R = x$ suy ra $OABC$ là hình thoi



Ta có $(AA'; (ABC)) = A'AO = 45^\circ \Rightarrow OA' = OA = x$.

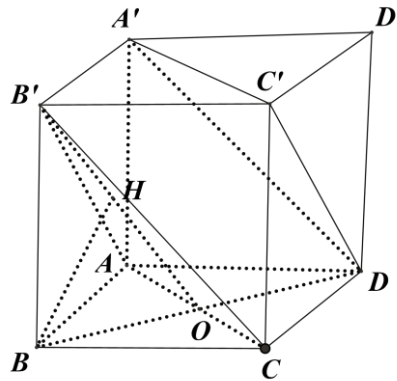
Gọi M là trung điểm AC , OH là đường cao tam giác $OA'M \Rightarrow OH = d(O; (ACC'A'))$.

Do $OB \parallel AC \Rightarrow d(B; (ACC'A')) = d(O; (ACC'A')) = \frac{\sqrt{21}}{7} = OH$.

Ta lại có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{4}{3x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{7}{3x^2} \Leftrightarrow OH^2 = \frac{3x^2}{7} \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $V_{ABCA'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20: Chọn D



Ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $AA' \perp (ABCD)$.

Đặt $AB = x; AA' = y$.

Ta có $(AC, DC') = (A'C', DC')$.

Mặt khác: $\cos A'C'D = \frac{A'C'^2 + C'D'^2 - A'D'^2}{2A'C' \cdot C'D'} = \frac{2x^2 + (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)}{2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$

Suy ra $\frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow y^2 = 3x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x$.

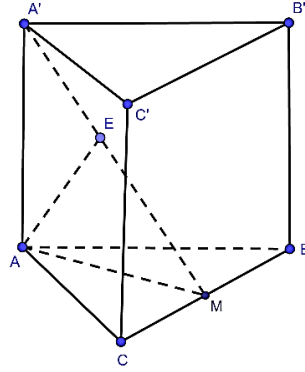
Gọi O là giao điểm của AC và BD . Dựng $BH \perp B'O$. Ta dễ chứng minh được $BH \perp (B'AC)$

Lại có $d(AC, DC') = d(DC', (AB'C)) = d(D, (AB'C)) = d(B, (AB'C)) = BH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BO^2} + \frac{1}{BA'^2} \Leftrightarrow \frac{49}{21a^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{3x^2} \Leftrightarrow x = a \Rightarrow y = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a^3\sqrt{3}$.

Câu 21: Chọn B



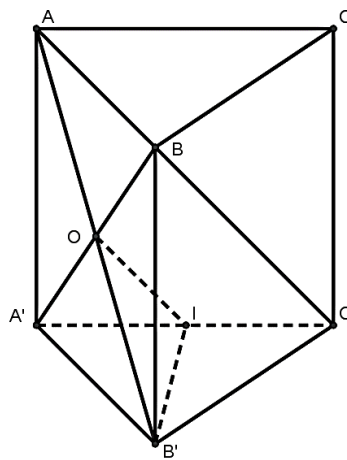
Gọi M là trung điểm của BC . Có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M)$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} (A'BC) \perp (A'AM) \\ (A'BC) \cap (A'AM) = A'M \Rightarrow d[A, (A'BC)] = AE = a \\ AE \perp A'M \end{cases}$$

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AE^2} - \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{2}{3a^2}. \text{ Vậy } AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

Câu 22: Chọn D



Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABB'A'$; I là trung điểm cạnh $A'C'$.

Xét tam giác $A'BC'$ có $OI \parallel BC'$ và $OI = \frac{1}{2}BC' \Rightarrow (AB'; BC') = (OB'; OI) = 60^\circ$.

Trường hợp 1: $(OB'; OI) = B'OI = 60^\circ$.

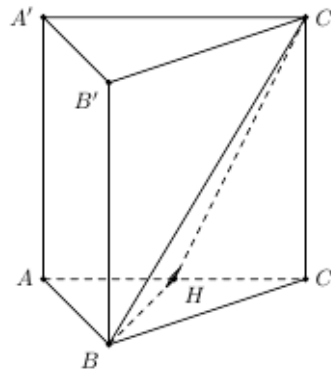
Ta có: $AB' = BC' \Rightarrow OB' = OI \Rightarrow \triangle OB'I$ cân tại O mà $B'OI = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle OB'I$ là tam giác đều $\Rightarrow OB' = OI = B'I = a\sqrt{3} \Rightarrow AB' = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác $AA'B'$ vuông tại A' ta có: $AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2\sqrt{2}a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 2a\sqrt{2} \cdot (2a)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{6}a^3$.

Trường hợp 2: $B'OI = 120^\circ$.

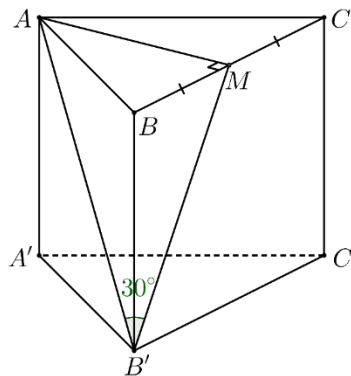
Câu 24: Chọn A

Kẻ $BH \perp AC$ với $H \in AC$. Khi đó $BH \perp (ACC'A')$ và H là trung điểm AC .

Khi đó góc giữa đường thẳng BC' với mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc giữa đường thẳng BC' với đường thẳng HC' hay $HC'B = \alpha$. Trong $\triangle BHC'$ vuông tại H với $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi đó ta có $\cot HC'B = 2 \Leftrightarrow \frac{HC'}{BH} = 2 \Leftrightarrow HC' = 2.BH = a\sqrt{3}$.

Trong $\triangle CHC'$ vuông tại C với $CH = \frac{a}{2}$ khi đó ta có $CC' = \sqrt{HC'^2 - CH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = CC'.S_{\triangle ABC} = \frac{a\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{33}}{8}$.

Câu 25: Chọn C

Gọi M là trung điểm BC . Vì $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$. Mà $AM \perp BB'$ suy ra $AM \perp (BB'C'C)$. Khi đó $B'M$ là hình chiếu của AB' lên $(BB'C'C)$.

Suy ra $(AB', (BB'C'C)) = (AB', B'M) = \angle AB'M = 30^\circ$.

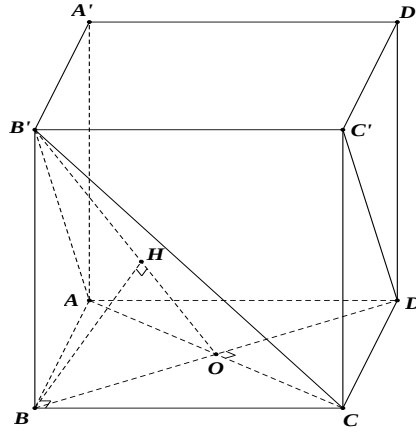
Vì $\triangle ABC$ đều nên $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$\triangle AB'M$ vuông tại M có $\sin \angle AB'M = \frac{AM}{AB'} \Rightarrow AB' = \frac{AM}{\sin 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2a\sqrt{3}$.

$\triangle ABB'$ vuông tại B có $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = BB'.S_{\triangle ABC} = 2a\sqrt{2} \cdot \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = 2a^3\sqrt{6}$.

Câu 26: Chọn B



Ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên $BB' \perp (ABCD)$ và $DC' \parallel AB'$ nên $(AC, DC') = (AC, AB') = \varphi$.

Vì $BCC'B'$ và $ABB'A'$ là hai hình chữ nhật bằng nhau **nên** $AB' = CB'$, suy ra $\varphi = B'AC$.

Lại có $DC' \parallel AB' \Rightarrow DC' \parallel (AB'C)$

$$\Rightarrow d(AC, DC') = d(DC', (AB'C)) = d(D, (AB'C)) = d(B, (AB'C)).$$

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mà $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AC$.

Từ đó suy ra $AC \perp (BDD'B')$.

Gọi $O = AC \cap BD$, kẻ $BH \perp B'O$ thì $BH \perp (AB'C)$

$$\Rightarrow BH = d(B, (AB'C)) = d(AC, DC') = \frac{3\sqrt{7}a}{7}.$$

$$\text{Giả sử } AB = x (x > 0) \Rightarrow AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = x\sqrt{2} \Rightarrow AO = BO = \frac{AC}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } BB'O \text{ vuông tại } B \text{ có } BH \perp B'O \text{ nên } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BO^2} + \frac{1}{B'B^2} \Leftrightarrow \frac{7}{9a^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{B'B^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{B'B^2} = \frac{7}{9a^2} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow BB' = \frac{3ax}{\sqrt{7x^2 - 18a^2}}.$$

$$\text{Suy ra } B'C = AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{7x^4 - 9a^2x^2}{7x^2 - 18a^2}}.$$

Tam giác $AB'C$ cân tại B' và O là trung điểm của AC nên $B'O \perp AC$.

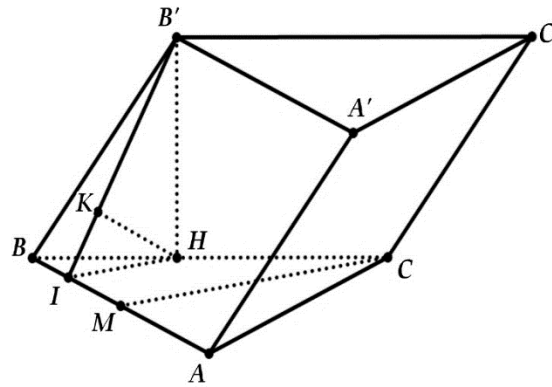
$$\text{Suy ra } \cos \varphi = \cos B'AC = \frac{AO}{AB'} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{7x^4 - 9a^2x^2}{7x^2 - 18a^2}}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{7x^4 - 9a^2x^2}{7x^2 - 18a^2}} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x^4 - 9a^2x^2}{7x^2 - 18a^2} = 4x^2 \Leftrightarrow 7x^4 - 9a^2x^2 = 4x^2(7x^2 - 18a^2) \Leftrightarrow 7x^2 - 9a^2 = 4(7x^2 - 18a^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}a.$$

Do đó $BB' = 3a$, $S_{ABCD} = AB^2 = 3a^2$. Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = BB' \cdot S_{ABCD} = 9a^3$.

Câu 27: Chọn B



Kẻ $B'H \perp BC$, $H \in BC \Rightarrow B'H \perp (ABC)$.

$CC' \parallel (ABB'A') \Rightarrow d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A'))$.

$$\frac{d(C, (ABB'A'))}{d(H, (ABB'A'))} = \frac{BC}{BH} \Leftrightarrow d(C, (ABB'A')) = \frac{BC}{BH} \cdot d(H, (ABB'A')).$$

Gọi M là trung điểm AB , kẻ $HI \parallel CM$, $I \in AB$; kẻ $HK \perp B'I$, $K \in B'I$.

$AB \perp (B'HI) \Rightarrow AB \perp HK$, mà $HK \perp B'I$ nên

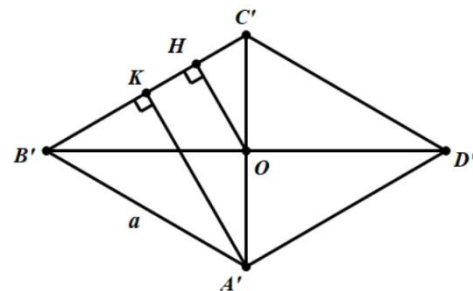
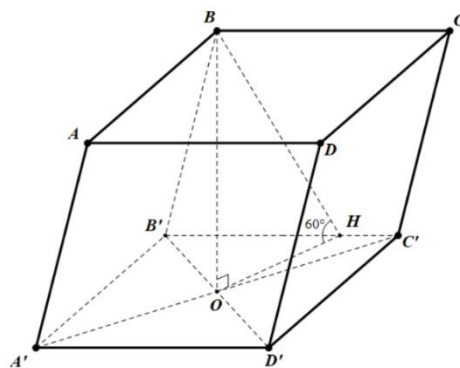
$$HK \perp (ABB'A') \Rightarrow d(H, (ABB'A')) = HK = \frac{HI \cdot B'H}{\sqrt{HI^2 + B'H^2}}.$$

$$\text{Đặt } BH = x (0 < x < a), B'H = \sqrt{a^2 - x^2}; \frac{HI}{CM} = \frac{BH}{BC} \Leftrightarrow HI = \frac{CM \cdot BH}{BC} = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{12}}{5} = \frac{a}{x} \cdot \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{\frac{3x^2}{4} + a^2 - x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow B'H = \frac{2a\sqrt{7}}{7}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = B'H \cdot S_{ABC} = \frac{2a\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{21}}{14}.$$

Câu 28: Chọn C



Ta có: $(ADD'A') \parallel (BCC'B')$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(ADD'A')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(BCC'B')$.

Gọi $A'C' \cap B'D' = O \Rightarrow BO \perp (A'B'C'D')$. Kẻ $OH \perp B'C'$ tại H .

Khi đó $B'C' \perp (BOH) \Rightarrow B'C' \perp BH$ tại H .

Mà $(A'B'C'D') \cap (BCC'B') = B'C'$.

Chủ đề 04: Thể tích khối lăng trụ

Do đó: góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(BCC'B')$ bằng góc giữa BH và OH .

Mà tam giác BOH vuông tại O nên $BHO < 90^\circ$.

Vì vậy, giữa hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(ADD'A')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(BCC'B')$ và bằng BHO hay $BHO = 60^\circ$.

Ta lại có: $BD = a\sqrt{3} \Rightarrow OB = OD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow AC = a$.

Do đó tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a .

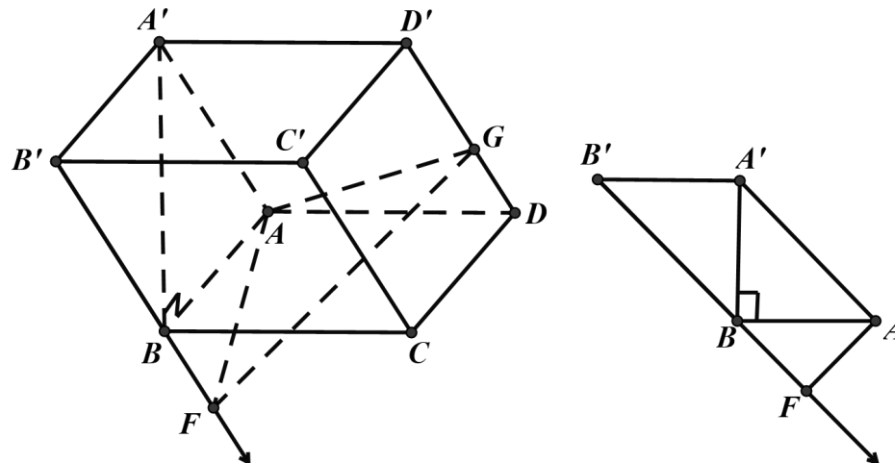
$$S_d = S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Kẻ $A'K \perp B'C'$ tại K . Khi đó: $A'K = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle OBH$ vuông tại O ta có: $\tan H = \frac{BH}{OH} \Rightarrow BH = \frac{3a}{4}$.

Vậy thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 29: Chọn D



Dựng $AF \perp BB'$, $AG \perp DD'$.

Theo giả thiết vì $A'B \perp (ABCD)$ nên $A'A$ có hình chiếu là AB trên $(ABCD)$ vậy $(A'A, (ABCD)) = (A'A, AB) = A'AB = 45^\circ$.

Vậy tam giác $AA'B$ vuông cân tại B , vì $AF \perp BB'$ nên tam giác ABF vuông cân tại F , do $BAF + BAA' = 90^\circ$. Vì vậy $AF = 1 \Rightarrow AB = \sqrt{2}, A'B = \sqrt{2} \Rightarrow S_{ABB'A'} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

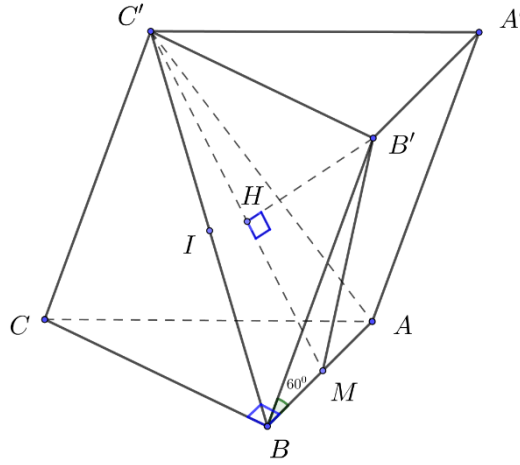
Mặt khác $((BB'C'C), (C'CDD')) = ((AA'D'D), (AA'B'B)) = (AG, AF) = 60^\circ$.

$\Rightarrow$ Tam giác AFG đều cạnh 1.

Vì vậy nếu $GH \perp AF$ thì $GH \perp (AA'B'B)$, $GH = 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Câu 30: Chọn D



Ta có: $d_{(B'A',BI)} = d_{(B'A',BC')} = d_{(B'A',(ABC'))} = d_{(B',(ABC'))} = \frac{3a}{4}$

Gọi M là trung điểm của đoạn AB . Dựng $B'H \perp C'M$ tại H .

Vì $BB'A'A$ là hình thoi nên ta có $AB = BB' = a$.

Góc $ABB' = 60^\circ$ nên $\triangle ABB'$ là tam giác đều suy ra $B'M \perp AB$ (1).

Mặt khác $CB \perp AB \Rightarrow C'B' \perp AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (C'B'M) \Rightarrow AB \perp B'H$.

Ta có: $\begin{cases} B'H \perp C'M \\ B'H \perp AB \end{cases} \Rightarrow B'H \perp (ABC') \Rightarrow d_{(B',(ABC'))} = B'H = \frac{3a}{4}$.

Ta có: $BC = \sqrt{AC^2 - BA^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow B'C' = a\sqrt{3}$.

$B'M = \sqrt{BB'^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $C'H = \sqrt{B'C'^2 - B'H^2} = \frac{a\sqrt{39}}{4}$; $HM = \sqrt{B'M^2 - B'H^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trường hợp 1: Điểm H nằm trong đoạn $C'M$.

Khi đó ta có: $C'M = C'H + HM = \frac{a(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{4}$.

Diện tích tam giác ABC' là: $S_{ABC'} = \frac{1}{2}C'M \cdot AB = \frac{a^2(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{8}$.

Thể tích khối chóp $B'.ABC'$ là: $V_{B'.ABC'} = \frac{1}{3}S_{ABC'} \cdot B'H = \frac{a^3(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{32}$.

Vì $V = 3.V_{B'.ABC'}$ nên ta có: $V = \frac{3a^3(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{32}$.

Trường hợp 2: Điểm H nằm ngoài đoạn $C'M$.

Do $C'H > HM$ nên điểm H thuộc tia đối của tia MC' .

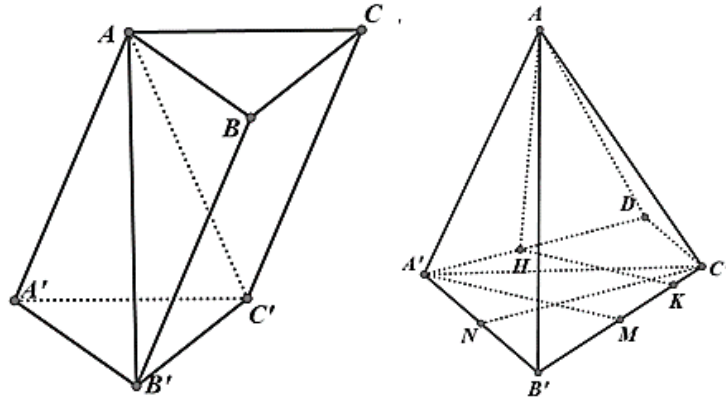
Khi đó ta có: $C'M = C'H - HM = \frac{a(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{4}$.

Diện tích tam giác ABC' là: $S_{ABC'} = \frac{1}{2}C'M \cdot AB = \frac{a^2(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{8}$.

Thể tích khối chóp $B'.ABC'$ là: $V_{B'.ABC'} = \frac{1}{3}S_{ABC'} \cdot B'H = \frac{a^3(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{32}$.

$$\text{Vì } V = 3.V_{B'.ABC'} \text{ nên ta có: } V = \frac{3a^3(\sqrt{39}-\sqrt{3})}{32}. \text{ Kết luận: Vậy } V = \frac{3a^3(\sqrt{39}+\sqrt{3})}{32}.$$

Câu 31: Chọn B



Gọi N, M lần lượt là trung điểm của $A'B', B'C'$.

Dựng hình chữ nhật $A'NC'D$, ta có $\begin{cases} A'B' \perp AA' (gt) \\ A'B' \perp A'D \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp (AA'D).$

Trong $(AA'D)$ kẻ $AH \perp A'D$ do $\begin{cases} AH \perp A'D \\ AH \perp A'B' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'DB') \Rightarrow AH \perp (A'B'C').$

Đặt $AH = h$.

Ta có $DC' \parallel A'B' \Rightarrow DC' \perp (AA'D)$ nên $\triangle ADC'$ vuông tại D .

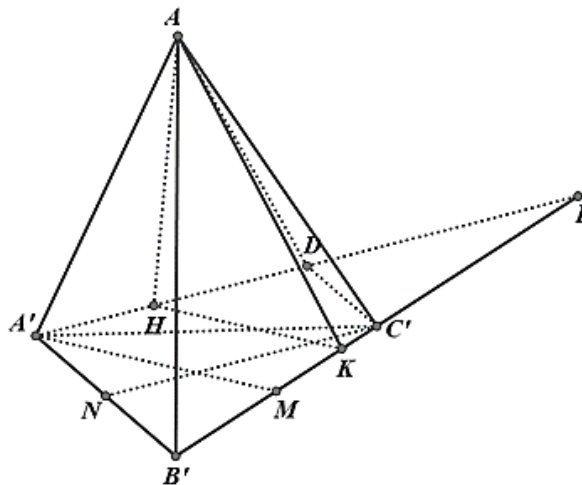
$$AD^2 = AC'^2 - DC'^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

Từ H kẻ $HK \parallel A'M \Rightarrow HK \perp B'C'$ (do $A'M \perp B'C'$).

Khi đó $((AB'C'), (A'B'C')) = \angle AKH = 60^\circ$.

$$\Rightarrow \tan \angle AKH = \tan 60^\circ = \frac{AH}{HK} \Rightarrow HK = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét } \triangle AHD \text{ ta có: } HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{15a^2}{4} - h^2}.$$

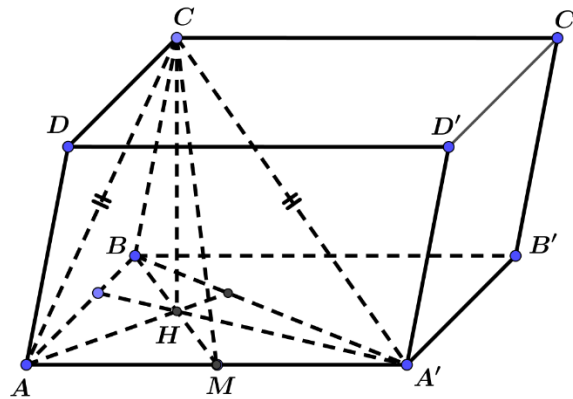


$$\text{Gọi } A'D \cap B'C' = I, \text{ do } HK \parallel A'M \Rightarrow \frac{HI}{A'I} = \frac{HK}{A'M} \Leftrightarrow \frac{HD + DI}{A'I} = \frac{HK}{A'M}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{15a^2}{4} - h^2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\frac{h}{\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{15a^2}{4} - h^2} = \frac{2h}{\sqrt{3}} - \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (h > \frac{3a}{4} \text{ do } V > \frac{a^3}{3}).$$

$$\Leftrightarrow \frac{15a^2}{4} - h^2 = \frac{4h^2}{3} - 2ah + \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{3}h^2 - 2ah - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{3+6\sqrt{2}}{7}.a \text{ (TM)} \\ h = \frac{3-6\sqrt{2}}{7}.a \text{ (L)} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3+6\sqrt{2}}{7}.a = \left(\frac{3\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{28}\right)a^3.$$

Câu 32: Chọn A

Gọi H là trực tâm của tam giác $AA'B$. Vì $CA = CA'$ nên $HA = HA'$. Suy ra $\triangle AA'B$ cân tại B .
Đặt $\angle ABA' = 2\alpha$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Gọi M là trung điểm của AA' . Khi đó, $\angle HAM = \angle HBA' = \alpha$.

Tam giác ABM vuông tại M nên $\begin{cases} BM = AB \cos \alpha = 2a \cos \alpha \\ AM = AB \sin \alpha = 2a \sin \alpha \end{cases}$.

Tam giác HAM vuông tại M nên $HM = AM \tan \alpha = 2a \sin \alpha \cdot \tan \alpha$.

Tam giác $AA'C$ là tam giác đều nên $CM = AM\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a \sin \alpha$.

Chu vi tam giác $A'BC$ bằng $5a$ nên $A'B + BC + CA' = 5a$

$$\Leftrightarrow 2a + BC + 4a \sin \alpha = 5a \Leftrightarrow BC = 3a - 4a \sin \alpha$$

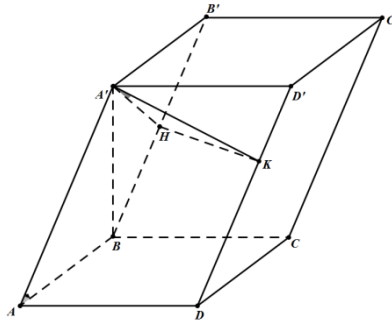
Ta có $CH^2 = BC^2 - BH^2 = CM^2 - HM^2$ nên

$$\begin{aligned} (3a - 4a \sin \alpha)^2 - (2a \cos \alpha - 2a \sin \alpha \cdot \tan \alpha)^2 &= (2\sqrt{3}a \sin \alpha)^2 - (2a \sin \alpha \cdot \tan \alpha)^2 \\ \Leftrightarrow (3 - 4 \sin \alpha)^2 - 4 \cos^2 \alpha + 8 \sin^2 \alpha &= 12 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow (3 - 4 \sin \alpha)^2 = 4 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} BM = 2a \frac{\sqrt{15}}{4} \\ AA' = 4a \cdot \frac{1}{4} = a \\ CH = \sqrt{\left(2a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}\right)^2 - \left(2a \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{11}{15}} \end{cases}$$

$$\text{Thể tích khối hộp } ABCD.A'B'C'D' \text{ là } V = BM \cdot AA' \cdot CH = 2a \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot a \cdot a\sqrt{\frac{11}{15}} = \frac{a^3 \sqrt{11}}{2}.$$

Câu 33: Chọn B



Gọi H, K lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A' trên các đường thẳng BB' và DD' .
Ta có: $d(A; BB') = d(A'; BB') = A'H = 1$, $d(A; DD') = d(A'; DD') = A'K = 1$.

$$\begin{cases} (AA', (ABCD)) = 45^\circ \\ A'B \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow A'AB = 45^\circ \quad (1).$$

$$A'B \perp (ABCD) \Rightarrow A'B \perp AB \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\Delta A'AB$ là tam giác vuông cân tại $B \Rightarrow A'B = AB$.

$$\Rightarrow A'B = A'B' \Rightarrow H \text{ là trung điểm } BB'. \text{ Ta có } \begin{cases} (BB'C'C) // (AA'D'D) \\ (CC'D'D) // (BB'A'A) \end{cases}$$

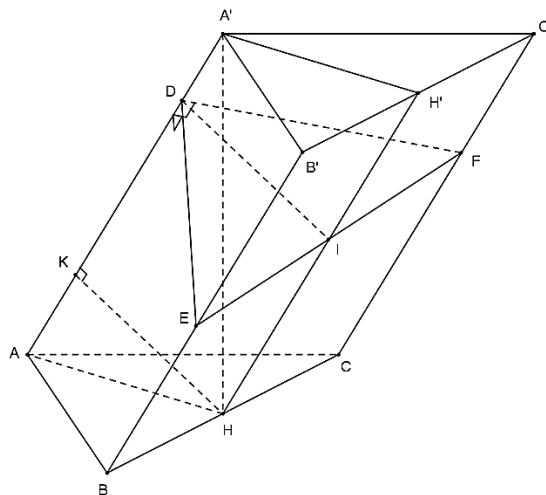
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(BB'C'C)$ và $(CC'D'D)$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'A'A)$ nên ta suy ra $HA'K = 60^\circ$, mà $A'H = A'K = 1$

$$\Rightarrow \Delta A'HK \text{ là tam giác đều} \Rightarrow S_{\Delta A'HK} = \frac{\sqrt{3}}{4}. A'H = 1 \Rightarrow BB' = 2.$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} A'H \perp BB' \\ A'K \perp BB' \\ A'H \cap A'K = \{A'\} \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (A'HK). \text{ Do đó: } V_{A'B'D'.ABD} = BB' \cdot S_{A'HK} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{A'B'D'.ABD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Câu 34: Chọn A



Gọi $H; H'$ lần lượt là trung điểm của BC và $B'C' \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

Trong $(BCC'B')$: Gọi $I = EF \cap HH'$

Ta có: $BC \perp AH$ và $BC \perp A'H$ nên $BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp BB'$

Từ gt $\Rightarrow BB' \perp EF$

Trong $(BCC'B')$ có $BB' \perp EF$ và $BC \perp BB'$ nên $BC // EF \Rightarrow I$ là trung điểm của EF

Mà $BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp DI \Rightarrow EF \perp DI$

Lại có: Mặt phẳng $(ABB'A')$ vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ nên $EDF = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tam giác DEF vuông cân tại D

Từ gt $\Rightarrow DE + DF + EF = 4 \Rightarrow EF = BC = 4(\sqrt{2} - 1)$

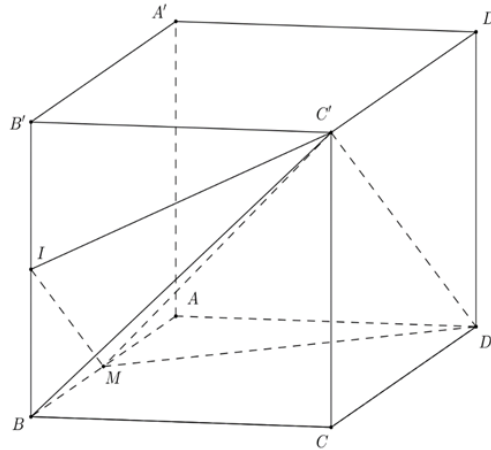
$AH = 4(\sqrt{2} - 1) \cdot \sin 60^\circ = 2(\sqrt{6} - \sqrt{3})$

Kẻ $HK \perp AA'$ tại $K \Rightarrow HKDI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HK = DI = \frac{1}{2}EF = 2(\sqrt{2} - 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{HK^2} - \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{6(\sqrt{2} - 1)^2} \Rightarrow A'H = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = A'H \cdot \frac{1}{2}AH \cdot BC = 12(10 - 7\sqrt{2})$.

Câu 35: Chọn A



Do $(ABB'A') // (CC'D'D)$ nên $(DIC') \cap (ABB'A') = l_x // DC'$. Gọi $M = l_x \cap AB \Rightarrow M$ là trung điểm của AB . Do đó, thiết diện của hình lập phương cắt bởi (DIC') là tứ giác $DC'MI$. Và mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần $BIM.CC'D$ và $DD'C'.IMAA'B'$.

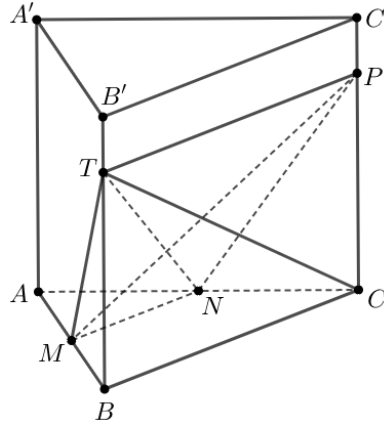
Ta có, $V_{BIM.CC'D} = V_{C'.BCDM} + V_{C'.IMB}$; $V_{C'.BCDM} = \frac{1}{3}a \cdot S_{BCDM} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right)a}{2} = \frac{a^3}{4}$.

$V_{C'.IMB} = \frac{1}{3}a \cdot d(C', (ABB'A')) \cdot S_{BIM} = \frac{1}{3}a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{24}$

$\Rightarrow V_1 = V_{BIM.CC'D} = V_{C'.BCDM} + V_{C'.IMB} = \frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{24} = \frac{7a^3}{24}$

$\Rightarrow V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_1 = a^3 - \frac{7a^3}{24} = \frac{17a^3}{24} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{17}$.

Câu 36: Chọn C



$$\text{Ta có } \begin{cases} P \in (MNP) \cap (BB'C'C) \\ MN \parallel BC \\ MN \subset (MNP) \\ BC \subset (BB'C'C) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (BB'C'C) = PT \parallel MN \parallel BC \Rightarrow \frac{BT}{BB'} = x \in [0;1].$$

Thiết diện tạo bởi (MNP) với khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là hình tứ giác $MNPT$.

Ta có $V_{TPMNCB} = V_{T.BCNM} + V_{N.TPC}$ (1). Mà:

$$\begin{aligned} V_{T.BCNM} &= \frac{1}{3} S_{BCNM} \cdot d(T; (BCNM)) = \frac{1}{3} (S_{ABC} - S_{AMN}) \cdot d(T; (BCNM)) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) S_{ABC} \cdot x \cdot d(B'; (ABC)) = \frac{x}{4} V_{ABC.A'B'C'} \end{aligned}$$

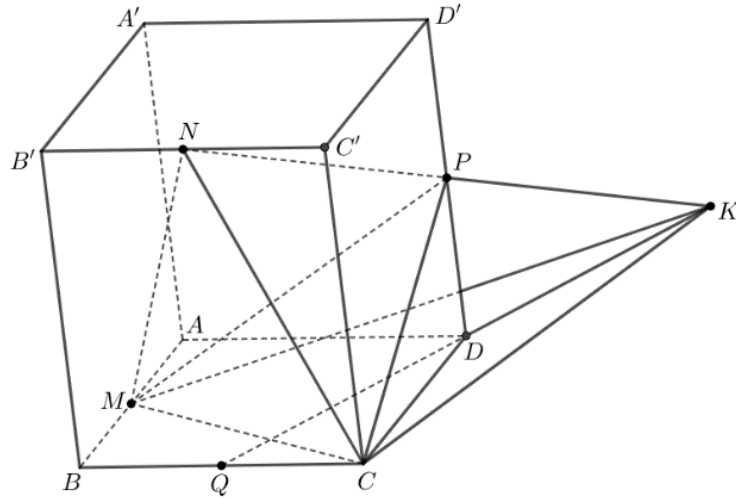
$$\begin{aligned} V_{N.TPC} &= \frac{1}{3} S_{TPC} \cdot d(N; (BB'C'C)) = \frac{1}{3} (S_{BB'C'C} - S_{BTC} - S_{B'C'PT}) \cdot \frac{1}{2} d(A; (BB'C'C)) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{2} - (1-x)\right) S_{BB'C'C} \cdot \frac{1}{2} d(A; (BB'C'C)) = \frac{x}{4} V_{A.BCC'B'} = \frac{x}{4} \cdot \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{x}{6} V_{ABC.A'B'C'}. \end{aligned}$$

$$\text{Thay vào (1), ta được } V_{TPMNCB} = \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6}\right) V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5x}{12} V_{ABC.A'B'C'}.$$

Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện có tỉ lệ thể tích là $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_{TPMNCB} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \\ V_{TPMNCB} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{12} = \frac{1}{3} \\ \frac{5x}{12} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \text{ (Nhan)} \\ x = \frac{8}{4} \text{ (Loai)} \end{cases}. \text{ Vậy } x = \frac{4}{5}$$

Câu 37: Chọn D

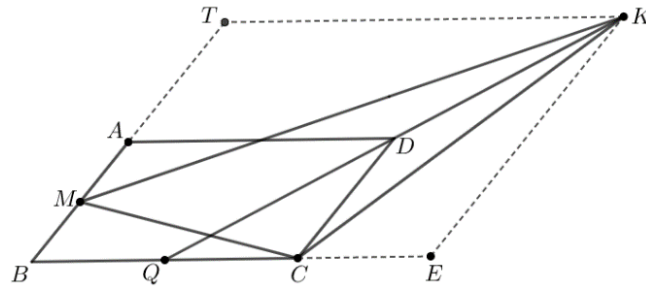


Gọi Q là trung điểm $BC \Rightarrow NQ \parallel DD'$.

Trong $(NQDD')$: gọi $K = QD \cap NP$. Suy ra DP là đường trung bình của $\triangle KNQ$.

Ta có $V' = V_{CMNP} = V_{K.MNC} - V_{K.MPC}$. Mà $\frac{V_{K.MPC}}{V_{K.MNC}} = \frac{KP}{KN} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{K.MPC} = \frac{1}{2} V_{K.MNC}$.

Nên $V' = V_{K.MNC} - \frac{1}{2} V_{K.MNC} = \frac{1}{2} V_{K.MNC} = \frac{1}{2} V_{N.KMC} (*)$.



Dựng hình bình hành $TKEB$ như hình vẽ. Khi đó $TB = 2AB$ và $EB = \frac{3}{2} BC$.

Ta có $S_{KMC} = S_{TKEB} - S_{MBC} - S_{CEK} - S_{TMK} (1)$.

$$S_{TKEB} = 2 \cdot \frac{3}{2} S_{ABCD} = 3S_{ABCD}; S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{4} S_{ABCD};$$

$$S_{CEK} = \frac{1}{3} S_{BEK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{TKEB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD};$$

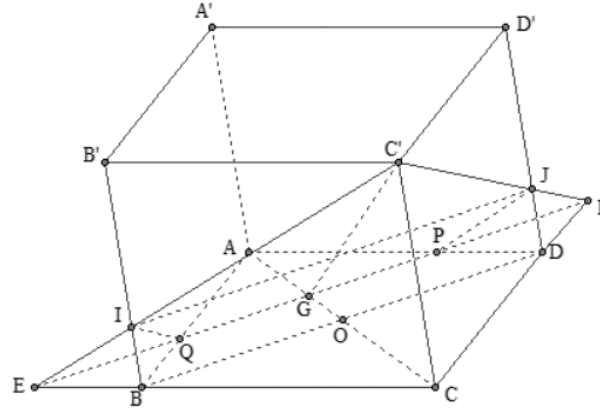
$$S_{TMK} = \frac{3}{4} S_{TBK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} S_{TKEB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3S_{ABCD} = \frac{9}{8} S_{ABCD}.$$

Thay vào (1) ta được $S_{KMC} = \frac{9}{8} S_{ABCD}$.

Lại có $d(N; (KMC)) = d(A'; (ABCD))$. Do đó, từ (*) ta có:

$$V' = \frac{1}{2} V_{N.KMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{KMC} \cdot d(N; (KMC)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} S_{ABCD} \cdot d(A'; (ABCD)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} V = \frac{3V}{16}.$$

Câu 38: Chọn D



Đặt thể tích khối hộp là V , chiều cao h .

Từ G kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC , BA , DA , DC lần lượt tại E , Q , P , F .

Nối C với E , F lần lượt cắt các đường BB' và DD' tại I và J . Thiết diện chia hình hộp là $C'IQPJ$.

$$\text{Ta có: } \frac{S_{AQP}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AQP}}{2S_{ABD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AQ}{AB} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{AG}{AO}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow S_{BCDPQ} = \frac{7}{9}S_{ABCD}.$$

$$\frac{S_{CBD}}{S_{CEF}} = \frac{CB}{CE} \cdot \frac{CD}{CF} = \left(\frac{CO}{CG}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}CA}{\frac{2}{3}CA}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{16}{9}S_{CBD} = \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{8}{9}S_{ABCD}$$

$$\text{Suy ra: } h.S_{CEF} = \frac{8}{9}.h.S_{ABCD} \Leftrightarrow 3V_{CEF} = \frac{8}{9}V \Leftrightarrow V_{C'.CEF} = \frac{8}{27}V$$

$$S_{EBQ} + S_{PDF} = S_{CEF} - S_{CBQPD} = \frac{8}{9}.S_{ABCD} - \frac{7}{9}S_{ABCD} = \frac{1}{9}S_{ABCD}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}h(S_{EBQ} + S_{PDF}) = \frac{1}{4}h \cdot \frac{1}{9}S_{ABCD} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}h.S_{EBQ} + \frac{1}{4}h.S_{PDF}\right) = \frac{1}{36}h.S_{ABCD}$$

$$\Leftrightarrow (3V_{I.EBQ} + 3V_{J.PDF}) = \frac{1}{36}V \Leftrightarrow V_{I.EBQ} + V_{J.PDF} = \frac{1}{108}V.$$

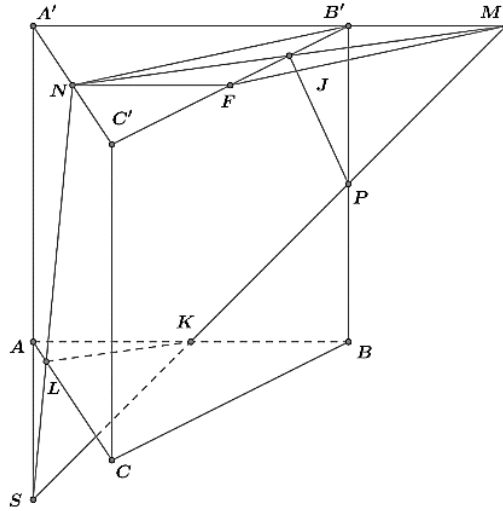
$$\text{Suy ra } V_1 = V_{C'CBQPD} = V_{C'.CEF} - (V_{I.EBQ} + V_{J.PDF}) = \frac{8}{27}V - \frac{1}{108}V = \frac{31}{108}V.$$

$$\text{Vậy } V_2 = V - \frac{31}{108}V = \frac{77}{108}V \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{77}.$$

Câu 39: Chọn D

Ta gọi: $K = MP \cap AB, S = MP \cap AA', L = NS \cap AC$;

như hình vẽ. Cho J là trung điểm BF mà ta có: $\begin{cases} NF // B'M \\ NF = B'M \end{cases} \Rightarrow B'J = JF$



Mặt khác: $\begin{cases} AK = KB \\ SA // BP \end{cases} \Rightarrow SA = BP = B'P \Rightarrow \frac{MP}{MS} = \frac{B'P}{A'S} = \frac{1}{3}$

Ta có: $\frac{V_{M.PJB'}}{V_{M.SNA'}} = \frac{MP}{MS} \cdot \frac{MJ}{MN} \cdot \frac{MB'}{MA'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{M.PJB'} = \frac{1}{18} V_{M.SNA'}$

$$\text{Mặt khác: ta có } \frac{SL}{SN} = \frac{SA}{SA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.ALK}}{V_{S.A'NM}} = \frac{SK}{SM} \cdot \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SL}{SN} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{S.ALK} = \frac{1}{27} V_{S.A'NM}$$

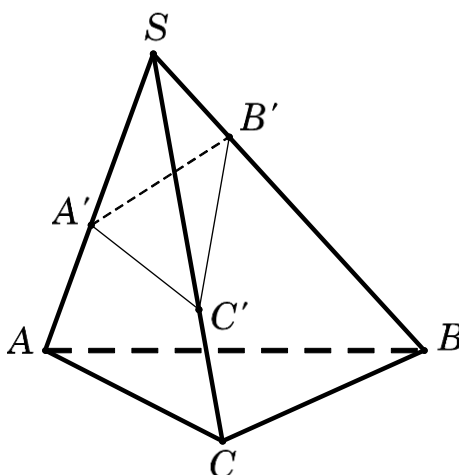
Khi đó: $V_1 = V_{S.MNA} - V_{M.PJB} - V_{S.ALK} = \left(1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{27}\right) V_{M.SNA} = \frac{49}{54} V_{M.SNA}$, Ta lại có:

$$V_{S.A'NM} = \frac{49}{54} V_{M.SNA'} = \frac{49}{54} \cdot \frac{3}{8} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{49}{144} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1 = \frac{95}{144} V_{ABC.A'B'C'}$$

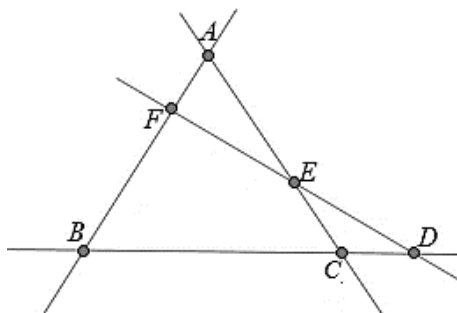
Vậy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{49}{95}$.

A // TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC , ta có:



- Công thức tỉ số thể tích: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ (hay gọi là công thức Simson)
- Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác định được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau:
 - Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
 - Đáy hai khối chóp phải là tam giác.
 - Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.
- Định lý Menelaus:** Cho ba điểm thẳng hàng $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$ với DEF là một đường thẳng cắt ba đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F .

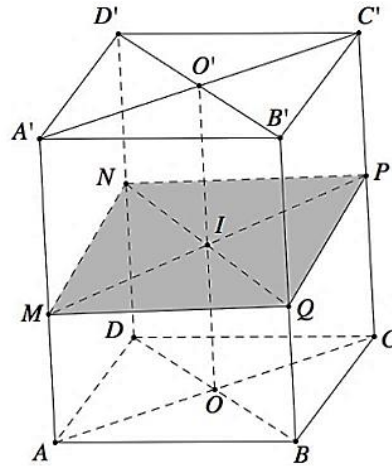


- Mặt phẳng cắt các cạnh của khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ lần lượt tại M, N, P sao cho

$$\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z \text{ thì ta có } V_{ABC.MNP} = \frac{x+y+z}{3} V_{ABC.A'B'C'}.$$

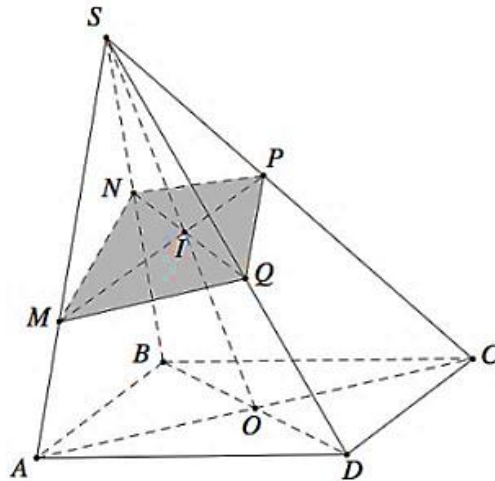
- Mặt phẳng cắt các cạnh của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lần lượt tại M, N, P, Q sao cho

$$\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z, \frac{DQ}{DD'} = t \text{ thì ta có } V_{ABCD.MNPQ} = \frac{x+y+z+t}{4} V_{ABCD.A'B'C'D'} \text{ và } x+z = y+t.$$



- Mặt phẳng cắt các cạnh của khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $\frac{SM}{SA} = x, \frac{SN}{SB} = y, \frac{SP}{SC} = z, \frac{SQ}{SD} = t$ thì ta có công thức tỷ lệ thể tích sau đây

$$V_{S.MNPQ} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD} \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}.$$



B // VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần không chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{19}{37}$ lần phần còn lại. Tỷ số $k = \frac{IA}{IS}$ bằng.

A. $\frac{3}{4}$.

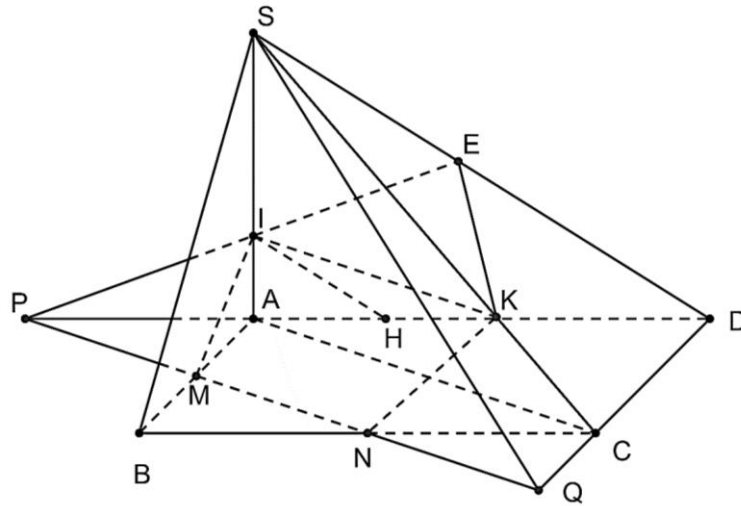
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Mặt phẳng (MNI) cắt SC tại K , cắt SD tại E ; thiết diện là ngũ giác $MNKEI$ như hình vẽ. P, Q lần lượt là giao điểm của MN với AD, CD .

Đặt $V_{S.ABCD} = V$. Ta có $S_{\triangle APM} = S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}$.

$$\frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{IA}{SA} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{k}{8(k+1)} \Rightarrow V_{I.APM} = \frac{k}{8(k+1)}V$$

Do $MN \parallel AC \Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD) \Rightarrow d(I, (ABCD)) = d(K, (ABCD))$.

Mà $S_{\triangle APM} = S_{\triangle NCQ} \Rightarrow V_{I.APM} = V_{K.NCQ} = \frac{k}{8(k+1)}V$

Kẻ $IH \parallel SD (H \in AD)$. Ta có: $\frac{IH}{SD} = \frac{AH}{AD} = \frac{AI}{AS} = \frac{k}{k+1}$.

$$\frac{IH}{ED} = \frac{PH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{AH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{2AH}{3AD} = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3(k+1)} = \frac{3k+1}{3(k+1)}.$$

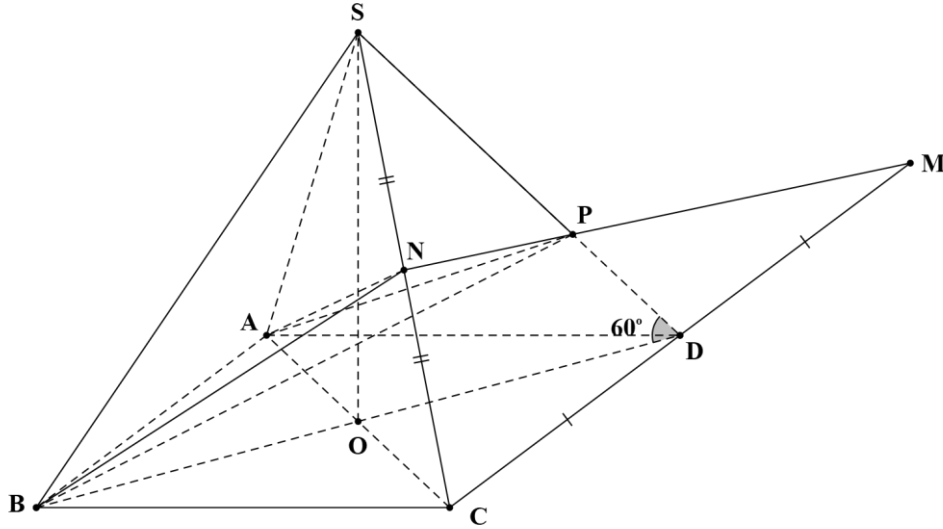
$$\Rightarrow \frac{ED}{SD} = \frac{IH}{SD} : \frac{IH}{ED} = \frac{3k}{3k+1} \Rightarrow \frac{d(E, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{ED}{SD} = \frac{3k}{3k+1}.$$

$$\frac{S_{\triangle PQD}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{27k}{24k+8} \Rightarrow V_{E.PQD} = \frac{27k}{24k+8}V.$$

$$\Leftrightarrow \frac{27k}{8(3k+1)}V - \frac{k}{8(k+1)}V - \frac{k}{8(k+1)}V = \frac{19}{56}V \Leftrightarrow \frac{27k}{3k+1} - \frac{2k}{k+1} = \frac{19}{7} \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$$

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần bằng

A. $\frac{7}{3}$. B. $\frac{7}{5}$. C. $\frac{1}{7}$. D. $\frac{6}{5}$.

LỜI GIẢI**Chọn B**

Gọi $P = MN \cap SD$. Áp dụng định lý Menelaus ta có $\frac{MD}{MC} \cdot \frac{PS}{PD} \cdot \frac{NS}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PD} = 2 \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}$.

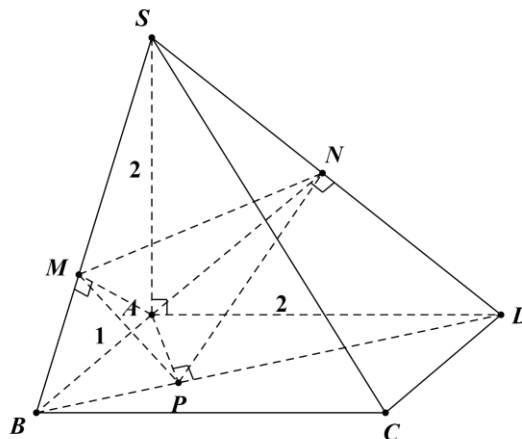
$$\text{Khi đó } \frac{V_{S.ABNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABN} + V_{S.APN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABN}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.APN}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SN}{SC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SP}{SD}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.ABNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{12} \Rightarrow V_1 = \frac{5}{12} V_{S.ABCD} \text{ và } V_2 = V - V_1 = \frac{7}{12} V_{S.ABCD}$$

Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V_1} = \frac{7}{5}$.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=1$, $AD=2$. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=2$. Gọi M , N , P lần lượt là chân đường cao hạ từ A lên các cạnh SB , SD , DB . Thể tích khối chóp $AMNP$ bằng

- A. $\frac{8}{75}$. B. $\frac{4}{45}$. C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{4}{25}$.

LỜI GIẢI**Chọn A**

Chủ đề 04: Tỷ lệ thể tích khối đa diện

ΔSAD vuông cân tại $A \Rightarrow N$ là trung điểm SD .

$$\Delta SAB \text{ vuông tại } A \text{ có } SA = 2, AB = 1 \Rightarrow SB = \sqrt{5}, \frac{SM}{SB} = \left(\frac{SA}{SB}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}, \frac{BM}{SB} = \frac{1}{5}.$$

$$\Delta ABD \text{ vuông tại } A \text{ có } AD = 2, AB = 1 \Rightarrow BD = \sqrt{5}, \frac{BP}{BD} = \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}, \frac{PD}{BD} = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{S_{\Delta BMP}}{S_{\Delta BSD}} = \frac{BM}{BS} \cdot \frac{BP}{BD} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}, \frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta BSD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}, \frac{S_{\Delta DNP}}{S_{\Delta BSD}} = \frac{DN}{SD} \cdot \frac{DP}{BD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BSD}} = 1 - \frac{1}{25} - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{AMNP}}{V_{ABSD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta MNP} \cdot d(A, (MNP))}{\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BSD} \cdot d(A, (SBD))} = \frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BSD}} = \frac{4}{25}.$$

$$\text{Mà } V_{ASBD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } V_{AMNP} = \frac{4}{25} \cdot V_{ASBD} = \frac{4}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{75}.$$

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AC = 2a$. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua A , vuông góc với cạnh SB tại K và cắt cạnh SC tại H .

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối tứ diện $SAHK$ và khối đa diện $ABCHK$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\frac{4}{5}$.

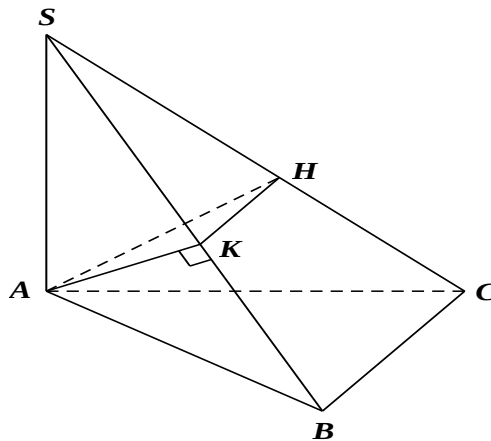
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{5}{4}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SAB)$.

Lại có $(AHK) \perp SB \Leftrightarrow (AHK) \perp (SAB)$, suy ra $BC \parallel (AHK) \Rightarrow BC \parallel HK$.

$$\text{Xét tam giác } SAB \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAK \text{ vuông tại } K, \text{ ta có: } SK = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \text{ Theo định lý Thales, ta có: } \frac{SK}{SB} = \frac{SH}{SC} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{V_{S.AKH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SH}{SC} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AKH} = \frac{4}{9} V_{S.ABC} \text{ mà } V_{S.ABC} = V_{S.AKH} + V_{ABCHK} \Rightarrow V_{ABCHK} = \frac{5}{9} V_{S.ABC}$$

$$\text{Vậy tỉ số } \frac{V_2}{V_1} \text{ bằng } \frac{V_{ABCHK}}{V_{S.AKH}} = \frac{5}{4}.$$

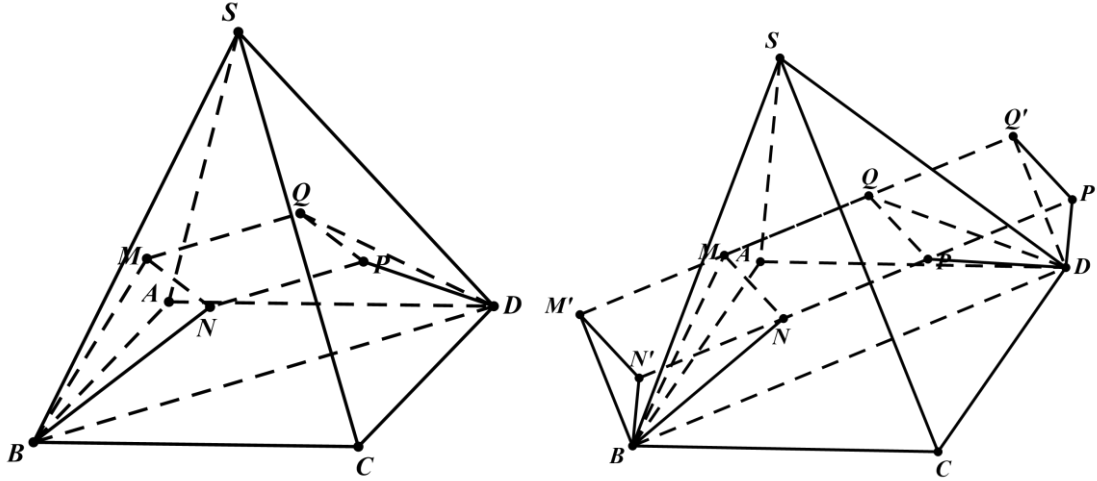
CÂU 5. Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 9 và đáy là hình bình hành có diện tích bằng 90. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các mặt bên SAB, SBC, SCD, SDA . Thể tích của khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, D, B bằng

A. 81.

B. 50.

C. 40.

D. 75.

LỜI GIẢI**Chọn B**

Để dàng chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành. $MQ = \frac{1}{3}BD$.

Từ hình vẽ ta thấy $V_{MNPQBD} = V_{M'N'BQ'P'D} - 2V_{BMNN'M'}$

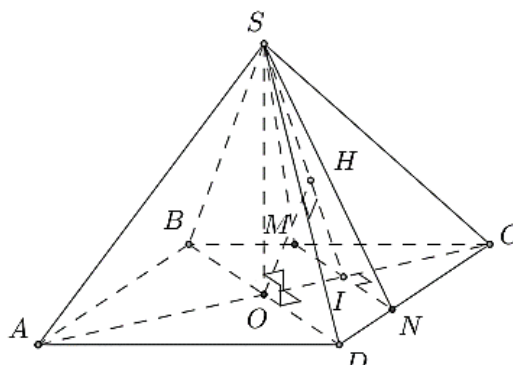
$$V_{M'N'BQ'P'D} = \frac{3}{2}V_{BM'N'P'Q'} = \frac{9}{2}V_{BMNM'N'}; V_{MNPQBD} = \frac{5}{2}V_{B.MNM'N'}$$

$$V_{B.MNM'N'} = \frac{V_{B.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{MN \cdot MQ \cdot \sin(MN, MQ)}{\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin(AC, BD)} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$$V_{MNPQBD} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{27} V_{S.ABCD} = \frac{5}{27} \cdot \frac{1}{3} \cdot 90 \cdot 9 = 50.$$

CÂU 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm của hình vuông $ABCD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua S , song song với đường thẳng BD , cắt đoạn OC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{3\sqrt{10}a}{10}$. Biết rằng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó

khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V_1 và khối đa diện còn lại có thể tích V_2 . Giá trị của $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\frac{2}{7}$.B. $\frac{1}{8}$.C. $\frac{1}{7}$.D. $\frac{3}{8}$.**LỜI GIẢI****Chọn C**

Chủ đề 04: Tỷ lệ thể tích khối đa diện

Hình chóp $S.ABCD$ đều cạnh $a \Rightarrow SO \perp (ABCD)$; ΔSAC vuông cân tại $S \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi $I = OC \cap (P)$, đường thẳng đi qua I và song song với BD cắt CB, CD lần lượt tại M, N
 $\Rightarrow (P)$ cắt chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tam giác SMN .

Ta có $BD \perp AC, BD \perp SO \Rightarrow BD \perp (SAC), MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp (SAC), MN \subset (SMN)$
 $\Rightarrow (SAC) \perp (SMN)$.

Trong tam giác SAC , kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SMN) \Rightarrow d(O, (SMN)) = OH$.

Đặt $\frac{OI}{AI} = x \left(0 < x < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow OI = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{x}{1-x} \cdot SO \quad (1)$.

Ta có $\frac{d(O, (SMN))}{d(A, (SMN))} = \frac{OI}{AI} \Rightarrow OH = x \cdot \frac{3\sqrt{10}a}{10} = x \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot SO \quad (2)$.

Tam giác SOI vuông tại O , $OH \perp SI \Rightarrow OH = \frac{OI \cdot OS}{\sqrt{OI^2 + OS^2}} \quad (3)$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (1-x)^2}} \Leftrightarrow 9(2x^2 - 2x + 1) = 5$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \text{ (l)} \\ x = \frac{1}{3} \text{ (tm)} \end{cases} \Rightarrow \frac{OI}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CI}{CO} = \frac{1}{2} = \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CD}$.

Mặt khác $V_{S.BCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$; $V_2 = V_{S.CMN} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CN}{CD} \cdot V_{S.CBD} = \frac{1}{4} V_{S.BCD} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}$

Lại vì $V_1 + V_2 = V_{S.ABCD} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{8} V_{S.ABCD}$. Vậy $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{7}$.

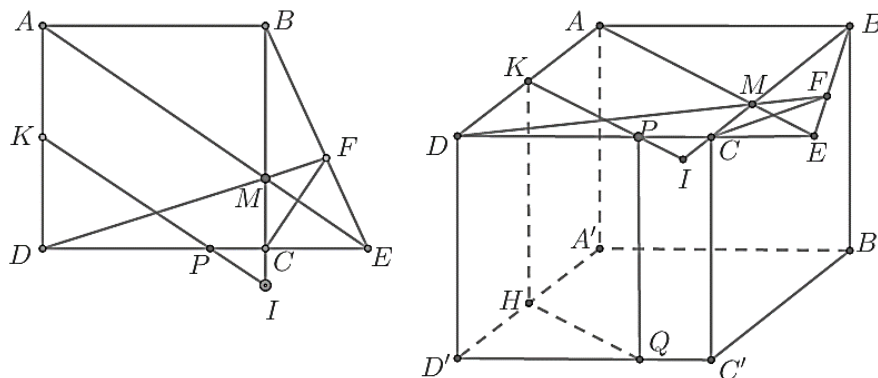
CÂU 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. E là giao điểm của AM và CD , F là giao điểm của DM và BE . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của $A'D'$ và vuông góc với CF chia khối lập phương ra thành hai phần có thể tích là $V_1, V_2, (V_1 < V_2)$. Đặt

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị $a - b$ bằng

- A. -7. B. -11. C. -10. D. -5.

LỜI GIẢI

Chọn C



Ta có $\frac{EC}{ED} = \frac{MC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow CE = \frac{1}{2} CD$.

Theo định lý Menelaus trong $\triangle BCE$ có $\frac{DC}{DE} \cdot \frac{EF}{FB} \cdot \frac{BM}{MC} = 1 \Leftrightarrow \frac{EF}{FB} = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Xét } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF} &= \left(\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2} \overrightarrow{DC} \right) \left(\overrightarrow{CE} + \frac{3}{7} \overrightarrow{EB} \right) = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2} \overrightarrow{DC} \right) \left(\overrightarrow{CE} + \frac{3}{7} \overrightarrow{EC} - \frac{3}{7} \overrightarrow{BC} \right) \\ &= \left(\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2} \overrightarrow{DC} \right) \left(\frac{2}{7} \overrightarrow{DC} - \frac{3}{7} \overrightarrow{AD} \right) = 0. \text{ Vậy } AE \perp CF. \end{aligned}$$

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $A'D', AD$ và $KP \parallel AM, PQ \parallel CC'$ thì $(\alpha) \equiv (HKPQ)$

Gọi $KP \cap BC = I \Rightarrow IM = KA \Rightarrow IC = \frac{1}{2} MC \Rightarrow DP = 3PC$.

$$V_1 = DD' \cdot S_{DKP} = \frac{3}{8} DD' \cdot S_{DAC} = \frac{3}{16} DD' \cdot S_{ABCD} = \frac{3}{16} V \Rightarrow V_2 = \frac{13}{16} V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{13}. \text{ Vậy } a - b = -10.$$

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm lần lượt nằm trên các đoạn thẳng AB và AD (M, N không trùng A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2 \frac{AD}{AN} = 4$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

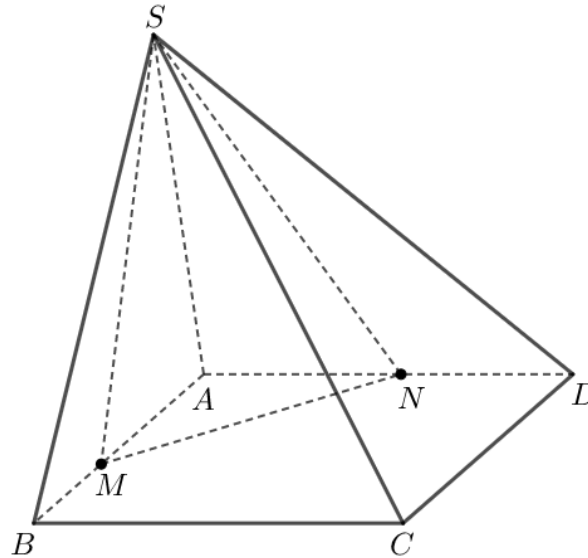
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{2}{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



$$\text{Ta có } \frac{V'}{V} = \frac{V - V_{SAMN}}{V} = 1 - \frac{V_{SAMN}}{V} = 1 - \frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD}.$$

$$\text{Đặt } \frac{AD}{AN} = x \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 4 - 2x. \text{ Ta có } \begin{cases} 0 < AN \leq AD \\ 0 < AM \leq AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4 - 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{V'}{V} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4 - 2x} = 1 - \frac{1}{2x(4 - 2x)} = 1 + \frac{1}{4x^2 - 8x}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = 1 + \frac{1}{4x^2 - 8x}, \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f'(x) = -\frac{8x - 8}{(4x^2 - 8)^2} < 0, \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

$$\text{Suy ra } f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}, \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]. \text{ Vậy } \min \frac{V'}{V} = \frac{2}{3}.$$

CÂU 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $A'C$ chia khối lập phương thành hai phần thể tích. Tính tỉ số k hai phần thể tích này, biết $k < 1$.

A. $\frac{3}{25}$.

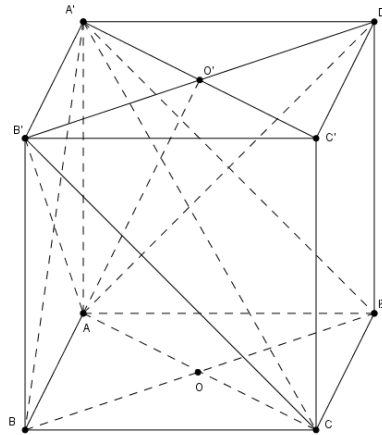
B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{2}{25}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} AD' \perp A'D \\ AD' \perp CD \text{ (do } CD \perp (ADD'A')) \end{array} \right\} \Rightarrow AD' \perp (A'CD) \Rightarrow AD' \perp A'C.$

Tương tự $\left. \begin{array}{l} AB' \perp A'B \\ AB' \perp BC \text{ (do } BC \perp (ABB'A')) \end{array} \right\} \Rightarrow AB' \perp (A'BC) \Rightarrow AB' \perp A'C.$

Do đó $A'C \perp (AB'D').$

Vậy mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $A'C$ là $(AB'D')$, chia khối lập phương thành 2 khối $A.A'B'D'$ và $ABCDB'C'D'$.

Ta có $V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{A'B'C'D'} \cdot AA' = \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}$. Suy ra $V_{ABCDB'C'D'} = \frac{5}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}$. Vậy $k = \frac{1}{5}$.

CÂU 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Gọi M là trung điểm AA' và N là trung điểm của AB . Mặt phẳng (MNC') chia lăng trụ thành hai phần trong đó phần chứa đỉnh A có thể tích V' . Thể tích của khối V' theo V là

A. $V' = \frac{11}{25} V$.

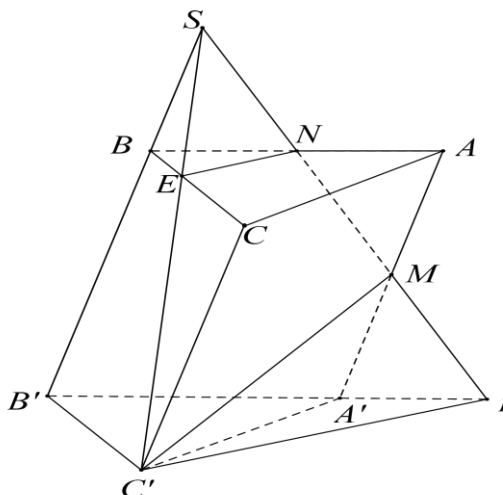
B. $V' = \frac{1}{5} V$.

C. $V' = \frac{13}{36} V$.

D. $V' = \frac{5}{7} V$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Trong $(ABB'A')$, gọi $I = MN \cap A'B'$ và $S = MN \cap BB'$

Trong $(BCC'B')$, gọi $E = SC' \cap BC$.

$$\text{Ta có } \frac{A'I}{A'B'} = \frac{1}{2}, \frac{SB}{BB'} = \frac{1}{2}, \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Gọi h là chiều cao và S là diện tích đáy của lăng trụ $\Rightarrow V = hS$.

$$V_{A'B'C'MNBE} = V_{S.B'CI} - V_{S.BEN} - V_{M.A'CI} = \frac{1}{3} \left(\frac{3h}{2} \cdot \frac{3S}{2} - \frac{h}{2} \cdot \frac{S}{3 \cdot 2} - \frac{h}{2} \cdot \frac{S}{2} \right) = \frac{23V}{36}.$$

$$\text{Suy ra } V' = V - \frac{23V}{36} = \frac{13}{36}V.$$

CÂU 11. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. M, N lần lượt là trung điểm AB, AC ; P thuộc đoạn CC' sao cho $\frac{CP}{CC'} = x$. Tìm x để mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện có tỉ lệ thể tích là $\frac{1}{2}$.

A. $\frac{8}{5}$.

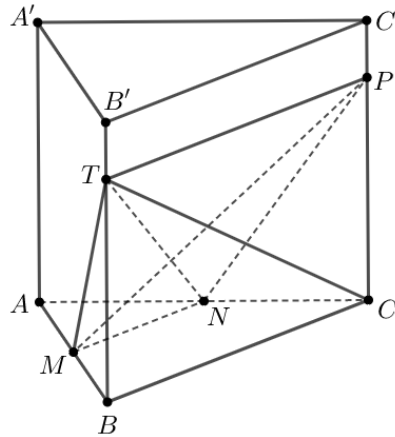
B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{5}{4}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



$$\text{Ta có } \begin{cases} P \in (MNP) \cap (BB'C'C) \\ MN \parallel BC \\ MN \subset (MNP) \\ BC \subset (BB'C'C) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (BB'C'C) = PT \parallel MN \parallel BC \Rightarrow \frac{BT}{BB'} = x \in [0; 1].$$

Thiết diện tạo bởi (MNP) với khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là hình tứ giác $MNPT$.

Ta có $V_{TPMNCB} = V_{T.BCNM} + V_{N.TPC}$ (1). Mà:

$$\begin{aligned} V_{T.BCNM} &= \frac{1}{3} S_{BNCM} \cdot d(T; (BCNM)) = \frac{1}{3} (S_{ABC} - S_{AMN}) \cdot d(T; (BCNM)) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) S_{ABC} \cdot x \cdot d(B'; (ABC)) = \frac{x}{4} V_{ABC.A'B'C'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{N.TPC} &= \frac{1}{3} S_{TPC} \cdot d(N; (BB'C'C)) = \frac{1}{3} (S_{BB'C'C} - S_{BTC} - S_{B'C'PT}) \cdot \frac{1}{2} d(A; (BB'C'C)) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{2} - (1-x) \right) S_{BB'C'C} \cdot \frac{1}{2} d(A; (BB'C'C)) = \frac{x}{4} V_{A.BCC'B'} = \frac{x}{4} \cdot \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{x}{6} V_{ABC.A'B'C'}. \end{aligned}$$

$$\text{Thay vào (1), ta được } V_{TPMNCB} = \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6} \right) V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5x}{12} V_{ABC.A'B'C'}.$$

Chủ đề 04: Tỷ lệ thể tích khối đa diện

Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện có tỉ lệ thể tích là $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_{TPMNCB} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \\ V_{TPMNCB} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{12} = \frac{1}{3} \\ \frac{5x}{12} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \text{ (tm)} \\ x = \frac{8}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \text{ . Vậy } x = \frac{4}{5} \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

CÂU 12. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Trên tia đối của tia $B'A'$ lấy điểm M sao cho $B'M = \frac{1}{2} B'A'$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của $A'C', BB'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có chứa đỉnh A' có thể tích V_1 và khối đa diện chứa đỉnh C' có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{95}{144}$.

B. $\frac{97}{59}$.

C. $\frac{49}{144}$.

D. $\frac{49}{95}$.

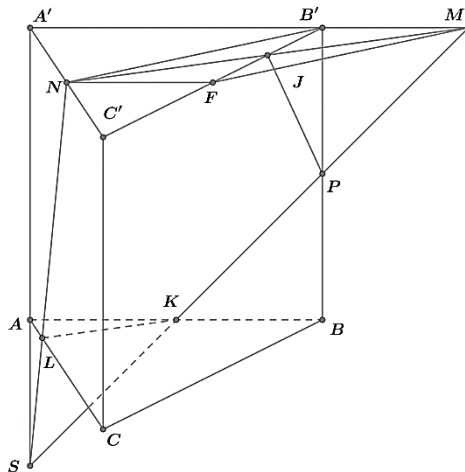
LỜI GIẢI

Chọn D

Ta gọi: $K = MP \cap AB, S = MP \cap AA', L = NS \cap AC$;

Khi đó thiết diện cần tìm chính là ngũ giác $NJPKL$ chia hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành 2 phần như hình

vẽ. Cho J là trung điểm BF mà ta có: $\begin{cases} NF \parallel B'M \\ NF = B'M \end{cases} \Rightarrow B'J = JF$



Tương tự ta lại có thêm được: $MJ = JN$ nên từ đó suy ra $B'NFM$ là hình bình hành

Mặt khác: $\begin{cases} AK = KB \\ SA \parallel BP \end{cases} \Rightarrow SA = BP = B'P \Rightarrow \frac{MP}{MS} = \frac{B'P}{A'S} = \frac{1}{3}$

Ta có: $\frac{V_{M.PJB'}}{V_{M.SNA'}} = \frac{MP}{MS} \cdot \frac{MJ}{MN} \cdot \frac{MB'}{MA'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{M.PJB'} = \frac{1}{18} V_{M.SNA'}$

Mặt khác: ta có $\frac{SL}{SN} = \frac{SA}{SA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.ALK}}{V_{S.A'NM}} = \frac{SK}{SM} \cdot \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SL}{SN} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{S.ALK} = \frac{1}{27} V_{S.A'NM}$

Khi đó: $V_1 = V_{S.MNA'} - V_{M.PJB'} - V_{S.ALK} = \left(1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{27}\right) V_{M.SNA'} = \frac{49}{54} V_{M.SNA'}$

Ta lại có:

$V_{S.A'NM} = \frac{49}{54} V_{M.SNA'} = \frac{49}{54} \cdot \frac{3}{8} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{49}{144} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1 = \frac{95}{144} V_{ABC.A'B'C'}$

Vậy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{49}{95}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm cạnh bên SC . Gọi (P) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD , mặt phẳng (P) cắt SB và SD lần lượt tại B' và D' . Tính tỷ số $\frac{V_{S.AB'MD'}}{V_{S.ABCD}}$.
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 2:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M, N . Tỷ lệ $T = \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}}$ có giá trị là
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.
- Câu 3:** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối tám mặt có các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện $ABCD$. Tỷ số $\frac{V'}{V}$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{8}$.
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi G là trọng tâm tam giác SAD , mặt phẳng (α) chứa BG và song song với AC cắt SA, SD, SC lần lượt tại A', D', C' . Tính số $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$ bằng
- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{9}{20}$. C. $\frac{5}{16}$. D. $\frac{117}{128}$.
- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 2 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, SD thỏa mãn $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = k$ ($0 < k < 1$). Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC tại P . Biết khối chóp $S.AMPN$ có thể tích bằng $\frac{1}{3}$, khi đó giá trị của k bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 6:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3MC$ và N là trung điểm của $B'C'$. Gọi d là đường thẳng qua A , cắt $A'M$ tại E , cắt BN tại F . Tính tỷ số $\frac{V_{EABC}}{V_{FA'B'C'}}$.
- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{6}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SC . Hai đường thẳng AN, MN lần lượt cắt mặt phẳng (SBD) tại I và K .

Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$ và V' là thể tích khối tứ diện $CNIK$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{18}$. B. $\frac{1}{48}$. C. $\frac{1}{24}$. D. $\frac{1}{16}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SC . Hai đường thẳng AN, MN lần lượt cắt mặt phẳng (SBD) tại I và K .

Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$ và V' là thể tích khối tứ diện $CNIK$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{18}$. B. $\frac{1}{48}$. C. $\frac{1}{24}$. D. $\frac{1}{16}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích là V . Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $\frac{AM}{AB} = x$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với hai đường thẳng SA, BC . Mặt phẳng (α) chia hình chóp thành hai phần, trong đó phần chứa điểm B có thể tích là V' . Biết $V' = \frac{208}{343}V$. Tính tổng các giá trị của x thỏa mãn bài toán.

- A. $\frac{135}{686}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 0 . D. $\frac{3}{7}$.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$. Biết G là trọng tâm tam giác SAB . Tỉ số thể tích

$\frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Giá trị của $m+n$ bằng

- A. 7 . B. 17 . C. 19 . D. 21 .

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC . Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{8}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{8}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy là hình bình hành có thể tích bằng V . Lấy điểm B', D' lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD . Mặt phẳng qua $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C' . Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

- A. $\frac{V}{3}$ B. $\frac{2V}{3}$. C. $\frac{V^3}{3}$. D. $\frac{V}{6}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . $AB = BC = 2a, AD = 4a$. Mặt phẳng (α) đi qua A và trung điểm các cạnh SB, SC chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S , V' là thể tích khối đa diện không chứa đỉnh S . Tỉ số $\frac{V}{V'}$ bằng

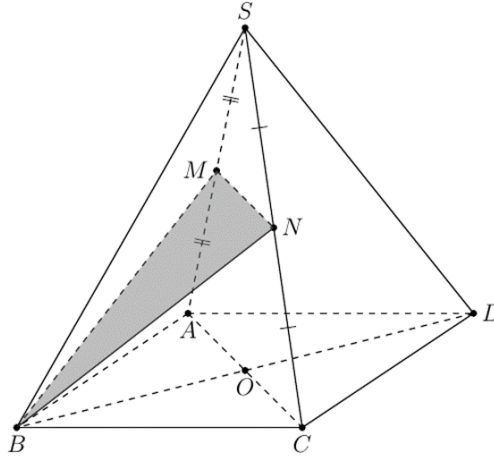
A. $\frac{5}{12}$.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{7}{12}$.

D. $\frac{7}{5}$.

Câu 14: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên $SA = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA, SC . Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại K .



Thể tích khối chóp $S.MNK$ bằng

A. $\frac{\sqrt{14}}{112}a^3$.

B. $\frac{\sqrt{14}}{84}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{14}}{12}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{14}}{144}a^3$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là trung điểm của SA, SB . Mặt phẳng $(MNCD)$ chia hình chóp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần là (số bé chia số lớn).

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

B. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD . Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại Q, P . Đặt $\frac{SQ}{SB} = x$, V_1 là thể tích khối chóp $S.MNPQ$, V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để

$$V_1 = \frac{1}{2}V.$$

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \sqrt{2}$.

C. $x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$.

D. $x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \frac{3}{2}BN$, $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{13}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{19}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{15}{19}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD . Mặt phẳng (AHK) cắt SC tại điểm P . Thể tích của khối $S.AHPK$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{40}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{120}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{60}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{30}$.

Câu 20: Cho tứ diện $SABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = 4a$, $AC = 6a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 30° , $SA = 2a$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC với $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$, $\frac{SN}{SB} = \frac{1}{2}$, $\frac{SP}{SC} = \frac{3}{4}$; G là trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích khối tứ diện $GMNP$.

A. $V = \frac{2}{3}a^3$. B. $V = \frac{5}{6}a^3$. C. $V = \frac{7}{9}a^3$. D. $V = \frac{5}{9}a^3$.

Câu 21: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $AB = a$. Biết $SA = SB = SD = BD = a\sqrt{3}$, G là trọng tâm tam giác SAC . Mặt phẳng (α) chứa cạnh AG đồng thời song song với BD cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Thể tích của hình chóp $S.A'B'C'D'$ là:

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (α) chứa AM và cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại P và Q . Gọi V' là thể tích của $S.APMQ$; $\frac{SP}{SB} = x$; $\frac{SQ}{SD} = y$; ($0 < x, y < 1$). Khi tỉ số $\frac{V'}{V}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị của tổng $x + 3y$.

A. 2. B. $\frac{1}{6}$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Mặt phẳng (EFG) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{59}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{49}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{59}$. D. $V_{O.AEMF} = \frac{25}{49}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là $27cm^3$. Điểm M di động trên BC (M khác B, C), điểm S di động trên đường thẳng CD . Một mặt phẳng qua M song song với hai đường thẳng AB, CD đồng thời cắt AC, AD, BD lần lượt tại N, P, Q . Gọi V là thể tích của khối chóp $S.MNPQ$. Khi M, N thay đổi thì thể tích lớn nhất của V bằng

A. 12.

B. 18.

C. 4.

D. 8.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC . Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1 , khối đa diện còn lại có thể tích V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$.

A. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{7}{5}$.

B. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{7}{9}$.

C. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{9}{7}$.

D. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{7}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích V . M, N lần lượt là trung điểm SA, SC . Điểm P nằm trên cạnh AB sao cho $AB = 4AP$, điểm Q nằm trên cạnh BC sao cho $BC = 4BQ$. Tính thể tích $MNPQ$ theo V .

A. $\frac{V}{12}$.

B. $\frac{V}{8}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{V}{6}$.

Câu 27: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, có thể tích 24cm^3 . Gọi E là trung điểm của SC . Một mặt phẳng chứa AE cắt các cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMEN$.

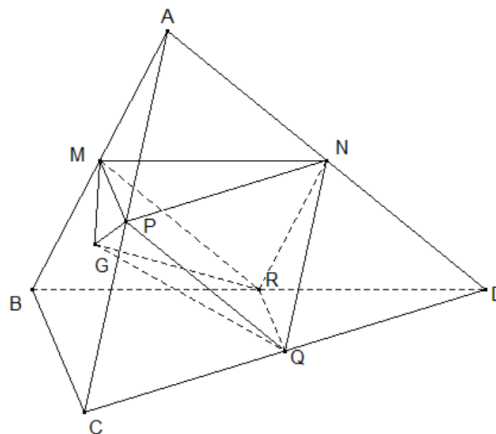
A. 9cm^3 .

B. 8cm^3 .

C. 6cm^3 .

D. 7cm^3 .

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V . Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là trọng tâm tam giác ABC (như hình vẽ). Thể tích khối đa diện lồi $MNPQGR$ theo V là



A. $\frac{V}{3}$.

B. $\frac{2V}{5}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{V}{2}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng thay đổi luôn song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy và cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại I, J, K, L . Gọi E, F, G, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của I, J, K, L lên mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối đa diện $IJKL.EFGH$ đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{SI}{SA} = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2$ bằng

A. $T = 10$.

B. $T = 5$.

C. $T = 13$.

D. $T = 25$.

Chủ đề 04: Tỷ lệ thể tích khối đa diện

Câu 30: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Gọi M là trung điểm của AA' , N là trung điểm AM , P nằm trên BB' sao cho $BP = 4B'P$. Gọi thể tích khối đa diện $MNBCC'P$ là V_1 . Tỷ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{41}{60}$. B. $\frac{37}{49}$. C. $\frac{41}{57}$. D. $\frac{2}{3}$.

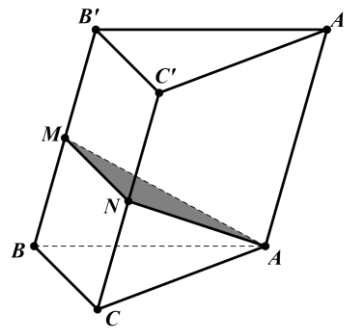
Câu 31: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{BN}{BB'} = x, \frac{CP}{CC'} = y$. Biết thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{2V}{3}$. Giá trị lớn nhất của xy bằng:

- A. $\frac{17}{21}$. B. $\frac{25}{36}$. C. $\frac{5}{24}$. D. $\frac{9}{16}$.

Câu 32: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA', NB' = 2NB, PC = PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = 1$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Câu 33: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Tỷ số thể tích $\frac{V_{ABCMN}}{V_{ABC.A'B'C'}}$ là



- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , M là trung điểm của BC . Biết tam giác $AA'M$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Thể tích khối chóp $A'.BCC'B'$ bằng

- A. $\frac{3a^3}{8}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 35: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M là trung điểm cạnh BB' , điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Khối chóp $A.BCNM$ có thể tích là V_1 . Tính $\frac{V_1}{V}$.

- A. $\frac{7}{12}$. B. $\frac{5}{18}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{7}{18}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V và độ dài cạnh bên $AA' = 6$ đơn vị. Cho điểm A_1 thuộc cạnh AA' sao cho $AA_1 = 2$. Các điểm B_1, C_1 lần lượt thuộc cạnh BB', CC' sao cho $BB_1 = x, CC_1 = y$, ở đó x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy = 12$. Biết rằng thể tích của khối đa diện $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $\frac{1}{2}V$. Giá trị của $|x - y|$ bằng

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 0.

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $CC' = 4CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối lập phương thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 . Gọi V_2 là phần có chứa điểm B . Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{32}{25}$. B. $\frac{7}{16}$. C. $\frac{25}{7}$. D. $\frac{7}{32}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA', NB' = 2NB, PC = PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Câu 39: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng $(B'C'M)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, gọi V_1 là thể tích phần chứa đỉnh A , V_2 là thể tích phần chứa đỉnh B . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{12}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Câu 40: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'; BC; CC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ đã cho thành 2 phần, phần chứa điểm B có thể tích là V_1 . Tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{61}{144}$. B. $\frac{37}{144}$. C. $\frac{49}{144}$. D. $\frac{25}{144}$.

Câu 41: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm $B'A'$ và $B'B$. Mặt phẳng (P) đi qua MN và tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc α sao cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Biết (P) cắt các cạnh DD' và DC . Khi đó mặt phẳng (P) chia khối lập phương thành hai phần, gọi thể tích phần chứa điểm A là V_1 và phần còn lại có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

- A. $\frac{V_1}{V_2} = 1$. B. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

Câu 42: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, điểm M thuộc cạnh CC' sao cho $CC' = 3CM$. Mặt phẳng

Chủ đề 04: Tỷ lệ thể tích khối đa diện

$(AB'M)$ chia khối hộp thành hai khối đa diện. V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A' , V_2 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

- A. $\frac{13}{41}$. B. $\frac{41}{108}$. C. $\frac{13}{8}$. D. $\frac{41}{13}$.

Câu 43: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thang đáy AB, CD sao cho $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt thuộc cạnh AA', DD' sao cho $\frac{AM}{MA'} = \frac{3}{4}; \frac{DN}{ND'} = \frac{4}{3}$, mặt phẳng (BMN) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện, gọi V_1 là thể tích của khối đa diện có chứa đỉnh A ; V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Biết $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b}$. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng

- A. 167. B. 211. C. 293. D. 208.

Câu 44: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Điểm M là trung điểm cạnh CC' . Mặt phẳng (P) chứa $A'M$ cắt các cạnh BB', DD' lần lượt tại N, P chia khối hộp thành hai phần. Thể tích phần chứa đỉnh C' bằng

- A. $\frac{V}{2}$. B. $\frac{V}{3}$. C. $\frac{V}{6}$. D. $\frac{V}{4}$.

Câu 45: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc $AA', BB', A'C'$ sao cho $\frac{AM}{A'M} = \frac{B'N}{BN} = \frac{C'P}{A'P} = \frac{1}{2}$. Gọi Q là trung điểm BC . Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng

- A. $\frac{2}{9}V$. B. $\frac{1}{3}V$. C. $\frac{2}{7}V$. D. $\frac{2}{3}V$.

Câu 46: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng a và $BAC = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', CDD'C'$. Biết $AI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $AA' = 2a$ và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'), (A'B'C'D')$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

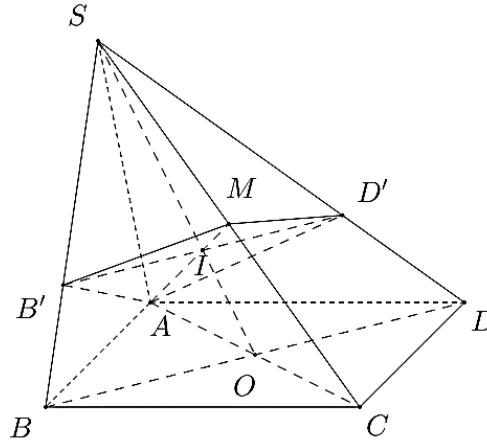
- A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{64}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{192}$.

Câu 47: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{B'M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{B'A'}$, D là trung điểm của BB' và E là trung điểm của $A'C'$. Mặt phẳng (MDE) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1, V_2 (V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A). Biết tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $2a + b$.

- A. $2a + b = 193$. B. $2a + b = 144$. C. $2a + b = 187$. D. $2a + b = 239$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B



Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AM \Rightarrow I \in SO$ và $I \in AM$. Mà $SO \subset (SBD)$ nên suy ra $I \in (SBD)$
 Trong (SBD) vẽ đường thẳng đi qua I và song song với BD , cắt cạnh SB , SD lần lượt tại B' và D' . Từ đó suy ra $BD // (AB'MD')$

Xét ΔSAC ta có AM và SO là đường trung tuyến. Mà $AM \cap SO = I$

Từ đó suy ra I là trọng tâm ΔSAC suy ra $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

Xét ΔSBO có $B'I // BO$ ta có $\frac{SI}{SO} = \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$

Chứng minh tương tự $\frac{SI}{SO} = \frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3}$. Ta có $V_{S.AB'MD'} = V_{S.AB'M} + V_{S.AMD'}$

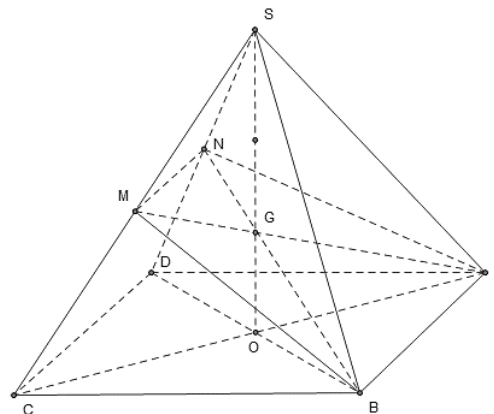
Ta có $\frac{V_{S.AB'M}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AB'M} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$

Ta có $\frac{V_{S.AMD'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMD'} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$

Từ đó suy ra $V_{S.AB'MD'} = V_{S.AB'M} + V_{S.AMD'} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD} + \frac{1}{6} V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}$

Vậy $\frac{V_{S.AB'MD'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3}$.

Câu 2: Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$. Mà $S.ABCD$ là chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow O$ là trung điểm của

AC, BD

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác SAC thì G cũng là của tam giác SBD .

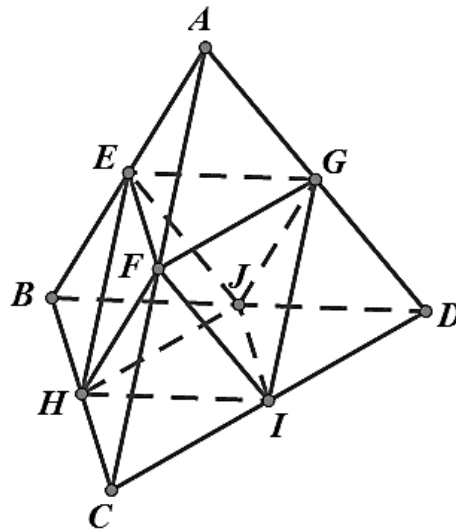
$\Rightarrow M, N$ lần lượt là trung điểm của $SC, SD \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}; \frac{SB}{SB} = \frac{SD}{SD} = 1$

Ta có: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{4} V_{S.ACD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}$.

$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}$.

$V_{S.ABMN} = V_{S.AMN} + V_{S.ABM} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD} \Rightarrow T = \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{3}{8}$.

Câu 3: Chọn A



Gọi E, F, G, H, I, J lần lượt là các trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ như hình vẽ.

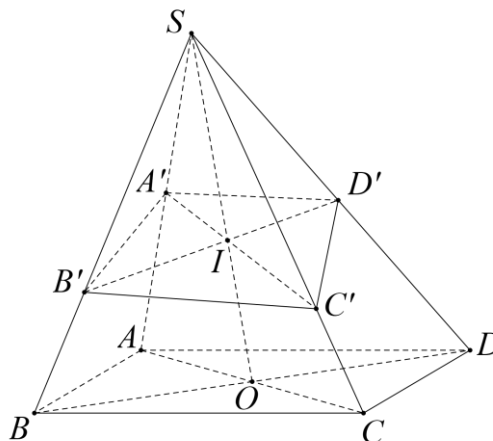
Ta có $\frac{V_{AEFG}}{V} = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} \cdot \frac{AG}{AD} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{AEFG} = \frac{1}{8} V$.

Tương tự $V_{BEHJ} = V_{CHFI} = V_{DIJG} = \frac{1}{8} V$. Suy ra $V' = V - \frac{4}{8} V = \frac{1}{2} V$. Vậy $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

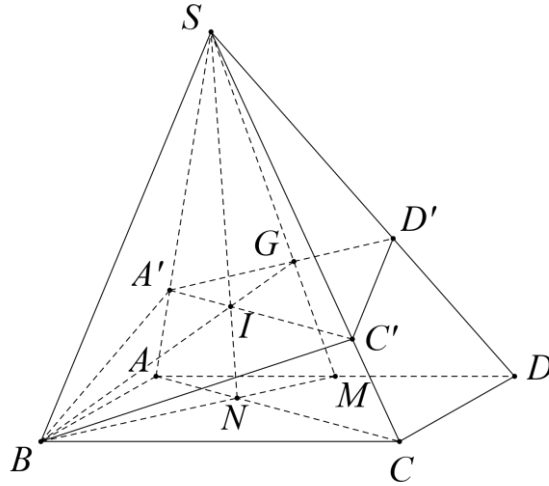
Câu 4: Chọn B

Nhắc lại công thức tỉ số thể tích liên quan khối chóp tứ giác:

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' .



Đặt $\frac{SA'}{SA} = x, \frac{SB'}{SB} = y, \frac{SC'}{SC} = z, \frac{SD'}{SD} = t$. Khi đó ta có:
$$\begin{cases} \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \end{cases}$$



Gọi M là trung điểm AD ; gọi N là giao điểm của BM và AC ; gọi I là giao điểm của SN và BG .

Để thấy: $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAC) = A'C' \\ (\alpha) \parallel AC \end{cases} \Rightarrow AC \parallel A'C' \text{ và } I \in A'C'.$

Theo đề bài: G là trọng tâm $\triangle SAD \Rightarrow \frac{MG}{MS} = \frac{1}{3}$.

$\triangle AMN \sim \triangle CNB \Rightarrow \frac{MN}{BN} = \frac{AM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $GN \parallel SB$ và $\frac{GN}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AA'}{SA'} = \frac{IN}{SI} = \frac{GN}{SB} = \frac{1}{3}$.

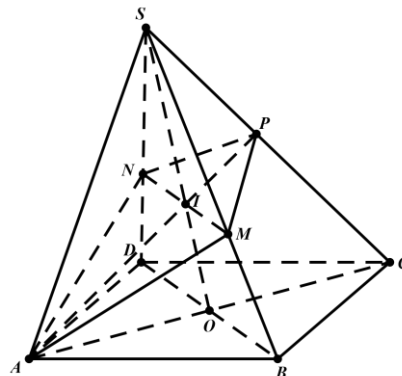
Do đó $\frac{SA'}{SA} = \frac{SC'}{SC} = \frac{3}{4}$.

Áp dụng công thức trên, ta được:

$\frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} \Rightarrow \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} - \frac{SB}{SB} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3}$.

Suy ra $\frac{SD'}{SD} = \frac{3}{5}$. Vậy $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} \right) = \frac{9}{20}$.

Câu 5: Chọn A



$$\text{Mà } \frac{SC}{SP} + 1 = \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{k}{2-k}$$

$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2-k} \cdot 2k \Leftrightarrow 6k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} (TM) \\ k = -\frac{2}{3} (KTM) \end{cases}. \text{ Vậy } k = \frac{1}{2}$$

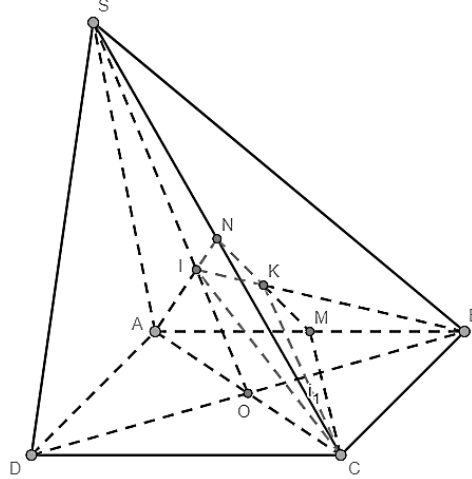
$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} EA = \frac{4}{9}FA \\ FK = \frac{1}{3}FA \end{cases} \Rightarrow \frac{EA}{FK} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{d(E, (ABC))}{d(F, (A'B'C'))} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{V_{E.ABC}}{V_{F.A'B'C'}} = \frac{4}{3}.$$

Áp dụng định lý Menenauyt trong tam giác AMN :

$$\frac{IN}{IA} \cdot \frac{BA}{BM} \cdot \frac{KM}{KN} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{KM}{KN} = 1 \Leftrightarrow \frac{KM}{KN} = 1.$$

$$\text{Do đó ta có: } \frac{S_{NIK}}{S_{ANM}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{S_{NIK}}{S_{ANB}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{V_{C.NIK}}{V_{C.ANB}} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Mà } \frac{V_{S.ANB}}{S_{S.ABC}} = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_{C.ABN}}{S_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_{C.ABN}}{S_{S.ABCD}} = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } \frac{V_{C.IKN}}{S_{S.ABCD}} = \frac{1}{48}.$$

Câu 8: Chọn B

$$\text{Xét } \triangle SAC : I \text{ là trọng tâm} \Rightarrow \frac{NI}{NA} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle NAM : \frac{NI}{IA} \cdot \frac{AB}{BM} \cdot \frac{MK}{KN} = 1 \Leftrightarrow \frac{MK}{KN} = 1 \Rightarrow \frac{NK}{NM} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.AMC}}{V} = \frac{\frac{1}{3}d(S, (ABCD)) \cdot S_{\triangle AMC}}{\frac{1}{3}d(S, (ABCD)) \cdot S_{\triangle ABCD}} = \frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMC} = \frac{1}{4}V$$

$$\frac{V_{N.AMC}}{V_{S.AMC}} = \frac{\frac{1}{3}d(N, (AMC)) \cdot S_{\triangle AMC}}{\frac{1}{3}d(S, (AMC)) \cdot S_{\triangle AMC}} = \frac{d(N, (AMC))}{d(S, (AMC))} = \frac{CN}{CS} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{N.AMC} = \frac{1}{8}V$$

$$\frac{V_{NIKC}}{V_{NAMC}} = \frac{NI}{NA} \cdot \frac{NK}{NM} \cdot \frac{NC}{NC} = \frac{1}{6} \Rightarrow V' = V_{NIKC} = \frac{1}{48}V. \text{ Vậy } \frac{V'}{V} = \frac{1}{48}.$$

Câu 9: Chọn D

Gọi N, E, F lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh SB, SC, AC . Khi đó từ giả thiết suy ra $MN \parallel EF \parallel AS, MF \parallel NE \parallel BC$. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNEF$.

Dựng hình lăng trụ $SB'C'.ABC$, kéo dài MK, FE cắt SB, SC lần lượt tại K, H .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{V_{SABC}}{V_{SB'C'.ABC}} = \frac{1}{3} \\ \frac{V_{SKH.AMN}}{V_{SB'C'.ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} = x^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_{SABC}}{V_{SKH.AMN}} = \frac{1}{3x^2} \Rightarrow V_{SKH.AMN} = 3x^2 \cdot V_{SABC} \quad (1).$$

$$\frac{NB}{BS} = \frac{NM}{KM} = \frac{BM}{BA} = 1-x; \quad \frac{NM}{KM} = \frac{FE}{FH} = 1-x.$$

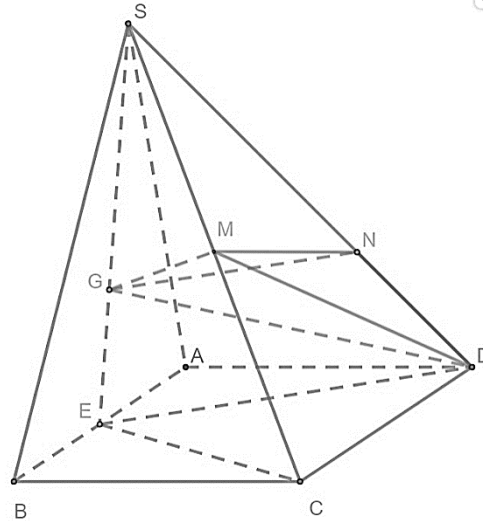
$$\frac{V_{AMF.SNE}}{V_{AMF.SKH}} = \frac{1}{3} \left(\frac{NM}{KM} + \frac{SA}{SA} + \frac{FE}{FH} \right) = \frac{1}{3} (1-x+1+1-x) = \frac{1}{3} (3-2x).$$

$$\text{Suy ra } V_{AMF.SNE} = \frac{1}{3} (3-2x) V_{AMF.SKH} = \frac{1}{3} (3-2x) \cdot 3x^2 \cdot V_{S.ABC}$$

$$\text{Và } V_{BMN.CFE} = \left[1 - \frac{1}{3} (3-2x) \cdot 3x^2 \right] \cdot V_{S.ABC} = (2x^3 - 3x^2 + 1) \cdot V_{S.ABC}.$$

$$\text{Từ giả thiết ta có phương trình } 2x^3 - 3x^2 + 1 = \frac{208}{343} \Rightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Câu 10: Chọn C



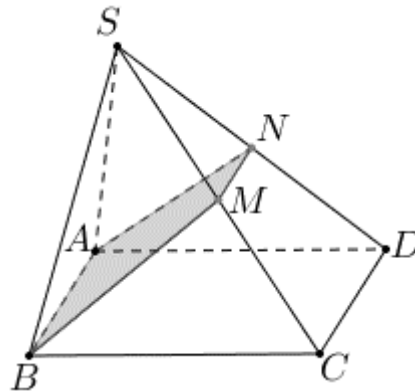
$$\text{Theo giả thiết } \frac{V_{D.MNG}}{V_{S.MNG}} = \frac{DN}{SN} = \frac{1}{2}$$

$$V_{D.MNG} + V_{S.MNG} = V_{S.DMG} \Rightarrow V_{D.MNG} = \frac{1}{3} V_{S.DMG}$$

$$\frac{V_{S.DMG}}{V_{S.DCE}} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{D.MNG} = \frac{1}{9} V_{S.DCE}$$

$$\frac{V_{S.DCE}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \text{ nên ta có } \frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{18}. \text{ Suy ra } m=1, n=18 \Rightarrow m+n=19.$$

Câu 11: Chọn D

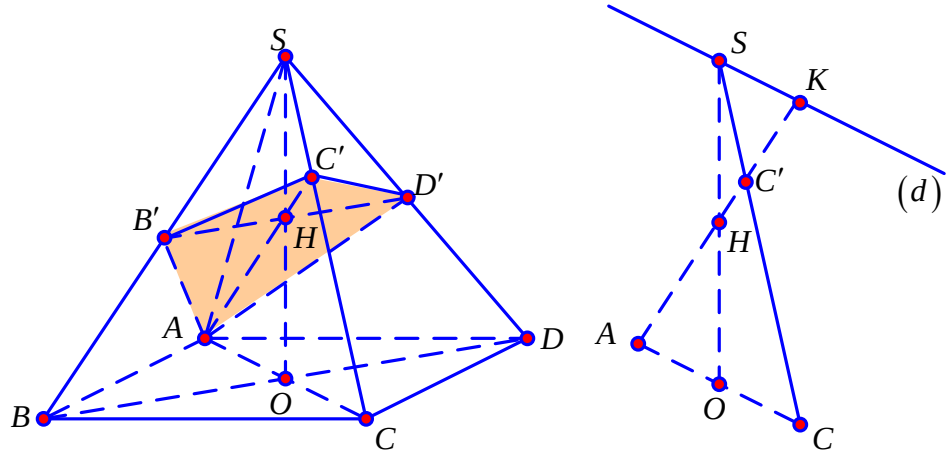


Gọi $N = (\alpha) \cap SD \Rightarrow MN \parallel CD$, suy ra N là trung điểm của SD .

$$\text{Ta có } a = \frac{SA}{SA} = 1, b = \frac{SB}{SB} = 1, c = \frac{SC}{SM} = 2, d = \frac{SD}{SN} = 2.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{1+1+2+2}{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{V_{ABCDMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Vậy } V_1 = V_{S.ABMN}, V_2 = V_{ABCDMN} \text{ và } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}.$$

Câu 12: Chọn D

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì $SO \cap B'D' = H$. Khi đó H là trung điểm của SO và $C' = AH \cap SO$.

Trong mặt phẳng (SAC) : Ta kẻ $(d) // AC$ và AC' cắt (d) tại K . Khi đó áp dụng tính đồng dạng

$$\text{của các tam giác ta có: } \frac{OH}{SH} = \frac{OA}{SK} = 1 \Rightarrow SK = OA \Rightarrow \frac{SK}{AC} = \frac{1}{2}; \frac{SK}{AC} = \frac{SC'}{CC'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}.$$

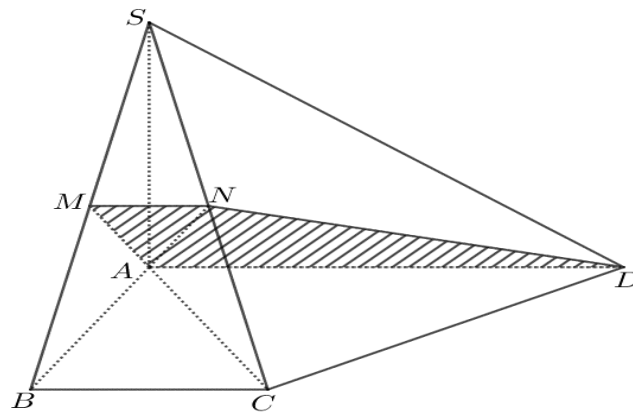
$$\text{Vì } V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{V}{2} \text{ nên ta có } \frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow V_{S.AB'D'} = \frac{1}{8}V$$

và

$$\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow V_{S.B'C'D'} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{V}{8}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \frac{1}{8}V + \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{8} \left(1 + \frac{SC'}{SC} \right) = \frac{V}{6}.$$

Lưu ý: Có thể sử dụng nhanh công thức $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$

Câu 13: Chọn B

Ta có: MN là đường trung bình của tam giác $SBC \Rightarrow MN // BC // AD$.

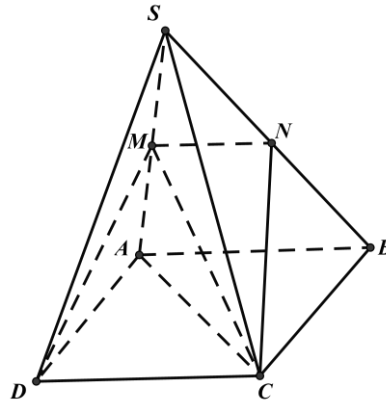
Mặt phẳng (α) đi qua A và chứa $MN // BC$ nên $(\alpha) \cap (ABCD) = AD$.

$$\text{Ta có: } \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \\ S_{\Delta ACD} = \frac{2}{3} S_{ABCD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} \\ V_{S.ACD} = \frac{2}{3} V_{S.ABCD} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow V' = V_{S.ABCD} - V = \frac{7}{12} V_{S.ABCD}. \text{ Do đó, } \frac{V}{V'} = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Vây } V_{S,MNK} = \frac{1}{12} V_{S,ACD} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^3 \sqrt{14}}{12} = \frac{a^3 \sqrt{14}}{144}.$$

Chinh phục các bài toán VD - VDC: Tỷ lệ thể tích khối đa diện | 216



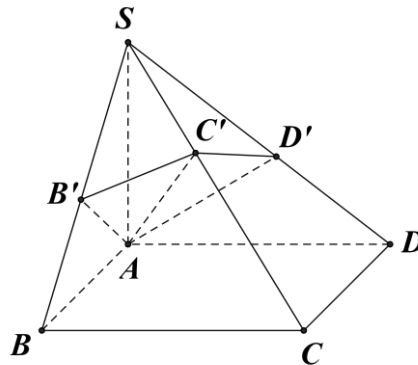
Giả sử thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là V .

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MDC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SD}{SD} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{1}{2}; \quad \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{V_{S.MDC}}{V_{S.ADC}} + \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.MDC}}{\frac{1}{2}V} + \frac{V_{S.MNC}}{\frac{1}{4}V} = \frac{V_{S.MNCD}}{\frac{1}{2}V} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.MNCD} = \frac{3}{8}V \Rightarrow V_{MNABCD} = V - \frac{3}{8}V = \frac{5}{8}V \Rightarrow \frac{V_{S.MNCD}}{V_{MNABCD}} = \frac{3}{5}.$$

Câu 16: Chọn C



$$\text{Ta có thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$$

$$\begin{cases} AB' \perp SB \\ AB' \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SC$$

Tương tự ta chứng minh được $AD' \perp SC$, từ đó suy ra $SC \perp (AB'D')$ và suy ra $SC \perp AC'$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , đường cao AB' :

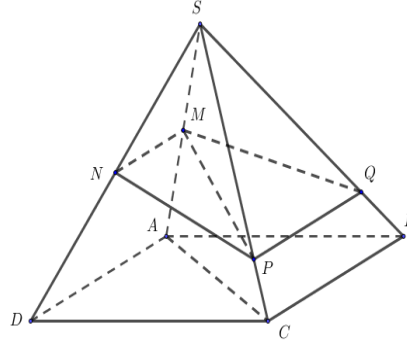
$$SA^2 = SB' \cdot SB \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}. \text{ Tương tự } \frac{SD'}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{SC'}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + 2a^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{18}.$$

$$\text{Tương tự } V_{S.AD'C'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{18}. \text{ Vậy } V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{18} + \frac{a^3 \sqrt{2}}{18} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{9}.$$

Câu 17: Chọn D



Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD nên $MN \parallel AD$. Mà $AD \parallel BC$, dẫn đến $MN \parallel BC$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) \cap (SBC) = PQ \\ MN \subset (\alpha); BC \subset (SBC) \Rightarrow PQ \parallel BC \parallel MN \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SB} = x. \\ MN \parallel BC \end{cases}$$

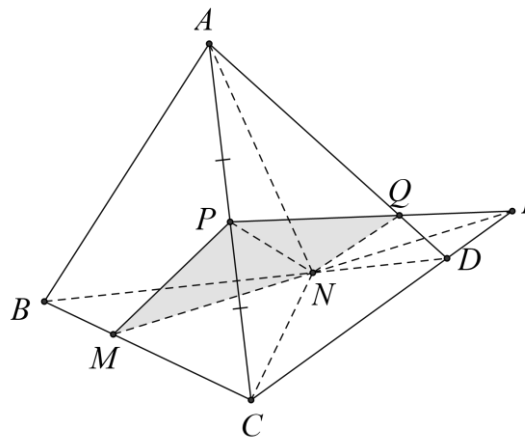
$$\text{Đặt } a = \frac{SA}{SM} = 2; b = \frac{SB}{SQ} = \frac{1}{x}; c = \frac{SC}{SP} = \frac{1}{x}; d = \frac{SD}{SN} = 2.$$

$$\text{Khi đó: } \frac{V_{S.MQPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+2}{4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2}.$$

$$\text{Do } V_1 = \frac{1}{2} V \text{ nên } \frac{\frac{1}{2} V}{V} = \frac{4+\frac{2}{x}}{\frac{16}{x^2}} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}. \text{ Vì } x > 0 \text{ nên}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}.$$

Câu 18: Chọn B



Gọi $V_{ABCD} = V$, $I = MN \cap CD$, $Q = IP \cap AD$ ta có $Q = AD \cap (MNP)$.

Thiết diện của tứ diện $ABCD$ được cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNPQ$.

Áp dụng định lí Menelaus trong các tam giác BCD và ACD ta có:

$$\frac{NB}{ND} \cdot \frac{ID}{IC} \cdot \frac{MC}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \frac{1}{4} \text{ và } \frac{ID}{IC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{QA}{QD} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{QD} = 4.$$

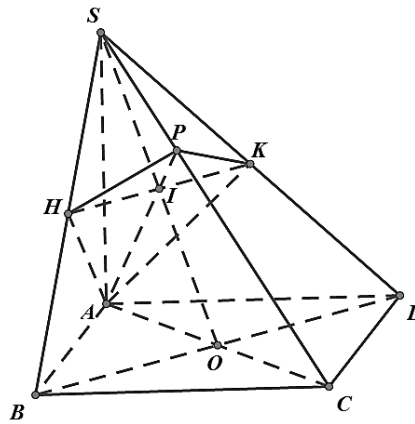
Áp dụng bài toán tỉ số thể tích của hai khối chóp tam giác, ta có:

$$\frac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD} = \frac{2}{5} \Rightarrow V_{ANPQ} = \frac{2}{5} V_{ANCD} = \frac{2}{15} V. \text{ Suy ra } V_{N.PQDC} = \frac{1}{3} V - \frac{2}{15} V = \frac{1}{5} V.$$

$$\text{và } \frac{V_{CMNP}}{V_{CBNA}} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CP}{CA} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{3} V_{CBNA} = \frac{2}{9} V.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = V_{N.PQDC} + V_{CMNP} = \frac{19}{45} V. \text{ Do đó } V_1 = V - V_2 = \frac{26}{45} V. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}.$$

Câu 19: Chọn A



$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \sqrt{3} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3} \text{ và } V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Ta có trong tam giác vuông } SAB \text{ vuông tại } A \text{ và } AH \perp SB \text{ ta được } \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tương tự, trong tam giác vuông } SAD \text{ vuông tại } A \text{ và } AK \perp SD \text{ ta được } \frac{SK}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{1}{4}.$$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ có $AC \cap BD = O$, trong (SBD) có $SO \cap HK = I$ và $AI \cap SC = P$ ta có P là giao điểm của (AKH) với SC .

$$\text{Ta có công thức } \frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} = \frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SP} \Leftrightarrow 2 + 4 = 1 + \frac{SC}{SP} \Leftrightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{1}{5}.$$

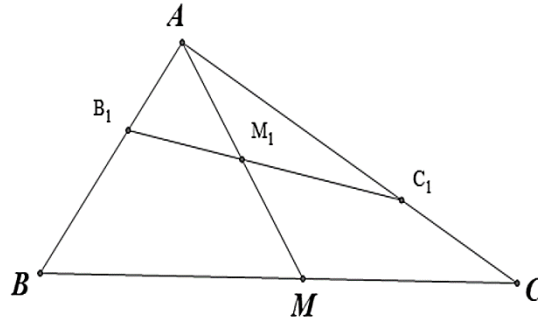
$$\text{Từ đây ta có } \frac{V_{S.AHP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{10} \text{ suy ra } V_{S.AHP} = \frac{1}{10} V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{60}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{V_{S.AKP}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SK}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{20} \text{ suy ra } V_{S.AKP} = \frac{1}{20} V_{S.ADC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{120}.$$

$$\text{Do vậy } V_{S.AHPK} = V_{S.AHP} + V_{S.AKP} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{60} + \frac{a^3 \sqrt{3}}{120} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{40}.$$

Câu 20: Chọn D

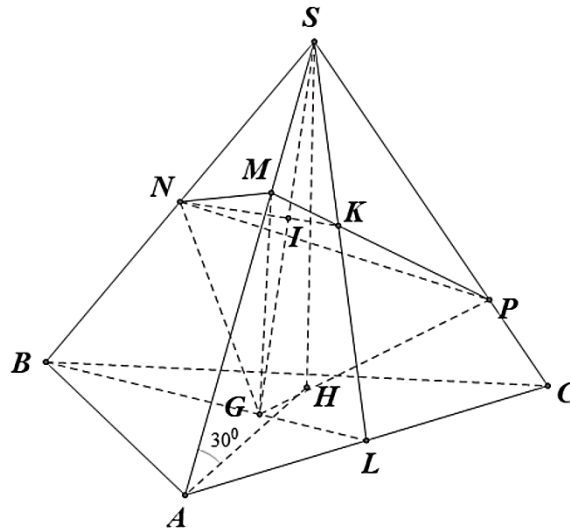
Tính chất:



Xét tam giác ABC , M thuộc đoạn BC .

Vẽ cát tuyến Δ cắt các đoạn AB, AM, AC lần lượt tại B_1, M_1, C_1

$$\text{Khi đó: } \frac{BM}{BC} \cdot \frac{AC}{AC_1} + \frac{CM}{CB} \cdot \frac{AM}{AB_1} = \frac{AM}{AM_1}$$



Gọi L là trung điểm của AC .

Trong $mp(SAC)$, gọi $K = SL \cap MP$

Trong $mp(SBL)$, gọi $I = SG \cap NK \Rightarrow I = SG \cap (MNP)$

$$\frac{d(G, (MNP))}{d(S, (MNP))} = \frac{IG}{IS} \Rightarrow V_{G.MNP} = \frac{IG}{IS} \cdot V_{S.MNP}$$

Gọi H là hình chiếu của S lên $mp(ABC)$

$$\Rightarrow \left(SA, (ABC) \right) = \left(SA, AH \right) = \angle SAH \text{ (vì } SH \perp AH) \Rightarrow \angle SAH = 30^\circ$$

$$\Rightarrow SH = SA \cdot \sin \angle SAH = 2a \cdot \sin 30^\circ = a$$

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{1}{8} \cdot V_{S.ABC} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot SH = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 6a \cdot a = \frac{1}{2} a^3$$

Xét tam giác SAC , ta có: $\frac{AL}{AC} \cdot \frac{SC}{SP} + \frac{CL}{CA} \cdot \frac{SA}{SM} = \frac{SL}{SK}$ (theo tính chất trên)

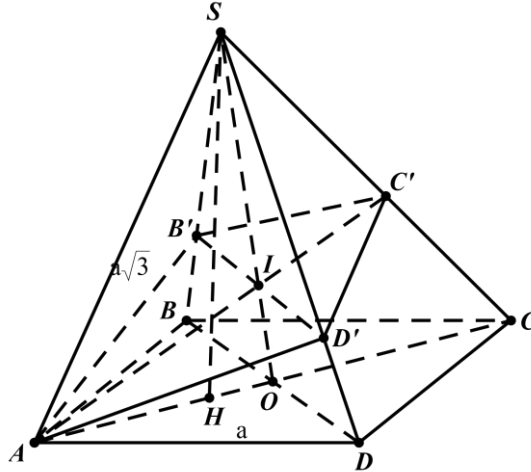
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{SL}{SK} \Rightarrow \frac{SL}{SK} = \frac{13}{6}$$

Xét tam giác SBL , ta có: $\frac{BG}{BL} \cdot \frac{SL}{SK} + \frac{LG}{LB} \cdot \frac{SB}{SN} = \frac{SG}{SI}$ (theo tính chất trên)

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{SG}{SI} \Rightarrow \frac{SG}{SI} = \frac{19}{9} \Rightarrow \frac{SI+IG}{SI} = \frac{19}{9} \Rightarrow \frac{IG}{IS} = \frac{10}{9}$$

Do đó: $V_{G.MNP} = \frac{IG}{IS} \cdot V_{S.MNP} = \frac{10}{9} \cdot V_{S.MNP} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{2} a^3 = \frac{5}{9} a^3$. Kết luận: $V = \frac{5}{9} a^3$.

Câu 21: Chọn B



Ta có $BD = a\sqrt{3} \Rightarrow OB = OD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Rightarrow AC = a$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \frac{AB \cdot BD \cdot DA}{4R} = \frac{1}{2} OA \cdot BD \Rightarrow \frac{a \cdot a\sqrt{3} \cdot a}{4R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow R = a.$$

Vì $SA = SB = SD = a\sqrt{3}$ nên chân đường cao H của hình chóp chính là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD \Rightarrow SH \perp (ABD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$

Nên $\triangle SHO$ vuông tại H

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Lại có } BD = a\sqrt{3} \Rightarrow OB = OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

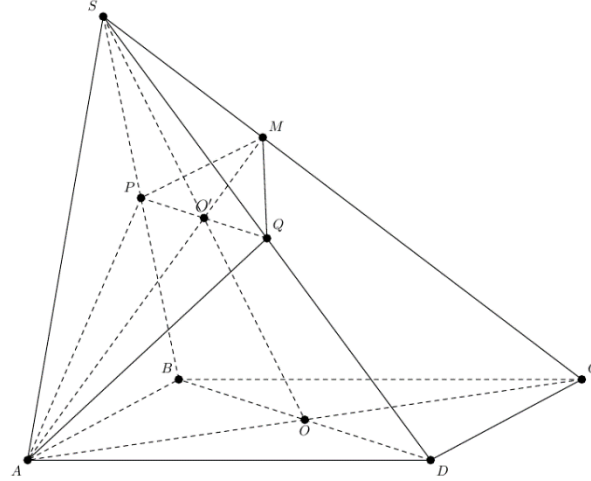
Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle SAC$ ta có:

$$\frac{SD'}{D'C} \cdot \frac{CA}{AO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SD'}{D'C} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{SD'}{D'C} = 1 \Rightarrow \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} &= \frac{V_{S.AB'D'} + V_{S.C'D'}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.C'D'}}{V_{S.ACD}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} + \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} &= \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 \sqrt{6}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{18}.\end{aligned}$$

Câu 22: Chọn A



Ta có $\frac{SB}{SP} + \frac{SD}{SQ} = \frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SM} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4.$

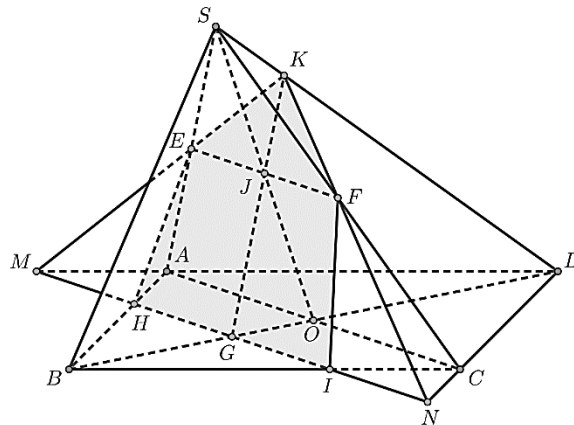
Ta có $\frac{V_{S.APQ}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SQ}{SD} = xy \Rightarrow \frac{V_{S.APQ}}{V} = \frac{1}{2}xy; \frac{V_{S.MPQ}}{\frac{1}{2}V} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{3}xy \Rightarrow \frac{V_{S.MPQ}}{V} = \frac{1}{6}xy$

Suy ra $\frac{V'}{V} = \frac{V_{S.APQ} + V_{S.MPQ}}{V} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{6}xy = \frac{2}{3}xy.$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $4 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \Rightarrow xy \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{3}xy \geq \frac{1}{6}.$

Vậy $\min\left(\frac{V'}{V}\right) = \frac{1}{6}$ khi $x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow x + 3y = 2.$

Câu 23: Chọn A



Đặt $V = V_{S.ABCD}.$

Vẽ đường thẳng qua G và song song với AC cắt các đường thẳng AD, AB, BC, CD lần lượt

tại M, H, I, N . Gọi J là giao điểm của SO và EF , K là giao điểm của GJ và SD .

Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (EFG) và hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $EKFH$.

Ta chứng minh được: K, E, M thẳng hàng và K, F, N thẳng hàng; J là trung điểm của SO .

Theo định lý Menelaus, ta có: $\frac{GO}{GD} \cdot \frac{JS}{JO} \cdot \frac{KD}{KS} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{KD}{KS} = 1 \Rightarrow \frac{KD}{KS} = 4$

$$\Rightarrow \frac{d[K, (ABCD)]}{d[S, (ABCD)]} = \frac{DK}{DS} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Vì } AC \parallel MN \text{ nên } \frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DC} = \frac{DG}{DO} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{DMN}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{DMN}}{2S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DM \cdot DN \cdot \sin ADC}{DA \cdot DC \cdot \sin ADC} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_{K.DMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}d[K, (ABCD)] \cdot S_{DMN}}{\frac{1}{3}d[S, (ABCD)] \cdot S_{ABCD}} = \frac{32}{45} \Rightarrow V_{K.DMN} = \frac{32}{45}V$$

$$S_{CIN} = \frac{1}{2} \cdot CI \cdot CN \cdot \sin ICN = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}DA \cdot \frac{1}{3}DC \cdot \sin ADC = \frac{1}{18}S_{ABCD}$$

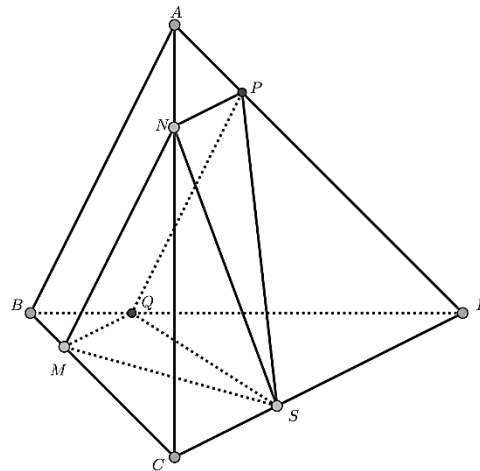
$$V_{F.CIN} = \frac{1}{3} \cdot d[F, (ABCD)] \cdot S_{CIN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d[S, (ABCD)] \cdot \frac{1}{18}S_{ABCD} = \frac{1}{36}V$$

$$\text{Tương tự, ta có: } V_{E.AMH} = \frac{1}{36}V$$

$$\text{Suy ra: } V_2 = V_{K.DMN} - V_{F.CIN} - V_{E.AMH} = \frac{32}{45}V - \frac{1}{36}V - \frac{1}{36}V = \frac{59}{90}V$$

$$V_1 = V - V_2 = \frac{31}{90}V. \text{ Suy ra: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{59}.$$

Câu 24: Chọn D



Nhận xét: $CS \parallel (MNPQ) \Rightarrow V_{S.MNPQ} = V_{C.MNPQ} = V_{ABCD} - (V_{C.PQD} + V_{ANPBMQ})$

$$\text{Đặt } \frac{CM}{CB} = x > 0 \Leftrightarrow \frac{BM}{BC} = 1 - x.$$

Chủ đề 04: Tỷ lệ thể tích khối đa diện

Ta có: $\frac{V_{C.PQD}}{V_{C.ABD}} = \frac{S_{\Delta PQD}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{DP}{DA} \cdot \frac{DQ}{DB} = x^2 \Leftrightarrow V_{CPQD} = x^2 \cdot 27$.

Ta có: $V_{ANPBMQ} = V_{N.ABQP} + V_{N.BMQ}$

$\frac{V_{N.ABQP}}{V_{C.ABD}} = \frac{d(N, (ABD)) \cdot S_{ABQP}}{d(C, (ABD)) \cdot S_{ABD}}$, trong đó $\frac{d(N, (ABD))}{d(C, (ABD))} = \frac{AN}{AC} = 1-x$ và

$\frac{S_{ABQP}}{S_{ABD}} = \frac{S_{\Delta ABD} - S_{\Delta PQD}}{S_{\Delta ABD}} = 1-x^2$

Suy ra $\frac{V_{N.ABQP}}{V_{C.ABD}} = \frac{d(N, (ABD)) \cdot S_{ABQP}}{d(C, (ABD)) \cdot S_{ABD}} = (1-x)(1-x^2) \Leftrightarrow V_{N.ABQP} = (1-x)(1-x^2) \cdot 27$

Ta có:

$\frac{V_{N.BMQ}}{V_{A.BCD}} = \frac{d(N, (BCD)) \cdot S_{\Delta BMQ}}{d(A, (BCD)) \cdot S_{\Delta BCD}} = \frac{CN}{CA} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BQ}{BD} = x(1-x)^2$

$\Leftrightarrow V_{N.BMQ} = x(1-x)^2 \cdot 27$

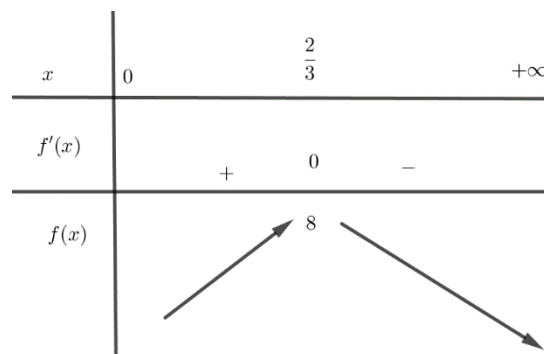
Nên $V_{ANPBMQ} = V_{N.ABQP} + V_{N.BMQ} = (1-x)(1-x^2) \cdot 27 + x(1-x)^2 \cdot 27$

Vậy ta được

$V_{S.MNPQ} = V_{C.MNPQ} = V_{ABCD} - (V_{C.PQD} + V_{ANPBMQ})$

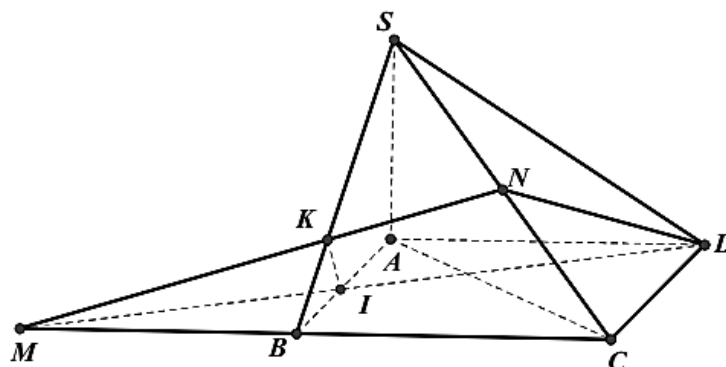
$\Leftrightarrow V_{S.MNPQ} = 27 - [27x^2 + (1-x)(1-x^2) \cdot 27 + x(1-x)^2 \cdot 27] \Leftrightarrow V_{S.MNPQ} = -54x^3 + 54x^2$

Xét $f(x) = -54x^3 + 54x^2, x > 0; f'(x) = -162x^2 + 108x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$



Từ bảng biến thiên suy ra thể tích lớn nhất là $V = 8$.

Câu 25: Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$, $K = MN \cap SB$, $I = MD \cap AB$. Khi đó I là trung điểm của AB .

Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60^\circ \Leftrightarrow SOA = 60^\circ$.

$$\Rightarrow SA = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ bằng: } V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\square ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Thể tích khối chóp $N.MCD$ bằng thể tích khối chóp $N.ABCD$, gọi thể tích này là V' thì:

$$V' = \frac{1}{2} V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

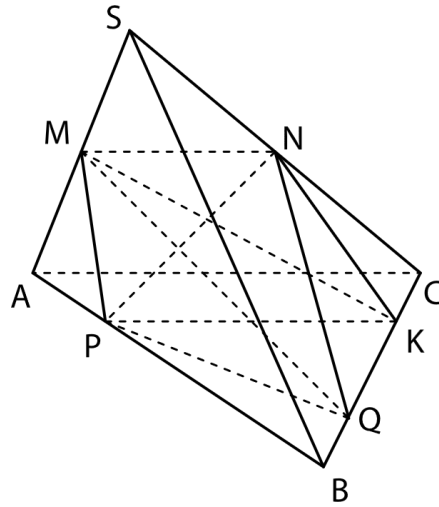
$$\text{Chú ý rằng } \frac{NS}{NC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{KB}{KS} = 1 \Rightarrow \frac{KB}{KS} = \frac{1}{2} \Rightarrow KB = \frac{1}{3} SB.$$

$$\text{Gọi thể tích khối chóp } KMIB \text{ là } V'' \text{ thì: } V'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle MBI} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{72}.$$

$$\text{Khi đó: } V_2 = V' - V'' = \frac{a^3\sqrt{6}}{12} - \frac{a^3\sqrt{6}}{72} = \frac{5\sqrt{6}a^3}{72}; \quad V_1 = V - V_2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} - \frac{5\sqrt{6}a^3}{72} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{72}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{7}.$$

Câu 26: Chọn B



Gọi K là điểm trên BC thỏa mãn $BC = 4KC \Rightarrow PK \parallel AC \parallel MN$.

Do $PK \parallel MN \Rightarrow PK \parallel (MNQ) \Rightarrow d(P, MNQ) = d(K, MNQ)$

$$\Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNQ} \cdot d(P, MNQ) = \frac{1}{3} \cdot S_{MNQ} \cdot d(K, MNQ) = V_{MNKQ}.$$

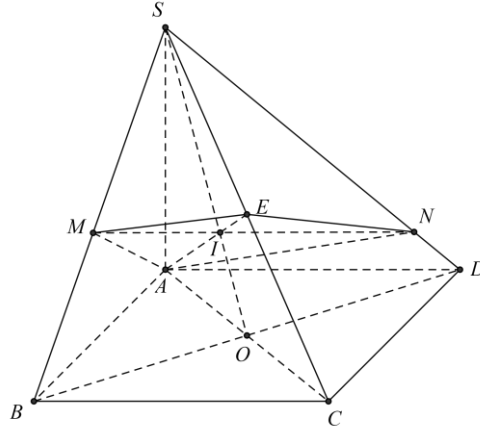
$$\text{Mặt khác: } \frac{V_{MNKQ}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{NKQ} \cdot d(M, NKQ)}{\frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot d(A, SBC)} = \frac{S_{NKQ}}{S_{SBC}} \cdot \frac{d(M, NKQ)}{d(A, SBC)} \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{NKQ}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{1}{2} KQ \cdot d(N, KQ)}{\frac{1}{2} BC \cdot d(S, BC)} = \frac{KQ}{BC} \cdot \frac{d(N, KQ)}{d(S, BC)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{d(M, NKQ)}{d(A, SBC)} = \frac{d(M, SBC)}{d(A, SBC)} = \frac{MS}{AS} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Thế (1) và (2) vào (*) ta được: $\frac{V_{MNKQ}}{V_{SABC}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{MNKQ} = \frac{V}{8} \Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{V}{8}$.

Câu 27: Chọn B



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SAC) , gọi I là giao điểm của AE và SO . Ta có SO, AE là 2 đường trung tuyến của $\triangle SAC$ nên I là trọng tâm của tam giác SAC .

Suy ra $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$ hay $\frac{SO}{SI} = \frac{3}{2}$.

Ta có

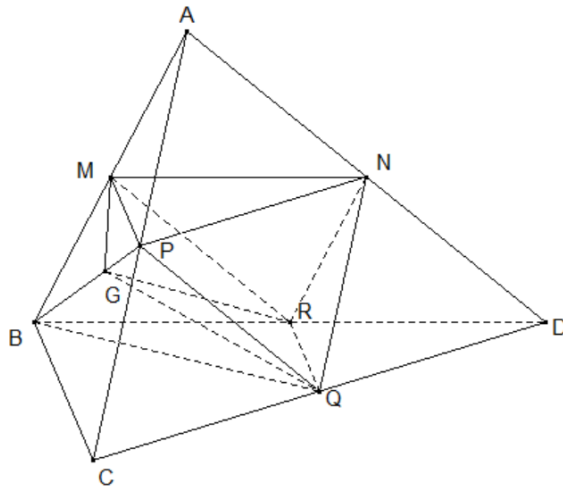
Mà $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} \geq 2\sqrt{\frac{SB}{SM} \cdot \frac{SD}{SN}}$ nên $3 \geq 2\sqrt{\frac{SB}{SM} \cdot \frac{SD}{SN}}$ hay $\frac{SM \cdot SN}{SB \cdot SD} \geq \frac{4}{9}$.

$$\frac{V_{S.AMEN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SE}{SC} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) \geq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{SM \cdot SN}{SB \cdot SD}} \geq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow V_{S.AMEN} \geq \frac{1}{3} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8 \text{ cm}^3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} \Leftrightarrow MN \parallel BD$.

Vậy thể tích khối chóp $S.AMEN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 cm^3 khi $MN \parallel BD$.

Câu 28: Chọn A



Ta có $V_{MNPQRG} = V_{G.MPQR} + V_{N.MPQR}$.

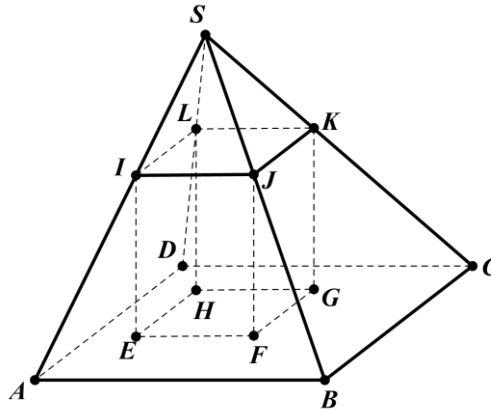
$$V_{G.MPQR} = \frac{1}{3}V_{B.MPQR} \text{ (do } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } GP = \frac{1}{3}BP)$$

$$= \frac{2}{3}V_{B.PQR} = \frac{2}{3}V_{P.BQR} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}V_{A.BQR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}V_{ABCD} = \frac{1}{12}V.$$

$$V_{N.MPQR} = 2V_{N.MPR} = 2V_{P.MNR} = 2 \cdot \frac{1}{2}V_{C.MNR} = \frac{1}{4}V_{C.ABD} = \frac{1}{4}V.$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQRG} = V_{G.MPQR} + V_{N.MPQR} = \frac{1}{12}V + \frac{1}{4}V = \frac{1}{3}V.$$

Câu 29: Chọn C



Theo đề bài ta suy ra được $IJKL.EFGH$ là hình hộp chữ nhật. Do đó: $V_{IJKL.EFGH} = IE.IJ.IL$.

Gọi $\frac{SI}{SA} = x$ ($0 < x < 1$). Ta có: $\frac{IE}{d(S, (ABCD))} = \frac{AI}{AS} = 1 - x \Leftrightarrow IE = (1 - x)d(S, (ABCD))$.

$$\frac{IJ}{AB} = \frac{SI}{SA} = x \Leftrightarrow IJ = x.AB. \quad \frac{IL}{AD} = \frac{SI}{SA} = x \Leftrightarrow IL = x.AD.$$

$$\text{Vậy } V_{IJKL.EFGH} = (1 - x)x^2 d(S, (ABCD)).AB.AD \Rightarrow V_{IJKL.EFGH} = (1 - x)x^2 .3V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Xét hàm số } y = (1 - x)x^2, \quad (0 < x < 1) \Rightarrow y' = -3x^2 + 2x. \text{ Có } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = \frac{2}{3}(n) \end{cases}$$

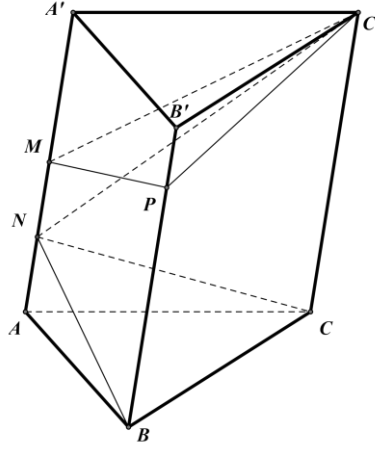
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$				$-\infty$

Vậy thể tích khối đa diện $IJKL.EFGH$ đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{SI}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2, b = 3.$

$$\Rightarrow T = a^2 + b^2 = 13.$$

Câu 30: Chọn A



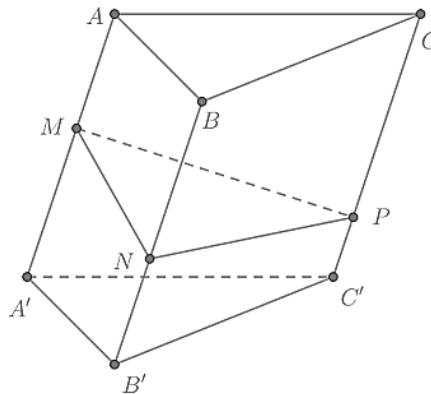
Ta có $\frac{V_{N.ABC}}{V_{A'.ABC}} = \frac{NA}{A'A} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{N.ABC} = \frac{1}{4} V_{A'.ABC} = \frac{1}{12} V$.

Mặt khác $\frac{V_{C'.A'B'PM}}{V_{C'.A'B'BA}} = \frac{S_{A'B'PM}}{S_{A'B'BA}} = \frac{A'M + B'P}{A'A + B'B} = \frac{\frac{1}{2}A'A + \frac{1}{5}A'A}{2A'A} = \frac{7}{20}$.

$\Rightarrow V_{C'.A'B'PM} = \frac{7}{20} V_{C'.A'B'BA} = \frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{7}{30} V$.

Do đó $V_1 = V - (V_{N.ABC} + V_{C'.A'B'PM}) = V - \left(\frac{1}{12} + \frac{7}{30} \right) V = \frac{41}{60} V$. Suy ra $\frac{V_1}{V} = \frac{41}{60}$.

Câu 31: Chọn B



Ta có $V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{M.NBCP} = \frac{1}{3} d(M, (ABC)) S_{ABC} + \frac{1}{3} d(M, (NBCP)) S_{BNPC}$

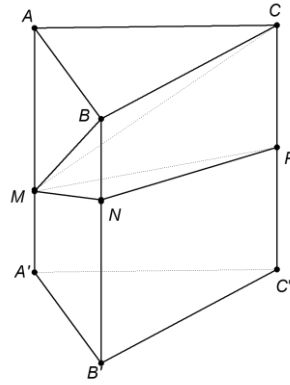
$= \frac{1}{3} \frac{AM}{AA'} d(A', (ABC)) S_{ABC} + \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) d(A', (NBCP)) S_{BB'C'C}$

$= \frac{1}{3} \frac{AM}{AA'} V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}}{3} V_{ABC.A'B'C'}$

Ta có $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{x+y}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x+y = \frac{5}{3} \Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{25}{36}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{5}{6}$.

Câu 32: Chọn C



Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có $V_1 = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$;

$$V_{M.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot d(M; (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} S_{\Delta ABC} \cdot d(A'; (ABC)) = \frac{2}{9} V;$$

$$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3} S_{\Delta A'B'C'} \cdot d(M; (A'B'C')) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta A'B'C'} \cdot d(M; (A'B'C')) = \frac{1}{9} V.$$

Từ giả thiết ta có $S_{B'C'PN} = \frac{7}{5} S_{BCPN}$.

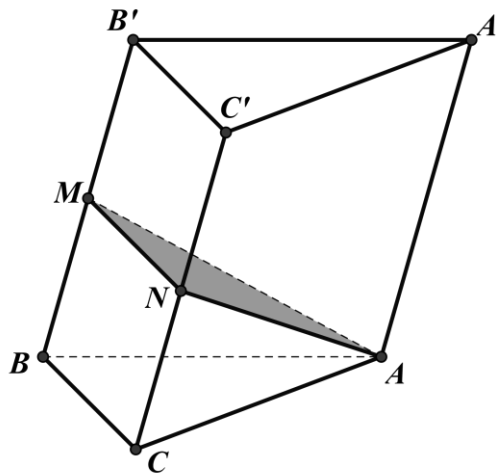
Suy ra

$$V_{M.B'C'PN} = \frac{7}{5} V_{M.BCPN} \Rightarrow V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} + V_{M.A'B'C'} + V_{M.B'C'PN}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2}{9} V + V_{M.BCPN} + \frac{1}{9} V + \frac{7}{5} V_{M.BCPN} \Leftrightarrow V_{M.BCPN} = \frac{5}{18} V.$$

$$\text{Do đó } V_1 = \frac{2}{9} V + \frac{5}{18} V = \frac{1}{2} V \Rightarrow V_1 = V - V_1 = \frac{1}{2} V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1..$$

Câu 33: Chọn B

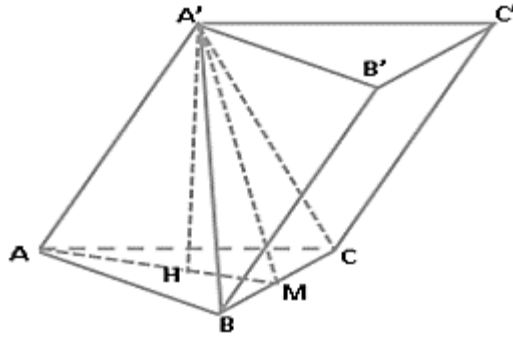


Ta có: $\frac{V_{ABCMN}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{1}{2}$ (hai hình chóp có chung đỉnh và đáy nhưng đáy này bằng $\frac{1}{2}$ đáy kia).

Ta có: $\frac{V_{A.BCC'B'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3}$ (vì $\frac{V_{A.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}$)

$$\text{Vậy } \frac{V_{ABCMN}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Câu 34: Chọn C



Gọi H là trung điểm của AM , tam giác $AA'M$ là tam giác đều nên $A'H$ vuông góc với AM . Theo giả thiết $(AA'M)$ vuông góc với (ABC) , nên $A'H$ vuông góc với (ABC) .

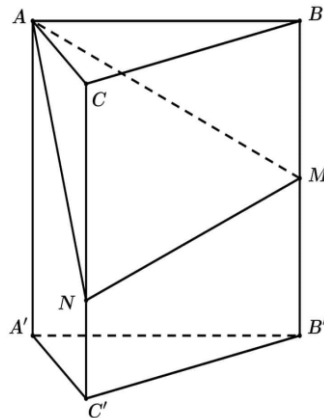
Tam giác ABC đều, cạnh bằng a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Nên tam giác $AA'M$ đều cạnh bằng $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó ta có: $V_{A'.BCC'B'} = V_{A'B'C'.ABC} - V_{A'.ABC} = A'H \cdot S_{ABC} - \frac{1}{3} \cdot A'H \cdot S_{ABC}$

$$= \frac{2}{3} \cdot A'H \cdot S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}. \text{ Vậy } V_{A'.BCC'B'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 35: Chọn D



Diện tích hình thang $BCNM$:

$$S_{BCNM} = \frac{1}{2}(BM + CN) \cdot d(B; CC') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}CC' + \frac{2}{3}CC' \right) \cdot d(B; CC') = \frac{7}{12} \cdot CC' \cdot d(B; CC')$$

$$= \frac{7}{12} S_{BCC'B'}$$

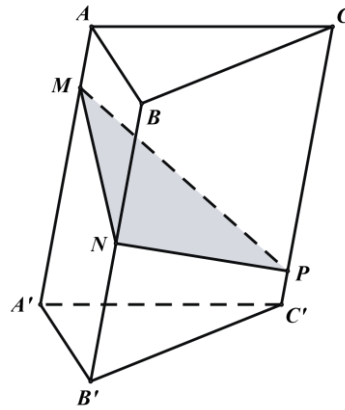
$$\text{Khi đó: } V_1 = \frac{7}{12} V_{A'.BCC'B'} = \frac{7}{12} (V - V_{A'.A'B'C'}) = \frac{7}{12} \left(V - \frac{1}{3} d(A; (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} \right)$$

$$= \frac{7}{12} \left(V - \frac{1}{3} V \right) = \frac{7V}{18}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_1}{V} = \frac{7}{18}$$

Cách 2: Áp dụng công thức

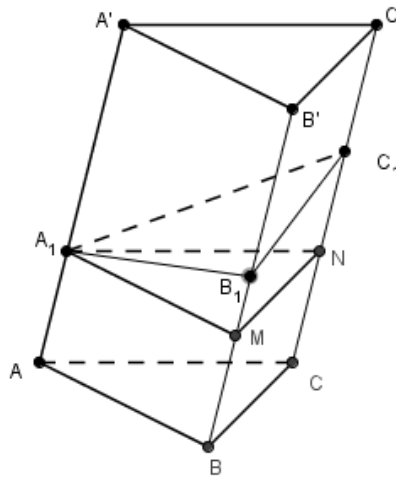
Nếu $\frac{AM}{AA'} = a; \frac{BN}{BB'} = b; \frac{CP}{CC'} = c$ thì $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}(a+b+c)$



Khi đó: $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} \left(\frac{CN}{CC'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{AA'}{AA'} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{7}{18}$.

Câu 36: Chọn C

Cách 1:



Gọi M, N lần lượt thuộc BB' và CC' sao cho $BM = CN = 2$. Khi đó ta có

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{ABC.A_1MN} + V_{A_1MNC_1B_1} = \frac{1}{3}V + \frac{x+y-4}{12}V_{A'BCC'B'} = \frac{1}{3}V + \frac{x+y-4}{12} \cdot \frac{2}{3}V.$$

Mặt khác theo giả thiết ta có $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}V$ nên suy ra

$$\frac{1}{3}V + \frac{x+y-4}{12} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{x+y-4}{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+y=7, \text{ kết hợp với } xy=12. \text{ Ta có}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}. \text{ Do đó } |x-y|=1.$$

Cách 2: Vận dụng công thức:

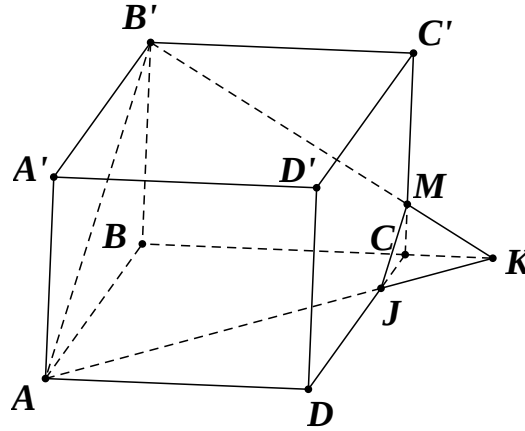
$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = \left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'} \right) V_{ABC.A'B'C'} = \left(\frac{\frac{2}{6} + \frac{x}{6} + \frac{y}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{x}{6} + \frac{y}{6}} \right) V_{ABC.A'B'C'} = \left(\frac{2+x+y}{18} \right) V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Giả thiết: } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow \frac{2+x+y}{18} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+y=7$$

kết hợp với $xy = 12$. Ta có

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Do đó } |x - y| = 1.$$

Câu 37: Chọn C



Gọi $K = MB' \cap BC$; $J = AK \cap CD$ và V là thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

$$\text{Ta có } \frac{CK}{B'C'} = \frac{CM}{MC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KM}{KB'} = \frac{KJ}{KA} = \frac{KC}{KB} = \frac{1}{4}.$$

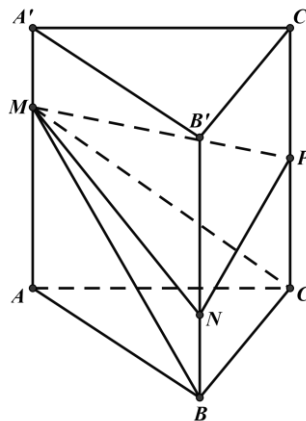
$$\text{Ta có } V_2 = V_{B'.ABK} - V_{K.CMJ}; \quad \frac{V_{K.CMJ}}{V_{K.BB'A}} = \frac{KC}{KB} \cdot \frac{KM}{KB'} \cdot \frac{KJ}{KA} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{63}{64} V_{B'.ABK}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} d(A, BK) \cdot BK = \frac{1}{2} d(A, BK) \cdot \frac{4}{3} BC = \frac{2}{3} S_{ABCD} \Rightarrow V_{B'.ABK} = \frac{2}{9} V.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{7}{32} V \Rightarrow V_1 = \frac{25}{32} V \Rightarrow k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{7}.$$

Câu 38: Chọn B



Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có $V_1 = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$.

$$V_{M.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(M, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} S_{ABC} \cdot d(A', (ABC)) = \frac{2}{9} V.$$

$$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3} S_{A'B'C'} \cdot d(M, (A'B'C')) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} S_{A'B'C'} \cdot d(A, (A'B'C')) = \frac{1}{9} V.$$

Do $BCC'B'$ là hình bình hành và $NB' = 2NB$, $PC = PC'$ nên $S_{B'C'PN} = \frac{7}{5}S_{BCPN}$.

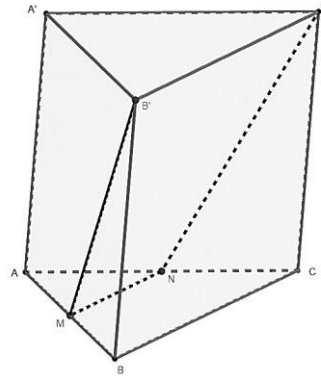
Suy ra $V_{M.B'C'PN} = \frac{7}{5}V_{M.BCPN}$, Từ đó $V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} + V_{M.A'B'C'} + V_{M.B'C'PN}$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2}{9}V + V_{M.BCPN} + \frac{1}{9}V + \frac{7}{5}V_{M.BCPN} \Leftrightarrow V_{M.BCPN} = \frac{5}{18}V.$$

Như vậy $V_1 = \frac{2}{9}V + \frac{5}{18}V = \frac{1}{2}V \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2}V$. Bởi vậy: $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

Câu 39: Chọn D

Đặc biệt hóa thành khối lăng trụ tam giác đều, diện tích đáy bằng S , chiều cao h .



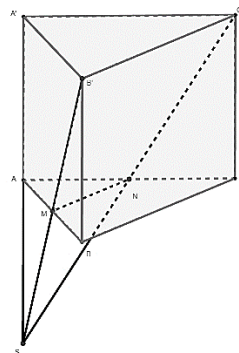
Ta có: mặt phẳng (ABC) và $(B'C'M)$ lần lượt chứa hai đường thẳng song song BC và $B'C'$. Mặt khác, điểm chung của chúng là M nên giao tuyến của (ABC) và $(B'C'M)$ là đường thẳng qua M , song song với BC , cắt AC tại N .

Ta có V_1 là thể tích khối chóp cụt $AMN.A'B'C'$, do đó:

$$V_1 = \frac{1}{3}h\left(S + S' + \sqrt{S.S'}\right) = \frac{1}{3}h\left(S + \frac{1}{4}S + \sqrt{\frac{1}{4}S^2}\right) = \frac{1}{3}h \cdot \frac{7}{4}S = \frac{7}{12}Sh = \frac{7}{12}V_{ABCA'B'C'}$$

Suy ra $V_2 = \frac{5}{12}V$. Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$

Cách 2: Kéo dài 3 đường thẳng $AA', B'M, C'N$ cắt nhau tại S

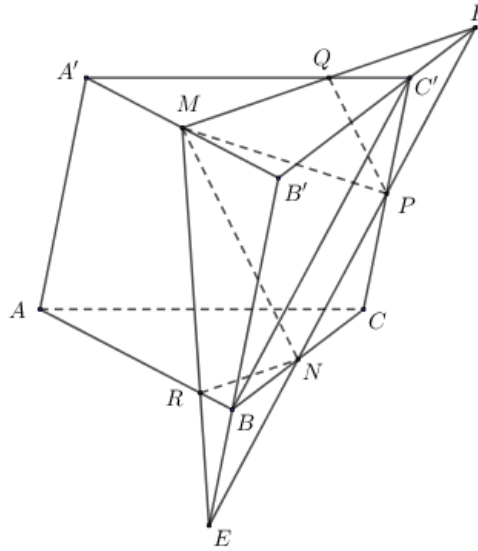


$$\text{Ta có } \frac{V_{SAMN}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SM}{SB'} \cdot \frac{SN}{SC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{SAMN} = \frac{1}{8}V_{SA'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{7}{8}V_{SA'B'C'} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA' \cdot S_{A'B'C'} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2AA' \cdot S = \frac{7}{12}hS = \frac{7}{12}V_{ABCA'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{5}{12}V_{ABCA'B'C'}. \text{ Do đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$$

Câu 40: Chọn C



Gọi S và h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C' \Rightarrow V = Sh$.

Gọi $NP \cap BB' = E, NP \cap B'C' = F, MF \cap A'C' = Q, ME \cap AB = R$

Suy ra mặt phẳng (MNP) cắt khối lăng trụ theo thiết diện là $MRNPQ$.

Ta có $BEPC'$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = PC' = \frac{1}{2}CC' = \frac{1}{2}BB'$, tương tự ta có $BNFC'$ là hình bình

hành $\Rightarrow C'F = BN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B'C'$.

$$+) S_{MB'F} = \frac{1}{2} \cdot B'M \cdot B'F \cdot \sin \angle MB'F = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'C' \cdot \sin \angle A'B'C' = \frac{3}{4}S$$

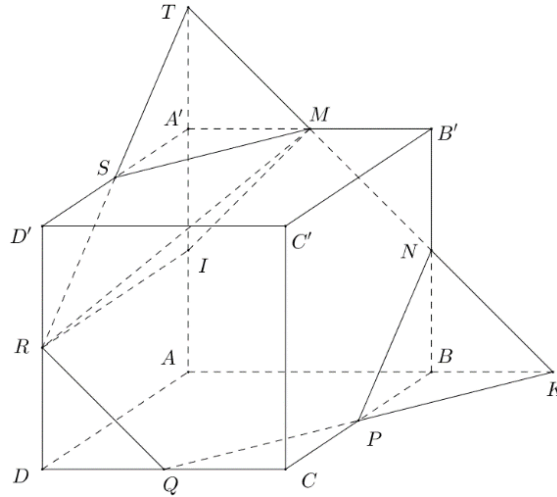
$$+) d(E, (A'B'C')) = \frac{3}{2}d(B, (A'B'C')) = \frac{3}{2}h$$

$$\Rightarrow V_{E.B'MF} = \frac{1}{3} \cdot d(E, (A'B'C')) \cdot S_{B'MF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}h \cdot \frac{3}{4}S = \frac{3}{8}V.$$

$$\text{Lại có } \frac{V_{E.BNR}}{V_{E.B'FM}} = \left(\frac{EB}{EB'} \right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{E.BNR} = \frac{1}{27} \cdot \frac{3}{8}V = \frac{1}{72}V$$

$$\text{Ta cũng có } \frac{V_{F.C'PQ}}{V_{F.B'EM}} = \frac{FC'}{FB'} \cdot \frac{FP}{FE} \cdot \frac{FQ}{FM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{F.C'PQ} = \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{8}V = \frac{1}{48}V.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = V_{E.B'MF} - (V_{E.BNR} + V_{F.C'PQ}) = \frac{49}{144}V. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V} = \frac{49}{144}.$$

Câu 41: Chọn A

Không mất tính tổng quát, giả sử độ dài cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là 1.

Gọi Q, R, I lần lượt là trung điểm của các cạnh DC, DD', AA' .

Ta có $QR \parallel MN \parallel D'C \parallel A'B$ nên M, N, Q, R đồng phẳng.

$(MNQR) \cap (ABB'A') = MN$. Trong $(ABB'A')$, ta có $IM \perp MN$.

$RI \perp (ABB'A') \Rightarrow RI \perp MN$. Do đó, $MN \perp (IMR) \Rightarrow MR \perp MN$.

Suy ra $\beta = ((MNQR), (ABB'A')) = (IM, MR) = RMI$, $\tan \beta = \frac{RI}{MI} = \sqrt{2}$. Như vậy, mặt phẳng

(P) chính là mặt phẳng $MNQR$.

Gọi $T = MN \cap AA', K = MN \cap AB, P = QK \cap BC, S = RT \cap A'D'$. Khi đó, thiết diện của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (P) là lục giác $MNPQRS$.

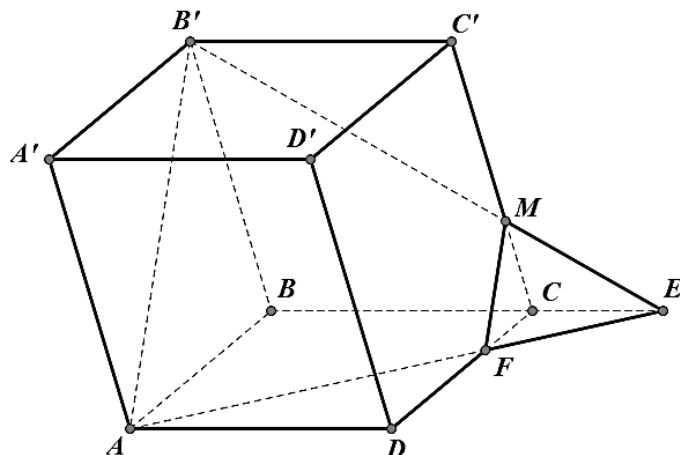
$$V_1 = V_{A.MNPQRS} + V_{AA'MS} + V_{ADRQ} + V_{ABNP}$$

$$V_2 = V_{C'.MNPQRS} + V_{C'D'RS} + V_{C'CPQ} + V_{C'MNB'}$$

Để thấy $V_{A.MNPQRS} = V_{C'.MNPQRS}$ và

$$V_{AA'MS} = V_{ADRQ} = V_{ABNP} = V_{C'D'RS} = V_{C'CPQ} = V_{C'MNB'} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{24}.$$

$$\text{Do đó, } V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1.$$

Câu 42: Chọn D

Chủ đề 04: Tỷ lệ thể tích khối đa diện

Gọi $E = B'M \cap BC$, $F = AE \cap DC$.

Gọi V là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có: $V = S_{ABB'A'} \cdot d(C, (ABB'A'))$.

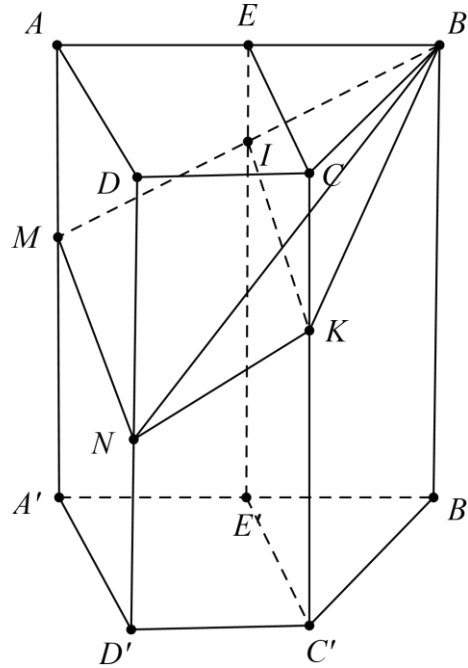
Ta có: $V_{E.ABB'} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABB'} \cdot d(E, (ABB')) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABB'A'} \cdot \frac{3}{2} d(C, (ABB'A')) = \frac{1}{4} V$.

$$V_{E.FCM} = \frac{EF}{EA} \cdot \frac{EC}{EB} \cdot \frac{EM}{EB'} \cdot V_{E.ABB'} = \frac{1}{27} V_{E.ABB'} = \frac{1}{108} V.$$

Suy ra: $V_2 = V_{E.ABB'} - V_{E.FCM} = \frac{1}{4} V - \frac{1}{108} V = \frac{13}{54} V$. Và $V_1 = V - V_2 = V - \frac{13}{54} V = \frac{41}{54} V$.

$$\text{Vậy: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{41}{13}.$$

Câu 43: Chọn B



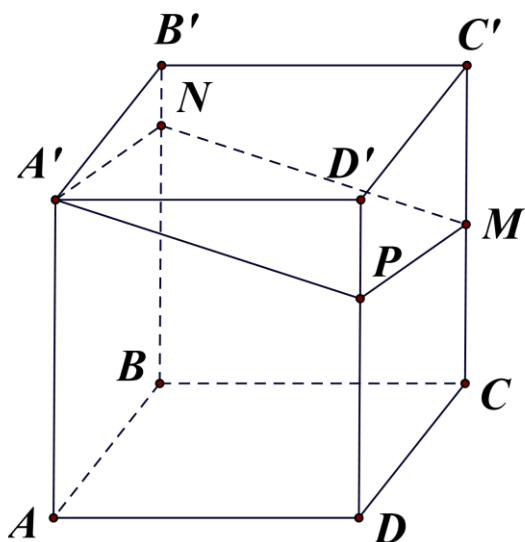
Gọi E, E' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$; $I = BM \cap EE'$

$$\begin{cases} (BMN) \cap (ECC'E') = IK \\ (BMN) \cap (ADD'A') = MN \Rightarrow IK \parallel MN \\ (ECC'E') \parallel (ADD'A') \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{EI}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EI}{\frac{3}{7}AA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EI}{AA'} = \frac{3}{14} \Rightarrow \frac{EI}{EE'} = \frac{3}{14}$$

$$\text{Lại có } \frac{AM}{AA'} + \frac{CK}{CC'} = \frac{EI}{EE'} + \frac{DN}{DD'} \Rightarrow \frac{CK}{CC'} = \frac{5}{14}.$$

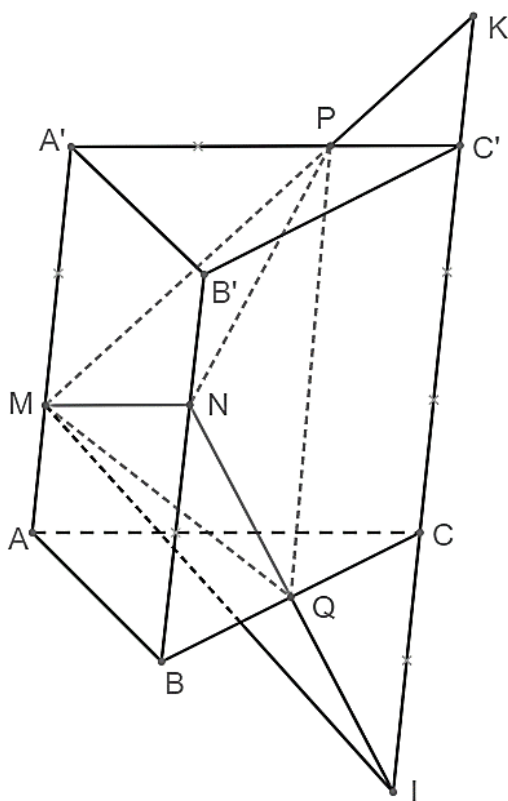
$$\begin{aligned} V_{ADCE.MNKI} &= V_{AECD.MKN} + V_{BEIKC} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{DN}{DD'} + \frac{CK}{CC'} + \frac{EI}{EE'} \right) V_{AECD.A'E'C'D'} + \frac{1}{3} \left(\frac{CK}{CC'} + \frac{EI}{EE'} \right) V_{ECBE'C'B'} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{7} V + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} V = \frac{41}{126} V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{41}{85} \Rightarrow a = 41, b = 85 \Rightarrow a + 2b = 211 \end{aligned}$$



Áp dụng công thức $\frac{V_1}{V} = \frac{2\left(\frac{A'A'}{AA'} + \frac{C'M}{C'C}\right)}{4}$. Ta có $\frac{A'A'}{AA'} = 0, \frac{C'M}{C'C} = \frac{1}{2}$.

Khi đó: $\frac{V_1}{V} = \frac{2\left(0 + \frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{1}{4}.$

Câu 45: Chọn A



Trong $(AA'C'C)$, gọi $K = MP \cap CC'$. Trong $(BB'C'C)$, gọi $I = NQ \cap CC'$.

Ta có:

$$d(P;(MNQ)) = \frac{2}{3}d(K;(MNQ)) \Rightarrow V_{MNPQ} = V_{P.MNQ} = \frac{2}{3}V_{K.MNQ} = \frac{2}{3}V_{Q.MNK}.$$

$$d(Q;(MNK)) = \frac{1}{2}d(I;(MNK)) \Rightarrow V_{Q.MNK} = \frac{1}{2}V_{I.MNK} = \frac{1}{2}V_{M.INK}.$$

$$d(M;(INK)) = d(A;(INK)) \Rightarrow V_{M.INK} = V_{A.INK} \Rightarrow V_{Q.MNK} = \frac{1}{2}V_{A.INK} = \frac{1}{2}V_{N.AKI}.$$

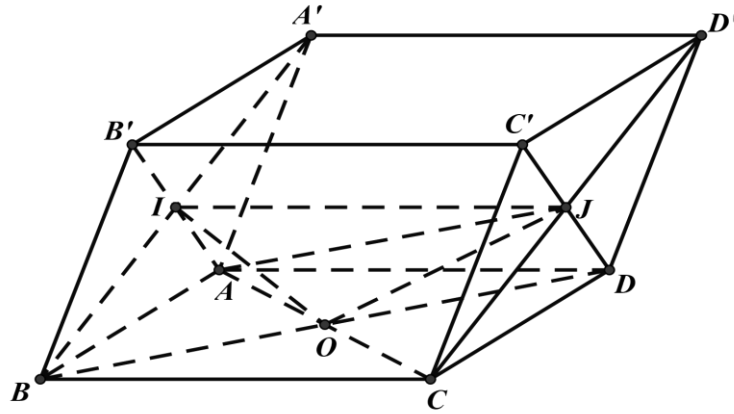
$$d(N;(AKI)) = d(B;(AKI)) \Rightarrow V_{N.AKI} = V_{B.AKI} \Rightarrow V_{Q.MNK} = \frac{1}{2}V_{B.AKI} = \frac{1}{2}V_{I.ABK}.$$

$$d(I;(ABK)) = \frac{3}{2}d(C;(ABK)) \Rightarrow V_{I.ABK} = \frac{3}{2}V_{C.ABK} \Rightarrow V_{Q.MNK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}V_{C.ABK} = \frac{3}{4}V_{K.ABC}.$$

$$d(K;(ABC)) = \frac{4}{3}d(C';(ABC)) \Rightarrow V_{K.ABC} = \frac{4}{3}V_{C'.ABC} \Rightarrow V_{Q.MNK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}V_{C'.ABC} = V_{C'.ABC} = \frac{1}{3}V.$$

$$V_{MNPQ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{2}{9}V.$$

Câu 46: Chọn C



Ta có $AI^2 = \frac{A'A^2 + AB^2}{2} - \frac{A'B^2}{4} \Rightarrow A'B^2 = 2(A'A^2 + AB^2) - 4AI^2 = 3a^2 \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$

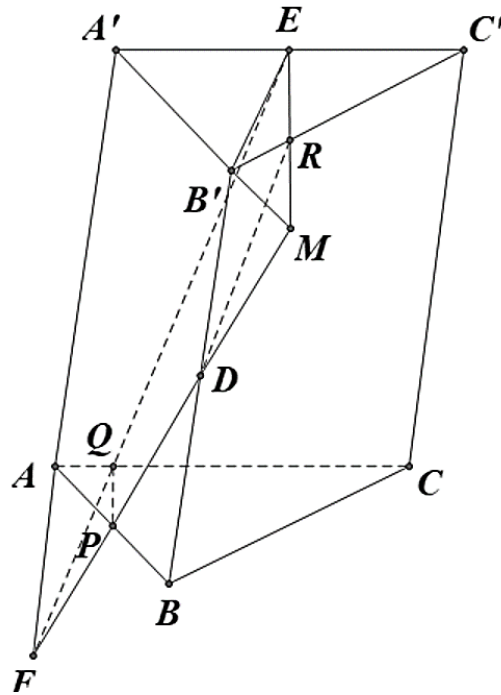
Do $A'B^2 + AB^2 = A'A^2$ nên tam giác $A'AB$ vuông tại $B \Rightarrow S_{A'AB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Theo đề $\left((ABB'A'), (A'B'C'D')\right) = 60^\circ$, nên suy ra $V_{A'ABC} = \frac{2S_{A'AB} \cdot S_{ABC} \cdot \sin 60^\circ}{3AB} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

$$V_{AOIJ} = \frac{1}{3}d(O;(IAJ)) \cdot S_{IAJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d(B;(B'AD)) \cdot \frac{1}{2}S_{B'AD} = \frac{1}{4}V_{B'ABD} = \frac{1}{4}V_{A'ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}$$

Câu 47: Chọn A



Gọi $A'B' \cap ME = R$.

Kéo dài MD cắt AB, AA' lần lượt tại P, F .

Gọi $EF \cap AC = Q$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $ERDPQ$. Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$.

Ta có: $V_1 = V_{F.A'EM} - V_{F.AQP} - V_{M.B'DR}.$

$$\text{Ta có: } S_{A'ME} = \frac{1}{2}.d(E; A'M).A'M = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.d(C'; A'B').\frac{3}{2}.A'B' = \frac{3}{4}.S_{A'B'C'}$$

Lại có D là trung điểm của BB' mà $\overrightarrow{B'M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{B'A'} \Rightarrow P$ là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \frac{FA}{FA'} = \frac{AP}{A'M} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FA'}{AA'} = \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{F.A'ME}}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(F; (A'B'C')) \cdot S_{A'ME}}{d(A; (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{FA'}{AA'} \cdot \frac{S_{A'ME}}{S_{A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \Rightarrow V_{F.A'ME} = \frac{3}{8} V.$$

$$\text{Ta có: } \Delta APQ \sim \Delta A'ME \Rightarrow \frac{S_{APQ}}{S_{A'ME}} = \left(\frac{AP}{A'M} \right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{APQ} = \frac{1}{9} S_{A'ME} = \frac{1}{12} S_{A'B'C'} = \frac{1}{12} S_{ABC}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{F.APQ}}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(F; (ABC)) \cdot S_{APQ}}{d(A'; (ABC)) \cdot S_{ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{FA}{AA'} \cdot \frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{72} \Rightarrow V_{F.APQ} = \frac{1}{72} V$$

Áp dụng định lí Mennelaus, ta có

$$\frac{MA'}{MB'} \cdot \frac{RB'}{RC'} \cdot \frac{EC'}{EA'} = 1 \Rightarrow \frac{RB'}{RC'} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{CE}{CA} \cdot \frac{BA}{BM} \cdot \frac{RM}{RE} = 1 \Rightarrow \frac{RM}{RE} = 1 \Rightarrow \frac{RM}{ME} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{B'RM}}{S_{A'ME}} = \frac{MB'}{MA'} \cdot \frac{RM}{ME} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{B'RM} = \frac{1}{6} \cdot S_{A'ME} = \frac{1}{8} \cdot S_{A'B'C'}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{D.B'RM}}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(D; (A'B'C')) \cdot S_{B'RM}}{d(B; (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{DB'}{BB'} \cdot \frac{S_{B'RM}}{S_{A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48} \Rightarrow V_{D.B'RM} = \frac{1}{48} V$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{49}{144} V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{49}{95} \Rightarrow a = 49, b = 95 \Rightarrow 2a + b = 193.$$

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Áp dụng các phương pháp tính thể tích thông qua tam giác vuông; các loại góc và khoảng cách trong không gian cũng như các công thức tính thể tích khối chóp, khối lăng trụ.

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa biến.

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho các số thực dương

- $a + b \geq 2\sqrt{ab} \rightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ hoặc $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$
- $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \rightarrow abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$ hoặc $abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$
- Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski

Với hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ thì ta có:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

Cách 3: Phương pháp khảo sát hàm số $f(x)$ trên khoảng xác định (đạo hàm và lập bảng biến thiên)

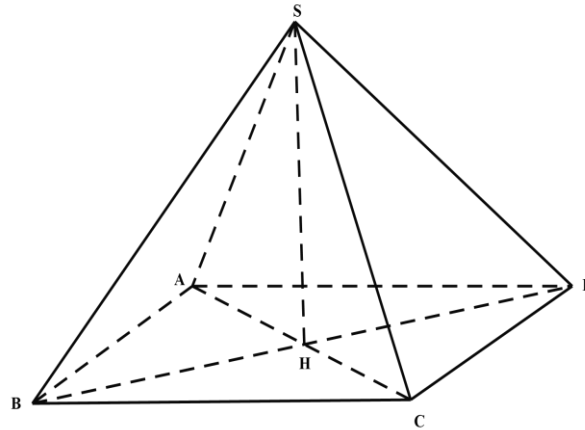
B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a\sqrt{3}, SA = SB = SC = SD = 2a$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

- A. $\frac{13}{12}a^3$. B. $\frac{13\sqrt{2}}{12}a^3$. C. $\frac{13\sqrt{6}}{12}a^3$. D. $\frac{13\sqrt{3}}{12}a^3$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi $AD = x (x > 0)$. Ta có $AC = \sqrt{x^2 + 3a^2} \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3a^2}$

Khi đó: $SH = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2 + 3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{13a^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$.

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}x.\sqrt{\frac{13a^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.x.\sqrt{\frac{13a^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$.

Đặt $f(x) = \frac{x}{2}.\sqrt{\frac{13a^2}{4} - \frac{x^2}{4}} \leq \frac{\frac{x^2}{4} + \frac{13a^2}{4} - \frac{x^2}{4}}{2} = \frac{13a^2}{8}$

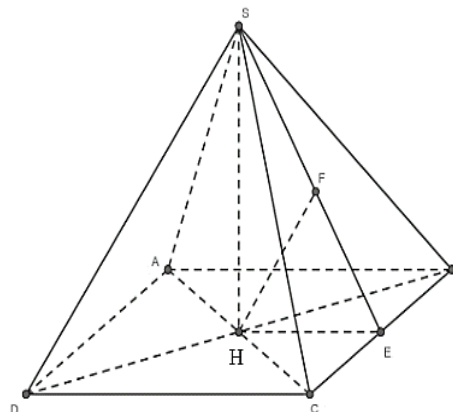
Thể tích lớn nhất của khối chóp $V = \frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{13a^2}{8} = \frac{13\sqrt{3}a^3}{12}$.

CÂU 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a , góc hợp bởi đường cao SH của hình chóp và mặt bên bằng α . Tìm α để thể tích $S.ABCD$ là lớn nhất.

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 75° .

LỜI GIẢI

Chọn C



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều có đường cao SH nên H là tâm của hình vuông $ABCD$.

Vẽ $HE \perp BC (E \in BC)$, $HF \perp SE (F \in SE)$. Ta chứng minh được $HF \perp (SBC)$

$\Rightarrow SF$ là hình chiếu vuông góc của SH lên $(SBC) \Rightarrow (SH; (SBC)) = (SH; SF) = FSH = ESH = \alpha$.

$$\text{Đặt } x = BH \Rightarrow \begin{cases} x = BH = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} \\ SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = x\sqrt{2} \\ SH = \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}.$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{a^2 - x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ a^2 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < a.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là: } V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot (x\sqrt{2})^2 = \frac{2}{3}x^2\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in (0; a)$$

$$\text{Xét hàm số } V(x) = \frac{2}{3}x^2\sqrt{a^2 - x^2}, x \in (0; a) \text{ có } V'(x) = \frac{2x}{3} \cdot \frac{2a^2 - 3x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0; a) \\ 2a^2 - 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2}{3}}a \in (0; a) \\ x = -\sqrt{\frac{2}{3}}a \notin (0; a) \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Bảng biến thiên của hàm $V(x)$ trên $(0; a)$:

x	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}a$	a
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, thể tích V đạt giá trị lớn nhất khi $x = \sqrt{\frac{2}{3}}a \Rightarrow BH = \sqrt{\frac{2}{3}}a$.

$$\Rightarrow \begin{cases} SH = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \\ HE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \end{cases}. \text{ Xét tam giác vuông } SHE \text{ có } \tan \alpha = \tan ESH = \frac{HE}{SH} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

CÂU 3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, một cạnh của hình bình hành bằng a và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là

A. $\frac{7a^3}{12}$.

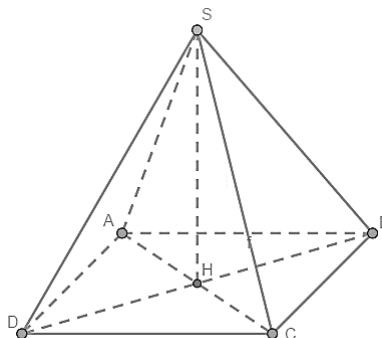
B. $8a^3$.

C. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

D. $2\sqrt{6}a^3$.

LỜI GIẢI

Chọn A



Chủ đề 06: Cực trị hình học không gian

Gọi $H = AC \cap BD$. Vì $SA = SB = SC = SD$ nên $HA = HB = HC = HD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật và H là hình chiếu vuông góc của S xuống $(ABCD)$

Giả sử $AB = a$. Đặt $AD = x$. Khi đó $S_{ABCD} = ax$.

$$AH = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}; SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4}} = \frac{\sqrt{7a^2 - x^2}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{7a^2 - x^2}}{2} \cdot ax = \frac{ax\sqrt{7a^2 - x^2}}{6} \leq \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{(x^2 + 7a^2 - x^2)}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} \leq \frac{7a^3}{12}. \text{ Dấu xảy ra khi } x = \sqrt{7a^2 - x^2} \text{ hay } x = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Vậy thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là $\frac{7a^3}{12}$ khi $x = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

CÂU 4. Một tứ diện $ABCD$ có $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$ là hai tam giác đều cạnh a , cạnh AD thay đổi. Khi thể tích tứ diện đạt giá trị lớn nhất, gọi φ giữa hai mặt (ADB) và (ADC) . Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

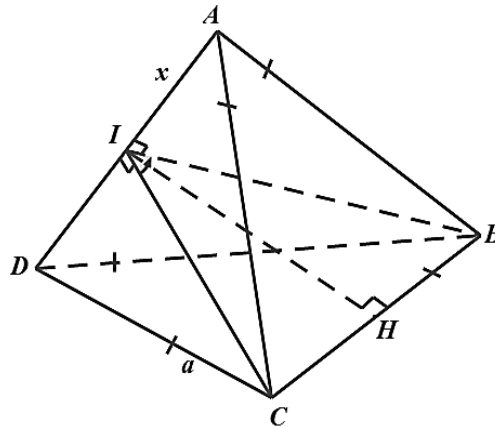
B. $\cos\varphi = \frac{5}{7}$.

C. $\cos\varphi = \frac{6}{7}$.

D. $\cos\varphi = \frac{1}{5}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AD . Khi đó $AD \perp IC$ và $AD \perp IB$. Suy ra góc φ giữa hai mặt (ADB) và (ADC) thỏa mãn $|\cos CIB| = \cos\varphi$.

$$\text{Đặt } IA = x (x > 0) \Rightarrow IC = IB = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow V_{ABCD} = 2 \cdot V_{AICB} = \frac{1}{3} x(a^2 - x^2) \sin\varphi \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle IBC} = \frac{1}{2} \cdot IB \cdot IC \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} d(I, BC) \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - x^2) \cdot \sin\varphi = a \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2} \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{a \cdot \sqrt{3a^2 - 4x^2}}{2(a^2 - x^2)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2):

$$V_{ABCD} = 2 \cdot V_{AICB} = \frac{1}{3} x(a^2 - x^2) \sin\varphi = \frac{1}{3} x(a^2 - x^2) \frac{a \sqrt{3a^2 - 4x^2}}{2(a^2 - x^2)} = \frac{ax\sqrt{3a^2 - 4x^2}}{6} = \frac{a\sqrt{3a^2x^2 - 4x^4}}{6}.$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = -4x^4 + 3a^2x^2, (x > 0) \Rightarrow f'(x) = -16x^3 + 6a^2x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

x	0	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$f\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$	$-\infty$	

Vậy V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Suy ra: $IC = IB = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

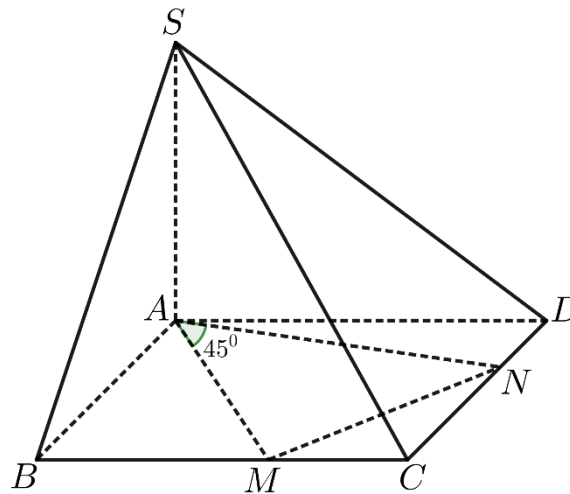
Ta có: $\cos\varphi = \frac{|IC^2 + IB^2 - CB^2|}{2 \cdot IC \cdot IB} = \frac{1}{5}$ (hoặc $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{5}$)

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là hai điểm di chuyển trên các cạnh BC và DC sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$.

- A. $\frac{(\sqrt{2}-1)a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{(\sqrt{3}-1)a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn A



Đặt $\angle BAM = \alpha \Rightarrow \angle NAD = 45^\circ - \alpha$. Ta có: $AM = \frac{a}{\cos\alpha}$; $AN = \frac{a}{\cos(45^\circ - \alpha)}$.

$$V_{S.AMN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{6} SA \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{6} a \cdot \frac{a}{\cos\alpha} \cdot \frac{a}{\cos(45^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{S.AMN} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6 [\cos 45^\circ + \cos(45^\circ - 2\alpha)]}$$

$V_{S.AMN}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos(45^\circ - 2\alpha)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1 $\Leftrightarrow \alpha = 22,5^\circ$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $V_{S.AMN}$ là $V_{S.AMN} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)} = \frac{(\sqrt{2}-1)a^3}{3}$.

CÂU 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích toàn phần bằng 18 và độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{18}$. Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $V_{\max} = 8$.

B. $V_{\max} = 3$.

C. $V_{\max} = 4$.

D. $V_{\max} = \sqrt{8}$.

LỜI GIẢI

Chọn C

Gọi a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

Theo giả thiết ta có: Diện tích toàn phần $S_{tp} = 2(ab + bc + ca) = 18 \Rightarrow ab + bc + ca = 9$.

Độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{18} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 18$.

Từ đó: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 36$ suy ra $a + b + c = 6$.

Ta có $b + c = 6 - a \Rightarrow bc = 9 - a(b + c) = 9 - a(6 - a)$.

Lại có: $(b + c)^2 \geq 4bc \Rightarrow (6 - a)^2 \geq 4[9 - a(6 - a)] \Leftrightarrow 3a^2 - 12a \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 4$.

Tương tự ta cũng có $0 < b \leq 4, 0 < c \leq 4$. Khi đó $V = abc = a[9 - a(6 - a)] = a^3 - 6a^2 + 9a$.

Khảo sát hàm số $f(a) = a^3 - 6a^2 + 9a$ với $0 < a \leq 4$ có $f'(a) = 3a^2 - 12a + 9$

Bảng biến thiên:

a	0		1		3		4	
$f'(a)$		+	0	-	0	+		
$f(a)$								

Vậy $V_{\max} = 4$. (Bộ giá trị của a, b, c là $(4; 1; 1)$ và các hoán vị).

CÂU 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác đều và thể tích bằng V . Gọi E, F, I là các điểm lần lượt di động trên các cạnh AB, BC, CA sao cho $AE = BF = CI$. Thể tích khối chóp $A'.EFI$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{V}{9}$.

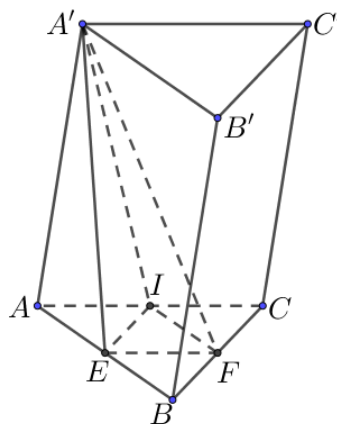
B. $\frac{V}{6}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{V}{12}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Tam giác ABC đều và $AE = BF = CI$ nên $\triangle AEI = \triangle BFE = \triangle CIF$ suy ra $S_{\triangle AEI} = S_{\triangle BFE} = S_{\triangle CIF}$.

Ta có: $\frac{V_{A'.EFI}}{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{\triangle EFI}}{S_{\triangle ABC}}$.

Gọi cạnh của tam giác ABC là a ($a > 0$), $AE = BF = CI = x$ ($0 \leq x \leq a$).

Khi đó: $\frac{S_{\triangle AEI}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AI}{AC} = \frac{x(a-x)}{a^2} \Leftrightarrow S_{\triangle AEI} = \frac{x(a-x)}{a^2} \cdot S_{\triangle ABC}$.

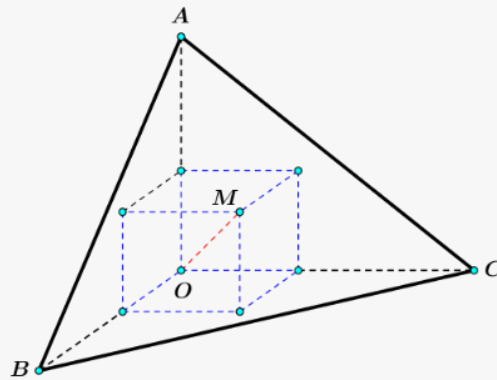
Suy ra: $S_{\triangle EFI} = S_{\triangle ABC} - 3S_{\triangle AEI} = \frac{a^2 - 3ax + 3x^2}{a^2} \cdot S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle EFI}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a^2 - 3ax + 3x^2}{a^2}$

Vậy $\frac{V_{A'.EFI}}{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{\triangle EFI}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 - 3ax + 3x^2}{a^2} \Leftrightarrow V_{A'.EFI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 - 3ax + 3x^2}{a^2} \cdot V$.

$V_{A'.EFI}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi biểu thức $a^2 - 3ax + 3x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; a]$

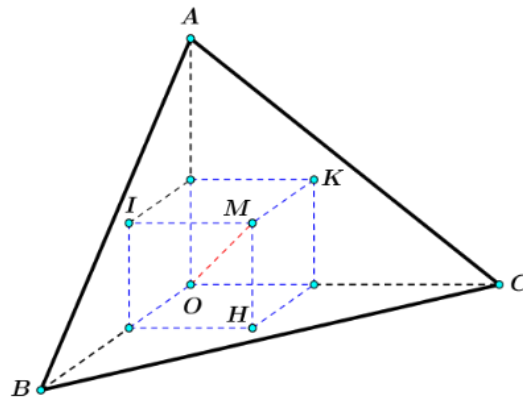
Ta có: $\min_{[0; a]} (a^2 - 3ax + 3x^2) = \frac{a^2}{4}$ khi $x = \frac{a}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $V_{A'.EFI}$ là $\frac{V}{12}$.

CÂU 8. Một khối gỗ dạng hình chóp $O.ABC$ CÓ OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $OA = 3cm, OB = 6cm, OC = 12cm$. Trên mặt đáy ABC người ta đánh dấu một điểm M sau đó người cắt gọt khối gỗ để thu được một khối hộp chữ nhật có OM là một đường chéo, đồng thời hình hộp có ba mặt trên ba mặt bên của hình chóp (tham khảo hình vẽ). Khối hộp chữ nhật thu được có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $12cm^3$.B. $36cm^3$.C. $24cm^3$.D. $8cm^3$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu của điểm M lên mp $(OAB), (OBC), (OCA)$

Ta có $V_{O.ABC} = V_{M.OAB} + V_{M.OBC} + V_{M.OCA}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot MI \cdot OA \cdot OB + \frac{1}{6} \cdot MI \cdot OB \cdot OC + \frac{1}{6} \cdot MI \cdot OC \cdot OA \Leftrightarrow MI + 4MH + 2MK = 12$$

Khi đó thể tích khối hộp chữ nhật $V = MI \cdot MH \cdot MK = \frac{1}{8} MI \cdot (4MH) \cdot (2MK)$

$$\Leftrightarrow V \leq \frac{1}{8} \left(\frac{MI + 4MH + 2MK}{3} \right)^3 \Leftrightarrow V \leq \frac{1}{8} \cdot 4^3 \Leftrightarrow V \leq 8$$

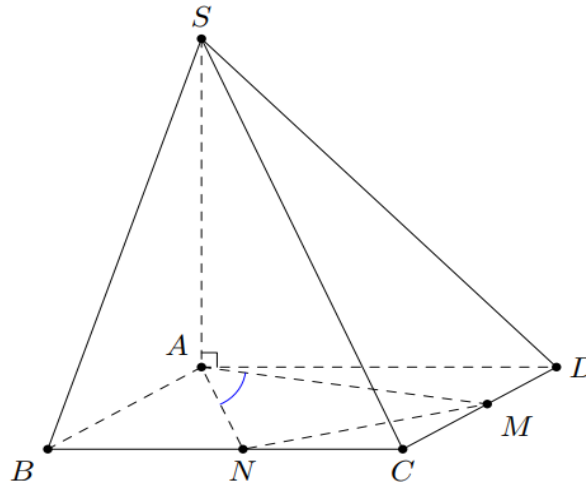
Vậy $V_{\max} = 8$ khi $MI = 4MH = 2MK \Leftrightarrow MI = 1cm, MH = 4cm, MK = 2cm$.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho góc MAN bằng 45° . Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

- A. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

LỜI GIẢI

Chọn A



Đặt $BAN = \alpha$ suy ra $MAD = 45^\circ - \alpha$.

Khi đó $AN = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$ và $AM = \frac{AD}{\cos(45^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\cos(45^\circ - \alpha)}$.

Do đó diện tích tam giác AMN bằng $B_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos(45^\circ - \alpha)}$.

Thể tích $S.AMN$ bằng $V_{S.AMN} = \frac{1}{3} B_{AMN} \cdot SA = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos(45^\circ - \alpha)}$.

Thể tích của khối chóp $S.AMN$ nhỏ nhất khi $\cos \alpha \cdot \cos(45^\circ - \alpha)$ lớn nhất.

Xét $f(\alpha) = \cos \alpha \cdot \cos(45^\circ - \alpha)$ trong đó $\alpha \in (0^\circ; 45^\circ)$.

Ta có $f'(\alpha) = \sin(45^\circ - 2\alpha)$; $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{45^\circ}{2}$.

Bảng biến thiên

α	0°	$\frac{45^\circ}{2}$	45°
f'	+	0	-
f	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{\alpha \in [0^\circ; 45^\circ]} f(\alpha) = f\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Vậy thể tích nhỏ nhất của $S.AMN$ bằng $V_{S.AMN} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{1}{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM . Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích chóp $S.ABH$ lớn nhất là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

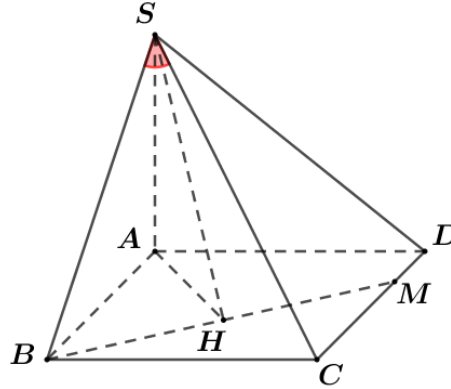
B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SC, (SAB)) = (SC, SB) = BSC = 30^\circ$.

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B , ta có $SB = BC \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SBA$ vuông tại A , ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} BH \perp SH \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAH) \Rightarrow BH \perp AH$; $V_{S.ABH} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABH} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot HA \cdot HB$.

Lại có $HA \cdot HB \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{1}{2} (HA^2 + HB^2) = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \Rightarrow V_{S.ABH} \leq \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB^2 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$.

Dấu “=” xảy ra khi $HA = HB \Rightarrow \triangle AHB$ vuông cân tại H , suy ra $ABH = 45^\circ \Rightarrow M \equiv D$.

Vậy $\max V_{S.ABH} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ khi $M \equiv D$.

CÂU 11. Cho tứ diện đều có cạnh bằng 3, điểm M thuộc miền trong đa diện, gọi $d_1; d_2; d_3; d_4$ là khoảng cách từ M đến 4 mặt của tứ diện. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$?

A. $P_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

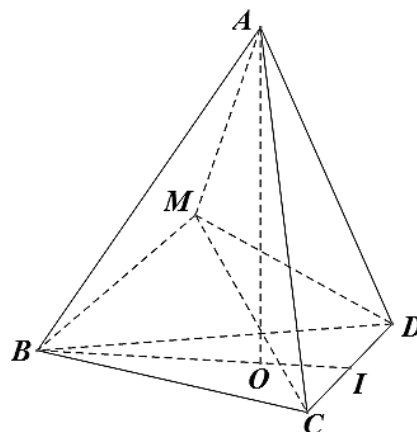
B. $P_{\min} = \sqrt{3}$.

C. $P_{\min} = \frac{3}{2}$.

D. $P_{\min} = \sqrt{6}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Chủ đề 06: Cực trị hình học không gian

Gọi tứ diện đều là $ABCD$, O là trọng tâm tam giác $\triangle BCD$, chiều cao tứ diện là h , I là trung điểm CD

$$\text{Khi đó: } h = AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{2}{3}BI\right)^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = V_{MABC} + V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} \Leftrightarrow 1 = \frac{V_{MABC}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MACD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MABD}}{V_{ABCD}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{d_1}{h} + \frac{d_2}{h} + \frac{d_3}{h} + \frac{d_4}{h} \Leftrightarrow d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = \sqrt{6}.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^2 \leq 4.(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)$

$$\Leftrightarrow 4P \geq (\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{2}. \text{ Vậy } P_{\min} = \frac{3}{2}. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\Leftrightarrow M$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Biết rằng khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị nhỏ nhất thì biểu thức $P = 2022AM - 2021AN = a\sqrt{b} - a$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính $a + b$.

A. 4.

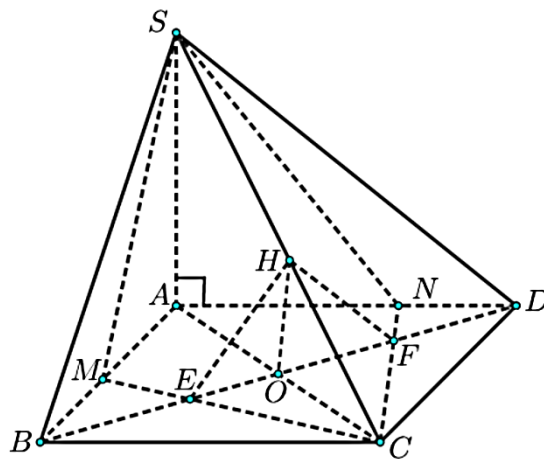
B. 5.

C. 6.

D. 2.

LỜI GIẢI

Chọn B



Đặt $AM = x, AN = y$. Trong ($ABCD$), gọi $O = AC \cap BD, E = BD \cap CM, F = BD \cap CN$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SC , khi đó: $\triangle CHO$ đồng dạng $\triangle CAS$

$$\Rightarrow \frac{HO}{AS} = \frac{CO}{CS} \Rightarrow HO = \frac{CO \cdot AS}{CS} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$$

Do đó: $((SCM), (SCN)) = (HE, HF) = 90^\circ$ hay $HE \perp HF$.

$$\text{Ta có: } S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{\triangle BCM} - S_{\triangle CDN} = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-y) = 4 - 2 + x - 2 + y = x + y.$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.AMCN} = \frac{1}{3}SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y).$$

Xét tam giác HEF vuông tại H , có đường cao $OH^2 = OE.OF$ (1). Ta cần tính OE, OF .

Xét tam giác OAB với $EM \cap OA = C$; theo **định lý Menelaus**, ta có:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EO} \cdot \frac{OC}{AC} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} \cdot \frac{BE}{OE} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow OE = \frac{\sqrt{2}x}{4-x}. \text{ Tương tự: } OF = \frac{\sqrt{2}y}{4-y}.$$

$$\text{Thay } OE, OF \text{ vừa tìm được vào (1): } \frac{2}{3} = \frac{2xy}{(4-x)(4-y)} \Leftrightarrow 3xy = 16 - 4(x+y) + xy$$

$$\Leftrightarrow xy + 2x + 2y = 8 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$$

$$\text{Ta có: } V_{S.AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3} \left[\underbrace{(x+2) + (y+2) - 4}_{AM+GM} \right] \geq \frac{2}{3} \left[2 \sqrt{\underbrace{(x+2)(y+2)}_{=12}} - 4 \right] = \frac{8}{3}(\sqrt{3}-1).$$

Do đó: $(V_{S.AMCN})_{\min} = \frac{8}{3}(\sqrt{3}-1)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x+2 = y+2 = \sqrt{12} \Rightarrow x = y = 2\sqrt{3}-2 = AM = BN.$$

Vì vậy $P = 2022AM - 2021AN = 2\sqrt{3}-2 = a\sqrt{b}+a \Rightarrow a=2, b=3$. Ta có: $a+b=5$.

- Câu 1:** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 6; BC = 12; \angle ABC = 60^\circ$. Thể tích khối chóp $C'.ABB'A'$ bằng 216. Gọi M là điểm nằm trong tam giác $A'B'C'$ sao cho tổng diện tích các mặt bên của hình chóp $M.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng $B'M, AC'$?
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 2:** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC, CD sao cho $MN = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $S.AMN$.
- A. $\frac{4 - \sqrt{2}}{24}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{12}$.
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (P) chứa AM lần lượt cắt các cạnh SB, SD tại B', D' . Giá trị lớn nhất của $u = \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}$ là $\frac{a}{b}$, $(a, b \in \mathbb{N}^*)$ tối giản. Tích $a.b$ bằng:
- A. 3. B. 12. C. 15. D. 6.
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I . (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_{S.MBNP}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị của $m+n$ là
- A. $\frac{4}{15}$. B. $\frac{6}{75}$. C. $\frac{14}{75}$. D. $\frac{1}{5}$.
- Câu 5:** Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{6}$ biết các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $SABC$.
- A. 3. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 4.
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là điểm trên cạnh SB sao cho $SN = 3NB$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt P, Q . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.MNPQ$.
- A. $\frac{V}{3}$. B. $\frac{27}{80}V$. C. $\frac{27}{40}V$. D. $\frac{V}{6}$.
- Câu 7:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M nằm trên cạnh AA' sao cho góc BMD' lớn nhất, đặt góc lớn nhất đó là α . Biết $\cos \alpha = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}; (a, b) = 1; b > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $a + b = 1$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = 3$. D. $a + b = 4$.

Câu 8: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết rằng thể tích của khối chóp là $\frac{5}{24}$ và giá trị nhỏ nhất diện tích toàn phần chóp $S.ABC$ là $p\sqrt{5} + q$ trong đó $p, q \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức: $p^2 + q^2 = ?$

- A. $p^2 + q^2 = \frac{37}{36}$. B. $p^2 + q^2 = \frac{37}{9}$. C. $p^2 + q^2 = \frac{25}{4}$. D. $p^2 + q^2 = 16$.

Câu 9: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I . (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P . Gọi m, n lần lượt là GTLN, GTNN của $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\frac{m}{n}$?

- A. 2. B. $\frac{7}{5}$. C. $\frac{14}{75}$. D. $\frac{8}{5}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

- A. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Câu 11: Cho tứ diện $SABC$ và G là trọng tâm của tứ diện. Một mặt phẳng (α) quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N (M, N không trùng S). Gọi V là thể tích tứ diện $SABC$, V_1 là thể tích tứ diện $SAMN$ và gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$. Hãy tính $m+n$.

- A. $m+n = 1$. B. $m+n = \frac{17}{18}$. C. $m+n = \frac{18}{19}$. D. $m+n = \frac{19}{20}$.

Câu 12: Cho hình nón (H) có đỉnh S , chiều cao là h và mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đáy của khối nón. Một khối nón (T) có đỉnh là tâm của đường tròn đáy của (H) và đáy của (T) là thiết diện của (P) với hình nón. Thể tích lớn nhất của (T) là bao nhiêu?

- A. $\frac{4\pi R^2 h}{81}$. B. $\frac{4\pi R^2 h}{27}$. C. $\frac{\pi R^2 h}{24}$. D. $\frac{\pi R^2 h^2}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = 1$, $\angle ASB = 30^\circ$. Lấy các điểm B', C' lần lượt thuộc các cạnh SB, SC sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tính chu vi đó.

- A. $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$. B. $\sqrt{3}-1$. C. $\sqrt{3}$. D. $1+\sqrt{3}$.

Câu 14: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC đều cạnh bằng $8cm$ và một điểm S di động ngoài mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB luôn có diện tích bằng $16\sqrt{3}cm^2$, với M là trung điểm của SC . Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn đỉnh M, A, B, C . Khi thể tích hình chóp $S.ABC$ lớn nhất, tính bán kính nhỏ nhất của (S) :

A. $\frac{16\sqrt{6}}{9}cm.$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}cm.$ C. $\frac{4\sqrt{15}}{3}cm.$ D. $\frac{4\sqrt{39}}{3}cm.$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$. Và SA vuông góc với đáy. M và N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc hai cạnh BC và CD sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Tính tỉ số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$

A. $-2 + 2\sqrt{2}$. B. $\frac{1 + \sqrt{2}}{6}$. C. $2\sqrt{2} - 1$. D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$. B. $6\sqrt{6}$. C. $24\sqrt{3}$. D. $16\sqrt{2}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường cao $SA = 2a$. $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy, $M \in SA$ và $AM = x$. Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và đường sinh MA . Giá trị của x để thể tích khối trụ lớn nhất là

A. $x = \frac{a}{3}$. B. $x = \frac{2a}{3}$. C. $x = \frac{a}{2}$. D. $x = \frac{3a}{4}$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh $2a$ và tam giác ABD vuông tại D , $AD = \frac{a}{2}$.

Khoảng cách lớn nhất từ B đến mặt phẳng (ACD) là?

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $2a\sqrt{3}$.

Câu 19: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $2a$. Gọi α là góc giữa mặt bên của hình chóp với đáy của hình chóp đó. Với giá trị nào của α thì thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$. D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 20: Cho hình chóp $SABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Đặt $x = SD$ ($0 < x < a\sqrt{3}$) Tìm x theo a để tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. Đáp án khác.

Câu 21: Cho tứ diện $S.ABCD$ và M là một điểm di động, nằm bên trong tam giác $\triangle ABC$. Qua M kẻ các đường thẳng song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng tương ứng (SBC) , (SAC) , (SAB) lần lượt tại A', B', C' . Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} + \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$$

A. $\frac{9}{8}$. B. $\frac{28}{27}$. C. $\frac{62}{27}$. D. $\frac{13}{8}$.

Câu 22: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{BN}{BB'} = x, \frac{CP}{CC'} = y$. Biết thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{2V}{3}$. Giá trị lớn nhất của $x.y$ bằng

- A. $\frac{17}{21}$. B. $\frac{9}{16}$. C. $\frac{25}{36}$. D. $\frac{5}{24}$.

Câu 23: Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (T) đường kính $AB = 2R$. Gọi C là một điểm di động trên (T) . Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) lấy điểm S sao cho $SA = R$. Hạ $AH \perp SB$ tại H , $AK \perp SC$ tại K . Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích tứ diện $SAHK$.

- A. $V_{\max} = \frac{R^3\sqrt{5}}{75}$. B. $V_{\max} = \frac{R^3\sqrt{5}}{25}$. C. $V_{\max} = \frac{R^3\sqrt{3}}{27}$. D. $V_{\max} = \frac{R^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 24: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Hai điểm M, N di động trên các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc mặt phẳng (ABC) . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của tam giác AMN . Tính $T = \frac{S_1}{S_2}$.

- A. $T = \frac{8}{9}$. B. $T = \frac{9}{8}$. C. $T = \frac{8}{7}$. D. $T = \frac{9}{7}$.

Câu 25: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ với độ dài tất cả các cạnh đều bằng a . Xét tất cả các đoạn thẳng song song với mặt phẳng $(ABB'A')$ và có một đầu E nằm trên đường chéo $A'C$ của mặt bên $AA'C'C$, còn đầu kia F nằm trên đường chéo BC' của mặt bên $BB'C'C$. Hãy tìm độ dài ngắn nhất của các đoạn thẳng này.

- A. $\frac{2a}{5}$. B. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{a}{5}$. D. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 26: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng b . Góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp bằng α . Tìm α để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất.

- A. $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. B. $\alpha = \arccos(\sqrt{3})$. C. $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$. D. $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a . Điểm M và N lần lượt thay đổi trên các cạnh BB' và DD' sao cho $(MAC) \perp (NAC)$ và $BM = x, DN = y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ACMN$.

- A. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. B. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{a^3}{2\sqrt{2}}$. D. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = b$ và vuông góc với $(ABCD)$. Điểm M thay đổi trên cạnh CD với $CM = x (0 \leq x \leq a)$. H là hình chiếu vuông góc của S trên BM . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABH$ theo a, b .

A. $\frac{a^2b}{12}$.

B. $\frac{a^2b}{24}$.

C. $\frac{a^2b}{8}$.

D. $\frac{a^2b}{18}$.

Câu 29: Cho tứ diện đều $SABC$ có D là điểm thuộc cạnh AB sao cho $BD = 2AD$, I là trung điểm của SD . Một đường thẳng d thay đổi qua I cắt các cạnh SA , SB lần lượt tại M , N . Biết $AB = 2a$

Khi d thay đổi, thể tích khối chóp $S.MNC$ nhỏ nhất bằng $\left(\frac{m}{n}\right)^3 \cdot \frac{a^3}{\sqrt{m}}$, với $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$

. Tính $m+n$.

A. $m+n = 4$.

B. $m+n = 6$.

C. $m+n = 7$.

D. $m+n = 5$.

Câu 30: Cắt một khối trụ tròn có chiều cao h bởi một mặt phẳng song song với hai mặt đáy ta thu được hai khối tròn nhỏ. Một trong hai khối đó ngoại tiếp một lăng trụ đứng thể tích V có đáy là tam giác có chu vi là p . Khối còn lại ngoại tiếp một khối nón có bán kính là R . Tìm giá trị của R sao cho thể tích của khối nón là lớn nhất?

A. $R = \frac{\pi p^3}{162V}$.

B. $R = \frac{hp^3}{162V}$.

C. $R = \frac{\pi p^3}{162}$.

D. $R = \frac{p^3}{162V}$.

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi O là tâm của tứ giác $ABCD$. Một mặt phẳng thay đổi và vuông góc với SO cắt các cạnh SO , SA , SB , SC , SD lần lượt tại I , M , N , P , Q . Một hình trụ có một đáy nội tiếp tứ giác $MNPQ$ và một đáy nằm trên hình vuông $ABCD$. Khi thể tích của khối trụ lớn nhất thì độ dài đoạn SI bằng

A. $SI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $SI = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

C. $SI = \frac{a}{3}$.

D. $SI = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng 1. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của hình chóp, cắt ba cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F . Tìm giá trị lớn nhất P_{max} của

$$P = \frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD}.$$

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 33: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . G là trung điểm của BD' , mặt phẳng (P) thay đổi qua G cắt $AD', CD', B'D'$ tương ứng tại H, I, K . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{D'H \cdot D'I} + \frac{1}{D'I \cdot D'K} + \frac{1}{D'K \cdot D'H}.$$

A. $\frac{8}{3a^2}$.

B. $\frac{16a^2}{3}$.

C. $\frac{8a^2}{3}$.

D. $\frac{16}{3a^2}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SB = a\sqrt{2}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, góc giữa SC và (SAB) bằng 45° . Góc giữa SB và mặt đáy bằng α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Xác định α để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 70^\circ$.

Câu 35: Cho chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tìm x để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $\sqrt{3}$.

- Câu 36:** Trên cạnh AD của hình vuông $ABCD$ cạnh 1, người ta lấy điểm M sao cho $AM = x (0 \leq x \leq 1)$ và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông, người ta lấy điểm S với $SA = y$ thỏa mãn $y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Biết khi M thay đổi trên đoạn AD thì thể tích của khối chóp $S.ABCM$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{m}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và m, n nguyên tố cùng nhau. Tính $T = m + n$.
- A. 11. B. 17. C. 27. D. 35.

- Câu 37:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = 60^\circ$, $BSC = 90^\circ$, $CSA = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{72}$.

B. $V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$.

C. $V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

- Câu 38:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'D' = 2$, $A'B' = x, (x > 0)$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 60° . Tính giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{\max} = \frac{4}{3}$.

B. $V_{\max} = \frac{8}{3}$.

C. $V_{\max} = \frac{10}{3}$.

D. $V_{\max} = 2$.

- Câu 39:** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $S_{ABC'} = 4\sqrt{3}$, mặt phẳng (ABC') tạo với mặt đáy góc α . Khi thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ lớn nhất, giá trị của $\cos \alpha$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

- Câu 40:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA , N là điểm trên đoạn SB sao cho $SN = 2NB$. Mặt phẳng (R) chứa MN cắt đoạn SD tại Q và cắt đoạn SC tại P . Tỉ số $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{5}$.

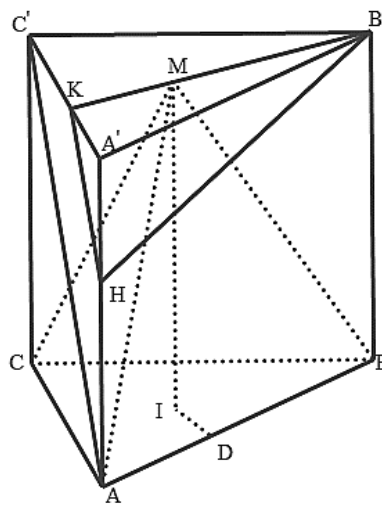
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{3}{8}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:



Gọi I là hình chiếu của M trên (ABC) ; D, E, F lần lượt là hình chiếu của I trên AB, BC, CA .
Đặt $x = ID, y = IE, 2a = AB, 2b = BC, 2c = CA, h = AA' = MI$.

Khi đó $S_{ABC} = S_{IAB} + S_{IAC} + S_{IBC} = ax + by + cz$

Diện tích toàn phần của hình chóp $M.ABC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $S = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA}$ nhỏ nhất.

$$\text{Có } MD = \sqrt{MI^2 + ID^2} = \sqrt{h^2 + x^2} \Rightarrow S_{MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MD = a\sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{(ah)^2 + (ax)^2}.$$

$$\text{Tương tự ta chứng minh được } S = \sqrt{(ah)^2 + (ax)^2} + \sqrt{(bh)^2 + (by)^2} + \sqrt{(ch)^2 + (cz)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$ với $\vec{u} = (ah; ax), \vec{v} = (bh; by), \vec{w} = (ch; cz)$ ta được:

$$S \geq \sqrt{(ah + bh + ch)^2 + (ax + by + cz)^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 h^2 + S_{ABC}^2} = \text{const}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{ax}{ah} = \frac{by}{bh} = \frac{cz}{ch} \Leftrightarrow x = y = z$.

Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , nên M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $B'M$ và AC' .

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin ABC = 18\sqrt{3}$$

$$A'C'^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ = 108 \Rightarrow A'C' = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Do } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2} V_{C.ABB'A'} = \frac{3}{2} \cdot 216 = 324 \Rightarrow AA' \cdot S_{ABC} = 324 \Rightarrow AA' = 6\sqrt{3}$$

Gọi K là chân đường phân giác trong của tam giác $A'B'C'$ kẻ từ B' , từ K kẻ đường thẳng song song với AC' cắt AA' tại H , khi đó: $\varphi = (B'M, AC') = (B'K, KH) \Rightarrow \cos \varphi = |\cos B'KH|$

$$S_{A'B'C'} = S_{B'KC'} + S_{A'KB'} = \frac{1}{2} B'K (B'A' + B'C') \sin 30^\circ \Rightarrow 18\sqrt{3} = \frac{18}{4} B'K \Rightarrow B'K = 4\sqrt{3}$$

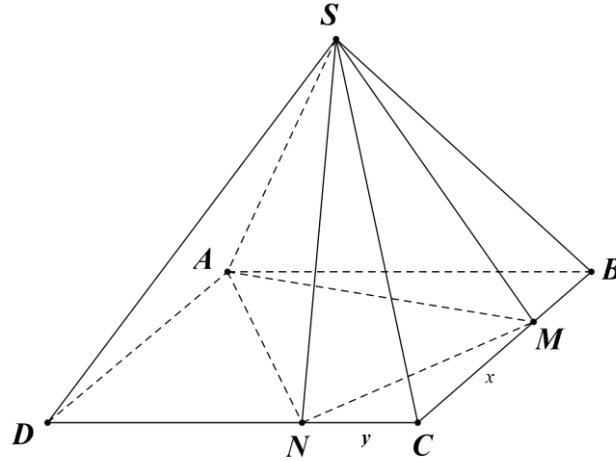
$$\text{Ta có } \frac{A'K}{B'K} = \frac{A'B'}{C'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'K = \frac{1}{3} A'C' = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Do } KH // AC' \text{ nên } \frac{A'H}{A'A} = \frac{A'K}{C'A'} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'H = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow KH = \sqrt{A'H^2 + A'K^2} = 2\sqrt{6}, B'H = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \cos B'KH = \frac{B'K^2 + KH^2 - B'H^2}{2B'K.KH} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 2: Chọn A



Hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta có $V_{S.AMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AMN} \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot S_{\triangle AMN}$.

Thể tích khối tứ diện $S.AMN$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $S_{\triangle AMN}$ nhỏ nhất.

Đặt $x = CM, y = NC \Rightarrow MB = 1 - x, DN = 1 - y$. Ta có $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - 1}{2}$.

Với $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Rightarrow 1 < x+y \leq \sqrt{2}$.

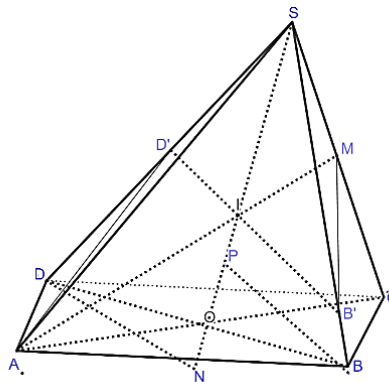
Ta có $S_{\triangle AMN} = 1 - S_{\triangle ABM} - S_{\triangle CMN} - S_{\triangle ADN} = 1 - \frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{2}x \cdot y - \frac{1}{2} \cdot (1-y)$

$= 1 - \frac{1-x}{2} - \frac{x \cdot y}{2} - \frac{1-y}{2} = \frac{1}{2} \left((x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{1}{2} \right)$. Đặt $t = x+y \Rightarrow S_{\triangle AMN} = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$.

Tam giác có diện tích nhỏ nhất là $S_{\min} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ khi $t = \sqrt{2}$.

Vậy thể tích nhỏ nhất của tứ diện $S.AMN$ là $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{2\sqrt{2}-1}{4} = \frac{4-\sqrt{2}}{24}$.

Câu 3:



Lấy $I = AM \cap B'D'; O = AC \cap BD$

Chủ đề 06: Cực trị hình học không gian

Ta có S, O, I là các điểm chung của hai mặt phẳng $(SAC); (SBD)$. Suy ra S, O, I thẳng hàng

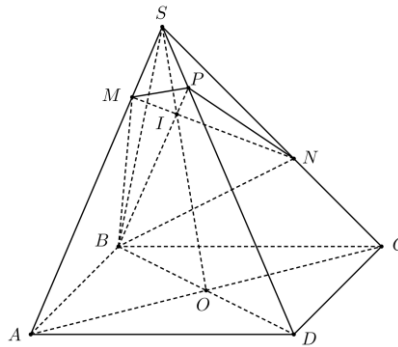
Và I là trọng tâm các mặt chéo $SAC \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$

Vẽ $BP // B'I; DN // D'I \Rightarrow OP = ON$. Đặt $x = \frac{SD}{SD'}$; $y = \frac{SB}{SB'}$

$$\Rightarrow x + y = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SP}{SI} + \frac{SN}{SI} = \frac{2SO}{SI} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x, y \in [1; 2] \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{xy} \geq 3 \left(\frac{2}{x+y} \right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 3; b = 4 \Rightarrow a.b = 12$$

Câu 4:



Đặt $\begin{cases} \frac{SA}{SM} = x \\ \frac{SC}{SN} = y \end{cases}$ với $x, y \geq 1$. Có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \frac{SO}{SI} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow \frac{SD}{SP} = 5$.

Mà $x + y = 2 \frac{SO}{SI} = 6 \Rightarrow y = 6 - x$, với $1 \leq x \leq 5$.

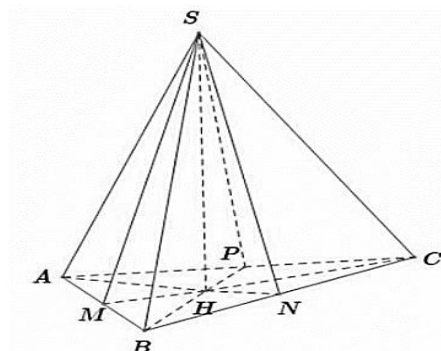
Khi đó $\frac{V_{S.BMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x+1+y+5}{x \cdot 1 \cdot y \cdot 5} = \frac{12}{20xy} = \frac{3}{5xy} = \frac{3}{5x(6-x)} = \frac{3}{5(6x-x^2)}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{3}{5(6x-x^2)}$, với $1 \leq x \leq 5$.

Ta có $f'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2x-6}{(6x-x^2)^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3 \in [1;5]$.

Khi đó $f(1) = \frac{3}{25}$, $f(3) = \frac{1}{15}$ và $f(5) = \frac{3}{25}$. Suy ra $m = \frac{3}{25}$ và $n = \frac{1}{15}$. Vậy $m+n = \frac{14}{75}$.

Câu 5:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) , Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, BC, CA thì SM, SN, SP lần lượt là chiều cao của các mặt bên SAB, SBC, SAC .

Vì các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau nên $SM = SN = SP$ nên suy ra $HM = HN = HP \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC .

Trường hợp 1: H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

$$\text{Khi đó } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (\sqrt{6})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

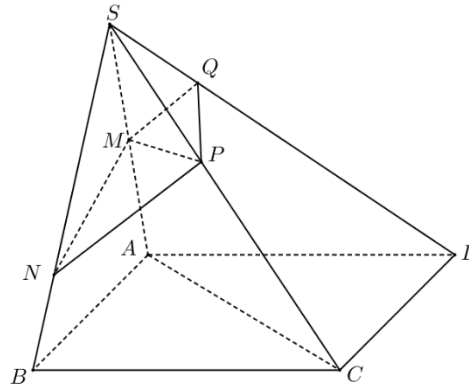
Trường hợp 2: H là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC .

Do tam giác ABC đều nên giả sử H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A . Khi đó $AH = 3\sqrt{2}, BH = CH = \sqrt{6}$. Nếu $SA = 3\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 0$.

$$\text{Do đó } SB = SC = 3\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3. \text{ Ta có } 3 < 2\sqrt{3} \text{ Vậy } V_{\min} = 3$$

Câu 6: Chọn C



$$\text{Đặt } k = \frac{SC}{SP}; q = \frac{SD}{SQ} (k, q \geq 1).$$

$$\text{Vì bốn điểm } M, N, K, Q \text{ đồng phẳng nên ta có } \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}.$$

$$\text{Suy ra } 2 + k = \frac{4}{3} + q \Rightarrow q = k + \frac{2}{3}. \text{ Ta có } \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}} = \frac{SA}{SM} \cdot \frac{SB}{SN} \cdot \frac{SC}{SP} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot k = \frac{8}{3}k \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{3V}{8k}.$$

$$\frac{V_{S.ADC}}{V_{S.MQP}} = \frac{SA}{SM} \cdot \frac{SD}{SQ} \cdot \frac{SC}{SP} = 2 \cdot q \cdot k = 2qk \Rightarrow V_{S.MQP} = \frac{V}{2qk}.$$

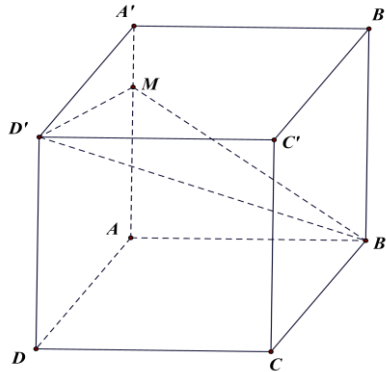
$$\text{Suy ra } V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MQP} = \left(\frac{3}{8k} + \frac{1}{2qk} \right) V = \left(\frac{3}{8k} + \frac{1}{2\left(k + \frac{2}{3}\right)k} \right) V.$$

Để V_{MNPQ} lớn nhất khi và chỉ khi $f(k) = \frac{3}{8k} + \frac{1}{2\left(k + \frac{2}{3}\right)k}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f'(k) = -\frac{3}{8k^2} - \frac{k + \frac{1}{3}}{(k+3)^2 k^2} < 0, \forall k \geq 1$. Suy ra $\max f(k) = f(1) = \frac{27}{40}$.

Suy ra $\max V_{MNPQ} = \frac{27}{40} V$.

Câu 7:



Không mất tính tổng quát, giả sử cạnh hình lập phương có độ dài là 1 và $AM = x, 0 \leq x \leq 1$. Khi

đó, ta có $BM^2 = 1 + x^2; D'M^2 = 1 + (1-x)^2; BD'^2 = 3$. Vậy $\cos BMD' = \frac{x^2 - x}{\sqrt{1 + (x-1)^2} \sqrt{1 + x^2}}$

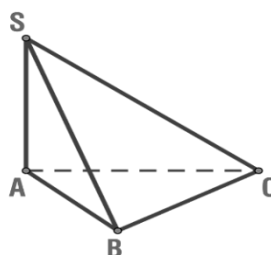
$$\Rightarrow (\cos BMD')^2 = \frac{x^2(1-x)^2}{(1+x^2)[1+(1-x)^2]} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{(1-x)^2}\right)}$$

$$\text{Ta có } \left[1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2\right] \geq \left(1.1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}\right)^2 \geq \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2}\right]^2 = 25.$$

Vậy $(\cos BMD')^2 \leq \frac{1}{25}$, suy ra $\cos BMD' \geq \frac{-1}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$, hay M là trung điểm của AA' , khi đó $\cos BMD'$ nhỏ nhất nên góc BMD' lớn nhất. Vậy $a = -1; b = 5$.

Câu 8:



Đặt $AB = a, BC = b, SA = c, (a, b, c > 0)$, khi đó ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{5}{24} \Rightarrow abc = \frac{5}{4}$.

Diện tích toàn phần chóp

$$S_{tp} = S_{ABC} + S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SBC} = \frac{1}{2}(ab + ac + c\sqrt{a^2 + b^2} + b\sqrt{a^2 + c^2}) = \frac{P}{2}.$$

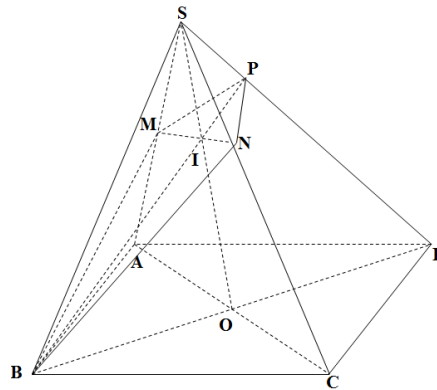
$$\text{Có } \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}(a^2 + b^2)} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1 + \frac{5}{4}\right)(a^2 + b^2)} \geq \frac{2}{3}\left(a + b\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{a^2 + c^2} \geq \frac{2}{3}\left(a + c\frac{\sqrt{5}}{2}\right). \text{ Do đó } P \geq ab + ac + \frac{2}{3}c\left(a + b\frac{\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{2}{3}b\left(a + c\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{3}\left(ab + ac + \frac{2bc}{\sqrt{5}}\right) \geq \frac{5}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}(abc)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = 1 \\ b = c = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } S_{tp_{Min}} = \frac{5}{4}\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{5}{4} \Rightarrow p^2 + q^2 = \frac{25}{16} \\ q = 0 \end{cases}$$

Câu 9:



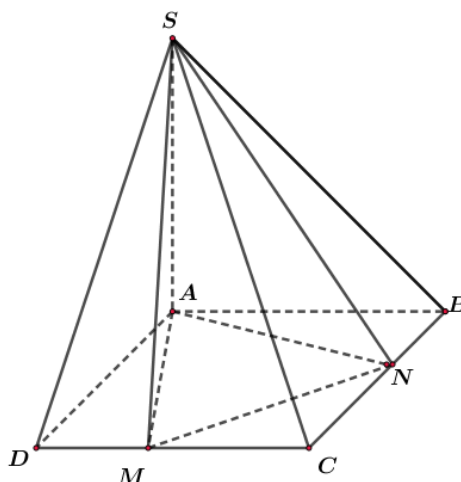
$$\text{Đặt } a = \frac{SA}{SM}, b = \frac{SB}{SN} = 1, c = \frac{SC}{SP}, d = \frac{SD}{SP}.$$

$$\text{Có } a + c = b + d = 2 \cdot \frac{SO}{SI} = 6 \Rightarrow \begin{cases} a + c = 6 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 - a \\ d = 5 \end{cases}. \text{ Do } \begin{cases} a \geq 1 \\ c \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a \leq 5.$$

$$\text{Có } \frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a + b + c + d}{4abcd} = \frac{12}{4 \cdot a \cdot 1 \cdot c \cdot 5} = \frac{3}{5a(6-a)} = \frac{3}{5(-a^2 + 6a)} = f(a) \Rightarrow f'(a) = \frac{3(2a-6)}{5(-a^2 + 6a)^2}$$

a	1	3	5
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{25}$

$$\Rightarrow m + n = \frac{3}{25} + \frac{1}{15} = \frac{14}{75}.$$


$$\text{Ta có } S_{\Delta AMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABN} - S_{\Delta ADM} - S_{\Delta CMN} = 1 - \frac{1}{2}[x + y + (1-x)(1-y)] = \frac{1}{2}(1-xy)$$

Áp dụng định lí cos cho tam giác $\triangle AMN$:

Từ (1) và (2) suy ra $(1-x)^2 + (1-y)^2 = 1 + x^2 + 1 + y^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{y^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow 2x+2y=\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)} \Leftrightarrow x^2+y^2=x^2y^2+1-4xy \quad (3)$$

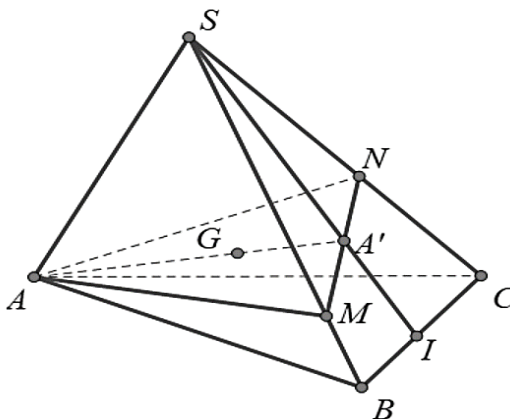
Từ (3) và (4) suy ra $x^2y^2 + 1 - 4xy \geq 2xy \Leftrightarrow (xy)^2 - 6xy + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy \geq 3 + 2\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ xy \leq 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}(1-xy) \geq \sqrt{2}-1 \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta AMN} \geq \frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} x = y \\ xy = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

Vậy thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ bằng $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

Câu 11:



Gọi A' là trọng tâm của tam giác SBC , khi đó $A' \in AG$ nên M, N, A' thẳng hàng.

Đặt $\frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SC} = y$ với $0 < x, y \leq 1$. Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = xy$.

$$\text{Vì } \begin{cases} \frac{S_{\Delta SMA'}}{S_{\Delta SBI}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SA'}{SI} = \frac{2}{3}x \\ \frac{S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SCI}} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SA'}{SI} = \frac{2}{3}y \end{cases} \text{ nên } \frac{S_{\Delta SMA'}}{S_{\Delta SBC}} + \frac{S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S_{\Delta SMA'}}{S_{\Delta SBI}} + \frac{S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SCI}} \right) = \frac{1}{3}(x+y).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{S_{\Delta SMA'}}{S_{\Delta SBC}} + \frac{S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{S_{\Delta SMA'} + S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = xy \text{ nên } \frac{1}{3}(x+y) = xy.$$

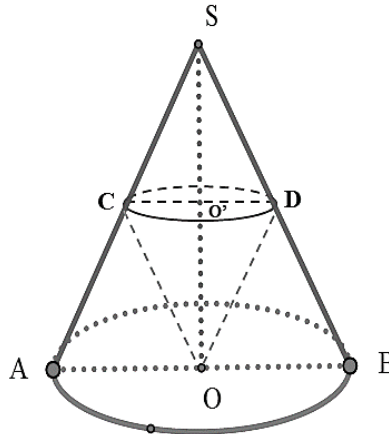
Do đó $y = \frac{x}{3x-1}$, suy ra $\frac{V_1}{V} = \frac{x^2}{3x-1}$. Do $0 < x, y \leq 1$ nên từ $y = \frac{x}{3x-1}$ ta suy ra $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$ với $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}.$$

Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}, f(1) = \frac{1}{2}$ nên ta được $m = \frac{1}{2}, n = \frac{4}{9}$ hay $m+n = \frac{1}{2} + \frac{4}{9} = \frac{17}{18}$.

Câu 12:



Gọi O và O' lần lượt là tâm của đường tròn đáy của hình nón (H) và (T) .

h, R là chiều cao và bán kính của hình nón (H) .

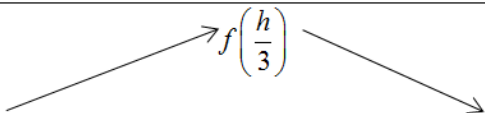
h', R' là chiều cao và bán kính của hình nón (T) ($0 < h' < h$).

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đáy của khối nón nên từ hình vẽ ta có:

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{CO'}{AO} = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow \frac{R'}{R} = \frac{h-h'}{h} \Rightarrow R' = R \cdot \left(1 - \frac{h'}{h}\right); V_{(T)} = \frac{1}{3}\pi R'^2 h' = \frac{1}{3}\pi R^2 \left(1 - \frac{h'}{h}\right)^2 h'.$$

$$\text{Xét hàm số } f(h') = \left(1 - \frac{h'}{h}\right)^2 h' \Rightarrow f'(h') = 1 - \frac{4h'}{h} + \frac{3h'^2}{h^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h' = h \text{ (ktm)} \\ h' = \frac{h}{3} \text{ (tm)} \end{cases}.$$

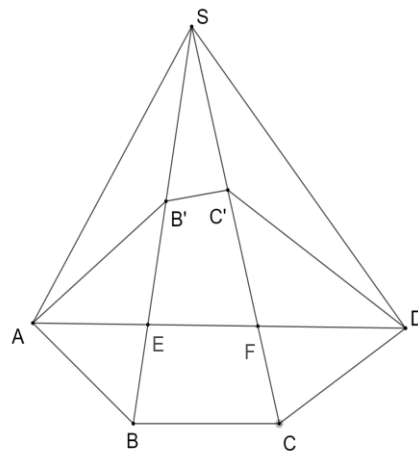
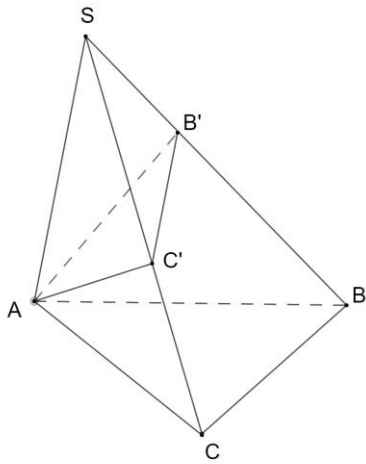
Ta có bảng biến thiên:

h'	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(h')$	+	0	-
$f(h')$			

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $f(h')$ đạt giá trị lớn nhất là $f\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{4h}{27}$.

Vậy thể tích của khối nón (T) đạt giá trị lớn nhất $V_{(T)} = \frac{4\pi R^2 h}{81}$.

Câu 13:



Trải các mặt của hình chóp $S.ABC$ ra mặt phẳng (SBC) thì chu vi tam giác $AB'C'$ bằng $AB' + B'C' + C'A = AB' + B'C' + C'D \geq AD$.

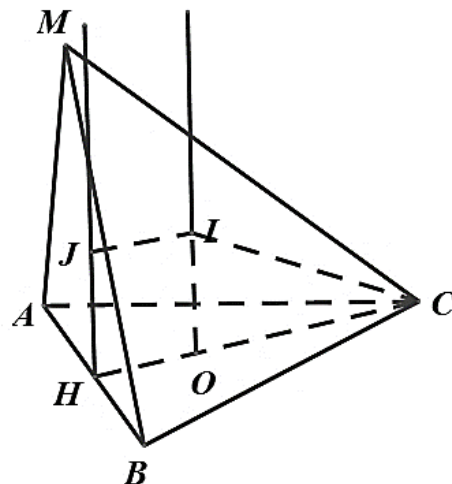
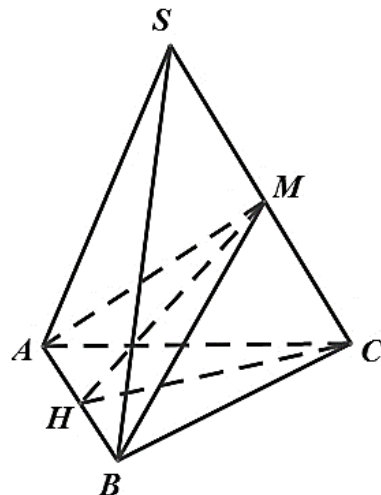
Dấu "=" xảy ra khi $B' \equiv E, C' \equiv F$.

Ta có $AB = 1, ASB = 30^\circ \Rightarrow SA = SB = \frac{1}{2\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

Lại có chóp $S.ABC$ đều, $ASB = 30^\circ \Rightarrow ASD = 90^\circ \Rightarrow AD = SA\sqrt{2} = 1 + \sqrt{3}$.

Vậy chu vi tam giác $AB'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $1 + \sqrt{3}$.

Câu 14:



Gọi H là trung điểm cạnh AB , ta có: $CH \perp AB$.

Ta có: $d(S, (ABC)) = 2d(M, (ABC)) \Rightarrow V_{SABC} = 2V_{MABC}$

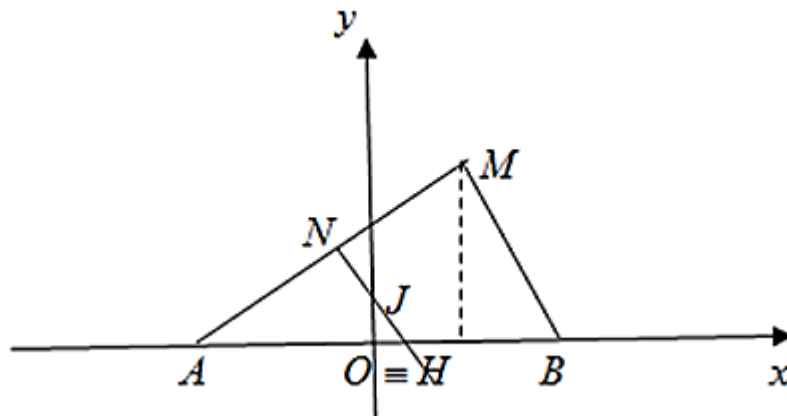
Mà $V_{MABC} = V_{CMAB} = \frac{1}{3}S_{\triangle MAB} \cdot d(C, (MAB)) = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot d(C, (MAB)) \leq \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot CH$

Do đó V_{SABC} lớn nhất khi và chỉ khi $d(C, (MAB)) = CH$ hay $CH \perp (MAB)$.

Gọi J , O lần lượt là tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC . Dựng hai trục của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC cắt nhau tại I . Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp đi qua 4 điểm A , B , C , M và bán kính mặt cầu đi qua

bốn điểm A , B , C , M là $R = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + JH^2}$

Do $S_{\triangle MAB} = 16\sqrt{3}$, $AB = 8 \Rightarrow d(M, AB) = 4\sqrt{3}$



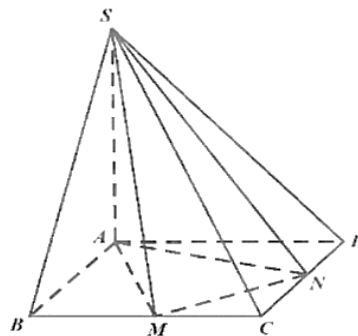
Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta có $H(0;0)$, $A(-4;0)$, $B(4;0)$, $M(a;4\sqrt{3})$.

Đường trung trực của đoạn thẳng AM đi qua điểm $N\left(\frac{a-4}{2}; 2\sqrt{3}\right)$ và có một vector pháp tuyến

$\overrightarrow{AM} = (a+4; 4\sqrt{3})$ nên có phương trình là $(a+4)\left(x - \frac{a-4}{2}\right) + 4\sqrt{3}(y - 2\sqrt{3}) = 0$

Suy ra $J\left(0; \frac{a^2+32}{8\sqrt{3}}\right) \Rightarrow JH = \frac{a^2+32}{8\sqrt{3}} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Do đó $R_{\min} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$.

Câu 15:



Ta có $V_{S.AMN} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{AMN} = \frac{a\sqrt{3}}{3}S_{AMN}$.

Do đó thể tích của khối chóp $S.AMN$ phụ thuộc vào diện tích tam giác AMN

Đặt $BM = x, DN = y; x, y \in [0; a]$. $\triangle CMN$ vuông tại C nên $MN^2 = CM^2 + CN^2$ hay

$$MN^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$$

Áp dụng định lý hàm số cosin cho $\triangle AMN$ ta có: $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos \angle MAN$
 $= 2a^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2(a^2 + x^2)(a^2 + y^2)}$

$$\text{Suy ra } (a-x)^2 + (a-y)^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2(a^2 + x^2)(a^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow (ax + ay)^2 = (a^2 - xy)^2 \Leftrightarrow ax + ay = a^2 - xy \Leftrightarrow y = \frac{a^2 - ax}{a + x}$$

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN} = \frac{1}{2}(a^2 - xy) = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 + x^2}{x + a}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x + a}$ trên đoạn $[0; a]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x^2 + 2ax - a^2}{(x + a)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = (\sqrt{2} - 1)a.$$

$$\text{Ta lại có } f(0) = f(a) = a; f((\sqrt{2} - 1)a) = 2(\sqrt{2} - 1)a$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0; a]} f(x) = a; \min_{[0; a]} f(x) = 2(\sqrt{2} - 1)a \Rightarrow a^2(\sqrt{2} - 1) \leq S_{AMN} \leq \frac{a^2}{2}.$$

Vậy tỉ số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp S_{AMN} là $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Câu 16: Gọi độ dài các cạnh của khối hộp chữ nhật là $AB = a, AD = b, AA' = c$.

Vì tổng diện tích tất cả các mặt là 36 nên $2ab + 2bc + 2ca = 36$ hay $ab + bc + ca = 18$ (1).

Lại có: độ dài đường chéo AC' bằng 6 nên $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 6 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 36$ (2).

$$\text{Từ và suy ra: } \begin{cases} ab + bc + ca = 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + bc + ca = 18 \\ (a + b + c)^2 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + bc + ca = 18 \\ a + b + c = 6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = 18 - ab - ca \\ b + c = 6\sqrt{2} - a \end{cases}$$

$$\text{Vì: } (b + c)^2 \geq 4bc \text{ nên } (6\sqrt{2} - a)^2 \geq 4(18 - a(6\sqrt{2} - a)) \Leftrightarrow a^2 - 4\sqrt{2}a \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 4\sqrt{2}$$

Thể tích khối hộp chữ nhật là:

$$V = abc = a(18 - a(b + c)) = a(18 - a(6\sqrt{2} - a)) = 18a - 6\sqrt{2}a^2 + a^3 \text{ với } 0 < a \leq 4\sqrt{2}$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - 6\sqrt{2}t^2 + 18t$, với $0 < a \leq 4\sqrt{2}$.

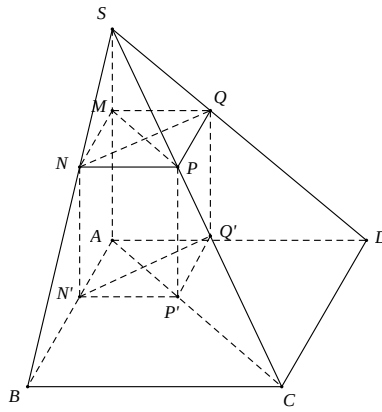
$$f'(t) = 3t^2 - 12\sqrt{2}t + 18, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3\sqrt{2} \\ t = \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			$8\sqrt{2}$	
			↘	↗
			0	
				$8\sqrt{2}$

$$\text{Vậy } \max V = f(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}.$$

Câu 17:



Ta có: $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy $\Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

$$\text{Vĩ } MN // AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow MN = \frac{AB \cdot SM}{SA} = \frac{a(2a-x)}{2a} = a - \frac{x}{2}.$$

Gọi R là bán kính hình trụ, ta có: $R = \left(a - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Thể tích hình trụ } V = \pi.R^2.x = \pi.\left[\left(a-\frac{x}{2}\right).\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2.x = \pi\left(\frac{x^3}{8}-\frac{ax^2}{2}+\frac{a^2x}{2}\right)$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{8} - ax + \frac{a^2}{2}$$

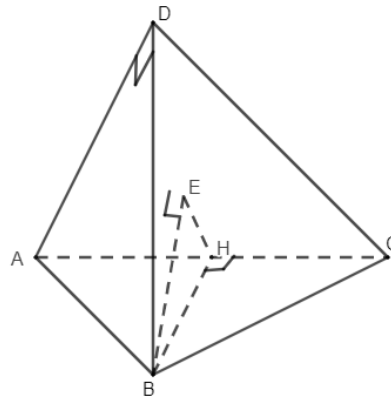
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ x = \frac{2}{3}a \end{cases} \quad x \in (0; 2a]$$

Bảng xét dấu

x	0	$\frac{2a}{3}$	2a
f'(x)	+	0	-
f(x)			

Vậy để thể tích khối trụ lớn nhất thì $x = \frac{2a}{3}$

Câu 18:



Giả sử E là hình chiếu của B lên mặt phẳng (ACD) . Khi đó $d(B, (ACD)) = BE$.

Gọi H là trung điểm của AC . Suy ra $BH \perp AC$

Vì $BE \perp (ACD) \Rightarrow BE \perp EH$. Do đó $BE \leq BH$ mà $BH = a\sqrt{3}$. Suy ra BE lớn nhất bằng $a\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $E \equiv H$.

$$\text{Khi đó: } BD^2 = AB^2 - AD^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4} \Rightarrow DH^2 = BD^2 - BH^2 = \frac{15a^2}{4} - 3a^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Khi đó điểm D hoàn toàn được xác định như sau:

Dựng $\triangle ABC$ đều cạnh $2a$. Lấy H là trung điểm của AC .

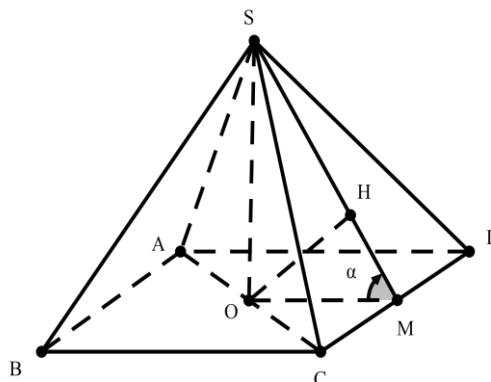
Dựng mặt phẳng (Q) đi qua H và $(Q) \perp BH$, do $AC \perp BH$ tại H nên $AC \subset (Q)$.

Trong mặt phẳng (Q) : D là giao của đường tròn đường kính AH và đường tròn tâm A bán

$$\text{kính } \frac{a}{2}. \text{ Khi đó } \begin{cases} AD \perp DH \\ AD \perp BH \end{cases} \Rightarrow AD \perp BD \text{ và } AD = \frac{a}{2}.$$

Do đó, tồn tại điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán để $BE = a\sqrt{3}$. Vậy $d(B, (ACD))$ lớn nhất là $a\sqrt{3}$.

Câu 19:



Gọi O là chân đường cao của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Khi đó ta có: $SO \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$.

Gọi M là trung điểm của CD , ta có:

$$\begin{cases} OM \perp CD \\ SM \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (OM, SM) = SMO = \alpha$$

Từ đó suy ra: $CD \perp (SOM)$. Từ O kẻ $OH \perp SM$ tại H . Mà $OH \perp CD$.

Do vậy: $OH \perp (SCD)$ nên $d(O, (SCD)) = OH = \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = a$.

Gọi $AD = x \Rightarrow OM = \frac{x}{2}, SO = OM \cdot \tan \alpha = \frac{x}{2} \cdot \tan \alpha$.

Xét tam giác OSM vuông tại O có OH là đường cao. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^2 \cdot \tan^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{4 \cdot \tan^2 \alpha + 4}{x^2 \cdot \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow x^2 \cdot \tan^2 \alpha = a^2 \cdot 4(1 + \tan^2 \alpha)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \tan^2 \alpha = a^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow x^2 \cdot \sin^2 \alpha = a^2 \cdot 4 \Rightarrow x = \frac{2a}{\sin \alpha}$$

Như vậy: $SO = \frac{x}{2} \cdot \tan \alpha = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \tan \alpha = \frac{a}{\cos \alpha}$; $S_{ABCD} = x^2 = \frac{4a^2}{\sin^2 \alpha}$.

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\cos \alpha} \cdot \frac{4a^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{4a^3}{3} \cdot \frac{1}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

Thể tích đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{1}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$ đạt giá trị nhỏ nhất hay $y = \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$

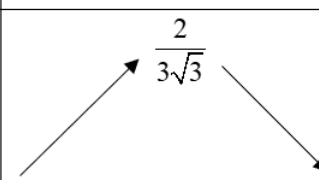
đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $y = \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$, $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$.

Đặt $t = \cos \alpha, t \in [0; 1]$. Khi đó: $y = t - t^3, t \in [0; 1]$.

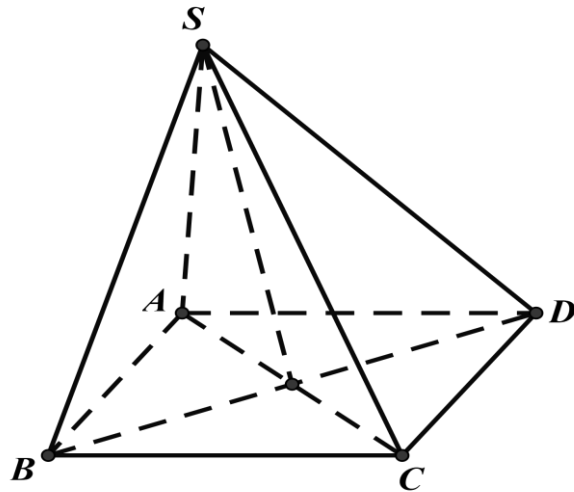
Ta có: $y' = 1 - 3t^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (do $t \in [0; 1]$).

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
y'	+	0	-
y			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y_{\max}$ khi $t = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 20:



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ ta có $OB \perp OC$

Theo đề bài $SA = SC$ nên ΔSAC cân tại S do đó $SO \perp AC$

Ta có $\Delta SOC = \Delta BOC$ do OC chung, $SC = BC = a$, $\angle SOC = \angle BOC = 90^\circ$ nên $SO = OB$

Mà $OB = OC$ nên $OB = OC = SO$ do đó ΔSBD vuông tại S

$$\text{Ta có } OB = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{SB^2 + SD^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2};$$

$$AC = 2OC = 2\sqrt{BC^2 - OB^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4}} = \sqrt{3a^2 - x^2}$$

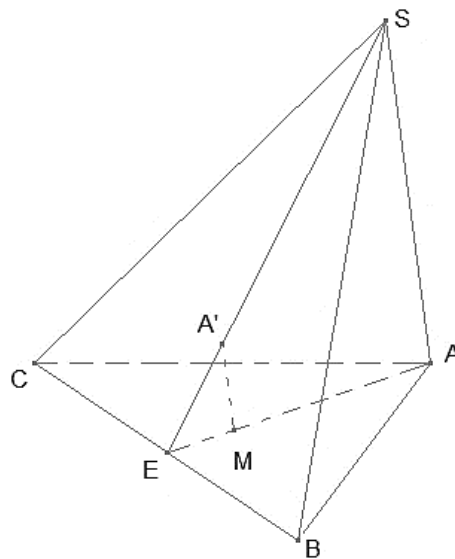
$$\text{Suy ra } AC \cdot SD = \sqrt{3a^2 - x^2} \cdot x$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô- si ta có } \sqrt{3a^2 - x^2} \cdot x \leq \frac{3a^2 - x^2 + x^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \sqrt{3a^2 - x^2} = x \Leftrightarrow 3a^2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vậy $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ thì tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 21:



Do $MA' // SA$ nên bốn điểm này cùng nằm trong một mặt phẳng. Giả sử

$E = BC \cap (MA', SA)$. Khi đó A, E, M thẳng hàng và ta có $\frac{MA'}{SA} = \frac{EM}{EA} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự ta có: $\frac{MB'}{SB} = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \frac{MC'}{SC} = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$.

Khi đó $P = \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số $\frac{MA'}{SA}, \frac{MB'}{SB}, \frac{MC'}{SC}$ ta được:

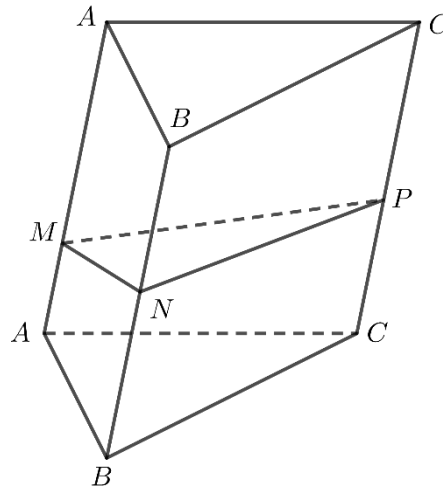
$$\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}} \Leftrightarrow \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Suy ra $T = \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} + \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC} \leq 1 + \frac{1}{27} \Leftrightarrow T \leq \frac{28}{27}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T = \frac{28}{27}$. Dấu “=” xảy ra khi $\frac{MA'}{SA} = \frac{MB'}{SB} = \frac{MC'}{SC}$.

Câu 22: Chọn C

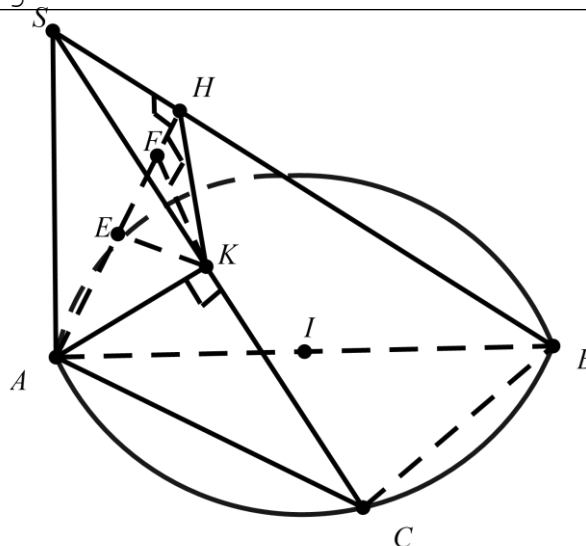


Ta có: $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{BN}{BB'} = x, \frac{CP}{CC'} = y$. Khi đó:

$$V_{MNP.ABC} = \frac{\frac{1}{3} + x + y}{3} V = \frac{2V}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + x + y = 2 \Rightarrow x + y = \frac{5}{3}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{5}{3} \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{25}{36}$.

Câu 23:



$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \\ AC, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK.$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp BC \\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB \quad (1).$$

Ta có $SB \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $SB \perp (AHK)$ tại H nên suy ra SH đường cao của khối chóp $S.AHK$.

Ta có: $V_{SAHK} = V_{S.AHK} = \frac{1}{3}SH.S_{AHK}$.

Do S, A, B cố định nên SH không đổi. Do đó thể tích của khối chóp $S.AHK$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{AHK} đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$ mà $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SBC)$, $KH \subset (SBC) \Rightarrow AK \perp HK$.

Gọi E là trung điểm của AH , F là hình chiếu vuông góc của K xuống AH .

Ta có: $S_{AHK} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot KF$.

Mặt khác do độ dài đoạn AH không đổi nên S_{AHK} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi KF là lớn nhất.

Ta có độ dài đoạn KF có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi F trùng với trung điểm E của AH .

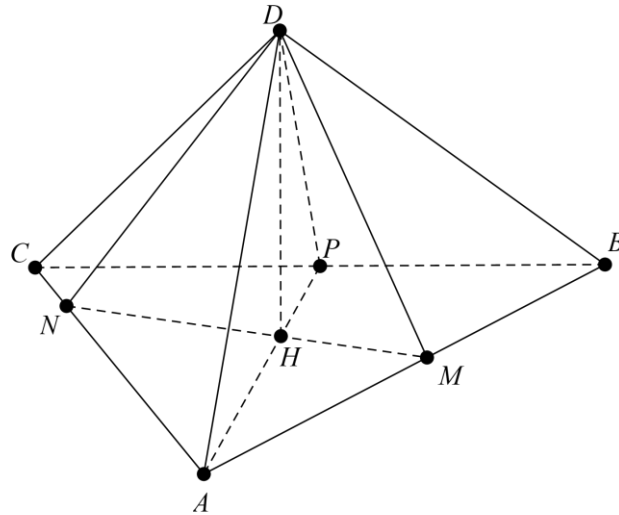
Hãy $KF_{\max} = KE = \frac{AH}{2}$. Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có:

$$SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{R^2}{R\sqrt{5}} = \frac{R\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{v\grave{a}} \quad AH.SB = SA.AB \Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{R.2R}{R\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}R}{5}.$$

Diện tích lớn nhất của $\triangle AHK$ là $S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH}{2} \cdot AH = \frac{AH^2}{4} = \frac{R^2}{5}$.

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R\sqrt{5}}{5} \cdot R^2 = \frac{R^3\sqrt{5}}{75}.$$

Câu 24:

Gọi H là hình chiếu của D trên $MN \Rightarrow DH \perp MN$.

$(DMN) \cap (ABC) = MN$ và $(DMN) \perp (ABC)$. Do đó $DH \perp (ABC)$.

Mà $ABCD$ là tứ diện đều nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều ABC hay H là trọng tâm tam giác đều ABC .

Đặt $AM = x$, $AN = y$ ($0 < x, y \leq 1$).

Diện tích tam giác AMN là $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$.

Gọi P là trung điểm của $BC \Rightarrow AP = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} AP = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mà $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle AMH} + S_{\triangle ANH} = \frac{1}{2} AM \cdot AH \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} AN \cdot AH \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{xy\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow xy = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} \Leftrightarrow x + y = 3xy$.

Đặt $xy = t \Rightarrow x + y = 3t \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $a^2 - 3ta + t = 0 \Leftrightarrow a^2 = (3a - 1)t$ (*), với $t \in (0; 1]$.

Nếu $a = \frac{1}{3}$, (*) trở thành $\frac{1}{9} = 0$.

Nếu $a \neq \frac{1}{3}$, thì (*) trở thành $t = \frac{a^2}{3a - 1}$ (**) $\Rightarrow t' = \frac{3a^2 - 2a}{(3a - 1)^2} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

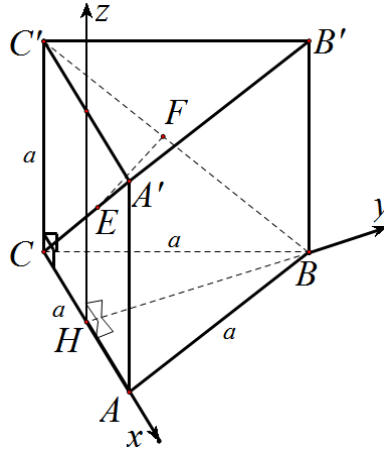
a	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
t'	0	-	-	0
t	0	$+\infty$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$

Để tồn tại hai điểm M, N thỏa mãn bài toán thì (**) có hai nghiệm thuộc tập $(0; 1]$.

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \leq t \leq \frac{1}{2}. \text{ Vậy } \max_D t = \frac{1}{2} \text{ khi } a = 1 \text{ hay } S_1 = \frac{\sqrt{3}}{8}; \min_D t = \frac{4}{9} \text{ khi } a = \frac{2}{3} \text{ hay } S_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{8}.$$

Câu 25:



Gọi H là trung điểm của AC . Chọn hệ trục tọa độ $Hxyz$ như hình vẽ.

Ta có $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{-a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$, $A'\left(\frac{a}{2};0;a\right)$, $B'\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};a\right)$

$C'\left(\frac{-a}{2};0;a\right)$. $\overrightarrow{BC'} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; a\right) = -\frac{a}{2}\vec{u}$, với $\vec{u}(1;\sqrt{3};-2)$. Phương trình tham số của đường

thẳng BC' đi qua điểm C' có vec tơ chỉ phương $\vec{u}(1;\sqrt{3};-2)$

$$\begin{cases} x = \frac{-a}{2} + t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = a - 2t \end{cases} \text{ . Do } F \in BC' \text{ nên } F\left(\frac{-a}{2} + t; \sqrt{3}t; a - 2t\right)$$

$\overrightarrow{A'C} = (-a; 0; -a) = -a\vec{u}'$, với $\vec{u}'(1;0;1)$. Phương trình tham số của đường thẳng $A'C$ đi qua điểm C có vec tơ chỉ phương $\vec{u}' = (1;0;1)$

$$\begin{cases} x = \frac{-a}{2} + t' \\ y = 0 \\ z = t' \end{cases} \text{ . Do } E \in A'C \text{ nên } E\left(\frac{-a}{2} + t'; 0; t'\right). \overrightarrow{EF} = (t - t'; \sqrt{3}t; a - 2t - t').$$

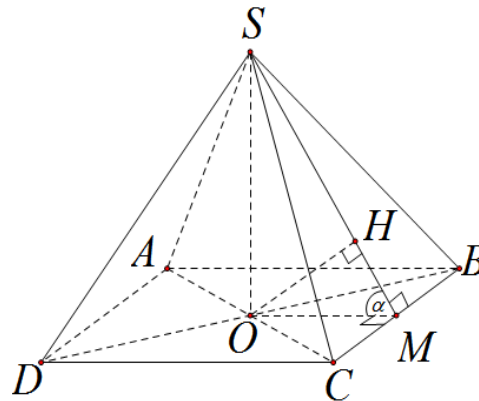
$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right), \overrightarrow{AA'} = (0; 0; a), [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}] = \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{2}; \frac{a^2}{2}; 0\right) = \frac{a^2}{2}\vec{n}, \text{ với } \vec{n}(\sqrt{3}; 1; 0).$$

suy ra vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABB'A')$: $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; 0)$

Do $EF \parallel (ABB'A')$ nên $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t' = 2t$ suy ra $\overrightarrow{EF} = (-t; \sqrt{3}t; a - 4t)$

Có $EF^2 = 20t^2 - 8at + a^2 = f(t)$. Dễ thấy $f(t)$ là một hàm số bậc hai nên $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = \frac{a}{5}$, $\min f(t) = \frac{a^2}{5}$. Vậy $EF_{\min} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Câu 26:



Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm của BC .

Có: $\begin{cases} SM \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $\angle SMO = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$

Trong mặt phẳng (SOM) vẽ $OH \perp SM$ (1).

Ta có: $\begin{cases} SM \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM)$ mà $OH \subset (SOM) \Rightarrow BC \perp OH$ (2)

Từ và suy ra $OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$.

Ta có: $d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2OH = b \Rightarrow OH = \frac{b}{2}$.

$$\sin \alpha = \frac{OH}{OM} \Rightarrow OM = \frac{OH}{\sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \alpha} \Rightarrow AB = \frac{b}{\sin \alpha} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{b^2}{\sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{SO}{OM} \Rightarrow SO = OM \tan \alpha = \frac{b}{2 \sin \alpha} \tan \alpha = \frac{b}{2 \cos \alpha}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \frac{b}{2 \cos \alpha} \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{b^3}{6(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)}$$

$\Rightarrow$ Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos \alpha - \cos^3 \alpha$ lớn nhất.

Đặt $\cos \alpha = t$. Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t < 1$.

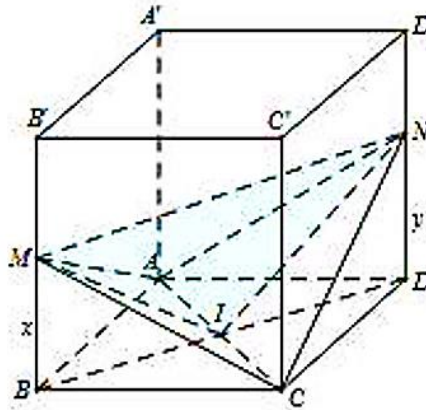
$$\text{Xét: } f(t) = t - t^3 \quad (0 < t < 1) \Rightarrow f'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\sqrt{3}}{3} (L) \\ t = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất bằng $\frac{b^3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 27:



Cách 1: Gọi I là trung điểm AC , đặt $BB' = b$, ta có:

$$\begin{aligned}
 V_{ACMN} &= V_{AMNI} + V_{CMNI} = \frac{1}{3}IC.S_{IMN} + \frac{1}{3}IA.S_{IMN} = \frac{1}{3}AC.S_{IMN} \\
 &= \frac{1}{3}a\sqrt{2}.(S_{BDD'B'} - S_{MND'B'} - S_{BIM} - S_{IDN}) \\
 &= \frac{1}{3}a\sqrt{2}. \left(ab\sqrt{2} - \frac{(2b-x-y)a\sqrt{2}}{2} - \frac{x.a\sqrt{2}}{4} - \frac{y.a\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1}{3}a\sqrt{2}. \left(\frac{x.a\sqrt{2}}{4} + \frac{y.a\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1}{6}a^2(x+y).
 \end{aligned}$$

Vì $(MAC) \perp (NAC)$ nên

$$MI \perp IN \Leftrightarrow IM^2 + IN^2 = MN^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{2} + y^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + (x-y)^2 \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Do đó: } V_{ACMN} = \frac{1}{6}a^2(x+y) \geq \frac{1}{3}a^2\sqrt{xy} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $ACMN$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$ khi $x = y$.

Cách 2: Gọi I là trung điểm AC .

Dễ thấy $\triangle MAC, \triangle NAC$ lần lượt cân tại M, N nên $MI \perp AC, NI \perp AC \Rightarrow AC \perp (MIN)$.

Lại có $AC = (MAC) \cap (NAC); (MAC) \perp (NAC) \Rightarrow MI \perp (NAC) \Rightarrow MI \perp NI$

$$\text{Khi đó } MI^2 + IN^2 = MN^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{2} + y^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + (x-y)^2 \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2}.$$

$$V_{ACMN} = V_{AMNI} + V_{CMIN} = \frac{1}{3} \cdot AI \cdot S_{IMN} + \frac{1}{3} \cdot CI \cdot S_{IMN} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot S_{IMN} = \frac{1}{6} \cdot IM \cdot IN \cdot AC$$

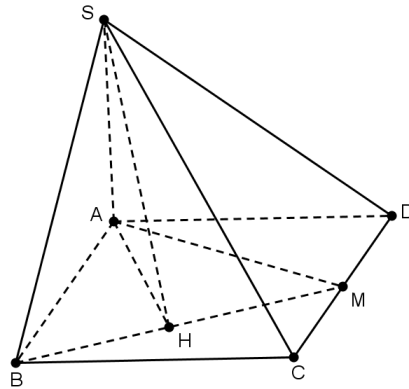
$$\Rightarrow V_{ACMN} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot \sqrt{y^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{(xy)^2 + \frac{a^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{a^4}{4}}$$

$$\text{Mà } xy = \frac{a^2}{2} \text{ nên } V_{ACMN} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2}[(x+y)^2 - 2xy] + \frac{a^4}{2}} = \frac{a^2}{6} \cdot (x+y)$$

$$\text{Do đó } V_{ACMN} = \frac{1}{6} a^2 (x+y) \geq \frac{1}{3} a^2 \sqrt{xy} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $ACMN$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$ khi $x = y$.

Câu 28:

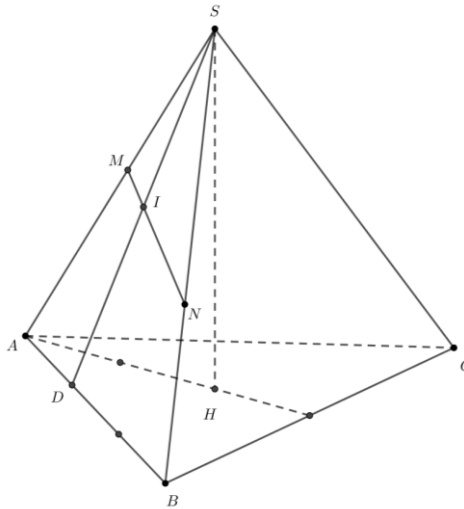


$$\text{Ta có } V_{SABH} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABH} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{1}{2} AH \cdot BH = \frac{b}{6} \cdot AH \cdot BH \leq \frac{b}{6} \cdot \frac{AH^2 + BH^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_{SABH} \leq \frac{b}{12} \cdot AB^2 \Leftrightarrow V_{SABH} \leq \frac{b \cdot a^2}{12}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $AH = BH \Leftrightarrow \angle ABH = 45^\circ \Leftrightarrow \angle ABM = 45^\circ \Leftrightarrow M \equiv D$.

Câu 29:



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì $SABC$ là tứ diện đều và $AB = 2a$ nên

suy ra $SH \perp (ABC)$, H là trọng tâm tam giác đều ABC và $AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Từ đó suy ra } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2a^3 \sqrt{2}}{3} \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \frac{SM}{SA} = k, \frac{SN}{SB} = l, 0 \leq k, l \leq 1. \text{ Ta có: } \frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{S_{\Delta SMI}}{S_{\Delta SAD}} + \frac{2S_{\Delta SNI}}{S_{\Delta SBD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SI}{SD} + \frac{2}{3} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SI}{SD}$$

$$\text{Nên ta có } k.l = \frac{1}{3} \cdot k \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6kl = k + 2l \Leftrightarrow l = \frac{k}{2(3k-1)} \quad (2).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} 0 \leq k \leq 1 \\ 0 \leq l \leq 1 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} 0 \leq k \leq 1 \\ 0 \leq \frac{k}{2(3k-1)} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq k \leq 1 \Rightarrow 3k-1 > 0.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{SMNC}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = k.l \Rightarrow V_{SMNC} = k.l.V_{SABC} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } V_{S.MNC} = k \cdot \frac{k}{2(3k-1)} \cdot \frac{2a^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{27} \cdot \frac{9k^2}{3k-1}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.MNC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{27} \cdot \left(3k + 1 + \frac{1}{3k-1}\right) = \frac{a^3 \sqrt{2}}{27} \cdot \left(3k-1 + \frac{1}{3k-1} + 2\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với hai số dương, ta có:

$$V_{S.MNC} \geq \frac{a^3 \sqrt{2}}{27} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{(3k-1) \cdot \frac{1}{3k-1}} + 2\right) = \frac{4a^3 \sqrt{2}}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 3k-1 = \frac{1}{3k-1} \Leftrightarrow (3k-1)^2 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.MNC} \min = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

Theo đề bài, thể tích khối chóp $S.MNC$ nhỏ nhất bằng $\left(\frac{m}{n}\right)^3 \cdot \frac{a^3}{\sqrt{m}}$, với $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$ nên

ta có $m = 2, n = 3$, suy ra $m + n = 5$.

Câu 30: Hình lăng trụ có đáy là tam giác có độ dài 3 cạnh là a, b, c có chiều cao là x

Khi đó $S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$ và thể tích của hình lăng trụ là $V = x \cdot \frac{abc}{4R}$. Suy ra $R = x \cdot \frac{abc}{4V}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương a, b, c ta có

$$R \leq x \cdot \frac{(a+b+c)^3}{27 \cdot 4V} = x \cdot \frac{p^3}{108 \cdot V}$$

$$\text{Mặt khác } V_{(H)} = \frac{1}{3} \cdot (h-x) \cdot \pi \cdot R^2 \leq \frac{1}{3} \cdot (h-x) \cdot \pi \cdot \frac{x^2 p^6}{(108V)^2}$$

Xét hàm số $f(x) = (h-x) \cdot x^2$ với $0 < x < h$

$$f'(x) = -3x^2 + 2hx \text{ Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2hx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2h}{3}$$

Bảng biến thiên

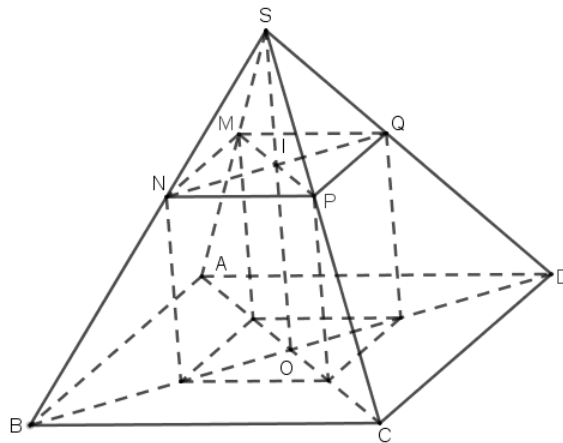
x	0	$\frac{2h}{3}$	h
y'	+	0	-
y	$f\left(\frac{2h}{3}\right)$		

$$\text{Từ đó } f(x) \leq f\left(\frac{2h}{3}\right) = \frac{4}{27} \cdot h^3. \text{ Do đó } V_{(H)} \leq \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{4}{27} \cdot h^3 \cdot \frac{p^6}{(108V)^2}$$

$$V_{(H)}(\max) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{4}{27} \cdot h^3 \cdot \frac{p^6}{(108V)^2} \text{ khi } x = \frac{2h}{3} \text{ và } a = b = c$$

$$\text{Khi đó } R = \frac{2h}{3} \cdot \frac{p^3}{108 \cdot V} = \frac{hp^3}{162 \cdot V}$$

Câu 31: Chọn D



$$\text{Ta có } SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Đặt } SI = x, 0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra } IO = \frac{a\sqrt{2}}{2} - x.$$

$$\text{Ta có } \frac{MP}{AC} = \frac{SI}{SO} = \frac{x\sqrt{2}}{a} \Rightarrow MP = \frac{x\sqrt{2}}{a} \cdot AC = 2x.$$

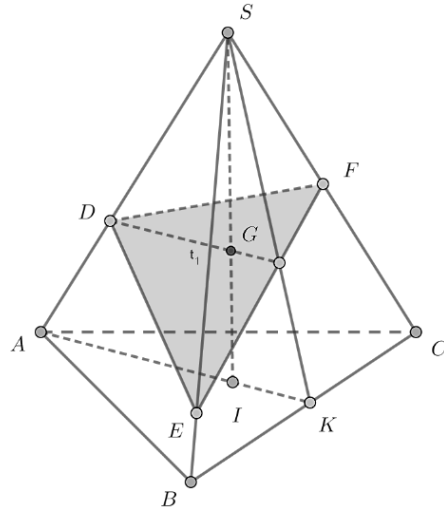
$$\text{Đường tròn nội tiếp hình vuông } MNPQ \text{ có bán kính } R = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Thể tích khối trụ có chiều cao SO và đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác MNPQ là

$$V = \pi R^2 \cdot IO = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x \right) = 2\pi \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x \right) \leq 2\pi \cdot \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} - x}{3} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{54}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Do đó $SI = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 32: Gọi I là trọng tâm $\triangle ABC$. Ta có:



$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 3\vec{SI} \\ \vec{SA} = \frac{SD}{SE} \vec{SD}; \vec{SB} = \frac{SE}{SF} \vec{SE}; \vec{SC} = \frac{SF}{SD} \vec{SF} \end{cases}.$$

$$\text{Mà ta có } \vec{SG} = \frac{3}{4}\vec{SI} = \frac{1}{4}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC})$$

$$\Rightarrow 4\vec{SG} = \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} \Rightarrow 4\vec{SG} = \frac{SD}{SE} \vec{SD} + \frac{SE}{SF} \vec{SE} + \frac{SF}{SD} \vec{SF}$$

$$\Rightarrow \vec{SG} = \frac{SD}{4SE} \vec{SD} + \frac{SE}{4SF} \vec{SE} + \frac{SF}{4SD} \vec{SF} \Rightarrow \vec{SG} = \frac{1}{4SD} \vec{SD} + \frac{1}{4SE} \vec{SE} + \frac{1}{4SF} \vec{SF}$$

$$\text{Do } D, E, F, G \text{ đồng phẳng nên } \frac{1}{4SD} + \frac{1}{4SE} + \frac{1}{4SF} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} = 4$$

$$\text{Ta lại có } P = \frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} \right)^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $SD = SE = SF$.

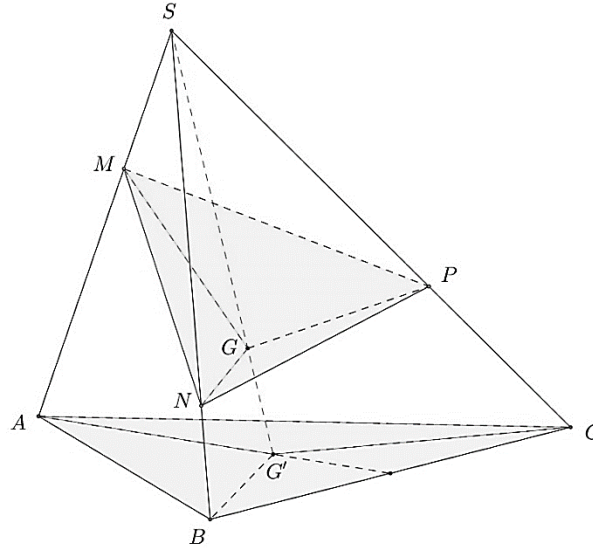
$$\text{Vậy } P = \frac{1}{SD \cdot SE} + \frac{1}{SE \cdot SF} + \frac{1}{SF \cdot SD} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{SD} + \frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} \right)^2 = \frac{16}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $SD = SE = SF = \frac{3}{4}SA$. Vậy $P_{\max} = \frac{16}{3}$

Câu 33: Bổ đề: Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = a$. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua trọng tâm G

của tứ diện lần lượt cắt SA, SB, SC tại M, N, P . CMR: $\frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = \frac{4}{a}$.

Chứng minh:



Gọi G' là trọng tâm $\triangle ABC$. Theo tính chất trọng tâm của tứ diện ta có S, G, G' thẳng hàng và

$$\frac{SG}{SG'} = \frac{3}{4}. \text{ Thêm nữa } V_{SABG'} = V_{SBCG'} = V_{SG'CA} = \frac{1}{3} V_{SABC}.$$

Ta có:

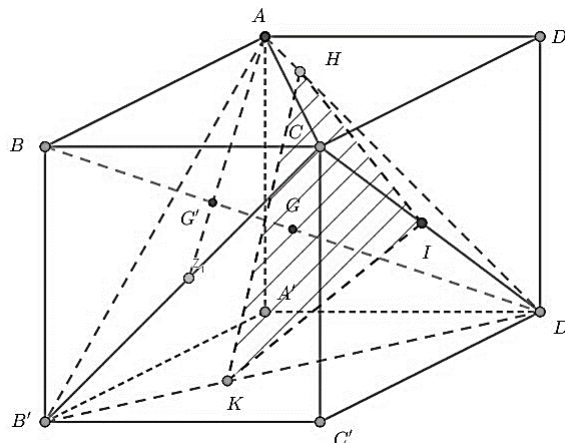
$$\frac{V_{SMNG}}{V_{SABG'}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SG}{SG'} \Leftrightarrow \frac{3V_{SMNG}}{V_{SABC}} = \frac{3SM \cdot SN}{4a^2} \Leftrightarrow \frac{V_{SMNG}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SN}{4a^2} \quad (1).$$

$$\text{Lập luận tương tự thu được } \frac{V_{SNPG}}{V_{SABC}} = \frac{SN \cdot SP}{4a^2} \quad (2) \text{ và } \frac{V_{SGPM}}{V_{SG'CA}} = \frac{SP \cdot SM}{4a^2} \quad (3).$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM}{4a^2} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 \cdot SM \cdot SN \cdot SP = (SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM) \cdot a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = \frac{4}{a}.$$



Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có hình chiếu của $D'B$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ là DB , trên $(ABCD)$ ta có $DB \perp AC$ nên $D'B \perp AC$.

Tương tự, ta có $D'B \perp B'C$. Từ đó suy ra $D'B \perp (B'AC)$.

Xét tứ diện $D'AB'C$ là tứ diện đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Vì $D'B \perp (B'AC)$ nên $D'B$ là đường cao của tứ diện.

Gọi G' là giao điểm của $D'B$ với $(B'AC)$, ta chứng minh được $D'G = \frac{3}{4}D'B$.

Vì tứ diện $D'AB'C$ là tứ diện đều nên G' là trọng tâm của tam giác $B'AC$, suy ra G là trọng tâm của tứ diện $D'AB'C$.

$$\text{Ta có: } T = \frac{1}{D'H \cdot D'I} + \frac{1}{D'I \cdot D'K} + \frac{1}{D'K \cdot D'H} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D'H} + \frac{1}{D'I} + \frac{1}{D'K} \right)^2 \quad (1)$$

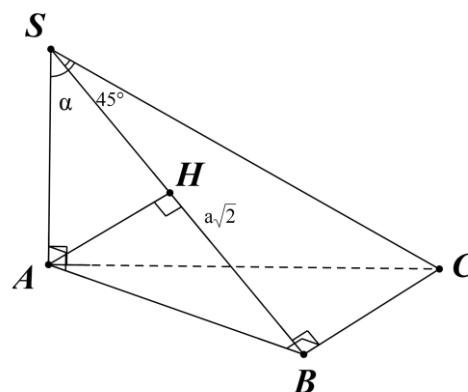
ÁP DỤNG BỔ đề trên: Xét tứ diện $D'AB'C$ là tứ diện đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$, ta có

$$\frac{1}{D'H} + \frac{1}{D'I} + \frac{1}{D'K} = \frac{4}{a\sqrt{2}} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta được

$$T = \frac{1}{D'H \cdot D'I} + \frac{1}{D'I \cdot D'K} + \frac{1}{D'K \cdot D'H} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D'H} + \frac{1}{D'I} + \frac{1}{D'K} \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{a\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{8}{3a^2}.$$

Câu 34:



Dựng AH vuông góc SB tại H . Suy ra $AH \perp BC$. Lại có $SA \perp BC$
Suy ra $BC \perp AB$ và $BC \perp SB$. Suy ra $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$ vuông tại B .

Khi đó $BSC = (SC, (SAB)) = 45^\circ$.

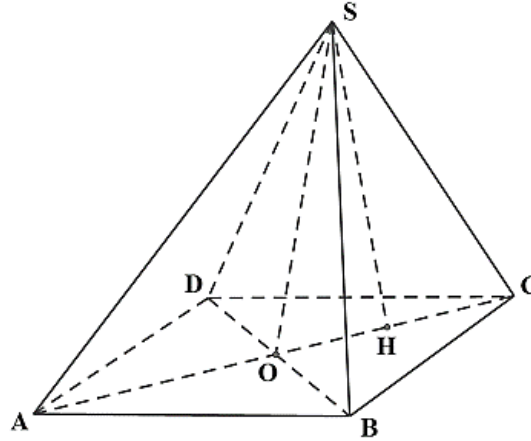
Do đó $\triangle SBC$ vuông cân tại B nên $SB = BC = a\sqrt{2}, SC = 2a$

Mặt khác $SBA = \left(SB, (ABC) \right) = \alpha$. Từ $\triangle SAB$, ta có $AB = a\sqrt{2} \cos \alpha$, $SA = a\sqrt{2} \sin \alpha$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} AB \cdot SA \cdot BC = \frac{2a^3 \sqrt{2}}{6} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \sin 2\alpha$$

$V_{S.ABC}$ lớn nhất khi $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Câu 35:



Tứ giác $ABCD$ có các cạnh bằng nhau nên $ABCD$ là hình thoi do đó AC cắt BD tại trung điểm O của mỗi đường và AC đường trung trực của đoạn thẳng BD .

Gọi H là hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$

Ta có: $SB = SD = 1 \Rightarrow HB = HD$ suy ra H thuộc đường trung trực AC của đoạn thẳng BD .

Xét hai tam giác cân SBD và CBD có $SB = SD = CB = CD = 1$; BD chung

Suy ra: $\triangle SBD = \triangle CBD \Rightarrow SO = OC$

$\triangle SAC$ có đường trung tuyến $SO = \frac{1}{2} AC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S

khi đó: $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{1+x^2}$ và $SH \cdot AC = SA \cdot SC \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Trong tam giác vuông OBC

$$OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2+1}{4}} = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2} \Rightarrow BD = \sqrt{3-x^2} \quad (0 < x < \sqrt{3})$$

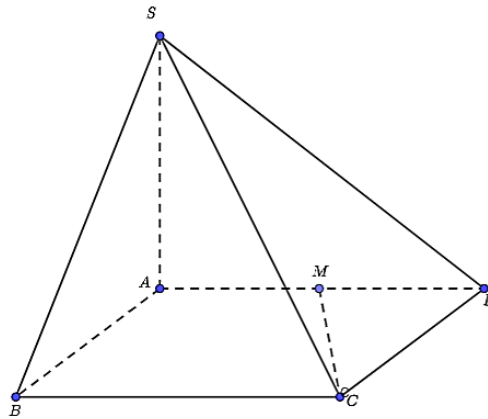
$$\text{Diện tích } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{6} AC \cdot BD \cdot SH = \frac{1}{6} \sqrt{x^2(3-x^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy có $\sqrt{x^2(3-x^2)} \leq \frac{x^2+3-x^2}{2} = \frac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi: $x^2 = 3-x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2} \in (0; \sqrt{3})$

Vậy thể tích chóp $S.ABCD$ lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 36: Chọn A



Ta có $V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCM} = \frac{1}{3}.y.\frac{x+1}{2} = \frac{1}{6}(x+1)\sqrt{1-x^2}$.

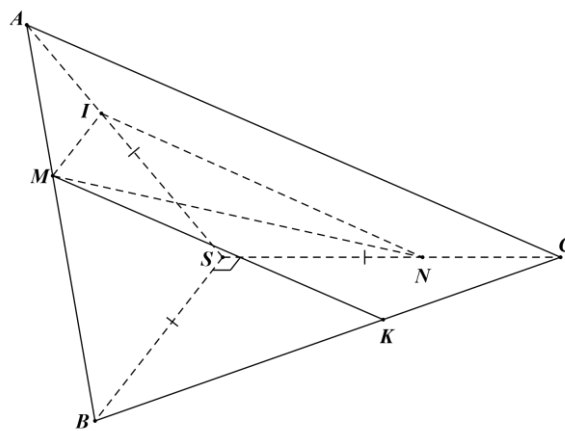
Xét $f(x) = (x+1)^2(1-x^2) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1$ trên $[0; 1]$.

$$\text{C6 } f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0.5 \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ trên $[0;1]$ ta được $\max_{[0;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{16}$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối $S.ABCM$ là $V_{\max} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 37:



Dựng $MK//AC$ ($K \in BC$); $MI//SB$ ($I \in SA$).

Khi đó: $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{SA} = \frac{NC}{SC} = x \Rightarrow IN \parallel MK \Rightarrow \cos(AC; SB) = \cos(IM; MK).$

Ta có $\cos(AC;SB) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB}|}{AC \cdot SB}$ và $AC = a\sqrt{3}, SB = a$

Lại có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}) \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = AS \cdot SB \cdot \cos 120^\circ + SC \cdot SB \cos 90^\circ = -\frac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB}| = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}) = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \cos \angle MK = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ hay } \cos \angle MK = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Trường hợp 1: $\cos IMK = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MN^2 &= MI^2 + MK^2 + 2MI.MK. \frac{\sqrt{3}}{6} = a^2x^2 + 3a^2(1-x)^2 + 2a^2x^2.\sqrt{3}a(1-x).\frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= a^2 \left[x^2 + 3(1-x)^2 + x(1-x) \right] = a^2 \left[3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} \right] \geq \frac{11a^2}{12}. \end{aligned}$$

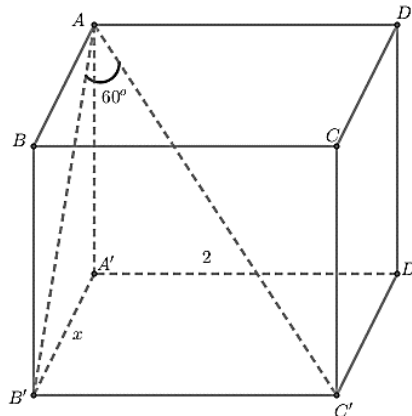
$$\text{Do đó } MN_{\min} = \frac{11a^2}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}. \text{ Vậy } \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{AM}{AB} \Rightarrow V_{SAMN} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{432} a^3.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \cos IMK = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MN^2 &= MI^2 + MK^2 + 2MI.MK. \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = a^2x^2 + 3a^2(1-x)^2 + 2a^2x^2.\sqrt{3}a(x-1).\frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= a^2 \left[x^2 + 3(1-x)^2 + x(x-1) \right] = a^2 \left[5\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{11}{20} \right] \geq \frac{11a^2}{20}. \text{ Do đó } MN_{\min} = \frac{11a^2}{20} \Leftrightarrow x = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{AM}{AB} \Rightarrow V_{SAMN} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{400}.$$

Câu 38:



Ta có $(AC', (ABB'A')) = (AC', AB') = B'AC' = 60^\circ$. Xét tam giác $AB'C'$ vuông tại B' có

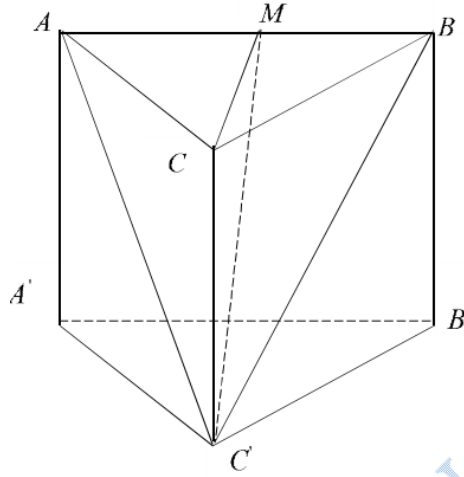
$$AB' = B'C' \cdot \cot 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ Xét tam giác } ABB' \text{ vuông tại } B \text{ có } BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - x^2}.$$

Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = AA'.A'D'.BB' = 2x\sqrt{\frac{4}{3} - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + \frac{4}{3} - x^2}{2} = \frac{4}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{\max} = \frac{4}{3}$.

Câu 39:



Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow$ góc giữa (ABC') và (ABC) là $C'MC = \alpha$. Theo công thức diện tích hình chiếu ta có $S_{ABC} = S_{ABC'} \cdot \cos \alpha = 4\sqrt{3} \cdot \cos \alpha$

$$\text{mà } S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB = 4\sqrt{\cos \alpha} \Rightarrow CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3\cos \alpha}$$

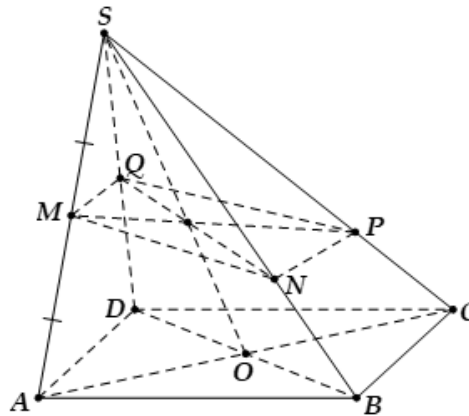
$$\Rightarrow CC' = CM \tan \alpha = \frac{2\sqrt{3} \sin \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

$$\Rightarrow V = CC' \cdot S_{ABC} = 24 \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha} = 24 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}.$$

$$\text{Đặt } \cos \alpha = t, 0 < t < 1 \Rightarrow V = 24 \sqrt{t(1-t^2)}.$$

Xét hàm số $f(t) = t(1-t^2)$ trên $(0;1)$ ta thu được $V_{\max} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 40:



$$\text{Đặt } \frac{SP}{SC} = x, 0 < x \leq 1. \text{ Ta có } \frac{SM}{SA} + \frac{SP}{SC} = \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} \Rightarrow \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} + x - \frac{2}{3} = x - \frac{1}{6} \left(x > \frac{1}{6} \right).$$

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành nên có $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2V_{S.ACD}$.

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}x; \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2}x \left(x - \frac{1}{6} \right).$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x \left(x - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x.$$

Xét $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$ với $\frac{1}{6} < x \leq 1$; $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \notin \left(\frac{1}{6}; 1\right]$.

x	$\frac{1}{6}$	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{\left(\frac{1}{6}; 1\right]} f(x) = \frac{3}{8}$. Vậy $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{8}$.

A

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình nón đỉnh S , đường tròn đáy có tâm O và bán kính $3a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120° . Thiết diện qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm M, N gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $mp(SMN)$ và F là trung điểm của MN . Khi tam giác SMN có diện tích lớn nhất, tính thể tích của khối nón tạo thành khi quay $\triangle OHF$ xung quanh cạnh OH .

A. $\frac{9\sqrt{2}\pi a^3}{4}$

B. $\frac{5\sqrt{2}\pi a^3}{4}$

C. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{4}$

D. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{4}$

Câu 2: Cho mặt cầu (S) bán kính R . Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S) . Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là:

A. $\frac{32\pi R^3}{81}$

B. $\frac{32R^3}{81}$

C. $\frac{32\pi R^3}{27}$

D. $\frac{32R^3}{27}$

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Một mặt phẳng thay đổi, vuông góc với SO cắt SO, SA, SB, SC, SD lần lượt tại I, M, N, P, Q . Một hình trụ có một đáy nội tiếp tứ giác $MNPQ$ và một đáy nằm trên hình vuông $ABCD$. Tính độ dài SI sao cho thể tích khối trụ lớn nhất

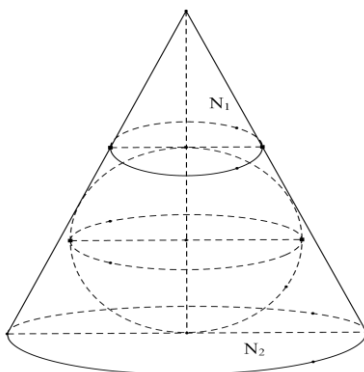
A. $SI = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

B. $SI = \frac{a}{3}$

C. $SI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $SI = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Câu 4: Một hình nón bị cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng (P) chia hình nón làm hai phần (N_1) và (N_2) . Cho hình cầu nội tiếp (N_2) như hình vẽ sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2) . Một mặt phẳng đi qua trục hình nón và cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tan góc nhọn của hình thang cân là



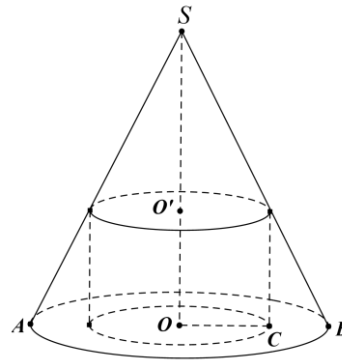
A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 5: Cho khối nón (N) không đổi cho trước có bán kính đáy là R và chiều cao là h . Khối trụ (T) thay đổi nội tiếp (N) có bán kính r . Tính r theo R để thể tích khối trụ (T) là lớn nhất.



- A. $r = \frac{2}{3}R$. B. $r = \frac{1}{3}R$. C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. D. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

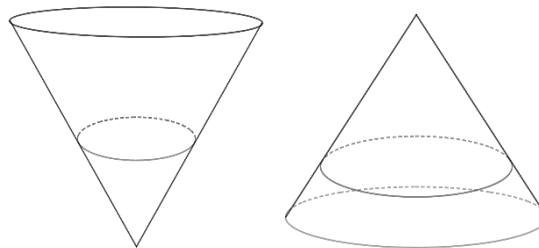
Câu 6: Cho hai mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm O , bán kính R thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng (P), (Q) để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

- A. $h = R$. B. $h = R\sqrt{2}$. C. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. D. $h = 2R\sqrt{3}$.

Câu 7: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ biết góc giữa hai mặt phẳng ($A'BD$) và ($ABCD$) bằng 60° , diện tích một mặt bên của lăng trụ là $2\sqrt{6}a^2$. Tính thể tích khối trụ tròn xoay ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{2}{3}\sqrt{6}\pi a^3$. B. $V = \sqrt{6}\pi a^3$. C. $V = 2\sqrt{6}\pi a^3$. D. $V = 2\pi a^3$.

Câu 8: Một cốc thủy tinh hình nón có chiều cao 25cm , người ta đổ vào cốc thủy tinh một lượng nước, sao cho chiều cao của lượng nước trong cốc bằng $\frac{3}{5}$ chiều cao cốc thủy tinh, sau đó người ta bịt kín miệng cốc, rồi lật úp cốc xuống thì chiều cao của nước lúc này là bao nhiêu?



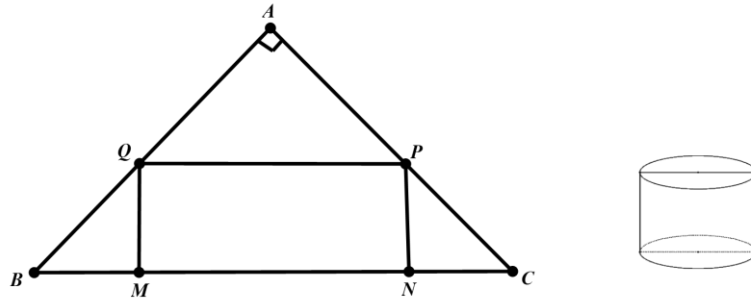
- A. $(25 - 6\sqrt{90})\text{cm}$. B. $(25 - 5\sqrt[3]{68})\text{cm}$. C. $(25 - 4\sqrt[3]{98})\text{cm}$. D. $5(5 - \sqrt[3]{98})\text{cm}$.

Câu 9: Ông A dự định làm một cái thùng phi hình trụ với dung tích 1m^3 bằng thép không gỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho 1m^2 thép không gỉ là 400.000 đồng. Hỏi chi phí nguyên vật liệu làm cái thùng thấp nhất là bao nhiêu?

- A. 1.758.000 đồng. B. 1.107.000 đồng. C. 2.790.000 đồng. D. 2.197.000 đồng.

Câu 10: Người ta muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác vuông cân ABC tại A có $AB = 10\sqrt{2}\text{ (cm)}$. Người ta muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật

$MNPQ$ từ mảnh tôn trên (với M, N thuộc cạnh BC ; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ . Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà người ta có thể làm được là:

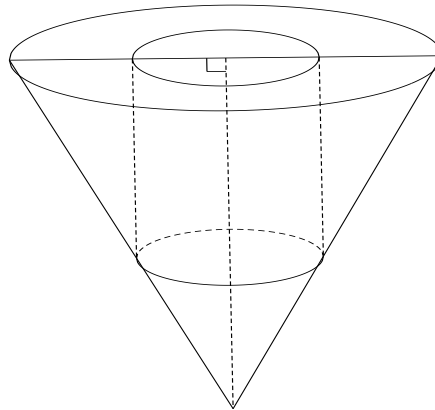


- A. $\frac{4001}{27\pi}$. B. $\frac{4003}{9\pi}$. C. $\frac{1994}{9\pi}$. D. $\frac{4000}{27\pi}$.

Câu 11: Cho hình nón đỉnh S có độ dài đường cao là R và đáy là đường tròn tâm O bán kính R . Gọi (d) là tiếp tuyến của đường tròn đáy tại A và (P) là mặt phẳng chứa SA và (d) . Mặt phẳng (Q) thay đổi qua S cắt đường tròn O tại hai điểm C, D sao cho $CD = \sqrt{3}R$. Gọi α là góc tạo bởi (P) và (Q) . Tính giá trị lớn nhất của $\cos \alpha$.

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 12: Một bình đựng nước dạng hình nón, đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón đồng thời khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón.



Tính diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước.

- A. $S_{xq} = 4\pi(dm^2)$. B. $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}(dm^2)$.
C. $S_{xq} = 2\pi(dm^2)$. D. $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2}(dm^2)$.

Câu 13: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Gọi BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC .

A. $S_{SBC} = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

B. $S_{SBC} = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$.

C. $S_{SBC} = \frac{a^2}{3}$.

D. $S_{SBC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{3}$.

Câu 14: Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO , A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO = 30^\circ$, $SAB = 60^\circ$. Tính độ dài đường sinh của hình nón theo a .

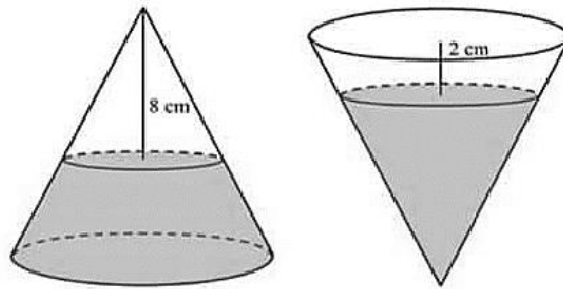
A. $a\sqrt{3}$.

B. $2a\sqrt{3}$.

C. $a\sqrt{5}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Câu 15: Một cái phễu có dạng hình nón, khi cho nước vào thì khoảng cách từ đỉnh của hình nón và mặt nước là 8 cm, úp ngược hình nón, ta thấy mặt nước cách mặt đáy của hình nón một khoảng cách là 2 cm.



Tính chiều cao của hình nón?

A. $\sqrt{85} - 1$.

B. $1 + \sqrt{65}$.

C. $\sqrt{65} - 1$.

D. $1 + \sqrt{85}$.

Câu 16: Cho hình nón có chiều cao và bán kính hình tròn đáy đều bằng $2a$. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh và tạo với đáy của hình nón một góc 60° . Tính diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (α) .

A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^2$.

B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}a^2$.

C. $8\sqrt{2}a^2$.

D. $4\sqrt{2}a^2$.

Câu 17: Cho hình nón có chiều cao và bán kính hình tròn đáy đều bằng $2a$. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh và tạo với đáy của hình nón một góc 60° . Tính diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (α) .

A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^2$.

B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}a^2$.

C. $8\sqrt{2}a^2$.

D. $4\sqrt{2}a^2$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD . Xét khối nón (N) có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác HKL và có đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích của khối nón (N) .

A. $\frac{\pi a^3}{12}$.

B. $\frac{\pi a^3}{6}$.

C. $\frac{\pi a^3}{8}$.

D. $\frac{\pi a^3}{24}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) ngoại tiếp mặt cầu đường kính AB có B là tâm đường tròn đáy khối nón. Gọi S là đỉnh của khối nón (N) .

Khi thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất thì mặt phẳng qua đỉnh S và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Tính $T = b + c + d$.

- A. $T = 12$. B. $T = 24$. C. $T = 36$. D. $T = 18$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và đi qua điểm $A(0;4;1)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A và nội tiếp trong khối cầu (S). Khi diện tích xung quanh của hình nón (N) lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $-x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $b + c + 2d$ bằng

- A. 12. B. 6. C. -12. D. -6.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 48$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S) đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{88\pi}{3}$. B. 39π . C. $\frac{125\pi}{3}$. D. $\frac{128\pi}{3}$.

Câu 22: Cho hình nón đỉnh S có thiết diện qua trục là tam giác có chu vi bằng 10. Khi thể tích của khối nón lớn nhất thì diện tích đáy của hình nón bằng

- A. 3π . B. 6π . C. 5π . D. 4π .

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3), B(-3;0;5)$. Một khối nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm A , có các đường sinh và mặt đáy tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB . Khi thể tích khối nón đạt giá trị nhỏ nhất, cao độ của điểm S là

- A. -8. B. -10. C. -1. D. 13.

Câu 24: Cho một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{5}$ và góc ở đỉnh là 2α với $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo một đường tròn tâm H . Gọi V là thể tích của khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H . Biết $V = \frac{50\pi}{81}$

khi $SH = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a^2 - 2b^3$.

- A. 12. B. 23. C. 21. D. 32.

Câu 25: Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng 2 và có chiều cao bằng 3. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30° . Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng

- A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 26: Cho một hình trụ có chiều cao bằng 6 và bán kính bằng 5. Lấy hai điểm A và A' thuộc hai đường tròn đáy khác nhau của hình trụ và $AA' = 10$. Khoảng cách giữa đường thẳng AA' và trục của hình trụ đã cho bằng

- A. $4\sqrt{21}$. B. $2\sqrt{21}$. C. 5. D. 3.

Câu 27: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 2. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng (P) song song và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\sqrt{3}$, ta được thiết diện là một hình vuông. Gọi S_1, S_2 ($S_1 < S_2$) lần lượt là diện tích xung quanh của hai phần hình trụ được cắt ra. Tính S_1 .

A. $S_1 = \frac{3\pi}{4}$. B. $S_1 = \frac{4\pi}{3}$. C. $S_1 = \frac{5\pi}{3}$. D. $S_1 = \frac{20\pi}{3}$.

Câu 28: Cho hình nón có chiều cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12cm . Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S = 500\text{cm}^2$. B. $S = 300\text{cm}^2$. C. $S = 406\text{cm}^2$. D. $S = 400\text{cm}^2$.

Câu 29: Cho hình trụ có đường cao $h = 5\text{cm}$, bán kính đáy $r = 3\text{cm}$. Xét mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ, cách trục 2cm . Tính diện tích S thiết diện của hình trụ với (P) .

A. $S = 5\sqrt{5}\text{cm}^2$. B. $S = 3\sqrt{5}\text{cm}^2$. C. $S = 10\sqrt{5}\text{cm}^2$. D. $S = 6\sqrt{5}\text{cm}^2$.

Câu 30: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , chiều cao $2R$ và bán kính đáy R . Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° . Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2R}{3}$. B. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$.

Câu 31: Có một khối gỗ hình lăng trụ đứng có chiều cao 200cm và đáy là hình tam giác có độ dài ba cạnh là 50cm , 120cm và 130cm . Người ta tiện khối gỗ này thành một khối trụ. Thể tích lớn nhất của khối trụ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $251327,41\text{cm}^3$. B. $2654645,79\text{cm}^3$. C. $62831,85\text{cm}^3$. D. $83775,81\text{cm}^3$.

Câu 32: Cho hình trụ (T) có hai đường tròn đáy $(O), (O')$. Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đường tròn đáy (O) và C, D là hai điểm phân biệt thuộc đường tròn đáy (O') . Khi tổng hai cạnh $(AB + AC)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $4a$ thì $AD = 2a$ và $CD = a$. Chiều cao hình trụ (T) bằng:

A. $\frac{4a - a\sqrt{3}}{2}$. B. $a\sqrt{8\sqrt{5} - 16}$. C. $a\sqrt{8\sqrt{3} - 14}$. D. $a\sqrt{8\sqrt{2} - 10}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{7}$ và vuông góc với đáy. Lấy điểm M trên cạnh SC sao cho $CM < a$. Gọi (C) là hình nón có đỉnh C , các điểm B, M, D thuộc mặt xung quanh, điểm A thuộc mặt đáy của hình nón. Tính diện tích xung quanh của (C)

A. $\frac{16\sqrt{7}}{15}\pi a^2$. B. $\frac{8\sqrt{30}}{15}\pi a^2$. C. $\frac{32\sqrt{2}}{15}\pi a^2$. D. $\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi a^2$.

Câu 34: Nhân dịp năm mới để trang trí một cây thông Noel, ở sân trung tâm có hình nón (N) như hình vẽ sau. Người ta cuộn quanh cây bằng một sợi dây đèn LED nhấp nháy, bóng đèn hình hoa tuyết từ điểm A đến điểm M sao cho sợi dây luôn tựa trên mặt nón. Biết rằng bán kính đáy hình nón

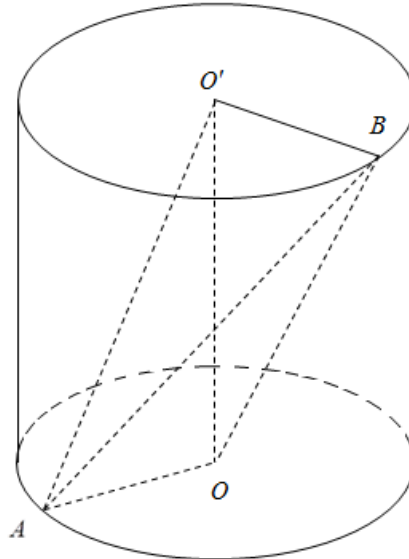
bằng $8m$, độ dài đường sinh bằng $24m$ và M là điểm sao cho $2\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$. Hãy tính chiều dài nhỏ nhất của sợi dây đèn cần có.

- A. $8\sqrt{19}(m)$. B. $8\sqrt{13}(m)$. C. $8\sqrt{7}(m)$. D. $9\sqrt{12}(m)$.

Câu 35: Cho tam giác đều OAB có cạnh bằng $a > 0$. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB, OB . Đường thẳng EF cắt đường thẳng d tại N . Quay miền tam giác OBN và OFN quanh d tạo thành hai khối nón tròn xoay. Xác định x để tổng thể tích hai khối nón tròn xoay nhỏ nhất.

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 36: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy hai điểm A, D sao cho $AD = 2a\sqrt{3}$. Gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') . Trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy.



Tính $\tan \alpha$ khi thể tích tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. B. $\tan \alpha = 1$. C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

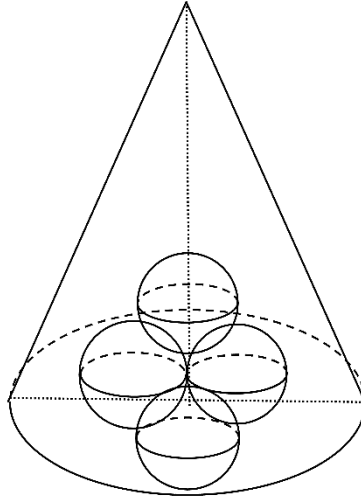
Câu 37: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 4\text{ cm}$, điểm M di động trên nửa đường tròn đó. Gọi d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M , d cắt các tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A, B lần lượt tại D, C . Khi quay tứ giác $ABCD$ quanh trục AB ta được một vật thể tròn xoay có thể tích nhỏ nhất là

- A. $16\pi\text{ cm}^3$. B. $\frac{16\pi}{3}\text{ cm}^3$. C. $32\pi\text{ cm}^3$. D. $\frac{32\pi}{3}\text{ cm}^3$.

Câu 38: Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính $R = 5a$. Gọi A là điểm bất kì thuộc mặt cầu, mặt phẳng đi động (P) vuông góc với bán kính IA tại H và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Khi đó thể tích lớn nhất của khối nón có đỉnh I , đáy là đường tròn (C) bằng

A. $\frac{125\pi\sqrt{3}}{9}a^3$. B. $\frac{125\pi\sqrt{3}}{27}a^3$. C. $\frac{250\pi\sqrt{3}}{9}a^3$. D. $\frac{250\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Câu 39: Cho hình nón chứa bốn quả cầu có bán kính r , trong đó 3 quả cầu tiếp xúc với đáy của hình nón, tiếp xúc lẫn nhau, và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, quả cầu thứ tư tiếp xúc với ba mặt cầu kia và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón. Khi đó khoảng cách từ đỉnh của hình nón đến mặt phẳng đi qua tâm của 3 quả cầu tiếp xúc đáy là bao nhiêu?



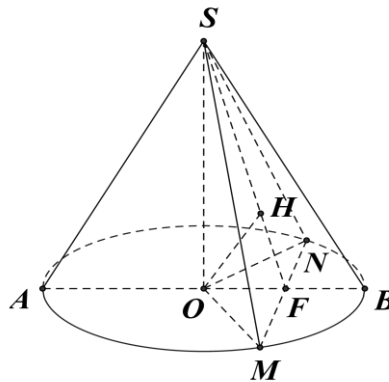
A. $r\sqrt{3} + r$. B. $r\sqrt{3} + \frac{2r\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{2r\sqrt{6} + r\sqrt{3}}{3}$. D. $2r + r\sqrt{6}$.

Câu 40: Người ta dùng thủy tinh trong suốt để làm một cái chặn giấy hình tứ diện đều. Để trang trí cho nó, người thiết kế đặt trong khối tứ diện 4 quả cầu nhựa màu xanh có bán kính bằng nhau là $r = \sqrt{2}(\text{cm})$. Biết rằng 4 quả cầu này đôi một tiếp xúc với nhau và mỗi mặt của tứ diện tiếp xúc với 3 quả cầu, đồng thời không cắt quả cầu còn lại. Nếu bỏ qua bề dày của các mặt thì người ta cần dùng bao nhiêu thủy tinh để làm chặn giấy trên (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

A. $195,66(\text{cm}^3)$. B. $62,06(\text{cm}^3)$. C. $30,03(\text{cm}^3)$. D. $65,55(\text{cm}^3)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A



Gọi AB là đường kính hình tròn đáy và $AB \cap MN = F$.

Ta có: $\triangle SOB$ vuông tại $O \Rightarrow SO = \frac{OB}{\tan 60^\circ} = 3a$.

Đặt $OF = x$ ($0 < x < 3\sqrt{3}a$); $FN = \sqrt{ON^2 - OF^2} = \sqrt{27a^2 - x^2}$

$$SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \sqrt{9a^2 + x^2}; S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} SF \cdot MN = SF \cdot FN = \sqrt{(27a^2 - x^2)(9a^2 + x^2)}$$

$$= \sqrt{-x^4 + 18a^2x^2 + 243a^4}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^4 + 18a^2x^2 + 243a^4$ có $f'(x) = -4x^3 + 36a^2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3a \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	$3a$	$3a\sqrt{3}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$			$324a^4$	

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $S_{\max} = \sqrt{324a^4} = 18a^2$ tại $x = 3a$.

Khi đó $OF = 3a$, $\triangle SOF$ vuông tại O có $OS = OF = 3a \Rightarrow \triangle SOF$ vuông cân tại O .

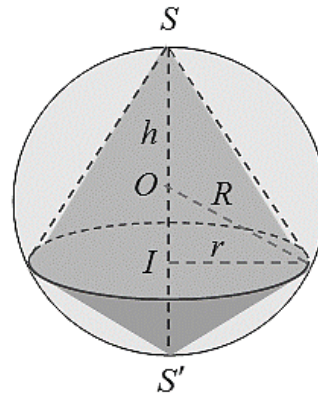
Từ O kẻ $OH \perp SF \Rightarrow OH \perp (SMN) \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của O lên $mp(SMN)$.

Do đó OH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của $\triangle SOF$, suy ra

$$OH = SH = HF = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Khi quay $\triangle OHF$ xung quanh cạnh OH ta được khối nón có chiều cao $OH = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ và bán kính đáy $HF = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Vậy thể tích của khối nón tạo thành là: } V = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}\pi a^3}{4}.$$



Xét hai khối nón có chung đáy là đường tròn (C) có diện tích $S_{(C)}$. Khối nón nào có đường cao lớn hơn thì thể tích lớn hơn. Ta có thể tích khối nón đỉnh S lớn hơn hoặc bằng thể tích khối nón đỉnh S' . Do đó chỉ cần xét khối nón đỉnh S có bán kính đường tròn đáy là r và đường cao là $SI = h$ với $h \geq R$. Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là:

$$V = \frac{1}{3}h.S_{(C)} = \frac{1}{3}h.\pi.r^2 = \frac{1}{3}h.\pi.\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2h^2R).$$

Xét hàm số: $f(h) = -h^3 + 2h^2R$ với $h \in [R; 2R]$. Ta có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.

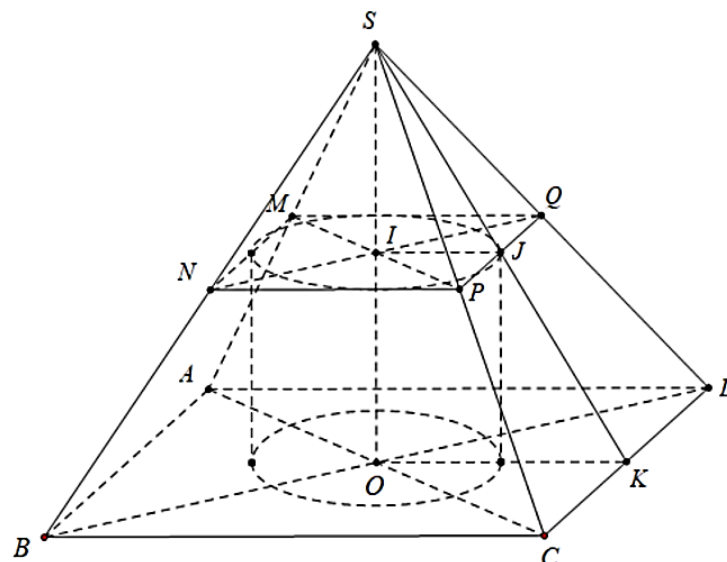
$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0$ hoặc $h = \frac{4R}{3}$. Bảng biến thiên:

h	R	$\frac{4R}{3}$	$2R$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$	R^3	$\frac{32R^3}{27}$	0

Ta có: $\max f(h) = \frac{32}{27}R^3$ tại $h = \frac{4R}{3}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là $V = \frac{1}{3}\pi \frac{32}{27}R^3 = \frac{32}{81}\pi R^3$.

Câu 3: Chọn A



Giả sử bán kính đường tròn đáy của hình trụ bằng $x \left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của PQ, CD . Suy ra $IJ = x$.

$$SK = \sqrt{SD^2 - KD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Do mặt phẳng (P) vuông góc với SO nên $IJ \parallel OK \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{IJ}{OK} = \frac{2x}{a} \Rightarrow SI = \frac{2x}{a} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } OI &= SO - SI = \frac{a\sqrt{2}}{2} - x\sqrt{2}. \text{ Thể tích của khối trụ nội tiếp cần tìm bằng } V = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi x^2 (a - 2x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi x \cdot x \cdot (a - 2x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \cdot \frac{1}{27} (x + x - 2x + a)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{54} a^3. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = a - 2x \Rightarrow x = \frac{a}{3}$.

Vậy nếu $SI = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì khối trụ tạo thành có thể tích lớn nhất.

Câu 4: Chọn A

Gọi α là góc cần tìm.

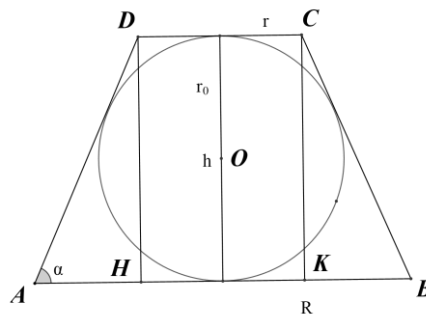
R, r lần lượt là bán kính của mặt đáy và mặt phẳng cắt hình nón song song với đáy.

h là chiều cao của hình nón cụt (N_2) và r_0 là bán kính của hình cầu nội tiếp hình nón cụt. Vì

$$\text{vậy: } r_0 = \frac{h}{2}.$$

S_c là diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình cầu nội tiếp nón cụt.

$S_{(N_2)}$ là diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình nón cụt (N_2)



Ta có: DC, CB, AB, AD là các tiếp tuyến của đường tròn tâm O

Nên: $r + R = BC$. Xét tam giác CKB vuông tại K : $BC^2 = CK^2 + KB^2$

$$\Rightarrow (R + r)^2 = (R - r)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr \quad (1).$$

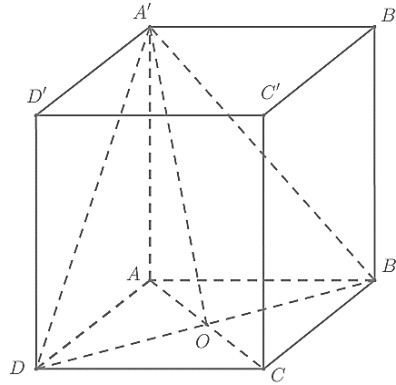
$$\text{Ta có: } \frac{S_c}{S_{(N_2)}} = \frac{\frac{4}{3} \pi r_0^3}{\frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r_0^3}{h (R^2 + r^2 + Rr)} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{h^3}{8h (R^2 + r^2 + Rr)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{h^2}{(R^2 + r^2 + Rr)} = 1 \Rightarrow h^2 = R^2 + r^2 + Rr \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2), ta có: } R^2 + r^2 + Rr = 4Rr \Rightarrow (R - r)^2 + 2Rr = 3Rr \Rightarrow (R - r)^2 = Rr$$

Ta thấy rl lớn nhất là $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $3r^2 = l^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Chọn C



Ta có $\begin{cases} A'A \perp BD \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow A'O \perp BD$.

Khi đó $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ AO \perp BD, AO \subset (ABCD) \Rightarrow ((A'BD), (ABCD)) = A'OA = 60^\circ \\ A'O \perp BD, A'O \subset (A'BD) \end{cases}$

Đặt $AB = x, (x > 0)$.

Ta được $AO = \frac{AC}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}, A'A = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{x\sqrt{6}}{2}$.

Theo đề, $S_{ABB'A'} = 2\sqrt{6}a^2 \Leftrightarrow AB \cdot A'A = 2\sqrt{6}a^2 \Leftrightarrow x \cdot \frac{x\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4a^2$.

Vì $x > 0$ nên $x = 2a$.

Thể tích khối trụ tròn xoay ngoại tiếp lăng trụ đã cho là: $V = \pi R^2 \cdot h$, với:

$R = OA = \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}, h = A'A = \frac{x\sqrt{6}}{2} = \frac{2a\sqrt{6}}{2} = a\sqrt{6}$.

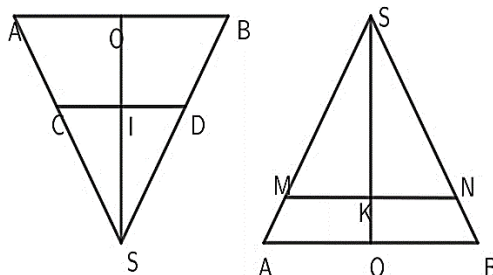
Ta được $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot (a\sqrt{2})^2 \cdot a\sqrt{6} = 2\sqrt{6}\pi a^3$.

Câu 8: Chọn D

Gọi V, V_{nc}, V' lần lượt là thể tích cốc hình nón, thể tích nước và thể tích phần không chứa nước.

Ta có: $V = \frac{1}{3}h \cdot \pi \cdot R^2$. Mặt khác: $\frac{R_{nc}}{R} = \frac{h_{nc}}{h} = \frac{SI}{SO} = \frac{3}{5} \Rightarrow R_{nc} = \frac{3}{5}R, h_{nc} = \frac{3}{5}h$

$V_{nc} = \frac{1}{3}h_{nc}\pi R_{nc}^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}h \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{5}R\right)^2 = \frac{27}{125}V \Rightarrow V' = \frac{98}{125}V$



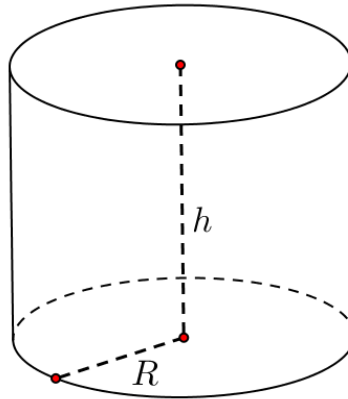
Khi ta lật úp cốc nước thì h', h_{nc} lần lượt là chiều cao phần không chứa nước và phần chứa nước

$$h = h' + h_{nc}. \text{ Ta đặt: } \frac{SK}{SO} = \frac{KM}{OA} = \frac{h'}{h} = \frac{R'}{R} = k \Rightarrow h' = k.h, R' = k.R.$$

$$V' = \frac{1}{3}h'.\pi R'^2 \Leftrightarrow \frac{98}{125}V = \frac{1}{3}.k.h.\pi.(k.R)^2 \Leftrightarrow \frac{98}{125}.\frac{1}{3}h.\pi.R^2 = \frac{1}{3}h\pi R^2.k^3 \Rightarrow k = \frac{\sqrt[3]{98}}{5}.$$

$$\text{Ta có } h' = k.h = \frac{\sqrt[3]{98}}{5}.h \Rightarrow h_{nc} = h - \frac{\sqrt[3]{98}}{5}.h = 5\left(5 - \sqrt[3]{98}\right)cm.$$

Câu 9: Chọn A



Giả sử thùng hình trụ có chiều cao h , bán kính đáy R và độ dài đường sinh $l = h$.

$$\text{Dung tích của thùng là: } V = \pi R^2 h \Leftrightarrow \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}.$$

Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là:

$$S = 2\pi Rl + \pi R^2 = 2\pi Rh + \pi R^2 = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} + \pi R^2 = \frac{2}{R} + \pi R^2.$$

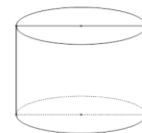
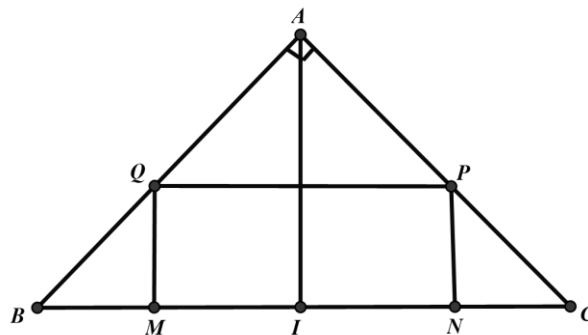
Để chi phí nguyên vật liệu làm cái thùng thấp nhất thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy

$$\text{của thùng phải nhỏ nhất. Ta có: } S = \frac{2}{R} + \pi R^2 = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} \cdot \pi R^2} = 3\sqrt[3]{\pi} (m^2).$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \frac{1}{R} = \pi R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}. \text{ Khi đó: } S_{\min} = 3\sqrt[3]{\pi} (m^2).$$

Vậy chi phí nguyên vật liệu làm cái thùng thấp nhất là: $3\sqrt[3]{\pi} \cdot 400000 \approx 1.758.000$

Câu 10: Chọn D



Gọi I là trung điểm BC . Suy ra I là trung điểm MN

$$\text{Đặt } MN = 2x \ (0 < x < 10) \Rightarrow \frac{MQ}{AI} = \frac{BM}{BI} \Rightarrow MQ = \frac{AI \cdot BM}{BI} = \frac{10(10-x)}{10} = 10-x.$$

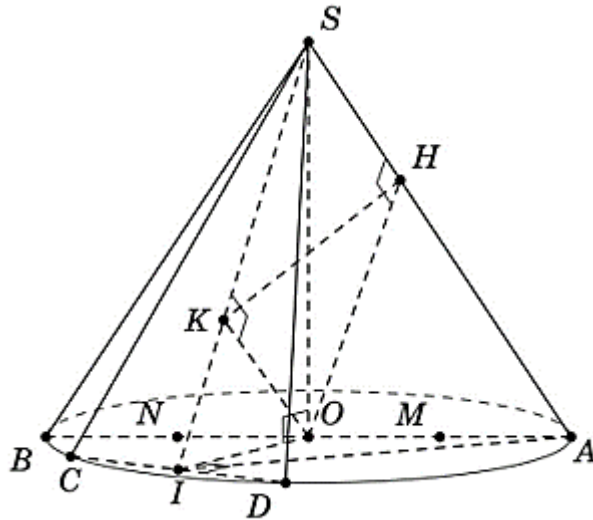
Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R = \frac{MN}{2\pi} = \frac{x}{\pi} \Rightarrow V_T = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 (10-x) = \frac{1}{\pi}(-x^3 + 10x^2)$.

Xét $f(x) = \frac{1}{\pi}(-x^3 + 10x^2)$ với $0 < x < 10$. Khi đó: $\max_{x \in (0;10)} f(x) = \frac{4000}{27\pi}$ khi $x = \frac{20}{3}$.

Câu 11: Chọn A

Gọi I là trung điểm CD , khi đó $OI \perp CD$, hạ $OK \perp SI$ tại $K \Rightarrow OK \perp (Q)$.

$OH \perp SA \Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow \alpha = (OH, OK)$



$\Rightarrow \cos \alpha = \left| \frac{OK^2 + OH^2 - HK^2}{2OH \cdot OK} \right|$. Ta có $OI = \sqrt{OD^2 - ID^2} = \frac{R}{2}$, $OK = \frac{OI \cdot OS}{\sqrt{OI^2 + SO^2}} = \frac{R}{\sqrt{5}}$; $OH = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$HK^2 = SK^2 + SH^2 - 2SK \cdot SH \cos \angle ASI = SK^2 + SH^2 - 2SK \cdot SH \cdot \frac{SI^2 + SA^2 - AI^2}{2SI \cdot SA}$.

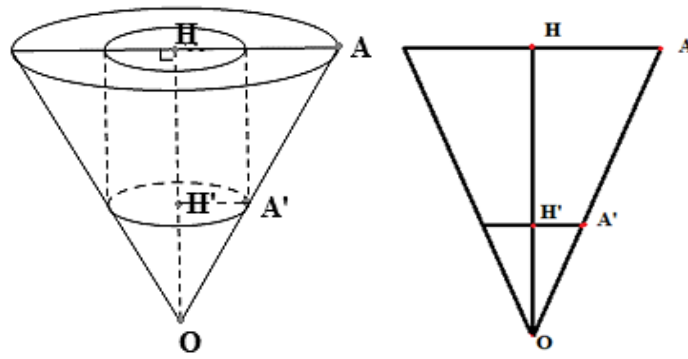
$SA = \sqrt{2}R$, $SI = \frac{\sqrt{5}}{2}R$, $SH = \frac{SO^2}{SA} = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $SK = \frac{SO^2}{SI} = \frac{2}{\sqrt{5}}R$.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm OA và OB khi đó $AM \leq AI \leq AN$.

Suy ra

$SK^2 + SH^2 - 2SK \cdot SH \cdot \frac{SI^2 + SA^2 - AM^2}{2SI \cdot SA} \leq HK^2 \leq SK^2 + SH^2 - 2SK \cdot SH \cdot \frac{SI^2 + SA^2 - AN^2}{2SI \cdot SA}$
 $\Rightarrow \frac{1}{10}R^2 \leq HK^2 \leq \frac{9}{10}R^2 \Rightarrow -\frac{\sqrt{10}}{10} \leq \frac{OK^2 + OH^2 - HK^2}{2OH \cdot OK} \leq \frac{3\sqrt{10}}{10}$
 $\Rightarrow \cos \alpha \leq \max \left\{ \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10} \right\} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Câu 12: Chọn B



Gọi bán kính đáy hình nón là R , chiều cao là h . Theo bài ra ta có $h = 3R$.

Chiều cao của khối trụ là $h_1 = 2R$, bán kính đáy là R_1 .

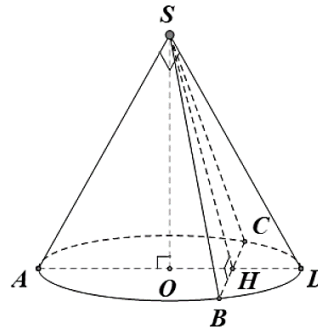
Trong tam giác OHA có $H'A' \parallel HA \Rightarrow \frac{R_1}{R} = \frac{H'A'}{HA} = \frac{OH'}{OH} = \frac{1}{3} \Rightarrow R_1 = \frac{R}{3}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi R_1^2 h_1 = \frac{2\pi R^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow R = 2$.

Đường sinh của hình nón là: $l = OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{9R^2 + R^2} = 2\sqrt{10}$.

Diện tích xung quanh của bình đựng nước là: $S_{xq} = \pi Rl = 4\pi\sqrt{10} \text{ (dm}^2\text{)}$.

Câu 13: Chọn B



Gọi O là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Ta có $\triangle SAD$ vuông cân tại S với $AD = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = a$ và $SO = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là giao điểm của AD và BC . Suy ra $AD \perp BC$ và H là trung điểm BC . Khi đó $SH \perp BC$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là góc SHO hay $SHO = 60^\circ$.

Trong $\triangle SOH$ vuông tại O ta có

$$\cot SHO = \frac{OH}{SO} \Leftrightarrow OH = SO \cdot \cot SHO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

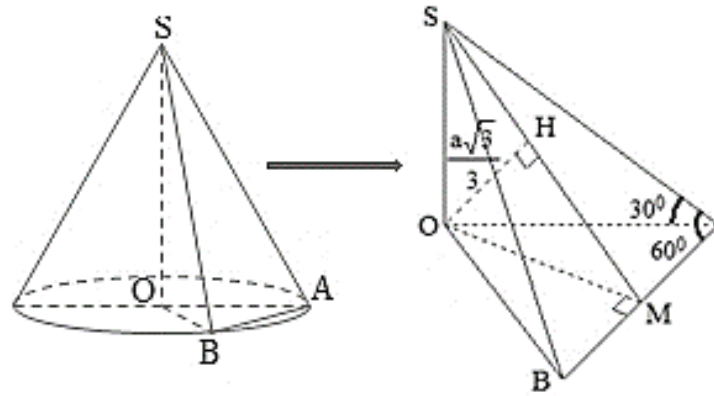
$$\text{Suy ra } SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{6a^2}{36}} = \sqrt{\frac{24a^2}{36}} = \frac{2\sqrt{6}a}{6}.$$

Trong $\triangle SHB$ vuông tại H ta có

$$BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{24a^2}{36}} = \sqrt{\frac{12a^2}{36}} = \frac{2\sqrt{3}a}{6} \Rightarrow BC = 2BH = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } SBC \text{ là } S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}a}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}.$$

Câu 14: Chọn D



Đặt $SA = l$.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ và lại có $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOM)$.

Suy ra $(SOM) \perp (SAB)$. Gọi H là hình chiếu của O lên SM , $OH \perp (SAB)$. Khi đó

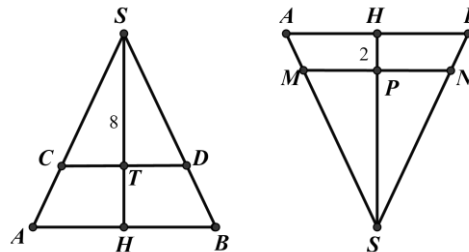
$$d(O; (SAB)) = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Ta có } SO = l \sin 30^\circ = \frac{l}{2}; \Delta SAB \text{ đều cạnh } l \Rightarrow SM = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Delta SOM \text{ vuông tại } O \Rightarrow OM = \sqrt{SM^2 - SO^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{2}{l^2} + \frac{4}{l^2} = \frac{6}{l^2} \Leftrightarrow l = OH\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\sqrt{6} = a\sqrt{2}.$$

Câu 15: Chọn D

Thiết diện qua trục của phễu có dạng như hình vẽ



Gọi V_p là thể tích của phễu; V_k là thể tích của khí; V_n là thể tích của nước; h là chiều cao của

hình nón. Trước khi lật phễu: Vì $CD \parallel AB$ nên $\frac{ST}{SH} = \frac{DT}{HB} = \frac{8}{h}$

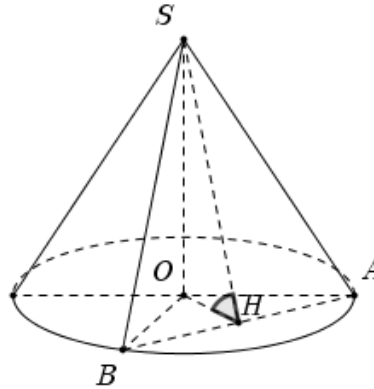
$$\text{Ta có } \frac{V_k}{V_p} = \frac{TD^2 \cdot ST}{HB^2 \cdot SH} = \left(\frac{8}{h}\right)^3 (1). \text{ Sau khi lật phễu: Vì } MN \parallel AB \text{ nên } \frac{SP}{SH} = \frac{PN}{HB} = \left(1 - \frac{2}{h}\right)$$

$$\text{Ta có } \frac{V_n}{V_p} = \frac{PN^2 \cdot SP}{HB^2 \cdot SH} = \left(1 - \frac{2}{h}\right)^3; \frac{V_k}{V_p} = \frac{V_p - V_n}{V_p} = 1 - \frac{V_n}{V_p} = 1 - \left(1 - \frac{2}{h}\right)^3 (2). \text{ Đặt } t = \frac{2}{h}, t > 0$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 64t^3 = 1 - (1-t)^3 \Leftrightarrow 63t^3 + 3t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(l) \\ t = \frac{-1 + \sqrt{85}}{2}(n) \\ t = \frac{-1 - \sqrt{85}}{2}(l) \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2}{\frac{-1 + \sqrt{85}}{2}} = 1 + \sqrt{85}$$

Câu 16: Chọn A



Gọi O là tâm hình tròn đáy, thiết diện qua trục là tam giác SAB như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm AB .

Ta có $OH \perp AB$ và $SH \perp AB$ nên góc giữa (α) và mặt đáy của hình nón là $SHO = 60^\circ$.

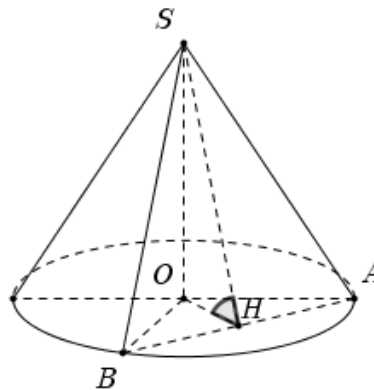
$$\tan SHO = \frac{SO}{OH} \Rightarrow OH = \frac{SO}{\tan 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

$$\sin SHO = \frac{SO}{SH} \Rightarrow SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

$$AB = 2HB = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 2\sqrt{4a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}a.$$

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}a \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3}a = \frac{8\sqrt{2}}{3}a^2.$$

Câu 17: Chọn A



Gọi O là tâm hình tròn đáy, thiết diện qua trục là tam giác SAB như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm AB .

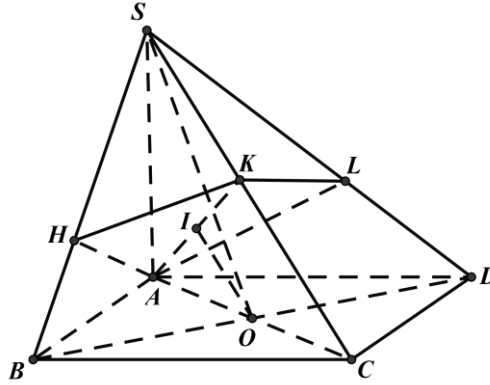
Ta có $OH \perp AB$ và $SH \perp AB$ nên góc giữa (α) và mặt đáy của hình nón là $SHO = 60^\circ$.

$$\tan SHO = \frac{SO}{OH} \Rightarrow OH = \frac{SO}{\tan 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a; \sin SHO = \frac{SO}{SH} \Rightarrow SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

$$AB = 2HB = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 2\sqrt{4a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}a.$$

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} a \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} a = \frac{8\sqrt{2}}{3} a^2.$$

Câu 18: Chọn D



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$, mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$, từ đó suy ra $AH \perp HK, AH \perp SC$.

Tương tự ta cũng có $AL \perp KL, AL \perp SC$, từ đó suy ra $SC \perp (HKL)$ và tứ giác $AHKL$ nội tiếp đường tròn (C) đường kính AK và nằm trong mặt phẳng (HKL) . Do đó (C) chính là đường tròn đáy của khối nón (N) .

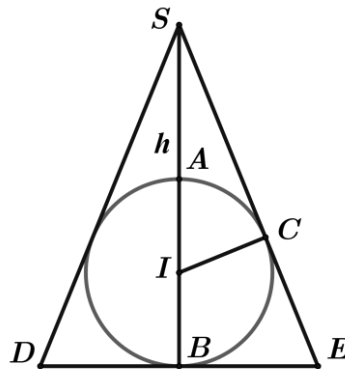
Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm của AK , suy ra OI là đường trung bình của tam giác AKC nên $OI \parallel KC \Rightarrow OI \perp (HKL)$ do đó O là đỉnh của khối nón (N) .

Do $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại A và $SC = SA \cdot \sqrt{2} = 2a$.

(N) có bán kính đáy $r = \frac{AK}{2} = \frac{SC}{4} = \frac{a}{2}$, có đường cao $h = OI = \frac{KC}{2} = \frac{SC}{4} = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối nón (N) là $V = \frac{1}{3} h \pi r^2 = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^3}{24}$.

Câu 19: Chọn A



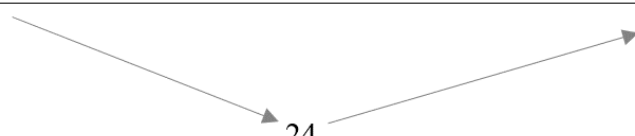
Gọi $R = BE, h$ lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của khối nón (N) , $r = \frac{AB}{2} = 3$

là bán kính đường tròn đường kính AB . Khi đó do hai tam giác ΔSCI và ΔSBE đồng dạng nên:

$$\frac{SI}{SE} = \frac{IC}{BE} \Leftrightarrow \frac{h-3}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{3}{R} \quad (h > 3) \Leftrightarrow R^2(h-6) = 9h \quad (h > 6) \Leftrightarrow R^2 = \frac{9h}{h-6}$$

Thể tích khối nón (N) là: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = 3\pi \frac{h^2}{h-6}$.

Xét hàm số $y = \frac{h^2}{h-6}; h \in (6; +\infty) \Rightarrow y' = \frac{h^2 - 12h}{(h-6)^2}$. Ta có bảng biến thiên sau:

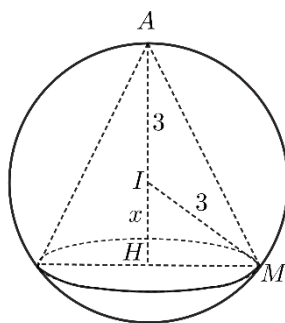
h	6	12	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Qua bảng biến thiên ta thấy $y_{\min} = 24 \Rightarrow V_{\min} = 72\pi$ khi $h = SB = 12 \Rightarrow A$ là trung điểm $SB \Rightarrow S(-2; -3; 1)$.

Khi đó mặt phẳng qua đỉnh S và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) nhận véc tơ $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{AB} = (2; 2; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình là $2x + 2y + z + 9 = 0$.

Vậy $T = b + c + d = 2 + 1 + 9 = 12$.

Câu 20: Chọn A



Mặt cầu (S) có bán kính $R = IA = 3$.

Hình nón (N) có bán kính đường tròn đáy là $r = HM$, chiều cao $h = AH$.

Đặt $IH = x, 0 < x < 3$. $r = \sqrt{9 - x^2}$; $h = x + 3$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \sqrt{9 - x^2} \sqrt{9 - x^2 + (x + 3)^2}$.

$$S_{xq}^2 = 6\pi^2 (9 - x^2)(x + 3) = 3\pi^2 (6 - 2x)(x + 3)^2$$

$$\text{Có } S_{xq}^2 = 3\pi^2 (6 - 2x)(x + 3)^2 \leq 3\pi^2 \left(\frac{6 - 2x + x + 3 + x + 3}{3} \right)^3 = 192\pi^2.$$

Suy ra, S_{xq} đạt giá trị lớn nhất bằng $8\pi\sqrt{3} \Leftrightarrow 6 - 2x = x + 3 \Leftrightarrow x = 1$. Khi đó, $\vec{IH} = \frac{1}{3}\vec{AI}$.

$$\vec{IH} = (x_H - 1; y_H - 2; z_H - 3); \vec{AI} = (1; -2; 2) \text{ nên có } H\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

Mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của hình nón là mặt phẳng đi qua $H\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{11}{3}\right)$ và nhận

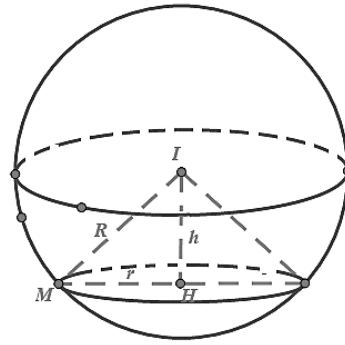
véc tơ $\vec{IA} = (-1; 2; -2)$ làm một véc tơ pháp tuyến.

Phương trình của (P) là: $-x + 2y - 2z + 6 = 0$.

Yêu cầu của bài toán là phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $-x + by + cz + d = 0$.

Vậy, ta tìm được $b = 2; c = -2; d = 6$ và $b + c + 2d = 12$.

Câu 21: Chọn B



Theo giả thiết, mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{48}$.

Gọi r là bán kính đáy và h là chiều cao của khối nón (N) . Ta có $h = d(I, (\alpha))$, $r = \sqrt{48 - h^2}$.

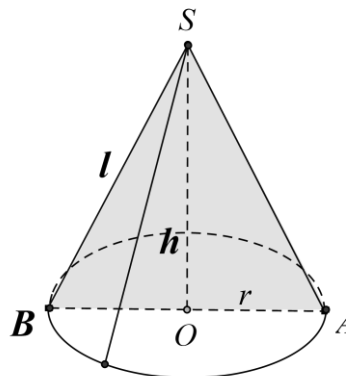
Khi đó, thể tích của (N) là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(48 - h^2)h$.

Ta có $h \leq d(I, (\alpha)) \leq d(I, AB) = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IA}]}{|\overrightarrow{AB}|} = 3$.

Xét hàm số $f(h) = \frac{1}{3}\pi(48 - h^2)h$ ($0 \leq h \leq 3$) có $f'(h) = \frac{1}{3}\pi(48 - 3h^2) > 0, \forall h \in [0; 3]$.

Suy ra $\max V = \max_{[0; 3]} f(h) = f(3) = 39\pi$.

Câu 22: Chọn D



Gọi thiết diện qua trục là $\triangle SAB$ cân tại S . Theo bài ra ta có: $2l + 2r = 10 \Rightarrow l + r = 5 \Rightarrow l = 5 - r$.

Do $l > r \Rightarrow 2r < 10 \Rightarrow r < \frac{5}{2}$.

Thể tích khối nón:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{(5-r)^2 - r^2}; r \in \left(0; \frac{5}{2}\right); V' = \frac{1}{3}\pi \frac{-25r^2 + 50r}{\sqrt{-10r + 25}}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \text{ (t/m)} \\ r = 0 \text{ (l)} \end{cases}. \text{ Bảng biến thiên:}$$

r	0	2	2,5
V'	+	0	-
V		V_{Max}	

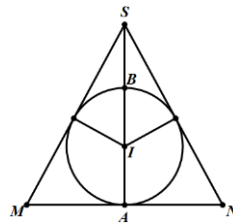
Dựa vào bảng biến thiên V_{Max} khi $r = 2$. Suy ra diện tích đáy của hình nón: $S = \pi r^2 = 4\pi$

Câu 23: Chọn D

Gọi bán kính mặt cầu là r ($r = \frac{AB}{2}$), tâm mặt cầu là I (I là trung điểm của AB), bán kính đáy

và chiều cao của hình nón là R và h ($h > 2r$).

Xét thiết diện tạo bởi mặt phẳng qua trục của hình nón với hình nón là ΔSMN . Ta có ΔSMN cân, A là trung điểm của MN và I là tâm đường tròn nội tiếp ΔSMN .



$$\text{Áp dụng công thức: } r = \frac{S}{p}, \text{ ta có } r = \frac{S_{SMN}}{p_{SMN}} = \frac{SA \cdot AM}{SM + AM} = \frac{Rh}{\sqrt{R^2 + h^2} + R}$$

$$\text{Suy ra } Rh = Rr + r\sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow R(h - r) = r\sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow R^2(h^2 - 2rh + r^2) = r^2R^2 + r^2h^2$$

$$\Leftrightarrow R^2(h^2 - 2rh) = r^2h^2 \Leftrightarrow R^2(h - 2r) = r^2h \Leftrightarrow R^2 = \frac{r^2h}{h - 2r}.$$

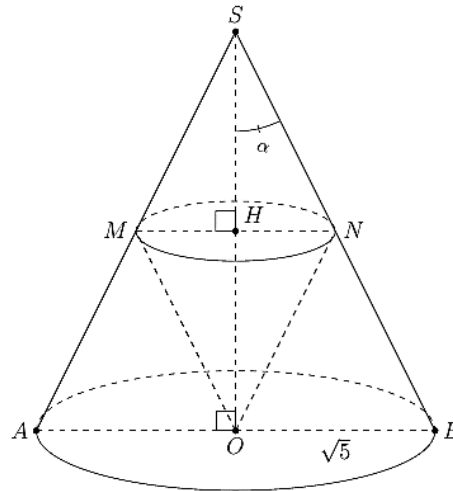
$$\text{Công thức tính thể tích hình nón: } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{r^2h}{h - 2r} \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{r^2h^2}{h - 2r}.$$

Để V nhỏ nhất thì $\frac{h^2}{h - 2r}$ nhỏ nhất, xét hàm số $f(h) = \frac{h^2}{h - 2r}$ trên $(2r; +\infty)$, ta có

$$f'(h) = \frac{h(h - 4r)}{(h - 2r)^2}, \text{ ta có bảng biến thiên hàm } f(h) \text{ trên } (2r; +\infty) \text{ như sau:}$$

x	$2r$	$4r$	$+\infty$	
y'	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			$+\infty$

Từ đó $f(h)$ nhỏ nhất khi $h = 4r$, khi đó S là điểm đối xứng với A qua B nên $S(-8; -1; 13)$.



Trong $\triangle SOB$ vuông tại O ta có $OSB = \alpha$ với $\sin \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{HN}{SH} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow HN = \frac{2.SH}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $\sin \alpha = \frac{HN}{SN} = \frac{OB}{SB} \Rightarrow SB = \frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$;

Trong $\triangle SOB$ vuông tại O ta có $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{45}{4} - 5} = \frac{5}{2}$.

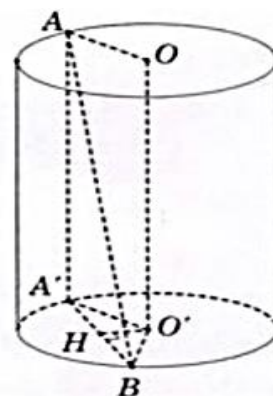
Theo bài ta có thể tích khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H là

$$V = \frac{50\pi}{81} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot OH \cdot \pi \cdot HN^2 = \frac{50\pi}{81} \Leftrightarrow OH \cdot HN^2 = \frac{50}{27} \Leftrightarrow (SO - SH) \cdot \frac{4SH^2}{5} = \frac{50}{27}$$

$$\Leftrightarrow (5 - 2.SH)SH^2 = \frac{125}{27} \Leftrightarrow 54SH^3 - 135SH^2 + 125 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} SH = \frac{5}{3} \\ SH = -\frac{5}{6} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Suy ra $a = 5; b = 3$. Vậy $T = 3a^2 - 2b^3 = 3.25 - 2.27 = 21$.

Câu 25: Chọn A



Gọi AA' là đường sinh của hình trụ, O' và O là tâm của hai đáy

suy ra $AA' \parallel OO' \Rightarrow (OO', AB) = (AA', AB) = BAA' = 30^\circ$.

Vì $OO' \parallel AB \Rightarrow OO' \parallel (ABA')$ nên $d(OO', AB) = d(OO', (ABA')) = d(O, (ABA'))$.

Gọi H là trung điểm của $A'B$, suy ra $\begin{cases} O'H \perp A'B \\ O'H \perp AA' \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABA') \Rightarrow d(O, (ABA')) = O'H$.

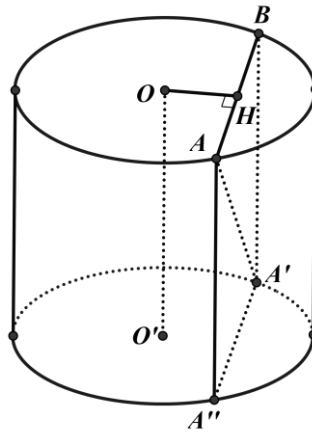
Theo đề bài, ta có $AA' = 3$, $O'A' = O'B = 2$.

Xét tam giác $AA'B$ vuông tại A' có $BA' = AA' \tan 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow HB = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác $O'HB$ vuông tại H có $O'H = \sqrt{O'B^2 - HB^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 26: Chọn D

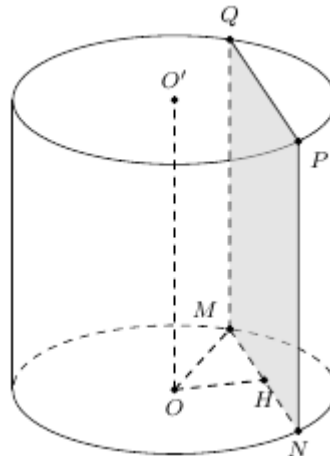


Kẻ đường sinh AA'' và $A'B$. Có $d(OO', AA') = d(OO', (AA'' A'B)) = d(O, (AA'' A'B))$

Kẻ $OH \perp AB$ (H là trung điểm AB), có $d(O, (AA'' A'B)) = OH$

Có $AB = \sqrt{AA'^2 - A'B^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$; $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 3$.

Câu 27: Chọn B



Gọi H là trung điểm của $MN \Rightarrow OH \perp MN$

Ta có $NP \parallel OO'$, OO' lại vuông góc với đáy nên NP vuông góc với đáy, suy ra $OH \perp NP$.

Từ $\begin{cases} OH \perp MN \\ OH \perp NP \end{cases} \Rightarrow OH \perp (MNPQ) \Rightarrow OH = d(O, (MNPQ)) = d(OO'; (MNPQ)) = \sqrt{3}$.

Ta có $MN = 2MH = 2\sqrt{OM^2 - OH^2} = 2\sqrt{2^2 - 3} = 2$.

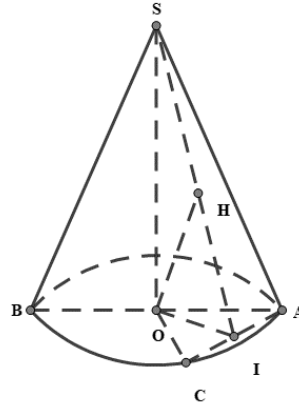
Vì thiết diện $MNPQ$ là hình vuông nên $h = NP = MN = 2$.

Tam giác OHM có

$$\cos HOM = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HOM = 30^\circ \Rightarrow MON = 2HOM = 60^\circ \Rightarrow MON = \frac{\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow MN = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow S_1 = MN \cdot h = \frac{2\pi}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Câu 28: Chọn A

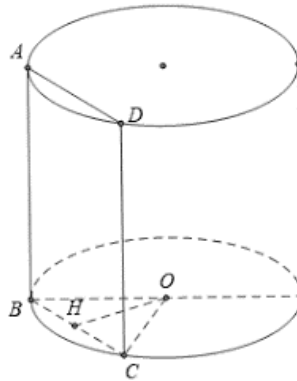


Theo đề, ta có: $SO = 20 \text{ cm}$, $OA = 25 \text{ cm}$, $OH = 12 \text{ cm}$.

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = 15 \text{ cm} \Rightarrow AC = 2IA = 2\sqrt{OA^2 - OI^2} = 40 \text{ cm}.$$

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm}. \text{ Suy ra: } S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot AC = 500 \text{ cm}^2.$$

Câu 29: Chọn C



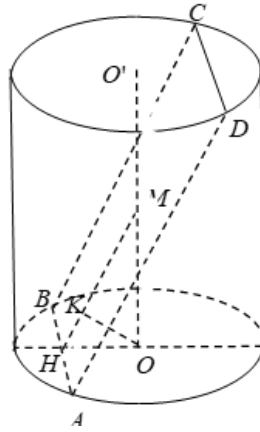
Gọi BC là giao của (P) với hình tròn đáy (O) của hình trụ. Gọi H là trung điểm BC .

Ta có $OH \perp BC$; $OH = 2 \text{ cm}$; $OB = OC = 3 \text{ cm}$

$$\Rightarrow BC = 2BH = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 2\sqrt{5} (\text{cm})$$

Thiết diện thu được là hình chữ nhật có các kích thước là $BC = 2\sqrt{5}$ và $AB = 5 \text{ cm}$ nên có diện tích $S = AB \cdot BC = 10\sqrt{5} \text{ cm}^2$.

Câu 30: Chọn C



Gọi M là trung điểm OO' . Gọi A, B là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn (O) và H là hình chiếu của O trên $AB \Rightarrow AB \perp (MHO)$.

Trong mặt phẳng (MHO) kẻ $OK \perp MH, (K \in MH)$ khi đó góc giữa OO' và mặt phẳng (α) là góc $OMK = 30^\circ$. Xét tam giác vuông MHO ta có

$$HO = OM \cdot \tan 30^\circ = R \cdot \tan 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } AHO \text{ ta có } AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do } H \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } AB = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Câu 31: Chọn A

Thể tích của khối trụ nội tiếp hình lăng trụ lớn nhất khi có cùng chiều cao với lăng trụ và đáy là đường tròn nội tiếp đáy của hình lăng trụ.

Chiều cao của khối trụ là $h = 200\text{cm}$.

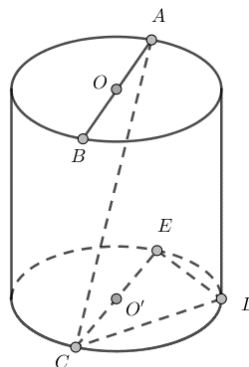
Gọi đáy của lăng trụ là $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là $a = 50\text{cm}$, $b = 120\text{cm}$, $c = 130\text{cm}$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Vì $a^2 + b^2 = c^2$ nên $\triangle ABC$ vuông.

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = 3000\text{cm}^2, \text{ lại có } S_{ABC} = \frac{a+b+c}{2}r = \frac{50+120+130}{2}r = 150r\text{cm}^2.$$

$$\text{Suy ra } r = \frac{3000}{150} = 20\text{cm}.$$

Câu 32: Chọn B



Ta có $AB + AC \leq 2R + AC$

Gọi E là hình chiếu của A xuống mặt đáy có chứa hình tròn (O') . Gọi C' là điểm đối xứng của

E qua O' ta có với mọi $C \in (O')$ thì $AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} \leq \sqrt{AE^2 + EC'^2} = \sqrt{h^2 + 4R^2}$.

Vậy $AB + AC \leq 2R + \sqrt{h^2 + 4R^2}$. Dấu bằng xảy ra khi AB là đường kính của đường tròn (O) và C là điểm đối xứng của E qua O' với E là hình chiếu của A xuống mặt đáy có chứa hình tròn (O') .

Khi đó ta có $AB + AC = 4a = 2R + \sqrt{h^2 + 4R^2}$

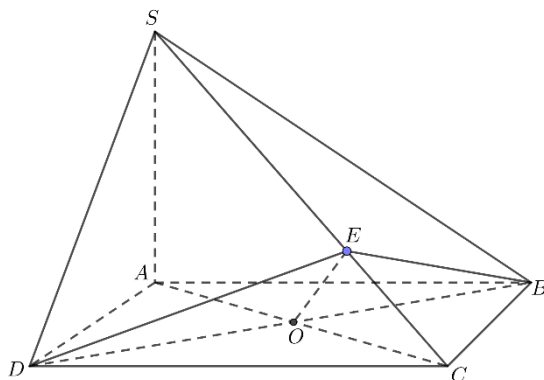
Ta có: $EC^2 = ED^2 + CD^2$ mà $ED^2 = AD^2 - AE^2 = 4a^2 - h^2$

$$\Rightarrow 4R^2 = EC^2 = ED^2 + CD^2 = 4a^2 - h^2 + a^2 = 5a^2 - h^2 \Rightarrow 4R^2 + h^2 = 5a^2$$

Thay vào ta được: $4a = 2R + a\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{4-\sqrt{5}}{2}a$

Thay $R = \frac{4-\sqrt{5}}{2}a$ vào ta được $h^2 = (8\sqrt{5}-16)a^2 \Rightarrow h = a\sqrt{8\sqrt{5}-16}$

Câu 33: Chọn B



Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng SC sao cho $CE = a$.

Gọi hình nón (C_1) ngoại tiếp hình chóp $C.BDE$ có đỉnh C .

Go! $O = AC \cap BD$.

$O \in BD$ nên thuộc mặt đáy của hình nón (C_1) và $CA = 2CO$, điểm A thuộc mặt đáy của hình nón (C) . (1)

Hơn nữa $CB = CD = CE = a$ suy ra (BDE) vuông góc với trục của hình nón (C) và thiết diện của (BDE) với mặt xung quanh của hình nón (C) là đường tròn, đồng thời (BDE) song song với mặt chứa đáy của hình nón (C) . (2)

Từ (1) và (2) suy ra hình nón (C_1) đồng dạng với hình nón (C) với tỷ số $\frac{1}{2}$.

$$SC = 3a, \cos SCB = \frac{1}{3}, ED = EB = \sqrt{2a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a, EO = \sqrt{\frac{4}{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}a.$$

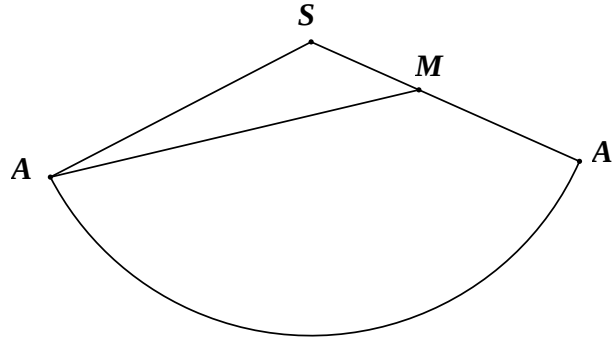
$$S_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{6} a^2; R_{BDE} = \frac{\frac{4a^2}{3} \cdot a\sqrt{2}}{\frac{4 \cdot a^2 \sqrt{15}}{6}} = \frac{2\sqrt{30}}{15} a.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón } (C): S_{xq} = \pi \cdot \frac{4a\sqrt{30}}{15} \cdot 2a = \frac{8\sqrt{30}}{15} \pi a^2.$$

Câu 34: Chọn B

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} \Rightarrow SM = \frac{1}{3}SA = 8(m).$$

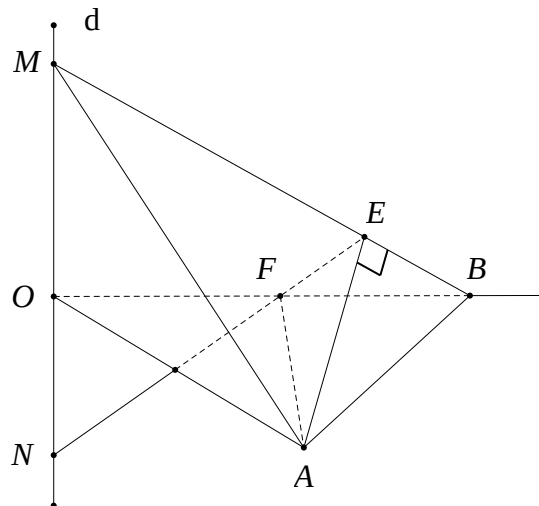
Trải hình nón ra như hình bên dưới



Khi đó chu vi đáy của hình nón cũng là độ dài cung AA' suy ra $2\pi R = 16\pi(m) = l_{AA'}$.

$$\text{Góc } \alpha = \angle ASA' = \frac{l_{AA'}}{SA} = \frac{16\pi}{24} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Chiều dài nhỏ nhất của sợi dây đèn cần có là đoạn thẳng } AM &= \sqrt{SA^2 + SM^2 - 2SA \cdot SM \cdot \cos \alpha} \\ &= \sqrt{24^2 + 8^2 - 2 \cdot 24 \cdot 8 \cdot \cos \frac{2\pi}{3}} = 8\sqrt{13}(m). \end{aligned}$$

Câu 35: Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp OM \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB.$$

Mặt khác $AE \perp MB$. Vậy $MB \perp (AEF) \Rightarrow MB \perp EF$ suy ra tam giác EFB vuông tại E .

Xét hai tam giác vuông NOF và BEF có $OF = FB$, $OFN = BFE \Rightarrow \triangle OFN = \triangle EFB$.

$$\text{Suy ra } \angle FBE = \angle FNO \text{ nên } \triangle OFN \sim \triangle OMB \Rightarrow \frac{NO}{BO} = \frac{OF}{OM} \Rightarrow OM \cdot ON = OF \cdot OB = \frac{a^2}{2}.$$

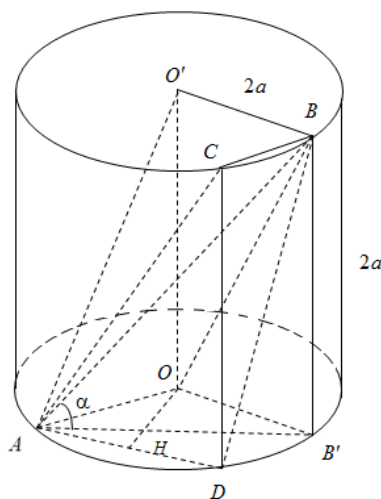
Quay miền tam giác OBM và OFN quanh d tạo thành hai khối nón có tổng thể tích

$$V = \frac{1}{3}\pi.OF^2.ON + \frac{1}{3}\pi.OB^2.OM = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{4}.ON + \frac{1}{3}\pi.a^2.OM = \frac{1}{3}\pi.a^2\left(\frac{ON}{4} + OM\right).$$

$$\text{Mà } \frac{ON}{4} + OM \geq 2\sqrt{\frac{ON}{4} \cdot OM} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } V \geq \frac{1}{3} \pi \cdot a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{6}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \frac{ON}{4} = OM \\ ON \cdot OM = \frac{a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ON = a\sqrt{2} \\ OM = \frac{\sqrt{2}a}{4} \end{cases}$. Vậy $x = OM = \frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Câu 36: Chọn C



C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') nên C nằm trên đường tròn (O') .

Tam giác ACD vuông tại D nên ta có diện tích tam giác ACD là

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2\sqrt{3}.$$

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Khi đó góc giữa AB với mặt phẳng đáy là góc $BAB' = \alpha$.

$$AB' = BB' \cdot \cot \alpha = 2a \cot \alpha.$$

Từ giả thiết có tam giác AOD cân tại O và $AOD = 120^\circ$.

Gọi H là trung điểm AD thì ta có $OH = AH \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = a$.

Đồng thời có $OH \perp (ACD)$.

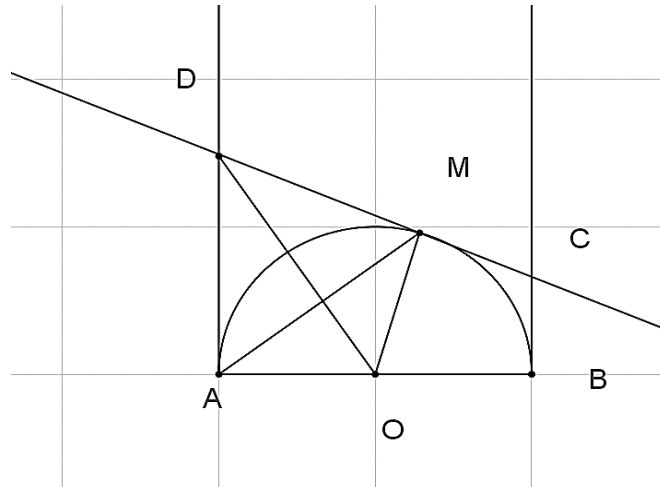
Gọi K là hình chiếu của B' trên AD thì ta có $B'K \perp OH$ và $B'K = d(B', (ACD)) = d(B, (ACD))$

Có: $V_{CDAB} = \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot d(B, (ACD)) = \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot B'K.$

Thể tích của khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất khi $B'K$ lớn nhất $\Leftrightarrow K \equiv H$ và B', O, H thẳng hàng $\Leftrightarrow B'H = B'O + OH = 2a + a = 3a$.

$$\text{Suy ra } AB' = \sqrt{AH^2 + B'H^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (3a)^2} = 2a\sqrt{3}.$$

Từ đó: $2a\sqrt{3} = 2a \cdot \cot \alpha \Leftrightarrow \cot \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 37: Chọn A

$ABCD$ là hình thang vuông. Thể tích của khối tròn xoay nhỏ nhất khi hình thang $ABCD$ có diện tích nhỏ nhất $S_{ABCD} = \frac{AB}{2}(AD + BC)$

Ta chứng minh được $AD + BC = CD$

Vì $DA = DM$ do $\triangle DAO = \triangle DMO$ (c.g.c). DO chung, $DAO = DMO$, $OA = OM$.

Tương tự ta chứng minh được $CM = CB$.

Từ đó $AD + BC = DM + CM = CD$.

$$S_{ABCD} = \frac{AB}{2}(AD + BC) = 2(AD + BC) = 2CD \geq 2AB. \text{ Do đó } S_{ABCD} \text{ nhỏ nhất khi } CD = AB = 4$$

Giả sử M là trung điểm của CD . $ABCD$ là hình chữ nhật. Khi quay quanh AB tạo thành hình trụ có bán kính $r = OM = 2\text{cm}$, $l = 4\text{cm}$.

Khi đó thể tích khối trụ bằng $V = \pi r^2 l = \pi 4 \cdot 4 = 16\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 38: Chọn D

Giả sử $IH = x (0 < x < 5a)$. Ta có, bán kính đường tròn (C) : $r = \sqrt{25a^2 - x^2}$

Khi đó thể tích khối nón có đỉnh I , đáy là đường tròn (C) bằng

$$V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi (25a^2 - x^2) x; (0 < x < 5a).$$

Xét hàm số

$$f(x) = 25a^2 x - x^3 (0 < x < 5a); f'(x) = 25a^2 - 3x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}a}{3}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{5a\sqrt{3}}{3}$	$5a$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

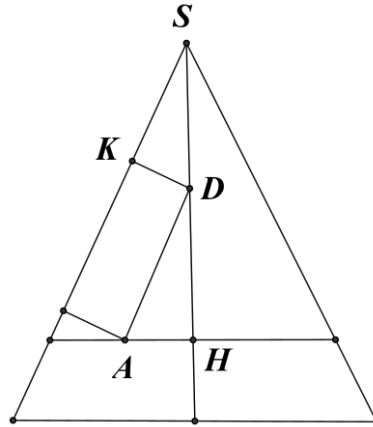
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; 5a)$ ta thấy GTLN của hàm số đạt được khi

$$x = \frac{5\sqrt{3}a}{3}. \text{ Vậy } \max V_N = \frac{250\pi\sqrt{3}a^3}{27}.$$

Câu 39: Chọn B

Gọi $A; B; C$ là tâm của ba quả cầu tiếp xúc với đáy, tiếp xúc lẫn nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón; D là tâm của mặt cầu thứ tư. Gọi H là tâm của tam giác đều ABC .

Cắt hình nón bằng một thiết diện qua trục, ta có hình cắt như sau:



Trong đó $KD = r$; $AD = 2r$; $AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

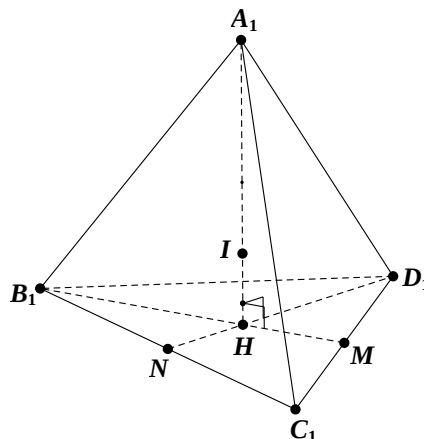
Xét tam giác ADH ta có: $DH = \sqrt{4r^2 - \frac{4}{3}r^2} = \sqrt{\frac{8r^2}{3}} = \frac{2r\sqrt{6}}{3}$.

Nhận thấy $KSD = ADH = \alpha$. Xét tam giác SDK ta có $SD = \frac{r}{\sin \alpha}$.

Xét tam giác DAH ta có $\sin \alpha = \frac{AH}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $SD = r\sqrt{3}$.

Ta có $d(S; (ABC)) = SH = SD + DH = r\sqrt{3} + \frac{2r\sqrt{6}}{3}$

Câu 40: Chọn B



Gọi A, B, C, D là 4 đỉnh của cái chặn giấy hình tứ diện đều và A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là tâm của 4 quả cầu.

Suy ra A_1, B_1, C_1, D_1 tạo thành tứ diện đều có cạnh bằng $2\sqrt{2}$.

Gọi I là trọng tâm của tứ diện đều A_1, B_1, C_1, D_1 thì I cũng là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$

Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$ và (BCD) . Suy ra $IK = IH + \sqrt{2}$.

Vì A_1, B_1, C_1, D_1 tạo thành tứ diện đều có cạnh bằng $2\sqrt{2}$ có H là trọng tâm tam giác $B_1C_1D_1$ nên $A_1H \perp (B_1C_1D_1)$; tam giác $B_1C_1D_1$ đều cạnh $2\sqrt{2}$ nên

$$B_1H = \frac{B_1C_1\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A_1H = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1H^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có } IH = \frac{1}{4}A_1H = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{IH}{IK} = \frac{IH}{IH + \sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - 1}{5}.$$

$$\text{Mà } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{IH}{IK} = \frac{\sqrt{6} - 1}{5} \Rightarrow AB = \frac{5A_1B_1}{\sqrt{6} - 1} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Thể tích tứ diện } ABCD \text{ là } V = \frac{AB^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(4\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} (cm^3).$$

$$\text{Thể tích 4 quả cầu là } V_0 = 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{32\pi\sqrt{2}}{3} (cm^3).$$

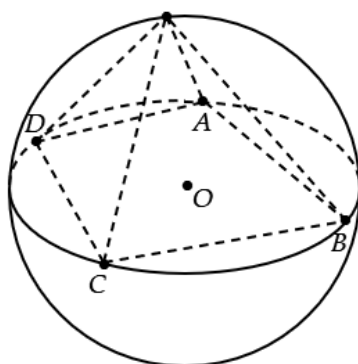
$$\text{Vậy phần thủy tinh để làm chặn giấy là } V - V_0 = \frac{(4\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} - \frac{32\pi\sqrt{2}}{3} \approx 62,06 (cm^3)$$

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Định nghĩa: Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của một hình đa diện (H) được gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện (H) và khi đó (H) được gọi là nội tiếp mặt cầu đó.



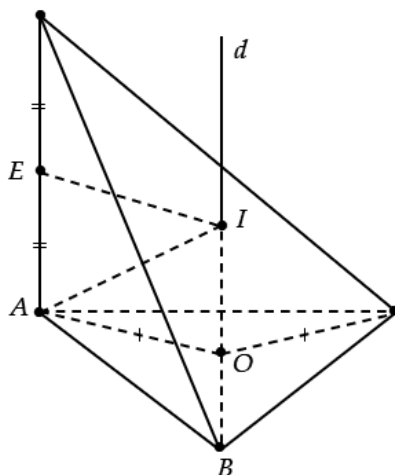
Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó là một đa giác nội tiếp một đường tròn. Mọi tứ diện đều có mặt cầu ngoại tiếp.

Bài toán 1: Mặt cầu với chóp có cạnh bên vuông góc đáy

Xét khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Dựng tâm. Dựng trục đường tròn ngoại tiếp d của tam giác ABC , thì $d \perp SA$

Trong mặt phẳng $(SA; d)$, dựng đường trung trực Δ của SA . Tâm I của mặt cầu là giao điểm của d và Δ .



Tính bán kính R của mặt cầu

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Gọi E là trung điểm của SA .

Xét $\triangle AOI$ vuông tại O . Ta có $R^2 = AI^2 = OA^2 + OI^2 = OA^2 + AE^2 = OB^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2$.

với $OA = R_d$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy. Khi đó: $R_{S.ABC} = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2}$.

Tổng quát: Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $SA \perp AA_1A_2$. Gọi R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác $AA_1A_2...A_n$ thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp R của khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ được tính theo công thức:

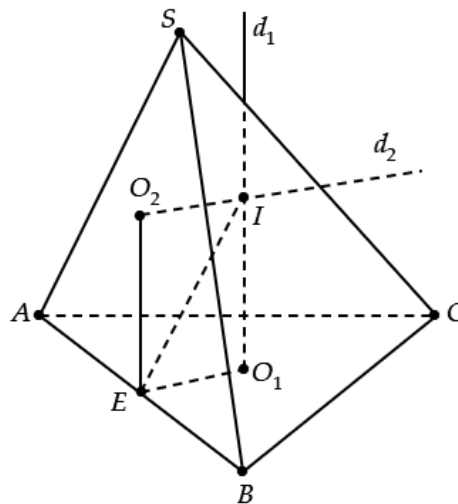
$$R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2}.$$

Bài toán tổng quát: Tứ diện $ABCD$, AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a, AC = b, AD = c$ thì bán

kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$

Bài toán 2: Mặt cầu với hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Xét khối chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.



Dựng tâm. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và SAB , E là trung điểm của AB , ta có $O_1E \perp AB \Rightarrow O_1E \perp (SAB)$ (do $(SAB) \perp (ABC)$).

$O_2E \perp AB \Rightarrow O_2E \perp (ABC)$.

Qua O_1 dựng đường thẳng d_1 vuông góc với (ABC) thì d_1 là trục của tam giác ABC và $d_1 \parallel O_2E$.

Qua O_2 dựng đường thẳng d_2 vuông góc với (SAB) thì d_2 là trục của tam giác SAB và $d_2 \parallel O_1E$.

Tâm I của mặt cầu là giao điểm của d_1 và d_2 .

Tính bán kính R của mặt cầu.

Tứ giác EO_1IO_2 là hình chữ nhật, suy ra $IE^2 = O_1E^2 + O_2E^2$.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, SAB .

Ta có $O_1E^2 = O_1A^2 - EA^2 = R_1^2 - \frac{AB^2}{4}$; $O_2E^2 = O_2A^2 - EA^2 = R_2^2 - \frac{AB^2}{4}$.

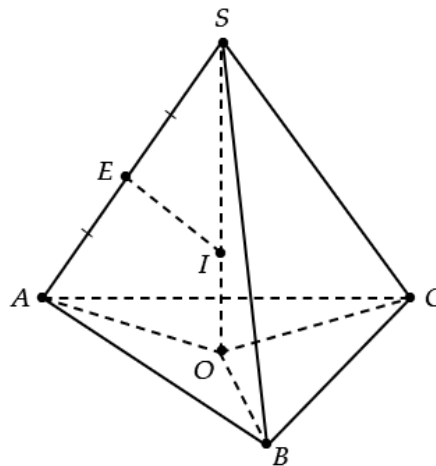
$$\text{Suy ra } IE^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{2} \Rightarrow R^2 = IE^2 + EA^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Tổng quát: Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $(SA_1A_2) \perp (A_1A_2...A_n)$. Đặt R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $S.A_1A_2$, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy $A_1A_2...A_n$ và $A_1A_2 = GT$ (gọi là giao tuyến) thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp R của khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ được tính theo công thức:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{GT^2}{4}}$$

Bài toán 3: Mặt cầu của hình chóp có các cạnh bên bằng nhau

Xét khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ (Hình chóp đều là một trường hợp đặc biệt của dạng toán này).



Dựng tâm. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta có $SO \perp (ABC)$. Trong mặt phẳng (SAO) dựng đường trung trực của SA cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Tính bán kính R của mặt cầu.

Gọi E là trung điểm của AB . Hai tam giác vuông SOA và SEI đồng dạng.

$$\text{Suy ra } \frac{SO}{SE} = \frac{SA}{SI} \Leftrightarrow R = SI = \frac{SE \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO}.$$

Tổng quát: Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n = l$ và có chiều cao $SO = h$ thì bán kính mặt

$$\text{cầu ngoại tiếp } R \text{ của khối chóp } S.A_1A_2...A_n \text{ được tính theo công thức: } R = \frac{l^2}{2SO} = \frac{l^2}{2h}.$$

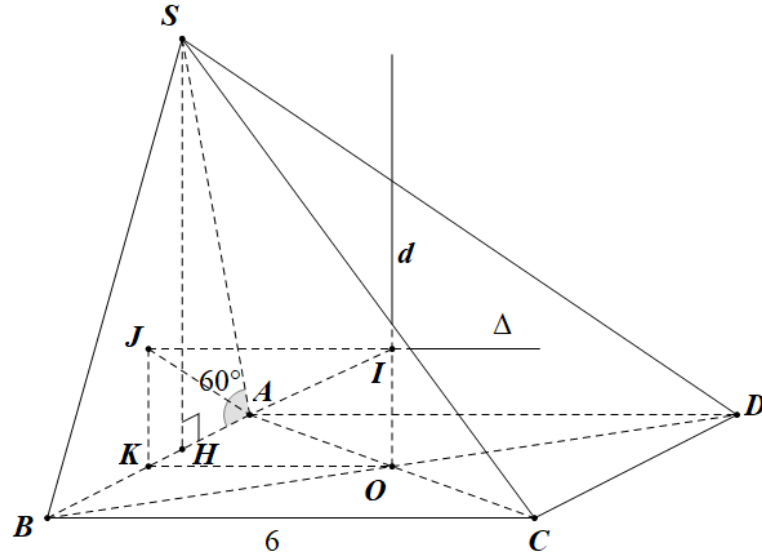
B // **VÍ DỤ MINH HỌA**

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 6. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $ABCD$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SA hợp với mặt phẳng đáy góc 60° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. 84π . B. $\frac{220}{3}\pi$. C. $\frac{1900}{3}\pi$. D. 88π .

LỜI GIẢI

Chọn B



Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , K là trung điểm của AB .

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Qua O dựng d vuông góc với $(ABCD)$ tại O suy ra d là trục đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp $S.ABCD$. Vì $JK \parallel SH \parallel d$ nên d đồng phẳng với JK . Qua J dựng Δ vuông góc với (SAB) tại J suy ra Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB . Đường thẳng d và Δ cắt nhau tại I suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{Xét } \triangle SAH \text{ vuông tại } H: \tan \angle SAH = \frac{SH}{AH} \Rightarrow SH = AH \cdot \tan \angle SAH = 2 \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos \angle SAB} = \sqrt{4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ} = 2\sqrt{7}$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác } SAB: JA = \frac{SA \cdot AB \cdot SB}{4S_{SAB}} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{7}}{4 \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$\text{Tứ giác } IJKO \text{ là hình chữ nhật suy ra } IJ = KO = \frac{1}{2} BC = 3$$

$$\text{Xét } \triangle AIJ \text{ vuông tại } I: IA = \sqrt{JA^2 + IJ^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{165}}{3}$$

$$\text{Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABCD: S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{165}}{3}\right)^2 = \frac{220\pi}{3}.$$

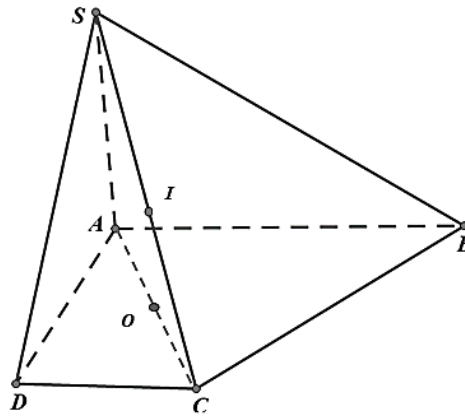
Chủ đề 08: Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$; $AD = DC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính chu vi giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$:

- A. πa . B. $\sqrt{2}\pi a$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a$. D. $\frac{\pi a}{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Gọi O là trung điểm của AC , I là trung điểm của SC .

Do tam giác ADC vuông tại D nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC .

Mặt khác $OI \parallel SA$ nên $OI \perp (DAC)$ suy ra $IA = DI = IC = SI$. Hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$.

Bán kính mặt cầu $R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Giả sử mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . Ta có $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ trong đó $h = d(I, (SAB))$.

Lại có $d(I, (SAB)) = \frac{1}{2}d(C, (SAB)) = \frac{1}{2}d(D, (SAB)) = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}a$.

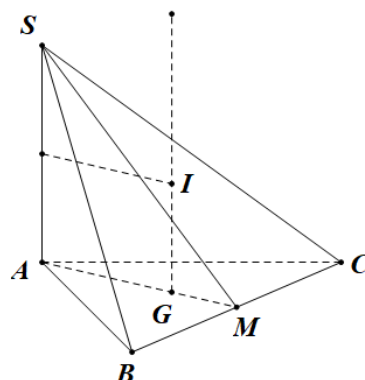
Vậy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên chu vi đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$ là: $C = 2\pi r = \sqrt{2}\pi a$.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 45° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{25\pi a^2}{12}$. B. $\frac{25\pi a^2}{3}$. C. $\frac{25\pi a^2}{9}$. D. $\frac{25\pi a^2}{6}$.

LỜI GIẢI

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC , G là trọng tâm tam giác ABC .

Dựng đường thẳng d qua G và song song với $SA \Rightarrow d \perp (ABC)$, d là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .

Dựng đường trung trực cạnh SA , cắt d tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ và bán kính $R = IA$.

Ta có: $((SBC), (ABC)) = SMA = 45^\circ \Rightarrow SA = AM \cdot \tan 45^\circ = \sqrt{3}a$; $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Bán kính mặt cầu $IA = \sqrt{AG^2 + IG^2} = \sqrt{AG^2 + \frac{SA^2}{4}} = \frac{5\sqrt{3}a}{6}$. Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = \frac{25\pi a^2}{3}$.

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông tại A , biết $AB = 3a$, $AC = 4a$, $SA = 10a$. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5\sqrt{17}}{2}a$.

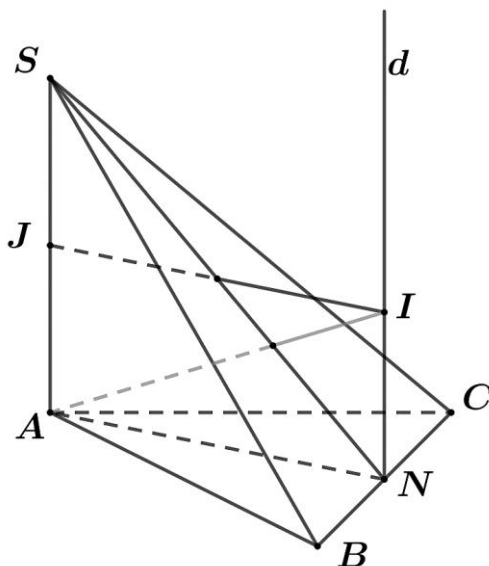
B. $5a\sqrt{5}$.

C. $2a\sqrt{5}$.

D. $\frac{5\sqrt{5}}{2}a$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi N, J lần lượt là trung điểm BC và SA .

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Dựng đường thẳng d đi qua N và vuông góc (ABC) , suy ra d là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Ta có $d \parallel SA$ vì cùng vuông góc với (ABC) .

Dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SA , đi qua J và cắt d tại I .

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, suy ra $R = IA$.

Vì $\angle JAN = \angle ANI = \angle AJI = 90^\circ$ suy ra tứ giác $ANIJ$ là hình chữ nhật.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5a \Rightarrow AN = \frac{1}{2}BC = \frac{5a}{2}$.

Xét $\triangle AIN$ vuông tại N , ta có: $R = AI = \sqrt{IN^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{1}{4}SA^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 100a^2 + \frac{25a^2}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}a$.

Cách 2: Công thức làm nhanh: Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy

Giả sử: r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy, h là chiều cao

Bán kính mặt cầu là: R có công thức tính: $R = \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + r^2}$.

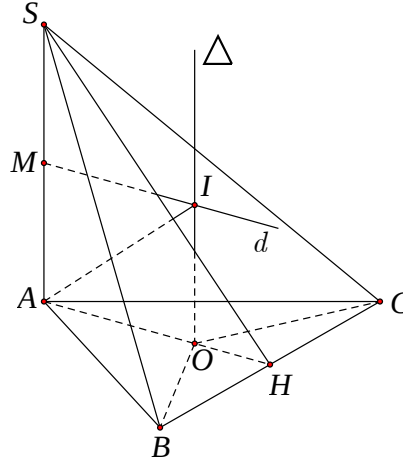
Áp dụng: $h = \frac{SA}{2}$; $r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2}$. Suy ra $R = \frac{5\sqrt{5}}{2}a$.

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Cho SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{43\sqrt{129}\pi a^3}{18}$. B. $\frac{31\sqrt{93}\pi a^3}{54}$. C. $\frac{31\sqrt{93}\pi a^3}{18}$. D. $\frac{43\sqrt{129}\pi a^3}{54}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi H là trung điểm của BC . Ta có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$.

Do tam giác ABC đều nên $BC \perp AH$. Mà $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $SHA = 60^\circ$.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Kẻ đường thẳng Δ vuông góc với (ABC) tại O .

Gọi M là trung điểm của SA . Kẻ đường trung trực d của SA (d song song với AH).

Gọi I là giao điểm của Δ và d .

Ta có $I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IC$. Và $I \in d \Rightarrow IS = IA$.

Từ đó suy ra $IA = IB = IC = IS$. Do đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính của mặt cầu này là $R = IA = IB = IC = IS$.

Xét tam giác SAH vuông tại A , ta có: $\tan SHA = \frac{SA}{AH} \Rightarrow AH = \frac{SA}{\tan SHA} = \frac{3a}{\tan 60^\circ} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}a$.

Ta có $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}a = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ và $AM = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2}$.

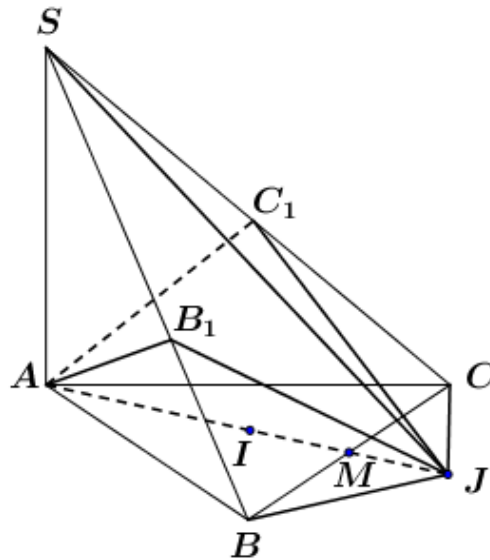
Ta có, tứ giác $AMIO$ là hình chữ nhật nên ta có: $R = IA = \sqrt{AM^2 + AO^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{129}a}{6}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{129}a}{6}\right)^3 = \frac{43\sqrt{129}\pi a^3}{54}$.

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Tính bán kính R của mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1 .

- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

LỜI GIẢI

Chọn C

Gọi I lần lượt là trọng tâm tam giác ABC , M là trung điểm BC và J là điểm đối xứng của I qua M . Suy ra I là trung điểm AJ .

$$\text{Suy ra } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, IM = MJ = \frac{a\sqrt{3}}{6}, AI = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AJ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác ACJ có $CI = \frac{1}{2}AJ \Rightarrow \triangle ACJ$ vuông tại C (1).

Tam giác ABJ có $BI = \frac{1}{2}AJ \Rightarrow \triangle ABJ$ vuông tại B (2).

$$\text{Ta có } \begin{cases} JC \perp AC \\ JC \perp SA \end{cases} \Rightarrow JC \perp AC_1.$$

Khi đó $\begin{cases} AC_1 \perp SC \\ AC_1 \perp JC \end{cases} \Rightarrow AC_1 \perp (SCJ) \Rightarrow AC_1 \perp JC_1$. Hay tam giác AC_1J vuông tại C_1 (3).

$$\text{Ta có } \begin{cases} JB \perp AB \\ JB \perp SA \end{cases} \Rightarrow JB \perp AB_1.$$

Khi đó $\begin{cases} AB_1 \perp SB \\ AB_1 \perp JB \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBJ) \Rightarrow AB_1 \perp JB_1$. Hay tam giác AB_1J vuông tại B_1 (4).

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra năm điểm A, B, C, B_1, C_1 cùng nhìn AJ dưới một góc vuông nên nội tiếp mặt

cầu tâm I , bán kính $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = CD = 2\sqrt{3}$, $AC = BD = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đã cho bằng

A. 6π .

B. 24π .

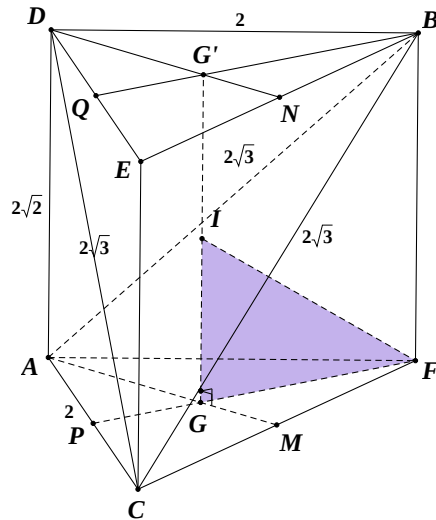
C. $\frac{40\pi}{3}$.

D. $\frac{10\pi}{3}$.

LỜI GIẢI**Chọn C**

Ta có tam giác ACD là tam giác vuông tại A , tam giác ABD là tam giác vuông tại D .

Dựng khối lăng trụ tam giác đều $ACF.DEB$ như hình vẽ.



Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ACF và DEB ; I là trung điểm của đoạn GG' . Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ACF.DEB$, đồng thời cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp là $R = IF = \sqrt{IG^2 + GF^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

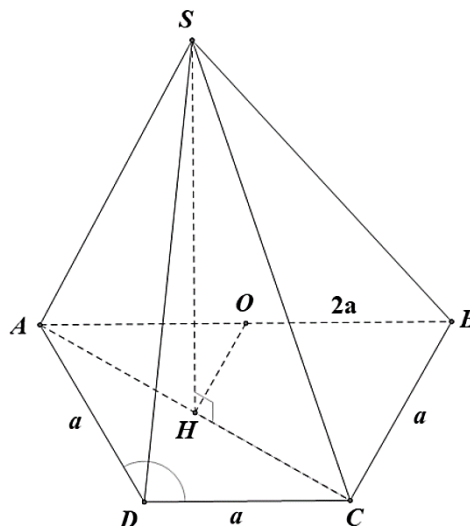
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp là $S = 4\pi R^2 = \frac{40\pi}{3}$.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, tam giác SAC đều và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Tính thể tích khối cầu (S) .

A. $V = \frac{5\sqrt{5}}{24}\pi a^3$. B. $V = \frac{5\sqrt{5}}{12}\pi a^3$. C. $V = \frac{5\sqrt{5}}{3}\pi a^3$. D. $V = \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AC . Ta có

$$\text{Tam giác } SAC \text{ đều} \Rightarrow SH \perp AC; \begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAC) \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos 120^\circ = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

$$SH \text{ là đường trung tuyến tam giác } SAC \text{ đều} \Rightarrow SH = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{(a\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}a.$$

$$R_{(ABCD)} \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác } ABCD \Rightarrow R_{(ABCD)} = \frac{AB}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

$$OH \text{ là đường trung bình của tam giác } ABC \Rightarrow OH = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}a.$$

$R_{(S)}$ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Khi đó:

$$R_{(S)}^2 = \frac{(OH^2 + SH^2 + R_{(ABCD)}^2)^2 - 4 \cdot OH^2 \cdot R_{(ABCD)}^2}{4 \cdot SH^2} = \frac{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4} + a^2\right)^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot a^2}{4 \cdot \frac{9a^2}{4}} = \frac{5}{4}a^2 \Rightarrow R_{(S)} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

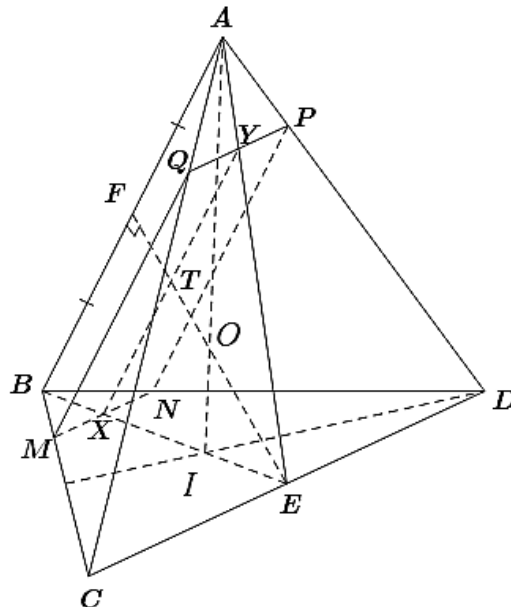
$$\text{Thể tích khối cầu } (S): V = \frac{4}{3}\pi R_{(S)}^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^3 = \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3. \text{ Kết luận: } V = \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3.$$

CÂU 9. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2\sqrt{2}$ và tâm mặt cầu ngoại tiếp của nó là O . Mặt phẳng (P) song song với hai cạnh AB, CD và cách tâm O một khoảng bằng $\frac{1}{2}$. Diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) bằng

- A. 2. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\sqrt{2}$.

☞ LỜI GIẢI

Chọn C



Giả sử (P) cắt tứ diện theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$. Dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Vì tam giác BCD đều nên I đồng thời là trọng tâm tam giác BCD . Mặt khác tứ diện $ABCD$ đều nên AI là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD, AB . Vì tam giác ABE cân tại E nên tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là O là giao điểm của EF và AI . Giả sử $(MNPQ)$ cắt (ABE) theo giao tuyến là XY .

Ta có $MN \perp BE, MN \perp AO \Rightarrow MN \perp (ABO) \Rightarrow MN \perp FO$

Chủ đề 08: Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện

Lại có $AB \parallel MQ, FO \perp AB \Rightarrow MQ \perp FO$. Vậy $FO \perp (MNPQ)$.

Giả sử $FO \cap (ABCD) = T \Rightarrow OT = \frac{1}{2}$.

Ta có $BI = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, AI = AB \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}, FO = \frac{AB}{2\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow FT = \frac{1}{2}$

Lại có $FE = AB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{TE}{EF} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{XY}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow XY = \frac{3}{4}AB \Rightarrow MN = \frac{3}{4}AB \Rightarrow MQ = \frac{1}{4}AB$

Diện tích của tứ giác $MNPQ$ là $S = \frac{3}{16}AB^2 = \frac{3}{2}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:
- A. $52\pi a^2$. B. $\frac{172\pi a^2}{3}$. C. $\frac{76\pi a^2}{9}$. D. $\frac{76\pi a^2}{3}$.
- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng
- A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. B. $\frac{19\pi a^2}{3}$. C. $\frac{19\pi a^2}{9}$. D. $13\pi a^2$.
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a$, góc $SAB = SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{6}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .
- A. $36\pi a^2$. B. $6\pi a^2$. C. $18\pi a^2$. D. $48\pi a^2$.
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = AC = 3AB$, $BAC = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHK$ và hình chóp $A.BCKH$. Tính $\frac{S_1}{S_2}$.
- A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{28}$. B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{392}$. C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{81}{28}$. D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{3}$.
- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCKH$.
- A. $4\pi a^2$. B. πa^2 . C. $16\pi a^2$. D. $8\pi a^2$.
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh bằng $2a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các đường thẳng SB và SC . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ bằng
- A. $R = a\sqrt{3}$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác vuông tại B , biết $AB = a\sqrt{5}$, $BC = a$, $SA = a\sqrt{6}$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các cạnh SB, SC . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCC_1B_1$ bằng
- A. $\sqrt{6}\pi a^3$. B. $4\sqrt{3}\pi a^3$. C. $6\pi a^3$. D. $\sqrt{3}\pi a^3$.
- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a\sqrt{3}$, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = a$, $BAC = 120^\circ$ (a là số dương cho trước). Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{9\pi a^2}{8}$. B. $3\pi a^2$. C. $\frac{9\pi a^2}{2}$. D. $9\pi a^2$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 45° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng:

- A. $\frac{9\pi a^2}{2}$. B. $\frac{3\pi a^2}{2}$. C. $\frac{9\pi a^2}{8}$. D. $\frac{3\pi a^2}{8}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $(SAB) \perp (ABCD)$, ΔSAB cân tại S . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, CD . Biết $AB = 2a$, $SN = a\sqrt{11}$, $\cos SON = \frac{-\sqrt{10}}{5}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

- A. $a\sqrt{\frac{77}{11}}$. B. $a\sqrt{\frac{13}{3}}$. C. $a\sqrt{\frac{29}{6}}$. D. $a\sqrt{\frac{223}{48}}$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $S.BCD$ tương ứng là:

- A. $\frac{a\sqrt{19}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{57}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{31}}{4}$. D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC có $BAC = 120^\circ$ và $BC = 2a\sqrt{3}$. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) , lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{3}$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

- A. $\frac{a\sqrt{19}}{2}$. B. $a\sqrt{7}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $SAB = SCB = 90^\circ$; cạnh bên SA tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $S = 5\pi a^2$. B. $S = 3\pi a^2$. C. $S = \frac{5}{4}\pi a^2$. D. $S = \frac{5}{3}\pi a^2$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{BC}$. Góc giữa (BED) và (SBC) bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SCDE$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $SA = SB = SC = SD$, $AB = a$, $AD = 2a$; góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 60° . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{17a\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{17a\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{17a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{17a\sqrt{3}}{18}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $R = \frac{a}{2}$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B . Biết $AB = BC = 2a$, $SAB = SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{3}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $16\pi a^2$. B. $12\pi a^2$. C. $20\pi a^2$. D. $18\pi a^2$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $BC = 3$, $BAC = 120^\circ$, Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC . Biết góc giữa mặt phẳng (AHK) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° , tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. 16π . B. 8π . C. 12π . D. 21π .

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn thẳng OC . Đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a}{4}$. D. a .

Câu 20: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = \sqrt{3}a$, $AC = 2a$, đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc bằng 30° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng

A. $3\pi a^2$. B. $24\pi a^2$. C. $4\pi a^2$. D. $6\pi a^2$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tâm O . SAB là tam giác đều có trọng tâm G và nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. D. $R = \frac{a}{2}$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AC' cắt các cạnh $BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B$ lần lượt tại các điểm M, N, P, Q, R, S . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.MNPQRS$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{12}$. C. $\frac{5a\sqrt{3}}{24}$. D. $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Biết rằng $SA = BC = 2$ và $BAC = 30^\circ$. Hãy tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SAEF$ và mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BAEF$.

A. 4π . B. $\frac{3\pi}{2}$. C. 2π . D. $\frac{4\pi}{5}$.

Câu 24: Trong mặt phẳng (α) cho hai tia Ox, Oy , góc $xOy = 60^\circ$. Trên tia Oz vuông góc với mặt phẳng (α) tại O , lấy điểm S sao cho $SO = a$. Gọi M, N là các điểm lần lượt di động trên hai tia Ox, Oy sao cho $OM + ON = a$ ($a > 0$ và M, N khác O). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O trên hai cạnh SM, SN . Khi M, N di động trên hai tia Ox, Oy mặt cầu ngoại tiếp đa diện $MNHOK$ có diện tích nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4\pi a^2}{3}$. B. πa^2 . C. $2\pi a^2$. D. $\frac{\pi a^2}{3}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , $AB = 2a$, $BC = a$, $SC = SD$, $SAD = 90^\circ$. Góc giữa SD và (SBC) bằng α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.OCD$ biết diện tích tam giác SAB lớn hơn a^2 .

- A. $\frac{\sqrt{3}.a}{2}$. B. $\frac{\sqrt{7}.a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{13}.a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{15}.a}{2}$.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a , $DA = DB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $CD \perp AD$. Trên cạnh CD kéo dài lấy điểm E sao cho $AEB = 90^\circ$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCE$.

- A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$. C. $V = \pi a^3 \sqrt{3}$. D. $\frac{3\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi O' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, (N) là hình nón ngoại tiếp hình chóp $O'.ABC$. Góc giữa đường sinh của (N) và mặt đáy bằng α với $\tan \alpha = 2$, khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $3a$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{64}{9}\pi a^3$. B. $\frac{256}{81}a^3$. C. $\frac{256}{81}\pi a^3$. D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính diện tích S của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $S = \frac{5\pi a^2}{3}$. B. $S = \frac{5\pi a^2}{12}$. C. $S = \frac{5\pi a^2}{6}$. D. $S = \frac{3\pi a^2}{8}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính diện tích S của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $S = \frac{5\pi a^2}{3}$. B. $S = \frac{5\pi a^2}{12}$. C. $S = \frac{5\pi a^2}{6}$. D. $S = \frac{3\pi a^2}{8}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B ; $AB = BC = a$, $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm E ngoại tiếp tứ diện $SABC$, (S_2) là mặt cầu

tâm F ngoại tiếp tứ diện $SBCD$. Biết EF tạo với $mp(ABCD)$ một góc 30° . Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của (S_1) và (S_2) . Diện tích hình tròn (C) bằng

- A. $\frac{3\pi a^2}{4}$. B. $3\pi a^2$. C. $\frac{5\pi a^2}{4}$. D. $\frac{3\pi a^2}{2}$.

Câu 31: Cho hình chóp $10\ln 2 + \frac{19}{4}$ có đáy $\Rightarrow A' \equiv P$ là hình thoi cạnh $m < 3$, $ADC = 60^\circ$. Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính diện tích $y = f(x)$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ADC$.

- A. $f(x) = m$. B. $(-\infty; 3)$. C. $m \in (-\infty; -1)$. D. $m \in (-\infty; 3]$.

Câu 32: Cho mặt cầu có tâm O nằm trên mặt phẳng đáy của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng nhau, các đỉnh A, B, C thuộc mặt cầu. Biết bán kính mặt cầu bằng 3. Tổng độ dài l các giao tuyến của mặt cầu với các mặt bên của hình chóp thỏa mãn điều kiện nào dưới đây.

- A. $l \in (\sqrt{3}; 2)$. B. $l \in (3\sqrt{3}; 6)$. C. $l \in (13\sqrt{2}; 12\sqrt{3})$. D. $l \in (1; \sqrt{2})$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AC = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BAC = 150^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ bằng

- A. $\frac{4\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. B. $\frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{20\sqrt{5}\pi a^3}{3}$. D. $\frac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$.

Câu 34: Cho mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$. Khối tứ diện $ABCD$ có tất cả các đỉnh thay đổi và cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$. Biết thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ là $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), tính $a + b$.

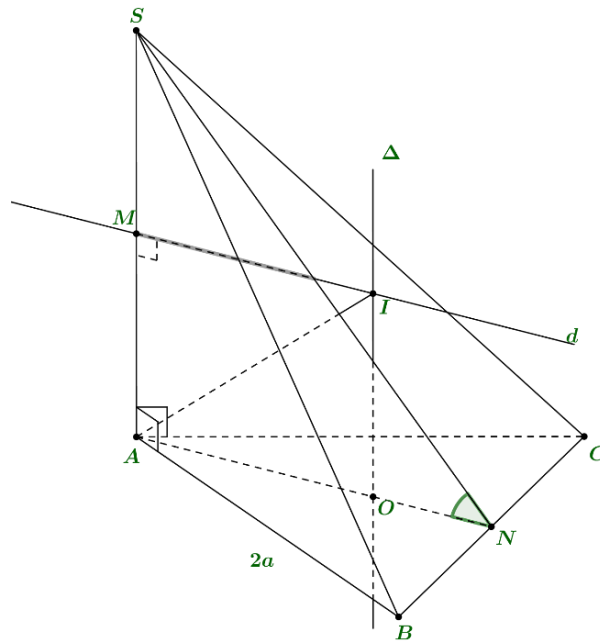
- A. $a + b = 1173$. B. $a + b = 4081$. C. $a + b = 128$. D. $a + b = 5035$.

Câu 35: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng $2a$. Tính thể tích V của khối cầu đi qua điểm A , tiếp xúc với hai cạnh SB, SD tại các trung điểm của chúng.

- A. $V = 4\pi a^3$. B. $V = \frac{9\sqrt{2}}{8}\pi a^3$. C. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. D. $V = \frac{9\sqrt{3}}{8}\pi a^3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D



Gọi N là trung điểm của BC , O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .

Dựng Δ qua O , $\Delta \perp (ABC) \Rightarrow \Delta$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và Δ, SA đồng phẳng.

Trong mặt phẳng (SAN) dựng đường trung trực d của cạnh bên SA .

Gọi $I = \Delta \cap d$, suy ra $IA = IB = IC = IS$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

và $R = IA$. Ta có: $\begin{cases} BC \perp AN \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN) \Rightarrow BC \perp SN$.

Suy ra $\angle((SBC), (ABC)) = \angle(AN, SN) = \angle SNA = 30^\circ$.

Mặt khác: $AN = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$, $AO = \frac{2}{3}AN = \frac{4\sqrt{3}a}{3}$.

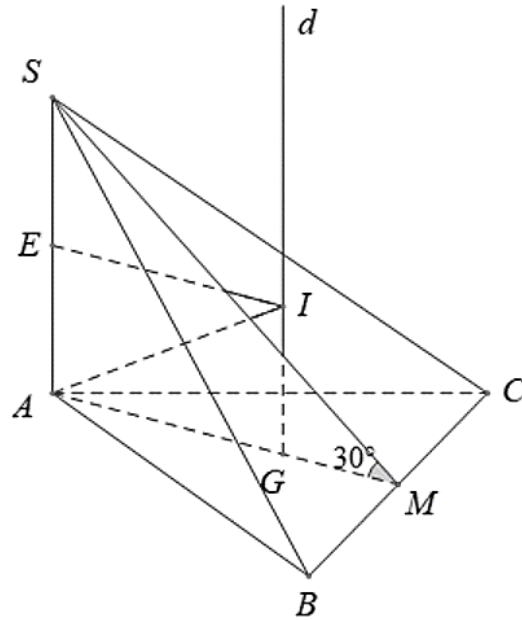
Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AN \Rightarrow \Delta SAN$ vuông tại A .

Ta có $\tan \angle SNA = \frac{SA}{AN} \Rightarrow SA = AN \cdot \tan 30^\circ = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2a$, suy ra $MA = IO = \frac{SA}{2} = a$.

Xét tam giác IOA vuông tại O : $R = IA = \sqrt{IO^2 + AO^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{57}a}{3}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S_{(S.ABC)} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{57}a}{3}\right)^2 = \frac{76\pi a^2}{3}$

Câu 2: Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC , ta có góc SMA là góc giữa (SBC) và $(ABC) \Rightarrow SMA = 30^\circ$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi đó ta có:

$$AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, SA = AM \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = a.$$

Qua G kẻ đường thẳng d vuông góc với $(ABC) \Rightarrow d \perp SA$.

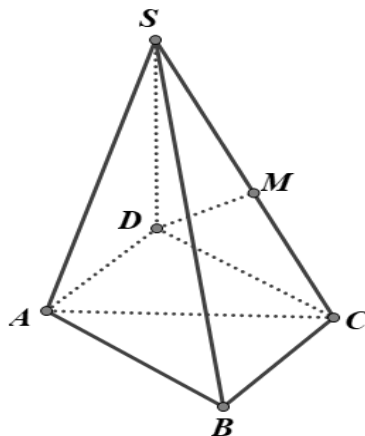
Gọi E là trung điểm của SA , qua E kẻ mặt phẳng (P) sao cho: $\begin{cases} (P) \perp SA \\ (P) \cap d = \{I\} \end{cases}$

Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ và khối cầu đó có bán kính là:

$$R = IA = \sqrt{IG^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + AG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi R^2 = \frac{19\pi a^2}{3}$.

Câu 3: Chọn A



Vì $SAB = SCB = 90^\circ$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có tâm là trung điểm của SB và bán kính $R = \frac{1}{2}SB$.

Chủ đề 08: Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện

Qua A và C lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với AC và BC nằm trong mặt phẳng (ABC) và cắt nhau tại $D \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD$

Ta lại có $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow BC \perp SD$. Từ đó suy ra $SD \perp (ABCD)$.

Dựng $DM \perp SC$ tại M .

Ta có $DM \perp (SBC)$ nên $d(A, (SBC)) = d(D, (SBC)) = DM = a\sqrt{6}$.

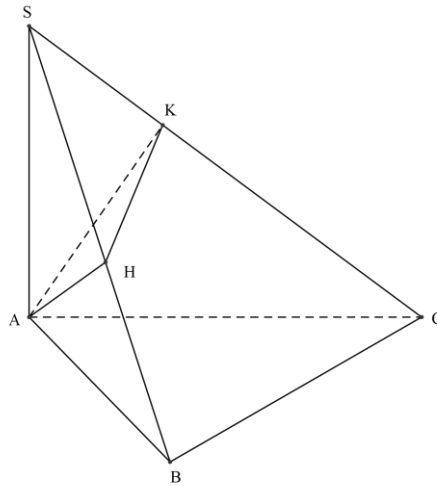
Trong tam giác SDC ta có $\frac{1}{DM^2} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{6a^2} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{9a^2} \Rightarrow SD = 3a\sqrt{2}$.

Mặt khác BD là đường chéo hình vuông nên $BD = 3a\sqrt{2}$.

Vậy tam giác SBD vuông cân đỉnh $D \Rightarrow SB = 6a \Rightarrow R = \frac{SB}{2} = 3a$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S_{(C)} = 4\pi R^2 = 36\pi a^2$.

Câu 4: Chọn A



Đặt $AB = a \Rightarrow SA = AC = 3a$. Ta có $AHS = AKS = 90^\circ \Rightarrow H, K, S, A$ cùng thuộc mặt cầu đường

kính $SA \Rightarrow S_1 = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}SA\right)^2 = 9\pi a^2$.

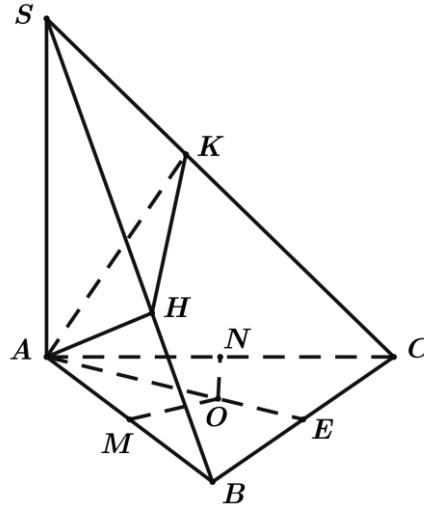
Ta có $\triangle AHB$ vuông tại H và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABC) \Rightarrow$ trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHB$ là đường trung trực của AB nằm trong mặt phẳng (ABC) .

Tương tự $\triangle AKC$ vuông tại K và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABC) \Rightarrow$ trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKC$ là đường trung trực của AC nằm trong mặt phẳng (ABC) .

Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCKH$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và bán kính là bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^\circ = 7a^2$,

$R = \frac{BC}{2\sin BAC} = \frac{a\sqrt{21}}{3} \Rightarrow S_2 = \frac{28\pi}{3}$. Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{28}$.

Câu 5: Chọn A

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Gọi E là trung điểm của BC , ta có $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Do $\triangle AHB$, $\triangle AKC$ là các tam giác vuông lần lượt tại H và K nên M, N lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHB$ và $\triangle AKC$.

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng AHB , khi đó d_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHB$.

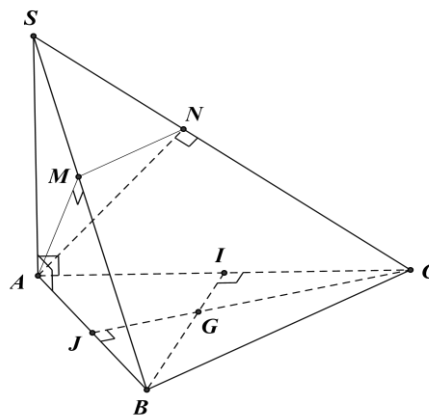
Gọi d_2 là đường thẳng đi qua N và vuông góc với mặt phẳng AKC , khi đó d_2 là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKC$.

Trong mặt phẳng (ABC) , ta có $d_1 \cap d_2 \cap AE$

Khi đó $OA = OB = OC = OH = OK$. Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCKH$ có tâm O , bán kính $R = OA$.

Ta có $\triangle AOM \sim \triangle ABE \Rightarrow \frac{OM}{BE} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow OM = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = OA = \sqrt{AM^2 + OM^2} = a$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCKH$ là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Câu 6: Chọn C

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và AB .

Gọi $IB \cap CJ = G \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác đều ABC cạnh $2a \Rightarrow GA = GB = GC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$$\begin{cases} IB \perp AC \\ IB \perp SA \end{cases} \Rightarrow IB \perp (SAC) \Rightarrow IB \perp (ANC).$$

Tam giác ANC vuông tại N , có I là trung điểm $AC \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC . Từ và suy ra IB là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC .

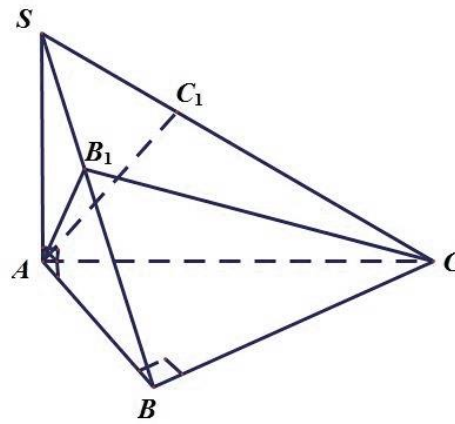
Vì $G \in IB$ nên $GA = GN = GC$.

Tương tự CJ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB và $G \in CJ$,

suy ra $GA = GM = GB$. Từ đó suy ra $GA = GB = GC = GM = GN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy hình chóp $A.BCNM$ nội tiếp mặt cầu tâm G , bán kính $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$ (1). Mà $AB_1 \perp SB$ (2)

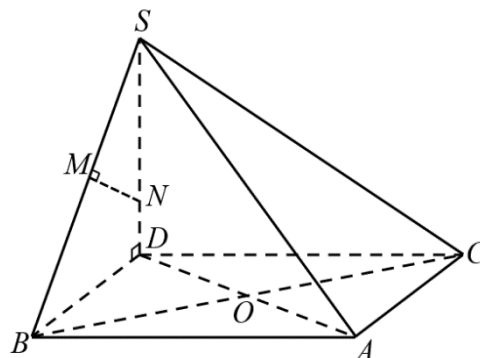
Từ (1), (2) $\Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp B_1C$ (3). Ta lại có: $\begin{cases} AC_1 \perp C_1C \\ AB \perp BC \end{cases}$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ là trung điểm cạnh AC và bán

kính: $R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi a^3$.

Câu 8: Chọn C



Dựng hình bình hành $ABDC$, do $AB = AC = a$ nên $ABDC$ là hình thoi. Ta có $BAC = 120^\circ \Rightarrow BAD = CAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ và $\triangle ACD$ đều $\Rightarrow DA = DB = DC = a$.

Lại có $SA = SB = SC$, suy ra $SD \perp (ABC)$ và SD là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Gọi M là trung điểm SB , qua M dựng mặt phẳng trung trực của đoạn SB và cắt SD tại $N \Rightarrow MN$ là trung trực của SB và N là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Do $\triangle SMN$ và $\triangle SDB$ đồng dạng nên $\frac{SM}{SD} = \frac{SN}{SB}$.

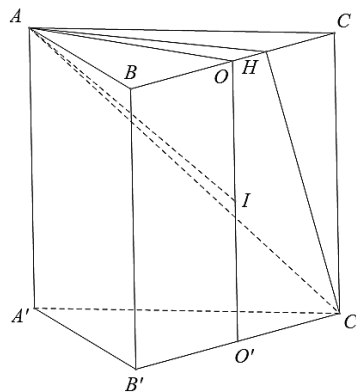
Có $\triangle SDA$ vuông tại D nên $SD = \sqrt{SA^2 - DA^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Có M là trung điểm SB nên $SM = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $R = SN = \frac{SM \cdot SB}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3a}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9\pi a^2}{2}$.

Câu 9: Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $AH \perp (BCC'B')$. Suy ra góc giữa AC' với mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\angle AC'H$ và $\angle AC'H = 45^\circ$

Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$, $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

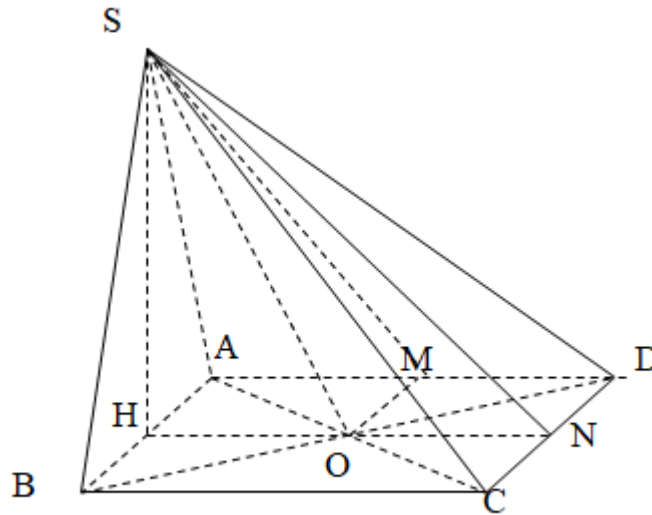
Khi đó: $AC' = \frac{AH}{\sin 45^\circ} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$, $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}a$

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$ suy ra O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$. Do đó trung điểm I của OO' là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng

$ABC.A'B'C'$. Khi đó bán kính mặt cầu là IA và $IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{CC'^2}{4} + \frac{BC^2}{4}} = \frac{3\sqrt{8}}{8}a$

Vậy diện tích mặt cầu là $S = \frac{9\pi a^2}{2}$

Câu 10: Chọn C



Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$ và cắt nhau theo giao tuyến AB . Gọi H là trung điểm AB .

$SH \perp AB$; $\begin{cases} AB \perp HN \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHN)$; $OM \parallel AB$ nên $OM \perp (SHN)$ hay $OM \perp (SON)$.

$$OM = \frac{AB}{2} = a \text{ nên } \sin SON = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

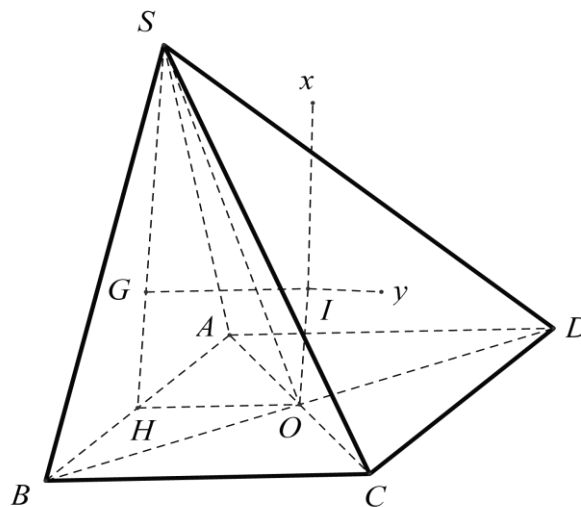
Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SON

$$\frac{SN}{\sin SON} = 2R \Rightarrow R = \frac{SN}{2 \sin SON} = \frac{\sqrt{165}a}{6}.$$

Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.DMN$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp khối $S.OMN$.

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.MND \text{ là: } R_{mc} = \sqrt{R^2 + \frac{OM^2}{4}} = a\sqrt{\frac{29}{6}}$$

Câu 11: Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB , ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$. Từ $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , O là tâm hình chữ nhật $ABCD$.

Tam giác BCD vuông tại C nên $CO = \frac{1}{2}BD \Rightarrow O$ là tâm đáy.

Trong (SHO) kẻ $Ox // SH$

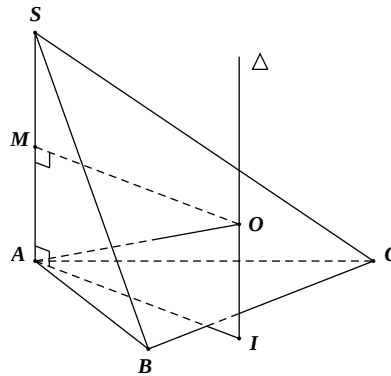
Dựng trục ΔSAB : qua $G, // OH$ cắt Ox tại $I \Rightarrow I$ là tâm cầu ngoại tiếp $S.BCD$.

Tính bán kính $R = IB$. Ta có $IB = \sqrt{IO^2 + OB^2} = \sqrt{HG^2 + OB^2}$.

Lại có: $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $GH = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\Rightarrow IB = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{19a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$$

Câu 12: Chọn A



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Gọi M là trung điểm SA , trong mặt phẳng (SA, Δ) dựng đường trung trực của đoạn SA cắt Δ tại O .

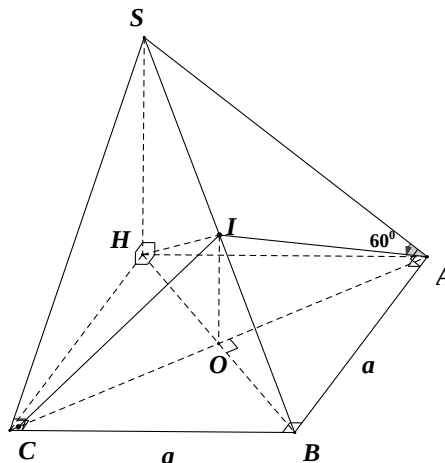
Lúc đó ta có $OA = OB = OC = OS$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

Áp dụng định lý Sin cho tam giác ABC ta có $AI = \frac{BC}{2 \cdot \sin BAC} = \frac{2a\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 120^\circ} = 2a$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là

$$R = OA = \sqrt{AI^2 + AM^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$

Câu 13: Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Ta có } SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AB \\ SH \perp BC \end{cases} \text{ mà } SAB = SCB = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SC \perp BC \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} AB \perp AH \\ BC \perp CH \end{cases}$ nên tứ giác $ABCH$ là hình vuông cạnh a .

$$\text{Do } SH \perp (ABC) \Rightarrow \left(SA, (ABC) \right) = SAH = 60^\circ \Rightarrow SH = AH \cdot \tan SAH = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

Gọi $O = AC \cap HB$ thì O là tâm đường tròn hình vuông $ABCH$ đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Ta có } SAB = SCB = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SC \perp BC \end{cases} \text{ và } SH \perp (ABCH) \Rightarrow SH \perp HB \text{ nên } A, C, H \text{ cùng nhìn}$$

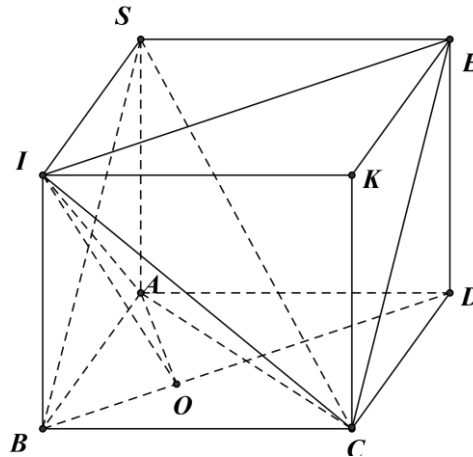
đoạn SB dưới một góc vuông nên A, C, H thuộc mặt cầu đường kính SB .

Gọi I là trung điểm SB thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ có bán kính

$$R = IH = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SH^2 + HB^2}}{2} = \frac{\sqrt{SH^2 + AH^2 + AB^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$.

Câu 14: Chọn A



Đặt $AD = x$ ($x > 0$).

Dựng hình hộp chữ nhật $SEKI.ADCB$ như hình vẽ. Gọi O là hình chiếu của A trên BD . Khi đó $AI \perp (BCES)$; $AO \perp (BDEI)$

$$\text{Do đó } ((BED), (SBC)) = ((BDEI), (BCES)) = (AI, AO) = IAO = 60^\circ$$

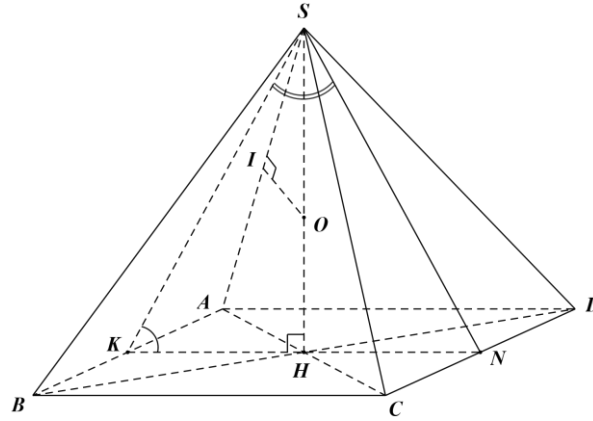
$$\text{Tính: } AI = a\sqrt{2}; AO = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$\text{Từ đó } \cos IAO = \frac{AO}{AI} = \frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = a.$$

Nên hình hộp $SEKI.ADCB$ là hình lập phương. Dễ thấy $SE \perp EC$; $SD \perp CD$ nên SC là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SCDE$. Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp $SCDE$ là

$$R = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 15: Chọn B



Gọi $H = AC \cap BD$. Do $SA = SB = SC = SD$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

Ta chứng minh được $AB \perp (SKN)$ và $CD \perp (SKN)$ nên $((SAB), (SCD)) = (SK, SN) = 60^\circ$.

Trường hợp 1: Nếu $KSN = 60^\circ$ thì ta có $SKH = 60^\circ$.

Xét tam giác SKH vuông tại H ta có $SH = KH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAH vuông tại H ta có $SA^2 = AH^2 + SH^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2 = \frac{17a^2}{4}$.

Lúc đó ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

$R = \frac{SA^2}{2 \cdot SH} = \frac{17a^2}{4} : (2a\sqrt{3}) = \frac{17a\sqrt{3}}{24}$. Nhận thấy đáp án **B** thỏa mãn.

Trường hợp 2: Nếu $KSN = 120^\circ$ thì ta có $SKH = 30^\circ$.

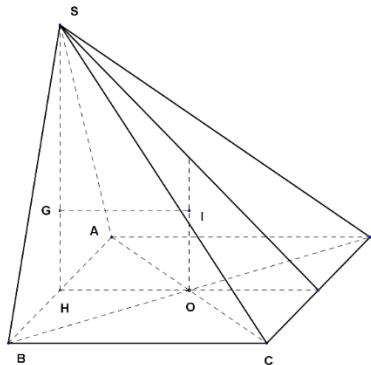
Xét tam giác SKH vuông tại H ta có $SH = KH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SAH vuông tại H ta có $SA^2 = AH^2 + SH^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{19a^2}{12}$.

Lúc đó ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

$R = \frac{SA^2}{2 \cdot SH} = \frac{19a^2}{12} : \left(2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{19a\sqrt{3}}{24}$. Nhận thấy không có đáp án nào thỏa mãn.

Câu 16: Chọn D



Gọi H là trung điểm AB , G là trọng tâm tam giác đều SAB , O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$. Vì $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dựng đường thẳng d_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

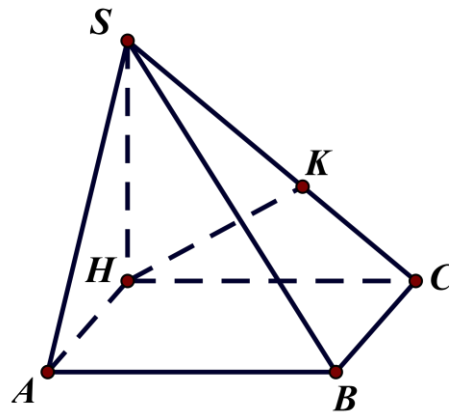
Dựng đường thẳng d_2 là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB .

Gọi I là giao điểm của d_1 với d_2 suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có $SG = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $GI = HO = \frac{a}{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

$$R = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Câu 17: Chọn C



Do $SAB = SCB = 90^\circ$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có đường kính là SB .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên $\Rightarrow SH \perp$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAH) \Rightarrow AB \perp AH$

Tương tự ta chứng minh được $CB \perp (SCH) \Rightarrow CB \perp CH$

Từ, và $AB = BC$ ta có $ABCH$ là hình vuông $\Rightarrow AH \parallel BC$

$\Rightarrow d(A; (SBC)) = d(H; (SBC)) = a\sqrt{3}$. Dựng $HK \perp SC$ ($K \in SC$).

Khi đó $HK \subset (SCH), CB \perp (SCH) \Rightarrow HK \perp CB$.

$\Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow d(H; (SBC)) = HK = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SHC$ vuông tại H có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2}$ mà $HK = a\sqrt{3}, HC = AB = 2a \Rightarrow SH = 2a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = 4a$.

Xét $\triangle SBC$ vuông tại C có $SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = 2a\sqrt{5}$.

Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có bán kính $R = a\sqrt{5}$ và diện tích $S = 20\pi a^2$.

Câu 18: Chọn A

Trong mặt phẳng (ABC) qua các điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC kẻ các đường trung trực của AB, AC giả sử 2 đường đó cắt nhau tại G .

Ta có: $EG \perp (AHB), GF \perp (AKC)$. Suy ra EG, FG lần lượt là trục đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHB, AKC . Do đó $GA=GB=GC=GH=GK$ (1).

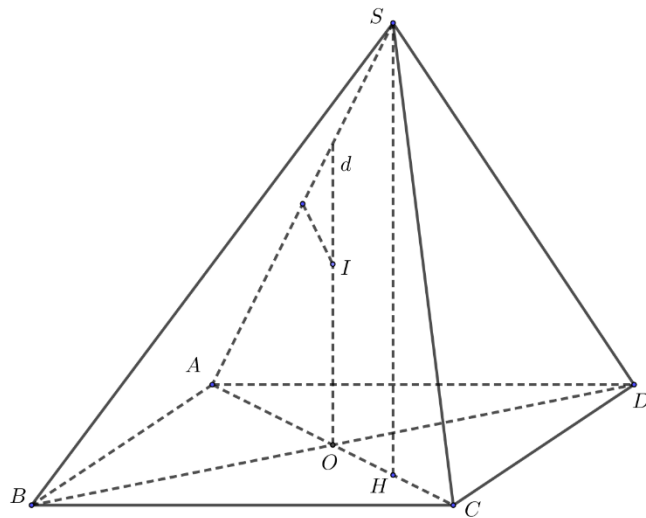
Gọi M là trung điểm SA , ta có $MH=MA=MK$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $GM \perp (AHK)$. Do $SA \perp (ABC)$ suy ra góc giữa mặt phẳng (AHK) và mặt phẳng (ABC) là $AMG = 60^\circ$.

Trong tam giác ABC gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ta có $\frac{BC}{\sin 120^\circ} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{3}$, $AM = \frac{AG}{\tan 60^\circ} = \frac{R}{\tan 60^\circ} = 1$.

Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ ta có $r = \sqrt{R^2 + AM^2} = 2$.

Diện tích mặt cầu cần tính là $S = 4\pi r^2 = 16\pi$.

Câu 19: Chọn A



Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có: O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Dựng đường thẳng d qua O và song song với $SH \Rightarrow d$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SAC) , dựng đường trung trực của SA cắt đường thẳng d tại I

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IS = IA \end{cases}$$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Vì $I \in (SAC)$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC .

Ta có: HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$

$$\Rightarrow [SC, (ABCD)] = (SC, HC) = SCH = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có: } HC = \frac{AC}{4} = \frac{a}{4}; HA = \frac{3AC}{4} = \frac{3a}{4}; SH = HC \cdot \tan SCH = \frac{a\sqrt{3}}{4}; SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Áp dụng định lý hàm Sin trong tam giác } SAC, \text{ ta được: } \frac{SA}{\sin SCH} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2}.$$

Vậy

Cách khác:

Ta có: HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$

$$\Rightarrow [SC, (ABCD)] = (SC, HC) = SCH = 60^\circ \text{ mà } SO = SC \text{ (} SH \text{ là đường trung trực của } OC \text{)}$$

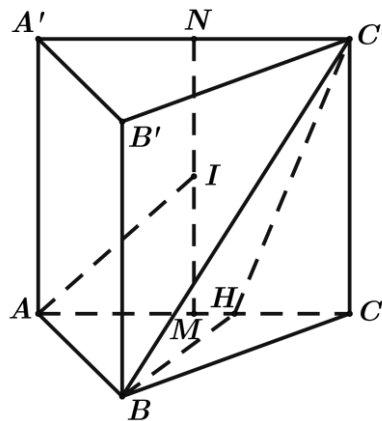
Nên $\triangle SOC$ đều $\Rightarrow OS = OC$.

Mặt khác: $OA = OB = OC = OD$ (O là tâm hình vuông $ABCD$)

$\Rightarrow OS = OA = OB = OC = OD \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{Do đó: } R = OA = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}.$$

Câu 20: Chọn D



Kẻ $BH \perp AC, H \in AC \Rightarrow BH \perp (ACC'A')$.

Suy ra góc tạo giữa BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $BC'H = 30^\circ$.

Tam giác ABC vuông tại B , có:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a, BH \cdot AC = BA \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác BHC' vuông tại H , có: $BC' = \frac{BH}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{3}$.

Tam giác BCC' vuông tại C , có: $CC' = \sqrt{BC'^2 - BC^2} = a\sqrt{2}$.

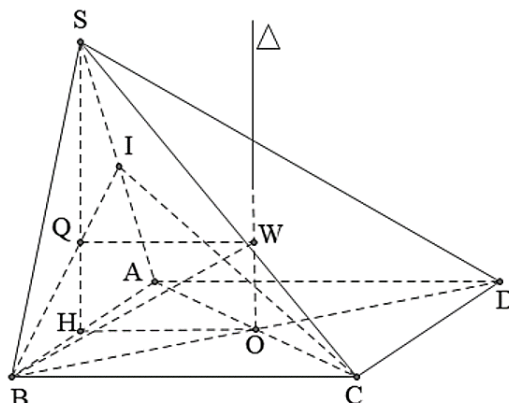
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AC, A'C'$. Gọi I là trung điểm của MN .

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$$\text{Ta có bán kính mặt cầu: } R = IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Diện tích } S \text{ của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là: } S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{3a^2}{2} = 6\pi a^2.$$

Câu 21: Chọn C



Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow \Delta$ là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm SA .

$BC \perp (SAB) \Rightarrow SA \perp (BCI) \Rightarrow (BCI)$ là mặt phẳng trung trực đoạn SA .

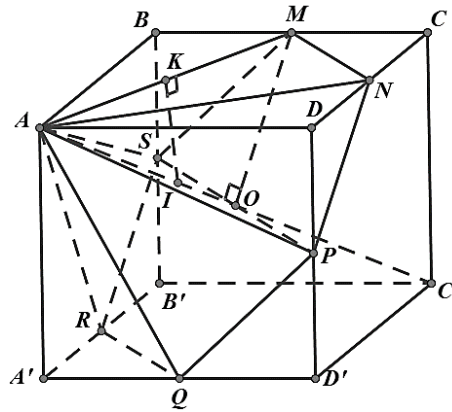
Trong (SH, Δ) qua G kẻ đường thẳng song song với HO cắt Δ tại W .

$\Rightarrow W$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính $R = WB$.

$$GH = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow WO = \frac{a\sqrt{3}}{6}; OB = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$R = WB = \sqrt{WO^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{36} + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Câu 22: Chọn D



Gọi O, M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của $AC'; BC; CD; DD'; D'A'; A'B'; B'B$.

Ta có $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = MC'$ suy ra M thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AC' . Chứng minh tương tự ta có N, P, Q, R, S K. Do đó, $(MNPQRS)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AC' .

$$\text{Ta có: } MN = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, AO = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + CC'^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ suy ra } MN = OM = ON \text{ hay tam giác}$$

OMN là tam giác đều. Chứng minh tương tự suy ra lục giác $MNPQRS$ là lục giác đều.

Hình chóp $A.MNPQRS$ có các cạnh bên bằng nhau và đáy là đa giác đều nên $A.MNPQRS$ là hình chóp đều.

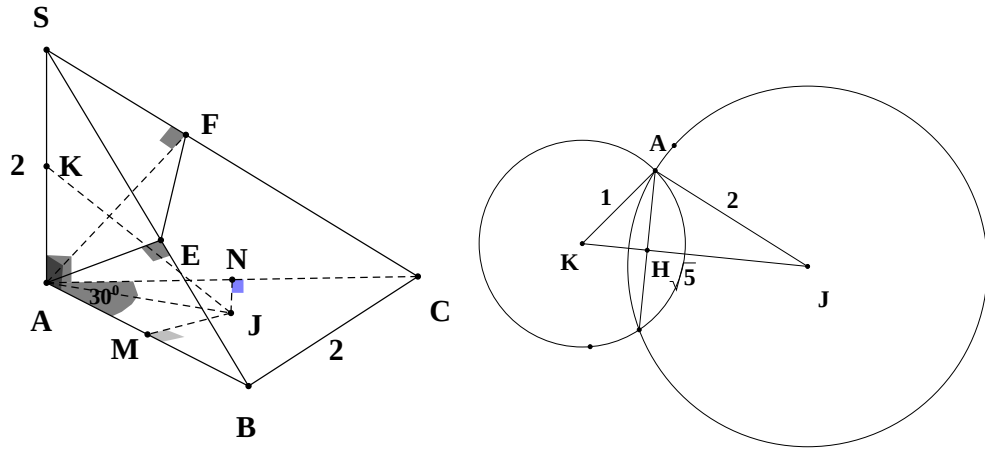
Gọi K là trung điểm của AM , khi đó mặt phẳng trung trực của AM đi qua trung điểm K và cắt AO tại $I \Rightarrow IA = IM = IN = IP = IQ = IR = IS$, nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $A.MNPQRS$.

$$\text{Ta có } \triangle AKI \sim \triangle AOM \text{ nên } \frac{AI}{AM} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AI = \frac{AM^2}{2AO}.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } A.MNPQRS: r = AI = \frac{AM^2}{2AO} = \frac{5a^2}{8} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}.$$

Tổng quát: Cho hình chóp đều có độ dài cạnh bên là b , chiều cao là h thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $r = \frac{b^2}{2h}$.

Câu 23: Chọn D



Gọi K là trung điểm của SA .

Ta có E, F nhìn cạnh SA dưới một góc vuông nên E, F thuộc mặt cầu đường kính SA hay mặt cầu (T) ngoại tiếp tứ diện $SAEF$ có bán kính $R_1 = AK = \frac{SA}{2} = 1$.

Lần lượt gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC và d_1, d_2 lần lượt là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE và ACF thì d_1 và d_2 lần lượt là trung trực các cạnh AB và AC trong mặt phẳng (ABC) nên gọi J là giao của d_1 và d_2 thì J cách đều các đỉnh A, B, C, E, F đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Do đó mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $BAEF$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCFE$ và có bán kính $R_2 = JA$.

$$\text{Theo định lý sin trong tam giác } ABC \text{ ta có } \frac{BC}{\sin BAC} = 2R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{BC}{2\sin BAC} = \frac{2}{2\sin 30^\circ} = 2.$$

Ta có $KJ = \sqrt{AK^2 + AJ^2} = \sqrt{5} < R_1 + R_2 = 3$ nên hai mặt cầu (T) và (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác AEF .

Bán kính đường tròn (C) là đoạn AH vì $AK^2 + AJ^2 = KJ^2 = 5$ nên tam giác AKJ vuông tại A và $AH \perp KJ$ nên $AH = \frac{AK \cdot AJ}{KJ} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Vậy diện tích thiết diện tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SAEF$ và mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BAEF$ là $S = \pi \cdot AH^2 = \frac{4\pi}{5}$.

Câu 24: Chọn D

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (ABCD) \perp (SAB).$$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Gọi $ID \cap BC = \{M\}$, gọi K là trung điểm của $SM \Rightarrow IK \parallel SD$.

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} AD \perp (SAB) \\ AD \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB).$$

Kẻ $IH \perp SB$ tại $H \Rightarrow IH \perp (SBC)$.

Ta có KH là hình chiếu vuông góc của IK lên mặt phẳng (SBC) .

Ta có $\alpha = (SD, mp(SBC)) = (IK, mp(SBC)) = IKH$. Đặt $IH = x$.

$$\text{Xét tam giác vuông } IHK \text{ có } \frac{x}{KI} = \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow KI = \frac{5x}{\sqrt{15}} \Rightarrow SD = \frac{10x}{\sqrt{15}} \Rightarrow SD^2 = \frac{20}{3}x^2$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SAD \text{ có } SA^2 = SD^2 - a^2 = \frac{20}{3}x^2 - a^2.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SIB \text{ có } \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{SI^2} \Rightarrow SI^2 = \frac{a^2 \cdot x^2}{a^2 - x^2} \Rightarrow SB^2 = SI^2 + a^2 = \frac{a^2 \cdot x^2}{a^2 - x^2} + a^2.$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot AB = \frac{a^2 x}{\sqrt{a^2 - x^2}} > a^2 \Rightarrow x^2 > \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Ta có } SB = SA \Rightarrow \frac{a^2 x^2}{a^2 - x^2} + a^2 = \frac{20}{3}x^2 - a^2.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \text{ thế vào ta có } 20t^2 - 23a^2t + 6a^4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{5}a^2 (L) \\ t = \frac{3}{4}a^2 (TM) \end{array} \right.$$

$$\text{Với } t = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow SI = \sqrt{3}a.$$

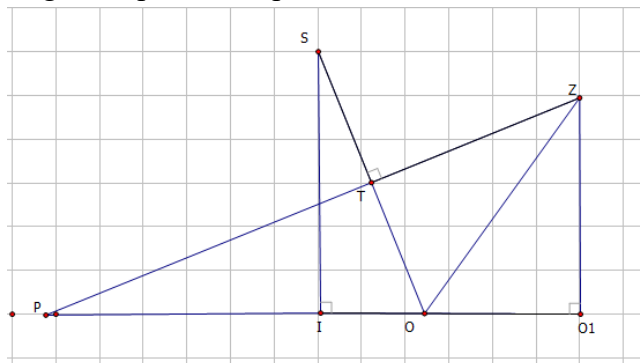
Ta có $S_{\Delta OCD} = \frac{a^2}{2}$. Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OCD

$$\Rightarrow S_{\Delta OCD} = \frac{OD \cdot OC \cdot DC}{4R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{OD \cdot OC \cdot DC}{4S_{\Delta OCD}} = \frac{5}{4}a.$$

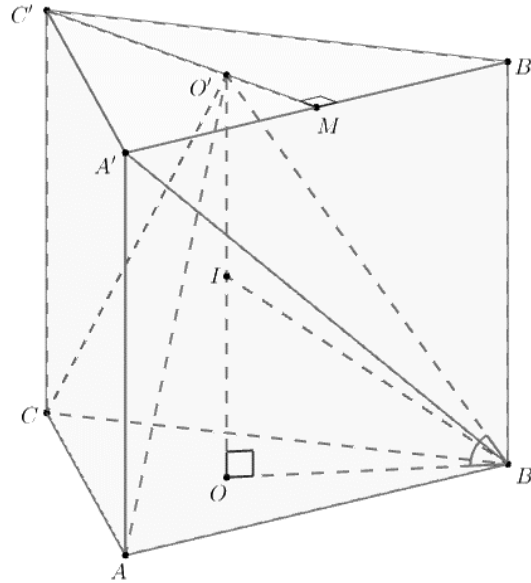
Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OCD . Từ O_1 kẻ đường thẳng $\Delta \perp (ABCD)$.

Trong $mp(SIO)$ kẻ đường thẳng trung trực của SO cắt SO, IO, Δ lần lượt tại T, P, Z .

Ta có Z là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.OCD$.



Câu 27: Chọn D



Gọi O là trọng tâm tam giác ABC , ta có góc giữa đường sinh của (N) và mặt đáy là góc $O'BO$. Ta có $CC' \parallel (ABB'A')$, $A'B \subset (ABB'A')$, suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng khoảng cách giữa đường thẳng CC' và mặt phẳng $(ABB'A')$ và bằng khoảng cách từ điểm C' tới mặt phẳng $(ABB'A')$.

Gọi M là trung điểm $A'B'$. Ta có $C'M \perp (ABB'A')$, suy ra $d(C', (ABB'A')) = C'M = 3a$.

Suy ra $BO = C'O' = \frac{2}{3}C'M = 2a$.

Xét $\triangle O'O'B$ vuông tại O có $\tan O'BO = \tan \alpha = \frac{OO'}{BO} = 2$ suy ra $OO' = 4a$.

Gọi I là trung điểm OO' suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

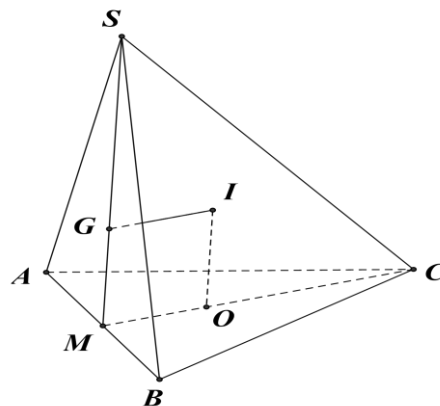
Xét $\triangle IOB$ vuông tại O có $OI = OB = 2a$ suy ra $IB = 2a\sqrt{2}$.

Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $R = IB = 2a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (2a\sqrt{2})^3 = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi a^3.$$

Câu 28: Chọn A



$(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB . Kẻ $SM \perp AB \Rightarrow SM \perp (ABC)$;

Và có M là trung điểm AB .

Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, SAB .

Dựng đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) và đường thẳng qua G vuông góc (SAB) . Hai đường thẳng đó cắt nhau tại I . Ta có $I \in OI \Rightarrow IA = IB = IC$

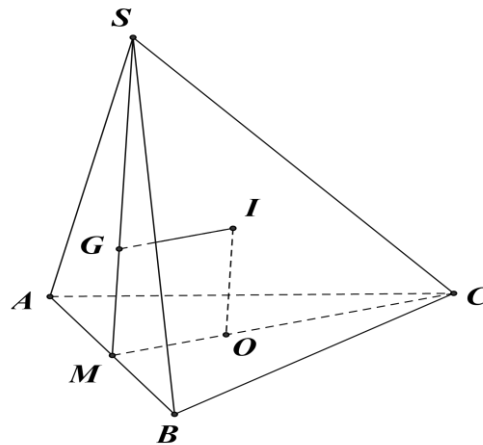
$I \in GI \Rightarrow IA = IB = IS$

Nên $IA = IB = IC = IS$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Mặt cầu có bán kính

$$\text{là } R = IA \text{ nên } IA^2 = AO^2 + IO^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{5a^2}{12}$$

Vậy diện tích S của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{5a^2}{12} = \frac{5\pi a^2}{3}$.

Câu 29: Chọn A



$(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB . Kẻ $SM \perp AB \Rightarrow SM \perp (ABC)$;

Và có M là trung điểm AB .

Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, SAB .

Dựng đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) và đường thẳng qua G vuông góc (SAB) . Hai đường thẳng đó cắt nhau tại I . Ta có $I \in OI \Rightarrow IA = IB = IC$

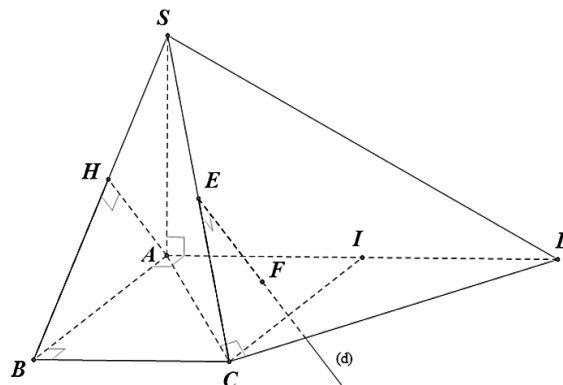
$I \in GI \Rightarrow IA = IB = IS$

Nên $IA = IB = IC = IS$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Mặt cầu có bán kính

$$\text{là } R = IA \text{ nên } IA^2 = AO^2 + IO^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{5a^2}{12}$$

Vậy diện tích S của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{5a^2}{12} = \frac{5\pi a^2}{3}$.

Câu 30: Chọn C



Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$ và $SA \perp BC$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow CBS = CAS = 90^\circ$$

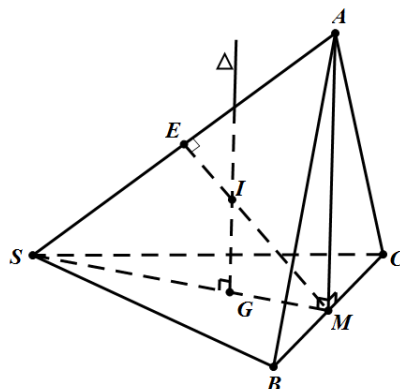
$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là trung điểm của SC .

Vậy E là trung điểm của SC .

F là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SBCD$ và E là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$

$\Rightarrow F$ nằm trên đường thẳng (d) qua E và $(d) \perp (SBC) \Rightarrow EF \perp (SBC)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB


$$\Rightarrow AH \perp SB \text{ mà } AH \perp BC$$

Goi M là trung điểm đoạn BC . Tam giác ABC và tam giác SBC đều cạnh a .

Ta có $SM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, do đó tam giác SAM vuông tại M .

Có $\left. \begin{array}{l} AM \perp SM \\ AM \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (SBC)$. Ta có (SAM) là mặt phẳng trung trực đoạn BC .

Gọi G là trọng tâm tam giác SBC , Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

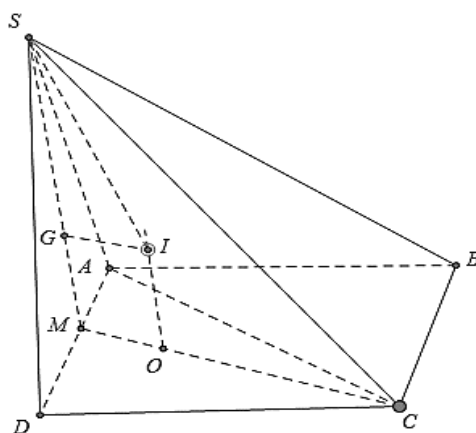
Δ đi qua G và song song với AM .

Gọi E là trung điểm SA , ta có $I = \Delta \cap EM$, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$.

$$\text{C6 } IG = GM \cdot \tan 45^\circ = GM = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad SG = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Do đó } R = SI = \sqrt{IG^2 + GS^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{36} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Câu 31: Chọn B



Gọi M là trung điểm của cạnh AD . Vì $\triangle SAD$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SM \perp (ABCD)$

Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle SAD$.

Ta có $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SM \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$. Từ O kẻ đường thẳng $\Delta_1 \perp (ACD) \Rightarrow \Delta_1 \parallel SM$.

Trong mặt phẳng $(\Delta_1; SM)$ từ G kẻ đường thẳng $\Delta_2 \parallel CM$ và $\Delta_2 \cap \Delta_1 = I$.

Do $\Delta_2 \parallel CM \Rightarrow \Delta_2 \perp (SAD)$.

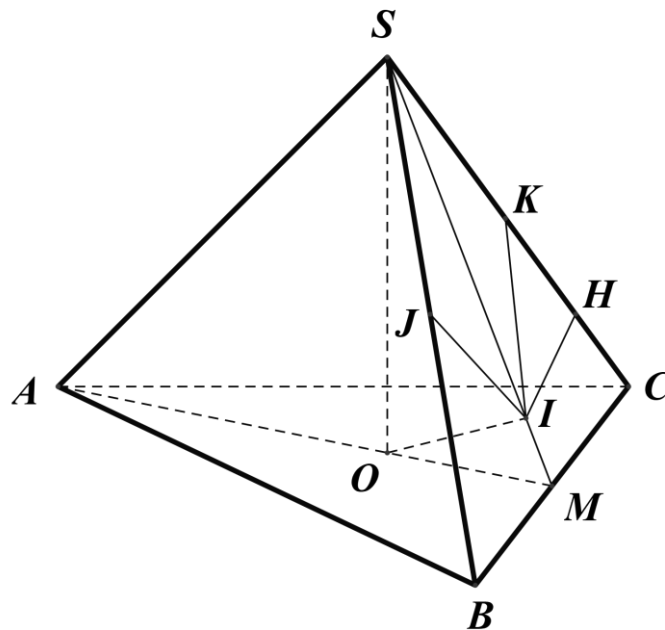
Vì $I \in \Delta_1 \Rightarrow IA = ID = IC$ (1). Vì $I \in \Delta_2 \Rightarrow IA = ID = IS$ (2). Từ (1), (2) có I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ADC$.

Các tam giác ADC và SAD đều cạnh a nên $SG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $GI = OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Bán kính của mặt cầu là $R = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} + \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Do đó diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ADC$ là: $S = 4\pi R^2 = \frac{5\pi a^2}{3}$.

Câu 32: Chọn B



Giả sử hình chóp đều có cạnh a thì bán kính mặt cầu là $R = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 3 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$.

Gọi I là tâm đường tròn giao tuyến của mặt cầu với mặt bên (SBC) , M là trung điểm BC ta có

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow OI = \sqrt{2}; r = IC = \sqrt{R^2 - OI^2} = \sqrt{7}.$$

Gọi H là hình chiếu của I lên SC , K là giao điểm của SC với đường tròn tâm I .

$$SI = \sqrt{SO^2 - OI^2} = 4; IH = SI \cdot \sin 30^\circ = 2.$$

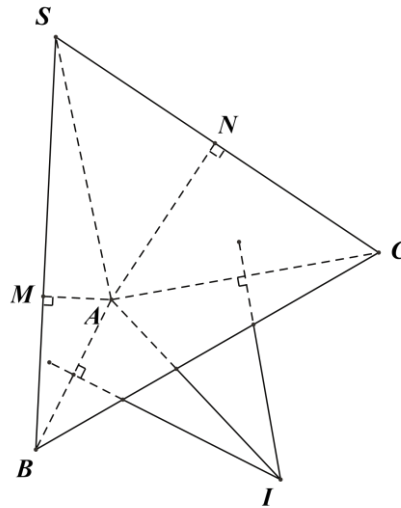
Gọi α là số đo góc HIK . $\cos \alpha = \frac{IH}{IK} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \alpha \approx 0,714(\text{rad})$

Số đo cung KJ là giao tuyến của mặt cầu với mặt bên (SBC) là $\frac{2\pi}{3} - 2\alpha$.

Tổng độ dài l các giao tuyến của mặt cầu với các mặt bên của hình chóp là

$$l = \pi r \left(\frac{2\pi}{3} - 2.0,714 \right) \approx 5,54 \in (3\sqrt{3}; 6).$$

Câu 33: Chọn B.



Trong mp (ABC) , gọi Δ và Δ' lần lượt là trung trực của các đoạn thẳng AB và AC .

Gọi I là giao điểm của Δ và Δ' .

Vì $\begin{cases} \Delta \perp AB \\ \Delta \perp SA \end{cases}$ nên $\Delta \perp (AMB)$, mà tam giác AMB vuông tại M suy ra Δ là trục đường tròn

ngoại tiếp tam giác AMB . Có $I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IM$ (1)

Chứng minh tương tự ta được Δ' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC .

Do đó $IA = IN = IC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IA = IB = IM = IN = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ với bán kính $R = IA$.

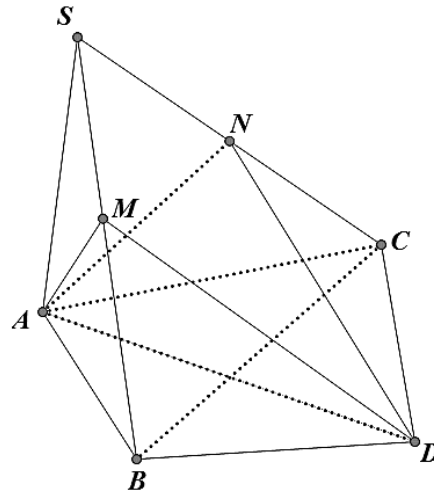
Mặt khác trong tam giác ABC , I là giao điểm của hai đường trung trực nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = IA = \frac{BC}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC}}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 150^\circ} = \sqrt{7}a.$$

$$\text{Vây thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp } A.BCNM: V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}.$$

Cách 2.



Dựng AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Khi đó $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BD; AC \perp CD$.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} AB \perp BD \\ SA \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAB), AM \subset (SAB) \Rightarrow BD \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp MB \Rightarrow AM \perp (MBD) \Rightarrow AM \perp MD$ hay $\angle AMD = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự: $\angle AND = 90^\circ$.

Hình chóp $A.BCNM$ có các đỉnh cùng nhìn đoạn AD dưới một góc vuông nên khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ có đường kính là AD .

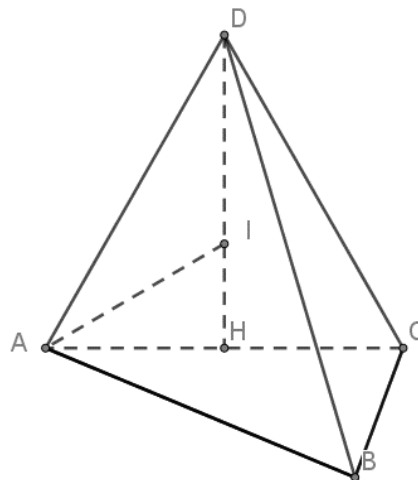
Vì vậy, bán kính của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = \frac{BC}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC}}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 150^\circ} = \sqrt{7}a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp } A.BCNM: V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}.$$

Câu 34: Chọn B



Gọi H là trung điểm của AC , vì tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$ nên $DH \perp (ABC)$ và tâm I của mặt cầu (S) thuộc tia DH . Đặt $DH = x$ và $AH = y$ ($0 < y \leq 5; 0 < x < 10$).

Chủ đề 08: Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện

Có $ID = IA = 5$ và $IH = |x - 5|$.

Xét tam giác vuông AIH có $y^2 = AH^2 = AI^2 - IH^2 = 25 - (x - 5)^2 = 10x - x^2$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}AC.BH = y^2 = 10x - x^2$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DH = \frac{1}{3}(10x - x^2)x$.

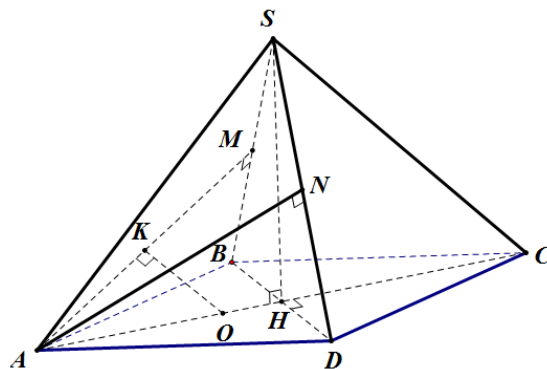
Xét $f(x) = \frac{1}{3}(10x - x^2)x = \frac{1}{3}(10x^2 - x^3)$ với $0 < x < 10$.

$$f'(x) = -x^2 + \frac{20}{3}x, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{20}{3} \end{cases}$$

x	0	$\frac{20}{3}$	10
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\frac{4000}{81}$	

Vậy $a = 4000, b = 81$ nên $a + b = 4081$.

Câu 35: Chọn B



Vì hình cầu tiếp xúc với SB tại trung điểm M nên tâm mặt cầu O nằm trên mặt phẳng trung trực (MAC) của SB

Vì hình cầu tiếp xúc với SD tại trung điểm N nên tâm mặt cầu O nằm trên mặt phẳng trung trực (NAC) của SD . Suy ra: $O \in (MAC) \cap (NAC) \Rightarrow O \in AC$

Trong mp (MAC) vẽ trung trực của MA cắt AC tại O suy ra $OM = OA$

$$\Delta MAO = \Delta NAO \Rightarrow OM = ON$$

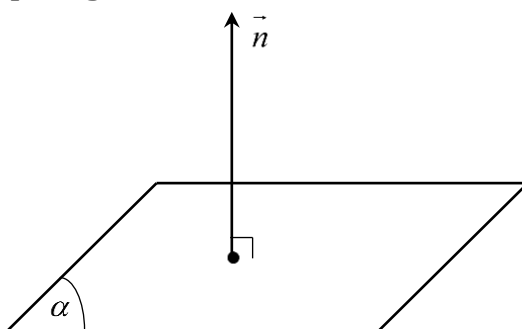
Vậy O là tâm mặt cầu cần tìm. Gọi R là bán kính mặt cầu, khi đó: $R = OA = \frac{AK}{\cos KAO}$

(K là trung điểm MA , H là tâm hình vuông $ABCD$)

$$\text{Ta có: } AK = \frac{1}{2}AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a; \cos KAO = \cos MAH = \frac{AH}{AM} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a\right)^3 = \frac{9\sqrt{2}}{8}\pi a^3.$$

1. Vector pháp tuyến của mặt phẳng



- Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α) .
- Nếu 2 vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương và giá của chúng song song với một mặt phẳng (α) (hoặc nằm trên (α)) thì vector $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .
- **Chú ý:** Nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k \cdot \vec{n}$ ($k \in \mathbb{R}, k \neq 0$) cũng là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

- Mặt phẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$ có phương trình tổng quát là $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

3. Mỗi mặt phẳng đều có phương trình tổng quát dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ngược lại mỗi phương trình có dạng trên đều là phương trình của một mặt phẳng.

- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì vector $\vec{n} = (A; B; C)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

4. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

- Mặt phẳng (α) không đi qua gốc O , cắt trục Ox tại điểm $A(a; 0; 0)$, cắt trục Oy tại điểm

$$B(0; b; 0) \text{ và cắt trục } Oz \text{ tại điểm } C(0; 0; c) \text{ có phương trình } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0).$$

- Phương trình này được gọi là phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (α) .

Bài toán 1: Viết phương trình mặt phẳng khi biết vector pháp tuyến

Một số cách xác định vector pháp tuyến của mặt phẳng hay gặp:

- (P) đi qua ba điểm phân biệt A, B, C thì có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = [\vec{AB}; \vec{AC}]$
- (P) đi qua điểm A và **song song** với (Q) thì ta chọn cho $\vec{n}_p = \vec{n}_Q$
- (P) **vuông góc** với hai mặt phẳng phân biệt $(\alpha), (\beta)$ thì $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{n}_p \perp \vec{n}_\beta \end{cases} \longrightarrow \vec{n}_p = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta]$
- (P) song song với hai véc tơ $\vec{a}; \vec{b}$ thì $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{a} \\ \vec{n}_p \perp \vec{b} \end{cases} \longrightarrow \vec{n}_p = [\vec{a}; \vec{b}]$
- (P) đi qua điểm A, B và vuông góc với (α) thì $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{AB} \\ \vec{n}_p \perp \vec{n}_\alpha \end{cases} \longrightarrow \vec{n}_p = [\vec{AB}; \vec{n}_\alpha]$
- (P) song song với hai đường thẳng $d_1; d_2$ thì $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{u}_{d1} \\ \vec{n}_p \perp \vec{u}_{d2} \end{cases} \longrightarrow \vec{n}_p = [\vec{u}_{d1}; \vec{u}_{d2}]$
- (P) **chứa** đường thẳng d và vuông góc mặt phẳng (α) thì $\vec{n}_p = [\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha]$
- (P) **chứa** đường thẳng d và song song với đường thẳng Δ thì $\vec{n}_p = [\vec{u}_d; \vec{u}_\Delta]$

Bài toán 2: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách

Giả sử mặt phẳng cần lập có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

- Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d nên (P) đi qua $M(x_0; y_0; z_0) \in d$ và vuông góc với vector chỉ phương của d . Khi đó ta có $\begin{cases} (P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\ \vec{n}_p \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow a = f(b; c) \end{cases}$
- Từ các dữ kiện về góc, khoảng cách ta được một phương trình đẳng cấp bậc hai theo các ẩn a, b, c . Thay $a = f(b; c)$ vào phương trình này, giải ra được $b = m.c$ hoặc $b = n.c$
- Chọn cho $c = 1$, từ đó tìm được các giá trị tương ứng của a và $b \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (P) cần lập.
- **Chú ý:** Phương trình đẳng cấp bậc hai là phương trình có dạng

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \Leftrightarrow A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\left(\frac{x}{y}\right) + C = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = t \Leftrightarrow x = t.y$$

B **VÍ DỤ MINH HỌA**

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 1)$ và mặt phẳng $(P): (m^2 - 1)x + 3my - z + 7 = 0$ với m là tham số thực. Tập hợp tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) đi qua điểm A là:

A. $\{5\}$.

B. $\{1; 5\}$.

C. $\{1\}$.

D. $\{-1; 5\}$.

LỜI GIẢI**Chọn B**

Vì $A(1; -2; 1)$ thuộc phương trình mặt phẳng $(P): (m^2 - 1)x + 3my - z + 7 = 0$ nên ta có:

$$(m^2 - 1) \cdot 1 + 3m \cdot (-2) - 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$$

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt d_2 . Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ và chứa đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (a; b; 1)$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

A. 65.

B. 68.

C. 64.

D. 73.

LỜI GIẢI**Chọn A**

Ta có: $\vec{u}_{d_1} = (1; 4; -2)$; $\vec{u}_{d_2} = (1; -1; 1)$.

Gọi đường thẳng d cắt đường thẳng d_2 tại $B(2+t; -1-t; 1+t) \Rightarrow \vec{AB} = (1+t; -t; t-2)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B nên $\vec{AB}$ là một vectơ chỉ phương của $d \Rightarrow \vec{u}_d = (1+t; -t; t-2)$.

Mà đường thẳng d vuông góc với $d_1 \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \Leftrightarrow 1+t-4t-2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$\Rightarrow \vec{u}_d = (2; -1; -1)$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} O \in (P) \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in (P) \\ A \in d \Rightarrow A \in (P) \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in (P) \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{OA} \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_d \end{cases}$

$$[\vec{OA}; \vec{u}_d] = (4; 7; 1) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (4; 7; 1) \Rightarrow a = 4; b = 7 \Rightarrow a^2 + b^2 = 65.$$

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(Q): x - y + 2z = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; -1; 2)$, song song với đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

A. $x + y - 1 = 0$.

B. $-5x + 3y + 3 = 0$.

C. $x + y + 1 = 0$.

D. $-5x + 3y - 2 = 0$.

LỜI GIẢI**Chọn C**

$\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \Delta$ có VTCP $\vec{a} = (2; -2; 1)$; $(Q): x - y + 2z = 0 \Rightarrow (Q)$ có VTPT $\vec{n}_Q = (1; -1; 2)$.

mặt phẳng (P) song song với đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên (P) có VTPT

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{n}_Q] = (-3; -3; 0) = -3(1; 1; 0).$$

(P) đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và có VTPT $(1; 1; 0)$ nên có phương trình:

$$1(x-0) + 1(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0.$$

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 4; -3)$. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cách điểm $B(4; 0; -1)$ một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất, (P) đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $P(-3; 0; -3)$. B. $M(0; -3; 10)$. C. $N(0; 3; -5)$. D. $Q(0; 5; 8)$.

LỜI GIẢI

Chọn B

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B xuống mặt phẳng (P). Ta có: $d(B; (P)) = BH = 3$.

Ta lại có: $d(A; (P)) \leq AH \leq AB + BH = 6 + 3 = 9$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{AH} = \frac{9}{6} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \Rightarrow H(6; -2; 0)$.

Khi đó (P) đi qua H và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (4; -4; 2)$ do đó phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-6) - 2(y+2) + z = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 16 = 0$ nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0; -3; 10)$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ và các điểm $A(-2; 0; -2\sqrt{2})$, $B(-4; -4; 0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) và thỏa mãn $MA^2 - OA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ là đường tròn (C). Chu vi của (C) bằng

- A. 5π . B. $\frac{3\sqrt{7}}{2}\pi$. C. 3π . D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$.

LỜI GIẢI

Chọn B

Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm $I(-1; -2; 0)$, bán kính $R = 2$.

Gọi $M(x; y; z)$ ta được $MA^2 = (x+2)^2 + y^2 + (z+2\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4\sqrt{2}z + 12$.

$$\text{và } \begin{cases} \overrightarrow{MO} = (-x; -y; -z) \\ \overrightarrow{MB} = (-4-x; -4-y; -z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y.$$

Ta có $MA^2 - OA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x + 4y + 4\sqrt{2}z - 4 = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S') tâm $I'(-2; -1; -\sqrt{2})$, bán kính $R' = 3$.

Nên $M \in (S) \cap (S')$ là đường tròn (C) có tâm H là hình chiếu của M lên II' .

Vì $II' = 2$ nên $I' \in (S)$.

Gọi K là trung điểm của $I'M$ ta có $IK = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Mà $\sin MI'I = \frac{MH}{I'M} = \frac{IK}{II'}$ suy ra $MH = \frac{I'M \cdot IK}{II'} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Vậy bán kính của đường tròn (C) là $r = MH = \frac{3\sqrt{7}}{4}$. Suy ra chu vi của (C) là: $\frac{3\sqrt{7}}{2}\pi$

C **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 10z = 0$ và điểm $A(5;5;0)$. Điểm $B \in (S)$ sao cho tam giác OAB vuông cân tại B . Biết mặt phẳng (OAB) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;b;c)$. Tính $b^2 - c^2$
- A. $-\frac{52}{3}$. B. $\frac{28}{3}$. C. $\frac{52}{3}$. D. $-\frac{28}{3}$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(Q): x - y + 2z = 0$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;-1;2)$, song song với đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là
- A. $x + y - 1 = 0$. B. $-5x + 3y + 3 = 0$. C. $x + y + 1 = 0$. D. $-5x + 3y - 2 = 0$.
- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với (d) . Phương trình của mặt phẳng (P) là
- A. $2x - y - 3 = 0$. B. $x + 2y + 5z - 4 = 0$. C. $x + 2y - z - 4 = 0$. D. $x + 2y + 5z - 5 = 0$.
- Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua Δ .
- A. $x + y - z + 9 = 0$. B. $x + y - z - 7 = 0$.
C. $3x - 2y + z - 7 = 0$. D. $x + y - z = 0$.
- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 4t + 5 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua Δ .
- A. $x + y - z = 0$. B. $13x + 13y - 13z - 4 = 0$.
C. $x + y - z + 8 = 0$. D. $3x + y + 4z = 0$.
- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất trong các mặt cầu có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 + 10 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) , biết tiếp diện đó song song với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .
- A. $y + z + 4 = 0$. B. $y - z - 4 = 0$.
C. $y - z + 4 = 0$. D. $y + z + 4 = 0$ hoặc $y + z = 0$.

- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2m} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-3}$ và đường thẳng $d_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}$ (với m là tham số thực). Biết rằng tồn tại một mặt phẳng (α) có phương trình $6x + by + cz + d = 0$ chứa đồng thời cả hai đường thẳng d_1 và d_2 . Giá trị của biểu thức $T = b^2 + c^2 + d^2$ bằng:
- A. 232. B. 368. C. 454. D. 184.
- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$, $(Q): x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với cả (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (R) bằng $\sqrt{2}$.
- A. $\begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ x - z - 4 = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$
- Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(8; -8; 8)$. Gọi M là điểm sao cho $MA = 3MO$ (Với O là gốc tọa độ). Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 19 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất là
- A. $6 + 3\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $6 - 3\sqrt{3}$. D. 6.
- Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a + b + c = 2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Khoảng cách từ $M(0; 2023; 0)$ tới mặt phẳng (P) bằng
- A. 2022. B. $\frac{2023}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2021}{3}$. D. $674\sqrt{3}$.
- Câu 11:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 5; -2)$, $B(-1; 3; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài đoạn OC . Giá trị $M^2 + m^2$ bằng
- A. 78. B. 76. C. 74. D. 72.
- Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a; b; c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca)$ và $Q = \frac{a}{b^2 + c^2} - \frac{1}{(a + b + c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (MNP) là
- A. $3x + 12y + 12z - 1 = 0$. B. $x + 4y + 4z - 12 = 0$.
C. $3x + 12y + 12z + 1 = 0$. D. $x + 4y + 4z = 0$.
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$ và $B(3; 2; 5)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$.
- A. $2\sqrt{17}$. B. $\sqrt{65}$. C. $25\sqrt{97}$. D. $205\sqrt{97}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;4;-1)$, $B(3;2;2)$, $C(0;3;-2)$ và mặt phẳng $(\beta): x - y + 2z + 1 = 0$. Gọi M là điểm tùy ý chạy trên mặt phẳng (β) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA + MB + MC$ bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{13} + \sqrt{14}$. C. $6\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_1 = (1;0;2)$. B. $\vec{n}_2 = (1;0;-2)$. C. $\vec{n}_3 = (1;1;1)$. D. $\vec{n}_4 = (1;1;-1)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Phương trình mặt

phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất là

- A. $x + 2y - z - 1 = 0$. B. $2x + y - 3z + 3 = 0$.
C. $3x + 2y - z + 1 = 0$. D. $2x - y - 3z + 3 = 0$.

Câu 17: Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;4;5)$ và cắt ba tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại ba điểm A , B , C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất là $ax + by + cz - 60 = 0$. Tính $a + b + c$.

- A. 30. B. 51. C. 19. D. 32.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;1;1), B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N (M, N không trùng với gốc tọa độ O thỏa mãn $OM = 2ON$).

- A. $2x + y + z - 4 = 0$. B. $2x + 3y - z - 4 = 0$. C. $3x + y + 2z - 6 = 0$. D. $x + 2y - z - 2 = 0$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Trong các mặt phẳng sau, mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (P) ?

- A. $3x + 2y + z - 14 = 0$. B. $3x + 2y + z + 14 = 0$.
C. $2x + y + z - 9 = 0$. D. $2x + y + 3z + 9 = 0$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;-1), B(4;1;0), C(4;7;3)$. Mặt phẳng đi qua điểm A , tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

- A. $x - 4y - z + 9 = 0$. B. $5x + 2y - 16 = 0$.
C. $2x - 2y + z + 3 = 0$. D. $3x + 2z - 4 = 0$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a > 0, b > 0, c > 0$. Mặt phẳng (ABC) đi qua $I(2;1;9)$ sao cho thể tích khối chóp $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là:

- A. $18x + 9y + 2z - 63 = 0$. B. $2x + 9y + 18z - 175 = 0$.

C. $18x + 2y + 9z - 119 = 0$.

D. $9x + 18y + 2z - 54 = 0$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 3 = 0; (Q): x - y + 2z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ và cắt tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho $V_{OABC} = 6$ đi qua điểm nào sau đây

A. $A(1;1;1)$.

B. $B(1;2;1)$.

C. $C(1;-2;1)$.

D. $D(1;-2;-1)$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;1)$, $M(1;2;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC . Tính khoảng cách từ điểm M đến (α) .

A. $d(M;(\alpha)) = \sqrt{6}$. B. $d(M;(\alpha)) = \frac{5}{3}$. C. $d(M;(\alpha)) = \sqrt{3}$. D. $d(M;(\alpha)) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0); C(0;0;c)$ (trong đó $a > 0, b > 0, c > 0$). Mặt phẳng (ABC) đi qua $I(3;4;7)$ sao cho thể tích khối chóp $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $21x + 28y + 12z - 259 = 0$.

B. $12x + 21y + 28z - 316 = 0$.

C. $28x + 21y + 12z - 252 = 0$.

D. $28x + 12y + 21z - 279 = 0$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$ cho $(P): x + 3y - 2z - 5 = 0; (Q): 2x + y + z - 6 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến chung của 2 mặt phẳng $(P); (Q)$, cắt các trục tọa độ lần lượt tại A, B, C sao cho hình chóp $I.ABC$ là hình chóp đều, với $I(1;2;3)$

A. $x + y + z - 4 = 0$.

B. $x - y + z - 4 = 0$.

C. $x + y - z - 4 = 0$.

D. $x - y - z + 4 = 0$.

Câu 26: Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(2;4;5)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất là $ax + by + cz - 60 = 0$. Tính $a + b + c$.

A. 19.

B. 32.

C. 30.

D. 51.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;0;-1), B(1;-2;0)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa hai điểm A, B và tạo với Ox một góc 30° là

A. $x - 5y - 2z + 19 = 0$.

B. $(6 - \sqrt{6})x + 6y + (-6 + 3\sqrt{6})z + 6 + \sqrt{6} = 0$

C. $x + y - z + 2 = 0$.

D. $3x - 2y + z + 13 = 0$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0), B(2;-2;1)$ và $d: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ Viết phương trình

mặt phẳng (P) chứa hai điểm A, B và tạo với d một góc 30°

A. $x - y - 1 = 0; 2x + 5y + 4z - 7 = 0$

B. $x + y - z - 2 = 0; 29x + 5y + 4z - 34 = 0$

C. $2x - z - 2 = 0; 9x + y + 14z - 10 = 0$.

D. $x - z - 1 = 0; 29x + 51y + 124z - 80 = 0$.

Câu 29: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(\sqrt{3}; 0; 0)$, $D(0; 2; 1)$ và tạo với trục Ox một góc bằng 30° . Biết phương trình mặt phẳng (α) có dạng $5x + m\sqrt{3}y + n\sqrt{3}z + p\sqrt{3} = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = m + n + p$.

A. $T = 12$.

B. $T = -4$.

C. $T = 1$.

D. $T = 17$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 4 = 0$ và các điểm $A(2; 1; 2)$, $B(3; -2; 2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng MA , MB luôn tạo với mặt phẳng (P) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Tìm tọa độ tâm của đường tròn (C) .

A. $\left(\frac{74}{27}; -\frac{97}{27}; \frac{62}{27}\right)$. **B.** $\left(\frac{10}{3}; -3; \frac{14}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{17}{21}; -\frac{17}{21}; \frac{17}{21}\right)$. **D.** $\left(\frac{32}{9}; -\frac{49}{9}; \frac{2}{9}\right)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(5;5;5)$, bán kính $R_c = 5\sqrt{3}$.

Ta có điểm A, O thuộc mặt cầu (S) . Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (OAB) .

Tam giác OAB vuông cân tại B nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $R_T = \frac{OA}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Do đó $d(I; (OAB)) = \sqrt{R_c^2 - R_T^2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$.

Phương trình mặt phẳng (OAB) có dạng $2x + by + cz + d = 0$.

Ta có mặt phẳng (OAB) qua $O; A$ nên ta có: $\begin{cases} d = 0 \\ 10 + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = -2 \end{cases}$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (OAB) có dạng: $2x - 2y + cz = 0$.

$$d(I; (OAB)) = \frac{5\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{|10 - 10 + 5c|}{\sqrt{4 + 4 + c^2}} = \frac{5\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{40}{3}. \text{ Vậy } b^2 - c^2 = 4 - \frac{40}{3} = \frac{-28}{3}.$$

Câu 2: Chọn C

Vecto chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{a} = (2; -2; 1)$.

Vecto pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q = (1; -1; 2)$.

Mặt phẳng (P) song song với đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên mặt phẳng (P) nhận 2 vectơ không cùng phương $\vec{a} = (2; -2; 1)$ và $\vec{n}_Q = (1; -1; 2)$ làm cặp VTCP.

Do đó, một VTPT của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}_P = [\vec{n}_Q; \vec{a}] = (3; 3; 0)$.

Mà mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là:

$$3(x - 0) + 3(y + 1) + 0(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$$

Câu 3: Chọn B

Ta có $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$, $\begin{cases} A \in Ox \Rightarrow A(a; 0; 0) \\ B \in Oy \Rightarrow B(0; b; 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} = (-a; b; 0)$.

Do $AB \perp (d) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \vec{AB} = (-2b; b; 0) \Rightarrow \vec{u} = (-2; 1; 0)$ là một VTCP của AB .

Ta có $[\vec{u}_d, \vec{u}] = (1; 2; 5) \Rightarrow \vec{n} = (1; 2; 5)$ là một VTPT của (P) .

Mp (P) đi qua $M(2; 1; 0) \in (d) \Rightarrow (P): (x - 2) + 2(y - 1) + 5z = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 4 = 0$.

Câu 4: Chọn A

Δ đi qua $A(1; -2; 3)$ và nhận $\vec{u} = (3; -2; 1)$ làm VTCP. Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n} = (1; 1; -1)$ làm VTPT.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$ và dễ thấy A không thuộc (P) , do đó $(P) \notin \Delta$.

Lại có mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua Δ nên $(Q) \notin (P)$ do đó (Q) có một VTPT là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Chọn $M(1;0;0) \in (P)$ khi đó mặt phẳng (α) qua M và nhận $\vec{u} = (3; -2; 1)$ làm VTPT có phương trình là $3x - 2y + z - 3 = 0$.

Gọi $H \in (\alpha) \cap \Delta$, do $H \in \Delta$ nên $H(1+3t; -2-2t; 3+t)$, mặt khác $H \in (\alpha)$ nên

$$3(1+3t) - 2(-2-2t) + 3+t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $H\left(-\frac{1}{2}; -1; \frac{5}{2}\right)$, gọi M' là điểm đối xứng của M qua Δ , khi đó ta có H là trung điểm của

MM' suy ra $M'(-2; -2; 5)$, do $M \in (P)$ nên $M' \in (Q)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua M' và nhận $\vec{n} = (1; 1; -1)$ làm VTPT có phương trình là

$$1(x+2) + 1(y+2) - 1(z-5) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 9 = 0.$$

Câu 5: Chọn C

Δ đi qua $A(-1; 2; 5)$ và nhận $\vec{u} = (3; 1; 4)$ làm VTCP. Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n} = (1; 1; -1)$ làm VTPT.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ và dễ thấy A không thuộc (P) , do đó $(P) // \Delta$.

Lại có mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua Δ nên $(Q) // (P)$ do đó (Q) có một VTPT là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Chọn $O(0; 0; 0) \in (P)$, gọi H là hình chiếu của O trên Δ và O' là điểm đối xứng của O qua Δ .

Ta có $H \in \Delta$ nên $H(3t-1; t+2; 4t+5)$ suy ra $\overrightarrow{OH} = (3t-1; t+2; 4t+5)$.

$$\overrightarrow{OH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3(3t-1) + (t+2) + 4(4t+5) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{19}{26}.$$

Suy ra $H\left(-\frac{83}{26}; \frac{33}{26}; \frac{27}{13}\right)$, ta có H là trung điểm của OO' suy ra $O'\left(-\frac{83}{13}; \frac{33}{13}; \frac{54}{13}\right)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua O' và nhận $\vec{n} = (1; 1; -1)$ làm VTPT có phương trình là

$$\left(x + \frac{83}{13}\right) + \left(y - \frac{33}{13}\right) - \left(z - \frac{54}{13}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 8 = 0.$$

Câu 6: Chọn A

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 + 10 = 0$ có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a = -(m+2), b = 0, c = m-3, d = m^2 + 10.$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$
 $\Rightarrow (m+2)^2 + (m-3)^2 - (m^2 + 10) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$

Khi đó bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{m^2 - 2m + 3} = \sqrt{(m-1)^2 + 2} \geq \sqrt{2}.$

Do đó $\min R = \sqrt{2}$ khi $m = 1$.

Nên phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4z + 11 = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-3; 0; -2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng (Δ_1) vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và qua $A(0; 1; 0)$.

Đường thẳng (Δ_2) vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1; -1; 1)$ và qua $B(1; 0; 0)$.

Mặt phẳng (P) cần tìm song song với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 nên (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (0; -1; -1)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $y + z + D = 0$.

$$A \notin (P) \Leftrightarrow D \neq -1; B \notin (P) \Leftrightarrow D \neq 0.$$

Mặt khác mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|0 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |D - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2 + 2 = 4 \\ D = 2 - 2 = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow (P): y + z + 4 = 0.$$

Câu 7: Chọn C

$$\text{Phương trình tham số của hai đường thẳng là: } d_1: \begin{cases} x = 2 + 2mt_1 \\ y = 3t_1 \\ z = 3 - 3t_1 \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t_2 \\ y = 3t_2 \\ z = 1 - 2t_2 \end{cases}.$$

Để dàng nhận thấy, hai đường thẳng d_1 và d_2 không song song và không trùng nhau. Để tồn tại một mặt phẳng chứa đồng thời cả hai đường thẳng thì hai đường thẳng này phải cắt nhau tại một điểm, khi đó hệ phương trình giao điểm phải có nghiệm duy nhất.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2 + 2mt_1 = 3 + 2t_2 \\ 3t_1 = 3t_2 \\ 3 - 3t_1 = 1 - 2t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mt_1 = 1 + 2t_2 & (1) \\ t_1 = t_2 & (2) \\ 3t_1 - 2t_2 = 2 & (3) \end{cases}.$$

Từ phương trình (2) và (3) suy ra $t_1 = t_2 = 2$ thay vào phương trình (1), ta được:

$$2mt_1 = 1 + 2t_2 \Leftrightarrow m = \frac{1 + 2t_2}{2t_1} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Khi đó, hai đường thẳng đã cho là: } d_1: \begin{cases} x = 2 + \frac{5}{2}t_1 \\ y = 3t_1 \\ z = 3 - 3t_1 \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t_2 \\ y = 3t_2 \\ z = 1 - 2t_2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \vec{u}_{d_1} = \left(\frac{5}{2}; 3; -3\right) \text{ và } \vec{u}_{d_2} = (2; 3; -2).$$

$$\text{Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng } (\alpha) \text{ là: } \vec{n}_{(\alpha)} = 2[\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = 2\left(3; -1; \frac{3}{2}\right) = (6; -2; 3).$$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2; 0; 3)$ nhận $\vec{n}_{(\alpha)} = (6; -2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (α) khi đó là: $6(x - 2) - 2(y - 0) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2y + 3z - 21 = 0$.

$$\text{Vậy } b = -2; c = 3; d = -21 \Rightarrow T = b^2 + c^2 + d^2 = 454.$$

Câu 8: Chọn A

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là: $\vec{n}_1(1; 1; 1), \vec{n}_2(1; -1; 1)$.

Vì mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 0; -2)$

Hay mặt phẳng (R) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}'(1;0;-1)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (R) có dạng: $x - z + D = 0$.

$$\text{Mặt khác, ta có: } d(O, (R)) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |D| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2 \\ D = -2 \end{cases}.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $(R_1): x - z + 2 = 0, (R_2): x - z - 2 = 0$.

Câu 9: Chọn C

Gọi $M(x; y; z)$. Khi đó $MA = 3MO$

$$\Leftrightarrow (x-8)^2 + (y+8)^2 + (z-8)^2 = 9(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 24 = 0$$

Suy ra tập hợp các điểm M thỏa $MA = 3MO$ là mặt cầu (S) tâm $I(-1; 1; -1)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Vì $d(I, (P)) = 6 > R$ nên (P) không cắt (S) .

Do đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất là

$$d_{\min} = d(I, (P)) - R = 6 - 3\sqrt{3}.$$

Câu 10: Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn OA .

$$\Rightarrow (\alpha) \text{ đi qua điểm } D\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \text{ và có VTPT } \vec{OA} = (a; 0; 0) = a(1; 0; 0) \Rightarrow (\alpha): x - \frac{a}{2} = 0.$$

Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn OB .

$$\Rightarrow (\beta) \text{ đi qua điểm } E\left(0; \frac{b}{2}; 0\right) \text{ và có VTPT } \vec{OB} = (0; b; 0) = b(0; 1; 0) \Rightarrow (\beta): y - \frac{b}{2} = 0.$$

Gọi (γ) là mặt phẳng trung trực của đoạn OC .

$$\Rightarrow (\gamma) \text{ đi qua điểm } F\left(0; 0; \frac{c}{2}\right) \text{ và có VTPT } \vec{OC} = (0; 0; c) = c(0; 0; 1) \Rightarrow (\gamma): z - \frac{c}{2} = 0.$$

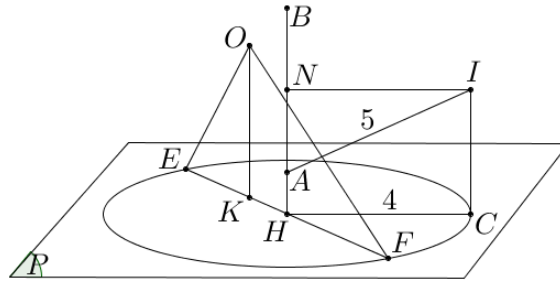
$$\text{Gọi } I \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } OABC \Rightarrow I = (\alpha) \cap (\beta) \cap (\gamma) \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right).$$

$$\text{Theo giả thiết, } a + b + c = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow I \in (P): x + y + z = 1.$$

$$\text{Vậy, } d(M, (P)) = \frac{|2023-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2022}{\sqrt{3}} = 674\sqrt{3}.$$

Câu 11: Chọn C

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; -2)$ và vector $\vec{AB} = (-4; -2; 4)$ cùng phương nên đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (P) .



Dễ thấy A, B nằm cùng phía so với (P) ; gọi N là trung điểm của đoạn AB và I là tâm của mặt cầu (S) , khi đó I thuộc mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn AB và $N(1;4;0)$.

Vì $AB \perp (P)$ nên $(Q) \parallel (P)$ suy ra bán kính mặt cầu $R = IC = d(N; (P)) = 5$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$. Gọi H là hình chiếu của N trên mặt phẳng (P) thì

$$H = AB \cap (P) \text{ nên } H\left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right).$$

Có $AN = 3 \Rightarrow HC = NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = 4$ nên điểm C thuộc đường tròn $(T) \subset (P)$ có tâm là H và bán kính $r = HC = 4$.

Có $OH = \sqrt{22}$, gọi K là hình chiếu của O trên (P) thì $OK = d(O; (P)) = 3 \Rightarrow HK = \sqrt{OH^2 - OK^2} = \sqrt{13} < r \Rightarrow K$ nằm trong đường tròn (T) .

Gọi E, F là giao điểm của đường thẳng HK với đường tròn (T) , khi đó giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài đoạn OC bằng độ dài đoạn OE, OF .

$$\text{Vậy } M^2 + m^2 = OE^2 + OF^2 = 2OH^2 + \frac{EF^2}{2} = 2.22 + \frac{8^2}{2} = 76.$$

Câu 12: Chọn A

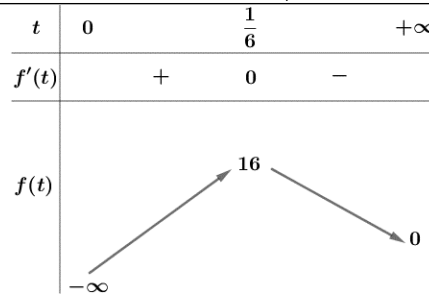
$$\text{Đặt } t = b + c \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ b^2 + c^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{t^2}{2} \text{ . Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow b = c. \\ bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{t^2}{4} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } 5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca) \Leftrightarrow 5a^2 + 5(b+c)^2 - 9a(b+c) = 28bc.$$

$$\Rightarrow 5a^2 + 5t^2 - 9at \leq 7t^2 \Leftrightarrow (5a+t)(a-2t) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2t.$$

$$\text{Do đó: } Q \leq \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3} = f(t) \text{ với } t > 0 \text{ có đạo hàm } f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{1}{9t^4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6} \text{ (vì } t > 0)$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên thì $Q_{\max} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} b+c = \frac{1}{6} \\ b=c \\ 5(a^2+b^2+c^2) = 9(ab+2bc+ca) \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}; b=c = \frac{1}{12}.$

Do đó; $A\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right) \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right), N\left(0; \frac{1}{12}; 0\right), P\left(0; 0; \frac{1}{12}\right).$

Phương trình mặt phẳng $(MNP): \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{12}} + \frac{z}{\frac{1}{12}} = 1$. Vậy $(MNP): 3x + 12y + 12z - 1 = 0$.

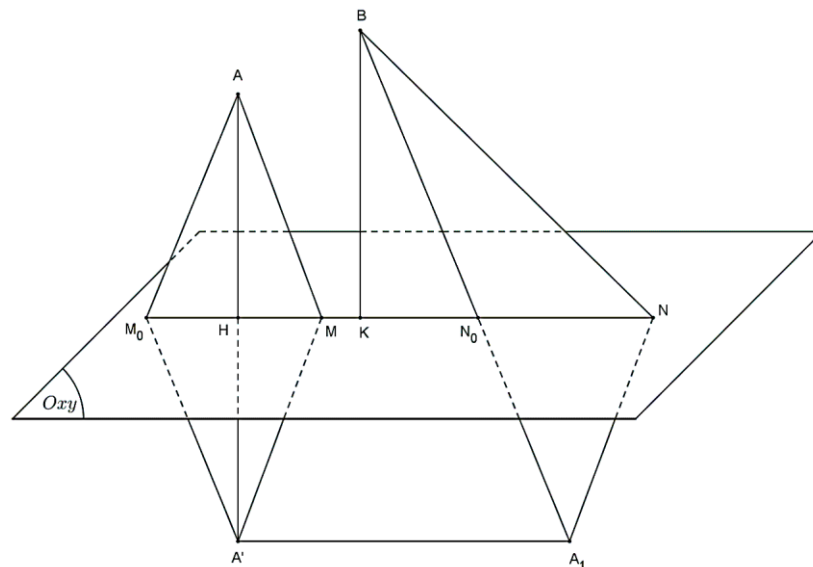
Câu 13: Chọn D

Dễ thấy hai điểm $A; B$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxy) .

Gọi $H; K$ lần lượt là hình chiếu của $A; B$ lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow H(-1; 2; 0); K(3; 2; 0).$

$\Rightarrow \overrightarrow{HK} = (4; 0; 0); HK = 4.$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A'(-1; 2; -3).$



Lấy điểm A_1 sao cho $\overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{MN}.$

Ta có: $AM + BN = A'M + BN = A_1N + BN \geq A_1B.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow N = A_1B \cap (Oxy).$

Do $\overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{MN}$ nên $A'A_1 = MN = 2023 \Rightarrow A_1$ nằm trên đường tròn tâm A' , bán kính bằng 2023 nằm trên mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Oxy).$

Do đó A_1B nhỏ nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'A_1}$ cùng hướng với $\overrightarrow{HK}.$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{MN} = \frac{MN}{HK} \cdot \overrightarrow{HK} = \frac{2023}{4} \overrightarrow{HK} \Rightarrow A_1(2022; 2; -3).$$

$$\text{Do đó } AM + BN = A'M + BN = A_1N + BN \geq A_1B = 205\sqrt{97}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng $205\sqrt{97}$.

Câu 14: Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 3), \overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; -5; -5) = 5(1; -1; -1)$, suy ra $(ABC): x - y - z + 1 = 0$.

$$\text{Ta thấy } (ABC) \perp (\beta), \text{ xét } d = (ABC) \cap (\beta) \Rightarrow d: \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}.$$

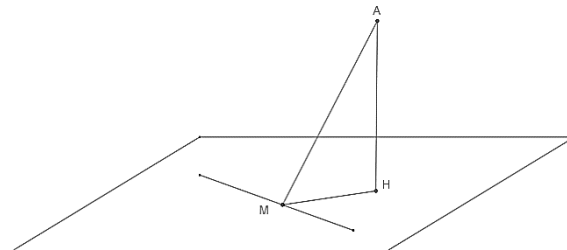
Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (ABC) , khi đó $H \in d \Rightarrow H(-1+t; t; 0)$.

$$T = MA + MB + MC \geq HA + HB + HC$$

$$\begin{aligned} T &\geq \sqrt{2t^2 - 14t + 26} + \sqrt{2t^2 - 12t + 24} + \sqrt{2t^2 - 8t + 14} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{2}t - \frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{2}t)^2 + (\sqrt{6})^2} + \sqrt{2(t-3)^2 + 6}. \\ &\geq \sqrt{\left(2\sqrt{2} - \frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2} + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6}\right) + \sqrt{6} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ khi $t = 3 \Rightarrow M(2; 3; 0)$.

Câu 15: Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A xuống mặt phẳng (P) . Từ H kẻ $HM \perp d$. Ta có $AM \perp d$.

Ta có $AH \leq AM$. Suy ra khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $M \equiv H$, hay $AM \perp (P)$.

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ vector chỉ phương là } \vec{u} = (-2; 1; 1).$$

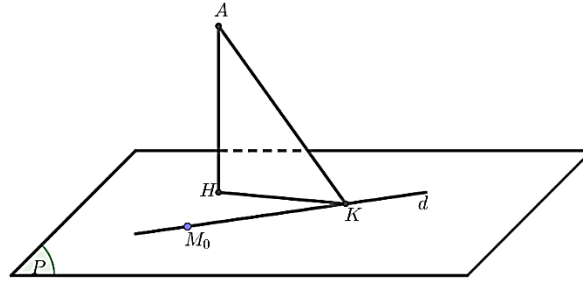
$$M \in d \Rightarrow M(-1-2t; t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2+2t; 2-t; 2-t).$$

$$\overrightarrow{MA} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (-2) \cdot (2+2t) + 1 \cdot (2-t) + 1 \cdot (2-t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$\text{Suy ra } M(-1; 0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2; 2; 2).$$

Do $\vec{n}_3 = (1; 1; 1)$ cùng hướng với $\overrightarrow{MA}$ nên $\vec{n}_3 = (1; 1; 1)$ là một vector pháp tuyến của (P) .

Câu 16: Chọn B



Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(0;0;1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1;1;1)$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d .

Ta có $d(A, (P)) = AH \leq AK$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$. Do đó $d(A, (P))_{\max} = AK$.

Khi đó (P) đi qua $M_0(0;0;1)$ và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm vector pháp tuyến.

Vì $K \in d$ nên $K(t; t; 1+t)$ và $\overrightarrow{AK} = (t-3; t-2; t+2)$.

Ta có $\overrightarrow{AK} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (t-3) + 1 \cdot (t-2) + 1 \cdot (t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Suy ra $\overrightarrow{AK} = (-2; -1; 3)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) cần tìm là

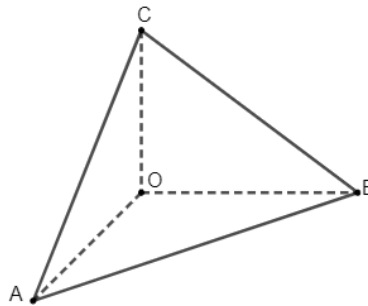
$$-2(x-0) - 1(y-0) + 3(z-1) = 0 \text{ hay } 2x + y - 3z + 3 = 0.$$

Câu 17: Chọn C

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;4;5)$ và cắt ba tia Ox , Oy , Oz tại ba điểm $A(m;0;0)$,

$B(0;n;0)$, $C(0;0;p)$ với $m, n, p > 0$. Phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

Vì (α) qua $M(2;4;5)$ nên ta có: $\frac{2}{m} + \frac{4}{n} + \frac{5}{p} = 1$.



Tứ diện $OABC$ có thể tích là: $V = \frac{1}{6}mnp$.

Do $m, n, p > 0$ ta có $1 = \frac{2}{m} + \frac{4}{n} + \frac{5}{p} \geq 3\sqrt[3]{\frac{40}{mnp}} \Leftrightarrow mnp \geq 1080 \Rightarrow V = \frac{1}{6}mnp \geq \frac{1}{6} \cdot 1080 = 180$.

Tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất là 180 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{m} + \frac{4}{n} + \frac{5}{p} = 1 \\ \frac{2}{m} = \frac{4}{n} = \frac{5}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{4}{n} = \frac{5}{p} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 12 \\ p = 15 \end{cases}$

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{6} + \frac{y}{12} + \frac{z}{15} = 1 \Leftrightarrow 10x + 5y + 4z - 60 = 0$$

$$\Rightarrow a = 10, b = 5, c = 4 \Rightarrow a + b + c = 10 + 5 + 4 = 19.$$

Câu 18: Chọn D

Giả sử mặt phẳng (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ (điều kiện: $m, n, p > 0$).

Khi đó ta có $(P): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$. Do $OM = 2ON \Leftrightarrow |m| = |2n| \Leftrightarrow m = 2n$ (do $m, n > 0$).

Vì (P) qua $A(1;1;1)$ nên ta được $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Vì (P) qua $B(0;2;2)$ nên ta được $\frac{2}{n} + \frac{2}{p} = 1$.

$$\text{Vì } m = 2n \text{ nên ta có hệ } \begin{cases} \frac{3}{2n} + \frac{1}{p} = 1 \\ \frac{2}{n} + \frac{2}{p} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{p} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{n} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -2 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$

Vậy $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{1} - \frac{z}{2} = 1$ hay $(P): x + 2y - z - 2 = 0$.

Câu 19: Chọn A

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, (a, b, c \neq 0)$

Vì (P) đi qua M nên ta có: $(P): \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (a-3; -2; -1), \overrightarrow{MB} = (-3; b-2; -1), \overrightarrow{BC} = (0; -b; c), \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$.

Vì M là trực tâm tam giác ABC nên ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = c \\ 3a = c \end{cases}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra: $a = \frac{14}{3}, b = \frac{14}{2}, c = 14$.

Khi đó phương trình mặt phẳng $(P): 3x + 2y + z - 14 = 0$.

Cách khác: Do M là trực tâm của ΔABC nên $OM \perp (ABC)$, nên ta có

(P) đi qua $M(3;2;1)$ và nhận $\overrightarrow{OM} = (3;2;1)$ làm 1 VTPT

$\Rightarrow (P): 3(x-3) + 2(y-2) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow (P): 3x + 2y + z - 14 = 0$.

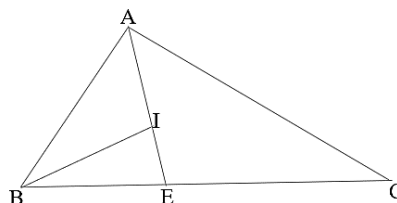
Câu 20: Chọn A

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (2; -2; 1), \overrightarrow{AC} = (2; 4; 4) \Rightarrow AB = 3, AC = 6$$

Mặt phẳng (ABC) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_{ABC} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-12; -6; 12)$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , $E = AI \cap BC$



Theo tính chất đường phân giác trong AE của tam giác ABC có

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2BE = EC \Rightarrow 2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow E(4;3;1).$$

Gọi mặt phẳng (P) đi qua AI , vuông góc (ABC) nên (P) đi qua AE , $(P) \perp (ABC)$

Suy ra vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_p = [\overrightarrow{AE}, \vec{n}_{ABC}] = (12; -48; -12) = 12(1; -4; -1)$

Vậy phương trình của (P) : $x - 4y - z + 9 = 0$

Câu 21: Chọn D

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ($a, b, c > 0$)

Vì mặt phẳng (ABC) đi qua $I(2;1;9)$ nên $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{9}{c} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương ta có:

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{9}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{9}{c}} \Leftrightarrow 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{18}{abc}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{18}{abc}} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{18}{abc} \leq \frac{1}{27} \Leftrightarrow abc \geq 486$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{1}{b} = \frac{9}{c} \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{9}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = 27 \end{cases}$$

Thể tích khối chóp $OABC$ là: $V_{OABC} = \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6}abc \geq 81$

Suy ra, thể tích khối chóp $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 81.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{27} = 1 \Leftrightarrow 9x + 18y + 2z - 54 = 0$

Câu 22: Chọn A

Tọa độ điểm nằm trên giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 2x + y + 3z - 3 = 0 \\ x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Chọn điểm $M(0;3;0); N(-5;-2;5)$ thuộc $\Delta = (P)$.

Do mặt phẳng (α) cắt tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Ta có

phương trình mặt phẳng (α) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Do điểm } M(0;3;0); N(-5;-2;5) \text{ thuộc } (\alpha) \text{ nên ta có } \begin{cases} \frac{3}{b} = 1 \\ \frac{-5}{a} + \frac{-2}{b} + \frac{5}{c} = 1 \end{cases} \quad (1).$$

Ta có $V_{OABC} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = 6 \Leftrightarrow abc = 36$ (2).

$$\text{Từ (1); (2) có } \begin{cases} b = 3 \\ a = 6 \\ c = 2 \end{cases} \text{ . Vậy phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ là } \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1.$$

Thay các tọa độ điểm vào ta có A là điểm thuộc mặt phẳng (α) .

Câu 23: Chọn D

Chủ đề 09: Phương trình mặt phẳng

Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên $a, b, c \neq 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mà $H(1;2;1) \in (\alpha)$ nên: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (1-a; 2; 1), \overrightarrow{BH} = (1; 2-b; 1), \overrightarrow{BC} = (0; -b; c), \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$.

Lại có H là trực tâm tam giác ABC , suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b = \frac{c}{2} \\ a = c \end{cases}$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{1}{c} + \frac{2}{\frac{c}{2}} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow c = 6$, khi đó $a = 6, b = 3$.

Vậy $A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + z - 6 = 0$.

$$d(M;(\alpha)) = \frac{|1 + 2 \cdot 2 + 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 24: Chọn C

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do $I \in (ABC)$ nên $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{7}{c} = 1$.

Lại có $1 = \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{7}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{a} \cdot \frac{4}{b} \cdot \frac{7}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{84}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27 \cdot 84 = 2268$.

Khi đó: $V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} abc \geq 378$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{1}{3} = \frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{7}{c} \Rightarrow a = 9; b = 12; c = 21$.

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) : $\frac{x}{9} + \frac{y}{12} + \frac{z}{21} = 1 \Leftrightarrow 28x + 21y + 12z - 252 = 0$.

Câu 25: Chọn D

Gọi: $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục toạ độ

$Ox; Oy; Oz \Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì hình chóp $I.ABC$ là hình chóp đều nên: $|a| = |b| = |c| \neq 0$

Ta có: $G\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$ là tâm của tam giác đều ABC , $\overrightarrow{IG} = \left(\frac{a}{3} - 1; \frac{b}{3} - 2; \frac{c}{3} - 3\right)$

$\Delta = (P) \cap (Q) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{n_Q}] = (5; -5; -5) // (1; -1; -1)$

Do: Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $\Delta \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{IG} = 0 \Rightarrow \frac{a}{3} - 1 - \frac{b}{3} + 2 - \frac{c}{3} + 3 = 0$
 $\Rightarrow a - b - c + 12 = 0$

$$\text{Lấy điểm } D(-4;0;0) \in (ABC) \Rightarrow \frac{-4}{a} = 1 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow \left. \begin{matrix} |b| = |c| = 4 \\ b+c=8 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b=c=4$$

$$\text{Vậy } (ABC): \frac{x}{-4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow -x + y + z - 4 = 0.$$

Câu 26: Chọn A

$$ax + by + cz - 60 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{60}{a}} + \frac{y}{\frac{60}{b}} + \frac{z}{\frac{60}{c}} = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} (\alpha) \cap Ox = A\left(\frac{60}{a}; 0; 0\right), (\alpha) \cap Oy = B\left(0; \frac{60}{b}; 0\right) \\ (\alpha) \cap Oz = C\left(0; 0; \frac{60}{c}\right) \end{matrix} \right.,$$

$$(a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện là } V = \frac{1}{6} \frac{60}{a} \cdot \frac{60}{b} \cdot \frac{60}{c} = \frac{36000}{abc} \quad (1)$$

$$\text{Do mặt phẳng } (\alpha) \text{ đi qua } M(2;4;5) \text{ ta có } 2a + 4b + 5c - 60 = 0.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cô si ta có: } 60 = 2a + 4b + 5c \geq 3\sqrt[3]{40abc} \Rightarrow abc \leq \frac{20^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{200} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } V = \frac{36000}{abc} \geq 180.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 2a + 4b + 5c - 60 = 0 \\ 2a = 4b = 5c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 60 = 0 \\ 2a = 4b = 5c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5, c = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 19.$$

Câu 27: Chọn B

$$\text{Gọi } \vec{n}_p = (a; b; c) \text{ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng } (P), \vec{AB} = (3; -2; 1)$$

$$AB \subset (P) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2b - 3a.$$

$$(P) \text{ tạo với } Ox \text{ một góc } 30^\circ \text{ nên } \sin((P), Ox) = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{i}) \right| = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}_p| \cdot |\vec{i}|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + (2b - 3a)^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + 4b^2 - 12ab + 9a^2) \Leftrightarrow 6a^2 - 12ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{6 - \sqrt{6}}{6} \\ \frac{a}{b} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} \end{cases}.$$

$$\text{Với } \frac{a}{b} = \frac{6 - \sqrt{6}}{6} \text{ chọn } a = 6 - \sqrt{6}, b = 6 \Rightarrow c = -6 + 3\sqrt{6}$$

$$\text{Khi đó phương trình } (P): (6 - \sqrt{6})x + 6y + (-6 + 3\sqrt{6})z + 6 + \sqrt{6} = 0.$$

$$\text{Với } \frac{a}{b} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} \text{ chọn } a = 6 + \sqrt{6}, b = 6 \Rightarrow c = -6 - 3\sqrt{6}$$

$$\text{Khi đó phương trình } (P): (6 + \sqrt{6})x + 6y + (-6 - 3\sqrt{6})z + 6 - \sqrt{6} = 0.$$

Câu 28: Chọn D

Chủ đề 09: Phương trình mặt phẳng

Gọi $\vec{n}_p = (a; b; c)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) , $\vec{AB} = (1; -3; 1)$

$$AB \subset (P) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow a - 3b + c = 0 \Rightarrow c = 3b - a.$$

$$(P) \text{ tạo với } d \text{ một góc } 30^\circ \text{ nên } \sin((P), d) = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d) \right| = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{u}_d|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4a + b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |4a + b + c| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

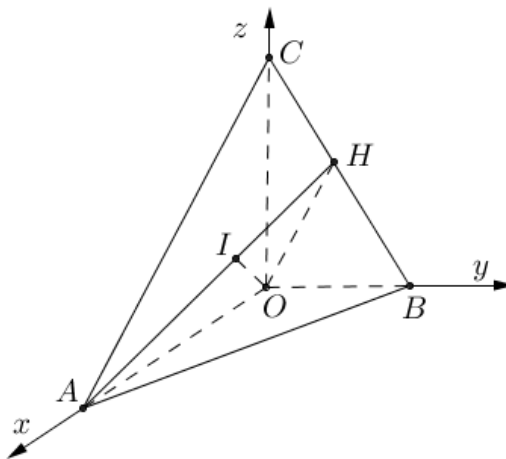
$$\Leftrightarrow |4a + b + 3b - a| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + (3b - a)^2} \Leftrightarrow (3a + 4b)^2 = \frac{9}{2} (a^2 + b^2 + 9b^2 - 6ab + a^2)$$

$$\Leftrightarrow -29b^2 + 51ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -29b + 51a = 0 \end{cases}.$$

Với $b = 0$ chọn $a = 1 \Rightarrow c = -1$ khi đó phương trình (P) : $x - z - 1 = 0$.

Với $\frac{a}{b} = \frac{29}{51}$ chọn $a = 29, b = 51 \Rightarrow c = 124$ khi đó phương trình (P) : $29x + 51y + 124z - 80 = 0$.

Câu 29: Chọn B



Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục Oy, Oz tại $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ với $b, c \neq 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng là $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì mặt phẳng (α) đi qua $D(0; 1; 1)$ nên $\frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{c} = 1 - \frac{2}{b}$.

Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của O trên BC và AH .

Có $BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp OI$ nên $OI \perp (ABC)$ hay $OI \perp (\alpha)$.

Suy ra góc giữa trục Ox và mặt phẳng (α) là $OAI = OAH = 30^\circ$.

Trong tam giác vuông OAH có $OH = OA \cdot \tan OAH = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$.

Trong tam giác vuông OBC có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$.

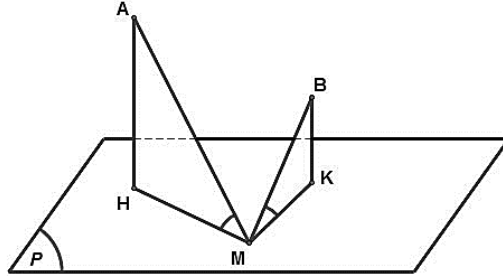
Thay vào ta được $\frac{1}{b^2} + \left(1 - \frac{2}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \left(\frac{b-2}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}$

Với $b = \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{-5}{3}$, do đó phương trình mặt phẳng (α) là $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4y}{5} - \frac{3z}{5} = 1$

$\Leftrightarrow 5x + 4\sqrt{3}y - 3\sqrt{3}z - 5\sqrt{3} = 0$ nên $m = 4, n = -3, p = -5$. Vậy $T = m + n + p = -4$.

Câu 30: Chọn A

Cách 1:



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên (P) .

Khi đó ta có $AMH = BMK$. Suy ra $\triangle AMH \sim \triangle BMK$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AH}{BK} = \frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = 2 \Rightarrow MA = 2MB.$$

Gọi $M(x; y; z)$. Khi đó ta có:

$$MA = 2MB \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{20}{3}x + 6y - 4z + \frac{59}{3} = 0 \quad (S).$$

Suy ra M thuộc đường tròn giao tuyến của (P) với mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) có tâm

$$I\left(\frac{10}{3}; -3; 2\right).$$

Tâm H của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

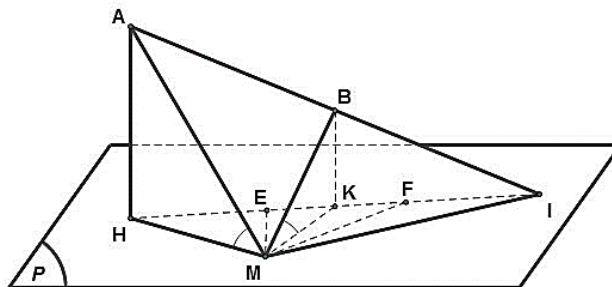
$$\text{Từ đó ta tìm được } H\left(\frac{74}{27}; -\frac{97}{27}; \frac{62}{27}\right).$$

Cách 2:

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên $(P) \Rightarrow AMH = BMK$.

$$\text{Ta có: } AH = d(A, (P)) = \frac{|4+2-2+4|}{3} = \frac{8}{3}; BK = d(B, (P)) = \frac{|6-4-2+4|}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow AH = 2.BK$$

$$\Rightarrow HM = 2.MK \quad (\text{do } \tan AMH = \tan BMK).$$



Lấy điểm I là điểm đối xứng của H qua K ; E thuộc đoạn HK sao cho $HE = 2KE$; F thuộc đoạn KI sao cho $FI = 2KF$.

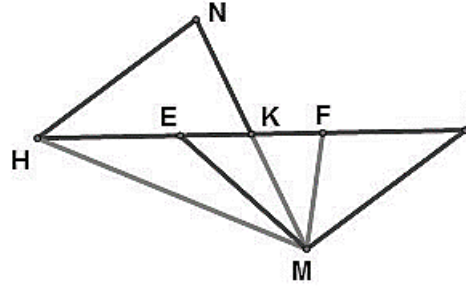
Chủ đề 09: Phương trình mặt phẳng

Khi đó: A, B, I, H, E, K, F đều là các điểm cố định.

Ta chứng minh: M di chuyển trên đường tròn tâm F , đường kính IE :

Gọi N là điểm đối xứng của M qua $K \Rightarrow \triangle HMN$ cân tại M .

E nằm trên trung tuyến HK và $HE = \frac{2}{3}HK \Rightarrow E$ là trọng tâm $\triangle HMN \Rightarrow ME \perp HN$.



Mà $HN \parallel MI \Rightarrow ME \perp MI$.

Dễ dàng chứng minh F là trung điểm của EI

$\Rightarrow M$ di chuyển trên đường tròn tâm F đường kính EI (thuộc mặt phẳng (P)).

Tìm tọa độ điểm F :

Phương trình đường cao AH là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Khi đó ta gọi $H(2 + 2t_1; 1 + 2t_1; 2 - t_1) \in AH$.

Ta có: $H \in (P) \Rightarrow 2(2 + 2t_1) + 2(1 + 2t_1) - (2 - t_1) + 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{8}{9} \Rightarrow H\left(\frac{2}{9}; -\frac{7}{9}; \frac{26}{9}\right)$.

Phương trình đường cao BK là:
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

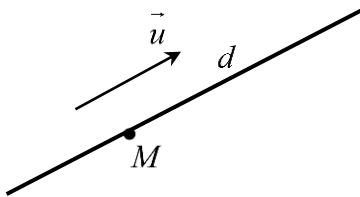
Khi đó ta gọi $K(3 + 2t_2; -2 + 2t_2; 2 - t_2)$.

$K \in (P) \Rightarrow 2(3 + 2t_2) + 2(-2 + 2t_2) - (2 - t_2) + 4 = 0 \Leftrightarrow t_2 = -\frac{4}{9} \Rightarrow K\left(\frac{19}{9}; -\frac{26}{9}; \frac{22}{9}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{HF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{HK} \Rightarrow \begin{cases} x_F - \frac{2}{9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{17}{9} \\ y_F + \frac{7}{9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{-19}{9} \\ z_F - \frac{26}{9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{-4}{9} \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{74}{27}; -\frac{97}{27}; \frac{62}{27}\right)$.

Phương trình đường thẳng**1. Vector chỉ phương của đường thẳng**

- Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với d .
- **Chú ý:** Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ là vector chỉ phương của đường thẳng d thì $k\vec{u}$ ($k \in \mathbb{R}; k \neq 0$) cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng d .

2. Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ với vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ có:

- Phương trình tham số :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$
- Với mỗi giá trị t cho ta các giá trị tương ứng x, y, z tương ứng là tọa độ của một điểm M thuộc đường thẳng
- Phương trình chính tắc là: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ với điều kiện $abc \neq 0$.

3. Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là $Ax + By + Cz + D = 0$ và

$A'x + B'y + C'z + D' = 0$ với điều kiện $A : B : C \neq A' : B' : C'$

- Điều kiện trên chứng tỏ hai mặt phẳng đó cắt nhau. Gọi d là đường thẳng giao tuyến của chúng.
- Đường thẳng d gồm những điểm $M(x; y; z)$ vừa thuộc mặt phẳng (P) vừa thuộc mặt phẳng (Q) nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$
- Khi đó $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}]$ với $\vec{n}_{(P)} = (A; B; C)$; $\vec{n}_{(Q)} = (A'; B'; C')$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d .

4. Một số cách xác định vector chỉ phương của đường thẳng hay gặp:

- (d) đi qua điểm A và **song song** với đường thẳng (Δ) thì ta chọn cho $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$
- (d) đi qua điểm A và **vuông góc** với hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ thì $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1} \\ \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_2} \end{cases} \rightarrow \vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$
- (d) đi qua điểm A và **song song** với hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ thì $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_\beta \end{cases} \rightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
- (d) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (Δ) ; song song với mặt phẳng (P) thì $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{u}_\Delta \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \end{cases} \rightarrow \vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P]$

B // **VÍ DỤ MINH HỌA**

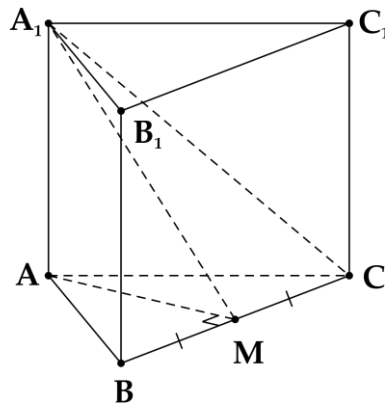
CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $A_1(\sqrt{3}; -1; 1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1 = 1$ (C không trùng O). Biết $\vec{u} = (a; b; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng A_1C . Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 16.

B. 5.

C. 9.

D. 4.

LỜI GIẢI**Chọn D**

Gọi M là trung điểm BC .

Để thấy $A_1M \perp BC$ nên M là hình chiếu của A_1 lên Oz do đó $M(0; 0; 1)$.

$$\Rightarrow MA_1 = \sqrt{(0 - \sqrt{3})^2 + (0 + 1)^2 + (1 - 1)^2} = 2. \text{ Ta có } AM = \sqrt{A_1M^2 - AA_1^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Tam giác ABC đều có trung tuyến $AM = \sqrt{3}$ nên $AB = BC = CA = \frac{AM \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2$.

Gọi $B(0; 0; b) \Rightarrow \overline{BM} = (0; 0; 1 - b)$.

$$\text{Khi đó } BM = 1 \Leftrightarrow (1 - b)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow B(0; 0; 0), C(0; 0; 2) \\ b = 2 \Rightarrow B(0; 0; 2), C(0; 0; 0) \end{cases}$$

Vì C khác O nên ta nhận $B(0; 0; 0)$ và $C(0; 0; 2)$.

Do vậy một vector chỉ phương của đường thẳng A_1C là $\overline{A_1C} = (-\sqrt{3}; 1; 1)$.

Suy ra $a = -\sqrt{3}$, $b = 1$ nên $a^2 + b^2 = 4$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x + y + z - 7 = 0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là

$$\text{A. } \begin{cases} x = 12 - t \\ y = 5 \\ z = -9 + t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{5}{2} - t \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = \frac{5}{2} + t \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases}$$

LỜI GIẢI

Chọn D

Ta có $A(2a+1; a; -a-2)$ và $B(b+1; 3b-2; -2b+2) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{AB} = (b-2a; 3b-a-2; -2b+a+4)$

Do $\Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow 2b-2a+2=0 \Leftrightarrow b=a-1 \Rightarrow \vec{AB} = (-1-a; 2a-5; -a+6)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(-1-a)^2 + (2a-5)^2 + (-a+6)^2} = \sqrt{6a^2 - 30a + 62}$$

$$\text{Để } AB \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi } a = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right) \text{ và } \vec{AB} = \left(\frac{-7}{2}; 0; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 6-t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2}+t \end{cases}.$$

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;5)$ và mặt phẳng

$(P): x+2y+3z-14=0$. Gọi Δ là một đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên Δ . Biết rằng khi $AH=BK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của đường thẳng d là

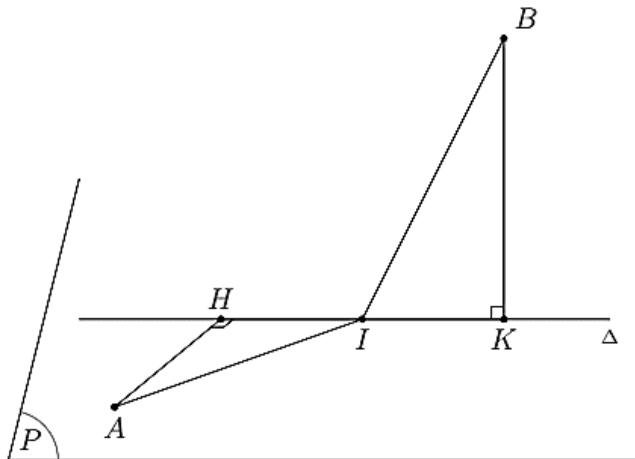
A. $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 5-2t \\ z = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 4-t \\ y = 5+2t \\ z = t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 5-2t \\ z = t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4-t \\ y = 5+2t \\ z = 1 \end{cases}$

LỜI GIẢI



Ta thấy $A \in (P), B \notin (P)$. Gọi I là trung điểm của $HK \Rightarrow I \in (P)$.

Ta có $\Delta BKI = \Delta AHI (c-g-c) \Rightarrow IA = IB \Rightarrow I$ luôn nằm trong mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn AB .
Do đó $I \in d = (P) \cap (Q)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $J(2;3;4)$ của AB và nhận $\frac{1}{2}\vec{AB} = (1;1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên

$$(Q): x+y+z-9=0. \text{ Xét hệ } \begin{cases} x+y+z-9=0 \\ x+2y+3z-14=0 \end{cases}$$

Chọn $z=0$ ta được $\begin{cases} x+y-9=0 \\ x+2y-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$. Suy ra $M(4;5;0) \in d$.

Mặt phẳng $(Q): x+y+z-9=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1;1;1)$.

Mặt phẳng $(P): x+2y+3z-14=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1;2;3)$.

Đường thẳng d đi qua $M(4;5;0)$, nhận $\vec{u}_d = [\vec{n}_Q, \vec{n}_P] = (1;-2;1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên d phương

trình tham số là:
$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$$
 . Vậy $d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 1)$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt d_1 , d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases}$

LỜI GIẢI

Chọn A

Phương trình đường thẳng d_1 có dạng phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 2 + t_1 \\ y = 1 - 2t_1 \\ z = 1 + 2t_1 \end{cases}$.

Phương trình đường thẳng d_2 có dạng phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 2 + 2t_2 \\ y = -3 + t_2 \\ z = 1 - t_2 \end{cases}$.

Ta có $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A(2 + t_1; 1 - 2t_1; 1 + 2t_1)$. Và $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(2 + 2t_2; -3 + t_2; 1 - t_2)$.

Ta có M là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} \frac{2 + t_1 + 2 + 2t_2}{2} = 2 \\ \frac{1 - 2t_1 - 3 + t_2}{2} = -1 \\ \frac{1 + 2t_1 + 1 - t_2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 2t_2 = 0 \\ -2t_1 + t_2 = 0 \\ 2t_1 - t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$

Suy ra $A(2; 1; 1)$, $B(2; -3; 1)$, $\overrightarrow{AB} = (0; -4; 0)$. Chọn $\vec{u} = (0; 1; 0)$ là 1 VTCP của Δ .

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(2; 1; 1)$, $B(2; -3; 1)$ nên $\Delta: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$ và mặt phẳng

$(P): 3x - 2y - 2z - 10 = 0$. Biết đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (P) , đường thẳng Δ đi qua điểm nào sau đây?

A. $A(1; -2; 3)$. **B.** $B(-1; 3; 2)$. **C.** $C(0; -2; -3)$. **D.** $D(2; 1; -3)$.

LỜI GIẢI

Chọn D

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; -2)$.

Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{a} = (2; -1; 4)$ và đi qua điểm $M(1; 2; 3)$.

Ta có: $\vec{n} \cdot \vec{a} = 6 + 2 - 8 = 0$ và dễ thấy điểm M không thuộc mặt phẳng (P) do đó đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P) \Rightarrow$ đường thẳng Δ cũng có một vector chỉ phương là $\vec{a} = (2; -1; 4)$.

Chủ đề 10: Phương trình đường thẳng

Gọi d_1 là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) .

Suy ra đường thẳng d_1 có một vector chỉ phương là $\vec{a}_1 = \vec{n} = (3; -2; -2)$.

Do đó phương trình đường thẳng d_1 là:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của d_1 và (P) . Vì $H \in d_1 \Rightarrow H(1 + 3t; 2 - 2t; 3 - 2t)$.

$$H \in (P) \Leftrightarrow 3(1 + 3t) - 2(2 - 2t) - 2(3 - 2t) - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 9t - 4 + 4t - 6 + 4t - 10 = 0 \Leftrightarrow 17t - 17 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra $H(4; 0; 1)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $H(4; 0; 1)$ có một vector chỉ phương là $\vec{a} = (2; -1; 4)$

$$\Rightarrow \Delta: \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}.$$

Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua điểm D .

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - y + z - 2021 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $AB = 3\sqrt{2}$. Biết $\vec{u} = (a; b; 1)$ một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ khi đó $T = a^{2021} + b^{2021}$ bằng
- A.** 2^{2021} . **B.** 3^{2021} . **C.** $2^{2021} + 3^{2021}$. **D.** 1.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 7 = 0$ và điểm $A(1; 1; 3)$. Đường thẳng Δ đi qua M cắt đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt tại M, N sao cho M là trung điểm của AN , biết đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(a; b; 6)$. Khi đó giá trị biểu thức $T = 14a - 5b$ bằng
- A.** $T = 81$. **B.** $T = 72$. **C.** $T = -81$. **D.** $T = -63$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là
- A.** $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$. **B.** $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}$.
C. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$ **D.** $\frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-3}$
- Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .
- A.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 3y + 2z + 2 = 0$. Đường thẳng Δ song song với (P) , đi qua $M(2; 2; 4)$ và cắt đường thẳng d có phương trình là
- A.** $\frac{x+2}{9} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z+4}{6}$. **B.** $\frac{x-2}{9} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-4}{6}$.
C. $\frac{x-2}{-9} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-4}{6}$. **D.** $\frac{x+2}{9} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z+4}{-6}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$ và

$d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng qua A , cắt đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{3}$, $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-2}$ và

$d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với d đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 . Đường thẳng Δ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $(3; -12; 10)$. B. $(4; 1; -7)$. C. $(4; 10; 17)$. D. $(1; -6; 6)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $(d_2): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$ (t là

tham số) và mặt phẳng $(P): x - y + z - 6 = 0$. Đường thẳng (d) song song (P) , cắt (d_1) và (d_2) lần lượt tại A và B sao cho $AB = 3\sqrt{6}$. Phương trình của (d) là

- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{-2}$. B. $\frac{x-5}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$.
C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-1}$. D. $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-2}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;2)$ song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là

- A. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+3}{1}$.
C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+2}{-1}$. D. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2, -2, 3); B(1, 3, 4); C(3, -1, 4)$. Phương trình đường phân giác góc BAC là.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$ và

$d_2: \frac{x-13}{3} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-4}{1}$. Đường thẳng Δ cắt và vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

A. $\frac{x+1}{20} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{9}$.

B. $\frac{x+1}{20} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{9}$.

C. $\frac{x-10}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+3}{-3}$.

D. $\frac{x-8}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{-3}$.

Câu 13: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x - 2y - z - 4 = 0$ và đường thẳng d

có phương trình $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là đường thẳng có phương trình

A. $\begin{cases} x = 6 + 8t \\ y = 2 + 5t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -6 + 8t \\ y = -2 + 5t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 6 + 8t \\ y = 2 - 5t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 6 - 8t \\ y = 2 - 5t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 7 = 0$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}; d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) cắt cả d_1 và d_2 là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 2; 0), B(1; 1; 1), C(2; -3; 2)$. Tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A, B, C là một đường thẳng d . Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 - 7t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = -t \\ z = -15 - 7t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$,

$d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ và $d_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3 , cắt d_1 và d_2 có

Chủ đề 10: Phương trình đường thẳng

phương trình là

A. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$.

B. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$.

C. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}$.

D. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{6}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (α) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d' . Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d' .

A. $M(2;5;-4)$.

B. $P(1;3;-1)$.

C. $N(1;-1;3)$.

D. $Q(2;7;-6)$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và $d': \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$. Đường thẳng Δ đối xứng với d' qua đường thẳng d có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{2}$.

B. $\Delta: \frac{x-7}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.

C. $\Delta: \frac{x-7}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

D. $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và $d': \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Đường thẳng Δ đối xứng với d' qua đường thẳng d có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

C. $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{2}$.

D. $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-1-2t \end{cases}$ và $d': \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{2}$. Đường thẳng Δ đối xứng với d' qua đường thẳng d có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x+4}{5} = \frac{y}{14} = \frac{z-2}{-2}$.

B. $\Delta: \frac{x+4}{-14} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-2}$.

C. $\Delta: \frac{x}{-14} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{2}$.

D. $\Delta: \frac{x+4}{14} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{2}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $C(13;-13;10)$. Đường trung tuyến AM và đường

cao BH của ΔABC là $AM: \begin{cases} x = -7 + 8t \\ y = 9 - 7t \\ z = 8 - t \end{cases}$, $BH: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-3}$. Phương trình đường cao

CK của tam giác ΔABC là:

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{1}$.
C. $\frac{x-5}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+6}{2}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;2;3)$. Đường trung tuyến BM

và đường cao CH lần lượt có phương trình là $\begin{cases} x = 5t \\ y = 0 \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ và $\frac{x-4}{16} = \frac{y+2}{-13} = \frac{z-3}{5}$. Viết phương

trình đường trung trực của đoạn thẳng BC .

- A. $\frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{10}$. B. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{13} = \frac{z-2}{5}$.
C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-1}$. D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{5}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): z-1=0$ và $(Q): x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt đường thẳng $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ . Phương trình của đường thẳng d là

- A. $\begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3-t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;4;1)$ và hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương

trình $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{-3}$; $\begin{cases} x = 3+4u \\ y = 2+u \\ z = 3 \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt cả d_1 ,

d_2 là

- A. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{1}$. B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.
C. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$,

$d_2: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_3: \begin{cases} x = 3+t \\ y = 3+2t \\ z = -2-t \end{cases}$. Đường thẳng d song song với d_3 cắt d_1 và d_2 có

phương trình là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = \frac{8}{3} + t \\ y = -\frac{7}{3} + 2t \\ z = \frac{10}{3} - t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = \frac{8}{3} - t \\ y = -\frac{7}{3} - 2t \\ z = \frac{10}{3} - t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = \frac{8}{3} - t \\ y = -\frac{7}{3} + 2t \\ z = \frac{10}{3} - t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = \frac{8}{3} - t \\ y = -\frac{7}{3} + 2t \\ z = \frac{10}{3} + t \end{cases} \end{array}$$

Câu 27: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$; $d': \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 1 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}$. Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với

(P) ; cắt d, d' và tạo với d góc 30° . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{1}{\sqrt{5}}. & \text{B. } \frac{1}{\sqrt{2}}. & \text{C. } \sqrt{\frac{2}{3}}. & \text{D. } \frac{1}{2}. \end{array}$$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$,

sao cho góc giữa d và $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}. & \text{B. } \frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}. \\ \text{C. } \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}. & \text{D. } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}. \end{array}$$

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z + 2 = 0$ và hai điểm $A(2;0;1)$, $B(1;1;2)$

. Gọi d là đường thẳng nằm trong (α) và cắt đường thẳng AB , thỏa mãn góc giữa hai đường thẳng AB và d bằng góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (α) . Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 2. & \text{B. } \frac{\sqrt{6}}{3}. & \text{C. } \sqrt{3}. & \text{D. } \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}$$

Câu 30: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$.

Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{\sqrt{2}a}{2}. & \text{B. } a. & \text{C. } \frac{2\sqrt{5}a}{5}. & \text{D. } \frac{\sqrt{6}a}{3}. \end{array}$$

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;-1;2)$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}$. Phương trình đường thẳng đi qua M cắt hai

đường thẳng d_1 và d_2 là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}. & \text{B. } \frac{x}{9} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-2}{16}. & \text{C. } \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4}. & \text{D. } \frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{-16}. \end{array}$$

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình cạnh

$$AC: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 \\ z = 6 + 7t \end{cases}, \text{ đường cao } AH: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}, \text{ đường trung tuyến}$$

$$CM: \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+1}{-11}. \text{ Biết } B(a;b;c), \text{ tổng } a+b+c \text{ bằng}$$

- A. -3 . B. 3 . C. 5 . D. -1 .

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$,

$$d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = 0 \end{cases}. \text{ Đường thẳng đi qua } A, \text{ vuông góc với } d_1 \text{ và cắt } d_2 \text{ đi qua điểm } M(2;a;b).$$

Tính $T = 2a + b$.

- A. $T = 1$ B. $T = 2$. C. $T = -3$. D. $T = 3$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-4;-5)$ và các đường thẳng $d_1: \frac{x+4}{-5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{3}$;

$$d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{-2}. \text{ Đường thẳng } d \text{ đi qua } M \text{ và cắt } d_1, d_2 \text{ lần lượt tại } A, B. \text{ Diện tích tam giác } OAB \text{ bằng}$$

- A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. B. $5\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{5}$. D. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $a: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$; $b: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z = 0$. Viết phương trình đường thẳng d song song với (P) , cắt a và b lần lượt tại M và N sao cho $MN = \sqrt{2}$.

- A. $d: \frac{x-\frac{4}{7}}{-3} = \frac{y-\frac{4}{7}}{8} = \frac{z+\frac{8}{7}}{-5}$. B. $d: \frac{x-\frac{4}{7}}{3} = \frac{y-\frac{4}{7}}{8} = \frac{z+\frac{8}{7}}{-5}$.
C. $d: \frac{x-\frac{4}{7}}{3} = \frac{y+\frac{4}{7}}{8} = \frac{z+\frac{8}{7}}{-5}$. D. $d: \frac{x+\frac{4}{7}}{-3} = \frac{y-\frac{4}{7}}{8} = \frac{z+\frac{8}{7}}{-5}$.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}. \text{ Hình chiếu của } d \text{ trên } (P) \text{ là đường thẳng } \Delta. \text{ Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng } \Delta?$$

- A. $N(-1;3;-1)$. B. $N(1;3;-1)$. C. $N(2;5;-4)$. D. $N(2;7;-6)$.

Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng (d_1) , (d_2) , (d_3) có phương

$$\text{trình } (d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 1 + t_1 \\ z = 1 - 2t_1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 3 + t_2 \\ y = -1 + 2t_2 \\ z = 2 + 2t_2 \end{cases}, (d_3): \begin{cases} x = 4 + 2t_3 \\ y = 4 - 2t_3 \\ z = 1 + t_3 \end{cases}. S(I; R) \text{ là mặt cầu tâm } I \text{ bán}$$

kinh R tiếp xúc với 3 đường thẳng đó. Giá trị nhỏ nhất của R gần số nào nhất trong các số sau:

- A. 2,1. B. 2,2. C. 2,3. D. 2,4.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(2;5;3)$. Mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất có phương trình là

- A. $x - 4y + z - 3 = 0$. B. $x + 4y - z + 1 = 0$. C. $x - 4y - z + 1 = 0$. D. $x + 4y + z - 3 = 0$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}$ và mp $(Q): x + 2y - z + 2 = 0$. Gọi Δ'

là đường thẳng đối xứng với Δ qua (Q) . Hỏi Δ' đi qua điểm nào sau đây?

- A. $(2;0;-3)$. B. $(-2;-1;-3)$. C. $(2;-5;3)$. D. $(-1;-1;3)$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z + 2 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}. \text{ Đường thẳng qua } A(1;2;-1) \text{ và cắt } (P), d \text{ lần lượt tại } B, C(a;b;c)$$

sao cho C là trung điểm AB . Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

- A. -15. B. -12. C. -5. D. 11.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$

và $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

- A. $M(1;1;2)$. B. $N(2;2;2)$. C. $P(-1;1;0)$. D. $Q(2;1;3)$.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;0;-1)$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}, \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}. \text{ Gọi } d \text{ là đường thẳng đi qua } A, d \text{ cắt } \Delta_1$$

đồng thời góc giữa d và Δ_2 là nhỏ nhất. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $M(3;-5;1)$. B. $N(-5;6;1)$. C. $P(7;-10;-5)$. D. $Q(-9;10;5)$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(2;3;3), C(0;-1;3)$. Điểm

$M(a;b;c)$ thuộc đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ bằng $\sqrt{3}$. Tính $T = a + b + c$ biết $a < 0$.

- A. $T = 1$. B. $T = 0$. C. $T = -3$. D. $T = 3$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ y = t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x - z + 3 = 0$. Biết

đường thẳng Δ đi qua $O(0;0;0)$, có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1;a;b)$, vuông góc với đường thẳng d và hợp với mặt phẳng (P) một góc lớn nhất. Hỏi điểm nào sau đây thuộc đường thẳng

Δ

- A.** $P(0;1;0)$. **B.** $M(2;0;-2)$. **C.** $N(-1;1;1)$. **D.** $Q(1;2;2)$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $AB = 2AC$ và điểm $M(2;0;4)$.

Biết điểm B thuộc đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, điểm C thuộc mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 2 = 0$

và AM là phân giác trong của tam giác ABC kẻ từ $A(M \in BC)$. Phương trình đường thẳng BC là

- A.** $\begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = 4+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 4-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = -2+t \\ z = -2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2-t \\ z = 2+t \end{cases}$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng d đi qua $A(1;-1;2)$, song song với mặt

phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc nhỏ

nhất có phương trình là

- A.** $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$. **B.** $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$.
C. $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{3}$. **D.** $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{7}$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y - z - 3 = 0$. Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) . Tập hợp các điểm thuộc mặt phẳng (P) và cách d' một khoảng bằng $\sqrt{11}$ là đường thẳng có phương trình

- A.** $\frac{x}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+5}{-1}$. **B.** $\frac{x-9}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{-1}$.
C. $\frac{x}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+5}{-1}$ và $\frac{x-9}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x+9}{7} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{-1}$.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. Mặt phẳng (Q) đi qua d và tạo với mặt phẳng (P) một góc α . Viết

phương trình đường giao tuyến giữa (P) và (Q) khi góc α có số đo lớn nhất.

- A.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{-1}$.
C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;-2;1), B(-2;2;1), C(2;1;4)$.

Gọi $M(a;b;0)$ là giao điểm của đường trung trực của cạnh AB và mặt phẳng (Oxy) . Tính $S = b - a$.

- A.** $S = \frac{103}{150}$. **B.** $S = \frac{101}{150}$. **C.** $S = \frac{57}{75}$. **D.** $S = -2$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho hai $M(1;2;3), N(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P) , các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Δ . Biết rằng khi $MH = NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, một vector chỉ phương của đường thẳng d là

- A.** $\vec{u}(1;2;1)$. **B.** $\vec{u}(1;-2;-1)$. **C.** $\vec{u}(0;-2;1)$. **D.** $\vec{u}(1;-2;1)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D

Gọi $A(1+2a; -2+a; 2-2a)$; $B(2-b; 3+b; 4+b)$. Suy ra $\overrightarrow{BA} = (2a+b-1; a-b-5; -2a-b-2)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) : $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -1; 1)$.

Do $AB // (P)$ nên $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n_{(P)}} = 0 \Rightarrow 2a+b-1-a+b+5-2a-b-2=0$
 $\Rightarrow -a+b+2=0 \Rightarrow b=a-2$

Ta có: $AB = 3\sqrt{2} \Rightarrow (2a+b-1)^2 + (a-b-5)^2 + (-2a-b-2)^2 = 18$

$$\Rightarrow (3a-3)^2 + 9 + (-3a)^2 = 18 \Rightarrow 18a^2 - 18a = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=0 \end{cases}$$

TH1: Nếu $a=0$ thì $A(1; -2; 2)$, $B(4; 1; 2)$ suy ra $\overrightarrow{AB} = (3; 3; 0)$ do cao độ của VTCP bằng 1.

TH2: Nếu $a=1$ thì $A(3; -1; 0)$, $B(3; 2; 3)$ suy ra $\overrightarrow{AB} = (0; 3; 3)$.

Chọn véc-tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (0; 1; 1)$ suy ra $a=0; b=1$.

Câu 2: Chọn A

Ta có, M thuộc đường thẳng d nên $M(-1+t; 2t; 2+t)$

Do M là trung điểm của AN nên $N(-3+2t; 4t-1; 1+2t)$

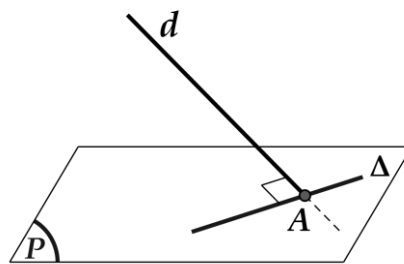
Lại có $N(-3+2t; 4t-1; 1+2t)$ thuộc mặt phẳng (P) nên:

$$1(-3+2t) - 2(4t-1) - 2(1+2t) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Khi đó $M(-2; -2; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-3; -3; -2) = -\frac{1}{3}(9; 9; 6)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Δ , theo đề bài đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(a; b; 6)$ suy ra
 $a=9; b=9 \Rightarrow T=14.9-5.9=81$.

Câu 3: Chọn C



Ta có $\vec{u}_d = (2; 1; 3)$ là véc-tơ chỉ phương của d và $\vec{n}_P = (1; 2; 1)$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Gọi $A = d \cap \Delta$. Do $\Delta \subset (P)$ nên $A = d \cap (P)$.

$$\text{Suy ra tọa độ } A \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1; 1).$$

Gọi $\vec{u}_\Delta$ là véc-tơ chỉ phương của Δ . Lại có: $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \end{cases}$ ta chọn

$$\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_p; \vec{u}_d] = (5; -1; -3).$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$

Câu 4: Chọn D

Gọi $B = d \cap d_2$, $B(2+t; -1-t; 1+t) \in d_2$, ta có $\vec{AB} = (1+t; -t; t-2)$ là VTCP của đường thẳng d . Đường thẳng d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (1; 4; -2)$.

d vuông góc với đường thẳng d_1 nên $\vec{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (1+t) + 4 \cdot (-t) - 2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{AB} = (2; -1; -1)$$

Phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$

Câu 5: Chọn B

Phương trình tham số đường thẳng d đi qua $A(-1; 2; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (3; -2; 2)$

$$\text{là } \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; 3; 2)$. Vì $\begin{cases} A \in d, A \notin (P) \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$ nên $d \parallel (P)$.

Gọi $d \cap \Delta = N \Rightarrow N(-1+3t; 2-2t; 2+2t)$. Ta có $\vec{MN} = (-3+3t; -2t; -2+2t)$.

Vì $\Delta \parallel (P)$ nên $\vec{MN} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{MN} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -3+3t+3(-2t)+2(-2+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 7$
 $\Rightarrow \vec{MN} = (18; -14; 12).$

Đường thẳng Δ đi qua $M(2; 2; 4)$ và có 1 VTCP $\vec{u}_\Delta = \frac{1}{2}\vec{MN} = (9; -7; 6)$ có phương trình

$$\frac{x-2}{9} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-4}{6}.$$

Câu 6: Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

$$\Delta \cap d_1 = M(3+t_1; -1+2t_1; 4); \Delta \cap d_2 = N(-2+t_2; t_2; 2+2t_2).$$

$$\vec{AM} = (2+t_1; -2+2t_1; 2); \vec{AN} = (-3+t_2; -1+t_2; 2t_2).$$

Ta có: A, M, N thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = k\vec{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t_1 = k(-3+t_2) \\ -2+2t_1 = k(-1+t_2) \\ 2 = 2kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+3k = -1 \\ 2t_1+k = 3 \\ 1 = kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ k = -1 \\ t_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{AM} = (4; 2; 2).$$

Đường thẳng Δ đi qua $A(1; 1; 2)$, một VTCP là $\vec{u} = (2; 1; 1)$ có phương trình là:

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Câu 7: Chọn C

Lấy $A(2t_1; -1+t_1; -3-2t_1) \in d_1$ và $B(-2+t_2; 3-3t_2; 2t_2) \in d_2$.

Ta chọn $\vec{u}_\Delta = \vec{AB} = (t_2 - 2t_1 - 2; -3t_2 - t_1 + 4; 2t_2 + 2t_1 + 3)$.

Vì Δ song song với d nên $\frac{t_2 - 2t_1 - 2}{1} = \frac{-3t_2 - t_1 + 4}{2} = \frac{2t_2 + 2t_1 + 3}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 1. \end{cases}$

Suy ra $A(-2; -2; -1)$ và $\vec{u}_\Delta = (1; 2; 3)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. Chọn $t = 6 \Rightarrow M(4; 10; 17)$.

Câu 8: Chọn D

Đặt $(d) \cap (d_1) = A \Rightarrow A(1+2a; -2+a; 2-2a)$; $(d) \cap (d_2) = B \Rightarrow B(2-b; 3+b; 4+b)$.

Đường thẳng (d) có một vector chỉ phương là $\vec{AB} = (1-2a-b; 5-a+b; 2+2a+b)$.

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 1)$.

Do đường thẳng (d) song song (P) nên $\vec{AB} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a - b - 2 = 0 \Leftrightarrow a = b + 2$.

Với $a = b + 2$ thì $\vec{AB} = (-3b - 3; 3; 3b + 6)$.

Mặt khác $AB = 3\sqrt{6}$ nên $3\sqrt{6} = \sqrt{(-3b-3)^2 + 3^2 + (3b+6)^2} \Leftrightarrow 18b^2 + 54b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -3 \end{cases}$

Với $b = -3$ thì $B(5; 0; 1) \in (P)$ nên đường thẳng (d) nằm trong (P) (không thỏa mãn điều kiện)

Với $b = 0$ thì đường thẳng (d) có một vector chỉ phương là $\vec{AB} = (-3; 3; 6)$ và qua điểm $B(2; 3; 4)$.

Câu 9: Chọn D

Ta có $M(1; 2; 2)$ không thuộc mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$.

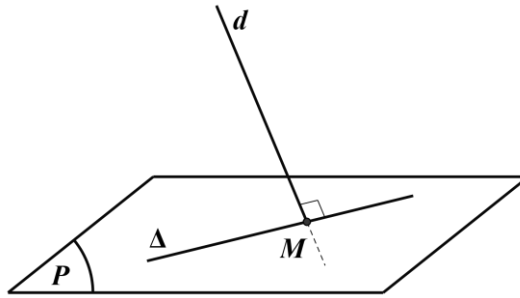
Mặt phẳng (Q) đi qua $M(1; 2; 2)$ và song song với (P) có phương trình: $(Q): x - y + z - 1 = 0$.

Gọi $N = d \cap (Q)$. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1} \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow N(0; 1; 2)$

Phương trình đường thẳng cần tìm MN đi qua $M(1; 2; 2)$ nhận véc tơ $\vec{MN} = (-1; -1; 0)$ làm vector

chỉ phương có phương trình là: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$

Câu 10: Chọn D



Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Khi đó: $M \in d \Rightarrow M(-1+t; -1-t; -2-2t)$.

Mặt khác: $M \in (P) \Rightarrow 2(-1+t) - (-1-t) + 2(-2-2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(-3; 1; 2)$.

Vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d , nên $\begin{cases} \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{u}_d \end{cases}$,

chọn $\vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}_P; \vec{u}_d] = (4; 6; -1)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-3; 1; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = (4; 6; -1)$. Phương trình

đường thẳng Δ là: $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 11: Chọn D

Giả sử đường phân giác trong của góc BAC cắt cạnh BC tại D . Ta có $\vec{BC} = (2, -4, 0)$.

Suy ra đường thẳng BC là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 4 \end{cases}$.

$D \in BC \Rightarrow D(1+2t, 3-4t, 4)$; $\vec{AB} = (-1, 5, 1) \Rightarrow AB = \sqrt{27}$; $\vec{AC} = (1, 1, 1) \Rightarrow AC = \sqrt{3}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = 3 \Rightarrow DB = 3DC \Rightarrow \vec{DB} = -3\vec{DC}$.

Ta có: $\vec{DB} = (-2t, 4t, 0)$; $\vec{DC} = (2-2t, -4+4t, 0)$.

$\Rightarrow \begin{cases} 2t = -6 + 6t \\ 4t = 12 - 12t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \Rightarrow D\left(\frac{5}{2}, 0, 4\right) \Rightarrow \vec{AD} = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right) = \frac{1}{2}(1, 4, 2)$.

Nên chọn VTCP là $\vec{u} = (1; 4; 2)$. Vậy phương trình đường thẳng AD là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Vậy $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 12: Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng cắt và vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại M và N . Vì

$M \in d_1 \Rightarrow M(2+3a; 2+a; 3a)$, $N \in d_2 \Rightarrow N(13+3b; 6-b; 4+b)$

$\Rightarrow \vec{MN} = (3b-3a+11; -b-a+4; b-3a+4)$

Đường thẳng d_1 có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u}_1(3;1;3)$.

Đường thẳng d_2 có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u}_2(3;-1;1)$.

Vì Δ vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 , ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11b - 19a = -49 \\ 11b - 11a = -33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $M(8;4;6); N(10;7;3)$ và $\overrightarrow{MN} = (2;3;-3)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua $M(8;4;6)$ nhận $\overrightarrow{MN} = (2;3;-3)$ làm một vec tơ chỉ phương

$$\text{là: } \frac{x-8}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{-3}.$$

Câu 13: Chọn A

$$\text{Phương trình tham số của } d \text{ là: } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}.$$

Gọi M là giao điểm của d và mặt phẳng (P) . Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \\ x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \\ 3 + 3t - 2(1 + t) - (-1 - t) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 6 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow M(6;2;-2).$$

Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) do đó Δ đi qua M .

Gọi mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P) nên vector pháp tuyến của mặt

phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)}$ cùng phương với $[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}] = (-3;2;-7) \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = (-3;2;-7)$.

Đường thẳng $\Delta = (P) \cap (Q)$ nên vector chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta$ cùng phương với

$$[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (-16;-10;4) \Rightarrow \text{Chọn } \vec{u}_\Delta = (8;5;-2).$$

Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) là đường thẳng Δ có phương trình:

$$\begin{cases} x = 6 + 8t \\ y = 2 + 5t \\ z = -2 - 2t \end{cases}.$$

Câu 14: Chọn B

$$\text{Đường thẳng } d_1 \text{ và } d_2 \text{ lần lượt có phương trình tham số là } d_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}; d_2 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 - 2t' \end{cases}.$$

Gọi A là giao điểm của d_1 và (P) nên tọa độ điểm A thỏa hệ

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \\ x - 3y + 2z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = -1 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1;4;3).$$

Gọi B là giao điểm của d_2 và (P) nên tọa độ điểm B thỏa hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 - 2t' \\ x - 3y + 2z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow B(1; 2; -1).$$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -4)$. Đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán đi qua $A(-1; 4; 3)$ và có VTCP

$$\vec{u}_\Delta = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2) \text{ nên có phương trình chính tắc là: } \frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-2}.$$

Câu 15: Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (3; -5; 2)$.

Ta thấy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

M cách đều hai điểm A, B nên điểm M nằm trên mặt trung trực của AB .

M cách đều hai điểm B, C nên điểm M nằm trên mặt trung trực của AC .

Do đó tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A, B, C là giao tuyến của hai mặt trung trực

của AB và AC .

Gọi $(P), (Q)$ lần lượt là các mặt phẳng trung trực của AB và AC .

$K\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm AB ; $N\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ là trung điểm AC .

(P) đi qua K và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình của (P)

$$2x - \left(y - \frac{3}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ hay } 2x - y + z + 1 = 0.$$

(Q) đi qua N và nhận $\overrightarrow{AC} = (3; -5; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình của (Q)

$$3\left(x - \frac{1}{2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{2}\right) + 2(z - 1) = 0 \text{ hay } 3x - 5y + 2z - 6 = 0.$$

$$\text{Ta có } d: \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ 3x - 5y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -1; -7)$ Nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3; 1; 7)$

$$\text{Cho } y = 0 \text{ ta sẽ tìm được } x = -8, z = 15 \text{ nên điểm } I(-8; 0; 15) \in d. \text{ Vậy } d: \begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}.$$

Câu 16: Chọn B

Gọi d là đường thẳng song song với d_3 , d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B .

Khi đó $A(3 + 2a; -1 + a; 2 - 2a)$ và $B(-1 + 3b; -2b; -4 - b)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (3b - 2a - 4; -2b - a + 1; -b + 2a - 6)$.

Đường thẳng d_3 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (4; -1; 6)$.

Vì d song song với d_3 nên

$$\frac{3b-2a-4}{4} = \frac{-2b-a+1}{-1} = \frac{-b+2a-6}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b+2a+4 = -8b-4a+4 \\ -12b-6a+6 = b-2a+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}.$$

Do đó đường thẳng d đi qua $A(3;-1;2)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (-4;1;-6)$. Phương trình đường thẳng $d: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$.

Câu 17: Chọn D

Vì mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B nên d nằm trong (P) với (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

(P) đi qua trung điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$ của AB và nhận $\overrightarrow{BA} = (3;1;0)$ làm một vector pháp tuyến có phương trình là $3x + y - 7 = 0$.

d là giao tuyến của (P) và (α) nên một vector chỉ phương của d là $\vec{u} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(\alpha)}}] = (1;-3;2)$.

Câu 18: Chọn A

Gọi $d \cap (P) = A$. Vì $A \in d: \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \end{cases} (t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow A(t; -1+2t; 2-t)$.

Mặt khác $A \in (P) \Rightarrow t-1+2t+2-t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow A(1;1;1)$. Lấy $B(0;-1;2) \in d$.

Gọi Δ là đường thẳng qua $B(0;-1;2)$ và vuông góc (P) . Ta có $\Delta: \begin{cases} x=t' \\ y=-1+t' \\ z=2+t' \end{cases}$

Gọi C là hình chiếu của B lên (P) . Ta có $C \in \Delta \Rightarrow C(t'; -1+t'; 2+t')$.

Mà $C \in (P) \Rightarrow t'-1+t'+2+t'-3=0 \Leftrightarrow t'=\frac{2}{3} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Đường thẳng d' đi qua $A(1;1;1)$ và VTCP $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{5}{3}\right)$ hay $\vec{u} = (1;4;-5)$ nên ta có

phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+s \\ y=1+4s \\ z=1-5s \end{cases}$

Thử đáp án, ta thấy điểm $M(2;5;-4) \in d'$.

Câu 19: Chọn A

Ta có $A(3;2;0) \in d'$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d . Phương trình của mặt phẳng (P) là $1(x-3)+2(y-2)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-7=0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d , khi đó $H = d \cap (P)$

Suy ra $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$, mặt khác $H \in (P)$

$\Rightarrow -1+t-6+4t-4+4t-7=0 \Rightarrow t=2$. Vậy $H(1;1;2)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d , khi đó H là trung điểm của AA' suy ra $A'(-1;0;4)$.

Δ đối xứng với d' qua đường thẳng $d \Rightarrow \Delta // d' \Rightarrow$ vector chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = \vec{u}_{d'} = (1; 2; 2)$

Ta có Δ qua A' và có vector chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = \vec{u}_{d'} = (1; 2; 2)$

$$\Rightarrow \text{phương trình } \Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{2}.$$

Câu 20: Chọn A

Ta có $M(2; -3; 1) \in d'$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua M vuông góc với đường thẳng d là:

$$2(x-2) - 1(y+3) + 2(z-1) = 0 \text{ hay } 2x - y + 2z - 9 = 0.$$

Gọi I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) , khi đó tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2} \\ 2x - y + 2z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; -3; 2).$$

Gọi M' đối xứng với M qua d thì I là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(0; -3; 3)$.

Δ đối xứng với d' qua đường thẳng $d \Rightarrow \Delta // d' \Rightarrow$ vector chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = \vec{u}_{d'} = (2; -1; 2)$.

Ta có Δ qua $M'(0; -3; 3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = \vec{u}_{d'} = (2; -1; 2)$.

$$\Rightarrow \text{phương trình } \Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

Câu 21: Chọn B

Ta có $N(0; 2; 4) \in d'$, $M(2; 1; 6) \in d'$

Phương trình mặt phẳng (P) qua $N(0; 2; 4)$ vuông góc đường thẳng d có VTPT

$$\vec{n} = \vec{u}_d = (1; 0; -2): x - 2(z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 2z + 8 = 0$$

Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow t - 2(-1 - 2t) + 8 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow I(-2; 1; 3)$

$$N' \text{ đối xứng với } N \text{ qua } d \Rightarrow I \text{ là trung điểm } NN' \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_N + x_{N'}}{2} \\ y_I = \frac{y_N + y_{N'}}{2} \\ z_I = \frac{z_N + z_{N'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N'} = -4 \\ y_{N'} = 0 \\ z_{N'} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N'(-4; 0; 2).$$

Phương trình mặt phẳng (Q) qua $M(2; 1; 6)$ vuông góc đường thẳng d có VTPT

$$\vec{n} = \vec{u}_d = (1; 0; -2): x - 2 - 2(z - 6) = 0 \Leftrightarrow x - 2z + 10 = 0.$$

Gọi $H = d \cap (P) \Rightarrow t - 2(-1 - 2t) + 10 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{12}{5} \Rightarrow H\left(-\frac{12}{5}; 1; \frac{19}{5}\right)$.

$$M' \text{ đối xứng với } M \text{ qua } d \Rightarrow H \text{ là trung điểm } MM' \Rightarrow M'\left(-\frac{34}{5}; 1; \frac{8}{5}\right);$$

$$\overrightarrow{N'M'} = \left(-\frac{14}{5}; 1; -\frac{2}{5}\right)$$

Δ đối xứng với d' qua đường thẳng d

$\Rightarrow \Delta$ đi qua N' và nhận $\vec{u}_\Delta = 5.\vec{N'M'} = (-14; 5; -2)$ là VTCP. Vậy $\Delta: \frac{x+4}{-14} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-2}$.

Câu 22: Chọn A

Gọi $M(-7+8m; 9-7m; 8-m)$, $A(-7+8a; 9-7a; 8-a)$, $B(3+2b; 2+b; 5-3b)$.

Do M là trung điểm của BC nên $\begin{cases} (-7+8m)2 = 3+2b+13 \\ (9-7m)2 = 2+b-13 \\ (8-m)2 = 5-3b+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow B(5; 3; 2).$

Có $\vec{AC} = (20-8a; -22+7a; 2+a)$. Do $AC \perp BH \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{u}_{BH} = 0$

$$\Leftrightarrow (20-8a)2 + (-22+7a)1 + (2+a)(-3) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow A(1; 2; 7).$$

$\vec{AB}(4; 1; -5) \Rightarrow$ phương trình $AB: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{-5}$.

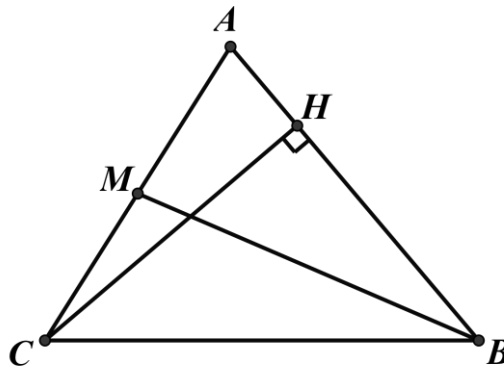
Do $K \in AB \Rightarrow K(1+4k; 2+k; 7-5k) \Rightarrow \vec{CK} = (-12+4k; 15+k; -3-5k)$.

Do $CK \perp AB \Rightarrow \vec{CK} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (-12+4k)4 + (15+k)1 + (-3-5k)(-5) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$.

$$\Rightarrow \vec{CK} = \left(-\frac{72}{5}; \frac{108}{5}; -\frac{36}{5}\right) = -\frac{36}{5}(2; -3; 1).$$

Nhận xét, từ $\vec{CK}$ loại hai đường thẳng là $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{1}$ và $\frac{x-5}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+6}{2}$.

Thay tọa độ điểm C vào $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{1}$ thỏa mãn.

Câu 23: Chọn D

Vì $M \in BM$ nên $M(5t; 0; 1+4t)$. Ta có M là trung điểm của AC nên $C(10t-1; -2; 8t-1)$.

Ta lại có, $C \in (CH)$ nên $C(4; -2; 3)$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với CH .

Phương trình mặt phẳng $(P): 16(x-1) - 13(y-2) + 5(z-3) = 0 \Leftrightarrow 16x - 13y + 5z - 5 = 0$.

Đường thẳng BM cắt mặt phẳng (P) tại điểm B nên $B(0; 0; 1)$.

Gọi d là đường trung trực của cạnh BC trong tam giác ABC .

Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Suy ra $N(2; -1; 2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua N và vuông góc với BC . Mặt phẳng (P) nhận $\vec{BC} = (4; -2; 2)$ làm một vector pháp tuyến.

Chủ đề 10: Phương trình đường thẳng

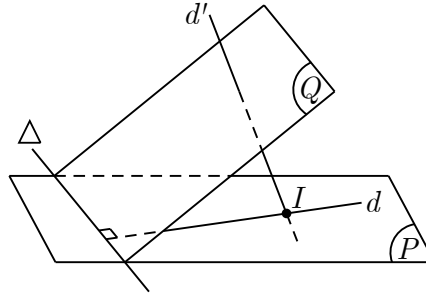
Mặt phẳng (ABC) nhận $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-8; -6; 10)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Ta có, đường thẳng d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) .

Đường thẳng d đi qua $N(2; -1; 2)$ và nhận $\vec{u} = [\vec{BC}, \vec{n}] = (-8; -56; -40)$. Chọn $\vec{u}' = (1; 7; 5)$.

Phương trình của đường thẳng d là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{5}$.

Câu 24: Chọn C



Đặt $\vec{n}_P = (0; 0; 1)$ và $\vec{n}_Q = (1; 1; 1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q) .

Do $\Delta = (P) \cap (Q)$ nên Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-1; 1; 0)$.

Đường thẳng d nằm trong (P) và $d \perp \Delta$ nên d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{u}_\Delta] = (-1; -1; 0)$.

Gọi $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$ và $I = d' \cap d \Rightarrow I = d' \cap (P)$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} z-1=0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=0 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow I(3; 0; 1)$.

Do đó phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 25: Chọn D

Đường thẳng d_1 có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3t \\ z=-1-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Gọi $B = \Delta \cap d_1$ suy ra $B \in d_1$ và $B(2+t; -3t; -1-3t)$.

Gọi $C = \Delta \cap d_2$ suy ra $C \in d_2$ và $C(3+4u; 2+u; 3)$.

Ta có $\vec{AB} = (3+t; -4-3t; -2-3t); \vec{AC} = (4+4u; -2+u; 2)$.

Do Δ đi qua A , cắt d_1 tại B , cắt d_2 tại C nên A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}$ cùng

phương $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $\begin{cases} 3+t = k.(4+4u) \\ -4-3t = k.(-2+u) \\ -2-3t = k.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-4k-4ku = -3 \\ 3t-2k+ku = -4 \\ 3t+2k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = \frac{1}{2} \\ ku = 0 \end{cases}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$ là một vector chỉ phương của Δ .

Đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 26: Chọn A

Giả sử đường thẳng d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A, B .

Gọi $A(2+2t; -2-t; 3+t); B(5+3t'; -1-2t'; 2-t')$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3+3t'-2t; 1-2t'+t; -1-t'-t)$.

Vector chỉ phương của đường thẳng d_3 là $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

Vì d song song với d_3 nên $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ cùng phương.

Khi đó
$$\frac{3+3t'-2t}{1} = \frac{1-2t'+t}{2} = \frac{-1-t'-t}{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3+3t'-2t}{1} = \frac{1-2t'+t}{2} \\ \frac{3+3t'-2t}{1} = \frac{-1-t'-t}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t'-3t = -5 \\ 2t'-3t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Suy ra $A\left(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A\left(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$ và nhận $\vec{u} = (1; 2; -1)$ làm một vector chỉ

phương nên có phương trình là
$$\begin{cases} x = \frac{8}{3} + t \\ y = -\frac{7}{3} + 2t \\ z = \frac{10}{3} - t \end{cases}$$

Câu 27: Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\vec{n}_P$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Gọi $M(1+t; t; 2+2t)$ là giao điểm của Δ và d ; $M'(3-t'; 1+t'; 1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = (2-t'-t; 1+t'-t; -1-2t'-2t)$

$$MM' // (P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \notin (P) \\ \overrightarrow{MM'} \perp \vec{n}_P \end{cases} \Leftrightarrow t' = -2 \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = (4-t; -1-t; 3-2t)$$

$$\text{Ta có } \cos 30^\circ = \cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}_d) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy, có 2 đường thẳng thỏa mãn là } \Delta_1: \begin{cases} x = 5 \\ y = 4+t \\ z = 10+t \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x = t' \\ y = -1 \\ z = t' \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2}.$$

Câu 28: Chọn C

$$\text{Gọi } M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1+2t; 2+t; -2-t)$$

$$d \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a_d} = \vec{AM} = (2t+2; t+2; -1-t)$$

$$\Delta_2 \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a_2} = (-1; 2; 2)$$

$$\cos(d; \Delta_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}, \text{ ta suy ra được } \max f(t) = f\left(-\frac{9}{7}\right) = \frac{9}{5}$$

$$\text{Do đó } \max[\cos(\Delta, d)] = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow t = -\frac{9}{7} \Rightarrow \vec{AM} = \left(-\frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right)$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } d \text{ là } \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}.$$

Câu 29: Chọn B

$$\text{Ta có } \vec{AB} = (-1; 1; 1) \Rightarrow AB: \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}. \text{ Gọi } M = d \cap AB \Rightarrow M(2-t; t; 1+t),$$

$$\text{do } d \subset (\alpha) \Rightarrow M \in (\alpha): 2-t+t-2(1+t)+2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow M(1; 1; 2).$$

$$\text{Gọi vectơ chỉ phương của } d: \vec{u} = (a, b, c), \text{ ta có } d \subset (\alpha) \Rightarrow a+b-2c=0 \Rightarrow b=2c-a.$$

$$\sin(AB, (\alpha)) = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1+1+(-2)^2} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \cos(AB, (\alpha)) = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \cos(d; AB) = \frac{|-a+b+c|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|3c-2a|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2+(2c-a)^2+c^2}} = \frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{2}}.$$

$$\Leftrightarrow 6(3c-2a)^2 = 14(a^2+(2c-a)^2+c^2) \Leftrightarrow (a+2c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2c.$$

$$\text{Chọn } c = -1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -4 \text{ suy ra } d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow d(A; d) = \frac{[\vec{AM}, \vec{u_d}]}{|\vec{u_d}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } \vec{AB} = (-1; 1; 1), \text{ gọi } \varphi = (AB, (\alpha)).$$

$$\sin(AB, (\alpha)) = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1+1+(-2)^2} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}.$$

$$\text{Gọi } I = AB \cap (\alpha) \Rightarrow I(1; 1; 2) \in d. \text{ Khi đó } d(A, d) = AH = AM \cdot \sin \varphi = \sqrt{1+1+1} \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 30: Chọn D

Nhận xét: Rất nhiều học sinh gặp khó khăn trong việc dùng phương pháp hình học cổ điển tính

Ta có $\overrightarrow{OM} = (a; a; 0)$; $\overrightarrow{OB} = (2a; 0; 0)$; $\overrightarrow{AB} = (2a; 0; -a)$.

$$\Rightarrow [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}] = (-a^2; a^2; -2a^2) \Rightarrow d(AB, OM) = \frac{|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2a^3}{\sqrt{a^4 + a^4 + 4a^4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$
 $\Rightarrow A(1+a; -2-a; 3+2a); B(-1+2b; 4-b; 2+4b).$

$$\Delta \text{ qua điểm } M \Rightarrow \overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a = -k+2kb \\ -1-a = 5k-kb \\ 1+2a = 4kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-k+2kb = 1 \\ a+5k-kb = -1 \\ -2a+4kb = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ b = -4 \end{cases}$$

Phương trình của Δ là: $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$.

Ta có: $A = AC \cap AH \Rightarrow A(4;3;6)$ và $C = AC \cap CM \Rightarrow C(3;3;-1)$.

Đường thẳng BC cắt và vuông góc với AH tại H . Do $H \in AH$ nên $H(2+s; 1+s; 3s)$.

$$BC \perp AH \Leftrightarrow \overrightarrow{CH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow s = 0. \text{ Vậy } \overrightarrow{CH} = (-1; -2; 1).$$

$$\text{Đường thẳng } BC \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 3 - k \\ y = 3 - 2k \text{ (} k \text{ là tham số)} \\ z = -1 + k \end{cases}$$

Điểm $B \in BC$ nên $B(3 - k; 3 - 2k; -1 + k)$.

$$M \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow M\left(\frac{7 - k}{2}; 3 - k; \frac{5 + k}{2}\right).$$

$$\text{Mà } M \in CM \Rightarrow \frac{\frac{7 + k}{2} - 3}{3} = \frac{3 - k - 3}{8} = \frac{\frac{5 + k}{2} + 1}{-11} \Leftrightarrow k = 4.$$

Vậy $B(-1; -5; 3)$ nên $a + b + c = -1 - 5 + 3 = -3$.

Câu 33: Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, Δ cắt d_2 tại B . Do $B \in d_2 \Rightarrow B(3 + 2t'; 3 + t'; 0)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1 + 2t'; 2 + t'; -1)$, d_1 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1; 0; -1)$.

Ta có $\Delta \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2t' + 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow t' = -1$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -1)$.

Đường thẳng Δ cần tìm đi qua $B(1; 2; 0)$ và có VTCP là $\vec{u} = (1; -1; 1)$ nên có phương trình là

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 1; 1)$ nên $T = 2.1 + 1 = 3$.

Câu 34: Chọn A

Ta có đường thẳng d_1 đi qua điểm $C(-4; 4; 2)$ và có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-5; 2; 3)$ và

$$\text{phương trình tham số của nó là: } \begin{cases} x = -4 - 5t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}.$$

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $D(1; 2; -5)$ và có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-1; 3; -2)$ và phương

$$\text{trình tham số của nó là } \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -5 - 2t' \end{cases}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua d_1 và M , (Q) là mặt phẳng đi qua d_2 và M , khi đó $A = d_1 \cap (Q)$, $B = d_2 \cap (P)$.

Ta có $\overrightarrow{CM} = (7; -8; -7)$; $\overrightarrow{DM} = (2; -6; 0)$.

Mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{CM}] = (10; -14; 26) = 2(5; -7; 13)$ nên nó có một vectơ pháp tuyến khác là $\vec{n} = (5; -7; 13)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là

$$5(x - 3) - 7(y + 4) + 13(z + 5) = 0 \Leftrightarrow 5x - 7y + 13z + 22 = 0.$$

Mặt phẳng (Q) có một véc tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{DM}] = (-12; -4; 0) = -4(3; 1; 0)$ nên nó có một

vector pháp tuyến khác là $\vec{n}' = (3; 1; 0)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là $3(x-3) + 1(y+4) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0$.

Vì $A = d_1 \cap (Q)$ nên $A \in d_1 \Rightarrow A = (-4 - 5t; 4 + 2t; 2 + 3t)$

Mặt khác $A \in (Q) \Rightarrow 3(-4 - 5t) + 4 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow A = (1; 2; -1)$.

Vì $B = d_2 \cap (P)$ nên $B \in d_2 \Rightarrow B = (1 - t'; 2 + 3t'; -5 - 2t')$

Mặt khác $B \in (P) \Rightarrow 5(1 - t') - 7(2 + 3t') + 13(-5 - 2t') + 22 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B = (2; -1; -3)$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 2; -1); \overrightarrow{OB} = (2; -1; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-7; 1; -5)$.

Diện tích tam giác OAB là $S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + 1^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 35: Chọn B

Gọi $M(t; t; -2t)$ và $N(-1 - 2t', t', -1 - t')$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = (-1 - 2t' - t; t' - t; -1 - t' + 2t)$.

$\vec{n}_p(1; -1; -1)$

Do d song song với (P) nên $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow -1 - 2t' - t - t' + t + 1 + t' - 2t = 0 \Leftrightarrow t = -t'$.

Khi đó $\overrightarrow{MN} = (-1 + t; -2t; -1 + 3t) \Rightarrow MN = \sqrt{14t^2 - 8t + 2}$.

Ta có $MN = \sqrt{2} \Leftrightarrow 14t^2 - 8t + 2 = 2 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{4}{7}$.

Với $t = 0$ thì $M(0; 0; 0), N(-1; 0; -1)$ (loại do M và N đều nằm trên (P)).

Với $t = \frac{4}{7}$ thì $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{3}{7}; -\frac{8}{7}; \frac{5}{7}\right) = -\frac{1}{7}(3; 8; -5)$ và $M\left(\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; -\frac{8}{7}\right)$ (thỏa mãn).

Vậy $d: \frac{x - \frac{4}{7}}{3} = \frac{y - \frac{4}{7}}{8} = \frac{z + \frac{8}{7}}{-5}$.

Câu 36: Chọn C

Gọi $A = d \cap (P)$ với $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow A(t; -1 + 2t; 2 - t)$.

Mà $A \in (P) \Rightarrow t - 1 + 2t + 2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, nên $A(1; 1; 1)$.

Lấy $B(0; -1; 2) \in d$, gọi m là đường thẳng qua $B(0; -1; 2)$ và vuông góc với (P) .

Thì $m: \begin{cases} x = s \\ y = -1 + s \\ z = 2 + s \end{cases}$, gọi C là hình chiếu của B lên (P) .

Nên $C \in m \Rightarrow C(s; -1 + s; 2 + s)$.

Mặt khác $C \in (P) \Rightarrow s - 1 + s + 2 + s - 3 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{2}{3} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng Δ đi qua $A(1; 1; 1)$ và nhận vector

$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{-1}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{5}{3}\right) = \frac{-1}{3}(1; 4; -5)$ làm vector chỉ phương.

$$\text{Nên đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 + l \\ y = 1 + 4l \\ z = 1 - 5l \end{cases}. \text{ Vậy điểm thuộc đường thẳng } \Delta \text{ là } N(2; 5; -4).$$

Câu 37: Chọn A

Ta có: (d_1) đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$.

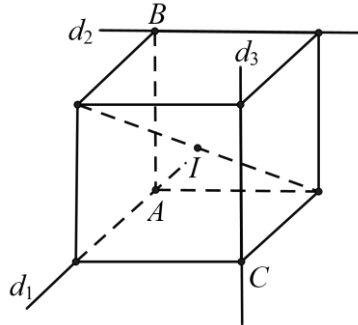
(d_2) đi qua điểm $B(3; -1; 2)$ có VTCP $\vec{u}_2 = (1; 2; 2)$.

(d_3) đi qua điểm $C(4; 4; 1)$ có VTCP $\vec{u}_3 = (2; -2; 1)$.

Ta có $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$, $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = 0 \Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một vuông góc với nhau.

$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} \neq 0$, $[\vec{u}_2, \vec{u}_3] \cdot \vec{BC} \neq 0$, $[\vec{u}_3, \vec{u}_1] \cdot \vec{CA} \neq 0 \Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một chéo nhau.

Lại có: $\vec{AB} = (2; -2; 1)$; $\vec{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0$ và $\vec{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0$ nên $(d_1), (d_2), (d_3)$ chứa 3 cạnh của hình hộp chữ nhật như hình vẽ.



Vì mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ tiếp xúc với 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ nên bán kính

$$R = d(I, d_1) = d(I, d_2) = d(I, d_3) \Leftrightarrow R^2 = d^2(I, d_1) = d^2(I, d_2) = d^2(I, d_3)$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{[\vec{AI}, \vec{u}_1]}{|\vec{u}_1|} \right)^2 = \left(\frac{[\vec{BI}, \vec{u}_2]}{|\vec{u}_2|} \right)^2 = \left(\frac{[\vec{CI}, \vec{u}_3]}{|\vec{u}_3|} \right)^2, \text{ ta thấy } |\vec{u}_1|^2 = |\vec{u}_2|^2 = |\vec{u}_3|^2 = 9 \text{ và}$$

$$\vec{AI} = (a-1; b-1; c-1), [\vec{AI}, \vec{u}_1] = (-2b-c+3; 2a+2c-4; a-2b+1).$$

$$\vec{BI} = (a-3; b+1; c-2), [\vec{BI}, \vec{u}_2] = (2b-2c+6; -2a+c+4; 2a-b-7).$$

$$\vec{CI} = (a-4; b-4; c-1), [\vec{CI}, \vec{u}_3] = (b+2c-6; -a+2c+2; -2a-2b+16).$$

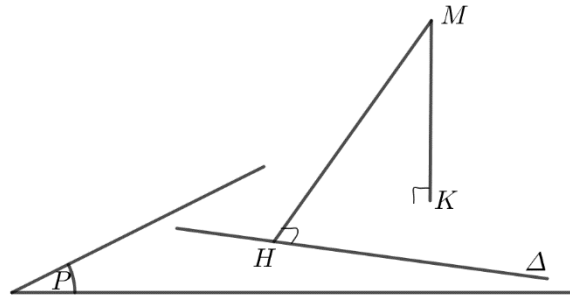
$$9R^2 = [\vec{AI}, \vec{u}_1]^2 = [\vec{BI}, \vec{u}_2]^2 = [\vec{CI}, \vec{u}_3]^2 \Rightarrow 27R^2 = [\vec{AI}, \vec{u}_1]^2 + [\vec{BI}, \vec{u}_2]^2 + [\vec{CI}, \vec{u}_3]^2 =$$

$$= 18(a^2 + b^2 + c^2) - 126a - 54b - 54c + 423 = 18\left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + 18\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + 18\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{243}{2} \geq \frac{243}{2}$$

$$\Rightarrow R_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ khi đó } R \approx 2,12.$$

Câu 38: Chọn A

Cách 1:



Gọi H là hình chiếu của M trên Δ . Gọi K là hình chiếu của M trên (P) .

Vì mặt phẳng (P) chứa Δ nên $MK \leq MH$ do đó khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất khi $K \equiv H$ hay mặt phẳng (P) chứa Δ và vuông góc với MH .

Đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

H là hình chiếu của M trên Δ nên $\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(1+2t; t; 2+2t) \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$.

Ta có phương trình $2(2t-1) + (t-5) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $H(3; 1; 4)$.

Khi đó mặt phẳng (P) qua $H(3; 1; 4)$ và nhận $\overrightarrow{MH} = (1; -4; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$1(x-3) - 4(y-1) + 1(z-4) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0.$$

Cách 2: Mặt phẳng (P) chứa Δ nên $\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0$.

Có $\vec{u}_\Delta = (2; 1; 2)$.

Xét phương án A: $\vec{n_P} = (1; -4; 1)$ có $\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 2 - 4 + 2 = 0$ (thỏa mãn).

Xét phương án B: $\vec{n_P} = (1; 4; -1)$ có $\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 2 + 4 - 2 \neq 0$ (loại).

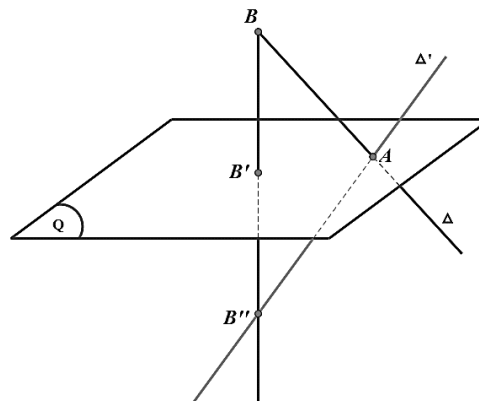
Xét phương án C: $\vec{n_P} = (1; -4; -1)$ có $\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 2 - 4 - 2 \neq 0$ (loại).

Xét phương án D: $\vec{n_P} = (1; 4; 1)$ có $\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 2 + 4 + 2 \neq 0$ (loại).

Câu 39: Chọn C

Gọi $A(1-2t; 1; 2+t)$ là giao điểm của Δ và (Q) . Khi đó:

$$(1-2t) + 2 \cdot 1 - (2+t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Suy ra: } A(-1; 1; 3)$$



Chủ đề 10: Phương trình đường thẳng

Lấy $B(1;1;2) \in \Delta$. Gọi B' là hình chiếu của B lên (Q) . Khi đó đường thẳng BB' qua B và

nhận $\vec{n}_Q = (1;2;-1)$ làm VTCP. Suy ra: $BB' : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-t \end{cases}$. B' là giao điểm của BB' và (Q) . Ta

được $B'(\frac{1}{2};0;\frac{5}{2})$.

Gọi B'' là điểm đối xứng với B qua B' . Suy ra: $B''(0;-1;3)$.

Khi đó $B'' \in \Delta'$. Vậy Δ' qua A và nhận $\vec{AB''} = (1;-2;0)$ làm VTCP.

Suy ra: $\Delta' : \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-2t \\ z = 3 \end{cases}$. Thử từng đáp án,

Câu 40: Chọn C

Vì $C \in d$ nên $\begin{cases} a = 2t+1 \\ b = -t-1 \\ c = t+4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$. Dẫn đến $C(2t+1; -t-1; t+4)$.

Vì C là trung điểm AB nên $\begin{cases} 4t+2 = 1+x_B \\ -2t-2 = 2+y_B \\ 2t+8 = -1+z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 4t+1 \\ y_B = -2t-4 \\ z_B = 2t+9 \end{cases}$

Vì $B \in (P)$ nên $(4t+1) + 3(-2t-4) - 2(2t+9) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-9}{2}$.

Dẫn đến $\begin{cases} a = -8 \\ b = \frac{7}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Suy ra $a+b+c = -5$.

Câu 41: Chọn A

Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2;3;-5)$ và có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3+3t \\ z = -4-5t \end{cases}.$$

Đường thẳng d_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (3;-2;-1)$ và có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = -1+3u \\ y = 4-2u \\ z = 4-u \end{cases}.$$

Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc các đường thẳng d_1, d_2 sao cho AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 .

Do $A \in d_1 \Rightarrow A(2+2t; 3+3t; -4-5t); B \in d_2 \Rightarrow B(-1+3u; 4-2u; 4-u)$.

Ta có $\vec{AB} = (3u-2t-3; -2u-3t+1; -u+5t+8)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 14u - 5t - 19$$

Do AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 , nên ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u - 38t = 43 \\ 14u - 5t = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Khi đó đường thẳng AB đi qua điểm $A(0;0;1)$ và có vector chỉ phương là $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$, nên

$$AB \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng AB đi qua điểm $M(1;1;2)$.

Câu 42: Chọn C

Gọi $B = d \cap \Delta_1 \Rightarrow B(2t+1; t+2; -t-2)$.

Vector chỉ phương của d : $\vec{u}_1 = \overrightarrow{AB} = (2t+2; t+2; -t-1)$.

Vector chỉ phương của Δ : $\vec{u}_2 = (-1; 2; 2)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \cos(d; \Delta_2) &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{|-2t-2+2t+4-2t-2|}{\sqrt{(2t+2)^2 + (t+2)^2 + (-t-1)^2} \cdot 3} \\ &= \frac{|-2t|}{3\sqrt{(2t+2)^2 + (t+2)^2 + (-t-1)^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4t^2}{6t^2 + 14t + 9}}. \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4t^2}{6t^2 + 14t + 9} \Rightarrow f'(t) = \frac{56t^2 + 72t}{(6t^2 + 14t + 9)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{9}{7} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{7}$	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\frac{36}{5}$		$\frac{4}{5}$	
	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max f(t) = \frac{36}{5}$ tại $t = -\frac{9}{7}$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right) \Rightarrow$ chọn VTCP $\vec{u}_1 = (-4; 5; 2)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } d: \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 5t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+1}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}.$$

Ta thấy điểm $P(7; -10; -5)$ thuộc đường thẳng d

Câu 43: Chọn C

Ta được $\overrightarrow{MB} = (t-2; t; t-4)$ và $\overrightarrow{MC} = (x_C-2; y_C; z_C-4)$ thế vào (1) và rút gọn ta được:

$$\begin{cases} x_C = 3-0,5t \\ y_C = -0,5t \\ z_C = 6-0,5t \end{cases} \text{ hay } C(3-0,5t; -0,5t; 6-0,5t).$$

Do C là điểm thuộc (P) nên $2(3-0,5t) + (-0,5t) - (6-0,5t) - 2 = 0 \Leftrightarrow -t-2=0 \Leftrightarrow t=-2$.

Suy ra $B(-2; -2; -2)$.

Đường thẳng BC đi qua điểm $B(-2; -2; -2)$ và nhận vector $\overrightarrow{BM} = (4; 2; 6)$ hay vector

$$\vec{u} = (2; 1; 3) \text{ là một vector chỉ phương nên có phương trình là } \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}.$$

Câu 46: Chọn B

Δ có VTCP $\vec{u}_\Delta = (1; -2; 2)$. Gọi VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

$d \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$. Gọi góc giữa hai đường thẳng d và Δ là α .

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|5a - 4b|}{3\sqrt{5a^2 - 4ab + 2b^2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{(5a - 4b)^2}{5a^2 - 4ab + 2b^2}}$$

Góc α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos \alpha$ lớn nhất, ta xét các trường hợp:

TH1: Nếu $b = 0$ thì $\cos \alpha = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5}$

TH2: Nếu $b \neq 0$. Đặt $t = \frac{a}{b} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}$, $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = \frac{50t^2 - 30t - 8}{(5t^2 - 4t + 2)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow 50t^2 - 30t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{5} \\ t = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	5	$\frac{25}{3}$	0	5	

Do $\cos \alpha \geq 0$ nên $\cos \alpha$ lớn nhất khi $f(t)$ lớn nhất, từ bảng biến thiên ta được

$$\max_{\mathbb{R}} f(t) = f\left(-\frac{1}{5}\right). \text{ Ta suy ra được: } 0 \leq \cos \alpha = \sqrt{f(t)} \leq \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

So sánh TH1 và TH2, ta suy ra: $0 \leq \cos \alpha \leq \frac{5\sqrt{3}}{9}$. Do đó: $\max(\cos \alpha) = \frac{5\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{5}$

Khi đó, chọn $a=1, b=-5, c=5 \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$.

Câu 47: Chọn C

Ta thấy: $A(1;0;-2) = d \cap (P) \Rightarrow A \in d'$.

(P) có 1 VTPT $\vec{n}_{(P)} = (1;2;-1)$, đường thẳng d có 1 VTCP $\vec{u}_d = (2;1;-1)$.

Gọi d'' là tập hợp các điểm thuộc mặt phẳng (P) và cách d' một khoảng bằng $\sqrt{11}$

(Q) là mặt phẳng vuông góc với (P) và cách d' một khoảng bằng $\sqrt{11} \Rightarrow (Q) \supset d''$

Ta có: $\begin{cases} (Q) \perp (P) \\ (Q) // (d, d') \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d] = (1;1;3)$ là 1 VTPT của (Q) .

$\Rightarrow$ phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) có dạng: $x + y + 3z + a = 0$.

Ta lại có: $d((Q), d') = d(A, (Q))$

$$\Rightarrow \frac{|1+0+3 \cdot (-2)+a|}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow |a-5| = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} a-5=11 \\ a-5=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=16 \\ a=-6 \end{cases}. \text{ Mà } d'' = (P) \cap (Q)$$

Với $a=16$, ta có phương trình d'' thỏa mãn $\begin{cases} x+2y-z-3=0 \\ x+y+3z+16=0 \end{cases} (I)$.

Chọn $M(-35;19;0)$ và $N(0;-1;-5)$ thỏa mãn $(I) \Rightarrow \vec{MN} = (35;-20;-5)$

$\Rightarrow \vec{u}_{d''} = (7;-4;-1)$ là 1 VTCP của $d'' \Rightarrow d'': \frac{x}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+5}{-1}$.

Với $a=-6$, ta có phương trình d'' thỏa mãn $\begin{cases} x+2y-z-3=0 \\ x+y+3z-6=0 \end{cases} (II)$.

Chọn $K(9;-3;0)$ thỏa mãn $(II) \Rightarrow d'': \frac{x-9}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{-1}$.

Câu 48: Chọn A

Gọi $A = d \cap (P)$, khi đó $A(1+2t;-1+t;3+t)$.

Ta có $A \in (P)$ nên $1+2t-1+t+3+t=0 \Leftrightarrow 4t+4=0 \Leftrightarrow t=-1$. Do đó $A(-1;-2;2)$.

Góc α có số đo lớn nhất bằng 90° , tức là $(Q) \perp (P)$.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;1)$, mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1;1;1)$ nên một véc-tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q = [\vec{u}, \vec{n}_P] = (0;-1;1)$.

Gọi $\Delta = (P) \cap (Q)$ thì Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (2;-1;-1)$.

Tiếp đến, đường thẳng Δ đi qua A nên có phương trình $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 49: Chọn B

Gọi d là đường trung trực của cạnh AB trong tam giác ABC .

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Suy ra $M\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Mặt phẳng (P) nhận $\vec{AB} = (-3;4;0)$ làm

làm một vector pháp tuyến.

Mặt phẳng (ABC) nhận $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (12; 9; -13)$ làm một vector pháp tuyến.

Ta có, đường thẳng d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) .

Đường thẳng d đi qua $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ và nhận $\vec{u} = [\vec{AB}, \vec{n}] = (-52; -39; -75)$. Chọn $\vec{u}' = (52; 39; 75)$.

Phương trình của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 52t \\ y = 39t \\ z = 1 + 75t \end{cases} . \text{ Mặt phẳng } (Oxy): z = 0.$$

Suy ra $t = -\frac{1}{75}$. Do đó: $M\left(-\frac{179}{150}; -\frac{39}{75}; 0\right) \Rightarrow a = -\frac{179}{150}; b = -\frac{39}{75} \Rightarrow S = b - a = \frac{101}{150}$.

Câu 50: Chọn D

Gọi I là trung điểm của HK .

Do $MH = NK$ nên $\Delta HMI = \Delta KNI \Rightarrow IM = IN$. Khi đó I thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN . Ta có (Q) nhận $\vec{n}_1 = \frac{1}{2}\vec{MN} = (1; 1; 1)$ làm vector pháp tuyến.

Mà $I \in \Delta \subset (P)$. Suy ra $I \in d = (P) \cap (Q)$. Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$.

Ta có $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (1; -2; 1)$. Gọi $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của d thì $\vec{u} \perp \vec{n}_1$ và $\vec{u} \perp \vec{n}_2$.

Suy ra $\vec{u}$ cùng phương với $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$. Chọn $\vec{u} = (1; -2; 1)$

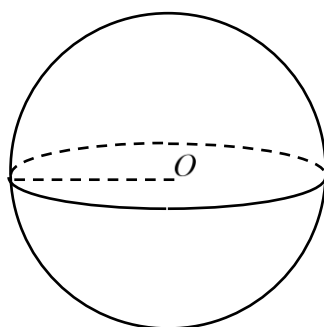
CHỦ ĐỀ 11

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt cầu



- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
- Ngược lại phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ (*) là phương trình mặt cầu nếu có điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
- Khi đó $I(-a; -b; -c)$ là tâm của mặt cầu và $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ là bán kính của mặt cầu.
- Nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, phương trình (*) xác định một điểm duy nhất là $I(-a; -b; -c)$.
- Nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, không có điểm nào thỏa mãn phương trình (*).

2. Lập phương trình mặt cầu

Phương pháp giải:

- Phương trình **chính tắc** của mặt cầu (S) : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
- Phương trình **tổng quát** của mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với tâm $I(a; b; c)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
- Chú ý:**
 - Nếu A, B thuộc mặt cầu $(S) \Rightarrow IA = IB = R$.
 - Nếu $IA = IB$ thì ta có: $2\vec{AB} \cdot \vec{OI} = OB^2 - OA^2 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2}$
- Chứng minh:** Ta có: $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow \vec{IA}^2 = \vec{IB}^2 \Leftrightarrow (\vec{IO} + \vec{OA})^2 = (\vec{IO} + \vec{OB})^2$
 $\Leftrightarrow 2\vec{IO} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = OB^2 - OA^2 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2}$.

- **Với bài toán:** Viết phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D ta sẽ làm như sau:
 - Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu thì: $IA = IB = IC = ID$ khi đó $I(x; y; z)$ là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OC^2 - OA^2}{2} \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{OD^2 - OA^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{CASIO suy ra tọa độ điểm } I.$$

Trong đó $O(0;0;0)$ là gốc tọa độ, giải hệ phương trình suy ra tọa độ điểm I .

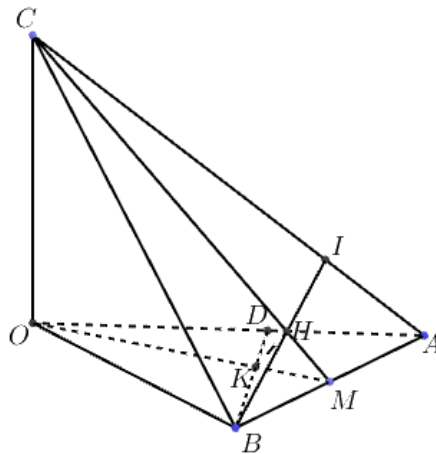
B // VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0,0,13)$, $B(0,12,5)$. Điểm C di động trên trục Ox . Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khi đó H luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

- A. $R = 5$. B. $R = \frac{10}{3}$. C. $R = \frac{4\sqrt{13}}{3}$. D. $R = \frac{2\sqrt{13}}{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi M là trung điểm đoạn AB , ta có $M(0;6;9)$.

$A, B \in (Oyz)$, $C \in Ox$ nên $OC \perp (OAB)$ do vậy $CB = CA$ nên $H \in OM$.

Ta có $OA = OB = 13$ nên tam giác OAB cân tại O nên $OM \perp AB$. Gọi K là trực tâm tam giác OAB $\Rightarrow K = OM \cap BD$ với D là hình chiếu vuông góc của B trên OA (hay D là hình chiếu vuông góc của B trên Oz).

Ta có $AB \perp (OCM) \Rightarrow AB \perp KH$ (1)

Có $\begin{cases} BD \perp OA \\ BD \perp OC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (OAC) \Rightarrow BD \perp AC$; $AC \perp BH$ nên $AC \perp (BHK) \Rightarrow KH \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $KH \perp (ABC) \Rightarrow KH \perp HM \Rightarrow KHM = 90^\circ$ do đó H luôn thuộc mặt cầu đường kính KM .

Ta có phương trình mặt phẳng (α) qua B và vuông góc với OA là $z = 5$.

Phương trình đường thẳng OM : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 + 2t \\ z = 9 + 3t \end{cases}$. Khi đó $K = OM \cap (\alpha) \Rightarrow K\left(0; \frac{10}{3}; 5\right)$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;2)$ và $B(5;13;10)$. Có bao nhiêu điểm $I(a;b;c)$ với a, b, c là các số nguyên sao cho có mặt cầu tâm I đi qua A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) ?

A. 10.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

LỜI GIẢI

Chọn D

$$\overline{AB} = (4;8;8) \Rightarrow AB: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 5+2t \\ z = 2+2t \end{cases}$$

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(3;9;6) \Rightarrow$ Mặt phẳng trung trực của AB là

$$(\alpha): x-3+2(y-9)+2(z-6)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-33=0.$$

$$I \in (\alpha) \Rightarrow a+2b+2c-33=0 \Leftrightarrow a=33-2b-2c \Rightarrow a \text{ là số nguyên lẻ.}$$

$$\text{Gọi } J = AB \cap (Oxy) \Rightarrow J(0;3;0) \Rightarrow JA=3, JB=15.$$

Gọi C là tiếp điểm của mặt cầu và $(Oxy) \Rightarrow C(a;b;0)$.

$$\text{Ta có: } JA \cdot JB = JC^2 \Rightarrow JC^2 = 45 \Rightarrow C \text{ thuộc đường tròn tâm } (J, 3\sqrt{5}).$$

$$\text{Xét trong mặt phẳng } (Oxy), \text{ phương trình của } (J, 3\sqrt{5}): a^2 + (b-3)^2 = 45 \Rightarrow a^2 \leq 45.$$

Do $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và a lẻ nên ta có

$$a^2 = 1 \Rightarrow (b-3)^2 = 44 \text{ (loại).}$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow (b-3)^2 = 36 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow (b-3)^2 = 20 \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy có 4 bộ } (a;b;c) \text{ thỏa mãn. Vậy bán kính mặt cầu } (S) \text{ là } R = \frac{KM}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, cho cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt cầu

$(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ chứa d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại hai điểm A và B . Gọi I là tâm của mặt cầu (S) . Giá trị $\cos AIB$ bằng

A. $\frac{3}{5}$.

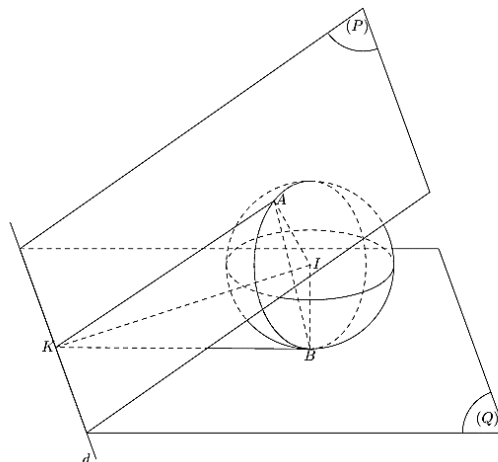
B. $\frac{1}{9}$.

C. $-\frac{1}{9}$.

D. $-\frac{3}{5}$

LỜI GIẢI

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;2)$ và bán kính $R=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(-1;-2;0)$ có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (1;2;1)$.

Gọi K là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (AIB) .

Ta có $\begin{cases} d \perp IA \\ d \perp IB \end{cases} \Rightarrow d \perp (AIB) \Rightarrow d \perp KI$ nên K là hình chiếu của I trên d .

$$\vec{MI} = (4;3;2); [\vec{MI}, \vec{u}_d] = (-1;-2;5).$$

$$KI = d(I, d) = \frac{[\vec{MI}, \vec{u}_d]}{|\vec{u}_d|} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (5)^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}.$$

Tam giác IBK vuông tại B có $\cos KIB = \frac{IB}{KI} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\text{Ta có } \cos AIB = \cos(2.KIB) = 2\cos^2 KIB - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{5}.$$

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $A = 2x_M - y_M + 2z_M$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị biểu thức $P = x_M + y_M + z_M$ bằng.

A. 21

B. 10

C. 9

D. 15

LỜI GIẢI

Chọn C

Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$

Vì $M \in (S)$ ta có $A = 2x_M - y_M + 2z_M = 2(x_M - 1) - (y_M - 2) + 2(z_M - 3) + 6$

$$\leq \sqrt{(2^2 + 1^2 + 2^2)} \sqrt{(x_M - 1)^2 + (y_M - 2)^2 + (z_M - 3)^2} + 6 = 3.3 + 6 = 15.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \frac{x_M - 1}{2} = \frac{y_M - 2}{-1} = \frac{z_M - 3}{2} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 + 2t \\ y_M = 2 - t \\ z_M = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Thay vào phương trình } (S) \text{ ta được: } 4t^2 + t^2 + 4t^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \text{ (L)}.$$

Do đó $M(3;1;5)$ và $P = x_M + y_M + z_M = 3 + 1 + 5 = 9$.

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.

$$A = 2x_M - y_M + 2z_M \Leftrightarrow 2x_M - y_M + 2z_M - A = 0 \Rightarrow M \in \text{mp}(P): 2x - y + 2z - A = 0.$$

$$\text{mà } M \in (S) \text{ nên ta có } d(I, (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|6 - A|}{3} \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq A \leq 15$$

Vậy $\max A = 15$ khi $M = \Delta \cap (P)$, trong đó Δ là đường thẳng đi qua I và $\Delta \perp (P): 2x - y + 2z - 15 = 0$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}; M \in \Delta \Rightarrow M(1 + 2t; 2 - t; 3 + 2t) \in (P)$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(3 + 2t) - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3;1;5)$$

$$\text{Vậy } P = x_M + y_M + z_M = 3 + 1 + 5 = 9$$

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và tọa độ hai điểm $A(-1;1;1), B(0;2;1)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó.

LỜI GIẢI

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1;0)$. Suy ra phương trình đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}.$$

Gọi M là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) .

Tọa độ M là nghiệm hệ phương trình
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1;3;1).$$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-2;-2;0) \Rightarrow MA = 2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{MB} = (-1;-1;0) \Rightarrow MB = \sqrt{2}$.

Khi đó MC là tiếp tuyến của mặt cầu (S) .

Theo tính chất của phương tích ta có $MA \cdot MB = MC^2 \Leftrightarrow MC^2 = 4 \Rightarrow MC = 2$

Do đó tập hợp điểm C là đường tròn tâm M có bán kính 2.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu (S) . Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $K(2;1;1)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

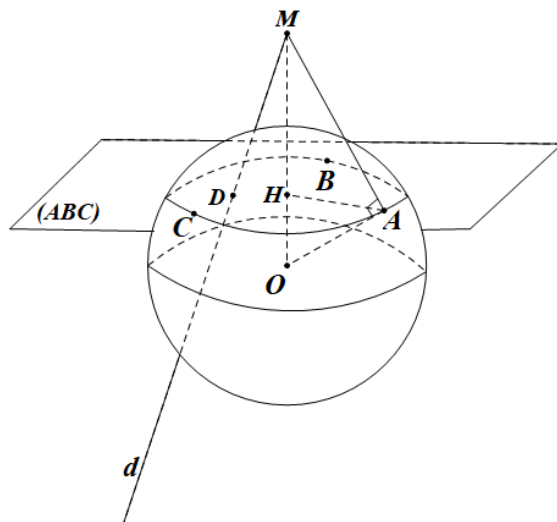
A. 18.

B. 2.

C. 6.

D. 9.

LỜI GIẢI



Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 1$. Xét tọa độ tiếp điểm $A(x; y; z)$.

MA là tiếp tuyến của mặt cầu (S) tại $A \Rightarrow MA^2 = MO^2 - R^2$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1.$$

Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + z_0 \cdot z - 1 = 0.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) qua các tiếp điểm A, B, C là:

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + z_0 \cdot z - 1 = 0.$$

Mà mặt phẳng (ABC) qua điểm $K(2;1;1) \Rightarrow 2x_0 + y_0 + z_0 - 1 = 0 (*)$.

$$\text{Do } M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2-t \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} x_0 = 1+t \\ y_0 = 1+t \\ z_0 = 2-t \end{cases}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} x_0 = 1+t \\ y_0 = 1+t \\ z_0 = 2-t \end{cases} \text{ vào } (*) \text{ ta được } 2(1+t) + 1+t + 2-t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(-1; -1; 4)$$

$$\text{Vậy } T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + (4)^2 = 18.$$

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 10 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(2; 0; -4)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc đoạn AB sao cho luôn tồn tại hai mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{6}$ tiếp xúc mặt phẳng (P) , đồng thời tiếp xúc với đoạn AB tại M . Gọi $T = [m; n]$ là tập giá trị của biểu thức $25a^2 + b^2 + 2c^2$. Tổng $m+n$ bằng

A. $\frac{1340}{19}$.

B. 140.

C. $\frac{12371}{76}$.

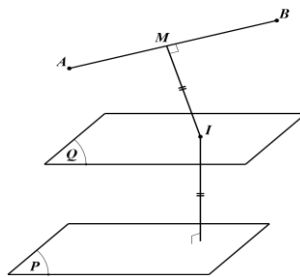
D. 86.

LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -6)$, nên phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 2-6t \end{cases}$

Mặt khác, hai điểm A và B cùng phía với mặt phẳng (P) . Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) sao cho $d((P), (Q)) = \sqrt{6}$ ở vị trí như hình vẽ.



Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) là: $x + y - 2z + 4 = 0$.

Ta có: M thuộc đoạn thẳng AB , suy ra $M(1+t; -1+t; 2-6t)$, với $t \in [0; 1]$ (*).

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm của mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó: $\begin{cases} I \in (Q) \\ \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \\ IM = \sqrt{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z + 4 = 0 \\ 1(1+t-x) + 1(-1+t-y) - 6(2-6t-z) = 0 \\ (1+t-x)^2 + (-1+t-y)^2 + (2-6t-z)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 19t = 0 \\ z = \frac{-19t+4}{2} (1) \\ (x-1-t)^2 + (y+1-t)^2 = \frac{24-49t^2}{4} (2) \end{cases}.$$

Chủ đề 11: Phương trình mặt cầu

Tồn tại hai mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Hệ (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24 - 49t > 0 \\ \frac{|1+t-1+t+19t|}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{24-49t^2}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 - 49t^2 > 0 \\ t^2 < \frac{24}{931} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{24}{931}} < t < \sqrt{\frac{24}{931}}.$$

Giao với (*), ta được: $t \in \left[0; \sqrt{\frac{24}{931}}\right)$.

Ta có: $25a^2 + b^2 + 2c^2 = 25(1+t)^2 + (-1+t)^2 + 2(2-6t)^2 = 98t^2 + 34$.

Xét hàm số $f(t) = 98t^2 + 34$ trên $\left[0; \sqrt{\frac{24}{931}}\right)$, có $f'(t) = 196t > 0, \forall t \in \left[0; \sqrt{\frac{24}{931}}\right)$.

Suy ra: tập giá trị $T = \left[f(0); f\left(\sqrt{\frac{24}{931}}\right)\right) \Rightarrow T = \left[34; \frac{694}{19}\right) \Rightarrow m = 34, n = \frac{694}{19}$.

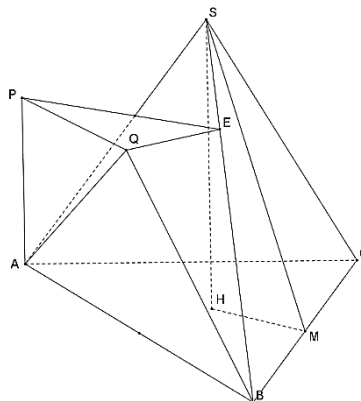
Vậy $m+n = \frac{1340}{19}$.

CÂU 8. Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tọa độ đỉnh $S(6; -2; 3)$, thể tích $V = 18$ và $AB = a$ ($a < 7$). Đường thẳng BC có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc cạnh SB . Khi đó bán kính của mặt cầu (S) thuộc khoảng nào sau đây?

A. (3;4). B. (5;6). C. (2;3). D. (3;4).

LỜI GIẢI

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC thì $SM = d(S, BC) = \sqrt{29}$.

Gọi H là tâm của ΔABC đều có cạnh bằng a thì $HM = \frac{1}{3}.AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Áp dụng định lý Pytago cho ΔAHM vuông tại H :

$$SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{29 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{29 - \frac{a^2}{12}}$$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là 18 nên ta có:

$$\frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \sqrt{29 - \frac{a^2}{12}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 18 \Rightarrow a^2 = 24 \Rightarrow a = 2\sqrt{6} \text{ (do } a < 7 \text{)}.$$

Cách 1:

Gọi P là tâm của (S) , Q là hình chiếu của P lên mặt phẳng (SAB) và E là hình chiếu của P lên đường

thẳng SB .

Do (S) tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc cạnh SB nên BA, BS là hai tiếp tuyến của (S) , suy ra $\angle QAB = \angle QEB = 90^\circ$.

Gọi R là bán kính của (S) .

$$\text{Xét tam giác } APQ \text{ vuông tại } Q: PA = \frac{QA}{\sin \angle APQ} \Rightarrow R = \frac{QA}{\sin((\angle ABC), (\angle SAB))}. \quad (1)$$

Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên ta có: $((\angle ABC), (\angle SAB)) = ((\angle ABC), (\angle SBC)) = \angle SMH$.

$$\text{Xét tam giác } SHM \text{ vuông tại } H: \sin \angle SMH = \frac{SH}{SM} = \frac{\sqrt{29 - \frac{(2\sqrt{6})^2}{12}}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{29}}. \quad (2)$$

Ta có $\triangle SAB = \triangle SBC$ nên

$$\cos \angle ABS = \cos \angle CBS = \cos \angle MBS = \frac{MB}{SB} = \frac{MB}{\sqrt{SM^2 + MB^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{29 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{35}}.$$

Xét tam giác QAB vuông tại A :

$$QA = AB \cdot \tan \angle ABQ = AB \cdot \tan \frac{\angle ABS}{2} = AB \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \angle ABS}{1 + \cos \angle ABS}} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{35}}}{1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{35}}}} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{35} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} + \sqrt{6}}}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } R = \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{35} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} + \sqrt{6}}}}{\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{29}}} = \frac{2\sqrt{70} - 4\sqrt{3}}{3} \approx 3,27 \in (3; 4).$$

Cách 2:

$$\text{Tọa độ } M \text{ thỏa hệ } \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \\ 1(x-6) + 2(y+2) + 1(z-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1; 1).$$

$$\text{Tọa độ } B, C \text{ thỏa hệ } \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) \in \{(1; -1; 0), (3; 3; 2)\}.$$

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A nên không mất tính tổng quát ta chọn $B(1; -1; 0), C(3; 3; 2)$.

Có 2 mặt phẳng (α) chứa đường thẳng BC và thỏa $d(S, (\alpha)) = SH = 3\sqrt{3}$, ta chọn 1 mặt phẳng có phương trình $(\alpha): x - y + z - 2 = 0$ suy ra $H(3; 1; 0)$. Vì H là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra $A(5; 1; -2)$.

Gọi P là tâm của (S) suy ra $P = (5+t; 1-t; -2+t)$.

Ta có $\overrightarrow{BP} = (4+t; 2-t; t-2)$, $\overrightarrow{BS} = (5; -1; 3)$, $[\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BS}] = (4-2t; 2t-22; 4t-14)$.

$$\text{Gọi } R \text{ là bán kính của } (S), \text{ ta có } R = PA = d(P, SB) = \frac{[\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BS}]}{SB} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{70}}{3\sqrt{3}} \\ t = -\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{70}}{3\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Vậy có 2 mặt cầu cần tìm thỏa yêu cầu bài toán, chúng có bán kính lần lượt là

$$R = \sqrt{3}|t| = \frac{2\sqrt{70} - 4\sqrt{3}}{3} \approx 3,27 \in (3; 4) \text{ hay } R = \sqrt{3}|t| = \frac{2\sqrt{70} + 4\sqrt{3}}{3} \approx 7,88$$

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 6z - 59 = 0$, đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 5 + 2t \\ z = 4 - 4t \end{cases}. \text{ Một mặt phẳng } (P) \text{ chứa đường thẳng } \Delta \text{ và luôn cắt mặt cầu } (S) \text{ theo giao tuyến là một}$$

đường tròn (C) . Biết rằng khối nón có đường tròn đáy trùng với (C) và có đỉnh $N \in (S)$ có thể tích lớn nhất. Lúc đó phương trình của mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz - 1 = 0$ với a, b, c là các số thực dương.

Tính tổng $T = a + b + c$

A. $\frac{11}{52}$.

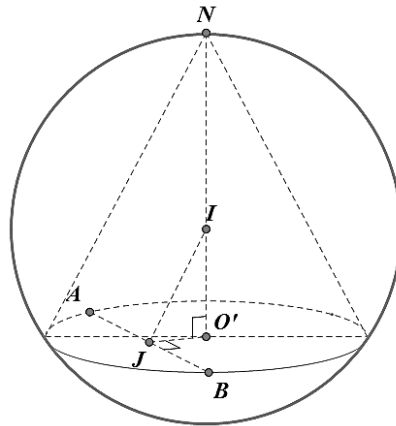
B. $\frac{17}{52}$.

C. $\frac{15}{52}$.

D. $\frac{21}{52}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm và bán kính lần lượt là $I(3; -2; 3), R = 9$. Đường thẳng Δ có một chỉ phương $\vec{u} = (5; 2; -4)$ và đi qua điểm $M(1; 5; 4)$, khi đó $\overrightarrow{IM} = (-2; 7; 1)$ suy ra khoảng cách

$$d_1 = d(I, \Delta) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{IM}]}{|\vec{u}|} = 3\sqrt{6} \text{ do đó } \Delta \text{ cắt } (S) \text{ tại hai điểm } A, B, \text{ gọi } J \text{ là trung điểm } AB.$$

Ta có $\frac{AB^2}{4} + d_1^2 = R^2 \Leftrightarrow AB = 6\sqrt{3}$, lúc đó mọi mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ đều cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính r , gọi $d_2 = d(I, (P))$ ta có $d_2^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow r^2 = R^2 - d_2^2$ và ta luôn có $0 \leq d_2 \leq d_1$.

Ta xét một hình nón có đường tròn đáy là (C) và có đỉnh là N thuộc mặt cầu khi đó ta có $NO' \perp (P)$ với O' là tâm của đường tròn (C) , đồng thời NO' là đường cao của hình nón.

$$\text{Ta có } NO' = R + d_2, \text{ thể tích khối nón tương ứng là } V_N = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot NO' = \frac{1}{3} \pi \cdot (R^2 - d_2^2) (R + d_2).$$

$$\text{đặt } f(d_2) = (R^2 - d_2^2)(R + d_2) \text{ hay } f(d_2) = -d_2^3 - R \cdot d_2^2 + R^2 \cdot d_2 + R^3, (0 \leq d_2 \leq d_1).$$

Ta có $f'(d_2) = -3d_2^2 - 2R.d_2 + R^2$ do đó $f'(d_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d_2 = -R \\ d_2 = \frac{R}{3} \end{cases} \Rightarrow d_2 = \frac{R}{3}$ (do $\frac{R}{3} < d_1$).

Bảng biến thiên của hàm số $f(d_2)$ như sau:

d_2	$-\infty$	0	$\frac{R}{3}$	d_1	$+\infty$
$f'(d_2)$		+	0	-	
$f(d_2)$			$\frac{32R^3}{27}$		

R^3 $9(R + 3\sqrt{6})$

Từ đây ta có $V_{\max} = \frac{1}{3}\pi \cdot f\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81} \Leftrightarrow d_2 = \frac{R}{3} = 3$.

Ta lại có phương trình của $\Delta: \frac{x-1}{5} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{-4}$ nên mọi mặt phẳng (P) chứa Δ đều có phương trình dạng $2mx + (2n-5m)y + nz + 23m - 14n = 0$ trong đó $m, n \in \mathbb{R}, m^2 + n^2 > 0$.

Ta có $d_2 = 3 \Leftrightarrow \frac{|6m - 2(2n-5m) + 3n + 23m - 14n|}{\sqrt{4m^2 + n^2 + (2n-5m)^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|13m - 5n|}{\sqrt{29m^2 - 20mn + 5n^2}} = 1$

$\Leftrightarrow 169m^2 - 130mn + 25n^2 = 29m^2 - 20mn + 5n^2 \Leftrightarrow 140m^2 - 110mn + 20n^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2}n \\ m = \frac{2}{7}n \end{cases}$

Trường hợp 1: Chọn $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$ ta có $(P_1): 2x - y + 2z - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}z - 1 = 0$. (loại)

Trường hợp 2: Chọn $\begin{cases} m=2 \\ n=7 \end{cases}$ ta có $(P_2): 4x + 4y + 7z - 52 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{52}x + \frac{4}{52}y + \frac{7}{52}z - 1 = 0$.

Theo giả thiết $a, b, c \in (0; +\infty)$ nên phương trình của $(P): \frac{4}{52}x + \frac{4}{52}y + \frac{7}{52}z - 1 = 0$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng.

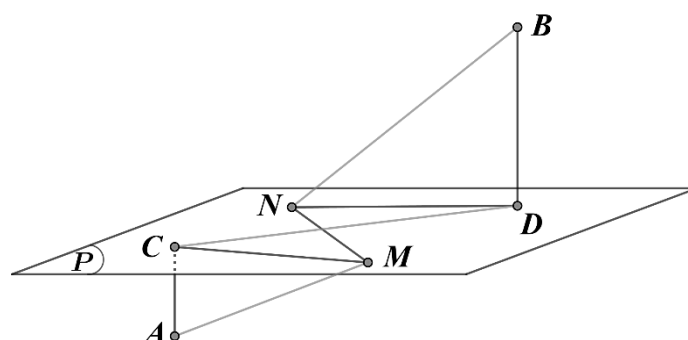
A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

LỜI GIẢI



Chủ đề 11: Phương trình mặt cầu

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Vậy $(P): x = 0$ ((P) chính là mặt phẳng (Oyz)).

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P) . Suy ra $AC = 1$, $BD = 2$, $CD = 5$.

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$, ta được

$$\begin{aligned} AM + BN &= \sqrt{AC^2 + CM^2} + \sqrt{BD^2 + DN^2} \\ &\geq \sqrt{(AC + BD)^2 + (CM + DN)^2} \geq \sqrt{9 + (CM + DN)^2} \end{aligned}$$

Lại có $CM + MN + ND \geq CD = 5$ nên suy ra $CM + ND \geq 4$. Do đó $AM + BN \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{AC}{CM} = \frac{BD}{DN}$, tức là $M\left(0; \frac{4}{5}; \frac{16}{15}\right)$ và $N\left(0; \frac{7}{5}; \frac{28}{15}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là 5.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0;0;1)$, $B(0;2;0)$, $C(3;0;0)$. Gọi H , G lần lượt là trực tâm, trọng tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm G và đi qua H .

- A. $(x+1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{362}{441}$. B. $(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{362}{441}$.
- C. $(x+1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{362}{21}$. D. $(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{362}{21}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

- A. -4 . B. -1 . C. -2 . D. -3 .

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tứ diện $OABC$ có tọa độ đỉnh $A(m;m;0)$, $B(0;m;m)$, $C(m;0;m)$. Tìm m để tứ diện $OABC$ có bán kính mặt cầu (S) nội tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó viết phương trình mặt cầu (S) .

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{3}$. B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{3}$.
- C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{3}$. D. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Gọi (S) là mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S) .

- A. $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 1$. B. $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$.
- C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{3}$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$, $D(x;y;z)$, $x > 0$. Tìm tọa độ điểm D để tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều. Khi đó viết phương trình mặt cầu (S) nội tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = 3$. B. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = 3$.
- C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $A(0;0;0)$, $B(-2;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;6)$ có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 56$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ và hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z+2=0$, $(Q): x+2y-2z+14=0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ ($a < 0$) thuộc d , đồng thời (S) tiếp xúc với (P) và (Q) . Bán kính R của (S) bằng

A. 5.

B. 10.

C. 2.

D. 9.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-4)$, $B(1;-1;-2)$ và mặt cầu $(S): (x+5)^2 + (y+6)^2 + (z-1)^2 = 9$. Phương trình mặt cầu (S') đối xứng với mặt cầu (S) qua đường thẳng AB là

A. $(x+7)^2 + \left(y - \frac{32}{5}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{5}\right)^2 = 9$.

B. $(x+27)^2 + \left(y - \frac{61}{10}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{5}\right)^2 = 9$.

C. $(x-7)^2 + \left(y + \frac{32}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{5}\right)^2 = 9$.

D. $(x-27)^2 + \left(y + \frac{61}{10}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{5}\right)^2 = 9$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0;6;0)$ và điểm N di động trên mặt phẳng (Oxz) (N khác O). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên MN và K là trung điểm của ON . Biết rằng HK luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, điểm nào sau đây thuộc mặt cầu đó?

A. $P_1(1;5;-2)$.

B. $P_2(1;2;-4)$.

C. $P_3(1;2;-2)$.

D. $P_4(1;4;-1)$.

Câu 10: Trong hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$ và $(S_2): (x-10)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 400$ và mặt phẳng $(P): 4x-3y+mz+22=0$. Có bao nhiêu số nguyên m để mặt phẳng (P) cắt 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ theo giao tuyến là hai đường tròn không có tiếp tuyến chung?

A. Vô số.

B. 5.

C. 11.

D. 6.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I nằm trên tia Ox , đi qua $A(1;2;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x+2y+3z-16=0$. Khoảng cách từ I đến điểm $M(2;-4;2)$ là:

A. $IM = \sqrt{5}$.

B. $IM = 3\sqrt{5}$.

C. $IM = 2\sqrt{5}$.

D. $IM = 4\sqrt{5}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+4=0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến này có bán kính r bằng

A. $r = 3$.

B. $r = 5$.

C. $r = 4$.

D. $r = 1$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt có phương trình $y-m=0$ và $x+z-3=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) . Tích các giá trị mà m có thể nhận được bằng:

A. -5.

B. -11.

C. -10.

D. -8.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;4)$ và $B(-1;3;2)$. Gọi (S) là mặt cầu có phương trình: $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25$. Tập hợp các điểm M thuộc mặt cầu (S) và cách đều hai điểm A và B là đường tròn có bán kính bằng

- A. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;-1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): 2x - y + 2z + 5 = 0$. Có bao nhiêu mặt cầu (S) đi qua A và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) , (Q) ?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. Vô số.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(4;3;4)$ song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

- A. $2x + 2y + z - 18 = 0$. B. $2x - y - 2z - 10 = 0$.
C. $2x + y + 2z - 19 = 0$. D. $2x - y - 2z + 3 = 0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A . Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

- A. $7\sqrt{2}$. B. $12\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $5\sqrt{2}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\angle AMB = 90^\circ$?

- A. 4. B. 3 C. 2. D. 1.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ được các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) . Biết các tiếp điểm luôn thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $ax + by + cz - 5 = 0$. Khi đó $a + b + 2c$ nhận giá trị bằng

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$, mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M , vuông góc với mặt phẳng (α) đồng thời cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào sau đây?

- A. $A(-3;1;7)$. B. $B(-1;3;1)$. C. $C(5;2;9)$. D. $D(1;-9;2)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 2z + 6 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2z = 0$. Có bao nhiêu điểm M trên (P) với M có các tọa độ nguyên sao cho có ít nhất

hai tiếp tuyến của (S) qua M và vuông góc với nhau

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 7.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+3=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn và hình tròn giới hạn bởi đường tròn này có diện tích bằng 2π . Viết phương trình mặt cầu (S)

A. $(S):x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

B. $(S):x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$.

C. $(S):x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$.

D. $(S):x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$, có các đỉnh $S(1;2;-2)$, $A(-1;0;-2)$, $C(3;-4;0)$. Tam giác ABC vuông tại B có độ dài cạnh $BC=3\sqrt{3}$ đồng thời mặt phẳng (ABC) vuông góc với (SAC) . Gọi I là trung điểm của AC . Mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (SBC) có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{17}$.

B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{72}{17}$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{18}{11}$.

D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=\frac{72}{11}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;8;2)$, $N(9;-7;23)$ và mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$. Mặt phẳng $(P):x+by+cz+d=0$ đi qua điểm M và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ N đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khi đó tổng $b-c+d$ có giá trị bằng

A. $b+c+d=2$.

B. $b+c+d=-1$.

C. $b+c+d=-5$.

D. $b+c+d=4$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=5$ và điểm $M(1;4;-2)$. Xét điểm N thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu (S) . Khi đó điểm N luôn nằm trên mặt phẳng có phương trình là:

A. $2x+y+z+2=0$.

B. $x+y+z+1=0$.

C. $2x+y+2z+2=0$.

D. $2x+y+2z-2=0$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$ và từ hai điểm $A(2;-1;-1)$, $B(-1;-1;-2)$ kẻ tiếp tuyến AM, BM đến mặt cầu (S) . Có bao nhiêu điểm C thuộc mặt phẳng Oxz , mà từ C khi kẻ đường tiếp tuyến CM thì tam giác ABC vuông tại A .

A. 24

B. 58

C. 6

D. 2

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2z-3=0$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ được các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) . Biết các tiếp điểm luôn thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $ax+by+cz-5=0$. Khi đó $a+b+2c$ nhận giá trị bằng

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

D. $3x - y + 5z - 45 = 0$.

D. $\frac{10}{3}$.

D. 7 .

D. $\sqrt{3}$.

D. $R=2$.

D. 14.

441 | Facebook tác giả: Phan Nhật Linh - SĐT: 0817.098.716

A. $\frac{\sqrt{28}}{2}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) tiếp xúc với (S) lần lượt tại M và N sao cho $MN = 6$ và $\widehat{MIN} > 90^\circ$. Biết hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ có phương trình $\frac{x-15}{6} = \frac{y+4}{-8} = \frac{z-1}{-2}$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 37$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 37$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 90$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-2)$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi 8π . Tìm bán kính của mặt cầu (T) chứa đường tròn (C) và (T) đi qua $M(1;1;1)$.

A. $R = 5$.

B. $R = \frac{\sqrt{265}}{4}$.

C. $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

D. $R = 4$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$, điểm A nằm trên đường

thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2 \end{cases}$ và nằm ngoài mặt cầu (S) . Từ A kẻ các tiếp tuyến đến mặt

cầu (S) . Gọi (P_m) là mặt phẳng chứa các tiếp điểm, biết mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng d cố định. Phương trình đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3^2$, mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P) . Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 4$. Gọi $\vec{u} = (1; b; c)$, $(c > 0)$ là một véc tơ chỉ phương của Δ , tổng $b + c$ bằng

A. 1.

B. 45.

C. 3.

D. -1.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q . Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$.

B. $R = 6$.

C. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$.

D. $R = 4$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ

$\vec{u} = (1; -1; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_1 = (1; 1; \sqrt{3})$. B. $\vec{u}_2 = (1; 1; \sqrt{6})$. C. $\vec{u}_3 = (1; 1; 0)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 1; -\sqrt{3})$.

Câu 41: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Biết đường thẳng } d \text{ cắt mặt cầu } (S) \text{ tại hai điểm phân biệt } A, B \text{ sao cho}$$

$AB = 8$. Mặt cầu (S) có phương trình là

- A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 12 = 0$. B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.
C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 1 = 0$. D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 12 = 0$.

Câu 42: Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ là}$$

- A. $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 4$. B. $(x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$.
C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 4$. D. $(x-4)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 16$.

Câu 43: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{9} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{4}. \text{ Có bao nhiêu điểm } M \text{ thuộc tia } Oy, \text{ với tung độ là số nguyên, mà từ}$$

M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d ?

- A. 40. B. 46. C. 44. D. 84.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases}$. Biết khi a

thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tìm bán kính của mặt cầu đó.

- A. $6\sqrt{3}$. B. $5\sqrt{3}$. C. $7\sqrt{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Câu 45: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2; 1; 3), B(6; 5; 5)$. Xét khối nón (N) ngoại tiếp mặt cầu đường kính AB có B là tâm đường tròn đáy khối nón. Gọi S là đỉnh của khối nón (N) . Khi thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất thì mặt phẳng qua đỉnh S và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Tính $T = b + c + d$.

- A. $T = 24$. B. $T = 12$. C. $T = 36$. D. $T = 18$.

Câu 46: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 36$ và điểm A nằm trên đường

thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 \\ z = 1 - t \end{cases}$ và nằm ngoài mặt cầu (S) . Từ A kẻ các tiếp tuyến đến mặt

cầu (S) , gọi (P) là mặt phẳng chứa các tiếp điểm, biết (P) luôn đi qua một đường thẳng d cố định. Phương trình đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = -3 \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 2 - t \end{cases}$

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục Oz , với cao độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với đường thẳng d ?

A. 13. B. 11. C. 12. D. 17.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Xét điểm M di động trên d , từ M kẻ 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến (S) với A, B, C là các tiếp điểm. Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có bán kính nhỏ nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{15}$ D. $\frac{3}{4}$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0), B(-3;1;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$. Xét khối nón (N) có đỉnh có tọa độ nguyên thuộc đường thẳng Δ và ngoại tiếp mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích nhỏ nhất thì tung độ đỉnh của khối nón (N) bằng

A. 1. B. 2. C. -1. D. 11.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-3)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$. Mặt phẳng (α) thay đổi, luôn đi qua A và song song với Δ . Trong trường hợp (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì (α) có phương trình $ax + by + cz - 3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = 3a - 2b - 2c$.

A. 12. B. 9. C. 4. D. $\frac{9}{5}$.

Câu 51: Từ điểm A bất kì thuộc đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$, vẽ các tiếp tuyến đến mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Khi đó, các tiếp điểm thuộc đường tròn (C) . Gọi (N) là hình nón có đỉnh A và đáy là hình tròn (C) . Biết thể tích của khối nón (N) nhỏ hơn 3π . Có bao nhiêu điểm A có cao độ là số nguyên?

A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 29$, hai điểm $A(0;0;4), B(6;-2;6)$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y+8}{-1} = \frac{z-4}{2}$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S)

sao cho $\angle AMB = 90^\circ$ và khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d ngắn nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$

- A. $T = 24$. B. $T = 25$. C. $T = 16$. D. $T = 12$.

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Tính số đo góc tạo bởi các mặt phẳng đi qua d và tiếp xúc với mặt cầu (S) ta được kết quả là

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$ tâm I , đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -1 + t \end{cases}$ và M di động trên d sao cho từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) . Biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn nằm trên mặt phẳng (α) . Khoảng cách lớn nhất từ I đến mặt phẳng (α) bằng

- A. 1. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{7}{3}$. D. 2.

Câu 55: Cho hai mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 36$ và $(S'): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 81$. Gọi d là đường thẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên và cách điểm $M(4;-1;-7)$ một khoảng lớn nhất. Gọi $E(m;n;p)$ là giao điểm của d với mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 17 = 0$. Biểu thức $T = m + n + p$ có giá trị bằng

- A. $T = 81$. B. $T = 92$. C. $T = 79$. D. $T = 88$.

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-1)x + 2(m-2)y - mz + m - 4 = 0 \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2t \\ y = 4 - mt \\ z = m^2 + 1 - 2t \end{cases}.$$

Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m sao cho từ mọi điểm trên d đều vẽ được hai tiếp tuyến đến mặt cầu (S)

- A. 3. B. 0. C. 1 D. 2.

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với hai đường thẳng d_1, d_2 và (P) là mặt phẳng chứa d_1 , song song với d_2 . Gọi I là tâm mặt cầu (S) , A là điểm thay

đôi trên mặt phẳng (P) sao cho $IA = \frac{5\sqrt{2}}{12}$. Tập hợp tất cả các giao điểm của đoạn thẳng AI nằm trên một đường tròn có diện tích bằng:

- A. $\frac{4}{25}\pi$. B. $\frac{2}{25}\pi$. C. $\frac{8}{25}\pi$. D. $\frac{1}{25}\pi$.

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c), (a > 0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu $(S), (A, B, C$ là các tiếp điểm) và $AMB = 60^\circ, BMC = 90^\circ, CMA = 120^\circ$. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

- A. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{173}{9}$. B. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$. C. $a^3 + b^3 + c^3 = -8$. D. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{23}{9}$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $y = m$ và $x + z - 3 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) . Tích tất cả các giá trị mà m có thể nhận được bằng

- A. -11 . B. -10 . C. -5 . D. -8 .

Câu 60: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 18$ và điểm $K(4; -4; 4)$. Kẻ tiếp tuyến KM đến mặt cầu (S) ($M \in (S)$). Khoảng cách lớn nhất từ M đến đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{-4}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{14}}{7} + \sqrt{3}$. B. $\frac{2\sqrt{14}}{7} + 2\sqrt{3}$. C. $\frac{2\sqrt{14}}{7}$. D. $2\sqrt{3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Giả sử $H(x; y; z)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{AH} = (x; y; z-1), \overrightarrow{BC} = (3; -2; 0), \overrightarrow{BH} = (x; y-2; z), \overrightarrow{AC} = (3; 0; -1), [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}] = (-2; -3; -6).$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3x - z = 0 \\ 2x + 3y + 6z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{36}{49} \\ y = \frac{18}{49} \\ x = \frac{12}{49} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{12}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49}\right) \Rightarrow HG = \frac{\sqrt{362}}{21}.$$

Khi đó mặt cầu tâm G và đi qua H có phương trình là $(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{362}{441}$.

Câu 2: Chọn B

Gọi $D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DA} = (x+2; y; z); \overrightarrow{DB} = (x; y+2; z); \overrightarrow{DC} = (x; y; z+2)$.

Vì DA, DB, DC đôi một vuông góc nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) + y(y+2) + z^2 = 0 \\ x(x+2) + y^2 + z(z+2) = 0 \\ x^2 + y(y+2) + z(z+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = -\frac{4}{3}.$$

$I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+2)^2 + c^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c+2)^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = \left(a + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(c + \frac{4}{3}\right)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = c \\ 4a + 4 = 8a + \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = -\frac{1}{3}. \text{ Vậy } a + b + c = -1.$$

Câu 3: Chọn A

Vì $OABC$ là tứ diện đều, nên tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện trùng với trọng tâm của tứ diện

ta có $I\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$. G là trọng tâm tam giác ABC , $G\left(\frac{2m}{3}, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{3}\right) \Rightarrow IG = \frac{m\sqrt{3}}{6}$

Theo bài $IG = \frac{m\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m = 2$. Khi đó tâm $I(1, 1, 1)$.

$$\text{Phương trình mặt cầu } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{3}.$$

Câu 4: Chọn C

Vì $ABCD$ là tứ diện đều, nên tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện trùng với trọng tâm của tứ diện $ABCD$, do đó $I(1,1,1)$.

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC, G\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow IG = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu cần tìm: } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{3}$$

Câu 5: Chọn C

Tứ diện $ABCD$ đều $\Leftrightarrow DA = DB = DC = AB$. Gọi $D(x, y, z) \Rightarrow x = y = z$.

$$AB = \sqrt{18}. \text{ Do đó } \begin{cases} x = y = z = -1 \\ x = y = z = 3 \end{cases}, \Rightarrow D(3, 3, 3)$$

Vì $ABCD$ là tứ diện đều, nên tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện trùng với trọng tâm của tứ diện, ta có $I\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC, G(1, 1, 1) \Rightarrow IG = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Khi đó tâm } I\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu cần tìm: } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Câu 6: Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0).$$

Vì $A, B, C, D \in (S)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} d = 0 \\ 4 + 4a + d = 0 \\ 16 - 8b + d = 0 \\ 36 - 12c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0).$$

Do đó phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z = 0$.

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) = 14.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14.$$

Câu 7: Chọn D

$$\text{Ta có } d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \text{ Bài ra } I \in d \Rightarrow I(2t-1; 1-2t; t+1).$$

Ta có (S) tiếp xúc với (P) và $(Q) \Leftrightarrow d(I, (P)) = d(I, (Q)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t-1-2(1-2t)+2(t+1)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|2t-1+2(1-2t)-2(t+1)+14|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = R.$$

$$\text{Do đó } |8t+1| = |-4t+13| \Leftrightarrow \begin{cases} 8t+1 = -4t+13 \\ 8t+1 = 4t-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow I(1;-1;2) \\ t=-\frac{7}{2} \Rightarrow I(-8;8-\frac{5}{2}) \end{cases}$$

$$\text{Bài ra } x_I < 0 \Rightarrow I(-8;8-\frac{5}{2}) \text{ thỏa mãn } \Rightarrow R = d(I, (P)) = \frac{|-8-2.8+2.\frac{-5}{2}+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 9.$$

Câu 8: Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(-5;-6;1)$, bán kính $R=3$.

Đường thẳng AB qua $A(1;3;-4)$ có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (0;-4;2)$.

$$\text{Khi đó, phương trình đường thẳng } AB \text{ là } \begin{cases} x=1 \\ y=3-4t \\ z=-4+2t \end{cases}.$$

Gọi H là hình chiếu của I lên $AB \Rightarrow H(1;3-4t;-4+2t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (6;9-4t;-5+2t)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 0.6 - 4(9-4t) + 2(-5+2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{23}{10} \Rightarrow H(1;-\frac{31}{5};\frac{3}{5}).$$

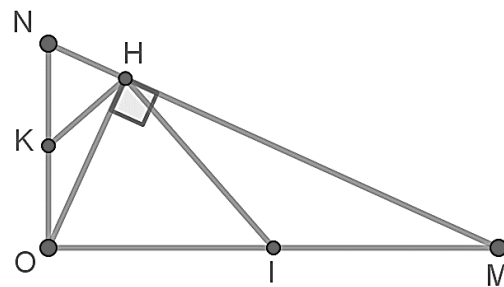
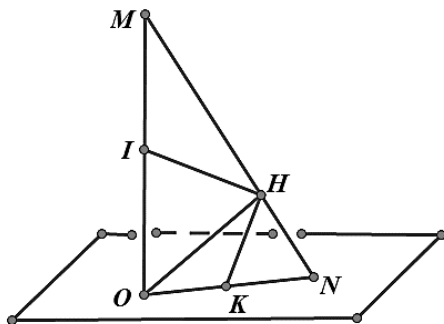
Gọi J là tâm của mặt cầu (S') . Do (S) và (S') đối xứng với nhau qua AB nên (S') có bán

$$\text{kính } R' = R \text{ và } H \text{ là trung điểm của } IJ \Rightarrow J(7;-\frac{32}{5};\frac{1}{5}).$$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S') có tâm $J(7;-\frac{32}{5};\frac{1}{5})$, bán kính $R=3$ là:

$$(S'): (x-7)^2 + \left(y+\frac{32}{5}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{5}\right)^2 = 9.$$

Câu 9: Chọn A



Ta có: $O \in mp(Oxz)$ và $\overrightarrow{OM} = (0;6;0) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \perp mp(Oxz)$. Mà $N \in (Oxz) \Rightarrow ON \subset (Oxz)$.
 $\Rightarrow OM \perp ON$.

Suy ra tam giác OMN vuông tại O . Gọi I là trung điểm của $OM \Rightarrow I(0;3;0)$.

$$\text{Do } OH \perp MN \Rightarrow \begin{cases} OHI = IOH \\ OHK = KOH \end{cases}$$

$$\Rightarrow IHK = OHI + KHO = IOH + KOH = IOK = MON = 90^\circ \Rightarrow HK \perp IH$$

$$\Rightarrow HK \text{ luôn tiếp xúc với mặt cầu } (S) \text{ tâm } I(0;3;0), \text{ đường kính } OM \Rightarrow R = \frac{OM}{2} = 3.$$

Suy ra phương trình mặt cầu $(S): x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. Do đó, điểm $P_1 \in (S)$.

Câu 10: Chọn D

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;-3;2), R_1 = 7$; Mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(10;9;2), R_2 = 20$;

Ta có $I_1I_2 = 15$, mà mặt phẳng (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (4;-3;m)$

Do $\overrightarrow{I_1I_2} \cdot \vec{n} = 0$ nên I_1I_2 song song hoặc nằm trong (P) .

Bán kính đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu là

$$S = \sqrt{p(p-15)(p-21)(p-20)} = \frac{1}{2}15.R, p = 21$$

$$\rightarrow R = 28/5$$

Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến là $3x+4y+30=0$ (Q)

$$d(I_1;Q) = 21/5; d(I_2;Q) = 96/5 \Rightarrow d(I_1;Q) + I_1I_2 = d(I_2;Q)$$

Mặt phẳng (P) cắt 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ theo giao tuyến là hai đường tròn không có tiếp tuyến chung, trong đó đường tròn nhỏ ở trong đường tròn lớn khi

$$\frac{28}{5} < d(I_1;(P)) < 7 \Leftrightarrow \frac{28}{5} < \frac{|2m+35|}{\sqrt{m^2+25}} < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 45m^2 - 140m > 0 \\ \frac{684}{25}m^2 - 140m - 441 < 0 \end{cases}$$

Do m nguyên nên m là: $-2; -1; 4; 5; 6; 7$. Vậy có 6 giá trị m .

Câu 11: Chọn C

Gọi tọa độ tâm I nằm trên tia Ox là: $I(a;0;0)$ với $a > 0$.

Vì mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;2;-3)$ nên có bán kính $R = IA = \sqrt{(a-1)^2 + 2^2 + (-3)^2}$.

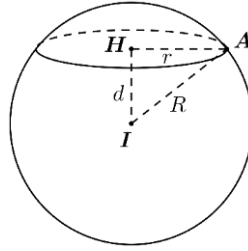
Mặt khác mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (α) nên $d(I,(\alpha)) = R$

$$\Rightarrow \frac{|a-16|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \sqrt{(a-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} \Leftrightarrow (a-16)^2 = 14((a-1)^2 + 13)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 32a + 256 = 14(a^2 - 2a + 14) \Leftrightarrow -13a^2 - 4a + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{30}{13} \end{cases}$$

Vì $a > 0$ nên $a = 2$. Khi đó $I(2;0;0) \Rightarrow IM = \sqrt{(2-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

Câu 12: Chọn C



Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$ có tâm $I(1; -1; -2)$ và bán kính $R = 5$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng

$$d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) - 2 \cdot (-2) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 3.$$

Vậy đường tròn giao tuyến có bán kính bằng $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Câu 13: Chọn B

Ta có: $(S): (x-2)^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = 36$ có tâm $I(2; -5; 1)$, bán kính $R = 6$.

Mặt phẳng $y - m = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$; Mặt phẳng $x + z - 3 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1; 0; 1)$.

Giao tuyến của 2 mặt phẳng $y - m = 0$ và $x + z - 3 = 0$ là đường thẳng Δ đi qua $M(0; m; 3)$, nhận $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (1; 0; -1)$ là vector chỉ phương.

Khi đó điều kiện để giao tuyến Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) là: $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|\vec{u}_\Delta; \overrightarrow{IM}|}{|\vec{u}_\Delta|} = 6$.

Với $\overrightarrow{IM} = (-2; m+5; 2) \Rightarrow [\vec{u}_\Delta; \overrightarrow{IM}] = (m+5; 0; m+5)$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2(m+5)^2}}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow (m+5)^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -11 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2(m+5)^2}}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow |m+5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -11 \end{cases}$$

Vậy tích các giá trị m có thể nhận được bằng -11 .

Câu 14: Chọn C

Vì điểm M cách đều hai điểm A và B nên M thuộc mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB . Gọi E là trung điểm AB thì $E(0; 2; 3)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua $E(0; 2; 3)$ và có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}(-2; 2; -2)$ nên có phương trình: $-2x + 2(y-2) - 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 1 = 0$.

Mà M thuộc mặt cầu (S) nên M thuộc đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 5$. Ta có: $d(I; (\alpha)) = \frac{|1 - 3 + 2 - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Nên bán kính đường tròn giao tuyến bằng $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$

Câu 15: Chọn C

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S) .

Ta có (S) tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I, (P)) = d(I, (Q)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a-b+2c-1|}{3} = \frac{|2a-b+2c+5|}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b+2c-1 = 2a-b+2c+5 \\ 2a-b+2c-1 = -2a+b-2c-5 \end{cases} \Leftrightarrow 2a-b+2c+2=0.$$

Suy ra, I thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+2=0$.

Khi đó mặt cầu (S) có bán kính $R = d(I, (P)) = \frac{|2a-b+2c-1|}{3} = 1$.

Mặt cầu (S) đi qua A nên $IA = R = 1$, do đó I thuộc mặt cầu (T) tâm A bán kính $R_T = 1$.

Ta có $d(A, (\alpha)) = 1 = R_T$.

Do đó (T) và (α) có đúng một điểm chung, tức là có duy nhất một điểm chung I thỏa mãn.

Vậy có duy nhất một mặt cầu thỏa mãn.

Câu 16: Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P): a(x-4) + b(y-3) + c(z-4) = 0$.

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-3; 2; 2)$.

Do $\Delta // (P)$ nên $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -3a + 2b + 2c = 0 \Leftrightarrow 3a = 2(b+c)$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|-3a-b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 3$

$\Leftrightarrow 9(a^2+b^2+c^2) = (3a+b+c)^2$ (*), thay $3a = 2(b+c)$ vào (*), ta được:

$$4(b+c)^2 + 9(b^2+c^2) = (2a+2b+b+c)^2 \Leftrightarrow 4(b+c)^2 + 9(b^2+c^2) = 9(b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 - 5bc + 2c^2 = 0 \Leftrightarrow (2b-c)(b-2c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=c \\ b=2c \end{cases}.$$

TH1: $2b-c=0$, ta chọn $b=1 \Rightarrow c=2, a=2 \Rightarrow (P): 2x+y+2z-19=0$ (thỏa mãn).

TH2: $b-2c=0$, ta chọn $c=1 \Rightarrow b=2, a=2 \Rightarrow (P): 2x+2y+z-18=0$ (loại do $\Delta \subset (P)$).

Câu 17: Chọn B

Gọi $I(a; b; c), r$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) nên ta có

$$r = d(I, (P)) = \frac{|2ma + (m^2+1)b + (m^2-1)c - 10|}{(m^2+1)\sqrt{2}} = \frac{|(b+c)m^2 + 2ma + b - c - 10|}{(m^2+1)\sqrt{2}}$$

$$|(b+c)m^2 + 2ma + b - c - 10| = r(m^2+1)\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c-r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c - r\sqrt{2} - 10 = 0 & (1) \\ (b+c+r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c + r\sqrt{2} - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

TH1: $(b+c-r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c - r\sqrt{2} - 10 = 0$ (1)

Do m thay đổi vẫn có mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) nên yêu cầu bài toán trở thành tìm điều

kiện a, b, c sao cho (1) không phụ thuộc vào m . Do đó (1) luôn đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c-r\sqrt{2}=0 \\ a=0 \\ b-c-r\sqrt{2}-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=r\sqrt{2}+5 \\ a=0 \\ c=-5 \end{cases}$$

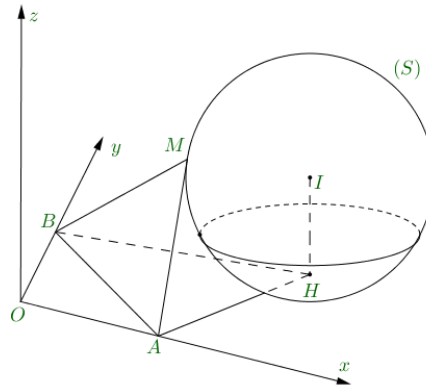
Suy ra $I(0; 5+r\sqrt{2}; -5) \Rightarrow (S): x^2 + (y-5-r\sqrt{2})^2 + (z+5)^2 = r^2$.

$$\text{Lại có } A \in (S) \text{ nên suy ra: } 4 + (11-5-r\sqrt{2})^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 - 12\sqrt{2}r + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2} \\ r = 10\sqrt{2} \end{cases}$$

TH2: $(b+c+r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c + r\sqrt{2} - 10 = 0$ làm tương tự TH1 (trường hợp này không thỏa đề bài)

Tóm lại: Khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A và có tổng bán kính là: $12\sqrt{2}$ suy ra.

Câu 18: Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 1)$, bán kính $R = 1$.

Ta có điểm $H(3; 2; 0)$ là hình chiếu của I trên (Oxy) .

Ta có $d(I, (Oxy)) = 1 = R$ nên (S) tiếp xúc với (Oxy) tại H .

Do đó BM, BH là các tiếp tuyến kẻ từ B ; AM, AH là các tiếp tuyến kẻ từ A tới (S) .

Suy ra: $BM = BH$, $AM = AH$. Do đó: $\triangle ABH = \triangle ABM$ (c.c.c). Suy ra: $\angle AHB = \angle AMB = 90^\circ$.

Từ đó ta có: $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = -3(a-3) - 2(b-2) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 13$. Kết hợp với a, b là các số nguyên dương ta được: $(a; b) = (1; 5), (3; 2)$.

Do đó có 2 cặp điểm A, B và qua mỗi cặp điểm đó có 2 tiếp diện với (S) , trong đó có một tiếp diện là (Oxy) , tiếp diện còn lại cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B và tiếp xúc với (S) tại M thỏa mãn $\angle AMB = 90^\circ$.

Vậy có 2 điểm M thuộc mặt cầu (S) thỏa mãn.

Câu 19: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = 2$.

Có $\overrightarrow{IA} = (2; 2; 1) \Rightarrow IA = 3$. Kẻ một tiếp tuyến AB đến mặt cầu (S) , với B là tiếp điểm.

Ta có tam giác ABI vuông tại B nên ta có $AB = \sqrt{IA^2 - IB^2} = \sqrt{5}$.

Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABI .

Ta có: $IB^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IB^2}{IA} = \frac{4}{3} \Rightarrow IH = \frac{4}{9} \cdot IA$.

$$\text{Từ suy ra được } \overrightarrow{IH} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x-0 = \frac{4}{9} \cdot 2 \\ y-0 = \frac{4}{9} \cdot 2 \\ z-1 = \frac{4}{9} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{9} \\ y = \frac{8}{9} \\ z = \frac{13}{9} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right).$$

Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng IA nên nhận $\overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$ làm vector pháp tuyến. Hơn nữa mặt phẳng (α) đi qua điểm H .

Vậy (α) có phương trình: $2 \cdot \left(x - \frac{8}{9}\right) + 2 \cdot \left(y - \frac{8}{9}\right) + 1 \cdot \left(z - \frac{13}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0$.

Suy ra $a + b + 2c = 6$.

Câu 20: Chọn D

Gọi VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (A; B; C)$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

(P) đi qua điểm $M(1; 2; -1)$ nên phương trình của (P) là

$$A(x-1) + B(y-2) + C(z+1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz - A - 2B + C = 0.$$

Do $(P) \perp (\alpha)$ nên $\vec{n}(P) \cdot \vec{n}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A + 2B - C = 0 \Leftrightarrow C = A + 2B$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và bán kính $R = 5$.

(P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I, (P))$ lớn nhất.

$$\text{Ta có } d(I, (P)) = \frac{|A - 2B + C - A - 2B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2C - 4B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + (A + 2B)^2}} = \frac{|2A|}{\sqrt{2A^2 + 5B^2 + 4AB}}.$$

$$A = 0: d(I, (P)) = 0.$$

$$A \neq 0: d(I, (P)) = \frac{2}{\sqrt{2 + 5\left(\frac{B}{A}\right)^2 + 4\frac{B}{A}}} = \frac{2}{\sqrt{5\left(\frac{B}{A}\right)^2 + 4\frac{B}{A} + 2}} = \frac{2}{\sqrt{5\left(\frac{B}{A} - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{6}{5}}} \leq \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{B}{A} = \frac{2}{5}$. Vậy $\max d(I, (P)) = \frac{\sqrt{30}}{3}$ khi $\frac{B}{A} = \frac{2}{5}$.

Chọn $B = 2, A = 5 \Rightarrow C = 9 \Rightarrow$ Phương trình (P) là: $5x + 2y + 9z - 5 = 0$.

Thay tọa độ các điểm A, B, C, D vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy mặt phẳng (P) đi qua điểm $D(1; -9; 2)$.

Câu 21: Chọn D

Tâm và bán kính mặt cầu là: $I(3; 1; -1), R = \sqrt{5}$. Gọi $M(2a; b; a) \in (P)$

Nhận xét:

Nếu $IM < R$ thì không có tiếp tuyến của (S) qua M .

Nếu $IM = R$ thì tập hợp các tiếp tuyến của (S) qua M là một mặt phẳng nên có vô số cặp tiếp tuyến của (S) qua M .

Nếu $IM > R$ thì tập hợp các tiếp tuyến của (S) qua M là một mặt nón tròn xoay đỉnh M ngoại tiếp (S) , mỗi đường sinh là một tiếp tuyến. Để tồn tại cặp đường sinh vuông góc với nhau thì góc ở đỉnh của mặt nón phải lớn hơn hoặc bằng 90° suy ra $IM \leq R\sqrt{2}$.

Kết luận: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow R \leq IM \leq R\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 5 \leq IM^2 \leq 10 \Leftrightarrow 5 \leq (2a-3)^2 + (b-1)^2 + (a+1)^2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq 5(a-1)^2 + 5 + (b-1)^2 \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq 5(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \\ (b-1)^2 = 1 \\ (b-1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ b = 0, b = 2 \\ b = -1, b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)^2 = 1 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy có 7 điểm M thỏa mãn bài toán

Câu 22: Chọn A

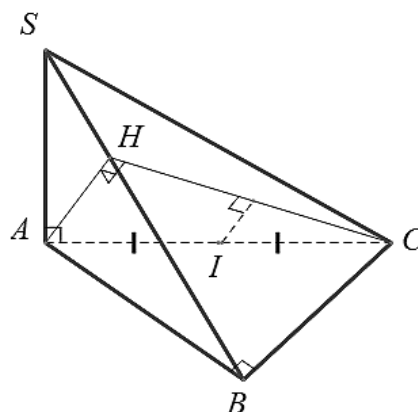
Gọi bán kính đường tròn giao tuyến là r . Khi đó ta có diện tích $S = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{S}{\pi} = 2$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là: $d(I, (P)) = \frac{|0-4-2+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 1$.

Bán kính mặt cầu là: $R = \sqrt{r^2 + d^2(I, (P))} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu dạng (S) : $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Câu 23: Chọn A



Tam giác SAC có $\overrightarrow{AC} = (4; -4; 2)$, $\overrightarrow{AS} = (2; 2; 0)$, thì $AC = 6$, $SA = 2\sqrt{2}$ và $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = 0$, suy ra $SA \perp AC$. Mà $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SA \perp (ABC)$. Đoạn thẳng AC có trung điểm

$$I(1; -2; -1).$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I tiếp xúc với (SBC) có bán kính bằng

$$R = d(I, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)).$$

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB). \text{ Kê } AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

$$\text{Trong tam giác } SAB \text{ vuông tại } A: AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{SA \cdot \sqrt{AC^2 - BC^2}}{SB} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{72}{17}}$$

$$\text{Suy ra } R = \frac{1}{2}AH = \sqrt{\frac{18}{17}}. \text{ Vậy, mặt cầu } (S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \frac{18}{17}.$$

Câu 24: Chọn C

$$\text{Vì } M \in (P) \text{ nên } 8b + 2c + d = 0 \Leftrightarrow d = -8b - 2c \Rightarrow (P): x + by + cz - 8b - 2c = 0$$

$$\text{Do } (P) \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \text{ nên } d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|-11b + 5c + 5|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có: } d(N; (P)) = \frac{|9 - 15b + 21c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = \frac{|(-11b + 5c + 5) + 4(-b + 4c + 1)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow d(N; (P)) \leq \frac{|(-11b + 5c + 5)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} + \frac{|4(-b + 4c + 1)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} + \frac{|4(-b + 4c + 1)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}}$$

$$\leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{(1^2 + 4^2 + 1^2)(b^2 + c^2 + 1^2)}}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 18\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } d(N; (P))_{\max} = 18\sqrt{2} \text{ khi } \begin{cases} (-11b + 5c + 5) \cdot (-b + 4c + 1) > 0 \\ \frac{b}{-1} = \frac{c}{4} = \frac{1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow b = -1; c = 4.$$

$$\text{Từ đây có } b = -1; c = 4; d = 0 \Rightarrow b - c + d = -5.$$

Câu 25: Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; -4)$.

$$N(x_0; y_0; z_0) \in (S) \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2 + (y_0 - 3)^2 + (z_0 + 4)^2 = 5 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = -2x_0 + 6y_0 - 8z_0 - 21$$

$$\overrightarrow{IN} = (x_0 + 1; y_0 - 3; z_0 + 4), \overrightarrow{MN} = (x_0 - 1; y_0 - 4; z_0 + 2).$$

$$\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)(x_0 - 1) + (y_0 - 3)(y_0 - 4) + (z_0 + 4)(z_0 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 7y_0 + 6z_0 + 19 = 0 \Leftrightarrow -2x_0 - y_0 - 2z_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 + 2z_0 + 2 = 0.$$

$$\text{Suy ra } N \in (P): 2x + y + 2z + 2 = 0.$$

Câu 26: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 2)$ $R = 2$. Ta có $C \in Oxz \Rightarrow C(a; 0; b) \Rightarrow \overrightarrow{AC}(a - 2; 1; b + 1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến AM, BM , khi đó (P) cũng sẽ đi qua điểm C .

$$\overrightarrow{AB}(-3;0;-1).$$

Ta có tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow b = -3a + 5 \Rightarrow \overrightarrow{AC}(a-2;1;-3a+6).$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (P) , ta có $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; -10b + 20; -3).$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A có phương trình là:

$$1.(x-2) + (-10b+20).(y+1) - 3.(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + (-10m+20)y - 3z - 10m + 15 = 0$$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên: $d(I, (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-10m+20-6-15m+15|}{\sqrt{1^2+(-10m+20)^2+(-3)^2}} = 2 \Leftrightarrow 400m^2 + 400m - 1140 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-5+\sqrt{310}}{10} \\ m = \frac{-5-\sqrt{310}}{10} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm C thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 27: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=2$.

Có $\overrightarrow{IA} = (2;2;1) \Rightarrow IA = 3$. Kẻ một tiếp tuyến AB đến mặt cầu (S) , với B là tiếp điểm.

Ta có tam giác ABI vuông tại B nên ta có $AB = \sqrt{IA^2 - IB^2} = \sqrt{5}$.

Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABI .

$$\text{Ta có: } IB^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IB^2}{IA} = \frac{4}{3} \Rightarrow IH = \frac{4}{9} \cdot IA.$$

$$\text{Từ suy ra được } \overrightarrow{IH} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x-0 = \frac{4}{9} \cdot 2 \\ y-0 = \frac{4}{9} \cdot 2 \\ z-1 = \frac{4}{9} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{9} \\ y = \frac{8}{9} \\ z = \frac{13}{9} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right).$$

Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng IA nên nhận $\overrightarrow{IA} = (2;2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Hơn nữa mặt phẳng (α) đi qua điểm H .

$$\text{Vậy } (\alpha) \text{ có phương trình: } 2.\left(x-\frac{8}{9}\right) + 2.\left(y-\frac{8}{9}\right) + 1.\left(z-\frac{13}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0.$$

$$\text{Suy ra } a+b+2c = 6.$$

Câu 28: Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{35}$.

Gọi $K(8;-3;8)$ là trung điểm MN , ta có K nằm ngoài mặt cầu (S) .

Ta có $\overrightarrow{IK} = (6;-2;10)$ và $\overrightarrow{MN} = (4;22;2)$; $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, suy ra $IK \perp MN$.

$$\text{Ta có } AM + AN \leq \sqrt{2(AM^2 + AN^2)} = \sqrt{2\left(2AK^2 + \frac{MN^2}{2}\right)} = \sqrt{4AK^2 + 504}$$

Suy ra $AM + AN$ lớn nhất khi $AM = AN$ và AK đạt giá trị lớn nhất.

Vì $IK \perp MN$, suy ra $AM = AN$ khi A thuộc đường thẳng IK :
$$\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 10t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Tọa độ giao điểm A của đường thẳng IK với mặt cầu (S) là
$$\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 10t \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 35 \end{cases}$$

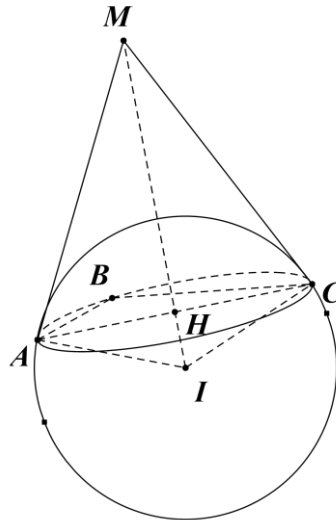
Suy ra $t = \pm \frac{1}{2}$

$A_1(5; -2; 3), A_2(-1; 0; -7)$

$A_1K = \sqrt{35}, A_2K = \sqrt{315}$. Vậy điểm A cần tìm là $A(-1; 0; -7)$.

$\overrightarrow{AI} = (3; -1; 5)$; phương trình tiếp diện tại A : $3x - y + 5z + 38 = 0$.

Câu 29: Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$, bán kính $R = 3\sqrt{3}$. Gọi $MA = MB = MC = m$.

Tam giác MAB đều $\Rightarrow AB = m$. Tam giác MBC vuông cân tại $M \Rightarrow BC = m\sqrt{2}$.

Tam giác MAC cân tại $M, \angle CMA = 120^\circ \Rightarrow AC = m\sqrt{3}$.

Ta có: $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại B .

Gọi H là trung điểm của AC , suy ra, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Vì $MA = MB = MC, IA = IB = IC$ nên M, H, I thẳng hàng.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác MAI vuông tại A , ta nhận được $MI = \frac{AI}{\sin 60^\circ} = 6$.

$M \in d \Rightarrow M(t-1; t-2; t+1) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (t-2; t-4; t+4)$.

$IM^2 = 36 \Rightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow M(-1; -2; 1) \quad (t/m) \\ t = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \quad (l) \end{cases} \Rightarrow a+b+c = -2.$

Câu 30: Chọn D

Mặt cầu (S) có $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$. Vì $M \in Oy$ nên $M(0; m; 0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng $d \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (P) là $3x + 5y - 4z - 5m = 0$.

Khi đó (P) chứa hai tiếp tuyến với mặt cầu kẻ từ M và cùng vuông góc với d .

Để tồn tại các tiếp tuyến thỏa mãn bài toán điều kiện là

$$\begin{aligned} \begin{cases} d(I, (P)) < R \\ IM > R \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|-19 - 5m|}{5\sqrt{2}} < 5 \\ \sqrt{(m+2)^2 + 10} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5m + 19| < 25\sqrt{2} \\ (m+2)^2 > 15 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-25\sqrt{2} - 19}{5} < m < \frac{25\sqrt{2} - 19}{5} \\ m > \sqrt{15} - 2 \\ m < -\sqrt{15} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{15} - 2 < m < \frac{25\sqrt{2} - 19}{5} \\ \frac{-25\sqrt{2} - 19}{5} < m < -\sqrt{15} - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì m là số nguyên nên $m \in \{2; 3; -10; \dots; -6\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 31: Chọn B

Ta có: (S) có tâm $I(2; -6; -3)$ và bán kính $R = 5$. Ta có: $\overrightarrow{OI} = (2; -6; -3) \Rightarrow OI = 7$.

Gọi H là trung điểm $MN \Rightarrow IH = \sqrt{R^2 - \frac{MN^2}{4}} = 3$.

Ta có: $OM^2 - ON^2 = -112 \Rightarrow (\overrightarrow{OM})^2 - (\overrightarrow{ON})^2 = -112 \Rightarrow (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM})^2 - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN})^2 = -112$
 $\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN})^2 = -112 \Rightarrow \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{MN} = 56$.

Ta lại có: $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{MN} = OI \cdot MN \cdot \cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{MN}) = 56 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{MN}) = 1 \Rightarrow OI // MN$.

Do $OI // MN \Rightarrow d(O; MN) = d(I; MN) = IH = 3$.

Câu 32: Chọn D

Ta có $M(x; 0; z) \in (Oxz)$, $\overrightarrow{AM} = (x - 3; -1; z - 1)$, $\overrightarrow{BM} = (x - 3; 2; z + 2)$.

Do $(MA, (Oxz)) = (MB, (Oxz))$ nên $\frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{j}|}{MA \cdot |\vec{j}|} = \frac{|\overrightarrow{MB} \cdot \vec{j}|}{MB \cdot |\vec{j}|}$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{(x-3)^2 + 1 + (z-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{(x-3)^2 + 4 + (z+2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 4 + (z+2)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + 1 + (z-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4 + z^2 + 4z + 4 = 4(x^2 - 6x + 9 + 1 + z^2 - 2z + 1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3z^2 - 18x - 12z + 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 - 6x - 4z + 9 = 0$$

Suy ra, tập hợp điểm M là đường tròn nằm trong mặt phẳng (Oxz) có tâm $I(3; 0; 2)$ và bán

kính $R = \sqrt{3^2 + 2^2 - 9} = 2$.

Câu 33: Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5$; $d(I, (P)) = 3\sqrt{3} > R$.

Vì $MN \perp (Q)$ nên đường thẳng MN có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; -2)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 1)$.

Gọi α là góc giữa MN và mặt phẳng (P) . Suy ra: $\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có: $MN = \frac{d(M, (P))}{\sin \alpha} = \sqrt{3} \cdot d(M, (P)) \leq \sqrt{3} [d(I, (P)) + R] = 9 + 5\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng $9 + 5\sqrt{3}$.

Câu 34: Chọn D

Vì $M \in d_1 \Rightarrow M(3-a; 3-2a; -2+a)$. Vì $N \in d_1 \Rightarrow N(5-3b; -1+2b; 2+b)$

Đường thẳng (Δ) nhận $\overrightarrow{MN}(2-3b+a; -4+2b+2a; 4+b-a)$ làm vtcp

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 2; 3)$.

Vì $(\Delta) \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{n}$

$$\Rightarrow \frac{2-3b+a}{1} = \frac{-4+2b+2a}{2} = \frac{4+b-a}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-6b+2a = -4+2b+2a \\ 6-9b+3a = 4+b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b = 8 \\ 10b-4a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $M(1; -1; 0); N(2; 1; 3)$. Diện tích tam giác OMN : $S_{OMN} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 35: Chọn D

Do M, N là các tiếp điểm nên $\Delta \perp (IMN)$

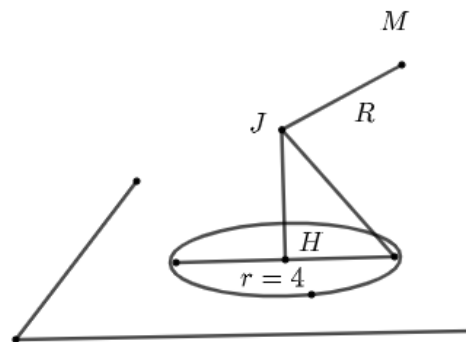
Gọi P là hình chiếu của I trên Δ ta có $P(9; 4; 3)$ và $IP = 10$

Gọi $A = MN \cap IP$ và B là trung điểm của IP ta có $BI = BM = 5$ suy ra $AB = 4$ và $IA = 1$

$$\Rightarrow R = IM = \sqrt{IA^2 + AM^2} = \sqrt{10}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 36: Chọn B



Bán kính đường tròn (C) là $r = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$. Gọi H là hình chiếu của I lên (P) .

Đường thẳng đi qua I , vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t, \\ z = -2 + t \end{cases}$

Khi đó tọa độ điểm $H = (1 + 2t; 2 + 2t; -2 + t)$.

Do $H \in (P)$ nên $2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) + (-2 + t) + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 0; -3)$.

Đường thẳng đi qua H , vuông góc với (P) chứa tâm J của mặt cầu (T) ; có phương trình là:

$$\begin{cases} x = -1 + 2m \\ y = 2m \\ z = -3 + m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R}); \text{ Tọa độ tâm } J(-1 + 2m; 2m; -3 + m).$$

Ta có $JH^2 = 9m^2$; $JM^2 = (2m - 2)^2 + (2m - 1)^2 + (m - 4)^2 = R^2$.

Vì $JH^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow 9m^2 + 16 = JM^2 \Leftrightarrow (2m - 2)^2 + (2m - 1)^2 + (m - 4)^2 = 16 + 9m^2$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{4} \Rightarrow R^2 = 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 16 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{265}}{4}.$$

Câu 37: Chọn C

Giả sử $A(1 + t; 1 + t; 2)$, A nằm ngoài mặt cầu nên mặt cầu đường kính AI tâm: $K\left(\frac{1+t}{2}; \frac{1+t}{2}; 0\right)$

có bán kính: $R = \frac{1}{2}IK = \frac{1}{2}\sqrt{2(1+t)^2 + 16}$ có phương trình là:

$$\left(x - \frac{1+t}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1+t}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{t^2 + 2t + 9}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (1+t)x - (1+t)y = 4 \quad (S')$$

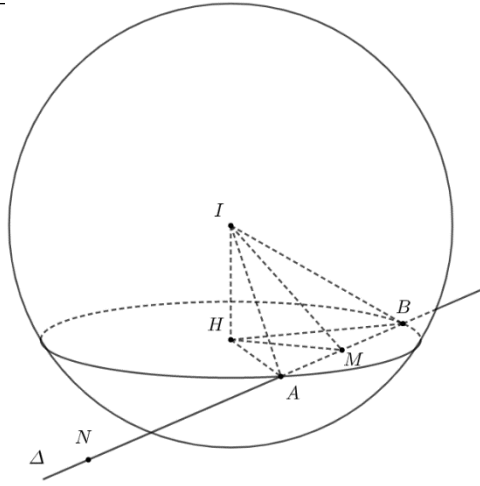
Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (P_m) khi M thuộc giao của (S) và (S')

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 - (1+t)x - (1+t)y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P_m): (1+t)x + (1+t)y + 4z - 8 = 0 \Leftrightarrow t(x + y) + x + y + 4z - 8 = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + 4z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$$

Câu 38: Chọn B



Ta có $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u} \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 1.1 - 1.b + 1.c = 0 \Leftrightarrow b = c + 1 \Rightarrow \vec{u} = (1; c + 1; c)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) , suy ra $IH \perp (P) \Rightarrow IH \perp AB$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của H lên Δ , suy ra M là trung điểm AB nên $AM = \frac{AB}{2} = 2$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp IH \\ AB \perp HM \end{cases} \Rightarrow IM \perp AB$.

Khi đó $d(I, \Delta) = IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

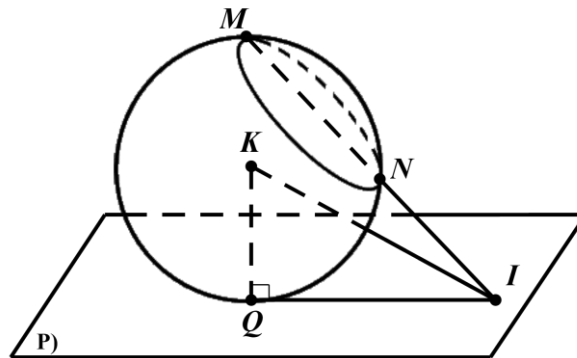
Ta có $\vec{IN} = (0; -2; -5)$ và $\vec{u} = (1; c + 1; c)$ nên $[\vec{IN}, \vec{u}] = (3c + 5; -5; 2)$.

Khi đó $d(I, \Delta) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{[\vec{IN}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(3c + 5)^2 + (-5)^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (c + 1)^2 + c^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 22 \end{cases}$.

Do $c > 0$ nên $c = 22 \Rightarrow b = 22 + 1 = 23$.

Vậy $b + c = 23 + 22 = 45$.

Câu 39: Chọn B



Đường thẳng MN có phương trình là: $MN: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Gọi $I = MN \cap (P)$ khi đó tọa độ điểm I ứng với t thỏa mãn:

$1 + t + 1 + t - 1 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow I(3; 3; 3) \Rightarrow IM = 2\sqrt{3}, IN = 6\sqrt{3}$.

Do mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với đường thẳng IQ tại điểm Q nên ta có:

$$IQ^2 = IM \cdot IN = KI^2 - R^2 \Rightarrow IQ^2 = IM \cdot IN = 36 \Leftrightarrow IQ = 6$$

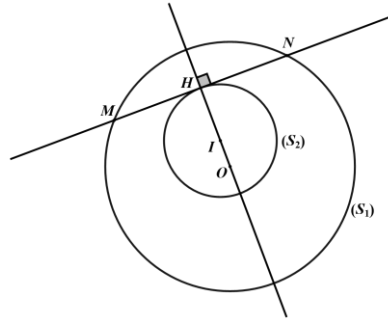
Vậy Q luôn thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = 6$.

Câu 40: Chọn C

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1 = 5$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R_2 = 2$.

Có $OI = 1 < R_1 - R_2$ nên (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1) .



Giả sử d tiếp xúc với (S_2) tại H và cắt mặt cầu (S_1) tại M, N . Gọi K là trung điểm MN .

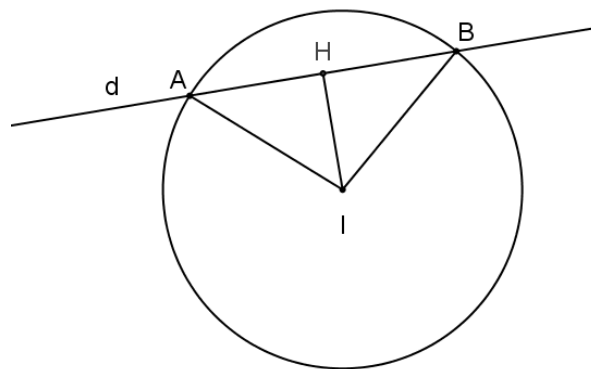
Khi đó $IH = R_2 = 2$ và $OH \geq OK$.

Theo giả thiết $MN = 8 \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow OK = \sqrt{R_1^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Có $OI = 1, IH = 2 \Rightarrow OK = OI + IH \geq OH \geq OK$. Do đó $OH = OK$, suy ra $H \equiv K$, tức d vuông góc với đường thẳng OI .

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1; -1; 0)$ và vuông góc với $\vec{OI} = (0; 0; 1)$ nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = [\vec{OI}, \vec{u}] = (1; 1; 0)$.

Câu 41: Chọn A



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow IH \perp AB, AH = 4$.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(4;3;3)$ và có 1 vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

Ta có: $\vec{IM} = (6; 0; 3) \Rightarrow [\vec{IM}, \vec{u}] = (-3; -6; 6)$

$$\Rightarrow IH = d(I; d) = \frac{[\vec{IM}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3.$$

Chủ đề 11: Phương trình mặt cầu

Khi đó: $R^2 = IA^2 = IH^2 + AH^2 = 25 \Rightarrow R = 5$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$ và bán kính $R = 5$ nên có phương trình là:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25 \text{ hay } (S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 12 = 0.$$

Câu 42: Chọn A

Gọi I là tâm và r là bán kính của mặt cầu $(S) \Rightarrow I(3+t; 2t; -1+t)$

Vì (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên ta có

$$|-1+t| = |3+t| = |2t| = r$$

$$|-1+t| = |3+t| \Leftrightarrow \begin{cases} -1+t = 3+t \text{ (vô nghiệm)} \\ -1+t = -3-t \Leftrightarrow t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$$

Với $t = -1 \Rightarrow |2t| = |-1+t| \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow r = 2$ và $I(2; -2; -2)$

$$\text{Phương trình mặt cầu } (S): (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 4.$$

Câu 43: Chọn A

Mặt cầu (S) có $I(1; 2; -2)$, bán kính $R = 5$.

Vì $M \in Oy$ nên $M(0; m; 0)$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng $d \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng

$$(P) \text{ là } 9x + y + 4z - m = 0.$$

Khi đó (P) chứa hai tiếp tuyến với mặt cầu kẻ từ M và cùng vuông góc với d

Để tồn tại các tiếp tuyến thỏa mãn bài toán điều kiện là

$$\begin{cases} d(I, (P)) < R \\ IM > R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|3-m|}{7\sqrt{2}} < 5 \\ \sqrt{(m-2)^2 + 5} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3-m| < 35\sqrt{2} \\ (m-2)^2 > 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -35\sqrt{2} + 3 < m < 35\sqrt{2} + 3 \\ m > 2 + 2\sqrt{5} \\ m < 2 - 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2\sqrt{5} < m < 35\sqrt{2} + 3 \\ -35\sqrt{2} + 3 < m < 2 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{7; 8; \dots; 46\}$. Vậy có 40 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 44: Chọn B

Đường thẳng Δ luôn đi qua điểm $A(1; -5; -1)$ và luôn nằm trên mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$.

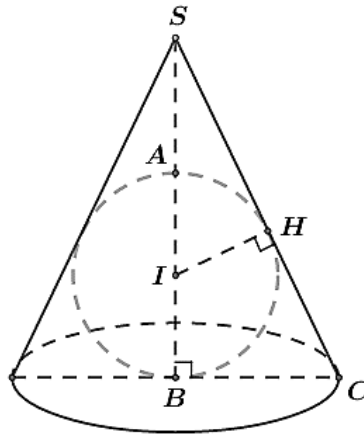
Mặt cầu cố định tiếp xúc với đường thẳng Δ suy ra mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A .

Mặt cầu cần tìm có tâm I thuộc đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$\text{Phương trình } d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -5+t \\ z = -1-t \end{cases} \Rightarrow I(1+t; -5+t; -1-t).$$

$$\text{Mà } IA = IM \Leftrightarrow t^2 + t^2 + t^2 = t^2 + (t-6)^2 + (t+2)^2 \Leftrightarrow t = 5.$$

$$\text{Vậy } I(6;0;-6) \Rightarrow R = IM = 5\sqrt{3}.$$

Câu 45: Chọn B

Gọi chiều cao khối chóp $SB = h$ ($h > 0$) và bán kính đường tròn đáy $BC = R$.

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4;4;2) \Rightarrow AB = 6.$$

Xét mặt cầu có đường kính AB : ta có bán kính là $r = \frac{AB}{2} = 3$ và tâm $I(4;3;4)$.

$$\text{Vì } \triangle SHI \text{ đồng dạng với } \triangle SBC \Leftrightarrow \frac{SI}{SC} = \frac{IH}{BC} \Leftrightarrow \frac{h-3}{\sqrt{h^2+R^2}} = \frac{3}{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(h-3)^2}{h^2+R^2} = \frac{9}{R^2} \Leftrightarrow R^2 \left[(h-3)^2 - 9 \right] = 9h^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{9h^2}{h^2-6h} \quad (2).$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có: } V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9h^2}{h^2-6h} \cdot h = 3\pi \cdot \frac{h^2}{h-6} \text{ với } h > 6.$$

$$\text{Xét } V' = 3\pi \cdot \frac{2h(h-6)-h^2}{(h-6)^2} = 3\pi \cdot \frac{h^2-12h}{(h-6)^2}.$$

Ta được bảng biến thiên như sau:

h	$-\infty$	0	6	12	$+\infty$
V'		+	0	-	+
V					

Vậy $V_{\min}$ khi $SB = h = 12 \Rightarrow A$ là trung điểm của $SB \Rightarrow S(-2;-3;1)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua S , vuông góc với AB nên có 1 VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (4;4;2)$ hay $\vec{n} = (2;2;1)$. Nên ta có $(P): 2(x+2) + 2(y+3) + z - 1 = 0 \Leftrightarrow (P): 2x + 2y + z + 9 = 0$

$$\text{Suy ra: } T = b + c + d = 2 + 1 + 9 = 12.$$

Câu 46: Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-3;0)$; $R = 6$. Gọi $A(1-a;3;1-a) \in \Delta$.

$$M(x; y; z) \text{ là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ } A \text{ đến } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (S) \\ AM^2 = AI^2 - IM^2 = AI^2 - 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 36 & (1) \\ (x-(1-a))^2 + (y-3)^2 + (z-(1-a))^2 = (1-a)^2 + 6^2 + (1-a)^2 - 36 & (2) \end{cases}$$

Lấy $-(1-a)x + 6y + (1-a)z = 18$ là mặt phẳng chứa các tiếp điểm.

Ta có $(1-a)x + 6y + (1-a)z = 18, \forall a \Leftrightarrow -a(x+z) + x + 6y + z - 18 = 0, \forall a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+6y+z-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow d: \begin{cases} x=t \\ y=3 \\ z=-t \end{cases}$$

Câu 47: Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -2)$, bán kính $R=4$. Vì $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; m)$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d

$$\Rightarrow (P): 2x + y + z - m = 0.$$

Khi đó (P) chứa các tiếp tuyến từ M tới (S) và vuông góc với d .

$$\text{Để các tiếp tuyến tồn tại: } \begin{cases} d(I, (P)) < R \\ IM > R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|3-m|}{\sqrt{6}} < 4 \\ \sqrt{5+(m+2)^2} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\sqrt{6}+3 < m < 4\sqrt{6}+3 \\ m < -2-\sqrt{11} \\ m > -2+\sqrt{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-4\sqrt{6}+3; -2-\sqrt{11}) \cup (-2+\sqrt{11}; 4\sqrt{6}+3)$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; -2; 3; \dots; 12\}$. Vậy có 12 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 48: Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 2)$, $R=\sqrt{3}$.

Gọi $M(m; 2m; m) \in d$ và tiếp điểm là $A(x; y; z)$, ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} A \in (S) \\ MA^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - R^2 = m^2 + (2m)^2 + (m-2)^2 - 3 = 6m^2 - 4m + 1. \end{cases}$$

$$\text{Tương đương } \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3 \\ (x-m)^2 + (y-2m)^2 + (z-m)^2 = 6m^2 - 4m + 1. \end{cases}$$

Trừ theo về hai phương trình của hệ ta có: $2mx + 4my + (2m-4)z + 4 - 6m^2 = 2 - 6m^2 + 4m$

$$\Leftrightarrow mx + 2my + (m-2)z - 2m + 1 = 0$$

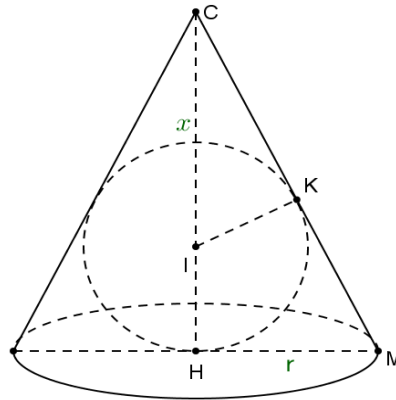
Vậy mặt phẳng $(ABC): mx + 2my + (m-2)z - 2m + 1 = 0$.

Đường tròn ngoại tiếp ΔABC là đường tròn giao tuyến của (S) và (ABC) có bán kính xác định

$$\text{bởi công thức: } r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (ABC))} = \sqrt{3 - \frac{9}{6m^2 - 4m + 4}} = \sqrt{3 - \frac{9}{6\left(m - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}}} \geq \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = \frac{1}{3}$ hay $M\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 49: Chọn B



Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(-1;2;2)$, bán kính 3.

Gọi H, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đáy của (N) , C là đỉnh của (N) .

Khi đó C, I, H thẳng hàng (I nằm giữa C, H), $IH = IK = 3$

Đặt $CI = x$. Ta có $\triangle CIK$ đồng dạng $\triangle CMH$ nên $\frac{IK}{MH} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow r = HM = \frac{IK \cdot CH}{CK} = \frac{3(x+3)}{\sqrt{x^2-9}}$

$$V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3(x+3)}{\sqrt{x^2-9}} \right)^2 \cdot (x+3) = 3\pi \frac{(x+3)^2}{x-3}$$

$$V_{(N)} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+3)^2}{x-3} = \frac{x^2+6x+9}{x-3} \text{ nhỏ nhất } (x > 3).$$

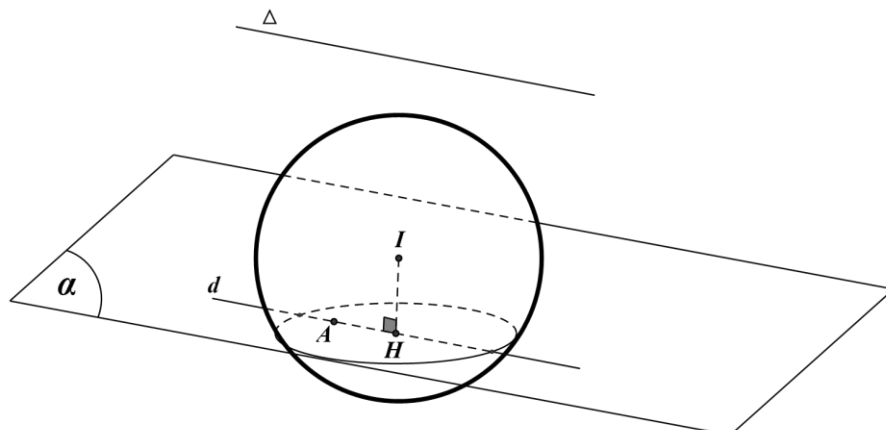
$$f'(x) = \frac{x^2-6x-27}{x-3}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 9 \end{cases}.$$

$$V_{(N)} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = 9, \text{ khi đó } IC = 9 \text{ nên } C \in (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 81$$

$$\text{Mặt khác } C \in \Delta \text{ nên } C(-1;2;11) \text{ hoặc } C\left(\frac{43}{11}; -\frac{32}{11}; -\frac{41}{11}\right).$$

Vì C có tọa độ nguyên nên $C(-1;2;11)$. Vậy Khi (N) có thể tích nhỏ nhất thì tung độ đỉnh của khối nón (N) bằng 2.

Câu 50: Chọn C



Chủ đề 11: Phương trình mặt cầu

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;1)$, bán kính $R = 5$.

Để thấy A nằm trong mặt cầu (S) nên (α) luôn cắt (S) theo một đường tròn (C) .

Đường thẳng d đi qua A và song song với Δ có phương trình là $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên $d \Rightarrow H(3;-1;-1)$.

Gọi r là bán kính của đường tròn (C) , ta có: $r^2 = R^2 - [d(I,(\alpha))]^2 \geq R^2 - IH^2 = 16 \Leftrightarrow r \geq 4$.

Chu vi của (C) nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(\alpha)) = IH \Leftrightarrow H$ là hình chiếu của I trên (α) .

Khi đó, (α) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IH}(2;-1;-2)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$2x - y - 2z - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 3 = 0.$$

Từ đó, suy ra: $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = -\frac{2}{3} \Rightarrow 3a - 2b - 2c = 4$.

Cách 2. Vì $(\alpha) // \Delta$ nên $a - 2b + 2c = 0$ (1).

Vì $A(2;1;-3) \in (\alpha)$ nên $2a + b - 3c - 3 = 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a = \frac{4c+6}{5}, b = \frac{7c+3}{5}$.

Điểm A nằm bên trong mặt cầu (S) nên mặt phẳng (α) luôn cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{25 - h^2}$, với $h = d(I(1;0;1), mp(\alpha))$.

$$\text{Ta có } h = \frac{|a+c-3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{c^2-2c+1}{10c^2+10c+5}}.$$

Với mọi $c \in \mathbb{R}$ ta có $(3c+2)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9c^2 + 12c + 4 \geq 0 \Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 \leq 10c^2 + 10c + 5 \quad (3).$$

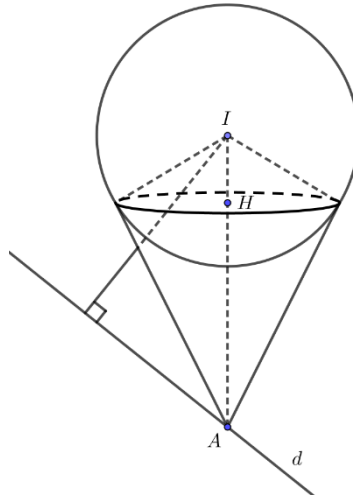
Mà $10c^2 + 10c + 5 > 0, \forall c \in \mathbb{R}$, nên $(3) \Leftrightarrow \frac{c^2 - 2c + 1}{10c^2 + 10c + 5} \leq 1$. Dẫn tới $h \leq 3$, từ đó

$$r = \sqrt{25 - h^2} \geq 4, \text{ dấu "}" xảy ra khi } c = -\frac{2}{3}.$$

Vậy, đường tròn giao tuyến của (S) và (α) có chu vi nhỏ nhất khi

$$c = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow S = 4.$$

Câu 51: Chọn A



(S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=2$

$$d: \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases} \text{ có VTCP là } \vec{u}=(2;-1;2) \text{ và đi qua } B(0;1;-1)$$

$$\vec{IB}=(-1;-1;-4); d(I;d)=\frac{\left| \left[\vec{u}; \vec{IB} \right] \right|}{|\vec{u}|}=3>R$$

$\Rightarrow d$ và (S) không có điểm chung $\Rightarrow$ Luôn tồn tại hình nón (N)

Gọi H là tâm và r là bán kính của đường tròn (C) ($0 < r < 2$)

$$IH=\sqrt{4-r^2}$$

$$R^2=IH.IA \Rightarrow IA=\frac{4}{\sqrt{4-r^2}}$$

$$V_{(N)} < 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2.AH < 3\pi \Leftrightarrow r^2.\left(\frac{4}{\sqrt{4-r^2}}-\sqrt{4-r^2}\right) < 9$$

$$\Leftrightarrow r^4 < 9\sqrt{4-r^2} \Leftrightarrow r^8+81r^2-324 < 0$$

Đặt $t=r^2$, bất phương trình trở thành:

$$t^4+81t-324 < 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^3+3t^2+108t+108) < 0$$

$$\Leftrightarrow t-3 < 0 \text{ (Vì } t > 0) \Rightarrow r^2 < 3 \Rightarrow IA < 4$$

$$\text{Vì } A \in d \text{ nên } A(2t;1-t;-1+2t) \Rightarrow \vec{IA}=(2t-1;-t-1;2t-4)$$

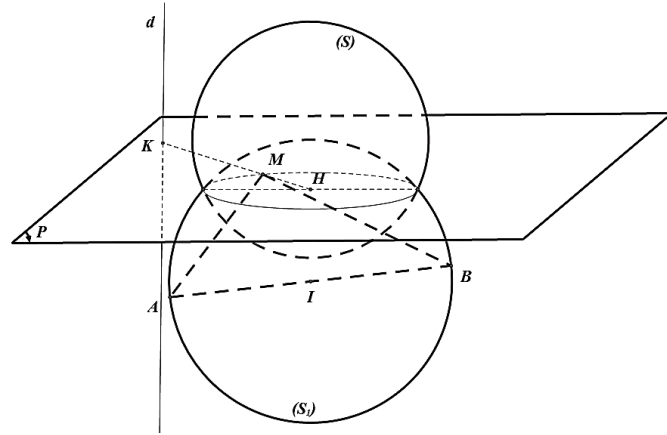
$$IA < 4 \Leftrightarrow IA^2 < 16 \Leftrightarrow (2t-1)^2+(-t-1)^2+(2t-4)^2 < 16 \Leftrightarrow 9t^2-18t+2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{3} < t < \frac{3+\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{7}}{3} < 2t-1 < \frac{3+2\sqrt{7}}{3}$$

$$\Rightarrow -0,8 \approx \frac{3-2\sqrt{7}}{3} < z_A < \frac{3+2\sqrt{7}}{3} \approx 2,8$$

Vậy có 3 điểm A có cao độ là số nguyên.

Câu 52: Chọn D



Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; -1; 5)$, $AB = 2\sqrt{11}$. Do $AMB = 90^\circ$ nên điểm M thuộc mặt cầu (S_1) đường kính AB .

Phương trình mặt cầu $(S_1): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 11$

Suy ra M thuộc giao tuyến của hai mặt cầu (S) và (S_1) . Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 29 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 11 \\ x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

Điểm M thuộc đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 8 = 0$ với mặt cầu (S_1) . Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) , suy ra H là tâm của đường tròn (C)

Phương trình đường thẳng Δ đi qua I , vuông góc với mặt phẳng (P) là

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

H là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) . Xét phương trình:

$$(3+t) - (-1-t) + 2(5+2t) - 8 = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(2; 0; 3)$$

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là: $d(I; (P)) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

Bán kính đường tròn (C) là $r = HM = \sqrt{5}$

Nhận thấy đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P)

Gọi $K(4+u; -8-u; 4+2u)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Ta có $4+u+8+u+2(4+2u)-8=0 \Leftrightarrow u=-2 \Rightarrow K(2; -6; 0)$

Suy ra $d(M; d) = MK$

Ta có $KH = 3\sqrt{5} > r$ nên điểm K nằm ngoài đường tròn (C) .

$d(M; d)$ ngắn nhất $\Leftrightarrow KM$ ngắn nhất $\Rightarrow M$ là giao điểm của KH với đường tròn (C) và M nằm giữa K, H

Do $HK = 3\sqrt{5} \Rightarrow HK = 3HM \Rightarrow \overrightarrow{HK} = 3\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK}$

$$\overrightarrow{HK} = (0; -6; -3) \Rightarrow \overrightarrow{HM} = (0; -2; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ b=-2 \\ c-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow M(2; -2; 2)$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 = 12.$$

Câu 53: Chọn D

Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$ có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 1$

$$\text{Phương trình đường thẳng } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$

Do đó mặt phẳng chứa d có phương trình dạng:

$$m(x-y-2) + n(x-z+1) = 0 \quad (m^2 + n^2 > 0) \Leftrightarrow (m+n)x - my - nz - 2m + n = 0 \quad (\alpha)$$

Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S) khi:

$$d(I; \alpha) = R \Leftrightarrow \frac{|m+n+2m-3n-2m+n|}{\sqrt{(m+n)^2 + m^2 + n^2}} = 1 \Leftrightarrow |m-n| = \sqrt{2m^2 + 2n^2 + 2mn}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2mn + n^2 = 2m^2 + 2n^2 + 2mn \Leftrightarrow m^2 + 4mn + n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{m}{n}\right) + 1 = 0 \quad (\text{do } n \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{n} = -2 + \sqrt{3} \\ \frac{m}{n} = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{m}{n} = -2 + \sqrt{3} \quad \text{Chọn } m = -2 + \sqrt{3}; n = 1$$

$$\text{phương trình } (\alpha_1): (\sqrt{3}-1)x + (2-\sqrt{3})y - z + 5 - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{m}{n} = -2 - \sqrt{3} \quad \text{Chọn } m = -2 - \sqrt{3}; n = 1$$

$$\text{phương trình } (\alpha_2): (-\sqrt{3}-1)x + (2+\sqrt{3})y - z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\overrightarrow{n_{(\alpha_1)}} \cdot \overrightarrow{n_{(\alpha_2)}} = 0 \quad \text{Vậy hai mặt phẳng tạo góc } 90^\circ.$$

Câu 54: Chọn B

Ta có: $I(0; 0; -1)$.

Lấy $M(t; 3; -1+t) \in d$. Thay vào $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$ ta được:

$$t^2 + 3^2 + (-1+t+1)^2 = 5 \Leftrightarrow 2t^2 + 4 = 0 \text{ (VN)}.$$

Suy ra d không cắt (S) nên từ mọi M trên d luôn kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) .

Gọi $N(x; y; z)$ là một tiếp điểm. Ta có:

$$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NI} = 0 \Leftrightarrow (x-t)x + (y-3)y + (z+1-t)(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - tx + y^2 - 3y + (z+1)^2 - t(z+1) = 0 \Leftrightarrow tx + 3y + tz + t - 5 = 0.$$

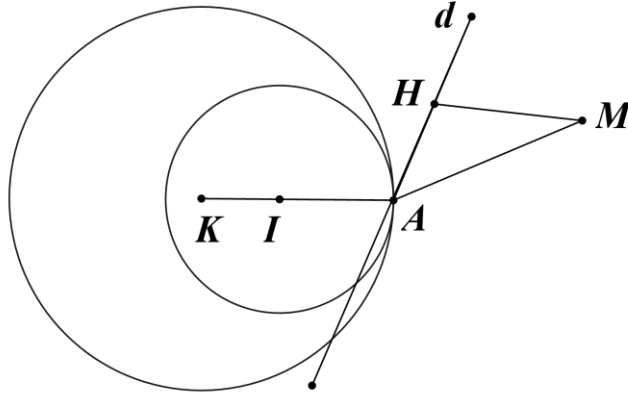
$$(\text{Do } N(x; y; z) \in (S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5).$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ là: } tx + 3y + tz + t - 5 = 0.$$

$$\text{Ta có: } d(I, (\alpha)) = \frac{|t \cdot 0 + 3 \cdot 0 + t \cdot (-1) + t - 5|}{\sqrt{t^2 + 3^2 + t^2}} = \frac{5}{\sqrt{2t^2 + 9}} \leq \frac{5}{3}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất từ I đến mặt phẳng (α) bằng $\frac{5}{3}$.

Câu 55: Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;3)$ và có bán kính $R = 6$.

Mặt cầu (S') có tâm $K(-1;1;1)$ và có bán kính $R' = 9$.

Lại có $\overrightarrow{KI} = (2; -1; 2) \Rightarrow KI = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3 \Rightarrow KI = R' - R$ suy ra hai mặt cầu tiếp xúc

trong tại điểm $A(a; b; c)$, mà $KA = R' = 9 = 3KI \Rightarrow \overrightarrow{KA} = 3\overrightarrow{KI} \Rightarrow \begin{cases} a+1=6 \\ b-1=-3 \\ c-1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=7 \end{cases}$.

Do đó $A(5; -2; 7)$. Vì d là đường thẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu trên nên d đi qua A và vuông góc với KI . Kẻ $MH \perp d \Rightarrow MH \leq MA$, nên MH lớn nhất khi và chỉ khi H trùng A . Khi đó d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với KI và AM suy ra d có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = [\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{AM}]$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (-1; 1; -14) \Rightarrow \vec{u} = (12; 26; 1)$.

Nên phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 5 + 12t \\ y = -2 + 26t \\ z = 7 + t \end{cases}$.

Vì $E = d \cap (P)$ suy ra $E(5 + 12t; -2 + 26t; 7 + t)$, Vì $E \in (P)$ suy ra

$$2(5 + 12t) - (-2 + 26t) + (7 + t) - 17 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ suy ra } E(29; 50; 9).$$

Mà $E(m; n; p)$ suy ra $\begin{cases} m = 29 \\ n = 50 \\ p = 9 \end{cases}$. Vậy $T = 88$.

Câu 56: Chọn C

Với $(m-1)^2 + (m-2)^2 + \frac{m^2}{4} - (m-4) > 0, \forall m \in \mathbb{R}$, ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-1)x + 2(m-2)y - mz + m - 4 = 0$ là phương trình của một mặt cầu

Khi m thay đổi, (S_m) luôn đi qua một đường tròn cố định, là giao tuyến của

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9 \text{ và } (P): 2x + 2y - z + 1 = 0$$

(S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R = 3$

Đường tròn giao tuyến (C) có tâm $K\left(-\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$ và bán kính $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Từ mọi điểm trên d luôn vẽ được 2 tiếp tuyến đến $(S_m) \Rightarrow \begin{cases} d \subset (P) \\ d(K, d) > r \end{cases}$

$$\text{Phương trình giao điểm của } d \text{ và } (P): 2\left(\frac{1}{2} + 2t\right) + 2(4 - mt) - (m^2 + 1 - 2t) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (6 - 2m)t + 9 - m^2 = 0$$

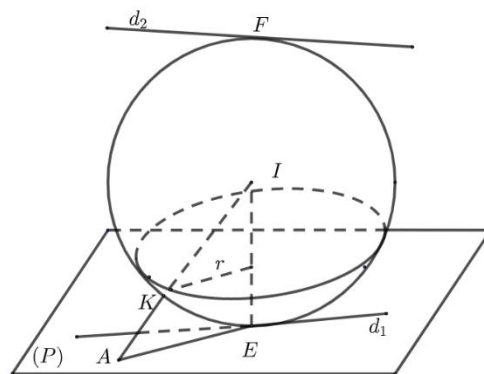
$$d \subset (P) \Rightarrow \begin{cases} 6 - 2m = 0 \\ 9 - m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

$$\text{Thử lại với } m = 3, \text{ ta có: } d: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 10 - 2t \end{cases} \text{ đi qua } A\left(\frac{1}{2}; 4; 10\right) \text{ và } \overrightarrow{KA} = \left(\frac{19}{18}; \frac{32}{9}; \frac{83}{9}\right)$$

$$\text{Xét } d(K, d) = \frac{|\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{u_d}|} > r \text{ (thỏa)}$$

Vậy có một giá trị $m = 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 57: Chọn B



Gọi EF là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 ($E \in d_1, F \in d_2$)

Ta có mặt cầu đường kính EF là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với d_1, d_2 .

Gọi I là trung điểm của EF ta có I là tâm mặt cầu (S).

$$E \in d_1 \Rightarrow E(3+t; t; t), F \in d_2 \Rightarrow F(2+2t'; 1+t'; 2t')$$

$$\overrightarrow{EF}(2t'-t-1; t'-t+1; 2t'-t). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5t'-3t=0 \\ 9t'-5t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ t'=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$E\left(\frac{11}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right), F\left(5; \frac{5}{2}; 3\right) \Rightarrow I\left(\frac{21}{4}; \frac{5}{2}; \frac{11}{4}\right)$$

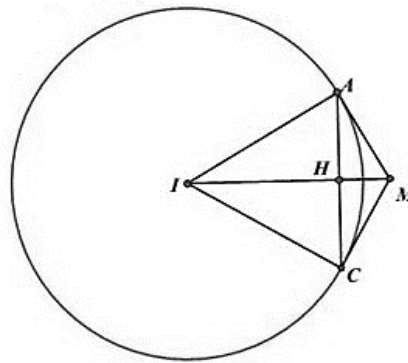
(P) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 nên (P) là tiếp diện của mặt cầu (S). (P) đi qua E nhận $\overrightarrow{EF}$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là $x - z - 3 = 0$.

$$d(I, (P)) = \frac{\sqrt{2}}{4} = IE; AE = \sqrt{AI^2 - IE^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Gọi K là giao điểm của IA với mặt cầu (S) và r là bán kính đường tròn (C) ta có

$$\frac{IK}{IA} = \frac{3}{5} = \frac{r}{AE} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{5}. \text{ Vậy diện tích của đường tròn (C) bằng } \pi r^2 = \frac{2}{25} \pi.$$

Câu 58: Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S).

Đặt $MA = MB = MC = x$ khi đó $AB = x, BC = x\sqrt{2}, CA = x\sqrt{3}$ do đó $\triangle ABC$ vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

Vì $\angle AMC = 120^\circ$ nên $\triangle AIC$ đều do đó $x\sqrt{3} = R \Leftrightarrow 3$ suy ra $IM = 2AM = 2x = 6$.

Lại có $M \in d$ nên $M(-1+t; -2+t; 1+t), (t > 1)$.

$$\text{Mà } IM = 6 \text{ nên } (t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do } a > 0 \text{ nên } t = \frac{4}{3} \text{ suy ra } H\left(\frac{1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{7}{3}\right). \text{ Vậy } a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}.$$

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $y = m$ và $x + z - 3 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S). Tích tất cả các giá trị mà m có thể nhận được bằng

A. -11.

B. -10.

C. -5.

D. -8.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$ có tâm $I(2; -5; 1)$ và bán kính $R = 6$.

Giao tuyến của hai mặt phẳng $y = m$ và $x + z - 3 = 0$ là đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = m \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Δ đi qua $A(0; m; 3)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -1)$, $\vec{IA} = (-2; m + 5; 2)$,
 $[\vec{IA}, \vec{u}] = (-m - 5; 0; -m - 5)$.

Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{[\vec{IA}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 6 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(m+5)^2}}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow m^2 + 10m - 11 = 0.$$

Vậy tích $m_1 \cdot m_2 = -11$.

- Câu 60:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 18$ và điểm $K(4; -4; 4)$. Kẻ tiếp tuyến KM đến mặt cầu (S) ($M \in (S)$). Khoảng cách lớn nhất từ M đến đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{-4}$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{14}}{7} + \sqrt{3}$. B. $\frac{2\sqrt{14}}{7} + 2\sqrt{3}$. C. $\frac{2\sqrt{14}}{7}$. D. $2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$, $R = 3\sqrt{2}$, $IK > R \Rightarrow K$ nằm ngoài mặt cầu.

Ta có $KMI = 90^\circ$. Suy ra M nằm trên mặt cầu đường kính IK , có phương trình là:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}$$

Từ đó suy ra $M \in mp(P): x - 2y + z - 4 = 0$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của (P) và $(S) \Rightarrow M \in (C)$. Tâm đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với $mp(P)$ là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Gọi N là giao điểm của d và $mp(P)$.

$$N \in d \Rightarrow N(1+t; 2-2t; 1+t)$$

$$N \in (P) \Rightarrow 1+t - 2(2-2t) + 1+t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow N(2; 0; 2)$$

Vậy đường tròn (C) giao tuyến của (S) và $mp(P)$ có tâm là N , bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = 2\sqrt{3}$$

Dễ thấy đường thẳng $\Delta \subset (P)$ và Δ không cắt (C)

Do đó khoảng cách từ M đến Δ lớn nhất bằng $d(N, \Delta) + r = \frac{2\sqrt{14}}{7} + 2\sqrt{3}$

CHỦ ĐỀ 12

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC . Biết góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(AB'C)$ là

- A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. D. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=0 \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$ và $d: \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=1+t' \\ z=-1+t' \end{cases}$. Biết rằng có một

hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa mãn A, C cùng thuộc Ox , B, C' cùng thuộc Δ và D, B' cùng thuộc d , thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

- A. $9\sqrt{2}$. B. $18\sqrt{2}$. C. 9. D. 18.

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=4\sqrt{3}$ và $AA'=4$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC . Côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng?

- A. $\frac{\sqrt{11}}{35}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{60}$. C. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{\sqrt{17}}{45}$.

Câu 4: Cho tứ diện $SABC$ có $SC=CA=AB=3\sqrt{2}$, SC vuông góc (ABC) , tam giác ABC vuông tại A , các điểm M và N lần lượt thuộc SA và BC sao cho $AM=CN=2$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SB bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 1.

Câu 5: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN ($M \in A'C; N \in BC'$) là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' . Tỷ số $\frac{NB}{NC'}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O . Biết rằng $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với m, n là các số dương và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

A. $\frac{64}{27}$. B. $d(M; (P)) = \frac{11\sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{75}{32}$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Gọi G trọng tâm tam giác ABC . Tính cô-sin góc tạo bởi $\overrightarrow{A'G}$ và $\overrightarrow{CD}$.

A. $\cos(\overrightarrow{A'G}; \overrightarrow{CD}) = -\frac{\sqrt{14}}{7}$. B. $\cos(\overrightarrow{A'G}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\sqrt{14}}{7}$.
C. $\cos(\overrightarrow{A'G}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\sqrt{7}}{7}$. D. $\cos(\overrightarrow{A'G}; \overrightarrow{CD}) = -\frac{\sqrt{14}}{14}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các điểm $A(1;2;0)$, $B(4;6;0)$, $D(-3;5;0)$. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ đường vuông góc chung của đường thẳng SI và BC đến đường thẳng AB .

A. $\frac{15}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 5 . D. $\frac{5}{2}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 3. Gọi I là điểm trên cạnh BB' sao cho $BI = \frac{1}{3}BB'$, điểm M di động trên cạnh AA' . Biết diện tích của tam

giác MIC' nhỏ nhất khi tỷ số $\frac{AM}{AA'} = \frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$). $P = a + b$ là

A. 4 . B. 3 . C. 7 . D. 5 .

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Độ dài các cạnh $AB = 3a$, $AD = 4a$, $SA = 5a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC và $BM = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MD là

A. $\frac{15a}{\sqrt{259}}$. B. $\frac{29a}{\sqrt{245}}$. C. $\frac{39a}{\sqrt{245}}$. D. $\frac{45a}{\sqrt{259}}$.

Câu 11: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Thể tích tứ diện $A'C'DM$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và $B(-2;1;1)$. Với M là điểm trên đường

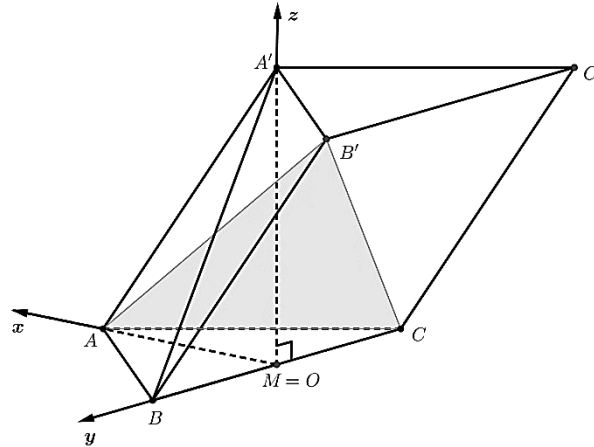
thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$, xét N là một điểm di động trên mặt cầu có tâm M với bán kính bằng

2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AM + BN$ thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(1;3)$. B. $(3;5)$. C. $(5;7)$. D. $(7;9)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C



Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là góc $A'BM = 60^\circ$.

Ta có $A'M = BM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Coi $a = 1$ khi đó $A(\sqrt{3}; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; -1; 0)$, $A'(0; 0; \sqrt{3})$. Gọi $B'(x_0; y_0; z_0)$, $\overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 - \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$.

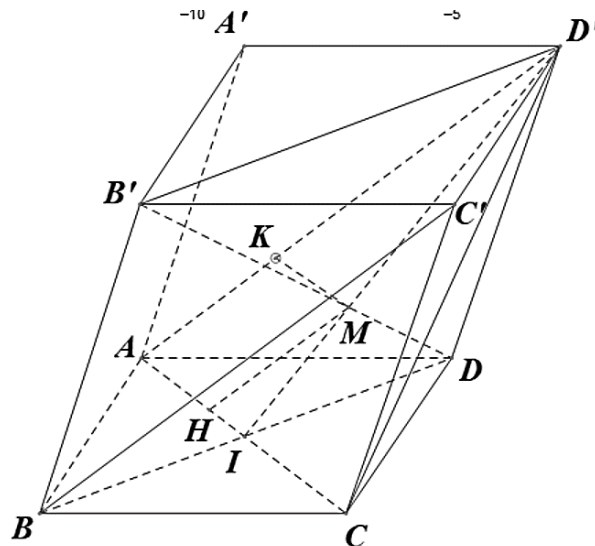
Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{3} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow B'(-\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{3}; -1; 0) \\ \overrightarrow{AB'} = (-2\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}] = (-\sqrt{3}; 3; -3\sqrt{3}) \Rightarrow \vec{n} = (1; -\sqrt{3}; 3)$ là vec tơ pháp

tuyến của mặt phẳng (ACB') . Phương trình mp (ACB') là $x - \sqrt{3}y + 3z - \sqrt{3} = 0$.

$\Rightarrow d(B, (ACB')) = \frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{1+3+9}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$. Vậy khoảng cách từ B đến mp $(AB'C)$ là $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 2: Chọn B



Nhận xét rằng các đường thẳng Δ , d , Ox đôi một vuông góc với nhau nên
$$\begin{cases} AC \perp BC' \\ BC' \perp B'D \\ B'D \perp AC \end{cases}$$

Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$ và M là giao của $D'I$ và $B'D$.

Ta có $\frac{IM}{MD'} = \frac{ID}{B'D'} = \frac{1}{2} \Rightarrow IM = \frac{1}{3}ID'$.

Mặt khác $\begin{cases} B'D \perp AC \\ B'D \perp BC' \Rightarrow B'D \perp AD' \end{cases} \Rightarrow B'D \perp (AD'C)$.

Kẻ $MH \parallel AD'$ ($H \in AC$) $\Rightarrow MH \perp AC$. Suy ra MH là đoạn vuông góc chung của

$$AC, B'D \Rightarrow MH = d(AC, B'D) = d(Ox; d) = \sqrt{2}. \text{ Vì } \frac{MH}{AD'} = \frac{IM}{ID'} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD' = 3\sqrt{2}.$$

Kẻ $MK \parallel AC$ ($K \in AD'$) $\Rightarrow MK \perp AD'$ suy ra MK là đoạn vuông góc chung của $AD', B'D$.

$$\Rightarrow MK = d(AD', B'D) = d(\Delta; d) = \sqrt{2}. \text{ Vì } \frac{MK}{AI} = \frac{D'M}{ID'} = \frac{2}{3} \Rightarrow AI = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}.$$

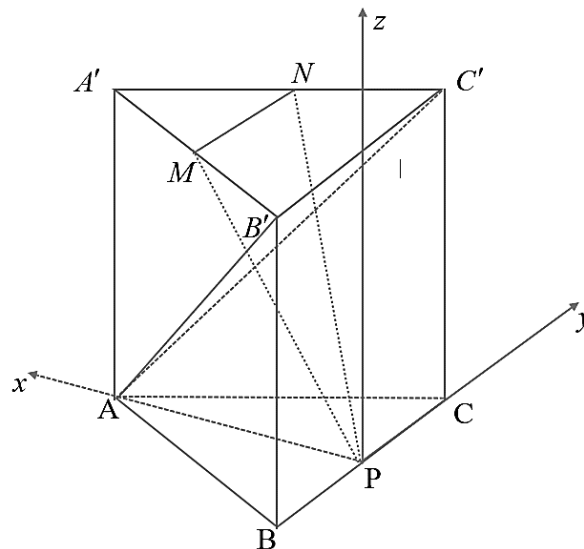
Ta lại có $BC' \parallel (AD'C) \Rightarrow d(BC'; AC) = d(BC'; (AD'C)) = d(B; (AD'C)) = d(D; (AD'C))$

$$\Rightarrow d(D; (AD'C)) = d(Ox; \Delta) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{DAD'C} = \frac{1}{3} \cdot d(D; (AD'C)) \cdot S_{AD'C}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot d(D; (AD'C)) \cdot \frac{1}{2} AD' \cdot AC = 3\sqrt{2} \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{DAD'C} = 18\sqrt{2}.$$

Câu 3: Chọn C



Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) . Chọn hệ trục tọa độ như hình.

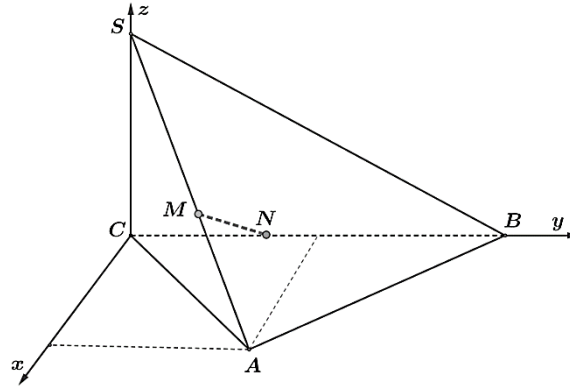
Khi đó ta có: $A(6;0;0), B'(0;-2\sqrt{3};4), C'(0;2\sqrt{3};4),$

$$M(3;-\sqrt{3};4), N(3;\sqrt{3};4), P(0;0;0).$$

Ta có: $[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}] = (-16\sqrt{3}; 0; -24\sqrt{3})$ nên VTPT của mặt phẳng $(AB'C')$ là $\vec{n}_1 = (2; 0; 3)$

$[\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}] = (-8\sqrt{3}; 0; 6\sqrt{3})$ nên VTPT của mặt phẳng (PMN) là $\vec{n}_2 = (4; 0; -3)$.

$$\text{Khi đó: } \cos(\alpha) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \left| \frac{2.4 + 0.0 + 3.(-3)}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} \right| = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Câu 4: Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa $C(0;0;0) \equiv O$ như hình vẽ.

Điểm $B(0;6;0) \in Oy$, $S(0;0;3\sqrt{2}) \in Oz$, $A(3;3;0)$.

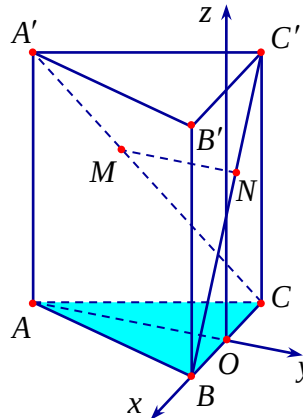
Khi đó tọa độ $N(0;2;0)$; $M(2;2;\sqrt{2})$.

$\vec{NM} = (2;0;\sqrt{2})$; $\vec{SB} = (0;6;-3\sqrt{2})$ và $\vec{NB} = (0;4;0)$.

Khi đó $[\vec{NM}, \vec{SB}] = (-6\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; 12)$.

Câu 5: Chọn B

Kết quả bài toán sẽ không thay đổi nếu ta xét lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng 2.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (O là trung điểm của BC). Ta có: $A'(0;-\sqrt{3};2)$,

$B(1;0;0)$, $C(-1;0;0)$, $C'(-1;0;2)$, $\vec{CA'} = (1;-\sqrt{3};2)$, $\vec{BC'} = (-2;0;2)$.

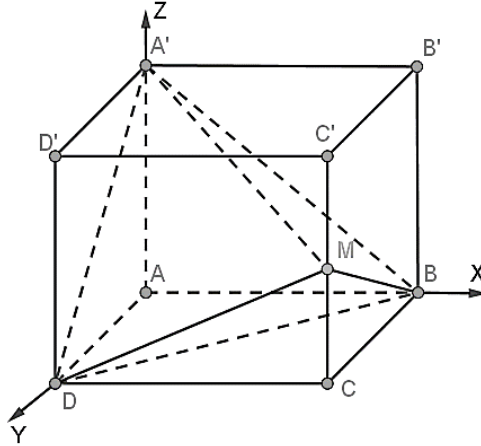
Do $\begin{cases} \vec{CM} = m\vec{CA'} \\ \vec{BN} = n\vec{BC'} \end{cases}$ nên ta có $M(-1+m;-\sqrt{3}m;2m)$, $N(1-2n;0;2n)$

$\Rightarrow \vec{MN} = (-m-2n+2;\sqrt{3}m;2n-2m)$.

Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA'} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 2n = -1 \\ -m + 4n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{5} \\ n = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{BN}{BC'} = n = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{NB}{NC'} = \frac{3}{2}.$$

Câu 6: Chọn A



Ta có $A(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$.

Suy ra $C(m;m;0)$, $B'(m;0;n)$, $C'(m;m;n)$, $D'(0;m;n)$, $M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$.

Và $\overrightarrow{BD} = (-m;m;0)$, $\overrightarrow{BA'} = (-m;0;n)$, $\overrightarrow{BM} = \left(0;m;\frac{n}{2}\right)$.

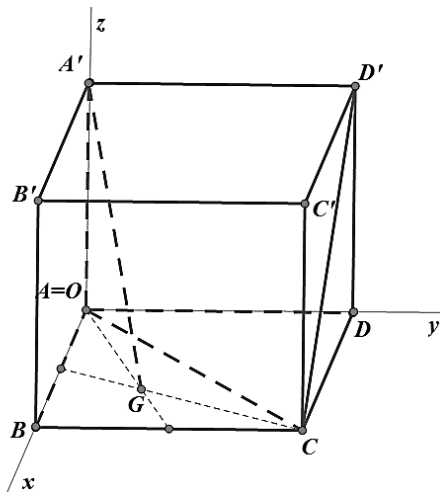
$$[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (mn; mn; m^2).$$

$$[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2} m^2 n.$$

Ta được $V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \cdot \overrightarrow{BM}| = \frac{1}{4} |m^2 \cdot n| = \frac{1}{4} |m^2 \cdot (4-m)| = \frac{1}{8} |m \cdot m \cdot (8-2m)|$.

$$\Rightarrow V_{BDA'M} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{m+m+8-2m}{3} \right)^3 = \frac{64}{27}.$$

Câu 7: Chọn A

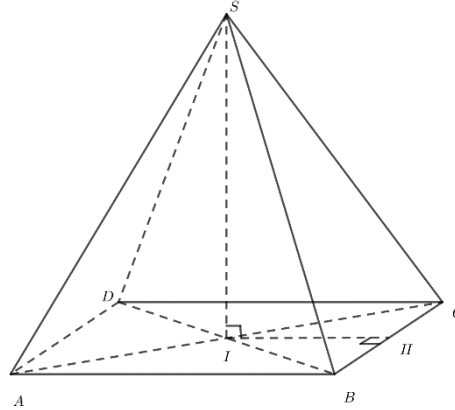


Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Khi đó: $B(a;0;0)$, $A(0;0;0)$, $C(a;a;0)$, $G\left(\frac{2a}{3}; \frac{a}{3}; 0\right)$, $A'(0;0;a)$, $D(0;a;0)$, $\overrightarrow{A'G}\left(\frac{2a}{3}; \frac{a}{3}; -a\right)$,

$$\overrightarrow{CD}(-a;0;0). \text{ Áp dụng công thức: } \cos(\overrightarrow{A'G};\overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{A'G} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{A'G}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = -\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Câu 8: Chọn D



Vì I là tâm hình vuông $ABCD$ nên I là trung điểm của BD .

Tọa độ $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}; 0\right)$. Suy ra tọa độ điểm $C(0;9;0)$.

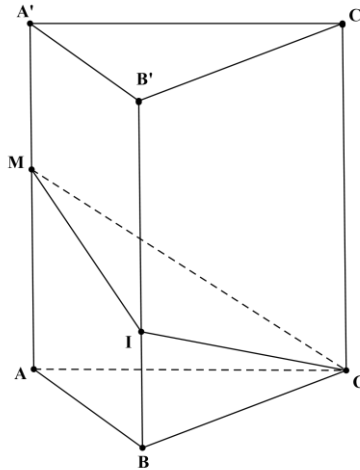
Gọi H là trung điểm BC khi đó tọa độ $H\left(2; \frac{15}{2}; 0\right)$ và $IH \perp BC$ (1).

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp IH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra đường vuông góc chung của SI và BC là đường thẳng IH .

Vì $IH // AB$ nên khoảng cách từ IH đến AB bằng $\frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$.

Câu 9: Chọn D



Chọn hệ tọa độ $Axyz$ sao cho: $A(0;0;0), B(0;1;0), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), A'(0;0;3)$. Khi đó

$B'(0;1;3); C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 3\right); I(0;1;1)$. Gọi tọa độ điểm $M(0;0;x) \in AA' (0 \leq x \leq 3)$.

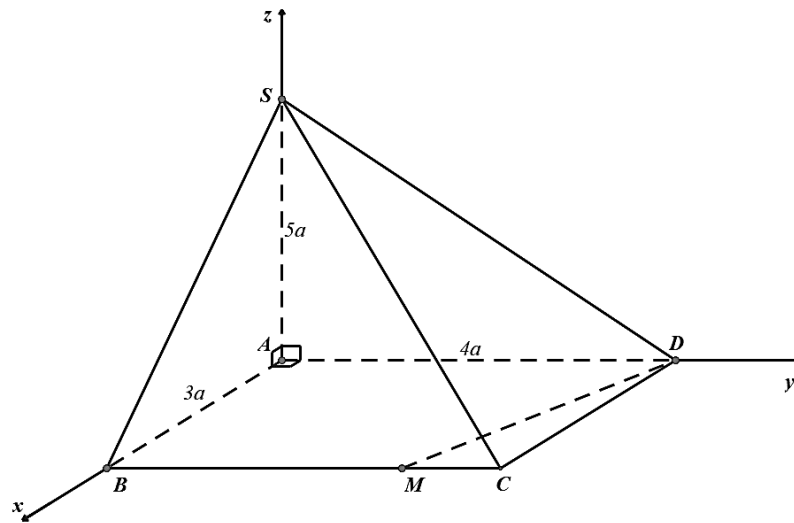
$$\overrightarrow{IC'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right); \overrightarrow{IM} = (0; -1; x-1)$$

Chủ đề 12: Ứng dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Ta có: Diện tích của tam giác MIC' là $S = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{IC'}, \overrightarrow{IM} \right] \right| = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2 - 16x + 31} = \frac{1}{4} \sqrt{4(x-2)^2 + 15}$

Do đó S nhỏ nhất khi $x = 2$. Khi đó tỉ số $\frac{AM}{AA'} = \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 10: Chọn D



Từ giả thiết ta có $BM = 3a$

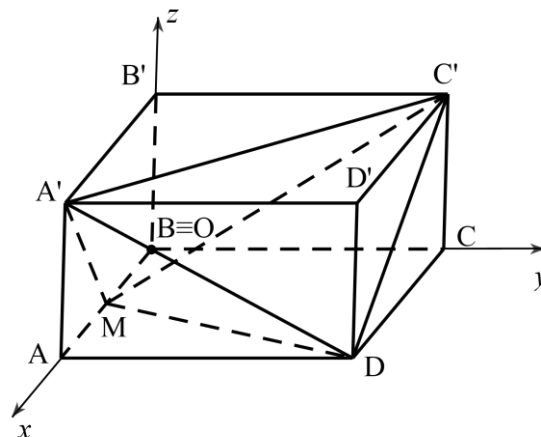
Chọn hệ trục tọa độ để các vuông góc $Oxyz$ thỏa mãn $O \equiv A$, điểm B nằm trên Ox , điểm D nằm trên Oy , điểm S nằm trên Oz như hình vẽ:

Từ giả thiết ta có tọa độ các điểm $B(3a; 0; 0)$, $D(0; 4a; 0)$, $S(0; 0; 5a)$ và $M(3a; 3a; 0)$ suy ra tọa độ các vector $\overrightarrow{SB} = (3a; 0; -5a)$, $\overrightarrow{MD} = (-3a; a; 0)$, $\overrightarrow{BM} = (0; 3a; 0)$

Tích có hướng $\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MD} \right] = (5a^2; 15a^2; 3a^2)$

Vận dụng công thức tính khoảng cách $d(SB, MD) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MD} \right] \cdot \overrightarrow{BM} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MD} \right] \right|} = \frac{45a^3}{a^2 \sqrt{259}} = \frac{45a}{\sqrt{259}}$

Câu 11: Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với O trùng B .

Để cho đơn giản chọn $a = 1$

Tọa độ các điểm như sau: $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $D(\sqrt{2}; 1; 0)$, $A'(\sqrt{2}; 0; \sqrt{3})$, $C'(0; 1; \sqrt{3})$.

$$\text{Thể tích của tứ diện } A'C'DM \text{ là } V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{MD} \cdot [\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MC'}] \right| = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Tổng quát, với } a \text{ bất kì, thể tích của tứ diện } A'C'DM \text{ là } V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{MD} \cdot [\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MC'}] \right| = \frac{\sqrt{6}a^3}{4}.$$

Câu 12: Chọn C

Với mỗi điểm M di động trên đường thẳng d , do N là một điểm di động trên mặt cầu có tâm M với bán kính bằng 2 nên BN nhỏ nhất khi $BN = |BM - R| = |BM - 2|$.

Do đó, bài toán đưa về việc tìm M sao cho $P = AM + |BM - 2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M \in d$ nên $M(1+t; 2t; -1-t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Khi đó

$$AM = \sqrt{t^2 + (2t+3)^2 + (3-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 6t + 18},$$

$$BM = \sqrt{(t+3)^2 + (2t-1)^2 + (-2-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 6t + 14}.$$

$$\text{Khi đó: } P = \sqrt{6t^2 + 6t + 18} + \left| \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2 \right| = \sqrt{6t^2 + 6t + 18} + \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2 \text{ (vì } \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\text{thì } 6t^2 + 6t + 14 > 4 \text{ nên } \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2 > 0, \text{ do đó } \left| \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2 \right| = \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \sqrt{6t^2 + 6t + 18} + \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2, \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{6t+3}{\sqrt{6t^2 + 6t + 18}} + \frac{6t+3}{\sqrt{6t^2 + 6t + 14}} = 0 \Leftrightarrow 6t+3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Qua đó, ta thấy ngay $t = -\frac{1}{2}$ là điểm cực trị duy nhất của hàm số và đó là điểm cực tiểu nên hàm

$$\text{số } f(t) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{\sqrt{66} + 5\sqrt{2} - 4}{2} \text{ tại } t = -\frac{1}{2}.$$

TÀI LIỆU LUYỆN THI ĐẠI HỌC NĂM 2023

PHAN NHẬT LINH

Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia 10,11,12

Điện thoại/Zalo: 0817.098.716 – Email: linh.phannhat241289@gmail.com

Facebook: fb.com/nhatlinh.phan.1401/

CHỊU TRÁCH NHIỆM NỘI DUNG

PHAN NHẬT LINH

BIÊN TẬP

PHAN NHẬT LINH

THIẾT KẾ BÌA

PHAN NHẬT LINH

CHÍNH PHỤC VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO HÌNH HỌC

Đề nghị quý vị tôn trọng quyền tác giả và cam kết không sao lưu bản phụ khi chưa được sự đồng ý.

Mọi ý kiến đóng góp vui lòng liên hệ thông tin tác giả đã cung cấp.

Cuốn sách sẽ được gửi cho những ai đã đăng kí thông qua tác giả.