

Chủ đề: 1 CÁC PHÉP TOÁN VỀ CĂN THỨC

A

Tóm tắt lý thuyết

1. Căn bậc hai số học:

○ Căn bậc hai số học

- Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a
- Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0
- Một cách tổng quát: $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

○ So sánh các căn bậc hai số học

- Với hai số a và b không âm ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

2. Căn bậc hai:

○ Căn bậc hai

- Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A ,
- A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn
- $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) $\Leftrightarrow A \geq 0$

○ Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

- Với mọi A ta có $\sqrt{A^2} = |A|$
- Như vậy:
 - $\sqrt{A^2} = A$ nếu $A \geq 0$
 - $\sqrt{A^2} = -A$ nếu $A < 0$

3. Liên hệ giữa phép nhân, với phép khai phương:

- **Định lý 1:**
- Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$
 - Đặc biệt với $A \geq 0$ ta có $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$

📁 Ghi nhớ

- Quy tắc khai phương một tích: Muốn khai phương một tích của các thừa số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau
- Quy tắc nhân các căn bậc hai: Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó

4. Liên hệ giữa phép chia với phép khai phương:

○ **Định lý 2:** • Với mọi $A \geq 0$ và $B > 0$ ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

Ghi nhớ

- Quy tắc khai phương một thương: Muốn khai phương một thương a/b , trong đó a không âm và b dương ta có thể lần lượt khai phương hai số a và b rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.
- Quy tắc chia các căn bậc hai: Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho số b dương ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

5. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

①. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

○ Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$, tức là

- Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A \sqrt{B}$
- Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A \sqrt{B}$

②. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A \sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$
- Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A \sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$

③. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

- Với các biểu thức A, B mà $A \cdot B \geq 0$ và $B \neq 0$, ta có $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$

④. Trục căn thức ở mẫu

- Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A \sqrt{B}}{B}$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \pm B)}{A - B^2}$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})}{A - B}$$

Dạng 1

Tìm điều kiện để biểu thức có chứa căn thức có nghĩa.

📁 **Phương pháp:** Nếu biểu thức có:

○ **Dạng ①:** $A = \frac{f(x)}{g(x)}$ có TXĐ: $D = \{x \mid g(x) \neq 0\}$. Chứa mẫu số $\Rightarrow$ ĐKXĐ: mẫu số khác 0

○ **Dạng ②:** $A = \sqrt{f(x)}$ có TXĐ: $D = \{x \mid f(x) \geq 0\}$. Chứa căn bậc hai $\Rightarrow$ ĐKXĐ: biểu thức dưới dấu căn ≥ 0

📁 **Chú ý:** Nếu $A = \sqrt[n]{f(x)}$ thì

- Khi n là số lẻ, với mọi x đều thỏa mãn.
- Khi n là số chẵn thì $f(x) \geq 0$.

○ **Dạng ③:** $A = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ có TXĐ: $D = \{x \mid g(x) > 0\}$, (với $f(x)$ có $D = \mathbb{R}$). Chứa căn thức bậc chẵn dưới mẫu $\Rightarrow$ ĐKXĐ: biểu thức dưới dấu căn > 0

Ví dụ 1

Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

b) $\sqrt{2x-1}$

c) $\sqrt{3x+2}$

□ Lời giải

a) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x^2+1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2$

b) $\sqrt{2x-1}$ có nghĩa khi $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{3x+2}$ có nghĩa khi $3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$

Ví dụ 2

Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{3x+5}$

b) $\sqrt{x^2+3}$

c) $\sqrt{1-2x}$

d) $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}$

□ Lời giải

a) $\sqrt{3x+5}$ có nghĩa khi $3x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3}$

b) Ta có $x^2+3 \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $\sqrt{x^2+3}$ luôn có nghĩa với mọi giá trị của x

c) $\sqrt{1-2x}$ có nghĩa khi $1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

d) $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}$ có nghĩa khi $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Bài tập rèn luyện

○ Tìm điều kiện có nghĩa của các biểu thức sau:

1) $\sqrt{x-1}$	2) $\sqrt{x^2+1}$	3) $\sqrt{1-x}$	4) $\frac{x-1}{\sqrt{2x-3}}$
5) $\frac{\sqrt{x+5}}{x-1}$	6) $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$	7) $\frac{x+1}{\sqrt{2-x}}$	8) $\frac{x}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-3}$

➔ Hướng dẫn giải

1) $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

2) Ta có $x^2+1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $\sqrt{x^2+1}$ luôn có nghĩa với mọi giá trị của x

3) $\sqrt{1-x}$ có nghĩa khi $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

4) $\frac{x-1}{\sqrt{2x-3}}$ có nghĩa khi $2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

5) $\frac{\sqrt{x+5}}{x-1}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \neq 1 \end{cases}$

6) Ta có $x^2+2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$

7) $\frac{x+1}{\sqrt{2-x}}$ có nghĩa khi $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

8) $\frac{x}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-3}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Dạng 2

Tính giá trị biểu thức chứa căn

Phương pháp:

- **Bước ①:** Trục căn thức ở mẫu (nếu có)
- **Bước ②:** Quy đồng mẫu thức (nếu có)
- **Bước ③:** Đưa một biểu thức ra ngoài dấu căn
- **Bước ④:** Rút gọn biểu thức

Ghi nhớ: Có thể dùng Casio kiểm tra kết quả

Ví dụ 1

Rút gọn các biểu thức sau

$A = 2021 + \sqrt{36} - \sqrt{25}$	$B = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$	$C = \sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$
$D = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$	$E = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$	$F = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{18}$

Lời giải

- $A = 2021 + \sqrt{36} - \sqrt{25} = 2021 + 6 - 5 = 2022$
- $B = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18} = 5.2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2.3\sqrt{2}$
 $= 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (10 + 5 - 6)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$
- $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$
- $D = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$
- $E = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{10^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 3.3.\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = \sqrt{3}$
- $F = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

Ví dụ 2

Rút gọn các biểu thức sau

$A = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$	$B = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8})\sqrt{2}$	$C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$
$D = 2\sqrt{32} - 5\sqrt{27} - 4\sqrt{8}$	$E = 2\sqrt{9} + \sqrt{25} - 5\sqrt{4}$	$F = \sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$

Lời giải

- $A = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48} = 2\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
- $B = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8})\sqrt{2} = (15\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 6\sqrt{2})\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.\sqrt{2} = 12$
- $C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$
 $= (2\sqrt{3} - 5.3\sqrt{3} + 4.2\sqrt{3}) : \sqrt{3}$
 $= -5\sqrt{3} : \sqrt{3} = -5$

$$\bullet D = 5\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$$

$$\bullet E = 2\sqrt{9} + \sqrt{25} - 5\sqrt{4} = 5 + 6 - 10 = 1$$

$$\bullet F = 2\sqrt{32} - 5\sqrt{27} - 4\sqrt{8} + 3\sqrt{75} = 2\sqrt{4^2 \cdot 2} - 5\sqrt{3^2 \cdot 3} - 4\sqrt{2^2 \cdot 2} + 3\sqrt{5^2 \cdot 3} \\ = 8\sqrt{2} - 15\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 15\sqrt{3} = 0$$

Bài tập rèn luyện

○ Rút gọn các biểu thức sau:

$A = \sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$	$B = \sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{5}$	$C = \sqrt{3}(\sqrt{27} + 4\sqrt{3})$
$D = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$	$E = (3\sqrt{2} - \sqrt{8})\sqrt{2}$	$F = 2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$
$G = \sqrt{16} + 5 + \sqrt{8} - \sqrt{2}$	$H = \sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{2}$	$K = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} + 1 \right) (\sqrt{2} - 1)$

➡ Hướng dẫn giải

$$\bullet A = \sqrt{3} - \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\bullet B = \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 5} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\bullet C = \sqrt{3}(\sqrt{27} + 4\sqrt{3}) = \sqrt{81} + 4\sqrt{9} = 9 + 4 \cdot 3 = 21$$

$$\bullet D = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \\ = \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} - \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} \\ = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| - (2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$\bullet E = (3\sqrt{2} - \sqrt{8})\sqrt{2} = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\sqrt{2} = 6 - 4 = 2$$

$$\bullet F = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = -1.$$

$$\bullet G = \sqrt{16} + 5 + \sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{4^2} + 5 + \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{2} = 9 + \sqrt{2}$$

$$\bullet H = \sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{4^2 \cdot 2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\bullet K = \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} + 1 \right) (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

Dạng 3 Rút gọn biểu thức chứa căn

Phương pháp:

- **Bước ①:** Tìm ĐKXD nếu đề bài chưa cho (nếu có)
- **Bước ②:** Phân tích các đa thức ở tử thức và mẫu thức thành nhân tử.
- **Bước ③:** Quy đồng mẫu thức
- **Bước ④:** Rút gọn biểu thức

Ví dụ 1

Rút gọn các biểu thức sau

$$A = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \text{ với } x \neq \pm 1$$

$$B = \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1}$$

$$C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1$$

$$D = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \text{ điều kiện } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1$$

Lời giải

$$\bullet A = \frac{(1-x)-(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$\bullet B = \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1}, \text{ Với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1, \text{ ta có:}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{4(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{-2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}-1) - 2(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\begin{aligned} \bullet C &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 2\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\bullet D = \frac{(2+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x}-2)+(-x+\sqrt{x}+2)}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$$

Ví dụ 2

Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$$

với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0$$

và $x \neq 4$

$$C = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \text{ (với } a$$

$\in \mathbb{R}, a \geq 0$ và $a \neq 1$).

$$D = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) : \frac{a+1}{a-1}, \text{ ĐK:}$$

$a \geq 0; a \neq 1$

Lời giải

$$\bullet A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$$

$$\bullet B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}, (x > 0; x \neq 4)$$

$$\bullet C = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2}{a-1} = \frac{a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1}{a-1} = \frac{4\sqrt{a}}{a-1}$$

$$\bullet D = \frac{\sqrt{a}+1-(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} : \frac{a+1}{a-1}$$

$$= \frac{2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{a+1} = \frac{2}{a+1}$$

Bài tập rèn luyện

○ Rút gọn các biểu thức sau:

$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+4} + \frac{1}{\sqrt{x}-4} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 2$	$B = \left(1 + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1.$
$C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) (x\sqrt{x}+x) \text{ với } x > 0$	$D = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4} (x \geq 0; x \neq 4)$
$E = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - 3 \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1$	$F = \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, a > 0; b > 0$

➔ **Hướng dẫn giải**

$$\bullet A = \frac{\sqrt{x}-4+\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-4}$$

$$\bullet B = \left[\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} (0 < x \neq 1)$$

$$\bullet C = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot x(\sqrt{x}+1) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot x(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \bullet D &= \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4} (x \geq 0; x \neq 4) \\ &= \frac{3(\sqrt{x}+2)+4(\sqrt{x}-2)-12}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{7\sqrt{x}-14}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{7(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{7}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet E &= \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - 3 \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1) - 3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{3x+3\sqrt{x}-\sqrt{x}+1-3x+3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}+2)}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet F &= \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} + \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b} = 2\sqrt{a} \end{aligned}$$

Dạng 4 Rút gọn và tính giá trị biểu thức chứa căn (*)**Phương pháp:**

①. Để tính giá trị của biểu thức biết $x = a$ ta rút gọn biểu thức rồi thay $x = a$ vào biểu thức vừa rút gọn.

②. Để tìm giá trị của x khi biết giá trị của biểu thức A ta giải phương trình $A = x$

Ví dụ 1

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$

- Nêu điều kiện xác định và rút biểu thức A
- Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{3}$.
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A - 9\sqrt{x}$

Lời giải

a). Điều kiện $0 < x \neq 1$

Với điều kiện đó, ta có: $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

b). Nếu $A = \frac{1}{3}$ thì $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = \frac{9}{4}$ thì $A = \frac{1}{3}$

c). Ta có $P = A - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = -\left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 1$

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có:

$$9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 6$$

- Suy ra: $P \leq -6 + 1 = -5$. Đẳng thức xảy ra khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$
- Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -5$ khi $x = \frac{1}{9}$

Ví dụ 2

Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$

- Tìm điều kiện của x để M có nghĩa và rút gọn M
- Tìm x để $M = 5$
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $M \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

a. ĐK $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\text{Rút gọn } M = \frac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\text{Biến đổi ta có kết quả: } M = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$M = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \Leftrightarrow M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{b. } M = 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+1=5(\sqrt{x}-3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=5\sqrt{x}-15$$

$$\Leftrightarrow 16=4\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow x = 16$$

Đối chiếu ĐK: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ Vậy $x = 16$ thì $M = 5$

$$\text{c. } M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Do $M \in \mathbb{Z}$ nên $\sqrt{x}-3$ là ước của 4 $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ nhận các giá trị: -4; -2; -1; 1; 2; 4

Lập bảng giá trị ta được:

$$\Rightarrow x \in \{1; 4; 16; 25; 49\} \text{ vì } x \neq 4 \Rightarrow x \in \{1; 16; 25; 49\}$$

 Ví dụ 3

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right)$$

- a) Tìm điều kiện để P có nghĩa.
 b) Rút gọn biểu thức P.
 c) Tính giá trị của P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$

 Lời giải

a) Biểu thức P có nghĩa khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{2} - \sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

b) Đkxđ : $x \geq 1; x \neq 2; x \neq 3$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x-1} - \sqrt{2})(\sqrt{x-1} + \sqrt{2})} \right] \left[\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{2} - \sqrt{x})} \right] \\ &= \left[\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - (x-1)} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2})}{(x-1) - 2} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{2} - \sqrt{x})} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - x + 1} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{2})}{x-3} \right) \cdot \frac{-(\sqrt{2} - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{2} - \sqrt{x})} \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2}) \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(-1)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

c) Thay $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$ vào biểu thức $P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}} = \frac{\sqrt{2} - |\sqrt{2} - 1|}{|\sqrt{2} - 1|} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

○ Bài 1: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để $P = -1$

c) Tìm m để với mọi giá trị $x > 9$ ta có: $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$

➔ Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)$

$$\bullet \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \\ 4-x \neq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

• Với $x > 0$ và $x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} - \frac{8x}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{4x-8x-8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{-4x-8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \quad (\text{Đk: } x \neq 9) \\ &= \frac{-4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{-4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

$$\text{Với } x > 0, x \neq 4, x \neq 9 \text{ thì } P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$$

b) $P = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1 \quad (\text{ĐK: } x > 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$\Leftrightarrow 4x = 3 - \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3 - \sqrt{x} = 0$$

Đặt $\sqrt{x} = y$ đk $y > 0$

Ta có phương trình: $4y^2 - y - 3 = 0$. Các hệ số: $a + b + c = 4 - 1 - 3 = 0$

$$\Rightarrow y_1 = -1 \quad (\text{không thỏa mãn ĐKXD } y > 0), \quad y_2 = \frac{3}{4} \quad (\text{thỏa mãn ĐKXD } y > 0)$$

$$\text{Với } y = \frac{3}{4} = \sqrt{x} \text{ thì } x = \frac{9}{16} \quad (\text{thỏa mãn đkxd})$$

Vậy với $x = \frac{9}{16}$ thì $P = -1$

$$c) \quad m(\sqrt{x}-3)P > x+1 \quad (\text{đk: } x > 0; x \neq 4, x \neq 9)$$

$$\Leftrightarrow m(\sqrt{x}-3) \frac{4x}{\sqrt{x}-3} > x+1$$

$$\Leftrightarrow m \cdot 4x > x+1$$

$$\Leftrightarrow m > \frac{x+1}{4x}$$

(Do $4x > 0$)

$$\bullet \quad \text{Xét } \frac{x+1}{4x} = \frac{x}{4x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4x}$$

Có $x > 9$ (Thoả mãn ĐKXD)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{9} \quad (\text{Hai phân số dương cùng tử số, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì nhỏ hơn})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4x} < \frac{1}{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} < \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} < \frac{5}{18}$$

$$\text{Theo kết quả phần trên ta có: } \begin{cases} \frac{5}{18} > \frac{x+1}{4x} \\ m > \frac{x+1}{4x} \end{cases} \Rightarrow m \geq \frac{5}{18}$$

Kết luận: Với $m \geq \frac{5}{18}, x > 9$ thì $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$

○ Bài 2: Cho biểu thức:

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$$

a) Tìm điều kiện của x và y để P xác định. Rút gọn P.

b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$.

➔ Hướng dẫn giải

a) Điều kiện để P xác định là $x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x + y \neq 0$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x(1 + \sqrt{x}) - y(1 - \sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} = \frac{(x - y) + (x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) + y(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{(1 - \sqrt{y})} = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}.$$

b) ĐKXĐ: $x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x + y \neq 0$

$$P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - (\sqrt{y} + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{y}) = 1$$

$$\text{Ta có: } 1 + \sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4$$

Thay $x = 0; 1; 2; 3; 4$ vào ta có các cặp giá trị $x=4, y=0$ và $x=2, y=2$ (thỏa mãn).

Phiếu ôn tập

Phiếu 1

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sqrt{2} + \sqrt{8} + 3\sqrt{32} - 2\sqrt{72}$.

Câu 2: Tìm x biết $\sqrt{x-3} - \sqrt{9x-27} + 2\sqrt{16x-48} = 6$.

Câu 3: Rút gọn biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{3}+2} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

Câu 4: Cho biểu thức $A = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{4-x}$ ($x \geq 0; x \neq 4$).

1. Tính giá trị của A với $x = 9$.
2. Rút gọn biểu thức B .
3. Tìm x để $\frac{B}{A} > -\frac{1}{3}$.

➔ Hướng dẫn giải

Câu 1: $A = 2\sqrt{2} + \sqrt{8} + 3\sqrt{32} - 2\sqrt{72} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Câu 2: Điều kiện $x \geq 3$.

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{9x-27} + 2\sqrt{16x-48} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} - 3\sqrt{x-3} + 8\sqrt{x-3} = 6$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-3} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow x-3=1 \Leftrightarrow x=4 \text{ (t/m)}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{4\}$.

$$\begin{aligned} \text{Câu 3: } B &= \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{3}+2} - \sqrt{9+4\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}+2} - \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}+2-\sqrt{2}-2-\sqrt{5} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Câu 4:

1) Với $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\Rightarrow A = \frac{-\sqrt{9}}{\sqrt{9}+5} = \frac{-3}{8}.$$

Vậy $A = \frac{-3}{8}$ với $x = 9$.

2. Rút gọn biểu thức B .

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{4-x} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x + 4\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2 + 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$3. \text{ Ta có } \frac{B}{A} > -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} : \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 5} > -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 2} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} + 17}{3(\sqrt{x} - 2)} < 0$$

$$\forall \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} > 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} + 17 \geq 17, \forall x \geq 0; x \neq 4$$

$$\text{Để } \frac{2\sqrt{x} + 17}{3(\sqrt{x} - 2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\sqrt{x} - 2) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$$

$$\text{Kết hợp ĐKXD } x \geq 0; x \neq 4 \Rightarrow 0 \leq x < 4.$$

Vậy $0 \leq x < 4$ là giá trị cần tìm

Phiếu 2

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $M = \sqrt{12} - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \frac{4}{\sqrt{2}}$.

Câu 2: Thực hiện phép tính:

$$a) A = \left(4\sqrt{8} - \sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot 2\sqrt{2}$$

$$b) B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} - (\sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

Câu 3: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{x - 1}$ ($x > 0, x \neq 1$).

$$a) \text{ Tìm } x \text{ để } A = \frac{1}{2}.$$

$$b) \text{ Chứng minh } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}.$$

$$c) \text{ Đặt } P = A \cdot B. \text{ Tìm } x \text{ để } \sqrt{P} < \frac{1}{2}.$$

Câu 4: Cho $A = \frac{x + 3}{\sqrt{x} + 3}$ và $B = \left(\frac{x + 3\sqrt{x} - 2}{x - 9} - \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

$$a) \text{ Tính giá trị biểu thức } A \text{ khi } x = 16.$$

$$b) \text{ Rút gọn biểu thức } B.$$

$$c) \text{ Cho } P = \frac{A}{B}. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } P.$$

Hướng dẫn giải

Câu 1:

$$M = \sqrt{12} - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{4 \cdot 3} - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \frac{2(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$$

Câu 2:

$$a) A = \left(4\sqrt{8} - \sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot 2\sqrt{2} = \left(8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 18.$$

$$b) B = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} - (\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{5} = 1.$$

Câu 3:

$$a) \text{ Tìm } x \text{ để } A = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$\text{Để } A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-2) = \sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-4 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \text{ (L)} \\ x = 16 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy để $A = \frac{1}{2}$ thì $x = 16$.

$$b) \text{ Chứng minh } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+3}{x-1} \quad (x > 0, x \neq 1) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x + \sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

$$c) \text{ Đặt } P = A.B. \text{ Tìm } x \text{ để } \sqrt{P} < \frac{1}{2}$$

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Để } \sqrt{P} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}} < \frac{1}{2} (x > 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(\sqrt{x}-2) < \sqrt{x}+1$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-8 < \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$$

$$\text{Vậy } \sqrt{P} < \frac{1}{2} \text{ thì } 4 < x < 9$$

Câu 4:

a) Khi $x=16$ (thỏa mãn điều kiện), ta có $A = \frac{16+3}{\sqrt{16}+3} = \frac{19}{4+3} = \frac{19}{7}$

Vậy khi $x=16$ thì $A = \frac{19}{7}$

b) Với $x \geq 0, x \neq 9$, ta có:

$$B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2-(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

c) $P = \frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1}$, điều kiện $x \geq 0, x \neq 9$

Khi đó ta có:

$$P = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1+4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}} - 2 = 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2$ (do $\sqrt{x}+1 \geq 1$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2-1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy min $P = 2$ tại $x = 1$