

CHƯƠNG I: PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

I. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC – NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Quy tắc: Muốn nhân 1 đơn thức với 1 đa thức ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

$$A(B + C) = AB + AC$$

Quy tắc: Muốn nhân một đa thức với 1 đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

VD1: 1). $8x.(3x^3 - 6x + 4) = 8x.3x^3 + 8x.(-6x) + 8x.4 = 24x^4 - 48x^2 + 32x.$

2). $2x^2.(x^2 + 5x - \frac{1}{2}) = 2x^3.x^2 + 2x^3.5x - 2x^3.\frac{1}{2} = 2x^5 + 10x^4 - x^3.$

3). $(3x^3y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}xy).6xy^3 = 18x^4y^4 - 3x^3y^3 + \frac{6}{5}x^2y^4.$

4). $(4x^3 - 5xy + 2x)(-\frac{1}{2}xy) = -2x^4y + \frac{5}{2}x^2y^2 - x^2y$

VD2: Tính

1). $(x + 3)(x^2 + 3x - 5) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3x^2 + 9x - 15 = x^3 + 6x^2 + 4x - 15.$

2). $(xy - 1)(xy + 5) = x^2y^2 + 5xy - xy - 5 = x^2y^2 + 4xy - 5$

3). $(2x - 5)(3x^2 + 7x - 1) = 2x(3x^2 + 7x - 1) - 5(3x^2 + 7x - 1) = 6x^3 + 14x^2 - 2x - 15x^2 - 35x + 5 = 6x^3 - x^2 - 37x + 5.$

4). $(\frac{1}{2}xy - 1)(x^3 - 2x - 6) = \frac{1}{2}x^4y - x^2y - 3xy - x^3 + 2x + 6.$

Áp dụng: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

Bài 1. Nhân đơn thức với đa thức:

1). $3x^2(5x^2 - 2x - 4)$ 2). $xy^2(x^2y + x^3y^2 + 3x^2y^3)$ 3). $xyz(x^2y + 3yz^2 + 4xy^2z)$

4). $2x^2(4x^2 - 5xy + 8y^3)$ 5). $2xy^2(5x^2 + 3xy - 6y^3)$ 6). $-x^2y(xy^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{3}{4}x^2y^2)$

7). $(3xy - x^2 + y).\frac{2}{3}x^2y$ 8). $(4x^3 - 5xy + 2x)(-\frac{1}{2}xy)$ 9). $2x^2(x^2 + 3x + \frac{1}{2})$

10). $-\frac{3}{2}x^4y^2(6x^4 - \frac{10}{9}x^2y^3 - y^5)$ 11). $\frac{2}{3}x^3(x + x^2 - \frac{3}{4}x^5)$ 12). $2xy^2(xy + 3x^2y - \frac{2}{3}xy^3)$

13). $3x(2x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x)$ 14). $\frac{3}{5}x^3y^5(7x^4 + 5x^2y - \frac{10}{21}x^4y^3 - y^4)$

Bài 2. Nhân đa thức với đa thức:

1). $(2x - 5)(3x + 7)$ 2). $(-3x + 2)(4x - 5)$ 3). $(x - 2)(x^2 + 3x - 1)$

4). $(x + 3)(2x^2 + x - 2)$ 5). $(2x - y)(4x^2 - 2xy + y^2)$ 6). $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3)$

7). $(3x + 4x^2 - 2)(-x^2 + 1 + 2x)$ 8). $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$ 9). $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

10). $(x - 2)(3x^2 - 2x + 1)$ 11). $(x + 2)(x^2 + 3x + 2)$ 12). $(2x^2 + 1)(x^2 - x + 3)$

13). $(xy - 1)(x^2y - 3xy^2)$ 14). $(x + 3)(x^2 - x + 2)$ 15). $(x^2 - x + 2)(2x - 3)$

16). $(x^2 - 2xy - y^2)(x - y)$ 17). $(x^2 - 3xy + y^2)(x + y)$ 18). $(x - 5)(x^2 - 6x + 1)$

- 19). $(2x^2 - 1)(3x^2 - x + 2)$ 20). $(2 - 3x^2)(x^3 + 2x^2 - 3)$ 21). $(9x - 2)(x^2 - 3x + 5)$
 22). $(7x - 1)(2x^2 - 5x + 3)$ 23). $(5x + 3)(3x^2 + 6x + 7)$ 24). $(6x^2 + 5y^2)(2x^2 - y^2)$
 25). $(-\frac{1}{2}x^2 + y^3)(8x^3 - \frac{4}{3}x^2y - y^2)$ 26). $(2xy^2 - 7x^2y)(\frac{1}{2}x^2 + 5xy - 4y^3)$

Bài 3. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức:

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1). $A = 5x(4x^2 - 2x + 1) - 2x(10x^2 - 5x - 2)$ | với $x = 15$ |
| 2). $2x(3x^2 - 5x + 8) - 3x^2(2x - 5) - 16x$ | với $x = -15$ |
| 3). $B = 5x(x^2 - 3) + x^2(7 - 5x) - 7x^2$ | với $x = -5$ |
| 4). $C = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ | với $x = 3$ |
| 5). $D = 4x^2 - 28x + 49$ | với $x = 4$ |
| 6). $E = x^3 - 15x^2 + 75x$ | với $x = 25$ |
| 7). $F = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ | với $x = 3$ |
| 8). $G = x(x - y) + (x + y)$ | với $x = 6$ và $y = 8$ |
| 9). $H = 5x(x - 4y) - 4y(y - 5x)$ | với $x = -1/5$; $y = -1/2$ |
| 10). $I = x(x^2 - y^2) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ | với $x = 1/2$ và $y = 100$ |
| 11). $J = (x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$ | với $x = 2$ và $y = -1/2$ |
| 12). $K = 4x^2(5x - 3y) - 5x^2(4x + y)$ | với $x = -2$; $y = -3$ |
| 13). $L = (x^2y + y^3)(x^2 + y^2) - y(x^4 + y^4)$ | với $x = 0,5$; $y = -2$ |
| 14). $(2x^2 + y)(x - 6xy) - 2x(x - 3y^2)(x + 1) + 6x^2y(y - 2x)$ | với $x = -2$ và $ y = 3$ |

BÀI TẬP TỔNG HỢP**Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

- a) $(x^2 - 1)(x^2 + 2x)$ b) $(2x - 1)(3x + 2)(3 - x)$ c) $(x + 3)(x^2 + 3x - 5)$
 d) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ e) $(2x^3 - 3x - 1)(5x + 2)$ f) $(x^2 - 2x + 3)(x - 4)$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

- a) $-2x^3y(2x^2 - 3y + 5yz)$ b) $(x - 2y)(x^2y^2 - xy + 2y)$ c) $\frac{2}{5}xy(x^2y - 5x + 10y)$
 d) $\frac{2}{3}x^2y(3xy - x^2 + y)$ e) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ f) $\left(\frac{1}{2}xy - 1\right)(x^3 - 2x - 6)$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) = x^5 - y^5$
 b) $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = x^5 + y^5$
 c) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$
 d) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Bài 4. Thực hiện các phép tính, sau đó tính giá trị biểu thức:

- a) $A = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ với $x = 3$. ĐS: $A = 211$
 b) $B = (x + 1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$ với $x = 2$. ĐS: $B = 255$
 c) $C = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ với $x = 2$. ĐS: $C = 129$
 d) $D = 2x(10x^2 - 5x - 2) - 5x(4x^2 - 2x - 1)$ với $x = -5$. ĐS: $D = -5$

Bài 5. Thực hiện các phép tính, sau đó tính giá trị biểu thức:

- a) $A = (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$ với $x = 2, y = -\frac{1}{2}$. ĐS: $A = \frac{255}{16}$
 b) $B = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ với $a = 3, b = -2$. ĐS: $B = 275$
 c) $C = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + y^2) + 2x^3y - 3x^2y^2 + 2xy^3$ với $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$. ĐS: $C = \frac{3}{16}$

Bài 6. Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

- a) $A = (3x + 7)(2x + 3) - (3x - 5)(2x + 11)$
 b) $B = (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) - x(x^3 + x^2 - 3x - 2)$
 c) $C = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1)$
 d) $D = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3$
 e) $E = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Bài 7. * Tính giá trị của đa thức:

- a) $P(x) = x^7 - 80x^6 + 80x^5 - 80x^4 + \dots + 80x + 15$ với $x = 79$ $DS: P(79) = 94$
 b) $Q(x) = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \dots + 10x^2 - 10x + 10$ với $x = 9$ $DS: Q(9) = 1$
 c) $R(x) = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ với $x = 16$ $DS: R(16) = 4$
 d) $S(x) = x^{10} - 13x^9 + 13x^8 - 13x^7 + \dots + 13x^2 - 13x + 10$ với $x = 12$ $DS: S(12) = -2$

II. HẰNG ĐẲNG THỨC

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho A và B là các biểu thức. Ta có một số hằng đẳng thức đáng nhớ sau:

1. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
2. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
3. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
7. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

Chú ý:

Các công thức 4) và 5) còn được viết dưới dạng:

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

$$(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$$

Từ công thức 1) và 2) ta suy ra các công thức:

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC$$

$$(A - B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2BC + 2AC$$

$$(A - B - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB + 2BC - 2AC$$

Ví dụ 1: Khai triển:

- a) $(5x + 3yz)^2 = 25x^2 + 30xyz + 9y^2z^2$
 b) $(y^2x - 3ab)^2 = y^4x^2 - 6abxy^2 + 9a^2b^2$
 c) $(x^2 - 6z)(x^2 + 6z) = x^4 - 36z^2$
 d) $(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
 e) $(a + 2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
 g) $(x^2 + 3)(x^4 + 9 - 3x^2) = (x^2)^3 + 3^3 = x^6 + 27$
 h) $(y - 5)(25 + 2y + y^2 + 3y) = (y - 5)(y^2 + 5y + 25) = y^3 - 5^3 = y^3 - 125$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$a) A = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$$

Hoặc: $A = (x + y + x - y)(x + y - x + y) = 2x \cdot 2y = 4xy$

$$b) B = (x + y)^2 - 2(x + y)(x - y) + (x - y)^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - 2x^2 + 2y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 4y^2$$

$$c) C = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 2y^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 2y^3$$

$$= 6x^2y$$

Ví dụ 3: Chứng minh: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

Ta có: VT = $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2$

$$=(a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = VP$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 4: Chứng minh:

a) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

Ta có : $VP = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3 = VT$

Áp dụng: Tìm tổng lập phương của hai số biết rằng tích hai số đó bằng 6 và tổng hai số đó bằng -5

Gọi hai số đó là a và b thì ta có:

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (-5)^3 - 3.6(-5) = -125 + 90 = -35$

b) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

Ta có: $VP = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2 = a^3 - b^3$

Ví dụ 5: Tính nhanh:

a) $153^2 + 94.153 + 47^2 = 153^2 + 2.47.153 + 47^2 = (153 + 47)^2 = 200^2 = 40000$

b) $126^2 - 152.126 + 5776 = 126^2 - 2.126.76 + 76^2 = (126 - 76)^2 = 50^2 = 2500$

c) $3^8.5^8 - (15^4 - 1)(15^4 + 1) = 15^8 - (15^8 - 1) = 1$

d) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1) \dots (2^{20}+1) + 1 =$

$= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1) \dots (2^{20}+1) + 1 =$

$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1) \dots (2^{20}+1) + 1 =$

$= (2^4-1)(2^4+1) \dots (2^{20}+1) + 1 =$

$= \dots$

$= (2^{20}-1)(2^{20}+1) + 1 = 2^{40} - 1 + 1 = 2^{40}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hay một hiệu:

a) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = x^2 + 2. \frac{5}{2}x + (\frac{5}{2})^2 = (x + \frac{5}{2})^2$

b) $16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2.x.4 + 1^2 = (4x - 1)^2$

c) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2.2x.3y + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$

d) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) + 1 = (x+3)(x+6)(x+4)(x+5) + 1$
 $= (x^2 + 6x + 3x + 18)(x^2 + 4x + 5x + 20) + 1$
 $= (x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 18 + 2) + 1$
 $= (x^2 + 9x + 18)^2 + 2(x^2 + 9x + 18).1 + 1^2$
 $= (x^2 + 9x + 18 + 1)^2 = (x^2 + 9x + 19)^2$

e) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2(x+1)(y+1) + 2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 2x + 2y + 2 + 2$
 $= x^2 + y^2 + 2^2 + 4x + 4y + 2xy = (x + y + 2)^2$

g) $x^2 - 2x(y+2) + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 2xy - 4x + y^2 + 4y + 4$
 $= x^2 + y^2 + 2^2 - 2xy - 4x + 4y$
 $= (x - y - 2)^2$

h) $x^2 + 2x(y+1) + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x(y+1) + (y+1)^2$
 $= (x + y + 1)^2$

Bài tập 2: Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hay một hiệu:

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$

b) $27y^3 - 9y^2 + y - \frac{1}{27} = (3y)^3 - 3.(3y)^2. \frac{1}{3} + 3.3y.(\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3})^3 = (3y - \frac{1}{3})^3$

c) $8x^6 + 12x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = (2x^2)^3 + 3.(2x^2)^2.y + 3.(2x^2).y^2 + y^3 = (2x^2 + y)^3$

d) $(x+y)^3(x-y)^3 = [(x+y)(x-y)]^3 = (x^2 - y^2)^3$

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức:

a) $(2x+3)^2 - 2(2x+3)(2x+5) + (2x+5)^2 = (2x+3-2x-5)^2 = (-2)^2 = 4$

b) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1) = (x^2+1+x)(x^2+1-x)(x^2-1)$
 $= [(x^2+1)^2 - x^2](x^2-1)$
 $= (x^2-1)(x^2+1)^2 - x^2(x^2-1)$
 $= (x^4-1)(x^2+1) - x^4 + x^2$
 $= x^6 + x^4 - x^2 - 1 - x^4 + x^2 = x^6 - 1$

$$\begin{aligned} & c) (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 - 2(b-c)^2 \\ & = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac - 2b^2 + 4bc - 2c^2 \\ & = 2a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d) (a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2 \\ & = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac + b^2 + c^2 + a^2 - 2bc + 2ac - \\ & 2ab + c^2 + a^2 + b^2 - 2ac + 2ab - 2bc \\ & = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Bài tập 4: Điền đơn thức thích hợp vào các dấu *

$$\begin{aligned} & a) 8x^3 + * + * + 27y^3 = (* + *)^3 \\ & = (2x)^3 + 3.(2x)^2.3y + 3.2x.(3y)^2 + (3y)^3 = (2x + 3y)^3 \\ & = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x + 3y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b) 8x^3 + 12x^2y + * + * = (* + *)^3 \\ & = (2x)^3 + 3.(2x)^2.y + 3.2x.y^2 + y^3 = (2x + y)^3 \\ & = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = (2x + y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c) x^3 - * + * - * = (* - 2y)^3 \\ & = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = (x - 2y)^3 \end{aligned}$$

Bài tập 5: CMR với mọi giá trị của biến x ta luôn có:

$$a) -x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$\text{Ta có: } -x^2 + 4x - 5 = -(x^2 - 4x + 5) = -(x^2 - 4x + 4 + 1) = -[(x - 2)^2 + 1]$$

$$\text{Mà } (x - 2)^2 \geq 0 \text{ nên } (x - 2)^2 + 1 > 0$$

$$\text{Do đó } -[(x - 2)^2 + 1] < 0 \text{ với mọi giá trị của biến } x$$

$$b) x^4 + 3x^2 + 3 > 0$$

$$\text{Ta có: } x^4 \geq 0; 3x^2 \geq 0 \text{ nên } x^4 + 3x^2 + 3 > 0, \text{ với mọi } x$$

$$c) (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 4) + 3 > 0$$

$$\begin{aligned} & \text{Ta có: } (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 4) + 3 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 3 + 1) + 3 \\ & = (x^2 + 2x + 3)^2 + (x^2 + 2x + 3) + 1 + 2 = (x^2 + 2x + 3)^2 + (x^2 + 2x + 1) + 5 \\ & = (x^2 + 2x + 3)^2 + (x + 1)^2 + 5 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (x^2 + 2x + 3)^2 \geq 0; (x + 1)^2 \geq 0$$

$$\text{nên } (x^2 + 2x + 3)^2 + (x + 1)^2 + 5 > 0, \text{ với mọi } x$$

Bài tập 6: So sánh:

$$a) 2003.2005 \text{ và } 2004^2$$

$$\text{Ta có: } 2003.2005 = (2004 - 1)(2004 + 1) = 2004^2 - 1 < 2004^2$$

$$b) 7^{16} - 1 \text{ và } 8(7^8 + 1)(7^4 + 1)(7^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} & \text{Ta có: } 7^{16} - 1 = (7^8)^2 - 1 = (7^8 + 1)(7^8 - 1) \\ & = (7^8 + 1)(7^4 + 1)(7^4 - 1) = (7^8 + 1)(7^4 + 1)(7^2 + 1)(7^2 - 1) \\ & = (7^8 + 1)(7^4 + 1)(7^2 + 1)(7 + 1)(7 - 1) = \\ & = (7^8 + 1)(7^4 + 1)(7^2 + 1)8.6 > (7^8 + 1)(7^4 + 1)(7^2 + 1).8 \end{aligned}$$

Bài tập 7: Cho $a - b = m$; $a.b = n$. Tính theo m, n giá trị của các biểu thức sau:

$$a) (a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4ab) = (a - b)^2 + 4ab$$

$$\text{Thay } a - b = m, a.b = n \text{ vào biểu thức ta được:}$$

$$(a + b)^2 = m^2 + 4n$$

$$b) a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = m^2 - 2n$$

$$c) a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = m^3 + 3m.n = m(m^2 + 3n)$$

Bài tập 8: Cho $a + b = p$; $a - b = q$. Tìm theo p, q giá trị của các biểu thức sau:

$$a) a.b = ?$$

$$\text{Ta có: } (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{p^2 - q^2}{4}$$

$$b) a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = p^3 - 3p. \frac{p^2 - q^2}{4} =$$

$$\frac{4p^3 - 3p(p^2 - q^2)}{4} = \frac{4p^3 - 3p^3 + 3pq^2}{4} = \frac{p^3 + 3pq^2}{4} = \frac{p(p^2 + 3q^2)}{4}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Điền vào chỗ trống cho thích hợp:

- a) $x^2 + 4x + 4 = \dots\dots\dots$ b) $x^2 - 8x + 16 = \dots\dots\dots$ c) $(x+5)(x-5) = \dots\dots\dots$
 d) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = \dots\dots\dots$ e) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = \dots\dots\dots$ f) $(x+2)(x^2 - 2x + 4) = \dots\dots\dots$
 g) $(x-3)(x^2 + 3x + 9) = \dots\dots\dots$ h) $x^2 + 2x + 1 = \dots\dots\dots$ i) $x^2 - 1 = \dots\dots\dots$
 k) $x^2 + 6x + 9 = \dots\dots\dots$ l) $4x^2 - 9 = \dots\dots\dots$ m) $16x^2 - 8x + 1 = \dots\dots\dots$
 n) $9x^2 + 6x + 1 = \dots\dots\dots$ o) $36x^2 + 36x + 9 = \dots\dots\dots$ p) $x^3 + 27 = \dots\dots\dots$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

- a) $(2x+3y)^2$ b) $(5x-y)^2$ c) $(2x+y^2)^3$
 d) $\left(x^2 + \frac{2}{5}y\right) \cdot \left(x^2 - \frac{2}{5}y\right)$ e) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$ f) $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}y\right)^3$
 g) $(3x^2 - 2y)^3$ h) $(x-3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$ i) $(x^2 - 3) \cdot (x^4 + 3x^2 + 9)$
 k) $(x+2y+z)(x+2y-z)$ l) $(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$ m) $(5+3x)^3$

Bài 3. Tính giá trị biểu thức bằng cách vận dụng hằng đẳng thức:

- a) $A = x^3 + 3x^2 + 3x + 6$ với $x=19$ b) $B = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ với $x=11$
 ĐS: a) $A=8005$ b) $B=1001$.

Bài 4. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

- a) $(2x+3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 1)$ b) $(4x-1)^3 - (4x-3)(16x^2 + 3)$
 c) $2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2)$ với $x+y=1$ d) $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x+1)(x-1)$
 e) $\frac{(x+5)^2 + (x-5)^2}{x^2 + 25}$ f) $\frac{(2x+5)^2 + (5x-2)^2}{x^2 + 1}$

ĐS: a) 29 b) 8 c) -1 d) 8 e) 2 f) 29

Bài 5. Giải các phương trình sau:

- a) $(x-1)^3 + (2-x)(4+2x+x^2) + 3x(x+2) = 17$ b) $(x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 2) = 15$
 c) $(x-3)^3 - (x-3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x+1)^2 = 15$ d) $x(x-5)(x+5) - (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 3$
 ĐS: a) $x = \frac{10}{9}$ b) $x = \frac{7}{2}$ c) $x = \frac{2}{15}$ d) $x = -\frac{11}{25}$

Bài 6. So sánh hai số bằng cách vận dụng hằng đẳng thức:

- a) $A=1999.2001$ và $B=2000^2$ b) $A=2^{16}$ và $B=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
 c) $A=2011.2013$ và $B=2012^2$ d) $A=4(3^2+1)(3^4+1)\dots(3^{64}+1)$ và $B=3^{128}-1$

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài tập 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $M = x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x-2)^2 + 3$

Ta thấy: $(x-2)^2 \geq 0$ nên $M \geq 3$

Hay GTNN của M bằng 3

Giá trị này đạt được khi $(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

b) $N = (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x - 19) + 49$

$N = (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x - 5 - 14) + 49$

$N = (x^2 - 4x - 5)^2 - 14(x^2 - 4x - 5) + 49$

$N = (x^2 - 4x - 5)^2 - 2 \cdot 7(x^2 - 4x - 5) + 7^2$

$N = (x^2 - 4x - 5 - 7)^2 = (x^2 - 4x - 12)^2$

Ta thấy: $(x^2 - 4x - 12)^2 \geq 0$ nên $N \geq 0$

Hay GTNN của N bằng 0

Giá trị này đạt được khi $x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 6; \text{ hoặc } x = -2$$

$$c) P = x^2 - 6x + y^2 - 2y + 12$$

$$P = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + 2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 2$$

$$\text{Ta thấy: } (x - 3)^2 \geq 0; \text{ và } (y - 1)^2 \geq 0 \text{ nên } P \geq 2$$

Hay GTNN của P bằng 2

Giá trị này đạt được khi $x - 3 = 0$ và $y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ và } y = 1$$

Chú ý về GTNN và GTLN của một biểu thức:

Cho một biểu thức A, ta nói rằng số k là GTNN của A nếu ta c/m được 2 điều kiện:

a) $A \geq k$ với mọi giá trị của biến đối với biểu thức A

b) Đồng thời, ta tìm được các giá trị của biến cụ thể của A để khi thay vào, A nhận giá trị k.

Tương tự, cho một biểu thức B, ta nói rằng số h là GTLN của B nếu ta c/m được 2 điều kiện:

a) $B \leq h$ với mọi giá trị của biến đối với biểu thức B.

b) Đồng thời, ta tìm được các giá trị của biến cụ thể của B để khi thay vào, B nhận giá trị h.

Có hai loại sai lầm thường gặp của HS:

1) Khi chứng minh được a), vội kết luận mà quên kiểm tra điều kiện b)

2) Đã hoàn tất được a) và b), tuy nhiên, bài toán đòi hỏi xét trên một tập số nào đó thôi, tức là thêm các yếu tố ràng buộc, mà HS không để ý rằng giá trị biến tìm được ở bước b) lại nằm ngoài tập cho trước đó.

Ví dụ 1: Tìm GTNN của biểu thức $A = (x^2 + 1)^2 + 4$

Giả sử lời giải như :

$$\text{Vì } (x^2 + 1)^2 \geq 0 \text{ nên } A \geq 4.$$

Vậy GTNN của biểu thức là 4.

Kết luận về GTNN như thế là mắc phải sai lầm loại 1), tức là quên kiểm tra điều kiện b) .

Thực ra để cho A bằng 4, ta phải có $(x^2 + 1)^2 = 0$, nhưng điều này không thể xảy ra được với mọi giá trị của biến x.

Ví dụ 2: Cho x và y là các số hữu tỉ và $x \neq y$.Tìm GTNN của biểu thức

$$B = \frac{1}{2}(x - y)^2 + 2$$

Giả sử lời giải như sau:

$$\text{Vì } \frac{1}{2}(x - y)^2 \geq 0 \text{ nên } B \geq 2$$

Mặt khác khi thay $x = y = 1$, B nhận giá trị 2

Vậy GTNN của biểu thức B là 2.

ở đây, kết luận về GTNN như thế là mắc phải sai lầm loại 2), tức là quên kiểm tra điều kiện ràng buộc $x \neq y$.

Bài tập 2: Tìm GTNN của các biểu thức sau:

$$a) A = x^2 - 4x + 9$$

$$\text{Ta có : } A = x^2 - 4x + 4 + 5 = (x - 2)^2 + 5$$

$$\text{Ta thấy } (x - 2)^2 \geq 0, \text{ nên } (x - 2)^2 + 5 \geq 5$$

$$\text{Hay GTNN của A bằng 5, giá trị này đạt được khi } (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$b) B = x^2 - x + 1$$

$$\text{Ta có: } B = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy GTNN của B bằng } \frac{3}{4}, \text{ giá trị này đạt được khi } x = \frac{1}{2}$$

$$c) C = 2x^2 - 6x = 2(x^2 - 3x) = 2[(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4}] = 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{2}$$

$$\text{Vậy GTNN của C bằng } -\frac{9}{2}, \text{ giá trị này đạt được khi } x = \frac{3}{2}$$

Bài tập 3: Tìm GTLN của các đa thức:

$$a) M = 4x - x^2 + 3 = -x^2 + 4x - 4 + 7 = 7 - (x^2 - 4x + 4) = 7 - (x - 2)^2$$

Ta thấy: $(x-2)^2 \geq 0$; nên $-(x-2)^2 \leq 0$.

Do đó: $M = 7 - (x-2)^2 \leq 7$

Vậy GTLN của biểu thức M bằng 7, giá trị này đạt được khi $x = 2$

$$b) N = x - x^2 = -x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Vậy GTLN của N bằng $\frac{1}{4}$, giá trị này đạt được khi $x = \frac{1}{2}$

$$c) P = 2x - 2x^2 - 5 = 2(-x^2 + x - 5) = 2\left[-x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right] - \frac{19}{4}$$

$$= -\frac{19}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq -\frac{19}{2}$$

Vậy GTLN của biểu thức P bằng $-\frac{19}{2}$, giá trị này đạt được khi $x = \frac{1}{2}$

Chú ý: Dạng toán này tương tự dạng: Chứng minh 1 biểu thức luôn dương, hoặc luôn âm, hoặc lớn hơn, nhỏ hơn 1 số nào đó.

Bài tập 4 : Tìm x, biết rằng:

a) $9x^2 - 6x - 3 = 0$

$$9x^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1 - 4 = 0$$

$$(3x - 1)^2 - 4 = 0$$

$$(3x - 1 + 2)(3x - 1 - 2) = 0$$

$$(3x + 1)(3x - 3) = 0$$

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0 \\ 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -1 \\ 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

b) $x^3 + 9x^2 + 27x + 19 = 0$

$$x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 - 8 = 0$$

$$(x + 3)^3 - 8 = 0$$

$$(x + 3)^3 - 2^3 = 0$$

$$(x + 3 - 2)[(x + 3)^2 + 2(x + 3) + 4] = 0$$

$$(x + 1)(x^2 + 6x + 9 + 2x + 6 + 4) = 0$$

$$(x + 1)(x^2 + 8x + 19) = 0$$

$$(x + 1)[x^2 + 2 \cdot 4x + 16 + 3] = 0$$

$$(x + 1)[(x + 4)^2 + 3] = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ Vì } (x + 4)^2 + 3 > 0, \text{ với mọi giá trị của biến } x.$$

$$x = -1$$

c) $x(x + 5)(x - 5) - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 3$

$$x(x^2 - 25) - (x^3 + 8) - 3 = 0$$

$$x^3 - 25x - x^3 - 8 - 3 = 0$$

$$-25x = 11$$

$$x = -\frac{11}{25}$$

Bài tập 5 : Tìm x, y, z biết rằng:

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 4z^2 - 4z + 11 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + (4z^2 - 4z + 1) = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (2z - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \\ 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài tập 6 : Cho $a + b = 1$. Tính $a^3 + 3ab + b^3$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^3 + 3ab + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 3ab = (a + b)^3 - 3ab + 3ab \\ &= (a + b)^3 = 1 \quad (\text{Vì } a + b = 1) \end{aligned}$$

Bài tập 7 : Chứng minh các biểu thức sau nhận giá trị dương với mọi giá trị của biến:

a) $A = x^2 - x + 1$

$$A = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ nên } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ với mọi giá trị của biến}$$

Hay $A > 0$, với mọi giá trị của biến.

b) $B = (x - 2)(x - 4) + 3 = x^2 - 4x - 2x + 8 + 3 = x^2 - 6x + 9 + 2$
 $= (x - 3)^2 + 2$

$$\text{Vì } (x - 3)^2 \geq 0 \text{ nên } (x - 3)^2 + 2 > 0, \text{ với mọi giá trị của biến}$$

Hay $B > 0$, với mọi giá trị của biến.

c) $C = 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 5$

$$C = x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 + 2x + 1 + 4 = (x - 2y)^2 + (x + 1)^2 + 4$$

$$\text{Vì } (x - 2y)^2 \geq 0, \text{ và } (x + 1)^2 \geq 0 \text{ nên } (x - 2y)^2 + (x + 1)^2 + 4 > 0, \text{ với mọi } x$$

Hay $C > 0$, với mọi x .

Bài tập 8 : Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a + b)^2(a - b)^2$

Ta biến đổi về trái:

$$\begin{aligned} \text{VT} &= (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab) \\ &= (a + b)^2(a - b)^2 = \text{VP}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

b) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$

Ta có:

$$\begin{aligned} \text{VT} &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \\ &= a^2x^2 - 2ax \cdot by + b^2y^2 + a^2y^2 + 2ay \cdot bx + b^2x^2 = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2 = \text{VP}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

c) $a^3 - b^3 + ab(a - b) = (a - b)(a + b)^2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: VT} &= a^3 - b^3 + ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + ab) = (a - b)(a + b)^2 \end{aligned}$$

d) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$

$$\begin{aligned} \text{VT} &= (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3 \\ &= -3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 3c^2a + 3ca^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VP} &= 3(a - b)(b - c)(c - a) \\ &= 3(ab - ac - b^2 + bc)(c - a) \\ &= 3(abc - a^2b - ac^2 + a^2c - b^2c + ab^2 + bc^2 - abc) \\ &= -3a^2b - 3ac^2 + 3a^2c - 3b^2c + 3ab^2 + 3bc^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy VT} = \text{VP}$$

Do đó đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 9 : Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 4x + 4 = 25$

$$(x - 2)^2 - 25 = 0$$

$$(x - 2 + 5)(x - 2 - 5) = 0$$

$$(x + 3)(x - 7) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ hoặc } x - 7 = 0$$

$$x = -3 \text{ hoặc } x = 7$$

b) $(5 - 2x)^2 - 16 = 0$

$$(5 - 2x + 4)(5 - 2x - 4) = 0$$

$$(9 - 2x)(1 - 2x) = 0$$

$$9 - 2x = 0 \text{ hoặc } 1 - 2x = 0$$

$$9 = 2x \text{ hoặc } 2x = 1$$

$$x = \frac{9}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 &= 15 \\ x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 - 15 &= 0 \\ 27x + 18x + 9 - 15 &= 0 \\ 45x &= 6 \\ x &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Bài tập 10 : Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = 49x^2 - 56x + 16$, với $x = 2$

Ta có: $A = (7x - 4)^2$

Với $x = 2$ thì: $A = (7 \cdot 2 - 4)^2 = 10^2 = 100$

b) $B = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$, với $x = -2$

Ta có: $B = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (3x) \cdot 4 + 2^3 = (3x + 2)^3$

Với $x = -2$ thì:

$B = [3 \cdot (-2) + 2]^3 = (-4)^3 = -64$

c) $C = (x-1)^3 - 4x(x+1)(x-1) + 3(x-1)(x^2+x+1) + 3(x-1)^2$, với $x = -\frac{2}{5}$

Ta có:

$C = (x-1)^3 - 4x(x^2-1) + 3(x^3-1) + 3(x^2-2x+1)$

$C = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 4x^3 + 4x + 3x^3 - 3 + 3x^2 - 6x + 3$

$C = x - 1$

Với $x = -\frac{2}{5}$ thì: $C = -\frac{2}{5} - 1 = -\frac{7}{5}$

Bài tập 11 : CMR tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là một số chính phương.

Giải:

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $n, n+1, n+2, n+3$. Khi đó ta có:

Tích của 4 số tự nhiên liên tiếp là:

$A = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$

$A = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$

$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$

Vì n là số tự nhiên nên $(n^2 + 3n + 1)^2$ là một số chính phương.

Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3)$ là một số chính phương.

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $A = 5x - x^2$

b) $B = x - x^2$

c) $C = 4x - x^2 + 3$

d) $D = -x^2 + 6x - 11$

e) $E = 5 - 8x - x^2$

f) $F = 4x - x^2 + 1$

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = x^2 - 6x + 11$

b) $B = x^2 - 20x + 101$

c) $C = x^2 - 6x + 11$

d) $D = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

e) $E = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 8$

f) $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$

g) $G = x^2 - 4xy + 5y^2 + 10x - 22y + 28$

HD: g) $G = (x-2y+5)^2 + (y-1)^2 + 2 \geq 2$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các biểu thức (nếu có):

$A = x^2 - 4x + 1$

$B = 4x^2 + 4x + 11$

$C = x^2 + 4x + 8$

$D = 7 - 8x + x^2$

$E = x(x-6)$

$F = (x-3)^2 + (x-11)^2$

$G = (x-1)(x+3)(x+2)(x+6)$

$H = (x+1)(x-2)(x-3)(x-6)$

$I = 5 - 8x - x^2$

$J = 4x - x^2 + 1$

$K = x^2(2-x^2)$

Bài 4. Cho $a+b=S$ và $ab=P$. Hãy biểu diễn theo S và P, các biểu thức sau đây:

a) $A = a^2 + b^2$

b) $B = a^3 + b^3$

c) $C = a^4 + b^4$

III. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ**VẤN ĐỀ I. Phương pháp đặt nhân tử chung**

$AB + AC = A(B + C)$

Ví dụ : Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (Dùng phương pháp đặt nhân tử chung)

a) $5x(x - 2) - 3x^2(x - 2) = (x - 2).x.(5 - 3x)$

b) $3x(x - 5y) - 2y(5y - x) = 3x(x - 5y) + 2y(x - 5y) = (x - 5y)(3x + 2y)$

c) $y^2(x^2 + y) - zx^2 - zy = y^2(x^2 + y) - z(x^2 + y) = (x^2 + y)(y^2 - z)$

VẤN ĐỀ II. Phương pháp nhóm nhiều hạng tử

Phương pháp nhóm nhiều hạng tử.

Dùng các tính chất giao hoán, kết hợp của phép cộng các đa thức ta kết hợp những hạng tử của đa thức thành từng nhóm thích hợp rồi dùng các phương pháp khác phân tích thành nhân tử theo từng nhóm rồi phân tích chung đối với các nhóm.

- Khi nhóm các hạng tử cần chú ý:

+ Làm xuất hiện nhân tử chung

+ Hoặc xuất hiện hằng đẳng thức.

Ví dụ : Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (Sử dụng phương pháp nhóm các số hạng)

a) $5x^2 - 5xy + 7y - 7x = (5x^2 - 5xy) + (7y - 7x) = 5x(x - y) - 7(x - y)$
 $= (x - y)(5x - 7)$

b) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2 - z^2) = 3[(x + y)^2 - z^2]$
 $= 3(x + y + z)(x + y - z)$

c) $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = abx^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy$
 $= (abx^2 + a^2xy) + (aby^2 + b^2xy) = ax(bx + ay) + by(ay + bx) = (ay + bx)(ax + by)$

d) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2$
 $= (a^2b - ab^2) - (a^2c - b^2c) + (ac^2 - bc^2) = ab(a - b) - c(a - b)(a + b) + c^2(a - b)$
 $= (a - b)[ab - c(a + b) + c^2] = (a - b)(ab - ac - bc + c^2)$
 $= (a - b)[(ab - bc) - (ac - c^2)] = (a - b)[b(a - c) - c(a - c)] = (a - b)(a - c)(b - c)$

VẤN ĐỀ III. Phương pháp dùng hằng đẳng thức

Vận dụng các hằng đẳng thức để biến đổi đa thức thành tích các nhân tử hoặc lũy thừa của các đa thức.

Ví dụ : Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (Sử dụng các hằng đẳng thức)

a) $16x^2 - (x^2 + 4)^2 = (4x)^2 - (x^2 + 4) = (4x + x^2 + 4)(4x - x^2 - 4)$
 $= -(x + 2)^2(x - 2)^2$

b) $(x^2 + xy)^2 - (y^2 + xy)^2 = (x^2 + xy + y^2 + xy)(x^2 + xy - y^2 - xy)$
 $= (x + y)^2(x^2 + y^2)$

c) $(x + y)^3 + (x - y)^3 = (x + y + x - y)[(x + y)^2 - (x + y)(x - y) + (x - y)^2]$
 $= 2x(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2 + x^2 - 2xy + y^2)$
 $= 2x(x^2 + 3y^2)$

VẤN ĐỀ IV. Một số phương pháp khác

- Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử .

- Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử.

a) Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hiệu của hai bình phương.

b) Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung.

- Phương pháp đổi biến (Hay phương pháp đặt ẩn phụ)

- Phương pháp hệ số bất định.
- Phương pháp xét giá trị riêng.

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: (Phối hợp các phương pháp trên)

$$\begin{aligned} \text{a) } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \\ &= [(a + b)^3 + c^3] - [3ab(a + b) + 3abc] = \\ &= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)[a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab] \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: (sử dụng phương pháp tách 1 hạng tử thành nhiều hạng tử)

$$3x^2 - 8x + 4$$

Đa thức trên không chứa nhân tử chung, không có dạng một hằng đẳng thức đáng nhớ nào, cũng không thể nhóm các hạng tử. Ta biến đổi đa thức ấy thành đa thức có nhiều hạng tử hơn.

Cách 1: (Tách hạng tử thứ hai)

$$3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(3x - 2)$$

Cách 2: (Tách hạng tử thứ nhất)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x + 4 &= 4x^2 - 8x + 4 - x^2 = (2x - 2)^2 - x^2 \\ &= (2x - 2 + x)(2x - 2 - x) = (3x - 2)(x - 2) \end{aligned}$$

Nhận xét: Trong cách 1, hạng tử $-8x$ được tách thành hai hạng tử $-6x$ và $-2x$. Trong đa thức $3x^2 - 6x - 2x + 4$, hệ số của các hạng tử là 3; -6 ; -2 ; 4. Các hệ số thứ hai và thứ tư đều gấp -2 lần hệ số liền trước, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung $x - 2$

Một cách tổng quát: Để phân tích tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử, ta tách hạng tử

bx thành $b_1x + b_2x$ sao cho $\frac{b_1}{a} = \frac{c}{b_2}$, tức là $b_1b_2 = ac$.

Trong thực hành ta làm như sau:

- Bước 1: Tìm tích $a.c$

- Bước 2: Phân tích tích $a.c$ ra tích của hai thừa số nguyên tố bằng mọi cách.

- Bước 3: Chọn hai thừa số mà tổng bằng b .

Trong bài tập trên, đa thức $3x^2 - 8x + 4$ có $a = 3$; $b = -8$; $c = 4$. Tích $a.c = 3.4 = 12$

Phân tích 12 ra tích của hai thừa số, hai thừa số này cùng dấu (vì tích của chúng bằng 12), và cùng âm (để tổng của chúng bằng -8)

$$12 = (-1)(-12) = (-2)(-6) = (-3)(-4)$$

Chọn hai thừa số tổng bằng -8 , đó là -2 và -6 .

Ví dụ 3: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$4x^2 - 4x - 3$$

Cách 1: (tách hạng tử thứ hai)

$$4x^2 - 4x - 3 = 4x^2 + 2x - 6x - 3 = 2x(2x + 1) - 3(2x + 1) = (2x + 1)(2x - 3)$$

Cách 2: (Tách hạng tử thứ ba)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x - 3 &= 4x^2 - 4x + 1 - 4 = (2x - 1)^2 - 2^2 = (2x - 1 + 2)(2x - 1 - 2) \\ &= (2x + 1)(2x - 3) \end{aligned}$$

Nhận xét:

Qua hai bài tập trên, ta thấy việc tách 1 hạng tử thành nhiều hạng tử khác thường nhằm mục đích:

- Làm xuất hiện các hệ số tỉ lệ, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung (cách 1)

- Làm xuất hiện hiệu của hai bình phương (cách 2)

Với các đa thức có từ bậc ba trở lên, để dễ dàng làm xuất hiện các hệ số tỉ lệ, người ta thường dùng cách tìm nghiệm của đa thức.

Ví dụ 4: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

$$\text{a) } x^2 - 6x + 5$$

Đối với mỗi bài ta có thể biến đổi và giải theo nhiều cách khác nhau:

$$\text{Cách 1: } x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5 = x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5)$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } x^2 - 6x + 5 &= x^2 - 6x + 9 - 4 = (x - 3)^2 - 2^2 = (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) \\ &= (x - 5)(x - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Cách 3: } x^2 - 6x + 5 = x^2 - 2x + 1 - 4x + 4 = (x - 1)^2 - 4(x - 1) = (x - 1)(x - 1 - 4)$$

$$= (x-1)(x-5)$$

Cách 4: $x^2 - 6x + 5 = x^2 - 1 - 6x + 6 = (x-1)(x+1) - 6(x-1) = (x-1)(x+1-6)$

$$= (x-1)(x-5)$$

Cách 5: $x^2 - 6x + 5 = 3x^2 - 6x + 3 - 2x^2 + 2 = 3(x-1)^2 - 2(x^2-1)$

$$= (x-1)(3x-3-2x-2) = (x-1)(x-5)$$

Cách 6: $x^2 - 6x + 5 = 5x^2 - 10x + 5 - 4x^2 + 4x = 5(x-1)^2 - 4x(x-1)$

$$= (x-1)(5x-5-4x) = (x-1)(x-5)$$

Cách 7: $x^2 - 6x + 5 = 6x^2 - 6x - 5x^2 + 5 = 6x(x-1) - 5(x-1)(x+1)$

$$= (x-1)(6x-5x-5) = (x-1)(x-5)$$

b) $x^4 + 2x^2 - 3$

Cách 1: $x^4 + 2x^2 - 3 = x^4 - x^2 + 3x^2 - 3 = x^2(x^2-1) + 3(x^2-1) = (x^2-1)(x^2+3)$

$$= (x-1)(x+1)(x^2+3)$$

Cách 2: $x^4 + 2x^2 - 3 = x^4 + 2x^2 + 1 - 4 = (x^2+1)^2 - 4 = (x^2+1-2)(x^2+1+2)$

$$= (x^2-1)(x^2+3) = (x-1)(x+1)(x^2+3)$$

Cách 3: $x^4 + 2x^2 - 3 = x^4 + 3x^2 - x^2 - 3 = x^2(x^2+3) - (x^2+3) = (x^2+3)(x^2-1)$

$$= (x-1)(x+1)(x^2+3)$$

Cách 4: $x^4 + 2x^2 - 3 = x^4 - 1 + 2x^2 - 2 = (x^2-1)(x^2+1) + 2(x^2-1)$

$$= (x^2-1)(x^2+1+2) = (x-1)(x+1)(x^2+3)$$

Cách 5: $x^4 + 2x^2 - 3 = x^4 - 9 + 2x^2 + 6 = (x^2-3)(x^2+3) + 2(x^2+3)$

$$= (x^2+3)(x^2-3+2) = (x^2+3)(x-1)(x+1)$$

Cách 6: $x^4 + 2x^2 - 3 = 3x^4 - 3 - 2x^4 + 2x^2 = 3(x^4-1) - 2x^2(x^2-1)$

$$= (x^2-1)(3x^2+3-2x^2) = (x-1)(x+1)(x^2+3)$$

Ví dụ 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: (Sử dụng phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử)

a) $x^4 + 64 = (x^2)^2 + 8^2 + 2.x^2.8 - 16x^2 = (x^2+8)^2 - 16x^2$

$$= (x^2+8-4x)(x^2+8+4x) = (x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$$

b) $x^5 + x^4 + 1 = (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 - 1) = x^3(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$

$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

Ví dụ 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: (Sử dụng phương pháp đổi biến)

a) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 4) + 3$

Đặt $x^2 + 2x = t$

Đa thức trên trở thành:

$$t(t+4) + 3 = t^2 + 4t + 3 = t^2 + t + 3t + 3 = t(t+1) + 3(t+1) = (t+1)(t+3)$$

Thay $t = x^2 + 2x$, ta được:

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 3)$$

b) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$

Đặt $t = x^2 + 4x + 8$

Đa thức trên trở thành:

$$t^2 + 3x.t + 2x^2 = t^2 + 2tx + x^2 + x^2 + xt = (t+x)^2 + x(x+t) = (t+x)(t+x+x)$$

$$= (t+x)(t+2x)$$

Thay $t = x^2 + 4x + 8$, ta được:

$$(x^2 + 4x + 8 + x)(x^2 + 4x + 8 + 2x) = (x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8)$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Phân tích các đa thức thành nhân tử:

Bài tập 1:

a) $3x^2y^2 + 15x^2y - 21xy^2 = 3xy(xy + 5x - 7y)$

b) $4x(x-2y) + 12y(2y-x) = 4x(x-2y) - 12y(x-2y) = 4(x-2y)(x-3)$

c) $4x(x+1)^2 - 5x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(4x-5x^2-4)$

Bài tập 2:

a) $x^2 - y^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2 = (x+1)^2 - y^2 = (x+1+y)(x+1-y)$

b) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2 = (x^2 + 9 + 6x)(x^2 + 9 - 6x) = (x+3)^2(x-3)^2$

c) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x-y)^2 - (z-t)^2 = (x-y+z-t)(x-y-z+t)$

d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3 = (x-1)^3 - y^3 = (x-1-y)[(x-1)^2 + (x-1)y + y^2]$

e) $(x^2 - 2x + 1)^3 + y^6 = (x-1)^6 + y^6 = [(x-1)^2]^3 + (y^2)^3$
 $= [(x-1)^2 + y^2][(x-1)^4 - (x-1)^2y^2 + y^4]$

$$g) x^4y^4 - z^4 = (x^2y^2)^2 - (z^2)^2 = (x^2y^2 + z^2)(x^2y^2 - z^2)$$

$$= (x^2y^2 + z^2)(xy + z)(xy - z)$$

$$h) -125a^3 + 75a^2 - 15a + 1 = (1 - 5a)^3$$

Bài tập 3:

$$a) x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = (x^3 - 8) - (4x^2 - 8x)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 4x(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4 - 4x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$b) a^2 + b^2 - a^2b^2 + ab - a - b = (a^2 - a) + (ab - b) + (b^2 - a^2b^2)$$

$$= a(a - 1) + b(a - 1) - b^2(a^2 - 1) = (a - 1)(a + b - ab^2 - b^2)$$

$$= (a - 1)[(a - ab^2) + (b - b^2)] = (a - 1)[a(1 - b)(1 + b) + b(1 - b)]$$

$$= (a - 1)(1 - b)(a + ab + b)$$

$$c) x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$$

$$= (x^2y + xy^2) + (xz^2 + yz^2) + (x^2z + y^2z + 2xyz) =$$

$$= xy(x + y) + z^2(x + y) + z(x^2 + 2xy + y^2) = xy(x + y) + z^2(x + y) + z(x + y)^2$$

$$= (x + y)(xy + z^2 + zx + zy) = (x + y)[(xy + zy) + (zx + z^2)]$$

$$= (x + y)[y(x + z) + z(x + z)] = (x + y)(x + z)(y + z)$$

$$d) 8xy^3 - 5xyz - 24y^2 + 15z = (8xy^3 - 24y^2) - (5xyz - 15z) = 8y^2(xy - 3) - 5z(xy - 3)$$

$$= (xy - 3)(8y^2 - 5z)$$

$$e) x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^3 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Bài tập 4:

$$a) x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$$

$$= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

$$b) x^3 + 3x - 4 = x^3 - 1 + 3x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1 + 3) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$$

$$c) x^3 - 3x^2 + 2 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2 = x^2(x - 1) - 2(x^2 - 1) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$$

$$d) 2x^3 + x^2 - 4x - 12 = (x^2 - 4x + 4) + (2x^3 - 16) = (x - 2)^2 + 2(x^3 - 8)$$

$$= (x - 2)^2 + 2(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = (x - 2)(x - 2 + 2x^2 + 4x + 8)$$

$$= (x - 2)(2x^2 + 5x + 6)$$

Bài tập 5 :

$$a) 25x^2(x - y) - x + y = 25x^2(x - y) - (x - y) = (x - y)(25x^2 - 1)$$

$$= (x - y)(5x - 1)(5x + 1)$$

$$b) 16x^2(z^2 - y^2) - z^2 + y^2 = 16x^2(z^2 - y^2) - (z^2 - y^2) = (z^2 - y^2)(16x^2 - 1)$$

$$= (z - y)(z + y)(4x - 1)(4x + 1)$$

$$c) x^3 + x^2y - x^2z - xyz = (x^3 - x^2z) + (x^2y - xyz) = x^2(x - z) + xy(x - z)$$

$$= (x - z)(x^2 + xy) = x(x + y)(x - z)$$

$$d) 12x^5y + 24x^4y^2 + 12x^3y^3 = 12x^3y(x^2 + 2xy + y^2) = 12x^3y(x + y)^2$$

$$e) \frac{1}{m} (x^2 + y^2)^2 - mx^2y^2 = m \left[\frac{1}{m^2} (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \right] =$$

$$= m \left[\frac{1}{m} (x^2 + y^2) - xy \right] \left[\frac{1}{m} (x^2 + y^2) + xy \right]$$

$$f) \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 2 \left[\frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2) + xy \right] \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - xy \right]$$

$$g) 4x^3y + \frac{1}{2} yz^3 = 4y(x^3 + \frac{1}{8} z^3) = 4y(x + \frac{1}{2} z)(x^2 - \frac{1}{2} xz + \frac{1}{4} z^2)$$

$$h) x^9 + x^8 - x - 1 = x^8(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^8 - 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x + 1)(x + 1)(x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$= (x + 1)^2(x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Bài tập 6 :

$$a) a^2 + 2b^2 - 2c^2 + 3ab + ac =$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + 2b^2 - 2c^2 + ab - ac$$

$$= a(a + 2b + 2c) + 2(b^2 - c^2) + a(b - c)$$

$$= a(a + 2b + 2c) + (b - c)[2b + 2c + a]$$

$$= (a + 2b + 2c)(a + b - c)$$

$$b) a^2 - 2b^2 - 2c^2 - ab + 5bc - ac$$

$$= a^2 + ab - 2ac - 2ab - 2b^2 + 4bc + ac + bc - 2c^2$$

$$= a(a + b - 2c) - 2b(a + b - 2c) + c(a + b - 2c)$$

$$= (a + b - 2c)(a - 2b + c)$$

$$c) a^4 + 2a^3 + 1$$

Cách 1:

$$a^4 + 2a^3 + 1 = a^4 + a^3 + a^3 + 1 = a^3(a + 1) + (a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$= (a + 1)(a^3 + a^2 - a + 1)$$

Cách 2:

$$a^4 + 2a^3 + 1 = a^4 + a^3 + a^3 + a^2 - a^2 - a + a + 1$$

$$= a^3(a + 1) + a^2(a + 1) - a(a + 1) + (a + 1)$$

$$= (a + 1)(a^3 + a^2 - a + 1)$$

$$d) m^3 + 2m - 3 = m^3 - 1 + 2m - 2 = (m - 1)(m^2 + m + 1) + 2(m - 1)$$

$$= (m - 1)(m^2 + m + 1 + 2) = (m - 1)(m^2 + m + 3)$$

$$e) 4a^2 - 4b^2 - 4a + 1 = (4a^2 - 4a + 1) - 4b^2 = (2a - 1)^2 - 4b^2$$

$$= (2a - 1 + 2b)(2a - 1 - 2b)$$

$$f) 8b^2 + 2b - 1 = 9b^2 - b^2 + 2b - 1 = 9b^2 - (b - 1)^2 = (3b - b + 1)(3b + b - 1)$$

$$g) a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab = (a^2 - 2ab + b^2) + (2a - 2b)$$

$$= (a - b)^2 + 2(a - b) = (a - b)(a - b + 2)$$

Bài tập 7:

$$a) x^{m+2} - x^m = x^m(x^2 - 1) = x^m(x - 1)(x + 1)$$

$$b) x^{n+3} - x^n = x^n(x^3 - 1) = x^n(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$c) x^{p+3} + x^p = x^p(x^3 + 1) = x^p(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$d) x^{2q} - x^q = x^q(x^q - 1) = x^q(x - 1)(x^{q-1} + x^{q-2} + \dots + x^2 + x + 1)$$

Bài tập 8: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = xy - 4y - 5x + 20, \text{ với } x = 14; y = 5,5$$

$$\text{Ta có } A = xy - 4y - 5x + 20 = y(x - 4) - 5(x - 4) = (x - 4)(y - 5)$$

Với $x = 14; y = 5,5$, ta có:

$$A = (14 - 4)(5,5 - 5) = 10 \cdot 0,5 = 5$$

$$b) B = x^2 + xy - 5x - 5y; \text{ với } x = 5\frac{1}{5}; y = 4\frac{4}{5}$$

$$B = x(x + y) - 5(x + y) = (x + y)(x - 5)$$

$$\text{Với } x = 5\frac{1}{5}; y = 4\frac{4}{5}, \text{ ta có:}$$

$$B = (5\frac{1}{5} + 4\frac{4}{5})(5\frac{1}{5} - 5) = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$$

$$c) C = xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1, \text{ với } x = 9; y = 10; z = 11.$$

$$\text{Ta có: } C = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 =$$

$$= (xyz - xy) - (yz - y) - (zx - x) + (z - 1) =$$

$$= xy(z - 1) - y(z - 1) - x(z - 1) + (z - 1)$$

$$= (z - 1)(xy - y - x + 1).$$

Với $x = 9; y = 10; z = 11$, ta có:

$$C = (11 - 1)(9 \cdot 10 - 10 - 9 + 1) = 10 \cdot 72 = 720$$

$$d) D = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3, \text{ với } x = 5,75; y = 4,25$$

$$\text{Ta có: } D = (x^3 + y^3) - xy(x + y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy)$$

$$= (x + y)[(x(x - y) - y(x - y))] = (x + y)(x - y)^2$$

Với $x = 5,75; y = 4,25$, ta có:

$$D = (5,75 + 4,25)(5,75 - 4,25)^2 = 10 \cdot 1,5^2 = 10 \cdot 2,25 = 22,5$$

Bài tập 9: Tìm x, biết:

$$a) x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 - 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 3^2 = 0$$

$$(x - 5 - 3)(x - 5 + 3) = 0$$

$$(x - 8)(x - 2) = 0$$

$$x - 8 = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0$$

$$x = 8 \text{ hoặc } x = 2$$

$$b) x^2 - 11x - 26 = 0$$

$$x^2 + 2x - 13x - 26 = 0$$

$$x(x + 2) - 13(x + 2) = 0$$

$$(x + 2)(x - 13) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ hoặc } x - 13 = 0$$

$$x = -2 \text{ hoặc } x = 13$$

$$c) 2x^2 + 7x - 4 = 0$$

$$2x^2 - x + 8x - 4 = 0$$

$$x(2x - 1) + 4(2x - 1) = 0$$

$$(2x - 1)(x + 4) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \text{ hoặc } x + 4 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -4$$

Bài tập 10: Tìm x, biết:

$$a) (x - 2)(x - 3) + (x - 2) - 1 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3 + 1) - 1 = 0$$

$$(x - 2)(x - 2) = 1$$

$$(x - 2)^2 = 1$$

$$x - 2 = 1 \text{ hoặc } x - 2 = -1$$

$$x = 3 \text{ hoặc } x = 1$$

$$b) (x + 2)^2 - 2x(2x + 3) = (x + 1)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 6x = x^2 + 2x + 1$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 - 4 = 0$$

$$(2x + 1)^2 - 2^2 = 0$$

$$(2x + 1 - 2)(2x + 1 + 2) = 0$$

$$(2x - 1)(2x + 3) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \text{ hoặc } 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}; \text{ hoặc } x = -\frac{3}{2}$$

$$c) 6x^3 + x^2 = 2x$$

$$6x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x(6x^2 + x - 2) = 0$$

$$x(6x^2 + 4x - 3x - 2) = 0$$

$$x[2x(3x + 2) - (3x + 2)] = 0$$

$$x(3x + 2)(2x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } 3x + 2 = 0 \text{ hoặc } 2x - 1 = 0$$

$$x = 0; x = -\frac{2}{3}; x = \frac{1}{2}$$

$$d) x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$$

Nhân hai vế với 2:

$$2x^8 - 2x^5 + 2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^8 - 2x^5 + x^2) + (x^2 - 2x + 1) + (x^8 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - x)^2 + (x - 1)^2 + x^8 + 1 = 0$$

Vế trái lớn hơn 0, vế phải bằng 0. Vậy phương trình vô nghiệm.

BÀI TẬP NÂNG CAO:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

Bài tập 1:

$$a) ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$$

$$= ab(a - b) + bc[b - a + a - c] + ac(c - a)$$

$$\begin{aligned}
&= ab(a-b) - bc(a-b) + bc(a-c) - ac(a-c) \\
&= (a-b)(ab-bc) + (a-c)(bc-ac) \\
&= b(a-b)(a-c) - c(a-c)(a-b) \\
&= (a-b)(a-c)(b-c) \\
b) & a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \\
&= a(b^2 - c^2) + b[c^2 - b^2 + b^2 - a^2] + c(a^2 - b^2) \\
&= a(b^2 - c^2) - b(b^2 - c^2) - b(a^2 - b^2) + c(a^2 - b^2) \\
&= (b^2 - c^2)(a-b) - (a^2 - b^2)(b-c) \\
&= (b-c)(b+c)(a-b) - (a-b)(a+b)(b-c) \\
&= (a-b)(b-c)(b+c-a-b) \\
&= (a-b)(b-c)(c-a) \\
c) & a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3) \\
&= a(b^3 - c^3) + b[c^3 - b^3 + b^3 - a^3] + c(a^3 - b^3) \\
&= a(b^3 - c^3) - b(b^3 - c^3) - b(a^3 - b^3) + c(a^3 - b^3) \\
&= (b^3 - c^3)(a-b) - (a^3 - b^3)(b-c) \\
&= (b-c)(b^2 + bc + c^2)(a-b) - (a-b)(a^2 + ab + b^2)(b-c) \\
&= (a-b)(b-c)(b^2 + bc + c^2 - a^2 - ab - b^2) \\
&= (a-b)(b-c)(bc + c^2 - a^2 - ab) \\
&= (a-b)(b-c)[(bc - ab) + (c^2 - a^2)] \\
&= (a-b)(b-c)[b(c-a) + (c-a)(c+a)] \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(b+c+a)
\end{aligned}$$

Bài tập 2:

$$\begin{aligned}
a) & x^2 + 7x + 12 = x^2 + 4x + 3x + 12 = x(x+4) + 3(x+4) = (x+4)(x+3) \\
b) & 3x^2 - 8x + 5 = 3x^2 - 3x - 5x + 5 = 3x(x-1) - 5(x-1) = (x-1)(3x-1) \\
c) & x^4 + 5x^2 - 6 = x^4 - x^2 + 6x^2 - 6 = x^2(x^2 - 1) + 6(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 6) \\
&= (x-1)(x+1)(x^2 + 6) \\
d) & x^4 - 34x^2 + 225 = x^4 - 2.17x^2 + 289 - 64 = (x^2 - 17)^2 - 64 \\
&= (x^2 - 17 + 8)(x^2 - 17 - 8) = (x^2 - 9)(x^2 - 25) = (x-3)(x+3)(x-5)(x+5)
\end{aligned}$$

Bài tập 3:

$$\begin{aligned}
a) & x^2 - 5xy + 6y^2 = x^2 - 2xy - 3xy + 6y^2 = x(x-2y) - 3y(x-2y) \\
&= (x-2y)(x-3y) \\
b) & 4x^2 - 17xy + 13y^2 = 4x^2 - 4xy - 13xy + 13y^2 = 4x(x-y) - 13y(x-y) \\
&= (x-y)(4x-13y)
\end{aligned}$$

Bài tập 4:

$$\begin{aligned}
a) & x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = x^5 - 2x^4 + x^4 - 2x^3 + x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + x - 2 \\
&= x^4(x-2) + x^3(x-2) + x^2(x-2) + x(x-2) + (x-2) \\
&= (x-2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\
b) & x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1 \\
&= (x^9 - x^7) - (x^6 - x^4) - (x^5 - x^3) + (x^2 - 1) \\
&= x^7(x^2 - 1) - x^4(x^2 - 1) - x^3(x^2 - 1) + (x^2 - 1) \\
&= (x^2 - 1)(x^7 - x^4 - x^3 + 1) \\
&= (x^2 - 1)[(x^7 - x^3) - (x^4 - 1)] \\
&= (x^2 - 1)(x^4 - 1)(x^3 - 1) \\
&= (x-1)(x+1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x-1)(x^2 + x + 1) \\
&= (x-1)(x+1)(x^2 + 1)(x-1)(x+1)(x-1)(x^2 + x + 1) \\
&= (x-1)^3(x+1)^2(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

Bài tập 5:

$$\begin{aligned}
a) & x^5 + x + 1 = x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x + 1 \\
&= (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) \\
&= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \\
b) & x^8 + x^4 + 1 = x^8 + x^4 - x^2 + x^2 - x + x + 1 \\
&= (x^8 - x^2) + (x^4 - x) + x^2 + x + 1 \\
&= x^2(x^6 - 1) + x(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\
&= x^2(x^3 - 1)(x^3 + 1) + x(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1) + x(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1) \\
&= (x^2+x+1)[x^2(x-1)(x^3+1) + x(x-1) + 1] \\
&= (x^2+x+1)[(x^3-x^2)(x^3+1) + x^2-x+1] \\
&= (x^2+x+1)(x^6+x^3-x^5-x^2+x^2-x+1) \\
&= (x^2+x+1)(x^6-x^5+x^3-x+1) \\
&= (x^2+x+1)[(x^6-x^5+x^4) - (x^4-x^3+x^2) + (x^2-x+1)] \\
&= (x^2+x+1)[x^4(x^2-x+1) - x^2(x^2-x+1) + (x^2-x+1)] \\
&= (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)
\end{aligned}$$

Nhận xét: Phương pháp trên có thể sử dụng đối với các đa thức có dạng:

$$x^5 + x^4 + 1; \quad x^8 + x^4 + 1; \quad x^{10} + x^8 + 1; \dots$$

là những đa thức có dạng $x^m + x^n + 1$

trong đó $m = 3k + 1$; $n = 3h + 2$.

Khi tìm cách giảm dần số mũ của lũy thừa ta cần chú ý đến các biểu thức dạng

$$x^6 - 1; \quad x^3 - 1 \text{ là những biểu thức chia hết cho } (x^2 + x + 1)$$

- Tuy nhiên, tùy theo đặc điểm của mỗi bài ta có thể có những cách giải khác gọn hơn, chẳng hạn đối với bài 5b:

$$\begin{aligned}
x^8 + x^4 + 1 &= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 \\
&= (x^4 + 1 + x^2)(x^4 + 1 - x^2) \\
&= [(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2](x^4 - x^2 + 1) \\
&= [(x^2 + 1)^2 - x^2](x^4 - x^2 + 1) \\
&= (x^2 + 1 - x)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)
\end{aligned}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP THEO DẠNG

VẤN ĐỀ I. Phương pháp đặt nhân tử chung

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung:

- a) $4x^2 - 6x$ b) $9x^4y^3 + 3x^2y^4$ c) $x^3 - 2x^2 + 5x$
d) $3x(x-1) + 5(x-1)$ e) $2x^2(x+1) + 4(x+1)$ f) $-3x - 6xy + 9xz$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung:

- a) $2x^2y - 4xy^2 + 6xy$ b) $4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 2x^4y$
c) $9x^2y^3 - 3x^4y^2 - 6x^3y^2 + 18xy^4$ d) $7x^2y^2 - 21xy^2z + 7xyz - 14xy$
e) $a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{3}{2}a^4x^2y$

Bài 3. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung:

- | | | |
|-------------------------------|--|--------------------------------|
| 1). $2x^2 - 4x$ | 2). $3x - 6y$ | 3). $x^2 - 3x$ |
| 4). $4x^2 - 6x$ | 5). $x^3 - 4x$ | 6). $9x^3y^2 + 3x^2y^2$ |
| 7). $x^3 + 2x^2 + 3x$ | 8). $6x^2y + 4xy^2 + 2xy$ | 9). $5x^2(x-2y) - 15x(x-2y)$ |
| 10). $3(x-y) - 5x(y-x)$ | 11). $3x(x-1) + 5(1-x)$ | 12). $2(2x-1) + 3(1-2x)$ |
| 13). $10x(x-y) - 8y(y-x)$ | 14). $3x(y+2) - 3(y+2)$ | 15). $x^2 - y^2 - 2x + 2y$ |
| 16). $2x + 2y - x^2 - xy$ | 17). $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$ | 18). $x^2y - x^3 - 9y + 9x$ |
| 19). $x^2(x-1) + 16(1-x)$ | 20). $2x^2 + 3x - 2xy - 3y$ | 21). $x^3 - 4x^2 + 4x$ |
| 22). $15x^2y + 20xy^2 - 25xy$ | 23). $4x^2 + 8xy - 3x - 6y$ | 24). $x^3 + 6x^2 + 9x$ |
| 25). $x^2 - xy + x - y$ | 26). $xy - 2x - y^2 + 2y$ | 27). $x^2 + x - xy - y$ |
| 28). $x^2 + 4x - y^2 + 4$ | 29). $x^2 - 2xy + y^2 - 4$ | 30). $x^2 - 2xy + y^2 - x + y$ |
| 31). $xz + yz - 5x - 5y$ | 32). $x^2 - y^2 - 2x - 2y$ | 33). $x^2 - 1 - 2xy + 2y$ |
| 34). $(x+3)^2 - (2x-5)(x+3)$ | 35). $(3x+2)^2 + (3x-2)^2 - 2(9x^2-4)$ | |

VẤN ĐỀ II. Phương pháp nhóm nhiều hạng tử

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^3 - 2x^2 + 2x - 13$ b) $x^2y + xy + x + 1$ c) $ax + by + ay + bx$

d) $x^2 - (a+b)x + ab$

e) $x^2y + xy^2 - x - y$

f) $ax^2 + ay - bx^2 - by$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $ax - 2x - a^2 + 2a$

b) $x^2 + x - ax - a$

c) $2x^2 + 4ax + x + 2a$

d) $2xy - ax + x^2 - 2ay$

e) $x^3 + ax^2 + x + a$

f) $x^2y^2 + y^3 + zx^2 + yz$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$

b) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$

c) $x^3 + 2x^2y - x - 2y$

d) $3x^2 - 3y^2 - 2(x-y)^2$

e) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$

f) $x^2 - y^2 - 2x - 2y$

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x-3)(x-1) - 3(x-3)$

b) $(x-1)(2x+1) + 3(x-1)(x+2)(2x+1)$

c) $(6x+3) - (2x-5)(2x+1)$

d) $(x-5)^2 + (x+5)(x-5) - (5-x)(2x+1)$

e) $(3x-2)(4x-3) - (2-3x)(x-1) - 2(3x-2)(x+1)$

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(a-b)(a+2b) - (b-a)(2a-b) - (a-b)(a+3b)$

b) $5xy^3 - 2xyz - 15y^2 + 6z$

c) $(x+y)(2x-y) + (2x-y)(3x-y) - (y-2x)$

d) $ab^3c^2 - a^2b^2c^2 + ab^2c^3 - a^2bc^3$

e) $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

Bài 6. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử:

1). $x^2 + 8x + 15$

2). $x^2 - x - 12$

3). $x^2 - 8x + 7$

4). $x^2 - 5x + 6$

5). $x^2 - 3x - 2$

6). $x^2 - 6x + 8$

7). $3x^2 + 9x - 30$

8). $x^2 - 9x + 18$

9). $x^2 - 5x - 14$

10). $x^2 - 7x + 12$

11). $x^2 - 7x + 10$

12). $x^2 + 6x + 5$

13). $3x^2 - 5x - 2$

14). $2x^2 + x - 6$

15). $7x^2 + 50x + 7$

16). $12x^2 + 7x - 12$

17). $15x^2 + 7x - 2$

18). $2x^2 + 5x + 2$

19). $4x^2 - 36x - 56$

20). $2x^2 + 10x + 8$

21). $x^2 + 4xy - 21y^2$

22). $5x^2 + 6xy + y^2$

23). $x^2 + 2xy - 15y^2$

24). $x^2 - 4xy + 10y^2$

25). $x^4 + x^2 - 2$

26). $x^4 + 4x^2 - 5$

27). $x^3 - 19x - 30$

28). $x^3 - 7x - 6$

29). $x^3 - 5x^2 - 14x$

VẤN ĐỀ III. Phương pháp dùng hằng đẳng thức**Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2 - 12x + 9$

b) $4x^2 + 4x + 1$

c) $1 + 12x + 36x^2$

d) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

e) $\frac{x^2}{4} + 2xy + 4y^2$

f) $-x^2 + 10x - 25$

g) $-16a^4b^6 - 24a^5b^5 - 9a^6b^4$

h) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

i) $25x^4 - 10x^2y + y^2$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(3x-1)^2 - 16$

b) $(5x-4)^2 - 49x^2$

c) $(2x+5)^2 - (x-9)^2$

d) $(3x+1)^2 - 4(x-2)^2$

e) $9(2x+3)^2 - 4(x+1)^2$

f) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

g) $(ax+by)^2 - (ay+bx)^2$

h) $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab+2)^2$

i) $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$

k) $9(x+y-1)^2 - 4(2x+3y+1)^2$

l) $-4x^2 + 12xy - 9y^2 + 25$

m) $x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $8x^3 - 64$

b) $1 + 8x^6y^3$

c) $125x^3 + 1$

d) $8x^3 - 27$

e) $27x^3 + \frac{y^3}{8}$

f) $125x^3 + 27y^3$

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ c) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$
 d) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ e) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy$ b) $x^6 - y^6$ c) $25 - a^2 + 2ab - b^2$
 d) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ e) $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 4c^2$

Bài 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $(x^2 - 25)^2 - (x - 5)^2$ b) $(4x^2 - 25)^2 - 9(2x - 5)^2$ c) $4(2x - 3)^2 - 9(4x^2 - 9)^2$
 d) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$ e) $(3x^2 + 3x + 2)^2 - (3x^2 + 3x - 2)^2$

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $(xy + 1)^2 - (x + y)^2$ b) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ c) $3x^4y^2 + 3x^3y^2 + 3xy^2 + 3y^2$
 d) $4(x^2 - y^2) - 8(x - ay) - 4(a^2 - 1)$ e) $(x + y)^3 - 1 - 3xy(x + y - 1)$

Bài 8. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^3 - 1 + 5x^2 - 5 + 3x - 3$ b) $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$
 d) $5x^3 - 3x^2y - 45xy^2 + 27y^3$ e) $3x^2(a - b + c) + 36xy(a - b + c) + 108y^2(a - b + c)$

Bài 9. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức:

- 1). $(x + y)^2 - 25$ 2). $100 - (3x - y)^2$ 3). $64x^2 - (8a + b)^2$.
 4). $4a^2b^4 - c^4d^2$. 5). $7x^3 - a^3b^3$. 6). $16x^3 + 54y^3$.
 7). $8x^3 - y^3$. 8). $(a + b)^2 - (2a - b)^2$ 9). $(a + b)^3 - (a - b)^3$
 10). $(a + b)^3 + (a - b)^3$ 11). $(6x - 1)^2 - (3x + 2)$ 12). $(3x - 1)^2 - 16$
 13). $(5x - 4)^2 - 49x^2$. 14). $(2x + 5)^2 - (x - 9)^2$. 15). $(3x + 1)^2 - 4(x - 2)^2$
 16). $9(2x + 3)^2 - 4(x + 1)^2$. 17). $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ 18). $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$
 19). $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab + 2)^2$ 20). $25 - a^2 + 2ab - b^2$ 21). $x^6 - y^6$
 22). $x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy$ 23). $(xy + 1)^2 - (x + y)^2$ 24). $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$.
 25). $(x^2 - 25)^2 - (x - 5)^2$ 26). $-4x^2 + 12xy - 9y^2 + 25$ 27). $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2$
 28). $(x + y)^3 - 1 - 3xy(x + y - 1)$ 29). $4(2x - 3)^2 - 9(4x^2 - 9)^2$.
 30). $x^3 - 1 + 5x - 5 + 3x - 3$ 31). $(2x + 2)^2 + 2(2x + 2)(2x - 2) + (2x - 2)^2$.

VẤN ĐỀ IV. Một số phương pháp khác

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- a) $x^2 - 5x + 6$ b) $3x^2 + 9x - 30$ c) $x^2 - 3x + 2$
 d) $x^2 - 9x + 18$ e) $x^2 - 6x + 8$ f) $x^2 - 5x - 14$
 g) $x^2 + 6x + 5$ h) $x^2 - 7x + 12$ i) $x^2 - 7x + 10$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- a) $3x^2 - 5x - 2$ b) $2x^2 + x - 6$ c) $7x^2 + 50x + 7$
 d) $12x^2 + 7x - 12$ e) $15x^2 + 7x - 2$ f) $a^2 - 5a - 14$
 g) $2m^2 + 10m + 8$ h) $4p^2 - 36p + 56$ i) $2x^2 + 5x + 2$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- a) $x^2 + 4xy - 21y^2$ b) $5x^2 + 6xy + y^2$ c) $x^2 + 2xy - 15y^2$
 d) $(x - y)^2 + 4(x - y) - 12$ e) $x^2 - 7xy + 10y^2$ f) $x^2yz + 5xyz - 14yz$

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- a) $a^4 + a^2 + 1$ b) $a^4 + a^2 - 2$ c) $x^4 + 4x^2 - 5$
 d) $x^3 - 19x - 30$ e) $x^3 - 7x - 6$ f) $x^3 - 5x^2 - 14x$

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (thêm bớt cùng một hạng tử)

- | | | |
|----------------------|-------------------|--------------------|
| a) $x^4 + 4$ | b) $x^4 + 64$ | c) $x^8 + x^7 + 1$ |
| d) $x^8 + x^4 + 1$ | e) $x^5 + x + 1$ | f) $x^3 + x^2 + 4$ |
| g) $x^4 + 2x^2 - 24$ | h) $x^3 - 2x - 4$ | i) $a^4 + 4b^4$ |

HD: Số hạng cần thêm bớt:

- | | | | | | |
|-----------|----------------|--------------|----------|----------|----------|
| a) $4x^2$ | b) $16x^2$ | c) $x^2 + x$ | d) x^2 | e) x^2 | f) x^2 |
| g) $4x^2$ | h) $2x^2 + 2x$ | i) $4a^2b^2$ | | | |

Bài 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (đặt biến phụ)

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$ | b) $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$ |
| c) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12$ | d) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$ |
| e) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$ | f) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$ |

Bài 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (đặt biến phụ)

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$ | b) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$ |
| c) $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$ | d) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$ |

VẤN ĐỀ V. Tổng hợp

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|------------------------|
| a) $x^2 + 4x + 3$ | b) $16x - 5x^2 - 3$ | c) $2x^2 + 7x + 5$ |
| d) $2x^2 + 3x - 5$ | e) $x^3 - 3x^2 + 1 - 3x$ | f) $x^2 - 4x - 5$ |
| g) $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$ | h) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ | i) $x^4 + x^3 + x + 1$ |
| k) $x^4 - x^3 - x^2 + 1$ | l) $(2x+1)^2 - (x-1)^2$ | m) $x^4 + 4x^2 - 5$ |

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | | |
|----------------------------------|---------------------------|--------------------------|
| a) $-x - y^2 + x^2 - y$ | b) $x(x+y) - 5x - 5y$ | c) $x^2 - 5x + 5y - y^2$ |
| d) $5x^3 - 5x^2y - 10x^2 + 10xy$ | e) $27x^3 - 8y^3$ | f) $x^2 - y^2 - x - y$ |
| g) $x^2 - y^2 - 2xy + y^2$ | h) $x^2 - y^2 + 4 - 4x$ | i) $x^6 - y^6$ |
| k) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 27z^3$ | l) $4x^2 + 4x - 9y^2 + 1$ | m) $x^2 - 3x + xy - 3y$ |

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $5x^2 - 10xy + 5y^2 - 20z^2$ | b) $x^2 - z^2 + y^2 - 2xy$ | c) $a^3 - ay - a^2x + xy$ |
| d) $x^2 - 2xy - 4z^2 + y^2$ | e) $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 12z^2$ | f) $x^2 - 6xy - 25z^2 + 9y^2$ |
| g) $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$ | h) $x^2 - 2xy + y^2 - xz + yz$ | i) $x^2 - 2xy + tx - 2ty$ |
| k) $2xy + 3z + 6y + xz$ | l) $x^2 + 2xz + 2xy + 4yz$ | m) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ |

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | |
|--|----------------------------------|
| a) $x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3$ | b) $bc(b+c) + ca(c-a) - ab(a+b)$ |
| c) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ | d) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$ |
| e) $x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1$ | f) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ |
| g) $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$ | h) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ |

Bài 5. Giải các phương trình sau:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $(x-2)^2 - (x-3)(x+3) = 6$ | b) $(x+3)^2 + (4+x)(4-x) = 10$ |
| c) $(x+4)^2 + (1-x)(1+x) = 7$ | d) $(x-4)^2 - (x-2)(x+2) = 6$ |
| e) $4(x-3)^2 - (2x-1)(2x+1) = 10$ | f) $25(x+3)^2 + (1-5x)(1+5x) = 8$ |

g) $9(x+1)^2 - (3x-2)(3x+2) = 10$

h) $-4(x-1)^2 + (2x-1)(2x+1) = -3$

Bài 6. Chứng minh rằng:

a) $a^2(a+1) + 2a(a+1)$ chia hết cho 6 với $a \in \mathbb{Z}$.

b) $a(2a-3) - 2a(a+1)$ chia hết cho 5 với $a \in \mathbb{Z}$.

c) $x^2 + 2x + 2 > 0$ với $x \in \mathbb{Z}$.

d) $-x^2 + 4x - 5 < 0$ với $x \in \mathbb{Z}$.

Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử tổng hợp:

1). $x^2 - 25 + y^2 + 2xy$

2). $81x^2 - 6yz - 9y^2 - z^2$

3). $3x^2 - 6xy + 3y^2$

4). $2x^2 + 2y^2 - x^2z + z - y^2z - 2$

5). $x^2 - 2xy + y^2 - 16$

6). $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x$

7). $x^2 + 2x + 1 - y^2$

8). $x^2 + 2xy + y^2 - 9z^2$

9). $x^3 - 10x^2 + 25x - 16xy^2$

10). $3xy^2 - 2xy + 12x$

11). $5y^3 - 10xy^2 + 5yx^2 - 20y$

12). $x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz$

13). $9x^2 + y^2 + 6xy$

14). $8 - 12x + 6x^2 - x^3$

15). $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$

16). $x^2 - xz - 9y^2 + 3yz$

17). $x^3 - x^2 - 5x + 125$

18). $x^3 + 2x^2 - 6x - 27$

19). $12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$

20). $4x^4 + 4x^3 - x^2 - x$

21). $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$

22). $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$

23). $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2$

24). $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$

25). $ac - bc - a^2 + 2ab - b^2$

26). $x^4 + 4$

27). $(x - y + 5)^2 - 2(x - y + 5) + 1$

28). $x^4 + 64$

29). $x^8 + x^7 + 1$

30). $x^8 + x^4 + 1$

31). $x^5 + x + 1$

32). $x^3 + x^2 + 4$

33). $x^4 + 2x^2 - 24$

34). $x^3 - 2x - 4$

35). $x^2 + 4x + 3$

36). $16x - 5x^2 - 3$

37). $2x^2 + 7x + 5$

38). $2x^2 + 3x - 5$

39). $x^2 - 4x - 5$

40). $x^4 + x^3 + x + 1$

41). $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$

42). $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

43). $x^4 - x^3 - x^2 + 1$

44). $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2$

45). $x^4 + 4x^2 - 5$

46). $-x - y^2 + x^2 - y$

47). $x(x + y) - 5x - 5y$

48). $x^2 - 5x + 5y - y^2$

49). $x^2 - y^2 - x - y$

50). $x^2 - y^2 - 2xy + y^2$

51). $x^2 - y^2 + 4 - 4x$

52). $x^2 + xy - 3x - 3y$

53). $4x^2 + 4x - 9y^2 + 1$

54). $5x^3 - 5x^2y - 10x^2 + 10xy$

55). $5x^2 - 10xy + 5y^2 - 20z^2$

56). $x^2 - z^2 + y^2 - 2xy$

57). $x^3 - xy - x^2z + yz$

58). $x^2 - 2xy - 4z^2 + y^2$

59). $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 12z^2$

60). $x^2 - 6xy + 9y^2 - 25z^2$

61). $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$

62). $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$

63). $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$

64). $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$

65). $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$

66). $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

67). $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12$

68). $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

69). $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$

70). $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$

71). $(x+y+x)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

72). $xy(x + y) + yx(y - z) - zx(z + x)$

73). $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2$

74). $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$

75). $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

76). $x(x + 4)(x - 4) - (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

77). $(y - 3)(y + 3)(y^2 + 9) - (y^2 + 2)(y^2 - 2)$

78). $(a + b - c)^2 - (a - c)^2 - 2ab + 2bc$

IV. CHIA ĐA THỨC

VẤN ĐỀ I. Chia đơn thức cho đơn thức

TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

Chia đơn thức cho đơn thức:

- Đơn thức A gọi là chia hết cho đơn thức B $\neq 0$ nếu có một đơn thức C sao cho

$A = B.C$; C được gọi là thương của A chia cho B.

- Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A.

- Quy tắc chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B):
- + Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
- + Chia từng lũy thừa của biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- + Nhân các kết quả tìm được với nhau.

Ví dụ 1: Chia các đơn thức:

a) $15a^2b^3c : (3a^2b) = 5b^2c$

b) $-21xy^5z^3 : (7xy^2z^3) = -3y^3$

c) $2m^3n : (-3m^2n) = -\frac{2}{3}m$

d) $(-\frac{1}{2}a^3b^4c^5) : (\frac{3}{2}a^2bc^5) = -\frac{1}{3}ab^3$

BÀI TẬP**Chia các đơn thức:****Bài 1**

1) $(-2)^5 : (-2)^3$

2) $(-y)^7 : (-y)^3$

3) $(x)^{12} : (-x^{10})$

4) $(2x^6) : (2x)^3$

5) $(-3x)^5 : (-3x)^2$

6) $(xy^2)^4 : (xy^2)^2$

Bài 2

a) $(-2)^5 : (-2)^3$

b) $(-y)^7 : (-y)^3$

c) $x^{12} : (-x^{10})$

d) $(2x^6) : (2x)^3$

e) $(-3x)^5 : (-3x)^2$

f) $(xy^2)^4 : (xy^2)^2$

VẤN ĐỀ II. Chia đa thức cho đơn thức**Chia đa thức cho đơn thức:**

- Đa thức A gọi là chia hết cho đơn thức $B \neq 0$, nếu có một đa thức C sao cho $A = B.C$

- Đa thức A chia hết cho đơn thức B khi các đơn thức hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B.

- Quy tắc chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B):

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B, ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả lại với nhau.

Ví dụ: Thực hiện các phép chia:

a) $30(a+b)^5 : 6(a+b)^2 = 5(a+b)^3$

b) $13(x-y)^7 : 5(x-y)^3 = \frac{13}{5}(x-y)^4$

c) $\frac{1}{5}(m-2n)^3 : \frac{3}{10}(m-2n)^2 = \frac{2}{3}(m-2n)^2$

BÀI TẬP**Bài 1. Thực hiện phép tính:**

a) $(x+2)^9 : (x+2)^6$

b) $(x-y)^4 : (x-2)^3$

c) $(x^2+2x+4)^5 : (x^2+2x+4)$

d) $2(x^2+1)^3 : \frac{1}{3}(x^2+1)$

e) $5(x-y)^5 : \frac{5}{6}(x-y)^2$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

a) $6xy^2 : 3y$

b) $6x^2y^3 : 2xy^2$

c) $8x^2y : 2xy$

d) $5x^2y^5 : xy^3$

e) $(-4x^4y^3) : 2x^2y$

f) $xy^3z^4 : (-2xz^3)$

g) $\frac{3}{4}x^3y^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)$

h) $9x^2y^4z : 12xy^3$

i) $(2x^3y)(3xy^2) : 2x^3y^2$

k) $\frac{(3a^2b)^3(ab^3)^2}{(a^2b^2)^4}$

l) $\frac{(2xy^2)^3(3x^2y)^2}{(2x^3y^2)^2}$

Bài 3. Thực hiện phép tính:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (2x^3 - x^2 + 5x) : x & \text{b) } (3x^4 - 2x^3 + x^2) : (-2x) & \text{c) } (-2x^5 + 3x^2 - 4x^3) : 2x^2 \\ \text{d) } (x^3 - 2x^2y + 3xy^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right) & \text{e) } [3(x-y)^5 - 2(x-y)^4 + 3(x-y)^2] : 5(x-y)^2 \end{array}$$

Bài 4. Thực hiện phép tính:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (3x^5y^2 + 4x^3y^3 - 5x^2y^4) : 2x^2y^2 & \text{b) } \left(\frac{3}{5}a^6x^3 + \frac{3}{7}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3 \\ \text{c) } (9x^2y^3 - 15x^4y^4) : 3x^2y - (2 - 3x^2y)y^2 & \text{d) } (6x^2 - xy) : x + (2x^3y + 3xy^2) : xy - (2x - 1)x \\ \text{e) } (x^2 - xy) : x + (6x^2y^5 - 9x^3y^4 + 15x^4y^2) : \frac{3}{2}x^2y^3 \end{array}$$

VẤN ĐỀ III. Chia đa thức cho đa thức

Chia đa thức một biến đã sắp xếp:

- Muốn chia đa thức một biến A cho đa thức một biến $B \neq 0$, trước hết ta phải sắp xếp các đa thức này theo lũy thừa giảm dần của cùng một biến và thực hiện phép chia như phép chia các số tự nhiên.

- Với hai đa thức tùy ý A và B của một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất hai đa thức Q và R sao cho $A = B.Q + R$

Trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R thấp hơn bậc của B.

Nếu $R = 0$ thì phép chia A cho B là phép chia hết.

Nếu $R \neq 0$ thì phép chia A cho B là phép chia có dư.

Ví dụ 1: Thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức :

$$\begin{array}{l} \text{a) } (5x^3 - 4x^2 + 7x) : x = 5x^2 - 4x + 7 \\ \text{b) } (xy^2 + \frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{7}{2}x^3y) : 5xy = \frac{1}{5}y + \frac{1}{15}xy^2 + \frac{7}{10}x^2 \end{array}$$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện của n để phép chia thực hiện được (n là số tự nhiên)

$$\text{a) } x^5y^n : x^n y^3$$

$$3 \leq n \leq 5$$

Suy ra: $n = 3 ; 4 ; 5$.

$$\text{b) } x^{n+2} \cdot y^3 : x^5 y^n. \text{ Điều kiện: } n \leq 3 \text{ và } n \geq 3, \text{ suy ra } n = 3$$

$$\text{c) } (a+b)^{5n} (a-b)^7 : (a+b)^{15} \cdot (a-b)^n$$

$$\text{Điều kiện: } 5n \geq 15 \text{ và } n \leq 7$$

$$\text{Suy ra: } 3 \leq n \leq 7$$

$$\text{Vậy } n = 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7.$$

Ví dụ 3: Tìm điều kiện của tự nhiên n để phép chia sau đây là phép chia hết:

$$\text{a) } (4x^{10}y - \frac{1}{3}xy^7 + \frac{2}{5}x^5y^4) : 2x^n y^n$$

Điều kiện để phép chia đó là phép chia hết :

$$\begin{cases} 10 \geq n \\ 1 \geq n \\ 5 \geq n \\ 1 \geq n \\ 7 \geq n \\ 4 \geq n \end{cases} \Rightarrow n \leq 1. \text{ Suy ra } n = 0 ; n = 1$$

$$\text{b) } (21x^2y^3 + 9x^4y^2 + 7x^5y^3) : 7x^{n+1} y^{n+1}$$

Điều kiện để phép chia đó là phép chia hết :

$$\begin{cases} 2 \geq n+1 \\ 3 \geq n+1 \\ 4 \geq n+1 \\ 2 \geq n+1 \\ 5 \geq n+1 \\ 3 \geq n+1 \end{cases} \Rightarrow 2 \geq n+1. \text{ Suy ra } n \leq 1. \text{ Vậy } n = 0; n = 1$$

Chú ý: Nếu đa thức bị chia khuyết một bậc trung gian nào đó thì khi viết ta để trống một khoảng tương ứng với bậc khuyết đó.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài tập 1: Chia đơn thức cho đơn thức:

a) $121a^3b^2c : (11a^2bc) = 11ab$

b) $125a^4b^3c^2 : (-25a^4b^3c) = -5c$

c) $15(x+y)^5 : 3(x+y)^2 = 5(x+y)^3$

d) $27(x-y)^3 : 9(x-y)^2 = 3(x-y)$

e) $4(9x+y-z)^5 : 6(x+y-z)^3 = \frac{2}{3}(x+y-z)^2$

g) $(a+b-c)^5 : (c-a-b)^3 = (a+b-c)^5 : [- (a+b-c)^3] = - (a+b-c)^2$

Bài tập 2: Điền vào dấu * :

a) $4x^5 : x^2 = \frac{4}{3}x^3$

b) $20x^{n+2} : x^{n-1}y^2 = 5x^3y^2$

Bài tập 3: Tìm số tự nhiên n để đơn thức A chia hết cho đơn thức B:

$A = 4x^{n+1}y^2; B = 3x^3y^{n-1}$

Điều kiện: $\begin{cases} n+1 \geq 3 \\ 2 \geq n-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq n \leq 3$

Tìm thương của A : B trong trường hợp đó:

Với $n = 2$ thì: $A : B = 4x^3y^2 : 3x^3y = \frac{4}{3}y$

Với $n = 3$ thì: $A : B = 4x^4y^2 : 3x^3y^2 = \frac{4}{3}x$

Bài tập 4: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(-ax^2y^3)^4 : (-ax^2y^3)^3 = -ax^2y^3$

Với $x = \frac{1}{3}; y = -\frac{3}{5}; a = \frac{1}{2}$, ta có giá trị của biểu thức là:

$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{27}{125} = \frac{3}{250}$

b) $\frac{(-3m^3n^2p)^2}{27m^3n.p.2m^3n^3} = \frac{9m^6n^4p^2}{54m^6n^4p} = \frac{p}{6}$

Với $m = -389\frac{1}{25}; p = -\frac{1}{2}; n = 0,273$ thì giá trị của biểu thức là: $(-\frac{1}{2}) : 6 = -\frac{1}{12}$

Bài tập 5: làm tính chia:

a) $(15x^5 - 3x^4 + 5x^2) : 10x^2 = \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{2}$

b) $[3(x+y)^4 + 5(x+y)^3 - 10(x+y)^2] : 5(x+y)^2$
 $= \frac{3}{5}(x+y)^2 + (x+y) - 2$

c) $[3(a-b)^4 + 4(a-b)^2 - 5(a-b)] : 5(a-b)$

$$= \frac{3}{5}(a-b)^3 + \frac{4}{5}(a-b) - 1$$

Bài tập 6: Điền vào dấu *:

a) $(18x^4y^3 + * - *) : 3x^2y^2 = * + 2x^3 - 5xy^2$

b) $(7u^2v^5 + * + *) : * = 14uv^2 + 6u^2v + 10uv$

c) $(5xy^2 - 11x^3y + 6x^2y^2) : * = 5y - * + *$

Bài tập 7: Tìm điều kiện của số tự nhiên n để phép chia sau đây là phép chia hết:

a) $(13x^3y^3 + 15x^3y^2 + 18x^2y^3) : 7x^n y^{n+1}$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3 \geq n \\ 3 \geq n+1 \\ 3 \geq n \\ 2 \geq n+1 \\ 2 \geq n \\ 3 \geq n+1 \end{cases} \Rightarrow n \leq 1. \text{ Do đó } n = 0; n = 1.$$

b) $(12x^3y^7 + 9x^4y^5 - 3x^5y^8) : 3x^{n+1}y^{n+3}$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3 \geq n+1 \\ 7 \geq n+3 \\ 4 \geq n+1 \\ 5 \geq n+3 \\ 5 \geq n+1 \\ 8 \geq n+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+1 \leq 3 \\ n+3 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow n \leq 2. \text{ Do đó } n = 0; 1; 2$$

Bài tập 8: CMR giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến y ($x \neq 0; y \neq 0$):

$$\frac{2}{3}x^2y^3 : (-\frac{1}{3}xy) + 2x(y-1)(y+1) = -2xy^2 + 2x(y^2-1)$$

$$= -2xy^2 + 2xy^2 - 2x = -2x$$

Vậy biểu thức trên không phụ thuộc vào giá trị của biến y.

Bài tập 9: Không cần đặt phép chia, hãy xét xem phép chia sau có là phép chia hết không, và chỉ ra đa thức dư trong trường hợp không chia hết:

a) $(6x^2 - 3x + 5) : (2x - 1)$

Ta thấy thương trong bước thứ nhất của phép chia là $3x$ và do đó đa thức dư thứ nhất là 5 . Vì 5 có bậc nhỏ hơn $2x - 1$ nên không thể thực hiện tiếp phép chia được nữa. Do đó phép chia không là phép chia hết và đa thức dư là 5 .

b) $(9x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 2x - 1) : (3x^2 - 2x + 5)$

Ta thấy thương trong bước thứ nhất của phép chia là $3x^2$, và do đó đa thức dư thứ nhất là $2x - 1$. Vì $2x - 1$ có bậc nhỏ hơn $3x^2 - 2x + 5$ nên không thể thực hiện tiếp phép chia được nữa. Do đó phép chia không là phép chia hết và đa thức dư là $2x - 1$.

c) $(18x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 3x - 1) : (6x^2 + 3x - 1)$

ta thấy thương trong phép chia ở bước thứ nhất là $3x^3$ và đa thức dư thứ nhất là $6x^2 + 3x - 1$ chia hết cho đa thức chia. Vậy đây là phép chia hết.

Bài tập 10:

a) CMR nếu đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x - a$ (ở đây a là hằng số) thì $P(x)$ có một nghiệm là $x = a$.

b) CMR: Nếu $x = a$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $P(x)$ chia hết cho $x - a$.

Chứng minh:

a) Giả sử $P(x)$ chia hết cho $x - a$ thì ta có thể viết:

$$P(x) = (x - a).Q(x). \text{ Ở đây đa thức } Q(x) \text{ là một đa thức nào đó.}$$

Đặt $x = a$ ta được:

$$P(a) = (a - a).Q(a) = 0$$

Vậy $x = a$ là một nghiệm của $P(x)$.

b) Phép chia của $P(x)$ cho $x - a$ có thể viết là:

$$P(x) = (x - a).g(x) + r$$

Ở đây r là một số.

Đặt $x = a$ ta được $r = P(a)$.

Nếu a là một nghiệm của $P(x)$ thì $P(a) = 0$ và do đó $r = 0$, nghĩa là $P(x)$ chia hết cho $x - a$.

Bài tập 11: Thực hiện phép chia đa thức sau đây bằng cách phân tích đa thức bị chia thành nhân tử:

a) $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1)$

Ta có: $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) = x^5 + x^2 + x^3 + 1 = x^2(x^3 + 1) + (x^3 + 1) = (x^3 + 1)(x^2 + 1)$.

Do đó: $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1) = x^2 + 1$

b) $(x^2 + 5x + 6) : (x + 3)$

Ta có: $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$

Do đó: $(x^2 + 5x + 6) : (x + 3) = x + 2$

c) $(x^3 + x^2 - 12) : (x - 2)$

Ta có: $x^3 + x^2 - 12 = x^3 - 8 + x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2)(x + 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + x + 2) = (x - 2)(x^2 + 3x + 6)$

Do đó: $(x^3 + x^2 - 12) : (x - 2) = x^2 + 3x + 6$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1: Làm tính chia: $(4x^4 + 14x^3 - 21x - 9) : (2x^2 - 3)$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 14x^3 - 21x - 9 & 2x^2 - 3 \\ 4x^4 & - 6x^2 \\ \hline 14x^3 + 6x^2 - 21x - 9 & \\ 14x^3 & - 21x \\ \hline 6x^2 - 9 & \\ 6x^2 & - 9 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Bài 2: Làm tính chia

a) $2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2$	$x^2 - x + 1$	b) $5x^3 - 3x^2 + 7$	$x^2 + 1$
$2x^4 - 2x^3 + 2x^2$	$2x^2 + 3x - 2$	$5x^3 + 5x$	$5x - 3$
$0 + 3x^3 - 5x^2 + 5x - 2$		$- 3x^2 - 5x + 7$	
$3x^3 - 3x^2 + 3x$		$- 3x^2 - 3$	
$0 - 2x^2 + 2x - 2$		$0 - 5x + 10$	
$- 2x^2 + 2x - 2$			
0			
Ta có: $2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 3x - 2)$			

Bài tập 3: Thực hiện phép chia rồi tìm giá trị nhỏ nhất của thương tìm được:

$(6x^3 - 2x^2 - 9x + 3) : (3x - 1)$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 2x^2 - 9x + 3 & 3x - 1 \\ 6x^3 - 2x^2 & \\ \hline - 9x + 3 & \\ - 9x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Vì $2x^2 \geq 0$, với mọi giá trị của x nên $2x^2 - 3 \geq -3$. Do đó, thương tìm được $2x^2 - 3$ có giá trị nhỏ nhất là -3 , giá trị này đạt được tại $x = 0$.

Bài tập 4: Thực hiện phép chia đa thức sau đây bằng cách phân tích đa thức bị chia thành nhân tử:

a) $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1)$

Ta có: $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) = x^5 + x^2 + x^3 + 1 = x^2(x^3 + 1) + (x^3 + 1) = (x^3 + 1)(x^2 + 1)$.

Do đó: $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1) = x^2 + 1$

b) $(x^2 + 5x + 6) : (x + 3)$

Ta có: $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$

Do đó: $(x^2 + 5x + 6) : (x + 3) = x + 2$

c) $(x^3 + x^2 - 12) : (x - 2)$

Ta có: $x^3 + x^2 - 12 = x^3 - 8 + x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2)(x + 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + x + 2) = (x - 2)(x^2 + 3x + 6)$

Do đó: $(x^3 + x^2 - 12) : (x - 2) = x^2 + 3x + 6$

Bài tập 5: Thực hiện phép chia đa thức sau đây bằng cách phân tích đa thức bị chia thành nhân tử:

a) $(4x^2 - 9y^2) : (2x - 3y) = (2x - 3y)(2x + 3y) : (2x - 3y) = 2x + 3y$

b) $(27x^3 - 1) : (3x - 1) = 9x^2 + 3x + 1$

c) $(8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1) = 2x + 1$

d) $x^2 - 3x + xy - 3y = (x - 3)(x + y) \Rightarrow (x - 3)(x + y) : (x + y) = x - 3$

Bài tập 6: Không cần đặt phép chia, hãy xét xem phép chia sau có là phép chia hết không, và chỉ ra đa thức dư trong trường hợp không chia hết:

a) $(6x^2 - 3x + 5) : (2x - 1)$

Ta thấy thương trong bước thứ nhất của phép chia là $3x$ và do đó đa thức dư thứ nhất là 5 . Vì 5 có bậc nhỏ hơn $2x - 1$ nên không thể thực hiện tiếp phép chia được nữa. Do đó phép chia không là phép chia hết và đa thức dư là 5 .

b) $(9x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 2x - 1) : (3x^2 - 2x + 5)$

Ta thấy thương trong bước thứ nhất của phép chia là $3x^2$, và do đó đa thức dư thứ nhất là $2x - 1$. Vì $2x - 1$ có bậc nhỏ hơn $3x^2 - 2x + 5$ nên không thể thực hiện tiếp phép chia được nữa. Do đó phép chia không là phép chia hết và đa thức dư là $2x - 1$.

c) $(18x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 3x - 1) : (6x^2 + 3x - 1)$

ta thấy thương trong phép chia ở bước thứ nhất là $3x^3$ và đa thức dư thứ nhất là $6x^2 + 3x - 1$ chia hết cho đa thức chia. Vậy đây là phép chia hết.

Bài tập 7:

a) CMR nếu đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x - a$ (ở đây a là hằng số) thì $P(x)$ có một nghiệm là $x = a$.

b) CMR: Nếu $x = a$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $P(x)$ chia hết cho $x - a$.

Chứng minh:

a) Giả sử $P(x)$ chia hết cho $x - a$ thì ta có thể viết:

$P(x) = (x - a).Q(x)$. Ở đây đa thức $Q(x)$ là một đa thức nào đó.

Đặt $x = a$ ta được:

$P(a) = (a - a).Q(a) = 0$

Vậy $x = a$ là một nghiệm của $P(x)$.

b) Phép chia của $P(x)$ cho $x - a$ có thể viết là:

$P(x) = (x - a).g(x) + r$

Ở đây r là một số. Đặt $x = a$ ta được $r = P(a)$.

Nếu a là một nghiệm của $P(x)$ thì $P(a) = 0$ và do đó $r = 0$, nghĩa là $P(x)$ chia hết cho $x - a$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a) $(x^3 - 3x^2) : (x - 3)$

b) $(2x^2 + 2x - 4) : (x + 2)$

c) $(x^4 - x - 14) : (x - 2)$

d) $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3)$

e) $(x^3 + x^2 - 12) : (x - 2)$

f) $(2x^3 - 5x^2 + 6x - 15) : (2x - 5)$

g) $(-3x^3 + 5x^2 - 9x + 15) : (5 - 3x)$

h) $(-x^2 + 6x^3 - 26x + 21) : (2x - 3)$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

a) $(2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3 - 3x) : (x^2 - 3)$

b) $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1)$

c) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 3) : (2x^2 - x + 1)$

d) $(8x - 8x^3 - 10x^2 + 3x^4 - 5) : (3x^2 - 2x + 1)$

e) $(-x^3 + 2x^4 - 4 - x^2 + 7x) : (x^2 + x - 1)$

Bài 3. Thực hiện phép tính:

a) $(5x^2 + 9xy - 2y^2) : (x + 2y)$

b) $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3) : (x^2 + y^2)$

c) $(4x^5 + 3xy^4 - y^5 + 2x^4y - 6x^3y^2) : (2x^3 + y^3 - 2xy^2)$

d) $(2a^3 + 7ab^2 - 7a^2b - 2b^3) : (2a - b)$

Bài 4. Thực hiện phép tính:

a) $(2x + 4y)^2 : (x + 2y) - (9x^3 - 12x^2 - 3x) : (-3x) - 3(x^2 + 3)$

b) $(13x^2y^2 - 5x^4 + 6y^4 - 13x^3y - 13xy^3) : (2y^2 - x^2 - 3xy)$

Bài 5. Tìm a, b để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$, với:

a) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b, g(x) = x^2 - x - 2$

b) $f(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a, g(x) = x^2 - x + 5$

c) $f(x) = 3x^3 + 10x^2 - 5 + a, g(x) = 3x + 1$

d) $f(x) = x^3 - 3x + a, g(x) = (x - 1)^2$

ĐS: a) $a = 1, b = -30$ **Bài 6.** Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ để tìm thương và dư:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1, g(x) = x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = 2 - 4x + 3x^4 + 7x^2 - 5x^3, g(x) = 1 + x^2 - x$

c) $f(x) = 19x^2 - 11x^3 + 9 - 20x + 2x^4, g(x) = 1 + x^2 - 4x$

d) $f(x) = 3x^4y - x^5 - 3x^3y^2 + x^2y^3 - x^2y^2 + 2xy^3 - y^4, g(x) = x^3 - x^2y + y^2$

BÀI TẬP NÂNG CAO: Tìm đa thức bằng phương pháp hệ số bất định**Bài tập 1:** Cho hai đa thức:

$$A = 98m + m^3 - 6m^5 + m^6 - 26 + 10m^4$$

$$B = 1 - m + m^3$$

a) CMR với mọi giá trị nguyên của m thì thương của phép chia A cho B là một bội số của 6.b) xác định giá trị nguyên của m để đa thức dư bằng 0.**Giải:**a) Thực hiện phép chia A cho B ta được thương là:

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6, \text{ và dư là } 17m^2 + 81m - 20.$$

$$\text{Có } m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = m^3 - m^2 - 5m^2 + 5m + 6m - 6$$

$$= m^2(m - 1) - 5m(m - 1) + 6(m - 1) = (m - 1)(m^2 - 5m + 6) =$$

$$= (m - 1)[(m^2 - 2m) - (3m - 6)] = (m - 1)[m(m - 2) - 3(m - 2)] =$$

$$= (m - 1)(m - 2)(m - 3)$$

Kết quả là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6. Vậy thương của phép chia là bội của 6.

Cũng có thể chứng minh như sau:

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = m^3 - m - 6m^2 + 12m - 6$$

$$= m(m^2 - 1) - 6m^2 + 12m - 6$$

$$= (m - 1)(m(m + 1) - 6(m^2 - 2m + 1))$$

$$= (m - 1)m(m + 1) - 6(m - 1)^2$$

Từ đó ta thấy biểu thức đã cho chia hết cho 6.

b) Giải phương trình sau:

$$17m^2 + 81m - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 17m^2 - 4m + 85m - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(17m - 4) + 5(17m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (17m - 4)(m + 5) = 0$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -5$ để cho dư bằng 0.

Bài tập 2: Xác định hằng số a sao cho :

a) $a^3x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a$ chia hết cho $x + 1$.

Cách 1:

Thực hiện phép chia đa thức $a^3x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a$ cho đa thức $x + 1$

ta được thương là $a^2x^2 + (3a - a^2)x + (a^2 - 3a - 6)$

đa thức dư là $-a^2 + a + 6$

Để $a^3x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a$ chia hết cho $x + 1$ ta phải có:

$$-a^2 + a + 6 = 0$$

Hay $(a + 2)(3 - a) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ hoặc $a = 3$

Cách 2: (Phương pháp hệ số bất định) :

Đa thức bị chia có bậc 3, đa thức chia có bậc nhất nên thương là một đa thức bậc hai có hạng tử cao nhất là $a^2x^3 : x = a^2x^2$; hạng tử thấp nhất là $(-2a) : 1 = -2a$

Gọi thương của phép chia là $a^2x^2 + bx - 2a$, ta có:

$$a^2x^2 + 3ax^2 - 6x - 2a = (x + 1)(a^2x^2 + bx - 2a)$$

Thực hiện phép nhân ở vế phải ta được :

$$a^2x^3 + (a^2 + b)x^2 + (b - 2a)x - 2a$$

Đồng nhất đa thức này với đa thức bị chia $a^2x^2 + 3ax^2 - 6x - 2a$, ta được:

$$\begin{cases} a^2 + b = 3a \\ b - 2a = -6 \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được : $a^2 + 2a = 3a + 6 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0$

b) $10x^2 - 7x + a$ chia hết cho $2x - 3$.

Thực hiện phép chia $10x^2 - 7x + a$ cho đa thức $2x - 3$, ta được thương là:

$5x + 4$ và đa thức dư là $a + 12$

Để $10x^2 - 7x + 3$ chia hết cho $2x - 3$ thì $a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = -12$.

Thực hiện phép nhân ở vế phải ta được :

$$10x^2 - \left(\frac{2a}{3} + 15\right)x + a$$

Đồng nhất đa thức này với đa thức bị chia ta được: $\frac{2a}{3} + 15 = 7$

Suy ra $a = -12$.

c) $2x^2 + ax + 1$ chia cho $x - 3$ dư 4

Thực hiện phép chia $2x^2 + ax + 1$ cho $x - 3$, ta được thương là $2x + a + 2$ và đa thức dư là $1 + 2a$

Bài tập 3: Xác định các hằng số a và b sao cho :

a) $x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $x^2 - x + 1$

Thực hiện phép chia được thương bằng $x^2 + x + a$, đa thức dư là

$$(a - 1)x + (b - a).$$

Muốn chia hết thì đa thức dư phải đồng nhất bằng 0.

$$\text{Do đó } \begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - a = 0 \end{cases} \text{ Suy ra } a = b = 1$$

b) $ax^3 + bx^2 + 5x - 50$ chia hết cho $x^2 + 3x - 10$.

Cách 1: Thực hiện phép chia.

Cách 2: Đồng nhất $(x^2 + 3x - 10)(ax + 5)$ với đa thức bị chia ta được :

$$\begin{cases} 3a + 5 = b \\ 15 - 10a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ -8 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -2a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x^2 y(y-x) - xy^2(x-y)}{3y^3 - 3x^2 y}, \text{ với } x = -9; y = 2005.$$

$$A = \frac{x^2 y(y-x) + xy^2(y-x)}{3y(y^2 - x^2)} = \frac{xy(y-x)(x+y)}{3y(y-x)(y+x)} = \frac{x}{3}$$

Với $x = -9; y = 2005$, ta có:

$$A = \frac{-9}{3} = -3$$

$$\text{b) } B = \frac{(8x^3 + y^3)(4x^2 - y^2)}{(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)}; \text{ với } x = -\frac{1}{2}; y = 2.$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)(2x-y)(2x+y)}{(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)} = (2x-y)(2x+y)$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2}; y = 2, \text{ ta có: } B = [2.(-\frac{1}{2}) - 2][2.(-\frac{1}{2}) + 2] = (-3).1 = -3.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho biết đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$. Tìm đa thức thương:

$$\text{a) } f(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 10, g(x) = x - 2 \quad \text{ĐS: } q(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$\text{b) } f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 4, g(x) = x - 2 \quad \text{ĐS: } q(x) = 3x^2 - x + 2$$

Bài 2. Phân tích đa thức $P(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$ thành nhân tử, biết rằng một nhân tử có dạng:

$$x^2 + dx + 2.$$

$$\text{ĐS: } P(x) = (x^2 - x + 2)(x^2 - 2).$$

Bài 3. Với giá trị nào của a và b thì đa thức $x^3 + ax^2 + 2x + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

$$\text{ĐS: } a = 2, b = 1.$$

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$\text{a) } x^3 - x^2 - 14x + 24 \quad \text{b) } x^3 + 4x^2 + 4x + 3 \quad \text{c) } x^3 - 7x - 6$$

$$\text{d) } x^3 - 19x - 30 \quad \text{e) } a^3 - 6a^2 + 11a - 6$$

Bài 5. Tìm các giá trị a, b, k để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$:

$$\text{a) } f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k, g(x) = x^2 - x - 2. \quad \text{ĐS: } k = -30.$$

$$\text{b) } f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b, g(x) = x^2 - 3x + 4. \quad \text{ĐS: } a = 3, b = -4.$$

Bài 6. Tìm tất cả các số tự nhiên k để cho đa thức $f(k) = k^3 + 2k^2 + 15$ chia hết cho nhị thức

$$g(k) = k + 3. \quad \text{ĐS: } k = 0, k = 3.$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Câu 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

- a) $x^3 + 2x + x^2$
- b) $x^2 + 2xy - 9 + y^2$
- c) $x^2 - 3xy - 10y^2$.

HD

$$\text{a) } (x+5)(x^2+1)$$

$$\text{b) } (x+y+3)(x+y-3)$$

$$\text{c) } (x+2y)(x-5y)$$

Câu 2: Tìm x biết:

- a) $x(x-2) - x + 2 = 0$
 b) $x^2(x^2 + 1) - x^2 - 1 = 0$
 c) $5x(x-3)^2 - 5(x-1)^3 + 15(x+2)(x-2) = 5$

HD

a) $x(x-2) - (x-2) = 0$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

suy ra $x = 1$ và $x = 2$

b) $x^2(x^2 + 1) - x^2 - 1 = 0$

$$x = \pm 1$$

c) $5x(x-3)^2 - 5(x-1)^3 + 15(x+2)(x-2) = 5$

$$x = 2$$

C@u 3: Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến rồi làm tính chia :
 $(4x^2 - 5x + x^3 - 20) : (x + 4)$

HD

$$(x^3 + 4x^2 - 5x - 20) : (x + 4) = (x + 4)(x^2 - 5)$$

C@u 4: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì
 $(a+2)^2 - (a-2)^2$ chia hết cho 4

HD

Biết $(a+2)^2 - (a-2)^2 = 8a$ chia hết cho 4 với mọi a nguyên.

C@u 5: Biết $x + y = 10$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = xy$.

HD

Biết $x + y = 10$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = xy$.

HD: $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$. Thay vào P ta có:

$$P = x(10 - x) = -x^2 + 10x = -(x^2 - 10x + 25 - 25) = -(x - 5)^2 + 25 \leq 25.$$

Vậy GTLN của P = 25 khi $x = y = 5$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I.

Bài tập 1: Làm tính nhân:

- a) $(x^2 - 1)(x^2 + 2x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$
 b) $(2x - 1)(3x + 2)(3 - x) = (6x^2 + 4x - 3x - 2)(3 - x) =$
 $= 18x^2 - 6x^3 + 12x - 4x^2 - 9x + 3x^2 - 6 + 2x = -6x^3 + 17x^2 + 4x - 6$
 c) $(x + 3y)(x^2 - 2xy + y) = x^3 - 2x^2y + xy + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^2$
 $= x^3 + x^2y - 6xy^2 + xy + 3y^2$

Bài tập 2: Tính nhanh giá trị của mỗi biểu thức sau:

- a) $1,6^2 + 4,0,8 \cdot 3,4 + 3,4^2 = 1,6^2 + 2 \cdot 1,6 \cdot 3,4 + 3,4^2 = (1,6 + 3,4)^2 = 5^2 = 25$
 b) $3^4 \cdot 5^4 - (15^2 + 1)(15^2 - 1) = 15^4 - (15^4 - 1) = 15^4 - 15^4 + 1 = 1$
 c) $x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x + 111$ tại $x = 11$.

Thay $12 = x + 1$, ta có:

$$x^4 - (x + 1)x^3 + (x + 1)x^2 - (x + 1)x + 111$$

$$= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + 111$$

$$= -x + 111 = -11 + 111 = 100.$$

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức:

- a) $(6x + 1)^2 + (6x - 1)^2 - 2(1 + 6x)(6x - 1) = (6x + 1 - 6x + 1)^2 = 4$
 b) $3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$

Bài tập 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = x^4 - x^2 - 4x^2 + 4 = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$
 $= (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

c) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

Sử dụng $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

Thay $(x + y + z)^3 = (x + y)^3 + z^3 + 3(x + y + z)(x + y)z$, ta được:

$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = (x + y)^3 + z^3 + 3(x + y + z)(x + y)z - x^3 - y^3 - z^3$

$= (x + y)^3 - x^3 - y^3 + 3(x + y + z)(x + y)z$

$= 3xy(x + y) + 3(x + y + z)(x + y)z =$

$= 3(x + y)(xy + xz + yz + z^2)$

$= 3(x + y)(y + z)(x + z)$

Bài tập 5: Làm tính chia:

a) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 12) : (2x^2 - x + 1)$

Kết quả: $x + 3$

b) $(2x^3 - 5x^2 + 6x - 15) : (2x - 5)$

Kết quả: $x^2 + 3$

c) $(x^4 - x - 14) : (x - 2)$

Kết quả: $x^3 + 2x^2 + 4x + 7$

Bài tập 6: Tìm GTNN (hoặc GTLN) của các biểu thức sau:

a) $A = x^2 - 6x + 11$

$= x^2 - 6x + 9 + 2 = (x - 3)^2 + 2 =$

Ta thấy $(x - 3)^2 \geq 0$, nên $A = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$

Do đó GTNN của A bằng 2, giá trị này đạt được tại $x = 3$.

b) $B = 2x^2 + 10x - 1$

$= 2(x^2 + 5x - \frac{1}{2}) = 2(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x - \frac{25}{4} + \frac{25}{4} - \frac{1}{2})$

$= 2(x + \frac{5}{2})^2 + \frac{23}{2}$

Vì $(x + \frac{5}{2})^2 \geq 0$, nên $B = (x + \frac{5}{2})^2 + \frac{23}{2} \geq \frac{23}{2}$

Hay GTNN của B bằng $\frac{23}{2}$, giá trị này đạt được khi $x = -\frac{5}{2}$

c) $C = 5x - x^2$

$= -x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x - \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - (x - \frac{5}{2})^2$

Vì $(x - \frac{5}{2})^2 \geq 0$, nên $C = \frac{25}{4} - (x - \frac{5}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$

Do đó GTLN của C bằng $\frac{25}{4}$, giá trị này đạt được khi $x = \frac{5}{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 1.** Thực hiện phép tính:

a) $(3x^3 - 2x^2 + x + 2) \cdot (5x^2)$

b) $(a^2x^3 - 5x + 3a) \cdot (-2a^3x)$

c) $(3x^2 + 5x - 2)(2x^2 - 4x + 3)$

d) $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(a^2 + a - 1)(a^2 - a + 1)$

b) $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4)$

c) $(2 + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 - 12xy$

d) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - (x^3 - 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Bài 3. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào không phụ thuộc vào x:

- a) $(x-1)^3 - (x+1)^3 + 6(x+1)(x-1)$ b) $(x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$
 c) $(x-2)^2 - (x-3)(x-1)$ d) $(x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$
 e) $(x-1)^3 - (x+1)^3 + 6(x+1)(x-1)$ f) $(x+3)^2 - (x-3)^2 - 12x$

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $A = a^3 - 3a^2 + 3a + 4$ với $a = 11$ b) $B = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2)$ với $x + y = 1$

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $1 + 2xy - x^2 - y^2$ b) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab + 2cd$
 c) $a^3b^3 - 1$ d) $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$
 e) $x^2 - 15x + 36$ f) $x^{12} - 3x^6y^6 + 2y^{12}$
 g) $x^8 - 64x^2$ h) $(x^2 - 8)^2 - 784$

Bài 6. Thực hiện phép chia các đa thức sau: (đặt phép chia vào bài)

- a) $(35x^3 + 41x^2 + 13x - 5) : (5x - 2)$ b) $(x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 22x + 15) : (x^2 - 2x + 3)$
 c) $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3) : (x^2 + y^2)$ d) $(4x^4 - 14x^3y - 24x^2y^2 - 54y^4) : (x^2 - 3xy - 9y^2)$

Bài 7. Thực hiện phép chia các đa thức sau:

- a) $(3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 8x - 5) : (3x^2 - 2x + 1)$
 b) $(2x^3 - 9x^2 + 19x - 15) : (x^2 - 3x + 5)$
 c) $(15x^4 - x^3 - x^2 + 41x - 70) : (3x^2 - 2x + 7)$
 d) $(6x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 5xy^4 + 2y^5) : (3x^3 - 2xy^2 + y^3)$

Bài 8. Giải các phương trình sau:

- a) $x^3 - 16x = 0$ b) $2x^3 - 50x = 0$ c) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$
 d) $5x^2 - 4(x^2 - 2x + 1) - 5 = 0$ e) $(x^2 - 9)^2 - (x - 3)^2 = 0$ f) $x^3 - 3x + 2 = 0$
 g) $(2x - 3)(x + 1) + (4x^3 - 6x^2 - 6x) : (-2x) = 18$

Bài 9. Chứng minh rằng:

- a) $a^2 + 2a + b^2 + 1 \geq 0$ với mọi giá trị của a và b .
 b) $x^2 + y^2 + 2xy + 4 > 0$ với mọi giá trị của x và y .
 c) $(x - 3)(x - 5) + 2 > 0$ với mọi giá trị của x .

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

- a) $x^2 + x + 1$ b) $2 + x - x^2$ c) $x^2 - 4x + 1$
 d) $4x^2 + 4x + 11$ e) $3x^2 - 6x + 1$ f) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$
 g) $h(h+1)(h+2)(h+3)$

KIỂM TRA

ĐỀ I

A. ĐỀ BÀI:

Câu 1: Làm tính nhân:

- a) $(-10x^3 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}z)(-\frac{1}{2}xy)$
 b) $(2a^3bc - 9a^2bc^2 + 3ab^2c)(-5abc)$
 c) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$
 d) $(x^2 - 2xy)(x^2 + 2xy + 2y^2)$

Câu 2: Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$

- b) $(x + 2y + 3z)(x - 2y + 3z)$
 c) $(x - 1)(x^2 - x + 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$
 d) $(x + y)^3 - (x - y)^3$

Câu 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $3x(x - 1) + 7x^2(x - 1)$
 b) $3x(x - a) + 4a(a - x)$
 c) $(x + a)^2 - (y + b)^2$
 d) $(x^2 - 2x + 1)^3 + y^6$

Câu 4: Hãy sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến rồi thực hiện phép chia:

- a) $(-3x^2 + 10x^3 - x - 3) : (x + 1 + 3x^2)$
 b) $(5x + 3x^2 - 2 + 2x^4 - 11x^3 + 6x^5) : (-3x + 2x^3 + 2)$

B.ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM:

Câu 1: (2,5 điểm)

- a) $(-10x^3 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}z)(-\frac{1}{2}xy) = 5x^4y - \frac{1}{5}xy^2 + \frac{1}{6}xyz$
 b) $(2a^3bc - 9a^2bc^2 + 3ab^2c)(-5abc) = -10a^4b^2c^2 + 45a^3b^2c^3 - 15a^2b^3c^2$
 c) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) = x^5 - x^4 + x^2 + x^4 - x^3 + x + x^3 - x^2 + 1 = x^5 + 1$
 d) $(x^2 - 2xy)(x^2 + 2xy) = x^4 - 4x^2y^2$

Câu 2: (2 điểm)

- a) $(a - b + c + d)(a - b - c - d) = [(a - b) + (c + d)][(a - b) - (c + d)]$
 $= (a - b)^2 - (c + d)^2$
 b) $(x + 2y + 3z)(x - 2y + 3z) = [(x + 3z) + 2y][(x + 3z) - 2y] = (x + 3z)^2 - (2y)^2$
 c) $(x - 1)(x^2 - x + 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$
 $= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$
 $= (x^3 - 1)(x^3 + 1) = x^6 - 1$
 d) $(x + y)^3 - (x - y)^3 = (x + y - x + y)[(x + y)^2 + (x + y)(x - y) + (x - y)^2]$
 $= 2y(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - y^2 + x^2 - 2xy + y^2)$
 $= 2y(3x^2 + y^2)$

Câu 3: (2,5 điểm)

- a) $3x(x - 1) + 7x^2(x - 1) = (x - 1)(3x + 7x^2) = x(x - 1)(7x + 3)$
 b) $3x(x - a) + 4a(a - x) = 3x(x - a) - 4a(x - a) = (x - a)(3x - 4a)$
 c) $(x + a)^2 - (y + b)^2 = (x + a + y + b)(x + a - y - b)$
 d) $(x^2 - 2x + 1)^3 + y^6 = (x - 1)^6 + y^6 = [(x - 1)^2]^3 + (y^2)^3$
 $= [(x - 1)^2 + y^2][(x - 1)^4 - (x - 1)^2y^2 + y^4]$
 $= (x^2 - 2x + 1 + y^2)[(x - 1)^4 - (x - 1)^2y^2 + y^4]$

Câu 4: (2 điểm)

- a) $(-3x^2 + 10x^3 - x - 3) : (x + 1 + 3x^2) = 4x^2 + 2x - 3$
 b) $(5x + 3x^2 - 2 + 2x^4 - 11x^3 + 6x^5) : (-3x + 2x^3 + 2) = 3x^2 + x - 1$

ĐỀ II

1: Bài tập trắc nghiệm

1. Điền dấu “x” vào ô thích hợp:

TT	Nội dung	Đúng	Sai
1	$a(a+1) = a^2 + a$	x	
2	$a(a - 1) = a^2 - 1$		x
3	$2a^2(2a + b) = 4a^2 + 2a^2b$		x
4	$(2a + b).2a = 4a + 2ab$		x
5	$-3a(a^2 - b) = -3a^3 + 3ab$	x	
6	$-3b(a^2 + b) = -3a^2b - 3b^2$	x	
7	$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$	x	

8	$(a + b)(a - b) = a^2 + 2ab + b^2$		x
9	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	x	
10	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$		x

2. Khoanh tròn vào chữ cái trước phương án trả lời đúng.

1.2. Phân tích đa thức $y^2 + 2y + 1$ thành nhân tử được kết quả là:

- A. $y(y + 2) + 1$; B. $(y + 1)^2$;
C. $(y + 2)^2$ D. Một kết quả khác

2.2. Phân tích đa thức $y^2 - 1$ thành nhân tử được kết quả là:

- A. $(y - 1)^2$ B. $(y + 1)^2$
C. $(y - 1)(y + 1)$ D. $(y + 1)(y + 1)$

3.2. Chia đơn thức $2x^3y^2$ cho x^2y được thương là:

- A. $2xy$ B. $2x$ C. $2y$ D. xy

4.2. Chia đơn thức $10x^5y^3$ cho $2x^2y^3$ được thương là:

- A. $5x^7y^6$ B. $5x^2$ C. $5x^3$ D. $8x^3$

5.2. Chia đa thức $10x^5y^6 + 6x^4y^4$ cho $2x^4y^4$ được thương là:

- A. $5xy^2$ B. $5xy^2 + 3$ C. 3 D. $8xy^2 + 4$

6.2. Chia đa thức $a^2 + 2ab + b^2$ cho $a + b$ được thương là:

- A. $a + b$ B. $a + 2$ C. $2 + b$ D. $a - b$

Trả lời.						
Câu	1	2	3	4	5	6
Đ, P, N	B	C	A	B	B	A

2: Bài tập tự luận

1. Làm tính nhân:

a) $2x(x^2 - 3x + 5)$

b) $\frac{3}{4}xy^2(x^2y^3 + 4x - 2y)$

2. Làm tính nhân:

a) $(2x^2 - 1)(x^2 + 3x)$

b) $(2x - 1)(3x + 5)(2 - x)$

3) Tính nhanh giá trị của biểu thức:

a) $3,4^2 - 2.1,4.3,4 + 1,4^2$

b) $5^4.3^4 - (15^2 - 1)(15^2 + 1)$

c) $x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 15x^2 + 15x - 20$

tại $x = 14$.

4. Phân tích các đa thức thành nhân tử.

a) $5x^2 - 5xy + 4y - 4x$

b) $(x + y)^3 + (x - y)^3$

5. Tìm x, biết:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $(x^2 - 25)^2 - (x - 5)^2 = 0$

1.a) $= 2x^3 - 6x^2 + 10x$

b) $= \frac{3}{4}x^3y^5 + 3x^2y^2 - \frac{3}{2}xy^3$

2. a) $= 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$

b) $= (6x^2 + 7x - 5)(2 - x)$
 $= 12x^2 - 6x^3 + 14x - 7x^2 - 10 + 5x$
 $= -6x^3 + 5x^2 + 19x - 10$

3.a) $= (3,4 - 1,4)^2 = 2^2 = 4$

b) $= 15^4 - 15^4 + 1 = 1$

c) thay $15 = x + 1$, $20 = x + 6$ ta có:

$C = x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2$
 $+ x - x - 6 = 6$

4. a) $= 5x(x - y) - 4(x - y) = (x - y)(5x - 4)$

b) $= (x + y + x - y)[(x + y)^2 - (x + y)(x - y) + (x - y)^2]$
 $= 2x(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2 + x^2 - 2xy + y^2)$
 $= 2x(x^2 + 3y^2)$

5. a) $\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$.

b) $\Leftrightarrow (x^2 - 25 - x + 5)(x^2 - 25 + x - 5)$

$= 0$

$\Leftrightarrow [(x^2 - 16) - (x + 4)][(x - 25) + (x - 5)] = 0$

$\Leftrightarrow [(x - 4)(x + 4) - (x + 4)][(x - 5)(x + 5) + (x + 5)] = 0$

$\Leftrightarrow (x + 4)(x - 5)(x + 5)(x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x + 4 = 0$ hoặc $x - 5 = 0$ hoặc $x + 5 = 0$ hoặc $x - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 5$ hoặc $x = -5$ hoặc

6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: a) $A = x^2 - 4x + 5$ b) $B = 2x^2 + 4x + 7$ 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: a) $1 - x^2 + 4x$; b) $-4x^2 - 4x + 3$	$x = 4$. Vậy $x = -4; 5; -5; 4$. 6. a) Ta có: $A = (x-2)^2 + 1 \geq 1$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $\min A = 1 \Leftrightarrow x = 2$ b) Ta có: $B = 2(x+1)^2 + 5 \geq 5$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = -1$. Vậy $\min B = 5 \Leftrightarrow x = -1$. 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: a) Ta có: $A = -(x-2)^2 + 5 \leq 5$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $\max A = 5 \Leftrightarrow x = 2$ b) Ta có: $B = -(2x + 1)^2 + 4 \leq 4$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = -1/2$. Vậy $\max B = 4 \Leftrightarrow x = -1/2$
--	--

CHƯƠNG II: PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phân thức đại số:

- Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và B khác 0.
- A được gọi là tử thức (hay tử)
- B được gọi là mẫu thức (hay mẫu)

- Mỗi đa thức cũng được coi như một phân thức với mẫu thức bằng 1.

- Với hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$, ta nói $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, nếu $A.D = B.C$

3. Rút gọn phân thức:

- Cách biến đổi phân thức thành phân thức đơn giản hơn và bằng phân thức đã cho gọi là rút gọn phân thức.

- Muốn rút gọn một phân thức ta có thể làm như sau:

+ Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.

+ Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung (nếu có)

VẤN ĐỀ I. Tìm điều kiện để phân thức có nghĩa

Dạng toán tìm điều kiện của biến để phân thức xác định:

- Với phân thức mà mẫu chỉ là đa thức dạng $(ax+b)$ các em chỉ cần cho mẫu thức khác 0, rồi tìm ra kết quả.

Bài 1: Tìm điều kiện của x để phân thức sau có nghĩa:

$$\text{a) } \frac{x-2}{x-5} \quad \text{b) } \frac{2x-1}{\frac{1}{2}x+4} \quad \text{c) } \frac{5}{-2x-10}$$

Giải: a) $x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

b) $\frac{1}{2}x+4 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \neq -4 \Rightarrow x \neq -8$

c) $x \neq -5$

- Với những phân thức mà mẫu lại là một phân thức khác thì cần chú ý tới tử của phân thức mẫu, ví dụ:

Bài 2: Tìm điều kiện của x để phân thức xác định:

$$\text{a) } \frac{x-4}{\frac{2x-1}{x-1}} \quad \text{b) } \frac{-5}{\frac{x-2}{3x+1}+1}$$

Giải :

$$\text{a) Điều kiện: } \frac{2x-1}{x-1} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \frac{x-2}{3x+1} + 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{x-2+3x+1}{3x+1} \neq 0 \Rightarrow \frac{4x-1}{3x+1} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{4} \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

- Với những phân thức mà có bậc 2 một biến trở lên thì cần phân tích các mẫu thành nhân tử, rồi làm tương tự như trên. Ví dụ:

Bài 3: Tìm điều kiện của x để phân thức sau xác định:

$$\text{a) } \frac{3x^2+6x+12}{x^3-8} \quad \text{b) } \frac{x^2+2x+5}{2x^2+5x+3} \quad \text{c) } \frac{5x+1}{x^2-4}$$

Giải :

a) Phân tích mẫu thành nhân tử ta có:

$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, với chú ý: $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 > 0$ nên suy ra điều kiện để phân thức có nghĩa là: $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

b) Ta có: $2x^2+5x+3 = (2x^2+2x) + (3x+3) = (x+1)(2x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; x \neq -\frac{3}{2}$

c) Ta có: $x^2-4 = (x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2; x \neq -2$

Với những phân thức nhiều ẩn thì học sinh vận dụng làm tương tự, ví dụ:

Bài 4: Tìm điều kiện của biến để phân thức sau xác định:

$$a) \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} \quad b) \frac{x^2 y^2}{(1+x)(1-y)} \quad c) \frac{2xy}{(x^2 - y^2)(x+y)}$$

***Một số bài tập vận dụng cho dạng toán này:**

Bài 1: Tìm điều kiện của x để phân thức sau xác định:

$$a) \frac{1-4x}{2x+5} \quad b) \frac{\frac{1}{x-4}}{2x+2} \quad c) \frac{x^3+2x}{4x^2-25} \quad d) \frac{-5x+6}{\frac{2x+3}{x-2}+2} \quad e) \frac{2x^2+1}{8x^3+27}$$

$$g) \frac{2x+1}{(2x+2)(4y^2-9)}$$

Bài 2. Tìm điều kiện xác định của phân thức:

$$a) \frac{x^2-4}{9x^2-16} \quad b) \frac{2x-1}{x^2-4x+4} \quad c) \frac{x^2-4}{x^2-1}$$

$$d) \frac{5x-3}{2x^2-x} \quad e) \frac{x^2-5x+6}{x^2-1} \quad f) \frac{2}{(x+1)(x-3)}$$

$$g) \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$$

Bài 3: Tìm điều kiện xác định của phân thức:

$$a) \frac{1}{x^2+y^2} \quad b) \frac{x^2 y + 2x}{x^2 - 2x + 1} \quad c) \frac{5x+y}{x^2+6x+10}$$

$$d) \frac{x+y}{(x+3)^2 + (y-2)^2}$$

VẤN ĐỀ II. Dạng toán tìm giá trị của biến để phân thức nhận một giá trị nào đó

Bài 1: Với giá trị nào của x thì phân thức sau có giá trị bằng 0:

$$a) \frac{3x+3}{4x-4} \quad b) \frac{x-1}{x^3+x-2x^2-2}$$

Giải:

$$a) \frac{3x+3}{4x-4} = 0 \text{ khi } \begin{cases} 3x+3=0 \\ 4x-4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+1)=0 \\ 4(x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \neq 1 \end{cases}. \text{ Vậy giá trị của phân thức bằng 0 khi } x = -1$$

$$b) \frac{x-1}{x^3+x-2x^2-2} = 0 \text{ khi } \begin{cases} x-1=0 \\ x^3+x-2x^2-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x^2+1)(x-2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \neq 2(x^2+1 \geq 0) \end{cases}$$

Vậy giá trị của phân thức bằng 0 khi x = 1

Bài 2: Tìm giá trị của x để phân thức $\frac{2x+2}{x^2-1}$ nhận giá trị bằng 0.

$$\text{Giải: } \frac{2x+2}{x^2-1} = 0 \text{ khi } \begin{cases} 2x+2=0 \\ (x-1)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Vậy không có giá trị nào của x để giá trị của phân thức bằng 0.

Bài 3: a) Tìm x để giá trị của phân thức $\frac{2x+3}{-x+5}$ bằng $\frac{3}{4}$

b) Tìm x để giá trị của phân thức $\frac{x^3+3x-x^2-3}{x^3+3x^2+3x+9}$ bằng -1

$$\frac{2x+3}{-x+5} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(2x+3) = 3(-x+5)$$

Giải: a) Ta có: $8x+12 = -3x+15$

$$x = \frac{3}{11}$$

b) $\frac{x^3+3x-x^2-3}{x^3+3x^2+3x+9} = -1 \Rightarrow x^3+3x-x^2-3 = -x^3-3x^2-3x-9 \Rightarrow 2x^3+2x^2+6x+6 = 0$

$$(x+1)(2x^2+6) = 0 \Rightarrow x = -1$$

Vì $2x^2+6 > 0$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Tìm giá trị của x để các phân thức sau bằng 0:

a) $\frac{3x+6}{2x-8}$

b) $\frac{3x^2+5x-2}{3x^2-7x+2}$

c) $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2+5x+6}$

Bài 2: a) Tìm giá trị của x để phân thức $\frac{5x+4}{3-2x}$ bằng $\frac{-2}{3}$

b) Tìm giá trị của x để phân thức $\frac{3x^2-x+3}{3x+2}$ có giá trị bằng 1

Bài 2: Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau bằng không:

a) $\frac{2x-1}{5x-10}$

b) $\frac{x^2-x}{2x}$

c) $\frac{2x+3}{4x-5}$

d) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+3}$

e) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+3}$

f) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

Bài 3: Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau bằng không:

a) $\frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$

b) $\frac{x^3-16x}{x^3-3x^2-4x}$

c) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x-3}$

VẤN ĐỀ III. Chứng minh một phân thức luôn có nghĩa

Bài 1. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

a) $\frac{3}{x^2+1}$

b) $\frac{3x-5}{(x-1)^2+2}$

c) $\frac{5x+1}{x^2+2x+4}$

d) $\frac{x^2-4}{-x^2+4x-5}$

e) $\frac{x+5}{x^2+x+7}$

Bài 2. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa:

a) $\frac{x+y}{x^2+2y^2+1}$

b) $\frac{4}{x^2+y^2-2x+2}$

II. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Tính chất cơ bản của phân thức đại số: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow A \cdot D = B \cdot C$

$$\frac{A}{B} = \frac{AM}{BM} \quad (M \text{ là một đa thức khác } 0)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \quad (N \text{ là một nhân tử chung, } N \text{ khác đa thức } 0)$$

Quy tắc đổi dấu:

$$+ \text{ ÷ ÷ đều c} \Rightarrow \text{t} \text{ v} \text{ m} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

$$+ \text{ ÷ ÷ đều p} \Rightarrow \text{h} \text{ th} \text{ v} \text{ ÷ ÷ đều t} \Rightarrow \frac{A}{B} = -\frac{-A}{B}$$

$$+ \text{ ÷ ÷ đều p} \Rightarrow \text{h} \text{ th} \text{ v} \text{ ÷ ÷ đều m} \Rightarrow \frac{A}{B} = -\frac{A}{-B}$$

VẤN ĐỀ I. Phân thức bằng nhau

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{3y}{4} = \frac{6xy}{8x} \quad (x \neq 0) & \text{b) } \frac{-3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{-2y} \quad (y \neq 0) & \text{c) } \frac{2(x-y)}{3(y-x)} = \frac{-2}{3} \quad (x \neq y) \\ \text{d) } \frac{2xy}{3a} = \frac{8xy^2}{12ay} \quad (a \neq 0, y \neq 0) & \text{e) } \frac{1-x}{2-y} = \frac{x-1}{y-2} \quad (y \neq 2) & \text{f) } \frac{2a}{-5b} = \frac{-2a}{5b} \quad (b \neq 0) \end{array}$$

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x-2}{-x} = \frac{2^3 - x^3}{x(x^2 + 2x + 4)} \quad (x \neq 0) & \text{b) } \frac{3x}{x+y} = \frac{-3x(x-y)}{y^2 - x^2} \quad (x \neq \pm y) \\ \text{c) } \frac{x+y}{3a} = \frac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)} \quad (a \neq 0, x \neq -y) & \end{array}$$

Bài 3. Với những giá trị nào của x thì hai phân thức sau bằng nhau:

$$\text{a) } \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6} \text{ và } \frac{1}{x-3}$$

Bài 4. Cho hai phân thức A và B. Hãy xét sự bằng nhau của chúng trong các trường hợp sau:

$$\text{i) } x \in \mathbb{N} \quad \text{ii) } x \in \mathbb{Z} \quad \text{iii) } x \in \mathbb{Q}$$

$$\text{a) } A = \frac{(2x+1)(x-2)}{3(2x+1)}, B = \frac{x-2}{3}$$

Bài 5. Cho ba phân thức A, B và C. Hãy xét sự bằng nhau của chúng trong các trường hợp sau:

$$\text{i) } x \in \mathbb{N} \quad \text{ii) } x \in \mathbb{Z} \quad \text{iii) } x \in \mathbb{Q}$$

$$\text{a) } A = \frac{x+1}{5}, B = \frac{(x+1)(x+2)}{5(x+2)}, C = \frac{(x+1)(3x-2)}{5(3x-2)}$$

VẤN ĐỀ II. Rút gọn phân thức

Phương pháp chung:

-Phân tích cả tử thức và mẫu thức thành nhân tử

-Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

Bài 1: Rút gọn phân thức sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{14xy^5(2x-3y)}{21x^2y(2x-3y)^2} & \text{b) } \frac{8xy(3x-1)^3}{12x^3(1-3x)} & \text{c) } \frac{15x^2y(x-2y)^2}{35x^3y^2(2y-x)^3} & \text{d) } \frac{10xy^2(2x-1)^3}{12x^3(2x-1)} \end{array}$$

-Với các phân thức mà không có sẵn nhân tử chung thì chúng ta sẽ thực hiện theo các bước của bài toán rút gọn, ví dụ:

Bài 2: Rút gọn phân thức sau:

$$a) \frac{20x^2 - 45}{(2x + 3)^2} \quad b) \frac{80x^3 - 125x}{3(x-3) - (x-3)(8-4x)} \quad c) \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 3x} \quad d) \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6}$$

HD:

$$a) 20x^2 - 45 = 5(4x^2 - 9) = 5(2x - 3)(2x + 3)$$

$$\text{Từ đó suy ra kết quả: } \frac{5(2x - 3)}{2x + 3}$$

$$b) 80x^3 - 125x = 5x(16x^2 - 25) = 5x(4x - 5)(4x + 5)$$

$$3(x - 3) - (x - 3)(8 - 4x) = 3(x - 3) + (x - 3)(4x - 8) = (x - 3)(4x - 5)$$

$$\text{Từ đó kết quả là: } \frac{5x(4x + 5)}{x - 3}$$

$$c) x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(x^2 - 1) = (x - 3)(x^2 - 1)$$

$$x^2 - 3x = x(x - 3)$$

$$\text{Từ đó ta có kết quả: } \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$d) x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

$$\text{Từ đó có kết quả: } \frac{x + 4}{x + 2}$$

Một số bài toán vận dụng cho dạng toán này:

Bài 1: Rút gọn các phân thức sau:

$$a) \frac{25xy^3(2x - y)^2}{75xy^2(y - 2x)} \quad b) \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2 + xz - yz} \quad c) \frac{(2x + 3)^2 - x^2}{x^2 - 1}$$

$$d) \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} \quad e) \frac{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2}$$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau;

$$a) \frac{x^4 + 4}{x(x^2 + 2) - 2x^2 - (x - 1)^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}$$

$$b) \frac{x^2 + y^2 - z^2 - 2zt + 2xy - t^2}{x^2 - y^2 + z^2 - 2yt + 2xz - t^2} = \frac{x + y - z - t}{x - y + z - t}$$

$$c) \frac{3y - 2 - 3xy + 2x}{1 - 3x - x^3 + 3x^2} = \frac{3y - 2}{(1 - x)^2}$$

Bài 3: Rút gọn phân thức:

$$a) A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} \quad b) \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2} \quad c) \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2(x - 3)^2 + 4x(x - 3)^2 + 4(x - 3)^2}$$

HD:

a) đưa các lũy thừa về cơ số là số nguyên tố, sau đó phân tích thành nhân tử:

$$5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9 = 5.2^{30}.3^{18} - 2^{29}.3^{20} = 2^{29}.3^{18}(10 - 9)$$

$$5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6 = 5.2^{28}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18} = 2^{28}.3^{18}(15 - 14)$$

Từ đó rút gọn ta được kết quả: $A = 2$

b) phân tích tử thành nhân tử và mẫu biến đổi ta có:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Từ đó suy ra kết quả: $\frac{x+y+z}{2}$

c) Phân tích tử và mẫu thành nhân tử ta có:

$$\begin{aligned} x^3 - 7x - 6 &= x^3 - 9x + 2x - 6 = x(x^2 - 9) + 2(x - 3) = x(x - 3)(x + 3) + 2(x - 3) \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 2) = (x - 3)(x + 2)(x + 1) \end{aligned}$$

Mẫu = $(x - 3)^2(x + 2)^2$. Vậy ta có kết quả: $\frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$

Bài 4: Chứng minh đẳng thức:

$$\text{a) } \frac{x^2y + 2xy^2 + y^3}{2x^2 + xy - y^2} = \frac{xy + y^2}{2x - y} \quad \text{b) } \frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3} = \frac{1}{x - y}$$

HD: thực hiện rút gọn về trái, cuối cùng ra kết quả là về phải.

II. Dạng toán chứng minh phân thức tối giản:

Để chứng minh một phân thức tối giản ta gọi ước chung lớn nhất của tử và mẫu thức là d, ta chứng minh d = 1 hoặc d = -1.

Để chứng minh được điều này ta vận dụng các kiến thức về chia hết như: tính chất chia hết của một tổng, quan hệ giữa bội và ước... Ví dụ:

Bài 1: Chứng minh các phân thức sau là tối giản:

$$\text{a) } \frac{n-3}{-n+4} \quad \text{b) } \frac{6+8n+15n^2}{13+21n+30n^2} \text{ (Với } n \text{ nguyên dương)} \quad \text{c) } \frac{2n+1}{2n^2-1} \text{ (Với } n \text{ là số tự nhiên)}$$

Giải:

a) Gọi ƯCLN của $n-3$ và $-n+4$ là d, ta có: $n-3 : d, -n+4 : d$ hay: $n-3 + -n+4 : d$

$\Rightarrow 1 : d$. Do đó d = 1 hoặc -1. Vậy phân thức đã cho tối giản với mọi n.

b) Gọi ƯCLN của $6+8n+15n^2$ và $13+21n+30n^2$ là d ($d \geq 1$), ta có:

$$6+8n+15n^2 : d, 13+21n+30n^2 : d \text{ hay: } [2(6+8n+15n^2) + 5n+1] : d \text{ suy ra } : 5n+1 : d \text{ (1)}$$

$$\text{Mặt khác: } 6+8n+15n^2 = (3n+1)(5n+1) + 5 : d \Rightarrow 5 : d \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $1 : d$. Do đó d = 1. Vậy phân thức đã cho tối giản.

c) Gọi ƯCLN của $2n+1$ và $2n^2-1$ là d. Ta có: $2n+1 : d \text{ (1) và } 2n^2-1 : d$

$$\Rightarrow 4n^2-2 : d \Rightarrow 4n^2-1-1 : d \text{ hay: } (2n+1)(2n-1)-1 : d \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $1 : d$. Do đó d = 1 hoặc d = -1. Vậy phân thức đã cho tối giản.

Cách giải khác: Gọi ƯCLN của $2n+1$ và $2n^2-1$ là d. Ta có: $2n+1 : d \text{ (1) và } 2n^2-1 : d$. Ta có: $2n^2-1 = n(2n+1) - n-1 : d \Rightarrow n+1 : d \Rightarrow 2n+2 = (2n+1) + 1 : d$

Nên $1 : d$. Do đó d = 1 hoặc d = -1. Vậy phân thức đã cho tối giản.

Bài 2: Chứng minh phân thức sau tối giản với mọi số tự nhiên n:

$$\text{a) } \frac{12n+1}{30n+2} \quad \text{b) } \frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$$

Giải:

$$\text{a) } (12n+1, 30n+2) = d, \text{ suy ra: } 12n+1 : d, 30n+2 : d \text{ hay: } 5(12n+1) - 2(30n+2) : d$$

Hay: $1 : d$. Do đó d = 1. Vậy phân thức đã cho tối giản.

$$\text{b) } (n^3+2n, n^4+3n^2+1) = d. \text{ Ta có: } (n^4+3n^2+1) - n(n^3+2n) = n^2+1 : d \text{ (1)}$$

$$\text{mà: } n^3+2n = n(n^2+1) + n : d \Rightarrow n : d \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $1 : d$. Vậy phân thức tối giản.

Một số bài tập vận dụng cho dạng toán:

Chứng minh các phân thức sau tối giản với mọi số tự nhiên n:

$$\text{a) } \frac{3n+1}{5n+2} \quad \text{b) } \frac{3n^2+5n+1}{8n^2+7n+1} \quad \text{c) } \frac{2n-1}{4n^2-2}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{5x}{10}$

b) $\frac{4xy}{2y} (y \neq 0)$

c) $\frac{21x^2y^3}{6xy} (xy \neq 0)$

d) $\frac{2x+2y}{4}$

e) $\frac{5x-5y}{3x-3y} (x \neq y)$

f) $\frac{-15x(x-y)}{3(y-x)} (x \neq y)$

Bài 2. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{x^2-16}{4x-x^2} (x \neq 0, x \neq 4)$

b) $\frac{x^2+4x+3}{2x+6} (x \neq -3)$

c) $\frac{15x(x+y)^3}{5y(x+y)^2} (y+(x+y) \neq 0)$

d) $\frac{5(x-y)-3(y-x)}{10(x-y)} (x \neq y)$

e) $\frac{2x+2y+5x+5y}{2x+2y-5x-5y} (x \neq -y)$

f) $\frac{x^2-xy}{3xy-3y^2} (x \neq y, y \neq 0)$

g) $\frac{2ax^2-4ax+2a}{5b-5bx^2} (b \neq 0, x \neq \pm 1)$

h) $\frac{4x^2-4xy}{5x^3-5x^2y} (x \neq 0, x \neq y)$

i) $\frac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z} (x+y+z \neq 0)$

k) $\frac{x^6+2x^3y^3+y^6}{x^7-xy^6} (x \neq 0, x \neq \pm y)$

Bài 3. Rút gọn, rồi tính giá trị các phân thức sau:

a) $A = \frac{(2x^2+2x)(x-2)^2}{(x^3-4x)(x+1)}$ với $x = \frac{1}{2}$

b) $B = \frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^3+y^3}$ với $x = -5, y = 10$

Bài 4. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$

b) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

c) $\frac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$

Bài 5. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

b) $\frac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}$

c) $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$

d) $\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)}$

e) $\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}$

f) $\frac{x^{24}+x^{20}+x^{16}+\dots+x^4+1}{x^{26}+x^{24}+x^{22}+\dots+x^2+1}$

Bài 6. Tìm giá trị của biến x để:

a) $P = \frac{1}{x^2+2x+6}$ đạt giá trị lớn nhất

ĐS: $\max P = \frac{1}{5}$ khi $x = -1$

b) $Q = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất

ĐS: $\min Q = \frac{3}{4}$ khi $x = 1$

Bài 7. Chứng minh rằng phân thức sau đây không phụ thuộc vào x và y:

a) $\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$

b) $\frac{3xy-3x+2y-2}{y-1} - \frac{9x^2-1}{3x-1} \left(x \neq \frac{1}{3}, y \neq 1 \right)$

c) $\frac{ax^2-a}{x+1} - \frac{axy+ax-ay-a}{y+1} (x \neq -1, y \neq -1)$

d) $\frac{(x+a)^2-x^2}{2x+a}$

e) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)(ay-ax)}$

f) $\frac{2ax-2x-3y+3ay}{4ax+6x+9y+6ay}$

Dạng toán tìm giá trị nguyên của biến để phân thức có giá trị nguyên

Bài 1: Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên:

a) $\frac{2}{x-3}$ b) $\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-5}{2x+1}$

Giải: a) $x-3$ là ước nguyên của 2

Nếu $x-3=-2 \Rightarrow x=1$;

Nếu $x-3=2 \Rightarrow x=5$

Nếu $x-3=1 \Rightarrow x=4$;

Nếu $x-3=-1 \Rightarrow x=2$

Phần b), c) làm tương tự

Trong trường hợp tử và mẫu thức đều chứa biến thì ta thực hiện phép chia tử cho mẫu thức tách lấy phần thương và dư, rồi viết phân thức dưới dạng khác, ta lập luận tương tự như trên đối với phần dư chia cho mẫu thức, ví dụ:

Bài 2: Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị nguyên:

a) $\frac{x^4 - 3x^3 + 5}{x-3}$ b) $\frac{2x^3 + x^2 + 2x + 8}{2x+1}$

Giải: a) Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$x^4 - 3x^3 + 5 = (x-3).x^3 + 5. \text{ Do đó: } \frac{x^4 - 3x^3 + 5}{x-3} = x^3 + \frac{5}{x-3}$$

Vì x nguyên nên x^3 cũng nguyên, nên để phân thức có giá trị nguyên thì $\frac{5}{x-3}$ là số nguyên. Đến đây

ta làm tương tự như ví dụ 1

b) Ngoài việc thực hiện phép chia như câu a) ta cũng có thể viết tử thức liên tiếp có chứa mẫu thức dưới dạng sau:

$$\text{Ta có: } 2x^3 + x^2 + 2x + 8 = x^2(2x+1) + (2x+1) + 7$$

$$\text{Từ đó ta suy ra: } \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 8}{2x+1} = x^2 + 1 + \frac{7}{2x+1}$$

Lập luận tương tự như trên ta tìm được kết quả: $x = \{-4; -1; 0; 3\}$

Một số bài tập vận dụng cho dạng toán:

Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên:

a) $\frac{3x^3 - 4x^2 + x - 1}{x-4}$ b) $\frac{3x^2 - x + 3}{3x+2}$ c) $\frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x-3}$ d) $\frac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}$

Dạng toán tính giá trị của phân thức tại một giá trị của biến

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

a) $\frac{3x^2 - x}{9x^2 - 6x + 1}$ tại $x = -8$ b) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ tại $x = 1000001$

Giải:

a) Ta có: $\frac{3x^2 - x}{9x^2 - 6x + 1} = \frac{x(3x-1)}{(3x-1)^2} = \frac{x}{3x-1}$

$$\text{Thay } x = -8 \text{ vào biểu thức ta có: } \frac{-8}{3(-8)-1} = \frac{-8}{-25} = \frac{8}{25}$$

b) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}$

Thay $x = 1000001$ vào biểu thức ta có:

$$\frac{1}{1000001-1} = \frac{1}{1000000}$$

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức:

$$a) \frac{x^2 + y^2 - (1 + 2xy)}{x^2 - y^2 + 1 + 2x} \text{ tại } x = 99 \text{ và } y = 50 \quad b) \frac{\frac{x}{x^2 - x + 1} - \frac{2}{x + 1}}{\frac{x^4 + 2}{x^3 + 1} - x} \text{ tại } x = 101$$

Giải: a) Ta có: $\frac{x^2 + y^2 - (1 + 2xy)}{x^2 - y^2 + 1 + 2x} = \frac{(x - y)^2 - 1}{(x + 1)^2 - y^2} = \frac{(x - y + 1)(x - y - 1)}{(x - y + 1)(x + y + 1)} = \frac{x - y - 1}{x + y + 1}$

Thay $x = 99$ và $y = 50$ vào biểu thức ta có: $\frac{99 - 50 - 1}{99 + 50 + 1} = \frac{48}{150} = \frac{8}{25}$

Bài 3: Cho $a \neq \frac{-7}{3}$; $b \neq \frac{7}{2}$ và $2a - b = 7$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{5a - b}{3a + 7} - \frac{3b - 2a}{2b - 7}$$

Giải:

$$P = \frac{5a - b}{3a + 7} - \frac{3b - 2a}{2b - 7} = \frac{(2a - b) + 3a}{3a + 7} - \frac{2b - (2a - b)}{2b - 7} = \frac{3a + 7}{3a + 7} - \frac{2b - 7}{2b - 7} = 1 - 1 = 0$$

Bài 4: Cho $3y - x = 6$, tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x}{y - 2} + \frac{2x - 3y}{x - 6}$

Giải:

Ta có: $A = \frac{3y - 6}{y - 2} + \frac{2x - (x + 6)}{x - 6} = \frac{3(y - 2)}{y - 2} + \frac{x - 6}{x - 6} = 3 + 1 = 4$

Bài 5: Tính giá trị của $A = \frac{x - y}{x + y}$ biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($y \neq 0$; $x + y \neq 0$)

Giải:

Ta có: $x^2 - 2y^2 - xy = 0 \Rightarrow (x^2 - y^2) - (y^2 + xy) = 0 \Rightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$

Vì $x + y \neq 0$ nên $x = 2y$. Thay vào biểu thức ta có:

$$A = \frac{2y - y}{2y + y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3} \text{ (Vì } y \neq 0)$$

Vậy $A = \frac{1}{3}$

Ta có một số bài tập tương tự:

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$a) \frac{4x^2 + x}{16x^2 + 8x + 1} \text{ tại } x = -3 \quad b) \frac{5x^4 + 5x^2 - 2x^2y - 2y}{x^4 + 3x^2 + 2} \text{ tại } x = 2 \text{ và } y = -2$$

Bài 2: a) Tính giá trị của phân thức $A = \frac{3x - 2y}{3x + 2y}$ biết rằng: $9x^2 + 4y^2 = 20xy$ và $2y < 3x < 0$

b) Biết $2x > y > 0$ và $4x^2 + y^2 = 5xy$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{xy}{4x^2 - y^2}$$

c) Biết $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$Q = \frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b}$$

Bài 3: Cho x, y, z khác 0 và $A = \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$; $B = \frac{x}{z} + \frac{z}{x}$; $C = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A^2 + B^2 + C^2 - ABC$$

Dạng toán rút gọn biểu thức tổng hợp

Bài 1: Cho phân thức: $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$

a) Với điều kiện nào của x thì giá trị phân thức được xác định?

b) Rút gọn phân thức

c) Tìm giá trị của x để phân thức có giá trị bằng 1?

d) Có giá trị nào để phân thức bằng 0 hay không?

Giải:

a) $x \neq -2$ b) Rút gọn phân thức ta được: $x + 2$

c) $x = -1$ d) Không có giá trị nào của x thỏa mãn để phân thức có giá trị bằng 0

Ta có bài tập tương tự:

Bài 2: Cho phân thức: $\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8}$

a) Với điều kiện nào của x thì phân thức xác định?

b) Rút gọn phân thức

c) Tính giá trị của phân thức tại $x = \frac{4001}{2000}$

d) Tìm giá trị nguyên của x để phân thức đạt giá trị nguyên?

Đối với những biểu thức có các phép tính cộng, trừ, nhân, chia thì các em cần phải nắm vững các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia các phân thức để biến đổi cho đúng, ví dụ:

Bài 3: Cho biểu thức: $\left(\frac{4}{x-4} - \frac{4}{x+4}\right) \cdot \frac{x^2 + 8x + 16}{32}$

a) Tìm điều kiện của x để phân thức xác định?

b) Tìm giá trị của x để phân thức có giá trị bằng $\frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị của x để phân thức có giá trị bằng 1

d) Tìm giá trị nguyên của x để phân thức có giá trị nguyên?

e) Tìm giá trị của x để phân thức luôn dương?

Bài 4: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{1-x} + \frac{2}{x^2-1}\right) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$b) \left[\left(\frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^2-y^2}\right) : \frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right] \cdot \frac{x-y}{3} = x+y$$

Bài 5: Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau xác định và chứng minh rằng với điều kiện đó biểu thức không phụ thuộc vào biến.

$$a) \frac{x - \frac{1}{x}}{\frac{x^2 + 2x + 1}{x} - \frac{2x + 2}{x}}$$

$$b) \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \left(\frac{x}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$$

$$c) \frac{x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left(\frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{x}{x^2-9}\right)$$

Một số Bài tập nâng cao

Bài 1. Rút gọn các biểu thức.

$$a) \frac{m^4 - m}{2m^2 + 2m + 2};$$

$$b) \frac{ab^2 + a^3 - a^2b}{a^3b + b^4};$$

$$c) \frac{xy + 1 - x - y}{y + z - 1 - yz};$$

$$d) \frac{ax + ay - bx - by}{ax - ay - bx + by};$$

Bài 2. Tìm x, y, z để các biểu thức sau bằng 0.

b) $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$.

$$A = (x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} - x^{16} + 1).$$

Bài 4. Rút gọn $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}$ biết rằng $x + y + z = 0$.

Bµi 5. TÝnh gi, trÞ cña ph©n thøc $A = \frac{3x-2y}{3x+2y}$, biÕt r»ng $9x^2 + 4y^2 = 20xy$, vµ $2y < 3x < 0$.

$$\text{Ta cã } A^2 = \frac{9x^2 + 4y^2 - 12xy}{9x^2 + 4y^2 + 12xy} = \frac{20xy - 12xy}{20xy + 12xy} = \frac{8xy}{32xy} = \frac{1}{4}$$
$$\text{Do } 2y < 3x < 0 \Rightarrow 3x - 2y > 0, 3x + 2y < 0 \Rightarrow A < 0. \forall y \ A = -\frac{1}{2}.$$

VẤN ĐỀ I. Qui đồng mẫu thức của nhiều phân thức

©T×m mẾu chung:

- PhCn biÕn thnh nh©n t¸.

- PhÇn biÕn lư tÝch gi÷a c,c nh©n t chung vµ riªng mçi nh©n t lªy sè m lín nhÊt.

+ Lấy MC chia cho tổng mẫu (®· ph©n tÝch th×nh nh©n tố)

●Nh©n c¶ tö vµ mÉu với nh©n tö ph© t-ñq øñq. Ta ®-íc c,c ph©n thøc mi c mÉu giềng nhau.

c) $\frac{xy}{8}, \frac{y}{15}$

f) $\frac{xy}{2z}, \frac{yz}{3x}, \frac{zx}{4y}$

c) $\frac{2a}{b^2}, \frac{x}{2a+2b}, \frac{y}{a^2-b^2}$

f) $\frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}, x^2 + 1$

b) $\frac{1}{-x^2+3x-2}, \frac{1}{x^2+5x-6}, \frac{1}{-x^2+4x-3}$

d) $\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}, \frac{y}{x^2 + 2yz - y^2 - z^2}, \frac{z}{x^2 - 2xz - y^2 + z^2}$

VẤN ĐỀ II. Thực hiện các phép toán trên phân thức

- Quy ®ång mẾu.

- Céng (hoÆc) Trö tö víi tö; méu chung gi÷ nguyªn.
- Bá ngoãc b»ng ph-ñg ph, p nh©n ®a thøc hoÆc ðiñg h»ng ®ång thøc.
- Thu gªn (céng trö c, c h¹ng tö ®ång d¹ng)
- Ph©n tÝch tö thønh nh©n tö (nÖu cã thÓ).

VÝ dõ: $\frac{x}{2x-6} + \frac{4}{x^2-9} = \frac{x}{2(x-3)} + \frac{4}{(x+3)(x-3)} = \frac{x(x+3)}{2(x+3)(x-3)} + \frac{4.2}{2(x+3)(x-3)} = \frac{x(x+3)+4.2}{2(x+3)(x-3)} = \frac{x^2+3x+8}{2x^2-19}$

Nh©n ph©n thøc: Ph-ñg ph, p:

+ LÊy Tö nh©n tö; Méu nh©n méu. Rút rút gªn nÖu cã thÓ. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}$

Chia ph©n thøc:

1. Ph©n thøc nghÞch ®¶o: NghÞch ®¶o cña $\frac{A}{B}$ là $\frac{B}{A}$.

2. Chia ph©n thøc: $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$. Rút rút gªn nÖu cã thÓ.

VÝ dõ: $\frac{5xy}{2x-1} : \frac{12xy}{4x-8} = \frac{5xy}{2x-1} \cdot \frac{4-8x}{12xy} = \frac{-5xy.(8x-4)}{(2x-1).12xy} = \frac{-5}{3}$

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{x-5}{5} + \frac{1-x}{5}$

b) $\frac{x-y}{8} + \frac{2y}{8}$

c) $\frac{x^2-x}{xy} + \frac{1-4x}{xy}$

d) $\frac{5xy^2-x^2y}{3xy} + \frac{4xy^2+x^2y}{3xy}$

e) $\frac{x+1}{a-b} + \frac{x-1}{a-b} + \frac{x+3}{a-b}$

f) $\frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3}$

g) $\frac{2x^2-xy}{x-y} + \frac{xy+y^2}{y-x} + \frac{2y^2-x^2}{x-y}$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{2x+4}{10} + \frac{2-x}{15}$

b) $\frac{3x}{10} + \frac{2x-1}{15} + \frac{2-x}{20}$

c) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{x^2+3}{2-2x^2}$

d) $\frac{1-2x}{2x} + \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2x-4x^2}$

e) $\frac{x}{xy-y^2} + \frac{2x-y}{xy-x^2}$

f) $\frac{x^2}{x^2-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2}$

g) $\frac{2x^2-10xy}{2xy} + \frac{5y-x}{y} + \frac{x+2y}{x}$

h) $\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{-3x}{x^2-y^2}$

i) $x+y + \frac{x^2+y^2}{x+y}$

Bài 3. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{2x}{x^2+2xy} + \frac{y}{xy-2y^2} + \frac{4}{x^2-4y^2}$

b) $\frac{1}{x-y} + \frac{3xy}{y^3-x^3} + \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$

c) $\frac{2x+y}{2x^2-xy} + \frac{16x}{y^2-4x^2} + \frac{2x-y}{2x^2+xy}$

d) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$

Bài 4. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{1-3x}{2} - \frac{x+3}{2}$

b) $\frac{2(x+y)(x-y)}{x} - \frac{-2y^2}{x}$

c) $\frac{3x+1}{x+y} - \frac{2x-3}{x+y}$

d) $\frac{xy}{2x-y} - \frac{x^2-1}{y-2x}$

e) $\frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y}$

Bài 5. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{4x+1}{2} - \frac{3x+2}{3}$

b) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-3} + \frac{9}{x^2-3x}$

c) $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x}$

d) $\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{-10x+8}{9x^2-4}$

e) $\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$

f) $\frac{3x}{5x+5y} - \frac{x}{10x-10y}$

$$\begin{array}{lll} \text{g)} \frac{4a^2 - 3a + 5}{a^3 - 1} - \frac{1 - 2a}{a^2 + a + 1} - \frac{6}{a - 1} & \text{h)} \frac{5x^2 - y^2}{xy} - \frac{3x - 2y}{y} & \text{i)} \frac{x + 9y}{x^2 - 9y^2} - \frac{3y}{x^2 + 3xy} \\ \text{k)} \frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{6}{x^2 - 1} - \frac{3x - 2}{x^2 + 2x + 1} & \text{l)} \frac{3}{2x + 6} - \frac{x - 6}{2x^2 + 6x} & \text{m)} x^2 + 1 - \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \\ \text{n)} \frac{5}{a + 1} - \frac{10}{a - (a^2 + 1)} - \frac{15}{a^3 + 1} & & \end{array}$$

Bài 6. Thực hiện phép tính:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{x} \cdot \frac{6x}{y} & \text{b)} \frac{2x^2}{y} \cdot 3xy^2 & \text{c)} \frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2} \\ \text{d)} \frac{2x^2}{x - y} \cdot \frac{y}{5x^3} & \text{e)} \frac{5x + 10}{4x - 8} \cdot \frac{4 - 2x}{x + 2} & \text{f)} \frac{x^2 - 36}{2x + 10} \cdot \frac{3}{6 - x} \\ \text{g)} \frac{x^2 - 9y^2}{x^2 y^2} \cdot \frac{3xy}{2x - 6y} & \text{h)} \frac{3x^2 - 3y^2}{5xy} \cdot \frac{15x^2 y}{2y - 2x} & \text{i)} \frac{2a^3 - 2b^3}{3a + 3b} \cdot \frac{6a + 6b}{a^2 - 2ab + b^2} \end{array}$$

Bài 7. Thực hiện phép tính:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2x}{3} : \frac{5}{6x^2} & \text{b)} 16x^2 y^2 : \left(-\frac{18x^2 y^5}{5} \right) & \text{c)} \frac{25x^3 y^5}{3} : 15xy^2 \\ \text{d)} \frac{x^2 - y^2}{6x^2 y} : \frac{x + y}{3xy} & \text{e)} \frac{a^2 + ab}{b - a} : \frac{a + b}{2a^2 - 2b^2} & \text{f)} \frac{x + y}{y - x} : \frac{x^2 + xy}{3x^2 - 3y^2} \\ \text{g)} \frac{1 - 4x^2}{x^2 + 4x} : \frac{2 - 4x}{3x} & \text{h)} \frac{5x - 15}{4x + 4} : \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x + 1} & \text{i)} \frac{6x + 48}{7x - 7} : \frac{x^2 - 64}{x^2 - 2x + 1} \\ \text{k)} \frac{4x - 24}{5x + 5} : \frac{x^2 - 36}{x^2 + 2x + 1} & \text{l)} \frac{3x + 21}{5x + 5} : \frac{x^2 - 49}{x^2 + 2x + 1} & \text{m)} \frac{3 - 3x}{(1 + x)^2} : \frac{6x^2 - 6}{x + 1} \end{array}$$

Bài 8. Thực hiện phép tính:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{2 - x}{x + 1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) & \text{b)} \left(\frac{3x}{1 - 3x} + \frac{2x}{3x + 1} \right) : \frac{6x^2 + 10x}{1 - 6x + 9x^2} \\ \text{c)} \left(\frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x + 3} \right) : \left(\frac{x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{3x + 9} \right) & \text{d)} \frac{x + 1}{x + 2} : \left(\frac{x + 2}{x + 3} : \frac{x + 3}{x + 1} \right) \end{array}$$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} & \text{b)} \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}} & \text{c)} 1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}} \\ \text{d)} \frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}} & \text{e)} \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}} & \text{f)} \frac{\frac{a-x}{a} + \frac{x}{a-x}}{\frac{a+x}{a} - \frac{x}{a+x}} \end{array}$$

Bài 10. Tìm các giá trị nguyên của biến số x để biểu thức đã cho cũng có giá trị nguyên:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1} & \text{b)} \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x - 2} & \text{c)} \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{2x + 1} \\ \text{d)} \frac{3x^3 - 7x^2 + 11x - 1}{3x - 1} & \text{e)} \frac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16} & \end{array}$$

Bài 11. * Phân tích các phân thức sau thành tổng các phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

a) $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$

b) $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

c) $\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}$

Bài 12. * Tìm các số A, B, C để có:

a) $\frac{x^2-x+2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$

b) $\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

Bài 13. * Tính các tổng:

a) $A = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$

b) $B = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

Bài 14. * Tính các tổng:

a) $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

HD: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

b) $B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

HD: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} \right) - \frac{1}{k+1}$

Bài 15. * Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{N}$, ta có:

a) $\frac{4}{4m+2} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(2m+1)}$

b) $\frac{4}{4m+3} = \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(4m+3)}$

c) $\frac{4}{8m+5} = \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+1)(3m+2)} + \frac{1}{2(3m+2)(8m+5)}$

d) $\frac{4}{3m+2} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{(m+1)(3m+2)}$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II**Bài 1.** Thực hiện phép tính:

a) $\frac{8}{(x^2+3)(x^2-1)} + \frac{2}{x^2+3} + \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{2y^2}{x^2-y^2}$

c) $\frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^3-x^2} + \frac{3}{x^3-2x^2+x}$

d) $\frac{xy}{ab} + \frac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} - \frac{(x-b)(y-b)}{b(a-b)}$

e) $\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

f) $\frac{x^3+x^2-2x-20}{x^2-4} - \frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-2}$

$$g) \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1 \right) \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$h) \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$i) \frac{[a^2 - (b+c)^2](a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)}$$

$$k) \left[\frac{x^2-y^2}{xy} - \frac{1}{x+y} \left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} \right) \right] : \frac{x-y}{x}$$

Bài 2. Rút gọn các phân thức:

$$a) \frac{25x^2 - 20x + 4}{25x^2 - 4}$$

$$b) \frac{5x^2 + 10xy + 5y^2}{3x^3 + 3y^3}$$

$$c) \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$d) \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^4 - 16}$$

$$e) \frac{4x^4 - 20x^3 + 13x^2 + 30x + 9}{(4x^2 - 1)^2}$$

Bài 3. Rút gọn rồi tính giá trị các biểu thức:

$$a) \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac} \text{ với } a=4, b=-5, c=6 \quad b) \frac{16x^2 - 40xy}{8x^2 - 24xy} \text{ với } \frac{x}{y} = \frac{10}{3}$$

$$c) \frac{\frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} - \frac{x^2 - xy + y^2}{x-y}}{x-y - \frac{x^2}{x+y}} \text{ với } x=9, y=10$$

Bài 4. Biểu diễn các phân thức sau dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức với bậc của tử thức nhỏ hơn bậc mẫu thức:

$$a) \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

$$b) \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$c) \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 5}{x^2 + 1}$$

$$d) \frac{x^5 - 2x^4 - x - 3}{x + 1}$$

Bài 5. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức sau cũng có giá trị nguyên:

$$a) \frac{1}{x+2}$$

$$b) \frac{-1}{2x+3}$$

$$c) \frac{x^3 - x^2 + 2}{x-1}$$

$$d) \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x-2}$$

Bài 6. Cho biểu thức: $P = \frac{3x^2 + 3x}{(x+1)(2x-6)}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Tìm giá trị của x để $P = 1$.

Bài 7. Cho biểu thức: $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm x để $P = \frac{-3}{4}$.

d) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P cũng có giá trị nguyên.

e) Tính giá trị của biểu thức P khi $x^2 - 9 = 0$.

Bài 8. Cho biểu thức: $P = \frac{(a+3)^2}{2a^2+6a} \cdot \left(1 - \frac{6a-18}{a^2-9} \right)$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Với giá trị nào của a thì $P = 0$; $P = 1$.

Bài 9. Cho biểu thức: $P = \frac{x}{2x-2} + \frac{x^2+1}{2-2x^2}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm giá trị của x để $P = -\frac{1}{2}$.

Bài 10. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x^2 + 2x}{2x + 10} + \frac{x - 5}{x} + \frac{50 - 5x}{2x(x + 5)}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Tìm giá trị của x để $P = 1$; $P = -3$.

Bài 11. Cho biểu thức:
$$P = \frac{2}{2x + 3} + \frac{3}{2x + 1} - \frac{6x + 5}{(2x + 3)(2x - 3)}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm giá trị của x để $P = -1$.

Bài 12. Cho biểu thức:
$$P = \frac{1}{x + 5} + \frac{2}{x - 5} - \frac{2x + 10}{(x + 5)(x - 5)}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Cho $P = -3$. Tính giá trị của biểu thức $Q = 9x^2 - 42x + 49$.

Bài 13. Cho biểu thức:
$$P = \frac{3}{x + 3} + \frac{1}{x - 3} - \frac{18}{9 - x^2}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm giá trị của x để $P = 4$.

Bài 14. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x^2}{5x + 25} + \frac{2x - 10}{x} + \frac{50 + 5x}{x^2 + 5x}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm giá trị của x để $P = -4$.

Bài 15. Cho biểu thức:
$$P = \frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8}$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tính giá trị của P với $x = \frac{4001}{2000}$.

Bài 16. Cho biểu thức:
$$P = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{1-x^3} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1} \right) : \frac{2x+1}{x^2+2x+1}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài 17. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x^2 + 2x}{2x + 10} + \frac{x - 5}{x} + \frac{50 - 5x}{2x(x + 5)}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm giá trị của x để $P = 0$; $P = \frac{1}{4}$.

d) Tìm giá trị của x để $P > 0$; $P < 0$.

Bài 18. Cho biểu thức:
$$P = \left[\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} \right] \cdot \frac{4x^2-4}{5}.$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) CMR: khi giá trị của biểu thức được xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x?

Bài 19. Cho biểu thức:
$$P = \left(\frac{5x+2}{x^2-10} + \frac{5x-2}{x^2+10} \right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4}.$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) Rút gọn biểu thức P.
c) Tính giá trị của P khi $x = 20040$.

Bài 20. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x^2-10x+25}{x^2-5x}.$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) Tìm giá trị của x để $P = 0$; $P = \frac{5}{2}$.
c) Tìm giá trị nguyên của x để P cũng có giá trị nguyên.

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

ĐỀ I

Câu 1 (4 điểm): Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{4x+1}{3x} + \frac{2x-3}{6x}$

b) $\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2} : \frac{x+y}{3xy}$

Câu 2 (2 điểm): Rút gọn biểu thức Q với $x \neq 5$; và $x \neq -5$

$$Q = \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5} \right) : \frac{2x}{x^2-25}$$

Câu 3 (4 điểm): Cho phân thức $\frac{3x+3}{x^2-1}$

- a, Tìm điều kiện của x để giá trị phân thức được xác định.
b, Rút gọn phân thức trên.
c, Tìm x để phân thức có giá trị bằng -2.

ĐÁP ÁN

Câu	Đáp án	Điểm
	a) $\frac{4x+1}{3x} + \frac{2x-3}{6x} = \frac{2(4x+1)}{6x} + \frac{2x-3}{6x} = \frac{8x+2x-1}{6x}$	1,5
	$= \frac{10x-1}{6x}$	0,5

1	b) $\frac{x^2 - y^2}{6x^2y^2} : \frac{x+y}{3xy} = \frac{(x+y)(x-y)}{6x^2y^2} \cdot \frac{3xy}{x+y} = \frac{x-y}{2xy}$	2
2	$Q = \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5} \right) : \frac{2x}{x^2 - 25}$ với $x \neq 5, x \neq -5$ ta có :	0,5
	$Q = \frac{2x}{(x+5)(x-5)} : \frac{2x}{(x+5)(x-5)}$	1
	$Q = \frac{2x}{(x+5)(x-5)} \cdot \frac{(x+5)(x-5)}{2x} = 1$	0,5
3	a, Điều kiện để phân thức xác định là: $x^2 - 1 \neq 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x \neq \pm 1$	1,0
	b, Ta có: $\frac{3x+3}{x^2-1} = \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x-1}$	1
	c, Để phân thức có giá trị = -2 thì: $\frac{3}{x-1} = -2$	0,25
	$\Leftrightarrow 3 = -2(x-1) \Leftrightarrow 3 = -2x+2$	0,5
	$\Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện).	0,25

ĐỀ II**Bài 1 : (3 đ)** : Rút gọn các phân thức sau

a/ $\frac{16x^2 - 1}{16x^2 - 8x + 1}$

b/ $\frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^2 - 4x^2}$

Bài 2 : (3 đ) : Thực hiện phép tính

$$a/ \frac{3a^2 - a + 3}{a^3 - 1} + \frac{1 - a}{a^2 + a + 1} + \frac{2}{1 - a} \quad b/ x - \frac{xy}{x + y} - \frac{x^3}{x^2 - y^2}$$

Bài 3 (3đ) : Thực hiện phép tính

$$\frac{y}{x - y} - \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2} - \frac{y}{x^2 - y^2} \right)$$

Bài 4 (1đ) : Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{2x + 1}{x - 1} + \frac{8}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{5}$$

a/ Tìm điều kiện xác định của biểu thức B

b/ Rút gọn biểu thức B, và chứng tỏ $B > 0$ với mọi $x \neq \pm 1$

ĐÁP ÁN

BÀI	NỘI DUNG	ĐIỂM THÀNH PHẦN
Bài 1 3đ	$a/ \frac{16x^2 - 1}{16x^2 - 8x + 1} = \frac{(4x)^2 - 1^2}{(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2}$ $= \frac{(4x - 1)(4x + 1)}{(4x - 1)^2} = \frac{4x + 1}{4x - 1}$	0,5đ 0,5đ.2 = 1đ
	$b/ \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^2 - 4x^2} = \frac{(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot y + y^2}{-[(2x)^2 - y^2]}$ $= \frac{-(2x - y)^2}{(2x + y)(2x - y)} = \frac{-(2x - y)}{2x + y} = -\frac{2x - y}{2x + y}$	0,5đ 0,5đ.2 = 1đ
Bài 2 3đ	$a/ \frac{3a^2 - a + 3}{a^3 - 1} + \frac{1 - a}{a^2 + a + 1} + \frac{2}{1 - a}$ $= \frac{3a^2 - a + 3 + (1 - a)(a - 1) - 2(a^2 + a + 1)}{a^3 - 1}$ $= \frac{3a^2 - a + 3 + a - 1 - a^2 + a - 2a^2 - 2a - 2}{a^3 - 1} = -\frac{a}{a^3 - 1}$	0,5đ 0,5đ . 2 = 1đ
	$b/ x - \frac{xy}{x + y} - \frac{x^3}{x^2 - y^2} = \frac{x(x^2 - y^2) - xy(x - y) - x^3}{x^2 - y^2}$ $= \frac{x^3 - xy^2 - x^2y + xy^2 - x^3}{x^2 - y^2} = -\frac{x^2y}{x^2 - y^2}$	0,75đ 0,75đ

MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

ĐỀ SỐ 1

a) Tìm điều kiện để cho biểu thức $\frac{2}{x-1}$ là một phân thức:

b) Tìm phân thức bằng với phân thức $\frac{1-x}{y-x}$?

a) Tìm phân thức đối của phân thức sau $\frac{3x}{x+y}$

b) Tìm phân thức nghịch đảo của phân thức sau $-\frac{3y^2}{2x}$.

Câu 3: (2 điểm). Rút gọn phân thức:

$$a) \frac{6x^2y^2}{8xy^5} \quad b) \frac{x^2 - xy}{5xy - 5y^2}$$

Câu 4: (3 điểm). Thực hiện các phép tính:

$$a) \frac{y}{3x} + \frac{2y}{3x} \quad b) \frac{6x^3(2y+1)}{5y} \cdot \frac{15}{2x^3(2y+1)} \quad c) \frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y}$$

Câu 5: (3 điểm). Cho biểu thức: $A = \frac{8x}{(2x-1)(2x+1)} : \frac{4x}{10x-5}$

- a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức. b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = \frac{1}{2}$.
c) Với giá trị nguyên nào của x thì A nhận giá trị nguyên.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1: (2 điểm)

1) Điền vào chỗ trống để có đẳng thức đúng:

$$a) \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x-1) \dots}{(x+1)(x+1)}; \quad b) \frac{x(x-2)}{2(x-2)} = \frac{\dots}{\dots}$$

2) Giải thích vì sao có thể viết: $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

Câu 2: (1 điểm) Rút gọn phân thức: $\frac{x^2-4}{2x-4}$

Câu 3: (2 điểm) Thực hiện phép tính.

$$1) \frac{4x-6}{9} + \frac{5x+6}{9} \quad 2) \frac{4x+5}{2x-1} - \frac{5-9x}{2x-1}$$

Câu 4: (3 điểm) Thực hiện phép tính

$$1) \frac{2x-4}{x+5} \cdot \frac{x+5}{x-2} \quad 2) \frac{x+5}{3(x+4)} : \frac{x+5}{x+4} \quad 3) \frac{x^3-8}{5x+20} \cdot \frac{x(x+4)}{x^2+2x+4}$$

Câu 5: (2 điểm) Cho phân thức: $A = \frac{x-1}{x^2-x}$

- 1) Tìm điều kiện xác định của A 2) Rút gọn A.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1: (1,5 điểm) Tìm đa thức A trong đẳng thức sau: $\frac{A}{x^2-64} = \frac{x}{x-8}$.

Câu 2: (1,5 điểm) Rút gọn phân thức sau $A = \frac{32x-8x^2+2x^3}{x^3+64}$

Câu 3: (2 điểm) Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{x}{x-3} + \frac{9-6x}{x^2-3x} \quad b) \frac{x+2}{3x} + \frac{x-5}{5x} - \frac{x+8}{4x}$$

Câu 4: (3 điểm) Cho phân thức $\frac{3x^3 + 6x^2}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$

- a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.
b) Chứng tỏ rằng giá trị của phân thức luôn không âm khi nó được xác định.

Câu 5: (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của phân thức $M = \frac{4}{x^2 - 4x + 7}$

Câu 6: (1 điểm) Tính: $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$

ĐỀ SỐ 4

Câu 1: (2 đ) : Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{16x^2 - 1}{16x^2 - 8x + 1}$

b) $\frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^2 - 4x^2}$

Câu 2: (3 đ) : Thực hiện phép tính

a/ $\frac{3a^2 - a + 3}{a^3 - 1} + \frac{1 - a}{a^2 + a + 1} + \frac{2}{1 - a}$ b/ $x - \frac{xy}{x + y} - \frac{x^3}{x^2 - y^2}$

Câu 3: (2 đ) : Thực hiện phép tính

$$\frac{y}{x - y} - \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2} - \frac{y}{x^2 - y^2} \right)$$

Câu 4: (3 đ) : Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{2x + 1}{x - 1} + \frac{8}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{5}$$

a/ Tìm điều kiện xác định của biểu thức B

b/ Rút gọn biểu thức B, và chứng tỏ $B > 0$ với mọi $x \neq \pm 1$

ĐỀ SỐ 5

Câu 1: (2 điểm). Rút gọn phân thức:

a) $\frac{6x^2y^2}{8xy^5}$ b) $\frac{x^2 - xy}{5xy - 5y^2}$

Câu 2: (3 điểm). Thực hiện các phép tính:

a) $\frac{y}{3x} + \frac{2y}{3x}$ b) $\frac{6x^3(2y+1)}{5y} \cdot \frac{15}{2x^3(2y+1)}$ c) $\frac{4x - 1}{3x^2y} - \frac{7x - 1}{3x^2y}$

Câu 3: (2 đ). Biến đổi biểu thức sau thành một phân thức:

a) $2 + \frac{2}{x}$

b) $2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}$

Câu 4: (3 điểm). Cho phân thức $\frac{4x-4}{2x^2-2}$

a/ Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.

b/ Tìm giá trị của x để phân thức có giá trị bằng 2.

c/ Tìm giá trị của x để phân thức có giá trị là số nguyên.

ĐỀ SỐ 6

Câu 1: (4 điểm): Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{4x+1}{3x} + \frac{2x-3}{6x}$

b) $\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2} : \frac{x+y}{3xy}$

c) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{4}{x^2-1}$

d) $\frac{x^3y+xy^3}{x^4y} : (x^2+y^2)$

Câu 2: (2 điểm): Rút gọn biểu thức Q với $x \neq 5$; và $x \neq -5$

$$Q = \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5} \right) : \frac{2x}{x^2-25}$$

Câu 3 (4 điểm): Cho phân thức $\frac{3x+3}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị phân thức được xác định.

b) Rút gọn phân thức trên.

c) Tìm x để phân thức có giá trị bằng -2.

ĐỀ SỐ 7

Câu 1 (4 điểm): Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{4x+1}{3x} + \frac{2x-3}{6x}$

b) $\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2} : \frac{x+y}{3xy}$

Câu 2 (2 điểm): Rút gọn biểu thức Q với $x \neq 5$; và $x \neq -5$

$$Q = \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5} \right) : \frac{2x}{x^2 - 25}$$

Câu 3 (4 điểm): Cho phân thức $\frac{3x+3}{x^2-1}$

a, Tìm điều kiện của x để giá trị phân thức được xác định.

b, Rút gọn phân thức trên.

c, Tìm x để phân thức có giá trị bằng -2.

ĐỀ SỐ 8

Bài 1 : (3 đ) : Rút gọn các phân thức sau

a/ $\frac{16x^2 - 1}{16x^2 - 8x + 1}$

b/ $\frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^2 - 4x^2}$

Bài 2 : (3 đ) : Thực hiện phép tính

a/ $\frac{3a^2 - a + 3}{a^3 - 1} + \frac{1 - a}{a^2 + a + 1} + \frac{2}{1 - a}$

b/ $x - \frac{xy}{x + y} - \frac{x^3}{x^2 - y^2}$

Bài 3 (3đ) : Thực hiện phép tính

$$\frac{y}{x-y} - \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2} - \frac{y}{x^2 - y^2} \right)$$

Bài 4(1đ) : Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{2x+1}{x-1} + \frac{8}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) \cdot \frac{x^2-1}{5}$$

a/ Tìm điều kiện xác định của biểu thức B

b/ Rút gọn biểu thức B, và chứng tỏ $B > 0$ với mọi $x \neq \pm 1$

CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

Phương trình bậc nhất một ẩn:

Định nghĩa: PT bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$, trong đó a, b là hai số tùy ý và $a \neq 0$.

VẤN ĐỀ I. Chứng minh một số là nghiệm của một phương trình

Giá trị x_0 gọi là nghiệm của phương trình

$A(x) = B(x)$ nếu $A(x_0) = B(x_0)$. Một phương trình có thể có 1, 2, 3 ... nghiệm, cũng có thể vô nghiệm

hoặc vô số nghiệm.

Giải phương trình là tìm tập hợp nghiệm của phương trình đó.

Phương pháp: Dùng mệnh đề sau:

- x_0 là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x_0) = B(x_0)$
- x_0 không là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x_0) \neq B(x_0)$

Bài 1: Xét xem x_0 có là nghiệm của phương trình hay không?

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| a) $3(2-x)+1=4-2x$; $x_0=-2$ | b) $5x-2=3x+1$; $x_0=\frac{3}{2}$ |
| c) $3x-5=5x-1$; $x_0=-2$ | d) $2(x+4)=3-x$; $x_0=-2$ |
| e) $7-3x=x-5$; $x_0=4$ | f) $2(x-1)+3x=8$; $x_0=2$ |
| g) $5x-(x-1)=7$; $x_0=-1$ | h) $3x-2=2x+1$; $x_0=3$ |

Bài 2: Xét xem x_0 có là nghiệm của phương trình hay không?

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| a) $x^2-3x+7=1+2x$; $x_0=2$ | b) $x^2-3x-10=0$; $x_0=-2$ |
| c) $x^2-3x+4=2(x-1)$; $x_0=2$ | d) $(x+1)(x-2)(x-5)=0$; $x_0=-1$ |
| e) $2x^2+3x+1=0$; $x_0=-1$ | f) $4x^2-3x=2x-1$; $x_0=5$ |

Bài 3: Tìm giá trị k sao cho phương trình có nghiệm x_0 được chỉ ra:

- | | |
|--|--|
| a) $2x+k=x-1$; $x_0=-2$ | b) $(2x+1)(9x+2k)-5(x+2)=40$; $x_0=2$ |
| c) $2(2x+1)+18=3(x+2)(2x+k)$; $x_0=1$ | d) $5(k+3x)(x+1)-4(1+2x)=80$; $x_0=2$ |

VẤN ĐỀ II. Số nghiệm của một phương trình

Phương pháp: Dùng mệnh đề sau:

- Phương trình $A(x) = B(x)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow A(x) \neq B(x), \forall x$
- Phương trình $A(x) = B(x)$ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x$

Bài 1. Chứng tỏ các phương trình sau vô nghiệm:

- | | |
|-------------------------|------------------|
| a) $2x+5=4(x-1)-2(x-3)$ | b) $2x-3=2(x-3)$ |
| c) $ x-2 =-1$ | d) $x^2-4x+6=0$ |

Bài 2. Chứng tỏ rằng các phương trình sau có vô số nghiệm:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| a) $4(x-2)-3x=x-8$ | b) $4(x-3)+16=4(1+4x)$ |
| c) $2(x-1)=2x-2$ | d) $ x =x$ |
| e) $(x+2)^2=x^2+4x+4$ | f) $(3-x)^2=x^2-6x+9$ |

Bài 3. Chứng tỏ rằng các phương trình sau có nhiều hơn một nghiệm:

- | | |
|------------------------|-------------------|
| a) $x^2-4=0$ | b) $(x-1)(x-2)=0$ |
| c) $(x-1)(2-x)(x+3)=0$ | d) $x^2-3x=0$ |
| e) $ x-1 =3$ | f) $ 2x-1 =1$ |

VẤN ĐỀ III. Chứng minh hai phương trình tương đương

Để chứng minh hai phương trình tương đương, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- Chứng minh hai phương trình có cùng tập nghiệm.
- Sử dụng các phép biến đổi tương đương để biến đổi phương trình này thành phương trình kia.
- Hai qui tắc biến đổi phương trình:
 - **Qui tắc chuyển vế:** Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang

về kia và đổi dấu hạng tử đó.

– **Quy tắc nhân:** Trong một phương trình, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số khác 0.

Bài 1. Xét xem các phương trình sau có tương đương hay không?

a) $3x = 3$ và $x - 1 = 0$

b) $x + 3 = 0$ và $3x + 9 = 0$

c) $x - 2 = 0$ và $(x - 2)(x + 3) = 0$

d) $2x - 6 = 0$ và $x(x - 3) = 0$

Bài 2. Xét xem các phương trình sau có tương đương hay không?

a) $x^2 + 2 = 0$ và $x(x^2 + 2) = 0$

b) $x + 1 = x$ và $x^2 + 1 = 0$

c) $x + 2 = 0$ và $\frac{x}{x+2} = 0$

d) $x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$ và $x^2 + x = 0$

e) $|x - 1| = 2$ và $(x + 1)(x - 3) = 0$

f) $x + 5 = 0$ và $(x + 5)(x^2 + 1) = 0$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Phương trình bậc nhất một ẩn:

Định nghĩa: PT bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$, trong đó a, b là hai số tùy ý và $a \neq 0$.

Phương pháp giải:

- **Áp dụng hai quy tắc biến đổi tương đương:**

+ **Quy tắc chuyển vế:** Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

+ **Quy tắc nhân với một số:** Khi nhân hai vế của một phương trình với cùng một số khác 0, ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

- Phương trình bậc nhất một ẩn dạng $ax + b = 0$ luôn có một nghiệm duy nhất

$$x = -\frac{b}{a}$$

- Phương trình $ax + b = 0$ được giải như sau:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

$$\text{Tập nghiệm } S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a) $3x - 9 = 0$

+ Chuyển - 9 từ vế trái sang vế phải đồng thời đổi dấu, ta được $3x = 9$

+ Nhân cả 2 vế với $\frac{1}{3}$, ta được $3x \cdot \frac{1}{3} = 9 \cdot \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$

b) $-7x + 15 = 0$

$$\Leftrightarrow -7x = -15$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-15}{-7}$$

$$x = \frac{15}{7}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{15}{7} \right\}$

VẤN ĐỀ I. Phương trình đưa được về dạng phương trình bậc nhất

Phương pháp chung:

- Quy đồng mẫu hai vế

- Nhân hai vế với mẫu chung để khử mẫu
- Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia.
- Thu gọn về dạng $ax + b = 0$ và giải.

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a) $2x - (5 - 3x) = 3(x + 2)$

b)

$$\frac{2x - (5 - 3x)}{3} = \frac{3(x + 2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 + 3x = 3x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3x - 3x = 6 + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x = 11$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11}{2}$$

Phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{11}{2} \right\}$

$$\frac{5x-2}{3} + x = 1 + \frac{3-5x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-2+3x}{3} = \frac{2+3-5x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-2+3x}{3} \cdot 6 = \frac{2+3-5x}{2} \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (8x - 2) = 3 \cdot (5 - 5x)$$

$$\Leftrightarrow 16x - 4 = 15 - 15x$$

$$\Leftrightarrow 16x + 15x = 15 + 4$$

$$\Leftrightarrow 31x = 19$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{19}{31}$$

Phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{19}{31} \right\}$

Trường hợp phương trình thu gọn có hệ số của ẩn bằng 0

+ Dạng 1: $0x = 0$

Phương trình có vô số nghiệm

$$S = R$$

+ Dạng 2: $0x = c (c \neq 0)$

Phương trình vô nghiệm

$$S = \emptyset$$

Ví dụ: Giải phương trình:

a) $2(x + 3) = 2(x - 4) + 14$

b) $2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4\left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 1$

$$\Leftrightarrow 2x + 6 = 2x - 8 + 14$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2x = -8 + 14 - 6$$

$$\Leftrightarrow 0x = 0$$

Phương trình có vô số nghiệm

$$S = R$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 + 4 - 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2x = 1 + 1 - 4$$

$$\Leftrightarrow 0x = -2$$

Phương trình vô nghiệm

$$S = \emptyset$$

Sai lầm của học sinh giáo viên cần sửa:

Sau khi biến đổi phương trình đưa về dạng $0x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{0} = 0$

Nâng cao: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{mx+5}{10} + \frac{x+m}{4} = \frac{m}{20} \quad (1)$$

Giải:

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow \frac{mx+5}{10} \cdot 20 + \frac{x+m}{4} \cdot 20 = \frac{m}{20} \cdot 20$$

$$\Leftrightarrow 2(mx + 5) + 5(x + m) = m$$

$$\Leftrightarrow 2mx + 10 + 5x + 5m = m$$

$$\Leftrightarrow (2m + 5)x = m - 5m - 10$$

$$\Leftrightarrow (2m + 5)x = -2(2m + 5)$$

+ Nếu $2m + 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{-5}{2}$, phương trình có nghiệm $x = -2$

+ Nếu $2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-5}{2}$, phương trình có dạng $0x = 0$ hay phương trình có vô số nghiệm.

Kết luận: + Với $m \neq \frac{-5}{2}$, tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2\}$

+ Với $m = \frac{-5}{2}$, tập nghiệm của phương trình là $S = R$

Nhận xét: Phương trình (1) gọi là phương trình chứa tham số m

Sau khi thu gọn về dạng $ax + b = 0$ hoặc $ax = -b$, ta phải biện luận 2 trường hợp:

+ Trường hợp $a \neq 0$: phương trình có một nghiệm $x = \frac{-b}{a}$

+ Trường hợp $a = 0$, ta xét tiếp: nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm
Nếu $b = 0$, PT vô số nghiệm

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- a) $4x - 10 = 0$ b) $7 - 3x = 9 - x$ c) $2x - (3 - 5x) = 4(x + 3)$
d) $5 - (6 - x) = 4(3 - 2x)$ e) $4(x + 3) = -7x + 17$ f) $5(x - 3) - 4 = 2(x - 1) + 7$
g) $5(x - 3) - 4 = 2(x - 1) + 7$ h) $4(3x - 2) - 3(x - 4) = 7x + 20$
ĐS: a) $x = \frac{5}{2}$ b) $x = -1$ c) $x = 5$ d) $x = \frac{13}{9}$ e) $x = \frac{5}{11}$ f) $x = 8$
g) $x = 8$ h) $x = 8$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

- a) $(3x - 1)(x + 3) = (2 - x)(5 - 3x)$ b) $(x + 5)(2x - 1) = (2x - 3)(x + 1)$
c) $(x + 1)(x + 9) = (x + 3)(x + 5)$ d) $(3x + 5)(2x + 1) = (6x - 2)(x - 3)$
e) $(x + 2)^2 + 2(x - 4) = (x - 4)(x - 2)$ f) $(x + 1)(2x - 3) - 3(x - 2) = 2(x - 1)^2$
ĐS: a) $x = \frac{13}{19}$ b) $x = \frac{1}{5}$ c) $x = 3$ d) $x = \frac{1}{33}$ e) $x = 1$ f) vô nghiệm

Bài 3. Giải các phương trình sau:

- a) $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2 = 5x + 38$ b) $3(x - 2)^2 + 9(x - 1) = 3(x^2 + x - 3)$
c) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 6x + 18$ d) $(x - 1)^3 - x(x + 1)^2 = 5x(2 - x) - 11(x + 2)$
e) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2x = x(x - 1)(x + 1)$ f) $(x - 2)^3 + (3x - 1)(3x + 1) = (x + 1)^3$
ĐS: a) $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = -7$ e) $x = 1$ f) $x = \frac{10}{9}$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

- a) $\frac{x}{3} - \frac{5x}{6} - \frac{15x}{12} = \frac{x}{4} - 5$ b) $\frac{8x - 3}{4} - \frac{3x - 2}{2} = \frac{2x - 1}{2} + \frac{x + 3}{4}$
c) $\frac{x - 1}{2} - \frac{x + 1}{15} - \frac{2x - 13}{6} = 0$ d) $\frac{3(3 - x)}{8} + \frac{2(5 - x)}{3} = \frac{1 - x}{2} - 2$
e) $\frac{3(5x - 2)}{4} - 2 = \frac{7x}{3} - 5(x - 7)$ f) $\frac{x + 5}{2} + \frac{3 - 2x}{4} = x - \frac{7 + x}{6}$
g) $\frac{x - 3}{11} + \frac{x + 1}{3} = \frac{x + 7}{9} - 1$ h) $\frac{3x - 0,4}{2} + \frac{1,5 - 2x}{3} = \frac{x + 0,5}{5}$
ĐS: a) $x = \frac{30}{7}$ b) $x = 0$ c) $x = -16$ d) $x = 11$ e) $x = 6$ f) $x = \frac{53}{10}$
g) $x = -\frac{28}{31}$ h) $x = -\frac{6}{19}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

- a) $\frac{2x - 1}{5} - \frac{x - 2}{3} = \frac{x + 7}{15}$ b) $\frac{x + 3}{2} - \frac{x - 1}{3} = \frac{x + 5}{6} + 1$
c) $\frac{2(x + 5)}{3} + \frac{x + 12}{2} - \frac{5(x - 2)}{6} = \frac{x}{3} + 11$ d) $\frac{x - 4}{5} + \frac{3x - 2}{10} - x = \frac{2x - 5}{3} - \frac{7x + 2}{6}$
e) $\frac{2(x - 3)}{7} + \frac{x - 5}{3} = \frac{13x + 4}{21}$ f) $\frac{3x - 1}{2} - \left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{4x - 9}{8}$

ĐS: a) x tùy ý b) x tùy ý c) x tùy ý d) vô nghiệm e) vô nghiệm f) vô nghiệm

Bài 6. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(x-2)(x+10)}{3} - \frac{(x+4)(x+10)}{12} = \frac{(x-2)(x+4)}{4} & \text{b)} \quad \frac{(x+2)^2}{8} - 2(2x+1) = 25 + \frac{(x-2)^2}{8} \\ \text{c)} \quad & \frac{(2x-3)(2x+3)}{8} = \frac{(x-4)^2}{6} + \frac{(x-2)^2}{3} & \text{d)} \quad \frac{7x^2-14x-5}{15} = \frac{(2x+1)^2}{5} - \frac{(x-1)^2}{3} \\ \text{e)} \quad & \frac{(7x+1)(x-2)}{10} + \frac{2}{5} = \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(x-1)(x-3)}{2} \end{aligned}$$

ĐS: a) $x=8$ b) $x=-9$ c) $x=\frac{123}{64}$ d) $x=\frac{1}{12}$ e) $x=\frac{19}{15}$

Bài 7. Giải các phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x+1}{35} + \frac{x+3}{33} = \frac{x+5}{31} + \frac{x+7}{29} & (\text{HD: Cộng thêm 1 vào các hạng tử}) \\ \text{b)} \quad & \frac{x-10}{1994} + \frac{x-8}{1996} + \frac{x-6}{1998} + \frac{x-4}{2000} + \frac{x-2}{2002} = & (\text{HD: Trừ đi 1 vào các hạng tử}) \\ & = \frac{x-2002}{2} + \frac{x-2000}{4} + \frac{x-1998}{6} + \frac{x-1996}{8} + \frac{x-1994}{10} \\ \text{c)} \quad & \frac{x-1991}{9} + \frac{x-1993}{7} + \frac{x-1995}{5} + \frac{x-1997}{3} + \frac{x-1999}{1} = & (\text{HD: Trừ đi 1 vào các hạng tử}) \\ & = \frac{x-9}{1991} + \frac{x-7}{1993} + \frac{x-5}{1995} + \frac{x-3}{1997} + \frac{x-1}{1999} \\ \text{d)} \quad & \frac{x-85}{15} + \frac{x-74}{13} + \frac{x-67}{11} + \frac{x-64}{9} = 10 & (\text{Chú ý: } 10=1+2+3+4) \\ \text{e)} \quad & \frac{x-1}{13} - \frac{2x-13}{15} = \frac{3x-15}{27} - \frac{4x-27}{29} & (\text{HD: Thêm hoặc bớt 1 vào các hạng tử}) \end{aligned}$$

ĐS: a) $x=-36$ b) $x=2004$ c) $x=2000$ d) $x=100$ e) $x=14$.

Bài 8. Giải các phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} = \frac{x+5}{61} + \frac{x+7}{59} & \text{b)} \quad \frac{x+29}{31} - \frac{x+27}{33} = \frac{x+17}{43} - \frac{x+15}{45} \\ \text{c)} \quad & \frac{x+6}{1999} + \frac{x+8}{1997} = \frac{x+10}{1995} + \frac{x+12}{1993} & \text{d)} \quad \frac{1909-x}{91} + \frac{1907-x}{93} + \frac{1905-x}{95} + \frac{1903-x}{91} + 4 = 0 \\ \text{e)} \quad & \frac{x-29}{1970} + \frac{x-27}{1972} + \frac{x-25}{1974} + \frac{x-23}{1976} + \frac{x-21}{1978} + \frac{x-19}{1980} = & \\ & = \frac{x-1970}{29} + \frac{x-1972}{27} + \frac{x-1974}{25} + \frac{x-1976}{23} + \frac{x-1978}{21} + \frac{x-1980}{19} \end{aligned}$$

ĐS: a) $x=-66$ b) $x=-60$ c) $x=-2005$ d) $x=2000$ e) $x=1999$.

VẤN ĐỀ II. Phương trình tích

Định nghĩa: Phương trình tích là phương trình có dạng $A(x).B(x)...M(x) = 0$

Trong đó $A(x), B(x), \dots, M(x)$ là các đa thức biến x

Để giải phương trình tích, ta áp dụng công thức:

$$A(x).B(x) \Leftrightarrow A(x)=0 \text{ hoặc } B(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{cases}$$

Ta giải hai phương trình $A(x)=0$ và $B(x)=0$, rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (3x-2)(4x+5)=0 & \text{b)} \quad 2x(x-3)+5(x-3)=0 \\ \Leftrightarrow & 3x-2=0 \text{ hoặc } 4x+5=0 & \Leftrightarrow (x-3)(2x+5)=0 \end{aligned}$$

$$+) 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ hoặc } 2x + 5 = 0$$

$$+) 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

$$+) x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của pt } S = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{5}{4} \right\}$$

$$+) 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của pt } S = \left\{ -\frac{5}{2}, 3 \right\}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$a) (5x - 4)(4x + 6) = 0$$

$$c) (4x - 10)(24 + 5x) = 0$$

$$e) (5x - 10)(8 - 2x) = 0$$

$$\text{ĐS: } a) x = \frac{4}{5}; x = -\frac{3}{2} \quad b) x = 2; x = 3$$

$$e) x = 2; x = 4 \quad f) x = 3; x = -5$$

$$b) (3,5x - 7)(2,1x - 6,3) = 0$$

$$d) (x - 3)(2x + 1) = 0$$

$$f) (9 - 3x)(15 + 3x) = 0$$

$$c) x = \frac{5}{2}; x = -\frac{5}{24} \quad d) x = 3; x = -\frac{1}{2}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$a) (2x + 1)(x^2 + 2) = 0$$

$$c) (x^2 + x + 1)(6 - 2x) = 0$$

$$\text{ĐS: } a) x = -\frac{1}{2} \quad b) x = \frac{3}{7}$$

$$b) (x^2 + 4)(7x - 3) = 0$$

$$d) (8x - 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$c) x = 3 \quad d) x = \frac{1}{2}$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

$$a) (x - 5)(3 - 2x)(3x + 4) = 0$$

$$c) (2x - 1)(x - 3)(x + 7) = 0$$

$$e) (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x - 6) = 0$$

$$\text{ĐS: } a) S = \left\{ 5; \frac{3}{2}; -\frac{4}{3} \right\} \quad b) S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; 5 \right\}$$

$$e) S = \{-1; -3; -5; 6\} \quad f) S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{8}{5}; \frac{1}{2} \right\}$$

$$b) (2x - 1)(3x + 2)(5 - x) = 0$$

$$d) (3 - 2x)(6x + 4)(5 - 8x) = 0$$

$$f) (2x + 1)(3x - 2)(5x - 8)(2x - 1) = 0$$

$$c) S = \left\{ \frac{1}{2}; 3; -7 \right\} \quad d) S = \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{8} \right\}$$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

$$a) (x - 2)(3x + 5) = (2x - 4)(x + 1)$$

$$c) 9x^2 - 1 = (3x + 1)(2x - 3)$$

$$e) 27x^2(x + 3) - 12(x^2 + 3x) = 0$$

$$\text{ĐS: } a) x = 2; x = -3 \quad b) x = 0; x = 4 \quad c) x = -\frac{1}{3}; x = -2 \quad d) x = -\frac{1}{3}; x = -\frac{4}{5}$$

$$e) x = 0; x = -3; x = \frac{4}{9} \quad f) x = \frac{1}{4}$$

$$b) (2x + 5)(x - 4) = (x - 5)(4 - x)$$

$$d) 2(9x^2 + 6x + 1) = (3x + 1)(x - 2)$$

$$f) 16x^2 - 8x + 1 = 4(x + 3)(4x - 1)$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

$$a) (2x - 1)^2 = 49$$

$$c) (2x + 7)^2 = 9(x + 2)^2$$

$$e) 4(2x + 7)^2 - 9(x + 3)^2 = 0$$

$$\text{ĐS: } a) x = 4; x = -3 \quad b) x = -4; x = \frac{10}{9}$$

$$e) x = -5; x = -\frac{23}{7} \quad f) x = 3; x = -\frac{1}{2}$$

$$b) (5x - 3)^2 - (4x - 7)^2 = 0$$

$$d) (x + 2)^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$$

$$f) (5x^2 - 2x + 10)^2 = (3x^2 + 10x - 8)^2$$

$$c) x = 1; x = -\frac{13}{5} \quad d) x = 1; x = 4$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $(9x^2 - 4)(x + 1) = (3x + 2)(x^2 - 1)$

b) $(x - 1)^2 - 1 + x^2 = (1 - x)(x + 3)$

c) $(x^2 - 1)(x + 2)(x - 3) = (x - 1)(x^2 - 4)(x + 5)$

d) $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$

e) $x^3 - 7x + 6 = 0$

f) $x^4 - 4x^3 + 12x - 9 = 0$

g) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$

h) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

ĐS: a) $x = -\frac{2}{3}; x = -1; x = \frac{1}{2}$

b) $x = 1; x = -1$

c) $x = 1; x = -2; x = \frac{7}{5}$

d) $x = -1$

e) $x = 1; x = 2; x = -3$

f) $x = 1; x = -3$

g) $x = 0; x = 1; x = -1; x = 2; x = -2$

h) $x = -1; x = 1; x = 2$

Bài 7. Giải các phương trình sau: (Đặt ẩn phụ)

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$

b) $(x^2 + 2x + 3)^2 - 9(x^2 + 2x + 3) + 18 = 0$

c) $(x - 2)(x + 2)(x^2 - 10) = 72$

d) $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$

e) $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) - 297 = 0$

f) $x^4 - 2x^2 - 144x - 1295 = 0$

ĐS: a) $x = 1; x = -2$

b) $x = 0; x = 1; x = -2; x = -3$

c) $x = 4; x = -4$

d) $x = 2; x = -3$

e) $x = 4; x = -8$

f) $x = -5; x = 7$

VẤN ĐỀ III. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Định nghĩa:

Phương trình chứa ẩn ở mẫu là phương trình có dạng: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$

Trong đó $A(x); B(x); C(x); D(x)$ là các đa thức biến x

Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhân được.

Bước 4: (Kết luận) Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ: Giải các phương trình:

a) $\frac{x+3}{x} = \frac{5x+3}{5x-1} \quad (1)$

+) ĐKXĐ của phương trình: $x \neq 0$ và $5x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ và $x \neq \frac{1}{5}$

PT⁽¹⁾ $\Rightarrow \frac{(5x-1)(x+3)}{x(5x-1)} = \frac{x(5x-3)}{x(5x-1)}$

$\Rightarrow (5x - 1)(x + 3) = x(5x - 3)$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 14x - 3 = 5x^2 + 3x$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 14x - 5x^2 - 3x = 3$

$\Leftrightarrow 11x = 3$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{11}$

Ta thấy $x = \frac{3}{11}$ thỏa mãn ĐKXĐ của pt nên tập nghiệm của (1) là $S = \left\{ \frac{3}{11} \right\}$

b) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \right) \quad (2)$

+) ĐKXĐ của phương trình: $x - 1 \neq 0$ và $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq -1$

Quy đồng và khử mẫu ta được:

PT⁽²⁾ $\Rightarrow (x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 3x(x - 1)(x + 1 - x + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 6x(x - 1)$

$$\Leftrightarrow 4x = 6x^2 - 6x$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(3x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ hoặc } 3x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{5}{3}$$

Ta thấy $x = 0$ và $x = \frac{5}{3}$ thỏa mãn ĐKXD của phương trình (2).

Vậy tập nghiệm của (2) là $S = \left\{0; \frac{5}{3}\right\}$

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{4x-3}{x-5} = \frac{29}{3}$$

$$b) \frac{2x-1}{5-3x} = 2$$

$$c) \frac{4x-5}{x-1} = 2 + \frac{x}{x-1}$$

$$d) \frac{7}{x+2} = \frac{3}{x-5}$$

$$e) \frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$$

$$f) \frac{12x+1}{11x-4} + \frac{10x-4}{9} = \frac{20x+17}{18}$$

$$\text{ĐS: a) } x = \frac{136}{17}$$

$$b) x = \frac{11}{8}$$

$$c) x = 3$$

$$d) x = \frac{41}{4}$$

$$e) x = -\frac{5}{3}$$

$$f) x = 2$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{11}{x} = \frac{9}{x+1} + \frac{2}{x-4}$$

$$b) \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6}$$

$$c) \frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} - \frac{1+3x}{1-3x}$$

$$d) \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x+25}{2x^2-50} = \frac{x-5}{2x^2+10x}$$

$$e) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1}$$

$$f) \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)(x+2) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$\text{ĐS: a) } x = 44$$

$$b) x = 5$$

$$e) x = 4$$

$$f) x = 3$$

$$c) x = -1$$

$$d) \text{ vô nghiệm}$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{6x+1}{x^2-7x+10} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$$

$$b) \frac{2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$$

$$c) \frac{1}{3-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x-3} - \frac{(x-1)^2}{x^2-2x-3}$$

$$d) \frac{1}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{5}{6-x^2-x}$$

$$e) \frac{2}{x+2} - \frac{2x^2+16}{x^3+8} = \frac{5}{x^2-2x+4}$$

$$f) \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{2(x+2)^2}{x^6-1}$$

$$\text{ĐS: a) } x = \frac{9}{4}$$

$$b) \text{ vô nghiệm}$$

$$c) x = \frac{3}{5}$$

$$d) x = 4$$

$$e) \text{ vô nghiệm}$$

$$f) x = -\frac{5}{4}$$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{8}{x-8} + \frac{11}{x-11} = \frac{9}{x-9} + \frac{10}{x-10}$$

$$b) \frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-5} = \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-6}$$

$$c) \frac{4}{x^2-3x+2} - \frac{3}{2x^2-6x+1} + 1 = 0$$

$$d) \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x-6}$$

ĐS: a) $x = 0; x = \frac{19}{2}$ b) $x = 0; x = \frac{9}{2}$ c) $x = 0; x = 3$ d) $x = \frac{6}{5}; x = \frac{12}{5}$

III. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Các bước giải toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1: Lập phương trình

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình

Bước 3: Trả lời

Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

VẤN ĐỀ I. Loại so sánh

Trong đầu bài thường có các từ:

- nhiều hơn, thêm, đắt hơn, chậm hơn, ...: tương ứng với phép toán cộng.
- ít hơn, bớt, rẻ hơn, nhanh hơn, ...: tương ứng với phép toán trừ.
- gấp nhiều lần: tương ứng với phép toán nhân.
- kém nhiều lần: tương ứng với phép toán chia.

Bài 1. Tìm hai số nguyên liên tiếp, biết rằng 2 lần số nhỏ cộng 3 lần số lớn bằng -87.

ĐS: -18; -17.

Bài 2. Một phân số có tử số nhỏ hơn mẫu số là 8. Nếu thêm 2 đơn vị vào tử số và bớt mẫu số đi 3 đơn vị thì ta được phân số bằng $\frac{3}{4}$. Tìm phân số đã cho.

ĐS: $\frac{7}{15}$

Bài 3. Tổng của 4 số là 45. Nếu lấy số thứ nhất cộng thêm 2, số thứ hai trừ đi 2, số thứ ba nhân với 2, số thứ tư chỉ cho 2 thì bốn kết quả đó bằng nhau. Tìm 4 số ban đầu.

ĐS: 8; 12; 5; 20.

Bài 4. Thương của hai số là 3. Nếu tăng số bị chia lên 10 và giảm số chia đi một nửa thì hiệu của hai số mới là 30. Tìm hai số đó.

ĐS: 24; 8.

Bài 5. Một đội công nhân sửa một đoạn đường trong 3 ngày. Ngày thứ nhất đội sửa được $\frac{1}{3}$ đoạn

đường, ngày thứ hai đội sửa được một đoạn đường bằng $\frac{4}{3}$ đoạn được làm được trong ngày thứ nhất, ngày thứ ba đội sửa 80m còn lại. Tính chiều dài đoạn đường mà đội phải sửa.

ĐS: 360m.

Bài 6. Hai phân xưởng có tổng cộng 220 công nhân. Sau khi chuyển 10 công nhân ở phân xưởng 1 sang phân xưởng 2 thì $\frac{2}{3}$ số công nhân phân xưởng 1 bằng $\frac{4}{5}$ số công nhân phân xưởng 2.

Tính số công nhân của mỗi phân xưởng lúc đầu.

ĐS: Phân xưởng 1 có 120 công nhân, phân xưởng 2 có 90 công nhân.

Bài 7. Hai bể nước chứa 800 lít nước và 1300 lít nước. Người ta tháo ra cùng một lúc ở bể thứ nhất 15 lít/phút, bể thứ hai 25 lít/phút. Hỏi sau bao lâu số nước ở bể thứ nhất bằng $\frac{2}{3}$ số nước ở bể thứ hai?

ĐS: 40 phút.

Bài 8. Trước đây 5 năm, tuổi Dung bằng nửa tuổi của Dung sau 4 năm nữa. Tính tuổi của Dung hiện nay.

ĐS: 14 tuổi.

Bài 9. Tìm một số có chữ số hàng đơn vị là 2, biết rằng nếu xoá chữ số 2 đó thì số ấy giảm đi 200.

ĐS: 222.

Bài 10. Gia đình Đào có 4 người: bố, mẹ, bé Mai và Đào. Tuổi trung bình của cả nhà là 23. Nếu viết thêm chữ số 0 vào bên phải tuổi bé Mai thì được tuổi của bố, tuổi của mẹ bằng $\frac{9}{10}$ tuổi

bố và gấp 3 lần tuổi của Đào. Tìm tuổi của mỗi người trong gia đình Đào.

ĐS: Tuổi của bố, mẹ, bé Mai và Đào lần lượt là: 40, 36, 4, 12.

Bài 11. Nhân ngày 1 tháng 6, một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo. số kẹo này được chia hết và chia đều cho mọi đội viên trong phân đội. Để đảm bảo nguyên tắc chia ấy, đội trưởng đã đề xuất cách chia như sau:

– Bạn thứ nhất nhận một viên kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

– Sau khi bạn thứ nhất lấy phần của mình, bạn thứ hai nhận 2 viên kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Cứ như thế đến bạn cuối cùng, thứ n , nhận n viên kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Hỏi phân đội đó có bao nhiêu đội viên và mỗi đội viên nhận bao nhiêu viên kẹo.

ĐS: 10 đội viên, mỗi đội viên nhận 10 viên kẹo.

Bài 12. Một người bán sấu riêng thu hoạch được như sau:

– Lần thứ nhất bán 9 trái và $\frac{1}{6}$ số sấu riêng còn lại.

– Lần thứ hai bán 18 trái và $\frac{1}{6}$ số sấu riêng còn lại mới.

– Lần thứ ba bán 27 trái và $\frac{1}{6}$ số sấu riêng còn lại mới, v.v...

Với cách đó thì bán lần sau cùng là vừa hết và số sấu riêng bán mỗi lần đều bằng nhau.

Hỏi người đó đã bán bao nhiêu lần và số sấu riêng thu hoạch được là bao nhiêu trái?

ĐS: 225 trái, bán 5 lần.

Bài 13. Ba lớp A, B, C góp sách tặng các bạn học sinh vùng khó khăn, tất cả được 358 cuốn. Tỉ số số cuốn sách của lớp A so với lớp B là $\frac{6}{11}$. Tỉ số số cuốn sách của lớp A so với lớp C là $\frac{7}{10}$.

Hỏi mỗi lớp góp được bao nhiêu cuốn sách?

ĐS: Lớp A: 84 cuốn; lớp B: 154 cuốn; lớp C: 120 cuốn.

Bài 14. Dân số tỉnh A hiện nay là 612060 người. Hàng năm dân số tỉnh này tăng 1%. Hỏi hai năm trước đây dân số của tỉnh A là bao nhiêu?

ĐS: 600000 người.

Bài 15. Trong một trường học, vào đầu năm học số học sinh nam và nữ bằng nhau. Nhưng trong học kì 1, trường nhận thêm 15 học sinh nữ và 5 học sinh nam nên số học sinh nữ chiếm 51% số học sinh của trường. Hỏi cuối học kì 1, trường có bao nhiêu học sinh nam, học sinh nữ?

ĐS: 245 nam, 255 nữ.

VẤN ĐỀ II. Loại tìm số gồm hai, ba chữ số

• Số có hai chữ số có dạng: $\overline{xy} = 10x + y$. Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$.

• Số có ba chữ số có dạng: $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 9, 0 \leq y, z \leq 9$.

Loại toán tìm hai số.

+ Hướng dẫn học sinh trong dạng bài này gồm các bài toán như:

- Tìm hai số biết tổng hoặc hiệu, hoặc tỉ số của chúng.

- Toán về tìm số sách trong mỗi giá sách, tính tuổi cha và con, tìm số công nhân mỗi phân xưởng.

- Toán tìm số dòng một trang sách, tìm số dãy ghế và số người trong một dãy.

+ Hướng dẫn học sinh lập bảng như sau:

1. Toán tìm hai số biết tổng hoặc hiệu hoặc tỉ số.

Bài toán 1:

Hiệu hai số là 12. Nếu chia số bé cho 7 và lớn cho 5 thì thương thứ nhất lớn hơn thương thứ hai là 4 đơn vị.

Tìm hai số đó.

Phân tích bài toán:

Có hai đại lượng tham gia vào bài toán, đó là số bé và số lớn.

Nếu gọi số bé là x thì số lớn biểu diễn bởi biểu thức nào?

Yêu cầu học sinh điền vào các ô trống còn lại ta có thương thứ nhất là $\frac{x}{7}$, thương thứ hai là $\frac{x+12}{5}$

	Giá trị	Thương
Số bé	x	$\frac{x}{7}$
Số lớn	$x + 12$	$\frac{x+12}{5}$

Lời giải:

Gọi số bé là x .

Số lớn là: $x + 12$.

Chia số bé cho 7 ta được thương là: $\frac{x}{7}$.

Chia số lớn cho 5 ta được thương là: $\frac{x+12}{5}$

Vì thương thứ nhất lớn hơn thương thứ hai 4 đơn vị nên ta có phương trình:

$$\frac{x+12}{5} - \frac{x}{7} = 4$$

Giải phương trình ta được $x = 28$

Vậy số bé là 28.

Số lớn là: $28 + 12 = 40$.

Bài toán 2:

Mẫu số của một phân số lớn hơn tử số của nó là 3. Nếu tăng cả tử và mẫu thêm hai đơn vị thì được phân số $\frac{1}{2}$. Tìm phân số đã cho.

Hướng dẫn hs bằng cách đặt lần lượt các câu hỏi:

- Để tìm phân số đã cho, ta phải tìm các thành phần nào? (tử và mẫu)
- Biết tử số, có thể tìm được mẫu số và ngược lại?
- Sau khi tăng cả tử và mẫu 2 đơn vị ta có phân số mới nào ?

Như vậy, có thể chọn ẩn là tử hoặc mẫu của phân số

Giải

Gọi tử của phân số đã cho là x ($x \neq 0$) thì mẫu của phân số đó là $x + 2$

Tăng tử thêm 2 đơn vị thì ta được tử mới là: $x + 2$

Tăng mẫu thêm 2 đơn vị thì được mẫu mới là: $x + 3 + 2 = x + 5$

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{x+2}{x+5} = \frac{1}{2}$

ĐKXĐ: $x \neq -5$

$$\Rightarrow 2(x + 2) = x + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x - x = 5 - 4$$

$\Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn mãn điều kiện)

Vậy phân số đã cho là $\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$

Bài toán 3:

Một số tự nhiên có hai chữ số, chữ số hàng chục gấp 3 lần chữ số hàng đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị. Tìm số đó.

Hướng dẫn:

	Chữ số hàng chục	Chữ số hàng đơn vị	Giá trị	Phương trình
Số đã cho	$3x$	x	$10.3x + x$	$10.3x + x - 18 = 10.x + 3x$
Số mới	x	$3x$	$10.x + 3x$	

Giải:

Gọi chữ số hàng đơn vị của số phải tìm là x ($x \in \mathbb{N}$ và $0 < x \leq 3$)

Thì chữ số hàng chục là $3x$

Số đã cho là $10.3x + x$

Số mới sau khi đổi vị trí là: $10.x + 3x$

Theo bài ra ta có phương trình: $10.3x + x - 18 = 10.x + 3x$

Giải phương trình: $10.3x + x - 18 = 10.x + 3x$

$\Leftrightarrow 31x - 18 = 13x$

$\Leftrightarrow 31x - 13x = 18$

$\Leftrightarrow 18x = 18$

$\Leftrightarrow x = 1$

Kiểm tra thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện. Vậy số cần tìm là 13

Lưu ý: Đối với dạng toán liên quan đến số học, yêu cầu hs hiểu mối quan hệ giữa các đại lượng như hàng chục, hàng trăm,...biểu diễn được dạng chính tắc của nó:

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

Khi đổi chỗ các chữ số, hoặc thêm bớt các chữ số, ta cũng biểu diễn tương tự

2. Toán về tìm số sách trong mỗi giá sách, tìm tuổi, tìm số công nhân của phân xưởng.

Bài toán 2

Hai thư viện có cả thảy 15000 cuốn sách. Nếu chuyển từ thư viện thứ nhất sang thư viện thứ hai 3000 cuốn, thì số sách của hai thư viện bằng nhau.

Tính số sách lúc đầu ở mỗi thư viện.

Phân tích bài toán:

Có hai đối tượng tham gia vào bài toán: Thư viện 1 và thư viện 2. Nếu gọi số sách lúc đầu của thư viện 1 là x , thì có thể biểu thị số sách của thư viện hai bởi biểu thức nào? Số sách sau khi chuyển ở thư viện 1, thư viện 2 biểu thị như thế nào?

	Số sách lúc đầu	Số sách sau khi chuyển
Thư viện 1	x	$x - 3000$
Thư viện 2	$15000 - x$	$(15000 - x) + 3000$

Lời giải:

Gọi số sách lúc đầu ở thư viện I là x (cuốn), x nguyên, dương.

Số sách lúc đầu ở thư viện II là: $15000 - x$ (cuốn)

Sau khi chuyển số sách ở thư viện I là: $x - 3000$ (cuốn)

Sau khi chuyển số sách ở thư viện II là:

$$(15000 - x) + 3000 = 18000 - x \text{ (cuốn)}$$

Vì sau khi chuyển số sách 2 thư viện bằng nhau nên ta có phương trình:

$$x - 3000 = 18000 - x$$

Giải phương trình ta được: $x = 10500$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số sách lúc đầu ở thư viện I là 10500 cuốn.

Số sách lúc đầu ở thư viện II là: $15000 - 10500 = 4500$ cuốn.

Bài toán 3:

Số công nhân của hai xí nghiệp trước kia tỉ lệ với 3 và 4. Nay xí nghiệp 1 thêm 40 công nhân, xí nghiệp 2 thêm 80 công nhân. Do đó số công nhân hiện nay của hai xí nghiệp tỉ lệ với 8 và 11. Tính số công nhân của mỗi xí nghiệp hiện nay.

Phân tích bài toán:

Có hai đối tượng tham gia trong bài toán, đó là xí nghiệp 1 và xí nghiệp 2. Nếu gọi số công nhân của xí nghiệp 1 là x , thì số công nhân của xí nghiệp 2 biểu diễn bằng biểu thức nào? Học sinh điền vào các ô trống còn lại và căn cứ vào giả thiết: Số công nhân của hai xí nghiệp tỉ lệ với 8 và 11 để lập phương trình.

Số công nhân	Trước kia	Sau khi thêm
Xí nghiệp 1	x	$x + 40$
Xí nghiệp 2	$\frac{4}{3}x$	$\frac{4}{3}x + 80$

Lời giải:

Cách 1:

Gọi số công nhân xí nghiệp I trước kia là x (công nhân), x nguyên, dương.

Số công nhân xí nghiệp II trước kia là $\frac{4}{3}x$ (công nhân).

Số công nhân hiện nay của xí nghiệp I là: $x + 40$ (công nhân).

Số công nhân hiện nay của xí nghiệp II là: $\frac{4}{3}x + 80$ (công nhân).

Vì số công nhân của hai xí nghiệp tỉ lệ với 8 và 11 nên ta có phương trình:

$$\frac{x + 40}{8} = \frac{\frac{4}{3}x + 80}{11}$$

Giải phương trình ta được: $x = 600$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số công nhân hiện nay của xí nghiệp I là: $600 + 40 = 640$ công nhân.

Số công nhân hiện nay của xí nghiệp II là: $\frac{4}{3} \cdot 600 + 80 = 880$ công nhân.

Bài toán 4:

Tính tuổi của hai người, biết rằng cách đây 10 năm tuổi người thứ nhất gấp 3 lần tuổi của người thứ hai và sau đây hai năm, tuổi người thứ hai sẽ bằng một nửa tuổi của người thứ nhất.

Phân tích bài toán:

Có hai đối tượng tham gia vào bài toán: người thứ nhất và người thứ hai, có 3 mốc thời gian: cách đây 10 năm, hiện nay và sau 2 năm. Từ đó hướng dẫn học sinh cách lập bảng.

Tuổi	Hiện nay	Cách đây 10 năm	Sau 2 năm
Người I	x	$x - 10$	$x + 2$
Người II		$\frac{x - 10}{3}$	$\frac{x + 2}{2}$

Nếu gọi số tuổi của người thứ nhất là x , có thể biểu thị số tuổi của người thứ nhất cách đây 10 năm và sau đây 2 năm. Sau đó có thể điền nốt các số liệu còn lại vào trong bảng. Sau đó dựa vào mối quan hệ về thời gian để lập phương trình.

Lời giải:

Gọi số tuổi hiện nay của người thứ nhất là x (tuổi), x nguyên, dương.

Số tuổi người thứ nhất cách đây 10 năm là: $x - 10$ (tuổi).

Số tuổi người thứ hai cách đây 10 năm là: $\frac{x - 10}{3}$ (tuổi).

Sau đây 2 năm tuổi người thứ nhất là: $x + 2$ (tuổi).

Sau đây 2 năm tuổi người thứ hai là: $\frac{x+2}{2}$ (tuổi).

Theo bài ra ta có phương trình phương trình như sau:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{x-10}{3} + 10 + 2$$

Giải phương trình ta được: $x = 46$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số tuổi hiện nay của người thứ nhất là: 46 tuổi.

Số tuổi hiện nay của người thứ hai là: $\frac{46+2}{2} - 2 = 12$ tuổi.

3. Dạng toán tìm số dãy ghế và số người trong một dãy.

Bài toán 5:

Một phòng họp có 100 chỗ ngồi, nhưng số người đến họp là 144. Do đó, người ta phải kê thêm 2 dãy ghế và mỗi dãy ghế phải thêm 2 người ngồi.

Hỏi phòng họp lúc đầu có mấy dãy ghế?

Phân tích bài toán:

Bài toán có hai tình huống xảy ra: Số ghế ban đầu và số ghế sau khi thêm. Nếu chọn số ghế lúc đầu là x , ta có thể biểu thị các số liệu chưa biết qua ẩn và có thể điền được vào các ô trống còn lại. Dựa vào giả thiết: Mỗi dãy ghế phải kê thêm 2 người ngồi, ta có thể lập được phương trình:

	Số dãy ghế	Số ghế của mỗi dãy
Lúc đầu	x	$\frac{100}{x}$
Sau khi thêm	$x + 2$	$\frac{144}{x + 2}$

Lời giải:

Gọi số dãy ghế lúc đầu là x (dãy), x nguyên dương.

Số dãy ghế sau khi thêm là: $x + 2$ (dãy).

Số ghế của một dãy lúc đầu là: $\frac{100}{x}$ (ghế).

Số ghế của một dãy sau khi thêm là: $\frac{144}{x+2}$ (ghế).

Vì mỗi dãy ghế phải thêm 2 người ngồi nên ta có phương trình:

$$\frac{144}{x+2} - \frac{100}{x} = 2$$

Giải phương trình ta được $x=10$ (thỏa mãn đk)

Vậy phòng họp lúc đầu có 10 dãy ghế.

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng:

- Tổng hai chữ số là 12
- Nếu đổi chỗ hai chữ số thì được một số mới lớn hơn số đó là 36.

ĐS: 48

Bài 2. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng:

- Tổng hai chữ số là 10
- Nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số mới nhỏ hơn số đó là 36.

ĐS: 73

Bài 3. Một số tự nhiên có 5 chữ số. Nếu thêm chữ số 1 vào bên phải hay bên trái số đó ta được một số có 6 chữ số. Biết rằng nếu viết thêm vào bên phải số đó thì được một số lớn gấp ba lần số nhận được khi ta viết thêm vào bên trái số đó. Tìm số đó.

ĐS: 42857.

Bài 4. Một số có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục gấp 3 lần chữ số hàng đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số ta được một số có hai chữ số nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị. Tìm số đó.

ĐS: 31.

Bài 5. Một số tự nhiên có hai chữ số có tổng các chữ số bằng 7. Nếu thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số ta được một số có 3 chữ số lớn hơn số đã cho là 180. Tìm số đó.

ĐS: 25.

VẤN ĐỀ III. Loại làm chung - làm riêng một việc

- Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta coi toàn bộ công việc là một đơn vị công việc, biểu thị bởi số 1.
- Năng suất làm việc là phần việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- Gọi A là khối lượng công việc, n là năng suất, t là thời gian làm việc. Ta có: $A = nt$.
- Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm.

VD 1: Hai đội công nhân làm chung 6 ngày thì xong công việc. Nếu làm riêng, đội 1 phải làm lâu hơn đội 2 là 5 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải mất bao lâu mới hoàn thành công việc.

Hướng dẫn:

Hai đội làm chung trong 6 ngày xong công việc nên một ngày 2 đội làm được $\frac{1}{6}$ công việc

Lập phương trình theo bảng:

	Đội 1	Đội 2	Phương trình
Số ngày làm riêng xong công việc	$x (x > 5)$	$x - 5$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6}$
Phần công việc làm trong 1 ngày	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-5}$	

VD 2: Một số tự nhiên có hai chữ số. Chữ số hàng nghìn và gấp hai lần chữ số hàng chục. Nếu thêm chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số này thì được một số mới lớn hơn số ban đầu là 370. Tìm số ban đầu.

Số ban đầu là 48

VD 3: Một tổ sản xuất theo kế hoạch mỗi ngày phải sản xuất 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó tổ đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

	Năng suất 1 ngày (sản phẩm / ngày)	Số ngày (ngày)	Số sản phẩm (sản phẩm)
Kế hoạch			x
Thực hiện			

Phương trình: $\frac{x}{50} - \frac{x+13}{57} = 1$

d) Dạng toán về năng suất, tỉ số phần trăm:

VD: Một xí nghiệp hợp đồng sản xuất một số tấm len trong 20 ngày, do năng suất làm việc vượt dự tính là 20% nên không những xí nghiệp hoàn thành kế hoạch trước 2 ngày mà còn sản xuất thêm được 24 tấm len. Hỏi theo hợp đồng xí nghiệp phải dệt bao nhiêu tấm len?

Hướng dẫn:

	Tổng sản phẩm	Năng suất	Phương trình
Kế hoạch	$x (x > 0)$	$\frac{x}{20}$	$\frac{x}{20} + \frac{x}{20} \cdot \frac{20}{100} = \frac{x+24}{18}$
Thực tế	$x + 24$	$\frac{(x+24)}{18}$	

BÀI TẬP

Bài 1. Hai người cùng làm một công việc trong 24 giờ thì xong. Năng suất của người thứ nhất bằng $\frac{3}{2}$ năng suất của người thứ hai. Hỏi nếu mỗi người làm một mình cả công việc thì phải mất thời gian bao lâu?

ĐS: 40 giờ; 60 giờ.

Bài 2. Một bồn chứa có đặt hai vòi nước chảy vào và một vòi tháo nước ra.

- Bồn trống không, nếu mở riêng vòi thứ nhất thì sau 4 giờ bồn đầy nước.
- Bồn trống không, nếu mở riêng vòi thứ hai thì sau 6 giờ bồn đầy nước.
- Bồn trống không, nếu đồng thời mở cả ba vòi thì sau 7 giờ 12 phút bồn đầy nước.

Hỏi nếu bồn chứa đầy nước, mở riêng vòi tháo nước thì sau bao lâu sẽ tháo hết nước ra?

ĐS: 3 giờ 36 phút.

Bài 3. Một công nhân phải làm một số sản phẩm trong 18 ngày. Do đã vượt mức mỗi ngày 5 sản phẩm nên sau 16 ngày anh đã làm xong và làm thêm 20 sản phẩm nữa ngoài kế hoạch. Tính xem mỗi ngày anh đã làm được bao nhiêu sản phẩm.

ĐS: 75 sản phẩm.

VẤN ĐỀ IV. Loại chuyển động đều

- Gọi d là quãng đường động tử đi, v là vận tốc, t là thời gian đi, ta có: $d = vt$.
- Vận tốc xuôi dòng nước = Vận tốc lúc nước yên lặng + Vận tốc dòng nước
- Vận tốc ngược dòng nước = Vận tốc lúc nước yên lặng – Vận tốc dòng nước

Loại toán chuyển động:

Loại toán này có rất nhiều dạng, tuy nhiên có thể phân ra một số dạng thường gặp như sau:

- 1, Toán có nhiều phương tiện tham gia trên nhiều tuyến đường.
- 2, Toán chuyển động thường.
- 3, Toán chuyển động có nghỉ ngang đường.
- 4, Toán chuyển động ngược chiều.
- 5, Toán chuyển động cùng chiều.
- 6, Toán chuyển động một phần quãng đường.

Hướng dẫn học sinh lập bảng từng dạng:

- Nhìn chung mẫu bảng ở dạng toán chuyển động gồm 3 cột: Quãng đường, vận tốc, thời gian.
- Các trường hợp xảy ra như: Quãng đường đầu, quãng đường cuối, nghỉ, đến sớm, đến muộn hoặc các đại lượng tham gia chuyển động đều được ghi ở hàng ngang.
- Đa số các bài toán đều lập phương trình ở mỗi liên hệ thời gian.

1. Toán có nhiều phương tiện tham gia trên nhiều quãng đường.

Bài toán 1:

Đường sông từ A đến B ngắn hơn đường bộ là 10km, Ca nô đi từ A đến B mất 2h20', ô tô đi hết 2h. Vận tốc ca nô nhỏ hơn vận tốc ô tô là 17km/h.

Tính vận tốc của ca nô và ô tô?

Phân tích bài toán:

Bài có hai phương tiện tham gia chuyển động là Ca nô và Ô tô. Hướng dẫn học sinh lập bảng gồm các dòng, các cột như trên hình vẽ. Cần tìm vận tốc của chúng. Vì thế có thể chọn vận tốc của ca nô hay ô tô làm ẩn $x (x > 0)$. Từ đó điền các ô thời gian, quãng đường theo số liệu đã biết và công thức nêu trên. Vì bài toán đã cho thời gian nên lập phương trình ở mỗi quan hệ quãng đường.

	t(h)	v(km/h)	S(km)
Ca nô	$2h20' = \frac{10}{3}h$	x	$\frac{10x}{3}$
Ô tô	2	$x+17$	$2(x+17)$

Công thức lập phương trình: $S_{\text{ô tô}} - S_{\text{canô}} = 10$

Lời giải:

Gọi vận tốc của ca nô là x km/h ($x > 0$).

Vận tốc của ô tô là: $x+17$ (km/h).

Quãng đường ca nô đi là: $\frac{10}{3}x$ (km).

Quãng đường ô tô đi là: $2(x+17)$ (km).

Vì đường sông ngắn hơn đường bộ 10km nên ta có phương trình:

$$2(x+17) - \frac{10}{3}x = 10$$

Giải phương trình ta được $x = 18$. (thỏa mãn đk).

Vậy vận tốc ca nô là 18km/h.

Vận tốc ô tô là $18 + 17 = 35$ (km/h).

Bài toán 2:

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33km với vận tốc xác định. Khi đi từ B đến A, người đó đi bằng con đường khác dài hơn trước 29km, nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h.

Tính vận tốc lúc đi, biết thời gian đi nhiều hơn thời gian về là 1h30'?

	S(km)	v(km/h)	t(h)
Lúc đi	33	x	$\frac{33}{x}$
Lúc về	33+29	x+3	$\frac{62}{x+3}$

Hướng dẫn tương tự bài 6.

- Công thức lập phương trình: $t_{\text{về}} - t_{\text{đi}} = 1\text{h}30' (= \frac{3}{2}h)$.

- Phương trình là:

$$\frac{62}{x+3} - \frac{33}{x} = \frac{3}{2}$$

2. Chuyển động thường:

Với các bài toán chuyển động dưới nước, yêu cầu học sinh nhớ công thức:

- . $V_{xuôi} = V_{thực} + V_{nước}$
- . $V_{ngược} = V_{thực} - V_{nước}$

Bài toán 3:

Một tàu thủy chạy trên một khúc sông dài 80km, cả đi lẫn về mất 8h20'.

Tính vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng? Biết rằng vận tốc dòng nước là 4km/h.

	S(km)	v(km/h)		t(h)
		Tàu: x	Nước: 4	
Xuôi	80	$x + 4$		$\frac{80}{x + 4}$
Ngược	80	$x - 4$		$\frac{80}{x - 4}$

Phân tích bài toán:

Vì chuyển động dưới nước có vận tốc dòng nước nên cột vận tốc được chia làm hai phần ở đây gọi vận tốc thực của tàu là x km/h ($x > 4$)

Công thức lập phương trình: t xuôi + t ngược + 8h20' ($= \frac{25}{3}h$)

Lời giải:

Gọi vận tốc của tàu khi nước yên lặng là x km/h ($x > 0$)

Vận tốc của tàu khi xuôi dòng là: $x + 4$ km/h

Vận tốc của tàu khi ngược dòng là: $x - 4$ km/h

Thời gian tàu đi xuôi dòng là: $\frac{80}{x + 4}h$

Thời gian tàu đi ngược dòng là: $\frac{80}{x - 4}h$

Vì thời gian cả đi lẫn về là 8h 20' $= \frac{25}{3}h$ nên ta có phương trình:

$$\frac{80}{x + 4} + \frac{80}{x - 4} = \frac{25}{3}$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = \frac{-4}{5}$ (loại) $x_2 = 20$ (tmđk) Vậy vận tốc của tàu khi nước yên lặng là

20 km/h

3. Chuyển động có nghỉ ngang đường.**Học sinh cần nhớ:**

.t_{dự định} = t_{đi} + t_{ngỉ}

.Quãng đường dự định đi = tổng các quãng đường đi

Bài toán 4:

Một Ôtô đi từ Lạng Sơn đến Hà nội. Sau khi đi được 43km nó dừng lại 40 phút, để về Hà nội kịp giờ đã quy định, Ôtô phải đi với vận tốc 1,2 vận tốc cũ.

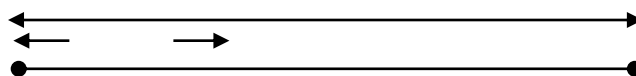
Tính vận tốc trước biết rằng quãng đường Hà nội- Lạng sơn dài 163km.

Phân tích bài toán:

163km

43km

Hà nội Lạng sơn



Vì Ôtô chuyển động trên những quãng đường khác nhau, lại có thời gian nghỉ, nên phức tạp.

Giáo viên cần vẽ thêm sơ đồ đoạn thẳng để học sinh dễ hiểu, dễ tìm thấy số liệu để điền vào các ô của bảng. Giáo viên đặt câu hỏi phát vấn học sinh: Thời gian dự định đi? Thời gian đi quãng đường đầu, quãng đường cuối?

Chú ý học sinh đổi từ số thập phân ra phân số cho tiện tính toán.

	S(km)	v(km/h)	t(h)
Lạng sơn- Hà nội	163	x	$\frac{163}{x}$
S đầu	43	x	$\frac{43}{x}$
Dừng			$40' = \frac{2}{3}h$
S cuối	120	$1,2x = \frac{6}{5}h$	$\frac{100}{x}$

Công thức lập phương trình: $t_{\text{đầu}} + t_{\text{dừng}} + t_{\text{cuối}} = t_{\text{dự định}}$

Lời giải:

Gọi vận tốc lúc đầu của ô tô là x km/h (x>0)

Vận tốc lúc sau là 1,2 x km/h

Thời gian đi quãng đường đầu là: $\frac{163}{x}h$

Thời gian đi quãng đường sau là: $\frac{100}{x}h$

Theo bài ra ta có phương trình

$$\frac{43}{x} + \frac{2}{3} + \frac{100}{x} = \frac{163}{x}$$

Giải phương trình ta được x = 30 (tmdk)

Vậy vận tốc lúc đầu của ô tô là 30 km/h.

Bài toán 5:

Một Ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120km trong một thời gian dự định. Sau khi đi được 1h Ô tô bị chặn bởi xe hỏa 10 phút. Do đó để đến nơi đúng giờ xe phải tăng vận tốc lên 6km/h. tính vận tốc của Ô tô lúc đầu.

	S(km)	V(km/h)	t(h)
S _{AB}	120	x	$\frac{120}{x}$
S đầu	x	x	1
Nghỉ			$10' = \frac{1}{6}h$
S sau	120-x	x+6	$\frac{120-x}{x+6}$

Hướng dẫn tương tự bài 9.

Công thức lập phương trình: $t_{\text{đi}} + t_{\text{nghỉ}} = t_{\text{dự định}}$

Phương trình của bài toán là:

$$1 + \frac{1}{6} + \frac{120-x}{x+6} = \frac{120}{x}$$

Đáp số: 48 km.

4. Chuyển động ngược chiều:

Học sinh cần nhớ:

+ Hai chuyển động để gặp nhau thì: $S_1 + S_2 = S$

+ Hai chuyển động đi để gặp nhau: $t_1 = t_2$ (không kể thời gian đi sớm).

Bài toán 6:

Hai Ô tô cùng khởi hành từ hai bên cách nhau 175km để gặp nhau. Xe1 đi sớm hơn xe 2 là 1h30' với vận tốc 30km/h. Vận tốc của xe 2 là 35km/h.

Hỏi sau mấy giờ hai xe gặp nhau?

Bài này học sinh cần lưu ý: Vì chuyển động ngược chiều đi để gặp nhau nên lập phương trình ở mỗi quan hệ quãng đường: $S = S_1 + S_2$

	S(km)	v(km/h)	t(h)
--	-------	---------	------

Xe 1	$30\left(x + \frac{3}{2}\right)$	30	$x + \frac{3}{2}$
Xe 2	35x	35	x

Lời giải:

Gọi thời gian đi của xe 2 là x h ($x > 0$)

Thời gian đi của xe 1 là $x + \frac{3}{2}$ h

Quãng đường xe 2 đi là: 35x km

Quãng đường xe 1 đi là: $30\left(x + \frac{3}{2}\right)$ km

Vì 2 bến cách nhau 175 km nên ta có phương trình:

$$30\left(x + \frac{3}{2}\right) + 35x = 175$$

Giải phương trình ta được $x = 2$ (tmđk)

Vậy sau 2 giờ xe 2 gặp xe 1.

5. Chuyển động cùng chiều:**Học sinh cần nhớ:**

+ Quãng đường mà hai chuyển động đi để gặp nhau thì bằng nhau.

+ Cùng khởi hành: $t_{\text{c/đ chậm}} - t_{\text{c/đ nhanh}} = t_{\text{nghe}}$ ($t_{\text{đến sớm}}$)

+ Xuất phát trước sau: $t_{\text{c/đ trước}} - t_{\text{c/đ sau}} = t_{\text{đi sau}}$

$$t_{\text{c/đ sau}} + t_{\text{đi sau}} + t_{\text{đến sớm}} = t_{\text{c/đ trước}}$$

Bài toán 7:

Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A, sau đó 5h20' một chiếc ca nô cũng chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp thuyền tại một điểm cách A 20km.

Hỏi vận tốc của thuyền? biết rằng ca nô chạy nhanh hơn thuyền 12km/h.

Phân tích bài toán:

Chuyển động của thuyền và ca nô nhưng không có vận tốc dòng nước vì thế các em làm như chuyển động trên cạn.

Công thức lập phương trình: $t_{\text{thuyền}} - t_{\text{ca nô}} = t_{\text{đi sau}}$

	S(km)	v(km/h)	t(h)
Thuyền	20	x	$\frac{20}{x}$
Ca nô	20	x+12	$\frac{20}{x+12}$

Lời giải:

Gọi vận tốc của thuyền là x km/h

Vận tốc của ca nô là $x = 12$ km/h

Thời gian thuyền đi là: $\frac{20}{x}$

Thời gian ca nô đi là: $\frac{20}{x+12}$

Vì ca nô khởi hành sau thuyền 5h20' và đuổi kịp thuyền nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{20} - \frac{20}{x+12} = \frac{16}{3}$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = -15$

$x_2 = 3$ (tmđk)

Vậy vận tốc của thuyền là 3 km/h.

Bài toán 8:

Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50km. Sau đó 1h30' một xe máy cũng đi từ tỉnh A đến tỉnh B sớm hơn 1h.

Tính vận tốc của mỗi xe? Biết rằng vận tốc xe máy gấp 2,5 vận tốc xe đạp.

Hướng dẫn lập bảng: Bài toán gồm hai đại lượng xe đạp và xe máy, trong thực tế xe đạp đi

chậm hơn xe máy, cần tìm vận tốc của chúng nên gọi vận tốc của xe đạp là x km/h thuận lợi hơn. Vì đã biết quãng đường nên các em chỉ còn tìm thời gian theo công thức: $t = \frac{S}{v}$. Đi cùng quãng đường, xe máy xuất phát sau lại đến sớm hơn vì vậy ta có:

$$t_{\text{xe đạp}} = t_{\text{xe máy}} + t_{\text{đi sau}} + t_{\text{về sớm}}$$

	S(km)	v(km/h)	t(h)
Xe đạp	50	x	$\frac{50}{x}$
Xe máy	50	$2,5x = \frac{5x}{2}$	$\frac{50}{\frac{5x}{2}} = \frac{20}{x}$

Lời giải:

Gọi vận tốc của người đi xe đạp là x km/h ($x > 0$)

Vận tốc người đi xe máy là: $\frac{5x}{2}$ km/h

Thời gian người đi xe đạp đi là: $\frac{50}{x}$ h

Thời gian người đi xe máy đi là: $\frac{20}{x}$ h

Do xe máy đi sau 1h30' và đến sớm hơn 1h nên ta có phương trình:

$$\frac{50}{x} = \frac{20}{x} + \frac{3}{2} + 1$$

Giải phương trình ta được $x = 12$ (tmđk)

Vậy vận tốc người đi xe đạp là 12km/h.

6. Chuyển động một phần quãng đường:

- **Học sinh cần nhớ:**

$+$, $t_{\text{dự định}} = t_{\text{đi}} + t_{\text{nghi}} + t_{\text{về sớm}}$

$+$, $t_{\text{dự định}} = t_{\text{thực tế}} - t_{\text{đến muộn}}$

$+$, $t_{\text{chuyển động trước}} - t_{\text{chuyển động sau}} = t_{\text{đi sau}}$ ($t_{\text{đến sớm}}$)

- Chú ý cho các em nếu gọi cả quãng đường là x thì một phần quãng đường là $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{2x}{3}, \frac{2x}{4} \dots$

Bài toán 9:

Một người dự định đi xe đạp từ nhà ra tỉnh với vận tốc trung bình 12km/h. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc đó vì xe hỏng nên người đó chờ ô tô mất 20 phút và đi ô tô với vận tốc 36km/h do vậy người đó đến sớm hơn dự định 1h40'.

Tính quãng đường từ nhà ra tỉnh?

	S(km)	v(km/h)	t(h)
S_{AB}	x	12	$\frac{x}{12}$
$\frac{1}{3} S_{AB}$	$\frac{x}{3}$	12	$\frac{x}{36}$
Nghe			$20' = \frac{1}{3} h$
$\frac{2}{3} S_{AB}$	$\frac{2x}{3}$	36	$\frac{x}{52}$
Sớm			$1h40' = \frac{5}{3} h$

Phân tích bài toán:

Đây là dạng toán chuyển động $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ quãng đường của chuyển động, có thay đổi vận tốc và đến sớm, có nghỉ. Bài yêu cầu tính quãng đường AB thì gọi ngay quãng đường AB là x km (x>0). Chuyển động của người đi xe đạp xảy ra mấy trường hợp sau:

- + Lúc đầu đi $\frac{1}{3}$ quãng đường bằng xe đạp.
- + Sau đó xe đạp hỏng, chờ ô tô (đây là thời gian nghỉ)
- + Tiếp đó người đó lại đi ô tô ở $\frac{2}{3}$ quãng đường sau.
- + Vì thế đến sớm hơn so với dự định.
- Học sinh cần điền thời gian dự định đi, thời gian thực đi hai quãng đường bằng xe đạp, ô tô, đổi thời gian nghỉ và đến sớm ra giờ.
- Công thức lập phương trình:

$$t_{\text{dự định}} = t_{\text{đi}} + t_{\text{nghỉ}} + t_{\text{đến sớm}}$$

- Phương trình là:

$$\frac{x}{12} = \frac{x}{36} + \frac{x}{52} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}$$

Đáp số: $55\frac{1}{17}$ Km.

Bài toán 10:

Một người dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 50km/h. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc đó, vì đường khó đi nên người lái xe phải giảm vận tốc mỗi giờ 10km trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B chậm 30 phút so với dự định. Tính quãng đường AB?

	S(km)	v(km/h)	t(h)	
S_{AB}	x	50	$\frac{x}{50}$	$t_{\text{dự định}}$
$\frac{2}{3} S_{AB}$	$\frac{2x}{3}$	50	$\frac{x}{75}$	$t_{\text{thực tế}}$
$\frac{1}{3} S_{AB}$	$\frac{x}{3}$	40	$\frac{x}{120}$	
Muộn			$30' = \frac{1}{2} h$	$t_{\text{muộn}}$

Bài toán này hướng dẫn học sinh tương tự như bài 21, chỉ khác là chuyển động đến muộn so với dự định. Giáo viên cần lấy ví dụ thực tế để các em thấy:

$$t_{\text{dự định}} = t_{\text{thực tế}} - t_{\text{đến muộn}}$$

Phương trình là:

$$\frac{x}{50} = \frac{x}{75} + \frac{x}{120} - \frac{1}{2}$$

Đáp số: 300 Km.

Bài toán 11:

Một người đi xe đạp với vận tốc 15km/h. Sau đó một thời gian, một người đi xe máy cũng xuất phát từ A với vận tốc 30km/h. Nếu không có gì thay đổi thì sẽ đuổi kịp người đi xe đạp ở

B. Nhưng sau khi đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường AB, người đi xe đạp giảm bớt vận tốc 3km/h. Nên

hai người gặp nhau tại điểm C cách B 10 km.

Tính quãng đường AB?

Phân tích bài toán:

Bài tập này thuộc dạng chuyển động, $\frac{1}{2}$ quãng đường của hai chuyển động cùng chiều gặp nhau.

Đây là dạng bài khó cần kẻ thêm nhiều đoạn thẳng để học sinh dễ hiểu hơn. Sau khi đã chọn quãng đường AB là x(km), chú ý học sinh:

- + Xe máy có thời gian đi sau và thời gian thực đi.
- + Xe đạp thay đổi vận tốc trên hai nửa quãng đường nên có hai giá trị về thời gian.
- + Thời gian xe đạp đi sớm hơn thời gian xe máy.

Từ đó hướng dẫn học sinh lập phương trình:

$$t_{\text{xe đạp}} - t_{\text{xe máy}} = t_{\text{đi sau}}$$

	S(km)	v (km/h)	t(h)
S_{AB}	x	Xe máy: 30	Xe máy: $\frac{x}{30}$
		Xe đạp: 15	Xe đạp: $\frac{x}{15}$
Xe máy			$\frac{x}{15} - \frac{x}{30} = \frac{x}{30}$
	x - 10	30	$\frac{x-10}{30}$
Xe đạp	$\frac{x}{2}$	15	$\frac{x}{30}$
	$\frac{x}{2} - 10$	12	$\frac{x-20}{24}$

Phương trình là:

$$\frac{x}{30} + \frac{x-20}{24} - \frac{x-10}{30} = \frac{x}{30}$$

Đáp số: 60 km.

Bài toán 12:

Một xe tải và một xe con cùng khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B. xe con đi với vận tốc 45km/h. Sau khi đã đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường AB, xe con tăng thêm vận tốc 5km/h trên quãng đường còn lại.

Tính quãng đường AB? Biết rằng : xe con đến tỉnh B sớm hơn xe tải 2 giờ 20 phút.

Phân tích bài toán:

Bài toán này tương tự như bài toán trên, nhưng hai xe cùng xuất phát một lúc. Chỉ lưu ý: xe con đi $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu với vận tốc 45km/h, đi $\frac{1}{4}$ quãng đường sau với vận tốc 50km/h và xe con đến tỉnh B sớm hơn xe tải 1 giờ 20 phút.

	Quãng đường	Vận tốc	Thời gian
Xe tải	x	30	$\frac{x}{30}$
Xe con	$\frac{3}{4}x$	45	$\frac{x}{60}$
	$\frac{1}{4}x$	50	$\frac{x}{200}$

Từ đó hướng dẫn học sinh lập phương trình:

$$t_{\text{xe tải}} - t_{\text{xe con}} = t_{\text{đến sớm}}$$

Nếu gọi quãng đường AB là xkm (x>0), thì phương trình là:

$$\frac{x}{30} - \left(\frac{x}{60} + \frac{x}{200} \right) = 2\frac{1}{3}$$

Đáp số: 200 Km

BÀI TẬP

Bài 1. Một xe vận tải đi từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc 50 km/h, rồi từ B quay ngay về A với vận tốc 40 km/h. Cả đi và về mất một thời gian là 5 giờ 24 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

ĐS: 120km.

Bài 2. Một xe đạp khởi hành từ điểm A, chạy với vận tốc 20 km/h. Sau đó 3 giờ, một xe hơi đuổi theo với vận tốc 50 km/h. Hỏi xe hơi chạy trong bao lâu thì đuổi kịp xe đạp?

ĐS: 2 giờ.

Bài 3. Một người đi xe gắn máy, đi từ địa điểm A đến địa điểm B trên một quãng đường dài 35km. Lúc trở về người đó đi theo con đường khác dài 42km với vận tốc kém hơn vận tốc lượt đi là 6 km/h. Thời gian lượt về bằng $\frac{3}{2}$ thời gian lượt đi. Tìm vận tốc lượt đi và lượt về.

ĐS: Vận tốc lượt đi là 30 km/h; vận tốc lượt về là 24 km/h.

Bài 4. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 50 km/h. Đi được 24 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc trên quãng đường còn lại giảm còn 40 km/h. Vì vậy đã đến nơi chậm mất 18 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

ĐS: 80km.

Bài 5. Lúc 6 giờ 15 phút, một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 70 km/h. Khi đến B, ô tô nghỉ 1 giờ rưỡi, rồi quay về A với vận tốc 60 km/h và đến A lúc 11 giờ cùng ngày. Tính quãng đường AB.

ĐS: 105 km.

Bài 6. Hàng ngày Tuấn đi xe đạp đến trường với vận tốc 12 km/h. Sáng nay do dậy muộn, Tuấn xuất phát chậm 2 phút. Tuấn nhằm tính, để đến trường đúng giờ như hôm trước thì Tuấn phải đi với vận tốc 15 km/h. Tính quãng đường từ nhà Tuấn đến trường.

ĐS: 2 km.

Bài 7. Một người đi xe máy từ thành phố Thanh Hoá và thành phố Vinh. Nếu chạy với vận tốc 25 km/h thì sẽ muộn so với dự định là 2 giờ. Nếu chạy với vận tốc 30 km/h và giữa đường nghỉ 1 giờ thì cũng muộn mất 2 giờ. Hỏi để đến nơi đúng giờ mà dọc đường không nghỉ thì xe phải chạy mỗi giờ bao nhiêu kilômét?

ĐS: 37,5 km.

Bài 8. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc để đi từ Huế và Đà Nẵng. Vận tốc xe thứ nhất là 40 km/h, vận tốc xe thứ hai là 60 km/h. Xe thứ hai đến Đà Nẵng nghỉ nửa giờ rồi quay lại Huế thì gặp xe thứ nhất ở cách Đà Nẵng 10 km. Tính quãng đường Huế - Đà Nẵng.

ĐS: 110 km.

Bài 9. Quãng đường AD dài 9 km, gồm đoạn AB lên dốc, đoạn BC nằm ngang, đoạn CD xuống dốc. Một người đi bộ từ A đến D rồi quay trở về A hết tất cả 3 giờ 41 phút. Tính quãng đường BC, biết vận tốc lúc lên dốc của người đó là 4 km/h, lúc xuống dốc là 6 km/h và lúc đi trên đường nằm ngang là 5 km/h.

ĐS: 4 km.

Bài 10. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 45 km/h. Sau đó một thời gian, một xe con cũng xuất phát từ A với vận tốc 60 km/h và nếu không có gì thay đổi thì đuổi kịp xe tải tại B. Nhưng sau khi đi được nửa quãng đường AB thì xe con tăng vận tốc lên 75 km/h, nên sau đó 1 giờ thì đuổi kịp xe tải. Tính quãng đường AB.

ĐS: 450 km.

Bài 11. Một đò máy xuôi dòng từ bến A đến bến B mất 4 giờ và ngược dòng từ B về A mất 5 giờ. Vận tốc của dòng nước là 2 km/h. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

ĐS: 80km.

Bài 12. Một ca nô xuôi dòng từ A đến B mất 5 giờ và ngược dòng từ B đến A mất 6 giờ. Tính khoảng cách AB, biết vận tốc dòng nước là 2 km/h.

ĐS: 120 km.

Bài 13. Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với ca nô xuôi dòng từ bến A, có một chiếc bè trôi từ bến A với vận tốc 3 km/h. Sau khi đến B, ca nô trở về bến A ngay và gặp bè khi bè đã trôi được 8 km. Tính vận tốc của ca nô.

ĐS: 27 km/h.

Bài 14. Một chiếc thuyền đi từ bến A đến bến B hết 5 giờ, từ bến B đến bến A hết 7 giờ. Hỏi một đám bèo trôi theo dòng sông từ A đến B hết bao lâu?

ĐS: 35 giờ.

VẤN ĐỀ V. Loại có nội dung hình học

• Hình chữ nhật có hai kích thước a, b . Diện tích: $S = ab$; Chu vi: $P = 2(a + b)$

• Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông a, b . Diện tích:

$$S = \frac{1}{2}ab$$

VD : Một khu vồøøn hình chữ nhật có chu vi 82m. Chiều dài hơn chiều rộng 11 m. Tính diện tích khu vồøøn.

Giaûi :

Gọi x là chiều dài của khu vồøøn ($x > 0, m$).

Chiều rộng của khu vồøøn: $x - 11$.

Chu vi của khu vồøøn là 82m nên ta có phương trình:

$$2.[x + (x - 11)] = 82 \Leftrightarrow 4x - 22 = 82 \Leftrightarrow 4x = 104 \Leftrightarrow x = 26$$

Vậy chiều dài của khu vồøøn: 26 m, chiều rộng 15m. Diện tích: $26 \cdot 15 = 390 m^2$

BÀI TẬP

Bài 1. Chu vi một khu vườn hình chữ nhật bằng 60m, hiệu độ dài của chiều dài và chiều rộng là 20m. Tìm độ dài các cạnh của hình chữ nhật.

ĐS: 5m, 25m.

Bài 2. Một thửa đất hình chữ nhật có chu vi là 56m. Nếu giảm chiều rộng 2m và tăng chiều dài 4m thì diện tích tăng thêm $8m^2$. Tìm chiều rộng và chiều dài thửa đất.

ĐS: 12m, 16m.

Bài 3. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 3 lần chiều rộng. Nếu tăng mỗi cạnh thêm 5m thì diện tích khu vườn tăng thêm $385m^2$. Tính độ dài các cạnh của khu vườn.

ĐS: 18m, 54m.

Bài 4. Hiệu số đo chu vi của hai hình vuông là 32m và hiệu số đo diện tích của chúng là $464m^2$. Tìm số đo các cạnh của mỗi hình vuông.

ĐS: cạnh hình vuông nhỏ là 25m; cạnh hình vuông lớn là 33m.

Bài 5. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 450m. Nếu giảm chiều dài đi $\frac{1}{5}$ chiều dài cũ và

tăng chiều rộng thêm $\frac{1}{4}$ chiều rộng cũ thì chu vi hình chữ nhật không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng khu vườn.

ĐS: 100m, 125m.

Bài 6. Một khu đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng là 10m. Nếu chiều dài tăng thêm 6m, chiều rộng giảm đi 3m thì diện tích mới tăng hơn diện tích cũ là $12m^2$. Tính các kích thước của khu đất.

ĐS: 20m, 30m.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $6x^2 - 5x + 3 = 2x - 3x(3 - 2x)$

b) $\frac{2(x-4)}{4} - \frac{3+2x}{10} = x + \frac{1-x}{5}$

c) $\frac{2x}{3} + \frac{3x-5}{4} = \frac{3(2x-1)}{2} - \frac{7}{6}$

d) $\frac{6x+5}{2} - \frac{10x+3}{4} = 2x + \frac{2x+1}{2}$

e) $(x-4)(x+4) - 2(3x-2) = (x-4)^2$

f) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x^2 + x + 1)$

ĐS: a) $x = -\frac{3}{2}$ b) $x = -5$ c) $x = \frac{17}{19}$

d) $x = \frac{1}{2}$ e) $x = 14$ f) $x = -\frac{2}{3}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $(4x-3)(2x-1) = (x-3)(4x-3)$

b) $25x^2 - 9 = (5x+3)(2x+1)$

c) $(3x-4)^2 - 4(x+1)^2 = 0$

d) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$

e) $(x-2)(x+2)(x^2-10) = 72$

f) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$

ĐS: a) $S = \left\{ \frac{3}{4}; -2 \right\}$ b) $S = \left\{ -\frac{3}{5}; \frac{4}{3} \right\}$

c) $S = \left\{ \frac{2}{5}; 6 \right\}$ d) $S = \{-1; -2; 2\}$

e) $S = \{-4; 4\}$ f) $S = \left\{ -2; -1; -\frac{1}{2} \right\}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}$

b) $\frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} = \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9}$

ĐS: a) $x = -100$ b) $x = -15$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{4x^2-1}$

b) $\frac{2x}{x+1} + \frac{18}{x^2+2x-3} = \frac{2x-5}{x+3}$

c) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$

ĐS: a) $x = -\frac{9}{2}$ b) $x = -1$ c) $x = 0$

Bài 5. Thương của hai số bằng 3. Nếu tăng số bị chia 10 đơn vị và giảm số chia đi một nửa thì số thứ nhất thu được lớn hơn số thứ hai thu được là 30. Tìm hai số ban đầu.

ĐS: 24 và 8.

Bài 6. Chu vi của một hình chữ nhật bằng 140 m, hiệu giữa số đo chiều dài và chiều rộng là 10 m. Tìm số đo các cạnh của hình chữ nhật.

ĐS: 30 m và 40 m.

Bài 7. Thùng thứ nhất đựng 40 lít dầu, thùng thứ hai đựng 85 lít dầu. Ở thùng thứ hai lấy ra một lượng dầu gấp 3 lần lượng dầu lấy ra ở thùng thứ nhất. Sau đó lượng dầu còn lại trong thùng thứ nhất gấp đôi lượng dầu còn lại trong thùng thứ hai. Hỏi đã lấy ra bao nhiêu lít dầu?

ĐS: 26 lít và 78 lít.

Bài 8. Chu vi bánh xe lớn của một đầu máy xe lửa là 5,6 m và của bánh xe nhỏ là 2,4 m. Khi xe chạy từ ga A đến ga B thì bánh nhỏ đã lăn nhiều hơn bánh lớn là 4000 vòng. Tính quãng đường AB.

ĐS: 16800 m.

Bài 9. Hai vòi nước cùng chảy trong 12 giờ thì đầy một hồ nước. Cho hai vòi cùng chảy trong 8 giờ rồi khoá vòi thứ nhất lại và cho vòi thứ hai chảy tiếp với lưu lượng mạnh gấp đôi thì phải mất 3 giờ 30 phút nữa mới đầy hồ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình với lưu lượng ban đầu thì phải mất bao lâu mới đầy hồ.

ĐS: Vòi thứ nhất chảy trong 28 giờ, vòi thứ hai chảy trong 21 giờ.

Bài 10. Một ô tô đi quãng đường dài 60 km trong một thời gian đã định. Ô tô đi nửa quãng đường đầu với vận tốc hơn dự định là 10 km/h và đi nửa quãng đường còn lại với vận tốc thấp hơn

dự định là 6 km/h nhưng ô tô đã đến đúng thời gian đã định. Tính thời gian ô tô đã dự định đi quãng đường trên.

ĐS: 2 giờ.

Bài 11. Một xe ô tô đi từ Hà Nội về Thanh Hoá. Sau khi đi được 43 km thì dừng lại 40 phút. Để về đến Thanh Hoá đúng giờ đã định nó phải đi với vận tốc bằng 1,2 lần vận tốc trước đó. Tính vận tốc lúc đầu, biết rằng quãng đường Hà Nội - Thanh Hoá dài 163 km.

ĐS: 30 km.

Bài 12. Hai người đi bộ cùng khởi hành từ A để đến B. Người thứ nhất đi nửa thời gian đầu với vận tốc 5 km/h, nửa thời gian sau với vận tốc 4 km/h. Người thứ hai đi nửa quãng đường đầu với vận tốc 4 km/h và nửa quãng đường sau với vận tốc 5 km/h. Hỏi người nào đến B trước?

ĐS: Người thứ nhất đến trước.

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

ĐỀ I

I/ TRẮC NGHIỆM: (3 điểm)

Hãy khoanh tròn chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1: Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất một ẩn?

A. $\frac{1}{x} + 2 = 0$

B. $0 \cdot x - 5 = 0$

C. $2x^2 + 3 = 0$

D. $-x = 1$

Câu 2: Phương trình $2x - 4 = 0$ tương đương với phương trình:

A. $2x + 4 = 0$

B. $x - 2 = 0$

C. $x = 4$

D. $2 - 4x$

$= 0$

Câu 3: Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x-2}{x(x+2)} = -5$ là:

A. $x \neq 0$

B. $x \neq 0; x \neq 2$

C. $x \neq 0; x \neq -2$

D.

$x \neq -2$

Câu 4: Phương trình bậc nhất $3x - 1 = 0$ có hệ a, b là:

A. $a = 3; b = -1$

B. $a = 3; b = 0$

C. $a = 3; b = 1$

D. $a = -1;$

$b = 3$

Câu 5: Tập nghiệm của phương trình $(x^2 + 1)(x - 2) = 0$ là:

A. $S = \{-1; 1; 2\}$

B. $S = \{2\}$

C. $S = \{-1; 2\}$

D.

$S = \emptyset$

Câu 6: Phương trình $-x + b = 0$ có một nghiệm $x = 1$, thì b bằng:

A. 1

B. 0

C. -1

D.

2

II. TỰ LUẬN: (7 điểm)

Bài 1: (4 điểm). Giải các phương trình sau:

1/ $4x - 12 = 0$

2/ $x(x+1) - (x+2)(x-3) = 7$

3/ $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x^2}{x^2-1}$

Bài 2: (2 điểm).

Một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 50km/h. Đến B người đó nghỉ 15 phút rồi quay về A với vận tốc 40km/h. Biết thời gian tổng cộng hết 2 giờ 30 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 3: (1 điểm). Giải phương trình : $\frac{x-3}{2011} + \frac{x-2}{2012} = \frac{x-2012}{2} + \frac{x-2011}{3}$

ĐÁP ÁN

I/ TRẮC NGHIỆM: (3 điểm)

1	2	3	4	5	6
D	B	C	A	B	A

(Mỗi câu đúng ghi 0,5 điểm)

II/ TỰ LUẬN: (7 điểm)

Bài 1	Giải các phương trình	0,5
--------------	-----------------------	-----

	1/ $4x - 12 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow 4x = 12$	0,5
	$\Leftrightarrow x = 3$	0,5
	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$	0,5
	2/ $x(x+1) - (x+2)(x-3) = 7$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 + x - x^2 + 3x - 2x + 6 = 7$	0,5
	$\Leftrightarrow 2x = 1$	0,5
	$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$	0,5
	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$	0,25
	3/ $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x^2}{x^2-1}$ (ÑKXÑ : $x \neq \pm 1$)	0,25
Bài 2	Qui đồng và khử mẫu phương trình ta được:	0,25
	$(x-3)(x-1) = x^2$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2$	0,25
	$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$	
	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$	
Bài 2	$15\text{phút} = \frac{1}{4}(h)$; $2\text{ giờ } 30\text{ phút} = \frac{5}{2}(h)$	0,25
	Gọi x là quãng đường AB ($x > 0$)	0,25
	Thời gian đi : $\frac{x}{50}(h)$	0,25
	Thời gian về : $\frac{x}{40}(h)$	0,5
	Theo đề bài ta có phương trình :	0,5
	$\frac{x}{50} + \frac{x}{40} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$	0,25
Bài 3	Giải phương trình : $\frac{x-3}{2011} + \frac{x-2}{2012} = \frac{x-2012}{2} + \frac{x-2011}{3}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{2011} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2012} - 1\right) = \left(\frac{x-2012}{2} - 1\right) + \left(\frac{x-2011}{3} - 1\right)$	
	$\Leftrightarrow \frac{x-2014}{2011} + \frac{x-2014}{2012} = \frac{x-2014}{2} + \frac{x-2014}{3}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \frac{x-2014}{2011} + \frac{x-2014}{2012} - \frac{x-2014}{2} - \frac{x-2014}{3} = 0$	
	$\Leftrightarrow (x-2014) \left(\frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 0$	0,25đ
	$\Leftrightarrow x - 2014 = 0$ vì $\left(\frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \neq 0$	0,25đ
	$\Leftrightarrow x = 2014$	
	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S\{2014\}$	

ĐỀ II**ĐỀ BÀI**

Bài 1: (2 điểm)

- a) Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn?
 $0x+7=0$; $2x-8=0$; $9x^2=2$
- b) Thế nào là hai phương trình tương đương? Hai phương trình sau có tương đương nhau hay không? Vì sao?

Bài 2: (2 điểm) Cho phương trình: $\frac{x}{x-1} = \frac{x+4}{x+1}$

- a) Tìm điều kiện xác định của phương trình trên
- b) Giải phương trình trên.

Bài 3: (3 điểm) Giải các phương trình sau:

- a) $4x + 20 = 0$
- b) $2x - 3 = 3(x - 1) + x + 2$
- c) $(3x - 2)(4x + 5) = 0$

Bài 4: (2 điểm) Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 45km/h và quay từ B về A với vận tốc 40km/h.

Tính quãng đường AB biết thời gian đi hết ít hơn thời gian về là 1 giờ 30 phút.

Bài 5: (1 điểm) Giải phương trình: $\frac{x-3}{2015} + \frac{x-2}{2016} = \frac{x-2016}{2} + \frac{x-2015}{3}$ **ĐÁP ÁN**

Bài	Nội dung	Điểm
1	a) Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình $2x - 8 = 0$	1đ
	b) Hai phương trình tương đương là hai phương trình có cùng tập nghiệm Hai PT đã cho tương đương với nhau vì chúng có cùng tập nghiệm $S = \{-2/3\}$	0,5đ 0,5đ
2	a) ĐKXĐ: : $x \neq 1$ và $x \neq -1$.	1đ
	b) Quy đồng và khử mẫu ta được PT: $x(x+1) = (x-1)(x+4)$ $\Leftrightarrow x^2 + x = x^2 + 4x - x - 4$ $\Leftrightarrow x - 4x + x = -4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn ĐKXĐ) Vậy PT có tập nghiệm $S = \{2\}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
3	a) $4x + 20 = 0$ $\Leftrightarrow 4x = -20$ $\Leftrightarrow x = -5$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-5\}$	0,5đ 0,25đ 0,25đ
	b) $2x - 3 = 3(x - 1) + x + 2$ $\Leftrightarrow 2x - 3 = 3x - 3 + x + 2$ $\Leftrightarrow 2x - 3x - x = -3 + 2 + 3$ $\Leftrightarrow -2x = 2$ $\Leftrightarrow x = -1$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1\}$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
	c) $(3x - 2)(4x + 5) = 0$ $\Rightarrow 3x - 2 = 0$ hoặc $4x + 5 = 0$ $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2/3$ $4x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5/4$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{5}{4}; \frac{2}{3}\right\}$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ

4	1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ h. Gọi x(km) là quãng đường AB ($x > 0$)	0,25đ
	Thời gian đi : $\frac{x}{45}$ (h). Thời gian về : $\frac{x}{40}$ (h)	0,5đ
	Theo đề bài ta có phương trình : $\frac{x}{40} - \frac{x}{45} = \frac{3}{2}$	0,25đ 0,75đ
	Giải phương trình ta được : $x = 540$ (thỏa mãn ĐK) Vậy quãng đường AB là 540 km.	0,25đ
5	$\frac{x-3}{2015} + \frac{x-2}{2016} = \frac{x-2016}{2} + \frac{x-2015}{3}$	0,5đ
	$\Leftrightarrow \frac{x-2018}{2012} + \frac{x-2018}{2013} = \frac{x-2018}{2} + \frac{x-2018}{3}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow (x-2018) \left(\frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2015.$ Vậy PT có tập nghiệm $S = \{2015\}$	0,25đ

ĐỀ III**ĐỀ RA****Bài 1:** (1,5đ) Thế nào là hai phương trình tương đương?

Hai phương trình sau có tương đương nhau hay không? Vì sao?

$$3x + 2 = 0 \text{ và } 15x + 10 = 0$$

Bài 2: (5đ) Giải các phương trình sau:

a) $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$

b) $2x(x - 3) + 5(3 - x) = 0$

c) $\frac{2x-5}{x-2} - \frac{3x-5}{x-1} = -1$

d) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Bài 3: (2,5 đ) Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 45km/h và quay từ B về A với vận tốc 40km/h.

Tính quãng đường AB biết thời gian đi hỒt ít hơn thời gian về là 1 giờ 30 phút.

Bài 4: (1đ) Giải phương trình: a) $\frac{x-3}{2012} + \frac{x-2}{2013} = \frac{x-2013}{2} + \frac{x-2012}{3}$

b) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$

ĐÁP ÁN

Bài	Nội dung	Điểm
1	Hai phương trình tương đương là hai phương trình có cùng tập nghiệm	1đ
	Hai PT đã cho tương đương với nhau vì chúng có cùng tập nghiệm $S = \{-2/3\}$	1đ
2	a) PT $\Leftrightarrow 5 - x + 6 = 12 - 8x \Leftrightarrow -x + 8x = 12 - 5 - 6 \Leftrightarrow x = 1/7$ Vậy PT có tập nghiệm $S = \{1/7\}$	1đ
	b) PT $\Leftrightarrow (x - 3)(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = 5/2$. Vậy PT có tập nghiệm $S = \{3; 5/2\}$	1đ
	c) ĐKXĐ: $x \neq 1; x \neq 2$. Quy đồng và khử mẫu ta được PT: $(2x - 5)(x - 1) - (3x - 5)(x - 2) = (x - 1)(x - 2)$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 - 3x^2 + 13x - 10 = x^2 - 3x + 2$ $\Leftrightarrow 9x = 7 \Leftrightarrow x = 7/9$ (thỏa mãn ĐKXĐ) Vậy PT có tập nghiệm $S = \{7/9\}$	1đ
	d) PT $\Leftrightarrow (x - 1)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3/2$	1đ

3	1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ h. Gọi x(km) là quãng đường AB ($x > 0$)	0,25đ
	Thời gian đi : $\frac{x}{45}$ (h). Thời gian về : $\frac{x}{40}$ (h)	0,75đ
	Theo đề bài ta có phương trình : $\frac{x}{40} - \frac{x}{45} = \frac{3}{2}$	1đ
	Giải phương trình ta được : $x = 540$ (thỏa mãn ĐK) Vậy quãng đường AB là 540 km.	0,25đ 0,25đ
4	a) $\frac{x-3}{2012} + \frac{x-2}{2013} = \frac{x-2013}{2} + \frac{x-2012}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{x-2015}{2012} + \frac{x-2015}{2013} = \frac{x-2015}{2} + \frac{x-2015}{3} \Leftrightarrow (x-2015) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 0$ $\Leftrightarrow x = 2015$. Vậy PT có tập nghiệm $S = \{2015\}$	0,5đ
	b) PT $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 ; y = 2$	1đ

ĐỀ IVBài 1: (0, 5đ) Cho ví dụ về hai phương trình tương đương?Bài 2: (2,5đ) Giải các phương trình sau:

a/ $4x + 20 = 0$

b/ $2x - 3 = 3(x - 1) + x + 2$

Bài 3: (1 đ) Tìm điều kiện xác định của phương trình sau: $\frac{x}{x-1} = \frac{x+4}{x+1}$ Bài 4: (2đ) Giải các phương trình sau:

a/ $(3x - 2)(4x + 5) = 0$

b/ $2x(x - 3) - 5(x - 3) = 0$

Bài 5: (1,5đ) Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 100, nếu tăng số thứ nhất lên 2 lần và cộng thêm số thứ hai 5 đơn vị thì số thứ nhất gấp 5 lần số thứ 2.Bài 6: (1,5đ) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 5m. Nếu giảm chiều dài 5m tăng chiều rộng 3m thì diện tích giảm 40 m². Tính các kích thước ban đầu của khu vườn.Bài 7: (1đ) Giải phương trình:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

ĐÁP ÁN

<u>Bài 1:</u> - Lấy ví dụ đúng	0,5 đ
<u>Bài 2:</u> (2,5đ) a/ $4x + 20 = 0$ $\Leftrightarrow 4x = -20$ $\Leftrightarrow x = -5$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-5\}$ b/ $2x - 3 = 3(x - 1) + x + 2$ $\Leftrightarrow 2x - 3 = 3x - 3 + x + 2$ $\Leftrightarrow 2x - 3x - x = -3 + 2 + 3$ $\Leftrightarrow -2x = 2$ $\Leftrightarrow x = -1$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1\}$	0,5 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
<u>Bài 3:</u> Phương trình đã cho xác định khi và chỉ khi $x - 1 \neq 0$ và $x + 1 \neq 0$ * $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ

* $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ Vậy phương trình đã cho xác định khi $x \neq \pm 1$	0,25 đ
Bài 4: a/ $(3x-2)(4x+5) = 0$ $\Rightarrow 3x-2 = 0$ hoặc $4x+5 = 0$ • $3x-2 = 0 \Rightarrow x = 2/3$ • $4x+5 = 0 \Rightarrow x = -5/4$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{5}{4}; \frac{2}{3}\right\}$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
b/ $2x(x-3) - 5(x-3) = 0$ $\Rightarrow (x-3)(2x-5) = 0$ $\Rightarrow x-3 = 0$ hoặc $2x-5 = 0$ * $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$ * $2x-5 = 0 \Rightarrow x = 5/2$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{5}{2}; 3\right\}$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
Bài 5: - Chọn ẩn và đặt điều kiện cho ẩn đúng - Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn và các đại lượng đã biết, thiết lập phương trình đúng - Giải đúng phương trình - Kết luận đúng	0,25đ 0,5 đ 0,5 đ 0,25đ
Bài 5: - Chọn ẩn và đặt điều kiện cho ẩn đúng - Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn và các đại lượng đã biết, thiết lập phương trình đúng - Giải đúng phương trình - Kết luận đúng	0,25đ 0,5 đ 0,5 đ 0,25đ
Bài 7: - Quy đồng khử mẫu đúng - Giải đúng phương trình - So sánh kết quả với điều kiện xác định và kết luận đúng	0,25 đ 0,5đ 0,25 đ

Ghi chú: HS làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

ĐỀ V

Bài 1: (0,5đ) Cho ví dụ về hai phương trình tương đương?

Bài 2: (2,5đ) Giải các phương trình sau:

a/ $5x - 25 = 0$

b/ $3 - 2x = 3(x + 1) - x - 2$

Bài 3: (1đ) Tìm điều kiện xác định của phương trình sau: $\frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{x+2}$

Bài 4: (2đ) Giải các phương trình sau:

a/ $(3x+2)(4x-5) = 0$

b/ $2x(x+3) + 5(x+3) = 0$

Bài 5: (1,5đ) Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 100, nếu tăng số thứ nhất lên 2 lần và cộng thêm số thứ hai 5 đơn vị thì số thứ nhất gấp 5 lần số thứ 2.

Bài 6: (1,5đ) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 5m. Nếu giảm chiều dài 3m và tăng chiều rộng 2m thì diện tích khu vườn giảm 16 m². Tính các kích thước lúc đầu của khu vườn.

Bài 7: (1đ) Giải phương trình:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

ĐÁP ÁN

<u>Bài 1:</u> - Lấy ví dụ đúng	0,5 đ
<u>Bài 2:</u> (2,25đ) a/ $5x - 25 = 0$ $\Leftrightarrow 4x = 25$ $\Leftrightarrow x = 5$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{5\}$ b/ $3 - 2x = 3(x + 1) - x - 2$ $\Leftrightarrow 3 - 2x = 3x + 3 - x - 2$ $\Leftrightarrow -2x - 3x + x = 3 - 2 - 3$ $\Leftrightarrow -4x = -2$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\frac{1}{2}\}$	0,5 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
<u>Bài 3:</u> Phương trình đã cho xác định khi và chỉ khi $x - 1 \neq 0$ và $x + 1 \neq 0$ * $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ * $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ Vậy phương trình đã cho xác định khi $x \neq 1$ và $x \neq -2$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
<u>Bài 4:</u> a/ $(3x + 2)(4x - 5) = 0$ $\Rightarrow 3x + 2 = 0$ hoặc $4x - 5 = 0$ • $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ • $4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right\}$ b/ $2x(x + 3) + 5(x + 3) = 0$ $\Rightarrow (x + 3)(2x + 5) = 0$ $\Rightarrow x + 3 = 0$ hoặc $2x + 5 = 0$ * $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ * $2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-3; -\frac{5}{2}\right\}$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
<u>Bài 5:</u> - Chọn ẩn và đặt điều kiện cho ẩn đúng - Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn và các đại lượng đã biết, thiết lập phương trình đúng - Giải đúng phương trình - Kết luận đúng	0,25đ 0,5 đ 0,5 đ 0,25đ
<u>Bài 5:</u> - Chọn ẩn và đặt điều kiện cho ẩn đúng - Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn và các đại lượng đã biết, thiết lập phương trình đúng - Giải đúng phương trình - Kết luận đúng	0,25đ 0,5 đ 0,5 đ 0,25đ
<u>Bài 7:</u> - Quy đồng khử mẫu đúng - Giải đúng phương trình - So sánh kết quả với điều kiện xác định và kết luận đúng	0,25 đ 0,5đ 0,25 đ

MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

ĐỀ 1**Bài 1:** (2 điểm): Hãy chọn câu trả lời đúng:

- Trong các phương trình sau, phương trình bậc nhất 1 ẩn là:
A. $\frac{2}{x} - 3 = 0$; B. $\frac{-1}{2}x + 2 = 0$; C. $x + y = 0$; D. $0x + 1 = 0$
- Giá trị $x = -4$ là nghiệm của phương trình:
A. $-2,5x + 1 = 11$; B. $-2,5x = -10$; C. $3x - 8 = 0$; D. $3x - 1 = x + 7$
- Tập nghiệm của phương trình $(x + \frac{1}{3})(x - 2) = 0$ là:
A. $S = \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$; B. $S = \{2\}$; C. $S = \left\{ \frac{-1}{3}; -2 \right\}$; D. $S = \left\{ \frac{-1}{3}; 2 \right\}$
- Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x}{2x+1} + \frac{x+1}{3+x} = 0$ là:
A. $x \neq \frac{-1}{2}$ hoặc $x \neq -3$; B. $x \neq \frac{-1}{2}$; C. $x \neq \frac{-1}{2}$ và $x \neq -3$; D. $x \neq -3$;

Bài 2: (4,5 điểm) .Giải các phương trình sau

a) $\frac{2x-10}{4} = 5 + \frac{2-3x}{6}$; b) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$; c)

$$\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

Bài 3: (3,5 điểm) . Giải bài toán bằng cách lập phương trình .

Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 40 km/h . Đến B người đó làm việc trong 3 giờ rồi quay về A với vận tốc 30km/h . Biết thời gian tổng cộng hết 6 giờ 30 phút . Tính quãng đường AB .

ĐỀ 2

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (3đ)

Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

- Trong các cặp phương trình sau, cặp phương trình nào tương đương:
A. $x = 1$ và $x(x - 1) = 0$ B. $x - 2 = 0$ và $2x - 4 = 0$
C. $5x = 0$ và $2x - 1 = 0$ D. $x^2 - 4 = 0$ và $2x - 2 = 0$
- Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn?
A. $x^2 - 2x + 1$ B. $3x - 7 = 0$
C. $0x + 2 = 0$ D. $(3x+1)(2x-5) = 0$
- Với giá trị nào của m thì phương trình $m(x - 3) = 6$ có nghiệm $x = 5$?
A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = 3$ D. $m = -3$
- Giá trị $x = 0$ là nghiệm của phương trình nào sau đây:
A. $2x + 5 + x = 0$ B. $2x - 1 = 0$
C. $3x - 2x = 0$ D. $2x^2 - 7x + 1 = 0$
- Phương trình $x^2 - 1 = 0$ có tập nghiệm là:
A. $S = \emptyset$ B. $S = \{-1\}$ C. $S = \{1\}$ D. $S = \{-1; 1\}$
- Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x-2}{x} - \frac{5}{x+3} = 1$ là:
A. $x \neq 0$ B. $x \neq -3$ C. $x \neq 0; x \neq 3$ D. $x \neq 0; x \neq -3$

II. PHẦN TỰ LUẬN (7đ)

Câu 1 (4 đ) Giải các phương trình sau:

a. $\frac{2x-3}{4} + 2 = \frac{1-x}{6}$

b. $3x - 6 + x = 9 - x$ c. $\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x}$

Câu 2 (3đ)

Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 30 km/h. Đến B người đó làm việc trong 1 giờ rồi quay về A với vận tốc 24 km/h. Biết thời gian tổng cộng hết 5 giờ 30 phút. Tính quãng đường AB.

ĐỀ 3

A. **Trắc nghiệm:** (4 điểm) Khoanh tròn chữ cái đứng trước câu trả lời đúng.

Câu 1:(NB) Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $2x^5 - 5x^2 + 3 = 0$?

A. -1 B. 1 C. 2 D. -2

Câu 2(TH) Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $2x - 6 = 0$

A. $x = 3$ B. $x = -3$ C. $x = 2$ D. $x = -2$

Câu 3: (NB) Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn.

A. $x^2 + 2x + 1 = 0$ B. $2x + y = 0$ C. $3x - 5 = 0$ D. $0x + 2 = 0$

Câu 4:(TH) Nhân hai vế của phương trình $\frac{1}{2}x = -1$ với 2 ta được phương trình nào sau đây?

A. $x = 2$ B. $x = 1$ C. $x = -1$ D. $x = -2$

Câu 5:(VD) Phương trình $3x - 6 = 0$ có nghiệm duy nhất

A. $x = 2$ B. $x = -2$ C. $x = 3$ D. $x = -3$

Câu 6: (NB)Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x-2}{x-5} = 4$ là:

A. $x \neq 2$ B. $x \neq 5$ C. $x \neq -2$ D. $x \neq -5$

Câu 7: (NB)Đề giải phương trình $(x-2)(2x+4) = 0$ ta giải các phương trình nào sau đây?

A. $x+2=0$ và $2x+4=0$ B. $x+2=0$ và $2x-4=0$

C. $x-2=0$ và $2x-4=0$ D. $x-2=0$ và $2x+4=0$

Câu 8:(TH) Tập nghiệm của phương trình $2x-7=5-4x$ là

A. $S = \{-2\}$ B. $S = \{-1\}$ C. $S = \{2\}$ D. $S = \{1\}$

B. **Tự luận:** (6 điểm)

Câu 9: (3,75 đ) Giải các phương trình sau đây

a/ $5x + 10 = 3x + 4$; b/ $x(x-2) - 3x + 6 = 0$; c/ $\frac{2x}{x+1} = \frac{x^2 - x + 8}{(x+1)(x-4)}$

Câu 10: (2,25đ) Giải bài toán sau đây bằng cách lập phương trình

Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B cách nhau 180km đi ngược chiều nhau. Sau 2 giờ thì hai xe gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng xe đi từ A có vận tốc lớn hơn xe đi từ B 10 km/h.

ĐỀ 4

Bài 1: (3 điểm)

1. Thế nào là phương trình tương đương ?

2. Xét các cặp phương trình sau có tương đương với nhau không ? Giải thích

a) $x^2 - 9 = 0$ (1) và $(x-3)(4x+12) = 0$ (2).

b) $2x - 10 = 0$ (3) và $x + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x-5} + 5$ (4)

Bài 2: (4 điểm) Giải các phương trình sau

a) $\frac{2x-10}{4} = 5 + \frac{2-3x}{6}$

b) $(x-3)(3-4x) + (x^2 - 6x + 9) = 0$

c) $\frac{2x}{(x-3)(x+1)} + \frac{x}{2(x-3)} = \frac{x}{2x+2}$

$$d) \frac{x-90}{10} + \frac{x-76}{12} + \frac{x-58}{14} + \frac{x-36}{16} + \frac{x-15}{17} = 15$$

Bài 3: (3 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Đến B người đó làm việc trong 3 giờ rồi quay về A với vận tốc 30km/h. Biết thời gian tổng cộng hết 6 giờ 30 phút. Tính quãng đường AB.

ĐỀ 5

A. Trắc nghiệm: (2 điểm) Hãy chọn câu trả lời đúng:

1. Trong các phương trình sau, phương trình bậc nhất 1 ẩn là:

A. $3y + 1 = 0$; B. $\frac{2}{x} + 1 = 0$; C. $3x^2 - 1 = 0$; D. $x + y = 0$

2. Phương trình $2x + 4 = 0$ tương đương với phương trình:

A. $6x + 4 = 0$; B. $2x - 4 = 0$; C. $4x + 8 = 0$; D. $4x - 8 = 0$

3. Phương trình $7 + 2x = 22 - x$ có tập nghiệm là:

A. $S = \{-3\}$; B. $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$; C. $S = \{3\}$; D. $S = \{5\}$

4. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-9} = 0$ là:

A. $x \neq 3$; B. $x \neq 9$; C. $x \neq 3$ hoặc $x \neq -3$; D. $x \neq 3$ và $x \neq -3$

B. Tự luận: (8 điểm)

Câu 1: (3 điểm): Giải phương trình:

a) $\frac{10x+3}{12} = 1 + \frac{6+8x}{9}$

b) $2x^3 - 5x^2 + 3x = 0$

c) $\frac{x}{2x-6} + \frac{x}{2x+2} - \frac{2x}{(x+1)(x-3)} = 0$

Câu 2: (3 điểm): Bạn Sơn đi xe đạp từ nhà đến thành phố Hà Nội với vận tốc trung bình là 15 km/h.

Lúc về Sơn đi với vận tốc trung bình là 12 km/h, nên thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 22 phút.

Tính độ dài quãng đường từ nhà bạn Sơn đến thành phố Hà Nội

Câu 3: (2 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5$.

CHƯƠNG IV: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$) là **bất đẳng thức** và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

2. Tính chất

Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(2a)
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(2b)
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	(3)
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	(4)
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(5a)
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(5b)
$ab > 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(6a)
$ab < 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	(6b)

3. Một số bất đẳng thức thông dụng

a) $a^2 \geq 0, \forall a$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$.

$a^2 + b^2 \geq 2ab$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

b) **Bất đẳng thức Cô-si:**

Với $a, b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Hệ quả: – Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.

– Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

c) **Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối**

Điều kiện	Nội dung
	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$a > 0$	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$ x \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$
	$ a - b \leq a + b \leq a + b $

d) **Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác**

Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, ta có:

$+ a, b, c > 0$.

$+ |a - b| < c < a + b; |b - c| < a < b + c; |c - a| < b < c + a$.

4. Chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh một BĐT là lập luận để khẳng định tính đúng đắn của BĐT đó.

Để chứng minh một BĐT ta thường sử dụng:

- Tính chất của quan hệ thứ tự các số.
- Tính chất của bất đẳng thức.
- Một số BĐT thông dụng.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất cơ bản

- Để chứng minh một BĐT ta có thể sử dụng các cách sau:
 - Biến đổi BĐT cần chứng minh tương đương với một BĐT đã biết.
 - Sử dụng một BĐT đã biết, biến đổi để dẫn đến BĐT cần chứng minh.
- Một số BĐT thường dùng:

$$+ A^2 \geq 0 \quad + A^2 + B^2 \geq 0 \quad + A.B \geq 0 \text{ với } A, B \geq 0. \quad + A^2 + B^2 \geq 2AB$$

Chú ý:

- Trong quá trình biến đổi, ta thường chú ý đến các hằng đẳng thức.
- Khi chứng minh BĐT ta thường tìm điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra. Khi đó ta có thể tìm GTLN, GTNN của biểu thức.

1. So sánh hai số thực

- Cho hai số thực bất kỳ a, b bao giờ cũng xảy ra một trong ba khả năng sau :
 - $a < b$; “**a nhỏ hơn b**”
 - $a = b$; “**a bằng b**”
 - $a > b$. “**a lớn hơn b**”.

Hệ quả :

- “a không nhỏ hơn b” thì “a lớn hơn b” hoặc “a bằng b” ký hiệu : $a \geq b$.
- “a không lớn hơn b” thì “a nhỏ hơn b” hoặc “a bằng b”, ký hiệu : $a \leq b$.
- Cho số thực bất kỳ a bao giờ cũng xảy ra một trong ba khả năng sau :
 - $a < 0$: ta gọi a là số thực âm;
 - $a = 0$: ta gọi a là số thực không;
 - $a > 0$: ta gọi a là số thực dương.

2. Định nghĩa : Ta gọi hệ thức $a < b$ (hay $a > b, a \leq b, a \geq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Tính chất :

$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c \quad (\text{tính chất bắc cầu})$$

Tương tự : $\begin{cases} a \geq b \\ b \geq c \end{cases} \Rightarrow a \geq c$ $\begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases} \Rightarrow a < c$ $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

Khi ta cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Tương tự : $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$ $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

$$a > b \Rightarrow a.c > b.c, \forall c > 0$$

$$a > b \Rightarrow a.c < b.c, \forall c < 0$$

Khi ta nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho. Khi ta nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

Tương tự : $a \geq b \Rightarrow a.c \geq b.c, \forall c > 0$ $a < b \Rightarrow a.c < b.c, \forall c > 0$ $a \leq b \Rightarrow a.c \leq b.c, \forall c > 0$
 $a \geq b \Rightarrow a.c \leq b.c, \forall c < 0$ $a < b \Rightarrow a.c > b.c, \forall c < 0$ $a \leq b \Rightarrow a.c \geq b.c, \forall c < 0$

Ghi nhớ

- Bất cứ số dương nào cũng lớn hơn số 0.
- Bất cứ số âm nào cũng nhỏ hơn số 0.
- Bất cứ số dương nào cũng lớn hơn số âm.
- Trong hai số dương số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì số đó lớn hơn.
- Trong hai số âm số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì số đó nhỏ hơn.
- Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

- Với mọi số thực a bao giờ ta cũng có : $a^2 \geq 0$ “ bình phương của một số thực bao giờ cũng là một số không âm ”.

Ví dụ 1 : Cho m bất kỳ, chứng minh :

a) $m-3 > m-4$ b) $2m-5 < 2m+1$ c) $7-3m < 3(3-m)$

Bài giải

- a) Vì $-3 > -4$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số m bất kỳ ”
Ta được $m-3 > m-4$.
- b) Vì $-5 < -1$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số $2m$ bất kỳ ”
Ta được $2m-5 < 2m+1$.
- c) Vì $7 < 9$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số $-3m$ bất kỳ ”
Ta được $7-3m < 9-3m \Leftrightarrow 7-3m < 3(3-m)$.

Ví dụ 2 : Cho $a > b > 0$ chứng minh 1) $a^2 > ab$ 2) $ab > b^2$ 3) $a^2 > b^2$

Bài giải

- 1) $a > b$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số $a > 0$ ”
 $\Leftrightarrow a.a > ab \Leftrightarrow a^2 > ab$, (1).
- 2) $a > b$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số $b > 0$ ”
 $\Leftrightarrow a.b > b.b \Leftrightarrow ab > b^2$, (2).
- 3) Từ (1) và (2) ta có $a^2 > b^2$.

Ví dụ 3 : Cho $x < y$ hãy so sánh :

a) $2x+1$ và $2y+1$ b) $2-3x$ và $2-3y$ c) $\frac{x}{3}+5$ và $\frac{y}{3}+5$

Bài giải

- a) $x < y$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với số dương 2 ”
 $\Leftrightarrow 2x < 2y$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số 1 ”
 $\Leftrightarrow 2x+1 < 2y+1$.
- b) $x < y$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với số âm -3 ”
 $\Leftrightarrow -3x > -3y$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số 2 ”
 $\Leftrightarrow 2-3x > 2-3y$.
- c) $x < y$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với số dương $\frac{1}{3}$ ”
 $\Leftrightarrow \frac{x}{3} < \frac{y}{3}$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số 5 ”
 $\Leftrightarrow \frac{x}{3}+5 < \frac{y}{3}+5$.

Ví dụ 4 : Cho $a > b$ chứng minh :

a) $2a-3 > 2b-3$ b) $2a-5 > 2b-8$ c) $7-3a < 3(3-b)$

Bài giải

- a) $a > b$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với số dương 2 ”
 $\Leftrightarrow 2a > 2b$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số : -3 ”
 $\Leftrightarrow 2a+(-3) > 2b+(-3) \Leftrightarrow 2a-3 > 2b-3$.
- b) $a > b$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với số dương 2 ”
 $\Leftrightarrow 2a > 2b$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số : -5 ”
 $\Leftrightarrow 2a+(-5) > 2b+(-5) \Leftrightarrow 2a-5 > 2b-5$

Vì $-5 > -8$ nên $2b-5 > 2b-8$, theo tính chất bắc cầu ta có $2a-5 > 2b-8$.

- c) $a > b$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với số âm : -3 ”
 $\Leftrightarrow -3a < -3b$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số 7 ”
 $\Leftrightarrow 7 - 3a < 7 - 3b$
 Vì $7 < 9$ nên $7 - 3b < 9 - 3b$ theo tính chất bắc cầu ta có $7 - 3a < 3(3 - b)$.

Ví dụ 5 : So sánh hai số x, y nếu :

a) $3x - 5 \geq 3y - 5$ b) $7 - 4x < 7 - 4y$

Bài giải

- a) $3x - 5 \geq 3y - 5$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số 5 ”
 $\Leftrightarrow 3x - 5 + 5 \geq 3y - 5 + 5 \Leftrightarrow 3x \geq 3y$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với số dương $\frac{1}{3}$ ”
 $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 3x \geq \frac{1}{3} \cdot 3y \Leftrightarrow x \geq y$.
- b) $7 - 4x + (-7) < 7 - 4y + (-7)$ “ cộng vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số -7 ”
 $\Leftrightarrow -4x < -4y$ “ nhân hai vế của bất đẳng thức với số âm $-\frac{1}{4}$ ”
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot (-4)x > -\frac{1}{4} \cdot (-4)y \Leftrightarrow x > y$.

Ví dụ 6 : Cho a, b bất kỳ, chứng minh :

1) $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ 2) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ 3) $a^2 + b^2 - ab \geq 0$.

Bài giải

- 1) Với a, b bất kỳ ta có $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$.
- 2) $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.
- 3) $a^2 + b^2 - ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho $a, b, c, d, e \in R$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$
 c) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc - ca)$
 e) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$ f) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$
 g) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$ h) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$
 HD: a) $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ b) $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$
 c) $\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$ d) $\Leftrightarrow (a - b + c)^2 \geq 0$
 e) $\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a - c)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$ f) $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - (b - c)\right)^2 \geq 0$
 g) $\Leftrightarrow (a - bc)^2 + (b - ca)^2 + (c - ab)^2 \geq 0$
 h) $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0$

Bài 2. Cho $a, b, c \in R$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$b) \frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3; \text{ với } a, b \geq 0$$

$$c) a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3$$

$$d) a^4+3 \geq 4a$$

$$e) a^3+b^3+c^3 \geq 3abc, \text{ với } a, b, c > 0. \quad f) a^4+b^4 \leq \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}; \text{ với } a, b \neq 0.$$

$$g) \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}; \text{ với } ab \geq 1. \quad h) (a^5+b^5)(a+b) \geq (a^4+b^4)(a^2+b^2); \text{ với } ab > 0.$$

$$HD: a) \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0; \quad \frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$$

$$b) \Leftrightarrow \frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geq 0 \quad c) \Leftrightarrow (a^3-b^3)(a-b) \geq 0 \quad d) \Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+2a+3) \geq 0$$

$$e) \text{ Chú ý: } a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2.$$

$$BDT \Leftrightarrow (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)] \geq 0.$$

$$f) \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4) \geq 0 \quad g) \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0$$

$$h) \Leftrightarrow ab(a-b)(a^3-b^3) \geq 0.$$

Bài 3. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2 \geq 2ab$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd$$

$$b) (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$$

$$c) (a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)(d^2+4) \geq 256abcd$$

$$HD: a) a^4+b^4 \geq 2a^2b^2; c^2+d^2 \geq 2c^2d^2; a^2b^2+c^2d^2 \geq 2abcd$$

$$b) a^2+1 \geq 2|a|; b^2+1 \geq 2|b|; c^2+1 \geq 2|c|$$

$$c) a^2+4 \geq 4|a|; b^2+4 \geq 4|b|; c^2+4 \geq 4|c|; d^2+4 \geq 4|d|$$

Bài 4. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

$$b) 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

$$c) 2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

$$HD: BDT (1) \Leftrightarrow (a-b)c < 0.$$

$$a) \text{ Sử dụng (1), ta được: } \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \quad \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c};$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}.$$

Cộng các BDT về theo vế, ta được đpcm.

$$b) \text{ Sử dụng tính chất phân số, ta có: } \frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}; \quad \frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c};$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}$$

Cộng các BĐT về theo về ta được đpcm.

c) Chứng minh tương tự câu b). Ta có: $\frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$

Cùng với 3 BĐT tương tự, ta suy ra đpcm.

Bài 5. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

- a) $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ b) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$
 c) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ d) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$

HD: $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$.

a) Khai triển, rút gọn, đưa về (1) b, c) Vận dụng a) d) Sử dụng (1) hai lần

Bài 6. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a = ab(a+b)$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

- a) $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$; với $a, b, c > 0$.
 b) $\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1$; với $a, b, c > 0$ và $abc = 1$.
 c) $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$; với $a, b, c > 0$ và $abc = 1$.

HD: (1) $\Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a-b) \geq 0$.

a) Từ (1) $\Rightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c) \Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng về theo về, ta suy ra đpcm.

b, c) Sử dụng a).

Bài 7. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

- a) $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$
 b) $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$
 c) $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0$
 d) $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$

HD: a) Sử dụng BĐT tam giác, ta có: $a > |b-c| \Rightarrow a^2 > b^2 - 2bc + c^2$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng về theo về, ta suy ra đpcm.

b) Ta có: $a^2 > a^2 - (b-c)^2 \Rightarrow a^2 > (a+b-c)(a-b+c)$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng về theo về, ta suy ra đpcm.

c) $\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$.

d) $\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$.

Bài 8. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

- a) $\frac{1}{a+b}; \frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}$ cũng là độ dài các cạnh của một tam giác khác.
 b) $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

HD: a) Sử dụng tính chất phân số và BĐT các cạnh trong tam giác.

Ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} > \frac{2}{c+a+c+a} = \frac{1}{c+a}$

Tương tự, chứng minh các BĐT còn lại.

b) Sử dụng BĐT: Với $x > 0, y > 0$ ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

Ta có: $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{(a+b-c) + (b+c-a)} = \frac{2}{b}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta suy ra đpcm.

VẤN ĐỀ 2: Phương pháp làm trội

Dùng các tính chất của bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

• **Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn:** $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

Ta biến đổi số hạng tổng quát u_k về hiệu của hai số hạng liên tiếp nhau: $u_k = a_k - a_{k+1}$

Khi đó: $S = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$

• **Phương pháp chung về tính tích hữu hạn:** $P = u_1 u_2 \dots u_n$

Ta biến đổi các số hạng u_k về thương của hai số hạng liên tiếp nhau: $u_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}$

Khi đó: $P = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$, ta có:

$$a) \frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}$$

$$b) 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

$$c) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

$$d) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} < 1$$

HD: a) Ta có: $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$, với $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

b) Ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$, với $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

c) Ta có: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, với $k = 2, 3, \dots, n$.

d) Ta có: $\frac{1}{(k-1).n} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, với $k = 2, 3, \dots, n$.

VẤN ĐỀ 3: Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cô-si

1. Bất đẳng thức Cô-si:

+ Với $a, b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

cm

Vì $a \geq 0, b \geq 0$ nên tồn tại $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ và $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \in \mathbb{R}$ thế thì :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

2. Ứng dụng tìm GTLN, GTNN:

+ Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.

+ Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

Bài 1. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

b) $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$; với $a, b, c > 0$.

c) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$.

d) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$; với $a, b, c > 0$.

HD: a) $a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; c+a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow đpcm$.

b) $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}} = 2c, \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a^2bc}{bc}} = 2a, \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b \Rightarrow đpcm$

c) Vì $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ nên $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$. Tương tự: $\frac{bc}{b+c} \leq \frac{\sqrt{bc}}{2}, \frac{ca}{c+a} \leq \frac{\sqrt{ca}}{2}$.

$\Rightarrow \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2} \leq \frac{a+b+c}{2}$ (vì $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a+b+c$)

d) VT = $\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$
 $= \frac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$

• Cách khác: Đặt $x = b+c, y = c+a, z = a+b$.

Khi đó, VT = $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) - 3 \right] \geq \frac{1}{2}(2+2+2-3) = \frac{3}{2}.$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)^2$

b) $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$ c) $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3$

HD: a) VT = $a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}\right) + \left(\frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{b}\right) + \left(\frac{c^3}{a} + \frac{a^3}{c}\right).$

Chú ý: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$. Cùng với 2 BĐT tương tự ta suy ra đpcm.

b) $\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2b + b^2a) + (b^2c + bc^2) + (c^2a + ca^2).$

Chú ý: $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$. Cùng với 2 BĐT tương tự ta suy ra đpcm.

c) Áp dụng b) ta có: $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2).$

Dễ chứng minh được: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow đpcm.$

Bài 3. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1). Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$; với $a, b, c > 0$.

b) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right)$; với $a, b, c > 0$.

c) Cho $a, b, c > 0$ thoả $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Chứng minh: $\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq 1$

d) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$.

e) Cho $x, y, z > 0$ thoả $x+2y+4z=12$. Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4xz}{4z+x} \leq 6$.

f) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

HD: (1) $\Leftrightarrow (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$. *Hiển nhiên suy từ BĐT Cô-si.*

a) Áp dụng (1) ba lần ta được: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$; $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}$; $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}$.

Cộng các BĐT về theo vế ta được đpcm.

b) Tương tự câu a).

c) Áp dụng a) và b) ta được: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right)$.

d) Theo (1): $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{4}(a+b)$.

Cùng với các BĐT tương tự, cộng về theo vế ta được đpcm.

e) Áp dụng câu d) với $a = x, b = 2y, c = 4z$ thì $a+b+c=12 \Rightarrow$ đpcm.

f) Nhận xét: $(p-a) + (p-b) = 2p - (a+b) = c$.

Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{c}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng về theo vế, ta được đpcm.

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$.

b) Cho $x, y, z > 0$ thoả $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$.

c) Cho $a, b, c > 0$ thoả $a+b+c \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ac} + \frac{1}{c^2+2ab}.$$

d) Cho $a, b, c > 0$ thoả $a+b+c=1$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$.

HD: Ta có: (1) $\Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$. *Dễ dàng suy từ BĐT Cô-si.*

a) Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

$$\Rightarrow VT \geq \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

Chú ý: $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$.

b) Để áp dụng (1), ta biến đổi P như sau:

$$P = \frac{x+1-1}{x+1} + \frac{y+1-1}{y+1} + \frac{z+1-1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

Ta có: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{x+y+z+3} = \frac{9}{4}$. Suy ra: $P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Chú ý: Bài toán trên có thể tổng quát như sau:

Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x+y+z=1$ và k là hằng số dương cho trước. Tìm GTLN

của biểu thức: $P = \frac{x}{kx+1} + \frac{y}{ky+1} + \frac{z}{kz+1}$.

c) Ta có: $P \geq \frac{9}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 9$.

d) $VT \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca}$
 $= \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \right) + \frac{7}{ab+bc+ca}$
 $\geq \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{7}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{1} + \frac{7}{\frac{1}{3}} = 30$

Chú ý: $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$.

Bài 5. Áp dụng BĐT Cô-si để tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}; x > 0$.

b) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}; x > 1$.

c) $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{x+1}; x > -1$.

d) $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{2x-1}; x > \frac{1}{2}$

e) $y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}; 0 < x < 1$

f) $y = \frac{x^3+1}{x^2}; x > 0$

g) $y = \frac{x^2+4x+4}{x}; x > 0$

h) $y = x^2 + \frac{2}{x^3}; x > 0$

HD: a) Miny = 6 khi x = 6

b) Miny = $\frac{3}{2}$ khi x = 3

c) Miny = $\sqrt{6} - \frac{3}{2}$ khi x = $\frac{\sqrt{6}}{3} - 1$

d) Miny = $\frac{\sqrt{30}+1}{3}$ khi x = $\frac{\sqrt{30}+1}{2}$

e) Miny = $2\sqrt{5}+5$ khi x = $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$

f) Miny = $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ khi x = $\sqrt[3]{2}$

g) Miny = 8 khi x = 2

h) Miny = $\frac{5}{\sqrt[5]{27}}$ khi x = $\sqrt[5]{3}$

Bài 6. Áp dụng BĐT Cô-si để tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) $y = (x+3)(5-x); -3 \leq x \leq 5$

b) $y = x(6-x); 0 \leq x \leq 6$

c) $y = (x+3)(5-2x); -3 \leq x \leq \frac{5}{2}$

d) $y = (2x+5)(5-x); -\frac{5}{2} \leq x \leq 5$

e) $y = (6x+3)(5-2x); -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

f) $y = \frac{x}{x^2+2}; x > 0$

HD: a) $Maxy = 16$ khi $x = 1$

b) $Maxy = 9$ khi $x = 3$

c) $Maxy = \frac{121}{8}$ khi $x = -\frac{1}{4}$

d) $Maxy = \frac{625}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}$

e) $Maxy = 9$ khi $x = 1$

f) $Maxy = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ khi $x = \sqrt{2} \ (2+x^2 \geq 2\sqrt{2}x)$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Định nghĩa

Bất phương trình dạng $ax+b < 0$ (hoặc $ax+b > 0, ax+b \leq 0, ax+b \geq 0$), trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$, đgl **bất phương trình bậc nhất một ẩn**.

2. Hai quy tắc biến đổi bất phương trình

• **Quy tắc chuyển vế:** Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải **đổi dấu** hạng tử đó.

• **Quy tắc nhân:** Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:

– **Giữ nguyên chiều** bất phương trình nếu số đó **dương**.

– **Đổi chiều** bất phương trình nếu số đó **âm**.

Ví dụ 1 : Trong các số $-1, 0, 1, 2, 3$ số nào là nghiệm của mỗi bất phương trình sau :

a) $3x+2 > 0$

b) $4-3y < 2y+1$

c) $t-2 \geq 0$

d) $5-2m \leq 3m+2$

Bài giải

a) $x = -1 \Rightarrow 3(-1)+2 > 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ bất đẳng thức sai nên $x = -1$ không thể là nghiệm của bất phương trình $3x+2 > 0$.

$x = 0 \Rightarrow 3.0+2 > 0 \Leftrightarrow 2 > 0$ bất đẳng thức đúng nên $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình $3x+2 > 0$. Tương tự $x = 1, x = 2, x = 3$ là nghiệm của bất phương trình $3x+2 > 0$.

b) $y = -1 \Rightarrow 4-3.(-1) < 2.(-1)+1 \Leftrightarrow 7 < -1$ bất đẳng thức sai nên $y = -1$ không thể là nghiệm của bất phương trình $4-3y < 2y+1$.

$y = 0 \Rightarrow 4-3.0 < 2.0+1 \Leftrightarrow 4 < 1$ bất đẳng thức sai nên $y = 0$ không thể là nghiệm của bất phương trình $4-3y < 2y+1$.

$y = 1 \Rightarrow 4-3.1 < 2.1+1 \Leftrightarrow 1 < 3$ bất đẳng thức đúng nên $y = 1$ là nghiệm của bất phương trình $4-3y < 2y+1$. Tương tự $y = 2, y = 3$ là nghiệm của bất phương trình $4-3y < 2y+1$.

c) $t = -1 \Rightarrow -1-2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \geq 0$ bất đẳng thức sai nên $t = -1$ không thể là nghiệm của bất phương trình $t-2 \geq 0$.

$t = 0 \Rightarrow 0-2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \geq 0$ bất đẳng thức sai nên $t = 0$ không thể là nghiệm của bất phương trình $t-2 \geq 0$.

$t = 1 \Rightarrow 1-2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \geq 0$ bất đẳng thức sai nên $t = 1$ không thể là nghiệm của bất phương trình $t-2 \geq 0$.

$t = 2 \Rightarrow 2-2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0$ bất đẳng thức đúng nên $t = 2$ là nghiệm của bất phương trình $t-2 \geq 0$.

Ví dụ 2 : Giải bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số.

a) $2x-4 > 0$

b) $4-3x \leq 0$

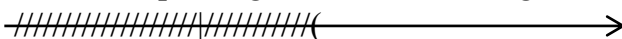
c) $2x-3 \geq 2-3x$

d) $7x+3 < 8x-5$

Bài giải

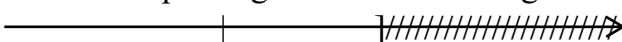
a) $2x - 4 > 0$ “chuyển -4 từ vế trái sang vế phải của bất phương trình và đổi dấu thành 4 ”

$\Leftrightarrow 2x > 4$ “chia hai vế của bất phương trình cho số dương 2 ”

$\Leftrightarrow x > 2$ 

b) $9 - 3x \geq 0$ “chuyển $-3x$ từ vế trái sang vế phải của bất phương trình và đổi dấu thành $3x$ ”

$\Leftrightarrow 3x \leq 9$ “chia hai vế của bất phương trình cho số dương 3 ”

$\Leftrightarrow x \leq 3$ 

c) $2x - 3 \geq 2 - 3x \Leftrightarrow 2x + 3x \geq 2 + 3 \Leftrightarrow 5x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 1$.

d) $7x + 3 < 8x - 5 \Leftrightarrow 8x - 7x > 3 + 5 \Leftrightarrow x > 8$.

Ví dụ 3 : Giải bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số.

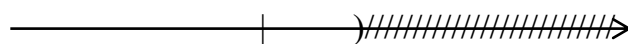
a) $2(x+1) - 3x + 2 > x - 3(1-x)$ b) $2(2x+3) - 3x \leq 3(x-2) + 2(1-x)$

c) $\frac{1}{3}(x-1) \geq x+2$ d) $\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{2} < \frac{x}{6} - x$

Bài giải

a) $2(x+1) - 3x + 2 > x - 3(1-x) \Leftrightarrow 2x + 2 - 3x + 2 > x - 3 + 3x \Leftrightarrow 4 - x > 4x - 3$

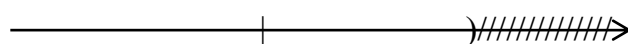
$\Leftrightarrow 4x + x < 4 + 3 \Leftrightarrow 5x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{5}$.



b) $2(2x+3) - 3x \leq 3(x-2) + 2(1-x) \Leftrightarrow 4x + 6 - 3x \leq 3x - 6 + 2 - 2x$

$\Leftrightarrow x + 6 \leq x - 4$ vô nghiệm với mọi x .

c) $\frac{1}{3}(x-1) \geq x+2 \Leftrightarrow x-1 \geq 3(x+2) \Leftrightarrow x-1 \geq 3x+6 \Leftrightarrow 3x-x \leq -1-6 \Leftrightarrow 2x \leq -7 \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{2}$



d) $\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{2} < \frac{x}{6} - x \Leftrightarrow 2.2x - 3(x-1) < x - 6x \Leftrightarrow 4x - 3x + 3 < -5x \Leftrightarrow x + 5x < -3$

$\Leftrightarrow 6x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{6} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ 

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(2x-3) \geq 4(2-x) + 13$

b) $6x-1-(3x+9) \leq 8x-7-(2x-1)$

c) $8x+17-3(2x+3) \leq 10(x+2)$

d) $17(x+5)+41x \geq -15(x+4)-1$

e) $4(2-3x)-(5-x) > 11-x$

f) $2(3-x)-1,5(x-4) < 3-x$

ĐS: a) $x \geq 3$ b) $x \geq -\frac{4}{3}$ c) $x \geq -\frac{3}{2}$ d) $x \geq -\frac{83}{73}$ e) $x < -\frac{4}{5}$ f) $x > \frac{18}{5}$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{3} < \frac{x+6}{2}$

b) $\frac{5(x-1)}{6} - 1 \geq \frac{2(x+1)}{3}$

c) $2 + \frac{3(x+1)}{8} \leq 3 - \frac{x-1}{4}$

d) $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$

e) $\frac{1}{4}x - \frac{2}{5} - \frac{2x-1}{3} < \frac{1}{3}x - \frac{3}{5}$

f) $\frac{2x-5}{6} + \frac{22-7x}{4} > \frac{5-2x}{3} - x - \frac{5x+2}{4}$

ĐS: a) $x < 20$ b) $x \geq 15$ c) $x \leq \frac{9}{5}$ d) $x \leq -5$ e) $x > \frac{14}{19}$ f) $x < \frac{5}{2}$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $(2x+3)(2x-1) > 4x(x+2)$

b) $5(x-1) - x(7-x) < x^2$

c) $(x-1)^2 + (x-3)^2 > x^2 + (x+1)^2$

d) $\frac{(2x-1)^2}{8} < \frac{(3-x)^2}{2}$

e) $\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{3(x-1)^2}{10} < \frac{x^2+1}{2}$

f) $\frac{x(1,5x+1)}{6} - \frac{(2-x)^2}{4} \geq \frac{5x}{2} - 2$

ĐS: a) $x < -\frac{3}{4}$

b) $x > -\frac{5}{2}$

c) $x < \frac{9}{10}$

d) $x < \frac{7}{4}$

e) $x > \frac{3}{7}$

f) $x \leq 2$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $8x - 3 < 5\left(\frac{8x}{5} + 3\right)$

b) $2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$

c) $\frac{x+5}{6} + \frac{x-1}{3} \leq \frac{x+3}{2} - 1$

d) $x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$

e) $\frac{x+7}{15} > \frac{2x}{5} - \frac{x}{3} + \frac{7}{15}$

ĐS: a) x tùy ý b) x tùy ý c) x tùy ý d) vô nghiệm e) vô nghiệm**Bài 5.** Với những giá trị nào của x thì:a) Giá trị của biểu thức $7 - 3(x+1)$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $2(x-3) - 4$.b) Giá trị của biểu thức $\frac{x+2}{3} - x + 1$ lớn hơn giá trị của biểu thức $x + 3$.c) Giá trị của biểu thức $(x+1)^2 - 4$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x-3)^2$.d) Giá trị của biểu thức $x - \frac{1-\frac{3}{2}x}{4}$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $\frac{2-\frac{1}{4}x}{3} + 2$.

ĐS: a) $x \leq \frac{14}{5}$

b) $x < -2$

c) $x \leq \frac{3}{2}$

d) $x < 2$.

Bài 6. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

a) $\frac{x+1987}{2002} + \frac{x+1988}{2003} > \frac{x+1989}{2004} + \frac{x+1990}{2005}$

b) $\frac{x-1}{99} + \frac{x-3}{97} + \frac{x-5}{95} < \frac{x-2}{98} + \frac{x-4}{96} + \frac{x-6}{94}$

c) $\frac{x-1987}{2002} + \frac{x-1988}{2003} > \frac{x-1989}{2004} + \frac{x-1990}{2005}$

d) $\frac{x+1}{99} + \frac{x+3}{97} + \frac{x+5}{95} < \frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+6}{94}$

ĐS: a) $x > 15$ b) $x > 100$ **Bài 7.**

a) Một số có hai chữ số có chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2. Tìm số đó biết rằng nó lớn hơn 21 nhưng nhỏ hơn 36.

b) Tìm số nguyên nằm trong khoảng từ 300 đến 400, biết số đó chia cho 3, 4, 5 đều có số dư là 1.

c) Tìm số nguyên nằm trong khoảng từ 500 đến 600, biết số đó chia cho 5, 8, 10 có các số dư lần lượt là 2, 5, 7.

ĐS: a) 31

b) 301 ($x-1$ chia hết cho 3, 4, 5)c) 557 ($x+3$ chia hết cho 5, 8, 10)**III. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI****1. Định nghĩa giá trị tuyệt đối**

$$|a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

2. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

• **Dạng** $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ -A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = -B \end{cases}$

• **Dạng** $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ hay } A = -B$

• **Dạng phương trình có chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối**

– Xét dấu các biểu thức chứa ẩn nằm trong dấu GTTĐ.

– Chia trục số thành nhiều khoảng sao cho trong mỗi khoảng, các biểu thức nói trên có dấu xác định.

– Xét từng khoảng, khử các dấu GTTĐ, rồi giải PT tương ứng trong trường hợp đó.

– Kết hợp các trường hợp đã xét, suy ra số nghiệm của PT đã cho.

Ví dụ 1 : Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn biểu thức

a) $A = 3x - 2 + |4x|$ nếu $x < 0$ hoặc $x \geq 0$

b) $B = |-5x| - 3x + 12$ nếu $x > 0$ hoặc $x \leq 0$

c) $C = |x - 3| + x - 5$ nếu $x > 7$

d) $D = 2x + 3 + |2 + x|$ nếu $x \leq -2$ hoặc $x > -2$.

Bài giải

a) $x < 0 \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow |4x| = -4x \Rightarrow A = 3x - 2 + |4x| = 3x - 2 - 4x = -2 - x$.

$x \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow |4x| = 4x \Rightarrow A = 3x - 2 + |4x| = 3x - 2 + 4x = 7x - 2$.

b) $x > 0 \Rightarrow -5x < 0 \Rightarrow |-5x| = -(-5x) = 5x \Rightarrow B = |-5x| - 3x + 12 = 5x - 3x + 12 = 2x + 12$.

$x \leq 0 \Rightarrow -5x \geq 0 \Rightarrow |-5x| = -5x \Rightarrow B = |-5x| - 3x + 12 = -5x - 3x + 12 = 12 - 8x$.

c) $x > 7 \Rightarrow x - 7 > 0 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow B = |x - 3| + x - 5 = x - 3 + x - 5 = 2x - 8$.

d) $x \leq -2 \Rightarrow 2 + x \leq 0 \Rightarrow B = 2x + 3 + |2 + x| = 2x + 3 - (2 + x) = x + 1$.

$x > -2 \Rightarrow 2 + x > 0 \Rightarrow B = 2x + 3 + |2 + x| = 2x + 3 + (2 + x) = 3x + 5$.

Ví dụ 2 : Giải phương trình

a) $3x - 2 + |4x| = 0$

b) $|-5x| - 3x + 12 = 3$

c) $|x - 3| + x - 5 = x - 2$

d) $2x + 3 + |2 + x| = 3(x - 1)$

Bài giải

a) Với $x < 0 \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow |4x| = -4x \Rightarrow 3x - 2 + |4x| = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 - 4x = 0 \Leftrightarrow -2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ giá trị này thỏa mãn điều kiện $x < 0$ nên $x = -2$ là nghiệm của phương trình.

Với $x \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow |4x| = 4x \Rightarrow 3x - 2 + |4x| = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 7x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ giá trị này thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ nên $x = \frac{2}{7}$ là nghiệm của phương trình.

Vậy $S = \left\{ -2, \frac{2}{7} \right\}$.

b) Với $x > 0 \Rightarrow -5x < 0 \Rightarrow |-5x| = -(-5x) = 5x \Rightarrow |-5x| - 3x + 12 = 3 \Leftrightarrow 5x - 3x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -12 \Leftrightarrow x = -6$ giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x > 0$ nên nó không là nghiệm.

Với $x \leq 0 \Rightarrow -5x \geq 0 \Rightarrow |-5x| = -5x \Rightarrow |-5x| - 3x + 12 = 3 \Leftrightarrow -5x - 3x + 12 = 0 \Leftrightarrow 8x = 12$

$\Leftrightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x \leq 0$ nên nó không là nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Với $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

$\Rightarrow |x - 3| + x - 5 = x - 2 \Leftrightarrow x - 3 + x - 5 = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 8 = x - 2$

$\Leftrightarrow x = 6$ giá trị này thỏa mãn điều kiện $x > 3$ nên nó là nghiệm của phương trình.

Với $x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

$$\Rightarrow |x-3|+x-5=x-2 \Leftrightarrow -(x-3)+x-5=x-2 \Leftrightarrow -2=x-2$$

$\Leftrightarrow x=0$ giá trị này thỏa mãn điều kiện $x \leq 3$ nên nó là nghiệm của phương trình.

Vậy $S = \{0, 6\}$.

d) Với $2+x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$.

$$\Rightarrow 2x+3+|2+x|=3(x-1) \Leftrightarrow 2x+3-(2+x)=3(x-1) \Leftrightarrow x+1=3x-3 \Leftrightarrow 2x=4$$

$\Leftrightarrow x=2$ giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x \leq -2$ nên nó không là nghiệm.

Với $2+x > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

$$\Rightarrow 2x+3+|2+x|=3(x-1) \Leftrightarrow 2x+3+(2+x)=3(x-1) \Leftrightarrow 3x+5=3x-3 \Leftrightarrow 0.x=8$$

Phương trình này vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3 : Giải phương trình

a) $2x-|2-x|=5$

b) $|x-3|+2x=5$

c) $|x-2|+|x-1|=3x+7$

d) $|x-2|=|x+1|-3x+2$

Bài giải

a) $x < 0 \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow |4x| = -4x \Rightarrow A = 3x-2+|4x| = 3x-2-4x = -2-x$.

$x \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow |4x| = 4x \Rightarrow A = 3x-2+|4x| = 3x-2+4x = 7x-2$.

b) $x > 0 \Rightarrow -5x < 0 \Rightarrow |-5x| = -(-5x) = 5x \Rightarrow B = |-5x|-3x+12 = 5x-3x+12 = 2x+12$.

$x \leq 0 \Rightarrow -5x \geq 0 \Rightarrow |-5x| = -5x \Rightarrow B = |-5x|-3x+12 = -5x-3x+12 = 12-8x$.

c) $x > 7 \Rightarrow x-7 > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow B = |x-3|+x-5 = x-3+x-5 = 2x-8$.

d) $x \leq -2 \Rightarrow 2+x \leq 0 \Rightarrow B = 2x+3+|2+x| = 2x+3-(2+x) = x+1$.

$x > -2 \Rightarrow 2+x > 0 \Rightarrow B = 2x+3+|2+x| = 2x+3+(2+x) = 3x+5$.

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $|-4x| = x+2$

b) $|2-x| = 2-3x$

c) $|2x-3| = 5x-6$

d) $2x-|6x-7| = -x+8$

e) $\left| \frac{1-5x}{3} \right| = 6-5x$

f) $\frac{|x+2|}{2} - \frac{|x-1|}{3} = \frac{1}{4} + \frac{x+3}{6}$

ĐS: a) $S = \left\{ -\frac{2}{5}; \frac{2}{3} \right\}$ b) $S = \{0\}$ c) $S = \left\{ \frac{9}{7} \right\}$ d) $S = \emptyset$ e) $S = \left\{ \frac{19}{20} \right\}$ f) $S = \left\{ \frac{1}{8} \right\}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $|x^2-2x| = x$

b) $|2x^2-5x+3| = -2x^2+2$

c) $|x^2+4x-5| = x^2-1$

d) $|3x^2-7x+2| = -x^2+5x-6$

ĐS: a) $S = \{0; 1; 3\}$ b) $S = \left\{ 1; \frac{1}{4} \right\}$ c) $S = \{-3; 1\}$ d) $S = \{2\}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\left| \frac{3x-6}{1-2x} \right| = x-2$

b) $|-2x+8| = \frac{x^2-6x+8}{x+3}$

c) $\frac{|x|-6}{x^2-36} = 2$

d) $\frac{|x^2-4x+3|}{5x^2-7x+2} = x-3$

e) $\frac{-2x^2+7x-4}{|2x+1|} = 4-x$

f) $\frac{|x^2+5x+4|}{x^2+3x+2} = x+4$

ĐS: a) $S = \{2\}$ b) $S = \left\{ -\frac{4}{3}; 4 \right\}$ c) $S = \left\{ -\frac{13}{2} \right\}$ d) $S = \left\{ \frac{3}{5}; 3 \right\}$ e) $S = \{4\}$ f) $S = \{-4\}$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $|2x+1|=|x-1|$ b) $|2-5x|=|3x+1|$ c) $|1+4x|-|7x-2|=0$
 d) $|2x^2+5x-10|=2x^2+1$ e) $||x-3|+4|=6$ f) $|x^2-3x|=x^2+1$
 ĐS: a) $S=\{-2;0\}$ b) $S=\left\{\frac{1}{8};\frac{3}{2}\right\}$ c) $S=\left\{\frac{1}{11};1\right\}$ d) $S=\left\{-\frac{9}{4};1;\frac{9}{5}\right\}$ e) $S=\{1;5\}$ f) $S=\left\{1;\frac{1}{2}\right\}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $|2x+1|-|5x-2|=3$ b) $2|x|-|x+3|-1=0$ c) $|x-2|+|x-3|=1$
 d) $|x+1|-2|x-1|=x$ e) $|2x+3|-|x|+x-1=0$ f) $|x-1|+|x+1|=0$
 ĐS: a) $S=\emptyset$ b) $S=\{4\}$ c) $2 \leq x \leq 3$ d) $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$ e) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ f) $S=\emptyset$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x-8 \geq 5x+12$ b) $-4x+15 < 24-7x$ c) $x+1 \geq 7-2x$
 d) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} \geq 1 - \frac{x+3}{4}$ e) $\frac{2x-1}{2} - 2x \leq -(2x+1)$ f) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \leq x - \frac{x-3}{4}$
 ĐS: a) $x \leq -10$ b) $x < 3$ c) $x \geq 2$ d) $x \geq -\frac{11}{7}$ e) $x \leq -\frac{1}{2}$ f) $x \geq -1$

Bài 2.

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của bất phương trình: $11x-7 < 8x+2$

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên âm của bất phương trình:

$$\frac{x^2+2x+8}{2} - \frac{x^2-x+1}{6} > \frac{x^2+x+1}{3} - \frac{x+1}{4}$$

c) Tìm nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình: $4(2-3x)-(5-x) > 11-x$

d) Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình: $2(3-x)-1,5(x-4) < 3-x$

ĐS: a) $\{1;2\}$ b) $\{-3;-2;-1\}$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x-5}{2005} + \frac{x-15}{1995} < \frac{x-2005}{5} + \frac{x-1995}{15}$ b) $\frac{1987-x}{15} + \frac{1988-x}{16} + \frac{27+x}{1999} + \frac{28+x}{2000} > 4$

c) $\left(\frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110}\right)x \geq \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}$

ĐS: a) $x > 2010$. Trừ 2 vế cho 2 b) $x < 1972$. Trừ 2 vế cho 4

c) $x \geq 10$. Biến đổi $\frac{1}{k(100+k)} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{100+k}\right)$, $\frac{1}{k(k+10)} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+10}\right)$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $|x-3|-5x=7$ b) $|x-5|=|2x-9|$ c) $||2x-11|-x|=8$
 d) $|4x-7| + \frac{|7-4x|}{4x-7} = 9$ e) $\frac{|7x^2-9x+2|}{5x+4} = 2-7x$ f) $\frac{x^2-8x+15}{|2x^2-9x-5|} = 3x-9$
 ĐS: a) $S=\left\{\frac{5}{3}\right\}$ b) $S=\left\{4;\frac{14}{3}\right\}$ c) $S=\{1;19\}$ d) $S=\left\{-\frac{3}{4};\frac{15}{4}\right\}$ e) $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{2}{7}\right\}$ f) $S=\{3\}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a)

CHƯƠNG I: TỨ GIÁC

I. TỨ GIÁC

Định nghĩa : Tứ giác ABCD là một hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kỳ hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Định lý : Tổng bốn góc của một tứ giác bằng 360^0 .

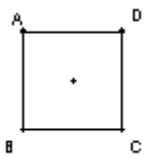
$$ABCD \Rightarrow A + B + C + D = 360^0$$

Góc ngoài của tứ giác là góc kề bù với một góc của tứ giác.

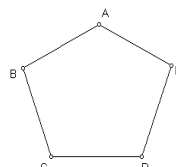
Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.



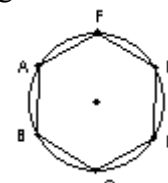
Tam giác đều



Hình vuông



Ngũ giác đều



Lục giác đều

VẤN ĐỀ I. Sử dụng tính chất về các góc của một tứ giác để tính góc

Định lý : Tổng bốn góc của một tứ giác bằng 360° .

$$ABCD \Rightarrow A + B + C + D = 360^\circ$$

Góc ngoài của tứ giác là góc kề bù với một góc của tứ giác.

Bài tập 1: Cho tứ giác ABCD có $B = 120^\circ, C = 60^\circ, D = 90^\circ$. Tính góc A và góc ngoài tại đỉnh A.

Bài tập 2: Cho tứ giác ABCD có $AB = AD, CB = CD, C = 60^\circ, A = 100^\circ$.

a) Chứng minh AC là đường trung trực của BD.

b) Tính B, D .

ĐS: b) $B = D = 100^\circ$.

Bài tập 3: Cho tứ giác ABCD có phân giác trong của góc A và góc B cắt nhau tại E, phân giác

ngoài của góc A và góc B cắt nhau tại F. Chứng minh: $\angle AEB = \frac{C+D}{2}$ và $\angle AFB = \frac{A+B}{2}$.

Bài tập 4: Cho tứ giác ABCD có $B + D = 180^\circ, CB = CD$. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = AB$. Chứng minh:

a) Các tam giác ABC và EDC bằng nhau.

b) AC là phân giác của góc A.

Bài tập 5: Cho tứ giác ABCD biết số đo của các góc A, B, C, D tỉ lệ thuận với 5; 8; 13 và 10.

a) Tính số đo các góc của tứ giác ABCD.

b) Kéo dài hai cạnh AB và DC cắt nhau ở E, kéo dài hai cạnh AD và BC cắt nhau ở F. Hai tia phân giác của các góc AED và góc AFB cắt nhau ở O. Phân giác của góc AFB cắt các cạnh CD và AB tại M và N. Chứng minh O là trung điểm của đoạn MN.

Bài tập 6: Cho tứ giác ABCD có $B + D = 180^\circ$, AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh $CB = CD$.

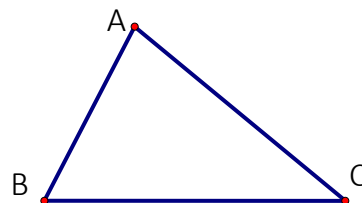
Bài tập 7: Cho tứ giác ABCD có $A = a, C = b$. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại F. Các tia phân giác của hai góc AEB và AFD cắt nhau tại I.

Tính góc EIF theo a, b

VẤN ĐỀ II. Sử dụng bất đẳng thức tam giác để giải các bài toán liên hệ đến các cạnh của một tứ giác

Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

$$\begin{aligned} AB + AC &> BC \\ AB + BC &> AC \\ AC + BC &> AB \end{aligned}$$



Hệ quả: Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

$$\begin{aligned} |AC - BC| &< AB \\ |AB - BC| &< AC \\ |AC - AB| &< BC \end{aligned}$$

Nhận xét: Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$

Lưu ý: chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại, hoặc so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại.

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh:

$$\text{a) } AB < BC + CD + AD \quad \text{b) } AC + BD < AB + BC + CD + AD.$$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $AB + BD \leq AC + CD$. Chứng minh: $AB < AC$.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

$$\text{a) Chứng minh: } \frac{AB + BC + CD + AD}{2} < OA + OB + OC + OD < AB + BC + CD + AD.$$

b) * Khi O là điểm bất kì thuộc miền trong của tứ giác ABCD, kết luận trên có đúng không?

Bài 4. Chứng minh rằng trong một tứ giác thì:

- Tổng độ dài 2 cạnh đối diện nhỏ hơn tổng độ dài hai đường chéo.
- Tổng độ dài hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi của tứ giác.

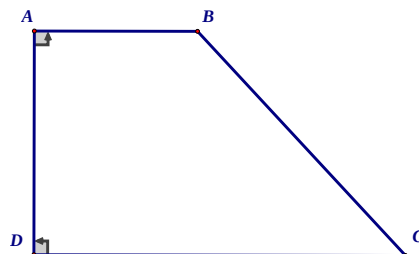
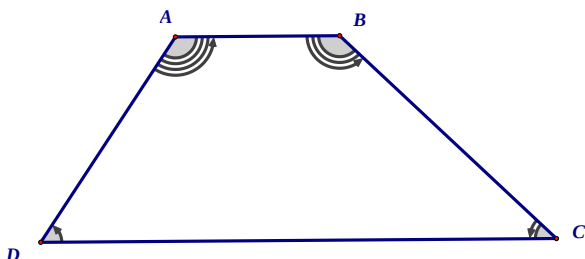
II. HÌNH THANG – HÌNH THANG VUÔNG

Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Hai góc kề một cạnh bên của hình thang bằng 180°

Nhận xét:

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.
- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.



ABCD là hình thang:

- $AB \parallel CD$
- $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
- Nếu $AD \parallel BC \Leftrightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AB = CD \end{cases}$
- Nếu $AB = CD \Leftrightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

ABCD là hình thang, $\hat{A} = 90^\circ$ thì ABCD là hình thang vuông

VẤN ĐỀ I. Tính chất các góc của một hình thang

Định lý : Tổng bốn góc của một tứ giác bằng 360° .

$$ABCD \Rightarrow A + B + C + D = 360^\circ$$

Góc ngoài của tứ giác là góc kề bù với một góc của tứ giác.

Hai góc kề một cạnh bên của hình thang bằng 180°

Bài 1. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $A - D = 20^\circ$, $B = 2C$. Tính các góc của hình thang.

Bài 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$, $AD = BC = AB$, $BDC = 30^\circ$. Tính các góc của hình thang.

Bài 3. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$. Chứng minh rằng: $A + B > C + D$.

Bài 4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Hai đường phân giác của góc A và B cắt nhau tại điểm K thuộc đáy CD. Chứng minh $AD + BC = DC$.

Bài 5. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$).

a) Chứng minh rằng nếu hai tia phân giác của hai góc A và D cùng đi qua trung điểm F của cạnh bên BC thì cạnh bên AD bằng tổng hai đáy.

b) Chứng minh rằng nếu $AD = AB + CD$ thì hai tia phân giác của hai góc A và D cắt nhau tại trung điểm của cạnh bên BC.

Bài 6. Cho hình thang ABCD có $A = B = 90^\circ$ và $BC = AB = \frac{AD}{2}$. Lấy điểm M thuộc đáy nhỏ BC. Kẻ $Mx \perp MA$, Mx cắt CD tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN vuông cân.

VẤN ĐỀ II. Chứng minh một tứ giác là hình thang, hình thang vuông

Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề với một đáy bằng nhau.

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có $AB = BC$ và AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh ABCD là hình thang.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $AM = \frac{1}{2}BC$, N

là trung điểm cạnh AB. Chứng minh:

- Tam giác AMB cân.
- Tứ giác MNAC là hình thang vuông.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Từ H kẻ $HD \perp AC$, $HE \perp AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, HC. Chứng minh tứ giác DEMN là hình thang vuông.

III. HÌNH THANG CÂN

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

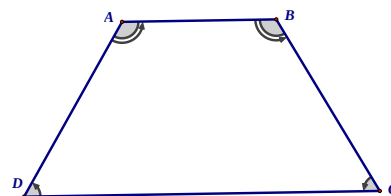
Hai góc đối của hình thang cân bằng 180°

Tính chất:

- Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.
- Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Dấu hiệu nhận xét:

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.



Tứ giác ABCD:	$\begin{cases} AB // CD \\ \hat{D} = \hat{C} \end{cases} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình thang cân}$
Tứ giác ABCD:	$\begin{cases} AB // CD \\ \hat{A} = \hat{B} \end{cases} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình thang cân}$
Tứ giác ABCD:	$\begin{cases} AB // CD \\ AC = BD \end{cases} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình thang cân}$
ABCD là hình thang cân $\Rightarrow$	$\begin{cases} AD = BC \\ AC = BD \end{cases}$

VẤN ĐỀ I. Sử dụng tính chất của hình thang cân để tính toán và chứng minh

Hình thang cân có một trục đối xứng là đi qua trung điểm của hai cạnh đáy.

Bài 1. Cho hình thang cân ABCD ($AB // CD$, $AB < CD$). Kẻ các đường cao AE, BF của hình thang. Chứng minh rằng $DE = CF$.

Bài 2. Cho hình thang cân ABCD ($AB // CD$).

- Chứng minh: $\angle ACD = \angle BDC$.
- Gọi E là giao điểm của AC và BD. Chứng minh: $EA = EB$.

Bài 3. Cho hình thang cân ABCD ($AB // CD$, $AB > CD$) có $CD = a$, $A + B = \frac{1}{2}(C + D)$.

Đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC.

- Tính các góc của hình thang.
- Chứng minh AC là phân giác của góc DAB .

c) Tính diện tích của hình thang.

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $BDC = 45^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh tam giác DOC vuông cân.

b) Tính diện tích của hình thang ABCD, biết $BD = 6$ (cm).

ĐS: b) $S = 18(\text{cm}^2)$.

VẤN ĐỀ II. Chứng minh một tứ giác là hình thang cân

$$\begin{aligned} \text{Tứ giác ABCD: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ \hat{D} = \hat{C} \end{cases} &\Leftrightarrow \text{ABCD là hình thang cân} \\ \text{Tứ giác ABCD: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ \hat{A} = \hat{B} \end{cases} &\Leftrightarrow \text{ABCD là hình thang cân} \\ \text{Tứ giác ABCD: } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AC = BD \end{cases} &\Leftrightarrow \text{ABCD là hình thang cân} \\ \text{ABCD là hình thang cân} &\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AC = BD \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE ($D \in AC$, $E \in AB$). Chứng minh rằng BEDC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

Bài 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $ACD = BDC$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D và E sao cho $AD = AE$.

a) Chứng minh BDEC là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang cân đó, biết $A = 50^\circ$.

ĐS: b) $B = C = 65^\circ$, $CED = BDE = 115^\circ$.

Bài 4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AC = BD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh:

a) Tam giác BDE là tam giác cân.

b) Các tam giác ACD và BDC bằng nhau.

c) ABCD là hình thang cân.

Bài 5. Cho tam giác đều ABC và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D, đường thẳng song song với AC cắt BC ở E, đường thẳng song song với AB cắt AC ở F. Chứng minh:

a) Các tứ giác BDME, CFME, ADMF là các hình thang cân.

b) Chu vi của tam giác DEF bằng tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh của tam giác ABC.

c) $DME = DMF = EMF$.

ĐS: c) $DME = DMF = EMF = 120^\circ$.

Bài 6. Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên CD, $BAC = CAD$ và $D = 60^\circ$.

a) Chứng minh ABCD là hình thang cân.

b) Tính độ dài cạnh đáy AD, biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

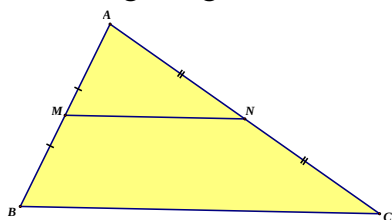
ĐS: b) $AD = 8(\text{cm})$.

IV. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

Đường trung bình của tam giác: là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

Định lý 1: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

Định lý 2: Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

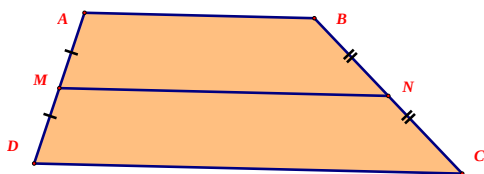


$$\begin{aligned} & \Delta ABC: \begin{cases} AM = MB \\ AN = NC \end{cases} \Leftrightarrow MN \text{ là đường trung bình} \\ & MN \text{ là đường trung bình của } \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \frac{BC}{2} \end{cases} \\ & \begin{cases} MN = MB \\ MN \parallel BC \end{cases} \Rightarrow NA = NC \end{aligned}$$

Đường trung bình của hình thang: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

Định lý 3: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

Định lý 4: Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.



$$\begin{aligned} & ABCD: \begin{cases} AM = MD \\ BN = NC \end{cases} \Leftrightarrow MN \text{ là đường trung bình} \\ & MN \text{ là đường trung bình của} \\ & \text{hình thang } ABCD \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AB \parallel DC \\ MN = \frac{AB + DC}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 1. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên cạnh AB, lấy hai điểm D, E sao cho AD = DE = EB. Gọi I là giao điểm của AM với CD. Chứng minh: AI = IM.

Bài 2. Cho tam giác ABC và hai đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG, CG. Chứng minh tứ giác MNDE có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên tia BA lấy điểm D sao cho A là trung điểm BD. Trên tia CB lấy điểm E sao cho B là trung điểm CE. Hai đường thẳng AC và DE cắt nhau tại I.

Chứng minh rằng: $DI = \frac{DE}{3}$.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có góc $C = 40^\circ$, $D = 80^\circ$, $AD = BC$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Tính góc nhọn tạo bởi đường thẳng FE với các đường thẳng AD và BC.

Bài 5. Cho A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng d ($AB > BC$). Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là d , vẽ các tam giác đều AMB và BNC. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BM, CM, BN, AN. Chứng minh:

a) PQRS là hình thang cân.

b) $SQ = \frac{1}{2}MN$.

Bài 6. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM, D là giao điểm của BI và AC.

a) Chứng minh: $AD = \frac{1}{2}DC$.

b) So sánh độ dài BD và ID.

Bài 7. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, BD.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q nằm trên một đường thẳng.

b) Tính MN, PQ, biết các cạnh đáy của hình thang $AB = a$, $CD = b$ ($a > b$).

c) Chứng minh rằng nếu $MP = PQ = QN$ thì $a = 2b$.

Bài 8. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.

Bài 9. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K.

a) Chứng minh: $AK = KC$, $BI = ID$.

b) Cho $AB = 6$, $CD = 10$. Tính EI, KF, IK.

Bài 10. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng EK và CD, KF và AB.

b) Chứng minh: $EF \leq \frac{AB+CD}{2}$.

c) Khi $EF = \frac{AB+CD}{2}$ thì tứ giác ABCD là hình gì.

ĐS: c) ABCD là hình thang.

Bài 11. Tính độ dài đường trung bình của một hình thang cân biết rằng các đường chéo của nó vuông góc với nhau và đường cao bằng 10 cm.

Bài 12. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng d đi qua G cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A' , B' , C' thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên d . Tìm liên hệ giữa các độ dài AA' , BB' , CC' .

Bài 13. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC. Gọi A' , B' , C' , G' thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên d . Tìm liên hệ giữa các độ dài AA' , BB' , CC' , GG' .

V. ĐỐI XỨNG TRỰC

Hai điểm **A, B** gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

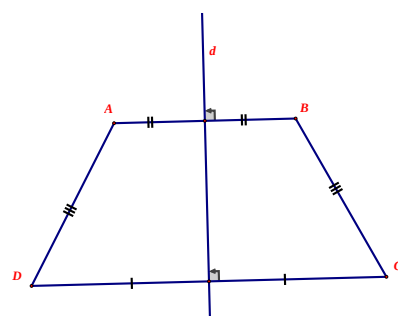
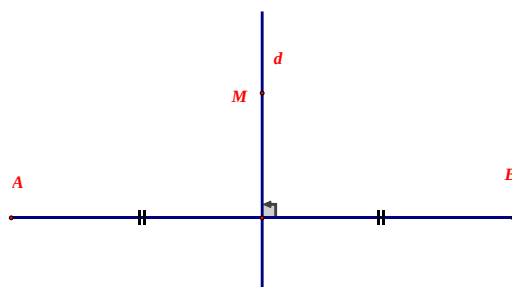
Quy ước: Nếu điểm M nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với M qua đường thẳng d cũng là điểm M.

Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại. Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hai hình đó

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H. Ta nói hình H có trục đối xứng

Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân



Bài 1. Cho góc $\angle xOy = 50^\circ$ và điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, điểm C đối xứng với A qua Oy.

a) So sánh các độ dài OB và OC.

b) Tính số đo góc $\angle BOC$.

ĐS: b) $\angle BOC = 100^\circ$.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC, trọng tâm H. Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC.

a) Chứng minh hai tam giác BHC và BKC bằng nhau.

b) Cho $BAC = 70^\circ$. Tính số đo góc BKC .

ĐS: b) $BKC = 110^\circ$.

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($A = D = 90^\circ$). Gọi K là điểm đối xứng với B qua AD , E là giao điểm của CK và AD . Chứng minh $CED = AEB$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K lần lượt là điểm đối xứng với điểm H qua các cạnh AB, AC . Chứng minh:

a) Ba điểm I, A, K thẳng hàng.

b) Tứ giác $BIKC$ là hình thang.

c) $IK = 2AH$.

Bài 5. Cho tam giác ABC , các phân giác BM và CN cắt nhau tại I . Từ A vẽ các đường vuông góc với BM và CN , chúng cắt BC thứ tự ở E và F . Gọi I' là hình chiếu của I trên BC . Chứng minh rằng E và F đối xứng nhau qua I' .

Bài 6. Cho hai điểm A, B nằm trong một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d . Tìm điểm $M \in d$ sao cho $MA + MB$ ngắn nhất.

Bài 7. Cho góc $xOy = 60^\circ$ và điểm A nằm trong góc đó. Gọi B, C lần lượt là hai điểm đối xứng với điểm A qua Ox, Oy .

a) Chứng minh tam giác BOC là tam giác cân. Tính các góc của tam giác đó.

b) Tìm điểm $I \in Ox$ và điểm $K \in Oy$ sao cho tam giác AIK có chu vi nhỏ nhất.

ĐS: a) $BOC = 120^\circ, OBC = OCB = 30^\circ$ b) I, K là giao điểm của đường thẳng BC với các tia Ox và Oy .

Bài 8. Cho tam giác ABC , Cx là phân giác ngoài của góc C . Trên Cx lấy điểm M (khác C). Chứng minh rằng: $MA + MB > CA + CB$.

Bài 9. Cho góc nhọn xOy và điểm A ở trong góc đó. Tìm điểm B ở trên tia Ox và điểm C ở trên tia Oy sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

Bài 10.

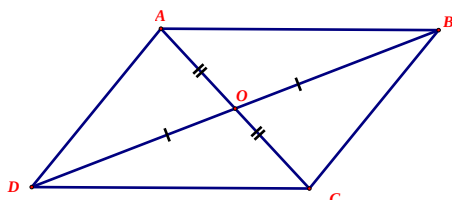
VI. HÌNH BÌNH HÀNH

- ✎ Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song
- ✎ Hình bình hành là một hình thang **đặc biệt** (hình bình hành là hình thang có hai cạnh bên song song)
- ✎ Tính chất: Trong hình bình hành:
 - Các cạnh đối bằng nhau

- Các góc đối bằng nhau
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

✎ Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.



ABCD là hình bình hành

$$\text{nên: } \begin{cases} AB=DC; AD=BC \\ AB \parallel DC; AD \parallel BC \\ \hat{A}=\hat{C}; \hat{B}=\hat{D} \\ OA=OC; OB=OD \end{cases}$$

VẤN ĐỀ I. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

Tính chất: Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau
- Các góc đối bằng nhau
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC.

- Chứng minh $BE = DF$ và $\angle ABE = \angle CDF$.
- Chứng minh tứ giác EBFD là hình bình hành.
- Chứng minh các đường thẳng EF, DB và AC đồng qui.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD ($AB > BC$). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

- Chứng minh $DE \parallel BF$.
- Tứ giác DEBF là hình gì?

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, M và N là giao điểm của AI và CK với BD.

- Chứng minh: $AI \parallel CK$.
- Chứng minh: $DM = MN = NB$.

VẤN ĐỀ II. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.

- ✎ Hai điểm A, B gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó. (Quy ước: Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O cũng là điểm O)
- ✎ Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với mỗi điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại. Điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình đó.
- ✎ Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.
- ✎ Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua điểm O cũng thuộc hình H. Ta nói hình H có tâm đối xứng.

ABCD là hình chữ nhật $\Rightarrow$ ABCD là $\begin{cases} \text{hình bình hành} \\ \text{hình thang cân} \end{cases}$

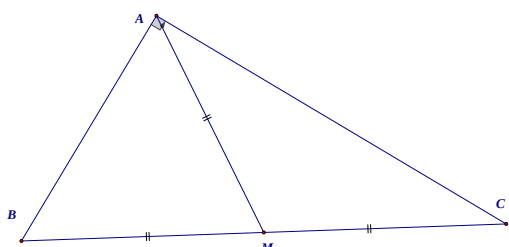
Tính chất:

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình hành, của hình thang cân.
- Từ tính chất của hình thang cân và hình bình hành: Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

Định lý: Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền. Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.



$$\begin{cases} \Delta ABC \text{ vuông tại } A \\ MA = MB \end{cases} \Rightarrow AM = \frac{1}{2} BC$$

$$\begin{cases} AM = \frac{1}{2} BC \\ MA = MB \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A$$

VẤN ĐỀ 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

Bài 1. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K.

- Chứng minh tứ giác AHCE là hình chữ nhật.
- Chứng minh $HG = GK = KE$.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì?

ĐS: EFGH là hình chữ nhật.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác vuông cân ADB ($DA = DB$) và ACE ($EA = EC$). Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của DM với AB, K là giao điểm của EM với AC. Chứng minh:

- Ba điểm D, A, E thẳng hàng.
- Tứ giác IAKM là hình chữ nhật.
- Tam giác DME là tam giác vuông cân.

- Bài 4.** Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC.
- Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.
 - Chứng minh tứ giác ABPN là hình thang cân.
 - Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để ABPN là hình chữ nhật.
- ĐS: c) $DC = 3AB$ thì ABPN là hình chữ nhật.*
- Bài 5.** Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.
- Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.
 - Xác định vị trí của điểm O để tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.
- ĐS: b) O thuộc đường cao AH của $\triangle ABC$.*
- Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$).
- Chứng minh tứ giác PCQM là hình chữ nhật.
 - Gọi I là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng khi P di chuyển trên cạnh AC, Q di chuyển trên cạnh BC thì điểm I di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.
- ĐS: b) I di chuyển trên đường trung bình của $\triangle ABC$.*
- Bài 7.** Cho hình chữ nhật ABCD. Nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với AB và AD. Chứng minh rằng:
- Tứ giác AHFK là hình chữ nhật.
 - AF song song với BD và KH song song với AC.
 - Ba điểm E, H, K thẳng hàng.
- Bài 8.** Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA; D, E, F lần lượt là trung điểm các đoạn HA, HB và HC.
- Chứng minh rằng các tứ giác MNFD và MEFP là các hình chữ nhật.
 - Để các đoạn MD, ME và DP bằng nhau thì tam giác ABC phải là tam giác gì?

VẤN ĐỀ II. Vận dụng kiến thức hình chữ nhật để giải toán

- Bài 1.** Tính độ dài trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 7cm và 24cm.
- Bài 2.** *ĐS: $AM = 12,5(cm)$.*
- Bài 3.** Cho tam giác ABC cân tại A, CH là đường cao ($H \in AB$). Gọi D là điểm đối xứng với điểm B qua A.
- Chứng minh tam giác DCB là tam giác vuông.
 - Chứng minh $DCA = HCB$.
- Bài 4.** Cho hình chữ nhật ABCD. Vẽ $BH \perp AC$ ($H \in AC$). Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AH và DC; I, O lần lượt là trung điểm của AB và IC.
- Chứng minh $IC = KB$ và $MO = \frac{1}{2}IC$.
 - Tính số đo góc BMK .
- ĐS: b) $BMK = 90^\circ$.*
- Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC. Vẽ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. O là trung điểm của DE.
- Chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.
 - Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào?
 - Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài ngắn nhất.
- ĐS: b) O di chuyển trên đường trung bình của $\triangle ABC$ c) $M \equiv H$ ($AH \perp BC$).*
- Bài 6.** Cho hình chữ nhật ABCD, $AB = 2AD$. Vẽ tia AM (M thuộc cạnh DC) sao cho $DAM = 15^\circ$. Chứng minh tam giác ABM là tam giác cân.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC > AB$. AH là đường cao. Trên tia HC lấy HD = HA, đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E.

a) Chứng minh $AE = AB$.

b) Gọi M trung điểm BE. Tính số đo góc AHM .

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AC = 3AB$. Trên cạnh góc vuông AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Tính $\angle ACB + \angle AEB$.

Bài 9. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ $AH \perp BD$. Gọi I là trung điểm của DH. Kẻ đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt cạnh BC ở K. Chứng minh K là trung điểm cạnh BC.

IX. HÌNH THOI

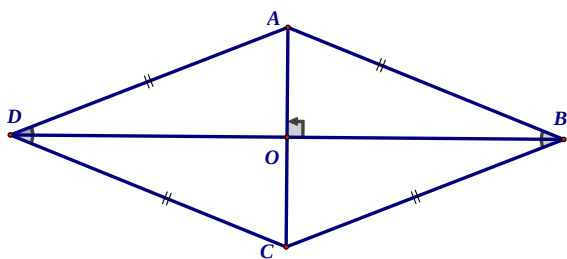
Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau. Hình thoi cũng là một hình bình hành.

Tính chất: Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành

Định lí: Trong hình thoi:

+Hai đường chéo vuông góc với nhau.

+Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.



ABCD là hình thoi $\Rightarrow$ $\begin{cases} ABCD \text{ là hình bình hành} \\ AB = BC = CD = DA \\ AC \perp BD \\ AC \text{ là phân giác } \angle A, \angle C; \\ BD \text{ là phân giác } \angle B, \angle D \end{cases}$

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi..
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

VẤN ĐỀ I. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi..
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi

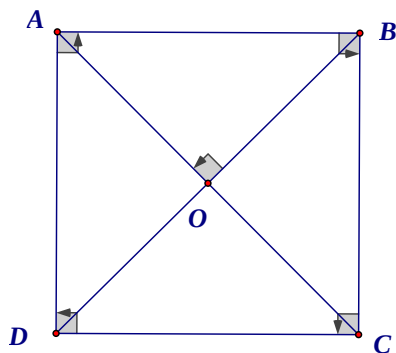
- Bài 1.** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.
- Bài 2.** Cho tứ giác ABCD có $C = 40^\circ$, $D = 80^\circ$, $AD = BC$. Gọi E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC, DB, AC.
- Chứng minh tứ giác EMFN là hình thoi.
 - Tính góc MFN .
- ĐS: b) $MFN = 60^\circ$.
- Bài 3.** Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi E, F, G, H lần lượt là các giao điểm của các phân giác trong của các tam giác OAB, OBC, ODC, ODA.
- Chứng minh: ba điểm E, O, G thẳng hàng, ba điểm H, O, F thẳng hàng.
 - Chứng minh các tam giác AEB và CGD bằng nhau.
 - Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.
- Bài 4.** Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc cạnh BC. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC, cắt AB ở F.
- Chứng minh tứ giác AFME là hình bình hành.
 - Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình thoi.
- ĐS: b) M là chân đường phân giác góc B của $\triangle ABC$.
- Bài 5.** Cho hình bình hành ABCD có $AB = 2AD$, $D = 70^\circ$. Vẽ $BH \perp AD$ ($H \in AD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.
- Chứng minh tứ giác ANMD là hình thoi.
 - Tính góc HMC .
- ĐS: b) $HMC = 105^\circ$.
- Bài 6.** Cho tam giác đều ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác, AD là đường cao. Trên cạnh BC lấy điểm M. Từ M vẽ $ME \perp AB$ ($E \in AB$) và $MF \perp AC$ ($F \in AC$). Gọi I là trung điểm của AM.
- Chứng minh tứ giác DEIF là hình thoi.
 - Chứng minh các đường thẳng MH, ID, EF đồng qui.
- Bài 7.** Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo cắt nhau ở O. Hai đường thẳng d_1 và d_2 cùng đi qua O và vuông góc với nhau. Đường thẳng d_1 cắt các cạnh AB và CD ở M và P. Đường thẳng d_2 cắt các cạnh BC và AD ở N và Q. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

VẤN ĐỀ II. Vận dụng kiến thức hình thoi để giải toán

- Bài 1.** Cho hình thoi ABCD có $AC = 8\text{cm}$, $BD = 10\text{cm}$. Tính độ dài của cạnh hình thoi.
- ĐS: $AB = \sqrt{41} \text{ (cm)}$.
- Bài 2.** Cho hình thoi ABCD có $A = 60^\circ$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $BM = CN$. Chứng minh tam giác MDN là tam giác đều.
- Bài 3.** Cho hình thoi ABCD có $A = 60^\circ$. Trên AD và CD lấy các điểm M, N sao cho $AM + CN = AD$. Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC, MP cắt BC tại Q. Tứ giác MDCQ là hình gì ?
- Bài 4.** Cho P là một điểm chuyển động trong tam giác ABC sao cho $PBA = PCA$. Hạ $PM \perp AB$; $PN \perp AC$ ($M \in AB$; $N \in AC$). Gọi K, S là hai đỉnh khác của hình thoi KMSN. Chứng minh KS đi qua một điểm cố định.

X. HÌNH VUÔNG

- ✎ Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.
- ✎ Từ định nghĩa hình vuông, ta suy ra:
 - Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.
 - Hình vuông là hình thoi có một góc vuông.
 - Như vậy: Hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.



$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} ABCD \text{ là hình chữ nhật} \\ ABCD \text{ là hình thoi} \end{cases}$

✎ Tính chất:

- Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.
- Đường chéo của hình vuông vừa bằng nhau vừa vuông góc với nhau

✎ Dấu hiệu nhận biết:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông

✎ Nhận xét: Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

VẤN ĐỀ I. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông

✎ Dấu hiệu nhận biết:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Phân giác trong AD của góc A ($D \in BC$). Vẽ $DF \perp AC$, $DE \perp AB$. Chứng minh tứ giác AEDF là hình vuông.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Chứng minh tứ giác EFGH là hình vuông.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và F.

a) Tứ giác AFME là hình gì?

b) Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình vuông.

Bài 4. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác ADFE là hình gì?

b) Tứ giác EMFN là hình gì?

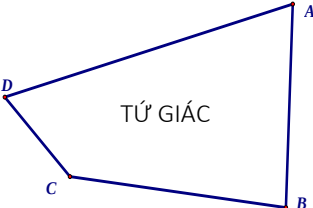
Bài 5. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABCD và ACEF. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của ABCD và ACEF; M, P lần lượt là trung điểm BC và DF. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

VẤN ĐỀ II. Vận dụng kiến thức hình vuông để giải toán

- Bài 1.** Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh các AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = DF$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BF.
- Chứng minh các tam giác ADF và BAE bằng nhau.
 - Chứng minh MN vuông góc với AF.
- Bài 2.** Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$.
- Chứng minh tam giác EDF vuông cân.
 - Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh $BI = DI$.
 - Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh O, C, I thẳng hàng.
- Bài 3.** Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABCD và ACEF. Vẽ đường cao AH kéo dài HA gặp DF tại E. Chứng minh rằng $DI = IF$.
- Bài 4.** Cho hình bình hành ABCD. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông ABEF và ADGH. Chứng minh:
- $AC = FH$ và $AC \perp FH$.
 - Tam giác CEG là tam giác vuông cân.
- Bài 5.** Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB, các hình vuông AMCD, BMEF.
- Chứng minh AE vuông góc với BC.
 - Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.
 - Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB.
- ĐS: c) DF đi qua K ($K = AF \cap AC$).
- Bài 6.** Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy điểm M. Tia phân giác của góc ABM cắt AD ở I. Chứng minh rằng: $BI \leq 2 MI$.
- Bài 7.** Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E thuộc đường chéo AC. Kẻ $EF \perp AD$, $EG \perp CD$.
- Chứng minh rằng: $EB = FG$ và $EB \perp FG$.
 - Chứng minh rằng: Các đường thẳng BE, AG, CF đồng qui.
- Bài 8.** Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC, các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành EAGH. Chứng minh rằng:
- $AK = BC$ và $AH \perp BC$.
 - Các đường thẳng KA, BF, CD đồng qui.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

➤ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$



TỨ GIÁC

➤ $AB = BC = CD = DA$

➤ $AB \parallel CD, AD \parallel BC$

➤ $AB = CD, AD = BC$

➤ $AB \parallel CD, AB = CD$

➤ $\hat{A} = \hat{C} \quad \hat{B} = \hat{D}$

Tổng hợp và giảng dạy: ThS. Ngô Văn Thọ

Facebook, Zalo: 0972120800

nguồn tham khảo: internet

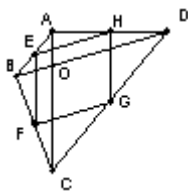
Trang 131

MỘT SỐ BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 : Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD phải có điều kiện gì thì EFGH là :

- a) Hình chữ nhật ?
- b) Hình thoi ?
- c) Hình vuông ?

Bài giải



Vì E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC nên EF là đường trung bình của ΔABC . Suy ra $EF \parallel AC$ và $EF = \frac{1}{2} AC$, (1).

Tương tự ta có : $HG \parallel AC$ và $HG = \frac{1}{2} AC$, (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác EFGH là hình bình hành.

a) Muốn cho tứ giác EFGH là hình chữ nhật thì nó cần phải có thêm một góc vuông !

Chẳng hạn $\angle HEF = 90^\circ \Leftrightarrow EH \perp EF \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Vậy nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau thì tứ giác EFGH sẽ là hình chữ nhật.

b) Muốn cho tứ giác EFGH là hình thoi thì nó cần phải có thêm hai cạnh kề bằng nhau !

Chẳng hạn $EH = EF \Leftrightarrow AC = BD$.

Vậy nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác EFGH sẽ là hình thoi.

c) Muốn cho tứ giác EFGH là hình vuông khi nó vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi !

Vậy nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và bằng nhau thì tứ giác EFGH sẽ là hình vuông.

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, M' là điểm đối xứng với M qua D.

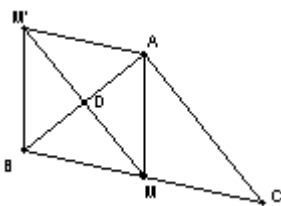
a) Chứng minh điểm M' đối xứng với M qua AB.

b) Các tứ giác AEMC, AEBM là hình gì ? Vì sao ?

c) Cho $BC = 4, (cm)$, tính chu vi tứ giác AM'BM.

d) Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện gì để tứ giác AEBM là hình vuông ?

Bài giải



a) Vì M' đối xứng M qua D nên $DM = DM'$, (1).

M, D lần lượt là trung điểm của BC, AB nên MD là đường trung bình của ΔABC . Suy ra $MD \parallel AC$, (2).

Mặt khác ΔABC vuông ở A nên $AB \perp AC$, (2).

Từ (2) và (2) suy ra $DM \perp AB \Rightarrow MM' \perp AB$, (4).

Từ (1) và (4) suy ra M' đối xứng với M qua AB.

b) Vì D là trung điểm của AB, (gt) và D là trung điểm của MM' nên tứ giác AMBM' là hình bình hành. Mặt khác M' đối xứng M qua AB nên $MM' \perp AB$ nên AMBM' là hình thoi.

c) vì $BC = 4cm$ nên $AM = AM' = M'B = BM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2, (cm)$.

Chu vi tứ giác AM'BM bằng $4.BM = 4.2 = 8, (cm)$.

d) Muốn hình thoi AM'BM trở thành hình vuông thì hai đường chéo của nó bằng nhau.

Tức là $AB = MM'$, mà $MM' = AC$ suy ra $AB = AC$ hay ΔABC là tam giác vuông cân đỉnh A.

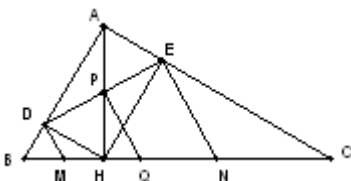
Ví dụ 3 : Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Gọi D, E là các hình chiếu của H trên AB, AC và M, N theo thứ tự là các trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH.

a) Chứng minh tứ giác MDEN là hình thang vuông.

b) Gọi P là giao điểm của đường thẳng DE với đường cao AH và Q là trung điểm của đoạn thẳng MN. Chứng minh $PQ \perp DE$.

c) Chứng minh hệ thức $2PQ = MD + NE$.

Bài giải



Vì D là hình chiếu của H xuống AB nên $HD \perp AB$.

Do tam giác ABC vuông ở A nên $AC \perp AB$.

Suy ra $AC \parallel HD$.

Tương tự ta có : $AB \parallel HE$. Hay ADHE là hình chữ nhật.

Suy ra $BAH = DEH$.

Do ΔABC vuông nên $ABC + ACB = 90^\circ$; tương tự ΔHAB vuông nên $ABC + BAH = 90^\circ$.

Suy ra: $DEH = ACB$.

Do là trung điểm HC mà ΔEHC vuông ở E nên $NE = NH$ hay ΔEHC cân đỉnh N

Suy ra: $EHN = HEN$. Tương tự: $HCE = NEC$, (1).

Do ΔEHC vuông ở E nên $NHE + HCE = 90^\circ$, (2).

Từ (1) và (2) ta có: $NE \perp DE$. Tương tự ta có: $MD \perp DE$ hay tứ giác MDEN là hình thang vuông.

b) Vì tứ giác ADHE là hình chữ nhật nên P là trung điểm của DE. Vì Q là trung điểm của MN nên PQ là đường trung bình của hình thang MDEN hay $PQ \parallel NE$.

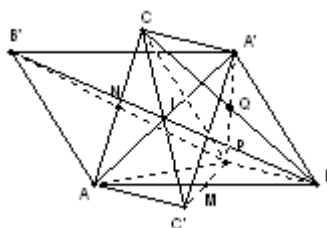
Vì $NE \perp DE$ và $PQ \parallel NE$ nên $PQ \perp DE$.

c) Theo tính chất đường trung bình ta có: $PQ = \frac{MD + NE}{2} \Leftrightarrow 2PQ = MD + NE$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC và một điểm P thuộc miền trong của tam giác. Gọi M, N, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của P qua các điểm Q, N, M.

a) Xét xem A, A' đối xứng với nhau qua điểm nào? Gọi điểm ấy là điểm I.

b) Chứng tỏ hai điểm C, C' đối xứng với nhau qua I.



Bài giải

a) Vì Q là trung điểm của BC và PA' nên BPCA' là hình bình hành suy ra $BA' \parallel PC$ và $BA' = PC$, (1).

Tương tự ta có: $PC \parallel AB'$ và $PC = AB'$, (2).

Từ (1) và (2) ta có $ABA'B'$ là hình bình hành.

Gọi I là giao điểm của AA' với BB' thế thì A, A' đối xứng với nhau qua I.

b) Tương tự ta có $ACA'C'$ là hình bình hành nên CC' nhận I là trung điểm, điều này chứng tỏ C, C' đối xứng với nhau qua I.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH, dựng hình chữ nhật AHBD và AHCE. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh:

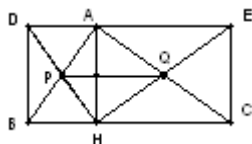
a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) PQ là trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Ba điểm D, P, H thẳng hàng.

d) $DH \perp EH$.

Bài giải



a) Do AHBD là hình chữ nhật nên $DAH = 90^\circ$, tương tự $HAE = 90^\circ$.

Mà $DAE = DAH + HAE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng.

b) Do P, Q lần lượt là tâm của hai hình chữ nhật AHBD, AHCE nên

PQ là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow PQ \parallel BC$ và PQ qua trung điểm

của AH, (1). Do AHBD là hình chữ nhật nên $AH \perp BC$, (2).

Từ (1) và (2) suy ra PQ là trung trực của AH.

c) Do AHBD là hình chữ nhật nên D, P, H thẳng hàng.

d) Do P là tâm của hình chữ nhật AHBD nên ΔPBH cân đỉnh P, suy ra $PBH = PHB$, (3).

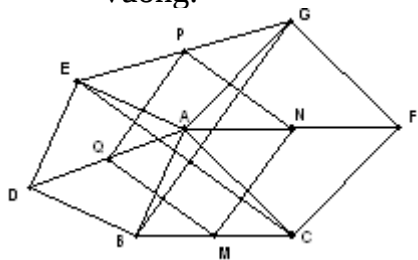
Tương tự ta có $QHC = QCH$, (4).

Vì ΔABC vuông ở A nên $PBH + QCH = 90^\circ$ nên $PHB + QHC = 90^\circ \Rightarrow DH \perp EH$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC phía ngoài tam giác, ta dựng các hình vuông ABDE và ACFG.

a) Chứng minh $BG = CE$ và $BG \perp CE$.

- b) Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của các đoạn thẳng BC, EG và Q, N theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABDE, ACFG. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình vuông.

**Bài giải**

a) Do ABDE là hình vuông nên AD là phân giác góc A và $AB = AE$; $\angle DAB = 45^\circ$, (1).

Tương tự ta có: $AC = AG$; $\angle CAF = 45^\circ$, (2).

Vì $\angle BAG = \angle BAC + \angle CAG = \angle BAC + 90^\circ = \angle BAC + \angle BAE = \angle EAC$, (3).

Từ (1), (2) và (3) ta được: $\triangle ABG = \triangle AEC$, (c,g,c).

Suy ra: $BG = CE$.

Do $\triangle ABG = \triangle AEC$ nên $\angle AGB = \angle ACE$. Mặt khác $AG \perp AC$ suy ra $BG \perp CE$.

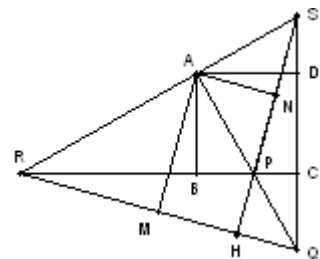
Ví dụ 7: Qua đỉnh A của hình vuông ABCD ta kẻ hai đường thẳng Ax, Ay vuông góc với nhau. Ax cắt cạnh BC tại điểm P và cắt tia đối của tia CD tại điểm Q.

Ay cắt tia đối của tia BC tại điểm R và cắt tia đối của tia DC tại điểm S.

a) Chứng minh các tam giác APS, AQR là các tam giác cân.

b) Gọi H là giao điểm của QR và PS; M, N theo thứ tự là trung điểm của QR, PS.

Chứng minh tứ giác AMHN là hình chữ nhật.

Bài giải

a) Xét hai tam giác $\triangle APB$ và $\triangle ADS$ ta có:

$AB = AD$, (do ABCD là hình vuông). $\angle BAP = \angle DAS$, (góc có cạnh tương ứng vuông góc) và $\angle B = \angle D = 90^\circ$ nên $\triangle APB = \triangle ADS$.

Suy ra: $AP = AS$ hay $\triangle APS$ cân đỉnh A.

Tương tự ta có $\triangle AQR$ cân đỉnh A.

b) Do $Ax \perp Ay$ nên $QA \perp SR$ hay QA là đường cao tam giác QRS.

Do ABCD là hình vuông nên $RC \perp SQ$ hay RC là đường cao tam giác QRS. Suy ra P là trực tâm tam giác QRS $\Rightarrow SP \perp RQ \Leftrightarrow \angle SHR = 90^\circ$.

Do $\triangle AQR$ cân đỉnh A và M là trung điểm của QR nên $AM \perp RQ$ hay $\angle AMQ = 90^\circ$.

Tương tự ta có: $\angle ANH = 90^\circ$: Tứ giác AMHN có ba góc vuông $\Rightarrow$ AMHN là hình chữ nhật.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD thỏa điều kiện gì thì tứ giác EFGH là:

a) Hình chữ nhật.

ĐS: $AC \perp BD$.

b) Hình thoi.

ĐS: $AC = BD$.

c) Hình vuông.

ĐS: $AC = BD$ và $AC \perp BD$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AC, K là điểm đối xứng của điểm M qua điểm I.

a) Tứ giác AMCK là hình gì?

b) Tứ giác AKMB là hình gì?

c) Có trường hợp nào của tam giác ABC để tứ giác AKMB là hình thoi.

ĐS: a) AMCK là hình chữ nhật b) AKMB là hình bình hành c) Không.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông ABDE, ACGH.

a) Chứng minh tứ giác BCHE là hình thang cân.

b) Vẽ đường cao AK của tam giác ABC. Chứng minh AK, DE, GH đồng qui.

ĐS: b) Đồng qui tại F với $F = DE \cap GH$.

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Cho biết diện tích tứ giác ABCD bằng 30cm^2 . Tính diện tích tứ giác MNPQ.

ĐS: a) $MNPQ$ là hình thoi b) $S_{MNPQ} = 15cm^2$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , trung tuyến AM . Gọi D là trung điểm của AB , E là điểm đối xứng của điểm M qua điểm D .

- Chứng minh điểm E đối xứng với điểm M qua đường thẳng AB .
- Các tứ giác $AEMC$, $AEBM$ là hình gì?
- Cho $BC = 4cm$. Tính chu vi tứ giác $AEBM$.
- Tam giác vuông thoả điều kiện gì thì $AEBM$ là hình vuông.

ĐS: b) $AEMC$ là hình bình hành, $AEBM$ là hình thoi c) $P_{AEBM} = 8cm$ d) $\triangle ABC$ vuông cân.

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD , BC . Các đường thẳng BM , DN cắt đường chéo AC tại P , Q .

- Chứng minh $AP = PQ = QC$.
- Tứ giác $MPNQ$ là hình gì?
- Xác định tỉ số $\frac{CA}{CD}$ để $MPNQ$ là hình chữ nhật.
- Xác định góc ACD để $MPNQ$ là hình thoi.
- Tam giác ACD thoả mãn điều kiện gì để $MPNQ$ là hình vuông.

ĐS: b) $MPNQ$ là hình bình hành c) $\frac{CA}{CD} = 3$ d) $ACD = 90^\circ$

e) $\triangle ACD$ vuông tại C và $CA = 3CD$.

Bài 7. Cho hình thoi $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ đường thẳng qua B song song với AC , đường thẳng qua C song song với BD , hai đường thẳng đó cắt nhau ở K .

- Tứ giác $OBKC$ là hình gì?
- Chứng minh $AB = OK$.
- Tìm điều kiện của hình thoi $ABCD$ để $OBKC$ là hình vuông.

ĐS: a) $OBKC$ là hình chữ nhật c) $ABCD$ là hình vuông.

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có $BC = 2AB$ và $A = 60^\circ$. Gọi E , F lần lượt là trung điểm của BC và AD .

- Tứ giác $ECDF$ là hình gì?
- Tứ giác $ABED$ là hình gì?
- Tính số đo của góc AED .

ĐS: a) $ECDF$ là hình thoi b) $ABED$ là hình thang cân c) $AED = 90^\circ$.

Bài 9. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E , F theo thứ tự là trung điểm của AB , CD . Gọi O là trung điểm của EF . Qua O vẽ đường thẳng song song với AB , cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N .

- Tứ giác $EMFN$ là hình gì?
- Hình thang $ABCD$ có thêm điều kiện gì để $EMFN$ là hình thoi.
- Hình thang $ABCD$ có thêm điều kiện gì để $EMFN$ là hình vuông.

ĐS: a) $EMFN$ là hình bình hành b) $ABCD$ là hình thang cân
c) $ABCD$ là hình thang cân và có hai đường chéo vuông góc.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = AC = a$.

- Lấy điểm D trên cạnh AC và điểm E trên cạnh AB sao cho $AD = AE$. Các đường thẳng vuông góc với EC vẽ từ A và D lần lượt cắt cạnh BC ở K và L . Chứng minh $BK = KL$.
- Một hình chữ nhật $APMN$ thay đổi có đỉnh P trên cạnh AB , đỉnh N trên cạnh AC và có chu vi luôn bằng $2a$. Điểm M di chuyển trên đường nào?
- Chứng minh khi hình chữ nhật $APMN$ thay đổi thì đường vuông góc vẽ từ M xuống đường chéo PN luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS: b) M di chuyển trên cạnh BC c) HM đi qua điểm I cố định (với $\triangle ACB$ là hình vuông).

Bài 11. Cho hình vuông $ABCD$. E là điểm trên cạnh DC , F là điểm trên tia đối của tia BC sao cho $BF = DE$.

- Chứng minh tam giác AEF vuông cân.
- Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh I thuộc BD .

c) Lấy điểm K đối xứng với A qua I. Chứng minh tứ giác AEKF là hình vuông.

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD có $AD = 2AB$, $A = 60^\circ$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

- Chứng minh $AE \perp BF$.
- Chứng minh tứ giác BFDC là hình thang cân.
- Lấy điểm M đối xứng của A qua B. Chứng minh tứ giác BMCD là hình chữ nhật.
- Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BAC = 60^\circ$. Kẻ tia Ax song song với BC. Trên Ax lấy điểm D sao cho $AD = DC$.

- Tính số đo các góc BAD , DAC .
- Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.
- Gọi E là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác ADEB là hình thoi.

Bài 14. Cho ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi K là giao điểm của AC và DM, L là trung điểm của BD và CM.

- Tứ giác MNPQ là hình gì?
- Tứ giác MDPB là hình gì?
- Chứng minh: $AK = KL = LC$.

Bài 15. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 2AD$. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB và CD.

- Các tứ giác AEFD, AECF là hình gì?
- Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình chữ nhật.
- Hình bình hành ABCD nói trên có thêm điều kiện gì để EMFN là hình vuông?

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi H là điểm đối xứng với M qua AB, E là giao điểm của MH và AB. Gọi K là điểm đối xứng với M qua AC, F là giao điểm của MK và AC.

- Xác định dạng của tứ giác AEMF, AMBH, AMCK.
- Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A.
- Tam giác vuông ABC có thêm điều kiện gì thì AEMF là hình vuông?

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

KIỂM TRA 1 TIẾT HÌNH HỌC CHƯƠNG I

Đề 01

A. Trắc nghiệm: (4 điểm) Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1. Cho tứ giác ABCD, có $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 120^\circ$, $\hat{D} = 50^\circ$, Số đo $\hat{C}$ là:

- A. 100° , B. 105° , C. 110° , D. 115°

Câu 2. Góc kề cạnh 1 bên hình thang có số đo 75° , góc kề còn lại của cạnh bên đó là:

A. 85^0 B. 95^0 C. 105^0 D. 115^0

Câu 3. Độ dài một cạnh hình vuông bằng 4cm. Thì độ dài đường chéo hình vuông đó sẽ là:

A. 16cm,

B. $4\sqrt{2}$

C. 8cm

D. 4cm

Câu 4. Độ dài đáy lớn của một hình thang là: 18 cm, đáy nhỏ 12 cm. Độ dài đường trung bình của hình thang đó là:

A. 15 cm,

B. 16 cm

C. 17 cm,

D. 14 cm

Câu 5. Độ dài hai đường chéo hình thoi là 16 cm và 12 cm. Độ dài cạnh của hình thoi đó là:

A 7cm,

B. 8cm,

C. 9cm,

D. 10 cm

Câu 6. Tứ giác nào sau đây vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi ?

A. Hình bình hành

B. Hình vuông

C. Hình thang

D. Hình tam giác

Câu 7. Hình chữ nhật có.....là hình vuông

A. Hai đường chéo bằng nhau.

B. Hai cạnh đối bằng nhau

C. Hai đường chéo vuông góc

D. Hai đường chéo cắt nhau.

Câu 8. Hình thoi có.....là hình vuông.

A. Hai cạnh kề bằng nhau.

B. Hai cạnh đối bằng nhau.

C. Hai đường chéo vuông góc.

D. Hai đường chéo bằng nhau.

B. Tư Luận: (6 điểm).

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, Gọi H là trung điểm AC, E là trung điểm của BC. F điểm đối xứng với E qua H. Chứng minh tứ giác AECF Là hình thoi.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AD đường trung tuyến ứng với cạnh BC

(D ∈ BC). Biết : AB = 6 cm, AC = 8 cm .

a) Tính AD ? .

b) Kẻ DM ⊥ AB, DN ⊥ AC. Chứng minh tứ giác AMDN là hình chữ nhật.

c) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì AMDN là hình vuông.

Đề 02

A. Trắc nghiệm: (4 điểm) Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1. Cho tứ giác ABCD, có $\hat{B} = 120^0$, $\hat{C} = 75^0$, $\hat{D} = 85^0$ Số đo $\hat{A}$ là:

A. 100^0 ,B. 80^0 ,C. 110^0 ,D. 115^0

Câu 2. Góc kề cạnh 1 bên hình thang có số đo 115^0 , góc kề còn lại của cạnh bên đó là:

A. 65^0 B. 95^0 C. 105^0 D. 115^0

Câu 3. Độ dài một cạnh hình vuông bằng 5m. Thì độ dài đường chéo hình vuông đó sẽ là:

A. 5cm,

B. 10

C. 25cm

D. $5\sqrt{2}$ cm

Câu 4. Độ dài đáy lớn của một hình thang là: 12 cm, đáy nhỏ 8 cm. Độ dài đường trung bình của hình thang đó là:

A. 12 cm,

B. 8 cm

C. 10 cm,

D. 14 cm

Câu 5. Độ dài hai đường chéo hình thoi là 8 cm và 6 cm. Độ dài cạnh của hình thoi đó là:

- A 10cm, B. 5cm, C. 8cm, D. 6 cm

Câu 6. Tứ giác nào sau đây vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi ?

- A. Hình bình hành B. Hình thang C. Hình vuông D. Hình tam giác

Câu 7. Hình chữ nhật có.....là hình vuông

- A. Hai đường chéo vuông góc B. Hai cạnh đối bằng nhau
C. Hai đường chéo bằng nhau D. Hai đường chéo cắt nhau.

Câu 8. Hình thoi có.....là hình vuông.

- A. Hai cạnh kề bằng nhau. B. Hai cạnh đối bằng nhau.
C. Có một góc vuông D. Hai đường chéo vuông góc **B. Tư**

Luận: (6 điểm).

Câu 9. Cho tam giác DEF vuông tại D, Gọi I là trung điểm DF, M là trung điểm của EF. N điểm đối xứng với M qua I. Chứng minh tứ giác DMFN Là hình thoi.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AD đường trung tuyến ứng với cạnh BC

(D ∈ BC). Biết : AB = 3 cm, AC = 5 cm .

- d) Tính AD ? .
e) Kẻ DM ⊥ AB, DN ⊥ AC. Chứng minh tứ giác AMDN là hình chữ nhật.
f) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì AMDN là hình vuông.

Đề 03

I. Trắc nghiệm : Khoanh tròn chữ cái trước phương án trả lời đúng (4đ).

1. Tứ giác ABCD có $\hat{A} = 130^\circ$; $\hat{B} = 80^\circ$; $\hat{C} = 110^\circ$ thì:

- A. $\hat{D} = 150^\circ$; B. $\hat{D} = 90^\circ$; C. $\hat{D} = 40^\circ$; D. $\hat{D} = 60^\circ$

2. Hình chữ nhật là tứ giác:

- A. Có hai cạnh vừa song song vừa bằng nhau. B. Có bốn góc vuông.
C. Có bốn cạnh bằng nhau. D. Có bốn cạnh bằng nhau và bốn góc vuông.

3. Nhóm hình nào đều có trục đối xứng:

- A. Hình bình hành, hình thang cân, hình chữ nhật.
B. Hình thang cân, hình thoi, hình vuông, hình bình hành.
C. Hình thang cân, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.
D. Hình thang cân, hình chữ nhật, hình bình hành, hình vuông.

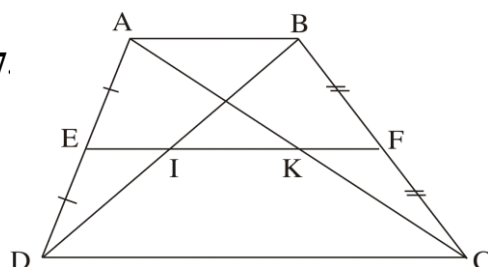
4. Cho hình vẽ. Biết AB song song DC và AB = 3 ; DC = 7.

4.1 Hỏi EF = ?

- A. 10 B. 4 C. 5 D. 20

4.2 Hỏi IK = ?

- A. 1,5 B. 2 C. 2,5 D. Cả A, B, C sai.



5. Cho hình thoi ABCD có 2 đường chéo AC = 6 cm và BD = 8cm. Độ dài cạnh của hình thoi đó là :

A. 2 cm B. 7 cm C. 5 cm D. 14 cm

6. Nhóm tứ giác nào có tổng số đo hai góc đối bằng 180° ?

- A. Hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông.
 B. Hình thang cân, hình thoi, hình vuông.
 C. Hình thang cân, hình chữ nhật, hình thoi.
 D. Hình bình hành, hình thang cân, hình chữ nhật.

7. Hai đường chéo của hình vuông có tính chất :

- A. Bằng nhau, vuông góc với nhau. B. Cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
 C. Là tia phân giác của các góc của hình vuông. D. Cả A, B, C

II. Tự luận (6đ):

Câu 1. (2 đ) Một hình vuông có cạnh bằng 4 cm.

- a. Tính chu vi và diện tích hình vuông đó.
 b. Tính độ dài đường chéo của hình vuông đó.

Câu 2. (4đ) Cho tam giác ABC. Gọi D, M, E theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA.

- a. Chứng minh tứ giác ADME là hình bình hành.
 b. Tam giác ABC có điều kiện gì thì tứ giác ADME là hình chữ nhật ?
 c. Khi M di chuyển trên cạnh BC thì trung điểm J của AM di chuyển trên đường nào ?

ĐỀ 04

A – TRẮC NGHIỆM (4 điểm):

Hãy khoanh tròn câu đúng trong các câu sau:

Câu 1: Hình nào vừa có tâm đối xứng vừa có trục đối xứng là hai đường chéo?

- A/ Hình thang cân B/ Hình thoi C/ Hình chữ nhật D/ Hình bình hành

Câu 2: Câu nào sau đây đúng?

- A/ Tứ giác có hai đường chéo vuông góc là hình thoi
 B/ Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình vuông
 C/ Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật
 D/ Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình thang cân

Câu 3: Một hình vuông có cạnh bằng 2 cm thì đường chéo của hình vuông là:

- A/ $\sqrt{8}$ cm B/ 8 cm C/ 4cm D/ $\sqrt{4}$ cm

Câu 4: Cho hình thang ABCD (AB//DC) có đáy nhỏ AB = 2 cm , đáy lớn CD = 4 cm .Đường trung bình bằng :

- A/ 2,5 cm B/ 1cm C/ 3cm D/ 3,5 cm

Câu 5: Cho $\square$ ABCD có: AB// DC; AB= DC và góc B = 90° thì:

- A/ $\square$ ABCD là hình bình hành B/ $\square$ ABCD là hình chữ nhật
 C/ $\square$ ABCD là hình vuông D/ $\square$ ABCD là hình thoi

Câu 6: Câu nào đúng?

- A/ Hình thang có một góc vuông là hình chữ nhật
 B/ Tứ giác có hai góc vuông là hình chữ nhật
 C/ Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
 D/ Cả A, B , C đều đúng .

Câu 7: Cho hình thang cân ABCD (AB//CD, AB < CB). Nếu có góc ở đáy lớn là góc C = 115° thì góc B ở đáy là:

- A. 65° B. 115° C. 245° D. 180°

Câu 8: Tổng các góc của một tứ giác bằng :

- A. 90° B. 180° C. 270° D. 360°

B – TỰ LUẬN (6 điểm)

Bài 1: (3 đ) Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác EFGH là hình thoi.
 b) Tứ giác EFGH là hình bình hành.

Bài 2: (3 đ) Cho hình thang ABCD (AB//CD), E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K. Cho AB = 6cm, CD = 10cm.

- a) Tính độ dài đường thẳng MN?
 b) Chứng minh rằng: AK = KC, BI = ID.

c) Tính độ dài đường thẳng EI, KF, IK?

ĐỀ 5

Câu 1:

- a) Phát biểu định lý về tổng các góc của một tứ giác.
b) Cho tứ giác ABCD vuông ở A, biết góc B bằng 40° , góc C bằng 70° . Tính số đo góc D.

Câu 2: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi E là điểm đối xứng của A qua M

- a) Chứng minh rằng tứ giác ABEC là hình bình hành.
b) Tìm điều kiện của ΔABC để tứ giác ABEC là hình chữ nhật? Hình thoi? Hình vuông?

Câu 3:

a) Biết: $AM = MP = PB$; $AN = NQ = QC$ và $PQ = 5\text{cm}$.

Tính độ dài x, y?

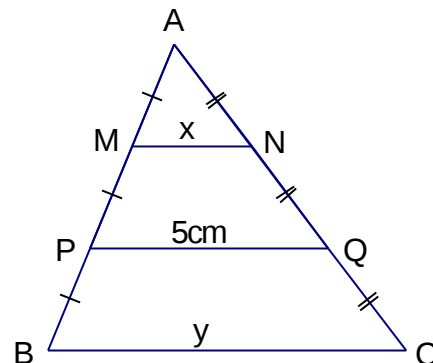
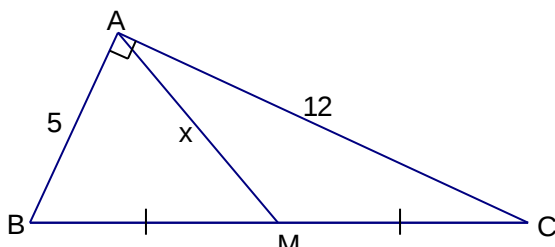
- b) Biết: $AB = 5$;
 $AC = 12$;
 $\hat{A} = 90^\circ$.

Tính $AM = ?$

Câu 4:

Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm của BC. Kẻ $MH \perp AC$; $MK \perp AB$.

- a) Chứng minh: AKMH là hình chữ nhật. Từ đó suy ra: $AM = HK$
b) Gọi P là điểm đối xứng của M qua H. Chứng minh: AMCP là hình thoi?



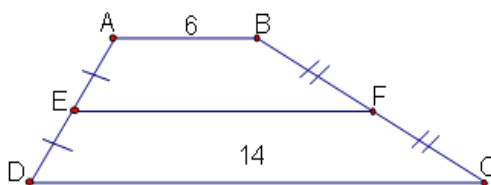
ĐỀ 6

Phần I. TRẮC NGHIỆM (3đ): Chọn phương án đúng trong các câu sau (Mỗi câu 0,5 điểm)

Câu 1: Tứ giác có bốn góc bằng nhau, thì số đo mỗi góc là:

- A. 90° B. 360°
C. 180° D. 60°

Câu 2: Cho hình 1. Độ dài của EF là:



- A. 22. B. 22,5. C. 11. D. 10.

Câu 3: Hình nào sau đây vừa có tâm đối xứng, vừa có trục đối xứng?

- A. Hình bình hành B. Hình thoi
C. Hình thang vuông D. Hình thang cân

Câu 4: Trong các tứ giác sau, tứ giác nào là hình có 4 trục đối xứng?

- A. Hình chữ nhật B. Hình thoi
C. Hình vuông D. Hình bình hành

Câu 5: Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng:

- A. Cạnh góc vuông B. Cạnh huyền
C. Đường cao ứng cạnh huyền D. Nửa cạnh huyền

Câu 6: Hình vuông có cạnh bằng 1dm thì đường chéo bằng:

- A. 1 dm B. 1,5 dm
C. $\sqrt{2}$ dm D. 2 dm

Phần II. TỰ LUẬN (7đ):

Câu 7: Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM, I là trung điểm AC, K là trung điểm AB, E là trung điểm AM. Gọi N là điểm đối xứng của M qua I

- a) Chứng minh tứ giác AKMI là hình thoi.
b) Tứ giác AMCN, MKIC là hình gì? Vì sao?
c) Chứng minh E là trung điểm BN
d) Tìm điều kiện của ΔABC để tứ giác AMCN là hình vuông.

ĐỀ 7

I/ Traéc nghieäm (2 ñ)

Caâu 1: Nhöõng töù giaùc ñaëc bieät naøo coù hai ñöôøng cheùo baèng nhau?

- a. Hình chõõ nhaät, hình thoi, hình vuông.
- b. Hình thang cân, hình bình hành, hình chõõ nhaät.
- c. Hình chõõ nhaät, hình thang cân, hình vuông.
- d. Hình thoi, hình chõõ nhaät, hình thang cân.

Caâu 2: Trong caùc phaùt bieäu sau, phaùt bieäu naøo sai?

- a. Hình bình hành coù moät tröïc ñoái xöùng.
- b. Hình vuông coù boán tröïc ñoái xöùng.
- c. Hình thang cân coù moät tröïc ñoái xöùng.
- d. Hình thoi coù hai tröïc ñoái xöùng.

Caâu 3: Töù giaùc coù boán goùc vuông laø hình:

- a. Hình thang vuông b. Hình vuông
- c. Hình chõõ nhaät d. Hình thoi

Caâu 4: Trong caùc phaùt bieäu sau, phaùt bieäu naøo sai:

- a. Hình bình hành coù hai ñöôøng cheùo vuông goùc vôùi nhau laø hình thoi.
- b. Töù giaùc coù hai ñöôøng cheùo vuông goùc vôùi nhau laø hình thoi.
- c. Hình chõõ nhaät coù hai caïnh keà baèng nhau laø hình vuông.
- d. Hình bình hành coù moät goùc vuông laø hình chõõ nhaät.

II/ Töï luaän: (8 ñ)

Baøi 1 (3 ñ) : Cho tam giaùc ABC. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieäm cuûa BC vaø AB. Tính MN bieát AC = 4 dm.

Baøi 2: (5 ñ) Cho tam giaùc ABC, D laø ñieäm naèm giöõa B vaø C. Qua D keù ñöôøng thaúng song song vôùi AB vaø AC, chuùng caét caùc caïnh AC vaø AB theo thòu töï ôû E vaø F .

a/ Töù giaùc AEDF laø hình gì? Vì sao?

b/ Ñieäm D ôû vò trí naøo treân caïnh BC thì töù giaùc AEDF laø hình thoi?

c/ Hai ñöôøng cheùo AD vaø EF caàn coù theâm tính chaát naøo thì hình thoi AEDF laø hình vuông?

CHƯƠNG II: ĐA GIÁC

Đa giác

☞ **Đa giác lồi** là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

☞ **Đa giác đều** là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

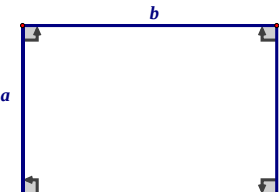
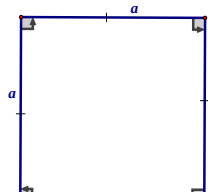
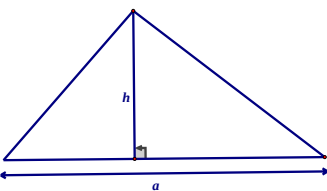
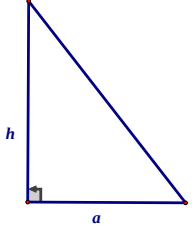
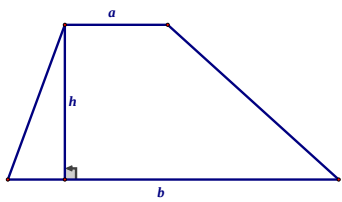
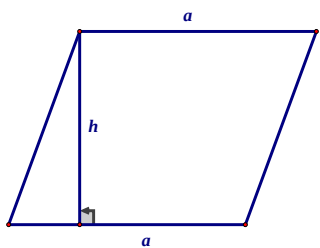
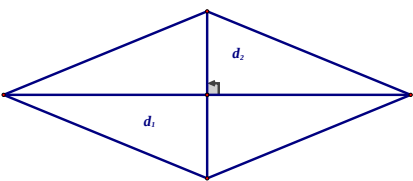
Một số kết quả

☞ Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng $(n-2).180^0$.

☞ Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n-2).180^0}{n}$.

✎ Số các đường chéo của đa giác n cạnh bằng $\frac{n(n-3)}{2}$.

Diện tích

 $S = a.b$	 $S = a^2$
 $S = \frac{1}{2}ah$	 $S = \frac{1}{2}ah$
 $S = \frac{(a+b).h}{2}$	 $S = ah$
 $S = \frac{1}{2}d_1.d_2$	

MỘT SỐ VÍ DỤ

1. Diện tích hình chữ nhật:

Ví dụ 1 : Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu :

- Chiều dài tăng hai lần, chiều rộng không đổi.
- Chiều dài và chiều rộng tăng ba lần.
- Chiều dài tăng bốn lần, chiều rộng giảm 4 lần.

Bài giải

Diện tích hình chữ nhật tính theo hai kích thước : $S = a.b$, a là chiều dài; b là chiều rộng.

☞ Như vậy diện tích S tỷ lệ thuận với chiều dài và tỷ lệ thuận với chiều rộng.

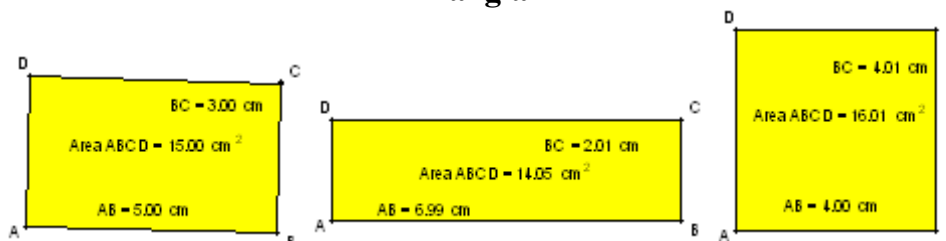
- Chiều dài tăng hai lần, chiều rộng không đổi thì diện tích $S' = (2a).b = 2.ab = 2S$: Diện tích tăng gấp đôi.
- Chiều dài và chiều rộng tăng ba lần thì diện tích $S' = (3a).(3b) = 9ab = 9S$: Diện tích tăng gấp 9 lần.

c) Chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 4 lần $S' = (4a) \cdot \left(\frac{b}{4}\right) = ab = S$: Diện tích không đổi.

Ví dụ 2 : Vẽ hình chữ nhật ABCD có $AB = 5, (cm)$, $BC = 3, (cm)$.

- Hãy vẽ một hình chữ nhật có diện tích bé hơn nhưng có chu vi lớn hơn hình chữ nhật ABCD. Vẽ được mấy hình như vậy ?
- Hãy vẽ hình vuông có chu vi bằng chu vi của hình chữ nhật ABCD. Có mấy hình vuông như vậy ? So sánh diện tích hình chữ nhật với diện tích hình vuông có cùng chu vi vừa vẽ.

Bài giải



a) Vẽ hình chữ nhật có $a = 5, (cm)$; $b = 3, (cm)$ thế thì :

$$S = ab = 5.3 = 15, (cm^2); \text{ chu vi } C = 2(5+3) = 16, (cm).$$

Ta vẽ hình chữ nhật có $a = 7, (cm)$; $b = 2, (cm)$ thế thì :

$$S = ab = 7.2 = 14, (cm^2); \text{ chu vi } C = 2(7+2) = 18, (cm).$$

Ta có thể dựng được vô số hình chữ nhật như vậy !

b) Hình vuông có chu vi bằng hình chữ nhật đã cho thì có cạnh bằng : $a = \frac{C}{4} = \frac{16}{4} = 4, (cm)$,

thế thì diện tích của nó là $S' = 4.4 = 16, (cm^2)$, rõ ràng lớn hơn diện tích hình chữ nhật.

Ghi nhớ: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

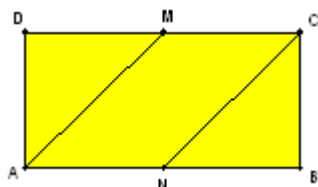
Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Ví dụ 3 : Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 20, (cm)$, $BC = 12, (cm)$. Gọi M là trung điểm của cạnh DC và N là trung điểm của cạnh AB.

a) Chứng minh $S_{ADCN} = S_{ABCM}$.

b) Tính S_{ADCN} .

Bài giải



a) Do M là trung điểm của CD nên $MC = MD$, (1).

Do N là trung điểm của AB nên $NA = NB$, (2).

Mà ABCD là hình chữ nhật nên $AB = CD$ và $AD = BC$.

Suy ra : $\triangle AMD = \triangle CNB \Rightarrow S_{AMD} = S_{CNB}$, (3).

Mặt khác ta có : $S_{ADCN} = S_{AMD} + S_{AMCN}$, $S_{ABCM} = S_{CNBD} + S_{AMCN}$ (4).

Diện tích tam từ (3) và (4) ta có : $S_{ADCN} = S_{ABCM}$.

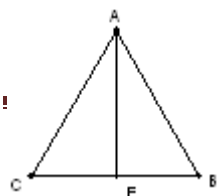
b) Diện tích ADCN : $S_{ADCN} = \frac{3}{4} \cdot S_{ABCD} = \frac{3}{4} \cdot 20.12 = 180, (cm^2)$.

2. Diện tích tam giác:

Ví dụ 1 : Tính diện tích tam giác đều cạnh a.

Bài giải

Giả sử $\triangle ABC$ đều cạnh a, đường cao ta có : $EB = EC$.

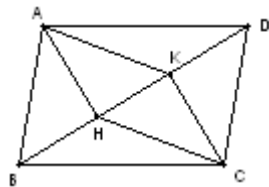


Trong tam giác vuông AEB có $AE^2 = AB^2 - EB^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{4}$.

Suy ra : $h = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 2 : Cho hình bình hành ABCD. Từ các đỉnh A, C kẻ AH, CK vuông góc với đường chéo BD. Chứng minh AHCK là hình bình hành.

Bài giải



Do AH và CK cùng vuông góc với BD nên $AH \parallel CK$, (1).

Vì $\triangle ABD = \triangle CBD$, (c.c.c) nên $S_{ABD} = S_{CBD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AH \cdot DB = \frac{1}{2}CK \cdot DB \Leftrightarrow$

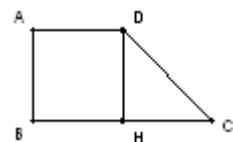
$AH = CK$, (2).

Từ (1) và (2) ta có AHCK là hình bình hành.

3. Diện tích hình thang:

Ví dụ : Tính diện tích hình thang vuông, biết hai đáy có độ dài là 2cm, 4cm, góc tạo bởi cạnh bên và đáy lớn bằng 45° .

Bài giải



Hình thang ABCD có $A = B = 90^\circ$ và $C = 45^\circ$, $AD = 2, (cm)$, $BC = 4, (cm)$.

Dựng $DH \perp BC$ ta có ABHD là hình chữ nhật nên $BH = AD = 2, (cm)$.

Suy ra : $HC = BC - BH = 4 - 2 = 2, (cm)$.

Xét $\triangle DHC$ có $C = 45^\circ$, $H = 90^\circ$ nên $HD = HC = 2, (cm)$.

Diện tích hình thang $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot DH = \frac{1}{2}(4 + 2) \cdot 2 = 6, (cm^2)$.

MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

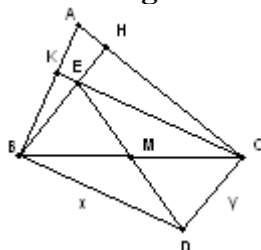
Bài 01: Cho tam giác ABC, đường cao BH, CK cắt nhau tại E, qua B kẻ $Bx \perp AB$, qua C kẻ $Cy \perp AC$. Hai đường thẳng Bx, Cy cắt nhau tại D.

a) Tứ giác BDCE là hình gì, tại sao?

b) Gọi M là trung điểm của BC, chứng minh rằng M cũng là trung điểm của ED. $\triangle ABC$ thỏa mãn điều kiện gì khi đường thẳng DE đi qua A?

c) So sánh A và D của tứ giác ABCD. ($B = C = 90^\circ \Rightarrow BAC + BDC = 180^\circ$: B, D bù nhau)

Hướng dẫn



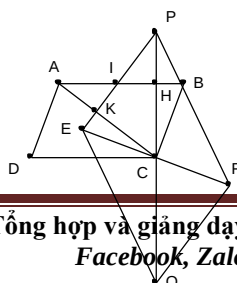
Bài 02: Cho hình bình hành ABCD, có $A > 90^\circ$; $AB > BC$. Trên đường vuông góc với BC tại C, lấy hai điểm E, F sao cho $CE = CF = CB$. Trên đường vuông góc với CD tại C, lấy hai điểm P, Q sao cho $CP = CQ = CD$. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác EPFQ là hình bình hành.

b) $\triangle ADC = \triangle ECP$.

c) $AC \perp EP$.

Hướng dẫn



a) ($CE = CF$)...

b) ($AD = EC$, $CD = CP$, $\angle D = \angle C$) ...

c) Gọi I là giao điểm của AB và EP;

Gọi H là giao điểm của AB và CP;

Gọi K là giao điểm của AC và EP;

Chứng minh $\Delta ATK = \Delta PIH \Rightarrow AKI = 90^\circ \dots$

Bài 03: Cho hình bình hành ABCD, phân giác góc A cắt phân giác góc B, D tại P, Q.

a) Chứng minh $PB \parallel DQ$ và $AP \perp BP$; $AQ \perp PQ$.

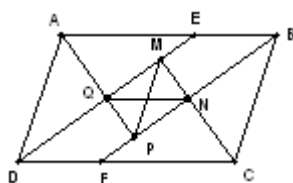
b) Phân giác góc C cắt BP, DQ tại M, N. Tứ giác MNPQ là hình gì. tại sao ?

c) Chứng minh $MP \parallel AD$; $NQ \parallel AB$.

d) Giả sử $AB > AD$. Chứng minh rằng $MP = NQ = AB - AD$.

e) Chứng minh AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Hướng dẫn



a) Gọi $A = C = 2\alpha$, $B = D = 2\beta$.

Gọi E là giao điểm DQ với AB, F là giao điểm BP với CD.

$\Rightarrow ADE = EDC = FBC = FBA = \beta \dots$

Vì ABCD là hình bình hành nên $A + B = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

Suy ra $APB = 90^\circ \dots$

b) MNPQ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh $MP \parallel AD$; $NQ \parallel AB$.

Vì EDFB là hình bình hành $\Rightarrow ED = BF$, $BE = DF$.

ΔADE , ΔCBF cân nên $QD = QE = NF = NB \Rightarrow Q, N$ lần lượt là trung điểm DE, BF.

$\dots$ Tứ giác EBNQ là hình bình hành $\Rightarrow NQ \parallel EB \parallel AB \dots$

d) Giả sử $AB > AD$. Vì EBNQ là hhh $\Rightarrow NQ = EB = AB - AE$, (1).

ΔADE cân nên $AE = AD$, (2), vì MNPQ là hình chữ nhật $\Rightarrow NQ = MP$, (3) $\Rightarrow$ kq.

e) Chứng minh AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Bài 04: Cho hình thang ABCD, ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD.

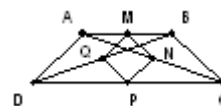
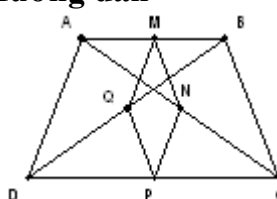
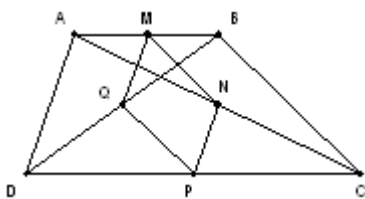
a) Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

b) Nếu ABCD là hình thang cân thì MNPQ là hình gì. tại sao ?

c) Với điều kiện gì cho ABCD để MNPQ là hình vuông ? vẽ hình minh họa.

d) Giả sử $AB > AD$. Chứng minh rằng $MP = NQ = AB - AD$.

Hướng dẫn



Bài 05 : Cho tam giác ABC vuông ở A, $AC > AB$, đường cao AH.

Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C, vẽ hình vuông AHKE.

a) Chứng minh K nằm giữa H và C.

b) Gọi P là giao điểm của AC và KE. Chứng minh ΔABP vuông cân.

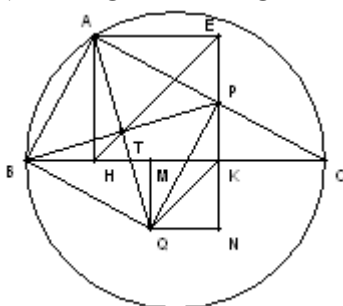
c) Gọi Q là đỉnh thứ 4 của hình bình hành APQB, T là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh H, T, E thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng HEKQ là hình thang.

Hướng dẫn

a) $AC > AB \Rightarrow B > C \Rightarrow B > 45^\circ$

$ABC = HAC > 45^\circ$ và $HAK = 45^\circ + KAC \Rightarrow AK$ nằm ở miền trong góc HAC nên K nằm giữa H và C.



b) $\Delta BHA = \Delta PEA$, (c,g,c) $\Rightarrow AB = AP$ mà $BAP = 90^\circ \Rightarrow \Delta PAB$ vuông cân.

c) $HA = HK$ nên H nằm trên trung trực của AK.

$EA = EK$ nên E nằm trên trung trực của AK.

Vì $TB = TP$, $BKP = 90^\circ \Rightarrow TK = TP = TB$

$\Rightarrow$ APQB là hình vuông, $TP = TA \Rightarrow TK = TA$ nên T nằm trên trung trực AK

$\Rightarrow$ H, T, E thẳng hàng.

d) Kẻ $QM \perp BC$, $QN \perp PK \Rightarrow \dots$

$\Delta BMQ = \Delta PNQ$, ($M = N = 90^\circ$, $QP = QB$, $QBM = QBN$) $\Rightarrow MQ = NQ \Rightarrow \dots AK \perp KQ$.

Mà $AK \perp HE \Rightarrow HE \parallel QK \Rightarrow HEKQ$ là hình thang.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1: Cho hình thoi ABCD có $A = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh đa giác EFBGDH là lục giác đều.

Bài 2: Cho tam giác ABC, O là trọng tâm của tam giác. Gọi E, F, G lần lượt là các điểm đối xứng với điểm O qua trung điểm của AB, BC, AC. Chứng minh lục giác AEBFCG là lục giác đều.

Bài 3: Cho ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và $A = B = C$.

a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Chứng minh ngũ giác ABCDEF là ngũ giác đều.

Bài 4: Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi K là giao điểm của hai đường chéo AC và BE.

a) Tính số đo mỗi góc của ngũ giác.

b) Chứng minh CKED là hình thoi.

Bài 5: Cho hình chữ nhật ABCD. E là điểm bất kì nằm trên đường chéo AC. Đường thẳng qua E, song song với AD cắt AB, DC lần lượt tại F, G. Đường thẳng qua E, song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại H, K. Chứng minh hai hình chữ nhật EFBK và EGDH có cùng diện tích.

Bài 6: Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Vẽ $BP \perp MN$, $CQ \perp MN$ ($P, Q \in MN$).

a) Chứng minh tứ giác BPQC là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $S_{BPQC} = S_{ABC}$.

Bài 7: Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh các tứ giác ADCM và ABCN có diện tích bằng nhau.

Bài 8. Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^\circ$), $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$ và $\angle ABC = 135^\circ$. Tính diện tích của hình thang đó.

ĐS: $S_{ABCD} = 20\text{cm}^2$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông ABDE, ACFG, BCHI. Chứng minh $S_{BCHI} = S_{ABDE} + S_{ACFG}$.

Bài 10. Diện tích hình bình hành bằng 24cm^2 . Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến các đường thẳng chứa các cạnh hình bình hành bằng 2cm và 3cm . Tính chu vi của hình bình hành.

ĐS: $P_{ABCD} = 20\text{cm}$.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, O, E, N là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đoạn thẳng AO, BE, CN và DK cắt nhau tại L, M, R, P. Chứng minh $S_{ABCD} = 5 \cdot S_{MLPR}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BA, BC. Lấy điểm M trên đoạn thẳng EF ($M \neq E$, $M \neq F$). Chứng minh $S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm M thuộc đáy BC. Gọi BD là đường cao của tam giác ABC; H và K chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Chứng minh: $MH + MK = BD$.

Bài 14. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K và L là hai điểm thuộc cạnh BC sao cho $BK = KL = LC$.

Tính tỉ số diện tích của:

a) Các tam giác DAC và DCK.

b) Tam giác DAC và tứ giác ADLB.

c) Các tứ giác ABKD và ABLD.

$$ĐS: a) \frac{S_{DAC}}{S_{DCK}} = \frac{3}{2} \quad b) \frac{S_{DAC}}{S_{ADLB}} = \frac{3}{5} \quad c) \frac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \frac{4}{5}.$$

Bài 15. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến AM, BN cắt nhau tại G. Diện tích tam giác AGB bằng $336cm^2$. Tính diện tích tam giác ABC.

$$ĐS: S_{ABC} = 1008cm^2.$$

Bài 16. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = 3DA$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 4EC$. Gọi F là giao điểm của AE và CD.

a) Chứng minh: $FD = FC$.

b) Chứng minh: $S_{ABC} = 2S_{AFB}$.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Gọi P, Q, R lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AC, AB. Chứng minh: $MP + MQ + MR = AH$.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB. Từ N kẻ đường thẳng song song với BM cắt đường thẳng BC tại D. Biết diện tích tam giác ABC bằng $a(cm^2)$.

a) Tính diện tích hình thang CMND theo a .

b) Cho $a = 128cm^2$ và $BC = 32cm$. Tính chiều cao của hình thang CMND.

$$ĐS: a) S_{CMND} = a(cm^2) \quad b) h = 4(cm).$$

Bài 19.* Cho tứ giác ABCD. Kéo dài AB một đoạn $BM = AB$, kéo dài BC một đoạn $CN = BC$, kéo dài CD một đoạn $DP = CD$ và kéo dài DA một đoạn $AQ = DA$. Chứng minh $S_{MNPQ} = 5.S_{ABCD}$

$$HD: Từ S_{PDQ} = 2S_{DAC}, S_{MNB} = 2S_{ABC}, S_{QAM} = 2S_{DAB}, S_{PNC} = 2S_{DBC} \Rightarrow đpcm.$$

Bài 20.* Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và ba đường cao ứng với ba cạnh lần lượt có độ dài h_a, h_b, h_c . Gọi r là khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác của tam giác

$$\text{đến một cạnh của tam giác. Chứng minh } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Bài 21.* Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác sao cho các đường thẳng AM, BN, CP đồng qui tại điểm O. Chứng minh

$$\text{Chứng minh: } \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

$$HD: Từ \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} = \frac{S_{AOP}}{S_{BOP}} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} = \frac{AP}{PB} \quad (1). \text{ Tương tự } \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{BM}{MC} \quad (2), \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{CN}{NA} \quad (3)$$

Nhân (1), (2), (3), vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 22. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, P, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, AD; O là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh:

$$a) S_{AOQ} + S_{BOP} = S_{MPQ}.$$

$$b) S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

HD: Vẽ AA', BB', MM' vuông góc với PQ.

Bài 23. Cho tứ giác ABCD. Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC. Đường thẳng đó cắt cạnh DC ở E. Chứng minh: $S_{ADE} = S_{ABCD}$.

$$HD: \text{Chú ý: } S_{BAC} = S_{EAC}.$$

Bài 24. Cho tứ giác ABCD có $AC = 10cm$, $BD = 12cm$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết $AOB = 30^\circ$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

$$ĐS: S_{ABCD} = 30cm^2.$$

Bài 25. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Tứ giác IJKL là hình gì?

b) Cho biết diện tích hình thang ABCD bằng $20cm^2$. Tính diện tích tứ giác IJKL.

$$ĐS: a) IJKL \text{ là hình thoi} \quad b) S_{IJKL} = 10cm^2.$$

Bài 26. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ phân giác AM của góc A ($M \in CD$), phân giác CN của góc C ($N \in AB$). Các phân giác AM, CN lần lượt cắt BD tại E và F. Chứng minh diện tích hai tứ giác AEFN và CFEM bằng nhau.

HD: AEFN và CFEM là hai hình thang có các cạnh đáy tương ứng bằng nhau và cùng chiều cao nên có diện tích bằng nhau.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 12 \text{ cm}$, $AD = 6,8 \text{ cm}$. Gọi H, I, E, K là các trung điểm tương ứng của BC, HC, DC, EC.

a) Tính diện tích tam giác DBE.

b) Tính diện tích tứ giác EHIK.

$$ĐS: a) S_{DBE} = 20,4cm^2 \quad b) S_{EHIK} = 8,55cm^2.$$

Bài 2. Cho hình vuông ABCD có tâm đối xứng O, cạnh a . Một góc vuông xOy có tia Ox cắt cạnh AB tại E, tia Oy cắt cạnh BC tại F. Tính diện tích tứ giác OEBF

$$ĐS: S_{OEBF} = S_{AOB} = \frac{a^2}{4}.$$

Bài 3. Tính diện tích một hình thang vuông, biết hai đáy có độ dài 6 cm và 9 cm, góc tạo bởi cạnh bên và đáy lớn có số đo bằng 45° .

$$ĐS: S_{ABCD} = 22,5cm^2.$$

Bài 4. Cho hình thang ABCD có độ dài hai đáy $AB = 5cm$, $CD = 15cm$, độ dài hai đường chéo $AC = 16cm$, $BD = 12cm$. Từ A vẽ đường thẳng song song với BD, cắt CD tại E.

a) Chứng minh tam giác ACE là tam giác vuông.

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

$$ĐS: b) S_{ABCD} = 96cm^2.$$

Bài 5. Gọi O là điểm nằm trong hình bình hành ABCD. Chứng minh: $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO}$

$$HD: S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Bài 6. Cho hình chữ nhật ABCD, O là điểm nằm trong hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = b$. Tính tổng diện tích các tam giác OAB và OCD theo a và b .

$$HD: S_{OAB} + S_{ODC} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} ab.$$

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Trên cạnh AC, lấy điểm N sao cho $AN = 2NC$. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh:

$$a) S_{BIC} = S_{AIC} \quad b) BI = 3IN.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. Chứng minh

$$S_{ABNM} = \frac{3}{4} S_{ABC}.$$

$$HD: \text{Từ } S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC}, S_{BMN} = \frac{1}{4} S_{ABC} \Rightarrow đpcm.$$

Bài 9. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và DC sao cho $AE = CF$; I là điểm trên cạnh AD; IB và IC lần lượt cắt EF tại M và N.

Chứng minh: $S_{IMN} = S_{MEB} + S_{NFC}$.

HD: Từ $S_{BEFC} = S_{IBC} = S_{DBC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow đpcm$.

Bài 10. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng ta luôn vẽ được một tam giác mà diện tích của nó bằng diện tích tứ giác ABCD.

HD: Qua B, vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC tại E. Suy ra được $S_{ADE} = S_{ABCD}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC. Hãy chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua D.

HD: Xét hai trường hợp:

– Nếu D là trung điểm của BC thì AD là đường thẳng cần tìm.

– Nếu D không là trung điểm của BC. Gọi I là trung điểm BC, vẽ $IH \parallel AD$ ($H \in AB$).

Từ $S_{ADH} = S_{ADI} \Rightarrow DH$ là đường thẳng cần tìm.

Bài 12. Cho tam giác ABC có $BC = a$, đường cao $AH = h$. Từ điểm I trên đường cao AH, vẽ đường thẳng song song với BC, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Vẽ MQ, NP vuông góc với BC. Đặt $AI = x$.

a) Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a, h, x .

b) Xác định vị trí điểm I trên AH để diện tích tứ giác MNPQ lớn nhất.

ĐS: a) $S_{MNPQ} = \frac{ax(h-x)}{h}$ b) $\max S = \frac{ah}{4}$ khi $x = \frac{h}{2} \Rightarrow I$ là trung điểm của AH.

Bài 13. Cho tam giác ABC và ba đường trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng sáu tam giác tạo thành trong tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Bài 14. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Một đường thẳng song song với hai đáy cắt AD ở E, MN ở I, BC ở F. Chứng minh $IE = IF$.

HD: Từ $S_{AMND} = S_{BMNC}, S_{EAM} = S_{FBM}, S_{EDN} = S_{FCN} \Rightarrow S_{EMN} = S_{FMN} \Rightarrow EK = FH$
 $\Rightarrow \triangle EKI = \triangle FHI \Rightarrow EI = FI$.

Bài 15. Cho tứ giác ABCD. Qua trung điểm K của đường chéo BD, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt AD tại E. Chứng minh CE chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

HD: Xét các trường hợp:

a) E thuộc đoạn AD b) AC qua trung điểm K của BD c) E nằm ngoài đoạn thẳng AD.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy các điểm M, N sao cho $AM = MN = NC$. Đường thẳng qua M, song song với AB, cắt đường thẳng qua N song song với BC tại O. Chứng minh OA, OB, OC chia tam giác ABC thành ba phần có diện tích bằng nhau.

Bài 17.* Cho ngũ giác ABCDE. Hãy vẽ một tam giác có diện tích bằng diện tích ngũ giác ABCDE.

HD: Vẽ $BH \parallel AC$ ($H \in DC$), $EI \parallel AD$ ($I \in DC$) $\Rightarrow S_{ABCDE} = S_{AIH}$.

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

ĐỀ 1

Câu 1:(1,5 đ) Cho tam giác ABC như hình vẽ:

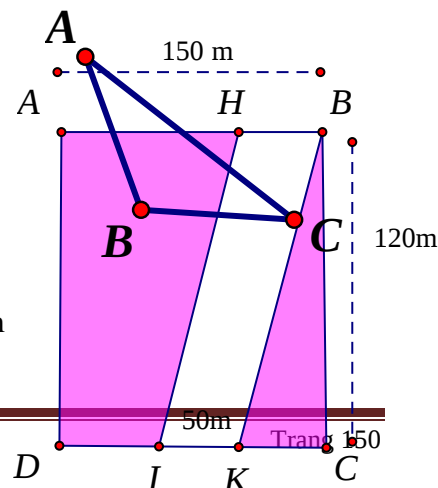
- Vẽ đường cao AH, viết công thức tính S_{ABC}
- Biết $AH = 5$ cm, cạnh tương ứng 8 cm. Tính diện tích tam giác

Câu 2: (2,5 đ) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH

- Viết công thức tính diện tích tam giác ABC
- Cho $AB = 6$ cm,

$BC = 10$ cm. Tính AC, S_{ABC} ; AH

Câu 3: (2 đ) Một mảnh đất hình chữ nhật người ta làm một lối đi hình bình hành (như hình vẽ). Tính phần đất còn lại



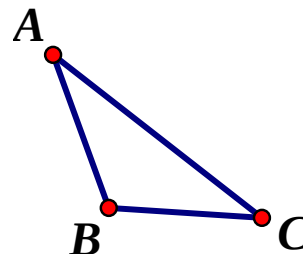
Câu 4: (4 đ) Cho tam giác vuông ABC vuông tại A và $AB = 6\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$. Gọi P là trung điểm của cạnh BC, điểm Q đối xứng với P qua AB.

- Tứ giác APBQ là hình gì? Tại sao?
- Tính diện tích tứ giác APBQ?
- Chứng minh $S_{ACPQ} = S_{ABC}$

ĐỀ II

Câu 1: (2 đ) Cho tam giác ABC như hình vẽ:

- Vẽ đường cao CH, viết công thức tính S_{ABC}
- Biết $CH = 7\text{ cm}$, cạnh tương ứng 10 cm. Tính diện tích tam giác

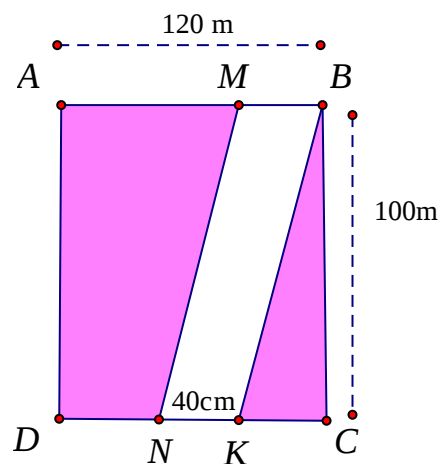


Câu 2: (2 đ) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH

- Viết công thức tính diện tích tam giác ABC
- Cho $AB = 9\text{cm}$,

$BC = 15\text{ cm}$. Tính AC, S_{ABC} ; AH

Câu 3: (2 đ) Một mảnh đất hình chữ nhật người ta làm một lối đi hình bình hành (như hình vẽ). Tính phần đất còn lại



Câu 4: (4 đ) Cho tam giác vuông ABC vuông tại A và $AB = 6\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$. Gọi P là trung điểm của cạnh BC, điểm Q đối xứng với P qua AB.

- Tứ giác APBQ là hình gì? Tại sao?
- Tính diện tích tứ giác APBQ?
- Chứng minh $S_{ACPQ} = S_{ABC}$

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2 đ) vẽ đúng đường cao 0,5 đ

Viết đúng công thức 0,5 đ

Tính đúng 0,5 đ

Câu 2 (2,5 đ) Viết đúng 2 công thức 1 đ

Tính đúng AC 0,5 đ

Tính đúng diện tích 0,5 đ

Tính đúng AH 0,5 đ

Câu 3: Tính được diện tích hình bình hành 1 điểm

Tính được diện tích hình chữ nhật 0,5 đ

Tính được diện tích còn lại 0,5 đ

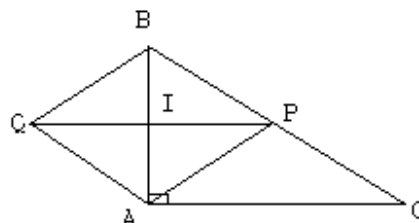
Câu 4: (4 điểm) vẽ hình đúng 0,5 đ

a) chứng minh đúng

1 đ

- Q đối xứng với P qua AB (gt) $\Rightarrow PQ \perp AB \Rightarrow IP \parallel AC$ và $IQ = IP$ (1)

- P là trung điểm của cạnh BC

 $\Rightarrow BP = PC = AP = \frac{1}{2} BC$ - Trong tam giác BAC ta có: $BP = PC$ và $IP \parallel AC \Rightarrow IB = IA$ (2)Từ (1) và (2) $\Rightarrow APBQ$ là hình bình hành- Kết hợp $AP = BP \Rightarrow APBQ$ là hình thoi

b) Tính diện tích hình thoi APBQ 1 đ

c) Chứng minh $S_{ACPQ} = S_{ABC}$ 1,5 đ

* Tính diện tích:

 $IP = \frac{5}{2} \text{ cm}$ (t/c đường TB) $IB = \frac{1}{2} AB = 3 \text{ cm}$. $S_{IPB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4} \text{ cm}^2$. $\Rightarrow S_{APBQ} = 4 \cdot S_{IPB} = 15 \text{ cm}^2$.

CHƯƠNG III: TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I. ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC – TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

1. Tỷ số của hai đoạn thẳng

- Tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.
- Tỷ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD đgl tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{hay} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

3. Định lý Ta-lét trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}; \frac{AB}{B'B} = \frac{AC}{C'C}$$

4. Định lý Ta-lét đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

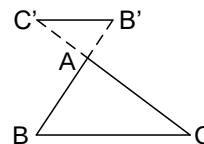
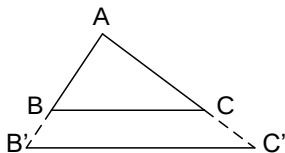
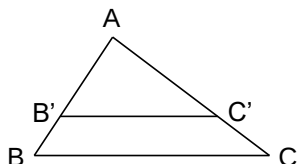
$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} \Rightarrow B'C' \parallel BC$$

5. Hệ quả

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng song song với một cạnh và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

**6. Tính chất đường phân giác trong tam giác**

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

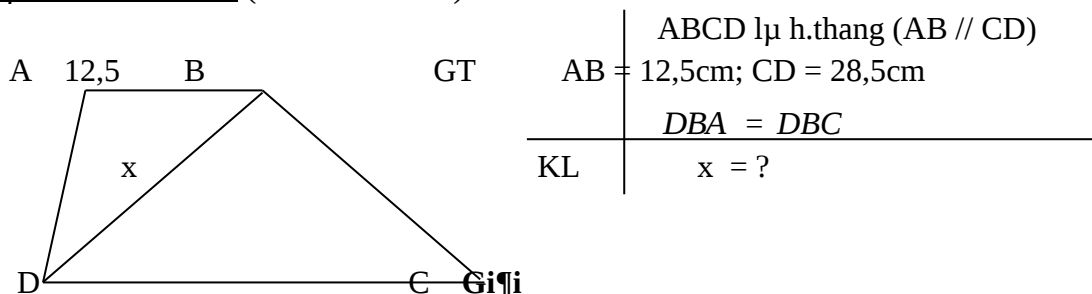
$$AD, AE \text{ là các phân giác trong và ngoài của góc } BAC \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}$$

7. Nhắc lại một số tính chất của tỉ lệ thức

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} ad = bc \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \end{cases}$$

VẤN ĐỀ I. TÍNH RÉ DỤI BẰNG, TỨ SẺ, DIỆN TÍCH**Lời 1:****TÍNH RÉ DỤI BẰNG****VÝ DỤ MINH HÃA:**

Bài 36 – 79 – SGK (cả hình vẽ và số)



$\triangle ABD$ và $\triangle BDC$ có: $\angle DAB = \angle DBC$ (gt)

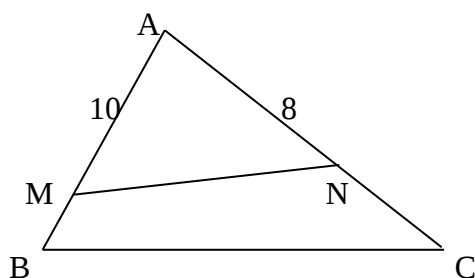
$\angle B_1 = \angle D_1$ (so le trong do AB // CD)

$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} \text{ hay } \frac{12,5}{x} = \frac{x}{28,5}$$

$$\Rightarrow x^2 = 12,5 \cdot 28,5 \Rightarrow x = \sqrt{12,5 \cdot 28,5} \approx 18,9(\text{cm})$$

Bùi 35 – 72 – SBT:



	ΔABC ; $AB = 12\text{cm}$; $AC = 15\text{cm}$
KL	GT $BC = 18\text{dm}$; $AM = 10\text{cm}$; $AN = 8\text{cm}$
	MN = ?

GiảiXét ΔABC và ΔANM ta có :

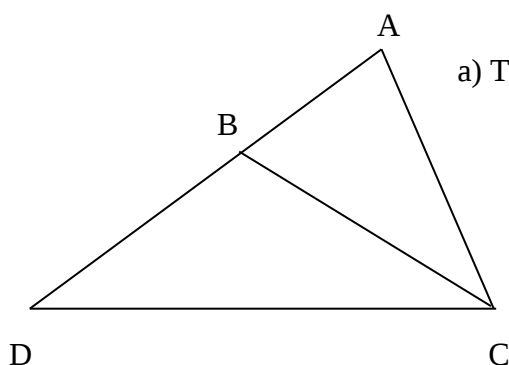
$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \\ \frac{AN}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$$

Mặt khác, cả A chungVậy $\Delta ABC \sim \Delta ANM$ (c.g.c)

Tỷ lệ ta có : $\frac{AB}{AN} = \frac{BC}{NM}$ hay $\frac{12}{8} = \frac{18}{NM} \Rightarrow \frac{8 \cdot 18}{12} = 12(\text{cm})$

Bài tập 3:a) Tam giác ABC có $B = 2C$; $AB = 4\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$.

Tính độ dài AC?

b) Tính độ dài cạnh của ΔABC có $B = 2C$ biết rằng số đo các cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp.Giảia) Trên tia BA lấy $BD = BC$ ΔACD và ΔABC có A chung; $C = D = \alpha$ $\Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta ABC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD = 4 \cdot 9 = 36$$

$$\Rightarrow AC = 6(\text{cm})$$

b) Giả sử số đo của các cạnh BC, AC, AB lần lượt là a, b, c.

Theo câu (a) ta có.

$$AC^2 = AB \cdot AD = AB(AB+BC) \Rightarrow b^2 = c(c+a) = c^2 + ac \quad (1)$$

Ta có $b > c$ (vì đối diện với góc lớn hơn) nên chẵn cả 2 cạnh lẻ:

$$b = c + 1 \text{ hoặc } b = c + 2$$

$$* \text{ Nếu } b = c + 1 \text{ thì từ (1)} \Rightarrow (c + 1)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 2c + 1 = ac$$

$$\Rightarrow c(a-2) = 1 \text{ (lẻ)} \Rightarrow c = 1; a = 3; b = 2 \text{ không là tam giác}$$

$$* \text{ Nếu } b = c + 2 \text{ thì từ (1)} \Rightarrow (c + 2)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 4c + 4 = ac$$

$$\Rightarrow c(a - 4) = 4$$

Xét $c = 1, 2, 4$ thì cả $c = 4; a = 5; 5 = 6$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $AB = 4\text{cm}; BC = 5\text{cm}; AC = 6\text{cm}$.

Bài tập Ôn tập:

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A, cạnh $AB = 24\text{cm}; AC = 18\text{cm}$; Đường trung tuyến của BC cắt BC, BA, CA lần lượt ở M, E, D. Tính độ dài các đoạn BC, BE, CD.

Bài 2: Hình thoi BEDF nội tiếp $\triangle ABC$ ($E \in AB; D \in AC; F \in AC$)

a) Tính độ dài hình thoi biết $AB = 4\text{cm}; BC = 6\text{cm}$. Tương tự với $BC = a, AC = c$.

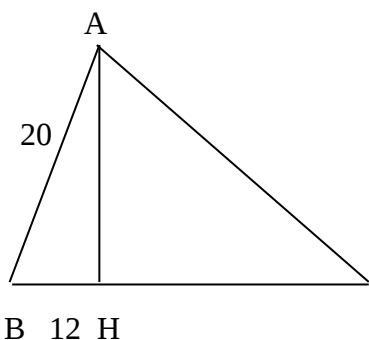
b) Chứng minh rằng $BD < \frac{2ac}{a+c}$ với $AB = c; BC = a$.

c) Tính độ dài AB, BC biết $AD = m; DC = n$. Tính hình thoi bằng d.

Lời 2: Tính gần

Vấn đề minh họa:

Bài 1: Cho $\triangle ABH$ vuông tại H cạnh $AB = 20\text{cm}; BH = 12\text{cm}$. Trên tia ray của HB lấy điểm C sao cho $AC = \frac{5}{3}AH$. Tính $\angle BAC$.



GT	$\triangle ABH; H = 90^\circ; AB = 20\text{cm}$ $BH = 12\text{cm}; AC = \frac{5}{3}AH$
KL	$\angle BAC = ?$

Giải:

$$\text{Ta có } \frac{AB}{BH} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} = \frac{AC}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH}$$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAH$ có:

$$\angle AHB = \angle CHA = 90^\circ$$

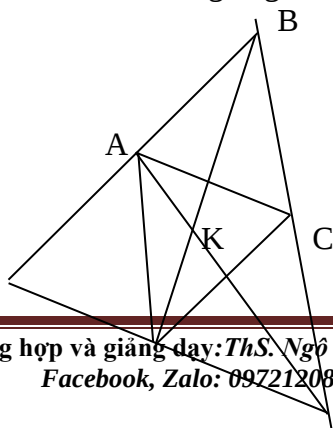
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle CAH \text{ (CH cạnh gvv)} \Rightarrow \angle CAH = \angle ABH$$

$$\text{Lại có } \angle BAH + \angle ABH = 90^\circ \text{ nên } \angle BAH + \angle CAH = 90^\circ$$

$$\text{Do vậy: } \angle BAC = 90^\circ$$

Bài 2: Cho hình thoi ABCD cạnh a, góc $A = 60^\circ$. Một đường thẳng bất kỳ đi qua C cắt tia ray của BA, DA lần lượt ở M, N. Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính $\angle BKD$?



GT	Hình thoi ABCD; $A = 60^\circ$; $BN \cap DM$ tại K
KL	Tính $\angle BKD = ?$

M

D

Giải:

N

Do $BC \parallel AN$ ($\forall N \in AD$) nên ta có: $\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{NC}$ (1)

Do $CD \parallel AM$ ($\forall M \in AB$) nên ta có: $\frac{MC}{NC} = \frac{AD}{DN}$ (2)

Tõ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{AD}{DN}$

$\triangle ABD$ có $AB = AD$ (tam giác cân) và $\angle A = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều
 $\Rightarrow AB = BD = DA$

Tõ $\frac{MB}{AB} = \frac{AD}{DN}$ (cm) $\Rightarrow \frac{MB}{BD} = \frac{BD}{DN}$

Mặt khác: $\angle MBD = \angle DBN = 120^\circ$

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle BDN$ có: $\frac{MB}{BD} = \frac{BD}{DN}$; $\angle MBD = \angle DBN$

$\Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle BDN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle M_1 = \angle B_1$

$\triangle MBD$ và $\triangle KBD$ có $\angle M_1 = \angle B_1$; BD chung $\Rightarrow \angle BKD = \angle MBD = 120^\circ$

Vậy $\angle BKD = 120^\circ$

Bài tập 3: Ôn tập:

$\triangle ABC$ có $AB:AC:CB = 2:3:5$ và chu vi bằng 54cm;

$\triangle DEF$ có $DE = 3\text{cm}$; $DF = 4,5\text{cm}$; $EF = 6\text{cm}$

a) Chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC$

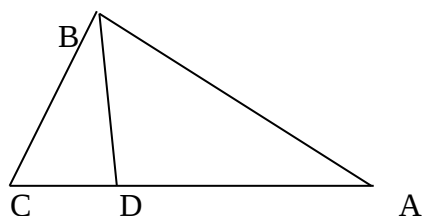
b) Biết $\angle A = 105^\circ$; $\angle D = 45^\circ$. Tính các góc còn lại của mỗi $\triangle$

Lời 3: Tính tỉ số các cạnh, tỉ số chu vi, tỉ số diện tích

Ví dụ minh họa:

+ Bài 1: Cho $\triangle ABC$, D là điểm trên cạnh AC sao cho $\angle BDC = \angle ABC$.

Biết $AD = 7\text{cm}$; $DC = 9\text{cm}$. Tính tỉ số $\frac{BD}{BA}$



GT	$\triangle ABC$; $D \in AC$; $\angle BDC = \angle ABC$; $AD = 7\text{cm}$; $DC = 9\text{cm}$
KL	Tính $\frac{BD}{BA}$.

Giải:

$\triangle CAB$ và $\triangle CDB$ có $\angle C$ chung; $\angle ABC = \angle BDC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle CDB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CB}$ do vậy ta có:

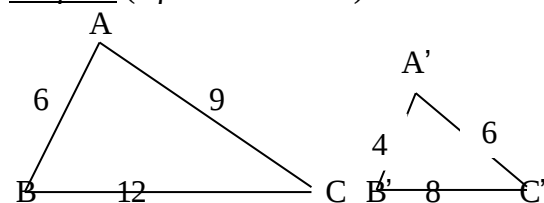
$$CB^2 = CA \cdot CD$$

Theo gt $CD = 9\text{cm}$; $DA = 7\text{cm}$ nên $CA = CD + DA = 9 + 7 = 16$ (cm)

Do vậy $CB^2 = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow CB = 12$ (cm)

Mặt khác ta có: $\frac{DB}{BA} = \frac{3}{4}$

+ Bài 2: (Bài 29 – 74SGK)



GT	$\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$: $AB=6$; $AC=9$; $A'C'=6$; $B'C'=8$
KL	a) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ b) Tính tỉ lệ chu vi của $\triangle A'B'C'$ và $\triangle ABC$

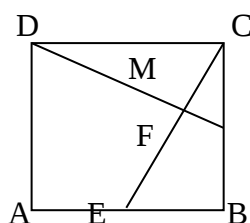
Giải:a) $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (c.c.c)

$$\forall x \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \triangle A'B'C' \sim \triangle A'B'C' & \text{ (c.c.c) } \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC} \\ &= \frac{4+6+8}{6+9+12} = \frac{18}{27} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{\text{Chu vi } \triangle A'B'C'}{\text{Chu vi } \triangle ABC} = \frac{18}{27}$$

+ Bài 3: Cho hình vuông ABCD, gọi E và F theo thứ tự trung điểm của AB, BC, CE cắt DF ở

M. Tính tỉ lệ $\frac{S_{CMB}}{S_{ABCD}}$?

GT	Hình vuông ABCD; $AE = EB$; $BF = CF$; $CE \cap DF$ tại M
KL	Tính $\frac{S_{CMB}}{S_{ABCD}}$?

Giải:Xét $\triangle DCF$ và $\triangle CBE$ cả $DC = BC$ (gt); $\angle C = \angle B = 90^\circ$; $BE = CF$

$$\Rightarrow \triangle DCF = \triangle CBE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow D_1 = C_2$$

Mà $C_1 + C_2 = 1v \Rightarrow C_1 + D_1 = 1v \Rightarrow \triangle CMD$ vuông ở M

$$\triangle CMD \sim \triangle FCD \text{ (vì } D_1 = C_2; \angle C = \angle M) \Rightarrow \frac{DC}{FD} = \frac{CM}{FC}$$

$$\frac{S_{CMD}}{S_{FCD}} = \frac{CD^2}{FD^2} \Rightarrow S_{CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot S_{FCD}$$

$$\text{Mà } S_{FCD} = \frac{1}{2} CF \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2$$

$$\text{Vậy } S_{CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{CD^4}{FD^2} (*)$$

,p dụng định lý pitago vào tam giác vuông DFC, ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2} BC\right)^2 = CD^2 + \frac{1}{4} CD^2 = \frac{5}{4} CD^2$$

Thay $DF^2 = \frac{5}{4} CD^2$ ta có :

$$S_{CMD} = \frac{1}{5} CD^2 = \frac{1}{5} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CMB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{5}$$

Bài tập về nhà:Cho $\triangle ABC$, D trung điểm của BC, M trung điểm của AD.

- a) BM cắt AC ở P, P' là điểm đối xứng của P qua M. Chứng minh rằng $PA = P'D$. Tỷ lệ sẽ $\frac{PA}{PC}$ và $\frac{AP}{AC}$
- b) Chứng minh AB cắt Q, chứng minh rằng $PQ \parallel BC$. Tỷ lệ sẽ $\frac{PQ}{BC}$ và $\frac{PM}{MB}$
- c) Chứng minh rằng diện tích 4 tam giác BAM, BMD, CAM, CMD bằng nhau. Tỷ lệ sẽ diện tích $\triangle MAP$ và $\triangle ABC$.

Lời 4: Tỷ lệ chu vi các hình

Bùi 1(bùi 33 – 72 – SBT)

	$\triangle ABC$; O nằm trong $\triangle ABC$;
GT	P, Q, R là trung điểm của OA, OB, OC
KL	a) $\triangle PQR \sim \triangle ABC$
	b) Tỷ lệ chu vi PQR. Biết chu vi $\triangle ABC = 543\text{cm}$

Giải:

a) PQ, QR và RP lần lượt là trung bình của $\triangle OAB$, $\triangle ACB$ và $\triangle OCA$. Do vậy ta có:

$$PQ = \frac{1}{2} AB; \quad QR = \frac{1}{2} BC; \quad RP = \frac{1}{2} CA$$

$$\text{Tỷ lệ ta có: } \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle PQR \sim \triangle ABC \text{ (c.c.c)} \text{ với tỷ lệ sẽ bằng } K = \frac{1}{2}$$

b) Gọi P là chu vi của $\triangle PQR$ ta có:

P' là chu vi của $\triangle PQR$ ta có:

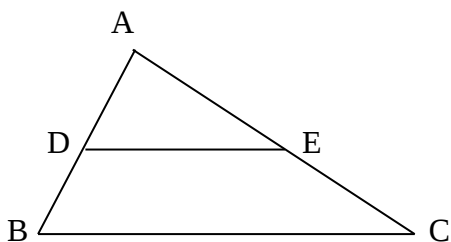
$$\frac{P'}{P} = K = \frac{1}{2} \Rightarrow P' = \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} \cdot 543 = 271,5(\text{cm})$$

Vậy chu vi của $\triangle PQR = 271,5(\text{cm})$.

+ Bùi 2: Cho $\triangle ABC$, D là một điểm trên cạnh AB, E là 1 điểm trên cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$.

Xét ảnh vệt tré của điểm D sao cho chu vi $\triangle ABE = \frac{2}{5}$ chu vi $\triangle ABC$.

Tỷ lệ chu vi của 2 tam giác này, biết tổng 2 chu vi = 63cm



	$\triangle ABC$; $DE \parallel BC$; C.vi $\triangle ADE = \frac{2}{5}$ C.vi $\triangle ABC$
GT	C.vi $\triangle ADE + \text{C.vi } \triangle ADE = 63\text{cm}$
KL	Tỷ lệ C.vi $\triangle ABC$ và C.vi $\triangle ADE$

Giải:

Do $DE \parallel BC$ nên $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ theo tỷ lệ sẽ bằng.

$$K = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}. \text{ Ta có.}$$

$$\frac{\text{Chu vi } \triangle ADE'}{\text{Chu vi } \triangle ABC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\text{Chu vi } \triangle ABC}{5} = \frac{\text{Chu vi } \triangle ADE}{2} = \frac{\text{Chu vi } \triangle ABC + \text{Chu vi } \triangle ADE}{\% + 2} = \frac{63}{7} = 9$$

Do vậy: Chu vi $\triangle ABC = 5 \cdot 9 = 45 (\text{cm})$

Chu vi $\triangle ADE = 2 \cdot 9 = 18 (\text{cm})$

Bùi tiếp ở ngoài:

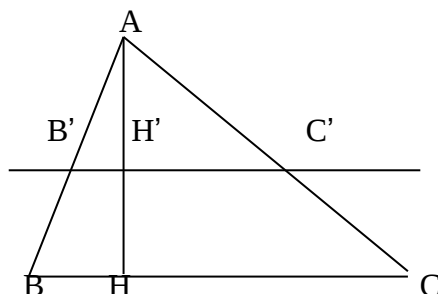
+ Bài 1: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số $k = \frac{2}{5}$.

Tính chu vi của mỗi tam giác, biết hiệu chu vi của 2 tam giác là 51dm.

+ Bài 2: Tính chu vi ΔABC vuông ở A biết rằng $\angle C$ bằng góc $\angle B$ và cạnh huyền chia tam giác thành 2 tam giác có chu vi bằng 18cm và 24cm.

Lời 5: Tính diện tích các hình

+ Bài 1 (Bài 10 – 63 – SGK):



GT	ΔABC ; $\angle C = 90^\circ$; AH $\perp$ BC, d $\parallel$ BC, d cắt AB, AC, AH
KL	theo tho từ tỉ B', C', H'
	a) $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$
	b) Biết $AH' = \frac{1}{3}AH$; $S_{\Delta ABC} = 67,5\text{cm}^2$
	Tính $S_{\Delta A'B'C'}$

Giải:

$$\text{a) } d \parallel BC \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{B'H'}{BH} = \frac{H'C'}{HC} = \frac{B'H' + H'C'}{BH + HC} = \frac{B'C'}{BC} \quad (\text{đpcm})$$

$$\text{b) } \text{Tỷ } \frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \left(\frac{AH'}{AH}\right)^2 = \frac{AH' \cdot B'C'}{AH \cdot BC} = \frac{2S_{\Delta A'B'C'}}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\text{Mà } AH' = \frac{1}{3}AH \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{AH'}{AH}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{9} \text{ và } \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 67,5\text{cm}^2$$

$$\text{Như ta có: } \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{67,5} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = \frac{67,5}{9} = 7,5(\text{cm}^2)$$

+ Bài 2 (bài 50 – 75 – SBT)

GT	$\Delta ABC (\angle A = 90^\circ)$; AH $\perp$ BC
KL	BM = CM; BH = 4cm; CH = 9cm
	Tính $S_{\Delta AMH}$

Giải:

Xét 2 Δ vuông HBA và Δ vuông HAC có:

$$\angle BAH + \angle HAC = 90^\circ \quad (1)$$

$$\angle HCA + \angle HAC = 90^\circ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \angle BAH = \angle HCA$$

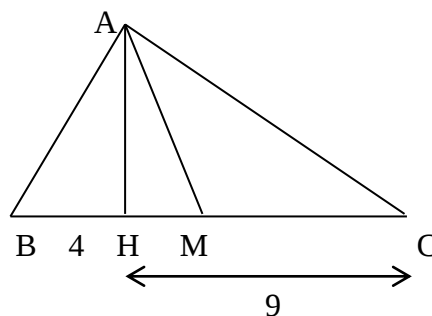
Vậy $\Delta HBA \sim \Delta HAC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} \Rightarrow HA^2 = HB \cdot HC = 4 \cdot 9 = 36$$

$$\Rightarrow HA = 6\text{cm}$$

$$\text{Lại có } BC = BH + HC = 4\text{cm} + 9\text{cm} = 13\text{cm}$$

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 13}{2} = 19,5(\text{cm}^2)$$



$$S_{\Delta AHM} = S_{\Delta BAH} = 19,5 - \frac{1}{2} \cdot 4,6 = 7,5(\text{cm}^2)$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta AMH} = 7,5(\text{cm}^2)$$

+ **Bài 3:** Cho ΔABC và hình bình hành AEDF cả $E \in AB$; $D \in BC$, $F \in AC$.

Tính diện tích hình bình hành biết rằng: $S_{EBD} = 3\text{cm}^2$; $S_{FDC} = 12\text{cm}^2$;

	ΔABC và hình bình hành AEDF
GT	$S_{EBD} = 3\text{cm}^2$; $S_{FDC} = 12\text{cm}^2$
KL	Tính S_{AEDF}

Giải:

Xét ΔEBD và ΔFDC cả $B = D_1$ (đối đỉnh do $DF \parallel AB$) (1)

$E_1 = D_2$ (so le trong do $AB \parallel DF$)

$D_2 = E_1$ (so le trong do $DE \parallel AC$)

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} \Rightarrow E_1 = F_1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta EBD \sim \Delta FDC$ (g.g)

$$\text{Mà } S_{EBD} : S_{FDC} = 3 : 12 = 1 : 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{Do } \textcircled{a} : \frac{EB}{FD} = \frac{ED}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow FD = 2EB \text{ và } ED = \frac{1}{2}FC$$

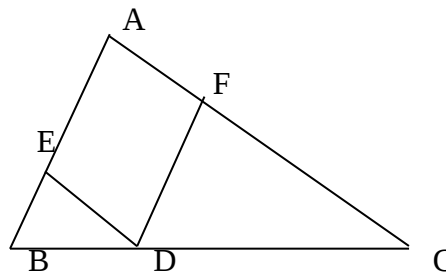
$$\Rightarrow AE = DF = 2BE \quad (\text{vì } AE = DF)$$

$$AF = ED = \frac{1}{2}EC \quad (\text{vì } AF = ED)$$

$$\text{Vậy } S_{ADE} = 2S_{BED} = 2 \cdot 3 = 6(\text{cm}^2)$$

$$S_{ADF} = \frac{1}{2}S_{FDC} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6(\text{cm}^2)$$

$$\Rightarrow S_{AEDF} = S_{ADE} + S_{ADF} = 6 + 6 = 12(\text{cm}^2)$$



Bài tập ở nhà:

+ **Bài 1:** Cho hình vuông ABCD cả $BE = 2\text{cm}$. Gọi E, F theo thứ tự trung điểm của AD, DC. Gọi I, H theo thứ tự giao điểm của AF với BE, BD.

Tính diện tích tứ giác EIHD

+ **Bài 2:** Cho tứ giác ABCD cả diện tích 36cm^2 , trong đó diện tích ΔABC là 11cm^2 . Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD ở M, cắt CD ở N. Tính diện tích ΔMND .

+ **Bài 3:** Cho ΔABC cả C B và C nhọn, $BC = a$, đường cao $AH = h$. Xét hình chữ nhật MNPQ nội tiếp tam giác cả $M \in AB$; $N \in AC$; $PQ \in BC$.

a) Tính diện tích hình chữ nhật lớn nhất của hình vuông.

b) Tính chu vi hình chữ nhật $a = h$

c) Hình chữ nhật MNPQ cả P trên trục đối xứng của tam giác, tính diện tích.

Bài 27. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Qua G vẽ đường thẳng song song với cạnh AC, cắt các cạnh AB, BC lần lượt ở D và E. Tính độ dài đoạn thẳng DE, biết $AD + EC = 16\text{cm}$ và chu vi tam giác ABC bằng 75cm .

HD: Vẽ $DN \parallel BC \Rightarrow DNCE$ là hình bình hành $\Rightarrow DE = NC$. $DE = 18\text{cm}$.

Bài 28. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Đường thẳng song song hai đáy cắt cạnh AD tại M, cắt cạnh BC tại N sao cho $MD = 3MA$.

a) Tính tỉ số $\frac{NB}{NC}$.

b) Cho $AB = 8\text{cm}$, $CD = 20\text{cm}$. Tính MN.

HD: a) Vẽ $AQ \parallel BC$, cắt MN tại P $\Rightarrow ABNP$, $PNCQ$ là các hình bình hành $\Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{1}{3}$.

b) Vẽ $PE \parallel AD \Rightarrow MPED$ là hình bình hành $\Rightarrow MN = 11\text{cm}$.

Bài 29. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$.

Qua B' vẽ đường thẳng a song song với BC, cắt cạnh AC tại C''.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng AC' và AC''.

b) Chứng minh B'C' // BC.

HD: a) $AC' = AC''$ b) $C' \text{ trùng với } C'' \Rightarrow B'C' // BC$.

Bài 30. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Đường thẳng a song song với BC cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH lần lượt tại B', C', H'.

a) Chứng minh $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$.

b) Cho $AH' = \frac{1}{3}AH$ và diện tích tam giác ABC là $67,5\text{cm}^2$. Tính diện tích tam giác AB'C'.

HD: b) $S_{AB'C'} = \frac{1}{9}S_{ABC} = 7,5\text{cm}^2$.

Bài 31. Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm chia cạnh AB thành hai đoạn thẳng có độ dài AD = 13,5cm, DB = 4,5cm. Tính tỉ số các khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC.

HD: Vẽ $BM \perp AC$, $DN \perp AC \Rightarrow \frac{DN}{BM} = 0,75$.

Bài 32. Cho tam giác ABC có BC = 15cm. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho AK = KI = IH. Qua I và K vẽ các đường thẳng EF // BC, MN // BC (E, M ∈ AB; F, N ∈ AC).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN và EF.

b) Tính diện tích tứ giác MNFE, biết rằng diện tích của tam giác ABC là 270cm^2 .

HD: a) $EF = 10\text{cm}$, $MN = 5\text{cm}$ b) $S_{MNFE} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 90\text{cm}^2$.

Bài 33. Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Qua điểm I thuộc đoạn OB, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt các cạnh AB, BC và các tia DA, DC theo thứ tự tại các điểm M, N, P, Q.

a) Chứng minh: $\frac{IM}{OA} = \frac{IB}{OB}$ và $\frac{IM}{IP} = \frac{IB}{ID} \cdot \frac{OD}{OB}$.

b) Chứng minh: $\frac{IM}{IP} = \frac{IN}{IQ}$.

HD: Sử dụng định lý Ta-lét.

Bài 34. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của cạnh AB, F là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng hai đoạn thẳng DE và BF chia đường chéo AC thành ba đoạn bằng nhau.

HD: Gọi M, N lần lượt là giao điểm của DE và BF với AC. Chứng minh: $AM = MN = NC$.

Bài 35. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Vẽ đường thẳng song song với cạnh AB, cắt cạnh AD ở

M, cắt cạnh BC ở N. Biết rằng $\frac{DM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{m}{n}$. Chứng minh rằng: $MN = \frac{mAB + nCD}{m+n}$.

HD: Gọi E là giao điểm của MN với AC. Tính được $EN = \frac{m}{m+n}AB$, $ME = \frac{n}{m+n}CD$.

Bài 36. Cho tứ giác ABCD có các góc B và D là góc vuông. Từ một điểm M trên đường chéo AC,

vẽ $MN \perp BC$, $MP \perp AD$. Chứng minh: $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$.

HD: Tính riêng từng tỉ số $\frac{MN}{AB}$; $\frac{MP}{CD}$, rồi cộng lại.

Bài 37. Cho hình bình hành ABCD. Một cát tuyến qua D, cắt đường chéo AC ở I và cắt cạnh BC ở N, cắt đường thẳng AB ở M.

a) Chứng minh rằng tích AM.CN không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến qua D.

b) Chứng minh hệ thức: $ID^2 = IM.IN$.

Bài 38. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B', C'.

Chứng minh: $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB}{AB'} \cdot \frac{AC}{AC'}$.

HD: Vẽ các đường cao CH và $CH' \Rightarrow \frac{AC}{AC'} = \frac{CH}{CH'}$.

Bài 39. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB , BC , CA lấy lần lượt các điểm D , E , F sao cho $AD = \frac{1}{4}AB$, $BE = \frac{1}{4}BC$, $CF = \frac{1}{4}CA$. Tính diện tích tam giác DEF , biết rằng diện tích tam giác ABC bằng $a^2(\text{cm}^2)$.

HD: $S_{BED} = S_{CEF} = S_{ADF} = \frac{3}{16}S_{ABC} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{7}{16}a^2(\text{cm}^2)$.

Bài 40. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{BK} = \frac{1}{2}$. Trên cạnh BC lấy điểm L sao cho $\frac{CL}{BL} = \frac{2}{1}$. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AL và CK . Tính diện tích tam giác ABC , biết diện tích tam giác BQC bằng $a^2(\text{cm}^2)$.

HD: Vẽ $LM \parallel CK$. $\frac{S_{BLQ}}{S_{BLA}} = \frac{S_{CLQ}}{S_{CLA}} = \frac{4}{7} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{7}{4}S_{BQC} = \frac{7}{4}a^2(\text{cm}^2)$.

Bài 41. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB , BC , CA lấy lần lượt các điểm D , E , F sao cho:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA} = \frac{1}{3}$$

Tính diện tích tam giác tạo thành bởi các đường thẳng AE , BF , CD , biết diện tích tam giác ABC là S .

HD: Gọi M , P , T lần lượt là giao điểm của AE và CD , AE và BF , BF và CD .

Qua D vẽ $DD' \parallel AE$. Tính được $\frac{DD'}{ME} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{6}{7} \Rightarrow S_{CMA} = \frac{6}{7}S_{CAD} = \frac{2}{7}S_{ABC} = \frac{2}{7}S$.

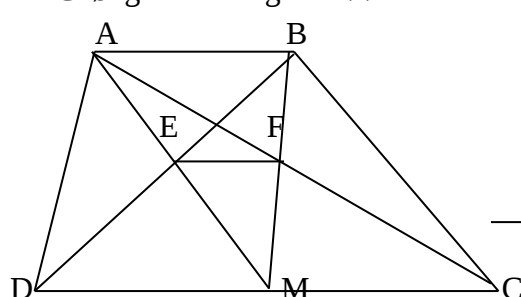
$$S_{MPT} = S_{ABC} - (S_{CMA} + S_{APB} + S_{BTC}) = \frac{1}{7}S.$$

VẤN ĐỀ II. Chứng minh hai đường thẳng song song

Ví dụ 1:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của CD , E là giao điểm của MA và BD ; F là giao điểm của MB và AC .

Chứng minh rằng $EF \parallel AB$



gt	$ABCD$ ($AB \parallel CD$)
	$DM = MC$
	$MA \cap DB = \{E\}$
	$MB \cap AC = \{F\}$
KL	$EF \parallel AB$

Phương pháp giải:

- Sử dụng tính chất của trung điểm của tam giác
- Phương pháp sử dụng hai tam giác đồng dạng
- Dùng hiệu quả nhận biết hai đường thẳng song song (Phương pháp Talet)

S-phân tích:

$$AB \parallel CD \text{ (gt)}$$



$$AB \parallel DM$$



$$\triangle MED \sim \triangle AEB$$



$$\frac{ME}{EA} = \frac{MD}{AB};$$

$$MD = MC$$



$$\frac{ME}{EA} = \frac{MF}{FB}$$



$$EF \parallel AB \text{ (§định lý Ta-lét §10)}$$

$$AB \parallel CD \text{ (gt)}$$



$$AB \parallel MC$$



$$\triangle MFC \sim \triangle BFA$$



$$\frac{MF}{FB} = \frac{MC}{AB}$$

Ví dụ 2:

Cho $\triangle ABC$ cân tại C , kẻ BE, CF là hai đường cao. Kẻ EM, FN là hai đường cao của $\triangle AEF$.

Chứng minh $MN \parallel BC$

S-phân tích:

$$\triangle AMF \sim \triangle AFC \text{ (g.g)}; \triangle AFN \sim \triangle ABE$$



$$\frac{AM}{AF} = \frac{AE}{AC}$$



$$\frac{AF}{AB} = \frac{AN}{AE}$$



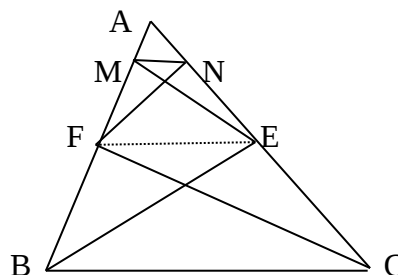
$$\frac{AM}{AF} \cdot \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AE}{AC}$$



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



$$MN \parallel BC \text{ (§định lý Ta-lét §10)}$$

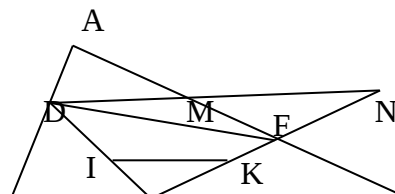


Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$, các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo tỉ lệ 1 : 2, các điểm I, K theo thứ tự chia trong các đoạn thẳng ED, FE theo tỉ lệ 1 : 2. Chứng minh $IK \parallel BC$.

Gọi M là trung điểm của AF

Gọi N là giao điểm của DM và EF

Xét $\triangle ADM$ và $\triangle ABC$ thì :



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \quad \text{Gắc A chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)}$$

$$B \quad E \quad C$$

$$\Rightarrow ADM = ABC \text{ mụ 2 gác nự ẽ vP trÝ Ờ ảg vP n^n DM // BC}$$

$$\Rightarrow MN // EC \text{ mụ MF = FC n^n EF = FN}$$

$$\text{Ta cũ : } \frac{EK}{EN} = \frac{EK}{EF} \cdot \frac{EF}{EN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{mụ } \frac{EI}{ED} = \frac{1}{3} \text{ (gt) } (2)$$

$$\text{Tổ 91) vụ (2) } \Rightarrow \frac{EK}{EN} = \frac{EI}{ED} \quad \text{Suy ra IK // DN (Định lý Ta - lét Ờ 10)}$$

$$\text{Vẽ IK // BC.}$$

Bài tập Ờ ờ ờ:

Cho tứ gi,c ABCD, Ờ-êng th¼ng Ời qua A song song với BC c¾t BD. Ờ-êng th¼ng Ời qua B vù song song với AD c¾t AC ẽ G. Chøng minh r»ng EG // DC

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H

$$\text{sao cho } \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}.$$

a) Chứng minh tứ giác EFGH là hình bình hành.

b) Chứng minh hình bình hành EFGH có chu vi không đổi.

$$\text{HD: b) Gọi I, J là giao điểm của AC với HE và GF } \Rightarrow P_{EFGH} = 2(AI + IJ + JC) = 2AC.$$

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh IK // AB.

b) Đường thẳng IK cắt AD, BC lần lượt ở E và F. Chứng minh EI = IK = KF.

$$\text{HD: a) Chứng minh } \frac{MI}{IA} = \frac{MK}{KB} \Rightarrow IK \parallel AB.$$

Bài 3. Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D, vẽ đường thẳng song song với cạnh BC, cắt AC tại M và AB tại K. Từ C, vẽ đường thẳng song song với cạnh bên AD, cắt cạnh đáy AB tại F. Qua F, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt cạnh bên BC tại P. Chứng minh rằng:

a) MP song song với AB.

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng qui.

$$\text{HD: b) Gọi I là giao điểm của DB với CF. Chứng minh P, I, M thẳng hàng.}$$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Đường thẳng song song với BC qua O, cắt AB ở E và đường thẳng song song với CD qua O, cắt AD ở F.

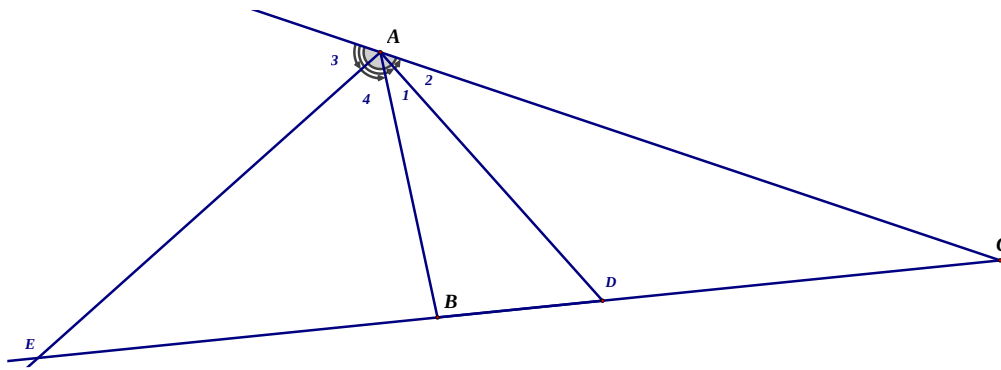
a) Chứng minh đường thẳng EF song song với đường chéo BD.

b) Từ O vẽ các đường thẳng song song với AB và AD, cắt BC và DC lần lượt tại G và H. Chứng minh hệ thức: CG.DH = BG.CH.

$$\text{HD: a) Chứng minh } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} \quad \text{b) Dùng kết quả câu a) cho đoạn GH.}$$

VẤN ĐỀ III. Tính chất đường phân giác của tam giác

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với 2 cạnh kề hai đoạn ấy.



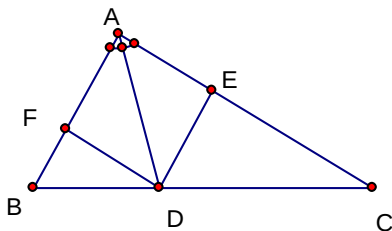
$$\triangle ABC: \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\triangle ABC: \widehat{A_3} = \widehat{A_4} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Bài 1: Cho tam giác ABC, có AB = 30cm, AC = 50cm, đường phân giác BD.

- Tính độ dài DB, DC.
- Qua D vẽ DE//AB, DF//AC (E ∈ AC, F ∈ AB). Tính độ dài cạnh của tứ giác AEDF.

Giải



- HS lên bảng trình bày lời giải, dưới lớp HS cả lớp làm bài ra vở:

$$a) \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}, \frac{DB}{2} = \frac{DC}{3} = \frac{DB + DC}{3 + 2} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\Rightarrow DB = 20\text{cm}, DC = 30\text{cm}$$

b) Tứ giác AEDF là hình thoi

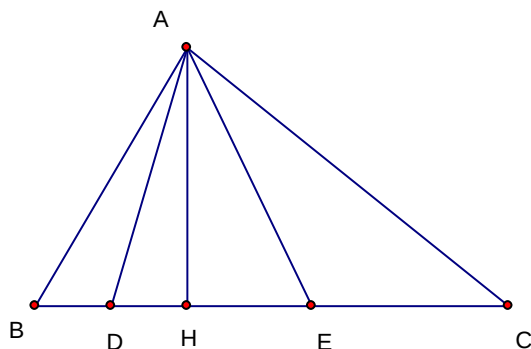
$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{30} = \frac{30}{50} \Rightarrow DE = 18\text{cm}$$

Bài 2 : Cho tam giác ABC , vuông tại A, AB = 15cm, AC = 20cm đường cao AH. Tia phân giác góc HAB cắt HB tại D. Tia phân giác góc HAC cắt HC tại E

- Tính độ dài AH

Tính độ dài HD , HE

Giải



a) Tính BC dựa vào định lý Pitago

$$BC = 25\text{cm}, AH = 12\text{cm}$$

b) Tính được $Hb = 6\text{cm}$, $HC = 16\text{cm}$

$$\frac{DH}{DB} = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{DH}{4} = \frac{DB}{5} = \frac{DH + DB}{4 + 5} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow DH = 4\text{cm}$$

Tương tự tính được $HE = 6\text{cm}$

Bài 1. Cho tam giác ABC cân ở A, $BC = 8\text{cm}$, phân giác của góc B cắt đường cao AH ở K,

$$\frac{AK}{AH} = \frac{3}{5}.$$

a) Tính độ dài AB.

b) Đường thẳng vuông góc với BK cắt AH ở E. Tính EH.

$$\text{HD: a) } AB = 6\text{cm} \quad \text{b) } EH = 8,94\text{ cm}.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = m$, $AC = n$; AD là đường phân giác trong của góc A. Tính tỉ số diện tích của tam giác ABD và tam giác ACD.

$$\text{HD: } \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{m}{n}.$$

Bài 3. Cho tam giác ABC cân ở A, phân giác trong BD, $BC = 10\text{cm}$, $AB = 15\text{cm}$.

a) Tính AD, DC.

b) Đường phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC tại D'. Tính D'C.

$$\text{HD: a) } DA = 9\text{cm}, DC = 6\text{cm} \quad \text{b) } D'C = 10\text{cm}.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và đường phân giác trong AD.

a) Tính diện tích tam giác ADM, biết $AB = m$, $AC = n$ ($n > m$) và diện tích ΔABC bằng S.

b) Cho $n = 7\text{cm}$, $m = 3\text{cm}$. Diện tích tam giác ADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích tam giác ABC?

$$\text{HD: a) } S_{ADM} = \frac{n-m}{2(m+n)} S_{ABC} \quad \text{b) } S_{ADM} = 20\% S_{ABC}.$$

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm của hai đường phân giác BD, AE.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AD.

b) Chứng minh $OG \parallel AC$.

$$\text{HD: a) } AD = 2,5\text{cm} \quad \text{b) } OG \parallel DM \Rightarrow OG \parallel AC.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM, đường phân giác của góc AMB cắt AB ở D, đường phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E. Chứng minh $DE \parallel BC$.

$$\text{HD: } \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC.$$

Bài 7. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), AD là phân giác trong của góc A. Qua trung điểm E của cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AD, cắt cạnh AC tại F, cắt đường thẳng AB tại G.

Chứng minh $CF = BG$.

$$HD: \frac{BG}{CF} = \frac{BE \cdot CD \cdot BA}{BD \cdot CE \cdot AC} = \frac{CD \cdot AB}{BD \cdot AC} = 1.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC và ba đường phân giác AM, BN, CP cắt nhau tại O. Ba cạnh AB, BC, CA tỉ lệ với 4, 7, 5.

a) Tính MC, biết $BC = 18\text{cm}$.

b) Tính AC, biết $NC - NA = 3\text{cm}$.

c) Tính tỉ số $\frac{OP}{OC}$.

d) Chứng minh: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

e) Chứng minh: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} > \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}$.

HD: a) $MC = 10\text{cm}$ b) $AC = 11\text{cm}$ c) $\frac{OP}{OC} = \frac{1}{3}$

$$e) \text{ Vẽ } BD \parallel AM \Rightarrow BD < 2AB \Rightarrow AM < \frac{2AC \cdot AB}{AC + AB} \Rightarrow \frac{1}{AM} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right).$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{BN} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} \right), \frac{1}{CP} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} \right) \Rightarrow đpcm.$$

Bài 9. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Đường phân giác của góc AIB cắt cạnh AB ở M. Đường phân giác của góc AIC cắt cạnh AC ở N.

a) Chứng minh rằng $MM \parallel BC$.

b) Tam giác ABC phải thỏa điều kiện gì để có $MN = AI$?

c) Tam giác ABC phải thỏa điều kiện gì để có $MN \perp AI$?

HD: a) Chứng minh $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$.

Bài 10. Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn DC, góc $D = 60^\circ$. Đường phân giác của góc D cắt đường chéo AC tại I, chia AC thành hai đoạn theo tỉ số $\frac{4}{11}$ và cắt đáy AB tại M. Tính các cạnh đáy AB, DC, biết $MA - MB = 6\text{cm}$.

HD: Chứng minh $DC = AB + AD \Rightarrow DC = AB + AM \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{3}{4} \Rightarrow DC = 66\text{cm}, AB = 42\text{cm}$.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng cắt AB ở E, AD ở F và cắt đường chéo AC ở

G. Chứng minh hệ thức: $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$.

HD: Vẽ $DM \parallel EF$, $BN \parallel EF$. Áp dụng định lý Ta-lét vào các tam giác ADM, ABN.

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M và trên cạnh CD lấy một điểm N sao cho $DN = BM$. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, DB, AC đồng qui.

HD:

II. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Khái niệm hai tam giác đồng dạng

a) **Định nghĩa:** Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:

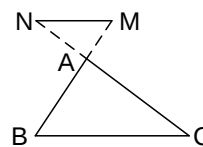
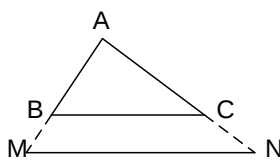
$$A' = A, B' = B, C' = C; \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

Chú ý: Khi viết kí hiệu hai tam giác đồng dạng, ta phải viết theo đúng thứ tự các cặp đỉnh tương ứng: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

b) **Định lý:** Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với hai cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

Chú ý: Định lý trên cũng đúng trong trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của

A triangle with vertices A, B, and C. A line segment MN is drawn parallel to the base BC, with M on side AB and N on side AC.



Trường hợp 1: Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

Trường hợp 2: Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, A' = A \Rightarrow \triangle A'B'C' \# \triangle ABC$$

Trường hợp 3: Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

$$A' = A, B' = B \Rightarrow \Delta A'B'C' \# \Delta ABC$$

Trường hợp 1: Nếu tam giác vuông này có **một góc nhọn** bằng **góc nhọn** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Trường hợp 2: Nếu tam giác vuông này có **hai cạnh góc vuông** tỉ lệ với **hai cạnh góc vuông** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Trường hợp 3: Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Nếu hai tam giác đồng dạng với nhau thì:

- Tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số hai đường phân giác tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số các chu vi bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số các diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

VẤN ĐỀ I. Sử dụng tam giác đồng dạng để tính toán

I. Các vỹ đồ vỹ ®nh h-íng gi¶i:

VÝ dô 1: Bpí 29(SGK – T79) – (H8 – TĚp 2)

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD

a) Chứng minh rằng: $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

b) §-êng th¼ng qua O vu«ng gãc vi AB vµ CD theo thø tù t¼i H vµ K.

$$\text{CMR: } \frac{OA}{OK} = \frac{AB}{CD}$$

* T×m hiÓu bµi to,n : Cho g×?

Chøng minh $g \times ?$

* $X_c \otimes \mathbb{P}^n$ d'ing to, n:

? §Ó chøng minh hÖ thøc trªn ta cÇn chøng minh ®iÒu g×?

$$\text{TL: } \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

? §Ó cã ®o¹n th¼ng trªn ta vËn dông kiÖn thøc nµo.

TL: Chøng minh tam g¼c ®ång d¹ng

a) $OA \cdot OD = OB \cdot OC$

S¬ ®ã :

+ $A_1 = C_1$ (SLT $AB \parallel CD$)

+ $\angle AOB = \angle COD$ (§èi ®õnh)

↓

$\triangle OAB \sim \triangle OCD$ (g.g)

↓

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

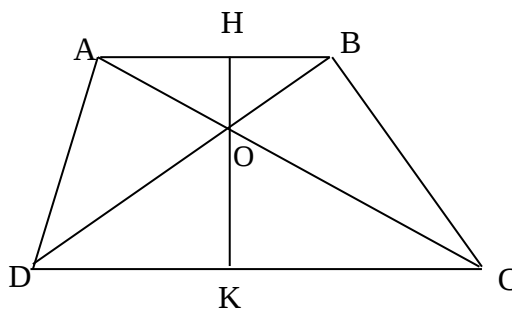
↓

$OA \cdot OD = OB \cdot OC$

b) $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$

Tu sè $\frac{OH}{OK}$ b»ng tu sè nµo?

TL: $\frac{OH}{OK} = \frac{OA}{OC}$



? VËy §Ó chøng minh $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$ ta cÇn chøng minh ®iÒu g×.

TL: $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}$

S¬ ®ã :

+ $\angle H = \angle K = 90^\circ$

+ $A_1 = C_1$ (SLT; $AB \parallel CD$)

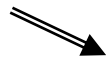
C©u a

↓

$\triangle OAH \sim \triangle OCK$ (gg)

↓

$$\frac{OH}{OK} = \frac{OA}{OC}$$



$$\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$$

↓

$\triangle OAB \sim \triangle OCD$

↓

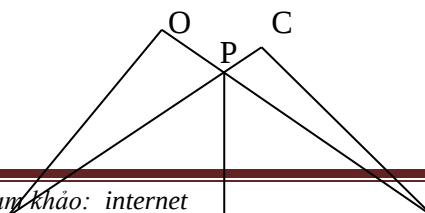
$$\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}$$



VÝ d² 2:

Cho hai tam g¼c vuøng $\triangle ABC$ vµ $\triangle ABD$ cã ®õnh g¾c vuøng C vµ D n»m trªn cïng mét n¾a mÆt ph¼ng bª AB. G¾i P lµ giao ®iÓm cña c¸c c¹nh AC vµ BD. §-êng th¼ng qua P vuøng g¾c víi AB t¹i I.

CMR : $AB^2 = AC \cdot AP + BP \cdot PD$



A

I

B

§Đnh h-íng:

- Cho HS nhĩn xĐt ②o¹n th¼ng AB ($AB = AI + IB$) $\Rightarrow AB^2 = ?$ ($AB \cdot (AI + IB) = AB \cdot AI + AB \cdot IB$)

- ViÖc chøng minh bµi to¹n trªn ②-a vÒ viÖc chøng minh c,ç hÖ thøc

$$AB \cdot AI = AC \cdot AP$$

$$AB \cdot IB = BP \cdot PD$$

- HS x,ç ②Đnh kiÖn thøc vĩn dōng ②Ó chøng minh hÖ thøc (ΔP)

$$S\text{-} \textcircled{a}: + D = \hat{I} = 90^\circ$$

$$+ C = \hat{I} = 90^\circ$$

+ PBI chung

+ PAI chung

 $\Downarrow$ $\Downarrow$

$$\Delta ADB \text{ P } \Delta PIB$$

$$\Delta ACB \text{ P } \Delta AIP \text{ (gg)}$$

 $\Downarrow$ $\Downarrow$

$$\frac{AB}{PB} = \frac{DB}{IB}$$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AI}$$

 $\Downarrow$ $\Downarrow$

$$AB \cdot AI = PB \cdot DB$$

$$AB \cdot AI = AC \cdot AP$$

$$AB \cdot IB + AB \cdot AI = BP \cdot PD + AC \cdot AP$$

 $\Downarrow$

$$AB (IB + IA) = BP \cdot PD + AC \cdot AP$$

 $\Downarrow$

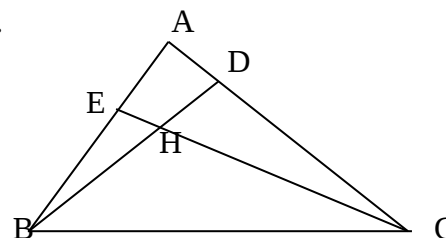
$$AB^2 = BP \cdot PD + AC \cdot AP$$

VÝ dō 3: Trªn c-ĩ sẽ vÝ dō 2 ②-a ra bµi to¹n sau:Cho Δ nhĩn ABC, c,ç ②-ēng cao BD vµ CE c³t nhau t¼i H.

$$\text{CMR: } BC^2 = BH \cdot BD + CH \cdot CE$$

§Đnh h-íng: Trªn c-ĩ sẽ bµi tĩp 2

Hĩc sinh ②-a ra h-íng gi¶i quyÖt bµi tĩp nµy.

 $\Rightarrow$ Vĩ h×nh phō (kĩ $KH \perp BC$; $K \in BC$).Sō dōng ΔP chøng minh t-ēng tũ vÝ dō 2VÝ dō 4: Cho Δ ABC, I lµ giao ②iÖm c¼a 3 ②-ēng ph©n gi,ç, ②-ēng th¼ng vu«ng gãc vĩ CI t¼i I c³t AC vµ BC lçn l-ĩt ẽ M vµ N. Chøng minh r»ng.

a) $AM \cdot BI = AI \cdot IM$

b) $BN \cdot IA = BI \cdot NI$

c) $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AI}{BI} \right)^2$

* §Đnh h-íng:

a) ? ②Ó chøng minh hÖ thøc $AM \cdot BI = AI \cdot IM$.IM ta cÇn chøng minh ②iÖu g×. $\left(\frac{AM}{AI} = \frac{IM}{BI} \right)$

b) ②Ó chøng minh ②¼ng thøc trªn ta cÇn chøng minh ②iÖu g×.

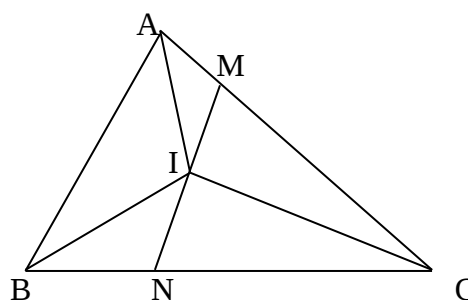
$$(\Delta AMI \text{ P } \Delta AIB)$$

S- ②a:

$$A_1 = A_2 \text{ (gt)}$$

$$\hat{I}_1 = B_1$$

$$\text{* CM: } \hat{I}_1 = B_1$$





$$\Delta AMI \sim \Delta AIB \text{ (gg)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AM}{AI} = \frac{IM}{BI}$$

$$\Downarrow$$

$$AM \cdot BI = AI \cdot IM$$

$$\Delta v \text{ MIC: } IMC = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\Delta ABC: A + B + C = 180^\circ (\text{t/c tam giác...})$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$$

$$\text{Do đó: } IMC = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } IMC = A_1 + I_1 \text{ (t/c góc ngoài } \Delta)$$

$$\text{hay } IMC = \frac{A}{2} + I_1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{B}{2} = I_1 \text{ hay } B_1 = I_1$$

$$\Delta AMI \sim \Delta AIB \text{ (} A_1 = A_2 ; I_1 = B_1 \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AI} = \frac{IM}{BI} \Rightarrow AM \cdot BI = AI \cdot IM$$

b) Tương tự a.

Chứng minh $\Delta BNI \sim \Delta BIA$ (gg)

$$\Rightarrow \frac{BN}{BI} = \frac{NI}{IA} \Rightarrow BN \cdot IA = BI \cdot IN$$

c)

(C@u a)

(C@u b)

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\text{- HS nhận xét: } \left(\frac{AI}{IA}\right)^2 = \frac{AI^2}{BI^2}$$

$$\Delta AMI \sim \Delta AIB$$

$$\Delta BNI \sim \Delta BIA$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Tính } AI^2 ; BI^2 \Rightarrow \frac{AI^2}{BI^2}$$

$$\frac{AM}{AI} = \frac{IM}{BI}$$

$$\frac{BI}{AB} = \frac{BN}{BI}$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\text{(Tính } AI^2 ; BI^2 \text{ như } \Delta P)$$

$$AI^2 = AM \cdot AB$$

$$BI^2 = BN \cdot AB$$



$$\frac{AI^2}{BI^2} = \frac{AM}{BN}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{AI}{BI}\right)^2 = \frac{AM}{BN}$$

II. Bài tập Ôn tập:

Bài 1: Cho hình thang ABCD (AB // CD), gọi O là giao điểm của 2 đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với 2 đáy cắt BC ở I và AD ở J.

$$\text{CMR: a) } \frac{1}{OI} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

$$b) \frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

+ **Bài 2:** Cho $\triangle ABC$, phân giác AD ($AB < AC$). Trên tia AD lấy điểm I sao cho $ACI = BDA$.

- CMR: a) $AD \cdot DI = BD \cdot DC$
b) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

Bài 1. Cho tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số k .

- a) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác.
b) Cho $k = \frac{3}{5}$ và hiệu chu vi của hai tam giác là $40dm$. Tính chu vi của mỗi tam giác.

HD: a) $\frac{P'}{P} = k$ b) $P' = 60(dm), P = 100(dm)$.

Bài 2. Cho tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{4}{3}$. Tính chu vi của tam

giác ABC , biết chu vi của tam giác $A'B'C'$ bằng $27cm$.

HD: $P = 20,25(cm)$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = 3cm, AC = 5cm, BC = 7cm$. Tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC và có chu vi bằng $75cm$. Tính độ dài các cạnh của $\triangle A'B'C'$.

HD: $A'B' = 15cm, B'C' = 25cm, A'C' = 35cm$.

Bài 4. Cho tam giác ABC và các đường cao BH, CK .

- a) Chứng minh $\triangle ABH \sim \triangle ACK$. b) Cho $\angle ACB = 40^\circ$. Tính $\angle AKH$.

HD: b) $\angle AKH = \angle ACB = 40^\circ$.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$. Trên hai cạnh AB, BC lấy hai điểm P và Q sao cho $BP = BQ$. Gọi H là hình chiếu của B trên đường thẳng CP .

- a) Chứng minh $\triangle BHP \sim \triangle CHB$. b) Chứng minh: $\frac{BH}{BQ} = \frac{CH}{CD}$.

- c) Chứng minh $\triangle CHD \sim \triangle BHQ$. Từ đó suy ra $\angle DHQ = 90^\circ$.

HD: c) Chứng minh $\angle DHQ = \angle CHD + \angle CHQ = \angle BHQ + \angle CHQ = \angle BHC = 90^\circ$.

Bài 6. Hai tam giác ABC và DEF có $A = D, B = E, AB = 8cm, BC = 10cm, DE = 6cm$.

- a) Tính độ dài các cạnh AC, DF, EF , biết rằng cạnh AC dài hơn cạnh DF là $3cm$.
b) Cho diện tích tam giác ABC bằng $39,69cm^2$. Tính diện tích tam giác DEF .

HD: a) $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow EF = 7,5cm, DF = 9cm, AC = 12cm$ b) $S_{DEF} = 22,33(cm^2)$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH, BH = 4cm, CH = 9cm$. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

- a) Chứng minh $\triangle AKI \sim \triangle ABC$. b) Tính diện tích tam giác ABC .
c) Tính diện tích của tứ giác $AKHI$.

HD: b) $S_{ABC} = 39cm^2$ c) $S_{AKHI} = \frac{216}{13}cm^2$.

Bài 8. Cho tam giác ABC , có $A = 90^\circ + B$, đường cao CH . Chứng minh:

- a) $\angle CBA = \angle ACH$ b) $CH^2 = BH \cdot AH$

Bài 9. Cho tam giác ABC , hai trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G . Tính diện tích tam giác GMN , biết diện tích tam giác ABC bằng S .

HD: $S_{GMN} = \frac{S}{12}$.

Bài 10. Cho hình vuông ABCD, cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng với C qua D, EB cắt AD tại I. Trên EB lấy điểm M sao cho $DM = DA$.

- a) Chứng minh $\triangle EMC \cong \triangle ECB$. b) Chứng minh $EB \cdot MC = 2a^2$.
c) Tính diện tích tam giác EMC theo a .

HD: c) $S_{EMC} = \frac{4}{5}a^2$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AB, lấy điểm M sao cho $2AM = 3MB$. Một đường thẳng qua M, song song với BC, cắt AC tại N. Một đường thẳng qua N, song song với AB, cắt BC tại D.

- a) Chứng minh $\triangle AMN \cong \triangle NDC$.
b) Cho $AN = 8\text{cm}$, $BM = 4\text{cm}$. Tính diện tích các tam giác AMN, ABC và NDC.

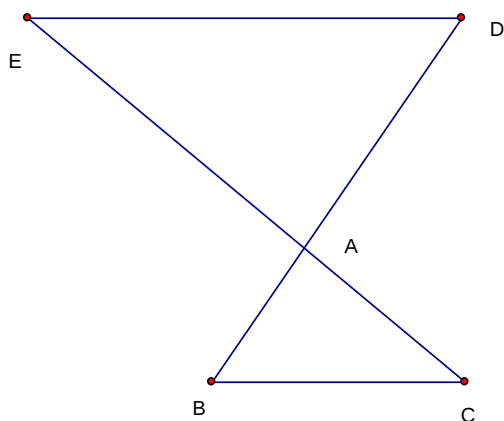
HD: b) $S_{AMN} = 24\text{cm}^2$, $S_{ABC} = \frac{200}{3}\text{cm}^2$, $S_{NDC} = \frac{32}{3}\text{cm}^2$.

VẤN ĐỀ II. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Bài 1 : Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = 2AB$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = 2AC$. Chứng minh rằng

- a). $\triangle ADE \sim \triangle ABC$
b). Tìm tỉ số đồng dạng.

Giải



a) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC \parallel ED$ (Định lý Talet đảo)

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (định lý hai tam giác đồng dạng)

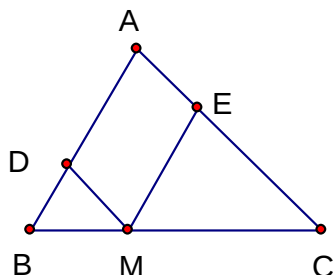
b) $\frac{AD}{AB} = 2$

Bài 3 : Cho tam giác ABC. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{1}{2}$. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt cạnh AB ở D. Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở E.

a) Tìm các cặp tam giác đồng dạng.

b) Tính chu vi tam giác DBM, EMC biết chu vi tam giác ABC bằng 24cm.

HD



a) $\triangle DBM \sim \triangle ABC$

$\triangle EMC \sim \triangle ABC$

$\triangle EMC \sim \triangle DBM$

b) Chu vi tam giác $P_{DBM} = 8cm$

$P_{EMC} = 16cm$

Bài 3: Hai tam giác mà độ dài các cạnh như sau có đồng dạng không?

a) 15cm, 18cm, 21cm và 28cm, 24cm, 20cm.

b) 1dm, 2dm, 2dm và 10cm, 10cm, 5cm.

c) 4m, 5m, 6m và 8m, 10m, 12m

HD

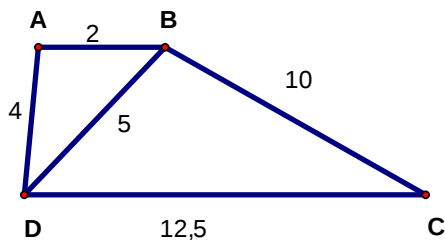
a) $\frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \frac{21}{28} = \left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow$ Hai tam giác đồng dạng

b) $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{20}{10} (= 2) \Rightarrow$ Hai tam giác đồng dạng

c) $\frac{4}{8} \neq \frac{5}{9}$

Bài 4 : Tứ giác ABCD có AB = 2cm, BC = 10cm, CD = 12,5cm, AD = 4cm, BD = 5cm. Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang.

HD



C/m

$\triangle ABD \sim \triangle BDC$

$\hat{ABD} = \hat{BDC}$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

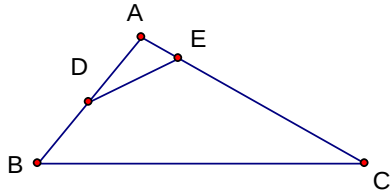
$\hat{ABD}; \hat{BDC}$ so le trong

Bài 5: Cho tam giác ABC có AB = 18cm, AC = 27cm, BC = 30cm. Gọi D là trung điểm của AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho AE = 6cm

a) Chứng minh: $\triangle AED \sim \triangle ABC$

b) Tính độ dài DE.

HD



a) Xét $\triangle AED$ và $\triangle ABC$

Â chung

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ABC$

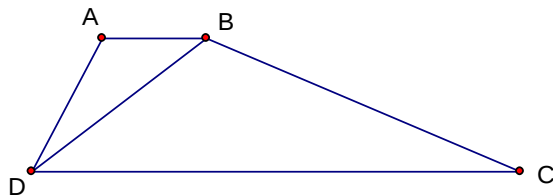
b) Từ câu a) suy ra

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = 10\text{cm}$$

Bài 6 : Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 2\text{cm}$, $BD = 4\text{cm}$, $CD = 8\text{cm}$.

Chứng minh. $\hat{A} = \hat{DBC}$

HD



$$\frac{BA}{BD} = \frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{ABD} = \hat{BDC} \text{ (đối đỉnh)}$$

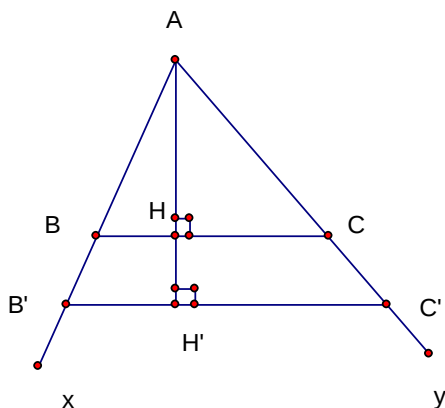
$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{DBC}$$

Bài 7 : (Bài 34 SGK)

Dựng tam giác ABC biết $\hat{A} = 60^\circ$ tỉ số $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$ và đường cao $AH = 6\text{cm}$

Giải:



Dựng góc xAy bằng 60°

Dựng $B' \in$ tia Ax sao cho $AB' = 4$

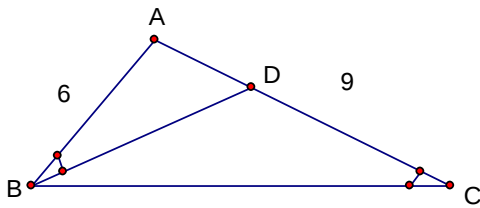
Dựng $C' \in$ tia Ay sao cho $AC' = 5$

Dựng $AH' \perp B'C'$

Trên tia AH' dựng H sao cho $AH = 6\text{cm}$

Qua H dựng đường thẳng vuông góc Ax cắt Ax và Ay tại B và C

Bài 8: Cho tam giác ABC có AB = 6cm, AC = 9cm. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{C}$. Tính độ dài AD
HD



Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACB$

Â chung

$$\widehat{ABD} = \widehat{C}.$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB$$

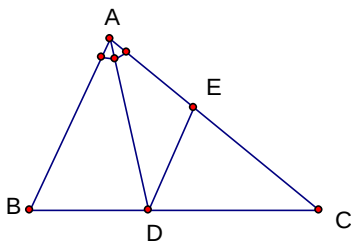
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{6} = \frac{6}{9} \Rightarrow AD = 4\text{cm}$$

Bài 9: Cho tam giác ABC có $AC \geq AB$, đường phân giác AD. Lấy điểm E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{BAC}$.

a) Tìm tam giác đồng dạng với tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng: $ED = DB$

HD



a) Xét $\triangle DEC$ và $\triangle ABC$

$$\widehat{CED} = \widehat{CAB}$$

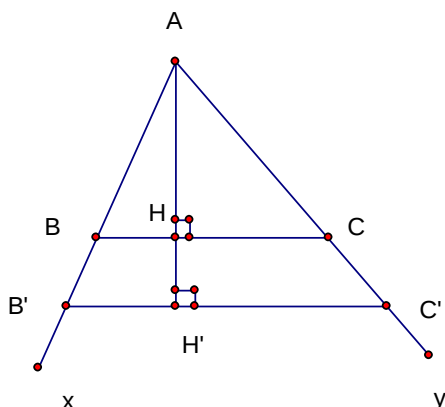
Â chung

$$\Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DB}{AB} \text{ vậy } DE = DB$$

Bài 10: Dựng tam giác ABC biết $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 45^\circ$ và đường cao AH = h.

Giải:



Dựng tam giác $AB'C'$ biết $\hat{B}' = 60^\circ; \hat{C}' = 45^\circ$

Dựng $AH' \perp BC$

Trên tia AH' dựng H sao cho $AH = h$

Qua H dựng đường thẳng song song với $B'C'$ cắt AB' và AC' tại B và C .

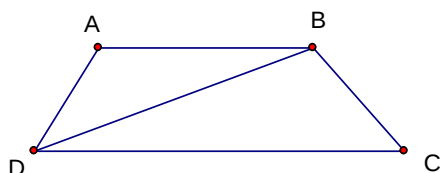
Chứng minh: $BC \parallel B'C$ nên $\hat{B}' = \hat{B} = 60^\circ; \hat{C}' = \hat{C} = 45^\circ$

Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 45^\circ$ đường cao $AH = h$.

Biện luận : Bài toán có một nghiệm hình.

Bài 11: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 2\text{cm}; BD = 4\text{cm}; CD = 8\text{cm}$. Chứng minh rằng $\hat{A} = \hat{DBC}$

HD



Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACB$

$$\hat{ABD} = \hat{BDC}.$$

$$\frac{BA}{BD} = \frac{DA}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC \text{ (cgc)}$$

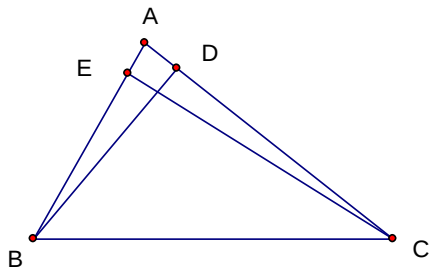
$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{DBC}$$

Bài 12 : Cho tam giác ABC và các đường cao BD, CE

a) Chứng minh rằng : $\triangle ABD \sim \triangle ACE$.

Tính $\hat{AED}$ biết $\hat{ACB} = 50^\circ$

HD



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$

$$\hat{CEB} = \hat{CDB}$$

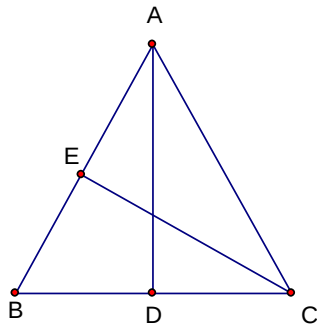
$\hat{A}$ chung

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE.$$

b) $\hat{AED} = 40^\circ$

Bài 13: Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$), đường cao AD và CE cắt nhau tại H
 Tính BC biết $HD = 4\text{cm}, HA = 32\text{cm}$,

HD



Xét $\triangle CDH$ và $\triangle ADC$
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (cgc)

$$\frac{CD}{AD} = \frac{HD}{CD} \Rightarrow \frac{CD}{36} = \frac{4}{CD}$$

$$\Rightarrow CD = 12\text{cm}$$

$$BC = 24\text{cm}$$

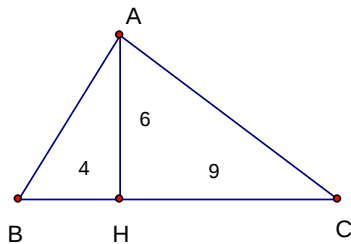
$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{D\hat{B}C}$$

Bài 14 : Cho tam giác ABC và các đường cao AH ($H \in BC$) có AH = 6cm, BH = 4cm, HC = 9cm.
 Chứng minh rằng:

a) $\triangle AHB \sim \triangle CHA$

b) $\hat{BAC} = 90^\circ$

HD



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CHA$

$$\hat{A\hat{H}B} = \hat{A\hat{H}C} = 90^\circ$$

$\hat{B\hat{A}H} = \hat{H\hat{C}A}$ cùng phụ với góc HAC

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle CHA$$

$$\hat{H\hat{A}B} + \hat{H\hat{A}C} = 90^\circ$$

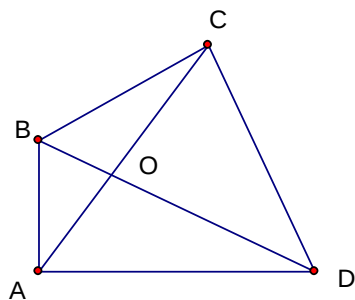
$$\Rightarrow \hat{B\hat{A}C} = 90^\circ$$

Bài 15: Tứ giác ABCD có hai góc vuông tại đỉnh A và C, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, $\angle BAO = \angle BDC$. Chứng minh;

a) $\triangle ABO$ đồng dạng với $\triangle DCO$

b) $\triangle BCO$ đồng dạng với $\triangle ADO$

HD



a/ Xét $\triangle ABO$ và $\triangle DCO$ có:

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} \text{ (GT)}$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{DOC} \text{ (đối đỉnh)}$$

Nên $\triangle ABO \sim \triangle DCO$ (g.g) $\Rightarrow \angle B = \angle C$ (góc t/ứng).

b/ Ta có: $\angle C = 90^\circ - \angle D$ (GT)

$$\angle B = 90^\circ - \angle D \text{ (} \widehat{A} = 90^\circ \text{)} \Rightarrow \angle C = \angle D.$$

Mà $\angle B = \angle C$ (ch/m trên)

Xét $\triangle BCO$ và $\triangle ADO$ có:

$$\angle C = \angle D \text{ (Ch/m trên)}$$

$$\widehat{BOC} = \widehat{AOD} \text{ (đối đỉnh)}.$$

Nên $\triangle BCO \sim \triangle ADO$ (g.g).

Bài 16: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 12\text{cm}$, $BC = 9\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD

a) Chứng minh $\triangle AHB$ đồng dạng với $\triangle BCD$

b) Tính độ dài đoạn thẳng AH

c) Tính diện tích tam giác AHB

HD

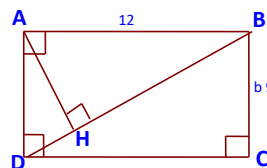
C/M

a/ Xét $\triangle AHB$ và $\triangle BCD$ có:

$$\angle ABH = \angle BDC \text{ (So le trong do } AB \parallel CD)$$

$$\angle H = \angle C = 90^\circ.$$

$$\text{Nên } \triangle AHB \sim \triangle BCD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AB}{BD}.$$



b/ Từ tỉ lệ thức trên $\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot BC}{BD} = \frac{12 \cdot 9}{BD}$. Trong $\triangle ADB$, $\widehat{A} = 90^\circ$ theo Pytago: $BD^2 = AD^2 +$

$$AB^2 = 225.$$

$$\Rightarrow BD = 15\text{cm}.$$

$$\text{Do đó } AH = 7,2\text{cm. Và } \frac{AH}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{7,2}{9} = \frac{4}{5}.$$

c/ Ta có $S_{BCD} = \frac{1}{2} a \cdot b = 54\text{cm}^2$.

$$\text{Và } \frac{S_{AHB}}{S_{BCD}} = k^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow S_{AHB} = \frac{16}{25} \cdot 54 = 34,56\text{cm}^2.$$

Bài 17: Tứ giác ABCD, AC cắt DB tại O, $\angle ABD = \angle ACD$. Cạnh AD kéo dài cắt BC tại E.

a/ CM: $\triangle AOB \sim \triangle DOC$?

b/ CM: $\triangle AOD \sim \triangle BOC$

HD

GT | Tứ giác ABCD, $AC \cap DB = \{O\}$.
 $\angle ABD = \angle ACD, AD \cap BC = \{E\}$.

KL | a/ CM: $\triangle AOB \sim \triangle DOC$?

b/ CM: $\triangle AOD \sim \triangle BOC$? c/ $EA \cdot ED = EB \cdot EC$?

a/ Xét $\triangle AOB$ và $\triangle DOC$ có:

$\angle AOB = \angle DOC$ (đối đỉnh)

$\angle ABD = \angle ACD$ (GT)

$$\Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle DOC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AO}{DO} = \frac{OB}{OC}.$$

b/ Xét $\triangle AOD$ và $\triangle BOC$ có:

$\angle AOB = \angle DOC$ (đối đỉnh)

Và $\frac{AO}{DO} = \frac{OB}{OC}$ (ch/m trên).

$$\Rightarrow \triangle AOD \sim \triangle BOC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle ADB = \angle BCA \text{ (góc t/ứng)}.$$

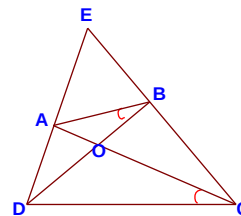
c/ Xét $\triangle EDB$ và $\triangle ECA$ có:

Ê chung

$\angle ADB = \angle BCA$ (ch/m trên).

$$\Rightarrow \triangle EDB \sim \triangle ECA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA} \Rightarrow EA \cdot ED = EB \cdot EC$$



Bài 18: Cho $\triangle ABC$; có AD, BE, CF là các đg/cao cắt nhau tại H.

Chứng minh: $AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$

HD

GT | $\triangle ABC$; AD, BE, CF là
 các đg/cao cắt nhau tại H.

KL | $AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$?

Xét $\triangle AFH$ và $\triangle CDH$ có:

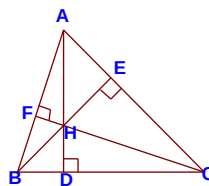
$\angle F = \angle D = 90^\circ$ và $\angle AHF = \angle CHD$ (đối đỉnh).

$$\Rightarrow \triangle AFH \sim \triangle CDH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{FH}{DH}$$

$$\Rightarrow AH \cdot DH = CH \cdot FH. (1)$$

Ch/m tương tự cũng có $BH \cdot EH = CH \cdot FH. (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$.

**BÀI TẬP**

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA.

a) Chứng minh $\triangle A'B'C' \sim \triangle CAB$.

b) Tính chu vi của $\triangle A'B'C'$, biết chu vi của $\triangle ABC$ bằng 54cm.

HD: b) $P' = 27(\text{cm})$.

Bài 2. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm của tam giác. Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của AG, BG, CG. Chứng minh các tam giác EFH và ABC đồng dạng với nhau và G là trọng tâm của tam giác EFH.

HD: Sử dụng tính chất đường trung bình và trọng tâm tam giác.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho AM, BN, CP đồng quy tại O. Qua A và C vẽ các đường thẳng song song với BO cắt CO, OA lần lượt ở E và F.

a) Chứng minh: $\triangle FCM \sim \triangle OMB$ và $\triangle PAE \sim \triangle PBO$.

b) Chứng minh: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

HD: b) Sử dụng định lý Ta-lét và tam giác đồng dạng.

Bài 4. Cho tam giác ABC có AB = 15cm, AC = 20cm. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy 2 điểm D, E sao cho AD = 8cm, AE = 6cm.

a) Chứng minh $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

b) Tính chu vi của tam giác ADE, khi biết BC = 25cm.

c) Tính góc ADE, biết $C = 20^\circ$.

HD: b) $P_{ADE} = 24(\text{cm})$ c) $\angle ADE = 20^\circ$.

Bài 5. Cho góc $\angle xOy (\angle xOy \neq 180^\circ)$. Trên cạnh Ox, lấy 2 điểm A, B sao cho OA = 5cm, OB = 16cm. Trên cạnh Oy, lấy 2 điểm C, D sao cho OC = 8cm, OD = 10cm.

a) Chứng minh: $\triangle OCB \sim \triangle OAD$.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh $BAI = DCI$.

HD:

Bài 6. Cho tam giác ABC có các cạnh AB = 24cm, AC = 28cm. Đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của các điểm B, C trên đường thẳng AD.

a) Tính tỉ số $\frac{BM}{CN}$

b) Chứng minh $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$.

HD: a) Chứng minh $\triangle BDM \sim \triangle CDN \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{6}{7}$ b) Chứng minh $\triangle ABM \sim \triangle ACN$.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ $CE \perp AB$ và $CF \perp AD$, $BH \perp AC$.

a) Chứng minh $\triangle ABH \sim \triangle ACE$.

b) Chứng minh: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

HD: b) Chứng minh: $AB \cdot AE = AC \cdot AH$, $AD \cdot AF = AC \cdot CH \Rightarrow đpcm$.

Bài 8. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh OA.OB = OC.OD.

b) Đường thẳng qua O, vuông góc với AB, CD theo thứ tự tại H, K. Chứng minh $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$.

HD: a) Chứng minh $\triangle OAB \sim \triangle ODC$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi O là giao điểm của ba đường cao AH, BK, CI.

a) Chứng minh OK.OB = OL.OC

b) Chứng minh $\triangle OKI \sim \triangle OCB$

c) Chứng minh $\triangle BOH \sim \triangle BCK$

d) Chứng minh $BO \cdot BK + CO \cdot CI = BC^2$.

HD:

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông ở A, AB = 5,4cm, AC = 7,2cm.

a) Tính BC.

b) Từ trung điểm M của BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường thẳng AC tại H và cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh $\triangle EMB \sim \triangle CAB$.

c) Tính EB và EM.

d) Chứng minh BH vuông góc với EC.

e) Chứng minh HA.HC = HM.HE.

HD: a) $BC = 9(\text{cm})$ c) $EM = 6(\text{cm}), EB = 7,5(\text{cm})$

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH.

a) Hãy nêu từng cặp các tam giác đồng dạng.

b) Cho AB = 12,45cm, AC = 20,50cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AH, BH, CH.

HD: b) $BC = 23,98\text{cm}$, $AH = 10,64\text{cm}$, $BH = 6,45\text{cm}$, $CH = 17,53\text{cm}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC và đường cao AH, AB = 5cm, BH = 3cm, $AC = \frac{20}{3}\text{cm}$.

a) Tính độ dài AH

b) Chứng minh $\triangle ABH \sim \triangle CAH$. Từ đó tính $\angle BAC$.

HD: a) $AH = 4\text{cm}$

b) $\angle BAC = 90^\circ$.

Bài 13. Cho tứ giác ABCD, có $\angle DBC = 90^\circ$, $AD = \sqrt{20}\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$, $DB = 6\text{cm}$, $DC = 9\text{cm}$.

- a) Tính góc BAD b) Chứng minh $\triangle BAD \sim \triangle DBC$ c) Chứng minh $DC \parallel AB$.

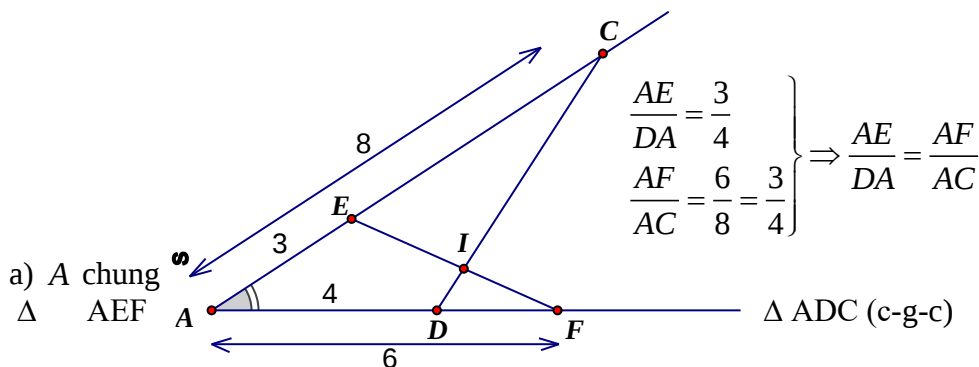
HD: a) $\angle BAD = 90^\circ$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1 Trên một cạnh của một góc đỉnh A, đặt đoạn thẳng $AE = 3\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Trên cạnh thứ hai của góc đó, đặt các đoạn thẳng $AD = 4\text{cm}$ và $AF = 6\text{cm}$.

- a) Hỏi $\triangle ACD$ và $\triangle AEF$ có đồng dạng với nhau không? Tại sao?
b) Gọi I là giao điểm của CD và EF. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác IDF và IEC.

HD



- b) $\angle EFA = \angle DCA$ ($\triangle AEF \sim \triangle ADC$)

$\angle DIF = \angle EIC$ (đối đỉnh)

Suy ra: $\triangle DIF \sim \triangle EIC$ (g-g)

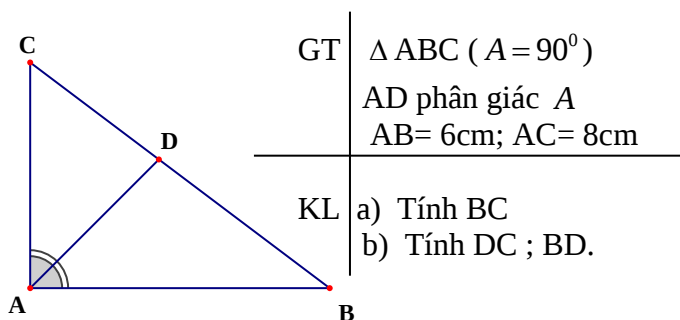
$$k = \frac{DF}{EC} = \frac{2}{5}$$

$$* \frac{S_{DIF}}{S_{EIC}} = k^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

Bài 2: Cho tam giác cân ABC vuông tại A, biết $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$. Đường phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D.

- a) Tính độ dài cạnh BC
b) Tính độ dài đoạn thẳng BD và CD.

HD



a) $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

b) Tam giác ABC có AD là đường phân giác góc A, nên áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \text{ hay } \frac{CD}{BC - CD} = \frac{AC}{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{CD}{10-CD} = \frac{8}{6} \Leftrightarrow 6CD = 8(10-CD)$$

$$\Leftrightarrow 14CD = 80 \Leftrightarrow CD = \frac{80}{14} \approx 5,7$$

- $BD = BC - CD$ (D nằm giữa B và C)
 $= 10 - 5,7 = 4,3$

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 8\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. Vẽ đường cao AH của tam giác ADB.

- Chứng minh: $\triangle AHB \sim \triangle BCD$
- Chứng minh: $AD^2 = DH \cdot DB$
- Tính độ dài đoạn thẳng DH, AH?

HD

Vẽ hình đúng + ghi GT + KL

a. $\triangle AHB \sim \triangle BCD$ vì có: $H = B = 90^\circ$; $B_1 = D_1$ (SLT)

b. $\triangle ABD \sim \triangle HAD$ vì có: $A = H = 90^\circ$; D chung

$$\Rightarrow \frac{AD}{HD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow AD^2 = DH \cdot DB$$

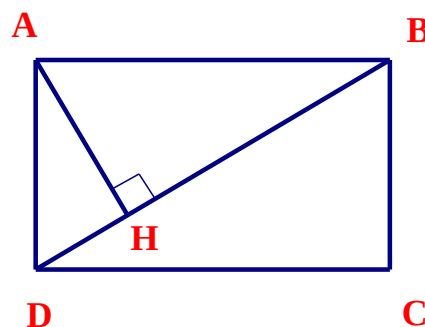
c. $\triangle$ vuông ABD có: $AB = 8\text{cm}$; $AD = 6\text{cm}$

$$\Rightarrow DB^2 = 8^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow DB = 10\text{ cm}$$

Theo chứng minh trên $AD^2 = DH \cdot DB$

$$\Rightarrow DH = 6^2 : 10 = 3,6\text{ cm}$$

$$\text{Có } \triangle ABD \sim \triangle HAD \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AD}{BB} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4,8\text{ cm}$$



Bài 5. Cho $\triangle ABC$ ($A = 90^\circ$) có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại

D. Từ D kẻ DE vuông góc với AC ($E \in AC$).

- Tính độ dài các đoạn thẳng BD, CD và DE.
- Tính diện tích của các tam giác ABD và ACD.

HD

Câu a) Áp dụng định lý Pi – ta – go trong tam giác vuông ABC ta tính được $BC = 15\text{cm}$

Vì AD là đường phân giác của góc A nên

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad (0,5đ)$$

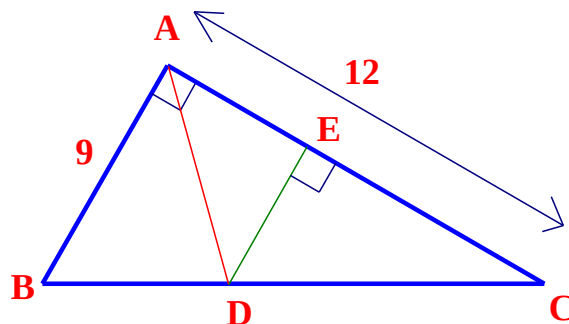
$$\Rightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{3}{4 + 3} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{3}{7} \cdot BC = \frac{3}{7} \cdot 15 = \frac{45}{7} (\text{cm})$$

$$\text{Tính được } CD = \frac{60}{7} (\text{cm})$$

$$\text{Lại có } \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow DE = \frac{AB \cdot CD}{BC} = \frac{36}{7} (\text{cm})$$

$$\text{Câu b) Tính đúng } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 54 (\text{cm}^2)$$



$$\text{Tính đúng } S_{ADC} = \frac{AC \cdot DE}{2} = \frac{12 \cdot \frac{36}{7}}{2} = \frac{216}{7} (\text{cm}^2)$$

$$\text{Từ đó suy ra } S_{ABD} = S_{ABC} - S_{ADC} = 30 \frac{6}{7} (\text{cm}^2)$$

Bài 6. Cho $\triangle DEF$ đồng dạng với $\triangle ABC$. Tính các cạnh của $\triangle ABC$ biết: $DE = 3\text{cm}$; $DF = 5\text{cm}$; $EF = 7\text{cm}$ và chu vi $\triangle ABC$ bằng 20cm .

HD

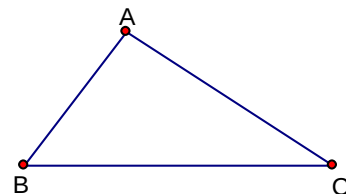
$$\triangle DEF \text{ đồng dạng với } \triangle ABC \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Theo t/c của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{DE + DF + EF}{AB + AC + BC}$$

$$\text{Hay } \frac{3}{AB} = \frac{5}{AC} = \frac{7}{BC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow AB = 4\text{cm}, AC = \frac{20}{3} \text{cm}, BC = \frac{28}{3} \text{cm}$$



Bài 7. Cho góc nhọn xOy . Trên Ox , Oy lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $OM = 15\text{cm}$ và $ON = 25\text{cm}$. Vẽ $MP \perp Oy$ tại P và $NQ \perp Ox$ tại Q .

a) Chứng minh: $\triangle OMP$ đồng dạng với $\triangle ONQ$.

b) Tính tỉ số diện tích của $\triangle OMP$ và $\triangle ONQ$.

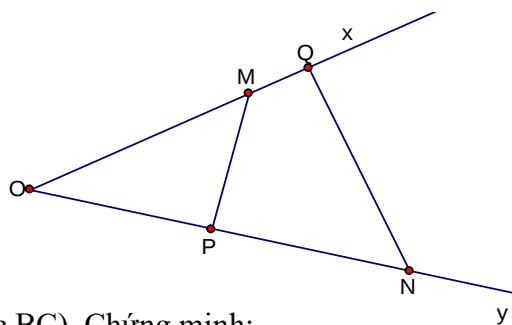
HD

* Chứng minh được câu a

$\triangle OMP$ đồng dạng với $\triangle ONQ$ (g - g)

* Tính được câu b

$$\text{Tỉ số diện tích của } \triangle OMP \text{ và } \triangle ONQ = \frac{9}{25}.$$



Bài 8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , AH là đường cao (H thuộc BC). Chứng minh:

a) $AB^2 = BH \cdot BC$.

b) $AH^2 = BH \cdot CH$

HD

Câu 3: (1 điểm)

* Chứng minh được câu a

$$AB^2 = BH \cdot BC.$$

* Chứng minh được câu b

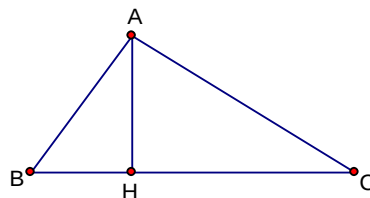
$$AH^2 = BH \cdot CH.$$

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 12\text{cm}$; $AC = 16\text{cm}$, AD là phân giác của góc A ($D \in BC$).

a) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABD và ACD .

b) Tính độ dài cạnh BC

c) Tính độ dài các đoạn thẳng BD và CD .

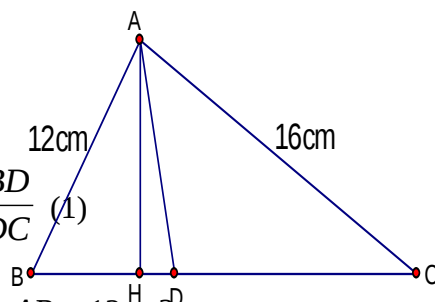


d) Tính chiều cao AH của tam giác.

HD

a) Ta có: $S_{ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot BD$ (0.25đ)

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AH \cdot DC \quad (0.25\text{đ}) \text{ suy ra: } \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BD}{\frac{1}{2} AH \cdot DC} = \frac{BD}{DC} \quad (1)$$



Mặt khác vì AD là phân giác của $\angle BAC$. Nên ta có: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{3}{4}$

b) Vì $\triangle ABC$ vuông tại A. Nên theo định lý Pitago ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$$

Vậy: $BC = 20\text{cm}$.

c) Vì AD là phân giác nên $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$ hay $\frac{BD}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{BD+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{20}{7}$

Vậy: $BD = \frac{60}{7} \text{ (cm)}$, $DC = \frac{80}{7} \text{ (cm)}$

d) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6 \text{ (cm)}$

Bài 10. Cho tam giác ABC, đường cao AH, vẽ phân giác Hx của góc AHB và phân giác Hy của góc AHC. Kẻ AD vuông góc với Hx, AE vuông góc với Hy.

Chứng minh rằng tứ giác ADHE là hình vuông

HD

Hx là phân giác của góc AHB;
Hy phân giác của góc AHC mà
 $\angle AHB$ và $\angle AHC$ là hai góc kề
bù nên Hx và Hy vuông góc
Hay $\angle DHE = 90^\circ$ mặt khác
 $\angle ADH = \angle AEH = 90^\circ$
Nên ADHE là hình chữ nhật (1)

Do:

$$\angle AHD = \frac{1}{2} \angle AHB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

$$\angle AHE = \frac{1}{2} \angle AHC = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AHD = \angle AHE$$

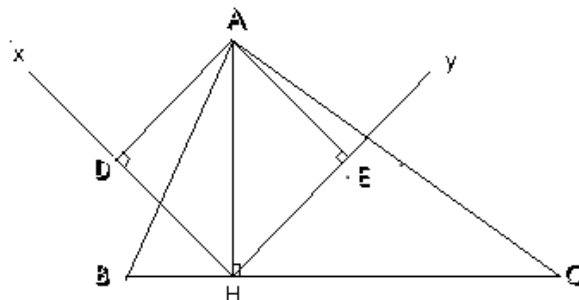
Hay HA là phân giác DHE (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác ADHE là hình vuông.

Bài 11. Cho $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$), đường cao AH. Chứng minh rằng $AH^2 = BH \cdot CH$.

HD

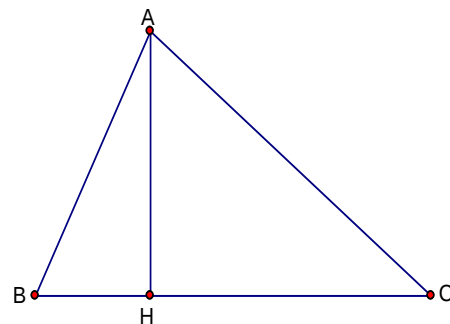
Chứng minh được tam giác vuông HBA đồng dạng tam giác HAC vì:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{C}_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ suy ra } \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \text{ (1đ)}$$

Từ $\triangle HBA$ đồng dạng $\triangle HAC$, suy ra: $\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}$ (0,25đ)

Suy ra: $HA^2 = HB.HC$ (0,25đ)



Bài 12: Cho góc xAy. Trên tia Ax đặt các đoạn thẳng $AE = 3\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Trên tia Ay đặt các đoạn thẳng $AD = 4\text{cm}$, $AF = 6\text{cm}$.

a) Chứng minh: $\triangle ACD$ đồng dạng với $\triangle AFE$

b) Gọi I là giao điểm của CD và EF. Chứng minh $\triangle IEC \sim \triangle IDF$.

HD

a) Xét $\triangle ACD$ và $\triangle AFE$ có:

Góc A: chung

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AC}{AF} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{AD}{AE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \text{ suy ra } \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE} = \frac{4}{6}$$

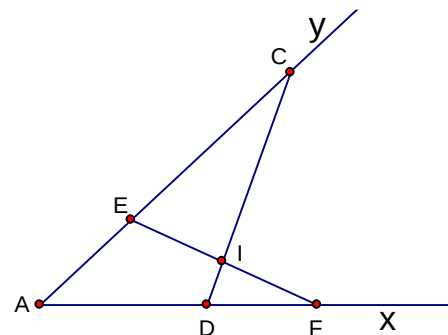
Suy ra $\triangle ACD$ đồng dạng $\triangle AFE$ (c-g-c) (1,5đ)

b) Xét $\triangle IEC$ và $\triangle IDF$ có:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\hat{C} = \hat{F} \text{ (do } \triangle ACD \text{ đồng dạng } \triangle AFE)$$

suy ra $\triangle IEC$ đồng dạng $\triangle IDF$ (g-g) (1đ)



Bài 13: Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD.

a) Tứ giác BEDF là hình gì? Hãy chứng minh điều đó?

b) Chứng minh rằng: $CH.CD = CB.CK$

c) Chứng minh rằng: $AB.AH + AD.AK = AC^2$.

HD

a) Ta có: $BE \perp AC$ (gt); $DF \perp AC$ (gt) $\Rightarrow BE \parallel DF$

Chứng minh: $\triangle BEO = \triangle DFO$ (g - c - g) $\Rightarrow BE = DF$

Suy ra: Tứ giác BEDF là hình bình hành.

b) Ta có: $ABC = ADC \Rightarrow HBC = KCD$

Chứng minh: $\triangle CBH \sim \triangle CDK$ (g - g)

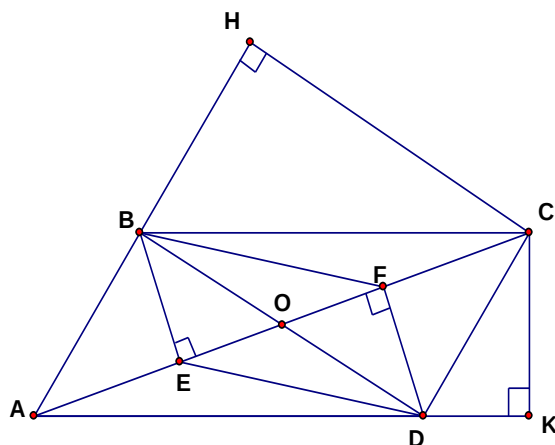
$$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CH.CD = CK.CB$$

c) Chứng minh: $\triangle AFD \sim \triangle AKC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$$

Chứng minh: $\triangle CFD \sim \triangle AHC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AH}{AC}$$



$$\text{Mà: } CD = AB \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$$

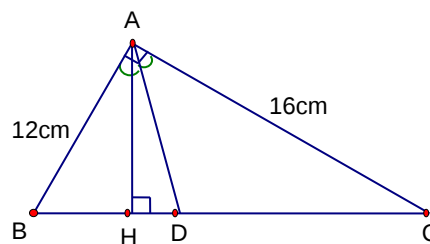
Suy ra : $AB.AH + AB.AH = CF.AC + AF.AC = (CF + AF)AC = AC^2$ (đpcm).

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 12cm, AC = 16cm. Vẽ đường cao AH (H ∈ BC) và tia phân giác của góc A cắt BC tại D.

- Chứng minh tam giác HBA đồng dạng tam giác ABC
- Tính độ dài cạnh BC
- Tính tỷ số diện tích của hai tam giác ABD và ACD
- Tính độ dài các đoạn thẳng BD và CD
- Tính độ dài chiều cao AH

HD

GT	$\square ABC$ vuông tại A, AD là phân giác của BAC $AH \perp BC$; AB = 12cm, AC = 16cm
	a) $\square HBA \square \square ABC$; b) Tính BC = ? c) $\frac{S_{\square ABD}}{S_{ACD}} = ?$; d) BD = ?; CD = ? e) AH = ?



a) $\square HBA \square \square ABC$:

Xét $\square HBA$ & $\square ABC$ là hai tam giác vuông có B chung $\Rightarrow \square HBA \square \square ABC$ (g.g)

b) Tính BC:

Ta có $\square ABC$ vuông tại A (gt) $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$

Hay: $BC = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ cm

c) $\frac{S_{\square ABD}}{S_{ACD}} = ?$

Vì AD là phân giác của BAC nên ta có : $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ hay $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Mà $S_{ABD} = \frac{1}{2} AH.BD$ và $S_{ACD} = \frac{1}{2} AH.CD \Rightarrow \frac{S_{\square ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{4}$

BD = ?, CD = ?

d) Ta có : $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ (cmt) $\Rightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{AB}{AB + AC}$ hay $\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC}$

$\frac{BD}{20} = \frac{12}{12 + 16} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{20.3}{7} \approx 8,6$ cm

Mà $CD = BC - BD = 20 - 8,6 = 11,4$ cm

e) AH = ? Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} AB.AC$

$\Rightarrow AH.BC = AB.AC$ hay $AH = \frac{AB.AC}{BC} = AH = \frac{12.16}{20} = 9,6$ (cm)

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 15cm, AC = 20cm. Tia phân giác của góc A, cắt cạnh BC tại D.

a) Tính $\frac{DB}{DC}$.

b) Đường thẳng qua D, song song với AB, cắt AC tại E. Chứng minh $\triangle EDC \sim \triangle ABC$.

c) Tính DE và diện tích của tam giác EDC.

HD: a) $\frac{DB}{DC} = \frac{3}{4}$ c) $DE = \frac{60}{7}$ (cm), $S_{EDC} = \frac{2400}{49}$ (cm²).

Bài 2. Cho tam giác cân ABC, $AB = AC = b$, $BC = a$. Vẽ các đường cao BH, CK.

- a) Chứng minh $BK = CH$ b) Chứng minh $KH \parallel BC$ c) Tính độ dài HC và HK.

$$HD: c) HC = \frac{a^2}{2b}, KH = a - \frac{a^3}{2b^2}.$$

Bài 3. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm K, H sao cho $BK \cdot CH = BI^2$. Chứng minh:

- a) $\triangle KBI \sim \triangle ICH$ b) $\triangle KIH \sim \triangle KBI$
c) KI là phân giác của góc BKH d) $IH \cdot KB + HC \cdot IK > HK \cdot BI$.

$$HD: d) Chứng minh $IH \cdot KB + HC \cdot IK = BI(KI + IH) > HK \cdot BI$.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH, đường phân giác trong AD, đường trung tuyến AM.

- a) Chứng minh $HD + DM = HM$.
b) Vẽ các đường cao BF, CE. So sánh hai đoạn thẳng BF và CE.
c) Chứng minh $\triangle AFE \sim \triangle ABC$.
d) Gọi O là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh $BO \cdot BF + CO \cdot CE = BC^2$.

$$HD: a) AB < AC \Rightarrow DC > MC, \angle CAH > \frac{A}{2} \Rightarrow D \text{ nằm giữa H và M} \Rightarrow đpcm.$$

$$b) BF < CE \quad d) BO \cdot BF = BC \cdot BH, CO \cdot CE = BC \cdot CH$$

Bài 5. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D, E sao cho $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Đường trung tuyến AI ($I \in BC$) cắt đoạn thẳng DE tại H. Chứng minh $DH = HE$.

$$HD: \frac{DH}{BI} = \frac{HE}{IC} \Rightarrow đpcm.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 30^\circ$ và đường phân giác BD ($D \in AC$).

- a) Tính tỉ số $\frac{DA}{CD}$ b) Cho $AB = 12,5cm$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

$$HD: a) \frac{DA}{DC} = \frac{1}{2} \quad b) BC = 25cm, AC = 21,65cm.$$

Bài 7. Cho tam giác đều ABC cạnh a , M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\angle DME = 60^\circ$.

- a) Chứng minh $BD \cdot CE = \frac{a^2}{4}$.
b) Chứng minh $\triangle MBD \sim \triangle EMD$ và $\triangle ECM \sim \triangle EMD$.
c) Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng DE.

$$HD: c) Vẽ $MH \perp DE, MK \perp EC \Rightarrow MH = MK; MK = \sqrt{MC^2 - CK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A, $A = 20^\circ$, $AB = AC = b$, $BC = a$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\angle DBC = 20^\circ$.

- a) Chứng minh $\triangle BDC \sim \triangle ABC$.
b) Vẽ AE vuông góc với BD tại E. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, DE, AE.
c) Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

$$HD: b) AE = \frac{b\sqrt{3}}{2}, DE = \frac{b}{2} - a, AD = b - \frac{a^2}{b} \quad c) AD^2 = DE^2 + AE^2 \Rightarrow đpcm.$$

Bài 9. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM, K là điểm trên AM sao cho $AM = 3AK$, BK cắt AC tại N, P là trung điểm của NC.

- a) Tính tỉ số diện tích của các tam giác ANK và AMP.
b) Cho biết diện tích $\triangle ABC$ bằng S. tính diện tích tam giác ANK.

c) Một đường thẳng qua K cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại I và J. Chứng minh $\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AJ} = 6$.

HD: a) $\frac{S_{ANK}}{S_{AMP}} = \frac{1}{9}$ b) $S_{AMP} = \frac{3}{5}S_{AMC}; S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ABC} \Rightarrow S_{ANK} = \frac{S}{30}$.

c) Vẽ $BE \parallel IJ, CH \parallel IJ (E, H \in AM) \Rightarrow \triangle EBM = \triangle HCM \Rightarrow EM = MH$;

$$\frac{AB}{AI} = \frac{AE}{AK}, \frac{AC}{AJ} = \frac{AH}{AK} \Rightarrow đpcm.$$

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC. O là giao điểm các đường trung trực, H là trực tâm, G là trọng tâm của tam giác ABC.

- Chứng minh $\triangle OMN \sim \triangle HAB$.
- So sánh độ dài AH và OM.
- Chứng minh $\triangle HAG \sim \triangle OMG$.
- Chứng minh ba điểm H, G, O thẳng hàng và $GH = 2GO$.

HD: b) $AH = 2OM$ d) $HGO = HGM + MGO = HGM + AGH = MGA = 180^\circ \Rightarrow đpcm$.

Bài 11. Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại G. Vẽ các đường trung trực HE, HF của AC và BC. Chứng minh:

- $BG = 2HE$ b) $AG = 2HF$.

HD: $\triangle ABG \sim \triangle FEH \Rightarrow đpcm$.

Bài 12. Cho hình thang vuông ABCD ($AB \parallel DC, A = D = 90^\circ$). Đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC. Chứng minh $BD^2 = AB \cdot DC$.

HD: Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle BCD$.

Bài 13. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), O là trung điểm của cạnh đáy BC. Một điểm D di động trên cạnh AB. Trên cạnh AC lấy một điểm E sao cho $CE = \frac{OB^2}{BD}$. Chứng minh:

- Hai tam giác DBO, OCE đồng dạng.
- Tam giác DOE cũng đồng dạng với hai tam giác trên.
- DO là phân giác của góc BDE , EO là phân giác của góc CED .
- Khoảng cách từ điểm O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB.

HD: d) Vẽ $OI \perp DE, OH \perp AC \Rightarrow OI = OH$.

Bài 14. Cho tam giác ABC, trong đó B, C là các góc nhọn. Các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H.

- Chứng minh: $A'A \cdot A'H = A'B \cdot A'C$.
- Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Giả sử đường thẳng GH song song với cạnh đáy BC. Chứng minh: $A'A^2 = 3A'B \cdot A'C$.

HD: a) Chứng minh $\triangle BAH \sim \triangle BB'C, \triangle CAA' \sim \triangle CB'B$ b) $GH \parallel BC \Rightarrow A'H = \frac{A'A}{3}$.

Bài 15. Cho hình thang KLMN ($KN \parallel LM$). gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Qua E, vẽ một đường thẳng song song với LM, cắt MN tại F. Chứng minh: $\frac{1}{EF} = \frac{1}{KN} + \frac{1}{LM}$.

HD: Tính các tỉ số $\frac{EF}{LM}, \frac{EF}{KN}$.

Bài 16. Qua một điểm O tùy ý ở trong tam giác ABC, vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC và BC lần lượt tại D và E; đường thẳng song song với AC, cắt AB và BC lần lượt ở F và K; đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh:

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

HD: Chứng minh $\frac{AF}{AB} = \frac{KC}{BC}, \frac{CN}{CA} = \frac{KE}{BC} \Rightarrow đpcm$.

Bài 17. Qua một điểm O tùy ý ở trong tam giác ABC, vẽ các đường thẳng AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh: $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$.

HD: Vẽ $AH \perp BC$, $OI \perp BC \Rightarrow \frac{OA'}{AA'} = \frac{OI}{AH}$; $\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{OI}{AH} \Rightarrow \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{OA'}{AA'}$.

Tương tự: $\frac{S_{COA}}{S_{ABC}} = \frac{OB'}{BB'}$, $\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{OC'}{CC'} \Rightarrow đpcm$.

Bài 18. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, lấy lần lượt các điểm P, Q, R. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy tại O thì $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$ (định lý Ceva).

HD: Qua C và A vẽ các đường thẳng song song với BQ, cắt đường thẳng AP tại E và cắt đường thẳng CR tại D. Chứng minh $\frac{PB}{PC} = \frac{OB}{EC}$, $\frac{RA}{RB} = \frac{AD}{OB}$, $\frac{QC}{QA} = \frac{EC}{AD} \Rightarrow đpcm$.

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

ĐỀ I

I. TRẮC NGHIỆM: (3 điểm) Khoanh tròn đáp án đúng trong các câu sau :

1. Cho $AB = 6\text{cm}$, $AC = 18\text{cm}$, tỉ số hai đoạn thẳng AB và AC là:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. 3

2. $\Delta MNP \sim \Delta ABC$ thì:

- A. $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC}$ B. $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{BC}$ C. $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{AC}$ D. $\frac{MN}{BC} = \frac{NP}{AC}$

3. Các cặp tam giác nào có độ dài ba cạnh dưới đây đồng dạng:

- A. 4; 5; 6 và 4; 5; 7. B. 2; 3; 4 và 2; 5; 4.
C. 6; 5; 7 và 6; 5; 8. D. 3; 4; 5 và 6; 8; 10.

4. Cho $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = 2,5$. Thì tỉ số hai đường cao tương ứng bằng :

- A. 2.5cm B. 3.5cm C. 4cm D. 5cm

5. Cho $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$. Thì $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$ bằng :

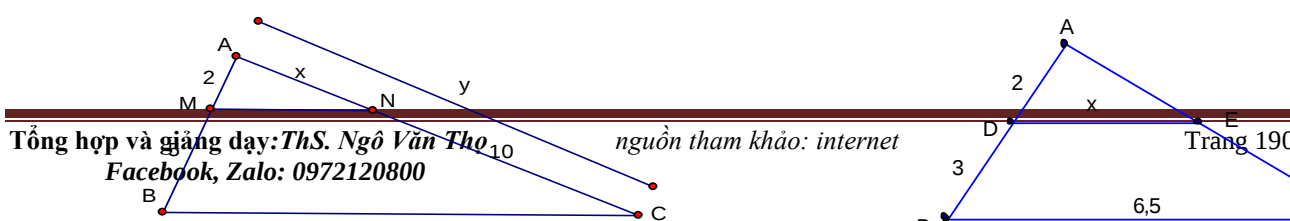
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 2 D. 4

6. Cho ΔABC có $MN \parallel BC$ thì : . Ta có :

- A. $\frac{AM}{NC} = \frac{MB}{AN}$ B. $\frac{AN}{MB} = \frac{AM}{NC}$ C. $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ D. $\frac{MB}{MA} = \frac{NA}{NC}$

II. TỰ LUẬN : (7 điểm)

Bài 1: (2 Điểm) Cho hình vẽ có $MN \parallel BC$ Tính các vế x và y :



Bài 2: (2 Điểm) Cho $\triangle ABC$ có $DE \parallel BC$ (hình vẽ). Hãy tính x ?

Bài 3: (3 Điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12\text{cm}$; $AC = 16\text{cm}$. Kẻ đường cao AH ($H \in BC$)

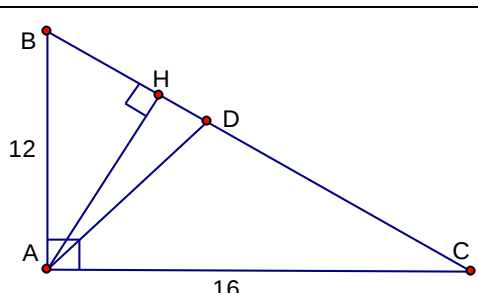
- a) Chứng minh : $\triangle AHB \sim \triangle CAB$
 b) Vẽ đường phân giác AD , ($D \in BC$). Tính BD , CD

ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

I Trắc nghiệm: (3 điểm) Mỗi câu đúng được 0.5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	B	A	D	A	B	C

II. Tự luận: (7 điểm)

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1 (2đ)	$MN \parallel BC$ nên $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ (hệ quả của định lý Ta-let) Hay $\frac{2}{5} = \frac{AN}{10} \Rightarrow AN = (2 \cdot 10) : 5 = 4(\text{cm})$ $AC = AN + NC = 4 + 10 = 14(\text{cm})$ Vậy : $x = 4\text{ cm}$; $y = 14\text{ cm}$	0,5 0,5 0,5 0,5
2 (2đ)	$AB = AD + DB = 2 + 3 = 5(\text{cm})$ $DE \parallel BC$ nên $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ (hệ quả của định lý Ta-let) Hay $\frac{2}{5} = \frac{DE}{6,5} \Rightarrow DE = \frac{2 \cdot 6,5}{5} = 2,6(\text{cm})$ Vậy $x = 2,6(\text{cm})$	0,5 0,5 0,5 0,5
3 (3đ)	* Vẽ đúng hình a) Xét $\triangle AHB$ và $\triangle ABC$ có: $\angle BHA = \angle BAC = 90^\circ$ (gt) $\angle B$ chung Do đó: $\triangle AHB \sim \triangle CAB$ (g-g) b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pi-ta-go) $= 12^2 + 16^2 = 400$ Suy ra : $BC = 20(\text{cm})$ Ta có AD là phân giác của góc BAC (gt):	 0,5 0,5 0,5

$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$	0,5
$\Rightarrow \frac{BD+DC}{DC} = \frac{3+4}{4}$	
$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{7}{4} \Rightarrow DC = \frac{4 \cdot BC}{7} = \frac{4 \cdot 20}{7} \approx 11,4(\text{cm})$	0,25
$BD = BC - DC = 20 - 11,4 \approx 8,6(\text{cm})$	0,25

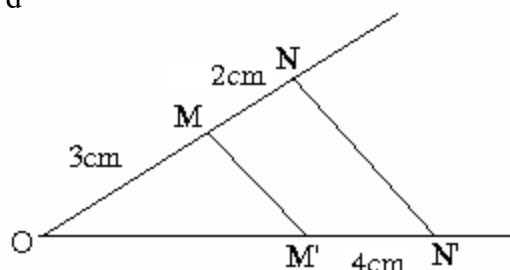
ĐỀ II**I. Trắc nghiệm (4 điểm):**

Khoanh tròn chữ cái đứng trước đáp án đúng.

1. Cho 5 đoạn thẳng có độ dài là $a = 2$; $b = 3$; $c = 4$; $d = 6$; $m = 8$.

Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. Hai đoạn thẳng a và b tỉ lệ với hai đoạn thẳng c và m
 B. Hai đoạn thẳng a và c tỉ lệ với hai đoạn thẳng c và d
 C. Hai đoạn thẳng a và b tỉ lệ với hai đoạn thẳng d và m
 D. Hai đoạn thẳng a và b tỉ lệ với hai đoạn thẳng c và d

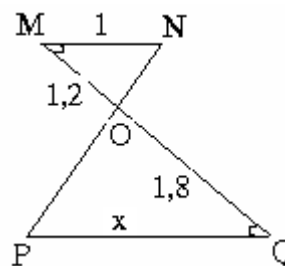


2. Cho biết $MM' \parallel NN'$ độ dài OM' trong hình vẽ bên là:

- A. 3 cm B. 5 cm
 C. 4 cm D. 6 cm

3. Độ dài x trong hình vẽ dưới là:

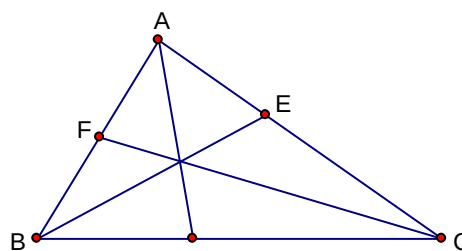
- A. 1,5 B. 2,9
 C. 3,0 D. 3,2



4. Hãy điền vào chỗ trống kí hiệu thích hợp

Tam giác ABC có ba đường phân giác trong AD; BE; CF khi đó

- a) $\frac{AB}{AC} = \dots\dots$ c) $\frac{AF}{BF} = \dots$
 b) $\frac{CE}{EA} = \dots$ d) $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \dots$

**II. Tự luận (6 điểm)**

Câu 1 (2,5 điểm): Trên một cạnh của một góc đỉnh A, lấy đoạn thẳng $AE = 3\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Trên cạnh thứ hai của góc đó, đặt các đoạn thẳng $AD = 4\text{cm}$ và $AF = 6\text{cm}$.

- a) Hỏi tam giác ACD và tam giác AEF đồng dạng không? vì sao?
 b) Gọi I là giao điểm của CD và EF. Tính tỷ số diện tích của hai tam giác IDF và tam giác IEC.

Câu 2 (2,5 điểm):

Cho tứ giác ABCD có $AB = 4\text{cm}$; $BC = 20\text{cm}$; $CD = 25\text{cm}$; $DA = 8\text{cm}$, đường chéo $BD = 10\text{cm}$.

- a) Các tam giác ABD và BDC có đồng dạng với nhau không? Vì sao?
 b) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang.

Câu 3 (1 điểm): Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn là AC. Từ C hạ các đường vuông góc CE và CF lần lượt xuống các tia AB, AD. Chứng minh rằng $AB.AE + AD.AF = AC^2$

ĐÁP ÁN

I. Trắc nghiệm (4 điểm): Chọn mỗi ý đúng được 1 điểm

Câu	1	2	3	4
Đáp án	D	D	A	a. $\frac{DB}{DC}$; b. $\frac{BC}{BA}$; c. $\frac{CA}{CB}$; d.1

II. Tự luận (6 điểm)**Câu 1 (2,5 điểm)**

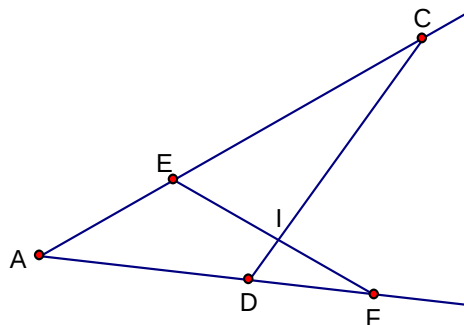
Vẽ hình đúng (0,5đ)

a) $\triangle ACD$ và $\triangle AFE$ đồng dạng

vì $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE} = \frac{4}{3}$; A chung (1 điểm)

b) Chứng minh $\triangle IDF$ và $\triangle IEC$ đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow k = 2/5 \Rightarrow \frac{S_{IDF}}{S_{IEC}} = \frac{4}{25}$ (1 điểm)

**Câu 2 (2,5 điểm)**

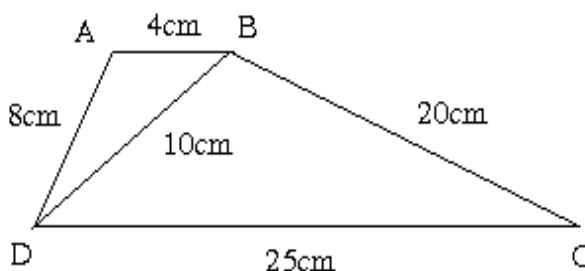
Vẽ hình, ghi gt, kl đúng được (0,5 điểm)

a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle BDC$ có:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$



Vậy theo trường hợp đồng dạng thứ nhất suy ra $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ (1,5 đ)

b) Từ $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ suy ra $\angle ABD = \angle BDC$ (hai góc ở vị trí so le trong)

suy ra $AB \parallel CD \Rightarrow$ tứ giác ABCD là hình thang. (1 điểm)

Câu 3 (1 điểm)

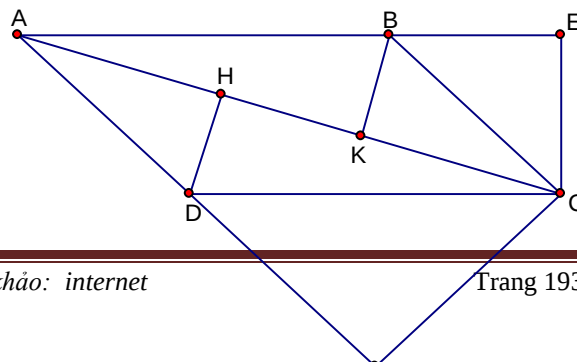
Kẻ DH vuông góc AC, BK vuông góc AC

C/m $\triangle AHD$ đồng dạng $\triangle AFC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AH}{AF} \Rightarrow AD.AF = AC.AH \quad (1)$$

C/m $\triangle AKB$ đồng dạng $\triangle AEC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AK \quad (2)$$



C/m $\triangle AHD = \triangle CKB$ (ch-gn) $\Rightarrow AH = CK$ (3)

Từ 1, 2, 3 $\Rightarrow AB.AE + AD.AF$

$= AC.AK + AC.AH = AC.(AK + AH)$

$= AC.(AK + CK) = AC.AC = AC^2$.

ĐỀ III

I TRẮC NGHIỆM: (3 điểm)

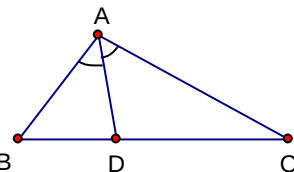
Khoanh tròn chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1: Cho đoạn thẳng $AB = 20\text{cm}$, $CD = 30\text{cm}$. Tỉ số của hai đoạn thẳng AB và CD là:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{20}{3}$ D. $\frac{30}{2}$

Câu 2: Cho AD là tia phân giác BAC (hình vẽ) thì:

- A. $\frac{AB}{AC} = \frac{DC}{DB}$ B. $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ C. $\frac{AB}{DB} = \frac{DC}{AC}$ D. $\frac{AB}{DB} = \frac{DC}{BC}$

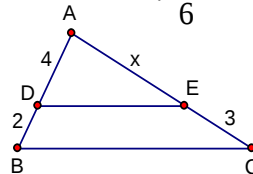


Câu 3: Cho $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ theo tỉ số đồng dạng là $\frac{2}{3}$ thì $\triangle DEF$ $\sim$ $\triangle ABC$ theo tỉ số đồng dạng là:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{4}{6}$

Câu 4: Độ dài x trong hình vẽ là: ($DE \parallel BC$)

- A. 5 B. 6
C. 7 D. 8



Câu 5: Nếu hai tam giác ABC và DEF có $A = D$ và $C = E$ thì :

- A. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ B. $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ C. $\triangle CAB \sim \triangle DEF$ D. $\triangle CBA \sim \triangle DFE$

Câu 6: Điền dấu “X” vào ô trống thích hợp

Câu	Đ	S
1. Hai tam giác đồng dạng thì bằng nhau		
2. Hai tam giác vuông cân luôn đồng dạng		
3. Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng		
4. Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng		
5. Hai tam giác cân có một góc bằng nhau thì đồng dạng		
6. Nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng		
7. Hai tam giác đều luôn đồng dạng với nhau		

II. TỰ LUẬN (7 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12\text{ cm}$, $AC = 16\text{ cm}$. Vẽ đường cao AH .

a) Chứng minh $\triangle HBA \sim \triangle ABC$

b) Tính BC , AH , BH .

c) Vẽ đường phân giác AD của tam giác ABC ($D \in BC$). Tính BD , CD .

d) Trên AH lấy điểm K sao cho $AK = 3,6\text{cm}$. Từ K kẻ đường thẳng song song BC cắt AB và AC lần lượt tại M và N . Tính diện tích tứ giác $BMNC$.

ĐÁP ÁN

I TRẮC NGHIỆM: (3 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6						
						1	2	3	4	5	6	7

Đáp án	A	B	B	B	B	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Điểm	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25

II. TỰ LUẬN (7 điểm)

Câu	Đáp án	Biểu điểm
		0,5
a)	Chứng minh $\triangle HBA \simeq \triangle ABC$ Xét $\triangle HBA$ và $\triangle ABC$ có: $\widehat{H} = \widehat{A} = 90^\circ$ B chung $\Rightarrow \triangle HBA \simeq \triangle ABC$ (g.g)	0,25 0,25 0,25 0,25
b)	Tính BC, AH, BH Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A (gt) $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$ Hay: $BC = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ cm Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ $\Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC$ hay $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6$ (cm) $\triangle HBA \simeq \triangle ABC$ $\Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{BA}{BC}$ hay: $HB = \frac{BA^2}{BC} = \frac{12^2}{20} = 7,2$ (cm)	0,5 0,5 0,5 0,5
c)	Tính BD, CD Ta có: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ (cmt) $\Rightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{AB}{AB + AC}$ hay $\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC}$ $\frac{BD}{20} = \frac{12}{12 + 16} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{20 \cdot 3}{7} \approx 8,6$ cm Mà: $CD = BC - BD = 20 - 8,6 = 11,4$ cm	0,5 0,25 0,25
d)	Tính diện tích tứ giác BMNC. Vì $MN \parallel BC$ nên $\triangle AMN \simeq \triangle ABC$ và AK, AH là hai đường cao tương ứng Do đó: $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AK}{AH}\right)^2 = \left(\frac{3,6}{9,6}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ Mà: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ $\Rightarrow S_{AMN} = 13,5$ (cm²) Vậy: $S_{BMNC} = S_{ABC} - S_{AMN} = 96 - 13,5 = 82,5$ (cm²)	0,25 0,5 0,25 0,25 0,25

Lưu ý: Mọi cách giải khác nếu đúng và có lập luận chặt chẽ đều cho điểm tối đa câu bài đó.

ĐỀ IV**I-TRẮC NGHIỆM** (3đ)

Điền vào chỗ trống (.....) các câu thích hợp để được một câu trả lời đúng.

Câu 1 Đường phân giác của một góc trong tam giác chia ... (1) ... thành hai đoạn thẳng .. (2) ... hai đoạn thẳng ấy.

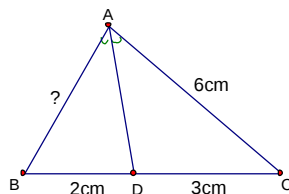
Câu 2 $\square ABC \square \square DEF$ với tỷ số đồng dạng là $k \neq 0$ thì $\square DEF \square \square ABC$ với tỷ số đồng dạng là ... (3) ...

Câu 3 $\square A'B'C' \square \square ABC \Leftrightarrow \begin{cases} A' = \dots(4)\dots; \dots(5)\dots = B, C' = \dots(6)\dots \\ \dots(7)\dots = \frac{B'C'}{AB} = \dots(9)\dots \\ \dots(8)\dots = \frac{AC}{AC} \end{cases}$

Câu 4 Tam giác vuông này có một cạnh huyền và ... (10) ... tỷ lệ với ... (11) ... và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì (12)

Câu 5 Tam giác này có hai góc (13) của tam giác kia thì (14)

Câu 6 Cho hình vẽ bên. Hãy tính độ dài cạnh AB ?



Chọn đáp án đúng trong các đáp án sau : Độ dài cạnh AB là:

- A. 4cm B. 5cm C. 6cm D. 7cm

II. TỰ LUẬN (7 điểm) :

Câu 7 Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 12cm, AC = 16cm. Vẽ đường cao AH (H ∈ BC) và tia phân giác của góc A cắt BC tại D.

- Chứng minh tam giác HBA đồng dạng tam giác ABC
- Tính độ dài cạnh BC
- Tính tỷ số diện tích của hai tam giác ABD và ACD
- Tính độ dài các đoạn thẳng BD và CD
- Tính độ dài chiều cao AH

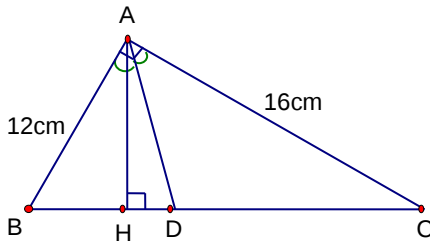
ĐÁP ÁN**I. TRẮC NGHIỆM**

Câu	1 (0,5đ)		2(0,5đ)	3(0,5đ)					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Đáp án	cạnh đối diện	tỷ lệ với hai cạnh kề	$\frac{1}{k}$	A	B'	C	A'B'	BC	A'C'

Câu	4(0,5đ)			5(0,5đ)		6(0,5đ)
	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	
Đáp án	một cạnh góc vuông	cạnh huyền	hai tam giác vuông đó đồng dạng	lần lượt bằng hai góc	hai tam giác đó đồng dạng	A

II. TỰ LUẬN:

Câu	Đáp án	Điểm
7		

		GT $\triangle ABC$ vuông tại A, AD là phân giác của BAC $AH \perp BC$; $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$ KL a) $\triangle HBA \sim \triangle ABC$; b) Tính BC $= ?$ c) $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = ?$; d) $BD = ?$; CD $= ?$ e) $AH = ?$	0,5
a)	$\triangle HBA \sim \triangle ABC$: Xét $\triangle HBA$ & $\triangle ABC$ là hai tam giác vuông có B chung $\Rightarrow \triangle HBA \sim \triangle ABC$ (g.g)		1,0
b)	Tính BC: Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A (gt) $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$ Hay: $BC = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20\text{ cm}$		0,75 0,75
c)	$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = ?$ Vì AD là phân giác của BAC nên ta có : $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ hay $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ Mà $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot BD$ và $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AH \cdot CD \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{4}$		0,75 0,75
d)	$BD = ?$, $CD = ?$ Ta có : $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ (cmt) $\Rightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{AB}{AB + AC}$ hay $\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC}$ $\frac{BD}{20} = \frac{12}{12 + 16} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{20 \cdot 3}{7} \approx 8,6\text{ cm}$ Mà $CD = BC - BD = 20 - 8,6 = 11,4\text{ cm}$		0,5 0,5 0,5
e)	e) $AH = ?$ Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ $\Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC$ hay $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = AH = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6\text{ (cm)}$		0,5 0,5

ĐỀ V**I. TRẮC NGHIỆM (3 điểm)**

Câu 1: Cho $AB = 4\text{cm}$, $DC = 6\text{cm}$. Tỉ số của hai đoạn thẳng AB và CD là:

- A. $\frac{4}{6}$ B. $\frac{6}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 2

Câu 2: Cho $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$. Tỉ số chu vi của hai tam giác đó:

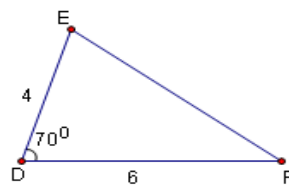
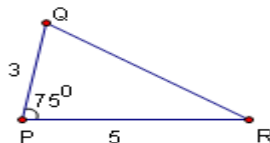
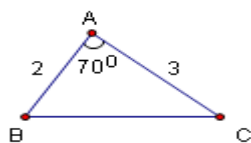
A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

Câu 3: Chỉ ra tam giác đồng dạng trong các hình sau:



A.

$\triangle DEF \sim \triangle ABC$

B. $\triangle PQR \sim \triangle EDF$

C. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

D. Cả A, B, C đúng

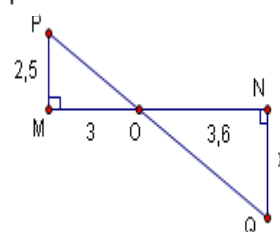
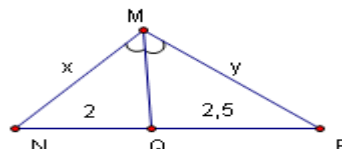
Câu 4. Trong hình biết MQ là tia phân giác $\angle NMP$

Tỷ số $\frac{x}{y}$ là: A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{4}{5}$



Câu 5. Độ dài x trong hình bên là:

A. 2,5

B. 3

C. 2,9

D. 3,2

Câu 6. Trong hình vẽ cho biết $MM' \parallel NN'$.

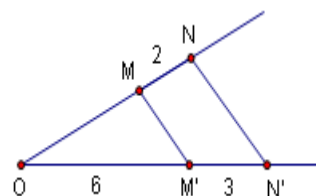
Số đo của đoạn thẳng OM là:

A. 3 cm

B. 2,5 cm

C. 2 cm

D. 4 cm



Câu 7: Điền từ thích hợp vào chỗ (.....) để hoàn thiện khẳng định sau:

Nếu một đường thẳng cắt.....của một tam giác.....với cạnh còn lại.....một tam giác mới.....tương ứng tỉ lệ.....của.....

II. TỰ LUẬN (7 điểm)

Câu 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D, từ D kẻ $DE \perp AC$ ($E \in AC$)

a) Tính tỉ số: $\frac{BD}{DC}$, độ dài BD và CD

b) Chứng minh: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$

c) Tính DE

d) Tính tỉ số $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$

ĐÁP ÁN

I. TRẮC NGHIỆM : (3 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	C	B	A	D	B	D

Thứ tự điền là: **hai cạnh, và song song, thì nó tạo thành, có ba cạnh, với ba cạnh, tam giác đã cho**

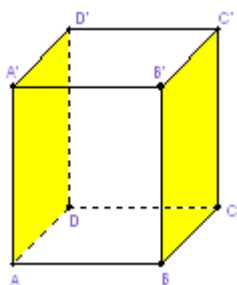
II. TỰ LUẬN (7 Điểm)

Câu	Đáp án	Điểm
8		0,5

	a) Vì AD là phân giác $A \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ Từ $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC + BD} = \frac{AB}{AC + AB}$ $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC + AB} \Rightarrow \frac{BD}{15} = \frac{9}{21}$ $\Rightarrow BD = \frac{9 \cdot 15}{21} = 6,4 \text{ cm}$ Từ đó: $DC = BC - BD = 15 - 6,4 = 8,6 \text{ cm}$	0,5 1 1 0,25 0,25
	b) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EDC$ có: $A = E = 90^\circ$, C chung $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC$ (g.g) c) $\triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC}$ $\Rightarrow DE = \frac{AB \cdot DC}{BC} = \frac{9 \cdot 8,6}{15} = 5,2 \text{ cm}$ d) $S_{ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot BD$ $S_{ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot DC$ $\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BD}{\frac{1}{2} AH \cdot DC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$	1,5 0,75 0,75 0,25 0,25

CHƯƠNG IV: HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG- HÌNH CHÓP ĐỀU

HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

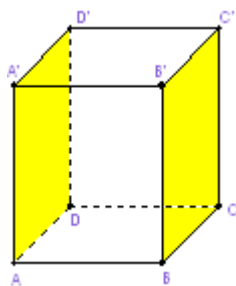


- Hình hộp chữ nhật có 6 mặt đều là hình chữ nhật, 8 đỉnh và 12 cạnh chia thành 3 nhóm, mỗi nhóm có 4 cạnh bằng nhau.
 - Hai mặt hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là hai mặt đối diện.
 - Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là những hình vuông.
- ☞ Trong không gian hai đường thẳng phân biệt nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung gọi là hai đường thẳng song song.
- ☞ Trong không gian hai đường thẳng a, b chúng có thể:

- 1) Cắt nhau;
 - 2) Song song;
 - 3) Trùng nhau;
 - 4) Không cùng nằm chung trong bất kỳ mặt phẳng nào, gọi đó là hai đường thẳng chéo nhau.
- ☞ Nếu đường thẳng song song với mặt phẳng thì chúng không có điểm chung.
- ☞ Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng và nó song song đường thẳng b nằm trong mặt phẳng thì đường thẳng a song song với mặt phẳng.
- ☞ Nếu hai mặt phẳng song song thì chúng không có điểm chung.
- ☞ Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng thì đường thẳng ấy vuông góc với mặt phẳng.

☞ Thể tích hình lập phương bằng tích của ba kích thước: $V = a.b.c$

☞ Thể tích hình hộp chữ nhật bằng lập phương của cạnh: $V = a^3$.



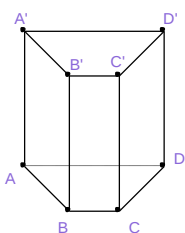
Ví dụ 1 : Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' như hình vẽ.

- Hãy kể tên các đỉnh, các cạnh, các cặp mặt đối diện của nó.
- Hãy chỉ ra những đường thẳng cắt đường thẳng AB, song song với đường thẳng CD, chéo nhau với đường thẳng AA'.
- Mặt phẳng nào song song với đường thẳng AB.
- Đường thẳng nào song song với mặt phẳng (ABCD).
- Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (AA'D'D).
- Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng CD.
- Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (BB'C'C).
- Chứng minh $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$, (trong hình hộp chữ nhật bình phương mỗi đường chéo bằng tổng các bình phương của ba kích thước).

Bài giải

- Các đỉnh của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' là A, B, C, D; A', B', C', D'.
Các cạnh là AB, CD, A'B', C'D' và AD, BC, B'C', A'D' và AA', BB', CC', DD'.
Các cặp mặt đối diện là : (ABCD) và (A'B'C'D'); (ADD'A') và (BCC'B'); (ABB'A') và (DCC'D').
- Những đường thẳng cắt đường thẳng AB là đường thẳng AA', đường thẳng AD.
Những đường thẳng song song với đường thẳng CD là đường thẳng AB, A'B', C'D'.
Những đường thẳng chéo nhau với đường thẳng AA' là đường thẳng BC, CD, B'C', C'D'.
- Song song với đường thẳng AB là mặt phẳng (CDD'C'); (A'B'C'D').
- Song song với mặt phẳng (ABCD) là đường thẳng A'B', C'D', A'D', B'C'.
- Song song với mặt phẳng (AA'D'D) là mặt phẳng (BB'C'C).
- Vuông góc với đường thẳng CD là mặt phẳng (ADD'A'); (BCC'B').
- Vuông góc với mặt phẳng (BB'C'C) là đường thẳng AB, CD, A'B', C'D'.
- Do ABCD.A'B'C'D' là hình chữ nhật nên ABCD là hình chữ nhật, theo định lý Pitago ta có :
 $AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD^2 + AB^2$, (1).
Do $CC' \perp (ABCD)$ nên $\triangle ACC'$ vuông tại C. Áp dụng định lý Pitago một lần nữa ta có :
 $AC'^2 = AC^2 + CC'^2$, vì $CC' = AA'$ nên $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$.

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG



- Các mặt bên là những hình chữ nhật.
 - Các cạnh bên song song và bằng nhau.
 - Hai đáy là hai đa giác có cạnh tương ứng song song với nhau, hai đáy là hai đa giác bằng nhau.
- ☞ Diện tích xung quanh của lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân với chiều cao :

$$S_{xq} = 2p.h$$

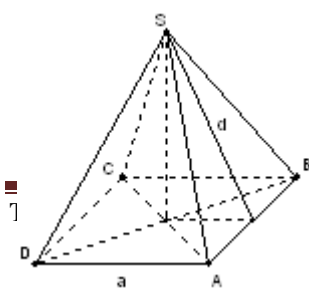
p là nửa chu vi, h là chiều cao của lăng trụ.

☞ Thể tích của lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao :

$$V = S.h$$

S diện tích đáy, h chiều cao của lăng trụ đứng.

HÌNH CHÓP ĐỀU



- Những mặt bên đều là những tam giác cân bằng nhau và có chung đỉnh.
- Mặt đáy là một đa giác đều.

- Đường thẳng qua đỉnh vuông góc với đáy gọi là đường cao. Chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.
- Đường cao của các mặt bên gọi là các trung đoạn, các trung đoạn đều bằng nhau.
- ☞ Diện tích xung quanh của chóp đều bằng tích của nửa chu vi đáy nhân

với trung đoạn : $S_{xq} = p.d$,

p là nửa chu vi, d là trung đoạn của chóp đều.

☞ Thể tích của chóp đều bằng $\frac{1}{3}$ diện tích đáy nhân với chiều cao : $V = \frac{1}{3} S.h$,

S diện tích đáy, h chiều cao của chóp đều.

Ví dụ 1 : Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp tứ giác đều có cạnh bên b , cạnh đáy a . Áp dụng cho $a = 20, (cm)$ và $b = 24, (cm)$.

Bài giải

Giả sử $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều thì $SA = SB = SC = SD = b$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Diện tích của nó bằng : $S = a^2$. Gọi M là trung điểm của AB ta có : $MA = \frac{a}{2}$

Xét $\triangle SAM$ có $M = 90^\circ$, $SA = b$, $MA = \frac{a}{2}$ nên $d = \sqrt{SA^2 - MA^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Diện tích xung quanh hình chóp : $S_{xq} = 4.S_{SAB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = 2.a \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Diện tích toàn phần hình chóp : $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2.a \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + a^2$.

Gọi H là chân đường cao của chóp đều $\Rightarrow H$ là tâm hình vuông $ABCD$ cạnh $a \Rightarrow HM = \frac{a}{2}$.

Xét $\triangle SHM$ có $H = 90^\circ$, $SM = d = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $HM = \frac{a}{2}$ nên :

$$h = SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{\left(\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Thể tích chóp : $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

Áp dụng cho $a = 20, (cm)$ và $b = 24, (cm)$.

Diện tích đáy bằng : $S = a^2 = 20^2 = 400, (cm^2)$.

Trung đoạn : $d = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{24^2 - \frac{20^2}{4}} = \sqrt{24^2 - 5^2} = \sqrt{19.29}$.

Diện tích xung quanh hình chóp : $S_{xq} = 2.a \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = 2.20 \cdot \sqrt{24^2 - \frac{20^2}{4}} = 40 \cdot \sqrt{19.29}$.

Diện tích toàn phần hình chóp : $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 40 \cdot \sqrt{19.29} + 400$.

$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{24^2 - \frac{20^2}{2}} = \sqrt{24^2 - 200} = \sqrt{376}$.

Thể tích chóp : $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot \sqrt{24^2 - \frac{20^2}{2}} = \frac{400}{3} \sqrt{376}$.

