

CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ VÀ ỨNG DỤNG

A. Một số kiến thức cần nhớ

1. Nhắc lại những hằng đẳng thức đáng nhớ

$$\text{Bình phương của một tổng: } (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = (A-B)^2 + 4AB$$

$$\text{Bình phương của một hiệu: } (A-B)^2 = (B-A)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = (A+B)^2 - 4AB$$

$$\text{Hiệu của hai bình phương: } A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$\text{Lập phương của tổng: } (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$$

$$\text{Lập phương của hiệu: } (A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A-B)$$

$$\text{Tổng hai lập phương: } A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) = (A+B)^3 - 3AB(A-B)$$

$$\text{Hiệu hai lập phương: } A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2) = (A-B)^3 + 3AB(A-B)$$

2. Một số hằng đẳng thức tổng quát

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2k} - b^{2k} = (a-b)(a^{2k-1} + a^{2k-2}b + \dots + a^{2k-3}b^2 + b^{2k-1})$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots + b^{2k})$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

3. Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$\text{Trong đó } C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{1.2.3\dots k}$$

Cách xác định hệ số của khai triển Newton.

- **Cách 1.** Dùng công thức $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{1.2.3\dots k}$

Chẳng hạn hệ số của hạng tử a^4b^3 trong khai triển của $(a+b)^7$ là

$$C_7^4 = \frac{7.6.5.4}{4!} = \frac{7.6.5.4}{4.3.2.1} = 35$$

Chú ý.

$$+ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ với quy ước } 0! = 1.$$

$$+ Ta \text{ có } C_n^k = C_n^{n-k} \text{ nên } C_7^4 = C_7^3 = \frac{7.6.5}{3!} = 35.$$

- **Cách 2. Dùng tam giác Patxcan**

Đỉnh	1						
Dòng 1 (n = 1)			1	1			
Dòng 2 (n = 2)			1	2	1		
Dòng 3 (n = 3)		1	3	3	1		
Dòng 4 (n = 4)		1	4	6	4	1	
Dòng 5 (n = 5)	1	5	10	10	5	1	
Dòng 6 (n = 6)	1	6	15	20	15	6	1

Trong tam giác hai cạnh bên gồm các số 1 và dòng $k+1$ được thành lập từ dòng k ($k \geq 1$).

Với $n=4$ thì ta có $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Với $n=5$ thì ta có $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Với $n=6$ thì ta có $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

B. Một số ví dụ minh họa.

Với các hằng đẳng thức đáng nhớ cũng như các hằng đẳng thức mở rộng ta có thể áp dụng khi giải một số dạng bài tập toán như sau.

+ Áp dụng trực tiếp các hằng đẳng thức để thực hiện tính phép tính, tính giá trị các biểu thức số.

+ Áp dụng các hằng đẳng thức để thu gọn biểu thức và chứng minh các đẳng thức.

+ Áp dụng các hằng đẳng thức để giải bài toán tìm giá trị của biến. Xác định hệ số của đa thức.

+ Bài toán tính giá trị biểu thức với các biến có điều kiện.

+ Chứng minh bất đẳng thức và bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức đại số.

+ Áp dụng các hằng đẳng thức để giải một số bài toán số học và tổ hợp.

Bài 1. Thực hiện phép tính.

a) $(3 - xy^2)^2 - (2 + xy^2)^2$

b) $9x^2 - (3x - 4)^2$

c) $(a - b^2)(a + b^2)$

d) $(a^2 + 2a + 3)(a^2 + 2a - 3)$

e) $(x - y + 6)(x + y - 6)$

f) $(y + 2z - 3)(y - 2z - 3)$

g) $(2y - 3)^3$

h) $(2 - y)^3$

i) $(2y - 5)(4y^2 + 10y + 25)$

j) $(3y + 4)(9y^2 - 12y + 16)$

k) $(x - 3)^3 + (2 - x)^3$

l) $(x + y)^3 - (x - y)^3$

• **Định hướng tư duy.** Sử dụng các hằng đẳng thức để khai triển các hạng tử rồi thu gọn đa thức

Lời giải

a) $(3 - xy^2)^2 - (2 + xy^2)^2 = 9 - 6xy^2 + x^2y^4 - 4 - 4xy^2 - x^2y^4 = 5 - 10xy^2$

b) $9x^2 - (3x - 4)^2 = (3x - 3x + 4)(3x + 3x - 4) = 4(6x - 4) = 24x - 16$

c) $(a - b^2)(a + b^2) = a^2 - b^4$

d) $(a^2 + 2a + 3)(a^2 + 2a - 3) = (a^2 + 2a)^2 - 9 = a^4 + 4a^3 + 4a^2 - 9$

e) $(x - y + 6)(x + y - 6) = x^2 - (y - 6)^2 = x^2 - y^2 + 12y - 36$

f) $(y + 2z - 3)(y - 2z - 3) = (y - 3)^2 - 4z^2 = y^2 - 6y - 4z^2 + 9$

g) $(2y - 3)^3 = 8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$

h) $(2 - y)^3 = 8 - 12y + 6y^2 - y^3$

i) $(2y - 5)(4y^2 + 10y + 25) = 8y^3 - 125$

j) $(3y + 4)(9y^2 - 12y + 16) = 27y^3 + 64$

$$\begin{aligned} \text{k) } (x-3)^3 + (2-x)^3 &= (x-3+2-x) \left[(x-3)^2 - (x-3)(2-x) + (2-x)^2 \right] \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 2x + x^2 + 6 - 3x + 4 - 4x + x^2) = -3x^2 + 15x + 19 \end{aligned}$$

$$\text{l) } (x+y)^3 - (x-y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 = 6x^2y + 2y^3$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau.

$$\text{a) } (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2)$$

$$\text{b) } (x+1)^2 - (x-1)^2 + 3x^2 - 3x(x+1)(x-1)$$

$$\text{c) } (2x+1)^2 + 2(4x^2 - 1) + (2x-1)^2$$

$$\text{d) } (m+n)^2 - (m-n)^2 + (m-n)(m+n)$$

$$\text{e) } (3x+1)^2 - 2(3x+1)(3x+5) + (3x+5)^2$$

$$\text{f) } (a-b+c)^2 - 2(a-b+c)(c-b) + (b-c)^2$$

$$\text{g) } (2x-5)(4x^2 + 10x + 25)(2x+5)(4x^2 - 10x + 25) - 64x^4$$

$$\text{h) } (a+b)^3 + (a-b)^3 - 2a^3$$

$$\text{i) } (x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Lời giải

• **Định hướng tư duy.** Rút gọn biểu thức là cách gọi khác của thực hiện phép tính, do đó ta sử dụng các hằng đẳng thức để khai triển các hạng tử rồi thu gọn biểu thức.

Lời giải

$$\text{a) } (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2) = \left[(x^2 + 2)^2 - 4x^2 \right] (x^4 - 4)$$

$$= (x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2)(x^4 - 4) = (x^4 + 4)(x^4 - 4) = x^8 - 16$$

$$\text{b) } (x+1)^2 - (x-1)^2 + 3x^2 - 3x(x+1)(x-1) = (x+1-x+1)(x+1+x-1) + 3x^2 - 3x(x^2 - 1)$$

$$= 4x + 3x^2 - 3x^3 + 3x = -3x^3 + 3x^2 + 7x$$

$$\text{c) } (2x+1)^2 + 2(4x^2 - 1) + (2x-1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 + 8x^2 - 2 + 4x^2 - 4x + 1 = 16x^2$$

$$d) (m+n)^2 - (m-n)^2 + (m-n)(m+n)$$

$$= (m+n-m+n)(m+n+m-n) + m^2 - n^2 = 4mn + m^2 - n^2$$

$$e) (3x+1)^2 - 2(3x+1)(3x+5) + (3x+5)^2 = (3x+1-3x-5)^2 = 16$$

$$f) (a-b+c)^2 - 2(a-b+c)(c-b) + (b-c)^2 = (a-b+c+b-c)^2 = a^2$$

$$g) (2x-5)(4x^2+10x+25)(2x+5)(4x^2-10x+25) - 64x^4$$

$$= (8x^3-125)(8x^3+125) = 64x^6 - 125^2$$

$$h) (a+b)^3 + (a-b)^3 - 2a^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 2a^3 = 6ab^2$$

$$i) (x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 - 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2zx + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0$$

Bài 3. Tìm x biết.

$$a) (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15$$

$$b) 4x^2 - 81 = 0$$

$$c) x(x-5)(x+5) - (x-2)(x^2+2x+4) = 3$$

$$d) 25x^2 - 2 = 0$$

$$e) (x+2)^2 = (2x-1)^2$$

$$f) (x+2)^2 - x + 4 = 0$$

$$g) (x^2-2)^2 + 4(x-1)^2 - 4(x^2-2)(x-1) = 0$$

• **Định hướng tư duy.** Bài toán tìm x là một dạng bài tập tìm giá trị của biến khi biết giá trị của biểu thức. Với các bài tập trên để tìm được x trước hết ta cần sử dụng các hằng đẳng thức để khai triển các hạng tử rồi thu gọn biểu thức rồi mới đi tìm giá trị của x từ đẳng thức đơn giản cuối cùng.

Lời giải

$$a) (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 = 15 \Leftrightarrow 45x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{2}{15}$$

$$b) 4x^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{9}{2}$$

$$c) x(x-5)(x+5)-(x-2)(x^2+2x+4)=3 \Leftrightarrow x^3-25x-x^3+8=3 \Leftrightarrow 25x=5 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$$

$$d) 25x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{2}{25} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$e) (x+2)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=2x-1 \\ x+2=-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f) (x+2)^2-x+4=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4-x+4=0 \Leftrightarrow x^2+3x+8=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}=0.$$

Do $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$ nên không có giá trị thỏa mãn $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}=0$ hay không có

giá trị thỏa mãn $(x+2)^2-x+4=0$.

$$g) (x^2-2)^2+4(x-1)^2-4(x^2-2)(x-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-2-2x+2)^2=0 \\ \Leftrightarrow x^2(x-2)^2 \Leftrightarrow x=0; x=2$$

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau

$$a) A=123(123+154)+77^2$$

$$b) B=\frac{135^2+130.135+65^2}{135^2-65^2}$$

$$c) D=1^2-2^2+3^2-4^2+\dots-2018^2+2019^2$$

$$d) D=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)-2^{64}$$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát các biểu thức ta thấy có bóng dáng của các hằng đẳng thức đáng nhớ. Do đó ta sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để biến đổi các biểu thức.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } A=123(123+154)+77^2=123^2+2.123.77+77^2=(123+77)^2=200^2=40000$$

b) Ta có

$$B=\frac{135^2+130.135+65^2}{135^2-65^2}=\frac{135^2+2.135.65+65^2}{135^2-65^2} \\ =\frac{(135+65)^2}{(135-65)(135+65)}=\frac{135+65}{136-65}=\frac{200}{70}=\frac{20}{7}.$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
A &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 2018^2 + 2019^2 \\
&= 1 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + \dots + (2019^2 - 2018^2) \\
&= 1 + (3+2)(3-2) + (5+4)(5-4) + \dots + (2019+2018)(2019-2018) \\
&= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 2019 + 2019 = \frac{(1+2019) \cdot 2019}{2} = 1010 \cdot 2019
\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
B &= (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) - 2^{64} \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) - 2^{64} \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) - 2^{64} \\
&= \dots = (2^{32}-1)(2^{32}+1) - 2^{64} = 2^{64} - 1 - 2^{64} = -1
\end{aligned}$$

Bài 5.

a) Cho $x-y=7$. Tính giá trị biểu thức: $A = x(x+2) + y(y-2) - 2xy$

$$B = x^3 - 3xy(x-y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2$$

b) Cho $x+2y=5$. Tính giá trị biểu thức: $C = x^2 + 4y^2 - 2x + 10 + 4xy - 4y$.

• **Định hướng tư duy.** Quan sát giả thiết của bài toán ta thấy có hai hướng

+ Hướng 1. Biến đổi biểu thức làm xuất hiện các hạng tử có dạng $x-y$ và $x+2y$.

+ Hướng 2. Thay $x=y+7$ và $x=5-2y$ tương ứng vào các biểu thức rồi thu gọn biểu thức.

Cả hai hướng trên ta đều cần sử dụng biến đổi để đưa về các hằng đẳng thức đáng nhớ hoặc khai triển các hằng đẳng thức đáng nhớ.

Lời giải

$$a) A = x(x+2) + y(y-2) - 2xy = x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2xy = (x-y)^2 + 2(x-y)$$

Thay $x-y=7$ vào biểu thức A ta được $A = 7^2 + 2 \cdot 7 = 63$

$$B = x^3 - 3xy(x-y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2 = (x-y)^3 - (x-y)^2$$

Thay $x-y=7$ vào biểu thức ta được $B = 7^3 - 7^2 = 294$

$$b) C = x^2 + 4y^2 - 2x + 10 + 4xy - 4y = (x+2y)^2 - 2(x+2y) \quad (3)$$

Thay $x+2y=5$ vào biểu thức C ta được $C = 5^2 - 2 \cdot 5 = 15$.

Bài 6. Chứng minh đẳng thức:

$$\text{a) } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$\text{b) } (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát các đẳng thức cần chứng minh ta thấy có hai hướng

+ Hướng 1. Khai triển vế trái của đẳng thức rồi sử dụng hằng đẳng thức để biến đổi biểu thức về vế phải.

+ Hướng 2. Sử dụng hằng đẳng thức biến đổi đồng thời cả hai vế rồi so sánh kết quả.

Lời giải

$$\text{a) } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Lời giải 1.

$$\begin{aligned} VT &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = VP \end{aligned}$$

Lời giải 2. Ta có $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$. Lại có

$$\begin{aligned} (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 &= (a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd) \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \end{aligned}$$

Do đó ta được $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

$$\text{b) } (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$$

Ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a^2 + b^2 + 2ab) + (b^2 + c^2 + 2bc) + (a^2 + c^2 + 2ac) = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 \end{aligned}$$

Bài 7. Chứng minh rằng nếu $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ thì $a = b = c$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát giả thiết ta thấy có hằng đẳng thức đáng nhớ. Do đó ta sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để biến đổi giả thiết của bài toán. Ngoài ra để ý rằng tổng các bình phương bằng 0 thì các bình phương đó bằng 0 nên ta biến đổi giả thiết của bài toán về tổng các bình phương bằng 0.

Lời giải

Biến đổi tương đương đẳng thức đã cho ta được

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2+2bc+2ac+c^2=3ab+3bc+3ac \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac &= 0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &= 0 \Leftrightarrow a-b=b-c=c-a=0 \Leftrightarrow a=b=c\end{aligned}$$

Bài 8. Cho a, b, c, d là các số thực khác 0 thỏa mãn $a+b=c+d$ và $a^2+b^2=c^2+d^2$.

Chứng minh rằng: $a^{2018}+b^{2018}=c^{2018}+d^{2018}$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát giả thiết của bài toán và đẳng thức cần chứng minh ta dự đoán rằng $a=c; b=d$ hoặc $a=d; b=c$. Như vậy ta đi chứng minh $a=c$ hoặc $a=d$, điều này đồng nghĩa với $(a-c)(a-d)=0$.

Lời giải

Từ $a+b=c+d$ ta được $(a+b)^2=(c+d)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd$.

Kết hợp với $a^2+b^2=c^2+d^2$ ta được $ab=cd$.

Cũng từ $a+b=c+d$ ta được $b=c+d-a$, thay vào $ab=cd$ ta được

$$a(c+d-a)=cd \Leftrightarrow ac+ad-a^2=cd \Leftrightarrow a^2-ac-ad+cd=0 \Leftrightarrow (a-c)(a-d)=0$$

+ Nếu $a-c=0$ ta được $a=c$, suy ra $b=d$. Khi đó ta được $a^{2018}+b^{2018}=c^{2018}+d^{2018}$

+ Nếu $a-d=0$ ta được $a=d$, suy ra $b=c$. Khi đó ta được $a^{2018}+b^{2018}=c^{2018}+d^{2018}$

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Bài 9. Cho a, b, c, d là các số thực khác 0 thỏa mãn các điều kiện $a+b=c+d$ và

$a^3+b^3=c^3+d^3$. Chứng minh rằng $a^{2019}+b^{2019}=c^{2019}+d^{2019}$

Lời giải

Từ $a^3+b^3=c^3+d^3$ ta được $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(c+d)(c^2-cd+d^2)$. Ta xét hai

trường hợp sau:

• **Trường hợp 1.** Khi $a+b=c+d=0$ ta suy ra được $a=-b$ và $c=-d$.

Khi đó dễ thấy $a^{2019}+b^{2019}=c^{2019}+d^{2019}=0$.

• **Trường hợp 2.** Khi $a+b=c+d \neq 0$. Khi đó ta được $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$.

Từ $a+b=c+d$ ta được $(a+b)^2=(c+d)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd$.

Kết hợp với $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$ ta được $ab = cd$.

Cũng từ $a + b = c + d$ ta được $b = c + d - a$, thay vào $ab = cd$ ta được

$$a(c + d - a) = cd \Leftrightarrow ac + ad - a^2 = cd \Leftrightarrow a^2 - ac - ad + cd = 0 \Leftrightarrow (a - c)(a - d) = 0$$

+ Nếu $a - c = 0$ ta được $a = c$, suy ra $b = d$. Khi đó ta được $a^{2019} + b^{2019} = c^{2019} + d^{2019}$

+ Nếu $a - d = 0$ ta được $a = d$, suy ra $b = c$. Khi đó ta được $a^{2019} + b^{2019} = c^{2019} + d^{2019}$

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 6abc$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc(a + b + c + 1)$$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát bài toán ta thấy cả giả thiết và đẳng thức cần chứng minh đều phức tạp. Trong giả thiết và đẳng thức cần chứng minh đều có các hằng đẳng thức đáng nhớ. Để ý rằng $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$. Như vậy ta cần biến đổi đẳng thức cần chứng minh làm xuất hiện đại lượng như trên.

Lời giải

Biến đổi biểu thức và kết hợp với $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 6abc$ ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc \\ &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (c - a)^2 \right] = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot 6abc = 3abc(a + b + c) \end{aligned}$$

Như vậy ta được $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 3abc(a + b + c)$ hay

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc(a + b + c + 1)$$

Bài 11. Cho a, b là hai số thực lần lượt thỏa mãn các hệ thức $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$ và $b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$. Chứng minh rằng $a + b = 2$.

• **Định hướng tư duy.** Giả thiết bài toán cho hai biểu thức bậc 3 của hai biến a và b . Quan sát hai biểu thức đó ta thấy có các hạng tử của một hằng đẳng thức bậc 3. Như vậy để chứng minh được $a + b = 2$ ta cần chứng minh được $a^3 = (2 - b)^3$. Từ đó ta có các lời giải như sau.

Lời giải

+ **Lời giải 1.** Từ $b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$ ta được

$$\begin{aligned} b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0 &\Leftrightarrow (b^3 - 6b^2 + 12b - 8) + 3(b^2 - 4b + 4) + 5(b - 2) + 17 = 0 \\ &\Leftrightarrow (b - 2)^3 + 3(b - 2)^2 + 5(b - 2) + 17 = 0 \Leftrightarrow -(2 - b)^2 + 3(b - 2)^2 - 5(2 - b) + 17 = 0 \\ &\Leftrightarrow -[(2 - b)^2 - 3(b - 2)^2 + 5(2 - b) - 17] = 0 \Leftrightarrow (2 - b)^2 - 3(b - 2)^2 + 5(2 - b) - 17 = 0 \end{aligned}$$

Từ đó kết hợp với $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$ ta suy ra được

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = (2 - b)^2 - 3(b - 2)^2 + 5(2 - b) - 17 = 0$$

Do vậy ta có $a = 2 - b$ hay $a + b = 2$

+ **Lời giải 2.** Xét $a = 2 - b$ thay vào vế trái của $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$, ta có

$$\begin{aligned} a^3 - 3a^2 + 5a - 17 &= (2 - b)^3 - 3(2 - b)^2 + 5(2 - b) - 17 \\ &= 8 - 12b + 6b^2 - b^3 - 12 + 12b - 3b^2 + 10 - 5b - 17 \\ &= -b^3 + 3b^2 - 5b - 11 = -(b^3 - 3b^2 + 5b + 11) = 0 \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $a = 2 - b$ thỏa mãn $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$. Từ đó suy ra $a + b = 2$.

• **Lời giải 3.** Ta có $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + 2a - 16 = (a - 1)^3 + 2(a - 1) - 14$.

Đặt $x = a - 1$, khi đó kết hợp với giả thiết ta được $x^3 + 2x - 14 = 0$

Ta cũng có $b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 + 2b + 12 = (b - 1)^3 + 2(b - 1) + 14$

Đặt $y = b - 1$, khi đó kết hợp với giả thiết ta được $y^3 + 2y + 14 = 0$. Kết hợp hai kết quả ta được

$$x^3 + 2x - 14 + y^3 + 2y + 14 = 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + 2(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0$$

$$\text{Để thấy } x^2 - xy + y^2 + 2 = x^2 - xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0.$$

Do đó ta được $x + y = 0$ hay $a - 1 + b - 1 = 0$ nên $a + b = 2$.

• **Lời giải 4.** Cộng theo vế các hệ thức đã cho ta được

$$\begin{aligned}
& a^3 - 3a^2 + 5a - 17 + b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0 \\
& \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 3(a+b)^2 + 6ab + 5(a+b) - 6 = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[(a+b)^3 - 2(a+b)^2 \right] - \left[(a+b)^2 - 2(a+b) \right] - 3ab(a+b-2) + 3(a+b-2) = 0 \\
& \Leftrightarrow (a+b)^2(a+b-2) - (a+b)(a+b-2) - 3ab(a+b-2) + 3(a+b-2) = 0 \\
& \Leftrightarrow (a+b-2) \left[(a+b)^2 - (a+b) - 3ab + 3 \right] = 0
\end{aligned}$$

Để ý rằng $(a+b)^2 - (a+b) - 3ab + 3 = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 + 2 > 0$.

Do đó từ đẳng thức trên ta được $a+b-2=0$ hay $a+b=2$.

Bài 12. Với a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$(3a+3b+3c)^3 = 24 + (3a+b-c)^3 + (3b+c-a)^3 + (3c+a-b)^3$$

Chúng minh rằng $(a+2b)(b+2c)(c+2a) = 1$

• **Định hướng tư duy.** Giả thiết bài toán cho ta các hằng đẳng thức bậc ba nên ta hoàn toàn có thể khai triển giả thiết và biến đổi về hệ thức cần chứng minh. Tuy nhiên để ý ta nhận thấy có thể đổi biến $3a+b-c=x$; $3b+c-a=y$; $3c+a-b=z$ rồi mới khai triển hằng đẳng thức thì phép khai triển sẽ bớt đi sự phức tạp.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$.

Thật vậy, khai triển hằng đẳng thức bậc ba ta có

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= (x+y)^3 + 3(x+y)^2z + 3(x+y)z^2 + z^3 \\
&= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + 3(x+y)^2z + 3(x+y)z^2 + z^3 \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(xy+xz+yz+z^2) \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x)
\end{aligned}$$

Do vậy ta được $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$.

Đặt $3a+b-c=x$; $3b+c-a=y$; $3c+a-b=z$. Ta có

$$\begin{aligned}
(3a+3b+3c)^3 &= 24 + (3a+b-c)^3 + (3b+c-a)^3 + (3c+a-b)^3 \\
\Leftrightarrow (x+y+z)^3 &= 24 + x^3 + y^3 + z^3 \\
\Leftrightarrow (x+y+z)^3 &= 24 + (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x) \\
\Leftrightarrow 24 - 3(x+y)(y+z)(z+x) &= 0 \Leftrightarrow 24 - 3(2a+4b)(2b+4c)(2c+4a) = 0 \\
\Leftrightarrow 24 - 24(a+2b)(b+2c)(c+2a) &= 0 \Leftrightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a) = 1
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 13. Các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời các đẳng thức sau:

$$\text{i. } (a+b)(b+c)(c+a) = abc \qquad \text{ii. } (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3$$

Chứng minh rằng $abc = 0$.

• **Định hướng tư duy.** Biến đổi giả thiết thứ hai của bài toán ta thu được

$$abc(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) = a^3b^3c^3$$

Do đó ta thu được $abc = 0$ hoặc $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) = a^2b^2c^2$. Nếu $abc = 0$ thì xem như bài toán được chứng minh. Nếu $abc \neq 0$ thì đẳng thức thứ hai phải xảy ra. Chú ý rằng nếu đẳng thức thứ hai xảy ra thì ta có $a=b=c$. Kết hợp với giả thiết của bài toán thì ta được $a=b=c=0$, điều này mâu thuẫn với $abc \neq 0$. Do đó đẳng thức thứ hai không thể xảy ra, tức là ta có điều cần chứng minh.

Lời giải

Từ hệ thức $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3$ ta được

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) = a^3b^3c^3$$

Kết hợp với hệ thức $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ ta được

$$\begin{aligned}
abc(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) &= a^3b^3c^3 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} abc = 0 \\ (a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) = a^2b^2c^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Nếu $abc \neq 0$ khi đó ta được $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) = a^2b^2c^2$

Dễ thấy $a^2-ab+b^2 \geq |ab|$; $b^2-bc+c^2 \geq |bc|$; $c^2-ca+a^2 \geq |ca|$

Do đó ta được $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq a^2 b^2 c^2$. Kết hợp với hệ thức trên ta được $a = b = c$, thay vào hệ thức thứ hai ta được $8a^3 = a^3 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow abc = 0$, Điều này mâu thuẫn với $abc \neq 0$.

Vậy $abc = 0$.

Bài 14. Cho x, y, z thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2y - 4z + 5 = 0$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = (x-1)^{2018} + (y-1)^{2019} + (z-1)^{2020}$$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát giả thiết ta thấy có bóng dáng của các hằng đẳng thức đáng nhớ. Do đó ta sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để biến đổi giả thiết của bài toán. Ngoài ra để ý rằng tổng các bình phương bằng 0 thì các bình phương đó bằng 0 nên ta biến đổi giả thiết của bài toán về tổng các bình phương bằng 0. Lại để ý đến biểu thức cần tính giá trị A ta dự đoán rằng $x-1; y-1; z-1$ nhận một trong các giá trị $-1; 0; 1$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2y - 4z + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 &= 0 \Leftrightarrow x=1; y=1; z=2 \end{aligned}$$

Do đó ta được $A = (1-1)^{2018} + (1-1)^{2019} + (2-1)^{2020} = 1$.

Bài 15. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x+y+z=0$ và $xyz \neq 0$

$$\text{Tính giá trị biểu thức } P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát giả thiết và biểu thức P ta thấy cần biến đổi biểu giả thiết để làm xuất hiện các mẫu thức. Để ý từ giả thiết ta có $x+y=-z$ nên $(x+y)^2 = z^2$, do đó ta được $x^2 + y^2 - z^2 = -2xy$. Như vậy chỉ cần áp dụng tương tự và quy đồng ta thì ta thu được $P = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$. Lại chú ý rằng với $x+y+z=0$ ta có $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Từ đó ta tính được giá trị của biểu thức P .

Lời giải

Để tính được $y^2 + z^2 - x^2$ ta để ý đến giả thiết $x + y + z = 0 \Leftrightarrow y + z = -x$. Khi đó thực hiện bình phương hai vế ta được $y^2 + z^2 + 2yz = x^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$.

Từ đó ta có biến đổi $\frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - y^2 - z^2 - 2yz} = \frac{x^2}{-2yz}$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} = \frac{y^2}{-2zx}$; $\frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{z^2}{-2xy}$.

Chú ý rằng $xyz \neq 0$ nên cộng theo vế ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2xz} + \frac{z^2}{-2xy} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} - 3 + 3 \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{xyz} + 3 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{xyz} + 3 \right] = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $P = -\frac{3}{2}$.

Bài 16. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = (a-3)^{2019} + (b-3)^{2020} + (c-3)^{2021}$$

• **Định hướng tư duy.** Do vai trò của các biến a, b, c trong bài toán như nhau nên ta dự đoán $a = b = c = 2$. Ngoài ra để ý rằng tổng các bình phương bằng 0 thì các bình phương đó bằng 0 nên ta biến đổi giả thiết của bài toán về tổng các bình phương bằng 0. Như vậy ta cần biến đổi giả thiết về dạng $(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 0$.

Lời giải

Từ $a + b + c = 6$ ta được $(a + b + c)^3 = 36$.

Như vậy ta được $(a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Như vậy ta được $a = b = c$. Kết hợp với $a + b + c = 6$ suy ra $a = b = c = 2$, thay vào biểu thức A ta được

$$A = (2-3)^{2019} + (2-3)^{2020} + (2-3)^{2021} = (-1)^{2019} + (-1)^{2020} + (-1)^{2021} = -1$$

Bài 17.

a) Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tính $A=a^4+b^4+c^4$

b) Cho $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=a^2$. Tính $B=x^4+y^4+z^4$ theo a .

• **Định hướng tư duy.** Các bài tập trên cũng là một dạng ứng dụng khác của các hằng đẳng thức đáng nhớ. Để tính A ta cần bình hai vế của $a^2+b^2+c^2=14$. Ngoài ra ta cũng có mối liên hệ $(a+b+c)^2=14+2(ab+bc+ca)$ và $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. Từ đó ta tính được biểu thức A và hoàn toàn tương tự với biểu thức B .

Lời giải

a) Ta có $14^2=(a^2+b^2+c^2)^2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4=196-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Lại có $a+b+c=0$ nên $(a+b+c)^2=0$ hay $ab+bc+ac=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-7$

Do đó ta được $(ab+bc+ac)^2=49$ nên $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)=49$

Nên $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=49$. Vậy $A=a^4+b^4+c^4=196-2.49=98$

b) Ta có $x=-(y+z)$ nên ta có $x^2=(y+z)^2$ hay ta được $x^2-y^2-z^2=2yz$, do đó

suy ra $(x^2-y^2-z^2)^2=4y^2z^2$. Do đó suy ra $x^4+y^4+z^4=2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2$.

Suy ra $2(x^4+y^4+z^4)=(x^2+y^2+z^2)^2=a^4$ hay $B=\frac{a^4}{2}$.

Bài 18. Cho các số thực a, b, c sao cho $a+b+c=3; a^2+b^2+c^2=29$ và $abc=11$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^5+b^5+c^5$.

Lời giải

Ta có $ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=\frac{1}{2}(9-29)=-10$.

Do đó ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=(-10)^2-2.11.3=34$.

Lại có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=3(29+10)=117$.

Do đó ta được $a^3+b^3+c^3=117+33=150$. Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) &= a^5+b^5+c^5+a^3b^2+a^3c^2+b^3a^2+b^3c^2+c^3a^2+c^3b^2 \\ &= a^5+b^5+c^5+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a+b+c)-abc(a+b+c) \end{aligned}$$

Hay ta được $150.29 = a^5 + b^5 + c^5 + 34.3 - 11(-10)$.

Do đó $a^5 + b^5 + c^5 = 4138$

Bài 19. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2 = 2(a+c+1)(a+b-1)$.

Tính giá trị biểu thức $A = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Do $a+b+c=0$ nên ta có $b+c=-a$ hay $(b+c)^2 = a^2$.

Cũng từ $a+b+c=0$ ta được $a+b=-c$ và $a+c=-b$.

Kết hợp với $a^2 = 2(a+c+1)(a+b-1)$ ta được

$$\begin{aligned}(b+c)^2 &= 2(1-b)(-c-1) \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc = -2(1+c-b-bc) \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2b - 2c + 2 &= 0 \Leftrightarrow (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (b-1)^2 + (c-1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-1=0 \\ c-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=1 \end{cases}\end{aligned}$$

Mà ta có $a+b+c=0$ nên suy ra $a=0$. Do vậy $A = a^2 + b^2 + c^2 = 2$.

Bài 20. Xác định các hệ số a và b để đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức.

• **Định hướng tư duy.** Ta thấy đa thức $P(x)$ có bậc 4 nên khi viết thành bình phương của một đa thức thì đa thức đó phải có bậc hai. Chú ý đến hệ số của hạng tử bậc bốn ta suy ra đa thức bậc hai phải có hệ số cao nhất là 1. Như vậy đa thức bậc hai phải có dạng $x^2 + mx + n$. Đến đây ta có hai hướng xử lý bài toán.

+ Hướng 1. Viết $P(x) = (x^2 + mx + n)^2$ rồi khai triển hai vế. Sau đó đồng nhất hệ số hai vế để tìm hệ số.

+ Hướng 2. Biến đổi đa thức $P(x) = (x^2 + mx + n)^2 + A(x)$ sau đó xác định hệ số để đa thức $A(x)$ là đa thức 0.

Lời giải

Lời giải 1. Do đa thức $P(x)$ có bậc 4 với hệ số cao nhất là 1.

Giả sử $P(x) = (x^2 + mx + n)^2$.

Hay ta được $P(x) = (x^2 + mx + n)^2 = x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 2n)x^2 + 2mnx + n^2$.

Từ đó ta được $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b = x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 2n)x^2 + 2mnx + n^2$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được

$$\begin{cases} 2m = -2 \\ m^2 + 2n = 3 \\ a = 2mn \\ b = n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ 2n = 2 \\ a = -2n \\ b = n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy đa thức đã cho là $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

• **Lời giải 2.** Biến đổi đa thức đã cho như sau

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + (a+2)x + (b-1) \\ &= (x^4 - x^3 + x^2) - (x^3 - x^2 + x) + (x^2 - x + 1) + (a+2)x + (b-1) \\ &= (x^2 - x + 1)^2 + (a+2)x + (b-1) \end{aligned}$$

Để $P(x)$ là bình phương của một đa thức khác thì ta cần có $(a+2)x + (b-1) = 0$ với mọi x . Do vậy ta có $a+2 = b-1 = 0$ hay $a = -2; b = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 21. Cho đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$ với a, b là các số nguyên.

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k để $f(k) = f(2019).f(2020)$

• **Định hướng tư duy.** Trước hết ta cần tính được giá trị $f(2019).f(2020)$. Tiếp theo ta cần biến đổi $f(2019).f(2020)$ về dạng $k^2 + ka + b$.

Để thấy ngay $f(2019).f(2020) = (2019^2 + 2019a + b)(2020^2 + 2020a + b)$ và chú ý rằng $2020 = 2019 + 1$ ta biến đổi được

$$\begin{aligned} f(2019).f(2020) &= (2019^2 + 2019a + b)(2020^2 + 2020a + b) \\ &= (2019^2 + 2019a + b + 2019)^2 + a(2019^2 + 2019a + b + 2019) + b \end{aligned}$$

Như vậy chỉ cần đặt $k = 2019^2 + 2019a + b + 2019$ thì bài toán được chứng minh.

Lời giải

Ta có $f(2019) = 2019^2 + 2019a + b$ và $f(2020) = 2020^2 + 2020a + b$.

Để ý rằng $2020 = 2019 + 1$ ta có khi đó ta có

$$f(2020) = 2020^2 + 2020a + b = 2019^2 + 2019a + b + 2 \cdot 2019 + a + 1$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} f(2019) \cdot f(2020) &= (2019^2 + 2019a + b)(2020^2 + 2020a + b) \\ &= (2019^2 + 2019a + b)(2019^2 + 2019a + b + 2 \cdot 2019 + a + 1) \\ &= (2019^2 + 2019a + b)^2 + 2 \cdot 2019(2019^2 + 2019a + b) + a(2019^2 + 2019a + b) + 2019^2 + 2019a + b \\ &= \left[(2019^2 + 2019a + b)^2 + 2(2019^2 + 2019a + b)2019 + 2019^2 \right] + a(2019^2 + 2019a + b + 2019) + b \\ &= (2019^2 + 2019a + b + 2019)^2 + a(2019^2 + 2019a + b + 2019) + b = f(2019^2 + 2019a + b + 2019) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f(2019) \cdot f(2020) = f(2019^2 + 2019a + b + 2019).$$

Như vậy nếu chọn số nguyên $k = 2019^2 + 2019a + b + 2019$ thì ta được

$$f(k) = f(2019) \cdot f(2020)$$

• **Nhận xét.**

+ Để ý rằng $k = 2019^2 + 2019a + b + 2019 = f(2019) + 2019$. Do đó ta được:

$$f(f(2019) + 2019) = f(2019) \cdot f(2019 + 1)$$

+ Bài toán tổng quát. Cho đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$ với a, b là các số nguyên. Chứng

minh rằng:

$$f(f(x) + x) = f(x) \cdot f(x + 1)$$

Bài 22. Cho hai số thực phân biệt a, b thỏa mãn $a^3 + b^3 = a^2b^2(ab - 3)$. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = a + b - ab$$

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$a^3 + b^3 = a^2b^2(ab - 3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + (-ab)^3 = 3ab(-ab).$$

Đặt $c = -ab$, khi đó ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Biến đổi đẳng thức giả thiết ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + b + c) \left[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 \right] - 3ab(a + b + c) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

Do a, b là hai số phân biệt nên $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$.

Do đó ta suy ra được $a+b+c=0 \Leftrightarrow a+b=-c=ab$. Suy ra $T=a+b-ab=0$.

Bài 23. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $abc \neq 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}.$$

Lời giải

Ta có $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

Ta luôn có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Tuy nhiên vì a, b, c đôi một khác nhau nên không xảy ra đẳng thức.

Do đó suy ra $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ b=-c-a \\ c=-a-b \end{cases}$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab^2}{a^2+b^2-(-a-b)^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-(-b-c)^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-(-c-a)^2} \\ &= \frac{ab^2}{-2ab} + \frac{bc^2}{-2bc} + \frac{ca^2}{-2ca} = -\frac{a+b+c}{2} = 0 \end{aligned}$$

Vậy $P=0$

Bài 24. Cho ba số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $2ab+bc+2ca=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{bc}{8a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}.$$

Lời giải

Do a, b, c là các số thực khác 0 nên từ $2ab+bc+2ca=0$ ta được $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Đặt $x = \frac{1}{2a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, khi đó ta thu được $x+y+z=0$. Ta viết biểu thức A lại thành

$$A = \frac{bc}{8a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{4a^2} + \frac{2ca}{b^2} + \frac{2ab}{c^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} \right) = \frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}$$

Từ $x+y+z=0$ ta có biến đổi

$$x+y=-z \Leftrightarrow (x+y)^3 = -z^3 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x+y) = 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

Do đó suy ra $A = \frac{3xyz}{2xyz} = \frac{3}{2}$.

Bài 25. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các hệ thức

$$x+y+z=6 \text{ và } (x-1)^3 + (y-2)^3 + (z-3)^3 = 0$$

Tính giá trị của biểu thức sau: $T = (x-1)^{2n+1} + (y-2)^{2n+1} + (z-3)^{2n+1}$ với n là một số tự nhiên

Lời giải

Đặt $a = x-1; b = y-2; c = z-3$. Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$a+b+c=0 \text{ và } a^3 + b^3 + c^3 = 0. \text{ Khi đó ta cần tính } T = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$$

Từ $a+b+c=0$ ta suy ra được $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Mà ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 0$ nên $abc=0$ hay $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $c=0$. Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta xét trường hợp $a=0$, các trường hợp khác hoàn toàn tương tự.

Khi $a=0$ ta suy ra $b+c=0$ hay ta được $b=-c$.

$$\text{Thay vào biểu thức } T \text{ ta được } T = b^{2n+1} + (-b)^{2n+1} = 0.$$

Vậy với x, y, z thỏa mãn yêu cầu bài toán ta được $T=0$.

Bài 26. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$$

• **Định hướng tư duy.** Bất đẳng thức cần chứng minh có hình thức tương tự như các bất đẳng thức trên, ta có thể giải bằng cách xét hiệu vế trái và vế phải rồi phân tích thành tổng các bình phương. Để được các tích ab, ac, ad, ae vào trong bình phương ta cần ghép a với b, c, d, e , và vì vai trò của b, c, d, e như nhau nên ta có thể nghĩ đến việc biến đổi như sau

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &\geq a(b+c+d+e) \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trong trường hợp trên ta có thể chọn $k=2$, tức là ta phải nhân hai vế với 4.

Lời giải

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \\
&= \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - 4(ab + ac + ad + ae)}{4} \\
&= \frac{(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2)}{4} \\
&= \frac{(a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2}{4} \geq 0
\end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = 2b = 2c = 2d = 2e.$$

Bài 27. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = a - b$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + ab < 1$$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy có biểu thức $a^2 + b^2 + ab$. Trong khi đó giả thiết lại xuất hiện biểu thức $a - b$. Vậy mối liên hệ của hai biểu thức này như thế nào? Dễ thấy được hằng đẳng thức $(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3$.

Do đó một cách rất tự nhiên ta nhân hai vế của giả thiết với biểu thức $a^2 + b^2 + ab$ để làm xuất hiện $a^3 - b^3$ và $a^2 + b^2 + ab$, khi đó ta được $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$. Tới đây chỉ cần

chứng minh $\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} < 1$ là xong.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 = a - b &\Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
&\Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} < 1 \Leftrightarrow a^3 - b^3 < a^3 + b^3 \Leftrightarrow 0 < 2b^3 \Leftrightarrow 0 < b$$

Do $b > 0$ hiển nhiên đúng. Nên bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

• **Định hướng tư duy.** Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức cơ bản có vế trái là các lũy thừa bậc chẵn. Để ý ta thấy $abc(a+b+c) = ab.bc + bc.ca + ca.ab$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức thành tổng của các bình phương.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - b^2ac - c^2ab &\geq 0 \Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2 - a^2)^2 + 2a^2c^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 29. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có:

$$ab(a-2)(b+6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 > 0$$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế trái của nó có sự xuất hiện các đại lượng $a(a-2)$; $b(b+6)$ và chú ý thêm ta nhận thấy $a(a-2)+1 = (a-1)^2$ và $b(b+6)+9 = (b+3)^2$. Đến đây ta thấy có hai ý tưởng chứng minh bất đẳng thức trên.

+ Hướng 1. Biến đổi tương đương làm xuất hiện các bình phương $(a-1)^2$, $(b+3)^2$.

+ Hướng 2. Đặt biến phụ $x = a(a-2)$; $y = b(b+6)$ và sử dụng điều kiện của biến phụ để chứng minh.

Lời giải

Cách 1. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức đã cho, ta có

$$\begin{aligned} P &= ab(a-2)(b+6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 \\ &= a(a-2)[b(b+6)+12] + 3[b(b+6)+12] \\ &= [b(b+6)+12][a(a-2)+3] = [(b+3)^2 + 3][(a-1)^2 + 2] > 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$ab(a-2)(b+6) + 12(a-1)^2 + 3(b+3)^2 - 3 > 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a(a-2) \\ y = b(b+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (a-1)^2 \geq 0 \\ y+9 = (b+3)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$xy + 12(x+1) + 3(y+9) - 3 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(y+12) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $x+1 \geq 0$; $y+3 \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 30. Cho a, b là các số thực dương, tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức.

$$\frac{k}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8+2k}{(a+b)^2}$$

• **Định hướng tư duy.** Vì vai trò của a, b như nhau nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b$, do đó khi biến đổi bất đẳng thức ta cần làm xuất hiện nhân tử $(a-b)^2$. Khi đó bất đẳng thức trở thành $(a-b)^2 \left[(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \right] \geq 0$. Để tìm k lớn nhất ta cho $a = b$, khi đó ta được $12a^4 - ka^4 \geq 0 \Rightarrow k \leq 12$. Đến đây ta chỉ cần chứng minh $k = 12$ bất đẳng thức đúng là được.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{k}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8+2k}{(a+b)^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{k}{a^2 + b^2} - \frac{2k}{(a+b)^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{4}{(a+b)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-k(a-b)^2}{(a^2 + b^2)(a+b)^2} + \frac{(b-a)(b+3a)}{a^2(a+b)^2} + \frac{(a-b)(3a+b)}{b^2(a+b)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2(a^2 + 4ab + b^2)}{a^2b^2(a+b)^2} - \frac{k(a-b)^2}{(a^2 + b^2)(a+b)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)^2 \left[(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng khi và chỉ khi

$$(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \geq 0$$

Cho $a = b$ thì bất đẳng thức trên trở thành $12a^4 - ka^4 \geq 0 \Rightarrow k \leq 12$. Ta chứng minh $k = 12$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức đã cho

Thật vậy, ta xét các trường hợp sau

+ Với $k < 12$ thì ta được $(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 > 0$.

+ Với $k = 12$ thì bất đẳng thức $(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \geq 0$ trở thành

$$\begin{aligned} & (a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - 12a^2b^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 + 4ab(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 4ab(a - b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy hằng số k lớn nhất là 12.

Bài 31. Tìm các giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 2024$$

• **Định hướng tư duy.** Quan sát biểu thức A ta thấy biểu thức có dạng tương tự như các biểu thức cho trong các bài toán tìm giá trị biểu thức có điều kiện ở trên. Do đó ta sẽ sử dụng hằng đẳng thức để phân tích thành các bình phương. Chú ý rằng các bình phương không âm nên ta có thể suy ra được giá trị nhỏ nhất của A .

Lời giải

Biến đổi biểu thức A đã cho ta được

$$\begin{aligned} A &= 10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 2024 = 10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 + 2019 \\ &= (9x^2 + 6x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (4z^2 - 4xz + x^2) + 2019 \\ &= (3x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (2z - x)^2 + 2019 \end{aligned}$$

Để ý rằng $(3x + 1)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0; (2z - x)^2 \geq 0$ nên ta suy ra được $A \geq 2019$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 3x + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ 2z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}; y = 2; z = \frac{-1}{6}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2019 đạt được tại $x = -\frac{1}{3}; y = 2; z = \frac{-1}{6}$.

Bài 32. Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết của bài toán ta được

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0 &\Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0 \\&\Leftrightarrow (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = -3x^2 + 1 \\&\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 = -3x^2 + 1\end{aligned}$$

Để ý rằng $x^2 \geq 0$ nên ta được $1 - 3x^2 \leq 1$ nên $(x^2 + y^2 - 1)^2 \leq 1$.

Do vậy ta được $-1 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 1$ hay $0 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ nên $0 \leq A \leq 2$.

Ta có $A \geq 0$ nên giá trị nhỏ nhất của A là 0, đạt được tại $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$.

Ta có $A \leq 2$ nên giá trị lớn nhất của A là 2, đạt được tại $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$

Bài 33. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

Lời giải

Để ý rằng ta có $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ nên suy ra $x^2 - 2x + 3 \geq 2$ với mọi số thực x .

Ta lại có $y^2 + 6y + 9 = (y+3)^2 \geq 0$ nên suy ra $y^2 + 6y + 12 \geq 3$ với mọi số thực y . Biến đổi biểu thức B ta được

$$\begin{aligned}B &= xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2049 \\&= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 36 + 2013 \\&= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) + 2013 \\&= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009\end{aligned}$$

Kết hợp với kết quả trên ta được $B \geq 2 \cdot 3 + 2013 = 2019$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1; y = -3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là 2019, đạt được tại $x = 1; y = -3$.

Bài 34. Cho x, y, z là các số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng:

$$A = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \text{ chia hết cho } B = 5(x-y)(y-z)(z-x)$$

• **Định hướng tư duy.** Để chứng minh được A chia hết cho B ta cần biến đổi biểu thức A về dạng kB . Chú ý rằng bài toán cho các nhị thức bậc 5 nên ta có thể sử dụng nhị thức Newton để khai triển. Lại thấy $z - x = -(x - y + y - z)$ nên để giảm bớt đi sự phức tạp ta có thể đổi biến $a = x - y; b = y - z$.

Lời giải

Đặt $a = x - y; b = y - z$ khi đó ta được $z - x = -(a + b)$.

Bài toán quy về chứng minh $(a + b)^5 - a^5 - b^5$ chia hết cho $5ab(a + b)$. Ta có

$$\begin{aligned}(a + b)^5 - a^5 - b^5 &= 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 = 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) \\ &= 5ab[(a^3 + b^3) + (2a^2b + 2ab^2)] = 5ab[(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a + b)] \\ &= 5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

Để thấy $5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2) : 5ab(a + b)$.

Do đó $(a + b)^5 - a^5 - b^5$ chia hết cho $5ab(a + b)$.

Vậy ta được $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ chia hết cho $5(x - y)(y - z)(z - x)$.

Bài 35. Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

• **Định hướng tư duy.** Để chứng minh dãy số trên là dãy số chính phương ta cần chứng minh số tổng quát của dãy là số chính phương. Muốn vậy ta phân tích số đó thành bình phương của một số tự nhiên khác. Chú ý đến biến đổi $\underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ c/s } 9} = 10^n - 1$. Ta chuyển số tổng

quát trên về dạng lũy thừa của 10 rồi sử dụng hằng đẳng thức để phân tích bình phương.

Lời giải

Xét số hạng tổng quát của dãy số trên là $A = \underbrace{444 \dots 4}_{n \text{ c/s } 4} \underbrace{888 \dots 8}_{n-1 \text{ c/s } 8} 9$. Ta có

$$\begin{aligned}
A &= \underbrace{444\dots4}_{n \text{ c/s } 4} \underbrace{888\dots8}_{n-1 \text{ c/s } 8} 9 = \underbrace{444\dots4}_{n \text{ c/s } 4} \cdot 10^n + \underbrace{888\dots88}_{n \text{ c/s } 8} + 1 = 4 \cdot \underbrace{111\dots1}_{n \text{ c/s } 1} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{111\dots1}_{n \text{ c/s } 8} + 1 \\
&= \frac{1}{9} \left(4 \cdot \underbrace{999\dots9}_{n \text{ c/s } 9} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{999\dots9}_{n \text{ c/s } 8} + 9 \right) = \frac{1}{9} \left[4(10^n - 1) \cdot 10^n + 8(10^n - 1) + 9 \right] \\
&= \frac{1}{9} (4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1) = \frac{1}{9} (2 \cdot 10^n + 1)^2 = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2
\end{aligned}$$

Để thấy rằng $2 \cdot 10^n + 1 \vdots 3$ nên ta có $\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}$ là một số tự nhiên. Do vậy ta được A là một số chính phương. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 36. Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)$ với n là số tự nhiên khác 0. Chứng minh rằng $4S+1$ là số chính phương.

- **Định hướng tư duy.** Trước hết ta tính được $S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Như vậy để $4S+1$ là số chính phương ta cần phân tích được $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ về dạng bình phương của một tổng.

Lời giải

Từ $S = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)$ ta có

$$\begin{aligned}
4S &= 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + n(n+1)(n+2)[(n+3)-(n-1)] \\
&= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - \dots + n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) \\
&= n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}
4S+1 &= n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\
&= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2
\end{aligned}$$

Vậy $4S+1$ là số chính phương.

Bài 37. Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 4a \Leftrightarrow (a - b + 1)^2 = 4a$

là số chính phương suy ra a là số chính phương $a = x^2$ (x là số nguyên).

Khi đó ta được $(x^2 - b + 1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - b + 1 = 2x \Leftrightarrow b = (x - 1)^2$

Vậy a và b là hai số chính phương liên tiếp

Bài 38. Cho p, q, r, s là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $p^2 - q^2 + r^2 - s^2$ chia hết cho 24.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh với p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

Thật vậy, ta có $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp. Suy ra ta được $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 8.

Mặt khác ta lại có $(p - 1)p(p + 1)$ chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 3.

Đề ý là $(3; 8) = 1$ nên ta được $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 24.

Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được $q^2 - 1; r^2 - 1; s^2 - 1$ cũng chia hết cho 24.

Ta có $p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) + (r^2 - 1) - (s^2 - 1)$.

Do đó ta được $p^2 - q^2 + r^2 - s^2$ chia hết cho 24.

Bài 39. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ sao cho $p^2 - 2q^2 = 1$.

Lời giải

Từ $p^2 - 2q^2 = 1$ ta được $p^2 = 2q^2 + 1$. Do đó ta suy ra được p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt $p = 2k + 1$ với k là số nguyên dương.

Khi đó ta được $(2k + 1)^2 = 2q^2 + 1 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 2q^2 + 1 \Leftrightarrow 2k(k + 1) = q^2$

Do đó q^2 là số chẵn nên q là số chẵn. Mà q là số nguyên tố nên $q = 2$.

Thay vào $p^2 - 2q^2 = 1$ ta suy ra được $p = 3$.

Vậy cặp số nguyên tố $(p; q) = (3; 2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 40. Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng số đó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abcd}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$. Theo bài ra ta có $\overline{abcd} = (a + b + c + d)^3$.

Ta có nhận xét. Một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó khi chia cho 9 có cùng số dư.

Đặt $m = a + b + c + d$ ($m \in \mathbb{N}^*$), khi đó $\overline{abcd}$ và m có cùng số dư khi chia cho 9.

Từ đó ta được $\overline{abcd} - m : 9$ hay ta được $\overline{abcd} - m = 9k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Mà ta có $\overline{abcd} = (a + b + c + d)^3$ nên ta được $m^3 - m = 9k \Leftrightarrow (m - 1)m(m + 1) = 9k$

Do đó $(m - 1)m(m + 1) : 9$. Ta biết rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp có duy nhất một số chia hết cho 3 mà tích của chúng chia hết cho 9 nên trong ba số đó có duy nhất một số chia hết cho 9.

Ta có $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 1000 \leq m^3 \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq m \leq 21$

Do đó ta được $9 \leq m - 1 \leq 20; 11 \leq m + 1 \leq 22$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1. Nếu $m : 9$, khi đó $m = 18$. Do đó ta được $\overline{abcd} = 18^3 = 5832$.

Thử lại ta thấy $5832 = (5 + 8 + 3 + 2)^3$ đúng.

- Trường hợp 2. Nếu $m + 1 : 9$, khi đó $m + 1 = 18$ nên $m = 17$.

Do đó ta được $\overline{abcd} = 17^3 = 4913$. Thử lại ta thấy $4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3$ đúng.

- Trường hợp 3. Nếu $m - 1 : 9$, khi đó $m - 1 = 18$ nên $m = 19$.

Do đó ta được $\overline{abcd} = 19^3 = 6859$. Thử lại ta thấy $6859 = (6 + 8 + 5 + 9)^3$ không đúng.

Do đó trường hợp này loại.

Vậy các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 5832 và 4913.

Bài 41. Tìm số chính phương có bốn chữ số khác nhau sao cho khi viết số đó theo thứ tự ngược lại ta được một số có bốn chữ số cũng là số chính phương và chia hết cho số ban đầu.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd} = x^2$ với a, b, c, d là các chữ số và x là một số tự nhiên. Số viết theo chiều ngược lại là $\overline{dcba} = y^2$ với y là một số tự nhiên. Vì cả hai số đều có bốn chữ số nên ta suy ra được $a > 0; d > 0$.

Theo bài ra ta có $y^2 = kx^2$ với k là một số tự nhiên lớn hơn 1.

Vì a, d là các chữ số tận cùng của số chính phương nên $a, d \in \{1; 4; 5; 6; 9\} (*)$.

Mặt khác do $k \geq 2$ và $\overline{dcba} = y^2$ có bốn chữ số nên $a = 1$ hoặc $a = 4$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1. Với $a = 1$, khi đó ta được $\overline{dcba} = k \cdot \overline{1bcd}$. Từ đó suy ra cả d và k đều là số lẻ. kết hợp với (*) ta suy ra được $d = 9$ và $k = 9$.

Do đó ta có $\overline{9cb1} = 9 \cdot \overline{1bc9}$ nên $c = 89b + 8 \Rightarrow b = 0; c = 8$.

Do đó số cần tìm là $\overline{abcd} = 1089 = 33^2$ và $\overline{dcba} = 9801 = 99^2; 9801 = 9 \cdot 1089$.

- Trường hợp 2. Với $a = 4$, khi đó ta được $\overline{dcba} = k \cdot \overline{4bcd}$. Nhận thấy không tồn tại chữ số tận cùng d thỏa mãn (*) và đẳng thức $\overline{dcba} = k \cdot \overline{4bcd}$. Vậy trường hợp này không có số nào thỏa mãn.

Kết luận số cần tìm là 1089.

Bài 42. Chia 18 vật có khối lượng $2016^2; 2015^2; 2014^2; \dots; 1999^2$ (gam) thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau (không được chia nhỏ các vật đó).

Lời giải

Ta xó nhận xét

$$n^2 + (n+5)^2 = 2n^2 + 10n + 25 = X + 25$$

$$(n+1)^2 + (n+4)^2 = 2n^2 + 10n + 17 = X + 17$$

$$(n+2)^2 + (n+3)^2 = 2n^2 + 10n + 13 = X + 13$$

Lần thứ nhất chia 6 vật có khối lượng $1999^2, 2000^2, 2001^2, 2002^2, 2003^2, 2004^2$ thành ba phần như sau

$$1999^2 + 2004^2 = 1999^2 + (1999+5)^2 = 2 \cdot 1999^2 + 10 \cdot 1999 + 25 = A + 25$$

$$2000^2 + 2003^2 = (1999+1)^2 + (1999+4)^2 = 2 \cdot 1999^2 + 10 \cdot 1999 + 9 = A + 17$$

$$2001^2 + 2002^2 = (1999+2)^2 + (1999+3)^2 = 2 \cdot 1999^2 + 10 \cdot 1999 + 13 = A + 13$$

Lần thứ hai chia 6 vật có khối lượng $2005^2, 2006^2, 2007^2, 2008^2, 2009^2, 2010^2$ thành ba phần gồm

$$2005^2 + 2010^2 = 2005^2 + (2005 + 5)^2 = 2.2005^2 + 10.2005 + 25 = B + 25$$

$$2006^2 + 2009^2 = (2005 + 1)^2 + (2005 + 4)^2 = 2.2005^2 + 10.2005 + 17 = B + 17$$

$$2007^2 + 2008^2 = (2005 + 2)^2 + (2005 + 3)^2 = 2.2005^2 + 10.2005 + 13 = B + 13$$

Lần thứ ba, chia 6 vật có khối lượng $2011^2, 2012^2, 2013^2, 2014, 2015, 2016^2$ thành ba phần như sau

$$2011^2 + 2016^2 = 2011^2 + (2011 + 5)^2 = 2.2011^2 + 10.2011 + 25 = C + 25$$

$$2012^2 + 2015^2 = (2011 + 1)^2 + (2011 + 4)^2 = 2.2011^2 + 10.2011 + 17 = C + 17$$

$$2013^2 + 2014^2 = (2011 + 2)^2 + (2011 + 3)^2 = 2.2011^2 + 10.2011 + 13 = C + 13$$

Nhận thấy

$$A + 25 + B + 17 + C + 13 = A + 17 + B + 13 + C + 25 = A + 13 + B + 25 + C + 17 = A + B + C + 55$$

Do đó ta chia theo ba nhóm gồm

$$+ \text{Nhóm 1: } A + 25 + B + 17 + C + 13 = 1999^2 + 2004^2 + 2006^2 + 2009^2 + 2013^2 + 2014^2$$

$$+ \text{Nhóm 2: } A + 17 + B + 13 + C + 25 = 2000^2 + 2003^2 + 2007^2 + 2008^2 + 2011^2 + 2016^2$$

$$+ \text{Nhóm 3: } A + 13 + B + 25 + C + 17 = 2001^2 + 2002^2 + 2005^2 + 2010^2 + 2012^2 + 2015^2$$

Khi đó khối lượng của mỗi nhóm đều bằng $A + B + C + 55$ gam.

Bài 43. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và n là số tự nhiên khác 0. Chứng minh rằng p^n không thể là tổng của hai lập phương của hai số nguyên dương khác nhau.

Lời giải

Giả sử n là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho p^n là tổng của hai lập phương của hai số nguyên dương khác nhau. Tức là ta có $p^n = a^3 + b^3$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó ta được $p^n = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Do p là số nguyên tố nên từ $p^n = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ta được $\begin{cases} a + b = p^k \\ a^2 - ab + b^2 = p^{n-k} \end{cases}$.

Để thấy $a + b > 2$ nên $k > 0$. Lại thấy $a^2 - ab + b^2 \geq ab > 1$, do đó ta được $n - k > 0$

hay $n > k$. Lại có $3ab = (a + b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = p^{2k} - p^{n-k}$, do đó ta được $3ab$ chia

hết cho p . Do p là số nguyên tố nên a chia hết cho p hoặc b chia hết cho p . Mà ta lại

có $a + b = p^k$ nên ta được a và b cùng chia hết cho p . Đặt $a = a_1p; b = b_1p$ với

$a_1, b_1 \in \mathbb{N}^*$, khi đó từ $p^n = a^3 + b^3$ ta được $p^{n-3} = a_1^3 + b_1^3$, điều này trái với giả sử n là số tự nhiên bé nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy không thỏa mãn số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = 3^{24} - (27^4 + 1)(9^6 - 1)$

b) $B = 85^2 + 75^2 + 65^2 + 55^2 - 45^2 - 35^2 - 25^2 - 15^2$

Bài 2. So sánh các số sau.

a) $A = 2018.2020 + 2019.2021$ và $B = 2019^2 + 2020^2 - 2$

b) $A = 10.(9^2 + 1)(9^4 + 1)(9^8 + 1)(9^{16} + 1)(9^{32} + 1)$ và $B = 9^{64} - 1$

c) $A = \frac{x-y}{x+y}$ và $B = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy + y^2}$ với $x > y > 0$

d) $A = \frac{(x+y)^3}{x^2 - y^2}$ và $B = \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$ với $x > y > 0$.

Bài 3. Cho $a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(ab - cd)(c + d)$

Bài 4. Cho $a + b + c = 4m$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+a-b}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4m^2$$

Bài 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 4$ và $x^8 + x^4y^4 + y^8 = 8$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^{12} + x^2y^2 + y^{12}$.

Bài 6. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = 1$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 3x^2 - 2x + 3y^2 - 2y + 6xy - 100$

b) $B = x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 + 3xy(x + y) - 4xy + 3(x + y) + 10$

c) $C = x^3 + y^3 + 3xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2(x + y)$

Bài 7. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = m$. Tính giá trị của biểu thức sau theo m .

$$A = (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2$$

Bài 8. Đơn giản biểu thức sau: $A = (x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3$.

Bài 9. Cho $x + y = a$; $xy = b$ ($a^2 \geq 4b$). Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $x^2 + y^2$

b) $x^3 + y^3$

c) $x^4 + y^4$

d) $x^5 + y^5$

Bài 10. Chứng minh các hằng đẳng thức :

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

b) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Bài 11. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Bài 12. Cho $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$B = (x - 1)^{2018} + y^{2019} + (z + 1)^{2020}$$

Bài 13. Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh rằng $(5a - 3b + 8c)(5a - 3b - 8c) = (3a - 5b)^2$.

Bài 14. Cho các biểu thức sau

$$A = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$$

$$B = (x + y - 2z)^2 + (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2$$

Chứng minh rằng $A = B$ khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 15. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$5(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 6(x^5 + y^5 + z^5)$$

Bài 16. Chứng minh các hằng đẳng thức sau :

a) $(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$

b) $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

Bài 17. Cho các số a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$.

Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$

Bài 18. Cho $x+y=3$ và $x^2+y^2=5$. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) x^3+y^3 b) x^4+y^4 c) x^5+y^5 d) x^6+y^6 e) $x^{2019}+y^{2019}$

Bài 19. Cho $a+b+c=0$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

$$A = \frac{1}{a^2+b^2-c^2} + \frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2}$$

Bài 20. Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính giá trị

của biểu thức $A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

Bài 21. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=9$ và $a^2+b^2+c^2=53$. Tính giá trị của $A=ab+bc+ca$.

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=7$ và $ab+bc+ca=9$. Tính $a^2+b^2+c^2$

Bài 23. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn:

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \text{ và } ab+bc+ca=9$$

Tính $a^2+b^2+c^2$ và $(a+b+c)^2$

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a+b+c=1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính

giá trị biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$.

Bài 25. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a+b+c=abc$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$.

Tính giá trị $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài 26. Cho các số thực a, b, c và x, y, z khác 0 thỏa mãn các hệ thức $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0. \text{ Tính giá trị của } A = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Bài 27. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca=0$. Tính giá trị biểu thức $A=(a-1)^{2018}+b^{2019}+c^{2020}$.

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + 2b + 3c = 0$ và $2ab + 6bc + 3ca = 0$.

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{(a-1)^{2018} - (1-b)^{2019} + (3b-1)^{2020}}{(a+1)^{2018} + 2(b-c)^{2019} + c^{2020}}$.

Bài 29. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính giá trị của biểu

thức $A = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$.

Bài 30. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Chứng

minh rằng $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$.

Bài 31. Cho các số thực a và b thỏa mãn $a^3 - 3ab^2 = 10$ và $b^3 - 3a^2b = 5$. Tính $M = a^2 + b^2$.

Bài 32. Cho $x^2 + y^2 = 2$ và biểu thức $M = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2x^2y^2$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến số x và y

Bài 33. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$.

Bài 34. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2.$$

Bài 35. Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$.

Bài 36. Cho $10a^2 = 10b^2 + c^2$. Chứng minh rằng:

$$(7a - 3b - 2c)(7a - 3b + 2c) = (3a - 7b)^2$$

Bài 37. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 0$.

Bài 38. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 210$. Tính giá trị của biểu thức $A = |a-b| + |b-c| + |c-a|$.

Bài 39. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = a + 2b + 3c = 14$. Tính giá trị của biểu thức $T = abc$.

Bài 40. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$

Bài 41. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $b \neq c; a + b \neq c$ và $a^2 + b^2 = (a + b - c)^2$.

Chứng minh rằng
$$\frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{a - c}{b - c}.$$

Bài 42. Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn các điều kiện

$$x^3 = 3x - 1; y^3 = 3y - 1; z^3 = 3z - 1$$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Bài 43. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $ax + by = c; bx + cy = a; cx + ay = b$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài 44. Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$

a) Chứng minh rằng $a + b = -3$

b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = -45$

Bài 45. Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 = -4ab$.

Chứng minh rằng $\sqrt{1 + ab}$ là số hữu tỉ

Bài 46. Tìm tích $M = \frac{1^4 + 4}{3^4 + 4} \cdot \frac{5^4 + 4}{7^4 + 4} \cdot \frac{9^4 + 4}{11^4 + 4} \cdots \frac{17^4 + 4}{19^4 + 4}$

Bài 47. Cho $a > b > 0$

a) Biết $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính $P = \frac{a - b}{a + b}$

b) $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. Tính $Q = \frac{a + b}{a - b}$.

Bài 48. Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:

$$A = \underbrace{111 \dots 1}_{2n \text{ c/s } 1} + \underbrace{444 \dots 4}_{n \text{ c/s } 4} + 1$$

$$B = \underbrace{111 \dots 1}_{2n \text{ c/s } 1} + \underbrace{111 \dots 1}_{n+1 \text{ c/s } 1} + \underbrace{666 \dots 6}_{n \text{ c/s } 6} + 8$$

$$C = \underbrace{444 \dots 4}_{2n \text{ c/s } 4} + \underbrace{222 \dots 2}_{n+1 \text{ c/s } 2} + \underbrace{888 \dots 8}_{n \text{ c/s } 8} + 7$$

Bài 49. Cho a, m, n là các số nguyên dương với $a \neq 1$. Chứng minh rằng $(a^m - 1)$

chia hết cho $(a^n - 1)$ khi và chỉ khi m chia hết cho n .

Bài 50. Chữ số hàng đơn vị trong hệ thập phân của số $M = a^2 + ab + b^2$ (với a, b là các số tự nhiên khác 0) là 0

- a) Chứng minh M chia hết cho 20. b) Tìm chữ số hàng chục của M .

Bài 51. Cho hai số nguyên dương x, y với $x > 1$ thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 1 = y^{15}$.

Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

Bài 52. Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.

Chứng minh rằng các số $ab; bc; ca$ và $ab + bc + ca$ là các số chính phương.

Bài 53. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 54. Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ thỏa mãn điều kiện $\overline{abcd} + 72$ là một số chính phương và $\overline{abd} = (b + d - 2a)^2$

Bài 55. Tìm các chữ số a, b, c, d thỏa mãn $\overline{aa...abb...bcc...c} + 1 = (\overline{dd...d} + 1)^3$, biết rằng số lần xuất hiện của a, b, c, d trong các biểu thức trên là như nhau.

Bài 56. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$1019a^2 + 18b^4 + 1007c^2 \geq 30ab^2 + 6b^2c + 2008ca$$

Bài 57. Cho a, b là các số thực dương, tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{k}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16 + 4k}{(a + b)^3}$$

Bài 58. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} + \frac{9(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 33$$

Bài 59. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 + (c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 \leq 28(a^4 + b^4 + c^4)$$

Bài 60. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

- a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
b) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

Bài 61. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2$$

Bài 62. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z + 15$.

Ta có $A = x^2 - 2x + 1 + 4y^2 + 8y + 4 + z^2 - 6z + 9 + 1 = (x-1)^2 + (2y+2)^2 + (z-3)^2 + 1 \geq 1$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 1, đạt được tại $x = 1; y = -1; z = 3$.

Bài 63. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $A = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4x + 4y + 8z + 22$

b) $B = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2x - 12y - 12z + 1994$

Bài 64. Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức $|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = 3^{24} - (27^4 + 1)(9^6 - 1) = 3^{24} - (3^{12} + 1)(3^{12} - 1) = 3^{24} - (3^{24} - 1) = 1$

b)

$$\begin{aligned} B &= 85^2 + 75^2 + 65^2 + 55^2 - 45^2 - 35^2 - 25^2 - 15^2 \\ &= 85^2 - 45^2 + 75^2 - 35^2 + 65^2 - 25^2 + 55^2 - 15^2 \\ &= (85 + 45)(85 - 45) + (75 + 35)(75 - 35) + (65 + 25)(65 - 25) + (55 + 15)(55 - 15) \\ &= 130.40 + 110.40 + 90.40 + 70.40 = 40(130 + 110 + 90 + 70) = 40.400 = 16000 \end{aligned}$$

Bài 2. So sánh các số sau.

a) $A = 2018.2020 + 2019.2021$ và $B = 2019^2 + 2020^2 - 2$

Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ dạng $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ta có

$$\begin{aligned} B &= 2019^2 - 1 + 2020^2 - 1 = (2019 - 1)(2019 + 1) + (2020 - 1)(2020 + 1) \\ &= 2018.2020 + 2019.2021 = A \end{aligned}$$

b) $A = 10.(9^2 + 1)(9^4 + 1)(9^8 + 1)(9^{16} + 1)(9^{32} + 1)$ và $B = 9^{64} - 1$

Ta có $A = (9 + 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1)(9^8 + 1)(9^{16} + 1)(9^{32} + 1)$

Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ dạng $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ta có

$$\begin{aligned}
8A &= (9-1)(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)(9^{16}+1)(9^{32}+1) \\
&= (9^2-1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)(9^{16}+1)(9^{32}+1) \\
&= (9^4-1)(9^4+1)(9^8+1)(9^{16}+1)(9^{32}+1) \\
&= (9^8-1)(9^8+1)(9^{16}+1)(9^{32}+1) \\
&= (9^{16}-1)(9^{16}+1)(9^{32}+1) = (9^{32}-1)(9^{32}+1) = 9^{64}-1 = B
\end{aligned}$$

Do vậy ta được $8A = B$.

c) $A = \frac{x-y}{x+y}$ và $B = \frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$ với $x > y > 0$

Do $x > y > 0$ nên ta có $A = \frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

Do $x > y > 0$ nên $x^2-y^2 > 0$ và $x^2+2xy+y^2 > x^2+xy+y^2$.

Do đó ta được $A < B$.

d) $A = \frac{(x+y)^3}{x^2-y^2}$ và $B = \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$ với $x > y > 0$.

Do $x > y > 0$ nên ta có $x-y > 0$ và $x^2-y^2 > 0$.

Ta có $A = \frac{(x+y)^3}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)(x^2+2xy+y^2)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x-y}$

Do $x > y > 0$ nên suy ra $x^2+2xy+y^2 > x^2-xy+y^2 > 0$ nên suy ra $A > B$.

Bài 3. Từ $a+b+c+d=0$ ta được $a+b=-(c+d)$ hay ta được

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= -(c+d)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = -(c^3+d^3+3c^2d+3cd^2) \\
&\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+d^3 = -3ab(a+b) - 3cd(c+d) \\
&\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+d^3 = 3ab(c+d) - 3cd(c+d) \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+d^3 = 3(ab-cd)(c+d)
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Bài 4. Ta có

$$\begin{aligned}
(a+b-c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca \\
(b+c-a)^2 &= a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca \\
(c+a-b)^2 &= a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca \\
(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca
\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left[3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \right]$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{4}(a+b+c)^2 = \frac{1}{4} \left[3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \right]$$

Vậy ta được $\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+a-b}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4m^2$

Bài 5. Ta có $(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = (x^4 + y^4)^2 - (x^2y^2)^2 = x^8 + x^4y^4 + y^8 = 8$.

Do đó suy ra $x^4 - x^2y^2 + y^4 = 2$. Kết hợp với $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 4$ ta được $x^4 + y^4 = 3$

và $x^2y^2 = 1$. Từ đó ta có

$$A = x^{12} + x^2y^2 + y^{12} = (x^4)^3 + (y^4)^3 + x^2y^2 = (x^4 + y^4)(x^8 + y^8 - x^4y^4) + x^2y^2$$

$$= 3 \left[(x^4 + y^4)^2 - 3x^4y^4 \right] + x^2y^2 = 3(3^2 - 3 \cdot 1) + 1 = 18 + 1 = 19$$

Bài 6. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = 1$. Tính giá trị các biểu thức.

a) Ta có $A = 3x^2 - 2x + 3y^2 - 2y + 6xy - 100 = 3(x+y)^2 - 2(x+y) - 100 = -99$

b) Ta có

$$B = x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 + 3xy(x+y) - 4xy + 3(x+y) + 10$$

$$= (x+y)^3 - 2(x+y)^2 + 3(x+y) + 10 = 12$$

c) Ta có

$$C = x^3 + y^3 + 3xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2(x+y)$$

$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 3xy \left[(x+y)^2 - 2xy \right] + 6x^2y^2$$

$$= 1 - 3xy + 3xy - 6x^2y^2 + 6x^2y^2 = 1$$

Bài 7. Ta có $A = (2a+2b+2c-3c)^2 + (2a+2b+2c-3a)^2 + (2a+2b+2c-3b)^2$

Đặt $x = a+b+c$ khi đó ta có

$$A = (2x-3c)^2 + (2x-3a)^2 + (2x-3b)^2$$

$$= 4x^3 - 12xc + 9c^2 + 4x^3 - 12xa + 9a^2 + 4x^3 - 12xb + 9b^2$$

$$= 12x^3 - 12x(a+b+c) + 9(a^2 + b^2 + c^2) = 9(a^2 + b^2 + c^2) = 9m$$

Bài 8. Đặt $a = x+y-z; b = y+z-x; c = z+x-y$. Khi đó ta có $a+b+c = x+y+z$. Do

đó $A = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a) = 24xyz$

Bài 9. Cho $x + y = a; xy = b$ ($a^2 \geq 4b$). Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$

b) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab$

c) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$

d) $x^5 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x + y) = a^5 - 5a^3b + 5ab^2$

Bài 10.

a) Biến đổi vế trái của đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2) + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc \\ &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) = (a + b + c) \left[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 \right] - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c) \left[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab \right] = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

b) Biến đổi vế trái của đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= (a + b + c - a) \left[(a + b + c)^2 + (a + b + c)a + a^2 \right] - (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\ &= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) = 3(a + b)(b + c)(c + a) \end{aligned}$$

Bài 11.

+ Lời giải 1. Từ $x + y + z = 0$ ta được $x + y = -z$. Do đó sử dụng nhị thức Newton ta có biến đổi

$$\begin{aligned} (x + y)^5 &= -z^5 \Leftrightarrow x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = -z^5 \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + 5xy(x^3 + y^3) + 10x^2y^2(x + y) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + 5xy \left[(x + y)(x^2 + y^2 - xy) \right] - 10x^2y^2z &= 0 \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz(x^2 + y^2 - xy) - 10x^2y^2z &= 0 \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz(x^2 + y^2 + xy) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) - 5xyz \left[2(x^2 + y^2) + 2xy \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) - 5xyz \left[x^2 + y^2 + (x + y)^2 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) - 5xyz(x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) &= 5xyz(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

+ Lời giải 2. Ta có các hằng đẳng thức quen thuộc

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\(x + y + z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)\end{aligned}$$

Từ $x + y + z = 0$ ta được $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = -(xy + yz + zx)$. Ta có

$$\begin{aligned}(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) &= 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + x^2y^2(x + y) + y^2z^2(y + z) + z^2x^2(z + x) &= 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy + yz + zx) &= 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + xyz \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} &= 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) &= 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)\end{aligned}$$

Bài 12. Từ $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$ ta được

$$(x + y + z)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Do đó ta được $B = (0 - 1)^{2018} + 0^{2019} + (0 + 1)^{2020} = 2$

Bài 13. Biến đổi vế trái của biểu thức kết hợp với giả thiết của bài toán ta được

$$\begin{aligned}(5a - 3b + 8c)(5a - 3b - 8c) &= (5a - 3b)^2 - (8c)^2 = (5a - 3b)^2 - 16(2c)^2 \\ &= (5a - 3b)^2 - 16(a^2 - b^2) = 25a^2 - 30ab + 9b^2 - 16a^2 + 16b^2 \\ &= 9a^2 - 30ab + 25b^2 = (3a - 5b)^2\end{aligned}$$

Vậy ta được $(5a - 3b + 8c)(5a - 3b - 8c) = (3a - 5b)^2$.

Bài 14. Dễ thấy rằng nếu $x = y = z$ thì $A = B = 0$.

Như vậy ta cần chứng minh nếu $x = y = z$ thì ta có. Thật vậy, xét hiệu

$$B - A = (x + y - 2z)^2 + (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 - (x - y)^2 - (y - z)^2 - (z - x)^2$$

Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ có dạng $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ta có

$$\begin{aligned}(x + y - 2z)^2 - (x - y)^2 &= (2x - 2z)(2y - 2z) = 4(x - z)(y - z) \\ (y + z - 2x)^2 - (y - z)^2 &= (2y - 2x)(2z - 2x) = 4(y - x)(z - x) \\ (z + x - 2y)^2 - (z - x)^2 &= (2z - 2y)(2x - 2y) = 4(z - y)(x - y)\end{aligned}$$

Như vậy ta được $B - A = 4[(x - z)(y - z) + (y - z)(z - x) + (z - x)(x - y)]$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} & (x-z)(y-z) + (y-x)(z-x) + (z-y)(x-y) \\ &= xy - zx - zy + z^2 + yz - zx - xy + x^2 + zx - xy - yz + y^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \right] \end{aligned}$$

Do vậy $B - A = 2 \left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \right]$. Mà ta có $A = B$ nên $B - A = 0$.

Suy ra $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$ nên ta suy ra được $x = y = z$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 15. Do $a + b + c = 0$ nên ta dễ dàng chứng minh được $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Do đó suy ra $5(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 15xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Cũng từ $x + y + z = 0$ ta được $x + y = -z$. Do đó sử dụng nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} & (x+y)^5 = -z^5 \Leftrightarrow x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = -z^5 \\ & \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + 5xy \left[(x+y)(x^2 + y^2 - xy) \right] - 10x^2y^2z = 0 \\ & \Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz(x^2 + y^2 - xy) - 10x^2y^2z = 0 \\ & \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) - 5xyz \left[2(x^2 + y^2) + 2xy \right] = 0 \\ & \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) - 5xyz(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

Như vậy ta được $6(x^5 + y^5 + z^5) = 15xyz(x^2 + y^2 + z^2)$.

Kết hợp hai kết quả trên ta được đẳng thức được chứng minh.

Bài 16.

a) Ta có

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \\ & (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Do vậy $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + (x + y)^4 &= x^4 + y^4 + x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\&= 2(x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3) = 2(x^2 + xy + y^2)^2\end{aligned}$$

Do vậy ta được $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

Bài 17. Biến đổi giả thiết của bài toán ta được

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + (a + b)^2 &= c^2 + d^2 + (c + d)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + d^2 + c^2 + 2cd + d^2 \\&\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + ab) = 2(c^2 + d^2 + cd) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd\end{aligned}$$

Tương tự như bài toán trên ta chứng minh được

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2 \text{ và } c^4 + d^4 + (c + d)^4 = 2(c^2 + cd + d^2)^2$$

Do vậy ta được $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$

Bài 18. Ta có $x + y = 1 + 2$ và $x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2$.

Từ đó ta chứng minh được $x^n + y^n = 1^n + 2^n$. Do vậy ta được

$$\text{a) } x^3 + y^3 = 1^3 + 2^3 = 9$$

$$\text{b) } x^4 + y^4 = 1^4 + 2^4 = 17$$

$$\text{c) } x^5 + y^5 = 1^5 + 2^5 = 33$$

$$\text{d) } x^6 + y^6 = 1^6 + 2^6 = 65$$

$$\text{e) } x^{2019} + y^{2019} = 1^{2019} + 2^{2019} = 1 + 2^{2019}$$

Bài 19. Do $a + b + c = 0$ nên ta có $a + b = -c$ suy ra $a^2 + b^2 + 2ab = c^2$.

Từ đó ta được $a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$. Nên $\frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{-2ab} = -\frac{c}{2abc}$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} = -\frac{a + b + c}{2abc} = 0$$

Bài 20. Biến đổi giả thiết của bài toán ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] = 0$$

Do đó ta được $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$.

+ Nếu $a+b+c=0$ thì ta được $a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b$. Khi đó $P=-1$.

+ Nếu $a=b=c$ thì ta được $P=8$.

Bài 21. Ta có $a+b+c=9$ nên $(a+b+c)^2=81$ hay $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=81$.

Mà ta có $a^2+b^2+c^2=53$ nên suy ra $ab+bc+ca=14$.

Bài 22. Ta có $a+b+c=7$ nên $(a+b+c)^2=49$ hay $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=49$.

Mà ta có $ab+bc+ca=9$ nên ta được $a^2+b^2+c^2=31$.

Bài 23.

Từ $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ ta được $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$

Mà ta có $ab+bc+ca=9$ nên suy ra $a^2+b^2+c^2=19$.

Cũng từ $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$ ta được $(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca)=36$.

Bài 24. Do $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ nên ta được $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$ hay $ab+bc+ca=0$.

Từ $a+b+c=1$ ta được $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$ hay $A=a^2+b^2+c^2=1$.

Bài 25. Từ $a+b+c=abc$ ta được $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$.

Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ ta được $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=4$.

Do đó suy ra $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$

Bài 26. Đặt $m=\frac{x}{a}; n=\frac{y}{b}; p=\frac{z}{c}$. Khi đó ta có giả thiết $m+n+p=1$ và $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=0$.

Và biểu thức cần tính giá trị là $A=m^2+n^2+p^2$.

Từ $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=0$ ta được $mn+np+pm=0$.

Khi đó $A=m^2+n^2+p^2=(m+n+p)^2=1$

Bài 27. Từ $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca=0$ ta suy ra được $a=b=c=0$.

Đến đây ta được $A=1$

Bài 28.

Đặt $x = a; y = 2b; z = 3c$. Khi đó giả thiết trở thành $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$.

Tương tự như trên ta suy ra được $x = y = z = 0$ nên suy ra $a = b = c = 0$. Do đó thay

vào biểu thức A được viết $A = \frac{(-1)^{2018} - 1^{2019} + (-1)^{2020}}{1^{2018}} = 1$.

Bài 29. Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết được viết lại thành $x + y + z = 0$. Biểu

thức A được viết lại thành $A = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$.

Từ $x + y + z = 0$ dễ dàng chứng minh được $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Do đó ta được $A = 3$

Bài 30. Từ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ suy ra $ab + bc + ca = 0$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết được viết lại thành $x + y + z = 0$. Từ

$x + y + z = 0$ dễ dàng chứng minh được $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Do vậy ta được $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

Bài 31. Từ $a^3 - 3ab^2 = 10$ ta được $(a^3 - 3ab^2)^2 = 10^2 \Leftrightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 100$

Từ $b^3 - 3a^2b = 5$ ta được $(b^3 - 3a^2b)^2 = 5^2 \Leftrightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 25$.

Từ đó để ý rằng $a^2 + b^2 \geq 0$ ta được

$$\begin{aligned} a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 + b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 &= 125 \\ \Leftrightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 &= 125 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^3 = 125 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5 \end{aligned}$$

Vậy ta được $a^2 + b^2 = 5$.

Bài 32. Ta có

$$\begin{aligned} M &= (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2x^2y^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + y^4 - 2y^2 + 1 + 2x^2y^2 \\ &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 2 = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 2 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến số x và y

Bài 33. Ta có $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$ nên suy ra $x < y$.

Lại có $(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0$ nên suy ra $y < x+2$.

Như vậy ta có $x < y < x+2$. Mà ta có x và y là các số nguyên nên $y = x+1$.

Thay $y = x+1$ vào đẳng thức ban đầu ta được $(x; y) = (-1; 0)$.

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 34. Đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0$$

Đặt $x = a+b-c; y = b+c-a; z = a+c-b$ nên ta được $a = \frac{x+z}{2}; b = \frac{x+y}{2}; c = \frac{y+z}{2}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2}\right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2}\right) x^2 - \frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4}(z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 = 0 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh

Bài 35. Biến đổi giả thiết ta được

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a-b)(4a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 4a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=4b \end{cases}$$

Do $2a > b > 0$ nên $4a = b$ loại. Như vậy $a = b$ thì $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$.

Bài 36. Ta có $(7a-3b-2c)(7a-3b+2c) = (7a-3b)^2 - 4c^2 = 49a^2 - 42ab + 9b^2 - 4c^2$

Vậy ta được $(7a-3b-2c)(7a-3b+2c) = (3a-7b)^2$

Bài 37. Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab; a^2 + c^2 \geq 2ac; b^2 + c^2 \geq 2bc$

Suy ra $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

Mà do $a+b+c=0$ nên ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \Leftrightarrow -a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$$

Do vậy ta được $3ab + 3ac + 3bc \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 0$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 38. Đặt $a - b = x; b - c = y; c - a = z$ nên suy ra $x + y + z = 0$ hay $z = -(x + y)$.

$$\text{Ta có } x^3 + y^3 + z^3 = 210 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x + y)^3 = 210 \Leftrightarrow -3xy(x + y) = 210 \Leftrightarrow xyz = 70$$

Do x, y, z là các số nguyên có tổng bằng 0 và thỏa mãn $xyz = 70 = (-2) \cdot (-5) \cdot 7$ nên

$$\text{ta được } x, y, z \in \{-2; -5; 7\}. \text{ Do vậy } A = |a - b| + |b - c| + |c - a| = |x| + |y| + |z| = 14.$$

$$\text{Bài 39. Ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ a + 2b + 3c = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ 2a + 4b + 6c = 28 \end{cases}. \text{ Suy ra ta được}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 6c = -14 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1; b = 2; c = 3$$

Vậy ta được $T = abc = 6$

$$\text{Bài 40. Từ } a + b + c = 0 \text{ ta được } b + c = -a \Rightarrow (b + c)^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = a^2.$$

Do đó suy ra

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 &= 2bc \Rightarrow (a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4b^2c^2 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \\ &\Rightarrow 2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta được } a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\text{Bài 41. Ta có } a^2 = (a + b - c)^2 - b^2 = (a + b - c + b)(a + b - c - b) = (a + 2b - c)(a - c).$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } b^2 = (2a + b - c)(b - c).$$

$$\text{Do đó } \frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{(a + 2b - c)(a - c) + (a - c)^2}{(2a + b - c)(b - c) + (b - c)^2} = \frac{(2a + 2b - 2c)(a - c)}{(2a + 2b - 2c)(b - c)} = \frac{a - c}{b - c}.$$

Bài 42. Ta có $x^3 = 3x - 1; y^3 = 3y - 1; z^3 = 3z - 1$ nên ta được

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ y^3 - z^3 = 3(y - z) \\ z^3 - x^3 = 3(z - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 3 \\ z^2 + zx + x^2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đến đây ta được } x^2 - z^2 + xy - yz = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y + z) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx) = 9 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 = 9$$

Để ý rằng $x + y + z = 0$ ta được $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Bài 43. Từ $ax + by = c; bx + cy = a; cx + ay = b$ ta được

$$(a + b + c)x + (a + b + c)y = a + b + c \Rightarrow (a + b + c)(x + y - 1) = 0$$

Từ đó ta được $a + b + c = 0$ hoặc $x + y = 1$.

+ Với $a + b + c = 0$ thì ta thu được

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

+ Với $x + y = 1$ ta được $y = 1 - x$. Thay vào giả thiết của bài toán ta được $a = b = c$.

Do vậy ta cũng có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 44.

a) Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$. Khi đó ta được

$$a^2 - b^2 + 3(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) + 3(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 3) = 0$$

Do a và b khác nhau nên từ đẳng thức trên ta được $a + b + 3 = 0$ hay $a + b = -3$

b) Từ $a + b = -3$ ta được $(a + b)^3 = -27$ hay $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -27$.

Từ đó kết hợp với $a + b = -3$ ta được $a^3 + b^3 - 9ab = -27$

Do $a^2 + 3a + b^2 + 3b = 4 \Leftrightarrow (a + b)^2 - 2ab + 3(a + b) = 4 \Leftrightarrow ab = -2$

Do vậy ta được $a^3 + b^3 = -45$

Bài 45. Biến đổi giả thiết của bài toán ta được

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 &= -4ab \Leftrightarrow \left[(a + b)^2 - 2(ab + 1) \right] (a + b)^2 + (1 + ab)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (a + b)^4 - 2(a + b)^2(1 + ab) + (1 + ab)^2 &= 0 \Leftrightarrow \left[(a + b)^2 - (1 + ab) \right]^2 = 0 \\ \Rightarrow (a + b)^2 - (1 + ab) &= 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 = 1 + ab \Leftrightarrow |a + b| = \sqrt{1 + ab} \end{aligned}$$

Do a và b là các số hữu tỉ nên suy ra $\sqrt{1 + ab}$ là số hữu tỉ.

Bài 46. Nhận xét được $n^4 + 4 = \left[(n-1)^2 + 1 \right] \left[(n+1)^2 + 1 \right]$. Do đó ta được

$$M = \frac{1 \cdot (2^2 + 1)}{(2^2 + 1) \cdot (4^2 + 1)} \cdot \frac{(4^2 + 1) \cdot (6^2 + 1)}{(6^2 + 1) \cdot (8^2 + 1)} \cdots \frac{(16^2 + 1) \cdot (18^2 + 1)}{(18^2 + 1) \cdot (20^2 + 1)} = \frac{1}{20^2 + 1} = \frac{1}{401}$$

Bài 47.

a) Xét $P^2 = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{3a^2 + 3b^2 + 6ab} = \frac{10ab - 6ab}{10ab + 6ab} = \frac{1}{4}$.

Mà $P > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$.

b) Tương tự ta xét $E^2 = 9 \Rightarrow E = 3$

Bài 48. Kết quả $A = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2$ $B = \left(\frac{10^n + 8}{3} \right)^2$ $C = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 7}{3} \right)^2$

Bài 49.

- Điều kiện cần. Giả sử $(a^m - 1) : (a^n - 1)$, Do a, m, n là các số nguyên dương với $a \neq 1$ nên suy ra $a^m - 1 \neq 0$.

Do đó từ $(a^m - 1) : (a^n - 1)$ ta suy ra được $(a^m - 1) \geq (a^n - 1)$ nên $m \geq n$.

Đặt $m = qn + r$ với $q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < n$.

Do đó $a^m - 1 = a^{qn+r} - 1 = a^r (a^{qn} - 1) + (a^r - 1)$.

Nhận thấy $(a^m - 1) : (a^n - 1)$ và $(a^{qn} - 1) : (a^n - 1)$ nên ta suy ra được $(a^r - 1) : (a^n - 1)$.

Mà ta có $0 \leq r < n$ nên $0 \leq a^r - 1 < a^n - 1$ nên suy ra $a^r - 1 = 0 \Rightarrow r = 0$.

Vậy ta được $m = qn$ hay m chia hết cho n .

- Điều kiện đủ. Giả sử m chia hết cho n . Khi đó đặt $m = nq$ với q là số tự nhiên.

Ta có $a^m - 1 = a^{nq} - 1 = (a^n)^q - 1 = (a^n - 1) \left[(a^n)^{q-1} + (a^n)^{q-2} + \dots + 1 \right]$

Từ đó suy ra $(a^m - 1) : (a^n - 1)$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 50.

a) Vì chữ số tận cùng của M là 0 nên M chia hết cho 5. Xét các trường hợp sau

+ Cả a và b đều là số lẻ nên a^2 và b^2 đều là số lẻ, suy ra M là số lẻ, trường hợp này không xảy ra

+ Một trong hai số a và b có một số chẵn và một số lẻ, không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lẻ, b là số chẵn. Khi đó a^2 là số lẻ và b^2 là số chẵn nên M là số lẻ, trường hợp này cũng không xảy ra.

Do đó cả hai số a và b đều là số chẵn. Khi đó M chia hết cho 4, từ đó suy ra M chia hết cho 20

$$b) \text{ Ta có } (a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3 : 5 \Rightarrow (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) : 5$$

$$\text{Lại có } a^6 - a^2 = a^2(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) : 5, \text{ tương tự ta có } b^6 - b^2 : 5$$

Do đó ta được $a^2 - b^2 : 5$, từ đó ta được $ab(a - b) : 5$ nên ta có

$$ab(a - b)(a - b) : 5 \Leftrightarrow ab(a^2 - 2ab + b^2) : 5$$

Suy ra $abM : 5$. Từ đó suy ra $ab \cdot 3ab : 5 \Rightarrow ab : 5$

$$\text{Ta có } M = a^2 + ab + b^2 : 5 \Rightarrow bM = ab(a + b) + b^3 : 5 \text{ mà } ab(a + b) : 5 \text{ nên } b^3 : 5 \Rightarrow b : 5$$

$$\text{Suy ra } a^2 = M - b(a + b) : 5 \Rightarrow a^2 : 5 \Rightarrow a : 5 \text{ nên } M : 25$$

Lại có 4 và 25 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $M : 100$ hay chữ số hàng chục của M là 0.

Bài 51. Chú ý rằng $15 = 3 \cdot 5$ và $(3, 5) = 1$, nên ta quy bài toán về chứng minh x chia hết cho 3 và cho 5.

- Chứng minh x chia hết cho 3.

Đặt $y^5 = a$ với a là số nguyên dương. Khi đó ta có $2x^2 - 1 = a^3$ hay

$$2x^2 = (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

$$\text{Gọi } d = (a + 1, a^2 - a + 1), \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a + 1 : d \\ a^2 - a + 1 : d \end{cases}$$

Từ đó ta được $a^2 - a + 1 - (a + 1)(a - 2) : d$ nên $3 : d$, suy ra $d = 1$ hoặc $d = 3$.

$$+ \text{ Nếu } d = 1 \text{ thì từ } 2x^2 = (a + 1)(a^2 - a + 1) \text{ ta được } \begin{cases} a + 1 = 2 \\ a^2 - a + 1 = x^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a + 1 = x^2 \\ a^2 - a + 1 = 2 \end{cases}$$

Để thấy $a^2 - a + 1 = 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$ không có nghiệm nguyên dương.

Do đó ta có $\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases}$, loại vì không thỏa mãn $x > 1$.

+ Nếu $d=3$, khi đó từ $2x^2 = (a+1)(a^2-a+1)$ ta được $2x^2:9$ nên $x^2:9 \Rightarrow x:3$.

- Chứng minh x chia hết cho 5.

Đặt $y^3 = b$, với b là số nguyên dương.

Khi đó ta có $2x^2 - 1 = b^5$ hay $2x^2 = (b+1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$.

Gọi $d = (b+1, b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$. Do đó ta được $\begin{cases} b+1:d \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1:d \end{cases}$

Khi đó $(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) - (b+1)(b^3 - 2b^2 + 3b - 4):d$ nên $5:d$, suy ra $d=1$ hoặc $d=5$.

+ Nếu $d=1$ thì từ $2x^2 = (b+1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$ ta được

$$\begin{cases} b+1=2 \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = x^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b+1=x^2 \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = 2 \end{cases}$$

Dễ thấy $b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = 2 \Leftrightarrow b^4 - b^3 + b^2 - b - 1 = 0$ không có nghiệm nguyên dương

Do đó ta có $\begin{cases} b+1=2 \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ x=1 \end{cases}$, loại vì không thỏa mãn $x > 1$.

+ Nếu $d=5$, khi đó từ $2x^2 = (b+1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$ ta được $2x^2:25$ nên $x:5$.

Vậy ta được $x:15$. Bài toán được chứng minh.

Bài 52.

Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

Hay ta được $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 4(ab + bc + ca)$

Do đó $4(ab + bc + ca)$ là số chính phương, mà 4 là số chính phương nên suy ra

$ab + bc + ca$ là số chính phương.

Cũng từ $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca = 4ab \Leftrightarrow (a + b - c)^2 = 4ab$$

Từ đó suy ra ab là số chính phương.

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $bc; ca$ là các số chính phương.

Vậy các số $ab; bc; ca$ và $ab + bc + ca$ là các số chính phương.

Bài 53. Do p là số nguyên tố nên khi p là số chẵn thì $p = 2$, còn nếu p là số lẻ thì p có các dạng $p = 4k + 1$ hoặc $p = 4k + 3$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1. Nếu $p = 2$ suy ra $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không nguyên
- Trường hợp 2. Nếu $p = 4k + 1$, khi đó ta được $p^3 + \frac{p-1}{2} = (4k+1)^3 + 2k$ là số lẻ nên $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.
- Trường hợp 3. Nếu $p = 4k + 3$. Giả sử $p^3 + \frac{p-1}{2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

Khi đó ta có $p^3 + \frac{p-1}{2} = x(x+1) \Leftrightarrow 2p(2p^2 + 1) = (2x+1)^2 + 1$ với x là số tự nhiên.

Từ đó suy ra $(2x+1)^2 + 1$ vô lý vì $p = 4k + 3$.

Từ các trường hợp trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài 54. Ta có $1 \leq a \leq 9$ và $0 \leq b, c, d \leq 9$. Từ đó suy ra $b + d - 2a \leq 16$.

Mà ta lại có $\overline{abd} = (b + d - 2a)^2$ nên suy ra $10^2 \leq \overline{abd} \leq 16^2$.

Suy ra ta được $\overline{abd} \in \{10^2; 11^2; 12^2; 13^2; 14^2; 15^2; 16^2\}$.

Hay ta được $\overline{abd} \in \{100; 121; 144; 169; 196; 225; 256\}$

Do $\overline{abcd} + 72$ là một số chính phương nên đặt $\overline{abcd} + 72 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Các số chính phương có chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên suy ra

$d \in \{2; 3; 4; 7; 8; 9\}$.

Kết hợp với $\overline{abd} \in \{100; 121; 144; 169; 196; 225; 256\}$ ta suy ra được $\overline{abd} = 144$ hoặc $\overline{abd} = 169$.

+ Với $\overline{abd} = 144$, khi đó ta được $a = 1; b = d = 4$. Mà ta lại thấy $144 \neq (4 + 4 - 2.1)^2$ nên $\overline{abd} = 144$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $\overline{abd} = 169$, khi đó ta được $a = 1; b = 6; d = 9$. Mà ta lại thấy $169 = (6 + 9 - 2.1)^2$ nên $\overline{abd} = 169$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ đó ta được $\overline{16c9} + 72 = k^2$ nên k^2 là số lẻ, do đó k là số lẻ.

Mặt khác ta có $1609 + 72 \leq \overline{16c9} + 72 \leq 1699 + 72$ nên suy ra $41^2 \leq k^2 \leq 43^2$.

Từ đó suy ra $k^2 = 41^2$ hay $\overline{16c9} + 72 = 41^2 \Rightarrow \overline{16c9} = 1609 \Rightarrow c = 0$.

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd} = 1609$.

Bài 55. Gọi số lần xuất hiện của các chữ số a, b, c, d trong đẳng thức trên là n . Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $n = 1$, khi đó đẳng thức trên trở thành $\overline{abc} + 1 = (d + 1)^3$.

Vì $101 \leq (d + 1)^3 \leq 1000$ nên ta suy ra được $4 \leq d \leq 9$. Khi đó ta cho d nhận các giá trị

4; 5; 6; 7; 8; 9 thì ta được các số $\overline{abc}$ tương ứng bởi bảng sau

d	4	5	6	7	8	9
$\overline{abc} + 1$	125	216	343	512	729	1000
$\overline{abc}$	124	215	342	511	728	999

- Trường hợp 2: Nếu $n = 2$, khi đó đẳng thức trên trở thành $\overline{aabbcc} + 1 = (\overline{dd} + 1)^3$

Vì $100001 \leq (\overline{dd} + 1)^3 \leq 1000000$ nên ta suy ra được $5 \leq d \leq 9$. Khi đó ta cho d nhận các giá trị 5; 6; 7; 8; 9 thì ta thấy chỉ có $d = 9$ thỏa mãn. Từ đó ta được $a = b = c = 9$.

- Trường hợp 3: Nếu $n \geq 3$, khi đó ta đặt $x = \underbrace{111\dots1}_n \Rightarrow 9x + 1 = 10^n$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned} \overline{aa\dots abb\dots bcc\dots c} + 1 &= a.x.10^{2n} + b.x.10^n + c.x + 1 = d^3x^3 + 3d^2x^2 + 3dx + 1 \\ \Leftrightarrow ax(9x + 1)^2 + bx(9x + 1) + cx &= d^3x^3 + 3d^2x^2 + 3dx \\ \Leftrightarrow [81ax^2 + (18a + 9b)x] - (d^3x^2 + 3d^2x) &= 3d - (a + b + c) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $3d - (a + b + c) : x$.

Mà ta lại có $x \geq 111$ và $3d - (a + b + c) \leq 26$. Từ đó ta được $3d - (a + b + c) = 0$.

Lập luận tương tự ta được $3d^2 - (18a + 9b) = 0$ và $d^3 - 81a = 0$.

Từ đó ta được $d^3 : 81 \Rightarrow d = 9$. Đến đây ta suy ra được $a = b = c = 9$.

Vậy các bộ số (a, b, c, d) thỏa mãn yêu cầu bài là

$(1, 2, 4, 4); (2, 1, 5, 5); (3, 4, 2, 6); (5, 1, 1, 7); (7, 2, 8, 8)$ khi mỗi chữ số a, b, c, d xuất hiện một lần và $(9, 9, 9, 9)$ với mỗi chữ số a, b, c, d xuất hiện n nguyên dương lần.

Bài 56. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & 1019a^2 + 18b^4 + 1007c^2 \geq 30ab^2 + 6b^2c + 2008ca \\ \Leftrightarrow & 15(a^2 - 2ab^2 + b^2) + 3(b^4 - 2b^2c + c^2) + 1004(c^2 - 2ca + a^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 15(a - b^2)^2 + 3(b^2 - c)^2 + 1004(c - a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vật bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b^2 = c$.

Bài 57. Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\begin{aligned} & \frac{k}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16 + 4k}{(a + b)^3} \\ \Leftrightarrow & \frac{k}{a^3 + b^3} - \frac{4k}{(a + b)^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{8}{(a + b)^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{8}{(a + b)^3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a - b}{(a + b)^3} \left(\frac{7b^2 + 4ab + a^2}{b^3} - \frac{7a^2 + 4ab + b^2}{a^3} \right) - \frac{3k(a - b)^2(a + b)}{(a^3 + b^3)(a + b)^3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)}{a^3b^3} - \frac{3k(a - b)^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $(a - b)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng khi và chỉ khi

$$(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 \geq 0$$

Cho $a = b$ thì bất đẳng thức trên trở thành $24a^6 - 3ka^6 \geq 0 \Rightarrow k \leq 8$. Ta chứng minh $k = 8$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức đã cho. Thật vậy, ta xét các trường hợp sau

+ Với $k < 8$ thì $(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 > 0$.

+ Với $k = 8$ thì bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 24a^3b^3 \geq 0$$

Ta có $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$; $a^2 + b^2 \geq 2ab$ nên

$$a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4 = a^4 + b^4 + 5ab(a^2 + b^2) + 12a^2b^2 \geq 24a^2b^2$$

Và
$$a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

Do đó ta có $(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) \geq 24a^3b^3$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh. Vậy hằng số k lớn nhất là 8.

Bài 58. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} - 6 + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 27 \geq 0 \\ & \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} - 6 + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 27 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{abc} - \frac{18(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left(\frac{a+b+c}{abc} - \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] [(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc] \geq 0 \end{aligned}$$

Do $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \geq 0 \\ & \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng vì ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{2} \geq 0$$

Và $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 59. Dễ dàng chứng minh được $(x-y)^4 + (x+y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} (a+b+c)^4 + (b+c-a)^4 &= 2[(b+c)^4 + 6a^2(b+c)^2 + a^4] \\ (c+a-b)^4 + (a+b-c)^4 &= 2[(b-c)^4 + 6a^2(b-c)^2 + a^4] \\ (b+c)^4 + (b-c)^4 &= 2(b^4 + 6b^2c^2 + c^4) \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^4 + (b+c-a)^4 + (c+a-b)^4 + (a+b-c)^4 \\ &= 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24b^2c^2 + 12a^2[(b+c)^2 + (b-c)^2] \\ &= 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \end{aligned}$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq 28(a^4 + b^4 + c^4) \\ \Leftrightarrow & a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 60.

a) Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) &= \frac{a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2}{2} \\ &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

b) Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + 3) - 2(a + b + c) &= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 \\ &= (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Bài 61. Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} a \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2}{9} \\ &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{9} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 62.

Ta có $A = x^2 - 2x + 1 + 4y^2 + 8y + 4 + z^2 - 6z + 9 + 1 = (x-1)^2 + (2y+2)^2 + (z-3)^2 + 1 \geq 1$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 1, đạt được tại $x=1; y=-1; z=3$.

Bài 63.

a) Ta có $A = x^2 + 4x + 4 + 4y^2 + 4y + 1 + z^2 + 8z + 16 + 1 = (x+2)^2 + (2y+1)^2 + (z+4)^2 + 1 \geq 1$.

Giá trị nhỏ nhất của A là 1, đạt được tại $x=-2; y=-\frac{1}{2}; z=-4$

b) Tương tự như trên ta có

$$\begin{aligned} B &= x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 12y + 3 + 9z^2 - 12z + 4 + 1986 \\ &= (x-1)^2 + (2y-3)^2 + (3z-2)^2 + 1986 \geq 1986 \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của B là 1986, đạt được tại $x=1; y=\frac{3}{2}; z=\frac{2}{3}$

Bài 64. Biến đổi đẳng thức đã cho ta được

$$\begin{aligned} |x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 &= 2x - |x^2 - 3x + 2| \\ \Leftrightarrow |(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Do $|x^2 - 3x + 2| \geq 0$ nên suy ra $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Với $x \geq 2$ thì $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$

Khi đó đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} (x-y+1)^2 + x - 2 + (x-1) &= 2(x-2) \Leftrightarrow (x-y+1)^2 = (x-2)(2-x+1-1) = -(x-2)^2 \\ \Leftrightarrow (x-y+1)^2 + (x-2)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y+1)^2 = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) = (2; 3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.