

PHẠM NGUYỄN

(Giáo viên chuyên luyện thi Toán tại Vinastudy.vn)

CHINH PHỤC TOÁN 9 BẢNG SƠ ĐỒ TƯ DUY ĐẠI SỐ TẬP 1

**SOẠN THEO CẤU TRÚC
CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

- ✓ Luyện thi vào lớp 10, chuyên
- ✓ Dành cho học sinh lớp 9
- ✓ Tài liệu tham khảo dành cho giáo viên

PHẠM NGUYỄN

(Giáo viên chuyên luyện thi tại pne.edu.vn)

CHINH PHỤC TOÁN 9 BẰNG SƠ ĐỒ TƯ DUY

Tập 1



**SOẠN THEO CẤU TRÚC
CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

- ✓ Luyện thi vào lớp 10, chuyên
- ✓ Danh cho học sinh lớp 9
- ✓ Tài liệu tham khảo dành cho giáo viên

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm giúp cho các em học sinh chuẩn bị tốt cho kì thi vào 10 và tuyển sinh vào các trường THPT chất lượng. Chúng tôi biên soạn cuốn : “ CHINH PHỤC TOÁN 9 BẰNG SƠ ĐỒ TƯ DUY”

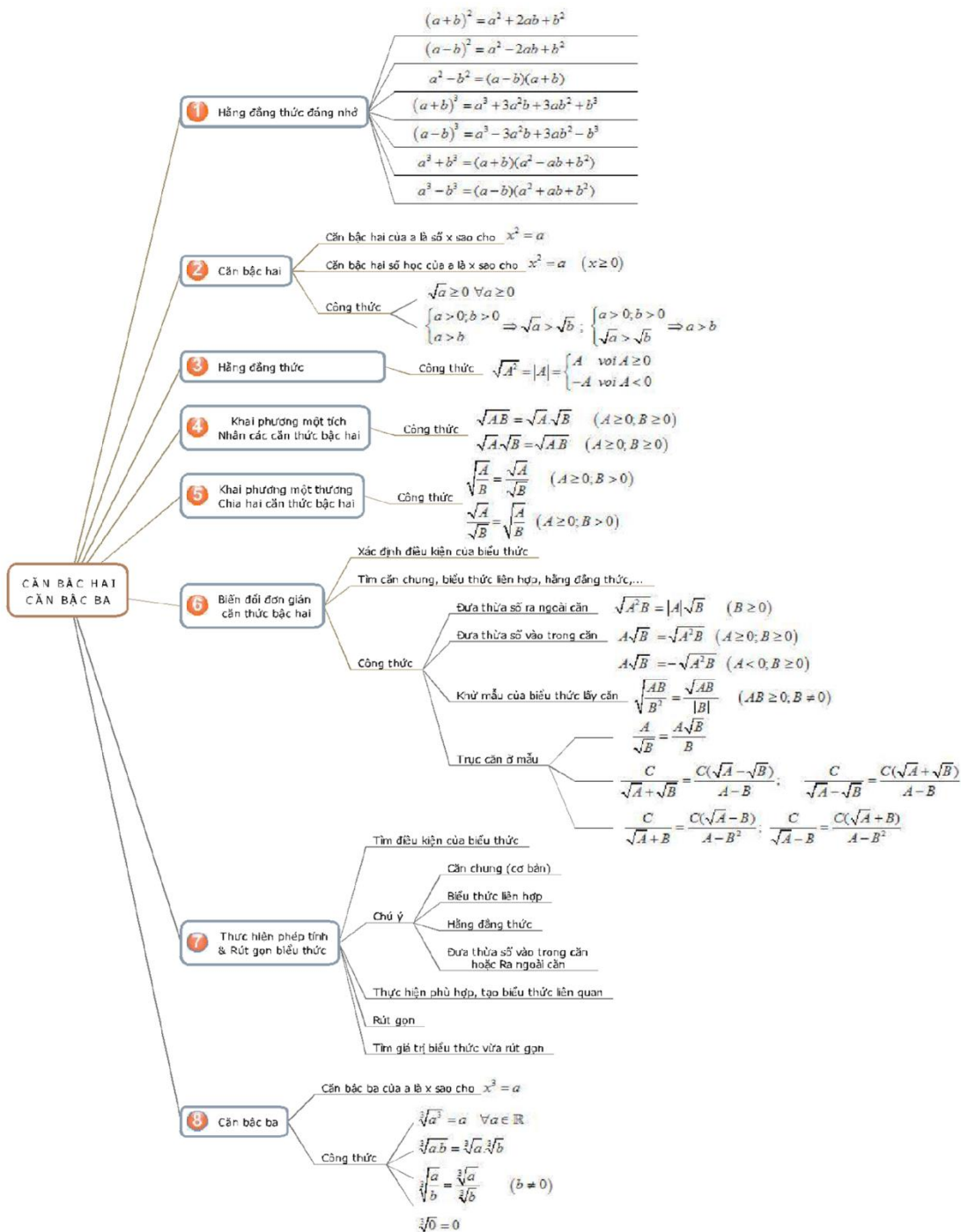
Nội dung sách được trình bày theo từng dạng toán, Ví dụ minh họa minh họa và BÀI TẬP TỰ LUYỆN áp dụng. Mỗi bài gồm các phần:

- A. Tóm tắt kiến thức cần học
- B. Phương pháp giải các dạng toán:
 - a. Phần này được trình bày theo các vấn đề:
 - Mỗi vấn đề được khái quát bằng sơ đồ tư duy, và hướng giải nhanh minh họa.
 - Mỗi dạng toán đều có các phương pháp giải, các Ví dụ và các BÀI TẬP TỰ LUYỆN tự luyện đều có hướng dẫn giải hay đáp số nhằm giúp người đọc tự kiểm tra lại kết quả của mình.
 - Đề kiểm tra cuối chương.
 - b. Các BÀI TẬP TỰ LUYỆN được chọn lọc và tổng hợp từ Sách giáo khoa, các đề thi vào 10 của các tỉnh trên cả nước, các đề thi học sinh giỏi,...

Chúng tôi hy vọng cuốn sách sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp người đọc dễ dàng tiếp cận, nắm vững và trau dồi kiến thức môn Toán 9.

Dù đã hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn, song chắc khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng tôi xin đón nhận những ý kiến phản hồi và chân thành cảm ơn mọi sự góp ý của quý độc giả để lần tái bản sau sách được hoàn thiện hơn.

SƠ ĐỒ 1 – NỘI DUNG TRỌNG TÂM CHƯƠNG 1



Chương 1 – CĂN THỨC

I. CĂN BẬC HAI – CĂN THỨC BẬC HAI

1. Kiến thức trọng tâm

a. Căn bậc hai số học

- Căn bậc hai của một số không âm a là số x sao cho $x^2 = a$.
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau:
Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$, số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.
- Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là **căn bậc hai số học** của a .
Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.
- Với hai số không âm a, b , ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

b. Căn thức bậc hai

- Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là **căn thức bậc hai** của A .
- $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi $A \geq 0$.

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn có nghĩa

Ví dụ minh họa 1. Tìm điều kiện của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{-7x}$

b) $\sqrt{2x+6}$

c) $\sqrt{\frac{1}{-3x+2}}$

Hướng dẫn giải:

- a) Biểu thức $\sqrt{-7x}$ xác định khi: $-7x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Vậy $x \leq 0$ thì biểu thức $\sqrt{-7x}$ xác định.

b) Biểu thức $\sqrt{2x+6}$ xác định khi: $2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3$.

Vậy $x \geq -3$ thì biểu thức $\sqrt{2x+6}$ xác định.

c) Biểu thức $\sqrt{\frac{1}{-3x+2}}$ xác định khi:

$$\frac{1}{-3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow -3x+2 > 0 \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

Vậy $x < \frac{2}{3}$ thì biểu thức $\sqrt{\frac{1}{-3x+2}}$ xác định.

Ví dụ minh họa 2. Tìm điều kiện của biểu thức sau: $A = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

Hướng dẫn giải:

Biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 5} = \sqrt{(x-1)(x-5)}$ xác định khi:

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5$$
$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1$$

(Dạng $\sqrt{A.B}$)

Vậy khi $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ thì biểu thức A xác định.

Ví dụ minh họa 3. Tìm điều kiện xác định của biểu thức:

$$P = \frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2} + \frac{4-a}{2-\sqrt{a}}$$

Hướng dẫn giải:

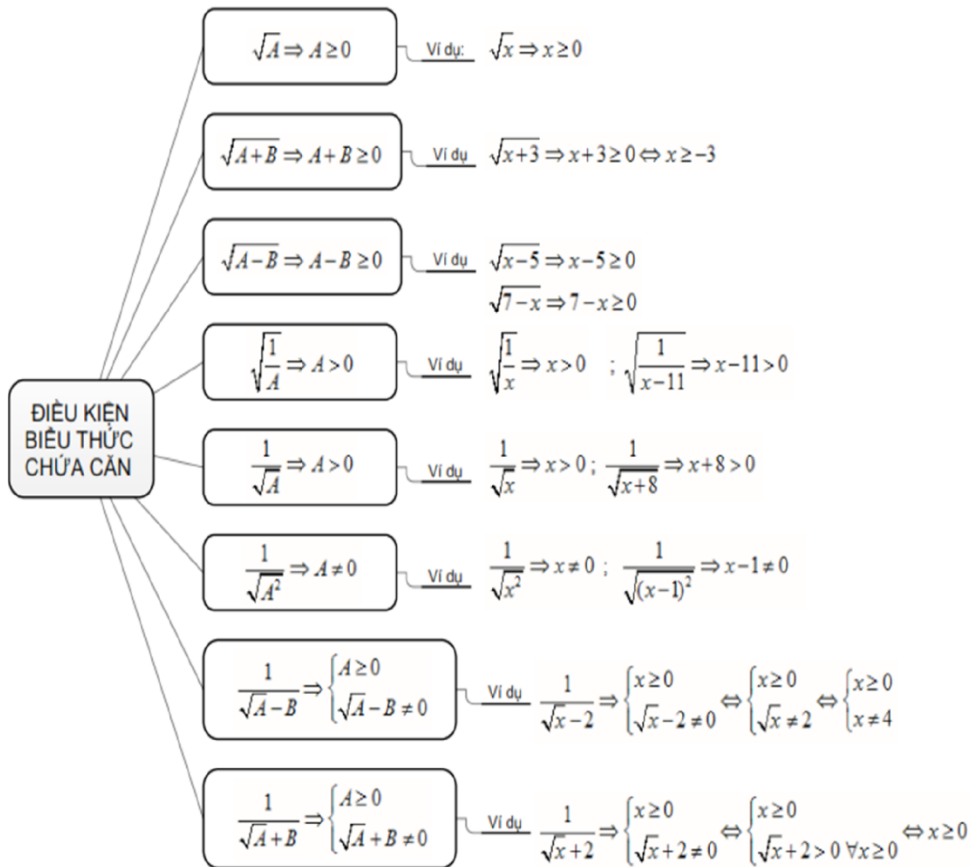
$$\text{Biểu thức } P \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 2-\sqrt{a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 4 \end{cases}$$

Vậy khi $a \geq 0$ và $a \neq 4$ thì biểu thức P xác định.

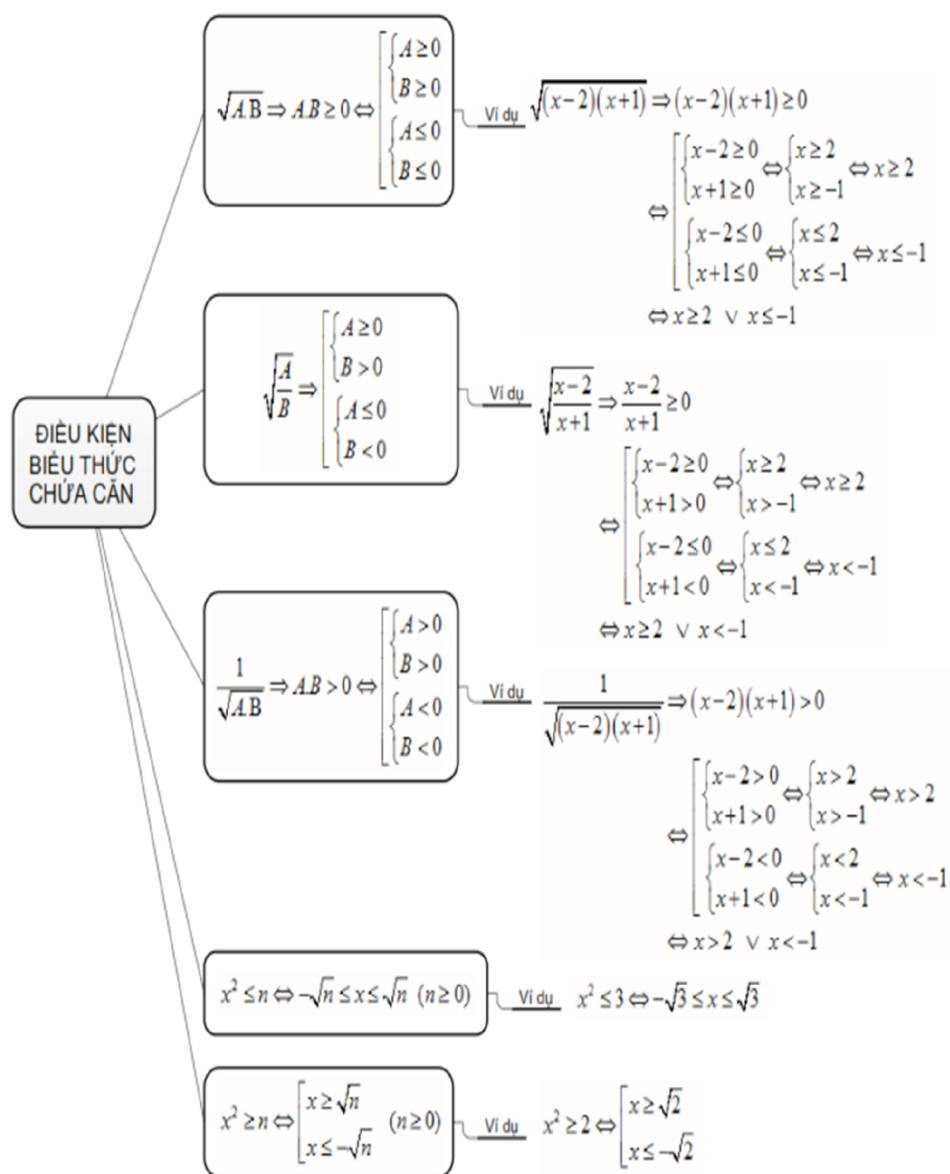
Chú ý: Trong bài vừa có căn thức, vừa có mẫu thức nên cần tìm điều kiện để biểu thức trong căn không âm, đồng thời tìm điều kiện để mẫu của biểu thức khác 0. Riêng biểu thức $\sqrt{a} + 2$ luôn dương nên không cần tìm điều kiện.

Để đơn giản hoá việc nhận dạng và tìm điều kiện, các em có thể tham khảo sơ đồ bên dưới.

SƠ ĐỒ 2: TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA BIỂU THỨC CHỨA CĂN



SƠ ĐỒ 3: TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA BIỂU THỨC CHỨA CĂN



BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.** Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

- | | |
|-------------------|------------------|
| a) $\sqrt{-3x}$ | b) $\sqrt{4-2x}$ |
| c) $\sqrt{-3x+2}$ | d) $\sqrt{3x+1}$ |
| e) $\sqrt{9x-2}$ | f) $\sqrt{6x-1}$ |

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| a) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ | b) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$ |
| c) $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$ | d) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ |
| e) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ | f) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ |

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt{x^2+1}$ | b) $\sqrt{4x^2+3}$ |
| c) $\sqrt{9x^2-6x+1}$ | d) $\sqrt{-x^2+2x-1}$ |
| e) $\sqrt{- x+5 }$ | f) $\sqrt{-2x^2-1}$ |

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| a) $\sqrt{4-x^2}$ | b) $\sqrt{x^2-16}$ |
| c) $\sqrt{x^2-3}$ | d) $\sqrt{x^2-2x-3}$ |
| e) $\sqrt{x(x+2)}$ | f) $\sqrt{x^2-5x+6}$ |

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1.** a) $x \leq 0$ b) $x \leq 2$ c) $x \leq \frac{2}{3}$ d) $x \geq -\frac{1}{3}$ e) $x \geq \frac{2}{9}$ f) $x \geq \frac{1}{6}$

Bài 2.

a) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$

Điều kiện của biểu thức là: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x > 2$.

b) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$

Điều kiện của biểu thức là: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \geq 2$.

c) $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$

Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x > 2$.

d) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$. Dạng $\sqrt{\frac{A}{B}}$ với $A > 0$

$$\Rightarrow \text{Điều kiện } \frac{1}{3-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x < \frac{3}{2}$.

e) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$. Dạng $\sqrt{\frac{A}{B}}$ với $A > 0$

$$\Rightarrow \text{Điều kiện } \frac{4}{2x+3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x > -\frac{3}{2}$.

f) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ Dạng $\sqrt{\frac{A}{B}}$ với $A < 0$

$$\Rightarrow \text{Điều kiện } \frac{-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x < -1$.

Bài 3.

a) Vì $x^2 + 1 > 0 \forall x$. Vậy hàm số luôn xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Vì $4x^2 + 3 > 0 \forall x$. Vậy hàm số luôn xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{(3x - 1)^2}$. Vì $(3x - 1)^2 \geq 0 \forall x$

Vậy hàm số xác định với mọi x .

d) $\sqrt{-x^2 + 2x - 1} = \sqrt{-(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{-(x - 1)^2}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow -(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy hàm số xác định khi $x = 1$.

e) $\sqrt{-|x + 5|}$

Điều kiện: $-|x + 5| \geq 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

f) $\sqrt{-2x^2 - 1}$

Điều kiện $-2x^2 - 1 = -(2x^2 + 1) < 0 \forall x$

Vậy không tồn tại giá trị x để hàm số có nghĩa.

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) Điều kiện của biểu thức là $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Vậy điều kiện của biểu thức là $-2 \leq x \leq 2$

b) Điều kiện của biểu thức là $x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 16$

$\Leftrightarrow x \geq 4$ hoặc $x \leq -4$.

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \geq 4$ hoặc $x \leq -4$.

c) Điều kiện của biểu thức là $x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3$

$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$ hoặc $x \leq -\sqrt{3}$

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \geq \sqrt{3}$ hoặc $x \leq -\sqrt{3}$.

$$d) x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1$$

Vậy biểu thức xác định khi $x \geq 3$ hoặc $x \leq -1$.

e) Điều kiện của biểu thức là $x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 0$.

Vậy điều kiện của biểu thức là $x \leq -2$ hoặc $x \geq 0$.

f) Điều kiện của biểu thức là $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \text{ hoặc } x \geq 3.$$

Vậy điều kiện của biểu thức là $\Leftrightarrow x \leq 2$ hoặc $x \geq 3$.

b. Dạng 2. Tính giá trị biểu thức

Ví dụ minh họa 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \sqrt{49} + \sqrt{25} - 4.\sqrt{0,25} \quad b) B = (\sqrt{169} - \sqrt{121} - \sqrt{81}) : \sqrt{49}$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} a) A &= \sqrt{49} + \sqrt{25} - 4.\sqrt{0,25} \\ &= 7 + 5 - 4.0,5 \\ &= 7 + 5 - 2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B &= (\sqrt{169} - \sqrt{121} - \sqrt{81}) : \sqrt{49} \\ &= (13 - 11 - 9) : 7 \\ &= (-7) : 7 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Ví dụ minh họa 2. Tính giá trị biểu thức sau:

$$\text{a) } Q = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$$

$$\text{b) } P = 3\sqrt{5} - \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } Q = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| + \sqrt{2} \quad \text{vì } \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$$

$$\text{nên } |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } Q = \sqrt{3}.$$

$$\text{b) } P = 3\sqrt{5} - \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5} - |1 - \sqrt{5}| \quad \text{vì } 1 - \sqrt{5} < 0 \text{ nên } |1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$$

$$= 3\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)$$

$$= 3\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1$$

$$= 2\sqrt{5} + 1.$$

$$\text{Vậy } P = 2\sqrt{5} + 1.$$

Chú ý: Trong các bài toán tính giá trị biểu thức và bài toán rút gọn thường xuất hiện các dạng biểu thức “ẩn” của các hằng đẳng thức. Để tính toán và giải quyết nhanh bài toán, các em cần biến đổi, và sử dụng thành thạo các dạng của các hằng đẳng thức đáng nhớ.

Để đơn giản hoá việc nhận dạng và xử lý bài toán, các em có thể tham khảo sơ đồ bên dưới.

SƠ ĐỒ 4: SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC TRONG BÀI TOÁN CHỨA CĂN

Chú ý: $x = (\sqrt{x})^2$ $x \geq 0$; $x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$

CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ	VÍ DỤ MINH HOẠ
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1. $6 + 2\sqrt{5} = 5 + 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} + 1)^2$ 2. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$ 3. $x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	1. $6 - 2\sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} - 1)^2$ 2. $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + 2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$ 3. $\sqrt{x^2 + 3 - 4\sqrt{x^2 - 5}} = \sqrt{x^2 - 5 - 4\sqrt{x^2 - 5} + 4 + 4}$ $= \sqrt{(\sqrt{x^2 - 5})^2 - 4\sqrt{x^2 - 5} + 4 + 4} = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 5} - 2)^2 + 4} \geq 2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	1. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 1$ 2. $\frac{4-a}{2-\sqrt{a}} = \frac{2^2 - (\sqrt{a})^2}{2-\sqrt{a}} = \frac{(2-\sqrt{a})(2+\sqrt{a})}{2-\sqrt{a}} = 2 + \sqrt{a}$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	1. $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ 2. $\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{1-(\sqrt{a})^3}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}$ $= 1 + \sqrt{a} + a + \sqrt{a} = 1 + 2\sqrt{a} + a = (1 + \sqrt{a})^2$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	1. $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ 2. $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}[(\sqrt{x})^3 + 1]}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$ $= \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)^3} = \sqrt{3} + 1$ $(\sqrt{x} + 1)^3 = x\sqrt{x} + 3x + 3\sqrt{x} + 1$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} = \sqrt[3]{3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^3} = \sqrt{3} - 1$ $(\sqrt{x} - 1)^3 = x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$

b) $\sqrt{(-2)^6}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$

f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

e) $\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

b) $\left(\frac{8-4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2$

c) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

d) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1.**

a) Biến đổi biểu thức: $-0,8\sqrt{(-0,125)^2} = -0,8 \times |-0,125|$
 $= -0,8 \times 0,125 = -0,1$

Vậy biểu thức có giá trị là: $-0,1$

b) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(-2)^6} = |(-2)^3| = |-8| = 8$

Vậy biểu thức có giá trị là: 8

c) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$ vì $\sqrt{3}-2 < 0$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2-\sqrt{3}$

d) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} = |2\sqrt{2}-3| = 3-2\sqrt{2}$

vì $3-2\sqrt{2} = 3-\sqrt{8} = \sqrt{9}-\sqrt{8} > 0$

Vậy biểu thức có giá trị là: $3-2\sqrt{2}$

Bài 2.

a) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$
 $= |3-2\sqrt{2}| + |3+2\sqrt{2}|$

$= 3-2\sqrt{2} + 3+2\sqrt{2} = 6$ (vì $3-2\sqrt{2} > 0$)

Vậy biểu thức có giá trị là: 6

b) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$
 $= |5-2\sqrt{6}| - |5+2\sqrt{6}|$

$= (5-2\sqrt{6}) - (5+2\sqrt{6}) = -4\sqrt{6}$ (vì $5-2\sqrt{6} > 0$).

Vậy biểu thức có giá trị là: $-4\sqrt{6}$

c) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$
 $= |2-\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}|$

$= 2-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 1$ (vì $2-\sqrt{3} > 0$; $1-\sqrt{3} < 0$).

Vậy biểu thức có giá trị là: 1

d) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$
 $= |3+\sqrt{2}| - |1-\sqrt{2}|$

$$= 3 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 4 \quad (\text{vì } 3 + \sqrt{2} > 0; 1 - \sqrt{2} < 0).$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 4

$$\begin{aligned} \text{e) Biến đổi biểu thức: } & \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} \\ &= |\sqrt{5} - \sqrt{2}| + |\sqrt{5} + \sqrt{2}| \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{5} \quad \text{vì } \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0; \sqrt{5} + \sqrt{2} > 0 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{f) Biến đổi biểu thức: } & \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} \\ &= |\sqrt{2} + 1| - |\sqrt{2} - 5| \\ &= \sqrt{2} + 1 - (5 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 4 \quad (\text{vì } \sqrt{2} + 1 > 0; \sqrt{2} - 5 < 0) \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2\sqrt{2} - 4$

Bài 3.

$$\text{a) } \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$\text{Ta có: } 5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2;$$

$$5 - 2\sqrt{6} = 3 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } & \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} \\ &= |\sqrt{3} + \sqrt{2}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2} \quad (\text{vì } \sqrt{3} + \sqrt{2} > 0; \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0) \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2\sqrt{2}$.

$$\text{b) } \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$$

$$\text{Ta có: } 7 - 2\sqrt{10} = 5 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + 2 = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2;$$

$$7+2\sqrt{10}=5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2;$$

$$\begin{aligned}\text{Nên } & \sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|-\left|\sqrt{5}+\sqrt{2}\right|=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) \\ &= -2\sqrt{2} \quad (\text{vì } \sqrt{5}-\sqrt{2}>0; \sqrt{5}+\sqrt{2}>0)\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $-2\sqrt{2}$.

c) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}} \\ &= \left|\sqrt{3}-1\right|+\sqrt{3}+1=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2\sqrt{3}$

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{24+8\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{4\left(6+2\sqrt{5}\right)}+\sqrt{9-4\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{4\left(5+2\sqrt{5}+1\right)}+\sqrt{5-4\sqrt{5}+4} \\ &= \sqrt{4\left(\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}+1\right)}+\sqrt{\sqrt{5}^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot 2+2^2} \\ &= \sqrt{4\left(\sqrt{5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} \\ &= 2\left|\sqrt{5}+1\right|+\left|\sqrt{5}-2\right| \\ &= 2\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=3\sqrt{5}\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $3\sqrt{5}$

e) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{9-12\sqrt{2}+8}+\sqrt{8+4\sqrt{2}+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + 1^2} \\
&= \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} \\
&= |3 - 2\sqrt{2}| + |2\sqrt{2} + 1| \\
&= 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 = 4
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 4

f) Biến đổi biểu thức $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4 - 4\sqrt{2} + 2} + \sqrt{18 - 12\sqrt{2} + 4} \\
&= \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2} + \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2} \\
&= \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)^2} \\
&= |2 - \sqrt{2}| + |3\sqrt{2} - 2| \\
&= 2 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2\sqrt{2}$

Bài 4.

a) Biến đổi biểu thức $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} \\
&= (\sqrt{3} - \sqrt{2})|\sqrt{3} + \sqrt{2}| \\
&= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\
&= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1
\end{aligned}$$

b) Ta có: $\frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3} - 1} = (\sqrt{3} - 1);$

và $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 + \sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1)$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra: } & \left(\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \right)^2 - \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right)^2 \\ &= (\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{3}+1)^2 \\ &= (4-2\sqrt{3}) - (4+2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $-4\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\text{c) Biến đổi biểu thức } & \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{20-12\sqrt{5}+9}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-(2\sqrt{5}+3)}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 1

$$\begin{aligned}\text{d) Biến đổi biểu thức } & \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} \\ &= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)}} \\ &= \sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} \\ &= \sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{43+30\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{25+2.5.3\sqrt{2}+18} \\ &= \sqrt{(5+3\sqrt{2})^2} = 5+3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là $5+3\sqrt{2}$

c. Dạng 3. Rút gọn biểu thức**Ví dụ minh họa 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5\sqrt{25a^2} - 25a$ với $a < 0$

b) $\sqrt{49a^2} + 3a$ với $a \geq 0$

c) $\sqrt{16a^4} + 6a^2$ với a bất kỳ

d) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ với a bất kỳ.

Hướng dẫn giải:

a) $5\sqrt{25a^2} - 25a = 5 \cdot |5a| - 25a.$

Vì $a < 0$ nên $5a < 0$, do đó $|5a| = -5a$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } 5\sqrt{25a^2} - 25a &= 5 \cdot |5a| - 25a \\ &= 5 \cdot (-5a) - 25a \\ &= -25a - 25a = -50a.\end{aligned}$$

b) $\sqrt{49a^2} + 3a = |7a| + 3a.$

Vì $a \geq 0$ nên $7a \geq 0$, do đó $|7a| = 7a.$

$$\text{Vậy } \sqrt{49a^2} + 3a = |7a| + 3a = 7a + 3a = 10a.$$

c) $\sqrt{16a^4} + 6a^2 = |4a^2| + 6a^2.$

Với mọi a ta đều có $4a^2 \geq 0$ nên $|4a^2| = 4a^2.$

$$\text{Vậy } \sqrt{16a^4} + 6a^2 = |4a^2| + 6a^2 = 4a^2 + 6a^2 = 10a^2.$$

d) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3\sqrt{(3a^3)^2} - 6a^3 = 3 \cdot |3a^3| - 6a^3$

Với $a < 0$ thì $3a^3 < 0$ nên $|3a^3| = -3a^3$, ta có :

$$3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3 \cdot |3a^3| - 6a^3 = 3 \cdot (-3a^3) - 6a^3 = -9a^3 - 6a^3 = -15a^3$$

Với $a \geq 0$ thì $3a^3 \geq 0$ nên $|3a^3| = 3a^3$, ta có :

$$3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3 \cdot |3a^3| - 6a^3 = 3 \cdot (3a^3) - 6a^3 = 9a^3 - 6a^3 = 3a^3.$$

Ví dụ minh họa 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ với $x \geq 2$

b) $3x + \sqrt{9 + 6x + x^2}$ với $x < -3$

c) $\frac{x + 6\sqrt{x + 9}}{x - 9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

d) $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2}$ với $x \neq -2$.

Hướng dẫn giải:

a) Biến đổi biểu thức $4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4x - \sqrt{(x - 2)^2} = 4x - |x - 2|$

Vì $x \geq 2$ nên 0 , do đó $|x - 2| = x - 2$.

Vậy $4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4x - (x - 2) = 3x + 2$

b) Biến đổi biểu thức $3x + \sqrt{9 + 6x + x^2} = 3x + \sqrt{(3 + x)^2} = 3x + |3 + x|$

Vì $x < -3$ nên $3 + x < 0$, do đó $|3 + x| = -(3 + x)$

Vậy $3x + \sqrt{9 + 6x + x^2} = 3x - (3 + x) = 3x - 3 - x = 2x - 3$

c) Biến đổi biểu thức $\frac{x + 6\sqrt{x + 9}}{x - 9} = \frac{(\sqrt{x + 9})^2}{(\sqrt{x + 9})(\sqrt{x - 9})} = \frac{\sqrt{x + 9}}{\sqrt{x - 9}}$

d) Biến đổi biểu thức $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} = \frac{\sqrt{(x + 2)^2}}{x + 2} = \frac{|x + 2|}{x + 2}$

* Với $x < -2$ thì $x + 2 < 0$ nên $|x + 2| = -(x + 2)$

Vậy $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} = \frac{|x + 2|}{x + 2} = \frac{-(x + 2)}{x + 2} = -1$

* Với $x > -2$ thì $x + 2 > 0$ nên $|x + 2| = x + 2$

Vậy $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} = \frac{|x + 2|}{x + 2} = \frac{x + 2}{x + 2} = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} \quad (x \leq 3)$

b) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2} \quad (-2 \leq x \leq 0)$

c) $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \quad (x > 1)$

d) $|x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} \quad (x < 2)$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{1 - 4a + 4a^2} - 2a$

b) $x - 2y - \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$

c) $x^2 + \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$

d) $2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}$

e) $\frac{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}}{x^2 - 2}$

f) $\sqrt{(x - 4)^2} + \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$

Bài 3. Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}}$.a) Với giá trị nào của x thì A có nghĩa?b) Tính A nếu $x \geq \sqrt{2}$.**Bài 4.** Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện: $xy + yz + zx = 1$.

Tính: $A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } & x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} \quad (x \leq 3) \\ &= x + 3 + \sqrt{(x-3)^2} = x + 3 + |x-3| \text{ vì } x \leq 3 \text{ nên } |x-3| = -(x-3) \\ &= x + 3 - (x-3) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2} \quad (-2 \leq x \leq 0) \\ &= \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{x^2} = |x+2| + |x| \\ &\text{vì } x \geq -2 \text{ nên } |x+2| = x+2 \text{ và } x \leq 0 \text{ nên } |x| = -x \\ &= x + 2 - x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} \quad (x > 1) \\ &= \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \text{ vì } x > 1 \text{ nên } |x-1| = x-1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & |x-2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x-2} = |x-2| + \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} \\ &\text{vì } x < 2 \text{ nên } |x-2| = -(x-2) \\ \text{Biểu thức} &= |x-2| + \frac{|x-2|}{x-2} = -(x-2) + \frac{-(x-2)}{x-2} \\ &= -x + 2 - 1 = -x + 1 \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\begin{aligned} \text{a) Biến đổi biểu thức } & \sqrt{1-4a+4a^2} - 2a \\ &= \sqrt{(1-2a)^2} - 2a = |1-2a| - 2a \\ \text{Với } a \leq \frac{1}{2} \text{ thì } & 1-2a \geq 0 \text{ nên } |1-2a| = 1-2a, \text{ ta có :} \\ & \sqrt{1-4a+4a^2} - 2a = |1-2a| - 2a = 1-2a-2a = 1-4a \end{aligned}$$

Với $a \geq \frac{1}{2}$ thì $1-2a \leq 0$ nên $|1-2a| = 2a-1$, ta có :

$$\sqrt{1-4a+4a^2} - 2a = |1-2a| - 2a = 2a-1-2a = -1$$

b) Biến đổi biểu thức $x-2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2}$

$$= x-2y-\sqrt{(x-2y)^2} = x-2y-|x-2y|$$

Với $x-2y \leq 0$ thì $|x-2y| = -(x-2y)$, ta có :

$$x-2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2} = x-2y-|x-2y| = x-2y+(x-2y) = 2x-4y$$

Với $x-2y \geq 0$ thì $|x-2y| = (x-2y)$, ta có :

$$x-2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2} = x-2y-|x-2y| = x-2y-(x-2y) = 0$$

c) $x^2+\sqrt{x^4-8x^2+16} = x^2+\sqrt{(x^2-4)^2} = x^2+|x^2-4|$

Với $x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ thì $|x^2-4| = -(x^2-4)$, ta có :

$$x^2+\sqrt{x^4-8x^2+16} = x^2+|x^2-4| = x^2-(x^2-4) = 4$$

Với $x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$ thì $|x^2-4| = (x^2-4)$, ta có :

$$x^2+\sqrt{x^4-8x^2+16} = x^2+|x^2-4| = x^2+(x^2-4) = 2x^2-4$$

d) $2x-1-\frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5} = 2x-1-\frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5} = 2x-1-\frac{|x-5|}{x-5}$

Với $x-5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ thì $|x-5| = -(x-5)$, ta có :

$$2x-1-\frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5} = 2x-1-\frac{|x-5|}{x-5} = 2x-1+\frac{x-5}{x-5} = 2x$$

Với $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ thì $|x-5| = (x-5)$, ta có :

$$2x-1-\frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5} = 2x-1-\frac{|x-5|}{x-5} = 2x-1-\frac{x-5}{x-5} = 2x-2$$

Bài 3. Biểu thức $A = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}}$

a) Biểu thức xác định khi $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 1$.

b) Tính A với $x \geq \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \sqrt{(x^2 - 1) + 2\sqrt{x^2 - 1} + 1} - \sqrt{(x^2 - 1) - 2\sqrt{x^2 - 1} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2} \\ &= |\sqrt{x^2 - 1} + 1| + |\sqrt{x^2 - 1} - 1| \end{aligned}$$

Với $x \geq \sqrt{2}$ thì $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} - 1 \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } A &= |\sqrt{x^2 - 1} + 1| + |\sqrt{x^2 - 1} - 1| \\ &= \sqrt{x^2 - 1} + 1 + \sqrt{x^2 - 1} - 1 \\ &= 2\sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Bài 4. Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện: $xy + yz + zx = 1$.

$$\text{Tính: } A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 1 + y^2 &= (xy + yz + zx) + y^2 = xy + y^2 + yz + zx \\ &= y(x + y) + z(y + x) = (x + y)(y + z) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } 1 + z^2 = (y + z)(z + x)$$

$$1 + x^2 = (z + x)(x + y)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} * \quad x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} &= x\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(x+z)(y+z)}{(x+y)(x+z)}} \\ &= x\sqrt{(y+z)^2} = x(y+z) \end{aligned}$$

$$* y \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} = y \sqrt{\frac{(x+z)(y+z)(x+z)(x+y)}{(x+y)(y+z)}}$$

$$= y \sqrt{(x+z)^2} = y(z+x)$$

$$* z \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = z \sqrt{\frac{(x+y)(x+z)(x+y)(y+z)}{(x+z)(y+z)}}$$

$$= z \sqrt{(x+y)^2} = z(x+y)$$

$$\text{Vậy } A = x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 2(xy + yz + xz) = 2$$

d. Dạng 4. Giải phương trình

Ví dụ minh họa 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 11 = 0$

b) $x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 0$

Hướng dẫn giải:

a) $x^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{11})(x - \sqrt{11}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{11} \text{ hoặc } x = -\sqrt{11}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\}$

b) $x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{13})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{13} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{13}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{\sqrt{13}\}$

Ví dụ minh họa 2. Giải các phương trình sau:

a) $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$

b) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 7 - 2x$

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện: $x \geq 0$. PT:

$$x - 9\sqrt{x} + 14 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 9\sqrt{x} + 14 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 7) = 0$$

Suy ra: $\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

hoặc $\sqrt{x} - 7 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = 49$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \{4; 49\}$

$$\text{b) } \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 7 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2} = 7 - 2x \Leftrightarrow |x-5| = 7 - 2x$$

Với $x < 5$ thì $x-5 < 0 \Rightarrow |x-5| = 5-x$, nên:

$$|x-5| = 7-2x \Leftrightarrow 5-x = 7-2x \Leftrightarrow x = 2 \text{ thỏa điều kiện.}$$

Với $x \geq 5$ thì $x-5 \geq 0 \Rightarrow |x-5| = x-5$, nên:

$$|x-5| = 7-2x \Leftrightarrow x-5 = 7-2x \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4 \text{ không thỏa điều kiện.}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Để đơn giản hoá việc nhận dạng và xử lý bài toán, các em có thể tham khảo sơ đồ bên dưới.

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Dạng toán	Ví dụ minh họa
$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$	$1. x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2$ $2. (x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = x \Leftrightarrow 0x = 1 \text{ (PTVN)} \\ x-1 = -x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$
$\sqrt{A} = \sqrt{B}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$	$\sqrt{2x+5} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x+5 = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ (thỏa)}$
$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ - Nếu $B < 0$ thì phương trình vô nghiệm.	$\sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1-x^2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \end{cases}$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

$ A = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$	$ 2-3x = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x=5 \\ 2-3x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{7}{3} \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-1; \frac{7}{3}\right\}$ $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = 2x \Leftrightarrow \left x+\frac{1}{2}\right = 2x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+\frac{1}{2} = 2x \\ x+\frac{1}{2} = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\frac{1}{6} \text{ (loại)} \end{cases}$ Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{1}{2}$
$ A = B $ $\Leftrightarrow A = B \text{ hay } A = -B$	$ 3x+1 = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = x+3 \\ 3x+1 = -x-3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ 4x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{-1; 1\}$
$ A + B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$	$ x+5 + x^2-25 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ x^2-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=5 \\ x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5$ Vậy nghiệm của phương trình: $x = -5$
$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$	$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$ Vậy nghiệm của phương trình: $x = -1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$

b) $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$

c) $\sqrt{1-12x+36x^2} = 5$

d) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} = 2$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$

b) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x}$

c) $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$

d) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+x} = x$

b) $\sqrt{1-x^2} = x-1$

c) $\sqrt{x^2-4x+3} = x-2$

d) $\sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1$

b) $\sqrt{4x^2-4x+1} = x-1$

c) $\sqrt{x^4-2x^2+1} = x-1$

d) $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = x$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $|3x+1| = |x+1|$

b) $|x^2-3| = |x-\sqrt{3}|$

c) $\sqrt{9x^2-12x+4} = \sqrt{x^2}$

d) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x \Leftrightarrow |x-3| = 3-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 = 3-x \\ x-3 = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x = 6 \\ 0x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 3 \\ 0x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 3$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là $x \leq 3$.

$$b) \sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-5)^2} = 5 - 2x$$

$$\Leftrightarrow |2x-5| = 5 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ 2x - 5 = 5 - 2x \\ 2x - 5 = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x = \frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ 0x = 0 \text{ (Đúng với mọi } x \leq \frac{5}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $x \leq \frac{5}{2}$

$$c) \text{ Biến đổi biểu thức } \sqrt{1-12x+36x^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-6x)^2} = 5 \Leftrightarrow |1-6x| = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-6x = 5 \\ 1-6x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$

$$d) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2. \text{ Điều kiện: } x \geq 1$$

$$\text{Biến đổi biểu thức } \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}+1 = 2 \\ \sqrt{x-1}+1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} = -1 \text{ (PTVN)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$

Bài 2.

a) Biến đổi biểu thức $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2x+5 = 1-x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{4}{3}$

b) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2-x = 3-x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \geq 0 \\ 2x^2-3 = 4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ 2x^2-4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ \begin{cases} x = 0 \text{ (không thỏa mãn)} \\ x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = 2$

d) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 3.

a) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2+x} = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

b) Biến đổi biểu thức $\sqrt{1-x^2} = x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^2 + (x-1)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)[(x-1) + (x+1)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (không thỏa mãn)} \Leftrightarrow x = 1 \\ x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1$

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0x = 1 \end{cases} \text{ (PTVN)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2 - 1} - x^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 = (x^2 - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ (x^2 - 1)[1 - (x^2 - 1)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ (x^2 - 1)(2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x^2 - 1 = 0 \\ 2 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\Leftrightarrow x = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $x = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$.

Bài 4.

a) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = x^2 - 1 \Leftrightarrow |x-1| = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 1 = x^2 - 1 \\ x - 1 = -(x^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \\ x - 1 + (x - 1)(x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x(x - 1) = 0 \\ (x - 1)(x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x = 0 \text{ (không thỏa mãn)} \\ x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-2; 1\}$

b) Biến đổi biểu thức $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)^2} = x - 1 \Leftrightarrow |2x - 1| = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = x - 1 \\ 2x - 1 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (không thỏa mãn)} \\ x = \frac{2}{3} \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)^2} = x - 1 \Leftrightarrow |x^2 - 1| = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 = x - 1 \\ x^2 - 1 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \\ (x^2 - 1) + (x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x - 1) = 0 \\ (x - 1)(x + 1) + (x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x - 1) = 0 \\ (x - 1)(x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (không thỏa mãn)} \\ x = 1 \\ x = 1 \\ x = -2 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1$

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = x \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} = x \\ x + \frac{1}{2} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0x = -\frac{1}{2} \\ 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0x = -\frac{1}{2} \text{ (PTVN)} \\ x = -\frac{1}{4} \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) Biến đổi biểu thức $|3x + 1| = |x + 1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = x + 1 \\ 3x + 1 = -(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}$

b) Biến đổi biểu thức $|x^2 - 3| = |x - \sqrt{3}| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = x - \sqrt{3} \\ x^2 - 3 = -(x - \sqrt{3}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) - (x - \sqrt{3}) = 0 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) + (x - \sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3} - 1) = 0 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3} + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3} = 0 \\ x + \sqrt{3} - 1 = 0 \\ x - \sqrt{3} = 0 \\ x + \sqrt{3} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-1 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

c) Biến đổi biểu thức $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = \sqrt{x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x-2)^2} = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow |3x-2| = |x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=x \\ 3x-2=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ 4x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) = 0 \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+2=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -2$

II. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP KHAI PHƯƠNG VÀ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA

1. Kiến thức trọng tâm

a. Khai phương một tích: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

Nhân các căn thức bậc hai: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

b. Khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

Chia các căn bậc hai: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Thực hiện phép tính

Ví dụ minh họa 1. Tính:

a) $\sqrt{810.40}$

b) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{0,5}$

c) $\sqrt{\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^3}}$

d) $\frac{\sqrt{180} : \sqrt{5}}{\sqrt{200} : \sqrt{8}}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{810.40} &= \sqrt{81.100.4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{4} \\ &= \sqrt{9^2} \cdot \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{2^2} = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180. \text{ Vậy biểu thức có giá trị là: } 180 \end{aligned}$$

b) Ta có: $\sqrt{24} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{0,5} = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 0,5} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$.

c) Ta có $\sqrt{\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^3}} = \sqrt{\frac{(3 \cdot 4)^5}{3^5 \cdot 4^3}} = \sqrt{\frac{3^5 \cdot 4^5}{3^5 \cdot 4^3}} = \sqrt{4^2} = 4$

Vậy biểu thức có giá trị là: 4

d) Ta có $\frac{\sqrt{180} : \sqrt{5}}{\sqrt{200} : \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{180 : 5}}{\sqrt{200 : 8}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$

Vậy biểu thức có giá trị là: 1,2

Ví dụ minh họa 2.a) So sánh: $\sqrt{16+4}$ và $\sqrt{16}+\sqrt{4}$ b) Với $a > 0; b > 0$. Chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *Hướng dẫn giải:*

a) Ta có:

$$\sqrt{16} + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6 = \sqrt{36} \quad (1)$$

$$\sqrt{16+4} = \sqrt{20} < \sqrt{36} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\sqrt{16+4} < \sqrt{16} + \sqrt{4}$ b) Với $a > 0; b > 0$, giả sử $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$ Để so sánh $\sqrt{a+b}$ với $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ta so sánh $(\sqrt{a+b})^2$ với $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

$$\text{Ta có: } (\sqrt{a+b})^2 = a+b$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$$

Vì $2\sqrt{ab} > 0$ nên suy ra $(\sqrt{a+b})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.Do đó $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.**Ví dụ minh họa 3.** Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = (\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt{2} \quad \text{b) } B = \sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{200} - \sqrt{162}$$

Hướng dẫn giải:

a) Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép nhân các căn thức bậc hai của các số không âm, ta có:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{50} \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{18 \cdot 2} + \sqrt{32 \cdot 2} - \sqrt{50 \cdot 2} \\ &= \sqrt{36} + \sqrt{64} - \sqrt{100} \\ &= 6 + 8 - 10 \\ &= 4 \end{aligned}$$

b) Sử dụng phép khai phương một tích của các số không âm, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{200} - \sqrt{162} \\ &= \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2} - \sqrt{81 \cdot 2} \\ &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{81} \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{25} - \sqrt{9} + \sqrt{100} - \sqrt{81}) \\ &= \sqrt{2} \cdot (5 - 3 + 10 - 9) \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

* **Nhận xét:** Trong các *BÀI TẬP TỰ LUYỆN* dạng này, các em cần chú ý xem xét căn chung, và chú ý đến việc áp dụng kiến thức hằng đẳng thức trong *SƠ ĐỒ 4*.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.** Tính:

a) $\sqrt{49.36.100}$

b) $\sqrt{0,45.0,3.6}$

c) $\sqrt{147.75}$

d) $\sqrt{4,9.1200.0,3}$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{5}.\sqrt{45}$

b) $\sqrt{13}.\sqrt{52}$

c) $\sqrt{12,5}.\sqrt{0,2}.\sqrt{0,1}$

d) $\sqrt{48,4}.\sqrt{5}.\sqrt{0,5}$

Bài 3. Tính:

a) $\sqrt{45} : \sqrt{80}$

b) $\sqrt{13} : \sqrt{468}$

c) $\sqrt{\frac{3}{15}} : \sqrt{\frac{36}{45}}$

d) $\sqrt{\frac{288}{169}} : \sqrt{\frac{8}{225}}$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{\frac{72}{9}} : \sqrt{8}$

b) $(7\sqrt{48} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{12}) : \sqrt{3}$

c) $(\sqrt{125} + \sqrt{245} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$

d) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}$

b) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{75})\sqrt{3}$

c) $\sqrt{252} - \sqrt{700} + \sqrt{1008} - \sqrt{448}$

d) $\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3})$

Bài 6. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

b) $(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})$

c) $(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})^2$

d) $\sqrt{15-\sqrt{216}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{aligned} \text{a) Biến đổi biểu thức: } \sqrt{49.36.100} &= \sqrt{49}.\sqrt{36}.\sqrt{100} \\ &= \sqrt{7^2}.\sqrt{6^2}.\sqrt{10^2} = 7.6.10 = 420 \end{aligned}$$

$$\text{b) Biến đổi biểu thức: } \sqrt{0,45.0,3.6} = \sqrt{0,81} = \sqrt{0,9^2} = 0,9$$

$$\begin{aligned} \text{c) Biến đổi biểu thức: } \sqrt{147.75} &= \sqrt{49.3.3.25} \\ &= \sqrt{49.9.25} = \sqrt{49}.\sqrt{9}.\sqrt{25} = 7.3.5 = 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Biến đổi biểu thức: } \sqrt{4,9.1200.0,3} &= \sqrt{49.0,1.12.100.3.0,1} \\ &= \sqrt{49.36} = \sqrt{49}.\sqrt{36} = 7.6 = 42 \end{aligned}$$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \sqrt{5}.\sqrt{45} = \sqrt{5.45} = \sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$$

$$\text{b) } \sqrt{13}.\sqrt{52} = \sqrt{13.52} = \sqrt{676} = 26$$

$$\text{c) } \sqrt{12,5}.\sqrt{0,2}.\sqrt{0,1} = \sqrt{12,5.0,2.0,1} = \sqrt{0,25} = 0,5$$

$$\text{d) } \sqrt{48,4}.\sqrt{5}.\sqrt{0,5} = \sqrt{48,4.5.0,5} = \sqrt{122} = 11$$

Bài 3. Tính:

$$\text{a) } \sqrt{45} : \sqrt{80} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{45}{80}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \sqrt{13} : \sqrt{468} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{468}} = \sqrt{\frac{13}{468}} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{3}{15}} : \sqrt{\frac{36}{45}} = \sqrt{\frac{3}{15} : \frac{36}{45}} = \sqrt{\frac{3}{15} \cdot \frac{45}{36}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt{\frac{288}{169}} : \sqrt{\frac{8}{225}} &= \sqrt{\frac{288}{169} : \frac{8}{225}} = \sqrt{\frac{288}{169} \cdot \frac{225}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{36.225}{169}} = \frac{\sqrt{36}.\sqrt{225}}{\sqrt{169}} = \frac{6.15}{13} = \frac{90}{13} \end{aligned}$$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{\frac{72}{9}} : \sqrt{8} = \sqrt{\frac{72}{9} : 8} = \sqrt{\frac{72}{9} \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt{1} = 1$

Vậy biểu thức có giá trị là: 1

b) Biến đổi biểu thức: $(7\sqrt{48} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{12}) : \sqrt{3}$
 $= (28\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) : \sqrt{3} = 33\sqrt{3} : \sqrt{3} = 33$

Vậy biểu thức có giá trị là: 33

c) Biến đổi biểu thức: $(\sqrt{125} + \sqrt{245} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$
 $= (5\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{5}) : \sqrt{5} = 11\sqrt{5} : \sqrt{5} = 11$

Vậy biểu thức có giá trị là: 11

d) Biến đổi biểu thức: $(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}) : \sqrt{7}$
 $= (\frac{\sqrt{7}}{7} - \frac{4\sqrt{7}}{7} + \sqrt{7}) : \sqrt{7} = \frac{4\sqrt{7}}{7} : \sqrt{7} = \frac{4}{7}$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\frac{4}{7}$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

a) Ta có: $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3}(2 - 3 + 1) = 0$

b) Ta có: $(\sqrt{12} - 2\sqrt{75})\sqrt{3} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{75} \cdot \sqrt{3}$
 $= \sqrt{36} - 2\sqrt{225} = 6 - 2 \cdot 15 = -24$

c) Ta có: $\sqrt{252} - \sqrt{700} + \sqrt{1008} - \sqrt{448}$
 $= 6\sqrt{7} - 10\sqrt{7} + 12\sqrt{7}$
 $= (6 - 10 + 12)\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3})$

$$= \sqrt{3}(2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3})$$

$$= \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4 = 12$$

Bài 6. Thực hiện các phép tính sau:

a) Biến đổi biểu thức $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{3}+1|}{\sqrt{2}} - \frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\sqrt{2}$

b) Biến đổi biểu thức $(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\begin{aligned} &= \left[(1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 \right] = \left[(1+2\sqrt{3}+3) - 2 \right] \\ &= 4+2\sqrt{3}-2 = 2+2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2+2\sqrt{3}$

c) Biến đổi biểu thức $(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})^2$

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} \right)^2 + 2\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} + \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} \right)^2 \\ &= (3-\sqrt{5}) + 2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} + (3+\sqrt{5}) \\ &= 3-\sqrt{5} + 2\sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} + 3+\sqrt{5} \\ &= 6+2\sqrt{9-5} = 6+4 = 10 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 10

$$\begin{aligned} \text{d) Biểu đồ biểu thức } & \sqrt{15-2\sqrt{16}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}} = \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{6})^2} \\ &= |3-\sqrt{6}| + |3-2\sqrt{6}| = (3-\sqrt{6}) + (2\sqrt{6}-3) \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\sqrt{6}$.

b. Dạng 2. Rút gọn biểu thức và tính giá trị biểu thức

Ví dụ minh họa 1. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $5\sqrt{25a^2} - 25a$ với $a < 0$ b) $\sqrt{49a^2} + 3a$ với $a \geq 0$
c) $\sqrt{16a^4} + 6a^2$ với a bất kì d) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ với a bất kì.

Hướng dẫn giải:

a) Biểu thức $5\sqrt{25a^2} - 25a = 5 \cdot |5a| - 25a$

vì $a < 0$ nên $5a < 0$, do đó $|5a| = -5a$.

Vậy $5\sqrt{25a^2} - 25a = 5 \cdot (-5a) - 25a = -25a - 25a = -50a$.

b) Biểu thức $\sqrt{49a^2} + 3a = |7a| + 3a$.

Với $a \geq 0$ nên $7a \geq 0$, do đó $|7a| = 7a$.

Vậy $\sqrt{49a^2} + 3a = 7a + 3a = 10a$.

c) Biểu thức $\sqrt{16a^4} + 6a^2 = |4a^2| + 6a^2$.

Với mọi a ta đều có $4a^2 \geq 0$ nên $|4a^2| = 4a^2$.

Vậy $\sqrt{16a^4} + 6a^2 = 4a^2 + 6a^2 = 10a^2$.

d) Biểu thức $3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3 \cdot |3a^3| - 6a^3$.

Nếu $a \geq 0$ thì $3a^3 \geq 0$ nên $|3a^3| = 3a^3$,

ta có: $3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3 \cdot 3a^3 - 6a^3 = 3a^3$

Nếu $a < 0$ thì $3a^3 < 0$ nên $|3a^3| = -3a^3$, ta có:

$$3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3(-3a^3) - 6a^3 = -15a^3.$$

Ví dụ minh họa 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ với $x \geq 2$

b) $3x + \sqrt{9 + 6x + x^2}$ với $x < -3$

c) $\frac{x + 6\sqrt{x} + 9}{x - 9}$ với $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$

d) $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2}$ với $x \neq -2$

Hướng dẫn giải:

a) Biểu thức $4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4x - \sqrt{(x - 2)^2} = 4x - |x - 2|$

Vì $x \geq 2$ nên $x - 2 \geq 0$, do đó $|x - 2| = x - 2$.

Vậy $4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4x - (x - 2) = 3x + 2$

b) Biểu thức $3x + \sqrt{9 + 6x + x^2} = 3x + \sqrt{(3 + x)^2} = 3x + |3 + x|$

Vì $x < -3$ nên $3 + x < 0$, do đó $|3 + x| = -(3 + x)$

Vậy $3x + \sqrt{9 + 6x + x^2} = 3x - (3 + x) = 2x - 3$

c) Biểu thức $\frac{x + 6\sqrt{x} + 9}{x - 9} = \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}$

d) Biểu thức $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} = \frac{\sqrt{(x + 2)^2}}{x + 2} = \frac{|x + 2|}{x + 2}$

Với $x > -2$ thì $x + 2 > 0$ nên $|x + 2| = x + 2$.

Vậy $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} = \frac{x + 2}{x + 2} = 1$

Với $x < -2$ thì $x + 2 < 0$ nên $|x + 2| = -(x + 2)$.

Vậy $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} = \frac{-(x + 2)}{x + 2} = -1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Rút gọn các biểu thức:

$$a) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$$

$$b) \frac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$$

$$c) \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$d) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{x + \sqrt{xy}}{y + \sqrt{xy}} \text{ với } (x > 0; y > 0)$$

$$b) \frac{\sqrt{a} + a\sqrt{b} - \sqrt{b} - b\sqrt{a}}{ab - 1} \text{ với } \begin{cases} a > 0; b > 0 \\ ab \neq 1 \end{cases}$$

$$c) \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$d) \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} \quad (x \geq 0)$$

$$e) \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} \quad (x \neq 1, y \neq 1, y > 0)$$

Bài 3. Rút gọn và tính:

$$a) \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}} \text{ với } a = 7,25; b = 3,25$$

$$b) \sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16} \text{ với } a = \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$c) \sqrt{10a^2 - 4a\sqrt{10} + 4} \text{ với } a = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$d) \sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}} \text{ với } a = \sqrt{5}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Rút gọn các biểu thức:

a) Biểu thức: $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{7}(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

Biểu thức rút gọn là: $\sqrt{\frac{3}{7}}$

b) Biểu thức: $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Biểu thức rút gọn là: $\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) Biểu thức: $\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

$$= \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{5}(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}(1-\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

Biểu thức rút gọn là: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

d) Biểu thức: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+2+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{\sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\
&= 1 + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = 1 + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $1 + \sqrt{2}$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) Với $(x > 0; y > 0)$ thì $\frac{x + \sqrt{xy}}{y + \sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{y} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Biểu thức rút gọn là: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

b) Với $\begin{cases} a > 0; b > 0 \\ ab \neq 1 \end{cases}$ thì $\frac{\sqrt{a} + a\sqrt{b} - \sqrt{b} - b\sqrt{a}}{ab - 1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{a}(1 + \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 + \sqrt{ab})}{(\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{ab} + 1)} = \frac{(1 + \sqrt{ab})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{ab} + 1)} \\
&= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab} - 1}
\end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab} - 1}$

c) Biểu thức $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x}^3 + \sqrt{y}^3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (x - 2\sqrt{xy} + y) \\
&= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (x - 2\sqrt{xy} + y) \\
&= x - \sqrt{xy} + y - x + 2\sqrt{xy} - y \\
&= \sqrt{xy}
\end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $\sqrt{xy}$

d) Với $(x \geq 0)$ nên $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{|\sqrt{x}+1|} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$

Biểu thức rút gọn là: $\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$

e) Biểu thức $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} \quad (x \neq 1, y \neq 1, y > 0)$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(\sqrt{y}-1)^2}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{|\sqrt{y}-1|}{(x-1)^2}$$

Nếu $0 < y < 1 \Rightarrow \sqrt{y}-1 < 0 \Rightarrow |\sqrt{y}-1| = -(\sqrt{y}-1)$,

Thì $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{|\sqrt{y}-1|}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{-(\sqrt{y}-1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}$

Nếu $y > 1 \Rightarrow \sqrt{y}-1 > 0 \Rightarrow |\sqrt{y}-1| = (\sqrt{y}-1)$,

Thì $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{|\sqrt{y}-1|}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{(\sqrt{y}-1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$

Bài 3. Rút gọn và tính:

a) Ta có: $\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{b}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-1)}} = \sqrt{\frac{a-1}{b-1}}$$

Với $a = 7,25; b = 3,25$ thay vào ta được: $\sqrt{\frac{7,25-1}{3,25-1}} = \sqrt{\frac{6,25}{2,25}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\frac{5}{3}$.

$$\text{b) Ta có: } \sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16} = \sqrt{(\sqrt{15}a - 4)^2} = |\sqrt{15}a - 4|$$

Với $a = \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$ thay vào ta được:

$$\begin{aligned} |\sqrt{15}a - 4| &= \left| \sqrt{15} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) - 4 \right| \\ &= \left| \sqrt{15} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{15} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} - 4 \right| = |3 + 5 - 4| = 4 \end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có: } \sqrt{10a^2 - 4a\sqrt{10} + 4} = \sqrt{(a\sqrt{10} - 2)^2} = |a\sqrt{10} - 2|$$

Với $a = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ thay vào ta được:

$$\begin{aligned} |a\sqrt{10} - 2| &= \left| \left(\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \sqrt{10} - 2 \right| \\ &= \left| \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{10} + \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{10} - 2 \right| = |2 + 5 - 2| = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có: } &\sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}} \\ &= \sqrt{(a^2 - 1) + 2\sqrt{a^2 - 1} + 1} - \sqrt{(a^2 - 1) - 2\sqrt{a^2 - 1} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a^2 - 1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{a^2 - 1} - 1)^2} \\ &= |\sqrt{a^2 - 1} + 1| - |\sqrt{a^2 - 1} - 1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Với } a = \sqrt{5} \text{ thay vào ta được: } &|\sqrt{a^2 - 1} + 1| - |\sqrt{a^2 - 1} - 1| \\ &= |\sqrt{\sqrt{5}^2 - 1} + 1| - |\sqrt{\sqrt{5}^2 - 1} - 1| = |\sqrt{5 - 1} + 1| - |\sqrt{5 - 1} - 1| \\ &= |\sqrt{4} + 1| - |\sqrt{4} - 1| \\ &= |2 + 1| - |2 - 1| = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

c. Dạng 3. Giải phương trình**Ví dụ minh họa 1.** Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5} = 5$

b) $\sqrt{x-7} + 3 = 0$

c) $\sqrt{10(x-3)} = \sqrt{20}$

d) $\sqrt{3x^2} = x+2$

Hướng dẫn giải:

e) Điều kiện xác định là $2x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$

Khi đó, phương trình được đưa về dạng:

$$2x+5=25 \Leftrightarrow 2x=20 \Leftrightarrow x=10 \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=10$.

f) Điều kiện xác định là $x \geq 7$.

$$\sqrt{x-7} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-7} = -3$$

với mọi $x \geq 7$ ta có $\sqrt{x-7} \geq 0$ và $-3 < 0$. Vậy phương trình vô nghiệm.

g) Điều kiện xác định là $x \geq 3$

Khi đó, phương trình được đưa về dạng:

$$10(x-3) = 20 \Leftrightarrow x-3=2 \Leftrightarrow x=5.$$

Vậy $x=5$ là nghiệm của phương trình.

h) Với $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ thì

$$\sqrt{3x^2} = x+2 \Leftrightarrow 3x^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\sqrt{3}=0 \\ x-1-\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1-\sqrt{3}$; $x=1+\sqrt{3}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{10}$

b) $\sqrt{16-7x} = 11$

c) $\sqrt{x^2+6x+9} = 3x-6$

d) $\sqrt{x^2-4x+4} - 2x + 5 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) Điều kiện có nghĩa: $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

Khi đó, phương trình $\sqrt{3x+1} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 3x+1 = 10 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 3$

b) $\sqrt{16-7x} = 11$

Điều kiện có nghĩa: $16-7x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{16}{7}$

Khi đó, phương trình $\sqrt{16-7x} = 11 \Leftrightarrow 16-7x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{5}{7}$

c) $\sqrt{x^2+6x+9} = 3x-6 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2} = 3x-6 \Leftrightarrow |x+3| = 3x-6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6 \geq 0 \\ x+3 = 3x-6 \\ x+3 = -3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{9}{2} (TM) \\ x = \frac{3}{4} (L) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{9}{2}$

d) $\sqrt{x^2-4x+4} - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 2x-5 \Leftrightarrow |x-2| = 2x-5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ x+3=2x-5 \\ x+3=-2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x=8(TM) \\ x=\frac{2}{3}(L) \end{cases}$$

III. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

1. Kiến thức trọng tâm

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

+ Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$

+ Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn.

+ Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$

+ Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn.

+ Với $A.B \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$

4. Trục căn thức ở mẫu.

+ Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

+ Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}$

+ Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$

Để đơn giản hoá việc nhận dạng và xử lý bài toán, các em có thể tham khảo sơ đồ bên dưới.

MỘT SỐ DẠNG CƠ BẢN BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI

Dạng toán	Ví dụ minh họa
Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$	$\sqrt{49.5} = \sqrt{7^2.5} = 7\sqrt{5}$
Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$	$\sqrt{(-3)^2.13} = -(-3).\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$
Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$	$* 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{12}$
Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$	$* -3\sqrt{7} = -\sqrt{(-3)^2.7} = -\sqrt{63}$ $* x\sqrt{y} = -\sqrt{x^2.y} = -\sqrt{x^2 y}$ với $x < 0$
Với $A.B > 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{ B }$	$* \sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5.7}{7^2}} = \frac{\sqrt{35}}{ 7 } = \frac{\sqrt{35}}{7}; \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{xy}{y^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{ y }$ với $xy > 0$
Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$	$* \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$
Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}$	$* \frac{3}{\sqrt{5}+2} = \frac{3(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$ $= \frac{3(\sqrt{5}-2)}{5-2^2} = \frac{3(\sqrt{5}-2)}{1} = 3(\sqrt{5}-2)$ $* \frac{5}{\sqrt{7}-2} = \frac{5(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$ $= \frac{5(\sqrt{7}+2)}{7-2^2} = \frac{5(\sqrt{7}+2)}{3}$
Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}$	$* \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$

	$= \frac{5(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7-3} = \frac{5(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4}$ $* \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})}$ $= \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{7-5} = \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$
--	---

2. Các dạng toán

Ví dụ minh họa 1. Rút gọn các biểu thức sau bằng cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{245.35}$

b) $\sqrt{63a^2}$ với $a < 0$

c) $\frac{2xy^2}{3ab} \cdot \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}$ với $a, b, x, y > 0$

Hướng dẫn giải:

a) Biểu thức $\sqrt{245.35} = \sqrt{49.5.5.7}$
 $= \sqrt{49} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 7.5 \cdot \sqrt{7} = 35\sqrt{7}.$

b) Biểu thức $\sqrt{63a^2} = \sqrt{9.7.a^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} = 3\sqrt{7} \cdot |a|$

Vì $a < 0$ nên $|a| = -a$. Do đó: $\sqrt{63a^2} = -3\sqrt{7}a.$

c) Biểu thức $\frac{2xy^2}{3ab} \cdot \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}} = \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \frac{\sqrt{9a^2 \cdot a \cdot b^4}}{\sqrt{4 \cdot 2x \cdot y^2 \cdot y}}$
 $= \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^4}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2xy} \cdot \sqrt{y^2}}$
 $= \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \frac{3 \cdot |a| b^2 \cdot \sqrt{a}}{2 \cdot |y| \sqrt{2xy}}$
 $= \frac{2xy^2 \cdot 3 \cdot |a| b^2}{3ab \cdot 2 \cdot |y|} \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}}$

$$\begin{aligned} \text{Vì } a, b, x, y > 0 \text{ nên } |a| = a; |y| = y, \text{ ta có: } & \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}} \\ &= \frac{2xy^2 \cdot 3 \cdot ab^2}{3ab \cdot 2 \cdot y} \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}} = bxy \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}} \end{aligned}$$

Ví dụ minh họa 2. So sánh:

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6}$ và $6 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$

c) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ và $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

a) Đưa thừa số vào trong dấu căn rồi so sánh các căn thức tìm được.

Ta có: $2\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{12}$;

$$3\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{18}$$

Vì $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

b) Biến đổi tương tự câu a, ta có:

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$6 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 6^2} = \sqrt{12}$$

Vì $\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{12}$ nên $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} < 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$.

c) Ta có:

$$\begin{aligned} * \sqrt{7} - \sqrt{5} &= \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} \\ &= \frac{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{7 - 5}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} \\ * \sqrt{5} - \sqrt{3} &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{5-3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

Vì $\sqrt{7} + \sqrt{5} > \sqrt{5} + \sqrt{3}$ nên $\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Vậy $\sqrt{7} - \sqrt{5} < \sqrt{5} - \sqrt{3}$

Ví dụ minh họa 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{2 - \sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải:

a) Cách 1: Phân tích tử thành nhân tử rồi rút gọn.

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Cách 2: Trục căn thức ở mẫu.

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{3 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3}{1 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

b) Cách 1: Phân tích tử thành nhân tử rồi rút gọn.

$$\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Cách 2: Trục căn thức ở mẫu.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{2 - \sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{14} - \sqrt{7})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{14} - 2\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{14}}{2^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{14} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - \sqrt{14}}{4 - 2} = \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

a) $\sqrt{49.360}$

b) $-\sqrt{500.162}$

c) $\sqrt{125a^2}$ với $a < 0$

d) $\frac{1}{3}\sqrt{225a^2}$ với a tùy ý

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn :

a) $5\sqrt{2}$

b) $-2\sqrt{5}$

c) $x\sqrt{\frac{13}{xy}}$ với $x > 0; y > 0$

d) $x\sqrt{\frac{-37}{x}}$ với $x < 0$

Bài 3. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần :

a) $5\sqrt{2}; 2\sqrt{5}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27}; 6\sqrt{\frac{1}{3}}; 2\sqrt{28}; 5\sqrt{7}$

c) $4\sqrt{2}; \sqrt{37}; 3\sqrt{7}; 2\sqrt{15}$

d) $3\sqrt{6}; 2\sqrt{7}; \sqrt{39}; 5\sqrt{2}$

Bài 4. So sánh :

a) $\sqrt{15} - \sqrt{14}$ và $\sqrt{14} - \sqrt{13}$

b) $\sqrt{105} - \sqrt{101}$ và $\sqrt{101} - \sqrt{97}$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức:

a) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18}$

b) $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{507}$

c) $\sqrt{25a} + \sqrt{49a} - \sqrt{64a}$ với $a \geq 0$

d) $-\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b}$ với $b \geq 0$

Bài 6. Giải các phương trình :

a) $5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} = 14$

b) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

c) $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$

$$d) \sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5 + \sqrt{x-2})$$

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$$a) 3 - \sqrt{3} + \sqrt{15} - 3\sqrt{5}$$

$$b) \sqrt{1-a} + \sqrt{1-a^2} \text{ với } -1 < a < 1$$

$$c) \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + \sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2} \text{ với } a > 0; b > 0$$

$$d) x - y + \sqrt{xy^2} - \sqrt{y^3} \text{ với } x > 0; y > 0$$

Bài 8. Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được) :

$$a) \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$b) \sqrt{\frac{7}{20}}$$

$$c) \sqrt{\frac{11}{12}}$$

$$d) \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3}}$$

Bài 9. Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được) :

$$a) -xy\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ với } x > 0; y \geq 0$$

$$b) \sqrt{\frac{-3x^3}{35}} \text{ với } x < 0$$

$$c) \sqrt{\frac{5a^3}{49b}} \text{ với } a \geq 0; b > 0$$

$$d) -7xy\sqrt{\frac{3}{xy}} \text{ với } x < 0; y < 0$$

Bài 10. Trục căn thức ở mẫu :

$$a) \frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$c) \frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$$

$$d) \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \text{ với } a > 0$$

Bài 11. Trục căn thức ở mẫu :

$$a) \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$$

$$b) \frac{37}{7+2\sqrt{3}}$$

$$c) \frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$$

$$d) \frac{1+\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}} \text{ với } a > 0; a \neq 4$$

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) \frac{5\sqrt{60} \cdot 3\sqrt{15}}{15\sqrt{50} \cdot 2\sqrt{18}}$$

$$b) \sqrt{27(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$$

$$c) \frac{x + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \text{ với } x > 0; y > 0$$

$$d) \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} \text{ với } x \neq 2$$

Bài 13. Thực hiện phép tính :

$$a) \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

$$b) \frac{2}{3\sqrt{2}-4} - \frac{2}{3\sqrt{2}+4}$$

$$c) \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$d) \frac{3}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$$

Bài 14. Giải các phương trình :

$$a) \sqrt{2x-1} = \sqrt{2}-1$$

$$b) \sqrt{3x+11} = 3+\sqrt{2}$$

$$c) \sqrt{x+5} = \sqrt{3}-2$$

$$d) \sqrt{x+38} = 3+\sqrt{5}$$

Bài 15. Tính giá trị của các biểu thức sau :

$$a) \frac{(1+\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \text{ với } x=2$$

$$b) \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}} \text{ với } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$c) \frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{x^3y^2+2x^2y^3+xy^4}{x^2+2xy+y^2}} \text{ với } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

$$\begin{aligned} \text{a) Biểu thức } \sqrt{49.360} &= \sqrt{49.36.10} \\ &= \sqrt{49} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{10} = 7.6 \cdot \sqrt{10} = 42\sqrt{10} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là $42\sqrt{10}$

$$\begin{aligned} \text{b) Biểu thức } -\sqrt{500.162} &= -\sqrt{100.5.81.2} \\ &= -\sqrt{100} \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{10} = -10.9 \cdot \sqrt{10} = -90\sqrt{10} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là $-90\sqrt{10}$

$$\text{c) Biểu thức } \sqrt{125a^2} = \sqrt{25.5.a^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{5} = 5|a| \cdot \sqrt{5}$$

với $a < 0$ nên $|a| = -a$. Vậy: $\sqrt{125a^2} = -5a\sqrt{5}$

$$\text{d) Biểu thức } \frac{1}{3}\sqrt{225a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{225} \cdot \sqrt{a^2} = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot |a| = 5|a|.$$

Vậy biểu thức có giá trị là $5|a|$

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn :

$$\text{a) } 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$$

$$\text{b) } -2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -\sqrt{20}$$

$$\text{c) } x\sqrt{\frac{13}{xy}} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{13}{xy}} = \sqrt{\frac{13x}{y}} \text{ với } x > 0; y > 0$$

$$\text{d) } x\sqrt{\frac{-37}{x}} = -\sqrt{x^2 \cdot \frac{-37}{x}} = -\sqrt{-37x} \text{ với } x < 0$$

Bài 3. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần :

$$\text{a) Ta có: } 5\sqrt{2} = \sqrt{50}; 2\sqrt{5} = \sqrt{20}; 2\sqrt{3} = \sqrt{12}; 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$$

$$\text{Vi } \sqrt{12} < \sqrt{18} < \sqrt{20} < \sqrt{50}.$$

$$\text{Do đó: } 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} < 5\sqrt{2}.$$

$$\text{b) } \sqrt{27}; 6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}; 2\sqrt{28} = \sqrt{112}; 5\sqrt{7} = \sqrt{175}$$

$$\text{Vi } \sqrt{12} < \sqrt{27} < \sqrt{112} < \sqrt{175}.$$

$$\text{Do đó: } 6\sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt{27} < 2\sqrt{28} < 5\sqrt{7}$$

$$\text{c) Ta có: } 4\sqrt{2} = \sqrt{32}; \sqrt{37}; 3\sqrt{7} = \sqrt{63}; 2\sqrt{15} = \sqrt{60}$$

$$\text{Vi } \sqrt{32} < \sqrt{37} < \sqrt{60} < \sqrt{63}.$$

$$\text{Do đó: } 4\sqrt{2} < \sqrt{37} < 2\sqrt{15} < 3\sqrt{7}$$

$$\text{d) Ta có: } 3\sqrt{6} = \sqrt{54}; 2\sqrt{7} = \sqrt{28}; \sqrt{39}; 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$$

$$\text{Vi: } \sqrt{28} < \sqrt{39} < \sqrt{50} < \sqrt{54}.$$

$$\text{Do đó: } 2\sqrt{7} < \sqrt{39} < 5\sqrt{2} < 3\sqrt{6}$$

Bài 4. So sánh :

$$\text{a) } \sqrt{15} - \sqrt{14} \text{ và } \sqrt{14} - \sqrt{13}$$

Ta có:

$$* \sqrt{15} - \sqrt{14} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{14})(\sqrt{15} + \sqrt{14})}{\sqrt{15} + \sqrt{14}}$$

$$= \frac{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{14})^2}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} = \frac{15 - 14}{\sqrt{15} + \sqrt{14}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}}$$

$$* \sqrt{14} - \sqrt{13} = \frac{(\sqrt{14} - \sqrt{13})(\sqrt{14} + \sqrt{13})}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$$

$$= \frac{(\sqrt{14})^2 - (\sqrt{13})^2}{\sqrt{14} + \sqrt{13}} = \frac{14 - 13}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$$

$$\text{Vi } \sqrt{15} + \sqrt{14} > \sqrt{14} + \sqrt{13} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} < \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$$

Vậy $\sqrt{15} - \sqrt{14} < \sqrt{14} - \sqrt{13}$.

b) $\sqrt{105} - \sqrt{101}$ và $\sqrt{101} - \sqrt{97}$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \sqrt{105} - \sqrt{101} &= \frac{(\sqrt{105} - \sqrt{101})(\sqrt{105} + \sqrt{101})}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} \\ &= \frac{(\sqrt{105})^2 - (\sqrt{101})^2}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} = \frac{105 - 101}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} \\ \sqrt{101} - \sqrt{97} &= \frac{(\sqrt{101} - \sqrt{97})(\sqrt{101} + \sqrt{97})}{\sqrt{101} + \sqrt{97}} \\ &= \frac{(\sqrt{101})^2 - (\sqrt{97})^2}{\sqrt{101} + \sqrt{97}} \\ &= \frac{101 - 97}{\sqrt{101} + \sqrt{97}} = \frac{4}{\sqrt{101} + \sqrt{97}}\end{aligned}$$

$$\text{Vì } \sqrt{105} + \sqrt{101} > \sqrt{101} + \sqrt{97} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} < \frac{4}{\sqrt{101} + \sqrt{97}}$$

Vậy $\sqrt{105} - \sqrt{101} < \sqrt{101} - \sqrt{97}$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức:

$$\begin{aligned}\text{a) Biểu thức } 3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18} &= 3\sqrt{2} + 4.2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $8\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\text{b) Biểu thức } \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{507} &= \sqrt{3} - \frac{1}{3}.3\sqrt{3} + 2.13\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3} + 26\sqrt{3} = 26\sqrt{3}\end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $26\sqrt{3}$

c) Biểu thức $\sqrt{25a} + \sqrt{49a} - \sqrt{64a} = 5\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - 8\sqrt{a}$
 $= (5 + 7 - 8)\sqrt{a} = 4\sqrt{a}$ với $a \geq 0$

Biểu thức rút gọn là: $4\sqrt{a}$

d) Biểu thức $-\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} = -6\sqrt{b} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{6b} + \frac{1}{5} \cdot 5\sqrt{6b}$
 $= -6\sqrt{b} - \sqrt{6b} + \sqrt{6b} = -6\sqrt{b}$ với $b \geq 0$

Biểu thức rút gọn là: $-6\sqrt{b}$

Bài 6. Giải các phương trình :

a) $5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} = 14$

Điều kiện: $x \geq 0$.

Phương trình biến đổi về dạng:

$$\begin{aligned}5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} &= 14 \\ \Leftrightarrow 10\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 8\sqrt{3x} &= 14 \\ \Leftrightarrow (10 - 4 + 8)\sqrt{3x} &= 14 \\ \Leftrightarrow 14\sqrt{3x} &= 14 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

b) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

Điều kiện: $x \geq 5$

$$\begin{aligned}\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} &= 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x-5} = 4 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} &= 4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x-5 &= 4 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = 9$.

$$c) \frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$$

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3\sqrt{x}-5)-2(2\sqrt{x}-7)}{6} = \sqrt{x}-1$$

$$\Leftrightarrow 3(3\sqrt{x}-5)-2(2\sqrt{x}-7)=6(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x}-15-4\sqrt{x}+14=6\sqrt{x}-6$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x}-4\sqrt{x}-6\sqrt{x}=15-14-6$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x}=-5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=5 \Rightarrow x=25 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=25$.

$$d) \sqrt{36x-72}-15\sqrt{\frac{x-2}{25}}=4(5+\sqrt{x-2})$$

Điều kiện: $x \geq 2$

$$\sqrt{36x-72}-15\sqrt{\frac{x-2}{25}}=4(5+\sqrt{x-2})$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2}-15 \cdot \frac{1}{5}\sqrt{x-2}=20+4\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2}-3\sqrt{x-2}-4\sqrt{x-2}=20$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x-2}=20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=-20.$$

Ta có: $\forall x \geq 2 \Rightarrow VT = \sqrt{x-2} \geq 0; VP = -20 < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$$a) \text{ Biểu thức } 3-\sqrt{3}+\sqrt{15}-3\sqrt{5}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)+\sqrt{5}(\sqrt{3}-3)$$

$$=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)-\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$$

$$=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{5})$$

b) Biểu thức $\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a^2} = \sqrt{1-a} + \sqrt{(1-a)(1+a)}$

$$= \sqrt{1-a} (1 + \sqrt{1+a}) \text{ với } -1 < a < 1$$

c) Biểu thức $\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + \sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2}$ với $a > 0; b > 0$

$$= (\sqrt{a^3} - \sqrt{ab^2}) + (\sqrt{a^2b} - \sqrt{b^3})$$

$$= \sqrt{a}(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}) + \sqrt{b}(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})$$

$$= \sqrt{a}(a-b) + \sqrt{b}(a-b)$$

$$= (a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

d) Biểu thức $x - y + \sqrt{xy^2} - \sqrt{y^3}$ với $x > 0; y > 0$

$$= (x - y) + (y\sqrt{x} - y\sqrt{y})$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + y)$$

Bài 8. Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được) :

a) Biểu thức $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) Biểu thức $\sqrt{\frac{7}{20}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{10}$

c) Biểu thức $\sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$

d) Biểu thức $\sqrt{\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{|\sqrt{3}-\sqrt{2}|}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$$

Bài 9. Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được) :

a) Biểu thức $-xy\sqrt{\frac{y}{x}} = -xy\sqrt{\frac{xy}{x^2}} = -xy \cdot \frac{1}{|x|} \sqrt{xy}$

$$= -xy \cdot \frac{1}{x} \sqrt{xy} = -y\sqrt{xy} \text{ với } x > 0; y \geq 0$$

b) Biểu thức $\sqrt{\frac{-3x^3}{35}} = \sqrt{\frac{-3x^2 \cdot x \cdot 35}{35^2}} = \frac{|x|}{35} \cdot \sqrt{-105x} = -\frac{x}{35} \cdot \sqrt{-105x} \text{ với } x < 0$

c) Biểu thức $\sqrt{\frac{5a^3}{49b}} = \sqrt{\frac{5a^2 \cdot ab}{49b^2}} = \frac{|a|}{7|b|} \cdot \sqrt{5ab} = \frac{a}{7b} \cdot \sqrt{5ab} \text{ với } a \geq 0; b > 0$

d) Biểu thức $-7xy\sqrt{\frac{3}{xy}} = -7xy\sqrt{\frac{3xy}{(xy)^2}} = -7xy \cdot \frac{1}{|xy|} \sqrt{3xy}$

$$= -7xy \cdot \frac{1}{(-xy)} \sqrt{3xy} = 7\sqrt{3xy} \text{ với } x < 0; y < 0$$

Bài 10. Trục căn thức ở mẫu :

a) $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{18}}{18} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{18}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

c) $\frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})}$

$$= \frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{8-27}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{-19}$$

$$d) \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{(1+\sqrt{a})\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}+a}{a} \text{ với } a > 0$$

Bài 11. Trục căn thức ở mẫu :

$$\begin{aligned} a) \text{ Biểu thức } \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} &= \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Biểu thức } \frac{37}{7+2\sqrt{3}} &= \frac{37(7-2\sqrt{3})}{(7+2\sqrt{3})(7-2\sqrt{3})} \\ &= \frac{37(7-2\sqrt{3})}{7^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{37(7-2\sqrt{3})}{37} = 7-2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \text{ Biểu thức } \frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}} &= \frac{(2\sqrt{10}-5)(4+\sqrt{10})}{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})} \\ &= \frac{8\sqrt{10}+20-20-5\sqrt{10}}{4^2 - \sqrt{10}^2} = \frac{3\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \text{ Biểu thức } \frac{1+\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}} &= \frac{(1+\sqrt{a})(2+\sqrt{a})}{(2-\sqrt{a})(2+\sqrt{a})} \\ &= \frac{2+\sqrt{a}+2\sqrt{a}+a}{2^2 - (\sqrt{a})^2} = \frac{2+3\sqrt{a}+a}{4-a} \text{ với } a > 0; a \neq 4 \end{aligned}$$

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) \text{ Biểu thức } \frac{5\sqrt{60}\cdot 3\sqrt{15}}{15\sqrt{50}\cdot 2\sqrt{18}} = \frac{15\cdot\sqrt{60\cdot 15}}{30\sqrt{50\cdot 18}} = \frac{\sqrt{4\cdot 15\cdot 15}}{2\sqrt{50\cdot 2\cdot 9}} = \frac{2\cdot 15}{2\cdot 10\cdot 3} = \frac{1}{2}$$

b) Biểu thức $\sqrt{27(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{3} \cdot |\sqrt{3}-\sqrt{5}| = 3\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3})$

c) Biểu thức $\frac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{x}$ với $x > 0; y > 0$ và $x \neq y$

d) Biểu thức $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{x-2}{|x-2|}$ với $x \neq 2$

Nếu $x < 2$ thì $|x-2| = -(x-2)$, ta có: $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{x-2}{|x-2|} = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1$

Nếu $x > 2$ thì $|x-2| = x-2$, ta có: $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{x-2}{|x-2|} = \frac{x-2}{x-2} = 1$

Bài 13. Thực hiện phép tính :

a) Biểu thức $\frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}$

$$= \frac{6}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{6}{9-2} = \frac{6}{7}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\frac{6}{7}$

b) Biểu thức $\frac{2}{3\sqrt{2}-4} - \frac{2}{3\sqrt{2}+4} = \frac{2(3\sqrt{2}+4) - 2(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}$

$$= \frac{6\sqrt{2}+8-6\sqrt{2}+8}{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \frac{16}{18-16} = 8$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 8

c) Biểu thức $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$$= \frac{5-2\sqrt{15}+3+5+2\sqrt{15}+3}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{16}{5-3} = \frac{16}{2} = 8$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 8

$$\begin{aligned} \text{d) Biểu thức } & \frac{3}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}} = 3 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3} - (2\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})} \right) \\ & = 3 \cdot \left(\frac{6\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} \right) = 3 \cdot \left(\frac{6\sqrt{3}}{8-27} \right) = -\frac{18\sqrt{3}}{19} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $-\frac{18\sqrt{3}}{19}$

Bài 14. Giải các phương trình :

a) Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow 2x-1 = (\sqrt{2}-1)^2$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3-2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 2 - \sqrt{2}$

b) Điều kiện: $x \geq \frac{-11}{3}$

Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{3x+11} = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow 3x+11 = (3+\sqrt{2})^2$

$$\Leftrightarrow 3x+11 = 11+6\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 2\sqrt{2}$

c) Điều kiện: $x \geq -5$

Ta có: với mọi giá trị của $x \geq -5$ thì $VT = \sqrt{x+5} \geq 0$, $VP = \sqrt{3}-2 < 0$.

Suy ra, phương trình $\sqrt{x+5} = \sqrt{3}-2$ vô nghiệm.

d) Điều kiện: $x \geq -38$

Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{x+38} = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow x+38 = (3+\sqrt{5})^2$

$$\Leftrightarrow x+38 = 14+6\sqrt{5} \Leftrightarrow x = -24+6\sqrt{5} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -24+6\sqrt{5}$

Bài 15. Tính giá trị của các biểu thức sau :

$$\begin{aligned} \text{a) Biểu thức } & \frac{(1+\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{1+2\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\ & = \frac{1-2\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{1-\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x} \end{aligned}$$

Với $x=2$, thay vào biểu thức đã rút gọn ta được: $1-\sqrt{x}=1-\sqrt{2}$.

Vậy biểu thức có giá trị là $1-\sqrt{2}$ khi $x=2$

$$\begin{aligned} \text{b) Biểu thức } & \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}} \\ & = \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{1+\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

Với $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ thay vào biểu thức đã rút gọn,

$$\text{ta được: } \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1+\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$$

Vậy biểu thức có giá trị là $1+\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{c) Biểu thức } & \frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4}{x^2 + 2xy + y^2}} \\ & = \frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{xy^2(x^2 + 2xy + y^2)}{x^2 + 2xy + y^2}} = \frac{x+y}{y} \cdot y\sqrt{x} = \sqrt{x}(x+y) \end{aligned}$$

Với $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ thay vào biểu thức, ta có: $\sqrt{x}(x+y) = \sqrt{2}(2+1) = 3\sqrt{2}$

Vậy biểu thức có giá trị là $3\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

IV. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

1. Kiến thức trọng tâm

Để rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai ta thường thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định của biểu thức (nếu đề chưa cho điều kiện). Chú ý điều kiện căn thức, điều kiện mẫu, và điều kiện phân chia.
- Bước 2: Phân tích mẫu thành nhân tử, kết hợp phân tích tử bằng các phép biến đổi đơn giản.
- Bước 3: Bỏ ngoặc, thu gọn các biểu thức một cách hợp lý. Kết hợp điều kiện bài toán để kết luận.

Ví dụ minh họa 1: Rút gọn các biểu thức sau (*TS10 HCM 2015-2016*):

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-10}{x-4} \quad (x \geq 0, x \neq 4)$$

$$\text{b) } B = (13 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}}$$

Hướng dẫn giải:

a) Với $(x \geq 0, x \neq 4)$ ta có :

$$A = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 2) + (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x} - 10}{x - 4} = \frac{2x - 8}{x - 4} = 2$$

$$\text{b) } B = (13 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}}$$

$$= (2\sqrt{3} - 1)^2 (2 + \sqrt{3})^2 - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{(4 + 3\sqrt{3})^2}}$$

$$= (3\sqrt{3} + 4)^2 - 8\sqrt{20 + 2(4 + 3\sqrt{3})} = (3\sqrt{3} + 4)^2 - 8\sqrt{28 + 6\sqrt{3}}$$

$$= (3\sqrt{3} + 4)^2 - 8\sqrt{(3\sqrt{3} + 1)^2} = 43 + 24\sqrt{3} - 8(3\sqrt{3} + 1) = 35$$

Ví dụ minh họa 2: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} + 1 \right) : \left(\frac{a + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2} - 1 \right)$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn P.
- Tìm a để $P = 5$.
- Tính giá trị của P khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$
- Tìm a để P là một số nguyên.
- Tìm a để $P < 1$.

Giải :

$$\text{a) Điều kiện: } \begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Rút gọn: } P &= \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} + 1 \right) : \left(\frac{a + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2} - 1 \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1} + 1 \right] : \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2)}{\sqrt{a} + 2} - 1 \right] = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$P = 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a} + 1 = 5(\sqrt{a} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + 1 = 5\sqrt{a} - 5 \Leftrightarrow 4\sqrt{a} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{9}{4} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy với $a = \frac{9}{4}$ thì $P = 5$.

c) Khi $a = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$, thay vào biểu thức P đã được rút gọn,

$$\begin{aligned} \text{ta có : } P &= \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} + 1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - 1} \\ &= \frac{|\sqrt{2} + 1| + 1}{|\sqrt{2} + 1| - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

d) Ta có: $P = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = \frac{\sqrt{a}-1+2}{\sqrt{a}-1} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{\sqrt{a}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}$

Để P là một số nguyên thì $\frac{2}{\sqrt{a}-1}$ phải là một số nguyên, suy ra

$\sqrt{a}-1$ phải là ước nguyên của 2.

$$\text{Do đó : } \begin{cases} \sqrt{a}-1=2 \\ \sqrt{a}-1=1 \\ \sqrt{a}-1=-1 \\ \sqrt{a}-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=3 \\ \sqrt{a}=2 \\ \sqrt{a}=0 \\ \sqrt{a}=-1 \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ a=4 \\ a=0 \end{cases}$$

Vậy với $a = \{0; 4; 9\}$ thì P đạt giá trị nguyên.

e) Để $P < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1-(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a}-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 1$$

$$\Leftrightarrow a < 1. \text{ Kết hợp điều kiện suy ra : } 0 \leq a < 1$$

Vậy với $0 \leq a < 1$ thì $P < 1$.

Ví dụ minh họa 3:

Cho biểu thức: $M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}}$ (TS 10 Khánh Hoà 2015-2016)

f) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M.

g) Tính giá trị của M, biết rằng $x = (1 - \sqrt{3})^2$ và $y = 3 - \sqrt{8}$

Giải :

a) Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \\
 &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{xy} + 1)}{1 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}
 \end{aligned}$$

b). Với $x = (1 - \sqrt{3})^2$ và $y = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$

$$M = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

2. Các dạng toán

Bài toán rút gọn tổng hợp thường có các bài toán phụ: tính giá trị biểu thức khi cho giá trị của ẩn; tìm điều kiện của biến để biểu thức lớn hơn (nhỏ hơn) một số nào đó; tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị nguyên; tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức,... Do vậy, ta phải áp dụng các phương pháp tương ứng, thích hợp cho từng dạng toán. (Vd 2).

a. Dạng 1. Rút gọn biểu thức

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$ (với $a \geq 0; a \neq 1$)

Bài 2. Rút gọn biểu thức: $M = \left(\frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} + 1 \right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} \right)$ với $a \geq 0; a \neq 1$.

Bài 3. Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{x}{x + 3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x + 3\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$.

Bài 4. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x} + x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$ với $x > 0; x \neq 2$

Bài 5. Rút gọn biểu thức: $Q = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ với $a > 0; a \neq 4$.

Bài 6. Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

Bài 7. Rút gọn biểu thức: $M = \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$.

Bài 8. Rút gọn biểu thức: $N = \left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} \right) \cdot (a\sqrt{b} - b\sqrt{a})$

(với $a > 0; b > 0; a \neq b$)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Với $a \geq 0, a \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 = \left(\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+\sqrt{a^2})}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \right)^2 \\ &= \left(1+2\sqrt{a}+\sqrt{a^2} \right) \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{a})^2} = (1+\sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{a})^2} = 1 \end{aligned}$$

Vậy, $A=1$.

Bài 2. Với $a \geq 0; a \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} + 1 \right) \left(1 + \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} \right) = \left(\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+1} + 1 \right) \left(1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{-(\sqrt{a}-1)} \right) \\ &= (\sqrt{a}+1)(1-\sqrt{a}) = 1-a \end{aligned}$$

Vậy, $M=1-a$.

Bài 3.

Với $x > 0$:

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) \\
 &= \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = 1
 \end{aligned}$$

Vậy khi $x > 0$ thì $B = 1$.

Bài 4. Với $x > 0; x \neq 2$, ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \\
 &= \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = 1
 \end{aligned}$$

Vậy $P = 1$.

Bài 5. Với $a > 0; a \neq 4$:

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} \\
&= \left(\frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-2)^2} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} \\
&= \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} \\
&= \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)
\end{aligned}$$

Vậy, $Q = \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$

Bài 6. Với $x \geq 0; x \neq 4$:

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2} \\
&= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) + 2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2} \\
&= \left(\frac{x-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right) \times \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\
&= \frac{x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \times \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}
\end{aligned}$$

Vậy, $P = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$.

Bài 7.

Với $x > 0; x \neq 4$.

$$\begin{aligned}
M &= \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
&= \left(\frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2} \right) \cdot (\sqrt{x}+2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4}{x-4}
\end{aligned}$$

Bài 8.

Với $(a > 0, b > 0, a \neq b)$.

$$\begin{aligned}
N &= \left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} \right) \cdot (a\sqrt{b} - b\sqrt{a}) \\
&= \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right) \cdot \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \\
&= \left(\frac{b-a}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right) \cdot \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \\
&= b-a.
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là $N = b - a$.

b. Dạng 2. Rút gọn biểu thức – Tính giá trị của biểu thức khi cho giá trị của ẩn.

Các bước thực hiện:

- Rút gọn, chú ý điều kiện của biểu thức
- Rút gọn giá trị của biến nếu cần
- Thay vào biểu thức rút gọn

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho biểu thức: $P = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 6\sqrt{x} + 4}{x - 4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị của P khi $x = 9 + 4\sqrt{5}$.

Bài 2. Cho biểu thức: $A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x+2}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x khi $A = \frac{4}{2015}$

Bài 3. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Bài 4. Cho biểu thức: $Q = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2 - y^2}$ với $x \neq y$.

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$; $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Bài 5. Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tìm x để $P = 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{(x + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 2) - (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) + x - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + x + 2\sqrt{x} - 2x + 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2 + x - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x} + 2) + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(x + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{x + 1}{\sqrt{x} - 2}.
 \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $P = \frac{x + 1}{\sqrt{x} - 2}$.

b) Ta có: $x = 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$ thỏa mãn điều kiện xác định

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 2 + \sqrt{5}.$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{9 + 4\sqrt{5} + 1}{2 + \sqrt{5} - 2} = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} + 4$$

Vậy với $x = 9 + 4\sqrt{5}$ thì $P = 2\sqrt{5} + 4$.

Bài 2.

a) Với $x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x+2}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{4x+2}{x^2-1} = \frac{x+1-x+1+4x+2}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{4x+4}{(x-1)(x+1)} = \frac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x-1} \text{ với } x \neq \pm 1
 \end{aligned}$$

Vậy: $A = \frac{4}{x-1}$ với $x \neq \pm 1$

b) Khi $A = \frac{4}{2015} \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = \frac{4}{2015} \Rightarrow x-1 = 2015$

$\Leftrightarrow x = 2016$ (TMĐK)

Vậy khi $A = \frac{4}{2015}$ thì $x = 2016$.

Bài 3. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Với $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

b) Ta có: $2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) = 2\sqrt{x} + 5$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa điều kiện)

Vậy $x = \frac{1}{4}$ thì $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Bài 4. Với $x \neq y$:

a) $Q = \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}$

b) Với $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$;

$$y = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

Suy ra: $Q = \frac{x+y}{x-y} = \frac{2-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{3-2\sqrt{3}}$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}}{(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})} = \frac{3+2\sqrt{3}}{-3}$$

Vậy: $Q = \frac{3+2\sqrt{3}}{-3}$

Bài 5.

a) Với $x \geq 0; x \neq 4$:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)+2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3x-\sqrt{x}+2-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 4$, để $P=2$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x=16 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy với $x=16$ thì $P=2$.

c. Dạng 3. Rút gọn biểu thức – Tìm x để biểu thức rút gọn đạt giá trị nguyên

- Rút gọn biểu thức
- Lấy tử chia cho mẫu tách biểu thức thành tổng của một số nguyên và một biểu thức có tử là một số nguyên
- Trong biểu thức mới tạo thành, ta cho mẫu là các ước nguyên của tử để suy ra x .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+2}{a-2}$ với $(a > 0; a \neq 1; a \neq 2)$.

- Rút gọn P.
- Tìm giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 1$.

- Rút gọn P.
- Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $(x \geq 0; x \neq 1)$.

- Rút gọn Q.
- Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên.

Bài 4. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}$ với $(x > 0)$.

- Rút gọn P.
- Tìm $x \in \mathbb{Q}$ để P có giá trị nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{1}{\sqrt{a}+3} \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right)$ với $(a > 0; a \neq 9)$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm $a \in \mathbb{Q}$ để P có giá trị nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Với $(a > 0; a \neq 1; a \neq 2)$:

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+2}{a-2} \\ &= \left[\frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \right] : \frac{a+2}{a-2} \\ &= \frac{a+\sqrt{a}+1-(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} : \frac{a+2}{a-2} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} : \frac{a+2}{a-2} = \frac{2(a-2)}{a+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } P &= \frac{2(a-2)}{a+2} = \frac{2a-4}{a+2} = \frac{2a+4-8}{a+2} \\ &= \frac{2a+4}{a+2} - \frac{8}{a+2} = 2 - \frac{8}{a+2} \end{aligned}$$

P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi: $8:(a+2)$ hay $(a+2)$ là ước nguyên của 8.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = \pm 1 \\ a+2 = \pm 2 \\ a+2 = \pm 4 \\ a+2 = \pm 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; a = -3 \\ a = 0; a = -4 \\ a = 2; a = -6 \\ a = 6; a = -10 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $a > 0; a \neq 1; a \neq 2$ ta suy ra: $a = 2$ hoặc $a = 6$ thì P đạt giá trị nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 1$.

a) Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \left(\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \left(\frac{(x^2+2x+1) - (x^2-2x+1) + x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \left(\frac{x^2-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \frac{x+2017}{x} \end{aligned}$$

b) Ta có: $P = \frac{x+2017}{x} = 1 + \frac{2017}{x}$

$\Rightarrow$ Để P là số nguyên $\Leftrightarrow 2017 : x$ hay x là ước nguyên của 2017 (chú ý 2017 là số nguyên tố).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2017 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = -2017 \end{cases} \quad \text{kết hợp điều kiện } x \neq 0; x \neq \pm 1, \text{ suy ra: } x = 2017.$$

Vậy, với $x = 2017$ thì P đạt giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $(x \geq 0; x \neq 1)$.

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x})^3-1^3} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+1-x-4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{2x+1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

b) Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên.

$$Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+3}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}$$

Để Q có giá trị nguyên thì $3 : (\sqrt{x}-3)$ hay $\sqrt{x}-3$ là ước nguyên của 3.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \sqrt{x}-3=3 \\ \sqrt{x}-3=1 \\ \sqrt{x}-3=-1 \\ \sqrt{x}-3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=6 \\ \sqrt{x}=4 \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=36 \\ x=16 \\ x=4 \\ x=0 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy với $x = \{0; 4; 16; 36\}$ thì Q đạt giá trị nguyên.

Bài 4. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}$ với $(x > 0)$.

a) Với $x > 0$, ta có.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1-x}{x} \end{aligned}$$

b) Tìm $x \in \mathbb{Q}$ để P có giá trị nguyên.

Để P đạt giá trị nguyên thì $P = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$ phải là số nguyên.

Do đó x là ước nguyên của 1. Suy ra: $\begin{cases} x=1 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ x=-1 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy với $x=1$ thì P đạt giá trị nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{1}{\sqrt{a}+3} \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right)$ với $(a > 0; a \neq 9)$.

a) Với $a > 0; a \neq 9$, ta có.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{1}{\sqrt{a}+3} \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}+3+\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}} \right) = \frac{2}{\sqrt{a}+3} \end{aligned}$$

b) Tìm $a \in \mathbb{Q}$ để P có giá trị nguyên.

Đề $P = \frac{2}{\sqrt{a}+3}$ đạt giá trị nguyên thì $\sqrt{a}+3$ phải là ước nguyên của 2.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \sqrt{a}+3=2 \\ \sqrt{a}+3=1 \\ \sqrt{a}+3=-1 \\ \sqrt{a}+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=-1 \\ \sqrt{a}=-2 \\ \sqrt{a}=-4 \\ \sqrt{a}=-5 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy với không có giá trị $a \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn đề P đạt giá trị nguyên.

d. Dạng 4. Rút gọn biểu thức – Tìm x để biểu thức thỏa bằng hoặc lớn hơn (nhỏ hơn) một số cho trước

- Rút gọn.

- Cho biểu thức rút gọn thỏa điều kiện ta được phương trình hoặc bất phương trình, chú ý điều kiện của ẩn trong bài toán.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

a) Tìm điều kiện và rút gọn biểu thức.

b) Tìm các giá trị của x để $A < 0$.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện và rút gọn biểu thức.

b) Tìm các giá trị của x để $P \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bài 3. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P > \frac{1}{2}$.

Bài 4. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 1}$ (với $a > 0; a \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của a để $P < 0$.

Bài 5. Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2}{x - 1} \right)$ (với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tìm các giá trị của x để $M > 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x - 1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x - 1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x}}{x - 1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} : \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $A = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

$$\text{b) Để } A < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra: $A < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}}$

a) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}-1+1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2} \end{aligned}$$

b) $P \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{3}+\sqrt{2}| = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}+\sqrt{2} = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2005 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Bài 3.

a) Với $x > 0; x \neq 1$:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x-1}{x}. \end{aligned}$$

b) Với $x > 0; x \neq 1$ thì $\frac{x-1}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-1) > x \Leftrightarrow 2x-2 > x$

$\Leftrightarrow x > 2$ (thỏa điều kiện). Vậy với $x > 2$ thì $P > \frac{1}{2}$.

Bài 4.

a) Với $a > 0; a \neq 1$:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{a}-1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1} \right) \cdot (\sqrt{a}-1) = \sqrt{a}-1 \end{aligned}$$

b) Với $a > 0; a \neq 1$ thì $P < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}-1 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ \sqrt{a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

Vậy với $0 < a < 1$ thì $P < 0$.

Bài 5. Cho biểu thức: $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$

a) Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \\ &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1) \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Để $M > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} > 0$ mà $x > 0, x \neq 1$ nên $\sqrt{x} > 0$

Do đó: $M > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy $x > 1$ thì $M > 0$.

e. Dạng 5. Rút gọn biểu thức – Tìm x để biểu thức đạt giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN)

- Rút gọn.

- Biến đổi biểu thức (BT) về dạng:

+ Số không âm + hằng số $\Rightarrow$ GTNN.

VD: $A^2 + m \geq m$. Khi đó GTNN của biểu thức bằng m xảy ra khi và chỉ khi $A = 0$.

+ Hằng số – số không âm $\Rightarrow$ GTLN.

VD: $M - A^2 \leq M$. Khi đó GTLN của biểu thức bằng M xảy ra khi và chỉ khi $A = 0$.

+ Sử dụng bất đẳng thức Côsi: Cho hai số dương a và b, ta có:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

+ $|A| + |B| \geq |A + B|$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho các biểu thức sau:

$$M = x + \sqrt{x} - 1$$

$$N = -x + \sqrt{x-1} + 2$$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

b) Tìm giá trị lớn nhất của N.

Bài 2. Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right) \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

- a) Rút gọn biểu thức.
- b) Tìm x để Q đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Cho biểu thức:

$$P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

- a) Rút gọn biểu thức.
- b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 4. Cho hai biểu thức:

$$P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} \text{ và } Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} \text{ với } x > 0; x \neq 4$$

- a) Tính giá trị của biểu thức P khi x = 9.
- b) Rút gọn biểu thức Q.
- c) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

- a) Tìm điều kiện xác định. Rút gọn A.
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho các biểu thức sau:

$$M = x - \sqrt{x} - 1$$

$$N = -x + \sqrt{x-1} + 2$$

- a) Điều kiện: $x \geq 0$

$$M = x - \sqrt{x} - 1 = x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$$

$$\text{Suy ra, } M_{\min} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \right]_{\min} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } M_{\min} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

b) Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} N &= -x + \sqrt{x-1} + 2 = -x + 1 + \sqrt{x-1} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \\ &= -\left(x - 1 - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4} \\ &= -\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra, } N_{\max} \Leftrightarrow \left[-\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \right]_{\max} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } M_{\max} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Bài 2. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$.

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot (\sqrt{x}+1) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

b) $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$

$$P_{\min} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)_{\max} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)_{\min}$$

Vi $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+1)_{\min} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow P_{\min} = 1 - \frac{2}{\sqrt{0}+1} = -1$$

Vậy, $P_{\min} = -1 \Leftrightarrow x=0$.

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{15\sqrt{x}-11 - (3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{15\sqrt{x}-11-(3x+9\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6)-(2x-2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\
&= \frac{15\sqrt{x}-11-3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6-2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\
&= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{b) } P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} = \frac{-5(\sqrt{x}+3)+17}{\sqrt{x}+3} = -5 + \frac{17}{\sqrt{x}+3}.$$

$$P_{\max} \Leftrightarrow \left(\frac{17}{\sqrt{x}+3} \right)_{\max}$$

$$\text{Vì } x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \frac{17}{\sqrt{x}+3} > 0 \end{cases} \text{ nên } P_{\max} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)_{\min} \Leftrightarrow \sqrt{x}_{\min} \Leftrightarrow x=0$$

$$\text{Vậy, } P_{\max} = \frac{17}{3} \Leftrightarrow x=0.$$

Bài 4. Cho biểu thức: $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0; x \neq 4$

$$\text{a) Với } x=9. \text{ Ta có: } P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = \frac{12}{3-2} = 12$$

b) Với $x > 0; x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{x-4} \\
&= \frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}
\end{aligned}$$

c) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất: $\frac{P}{Q} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số không âm $\sqrt{x}$ và $\frac{3}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$\frac{P}{Q} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = 2\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa điều kiện).

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{P}{Q}$ là $\left(\frac{P}{Q}\right)_{\min} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3$.

Bài 5. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

a) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x})^2 + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

b) $A = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ với $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ thì $\sqrt{x} > 0; \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương $\sqrt{x} > 0; \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$, suy ra :

$$A = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy $A_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$.

V. CĂN BẬC BA

1. Kiến thức trọng tâm

- Nếu $x^3 = a$ thì x là căn bậc ba của a . Kí hiệu: $x = \sqrt[3]{a}$
- Mọi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.
 - + Căn bậc ba của số dương là số dương
 - + Căn bậc ba của số âm là số âm
 - + Căn bậc ba của 0 là số 0.
- Nếu $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$
- Với A, B bất kì ta có: $\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$
- Với A, B bất kì, $B \neq 0$ ta có: $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$

2. Các dạng toán

Ví dụ minh họa 1: Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } \sqrt[3]{8} - 2\sqrt[3]{-27} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{125}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-125a^3} + \sqrt[3]{64a^3} + 5a$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } \sqrt[3]{8} - 2\sqrt[3]{-27} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{125}$$

$$= \sqrt[3]{2^3} - 2\sqrt[3]{(-3)^3} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{5^3}$$

$$= 2 - 2 \cdot (-3) - \frac{1}{5} \cdot 5$$

$$= 2 + 6 - 1 = 7$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-125a^3} + \sqrt[3]{64a^3} + 5a$$

$$= \sqrt[3]{(-5a)^3} + \sqrt[3]{(4a)^3} + 5a$$

$$= -5a + 4a + 5a$$

$$= 4a$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{-125}$

b) $\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{-729}$

c) $\sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{384} - \sqrt[3]{40}$

Bài 2. Tính:

a) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$

b) $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{-2}$

c) $\sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$

d) $\sqrt[3]{-0,5} \cdot \sqrt[3]{1,25} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{10}}$

Bài 3. Rút gọn :

a) $\sqrt[3]{(a+1)^3} + \sqrt[3]{(a-1)^3}$

b) $\frac{a+1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1}$

c) $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)} - \sqrt[3]{(x-1)^3}$

Bài 4. So sánh :

a) $3\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[3]{32}$

b) $7\sqrt[3]{8}$ và $8\sqrt[3]{7}$

Bài 5. Giải phương trình :

a) $\sqrt[3]{3x-1} = 2$

b) $3 - \sqrt[3]{2x+1} = 0$

c) $\sqrt[3]{4-2x} + 5 = 3$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

a) Biểu thức $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{-125}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{(-2)^3} - \sqrt[3]{(-5)^3} \\ &= 3 - 2 - (-5) \\ &= 6 \end{aligned}$$

b) Biểu thức $\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{-729}$

$$= \sqrt[3]{10^3} - \sqrt[3]{(-3)^3} - \sqrt[3]{(-9)^3}$$

$$= 10 - (-3) - (-9) = 22$$

c) Biểu thức $\sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{384} - \sqrt[3]{40}$

$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{4^3 \cdot 6} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 5}$$

$$= 2\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{5}$$

$$= \sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{6}$$

Bài 2. Tính:

a) Biểu thức $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{16}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{4^3}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{3}{4}$

b) Biểu thức $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{\frac{54}{-2}} = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

c) Biểu thức $\sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}} = \sqrt[3]{(8 - \sqrt{37})(8 + \sqrt{37})} = \sqrt[3]{8^2 - 37} = \sqrt[3]{27} = 3$

d) $\sqrt[3]{-0,5} \cdot \sqrt[3]{1,25} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{10}} = \sqrt[3]{-0,5 \cdot 1,25 \cdot \frac{16}{10}} = \sqrt[3]{1} = 1$

Bài 3. Rút gọn :

a) Biểu thức $\sqrt[3]{(a+1)^3} + \sqrt[3]{(a-1)^3} = a+1+a-1 = 2a$

b) Biểu thức $\frac{a+1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1} = \frac{\sqrt[3]{a^3} + 1^3}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{a} + 1)(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1)}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1} = \sqrt[3]{a} + 1$

c) Biểu thức $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)} - \sqrt[3]{(x-1)^3}$

$$= \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} - \sqrt[3]{(x-1)^3}$$

$$= \sqrt[3]{(x+1)^3} - \sqrt[3]{(x-1)^3}$$

$$= x+1 - (x-1) = 2$$

Bài 4. So sánh :

a) Ta có: $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54} > \sqrt[3]{32}$. Nên $3\sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{32}$

b) Ta có: $7\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 8} = \sqrt[3]{2744}$ và $8\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{3584}$ mà $\sqrt[3]{2744} < \sqrt[3]{3584}$

Nên $7\sqrt[3]{8} < 8\sqrt[3]{7}$

Bài 5. Giải phương trình:

Chú ý: Khi giải phương trình, căn thức bậc ba không cần điều kiện của biểu thức trong căn, chỉ cần chú ý đến các điều kiện của mẫu, hoặc căn bậc chẵn nếu có.

a) $\sqrt[3]{3x-1} = 2 \Leftrightarrow 3x-1 = 8 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

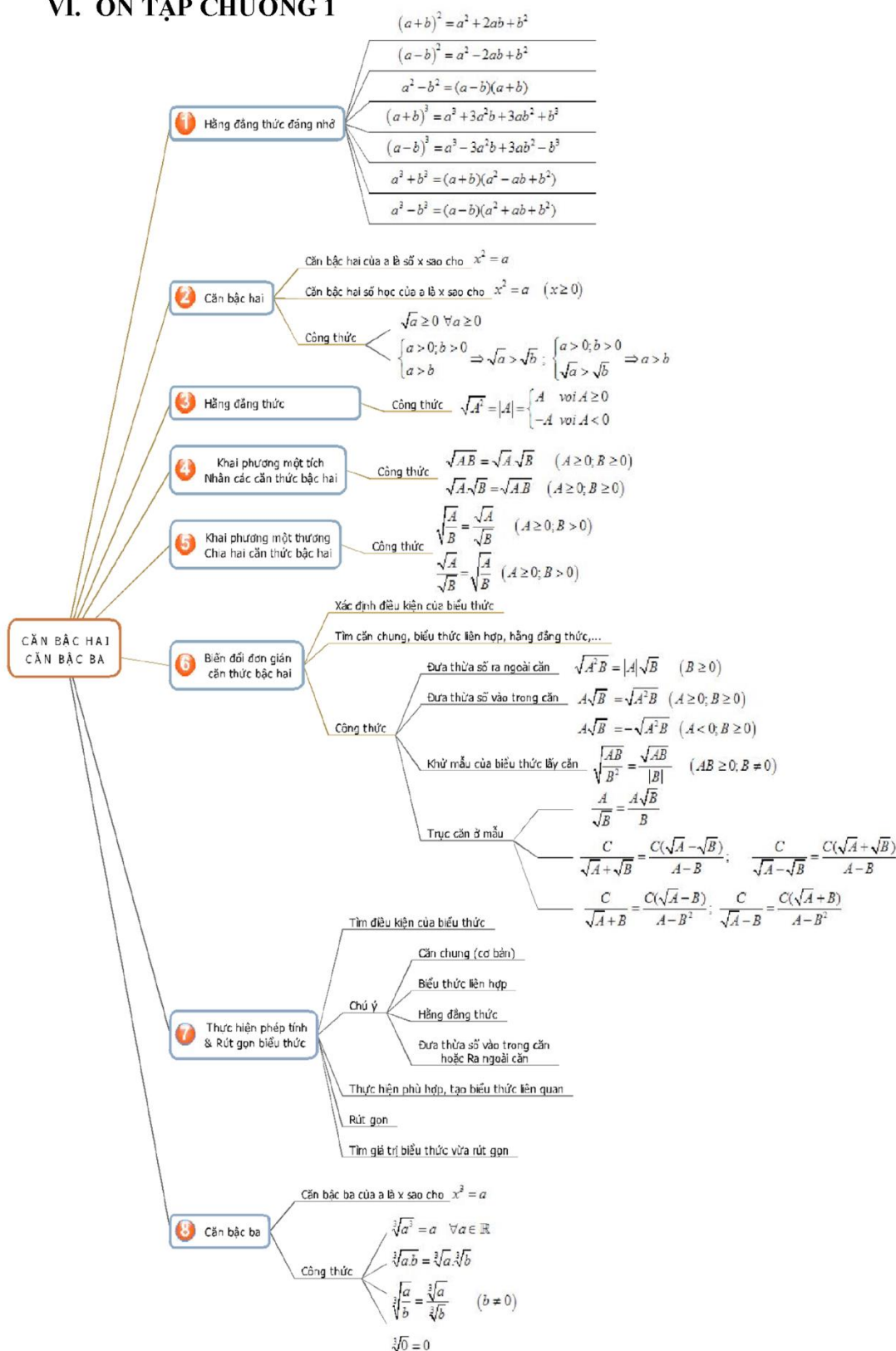
b) $3 - \sqrt[3]{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 3 = \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow 27 = 2x+1 \Leftrightarrow x = 13$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 13$

c) $\sqrt[3]{4-2x} + 5 = 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4-2x} = -2 \Leftrightarrow 4-2x = -8 \Leftrightarrow -2x = -12 \Leftrightarrow x = 6$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 6$.

VI. ÔN TẬP CHƯƠNG 1



BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Thực hiện phép tính :

$$\text{a) } \left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{8} \right) \cdot 3\sqrt{6}$$

$$\text{b) } 2\sqrt{2}(2 - 3\sqrt{3}) + (1 - 2\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{6}$$

$$\text{c) } (20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75}) : \sqrt{15}$$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}$$

$$\text{b) } \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} - (2 + \sqrt{3})$$

$$\text{c) } 5\sqrt{(-3)^2} \cdot \left[6\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} \right]$$

$$\text{d) } \left(\sqrt[3]{\frac{9}{5}} - 3\sqrt[3]{-\frac{9}{5}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

Bài 3. Phân tích thành nhân tử ($a, b, x, y > 0$; $x > y$) :

$$\text{a) } 5 + \sqrt{x} + 25 - x$$

$$\text{b) } xy - x\sqrt{y} + \sqrt{y} - 1$$

$$\text{c) } \sqrt{a-b} - \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\text{d) } \sqrt{ax} + \sqrt{by} - \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$$

Bài 4. Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = 2x + \sqrt{x^2 - 6x + 9} \text{ với } x = -5$$

$$\text{b) } B = \sqrt{1 - 6a + 9a^2} - 3a \text{ với } a = \frac{2}{3}$$

$$c) C = \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{x^2 - 16} \cdot (x^2 - 8x + 16) \text{ với } x = 8$$

$$d) D = 5x - \frac{\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{1 - 3x} \text{ với } x = -3$$

Bài 5. Giải phương trình :

$$a) \frac{3}{4}\sqrt{4x} - \sqrt{4x} + 5 = \frac{1}{4}\sqrt{4x}$$

$$b) \sqrt{3-x} - \sqrt{27-9x} + 1,25\sqrt{48-16x} = 6$$

$$c) \frac{5\sqrt{x}-2}{8\sqrt{x}+2,5} = \frac{2}{7}$$

$$d) \sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 4$$

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = a-b \text{ với } a > 0; b > 0; a \neq b.$$

$$b) \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{12}+2} - \frac{\sqrt{54}}{3} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = -1$$

$$c) \left(2 + \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right) \cdot \left(2 - \frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \right) = 4-a \text{ với } a > 0; a \neq 1$$

$$d) \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right) : \left(1 : \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right) = 1$$

Bài 7. Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right) \text{ với } -1 < a < 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $a = \frac{24}{49}$

c) Tìm giá trị của a để $P = 2$

Bài 8. Cho biểu thức:

$$Q = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) \text{ với } x \geq 0; x \neq \pm 1$$

- a) Rút gọn biểu thức Q.
- b) Tìm các giá trị của x sao cho $Q > 1$.

Bài 9. Cho biểu thức:

$$R = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3(\sqrt{x}+3)}{x-9}\right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1\right) \text{ với } x \geq 0; x \neq 9$$

- a) Rút gọn R.
- b) Tìm các giá trị của x để $R < -1$.
- c) Tìm các giá trị của x để giá trị của biểu thức R nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI ÔN TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Thực hiện phép tính :

a) Biểu thức $\left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{8}\right) \cdot 3\sqrt{6}$

$$= 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6} + 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{8} \cdot 3\sqrt{6}$$

$$= 6\sqrt{36} - 12\sqrt{18} + 15\sqrt{12} - \frac{3}{4}\sqrt{48}$$

$$= 36 - 36\sqrt{2} + 30\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$$= 36 - 36\sqrt{2} + 27\sqrt{3}$$

b) Biểu thức $2\sqrt{2}(2 - 3\sqrt{3}) + (1 - 2\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{6}$

$$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{6} + (1 - 4\sqrt{2} + 8) + 6\sqrt{6}$$

$$= 9$$

c) Biểu thức $(20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75}) : \sqrt{15}$

$$= (200\sqrt{3} - 225\sqrt{3} + 25\sqrt{3}) : \sqrt{15}$$

$$= 0 : \sqrt{15} = 0$$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + 1\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}$

$$= \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} - (\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2} + 5 - 2}{5 - 2}\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2} = \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } & \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (2+\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} - (2+\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } & 5\sqrt{(-3)^2} \cdot \left[6\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} \right] \\ &= 5 \cdot |-3| \cdot \left(6 \cdot \left| -\frac{1}{3} \right| - |\sqrt{3}-2| \right) \\ &= 15 \cdot (2 + \sqrt{3} - 2) \\ &= 15\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } & \left(3\sqrt[3]{\frac{9}{5}} - 3\sqrt[3]{-\frac{9}{5}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \\ &= \left(3\sqrt[3]{\frac{9}{5}} - 3\sqrt[3]{-\frac{9}{5}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{27}{5}} - \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{-\frac{27}{5}} + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt[3]{\frac{3}{5}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} + \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} + 2 \\ &= 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} + 2\end{aligned}$$

Bài 3. Phân tích thành nhân tử ($a, b, x, y > 0$; $a > b$; $x > y$) :

$$\begin{aligned}\text{a) } & 5 + \sqrt{x} + 25 - x \\ &= 5 + \sqrt{x} + (5 + \sqrt{x})(5 - \sqrt{x}) \\ &= (5 + \sqrt{x})(1 + 5 + \sqrt{x}) = (5 + \sqrt{x})(6 + \sqrt{x})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } & xy - x\sqrt{y} + \sqrt{y} - 1 \\ &= x\sqrt{y}(\sqrt{y} - 1) + \sqrt{y} - 1 = (\sqrt{y} - 1)(x\sqrt{y} + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \sqrt{a-b} - \sqrt{a^2-b^2} \\ &= \sqrt{a-b} - \sqrt{(a-b)(a+b)} = \sqrt{a-b}(1-\sqrt{a+b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \sqrt{ax} + \sqrt{by} - \sqrt{bx} - \sqrt{ay} \\ &= \sqrt{ax} - \sqrt{bx} + \sqrt{by} - \sqrt{ay} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \sqrt{y}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \sqrt{y}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \end{aligned}$$

Bài 4. Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = 2x + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x + \sqrt{(x-3)^2} = 2x + |x-3|$$

$$\text{Với } x = -5, \text{ thay vào biểu thức: } A = 2 \cdot (-5) + |-5-3| = -10 + 8 = -2$$

$$\text{Vậy } A = -2.$$

$$\text{b) } B = \sqrt{1-6a+9a^2} - 3a = \sqrt{(1-3a)^2} - 3a = |1-3a| - 3a$$

$$\text{Với } a = \frac{2}{3}, \text{ thay vào biểu thức: } B = \left| 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} \right| - 3 \cdot \frac{2}{3} = |1-2| - 2 = 1-2 = -1$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{x^2-16} \cdot (x^2-8x+16) \\ &= \frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{(x-4)(x+4)} \cdot (x-4)^2 = \frac{|2x+1|}{x+4} \cdot (x-4) \end{aligned}$$

$$\text{Với } x = 8, \text{ thay vào biểu thức: } C = \frac{|2 \cdot 8 + 1|}{8+4} \cdot (8-4) = \frac{17 \cdot 4}{12} = \frac{17}{3}$$

$$\text{d) } D = 5x - \frac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{1-3x} = 5x - \frac{\sqrt{(3x-1)^2}}{1-3x} = 5x - \frac{|3x-1|}{1-3x}$$

$$\text{Với } x = -3, D = 5 \cdot (-3) - \frac{|3 \cdot (-3) - 1|}{1-3 \cdot (-3)} = -15 - \frac{10}{10} = -16$$

Bài 5. Giải phương trình :a) Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\text{PT: } \frac{3}{4}\sqrt{4x} - \sqrt{4x} + 5 = \frac{1}{4}\sqrt{4x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1\right)\sqrt{4x} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4x} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x} = 10$$

$$\Rightarrow 4x = 100 \Leftrightarrow x = 25 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = 25$ b) Điều kiện: $x \leq 3$

$$\text{PT: } \sqrt{3-x} - \sqrt{27-9x} + 1,25\sqrt{48-16x} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} - 3\sqrt{3-x} + 5\sqrt{3-x} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3-x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 2$$

$$\Rightarrow 3-x = 4 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -1$ c) Điều kiện: $x \geq 0$

$$\text{PT: } \frac{5\sqrt{x}-2}{8\sqrt{x}+2,5} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 35\sqrt{x}-14 = 16\sqrt{x}+5 \Leftrightarrow 19\sqrt{x} = 19$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 1$.

$$\text{d) PT: } \sqrt{9x^2+12x+4} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+2)^2} = 4 \Leftrightarrow |3x+2| = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=4 \\ 3x+2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \\ 3x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-2; \frac{2}{3}\right\}$.**Bài 6.** Chứng minh các đẳng thức sau:a) Với $a > 0; b > 0; a \neq b$

$$\begin{aligned} \text{VT} &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{12} + 2} - \frac{\sqrt{54}}{3} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)}{2(\sqrt{3} + 1)} - \frac{3\sqrt{6}}{3} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \\ & = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = -1 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

c) Với $a > 0; a \neq 1$:

$$\begin{aligned} & \left(2 + \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right) \cdot \left(2 - \frac{a + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \right) = \left(2 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1} \right) \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{a}(1 + \sqrt{a})}{1 + \sqrt{a}} \right) \\ & = (2 + \sqrt{a}) \cdot (2 - \sqrt{a}) = 4 - a \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \right) : \left(1 : \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right) \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3} + 2} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} \right) : (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ & = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) : (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 1 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 7.

a) Với $-1 < a < 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{2 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \right) : \left(\frac{2 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} \right) \\ &= \frac{2 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{2 + \sqrt{1-a^2}} = \sqrt{1-a} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \text{Với } a = \frac{24}{49} \Rightarrow P = \sqrt{1 - \frac{24}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$$

c) Tìm giá trị của a để $P = 2$

$$P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} = 2 \Rightarrow 1-a = 4 \Leftrightarrow a = -3 \text{ (không thỏa điều kiện } -1 < a < 1)$$

Vậy không có giá trị nào của a để $P = 2$.

Bài 8.a) Với $x \geq 0; x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
Q &= \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) \\
&= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}\right) \\
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} : \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \\
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} : \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} : \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} \\
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \\
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad Q > 1 &\Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} > 0
\end{aligned}$$

Vì $x \geq 0$, nên $x+2 > 0$ nên $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy với $x > 1$ thì $Q > 1$.

Bài 9.a) Với $x \geq 0; x \neq 9$

$$R = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3(\sqrt{x}+3)}{x-9}\right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} \\
&= \frac{2x-6\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}-3\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\
&= \frac{3x-6\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{3(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)}
\end{aligned}$$

$$b) R < -1 \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)} < -1 \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+3} < 0$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 > 0$$

$$\text{nên } \frac{4\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+3} < 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x}-6 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}$$

Vậy với $0 \leq x < \frac{9}{4}$ thì $R < -1$.

c) Tìm các giá trị của x để giá trị của biểu thức R nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó.

$$R = \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{3(\sqrt{x}+3)-18}{(\sqrt{x}+3)} = 3 - \frac{18}{\sqrt{x}+3}$$

$$R_{\min} \Leftrightarrow \left(\frac{18}{\sqrt{x}+3} \right)_{\max} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)_{\min}$$

$$\text{Ta có: } x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3.$$

$$\text{Do đó: } (\sqrt{x}+3)_{\min} \Leftrightarrow \sqrt{x}+3=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$\text{Vậy, } R_{\min} = 3 - \frac{18}{3} = -3 \Leftrightarrow x=0.$$

VII. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 1

ĐỀ SỐ 01

I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm). Hãy chọn một đáp án trả lời đúng

Câu 1: Điều kiện xác định của $\sqrt{x-2}$ là:

- A. $x \geq 2$ B. $x \leq 2$ C. $x > 2$ D. $x < 2$

Câu 2: Cho $\sqrt{x} = 3$ thì:

- A. $x = 3$ B. $x = -3$ C. $x = 9$ D. $x = -9$

Câu 3: Cho $\sqrt[3]{-64} = x$ thì:

- A. $x = 8$ B. $x = -8$ C. $x = 4$ D. $x = -4$

Câu 4: Kết quả của phép tính: $(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)$ là:

- A. 1 B. -1 C. 5 D. -5

Câu 5: Kết quả của phép tính: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ là:

- A. $\sqrt{2}+1$ B. $-(\sqrt{2}+1)$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $-(\sqrt{2}-1)$

Câu 6: Kết quả của phép tính: $\sqrt{36}-\sqrt{81}+\sqrt[3]{-27}$ là:

- A. 6 B. -9 C. -3 D. -6

II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm) Thực hiện phép tính

a) $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{16}{9}} \cdot \sqrt{\frac{81}{4}} \cdot \sqrt{\frac{90}{25}}$

Câu 2 (2,0 điểm) Tìm x biết

a) $\sqrt{(x-5)^2} = 2$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{64x} + \frac{1}{3}\sqrt{81x} = 7$

Câu 3 (3,0 điểm) Cho biểu thức: $P = \frac{4}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-7}{x-1}$ (với $x \geq 0$; $x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Xác định x để $P \leq -2$.

ĐÁP ÁN

Phần	Câu	Đáp án	Điểm
PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (3 điểm)	1	A	0,5đ
	2	C	0,5đ
	3	D	0,5đ
	4	B	0,5đ
	5	A	0,5đ
	6	D	0,5đ
PHẦN II. TỰ LUẬN (7 điểm)	Câu 1	a) $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{16 \cdot 3}) \cdot \sqrt{3}$ $= (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ Vậy $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{3} = 3$	0,25đ 0,5đ 0,25đ
		b) $\sqrt{\frac{16}{9}} \cdot \sqrt{\frac{8,1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{90}{25}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 8,1 \cdot 90}{9 \cdot 4 \cdot 25}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 81 \cdot 9}{9 \cdot 4 \cdot 25}}$ $= \sqrt{\frac{16 \cdot 81}{4 \cdot 25}} = \frac{4 \cdot 9}{2 \cdot 5} = \frac{18}{5}$. Vậy: $\sqrt{\frac{16}{9}} \cdot \sqrt{\frac{8,1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{90}{25}} = \frac{18}{5}$	0,5đ 0,25đ 0,25đ
	Câu 2	a) $\sqrt{(x-5)^2} = 2 \Leftrightarrow x-5 = 2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=2 \\ x-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=3 \end{cases}$ Vậy $x = \{3; 7\}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
		b) ĐKXĐ: $x \geq 0$	0,25đ
		$\frac{1}{2}\sqrt{64x} + \frac{1}{3}\sqrt{81x} = 7 \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{x}}{2} + \frac{9\sqrt{x}}{3} = 7$	0,25đ
		$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 7$ $\Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ Thỏa mãn điều kiện Vậy $x = \{1\}$	0,25đ
	Câu 3	a) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:	

		$P = \frac{4}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-7}{x-1}$ $= \frac{4(\sqrt{x}-1) - 2(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$ $= \frac{4\sqrt{x}-4-2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ Với $x \geq 0; x \neq 1$	0,75đ 1đ 0,25đ
		b) Với $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ Đề $P \leq -2$ thì $\frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq -2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \leq 0$ $\Rightarrow 2\sqrt{x}-1$ và $\sqrt{x}-1$ khác dấu Lập bảng xét dấu ta có: $\frac{1}{4} \leq x < 1$ Vậy $\frac{1}{4} \leq x < 1$ thì $P \leq -2$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

ĐỀ SỐ 02**Câu 1 :** (2.0 điểm)

1.1. Tìm điều kiện để biểu thức $\sqrt{3x+1}$ có nghĩa

1.2. Tìm x biết : $\sqrt{(x-\sqrt{3})^2} = 3$

Câu 2 : (3.0 điểm)

2.1. Trục căn thức ở mẫu: $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

2.2. Tính: $A = \sqrt{55} \cdot \sqrt{77} \cdot \sqrt{35}$

2.3. Tính: $B = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$

Câu 3 : (2,0 điểm)

3.1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2\sqrt{x} - x$

3.2. Đơn giản biểu thức: $M = \left(\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{\frac{9}{5}} + \sqrt{5} \right) : \sqrt{5}$

Câu 4 : (3,0 điểm) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$

4.1. Rút gọn biểu thức Q

4.2. Tính giá trị của Q với $x = 4 - 2\sqrt{3}$

ĐÁP ÁN

Câu	Nội dung	Điểm
1 (2đ)	1.1. Để biểu thức có nghĩa thì $3x + 1 \geq 0$	0,5
	Suy ra : $3x \geq -1$	0,25
	Vậy $x \geq -\frac{1}{3}$	0,25
2 (3đ)	1.2. $\sqrt{(x-\sqrt{3})^2} = 3 \Leftrightarrow x-\sqrt{3} = 3$	0,5
	* Khi $x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x-\sqrt{3} = 3 \Leftrightarrow x = 3+\sqrt{3}$	0,25
	* Khi $x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow x-\sqrt{3} = -3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}-3$	0,25
3 (2đ)	2.1. $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}}$	0,5
	$= \sqrt{2}$	0,5
	2.2. $A = \sqrt{55} \cdot \sqrt{77} \cdot \sqrt{35} = \sqrt{55 \cdot 77 \cdot 35}$	0,25
	$= \sqrt{5 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 7}$	0,25
	$= \sqrt{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2}$	0,25
	$= 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$	0,25
3 (2đ)	2.3. $B = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98} = \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{49 \cdot 2}$	0,5
	$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$	0,25
	$= (3+5-7)\sqrt{2} = \sqrt{2}$	0,25
3 (2đ)	3.1. $P = 2\sqrt{x} - x = 1 - x + 2\sqrt{x} - 1 = 1 - (\sqrt{x} - 1)^2 \leq 1$	0,5
	$\max P = 1$ với $x = 1$	0,5
	3.2. $M = \left(\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{\frac{9}{5}} + \sqrt{5} \right) : \sqrt{5} = \left(\frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{3}{5}\sqrt{5} + \sqrt{5} \right) : \sqrt{5}$	0,5

	$= \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5} + 1 \right) \sqrt{5} : \sqrt{5}$	0,25
	$= \frac{3}{5} \sqrt{5} : \sqrt{5} = \frac{3}{5}$	0,25
	Cách 2: $M = \sqrt{\frac{1}{25}} - \sqrt{\frac{9}{25}} + 1$	0,5
	$= \frac{1}{5} - \frac{3}{5} + 1$	0,25
	$= \frac{3}{5}$	0,25
4 (3đ)	4.1.	
	$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right) \quad (x > 0; x \neq 1; x \neq 4)$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}$	0,5
	$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2 - [(\sqrt{x})^2 - 2^2]}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}$	0,5
	$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{x-1-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
	$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}{3}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}$	0,25
	4.2.	
	$x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$	0,25
	$Q = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - 2}{3\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \frac{ \sqrt{3}-1 - 2}{3 \sqrt{3}-1 }$	0,25
	$= \frac{\sqrt{3}-1-2}{3(\sqrt{3}-1)} \quad (\text{Do } \sqrt{3} > 1)$	0,25
	$= \frac{\sqrt{3}-3}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$	0,25

**VIII. MỘT SỐ BÀI TOÁN CHUYÊN CÓ CHỨA CĂN THỨC TRÍCH TỪ
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI, THI CHUYÊN TOÁN 9**

Câu 1: Cho $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

- Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn P.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P.
- Tìm giá trị nguyên của biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$

Hướng dẫn giải:

- Điều kiện xác định của biểu thức là : $x > 0, x \neq 1$

$$b. P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x} - 1 - 2(\sqrt{x}+1)$$

$$P = x - \sqrt{x} + 1$$

$$P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Min } P = \frac{3}{4} \text{ khi } x = \frac{1}{4}.$$

$$c. Q = \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} = \frac{2}{M}$$

Với $x > 0$ và $x \neq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si (Dạng toán GTLN, GTNN) cho 2 số dương ta có:

$$M = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 > 1 \Rightarrow 0 < Q < 2$$

Do đó $Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow Q = 1$

Câu 2: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{x\sqrt{x}-5x+6\sqrt{x}-24}{x-9}$

- Tìm tập xác định và rút gọn A.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Hướng dẫn giải

a. Tập xác định : $x \geq 0$ và $x \neq 9$

$$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + x\sqrt{x} - 5x + 6\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 3x + 7\sqrt{x} - 21}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-3)(x+7)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{b. } A = \frac{x-9+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6$$

$$A \geq 2 \sqrt{(\sqrt{x}+3) \frac{16}{(\sqrt{x}+3)}} - 6 = 2$$

Vậy GTNN của $A = 2$ khi $\sqrt{x}+3 = \frac{16}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 3. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right)$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{4-x} < 0$.

Hướng Dẫn Giải

a. Điều kiện xác định: $x \geq 0$; $x \neq 4$

$$\text{Rút gọn } P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \left(x - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} \right) \\
&= \frac{x-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot (x-\sqrt{x}-2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1} (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = \sqrt{x}-2
\end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $P = \sqrt{x} - 2$

$$b. \text{ Ta có } P\sqrt{4-x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ (\sqrt{x}-2)\sqrt{4-x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ \sqrt{x} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp với điều kiện ta có $0 \leq x < 4$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4: Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{8\sqrt{x}+9}{x+\sqrt{x}-6}$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tính giá trị của P khi $x = \frac{\sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{10}}$.

c. Tìm tất cả các giá trị của x để P có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

a. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 4$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } P &= \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{8\sqrt{x}+9}{x+\sqrt{x}-6} \\
&= \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{8\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+3) + 8\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{x+2\sqrt{x}-8-x-6\sqrt{x}-9+8\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{4}{\sqrt{x}+3}$$

Biểu thức rút gọn là: $P = \frac{4}{\sqrt{x}+3}$

b. Với $x = \frac{\sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{10}} = 1$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào P ta có :

$$P = \frac{4}{\sqrt{1}+3} = 1$$

c. Với $x \geq 0$ ta có $P = \frac{4}{\sqrt{x}+3}$

Vì $\sqrt{x}+3 \geq 3$ với $x \geq 0$ và $4 > 0 \Rightarrow 0 < P \leq 1$

Do P có giá trị nguyên $\Rightarrow P = 1$

Câu 5. Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{x-1}-1)^2 + \sqrt{4x-3+4\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$.

Hướng dẫn giải

Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{x-1}-1)^2 + \sqrt{4x-3+4\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$

Ta có $(\sqrt{x-1}-1)^2 = x-2\sqrt{x-1}$

Và $4x-3+4\sqrt{x-1} = (2\sqrt{x-1}+1)^2$

Do với $x \geq 1$ thì $2\sqrt{x-1}+1 > 0$ nên $\sqrt{4x-3+4\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}+1$

Vậy $A = x+1$.

Câu 6:

a) Tính giá trị biểu thức: $M = (\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{10}) : \sqrt[3]{-64}$

b) Không dùng máy tính hãy so sánh: $A = \sqrt{10} + \sqrt{13}$ với $B = \sqrt{11} + \sqrt{12}$

Hướng dẫn giải

$$a) M = (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} + \sqrt{10}) : \sqrt[3]{-64}$$

$$M = (2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} + \sqrt{10}) : \sqrt[3]{(-4)^3}$$

$$M = (-\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} + \sqrt{10}) : \sqrt[3]{-64}$$

$$M = 8 : (-4) = -2$$

$$b) A^2 = 23 + 2\sqrt{10 \cdot 13} = 23 + 2\sqrt{130}$$

$$B^2 = 23 + 2\sqrt{11 \cdot 12} = 23 + 2\sqrt{132}$$

$$\Rightarrow B^2 > A^2, \text{ mà } A > 0, B > 0. \text{ Vậy } B > A.$$

Câu 7:

$$a) \text{ Rút gọn biểu thức } P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$b) \text{ Tìm giá trị } x \text{ nguyên để biểu thức } M = \frac{x^2+1}{x-1} \text{ nhận giá trị nguyên.}$$

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ ĐK: } x \geq 0, x \neq 1$$

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$P = \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2} = -x + \sqrt{x}$$

$$b) \text{ Ta có } M = x+1 + \frac{2}{x-1}$$

$$M \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow x-1 \text{ là ước của } 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ x-1 = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy các giá trị } x \text{ thỏa điều kiện bài toán là } \{-1; 0; 2; 3\}.$$

Câu 8. Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$

- a. Tìm điều kiện của a và b để M xác định và rút gọn M.
 b. Tính giá trị của M khi $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$.

Hướng dẫn giải

a. $M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$

ĐK xác định của M: $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

$$M = \frac{2a + 2a\sqrt{2} - 2\sqrt{3ab} + 2\sqrt{3ab} - 3b - 2a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$$

$$= \frac{2a - 3b}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}} = \frac{(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})(\sqrt{2a} - \sqrt{3b})}{\sqrt{a}(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})} = \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{3b}}{\sqrt{a}}$$

b. Ta có $M = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{3b}{a}}$ với $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{3b}{a} = \frac{30 + 22\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} = \frac{(30 + 22\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)}{(1 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)} = \frac{102 + 68\sqrt{2}}{17}$$

Vậy $\sqrt{\frac{3b}{a}} = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2}$

Từ đó $M = \sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}) = -2$

Câu 9. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = (5 + \sqrt{21})(\sqrt{14} - \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}}$

b. $B = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{5} + 1}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
 \text{a. } A &= (5 + \sqrt{21})(\sqrt{14} - \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}} = \sqrt{5 + \sqrt{21}}(\sqrt{14} - \sqrt{6})\sqrt{5 + \sqrt{21}}\sqrt{5 - \sqrt{21}} \\
 &= \sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{21}}(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot 2 = \sqrt{10 + 2\sqrt{21}}(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot 2 \\
 &= \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2}(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot 2 = (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot 2 = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. Ta có: } \left(\frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{2}} \right)^2 &= \frac{\sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{2} \\
 &= \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{2} = \sqrt{5} + 1
 \end{aligned}$$

Suy ra B = 0.

Câu 10. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}} \left[\sqrt{(2 + x)^3} - \sqrt{(2 - x)^3} \right]}{4 + \sqrt{4 - x^2}} \quad \text{với } -2 \leq x \leq 2$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2 + x}; \quad b = \sqrt{2 - x} \quad (a, b \geq 0)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4; \quad a^2 - b^2 = 2x$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2 + ab}(a^3 - b^3)}{4 + ab} = \frac{\sqrt{2 + ab}(a - b)(a^2 + b^2 + ab)}{4 + ab}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2 + ab}(a - b)(4 + ab)}{4 + ab} = \sqrt{2 + ab}(a - b)$$

$$\Rightarrow A\sqrt{2} = \sqrt{4 + 2ab}(a - b)$$

$$\Rightarrow A\sqrt{2} = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab)}(a - b) = (a + b)(a - b)$$

$$\Rightarrow A\sqrt{2} = a^2 - b^2 = 2x \Rightarrow A = x\sqrt{2}$$

Câu 11. Cho $A = \sqrt{2016^2 + 2016^2 \cdot 2017^2 + 2017^2}$.

Chứng minh A là một số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Cho $A = \sqrt{2016^2 + 2016^2 \cdot 2017^2 + 2017^2}$. Đặt $2016 = a$, ta có :

$$A = \sqrt{2016^2 + 2016^2 \cdot 2017^2 + 2017^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + a + 1)^2} = a^2 + a + 1$$

Vì $a = 2016$ là một số tự nhiên, nên A là một số tự nhiên.

Bài 12: Thu gọn các biểu thức sau:

a. $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9}$ với $x \geq 0$; $x \neq 9$

b. $B = 21 \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right)^2 - 6 \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} \right)^2 - 15\sqrt{15}$

Hướng dẫn giải

a. Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ ta có :

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} = \left(\frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$$

Biểu thức rút gọn là: $A = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$

b. $B = \frac{21}{2} (\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2 - 3(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}})^2 - 15\sqrt{15}$

Ta có: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$; $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$$
; $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1$

$$\text{Do đó, } B = \frac{21}{2}(\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1)^2 - 3(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1)^2 - 15\sqrt{15}$$

$$= \frac{15}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 - 15\sqrt{15} = 60$$

Câu 13: (Không dùng máy tính cầm tay)

a. Chứng minh $(\sqrt{22}-3\sqrt{2})\sqrt{10+3\sqrt{11}}=2$

b. Cho biểu thức $P = \frac{a(\sqrt{a}-1)}{a-1} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

c. Rút gọn rồi tính giá trị của P tại $a = 2014^2$.

Hướng dẫn giải:

a. Chứng minh: $(\sqrt{22}-3\sqrt{2})\sqrt{10+3\sqrt{11}}=2$

Ta có: $(\sqrt{22}-3\sqrt{2})\sqrt{10+3\sqrt{11}} =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2}(\sqrt{11}-3)\sqrt{10+3\sqrt{11}} \\ &= (\sqrt{11}-3)\sqrt{20+6\sqrt{11}} = (\sqrt{11}-3)\sqrt{(\sqrt{11}+3)^2} \\ &= (\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3) = 11-9 = 2 \end{aligned}$$

b. $P = \frac{a(\sqrt{a}-1)}{a-1} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$ (ĐK : $a > 0$ và $a \neq 1$)

Ta có: $P = \frac{a(\sqrt{a}-1)}{a-1} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{a}+1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} = \frac{a-1}{\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}-1$

c. Với $a = 2014^2$, ta có : $P = \sqrt{2014^2} - 1 = 2014 - 1 = 2013$

Câu 14.

a. Rút gọn biểu thức:

$$P = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

b. Cho $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1}$. Tính $Q = x^3 + 12x + 2016$

Hướng dẫn giải:

a. Cách 1

Ta có :

$$\begin{aligned}
& * \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \\
& = \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)} \\
& = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2} = \sqrt{4 - \left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} \\
& = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

Suy ra :

$$\begin{aligned}
P & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \\
P & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\
& = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2} \\
& = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4-2+\sqrt{3}} \\
& = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \\
& = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4-3} = 1
\end{aligned}$$

Cách 2 :

$$\begin{aligned}
P & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \text{ . Suy ra :} \\
P^2 & = \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) \cdot \left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right) \cdot \left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right) \\
P^2 & = \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) \cdot \left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) \\
P^2 & = \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) \cdot \left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

$$P^2 = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

Vì $P > 0$ nên $P = 1$.

b. $Q = x^3 + 12x + 2016$ với $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } x^3 &= \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} \right)^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} \right)^3 - 3 \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} + 3 \sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} \right)^2 - \left(\sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} \right)^3 \\ &= 1 + \sqrt{65} - \sqrt{65} + 1 - 3 \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} \right) \\ &= 2 - 3 \sqrt[3]{(\sqrt{65} - 1)(1 + \sqrt{65})} \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} \right) \\ &= 2 - 3 \sqrt[3]{64} \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} \right) \\ &= 2 - 12 \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65} - 1} \right) \\ &= 2 - 12x. \text{ Vậy : } x^3 = 2 - 12x \\ \text{Do đó : } Q &= x^3 + 12x + 2016 = 2 - 12x + 12x + 2016 = 2018 \end{aligned}$$

Câu 15.

a. Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

b. Cho $x = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$, tính giá trị của biểu thức $P = (x^2 + 4x - 2)^{2013}$.

Hướng dẫn giải:

a. Biến đổi biểu thức $A = \frac{x+2+x+\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$$= \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = 1$$

Vậy $A = 1$.

$$\text{b. Ta có: } x = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{\sqrt{(\sqrt{20}+1)^2}+3} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{20}+4} = \frac{2}{2(\sqrt{5}+2)} = \sqrt{5}-2.$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 2 = (\sqrt{5}-2)^2 + 4(\sqrt{5}-2) - 2 = 9 - 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 10 = -1$$

$$\Rightarrow P = (x^2 + 4x - 2)^{2013} = (-1)^{2013} = -1$$

Vậy $P = -1$.

Câu 16.

$$\text{a. Cho } A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-3}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{7\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-8} \right) : \frac{\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}+4}.$$

Tìm x sao cho $A < 2$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện xác định của biểu thức: $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+4) - (x-3)(\sqrt{x}-2) - (7\sqrt{x}+10)}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} : \frac{\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}+4} \\ &= \frac{4(x-4)}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} : \frac{\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}+4} = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+7}. \end{aligned}$$

$$\text{Để biểu thức } A < 2 \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+7} < 2$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x}+2) < \sqrt{x}+7 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta có } \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

Câu 17: Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = \cotg 45^\circ$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned}\text{Ta có : VT} &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \\ &= 1 = \cotg 45^\circ \text{ (đpcm)}\end{aligned}$$

Câu 18: Cho biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$

- Tìm điều kiện của x để Q có nghĩa
- Rút gọn biểu thức Q

Hướng dẫn giải:

- Q có nghĩa $\Leftrightarrow x > 1$ và $x \neq 2$

$$\text{b. } Q = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$Q = \frac{\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}} + 1 + \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}} + 1}{\sqrt{x^2-4x+4}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$Q = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$Q = \frac{|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|}{|x-2|} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$\text{* Nếu } 1 < x < 2 \text{ ta có: } Q = \frac{1-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}+1}{2-x} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

Vậy biểu thức $Q = \frac{2}{1-x}$

* Nếu $x > 2$ ta có:

$$Q = \frac{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

Vậy biểu thức $Q = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

Câu 19: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-4}}{xy}$

Với điều kiện $x \geq 1, y \geq 4$ ta có : $M = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-4}}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm,

Ta có: $\sqrt{x-1} = \sqrt{1(x-1)} \leq \frac{1+x-1}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$ (vì x dương)

Và: $\sqrt{y-4} = \frac{1}{2}\sqrt{4(y-4)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4+y-4}{2} = \frac{y}{4}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \frac{1}{4}$ (vì y dương)

Suy ra: $M = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 2, y = 8$

Câu 20. Rút gọn các biểu thức sau :

a. $A = \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} \dots + \frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2005}} + \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2009}}$

b. $B = x^3 - 3x + 2000$ với $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải:

a. Ta có: $A = \frac{\sqrt{5}-1}{5-1} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{9-5} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{13-9} + \dots + \frac{\sqrt{2005}-\sqrt{2001}}{2005-2001} + \frac{\sqrt{2009}-\sqrt{2005}}{2009-2005}$

Rút gọn, ta được $A = \frac{\sqrt{2009}-1}{4}$.

b. Áp dụng công thức : $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, với

$$a = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}, b = \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$$

Ta có $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = a+b$

$$\Rightarrow x^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = a^3 + b^3 + 3abx$$

$$\Leftrightarrow x^3 = (3+2\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2}) + 3.\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}.x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 6 + 3.\sqrt[3]{9-8}.x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 6 + 3x$$

Vậy $B = x^3 - 3x + 2000$

$$= 6 + 3x - 3x + 2000$$

$$= 2006$$

Kết luận $B = 2006$.

Bài 21.

a. Tính tổng: $P = \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \dots + \frac{2}{399}$

b. Cho a, b, c, d là các số dương và $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Hãy trục căn thức ở mẫu của biểu thức sau: $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$

Hướng dẫn giải:

a. Ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \dots + \frac{2}{399} \\
&= \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{19.21} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{21} \\
&= \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

b. Biến đổi biểu thức sau :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} &= \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{d}) + (\sqrt{b} + \sqrt{c})} \\
&= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{d}) - (\sqrt{b} + \sqrt{c})}{[(\sqrt{a} + \sqrt{d}) + (\sqrt{b} + \sqrt{c})][(\sqrt{a} + \sqrt{d}) - (\sqrt{b} + \sqrt{c})]} \\
&= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{d} - \sqrt{b} - \sqrt{c}}{a + d + 2\sqrt{ad} - (b + c + 2\sqrt{bc})} \\
&= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{d} - \sqrt{b} - \sqrt{c}}{a + d + 2\sqrt{ad} - b - c - 2\sqrt{bc}} \\
&= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{d} - \sqrt{b} - \sqrt{c}}{a + d - b - c} \\
&\left(\text{do } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow 2\sqrt{ad} = 2\sqrt{bc} \right)
\end{aligned}$$

Câu 22: Thực hiện tính: $A = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2}$ với $x = 2\sqrt{6}+3$

Hướng dẫn giải:

Biến đổi biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x+2+x-2+2\sqrt{(x+2)(x-2)}}}{\sqrt{(x+2)(x-2)}+x+2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{Thay } x = 2\sqrt{6}+3 \text{ vào được: } \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{6}+2+3}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } A = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Câu 23: Cho biểu thức $K = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $(x \geq 0; x \neq 1)$

a. Rút gọn K

b. Tìm x nguyên dương để K nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\text{a. Biến đổi biểu thức } K = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{b. } K = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

K nguyên khi 2 chia hết cho $(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \in U(2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=2 \\ \sqrt{x}-1=-2 \\ \sqrt{x}-1=1 \\ \sqrt{x}-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=-1 \text{ (Loại)} \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Vì x nguyên dương nên $x = \{4; 9\}$

Vậy, để K nguyên thì $x = \{4; 9\}$.

Câu 24. Cho $x = \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1} \right)}$

Tính giá trị của biểu thức: $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2016}$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x &= \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1} \right)} \\ &= \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1 - \sqrt{\sqrt{2}+1}+1}{\sqrt{2}+1-1} \right)} = \frac{2}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có: } A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2016} = [(x-1)(x^3 - x + 1)]^{2016}$$

Thay $x = \sqrt{2}$ vào A, ta được:

$$A = [(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1)]^{2016} = [(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^{2016} = 1^{2016} = 1$$

Chương 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

1. Kiến thức trọng tâm

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x (thay đổi), sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là (đgl) hàm số của x , và x đgl biến số.

+ Kí hiệu: $y = f(x)$, $y = g(x)$,...

+ Khi $x=x_0$ thì giá trị của hàm số $f(x)$ tại x_0 là $f(x_0)$. Kí hiệu:

$$y_0 = f(x_0) .$$

+ Tập hợp các giá trị của x để hàm số $y = f(x)$ xác định gọi là tập xác định của hàm số.

Kí hiệu: TXĐ = D.

+ Khi giá trị của x thay đổi, mà giá trị của hàm số $y = f(x)$ không thay đổi (luôn nhận một giá trị nhất định), thì hàm số đó gọi là **hàm hằng**.

+ Hàm số có thể được cho bởi công thức $y = f(x)$ hoặc bằng các giá trị x , y tương ứng.

- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả những điểm $M(x_0; y_0)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy sao cho $y_0 = f(x_0)$.

+ Điểm $M(x_0; y_0)$ bất kỳ được gọi là thuộc đồ thị hàm số

$$y = f(x) \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$$

+ Điểm $M(x_0; y_0)$ bất kỳ không thuộc đồ thị hàm số nếu $y = f(x) \Leftrightarrow$

$$f(x_0) \neq y_0$$

+ Điểm $M(x_0; y_0)$: khoảng cách từ M đến trục Ox: $d_{(M/Ox)} = |y_0|$;
 khoảng cách từ M đến trục Oy: $d_{(M/Oy)} = |x_0|$. Khoảng cách từ M đến
 gốc toạ độ O (0;0) là $d_{(M/O)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

- Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

Với x_1, x_2 bất kỳ trong khoảng $(a; b)$ và $x_1 < x_2$

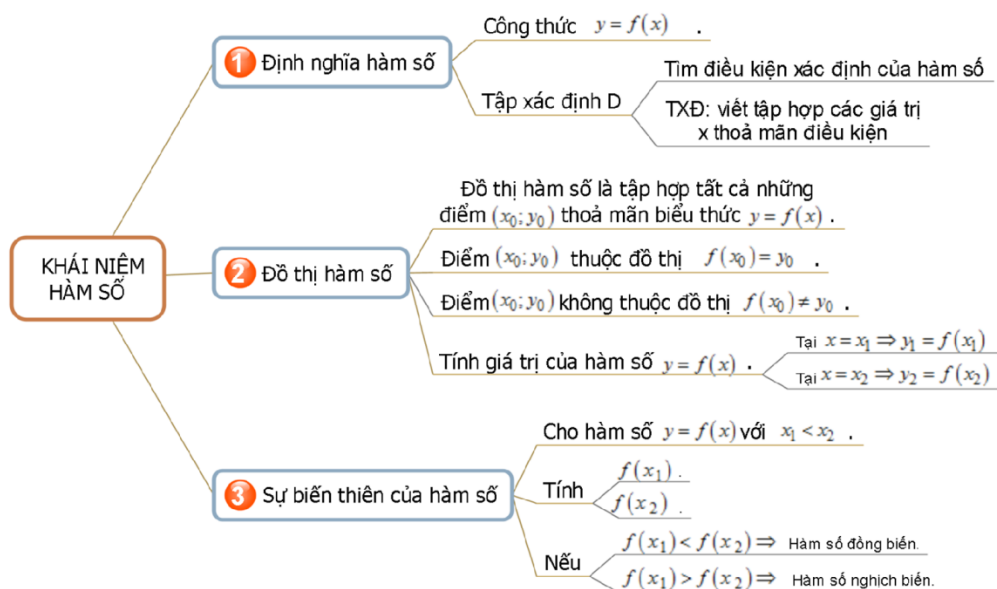
+ Nếu $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(a; b)$.

+ Nếu $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(a; b)$.

+ Việc chứng minh hàm số đồng biến, nghịch biến còn được sử dụng để tìm
 GTLN, GTNN của hàm số trong một khoảng giá trị cho trước của biến.



SƠ ĐỒ: KHÁI NIỆM HÀM SỐ

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của hàm số

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Tìm điều kiện xác định của hàm số là đi tìm các giá trị sao cho biểu thức của hàm số có nghĩa
2. Ở đây ta cần chú ý điều kiện của mẫu thức, biểu thức trong căn,...

Ví dụ minh họa 1: Tìm điều kiện xác định của các hàm số sau:

a) $y = -\frac{1}{2}x - 3$; b) $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{1-x}$ c) $y = \frac{1}{x^2-3}$

Hướng dẫn giải:

a) Hàm số $y = -\frac{1}{2}x - 3$ xác định với mọi x thuộc R.

b) Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{1-x}$ xác định với x thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

c) Hàm số $y = \frac{1}{x^2-3}$ xác định với x thỏa mãn: $x^2-3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Với giá trị nào của x thì các hàm số sau xác định:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$

b) $y = \frac{x-1}{(x+1)(x-3)}$

c) $y = \frac{1}{x^2-2x+3}$

d) $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{|x|-2}$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $y = \sqrt{x-5} - \sqrt{x+3}$

b) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Với giá trị nào của x thì các hàm số sau xác định:

a) Hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = \frac{x-1}{(x+1)(x-3)}$ xác định khi:

$$(x+1)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

c) Vì $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $y = \frac{1}{x^2-2x+3}$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

d) Hàm số $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{|x|-2}$ xác định khi:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ |x|-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ |x| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Điều kiện có nghĩa của hàm số là: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $y = \sqrt{x-5} - \sqrt{x+3}$

Điều kiện có nghĩa của hàm số là: $\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5$

b) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

Điều kiện có nghĩa của hàm số là: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

b. Dạng 2. Tính giá trị hàm số khi cho giá trị của ẩn

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

- Việc tính toán theo kiểu này sẽ giúp ta xác định được tọa độ của nhiều điểm thuộc đồ thị hàm số một cách nhanh chóng. Ngoài ra, phương pháp sử dụng kết hợp máy tính cầm tay (sử dụng Slove) sẽ giúp cải thiện thời gian một cách hiệu quả.
- Tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ khi cho giá trị của ẩn x_0 là ta thay giá trị của x_0 vào biểu thức $y = f(x)$ để tìm được $y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

Tính $f\left(-\frac{3}{2}\right); f(-1); f(0); f(1); f\left(\frac{3}{2}\right)$

Hướng dẫn giải:

Thay các giá trị của x vào hàm số, ta được các giá trị tương ứng sau:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1) - 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. a) Cho hàm số $y = \frac{3}{5}x$

Tính: $f(-3); f(-2); f(-1); f(0); f(1); f(2); f(3)$

b) $y = \frac{3}{5}x + 2$

Tính: $f(-3); f(-2); f(-1); f(0); f(1); f(2); f(3)$

c) Có nhận xét gì về hai hàm số nói trên ?

Bài 2. Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3 - x$.

a) Tính $f(-3), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), g(1), g(2), g(3)$.

b) Xác định a để $2f(a) = g(a)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính $f(4 - 2\sqrt{3})$.

c) Tìm x nguyên để $f(x)$ là số nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1.**

a),b) Hàm số $y = \frac{3}{5}x$; và hàm số $y = \frac{3}{5}x + 2$

Tính $f(-3); f(-2); f(-1); f(0); f(1); f(2); f(3)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \frac{3}{5}x$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$
$f(x) = \frac{3}{5}x + 2$	$-\frac{9}{5} + 2$	$-\frac{6}{5} + 2$	$-\frac{1}{3} + 2$	$0 + 2$	$\frac{1}{3} + 2$	$\frac{6}{5} + 2$	$\frac{9}{5} + 2$

c) Có nhận xét gì về hai hàm số nói trên ?

Hàm số $y = \frac{3}{5}x$ và hàm số $y = \frac{3}{5}x + 2$ là hai hàm số đồng biến vì khi giá trị x tăng thì giá trị tương ứng của y cũng tăng.

Với cùng một giá trị của biến x, giá trị của hàm số $y = \frac{3}{5}x + 2$ luôn luôn lớn

hơn giá trị của hàm số $y = \frac{3}{5}x$ là 2 đơn vị.

Bài 2. Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3 - x$.

a) Tính $f(-3) = (-3)^2 = 9$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = (0)^2 = 0$$

$$g(1) = 3 - 1 = 2$$

$$g(2) = 3 - 2 = 1$$

$$g(3) = 3 - 3 = 0$$

b) Xác định a để

$$2f(a) = g(a) \Leftrightarrow 2a^2 = 3 - a \Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(2a+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy, $a = 1$; $a = -\frac{3}{2}$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

a) Hàm số xác định với $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$b) f(4-2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}-1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+1}{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}-1} = \frac{\sqrt{3}-1+1}{\sqrt{3}-1-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}.$$

c) Ta có: $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ là số nguyên

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)$ là ước nguyên của 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=2 \\ \sqrt{x}-1=1 \\ \sqrt{x}-1=-1 \\ \sqrt{x}-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x}=-1(VN) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=4 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy, với $x = \{0; 4; 9\}$ thì hàm số đạt giá trị nguyên.

c. Dạng 3. Xác định điểm thuộc (không thuộc) đồ thị hàm số
PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

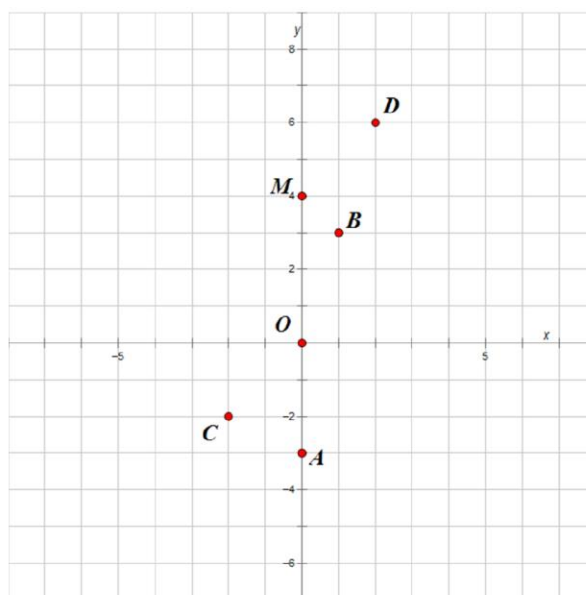
1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$.
2. Một điểm $(x_0; y_0)$ được gọi là thuộc đồ thị hàm số nếu khi ta thay các giá trị toạ độ của điểm đó vào phương trình của hàm số và thoả mãn $\Leftrightarrow y = f(x_0) = y_0$.
3. Một điểm $(x_0; y_0)$ được gọi là không thuộc đồ thị hàm số nếu khi ta thay các giá trị toạ độ của điểm đó vào phương trình của hàm số mà không thoả mãn $\Leftrightarrow y = f(x_0) \neq y_0$.

Ví dụ minh họa 1: Xác định các điểm sau trên hệ trục toạ độ Oxy.

$$A(0; -3); B(1; 3); C(-2; -2); D(2; 6); M(0; 4)$$

Hướng dẫn giải:

$$A(0; -3); B(1; 3); C(-2; -2); D(2; 6); M(0; 4)$$



Ví dụ minh họa 2: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$

Trong các điểm $A(4;2)$, $B(2;1)$, $C(9;3)$, $D(8;2\sqrt{2})$, điểm nào thuộc và điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số.

Hướng dẫn giải:

Thay tọa độ từng điểm đã cho vào phương trình $y = f(x) = \sqrt{x}$.

+ $x_A = 4$ thay vào hàm số: $f(4) = \sqrt{4} = 2 = y_A$, suy ra A thuộc đồ thị hàm số.

+ $x_B = 2$ thay vào hàm số: $f(2) = \sqrt{2} \neq y_B$, suy ra B không thuộc đồ thị hàm số.

+ $x_C = 9$ thay vào hàm số: $f(9) = \sqrt{9} = 3 = y_C$, suy ra C thuộc đồ thị hàm số.

+ $x_D = 8$ thay vào hàm số: $f(8) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = y_D$, suy ra D thuộc đồ thị hàm số.

Vậy, các điểm A, C, D thuộc đồ thị, điểm B không thuộc đồ thị.

Ví dụ minh họa 3: Vẽ trên mặt phẳng Oxy các điểm $A(1;2)$; $B(-1;0)$; $C(2;0)$

a) Tính diện tích tam giác ABC (theo đơn vị đo của trục tọa độ).

b) Tính chu vi tam giác ABC (theo đơn vị đo của trục tọa độ).

Hướng dẫn giải:

Biểu diễn các điểm $A(1;2)$; $B(-1;0)$; $C(2;0)$

trên hệ trục tọa độ Oxy.

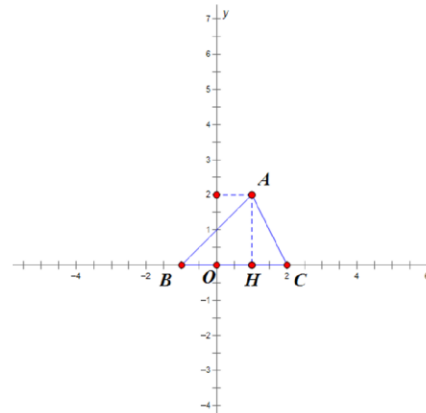
a) Ta có: $BC = BO + OC = |-1| + |2| = 3$, $AH = 2$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

b) Ta có: $BH = BO + OH = |-1| + |1| = 2$

Tam giác AHB vuông tại H, theo định lý

Pythagore, ta có: $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2^2 + 2^2 = 8$



Suy ra $AB = 2\sqrt{2}$.

Tương tự, tam giác AHC vuông tại H, ta có: $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.

Suy ra $AC = \sqrt{5}$

Vậy chu vi tam giác ABC bằng: $AB + BC + CA = 2\sqrt{2} + 3 + \sqrt{5}$ (đơn vị độ dài)

d. Dạng 4. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Tìm điều kiện xác định của hàm số.
2. Xét $x_1; x_2$ thuộc tập xác định của hàm số với $x_1 < x_2$
 - a. Nếu $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến
 - b. Nếu $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến.

Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$

Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải:

Hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Xét $x_1; x_2$ là hai số thực bất kì trên tập số thực $\mathbb{R}$, với $x_1 < x_2$, ta có:

$$f(x_1) = \frac{1}{3}x_1 - 1 \text{ và } f(x_2) = \frac{1}{3}x_2 - 1$$

Do đó: $f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{1}{3}x_2 - 1\right) - \left(\frac{1}{3}x_1 - 1\right) = \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$

Mà $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, suy ra $\frac{1}{3}(x_2 - x_1) > 0$ hay $f(x_2) - f(x_1) > 0$

Vậy hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.

a) Chứng minh hàm số $f(x) = -\frac{2}{5}x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh hàm số $f(x) = 2x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Chứng tỏ rằng hàm số: $f(x) = x^3$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Chứng minh hàm số $f(x) = -\frac{2}{5}x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = -\frac{2}{5}x - 3$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Xét x_1, x_2 là hai số thực bất kì trên tập số thực $\mathbb{R}$, với $x_1 < x_2$,

ta có: $f(x_1) = -\frac{2}{5}x_1 - 3$ và $f(x_2) = -\frac{2}{5}x_2 - 3$

Do đó: $f(x_2) - f(x_1) = \left(-\frac{2}{5}x_2 - 3\right) - \left(-\frac{2}{5}x_1 - 3\right) = -\frac{2}{5}(x_2 - x_1)$

Mà $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, suy ra $-\frac{2}{5}(x_2 - x_1) < 0$ hay $f(x_2) - f(x_1) < 0$

Vậy hàm số $f(x) = -\frac{2}{5}x - 3$ nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x) = 2x - 1$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Xét x_1, x_2 là hai số thực bất kì trên tập số thực $\mathbb{R}$, với $x_1 < x_2$, ta có:

$$f(x_1) = 2x_1 - 1 \text{ và } f(x_2) = 2x_2 - 1$$

$$\text{Do đó: } f(x_2) - f(x_1) = (2x_2 - 1) - (2x_1 - 1) = 2(x_2 - x_1)$$

$$\text{Mà } x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0, \text{ suy ra } 2(x_2 - x_1) > 0 \text{ hay } f(x_2) - f(x_1) > 0$$

Vậy hàm số $f(x) = 2x - 1$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Bài 2. Hàm số $f(x) = x^3$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Xét x_1, x_2 là hai số thực bất kì trên tập số thực $\mathbb{R}$, với $x_1 < x_2$, ta có:

$$f(x_1) = x_1^3 \text{ và } f(x_2) = x_2^3$$

$$\text{Do đó: } f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\left(x_2^2 + x_2x_1 + \frac{1}{4}x_1^2 \right) + \frac{3}{4}x_1^2 \right] = (x_2 - x_1) \left[\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1 \right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 \right]$$

$$\text{Mà } x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \text{ và } \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1 \right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 > 0 \text{ với mọi } x_1, x_2$$

$$\text{Suy ra: } (x_2 - x_1) \left[\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1 \right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 \right] > 0 \text{ hay } f(x_2) - f(x_1) > 0$$

Vậy hàm số $f(x) = x^3$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Kiến thức trọng tâm

a. Khái niệm hàm số bậc nhất

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ (hoặc $ax + by + c = 0$) trong đó a, b, c là các hệ số với $a \neq 0$.
- Điều kiện để hàm số: $y = ax + b$ là hàm số bậc nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$.

Ví dụ minh họa : Cho hàm số: $y = (3 - m)x - 2$ (1)

Tìm các giá trị của m để hàm số (1) là hàm số bậc nhất.

Hướng dẫn giải: Hàm số (1) là bậc nhất $\Leftrightarrow 3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

b. Tính chất:

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ và có tính chất sau:

- + Đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0$
- + Nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a < 0$.

Ví dụ minh họa : Cho hàm số: $y = (m - 2)x - 2$ (1).

Tìm các giá trị của m để hàm số (2):

- a) Đồng biến trên $\mathbb{R}$
- b) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải:

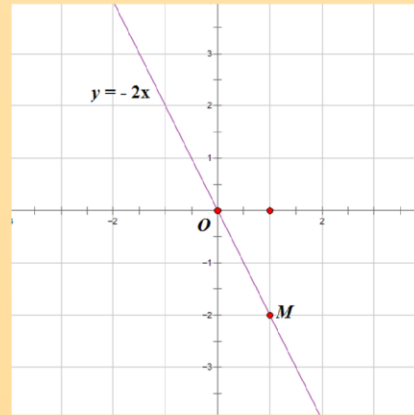
- a) Hàm số (1) Đồng biến $\Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$
- b) Hàm số (1) Nghịch biến $\Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

c. Đồ thị hàm số bậc nhất

- Đồ thị của hàm số $y = ax$ có $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$ là một đường thẳng (xiên) đi qua hai điểm $O(0;0)$ và $M(1;a)$.

Ví dụ minh họa : Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x$.

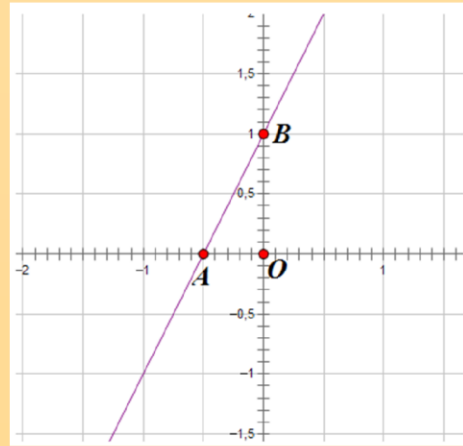
Cho $x=1$ ta có $y = -2$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; -2)$. Cho $x=0$ ta có $y = 0$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 0) \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = -2x$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(1; -2)$ và $(0; 0)$.



• Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ có $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ là một đường thẳng (xiên) đi qua hai điểm $A(0; b)$ và $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Ví dụ minh họa : Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x + 2$.

Cho $x=0$ ta có $y = 2$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2)$. Cho $x=-1$ ta có $y = 0$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 0) \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(-1; 0)$.



d. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$ ($aa' \neq 0$):

- $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$
- $(d) \equiv (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $(d) \text{ cắt } (d') \Leftrightarrow a \neq a'$
- $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$

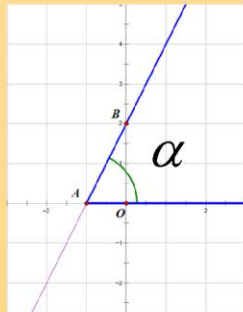
e. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Đường thẳng $y = ax + b$ có hai hệ số là a và b trong đó hệ số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng.
- Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) với tia Ox : Cách xác định góc này như sau, trước tiên ta xác định giao điểm A của đường thẳng với tia Ox , góc α là góc tạo bởi tia Ax , và phần phía trên của đường thẳng.
- a là hệ số góc của đường thẳng, α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) với tia Ox : Ta có biểu thức liên hệ sau: $\tan \alpha = a$.

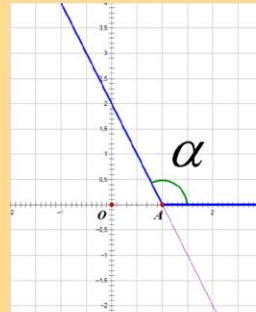
Vậy nếu biết hệ số góc a ta có thể suy ra số đo của góc α và ngược lại.

Do đó a gọi là hệ số góc của đường thẳng (hệ số cho biết góc α)

$$a > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$a < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



- Các đường thẳng có cùng hệ số góc thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

2. Các dạng toán

a. Dạng 1. Hàm số bậc nhất – Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số bậc nhất

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

- Để xác định một hàm số có phải là hàm số bậc nhất hay không, ta chú ý đến số lũy thừa của ẩn số (thường là ẩn x) chỉ gồm dạng lũy thừa bậc 1 và bậc 0. Khi đó hàm số bậc nhất có dạng: $y = ax + b$ ($a \neq 0$)
- Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số bậc nhất:
 - + Việc chứng minh hàm số đồng biến – nghịch biến đã được nêu trong phần trước. Ở đây ta chỉ xét riêng cho hàm số bậc nhất: $y = ax + b$
 - + Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow a > 0$
 - + Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow a < 0$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định các hệ số a , b và xét xem hàm số nào đồng biến? Hàm số nào nghịch biến?

a) $y = -2x - 3$

b) $y = -\frac{3}{4}x$

c) $y = -3x^2 + 5$

d) $y = \sqrt{3}(x-1) + \sqrt{2}$

Bài 2. Cho hàm số bậc nhất $y = (m+3)x + 7$:

- Tìm các giá trị của m để hàm số y là hàm số đồng biến.
- Tìm các giá trị của m để hàm số y là hàm số nghịch biến.

Bài 3. Vẽ tam giác AOB trên mặt phẳng tọa độ Oxy, biết:

$$O(0;0); A(2;4); B(4;1).$$

- Tính khoảng cách từ các đỉnh A, B của tam giác đến gốc tọa độ O và khoảng cách giữa hai điểm A và B;

b) Tính diện tích tam giác AOB (theo đơn vị đo trên mỗi trục tọa độ);

Bài 4.

a) Cho hàm số $y = ax + 6$.

Tìm hệ số a của hàm số, biết rằng: khi $x = -1$ thì $y = 5$.

b) Cho hàm số $y = ax + b$. Tìm hệ số a ; b của hàm số, biết rằng: khi $x = -1$ thì $y = 1$ và khi $x = 0$ thì $y = -2$.

Bài 5. Với các giá trị nào của m , thì các hàm số sau là hàm số bậc nhất?

a) $y = x\sqrt{m+3} + \frac{1}{2}$;

b) $y = x\sqrt{m^2 - 4m + 4} - 3$;

c) $y = \left(\frac{-2}{m^2 - 1}\right)x + \frac{9}{2}$.

Bài 6. Cho hàm số bậc nhất $y = (3 - 2\sqrt{2})x + \sqrt{2} - 1$

a) Hàm số đã cho đồng biến hay nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$? Vì sao?

b) Tính giá trị của y khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$;

c) Tìm các giá trị của x để $y = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Hàm số $y = -2x - 3$ là hàm số bậc nhất, trong đó $a = -2; b = -3$.

Hàm số có hệ số $a = -2 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = -\frac{3}{4}x$ là hàm số bậc nhất, trong đó $a = -\frac{3}{4}; b = 0$

Hàm số có hệ số $a = -\frac{3}{4} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số $y = -3x^2 + 5$ không phải là hàm số bậc nhất.

d) Hàm số $y = \sqrt{3}(x - 1) + \sqrt{2} = \sqrt{3}.x - \sqrt{3} + \sqrt{2}$ là hàm số bậc nhất, trong đó

$a = \sqrt{3}; b = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Hàm số có hệ số $a = \sqrt{3} > 0$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Hàm số $y = (m+3)x + 7$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = m+3$

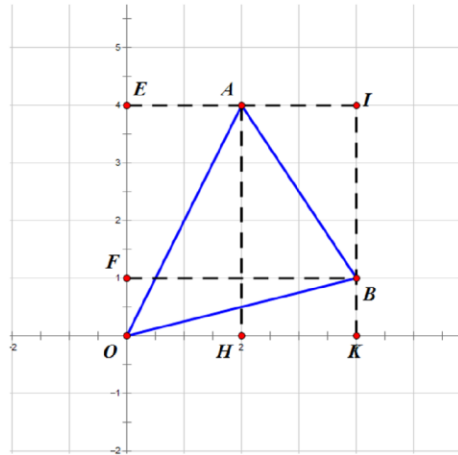
a) Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow a = m+3 > 0 \Leftrightarrow m > -3$;

b) Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow a = m+3 < 0 \Leftrightarrow m < -3$;

Chú ý: Khi $m = -3$ thì hàm số $y = 0x + 7$. Giá trị của y không thay đổi với mọi giá trị của x , và luôn bằng 7. Do đó, ta gọi y là một hằng số (hàm hằng = hàm số có giá trị không đổi).

Bài 3. Vẽ tam giác AOB trên mặt phẳng tọa độ Oxy, biết $O(0;0)$; $A(2;4)$; $B(4;1)$.

Dựng hệ tọa độ Oxy, rồi dựng các điểm O, A, B theo đề ra, nối AB, OA, OB để được tam giác AOB.



a) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên tia Ox. Ta có: $OH = 2$; $AH = 4$; $OK = 4$; $BK = 1$.

Áp dụng định lý Pythagore với tam giác AHO, ta có:

$$OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Áp dụng định lý Pythagore với tam giác BKO, ta có:

$$OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

Gọi E là hình chiếu của A trên Oy, I là giao điểm của EA và KB, ta có: $AI = 2$; $BI = 3$.

$$AB = \sqrt{AI^2 + BI^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$b) S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AIO} + S_{\triangle BIO} - S_{\triangle AIB}$$

$$= \frac{1}{2}(AI + KO)IK - \frac{1}{2}AI \cdot BI - \frac{1}{2}OK \cdot BK$$

$$= \frac{1}{2}(2+4)4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 7 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Bài 4.

a) Cho hàm số $y = ax + 6$.

Khi $x = -1$ thì $y = 5$, thay vào hàm số ta có: $5 = a(-1) + 6$, suy ra $a = 1$.

b) Cho hàm số $y = ax + b$.

Khi $x = -1$ thì $y = 1$ thay vào hàm số ta có: $1 = a(-1) + b \Rightarrow b = a + 1$

và khi $x = 0$ thì $y = -2$ thay vào hàm số ta có: $-2 = a.0 + b \Rightarrow b = -2$.

Suy ra $a + 1 = -2 \Leftrightarrow a = -3$

Vậy hàm số: $y = -3x - 2$

Bài 5. Với các giá trị nào của m , thì các hàm số sau là hàm số bậc nhất?

a) Hàm số $y = x\sqrt{m+3} + \frac{1}{2}$ là hàm số bậc nhất

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+3} \neq 0 \Leftrightarrow m+3 > 0 \Leftrightarrow m > -3 ;$$

Vậy khi $m > -3$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b) $y = x\sqrt{m^2 - 4m + 4} - 3 = x\sqrt{(m-2)^2} - 3 = x|m-2| - 3$;

Có hệ số $|m-2| > 0$ với mọi số $m \neq 2$.

Vậy khi $m \neq 2$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

c) Hàm số $y = \left(\frac{-2}{m^2 - 1}\right)x + \frac{9}{2}$ là hàm số bậc nhất

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{m^2 - 1} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

Vậy với $m \neq \pm 1$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Bài 6. Cho hàm số bậc nhất $y = (3 - 2\sqrt{2})x + \sqrt{2} - 1$

a) Hàm số $y = (3 - 2\sqrt{2})x + \sqrt{2} - 1$ là hàm số bậc nhất vì có dạng $y = ax + b$.

Trong đó hệ số $a = 3 - 2\sqrt{2} > 0$ nên hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

b) Khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thay vào hàm số, ta có:

$$y = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = 9 - 8 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} ;$$

c) Để $y = 0 \Leftrightarrow (3 - 2\sqrt{2})x + \sqrt{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = -\sqrt{2} - 1$.

b. Dạng 2. Đồ thị hàm số $y = ax$ và hệ số góc của đường thẳng $y = ax$ **PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**

1. Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(1;a)$.
2. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$)
 - + Xác định 1 điểm bất kì của đồ thị, chẳng hạn:
 - Cho $x = 1 \Rightarrow y = a$, ta có điểm $A(1;a)$
 - Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$, ta có điểm $O(0;0)$
 - + Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A, O.
3. Hệ số a của đường thẳng $y = ax$
 - + Nếu $a > 0$ suy ra hàm số đồng biến
 - + Nếu $a < 0$ suy ra hàm số nghịch biến
 - + Hệ số a còn cho ta biết được góc α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax$ với tia Ox nên người ta gọi a là hệ số góc của đường thẳng. Với biểu thức liên hệ giữa a và α là $\tan \alpha = a$.
 - + Nếu $a > 0$ thì α là góc nhọn
 - + Nếu $a < 0$ thì α là góc tù

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $y = -\frac{5}{2}x$

- a) Xác định vị trí của điểm $A\left(1; -\frac{5}{2}\right)$ trên mặt phẳng tọa độ, và vẽ đồ thị hàm số đó.
- b) Xét xem trong các điểm sau, điểm nào thuộc đồ thị hàm số?
 $B(2; -5); C(3; 7); D\left(1; \frac{5}{2}\right); E(0; 4)$

Bài 2. Cho hàm số $y = 3x$:

- Vẽ đồ thị hàm số.
- Điểm A thuộc đồ thị hàm số, biết $OA = 2\sqrt{10}$. Xác định tọa độ điểm A.

Bài 3. Cho các hàm số $y = -2x$ và $y = x$.

- Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của hai hàm số trên.
- Qua điểm $H(0;4)$ vẽ đường thẳng d song song với trục Ox, cắt các đường thẳng $y = 2x$ và $y = x$ lần lượt ở A và B.

Tìm tọa độ các điểm A, B.

- Tính chu vi và diện tích tam giác AOB.

Bài 4.

- Trên mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng d đi qua O (0;0) và điểm $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$
- Đường thẳng d là đồ thị của hàm số nào?

Bài 5. Cho hàm số $y = -2x$ và $y = \frac{1}{2}x$

- Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của hai hàm số trên ;
- Qua điểm (0;2) vẽ đường thẳng song song với Ox cắt hai đường thẳng $y = -2x$ và $y = \frac{1}{2}x$ lần lượt ở A và B. Chứng minh tam giác AOB là tam giác vuông.

Bài 6. Tìm giá trị của m để hàm số $y = (3 - \sqrt{m+2})x$

- Đồng biến.
- Nghịch biến.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Vị trí của điểm $A\left(1; -\frac{5}{2}\right)$ trên mặt phẳng tọa độ được biểu diễn như hình vẽ.

b) Thay tọa độ từng điểm đã cho vào

phương trình $y = -\frac{5}{2}x$, ta được:

$$f(x_B) = -\frac{5}{2}x_B = -\frac{5}{2} \cdot 2 = -5 = y_B$$

$$f(x_C) = -\frac{5}{2}x_C = -\frac{5}{2} \cdot 3 = -\frac{15}{2} \neq y_C$$

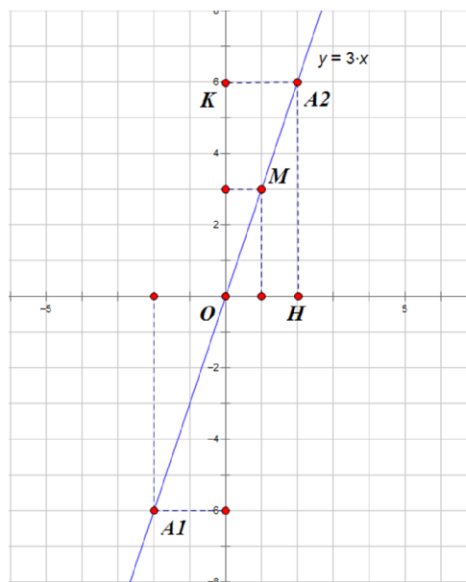
$$f(x_D) = -\frac{5}{2}x_D = -\frac{5}{2} \cdot (-1) = \frac{5}{2} = y_D$$

$$f(x_E) = -\frac{5}{2}x_E = -\frac{5}{2} \cdot 0 = 0 \neq y_E$$

Suy ra các điểm B, D thuộc đồ thị

hàm số $y = -\frac{5}{2}x$, điểm C, E không thuộc đồ thị hàm số. Các điểm B, C, D, E

được xác định ở hình vẽ $B(2; -5)$; $C(3; 7)$; $D\left(-1; \frac{5}{2}\right)$; $E(0; 4)$.



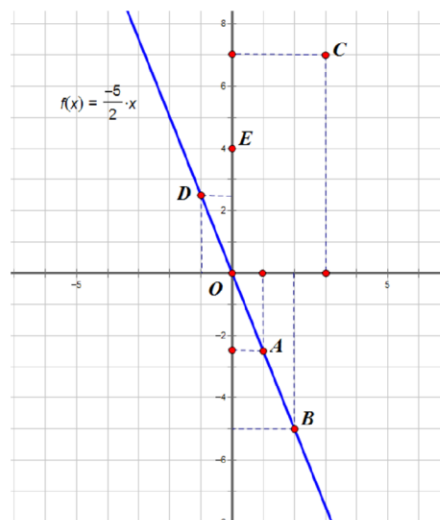
Bài 2. Cho hàm số $y = 3x$:

a) Cho $x = 1$ ta có $y = 3$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm M(1;3)

Cho $x = 0$ ta có $y = 0$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm O(0;0).

b) Điểm $A(x_A; y_A)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 3x$ nên $y_A = 3x_A$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các trục Ox, Oy.

Ta có: $OH = x_A$; $OK = y_A = 3x_A$, biết $OA = 2\sqrt{10}$.



$$OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{OH^2 + OK^2}$$

$$= \sqrt{x_A^2 + (3x_A)^2} = |x_A| \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$\Rightarrow x_A = 2$ suy ra $y_A = -6$ hoặc $x_A = -2$ suy ra $y_A = 6$

Vậy ta có hai điểm $A_1(2;6)$ và $A_2(-2;-6)$.

Bài 3. Cho các hàm số $y = -2x$ và $y = x$.

a) *Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x$ (d_1)

Cho $x = 1$ ta có $y = -2$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1; -2)$. Cho $x = 0$ ta có $y = 0$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $O(0;0)$.

*Vẽ đồ thị hàm số $y = x$ (d_2)

Cho $x = 1$ ta có $y = 1$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $N(1;1)$. Cho $x = 0$ ta có $y = 0$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $O(0;0)$.

b) Đường thẳng (d_3) đi qua H và song song

Ox có phương trình $y = 4$.

Điểm A thuộc (d_3) $\Rightarrow y_A = 4$, A thuộc đồ thị hàm số

$y = -2x \Leftrightarrow 4 = -2x_A \Rightarrow x_A = -2$. Vậy $A(-2;4)$.

Điểm B thuộc (d_3) $\Rightarrow y_B = 4$, B thuộc đồ thị hàm số $y = x \Leftrightarrow 4 = x_B \Rightarrow x_B = 4$.

Vậy $B(4;4)$.

c) Gọi K là hình chiếu của B trên trục Ox. Điểm H chính là hình chiếu của A, B trên trục Oy. $AH = 2$; $BH = 4$; $OH = 4$; $OK = 4$;

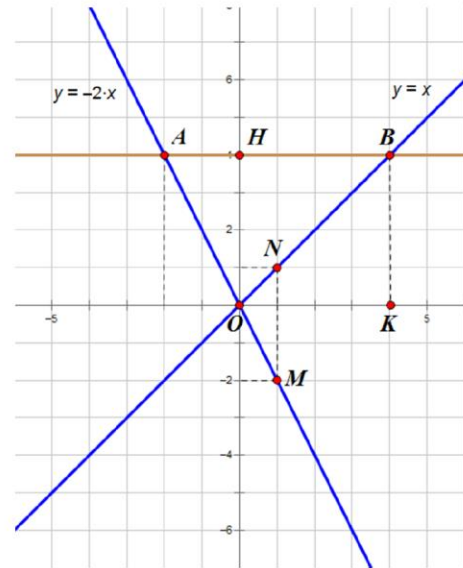
$$\Rightarrow AB = AH + BH = 2 + 4 = 6$$

Diện tích tam giác AOB: $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OH \cdot AB = \frac{1}{2}4 \cdot 6 = 12$ (đvdt)

$$OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}; OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Chu vi tích tam giác AOB} = OA + OB + AB = 4 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$$

Bài 4.



a) Trên mặt phẳng tọa độ, ta dựng điểm $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Vẽ đường thẳng đi qua O

$(0;0)$ và điểm $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ta được đường thẳng d cần dựng.

b) Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O $(0;0)$ nên có dạng $y=ax$. Vì điểm A thuộc đường thẳng d nên tọa độ của nó thỏa mãn phương trình $y=ax$. Ta có:

$$\frac{3}{2} = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = -3.$$

Vậy đường thẳng d có phương trình là: $y = -3x$

Bài 5. Cho hàm số $y = -2x$ và

$$y = \frac{1}{2}x$$

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x$ (d_1)

Cho $x=1$ ta có $y = -2$ suy ra đồ thị

hàm số đi qua điểm $M(1; -2)$. Cho

$x=0$ ta có $y = 0$ suy ra đồ thị hàm

số đi qua điểm O $(0;0)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x$ (d_2)

Cho $x=1$ ta có $y = \frac{1}{2}$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $N\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Cho $x=0$ ta có

$y = 0$ suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm O $(0;0)$.

b) Đường thẳng (d_3) đi qua $H(0;2)$ và song song Ox có phương trình $y = 2$.

Điểm A thuộc (d_3) $\Rightarrow y_A = 2$, A thuộc đồ thị hàm số

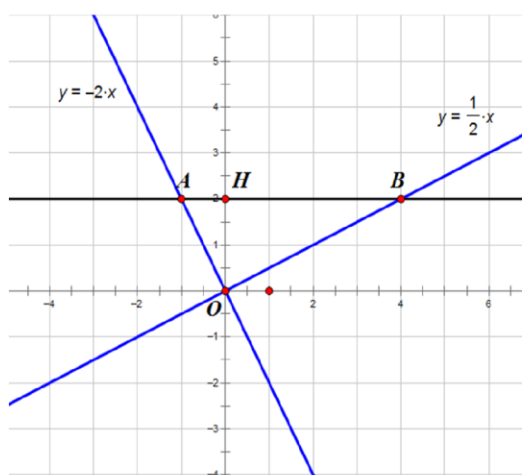
$$y = -2x \Leftrightarrow 2 = -2x_A \Rightarrow x_A = -1.$$

Vậy $A(-1;2)$.

Điểm B thuộc (d_3) $\Rightarrow y_B = 2$, B thuộc đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2}x_B \Rightarrow x_B = 4. \text{ Vậy } B(4;2).$$

c) Điểm H chính là hình chiếu của A, B trên trục Oy.



$$AH = 1; BH = 4; OH = 2$$

$$\Rightarrow AB = AH + BH = 1 + 4 = 5.$$

$$OA^2 = OH^2 + HA^2 = 2^2 + 1^2 = 5;$$

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = 2^2 + 4^2 = 20;$$

$$AB^2 = 5^2 = 25$$

$$\Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2. \text{ Suy ra tam giác AOB vuông tại O.}$$

Bài 6. Tìm giá trị của m để hàm số $y = (3 - \sqrt{m+2})x$

a) Hàm số đồng biến

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{m+2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{m+2} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \geq 0 \\ m+2 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 7$$

Vậy khi $-2 \leq m < 7$ thì hàm số đồng biến trên R.

c) Hàm số nghịch biến

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{m+2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{m+2} > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \geq 0 \\ m+2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m > 7 \end{cases} \Leftrightarrow m > 7$$

Vậy khi $-2 \leq m < 7$ thì hàm số đồng biến trên R.

c. Dạng 3. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)**PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**

1. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng b, và song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$, trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

2. Đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$) cũng còn được gọi là phương trình đường thẳng $y = ax + b$; b được gọi là trung độ gốc của đường thẳng.

3. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ với ($a \neq 0; b \neq 0$)

a. Cách thứ nhất: Xác định hai điểm bất kì của đồ thị, chẳng hạn:

Cho $x = 1 \Rightarrow y = a + b$, ta có điểm $A(1; a + b)$

Cho $x = -1 \Rightarrow y = -a + b$, ta có điểm $B(-1; -a + b)$

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A, B.

b. Cách thứ hai: Xác định giao điểm của đồ thị với trục Ox, Oy:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = b$, ta có điểm $M(0; b)$

Cho $x = -\frac{b}{a} \Rightarrow y = 0$, ta có điểm $N\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm M, N.

4. Giao điểm của hai đồ thị hàm số là đường thẳng $y = ax + b$ (d_1) và

$y = a'x + b'$ (d_2) ($a \neq a'$)

Ta thực hiện các bước như sau:

a. Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng

$$ax + b = a'x + b' \Rightarrow x = \frac{b' - b}{a - a'}$$

b. Thay giá trị x vừa tìm được vào (d_1) hoặc (d_2) để tìm được y.

c. Kết luận.

Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $y = 2x - 2$ và hàm số $y = -3x + 5$

a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ, đồ thị hai hàm số đã cho.

b) Tìm tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng $y = 2x - 2$ và $y = -3x + 5$

Hướng dẫn giải:

a) - Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 2$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -2$, ta có điểm $A(0; -2)$

Cho $x = -\frac{-2}{2} = 1 \Rightarrow y = 0$, ta có điểm

$B(1; 0)$

Vẽ đường thẳng đi qua điểm A và điểm B ta được đồ thị hàm số $y = 2x - 2$.

- Vẽ đồ thị hàm số $y = -3x + 5$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 5$, ta có điểm $C(0; 5)$

Cho $x = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = 0$, ta có điểm $D(\frac{5}{3}; 0)$

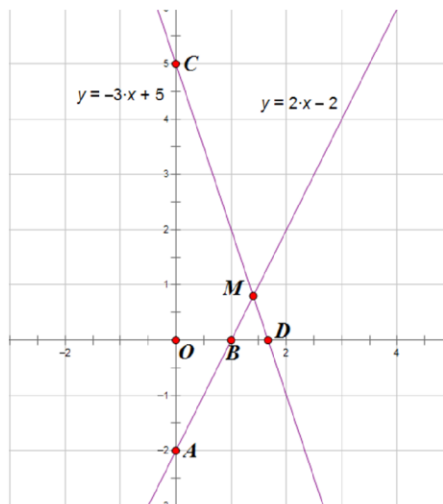
Vẽ đường thẳng đi qua điểm C và điểm D ta được đồ thị hàm số $y = -3x + 5$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 2x - 2$ và $y = -3x + 5$:

$$2x - 2 = -3x + 5 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5},$$

thay $x = \frac{7}{5}$ vào phương trình đường thẳng $y = 2x - 2$

Ta có: $y = 2x - 2 = 2 \cdot \frac{7}{5} - 2 = \frac{4}{5}$. Vậy tọa độ giao điểm $M(\frac{7}{5}; \frac{4}{5})$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. a) Biết đồ thị hàm số $y = ax + 7$ đi qua điểm $M(2; 11)$. Tìm a ?

b) Biết rằng khi $x = 3$ thì hàm số $y = 2x + b$ có giá trị bằng 8. Tìm b ?

c) Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số với các giá trị tìm được của a và b ?

Bài 2. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết rằng đồ thị của nó là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -3x$ và đi qua điểm $A(1; -1)$.

Bài 3. a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số sau:

$$y = \frac{1}{3}x; \quad y = \frac{1}{3}x + 1; \quad y = -\frac{1}{3}x; \quad y = -\frac{1}{3}x + 1$$

b) Bốn đường thẳng trên cắt nhau tạo thành tứ giác OABC (O là gốc tọa độ). Tứ giác OABC là hình gì? Tại sao?

Bài 4. Cho hàm số $y = (m + 1)x$

a) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến? Nghịch biến ?

b) Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 4)$

c) Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $B(2; -4)$

Bài 5. Cho ba đường thẳng $y = -x + 1$ (d_1); $y = x + 1$ (d_2) và $y = -1$ (d_3)

a) Vẽ ba đường thẳng đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ;

b) Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2); B là giao điểm của (d_1) và (d_3); C là giao điểm của (d_2) và (d_3). Tìm tọa độ các điểm A, B, C. Chứng tỏ rằng $\triangle ABC$ cân.

Bài 6. Cho hàm số $y = (m - 2)x + m$

a) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3;

b) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

c) Vẽ đồ thị của hai hàm số tìm được ở câu a, b trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Đồ thị hàm số $y = ax + 7$ đi qua điểm $M(2;11)$. Thay tọa độ M vào phương trình, ta có:

$$11 = a \cdot 2 + 7 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2, \text{ ta có hàm số } y = 2x + 7$$

b) Khi $x = 3$ thì hàm số $y = 2x + b$ có giá trị bằng 8. Thay $x = 3$ và $y = 8$ vào phương trình, ta có:

$$8 = 2 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 2, \text{ ta có hàm số } y = 2x + 2$$

c) Đồ thị của hai hàm số $y = 2x + 7$ và $y = 2x + 2$ là hai đường thẳng song song với nhau vì có cùng hệ số $a = 2$.

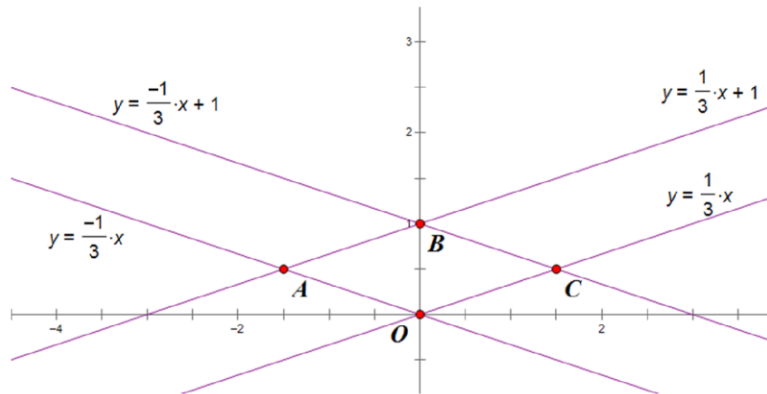
Bài 2. Đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = -3x$ nên $a = -3$, ta có $y = -3x + b$

Đường thẳng $y = -3x + b$ qua điểm $A(1; -1)$, ta có: $-1 = -3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 2$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = -3x + 2$.

Bài 3.

a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số sau:



Đường thẳng $y = \frac{1}{3}x$ đi qua hai điểm $O(0;0)$ và $(3;1)$

Đường thẳng $y = \frac{1}{3}x + 1$ đi qua hai điểm $(0;1)$ và $(3;2)$

Đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x$ đi qua hai điểm $O(0;0)$ và $(3;-1)$

Đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$ đi qua hai điểm $(0;1)$ và $(3;0)$

b) Hai đường thẳng $y = \frac{1}{3}x$ và $y = \frac{1}{3}x + 1$ song song với nhau vì có cùng hệ số góc $a = \frac{1}{3}$.

Hai đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x$ và $y = -\frac{1}{3}x + 1$ song song với nhau vì có cùng hệ số góc $a = -\frac{1}{3}$.

Nên tứ giác ABCO là hình bình hành vì có hai cặp cạnh đối song song với nhau.

Bài 4. Cho hàm số $y = (m+1)x$

a) Hàm số $y = (m+1)x$ đồng biến $\Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Hàm số $y = (m+1)x$ nghịch biến $\Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

b) Điểm $A(2;4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = (m+1)x$, suy ra:

$$4 = (m+1)2 \Leftrightarrow 2m = 2 \Leftrightarrow m = 1$$

c) Điểm $B(2;-4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = (m+1)x$, suy ra:

$$-4 = (m+1)2 \Leftrightarrow 2m = -6 \Leftrightarrow m = -3$$

Bài 5. Cho ba đường thẳng $y = -x + 1$ (d_1); $y = x + 1$ (d_2) và $y = -1$ (d_3)

a) Vẽ ba đường thẳng đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ;

Đường thẳng $y = -x + 1$ (d_1) đi qua hai điểm $(0;1)$ và $(1;0)$

Đường thẳng $y = x + 1$ (d_2) đi qua hai điểm $(0;1)$ và $(-1;0)$

Đường thẳng $y = -1$ (d_3) đi qua hai điểm $(0;-1)$ và song song với trục Ox.

b) - Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) :

$$-x_A + 1 = x_A + 1 \Leftrightarrow 2x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 0$$

Thay $x_A = 0$ vào (d_1) , suy ra: $y_A = 1$. Vậy

$$A(0;1)$$

- B là giao điểm của (d_1) và (d_3)

Điểm B thuộc (d_3) suy ra: $y_B = -1$.

Điểm B thuộc (d_1) , thay $y_B = -1$ vào (d_1) , ta có: $-1 = -x_B + 1 \Leftrightarrow x_B = 2$. Vậy

$$B(2;-1);$$

- C là giao điểm của (d_2) và (d_3)

Điểm C thuộc (d_3) suy ra: $y_C = -1$.

Điểm C thuộc (d_2) , thay $y_C = -1$ vào (d_2) , ta có: $-1 = x_C + 1 \Leftrightarrow x_C = -2$.

Vậy $C(-2;-1)$;

Gọi H là giao điểm của BC với trục Oy, ta có $BC \perp Oy$ và $HB = HC$.

Tam giác ABC có AH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến nên $\triangle ABC$ cân ở A.

Bài 6. Cho hàm số $y = (m-2)x + m$

a) Điểm thuộc trục tung có tung độ bằng 3 có tọa độ là $(0;3)$

Hàm số $y = (m-2)x + m$ có đồ thị đi qua điểm $(0;3)$, ta có:

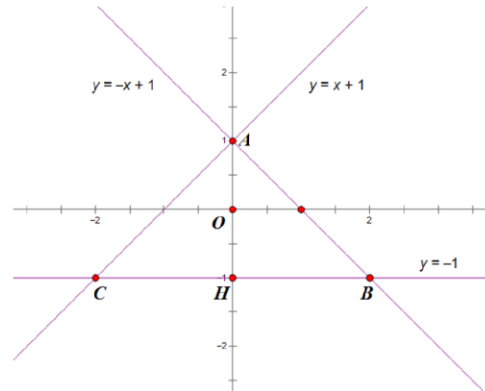
$$3 = (m-2) \cdot 0 + m \Leftrightarrow m = 3. \text{ Suy ra đồ thị hàm số: } y = x + 3$$

b) Điểm thuộc trục hoành có hoành độ bằng 3, có tọa độ là $(3;0)$

Hàm số $y = (m-2)x + m$ có đồ thị đi qua điểm $(3;0)$, ta có:

$$0 = (m-2) \cdot 3 + m \Leftrightarrow 4m = 6 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}. \text{ Suy ra đồ thị hàm số: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

c) Học sinh tự vẽ đồ thị.



d. Dạng 4. Hệ số góc của đường thẳng – Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$):

a. Đường thẳng $y = ax + b$ có hai hệ số là a và b trong đó hệ số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng.

b. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) với tia Ox . Cách xác định góc này như sau: trước tiên, ta xác định giao điểm A của đường thẳng với tia Ox , góc α là góc tạo bởi tia Ax , và phần phía trên của đường thẳng.

c. Biểu thức liên hệ giữa a và α : $\tan \alpha = a$

Vậy nếu biết hệ số góc a ta có thể suy ra số đo của góc α và ngược lại.

Do đó, a gọi là hệ số góc của đường thẳng (hệ số cho biết góc α).

Nếu $a > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

Nếu $a < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

d. Các đường thẳng có cùng hệ số góc thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

2. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau:

Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$ ($aa' \neq 0$)

a. Hai đường thẳng song song

$$(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$$

b. Hai đường thẳng trùng nhau

$$(d) \equiv (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

c. Hai đường thẳng cắt nhau

$$+ (d) \text{ cắt } (d') \Leftrightarrow a \neq a'$$

$$+ (d) \perp (d') \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$$

Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $y = -ax + 5$.

Hãy xác định hệ số a biết rằng:

a) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 3x$.

b) Khi $x = 1 + \sqrt{3}$ thì $y = 4 - \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

a) Đồ thị hàm số $y = -ax + 5$ song song với đường thẳng $y = 3x$ nên

$$-a = 3 \Leftrightarrow a = -3$$

b) Khi $x = 1 + \sqrt{3}$ thì $y = 4 - \sqrt{3}$, thay vào phương trình hàm số ta có:

$$4 - \sqrt{3} = -a(1 + \sqrt{3}) + 5 \Leftrightarrow a(1 + \sqrt{3}) = 5 - 4 + \sqrt{3} \Leftrightarrow a = 1.$$

Ví dụ minh họa 2: Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc tọa độ và:

a) Đi qua điểm $A(-3; 1)$.

b) Đi qua điểm $B(-1; -3)$.

c) Các đường thẳng trên tạo với tia Ox góc nhọn hay góc tù?

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng $y = ax + b$

Do đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ nên $b = 0$, suy ra đường thẳng có dạng: $y = ax$

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-3; 1)$, thay vào phương trình ta có:

$$1 = a \cdot (-3) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = -\frac{1}{3}x$

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(-1; -3)$, thay vào phương trình ta có:

$$-3 = a \cdot (-1) \Leftrightarrow a = 3$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = 3x$

c) Đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x$ có hệ số góc $a = -\frac{1}{3} < 0$ nên tạo với tia Ox góc tù.

Đường thẳng $y = 3x$ có hệ số góc $a = 3 > 0$ nên tạo với tia Ox góc nhọn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $y = 3x + b$. Hãy xác định hệ số b, trong mỗi trường hợp sau:

- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .
- b) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -4 .
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 2)$.

Bài 2. Cho hàm số $y = mx + 2$

- a) Tìm hệ số m biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 6$.
- b) Vẽ đồ thị hàm số với giá trị của m tìm được ở câu a và đồ thị hàm số $y = 2x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.
- c) Tìm tọa độ giao điểm A của hai đồ thị trên.

Bài 3. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết :

- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 , cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 .
- b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 3)$ và $B(-2; 6)$.

Bài 4. Tìm hàm số trong mỗi trường hợp sau, biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và:

- a) Đi qua điểm $M(3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

b) Có hệ số góc bằng $-\sqrt{2}$

c) Song song với đường thẳng $y = -5x + 1$

Bài 5. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $y = -2x + 5$ và thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) Đi qua gốc tọa độ.

b) Đi qua điểm $A(-1; 10)$.

Bài 6. Xác định hàm số $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau, biết :

a) Khi $a = -2$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\sqrt{2}$.

b) Khi $a = -4$, đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; -2)$.

c) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -\sqrt{3}x$ và đi qua điểm $B(1; 3 - \sqrt{3})$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho hàm số $y = 3x + b$. Hãy xác định hệ số b , trong mỗi trường hợp sau:

a) Gọi giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy là M với $y_M = -3$

Điểm M thuộc Oy, suy ra $x_M = 0 \Rightarrow M(0; -3)$.

Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = 3x + b \Rightarrow y_M = 3x_M + b \Leftrightarrow -3 = 3.0 + b \Leftrightarrow b = -3$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = 3x - 3$

b) Gọi giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là N với $x_N = -4$

Điểm N thuộc Ox, suy ra $y_N = 0 \Rightarrow N(-4; 0)$

Điểm N thuộc đồ thị hàm số

$y = 3x + b \Rightarrow y_N = 3x_N + b \Leftrightarrow 0 = 3.(-4) + b \Leftrightarrow b = 12$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = 3x + 12$

c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;2)$, suy ra tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình: $y_A = 3x_A + b \Leftrightarrow 2 = 3 \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = 5$

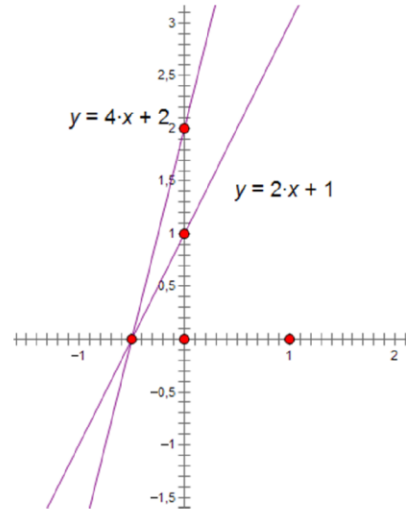
Vậy hàm số cần tìm là: $y = 3x + 5$

Bài 2. Cho hàm số $y = mx + 2$

a) Khi $x = 1$ thì $y = 6$; thay vào phương trình ta có: $6 = m \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow m = 4$

b) Hàm số $y = 4x + 2$ có đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;2)$ và $(-\frac{1}{2};0)$

Hàm số $y = 2x + 1$ có đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;1)$ và $(-\frac{1}{2};0)$



c) Hai đồ thị cắt nhau tại $M(-\frac{1}{2};0)$.

Bài 3. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết :

a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 , suy ra tọa độ giao điểm là $M(0;-3)$

M thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$, suy ra: $-3 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = -3$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 , suy ra tọa độ giao điểm là $N(-2;0)$

N thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$, suy ra: $0 = a \cdot (-2) - 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = -\frac{3}{2}x - 3$

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;3)$ và $B(-2;6)$.

Điểm $A(1;3)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$, suy ra: $3 = a.1 + b \Rightarrow b = 3 - a$

Điểm $B(-2;6)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$, suy ra: $6 = a.(-2) + b$

Thay $b = 3 - a$ vào : $6 = a.(-2) + (3 - a) \Leftrightarrow 3 = -3a \Leftrightarrow a = -1$

$\Rightarrow b = 3 - (-1) = 4$. Vậy hàm số cần tìm là: $y = -x + 4$

Bài 4. Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua gốc tọa độ nên có dạng: $y = ax$

a) Đồ thị đi qua điểm $M(3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, suy ra: $-\sqrt{3} = a.3\sqrt{3} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = -\frac{1}{3}x$

b) Đồ thị có hệ số góc bằng $-\sqrt{2} \Rightarrow a = -\sqrt{2}$. Vậy hàm số cần tìm là:

$$y = -\sqrt{2}.x$$

c) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -5x + 1 \Rightarrow a = -5$. Vậy hàm số cần tìm là: $y = -5x$

Bài 5. Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng: $y = ax + b$

Song song với đường thẳng $y = -2x + 5$, suy ra $\begin{cases} a = -2 \\ b \neq 5 \end{cases}$. Ta có: $y = -2x + b$

a) Đường thẳng $y = -2x + b$ đi qua gốc tọa độ, suy ra $b = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng: $y = -2x$

b) Đường thẳng $y = -2x + b$ đi qua điểm $A(-1;10)$, suy ra:

$$10 = -2.(-1) + b \Leftrightarrow b = 8$$

Vậy phương trình đường thẳng: $y = -2x + 8$

Bài 6. Xác định hàm số $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau, biết :

a) Khi $a = -2$, suy ra hàm số: $y = -2x + b$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\sqrt{2}$,

thay $x = 0; y = \sqrt{2}$ vào hàm số ta có: $\sqrt{2} = -2.0 + b \Leftrightarrow b = \sqrt{2}$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = -2x + \sqrt{2}$

b) Khi $a = -4$, suy ra hàm số: $y = -4x + b$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; -2)$, thay vào hàm số ta có:

$$-2 = -4 \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = -10$$

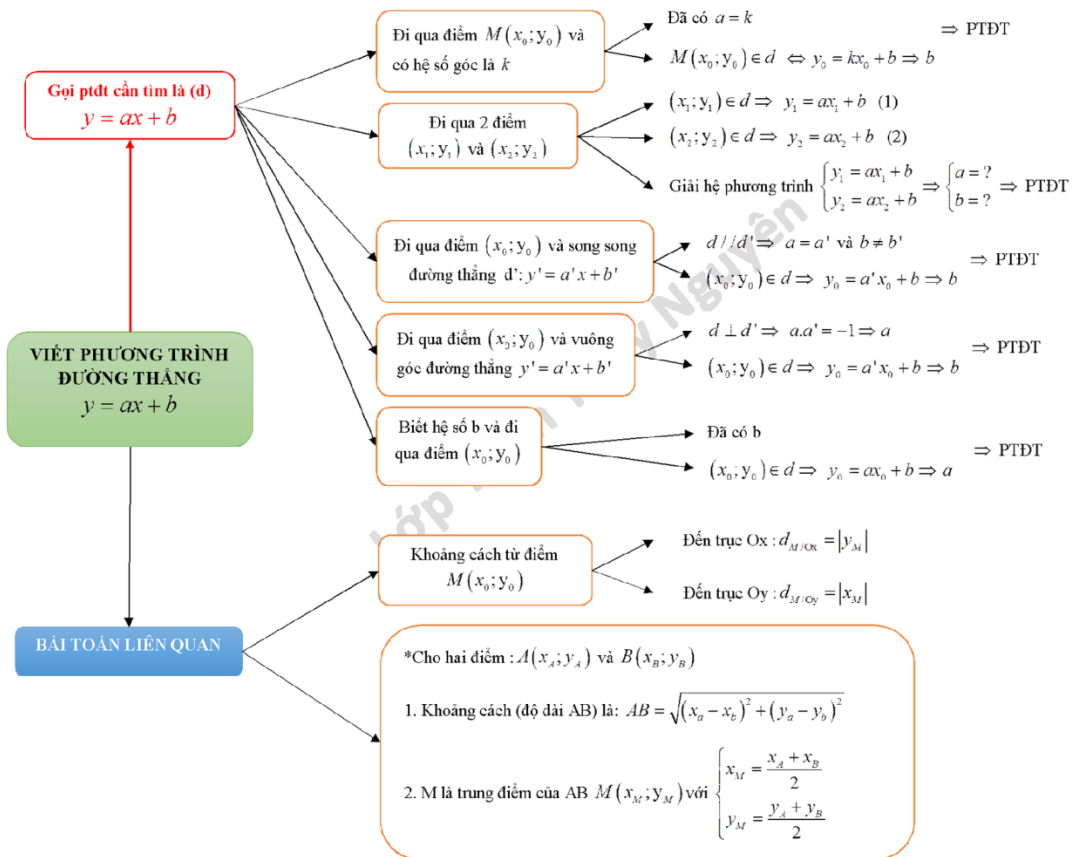
Vậy hàm số cần tìm là: $y = -4x - 10$

c) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -\sqrt{3}x$, suy ra $a = -\sqrt{3}$.

Ta có: $y = -\sqrt{3}x + b$

Đồ thị đi qua điểm $B(1; 3 - \sqrt{3})$, thay vào hàm số: $3 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 3$.

Vậy hàm số cần tìm là: $y = -\sqrt{3}x + 3$

e. Dạng 5. Một số dạng toán liên quan đến phương trình đường thẳng**SƠ ĐỒ TƯ DUY BÀI TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG****1. Xác định các giá trị của các hệ số để hàm số đồng biến, nghịch biến. Hai đường thẳng song song; cắt nhau; vuông góc, trùng nhau**

Ví dụ minh họa: Cho hai hàm số $y = (k+1)x + 3$ (d_1) và $y = (3-2k)x + 1$ (d_2)

- Xác định k để hàm số $y = (k+1)x + 3$ đồng biến, nghịch biến?
- Xác định k để hàm số $y = (3-2k)x + 1$ đồng biến, nghịch biến?
- Tìm k để hàm số $y = (k+1)x + 3$ và $y = (3-2k)x + 1$ cùng đồng biến?
- Tìm k để hàm số $y = (k+1)x + 3$ và $y = (3-2k)x + 1$ cùng nghịch biến?

- e) Tìm k để đường thẳng (d_1) và (d_2) song song ?
- f) Tìm k để đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau ?
- g) Tìm k để đồ thị hàm số $y = (k+1)x+3$ và $y = (3-2k)x+1$ trùng nhau ?
- h) Tìm k để đường thẳng (d_1) vuông góc với đường thẳng $y = 2x + 5$?
- i) Tìm k để đường thẳng (d_1) cắt đường thẳng $y = 2x + 2$ tại điểm có hoành độ bằng 1.
- j) Tìm k để đường thẳng (d_2) cắt đường thẳng $y = -3x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 4.

Hướng dẫn giải:

- a) Hàm số $y = (k+1)x+3$ đồng biến khi: $k+1 > 0 \Leftrightarrow k > -1$

Hàm số $y = (k+1)x+3$ nghịch biến khi: $k+1 < 0 \Leftrightarrow k < -1$

- b) Hàm số $y = (3-2k)x+1$ đồng biến khi: $3-2k > 0 \Leftrightarrow 3 > 2k \Leftrightarrow k < \frac{3}{2}$

Hàm số $y = (3-2k)x+1$ nghịch biến khi: $3-2k < 0 \Leftrightarrow 3 < 2k \Leftrightarrow k > \frac{3}{2}$

- c) Hàm số $y = (k+1)x+3$ và $y = (3-2k)x+1$ cùng đồng biến

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k+1 > 0 \\ 3-2k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -1 \\ k < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < k < \frac{3}{2}$$

- d) Hàm số $y = (k+1)x+3$ và $y = (3-2k)x+1$ cùng nghịch biến

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k+1 < 0 \\ 3-2k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -1 \\ k > \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (Vô nghiệm)}$$

- e) Để đồ thị hàm số $y = (k+1)x+3$ và $y = (3-2k)x+1$ song song

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k+1 = 3-2k \\ 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

f) Để đồ thị hàm số $y = (k+1)x+3$ và $y = (3-2k)x+1$ cắt nhau

$$\Leftrightarrow k+1 \neq 3-2k \Leftrightarrow 3k \neq 2 \Leftrightarrow k \neq \frac{2}{3}$$

g) Để đồ thị hàm số $y = (k+1)x+3$ và $y = 2x+5$ vuông góc:

$$\Leftrightarrow (k+1) \cdot (2) = -1 \Leftrightarrow 2k+2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2k = -3 \Leftrightarrow k = \frac{-3}{2}$$

h) Để đồ thị hàm số $y = (k+1)x+3$ và $y = (3-2k)x+1$ trùng nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k+1=3-2k \\ 3=1 \text{ (Vô lý)} \end{cases}$$

Vậy không có giá trị k thỏa điều kiện bài toán.

i) Để đồ thị hàm số $y = (k+1)x+3$ cắt đường thẳng $y = 2x+2$ tại điểm có hoành độ bằng 1:

Ta có giao điểm có hoành độ bằng 1 $\Rightarrow x_0 = 1$, thay vào

$$y_0 = 2x_0 + 2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow y_0 = 4$$

Vậy tọa độ giao điểm là $(1; 4)$, thay vào $y = (k+1)x+3$

$$\Rightarrow 4 = (k+1)1 + 3 \Leftrightarrow 4 = k + 4 \Leftrightarrow k = 0$$

KL: với $k = 0$ thì đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = 2x+2$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

j) Đồ thị hàm số $y = (3-2k)x+1$ cắt đường thẳng $y = -3x+1$ tại điểm có tung độ bằng 4:

Ta có giao điểm có tung độ bằng 4 $\Rightarrow y_0 = 4$, thay vào

$$y_0 = -3x_0 + 1 \Leftrightarrow 4 = -3x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

Vậy tọa độ giao điểm là $(-1; 4)$, thay vào $y = (3-2k)x+1$

$$\Rightarrow 4 = (3-2k)(-1) + 1 \Leftrightarrow 4 = -3 + 2k + 1 \Leftrightarrow 6 = 2k \Leftrightarrow k = 3$$

KL: với $k = 3$ thì đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -3x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 4.

2. Viết phương trình đường thẳng (d) biết hệ số góc a , và (d) đi qua 1 điểm cho trước $(x_0; y_0)$

PHƯƠNG PHÁP:

- + Thay $(x_0; y_0)$ vào $y = ax + b$ ta được phương trình $y_0 = ax_0 + b$ (1)
- + Thay giá trị a vào phương trình (1) ta tìm được hệ số b .
- + Thay giá trị của a và b vào $y = ax + b$ ta được pt đường thẳng cần tìm.

Ví dụ minh họa : Viết phương trình đường thẳng biết nó có hệ số góc là $k = 3$, và đi qua điểm A (3;2)

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường thẳng có dạng: $y = ax + b$.

Đi qua điểm A (3;2) nên ta có: $2 = a.3 + b$ (1)

Nó có hệ số góc $k = 3 \Rightarrow a = 3$.

Thay giá trị $a = 3$ vào (1) ta được: $2 = 9 + b \Rightarrow b = -7$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = 3x - 7$

3. Viết phương trình đường thẳng biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua 2 điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$

PHƯƠNG PHÁP:

- + Thay $(x_1; y_1)$ vào $y = ax + b$ ta được phương trình $y_1 = ax_1 + b$ (1)
- + Thay $(x_2; y_2)$ vào $y = ax + b$ ta được phương trình $y_2 = ax_2 + b$ (2)
- + Biểu diễn b theo a , ta có: $b = -ax_1 + y_1$
- + Thay b vào (2) ta tìm được a , từ đó suy ra giá trị của b .
- Ở đây ta có thể giải hệ phương trình (1) và (2) để tìm a, b .
- + Thay giá trị của a và b vào $y = ax + b$ ta được pt đường thẳng cần tìm.

Ví dụ minh họa : Viết phương trình đường thẳng đi qua A(1; 5) và B(-2; 3).

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường thẳng có dạng: $y = ax + b$ (d).

(d) đi qua A(1; 5) $\Rightarrow 5 = a \cdot 1 + b$; (d) đi qua B(-2; 3) $\Rightarrow 3 = a \cdot (-2) + b$

Suy ra a, b là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{13}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$.

4. Viết phương trình đường thẳng biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua 1 điểm $(x_0; y_0)$ và song song với đường thẳng cho trước $(d'): y = a'x + b'$

PHƯƠNG PHÁP:

- + Do đường thẳng (d) // (d') $\Leftrightarrow$ Tìm được $a = a'$, $b \neq b'$ (1)
- + Thay $(x_0; y_0)$ vào $y = ax + b$ ta được phương trình $y_0 = ax_0 + b$ (2)
- + Thay giá trị a' vào a trong phương trình (2) $\Rightarrow b$.
- + Thay giá trị của a và b vào $y = ax + b$ ta được phương trình đường thẳng cần tìm.

Ví dụ minh họa : Viết phương trình đường thẳng $y = ax + b$, biết nó song song với đường thẳng $y = x + 5$, và đi qua điểm M (2; 3).

Hướng dẫn giải:

Do song song với đường thẳng $y = x + 5 \Rightarrow a = 1$, suy ra phương trình:

$$y = x + b$$

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm M (2; 3), nên $3 = 2a + b$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = 1 \\ 3 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy pt đt cần tìm là: $y = x + 1$.

- 5. Viết phương trình đường thẳng biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua 1 điểm $(x_0; y_0)$ và vuông góc với đường thẳng cho trước $(d'): y = a'x + b'$**

PHƯƠNG PHÁP:

- + Do đường thẳng $(d) \perp (d') \Leftrightarrow aa' = -1 \Rightarrow$ Tìm được $a = \frac{-1}{a'}$ (1)
- + Thay $(x_0; y_0)$ vào $y = ax + b$ ta được phương trình $y_0 = ax_0 + b$ (2)
- + Thay giá trị a tìm được vào phương trình (2) $\Rightarrow b$.
- + Thay giá trị của a và b vào $y = ax + b$ ta được phương trình đường thẳng cần tìm.

Ví dụ minh họa : Viết phương trình đường thẳng $y = ax + b$, biết nó vuông góc với đường thẳng $y = x + 5$, và đi qua điểm $M(2; 3)$.

Hướng dẫn giải:

Do vuông góc với đường thẳng $y = x + 5$ (ở đây $a' = 1$) $\Rightarrow a = -1$.

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M(2; 3)$, nên $3 = 2a + b$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = -1 \\ 3 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy pt đt cần tìm là: $y = -x + 5$.

- 6. Viết phương trình đường thẳng cho biết b và (d) đi qua 1 điểm $(x_0; y_0)$**

PHƯƠNG PHÁP:

- + Đường thẳng (d) đi qua $(x_0; y_0)$, thay $(x_0; y_0)$ vào pt $(d) \Rightarrow y_0 = ax_0 + b$ (1)
- + Thay giá trị b cho trước vào (1) $\Rightarrow$ tìm được a .
- + Xác định được a và b ta viết được phương trình đường thẳng cần tìm.

Ví dụ minh họa : Viết phương trình đường thẳng biết nó có hệ số $b = 3$, và đi qua điểm $A(3; 2)$

Hướng dẫn giải:

Phương trình đường thẳng có dạng: $y = ax + b$.

Đi qua điểm A (3;2) nên ta có: $2 = a.3 + b$ (1)

Nó có hệ số $b = 3$. Thay giá trị này vào (1) ta được: $2 = 3a + 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = -\frac{1}{3}x + 3$

7. Chứng minh các đường thẳng đi qua một điểm cố định (hoặc chứng minh các đường thẳng đồng quy):

PHƯƠNG PHÁP:

Cho họ đường thẳng (d_m) , $y = f(x; m)$. Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ đồ thị đi qua.

+ Thay giá trị $(x_0; y_0)$ vào $(d_m) \Rightarrow y_0 = f(x_0; m)$

+ $x_0; y_0$ là các giá trị cụ thể nên phương trình: $f(x_0; m) - y_0 = 0$ là phương trình theo m .

+ Vì đa thức bằng 0 với mọi m nên các hệ số của nó phải đồng thời bằng 0.

+ Từ đó ta tìm được $(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ đường thẳng (d_m) .

Ví dụ minh họa 1: Cho phương trình: $(m-1)x + (m-4)y = 2m-5$ có đồ thị là đường thẳng (d) . Chứng tỏ rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải:

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ đường thẳng trên.

Ta có: $(m-1)x_0 + (m-4)y_0 = 2m-5$

$$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 - 2)m - (x_0 + 4y_0 + 5) = 0$$

Vì đa thức bằng 0 với mọi m nên các hệ số phải đồng thời bằng không:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 2 = 0 \\ x_0 + 4y_0 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3}{5} \\ y_0 = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

KL: Vậy họ đường thẳng có phương trình trên luôn đi qua điểm $A\left(\frac{3}{5}; -\frac{7}{5}\right)$ cố định.

III. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $y = mx + 2m - 4$.

Tìm m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

Bài 2. Trong hệ trục tọa độ Oxy, biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm A (2; 3) và điểm B (−2; 1). Tìm các hệ số a và b.

Bài 3. Biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$ và song song với đường thẳng $2x + y = 3$.

Tìm các hệ số a và b.

Bài 4. Tìm m để đường thẳng $y = 2x - 1$ và đường thẳng $y = 3x + m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

Bài 5. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $ax + (2a - 1)y + 3 = 0$. Tìm a để đường thẳng (d) đi qua điểm M (1; -1). Khi đó, hãy tìm hệ số góc của đường thẳng (d).

Bài 6. Trong mặt phẳng, với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình: $y = (m - 1)x + n$.

a) Với giá trị nào của m và n thì (d) song song với trục Ox.

b) Xác định phương trình của (d), biết (d) đi qua A (1; -1) và có hệ số góc bằng -3.

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm M (-1; 2) và song song với đường thẳng $y = 3x + 1$. Tìm hệ số a và b.

Bài 8. Cho hai đường thẳng (d): $y = -x + m + 2$ và (d'): $y = (m^2 - 2)x + 1$

a) Khi $m = -2$, hãy tìm tọa độ giao điểm của chúng.

b) Tìm m để (d) // (d').

Bài 9. Tìm m để đường thẳng $y = -3x + 6$ và đường thẳng $y = \frac{5}{2}x - 2m + 1$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm m để đường thẳng (d):

$y = (m^2 - 1)x + 1$ song song với đường thẳng (d'): $y = 3x + m - 1$.

Bài 11. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua 2 điểm A (1; 2) và B(2; 0).

Bài 12: Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (2 + m)x + 1$

và $(d_2): y = (1 + 2m)x + 2$

a) Tìm m để (d_1) và (d_2) cắt nhau .

b) Với $m = -1$, vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy rồi tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) bằng phép tính.

Bài 13: Cho hàm số bậc nhất $y = (2 - a)x + a$. Biết đồ thị hàm số đi qua điểm M (3;1), hàm số đồng biến hay nghịch biến trên R ? Vì sao?

Bài 14: Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - 3m)x + m + 3$ đi qua N (1;-1) , hàm số đồng biến hay nghịch biến ? Vì sao?

Bài 15: Cho hai đường thẳng $y = mx - 2$ với $(m \neq 0)$ và $y = (2 - m)x + 4$ với $(m \neq 2)$. Tìm điều kiện của m để hai đường thẳng trên:

a) Song song

b) Cắt nhau

Bài 16:

a) Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $y = 2x + 3 + m$ và $y = 3x + 5 - m$, cắt nhau tại một điểm trên trục tung .

b) Viết phương trình đường thẳng (d) biết (d) song song với $(d'): y = \frac{-1}{2}x$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 10.

Bài 17: Cho các đường thẳng $(d_1) : y = 4mx - (m + 5)$ với $(m \neq 0)$

$(d_2) : y = (3m + 1)x + (m - 9)$

a) Với giá trị nào của m thì $(d_1) // (d_2)$

b) Với giá trị nào của m thì (d_1) cắt (d_2) . Tìm tọa độ giao điểm khi $m = 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Đường thẳng (d) có phương trình: $y = mx + 2m - 4$ có hệ số
 $a = m$; $b = 2m - 4$

$$\text{Đề đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Bài 2. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm A (2; 3) $\Rightarrow 3 = 2a + b$

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm điểm B (-2; 1) $\Rightarrow 1 = -2a + b$.

$$\text{Suy ra } a, b \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 3 = 2a + b \\ 1 = -2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = \frac{1}{2}x + 2$

Bài 3. Đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng

$$2x + y = 3 \Leftrightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow a = -3$$

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M\left(2; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = 2a + b$, với $a = -3$.

$$\text{Suy ra } b = \frac{13}{2}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = -3x + \frac{13}{2}$

Bài 4. $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đường thẳng $y = 2x - 1$ và đường thẳng
 $y = 3x + m$.

$$M(x_0; y_0) \text{ thuộc trục } Ox \Rightarrow y_0 = 0;$$

$$M(x_0; y_0) \text{ thuộc } y = 2x - 1 \Rightarrow y_0 = 2x_0 - 1 \Leftrightarrow 0 = 2x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$M(x_0; y_0) \text{ thuộc } y = 3x + m \Rightarrow y_0 = 3x_0 + m \Leftrightarrow 0 = 3 \cdot \frac{1}{2} + m \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$$

Bài 5. (d) có phương trình: $ax + (2a - 1)y + 3 = 0$ đi qua điểm $M(1; -1)$.

Suy ra: $a.1 + (2a - 1).(-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow -a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$.

Vậy phương trình (d): $4x + 7y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{7}x - \frac{3}{7}$

Hệ số góc của đường thẳng (d) là $-\frac{4}{7}$.

Bài 6. Trong mặt phẳng, với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình: $y = (m - 1)x + n$.

a) Đường thẳng (d) song song với trục Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ n \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n \neq 0 \end{cases}$

b) (d) đi qua A (1; -1) và có hệ số góc bằng -3, suy ra:

$$\begin{cases} m - 1 = -3 \\ -1 = (m - 1).1 + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 2 \end{cases}$$

Bài 7. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm M (-1; 2)

$$\Leftrightarrow 2 = a.(-1) + b \Leftrightarrow -a + b = 2$$

và song song với đường thẳng $y = 3x + 1 \Rightarrow a = 3; b \neq 1$

$$\text{Ta suy ra: } \begin{cases} -a + b = 2 \\ a = 3; b \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$$

Bài 8. Cho hai đường thẳng (d): $y = -x + m + 2$ và (d'): $y = (m^2 - 2)x + 1$

a) Khi $m = -2$, ta có: (d): $y = -x$; (d'): $y = 2x + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$,

thay vào (d) suy ra $y = \frac{1}{3}$

Vậy tọa độ giao điểm của d và d' khi $m = -2$ là $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

$$\text{b) Đê (d) // (d')} \begin{cases} -1 = m^2 - 2 \\ m + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy với $m = 1$ thì d và d' song song với nhau.

Bài 9. Đường thẳng $y = -3x + 6$ và đường thẳng $y = \frac{5}{2}x - 2m + 1$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc trục hoành $x_0 = 0$

Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng $y = -3x + 6$, suy ra:

$$y_0 = -3x_0 + 6 \Leftrightarrow y_0 = -3.0 + 6 \Leftrightarrow y_0 = 6$$

Vậy toạ độ điểm $M(0; 6)$

Điểm M thuộc đường thẳng $y = \frac{5}{2}x - 2m + 1$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{5}{2}.0 - 2m + 1 \Leftrightarrow 0 = 6 - 2m \Leftrightarrow m = 3$$

Bài 10. Đê đường thẳng (d): $y = (m^2 - 1)x + 1$ song song với đường thẳng (d'): $y = 3x + m - 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 3 \\ 1 \neq m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy với $m = -2$ thì đường thẳng d song song với đường thẳng d'.

Bài 11. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua 2 điểm A (1; 2) và B(2; 0).

Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng: $y = ax + b$ (d)

Điểm A thuộc d, suy ra: $2 = a.1 + b \Leftrightarrow b = 2 - a$

Điểm B thuộc d, suy ra: $0 = a.2 + b \Leftrightarrow 2a + b = 0$, thay $b = 2 - a$ vào ta có:

$$2a + 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = -2, \text{ suy ra } b = 4$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = -2x + 4$

Bài 12: Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (2 + m)x + 1$ và $(d_2): y = (1 + 2m)x + 2$

a) Để (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow 2 + m \neq 1 + 2m \Leftrightarrow m \neq 1$

b) Với $m = -1$, ta có $(d_1): y = x + 1$ có đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;1)$ và $(-1;0)$

và $(d_2): y = -x + 2$ có đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;2)$ và $(2;0)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) :

$x + 1 = -x + 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình (d_1) , suy ra:

$$y = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Vậy, tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là: $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Bài 13: Hàm số bậc nhất $y = (2 - a)x + a$ đi qua điểm $M(3;1)$, suy ra:

$$1 = (2 - a)3 + a \Leftrightarrow 1 = 6 - 3a + a \Leftrightarrow 2a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$$

Vậy hàm số cần tìm: $y = \left(2 - \frac{5}{2}\right)x + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Do đó, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì có hệ số góc bằng $-\frac{1}{2} < 0$

Bài 14: Hàm số bậc nhất $y = (1 - 3m)x + m + 3$ đi qua $N(1;-1)$, suy ra:

$$-1 = (1 - 3m).1 + m + 3 \Leftrightarrow -1 = 1 - 3m + m + 3 \Leftrightarrow 2m = 5 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

Vậy hàm số cần tìm: $y = \left(1 - 3 \cdot \frac{5}{2}\right)x + \frac{5}{2} + 3 = -\frac{13}{2}x + \frac{11}{2}$

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, vì có hệ số góc bằng $-\frac{13}{2} < 0$.

Bài 15: Cho hai đường thẳng $y = mx - 2$ với $(m \neq 0)$ và $y = (2 - m)x + 4$ với $(m \neq 2)$.

a) Hai đường thẳng Song song $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - m \\ -2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2m = 2 \Leftrightarrow m = 1$

b) Hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow m \neq 2 - m \Leftrightarrow 2m \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 1$

Bài 16:

a) Hai đường thẳng $y = 2x + 3 + m$ và $y = 3x + 5 - m$, cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

Giao điểm M thuộc trục tung nên có tọa độ là $M(0; y_M)$

M thuộc đường thẳng $y = 2x + 3 + m \Leftrightarrow y_M = 2.0 + 3 + m \Leftrightarrow y_M = 3 + m$

M thuộc đường thẳng $y = 3x + 5 - m \Leftrightarrow y_M = 3.0 + 5 - m \Leftrightarrow y_M = 5 - m$

Suy ra : $3 + m = 5 - m$

b) Viết phương trình đường thẳng (d) biết (d) song song với (d'): $y = -\frac{1}{2}x$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 10.

Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng: $y = ax + b$ (d)

Đường thẳng d song song với (d'): $y = -\frac{1}{2}x$, suy ra $a = -\frac{1}{2}$

Điểm thuộc Ox có hoành độ bằng 10 có tọa độ là $(10; 0)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $(10; 0)$ nên ta có:

$$y = -\frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2}.10 + b \Leftrightarrow b = 5$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = -\frac{1}{2}x + 5$

Bài 17: Cho các đường thẳng $(d_1) : y = 4mx - (m+5)$ với $(m \neq 0)$

$$(d_2) : y = (3m+1)x + (m-9)$$

a) Đường thẳng $(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 3m+1 \\ -m-5 \neq m-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

b) Đường thẳng (d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow 4m \neq 3m+1 \Leftrightarrow m \neq 1$

Khi $m = 2$, ta có: $(d_1) : y = 8x - 7$ và $(d_2) : y = 7x - 7$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và $(d_2) : 8x - 7 = 7x - 7 \Leftrightarrow x = 0$, suy ra $y = -7$

Vậy tọa độ giao điểm là: $(0; -7)$

c) $(d_1) : y = 4mx - (m+5)$

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ đường thẳng (d_1) trên.

Ta có: $y_0 = 4mx_0 - (m+5) \Leftrightarrow 4mx_0 - m - 5 - y_0 = 0 \Leftrightarrow m(4x_0 - 1) - 5 - y_0 = 0$

Vì đa thức bằng 0 với mọi m nên các hệ số phải đồng thời bằng không:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0 - 1 = 0 \\ -5 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{4} \\ y_0 = -5 \end{cases}$$

KL: Vậy họ đường thẳng (d_1) có phương trình trên luôn đi qua điểm $A\left(\frac{1}{4}; -5\right)$ cố định.

$$(d_2) : y = (3m+1)x + (m-9)$$

Gọi $B(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ đường thẳng (d_2) trên.

Ta có: $y_0 = (3m+1)x_0 + (m-9)$

$$\Leftrightarrow 3mx_0 + x_0 + m - 9 - y_0 = 0 \Leftrightarrow m(3x_0 + 1) + x_0 - y_0 - 9 = 0$$

Vì đa thức bằng 0 với mọi m nên các hệ số phải đồng thời bằng không:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{3} \\ y_0 = -\frac{28}{3} \end{cases}$$

KL: Vậy họ đường thẳng (d_2) có phương trình trên luôn đi qua điểm B

$\left(-\frac{1}{3}; -\frac{28}{3}\right)$ cố định.

IV. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 2**ĐỀ KIỂM TRA 1 TIẾT****Đề I****Môn: Đại số 9 – Chương 2****Thời gian: 45'** (Không kể phát đề)**Câu 1 (3đ):** Cho hàm số $y = 2x + 1$ có đồ thị là đường thẳng (d).

- a) Tìm tọa độ điểm A thuộc (d) biết rằng A có hoành độ bằng 2.
- b) Tìm tọa độ điểm B thuộc (d) biết rằng B có tung độ bằng -7 .
- c) Điểm C (4 ; 9) có thuộc (d) không?

Câu 2 (3đ): Cho hàm số $y = (2m - 5)x + 3$.

- a) Tìm điều kiện của m để hàm số là hàm số bậc nhất.
- b) Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến? Nghịch biến?
- c) Tìm điều kiện của m để đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = 3x - 1$.

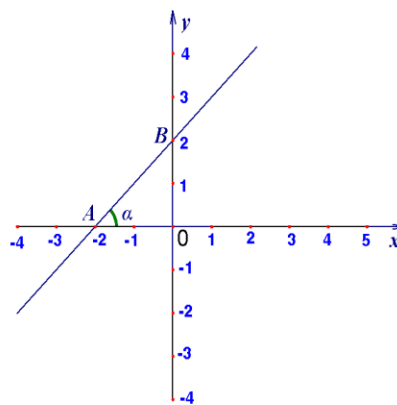
Câu 3 (3đ): Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 2$.

- a) Xác định hệ số góc a, biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm M (1 ; 3).
- b) Vẽ đồ thị của hàm số.
- c) Tính góc tạo bởi đồ thị của hàm số và trục Ox.

Câu 4: (1đ) Cho hàm số bậc nhất $y = f(x) = (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{2}$.Không tính hãy so sánh $f(1)$ và $f(\sqrt{5})$.

HƯỚNG DẪN CHẤM– Đề 1

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (3đ)	a) Thay $x_A = 2$ vào phương trình $y = 2x + 1$, tìm được $y_A = 5$	1
	b) Thay $y_B = -7$ vào phương trình $y = 2x + 1$, tìm được $x_B = -4$	1
	c) Ta có: $2x_C + 1 = 2.4 + 1 = 9 = y_C$	0,5
	Kết luận: Điểm C thuộc (d).	0,5
Câu 2 (3đ)	a) Hàm số $y = (2m - 5)x + 3$ là hàm số bậc nhất khi $2m - 5 \neq 0$ suy ra $m \neq \frac{5}{2}$	1
	b) Hàm số $y = (2m - 5)x + 3$ đồng biến khi $2m - 5 > 0$ suy ra $m > \frac{5}{2}$	0,5
	c) Hàm số $y = (2m - 5)x + 3$ nghịch biến khi $2m - 5 < 0$ suy ra $m < \frac{5}{2}$	0,5
	c) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = 3x - 1$ khi $2m - 5 = 3$	0,5
	Suy ra $m = 4$	0,5
Câu 3 (3đ)	a) Thay tọa độ của M tìm được $\alpha = 1$	1
	b) Lập bảng giá trị đúng.	0,5
	Vẽ đúng đồ thị của hàm số.	0,5
	c) Tính được $\tan \alpha = \frac{OB}{OA} = 1$ Suy ra $\alpha = 45^\circ$	0,5
Câu 4 (1đ)	Chỉ ra $a = 1 - \sqrt{5} < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến.	0,5
	Ta có $1 < \sqrt{5} \Rightarrow f(1) > f(\sqrt{5})$	0,5



Mọi cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa phần tương ứng.

ĐỀ KIỂM TRA 1 TIẾT**Đề II****Môn: Đại số 9 – Chương 2****Thời gian: 45'** (Không kể phát đề)**Câu 1 (3đ):** Cho hàm số $y = -2x + 2$ có đồ thị là đường thẳng (d).

- a) Tìm tọa độ điểm A thuộc (d) biết rằng A có hoành độ bằng -3 .
- b) Tìm tọa độ điểm B thuộc (d) biết rằng B có tung độ bằng 4 .
- c) Điểm C $(-1; 5)$ có thuộc (d) không?

Câu 2 (3đ): Cho hàm số $y = (3m - 2)x + 1$

- a) Tìm điều kiện của m để hàm số là hàm số bậc nhất.
- b) Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến? Nghịch biến?
- c) Tìm điều kiện của m để đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = x - 3$.

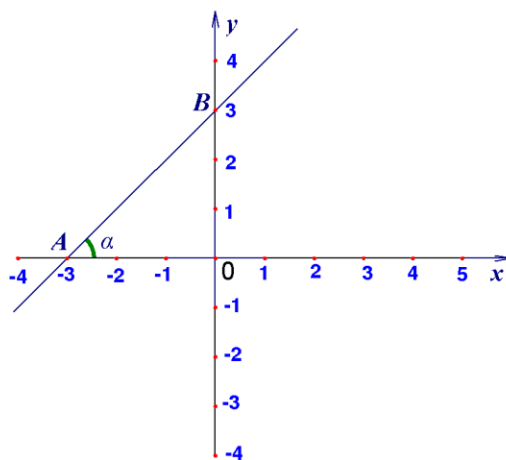
Câu 3 (3đ): Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$.

- a) Xác định hệ số góc a, biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm N $(-1; 2)$.
- b) Vẽ đồ thị của hàm số.
- c) Tính góc tạo bởi đồ thị của hàm số và trục Ox.

Câu 4: (1đ) Cho hàm số bậc nhất $y = f(x) = (3 - \sqrt{7})x - \sqrt{5}$.Không tính hãy so sánh $f(3)$ và $f(\sqrt{7})$.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐẠI SỐ 9 – Đề 2

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (3đ)	a) Thay $x_A = -3$ vào phương trình $y = -2x + 2$, tìm được $y_A = 8$	1
	b) Thay $y_B = 4$ vào phương trình $y = -2x + 2$, tìm được $x_B = -1$	1
	c) Ta có: $-2x_C + 2 = -2 \cdot (-1) + 2 = 4 \neq y_C$	0,5
	Kết luận: Điểm C không thuộc (d).	0,5
Câu 2 (3đ)	a) Hàm số $y = (3m - 2)x + 1$ là hàm số bậc nhất khi $3m - 2 \neq 0$ suy ra $m \neq \frac{2}{3}$	1
	b) Hàm số $y = (3m - 2)x + 1$ đồng biến khi $3m - 2 > 0$ suy ra $m > \frac{2}{3}$	0,5
	Hàm số $y = (3m - 2)x + 1$ nghịch biến khi $3m - 2 < 0$ suy ra $m < \frac{2}{3}$	0,5
	c) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = x - 3$ khi $3m - 2 = 1$	0,5
	Suy ra $m = 1$	0,5
Câu 3 (3đ)	a) Thay tọa độ của M tìm được $a = 1$	1
	b) Lập bảng giá trị đúng.	0,5
	Vẽ đúng đồ thị của hàm số.	0,5
	c) Tính được	0,5



	$\tan \alpha = \frac{OB}{OA} = 1$ Suy ra $\alpha = 45^\circ$	
Câu 4 (1đ)	Chỉ ra $a = 3 - \sqrt{7} > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến. Ta có $3 > \sqrt{7} \Rightarrow f(3) > f(\sqrt{7})$	0,5 0,5

Mọi cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa phần tương ứng.

VIII. MỘT SỐ BÀI TOÁN HÀM SỐ BẬC NHẤT TRÍCH TỪ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI, THI CHUYÊN TOÁN 9

Trong các đề thi học sinh giỏi, thi vào 10 chuyên. Dạng bài tập đồ thị hàm số bậc nhất ít được ra, vì khả năng đánh đồ và phân loại mức độ của học sinh giỏi, chuyên không cao. Do đó nó ít được ra trong đề thi, đồng thời nếu ra sẽ hạn chế trong một số câu hỏi, chủ đề nhỏ mà các học sinh phổ thông ít khi được học trên lớp như: tọa độ điểm cố định của họ đồ thị hàm số với tham số m ...

Câu 1: Cho đường thẳng (d) có phương trình: $x(m+2) + (m-3)y = m-8$

- Xác định m để đường thẳng (d) đi qua điểm $P(-1;1)$.
- Chứng minh rằng khi m thay đổi thì đường thẳng (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải:

- Vì đường thẳng (d) đi qua $P(-1;1)$ nên

$$(m+2).(-1) + (m-3).1 = m-8 \Leftrightarrow -5 = m-8 \Rightarrow m=3.$$

- Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định mà (d) đi qua

$$\text{Ta có: } (m+2)x_0 + (m-3)y_0 = m-8 \quad \forall m.$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + y_0 - 1)m + (2x_0 - 3y_0 + 8) = 0 \quad \forall m.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ 2x_0 - 3y_0 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà (d) đi qua là $(-1;2)$.

Câu 2: Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng

$(m+1)x - y - m - 3 = 0$ luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

Hướng dẫn giải:

Giả sử điểm cố định mà các đường thẳng đi qua có tọa độ $(x_0; y_0)$.

Khi đó phương trình ẩn m : $mx_0 + x_0 - y_0 - m - 3 = 0$ có vô số nghiệm.

Hay
$$\begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ x_0 - y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \end{cases}.$$

Điểm cố định có tọa độ (1; -2)

Câu 3. Cho phương trình đường thẳng $3x + 7y = 167$. Tìm tọa độ các điểm thuộc đường thẳng sao cho tọa độ các điểm đó là các số nguyên dương.

Hướng dẫn giải:

Kết hợp với điều kiện ta có $0 \leq x < 4$ là các giá trị cần tìm.

Ta có phương trình : $3x + 7y = 167$

$$3x + 7y = 167 \Leftrightarrow x = \frac{167 - 7y}{3} = 56 - 2y - \frac{y+1}{3}$$

đặt $\frac{y+1}{3} = t \Leftrightarrow y = 3t - 1$

Nên $x = 58 - 7t \quad (t \in \mathbb{Z})$

Vì x; y nguyên dương nên $3t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{3}$ và $58 - 7t > 0 \Leftrightarrow t < \frac{58}{7}$

Vì $t \in \mathbb{Z}$ nên $t \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Các nghiệm nguyên dương của phương trình là :

(51; 2), (44; 5), (37; 8), (30; 11), (23; 14), (16; 17), (9; 20), (2; 23)

Câu 4: Cho đường thẳng (d) $y = -2x + 3$

- Xác định tọa độ giao điểm A, B của đường thẳng d với trục Ox, Oy. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng d.
- Tính khoảng cách từ điểm C (0; -2) đến đường thẳng d.

Hướng dẫn giải

a) A là giao điểm của đường thẳng d với trục Ox nên ta có : $y_A = 0 \Rightarrow x_A = \frac{3}{2}$

Vậy toạ độ điểm A $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

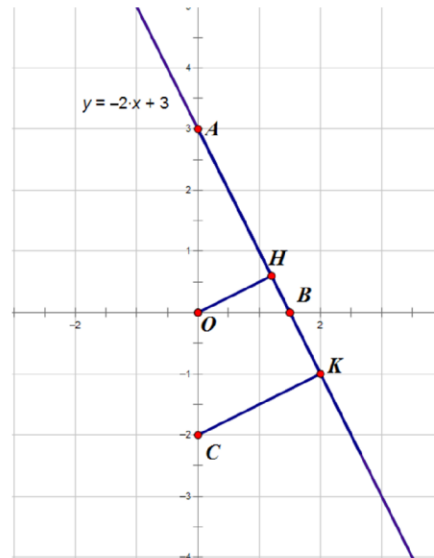
B là giao điểm của đường thẳng d với trục Oy nên ta có : $x_B = 0 \Rightarrow y_B = 3$

Vậy toạ độ điểm B $(0; 3)$

Tam giác AOB vuông tại O, có $OA = 3$;

$$OB = \frac{3}{2}$$

Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng AB.



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOB, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}, \text{ suy ra } OH = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

b) Ta có :

$$AC = AO + OC = |3| + |-2| = 5$$

$$\Delta AOH \sim \Delta ACK (g - g), \text{ ta có : } \frac{OH}{CK} = \frac{OA}{AC},$$

$$\text{suy ra : } CK = \frac{OH \cdot AC}{OA} = \frac{\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot 5}{3} = \sqrt{5}$$

Câu 5. Cho đường thẳng (d) $y = ax + 3a + 2$ (1)

a) Xác định a để đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc 45° . Vẽ đường thẳng trong trường hợp đó.

b) Xác định a để đường thẳng (d) đi qua điểm A $(-1; -3)$

- c) Chứng minh rằng với mọi a , họ đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định trong mặt phẳng tọa độ.

Hướng dẫn giải

- a) Đường thẳng d tạo với Ox góc 45° nên hệ

số góc $a = \tan 45^\circ = 1$, ta có: (d) $y = x + 5$

- b) Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1; -3)$, ta

$$\text{có: } a(-1) + 3a + 2 = -3 \Leftrightarrow 2a = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}.$$

- c) Cách 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm mà họ đường

thẳng (1) đi qua với mọi a , thế thì tọa độ

$(x_0; y_0)$ của điểm M phải thỏa mãn (1)

với mọi a , nghĩa là với mọi số thực a , ta có:

$$y_0 = ax_0 + 3a + 2 \Leftrightarrow (x_0 + 3)a + 2 - y_0 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) nghiệm đúng với mọi giá trị của ẩn a , do đó phải có các hệ số bằng nhau và bằng 0.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_0 + 3 = 0 \\ 2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy họ đường thẳng (1) luôn luôn đi qua điểm cố định $M(-3; 2)$ với mọi a .

Cách 2: Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm mà họ đường thẳng (1) đi qua với mọi a , thế thì

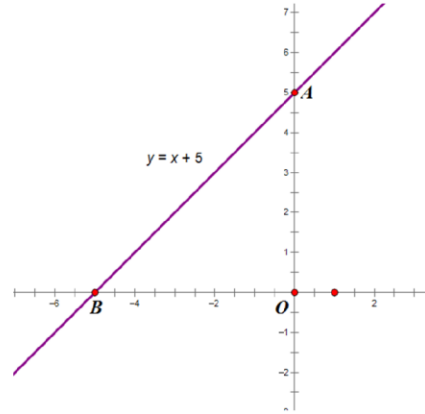
tọa độ $(x_0; y_0)$ của điểm M phải thỏa mãn (1) với mọi a , ta có :

Khi $a = 1$, thì $y_0 = x_0 + 5$

Khi $a = -1$, thì $y_0 = -x_0 - 1$ mà tọa độ điểm M không đổi, nên :

$$x_0 + 5 = -x_0 - 1 \Leftrightarrow 2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 2$$

Vậy họ đường thẳng (1) luôn luôn đi qua điểm cố định $M(-3; 2)$ với mọi a .



Câu 6: Vẽ đồ thị hàm số sau:

a) $y = |x| + |1 - x|$

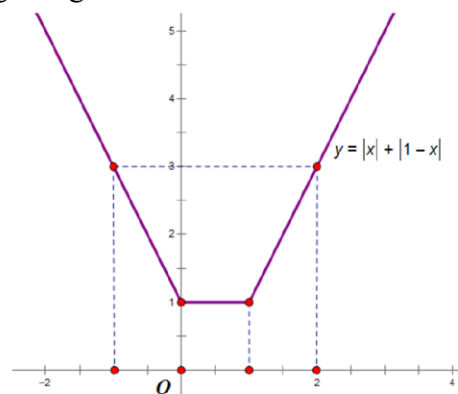
b) $y = |x - 1| + |x + 1|$

Hướng dẫn giải

a) $y = |x| + |1 - x|$

$$y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{khi } x < 0 & (1) \\ 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 & (2) \\ 2x & \text{khi } x > 1 & (3) \end{cases}$$

Đồ thị hàm số được vẽ như hình a.

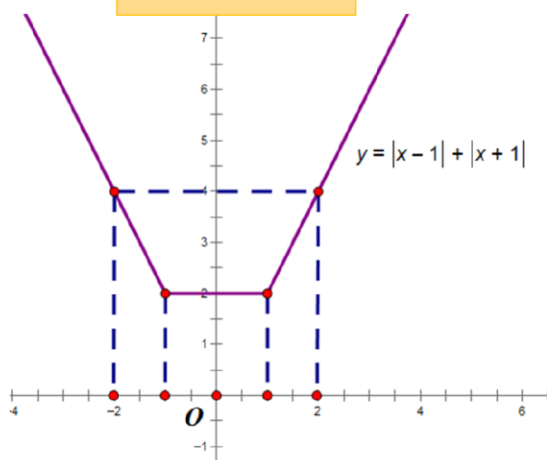


Hình a.

b) $y = |x - 1| + |x + 1|$

$$y = \begin{cases} -2x & \text{khi } x < -1 & (1) \\ 2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 & (2) \\ 2x & \text{khi } x > 1 & (3) \end{cases}$$

Đồ thị hàm số được vẽ như hình b.



Hình b.

Câu 7: Cho hai đường thẳng :

$y = (m + 1)x + 3 \quad (d_1)$

$y = 3m(m + 1)x + 5 \quad (d_2)$

a) Chứng minh rằng khi $m = \frac{1}{3}$ thì hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Hướng dẫn giải:

a) Khi $m = \frac{1}{3}$ ta có: $y = \left(\frac{1}{3} + 1\right)x + 3 = \frac{4}{3}x + 3 \quad (d_1)$

$$y = 3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + 1\right)x + 5 = \frac{4}{3}x + 5 \quad (d_2)$$

Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có cùng hệ số góc $a = \frac{4}{3}$ nên chúng song song với nhau.

b) Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau khi và chỉ khi :

$$m + 1 = 3m(m + 1) \Leftrightarrow (m + 1)(3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

KL: Vậy với $m = -1$ hoặc $m = \frac{1}{3}$ thì (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Câu 8. Tìm giá trị của k để ba đường thẳng sau đồng quy tại một điểm trong mặt phẳng tọa độ : $y = 2x - 7 \quad (d_1)$; $y = x + 5 \quad (d_2)$ và $y = kx + 5 \quad (d_3)$

Hướng dẫn giải

Gọi M $(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x - 7 \quad (d_1)$ và $y = x + 5 \quad (d_2)$

M thuộc (d_1) , suy ra: $y_0 = 2x_0 - 7$

M thuộc (d_2) , suy ra: $y_0 = x_0 + 5$

Do đó, ta có: $x_0 + 5 = 2x_0 - 7 \Leftrightarrow x_0 = 12 \Rightarrow y_0 = 17$

Vậy tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là (12;17)

Để ba đường thẳng đồng quy tại điểm M, thì đường thẳng $y = kx + 5 \quad (d_3)$ phải đi qua điểm M $\Leftrightarrow y_0 = kx_0 + 5 \Leftrightarrow 17 = k.12 + 5 \Leftrightarrow k = 1$

Vậy với $k = 1$ thì ba đường thẳng đồng quy.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	1
Chương 1 – CĂN THỨC	3
I. CĂN BẬC HAI – CĂN THỨC BẬC HAI	3
1. Kiến thức trọng tâm	3
2. Các dạng toán	3
a. Dạng 1. Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn có nghĩa	3
b. Dạng 2. Tính giá trị biểu thức	10
c. Dạng 3. Rút gọn biểu thức	19
d. Dạng 4. Giải phương trình	25
II. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP KHAI PHƯƠNG VÀ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA	35
1. Kiến thức trọng tâm	35
2. Các dạng toán	35
a. Dạng 1. Thực hiện phép tính	35
b. Dạng 2. Rút gọn biểu thức và tính giá trị biểu thức	42
c. Dạng 3. Giải phương trình	49
III. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI	51
1. Kiến thức trọng tâm	51
2. Các dạng toán	53
IV. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI	70
1. Kiến thức trọng tâm	70
a. Dạng 1. Rút gọn biểu thức	73
b. Dạng 2. Rút gọn biểu thức – Tính giá trị của biểu thức khi cho giá trị của ẩn.	77
c. Dạng 3. Rút gọn biểu thức – Tìm x để biểu thức rút gọn đạt giá trị nguyên.	82
d. Dạng 4. Rút gọn biểu thức – Tìm x để biểu thức thỏa bằng hoặc lớn hơn (nhỏ hơn) một số cho trước	87
e. Dạng 5. Rút gọn biểu thức – Tìm x để biểu thức đạt giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN)	91
V. CĂN BẬC BA	97
1. Kiến thức trọng tâm	97
2. Các dạng toán	97
VI. ÔN TẬP CHƯƠNG 1	101
VII. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 1	112
Chương 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT	136
I. KHÁI NIỆM HÀM SỐ	136
1. Kiến thức trọng tâm	136
2. Các dạng toán	138
a. Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của hàm số	138

b. Dạng 2. Tính giá trị hàm số khi cho giá trị của ẩn	140
c. Dạng 3. Xác định điểm thuộc (không thuộc) đồ thị hàm số	144
d. Dạng 4. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số	146
II. HÀM SỐ BẬC NHẤT	149
1. Kiến thức trọng tâm	149
2. Các dạng toán	152
a. Dạng 1. Hàm số bậc nhất – Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số bậc nhất... ..	152
b. Dạng 2. Đồ thị hàm số $y = ax$ và hệ số góc của đường thẳng $y = ax$	156
c. Dạng 3. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)	162
d. Dạng 4. Hệ số góc của đường thẳng – Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau.....	168
e. Dạng 6. Một số dạng toán liên quan đến phương trình đường thẳng.....	175
1. Xác định các giá trị của các hệ số để hàm số đồng biến, nghịch biến. Hai đường thẳng song song; cắt nhau; vuông góc, trùng nhau.....	175
2. Viết phương trình đường thẳng (d) biết hệ số góc a, và (d) đi qua 1 điểm cho trước $(x_0; y_0)$	178
3. Viết phương trình đường thẳng biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua 2 điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$	178
4. Viết phương trình đường thẳng biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua 1 điểm $(x_0; y_0)$ và song song với đường thẳng cho trước (d'): $y = a'x + b'$	179
5. Viết phương trình đường thẳng biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua 1 điểm $(x_0; y_0)$ và vuông góc với đường thẳng cho trước (d'): $y = a'x + b'$	180
6. Viết phương trình đường thẳng cho biết b và (d) đi qua 1 điểm $(x_0; y_0)$	180
7. Chứng minh các đường thẳng đi qua một điểm cố định (các đường thẳng đồng quy):	181
III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN ÔN CHƯƠNG II	182
IV. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 2	191

KÊU GỌI GÓP VỐN TỪ CỘNG ĐỒNG HỖ TRỢ VIẾT SÁCH

CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 3 – HÌNH HỌC THEO SƠ ĐỒ TƯ DUY

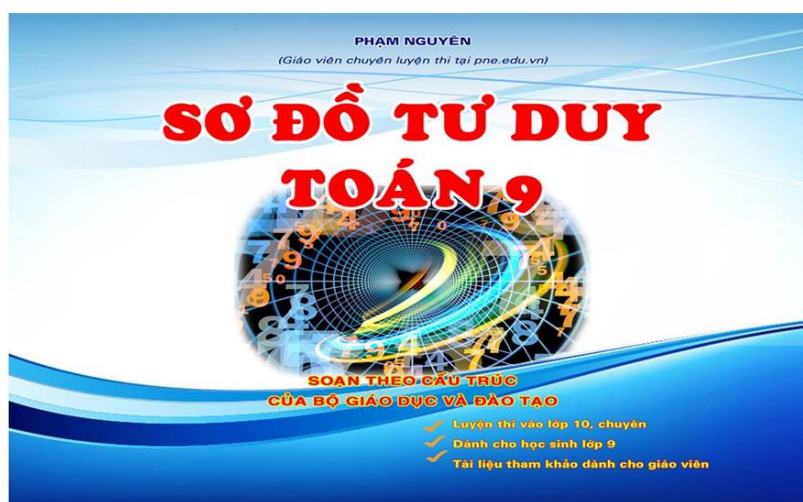
Chào cả nhà,

Tôi là Nguyên, viết sách là niềm đam mê với tôi! Đã từ lâu lắm rồi từ ngày các cuốn sách SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9, CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 1 ĐẠI SỐ, CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 2 ĐẠI SỐ được ra đời cũng đã 6 tháng rồi. Đến hôm nay, tôi lại dấy lên trong mình sự khao khát được viết tiếp, hoàn thiện cuốn CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 3 – HÌNH HỌC THEO SƠ ĐỒ TƯ DUY.

Để viết tiếp Tập 3 HÌNH HỌC, tôi sẵn sàng chia sẻ tất cả các file word của các cuốn trước dành cho các anh chị em ủng hộ tôi. Bởi lý do quan trọng nhất của một cuốn sách ra đời với tôi, là đến được với độc giả và thực sự có ích cho anh chị em. Và khi thực hiện dự án viết cuốn 3 này, sau mỗi chương khi hoàn thiện, tôi sẽ gửi mail đến tất cả các anh chị em đã ủng hộ tôi.

Giới thiệu các tác phẩm trước:

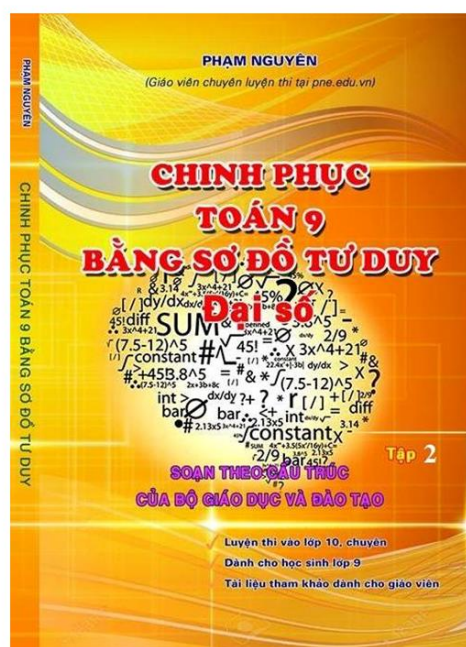
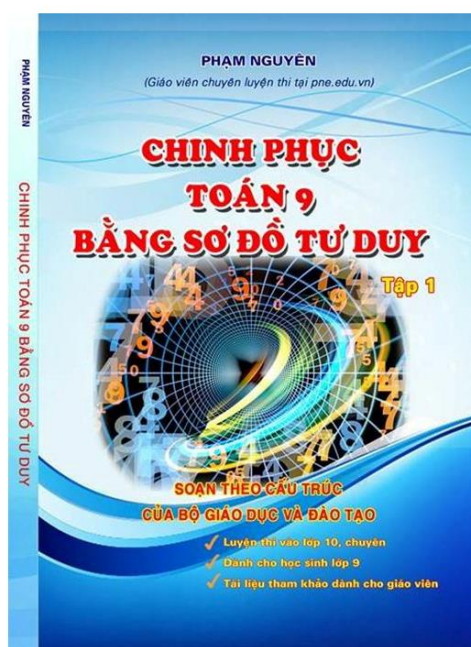
1. Cuốn 1: SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9 (31 sơ đồ). Trình bày các nội dung chính, các nội dung khó của Toán 9 dưới dạng sơ đồ tư duy giúp các em ôn tập sau mỗi chương để các em dễ nắm bắt và nhớ lâu hơn, giáo viên cũng có tài liệu để phát cho các em.



Link tài liệu file PDF:

Sơ đồ tư duy: <https://www.facebook.com/chinhphuctoan9/>

2. Cuốn 2, 3: CHINH PHỤC TOÁN 9 – TẬP 1 (207 trang), TẬP 2 ĐẠI SỐ (296 trang). Áp dụng các sơ đồ là việc không dễ với các em học sinh yếu, và yêu cầu cần phải hiểu rõ các nội dung kiến thức, do đó tôi đã viết Tập 1 (Chương 1, Chương 2), Tập 2 (Chương 3, Chương 4) với nội dung nằm trong Đại số lớp 9 với cách phân dạng rất chi tiết và trọng tâm cùng các hướng dẫn cụ thể nhất, để các em có thể TỰ HỌC, VÀ LÀM ĐƯỢC. Thêm vào đó là các bài tập tự luyện, các đề kiểm tra, đề thi được giới thiệu ngay sau mỗi dạng, mỗi bài, và mỗi chương sẽ giúp các em rèn luyện và tự đánh giá được bản thân.



Link tài liệu:

Tập 1: <https://www.facebook.com/chinhphuctoan9/>

3. DỰ ÁN viết sách: CHINH PHỤC TOÁN 9 – TẬP 3 HÌNH HỌC

Chào các anh chị, như tôi đã từng chia sẻ, đây là dự án ý nghĩa và rất tâm huyết với riêng cá nhân tôi, tôi khao khát viết tiếp và hoàn thiện trọn bộ sách này vì nó rất có ích cho các em học sinh, các giáo viên khi sử dụng sách. Trước hết, tôi muốn nói sự ủng hộ của mọi người qua các cuốn sách trước là niềm động viên rất lớn dành cho tôi. Các bạn giáo viên, các anh chị phụ huynh và các em học sinh đã luôn động viên tôi cố gắng hoàn thiện cuốn hình học. Tuy nhiên, vấn đề chi phí là một vấn đề lớn với tôi, với một dự án cá nhân. Tôi cần một ít vốn để viết tiếp. Do đó tôi mong được mọi người ủng hộ để tôi có thể thực hiện dự án này thành công.

4. Các bạn có thể ủng hộ tôi, và nhận các ưu đãi như sau:

- Ủng hộ 100.000 vnd để nhận toàn bộ file word SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9 và file pdf sách TẬP 3 HÌNH HỌC khi tôi viết xong các chương.
- Ủng hộ 200.000 vnd để nhận toàn bộ file word SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9, file word CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 1 ĐẠI SỐ và file pdf sách TẬP 3 HÌNH HỌC khi tôi viết xong các chương.
- Ủng hộ 300.000 vnd để nhận toàn bộ file word SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 9, file word CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 1 ĐẠI SỐ, file word CHINH PHỤC TOÁN 9 TẬP 2 ĐẠI SỐ và file pdf sách TẬP 3 HÌNH HỌC khi tôi viết xong các chương.
- Dự án sẽ bắt đầu triển khai khi số tiền ủng hộ đạt được 20.000.000vnd. Thời gian thực hiện dự án: 5 tháng.

5. Cách thức ủng hộ:

- Để ủng hộ, các bạn vui lòng chuyển khoản vào tài khoản với nội dung: Ủng hộ Nguyễn viết sách + Họ tên + SĐT
- Thông tin tài khoản:

Chủ tài khoản: Nguyễn Thụy Nhã Uyên (bà xã tác giả)

Số tài khoản: 040036663040 ngân hàng Sacombank, chi nhánh Tp Huế.

- Sau đó vui lòng thông báo lại cho Nguyên biết vào sdt 0935555826 hoặc nhắn tin vào Facebook: <https://www.facebook.com/thayphamnguyen>
- Tôi sẽ liên tục cập nhật danh sách ủng hộ công khai gồm họ tên, số tiền ủng hộ của anh chị em trên trang fanpage: <https://www.facebook.com/chinhphuctoan9/>