

Chương 3

Tam giác đồng dạng

§1 Định lý Ta-lét

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Tỷ số của hai đoạn thẳng

Định nghĩa 19. Tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

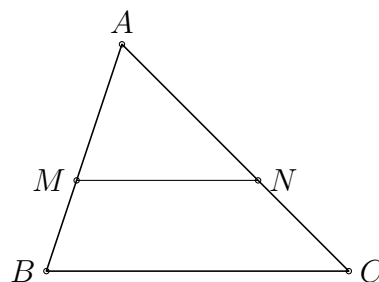
1.2 Đoạn thẳng tỉ lệ

Định nghĩa 20. Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức : $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

1.3 Định lý Ta-lét

Định lý 9. Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

GT	$\triangle ABC, MN \parallel BC (M \in AB, N \in AC)$
KL	$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}; \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}; \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}.$



⚠ 22. Chú ý : Định lý Ta-lét vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 36. Viết tỉ số các cặp đoạn thẳng hoặc tính tỉ số của hai đoạn thẳng

Sử dụng định nghĩa đoạn thẳng tỉ lệ.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Viết tỉ số của các cặp đoạn thẳng sau

a) $AB = 125 \text{ cm}, CD = 625 \text{ cm};$ **ĐS:** $\frac{1}{5}$ b) $MN = 45 \text{ cm}, PQ = 13,5 \text{ dm.}$ **ĐS:** $\frac{1}{3}$.

 **Lời giải.**

a) $\frac{AB}{CD} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}.$

b) $\frac{MN}{PQ} = \frac{45}{135} = \frac{1}{3}.$

□

 **Ví dụ 2.** Viết tỉ số của các cặp đoạn thẳng sau

a) $AB = 5 \text{ cm}, CD = 15 \text{ cm};$ **ĐS:** $\frac{1}{3}$ b) $EF = 48 \text{ cm}, GH = 16 \text{ dm.}$ **ĐS:** $\frac{3}{10}$

 **Lời giải.**

a) $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$

b) $\frac{EF}{GH} = \frac{48}{160} = \frac{3}{10}.$

□

 **Ví dụ 3.** Đoạn thẳng AB gấp 5 lần đoạn thẳng CD , đoạn thẳng $A'B'$ gấp 7 lần đoạn thẳng CD .

a) Tính tỉ số của hai đoạn thẳng AB và $A'B'$.

ĐS: $\frac{5}{7}$

b) Cho biết đoạn thẳng $MN = 55 \text{ cm}$ và $M'N' = 77 \text{ cm}$; hỏi hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ có tỉ lệ với đoạn thẳng MN và $M'N'$ không?

ĐS: Có tỉ lệ

 **Lời giải.**

a) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{5CD}{7CD} = \frac{5}{7}.$

b) $\frac{MN}{M'N'} = \frac{55}{77} = \frac{5}{7} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{MN}{M'N'}.$

Vậy hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ tỉ lệ với đoạn thẳng MN và $M'N'$.

□

Ví dụ 4. Cho biết độ dài của MN gấp 5 lần độ dài của PQ và độ dài đoạn thẳng $M'N'$ gấp 12 lần độ dài của PQ .

a) Tính tỉ số của hai đoạn thẳng MN và $M'N'$.

ĐS: $\frac{5}{12}$

b) Cho biết đoạn thẳng $DE = 9$ cm và $D'E' = 10,8$ dm, hỏi hai đoạn thẳng MN và $M'N'$ có tỉ lệ với đoạn thẳng DE và $D'E'$ không?

ĐS: Không tỉ lệ

Lời giải.

a) $\frac{MN}{M'N'} = \frac{5PQ}{12PQ} = \frac{5}{12}$.

b) $\frac{DE}{D'E'} = \frac{9}{108} = \frac{1}{12} \neq \frac{5}{12} = \frac{MN}{M'N'}$.

Vậy hai đoạn thẳng MN và $M'N'$ không tỉ lệ với đoạn thẳng DE và $D'E'$.

□

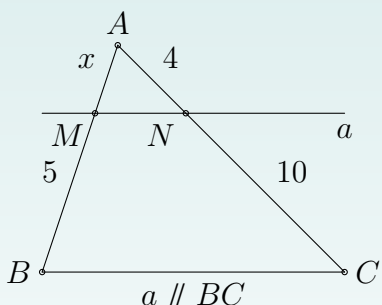
Dạng 37. Sử dụng định lý Ta-lét để tính độ dài đoạn thẳng hoặc chứng minh đoạn thẳng tỉ lệ

Bước 1. Xác định các cặp đoạn thẳng tỉ lệ có được nhờ định lý Ta-lét.

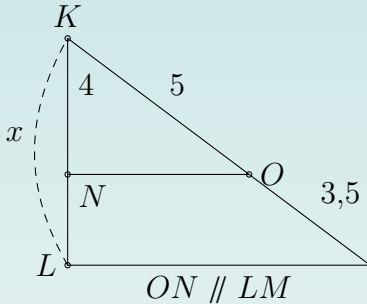
Bước 2. Sử dụng độ dài các đoạn thẳng đã có và vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức để tìm độ dài đoạn thẳng cần tính.

BÀI TẬP MẪU

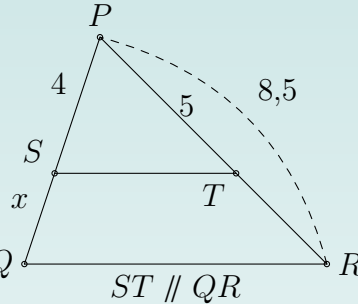
Ví dụ 1. Tính x trong các trường hợp sau.

a) 

ĐS: $x = 2$

b) 

ĐS: $x = 6,8$

c) 

ĐS: $x = 2,8$

Lời giải.

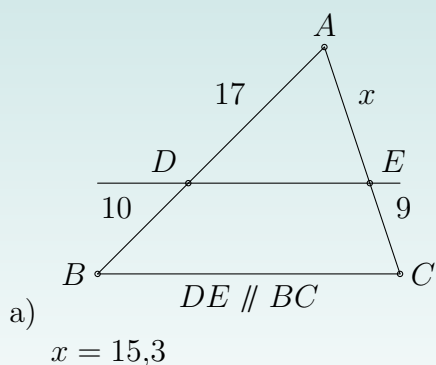
a) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow x = 2.$

b) $\frac{KN}{KL} = \frac{KO}{KM} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{5}{5+3,5} \Leftrightarrow x = 6,8.$

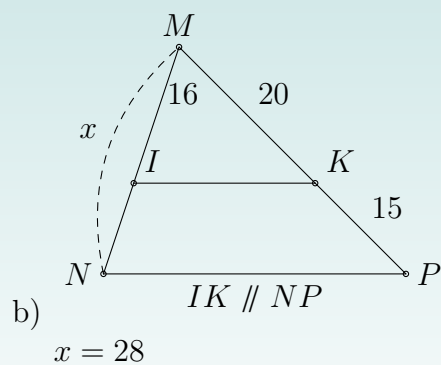
c) $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{5}{8,5-5} \Leftrightarrow x = 2,8.$

□

Ví dụ 2. Tính x trong các trường hợp sau.



ĐS:



ĐS:

Lời giải.

a) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{17}{10} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow x = 15,3.$

b) $\frac{MI}{MN} = \frac{MK}{MP} \Leftrightarrow \frac{16}{x} = \frac{20}{20+15} \Leftrightarrow x = 28.$

□

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ có $(AB \parallel CD)$ và $AB < CD$. Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại M, N . Chứng minh

a) $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC};$

b) $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC};$

c) $\frac{MD}{DA} = \frac{NC}{CB}.$

Lời giải.

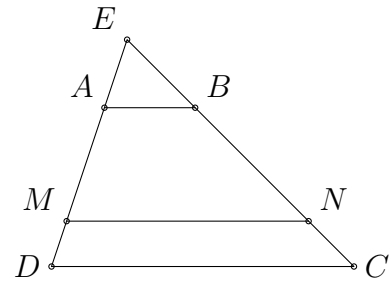
Gọi giao điểm của AD và BC là E .

a) Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC}$ và $AB \parallel MN$ nên $\frac{EA}{AM} = \frac{EB}{BN}$.

Từ 2 điều trên suy ra $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$.

b) Theo ý a) ta có $\frac{MA}{NB} = \frac{AD}{BC} = \frac{EA}{EB} = \frac{AM}{BN}$ nên theo tính chất của tỉ lệ thức suy ra $\frac{MA}{NB} = \frac{AD - AM}{BC - BN} = \frac{MD}{NC}$. Vậy $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$.

c) Theo ý b) ta có $\frac{MD}{NC} = \frac{DA}{CB} = \frac{MA}{NB}$ nên theo tính chất của tỉ lệ thức suy ra $\frac{MD}{NC} = \frac{MD + MA}{NC + NB} = \frac{AD}{BC}$. Vậy $\frac{MD}{DA} = \frac{NC}{CB}$.



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , đường thẳng d cắt AB , AC lần lượt tại B' , C' sao cho $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Chứng minh

a) $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$;

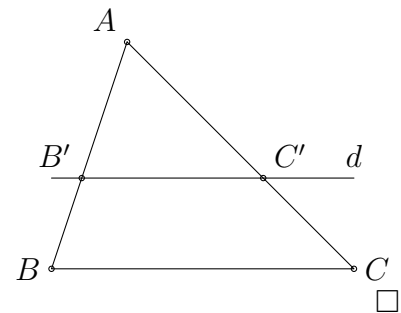
b) $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.

Lời giải.

Từ $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$ suy ra $d \parallel BC$ (theo định lý Ta-lét đảo).

a) Vì $B'C' \parallel BC$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$;

b) Vì $B'C' \parallel BC$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.



3 Bài tập về nhà

Bài 1. Viết tỉ số của các cặp đoạn thẳng có độ dài như sau

a) $MN = 25\text{cm}$ và $PQ = 10\text{dm}$; **ĐS:** $\frac{1}{4}$ b) $EF = 1,2\text{m}$ và $GH = 24\text{cm}$. **ĐS:** $\frac{5}{1}$

Lời giải.

a) $\frac{MN}{PQ} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

b) $\frac{EF}{GH} = \frac{120}{24} = \frac{5}{1}$.

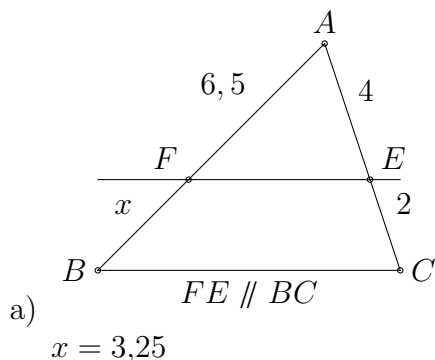
Bài 2. Cho biết $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$ và $CD = 12\text{cm}$. Tính độ dài AB .

ĐS: $AB = 9\text{ cm}$

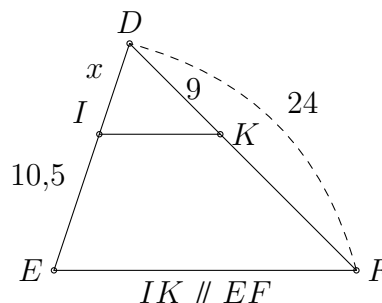
Lời giải.

Ta có $\frac{AB}{12} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = 12 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = 9\text{ cm}$. □

Bài 3. Tính x trong các trường hợp sau. Tính x trong các trường hợp sau.



ĐS: b)



ĐS: $x = 6,3$

Lời giải.

a) $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{6,5}{x} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 3,25$.

b) $\frac{DI}{IE} = \frac{DK}{KF} \Leftrightarrow \frac{x}{10,5} = \frac{9}{24 - 9} \Leftrightarrow x = 6,3$. □

Bài 4. Cho góc xAy khác góc bẹt. Trên tia Ax lấy các điểm B, C . Qua B và C vẽ hai đường thẳng song song, cắt Ay lần lượt tại D và E . Qua E vẽ đường thẳng song song với CD cắt tia Ax tại F .

a) So sánh $\frac{AB}{AC}$ và $\frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF}$ và $\frac{AD}{AE}$.

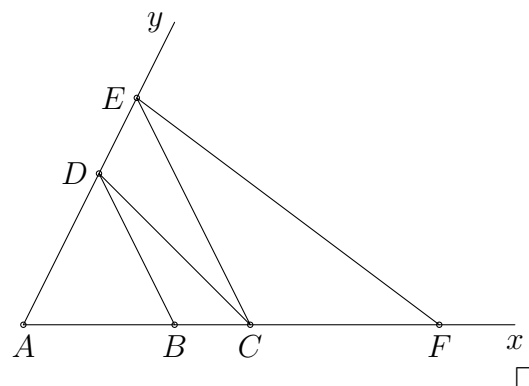
ĐS: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE}$

b) Chứng minh $AC^2 = AB \cdot AF$.

Lời giải.

a) Theo định lí Ta-lét ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE}$.

b) Từ a) ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AF}$ suy ra $AC^2 = AB \cdot AF$.



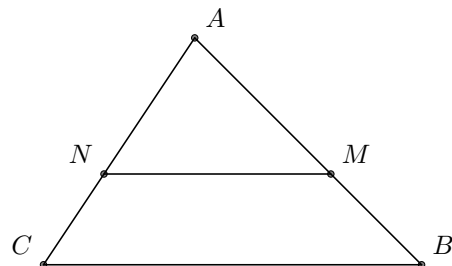
§2 Định lý đảo và hệ quả của định lý Ta-lét

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định lý Ta-lét đảo

Định lý 10. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại.

GT	$\triangle ABC, M \in AB, N \in AC$ $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$
KL	$MN \parallel BC.$



1.2 Hệ quả của định lý Ta-lét

Định lý 11. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỷ lệ với ba cạnh còn lại của tam giác đã cho.

GT	$\triangle ABC, MN \parallel BC (M \in AB, N \in AC)$
KL	$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$

⚠ 23. Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng d song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 38. Sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét để tính độ dài đoạn thẳng

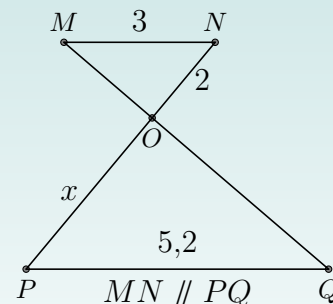
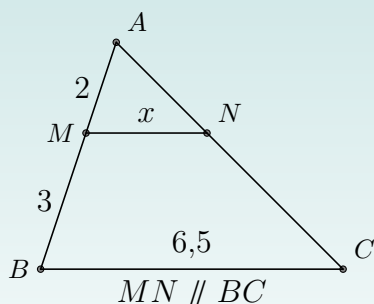
Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định các cặp đoạn thẳng tỷ lệ có được nhờ hệ quả của định lý Ta-lét.

Bước 2: Sử dụng độ dài các đoạn thẳng đã có và vận dụng các tính chất của tỷ lệ thức để tìm độ dài đoạn thẳng cần tính.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính x trong các trường hợp sau



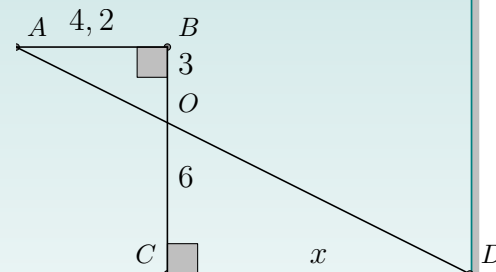
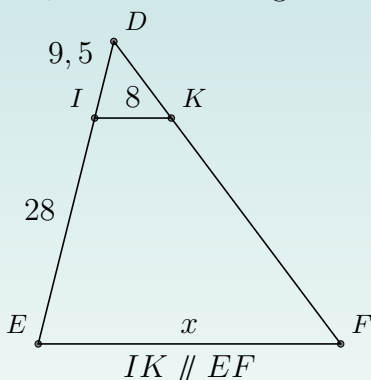
Lời giải.

$$\text{a) } \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3+2} \Rightarrow MN = \frac{2}{5} \cdot 6,5 = 2,6 (\text{đvdd}).$$

$$\text{b) } \frac{OP}{ON} = \frac{PQ}{MN} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5,2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{52}{15} (\text{đvdd}).$$

□

Ví dụ 2. Tính x trong các trường hợp sau



Lời giải.

$$\text{a) } \frac{IK}{x} = \frac{DI}{DE} \Leftrightarrow x = \frac{IK \cdot DE}{DI} = \frac{8 \cdot (9,5 + 28)}{9,5} = \frac{600}{19} (\text{đvdd}).$$

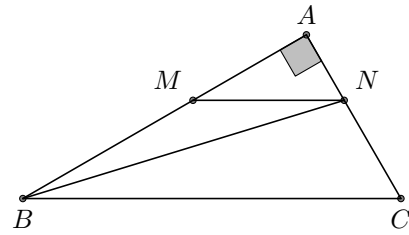
b) $\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{4,2}{x} \Leftrightarrow x = 8,4(\text{dvdd}).$

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$), $AB = 24$ cm, $AM = 16$ cm, $AN = 12$ cm. Tính độ dài của các đoạn thẳng NC và NB .

Lời giải.

Theo định lý Ta-lét thì $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
 $\Rightarrow AC = \frac{AB \cdot AN}{AM} = \frac{24 \cdot 12}{16} = 18(\text{cm})$
 $\Rightarrow NC = AC - AN = 6$ cm.
 Lại có tam giác ANB vuông tại A .
 Tính được $NB = \sqrt{AN^2 + AB^2} = 12\sqrt{5}$.

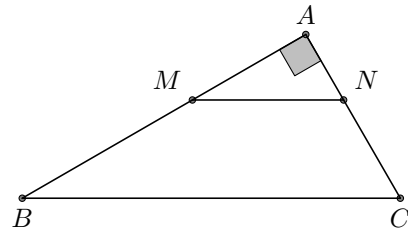


□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$), $AB = 25$ cm, $AM = 16$ cm, $BC = 45$ cm, $AN = 12$ cm. Tính độ dài của các đoạn thẳng MN và AC .

Lời giải.

Theo định lý Ta-lét thì $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Suy ra
 $MN = \frac{AM \cdot BC}{AB} = \frac{16 \cdot 45}{25} = 28,8$ cm.
 $AC = \frac{AB \cdot AN}{AM} = \frac{25 \cdot 12}{16} = 18,75$ cm.



□

Dạng 39. Sử dụng định lý Ta-lét đảo để chứng minh các đường thẳng song song

Thực hiện theo các bước

Bước 1: Xác định cặp đoạn thẳng tỷ lệ trong tam giác.

Bước 2: Sử dụng định lý đảo của định lý Ta-lét để chứng minh các đoạn thẳng song song.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi trung điểm của các đường chéo AC và BD lần lượt là M, N . Chứng minh rằng MN, AB và CD song song với nhau.

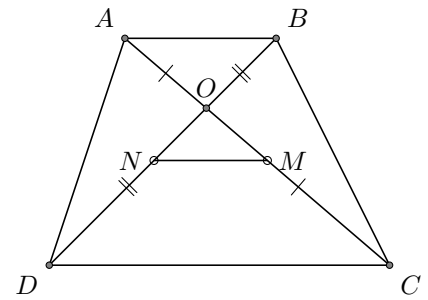
Lời giải.

Gọi giao điểm của hai đường chéo là O . Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{OC + OA}{OA} = \frac{OD + OB}{OB}$. Suy ra $\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$.

Từ $AC = 2AM$ và $BD = 2BN$.
Suy ra $\frac{2AM}{OA} = \frac{2BN}{OB} \Rightarrow \frac{AM}{OA} = \frac{BN}{OB}$.

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{AM - OA}{OA} = \frac{BN - OB}{OB}$ hay $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.

Áp dụng định lý Ta-lét đảo suy ra $MN \parallel AB$ mà $AB \parallel CD$ (do $ABCD$ là hình thang) nên $MN \parallel AB \parallel CD$.



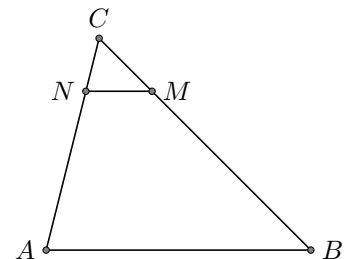
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có điểm M trên cạnh BC sao cho $BC = 4CM$. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{3}$. Chứng minh MN song song với AB .

Lời giải.

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CN}{AN + CN} = \frac{1}{3 + 1} \Rightarrow \frac{CN}{AC} = \frac{1}{4}$.

Mặt khác $\frac{CM}{BC} = \frac{1}{4}$. Suy ra $\frac{CM}{BC} = \frac{CN}{AC}$. Vậy $MN \parallel AB$.



□

Dạng 40. Sử dụng hệ quả định lý Ta-lét để chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Xét đường thẳng song song với một cạnh của tam giác, sử dụng hệ quả để lập các đoạn thẳng tỷ lệ.

Bước 2: Sử dụng các tỉ số đã có, cùng với các tính chất của tỉ lệ thức, các tỉ số trung gian (nếu cần) để tính độ dài các đoạn thẳng hoặc chứng minh các hệ thức có được từ hệ quả, từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau.

BÀI TẬP MẪU

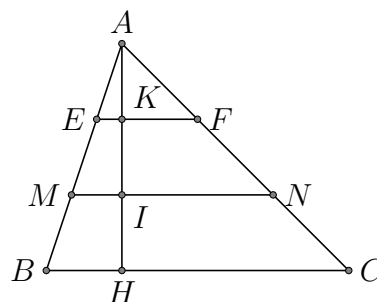
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $BC = 15\text{cm}$. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K vẽ các đường thẳng $EF \parallel BC, MN \parallel BC$.

1. Tính độ dài các đoạn thẳng EF và MN .
2. Tính diện tích tứ giác $MNEF$, biết rằng diện tích của tam giác ABC là 270 cm^2 .

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AH} = \frac{1}{3}$. Suy ra $EF = \frac{1}{3}BC = 5$ (cm).
Ta có $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{2}{3}$. Suy ra $MN = \frac{2}{3}BC = 10$ (cm).

- b) Vì $S_{ABC} = 270$ nên $AH \cdot BC = 540$.
Suy ra $AH = 36$ nên $IK = 12$.
Suy ra $S_{ABCD} = \frac{IK(EF + MN)}{2} = 90$ (cm²).



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C', H' .

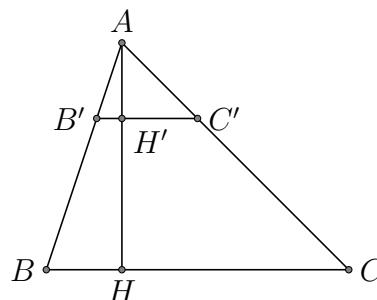
1. Chứng minh $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$.
2. Cho $AH' = \frac{1}{3}AH$ và diện tích tam giác ABC là $67,5$ cm². Tính diện tích tam giác $AB'C'$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.

- b) Vì $AH' = \frac{1}{3}AH$ nên $B'C' = \frac{1}{3}BC$.

$$\text{Suy ra } S_{AB'C'} = \frac{1}{2} \cdot AH' \cdot B'C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot AH \cdot \frac{1}{3} \cdot BC = \frac{1}{9} S_{ABC} = 7,5 \text{ cm}^2.$$



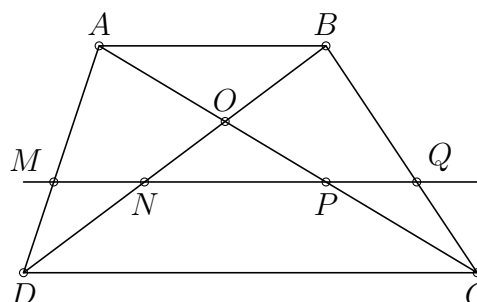
Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC và các đường chéo BD, AC lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh

1. $\frac{MD}{AD} = \frac{CQ}{BC}$.
2. $MN = PQ$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{MD}{AD} = \frac{DN}{DB} = \frac{CQ}{CB}$.

- b) Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB}$.



Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và đường thẳng qua O song song với đáy cắt các cạnh bên tại M và N . Chứng minh $OM = ON$.

Lời giải.

Xét $\triangle ADC$ có $MO \parallel DC$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{OM}{DC} = \frac{OA}{AC}. \quad (1)$$

Xét $\triangle BCD$ có $ON \parallel CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có

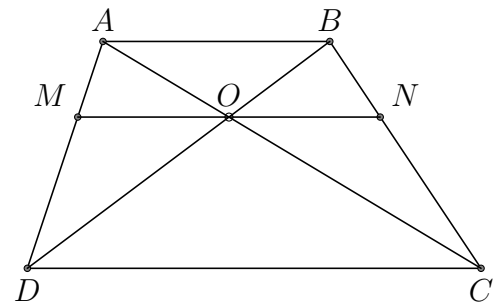
$$\frac{ON}{CD} = \frac{BO}{BC}. \quad (2)$$

Xét $\triangle CAB$ có $ON \parallel CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{BN}{BC} = \frac{AO}{AC}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{OM}{DC} = \frac{OA}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{ON}{CD}$.

Suy ra $OM = ON$.



□

3

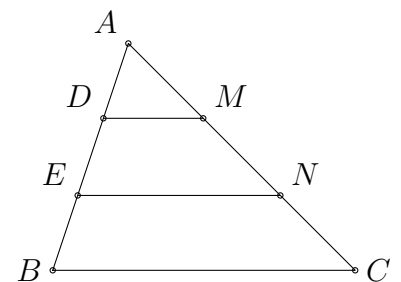
Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$. Trên cạnh AB lấy điểm D và E sao cho $AD = DE = EB$. Từ D, E kẻ các đường thẳng song song với BC cắt AC theo thứ tự tại M, N . Tính theo a độ dài các đoạn thẳng DM và EN .

Lời giải.

Áp dụng định lý Ta-lét ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{DM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = \frac{a}{3}$.

Tương tự ta có $\frac{AD}{AE} = \frac{DM}{EN} = \frac{1}{2} \Rightarrow EN = 2DM = \frac{2}{3}a$.



□

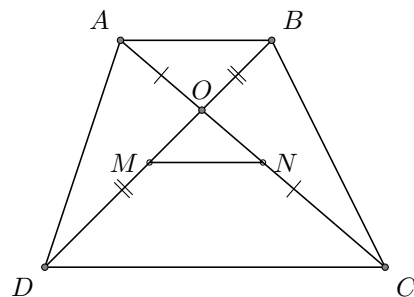
Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và AC . Biết rằng $MD = 2MO$, đáy lớn $CD = 5,6$ cm.

1. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

2. Chứng minh $MN = \frac{CD - AB}{2}$.

Lời giải.

- a) Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{OD}{2MD} = \frac{OC}{2NC} \Rightarrow \frac{OD}{MD} = \frac{OC}{NC}$.
 Suy ra $MN \parallel CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{OM}{OD} = \frac{1}{3}$. Vậy $MN = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{28}{15}$.



- b) Vì $OB = MB - OM = MD - OM = OM$
 nên $\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} = \frac{MO}{3MO} = \frac{1}{3}$ suy ra $CD = 3AB$.
 Vậy $MN = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{6}CD = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{6} \cdot 3AB = \frac{1}{2}(CD - AB)$.

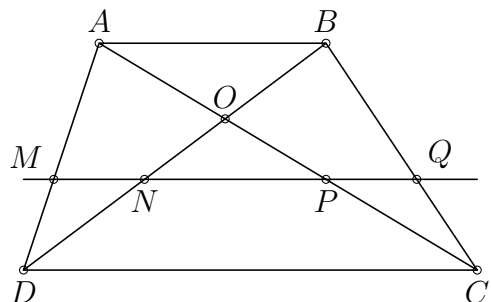
□

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC và các đường chéo BD, AC lần lượt tại M, Q, N, P . Chứng minh

1. $\frac{DN}{BD} = \frac{CP}{AC}$.
2. $MN = PQ$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{DN}{BD} = \frac{DM}{DA} = \frac{CP}{AC}$.
 b) Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{DN}{DB} = \frac{CP}{CA} = \frac{PQ}{AB}$ suy ra $MN = PQ$.



□

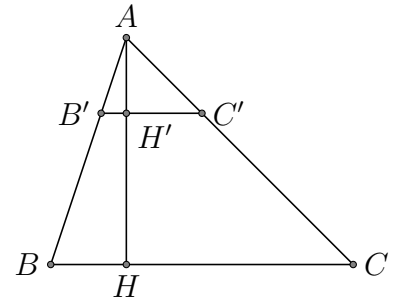
Bài 4. Tam giác ABC , đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C', H' . Chứng minh

- a) $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$;
- b) $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2$.

Lời giải.

a) $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'H'}{BH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}.$

b) $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AH' \cdot B'C'}{AH \cdot BC} = \left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2.$



□

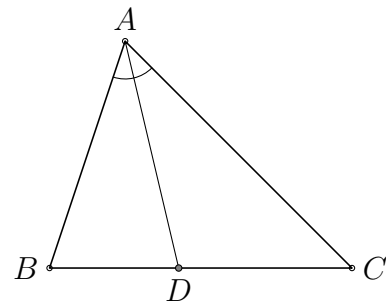
§3 Tính chất của đường phân giác của tam giác

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định lý

- ☑ Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng ấy.
- ☑ Ta có

GT	$\triangle ABC$, AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, ($D \in BC$).
KL	$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.



⚠ 24. Định lý vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác.

2 Bài tập và các dạng toán

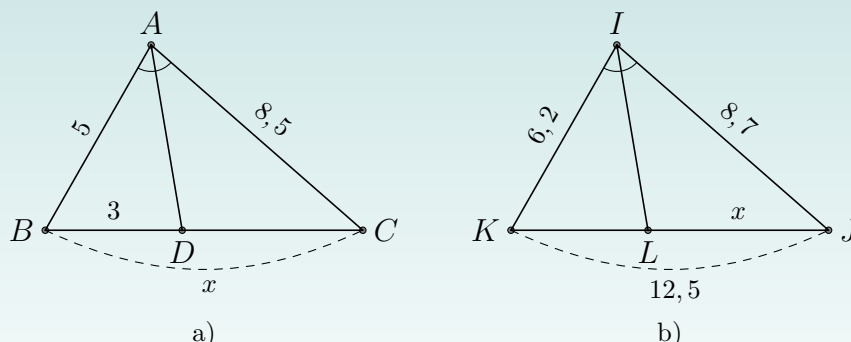
Dạng 41. Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính độ dài đoạn thẳng

Thực hiện theo các bước

- ☑ Bước 1: Xác định đường phân giác và lập các đoạn thẳng tỉ lệ.
- ☑ Bước 2: Sử dụng các đoạn thẳng tỉ lệ đó để tính độ dài đoạn thẳng chưa biết.

🔗 🔗 🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗 🔗 🔗

📖 **Ví dụ 1.** Tính x trong hình và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



Lời giải.

- ✓ Hình a: Do AD là đường phân giác trong của góc A nên ta có

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow DC = \frac{AC}{AB} \cdot DB.$$

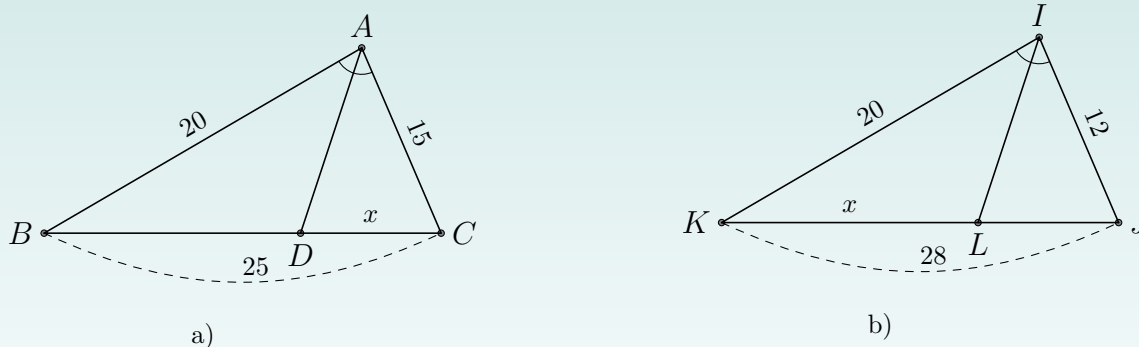
Thay số ta có $DC = \frac{8,5}{5} \cdot 3 = 5,1$. Khi đó $x = DB + DC = 3 + 5,1 = 8,1$.

- ✓ Hình b: Với $KL = 12,5 - x$ và do IL là đường phân giác trong của góc I nên theo tính chất đường phân giác ta có

$$\text{Theo tính chất đường phân giác ta có } \frac{KL}{LJ} = \frac{IK}{IJ} \Rightarrow \frac{12,5 - x}{x} = \frac{6,2}{8,7} \Leftrightarrow x = \frac{2175}{298} \approx 7,3.$$

□

Ví dụ 2. Tính x trong hình và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



Lời giải.

- ✓ Hình a: Ta có $BD = 25 - x$.

$$\text{Theo tính chất đường phân giác trong ta có } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{25 - x}{x} = \frac{20}{15} \Leftrightarrow x = \frac{75}{7} \approx 10,7.$$

- ✓ Hình b: Ta có $LJ = 28 - x$.

$$\text{Theo tính chất phân giác trong ta có } \frac{LK}{LJ} = \frac{IK}{IJ} \Rightarrow \frac{x}{28 - x} = \frac{20}{12} \Leftrightarrow x = \frac{35}{2} = 17,5.$$

□

Dạng 42. Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính tỉ số, chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song

Thực hiện theo các bước sau:

- ☑ Bước 1: Xác định đường phân giác và lập các đoạn thẳng tỉ lệ.
- ☑ Bước 2: Sử dụng các tỉ số đã có, cùng với các tính chất của tỉ lệ thức, các tỉ số trung gian (nếu cần) và định lý đảo của định lý Ta-lét để tính tỉ số đoạn thẳng hoặc chứng minh các hệ thức. Từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau hay các đường thẳng song song.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác cân ABC , có $BA = BC = a$, $AC = b$. Đường phân giác của góc A cắt BC tại M , đường phân giác góc C cắt BA tại N .

1. Chứng minh $MN \parallel AC$.

2. Tính MN theo a, b .

ĐS: $MN = \frac{ab}{a+b}$.

Lời giải.

1. Theo tính chất đường phân giác trong của góc A và góc C ta có:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

$$\frac{BN}{AN} = \frac{CB}{CA} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

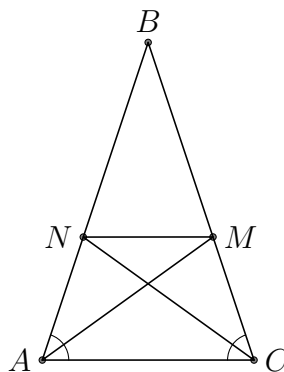
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BM}{CM} = \frac{BN}{AN}$. Theo định lý Thales đảo ta được $MN \parallel AC$.

2. Tính MN theo a, b .

Theo (2) có $\frac{BN}{AN} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{a+b}{b} \Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{BN}{AB} = \frac{a}{a+b}$.

Do $MN \parallel AC$ nên $\frac{BN}{BA} = \frac{MN}{AC} \Leftrightarrow MN = \frac{BN}{BA} \cdot AC = \frac{a}{a+b} \cdot b = \frac{ab}{a+b}$.

□



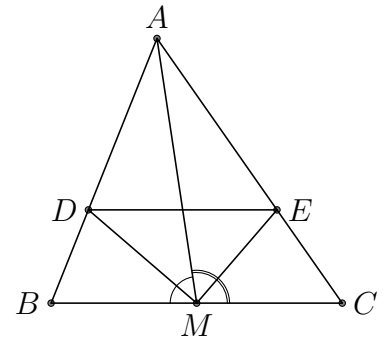
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Tia phân giác góc AMB cắt AB tại D , tia phân giác góc AMC cắt cạnh AC tại E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} \text{ và } \frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}.$$

Mặt khác $MB = MC$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$. Theo định lý Ta-lét đảo ta được $DE \parallel BC$.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $AB = 12$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 28$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D . Qua D kẻ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$).

- Tính độ dài các đoạn thẳng BD , DC và DE . **ĐS:** $DB = 10,5$; $DC = 17,5$; $DE = 7,5$.
- Cho biết diện tích tam giác ABC là S . Tính diện tích các tam giác ABD , ADE , DCE theo S . **ĐS:** $S_{\triangle ABD} = \frac{3}{8}S$, $S_{\triangle ADE} = \frac{15}{64}S$, $S_{\triangle DCE} = \frac{25}{64}S$.

Lời giải.

1.

Theo tính chất đường phân giác trong góc A ta có

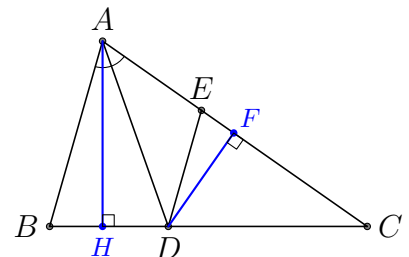
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow DB = \frac{3}{5}DC. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } DB + DC = BC = 28. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tính được $DB = 10,5$ cm và $DC = 17,5$ cm.

Vì $DE \parallel AB$ nên ta có

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DE = \frac{DC}{BC} \cdot AB = \frac{17,5}{28} \cdot 12 = 7,5 \text{ cm.}$$



- Gọi AH là đường cao kẻ từ A của $\triangle ABC$. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$; $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BD$ và $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD$. Suy ra $S_{\triangle ABD} = \frac{BD}{BC} \cdot S = \frac{3}{8}S$ và $S_{\triangle ADC} = \frac{CD}{BC} \cdot S = \frac{5}{8} \cdot S$.
 Chứng minh tương tự bằng cách trong $\triangle ADC$ ta kẻ đường cao DF ta được
 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot AC$; $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot AE$ và $S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot EC$.
 Suy ra
 $S_{\triangle ADE} = \frac{AE}{AC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{BD}{BC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{15}{64} \cdot S$. và $S_{\triangle DCE} = \frac{EC}{AC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{DC}{BC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{25}{64} \cdot S$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D .

- Tính độ dài các đoạn thẳng BD , DC . **ĐS:** $DB \approx 10,7$ cm; $DC \approx 14,3$ cm.
- Tính tỉ số diện tích hai tam giác ABD và ACD . **ĐS:** $\frac{107}{143}$.

✍️ Lời giải.

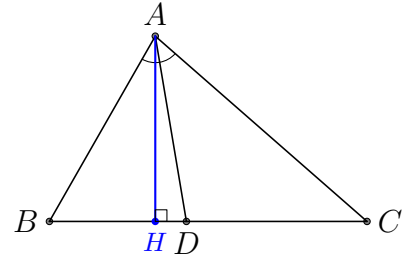
1.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc A .

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow DB = \frac{3}{4}DC. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } DB + DC = BC = 25. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có tính được $DB \approx 10,7$ cm và $DC \approx 14,3$ cm.



2. Gọi AH là đường cao kẻ từ A của $\triangle ABC$ và S là diện tích $\triangle ABC$. Ta có

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC; S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BD \text{ và } S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD.$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle ABD} = \frac{BD}{BC} \cdot S = \frac{107}{250} \cdot S \text{ và } S_{\triangle ADC} = \frac{CD}{BC} \cdot S = \frac{143}{250} \cdot S. \text{ Do đó } \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{107}{143}.$$

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ phân giác trong AD của $\widehat{BAC}$ (với $D \in BC$), biết $DB = 15$ cm, $DC = 20$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC . **ĐS:** $AB \approx 3,5$ cm; $AC \approx 4,7$ cm.

✍️ Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC \quad (1)$$

Mặt khác, tam giác ABC vuông tại A nên theo định lý Py-ta-go ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BD + DC)^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 1225 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} AB = \frac{3}{4}AC \\ AB^2 + AC^2 = 1225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \approx 3,5 \text{ cm} \\ AC \approx 4,7 \text{ cm}. \end{cases}$$

□

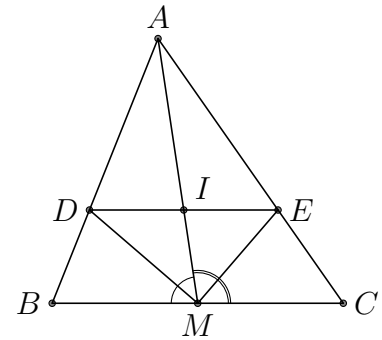
Bài 2. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt AB ở D , phân giác của $\widehat{AMC}$ cắt AC ở E .

1. Chứng minh DE song song với BC .

2. Gọi I là giao điểm của DE và AM . Chứng minh I là trung điểm của DE .

✍️ Lời giải.

- Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$ và $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}$.
Mặt khác $MB = MC$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.
Theo định lý Ta-lét đảo ta được $DE \parallel BC$.
- Theo câu a) ta có $DE \parallel BC$ nên $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.
Xét định lý Ta-lét cho $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{DI}{BM}$ và $\frac{AE}{AC} = \frac{IE}{CM}$. Từ đó, suy ra $\frac{DI}{BM} = \frac{IE}{CM}$ mà $MB = CM$ nên $DI = IE$ hay I là trung điểm của DE .



□

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D .

- Tính BC , BD và CD . **ĐS:** $BC = 20$ cm; $BD \approx 8,6$ cm; $DC \approx 11,4$ cm
- Vẽ đường cao AH . Tính AH , HD và AD . **ĐS:** $AH \approx 9,6$ cm, $HD \approx 1,4$ cm, $AD \approx 9,7$ cm.

Lời giải.

- Áp dụng định lý Py-ta-go ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 20$ cm.

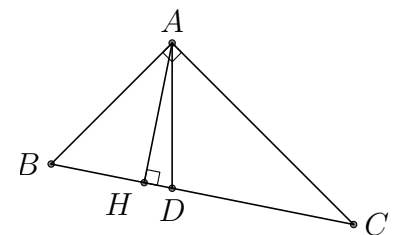
Theo tính chất đường phân giác trong của góc A ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow DB = \frac{3}{4}DC.$$

Mặt khác ta lại có

$$BD + DC = BC = 20 \Rightarrow \frac{3}{4}DC + DC = 20 \Leftrightarrow DC \approx 11,4 \text{ cm.}$$

$$\text{Do đó } BD = BC - DC = 20 - 11,4 = 8,6 \text{ cm.}$$



- Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 96$ cm.

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{BC} \approx 9,6 \text{ cm.}$$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông AHC ta có $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} \approx 12,8$ cm.

$$\text{Suy ra } HD = HC - DC = 12,8 - 11,4 \approx 1,4 \text{ cm.}$$

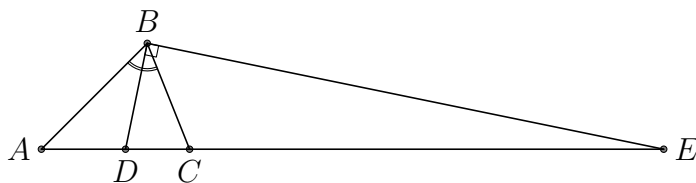
$$\text{Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông } AHD \text{ ta có } AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} \approx 9,7 \text{ cm.}$$

□

Bài 4. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), đường phân giác góc B cắt AC tại D và cho biết $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm.

1. Tính AD , DC . **ĐS:** $AD = 9$ cm; $DC = 6$ cm.
2. Đường vuông góc với BD tại B cắt đường thẳng AC kéo dài tại E . Tính EC . **ĐS:** $EC = 30$ cm.

Lời giải.



1. Ta có

$$AD + DC = AC = AB = 15\text{cm} \quad (1)$$
 và

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \quad (2)$$
 Từ (1) và (2) $\begin{cases} AD + DC = 15 \\ AD = \frac{3}{2} \cdot DC \end{cases}$. Từ đó suy ra $AD = 9$ cm, $DC = 6$ cm.
2. Vì $BD \perp BE$ nên BE là phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC .
 Khi đó ta có $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$. Suy ra $EC = \frac{AE \cdot BC}{AB} = \frac{AE \cdot 10}{15} = \frac{AE \cdot 2}{3}$.
 Suy ra $3 \cdot CE = 2 \cdot (AC + CE)$ hay $CE = 2 \cdot AC$. Do đó $CE = 30$ cm.

□

§4 Khái niệm hai tam giác đồng dạng

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

- ☑ Hai tam giác gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có ba cặp góc bằng nhau đôi một và ba cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.
- ☑ Ta có $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \end{cases}$
- ☑ Tỉ số các cạnh tương ứng $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$ gọi là tỉ số đồng dạng.

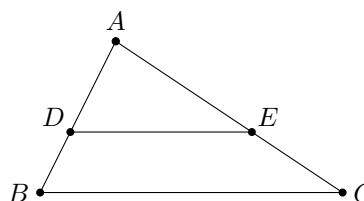
1.2 Tính chất

- ☑ Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó (hoặc nói hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau).
- ☑ Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỉ số k thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số là $\frac{1}{k}$.
- ☑ Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ và $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ thì $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

1.3 Định lý

- ☑ Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.
- ☑ Ta có

	ABC
GT	$DE \parallel BC \ (D \in AB, E \in AC)$
KL	$\triangle ADE \sim \triangle ABC$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 43. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Dựa vào định nghĩa, tính chất hoặc định lí đã nêu ở phần tóm tắt lí thuyết.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , điểm M thuộc cạnh BC . Kẻ $MN \parallel AB$ và $MP \parallel AC$ với $N \in AC, P \in AB$. Tìm các cặp tam giác đồng dạng. **ĐS:** $\triangle CMN \sim \triangle CBA$; $\triangle BMP \sim \triangle BCA$; $\triangle CMN \sim \triangle MBP$

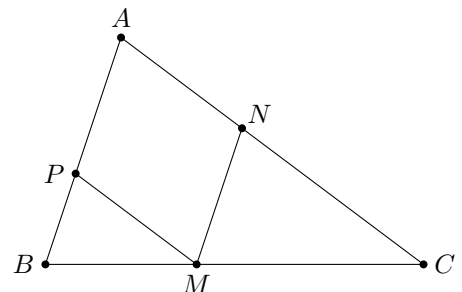
✎ Lời giải.

Vì $MN \parallel AB$ và $MP \parallel AC$ nên theo định lí ta có:

✓ $\triangle CMN \sim \triangle CBA$.

✓ $\triangle BMP \sim \triangle BCA$.

Từ đó $\triangle CMN \sim \triangle MBP$ (tính chất).

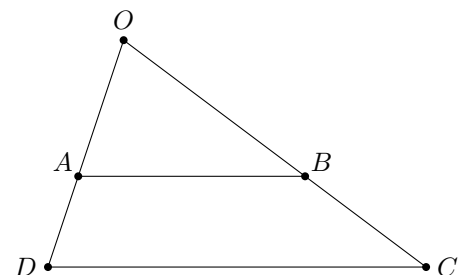


□

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC . Chứng minh $\triangle OAB \sim \triangle ODC$.

✎ Lời giải.

Xét $\triangle OAB$, ta có $AB \parallel CD$ nên định lí Ta-let ta có $\triangle OAB \sim \triangle ODC$.



□

Dạng 44. Tìm tỉ số đồng dạng, tính độ dài cạnh, chứng minh đẳng thức cạnh thông qua tam giác đồng dạng

Sử dụng định nghĩa, các tính chất của hai tam giác đồng dạng.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k . Chứng minh tỉ số chu vi của hai tam giác ABC và MNP cũng bằng k .

 Lời giải.

Kí hiệu $P(ABC)$ là chu vi $\triangle ABC$. Ta có $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ theo tỉ số k nên

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$k = \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = \frac{AB + AC + BC}{MN + MP + NP} = \frac{P(ABC)}{P(MNP)}.$$

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ theo tỉ số k_1 và $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ theo tỉ số k_2 . Tìm tỉ số đồng dạng k_3 của $\triangle ABC$ và $\triangle A_2B_2C_2$. **ĐS:** $k_3 = k_1 \cdot k_2$.

 Lời giải.

Ta có $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ nên $k_1 = \frac{AB}{A_1B_1}$ và $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ nên $k_2 = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.

Từ đó ta có $k_3 = \frac{AB}{A_2B_2} = k_1 \cdot k_2$.

□

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ theo tỉ số $\frac{3}{5}$. Tính chu vi của mỗi tam giác biết hiệu chu vi của hai tam giác là 20 cm. **ĐS:** $P(ABC) = 30$ cm; $P(DEF) = 50$ cm.

 Lời giải.

Kí hiệu $P(ABC)$ là chu vi $\triangle ABC$. Vì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ theo tỉ số $k = \frac{3}{5}$ nên ta có

$$\frac{P(ABC)}{P(DEF)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{P(DEF)}{5} = \frac{P(ABC)}{3} = \frac{P(DEF) - P(ABC)}{2} = 10.$$

Từ đó ta được $P(ABC) = 30$ cm và $P(DEF) = 50$ cm.

□

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Biết $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 8$ cm và chu vi $\triangle DEF$ là 9 cm. Tính độ dài các cạnh của $\triangle DEF$. **ĐS:** $DE = 2$ cm; $EF = 3$ cm; $FD = 4$ cm.

 Lời giải.

Vì $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ nên ta có

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{P(ABC)}{P(DEF)} = \frac{18}{9} = 2.$$

Từ đó ta có được $DE = \frac{AB}{2} = 2$ cm, $EF = \frac{BC}{2} = 3$ cm, $FD = \frac{CA}{2} = 4$ cm.

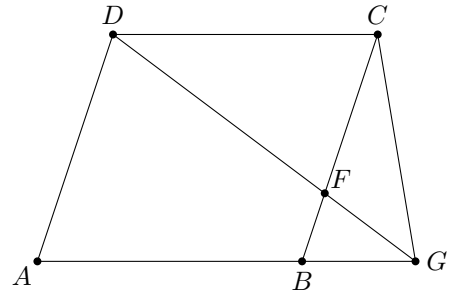
□

Ví dụ 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm F trên cạnh BC , tia DF cắt tia AB tại G .

1. Chứng minh $\triangle GBF \sim \triangle DCF$.
2. Biết $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm và $CF = 3$ cm. Tính độ dài AG . **ĐS:** $AG = 10$ cm.
3. Chứng minh $AG \cdot CF = CD \cdot AD$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $BG \parallel DC$ nên $\triangle GBF \sim \triangle DCF$.
2. Theo câu a) ta có $\triangle GBF \sim \triangle DCF$ suy ra $\frac{BG}{CD} = \frac{BF}{CF} \Leftrightarrow BG = \frac{BF}{CF} \cdot CD = \frac{AD - CF}{CF} \cdot AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ cm. Từ đó ta có $AG = AB + BG = 6 + 4 = 10$ cm.
3. Ta có $BF \parallel AD$ nên $\triangle GBF \sim \triangle GAD$. Mặt khác ta lại có $\triangle GBF \sim \triangle DCF$ (câu a) nên ta được $\triangle GAD \sim \triangle DCF$. Suy ra $\frac{AG}{CD} = \frac{AD}{CF}$ hay $AG \cdot CF = CD \cdot AD$.



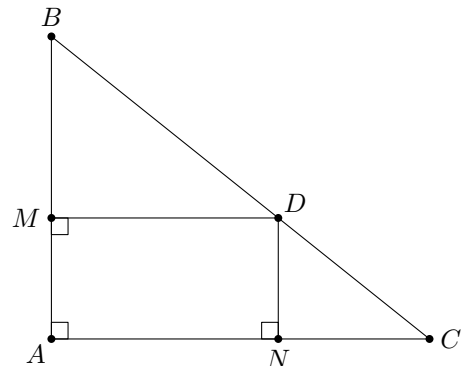
□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , điểm D thuộc cạnh BC . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC .

1. Chứng minh $\triangle BDM \sim \triangle BCA$ và $\triangle CDN \sim \triangle CBA$.
2. Cho $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm và $DB = 3$ cm. Tính độ dài BM . **ĐS:** $BM \approx 1,8$ cm.
3. Chứng minh $BM \cdot CN = DM \cdot DN$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $MD \parallel AC$ vì MD, AC cùng vuông góc với AB và $DN \parallel AB$ vì DN, AB cùng vuông với AC nên $\triangle BDM \sim \triangle BCA$ và $\triangle CDN \sim \triangle CBA$.
2. Theo định lý Py-ta-go ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25$ nên $BC = 5$ cm. Theo câu a) ta có $\triangle BDM \sim \triangle BCA$. Suy ra $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow BM = \frac{BD}{BC} \cdot BA = \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5} = 1,8$ cm.
3. Theo câu a) ta có $\triangle CDN \sim \triangle CBA$ và $\triangle BDM \sim \triangle BCA$. Suy ra $\triangle CDN \sim \triangle DBM$ (tính chất). Từ đó ta có $\frac{BM}{DN} = \frac{DM}{CN}$ hay $BM \cdot CN = DM \cdot DN$.



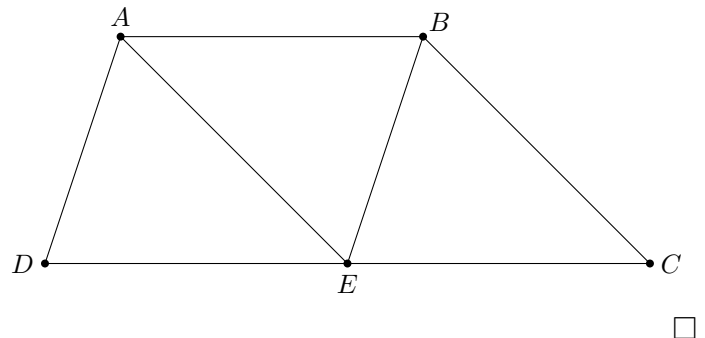
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel DC$) có $CD = 2AB$. Gọi E là trung điểm của DC . Chứng minh ba tam giác EDA , ABE và CEB đồng dạng với nhau đôi một. Tìm tỉ số đồng dạng.
ĐS: $k = 1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \parallel EC \\ AB = EC = \frac{CD}{2} \end{cases} \Rightarrow ABCE$ là hình bình hành. Tương tự ta có $ABED$ cũng là hình bình hành. Suy ra $\triangle EDA = \triangle ABE = \triangle CEB$ nên 3 tam giác EDA , ABE và CEB đồng dạng với nhau đôi một với cùng tỉ số $k = 1$.



Bài 2. Cho tam giác ABC có $BC = 13$ cm, $CA = 12$ cm, $AB = 5$ cm. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP có cạnh nhỏ nhất là 2,5 cm. Tính các cạnh còn lại của tam giác MNP .
ĐS: $MP = 6$ cm; $NP = 6,5$ cm; $MN = 2,5$ cm.

Lời giải.

Ta có $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ nên $k = \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \Rightarrow k = \frac{5}{MN} = \frac{12}{MP} = \frac{13}{NP}$ (*)
Vì cạnh nhỏ nhất của $\triangle ABC$ là $AB = 5$ cm nên cạnh nhỏ nhất tương ứng của $\triangle MNP$ là cạnh $MN = 2,5$ cm. Khi đó $k = \frac{5}{2,5} = 2$. Từ (*) suy ra $MP = \frac{12}{2} = 6$ cm, $NP = \frac{13}{2} = 6,5$ cm. $\square$

Bài 3. Cho tam giác ABC , lấy D trên cạnh BC sao cho $DB = 2DC$. Kẻ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$) và $DF \parallel AC$ ($F \in AB$).

- Tìm các cặp tam giác đồng dạng và tìm tỉ số đồng dạng. **ĐS:** $\triangle CDE \sim \triangle CBA, k = \frac{1}{3}$;
 $\triangle BDF \sim \triangle BCA, k = \frac{2}{3}$; $\triangle CDE \sim \triangle DBF, k = \frac{1}{2}$.

- Tính chu vi các tam giác CDE , BDF biết chu vi tam giác ABC bằng 12 cm. **ĐS:**
 $P(CDE) = 4$ cm; $P(BDF) = 8$ cm

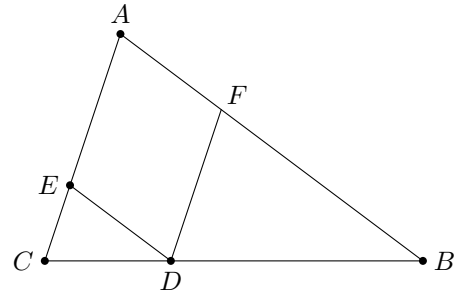
Lời giải.

1. Ta có

$$+ DE \parallel AB \text{ nên } \triangle CDE \sim \triangle CBA \text{ theo tỉ số } k = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{3}.$$

$$+ DF \parallel AC \text{ nên } \triangle BDF \sim \triangle BCA \text{ theo tỉ số } k = \frac{BD}{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$+ \triangle CDE \sim \triangle DBF \text{ (tính chất) theo tỉ số } k = \frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}.$$



2. Kí hiệu $P(ABC)$ là chu vi $\triangle ABC$. Ta có

$$+ \triangle CDE \sim \triangle CBA \text{ theo tỉ số } k = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{P(CDE)}{P(CBA)} = \frac{1}{3}. \text{ Suy ra } P(CDE) = \frac{1}{3} \cdot P(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ cm.}$$

$$+ \triangle BDF \sim \triangle BCA \text{ theo tỉ số } k = \frac{2}{3} \text{ nên } \frac{P(BDF)}{P(BCA)} = \frac{2}{3}. \text{ Suy ra } P(BDF) = \frac{2}{3} \cdot P(ABC) = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ cm.}$$

□

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$, điểm M thuộc cạnh BC . Tia DM cắt tia AB tại N . Chứng minh $\triangle ADN \sim \triangle CMD$, từ đó suy ra $AN \cdot CM = AB^2$.

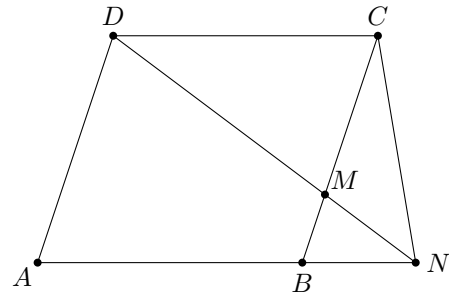
Lời giải.

Ta có

$$+ BM \parallel AD \text{ nên } \triangle NBM \sim \triangle NAD.$$

$$+ BN \parallel CD \text{ nên } \triangle NBM \sim \triangle DCM.$$

Suy ra $\triangle NAD \sim \triangle DCM$ (tính chất) theo tỉ số $\frac{AN}{CD} = \frac{AD}{CM}$ hay $AN \cdot CM = CD \cdot AD = AB^2$ vì $(AB = CD = AD)$ do $ABCD$ là hình thoi.



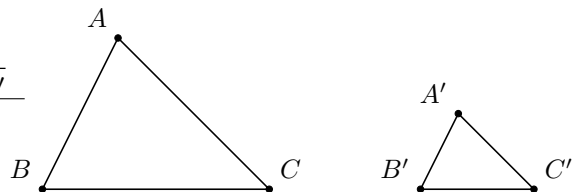
□

§5 Trường hợp đồng dạng thứ nhất

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lý 12. Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\triangle ABC, \triangle A'B'C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$
KL	$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 45. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Để chứng minh hai tam giác đồng dạng, ta lập tỉ số các cạnh tương ứng của hai tam giác và chứng minh chúng bằng nhau.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Hai tam giác mà các cạnh có độ dài như sau có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

- 6 cm, 9 cm, 12 cm và 24 cm, 18 cm, 12 cm;
- $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ có $\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5}$ và $\frac{DE}{6} = \frac{DF}{8} = \frac{EF}{9}$.

Lời giải.

- Ta có $\frac{6}{12} = \frac{9}{18} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ nên hai tam giác đồng dạng.
- Đặt $\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5} = m$ và $\frac{DE}{6} = \frac{DF}{8} = \frac{EF}{9} = n$, ta có $AB = 3m$, $AC = 4m$, $BC = 5m$ và $DE = 6n$, $DF = 8n$, $EF = 9n$.
Lập tỉ số các cặp cạnh tương ứng, dẫn tới kết luận hai tam giác không đồng dạng.

□

Ví dụ 2. Hai tam giác mà các cạnh có độ dài như sau có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

1. 4 cm, 5 cm, 6 cm và 12 cm, 15 cm, 18 cm;
2. $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm và $\triangle MNP$ vuông tại M có $MN = 4$ cm, $MP = 3$ cm.

Lời giải.

1. Ta có $\frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ nên hai tam giác đồng dạng.
2. Dùng định lý Py-ta-go tính được $BC = 10$ cm, $NP = 5$ cm.
Lập tỉ số các cặp cạnh tương ứng, ta có $\triangle ABC \sim \triangle MPN$.

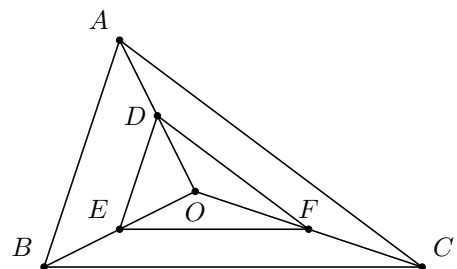
□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , điểm O nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC .

1. Chứng minh $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, tìm tỉ số đồng dạng.
2. Biết chu vi $\triangle ABC$ bằng 26 cm. Tìm chu vi $\triangle DEF$.

Lời giải.

1. Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác ta có $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$.
 $\Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$, tỉ số đồng dạng bằng $\frac{1}{2}$.
2. Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng, từ đó tìm được chu vi $\triangle DEF$ là 13 cm.



□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh

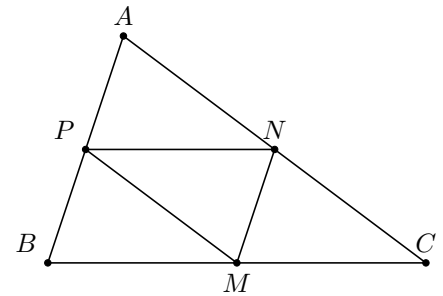
1. $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, tìm tỉ số đồng dạng.
2. Tỉ số chu vi của $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ bằng 2.

Lời giải.

- Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác ta có

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP, \text{ tỉ số đồng dạng bằng } \frac{1}{2}.$$



- Vì $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2}$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{MN + NP + MP}{AB + BC + AC} = \frac{1}{2}$$
 (tính chất dãy tỉ số bằng nhau).
 Từ đó ta có $\frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{MNP}} = 2.$

Dạng 46. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ nhất để tính độ dài các cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau

Vận dụng trường hợp đồng dạng thứ nhất (nếu cần) để chứng minh hai tam giác đồng dạng, từ đó suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau.

BÀI TẬP MẪU

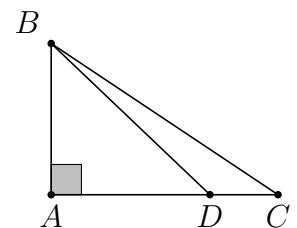
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Trên cạnh AC lấy D sao cho $AD = 4,5$ cm. Chứng minh

a) $\triangle ABC \sim \triangle ADB;$

b) $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}.$

Lời giải.

- Áp dụng định lý Py-ta-go tính được $BC = 10$ cm, $BD = 7,5$ cm.
 Bởi vậy $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{3}$
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADB$ (c.c.c).



- Từ câu a) suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}$ (góc tương ứng).

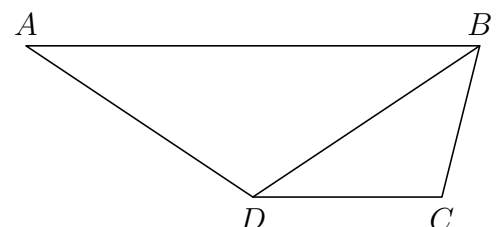
Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = 6$ cm và $BD = 4$ cm. Chứng minh

a) $\triangle ABD \sim \triangle BDC;$

b) $ABCD$ là hình thang.

Lời giải.

- Tương tự **Ví dụ 5** ta có $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC} = 2$
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (c.c.c)
- Từ câu a) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow AB \parallel DC$
 $\Rightarrow ABCD$ là hình thang.



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm và $BC = 7$ cm. Tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC có độ dài cạnh nhỏ nhất là 1 cm. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác MNP .

 **Lời giải.**

Tỉ số đồng dạng của hai tam giác là $\frac{1}{3}$, từ đó tính được $MN = 1$ cm, $NP = \frac{7}{3}$ cm, $MP = \frac{5}{3}$ cm.

□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 10$ cm, $AC = 20$ cm. Trên AC lấy M sao cho $AM = 5$ cm.

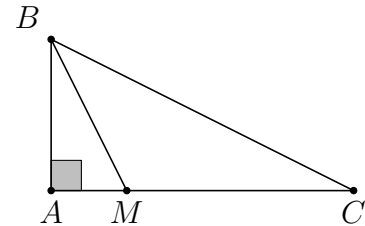
a) Tính độ dài BC , BM .

b) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle AMB$.

 **Lời giải.**

1. Áp dụng định lý Py-ta-go tính được $BC = 10\sqrt{5}$ cm, $BM = 5\sqrt{5}$ cm.

2. Ta có $\frac{BM}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AMB$ (c.c.c).



□

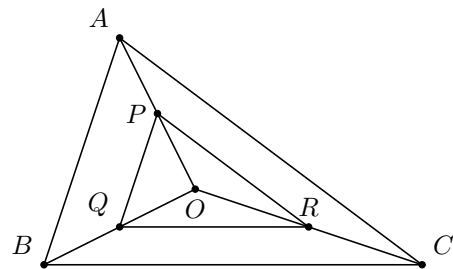
Bài 3. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến cắt nhau tại O . Gọi P , Q , R theo thứ tự là trung điểm của OA , OB , OC . Chứng minh $\triangle PQR \sim \triangle ABC$.

 **Lời giải.**

Theo tính chất đường trung bình của tam giác ABC , suy

$$\text{ra } \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Vì vậy $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ (c.c.c).

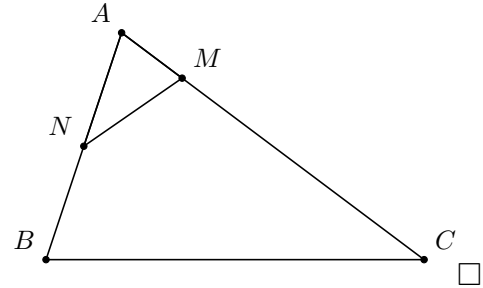


□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm. Trên cạnh AC , AB lần lượt lấy các điểm M , N sao cho $AM = 2$ cm, $AN = 3$ cm. Chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

Lời giải.

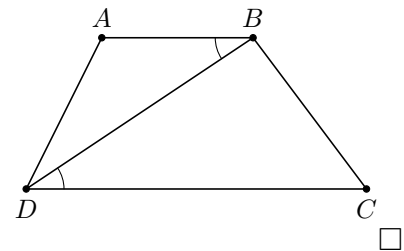
Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$. Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ABC$ có
 $\widehat{A}$ chung, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$ (c.g.c).



Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 9$ cm, $BD = 12$ cm và $DC = 16$ cm. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle BDC$.

Lời giải.

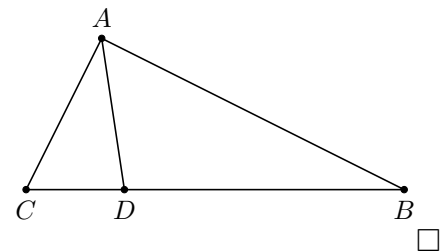
Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ và $\frac{BA}{BD} = \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4}$.
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (c.g.c).



Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 9$ cm. Trên cạnh BC lấy D sao cho $CD = 4$ cm. Chứng minh $\triangle CAD \sim \triangle CBA$.

Lời giải.

Xét $\triangle CAD$ và $\triangle CBA$ có
 $\begin{cases} \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB} = \frac{2}{3} \\ \widehat{DCA} = \widehat{ACB} \end{cases}$
 $\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle CBA$ (c.g.c).



Dạng 48. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ hai để tính độ dài cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau

Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ hai (nếu cần) để chứng minh hai tam giác đồng dạng, từ đó suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau hoặc các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

BÀI TẬP MẪU

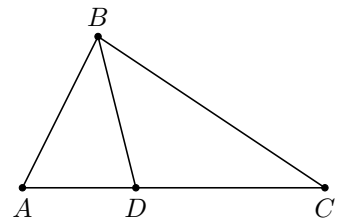
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 8$ cm. Trên cạnh AC lấy D sao cho $AD = 2$ cm. Chứng minh

a) $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$;

b) $BC = 2BD$.

Lời giải.

- Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACB$ có
 $\widehat{A}$ chung, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.
- Từ câu a), ta có $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB} = 2 \Rightarrow \text{DPCM}$.



Ví dụ 2. Cho $\widehat{xOy}$ và Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Trên các tia Ox , Oz , Oy lần lượt lấy các điểm A , B , C sao cho $OA = 1$ cm, $OB = 2$ cm và $OC = 4$ cm.

a) Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{OBC}$.

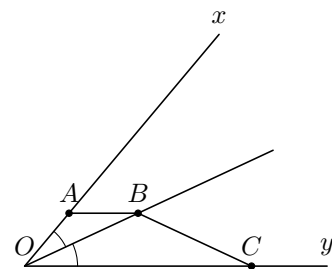
b) Biết $AB = 1,5$ cm, tính độ dài BC .

Lời giải.

- Vì Oz là phân giác của $\widehat{xOy}$ nên $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$.
 Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OBC$ có

$$\begin{cases} \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{1}{2} \\ \widehat{AOB} = \widehat{BOC} \end{cases}$$

 $\Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OBC$ (c.g.c), suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OBC}$.
- Từ câu a), ta có $\frac{BC}{AB} = \frac{OB}{OA} = 2 \Rightarrow BC = 3$ cm.



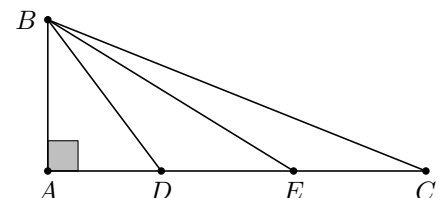
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1$ cm, $AC = 3$ cm. Trên cạnh AC lấy D , E sao cho $AD = DE = EC$. Chứng minh

a) $\triangle DBE \sim \triangle DCB$;

b) $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^\circ$.

Lời giải.

- Tính được $DB^2 = 2$, từ đó ta có
 $DB^2 = DE \cdot DC \Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{DC}{DB}$
 $\Rightarrow \triangle DBE \sim \triangle DCB$ (c.g.c).
- Từ câu a), ta có $\widehat{AEB} = \widehat{DBC}$
 $\Rightarrow \widehat{AEB} + \widehat{ACB} = \widehat{DBC} + \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 45^\circ$.



Ví dụ 4. Hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 10$ cm, $CD = 30$ cm và $AD = 35$ cm. Trên cạnh AD lấy M sao cho $AM = 15$ cm. Chứng minh

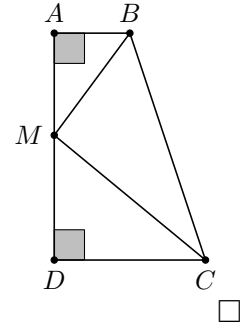
a) $\triangle ABM \sim \triangle DMC$;

b) $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

✍ Lời giải.

1. Chứng minh $\frac{AB}{AM} = \frac{DM}{DC} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle DMC$ (c.g.c).

2. Từ câu a), ta có $\widehat{AMB} = \widehat{DCM}$, do đó $\widehat{AMB} + \widehat{DCM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMC} = 90^\circ$.

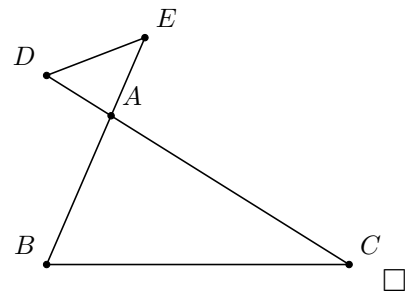


3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 6$ cm. Trên tia đối của tia AC lấy D sao cho $AD = 1$ cm. Trên tia đối của tia AB lấy E sao cho $AE = 2$ cm. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

✍ Lời giải.

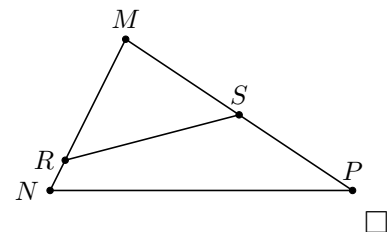
Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$. Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có
 $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ (đối đỉnh), $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (c.g.c).



Bài 2. Cho tam giác MNP có $MN = 12$ cm, $MP = 15$ cm, $NP = 18$ cm. Trên các cạnh MN , MP lần lượt lấy R , S sao cho $MR = 10$ cm và $MS = 8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng RS .

✍ Lời giải.

Ta có $\frac{MS}{MN} = \frac{MR}{MP} = \frac{2}{3}$. Xét $\triangle MRS$ và $\triangle MPN$ có
 $\widehat{M}$ chung, $\frac{MS}{MN} = \frac{MR}{MP}$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle MRS \sim \triangle MPN$ (c.g.c), suy ra $\frac{RS}{PN} = \frac{2}{3} \Rightarrow RS = 12$ cm.



Bài 3. Cho tam giác AHB vuông tại H có $HA = 4$ cm, $HB = 6$ cm. Trên tia đối của tia HA lấy điểm C sao cho $HC = 9$ cm. Chứng minh

a) $\triangle AHB \sim \triangle BHC$;

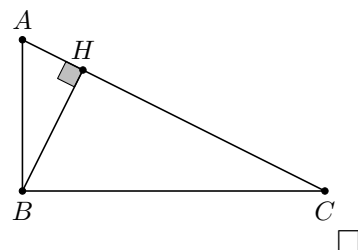
b) $\triangle ABC$ vuông.

✍ Lời giải.

1. Xét $\triangle AHB$ và $\triangle BHC$ có

$$\begin{cases} \widehat{AHB} = \widehat{BHC} = 90^\circ \\ \frac{HB}{HA} = \frac{HC}{HB} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle BHC \text{ (c.g.c).}$$

2. Từ câu a), suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{ABH} + \widehat{CBH} = 90^\circ$
hay $\widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại B .



Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 7$ cm. Trên tia đối của tia BA lấy D sao cho $BD = BC$.

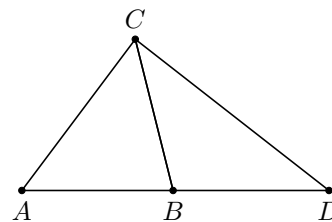
1. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.
2. Tính độ dài đoạn thẳng CD .
3. Chứng minh $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$.

Lời giải.

1. Tính được $AD = 16$ cm.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ACD$ có

$$\begin{cases} \widehat{A} \text{ (chung)} \\ \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ (c.g.c).}$$



2. Từ câu a), ta có $\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow CD = \frac{7 \cdot 12}{9} = \frac{28}{3}$ cm.

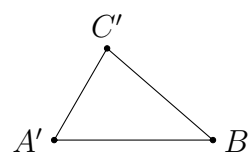
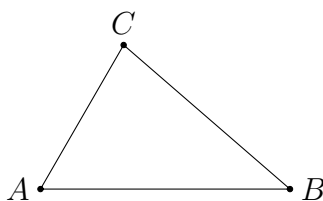
3. Chú ý $\triangle BCD$ cân tại B và kết quả câu a), ta có
 $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{ADC} = 2\widehat{ACB}$.

§7 Trường hợp đồng dạng thứ ba

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lý 14. Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}$
KL	$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 49. Chứng minh hai tam giác đồng dạng.

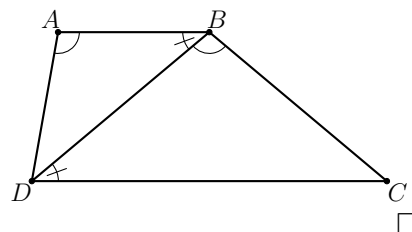
Chứng minh hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle BDC$.

Lời giải.

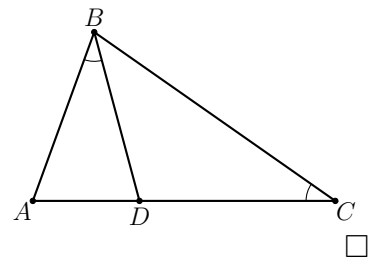
Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (g.g).



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{C}$. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle ADB$.

Lời giải.

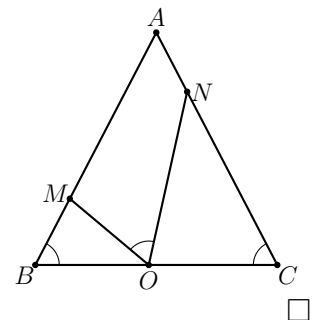
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADB$ có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ABD} = \widehat{C}$
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADB$ (g.g).



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$), O thuộc cạnh BC . Trên cạnh AB , AC lần lượt lấy hai điểm M , N sao cho $\widehat{MON} = \widehat{ABC}$. Chứng minh $\triangle BMO \sim \triangle CON$.

Lời giải.

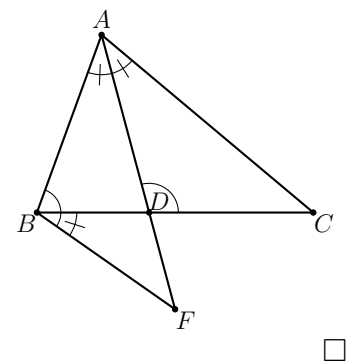
Ta có $\widehat{BMO} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{MOB}$.
 Mà $\widehat{MON} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{BMO} = 180^\circ - \widehat{MON} - \widehat{MOB} = \widehat{CON}$.
 Chú ý $\widehat{MBO} = \widehat{OCN} \Rightarrow \triangle BMO \sim \triangle CON$ (g.g).



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , kẻ đường phân giác AD . Trên tia đối của DA lấy điểm F sao cho $\widehat{FBD} = \widehat{BAD}$. Chứng minh $\triangle ABF \sim \triangle ADC$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BAF} = \widehat{DAC}$, sử dụng tính chất góc ngoài thu được
 $\widehat{ADC} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = \widehat{ABD} + \widehat{FBD}$
 $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABF}$
 $\Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle ADC$ (g.g).



Dạng 50. Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ ba để tính độ dài các cạnh, chứng minh hệ thức cạnh, hoặc chứng minh các góc bằng nhau.

Sử dụng trường hợp đồng dạng thứ ba (nếu cần) để chứng minh hai tam giác đồng dạng, từ đó suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau, các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Trên AB , AC lần lượt lấy các điểm D , E sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$ và CD cắt BE tại O . Chứng minh

a) $AD \cdot AB = AE \cdot AC$;

b) $OC \cdot OD = OB \cdot OE$.

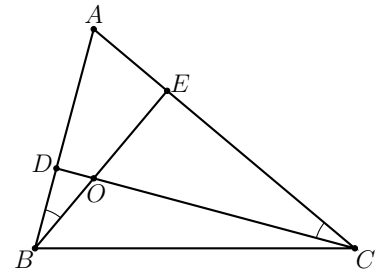
Lời giải.

1. Xét $\triangle ACD$ và $\triangle ABE$ có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$
 $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABE$ (g.g).

Từ đó suy ra $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

2. Xét $\triangle OBD$ và $\triangle OCE$ có $\widehat{BOD} = \widehat{EOC}$ (đối đỉnh)
 và $\widehat{OBD} = \widehat{OCE} \Rightarrow \triangle OBD \sim \triangle OCE$ (g.g).

Từ đó suy ra $OC \cdot OD = OB \cdot OE$.



□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Chứng minh

a) $AB^2 = BH \cdot BC$;

b) $AH^2 = HB \cdot HC$.

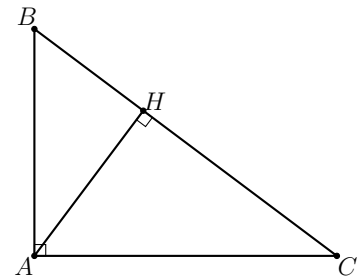
Lời giải.

1. Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CBA$ có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle CBA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC.$$

2. Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ có $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ và $\widehat{BAH} = \widehat{C}$
 (do a) $\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \cdot HC.$$



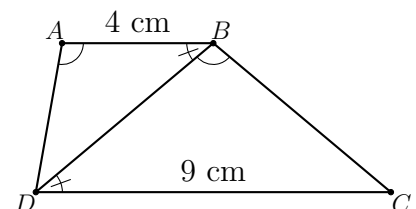
□

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$. Tính độ dài cạnh BD biết $AB = 4$ cm, $DC = 9$ cm. **ĐS:** $BD = 6$ cm

Lời giải.

Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BD = \sqrt{AB \cdot DC} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \text{ cm}.$$



□

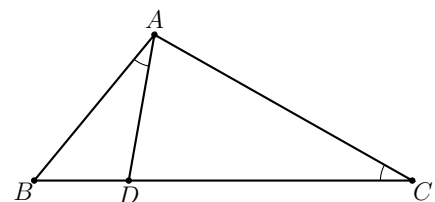
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{C}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{C}$. Biết $AB = 5$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng DB , DC . **ĐS:** $DC = 7,5$ cm

Lời giải.

Ta có $\triangle BAD \sim \triangle BCA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BD = \frac{BA^2}{BC} = \frac{5^2}{10} = 2,5 \text{ cm.}$$

Từ đó $DC = BC - BD = 10 - 2,5 = 7,5 \text{ cm.}$



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm M , N sao cho $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$. Chứng minh

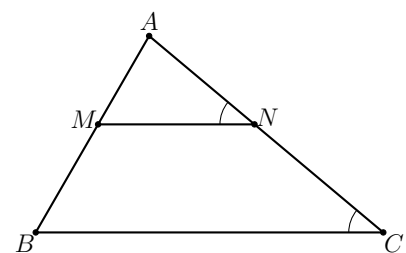
a) $\triangle AMN \sim \triangle ABC$;

b) $AM \cdot AC = AN \cdot AB$.

Lời giải.

1. Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ABC$ có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$ (g.g).

2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AM \cdot AC = AN \cdot AB$.



□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AH , AC lần lượt tại D , E .

1. Chứng minh $\triangle BAD \sim \triangle BCE$ và $\triangle BHD \sim \triangle BAE$.

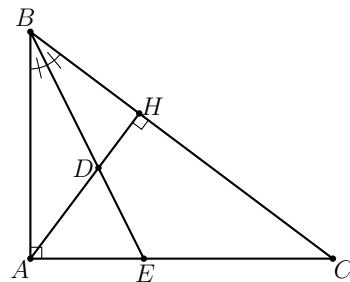
2. Chứng minh $\frac{DH}{DA} = \frac{EA}{EC}$.

3. Biết $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$. Tính độ dài HB , HC . **ĐS:** $HB = 1,8 \text{ cm}$, $HC = 3,2 \text{ cm}$

Lời giải.

1. Xét $\triangle BAD$ và $\triangle BCE$ có $\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$ và $\widehat{BAD} = \widehat{ECB}$
(góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BCE$
(g.g).

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle BAE$ có $\widehat{BHD} = \widehat{BAE} = 90^\circ$
và $\widehat{HBD} = \widehat{ABE} \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BCE$ (g.g.).



2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{DH}{EA} = \frac{BD}{BE} = \frac{DA}{CE} \Rightarrow \frac{DH}{DA} = \frac{EA}{EC}$.

3. Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CBA$ có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{AHB} = \widehat{BHC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BH = \frac{BA^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow HC = BC - BH = 5 - 1,8 = 3,2 \text{ cm.}$$

7

 **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 80^\circ$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Chứng minh

a) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$;

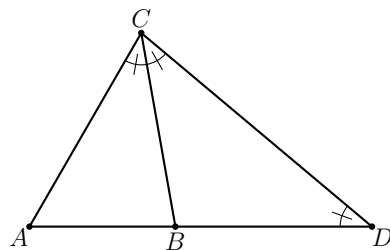
b) $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$.

 **Lời giải.**

1. Tính được $\widehat{ACB} = 40^\circ$, lại có $\triangle BCD$ cân tại B nên $\widehat{BCD} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACD$ (g.g).

2. Từ kết quả câu a), ta có

$$AC^2 = AB \cdot AD = AB(AB + BC) = AB^2 + AB \cdot BC.$$



7

 **Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I . Chứng minh $AI^2 = AD \cdot AE$.

 **Lời giải.**

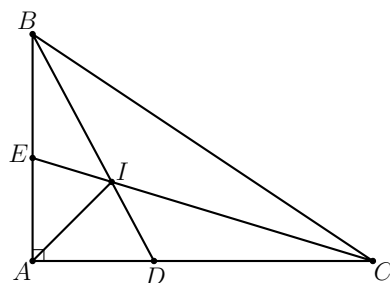
Ta có AI là tia phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IAD} = \widehat{IAE} = 45^\circ$.

Theo tính chất góc ngoài

$$\widehat{AID} = \widehat{IAB} + \widehat{IBC} = 45^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

$$\widehat{AEI} = \widehat{ABC} + \widehat{ICB} = 45^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Do đó $\triangle ADI \sim \triangle AIE \Rightarrow AI^2 = AD \cdot AE$.



9

§8 Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Áp dụng các trường hợp đồng dạng của tam giác vào tam giác vuông

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:

- ☒ Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.
- ☒ Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.

1.2 Dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng

- ☒ Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

1.3 Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

- ☒ Tỉ số đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- ☒ Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 51. Chứng minh hai tam giác vuông đồng dạng.

Có thể sử dụng một trong các cách sau:

- ☒ Áp dụng trường hợp đồng dạng của tam giác thường vào tam giác vuông.
- ☒ Sử dụng dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

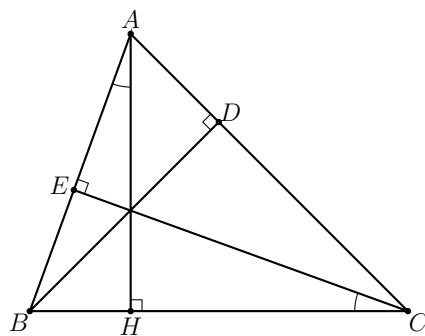
 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Kẻ các đường cao BD , CE , cắt nhau tại H . Chứng minh

a) $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

b) $\triangle AEH \sim \triangle CEB$.

 **Lời giải.**

1. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE$ (g.g.).
2. H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC$, từ đó $\widehat{EAH} = \widehat{BCE}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$) $\Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle CEB$ (g.g.).



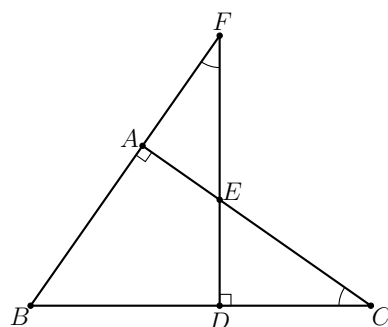
9

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A , điểm D thuộc cạnh BC . Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt đoạn AC tại E và cắt BA kéo dài tại F . Chứng minh

- a) $\triangle EAF \sim \triangle EDC$; b) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

 **Lời giải.**

- Xét $\triangle EAF$ và $\triangle EDC$ có $\widehat{AEF} = \widehat{DEC}$ và $\widehat{EAF} = \widehat{EDC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle EAF \sim \triangle EDC$ (g.g).
- Từ kết quả câu a), suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (góc tương ứng)
 $\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$.



7

Dạng 52. Sử dụng trường hợp đồng dạng của tam giác vuông tính độ dài cạnh, chứng minh hệ thức cạnh hoặc chứng minh các góc bằng nhau.

Sử dụng trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông (nếu cần) để chứng minh hai tam giác đồng dạng, từ đó suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau, các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

BÀI TẬP MẪU

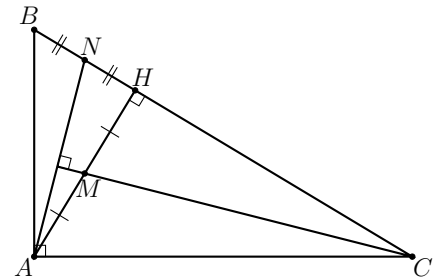
 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH . Chứng minh

- a) $HA^2 = HB \cdot HC$; b) $\triangle AHN \sim \triangle CHM$; c) $AN \perp CM$.

 Lời giải.

1. Ta có $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.g) $\Rightarrow HA^2 = HB \cdot HC$.
2. Từ kết quả câu a) và $HB = 2HN$, $HA = 2HM$ suy ra

$$\frac{HB}{2HA} = \frac{HA}{2HC} \Rightarrow \frac{HN}{HA} = \frac{HM}{HC} \Rightarrow \triangle AHN \sim \triangle CHM$$
 (g.g).
3. Từ câu b) ta có $\widehat{HAN} = \widehat{MCN} \Rightarrow \widehat{MCN} + \widehat{ANC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow AN \perp CM$.

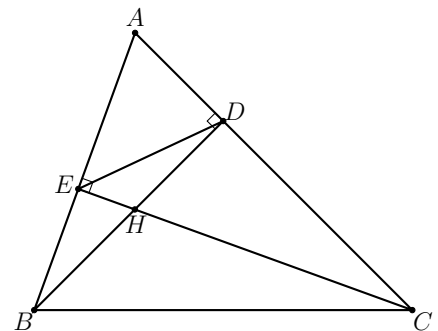


Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nhọn, ($AB < AC$), các đường cao BD , CE cắt nhau tại H . Chứng minh

- a) $HE \cdot HC = HD \cdot HB$; b) $\triangle HDE \sim \triangle HCB$; c) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Lời giải.

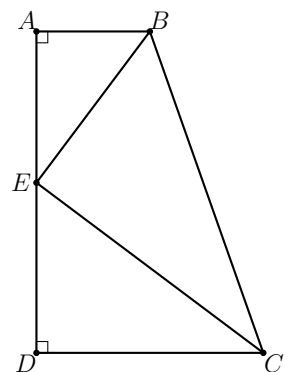
1. Ta có $\triangle HBE \sim \triangle HCD$ (g.g) $\Rightarrow HE \cdot HC = HD \cdot HB$.
2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{HE}{HB} = \frac{HD}{HC}$
 $\Rightarrow \triangle HDE \sim \triangle HCB$ (c.g.c).
3. Từ kết quả câu b), ta có $\widehat{HDE} = \widehat{HCB}$,
từ đó $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{HCB} = 90^\circ - \widehat{HDE} = \widehat{ADE}$.
Bởi vậy $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (g.g).



Ví dụ 3. Hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $CD = 12$ cm và $AD = 17$ cm. Trên đoạn AD lấy E sao cho $AE = 8$ cm. Chứng minh $\widehat{BEC} = 90^\circ$.

Lời giải.

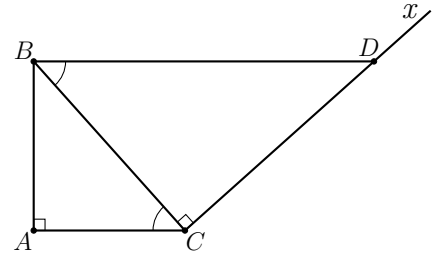
Xét $\triangle ABE$ và $\triangle EDC$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\frac{AB}{ED} = \frac{AB}{AD - AE} = \frac{6}{17 - 8} = \frac{2}{3}$
và $\frac{AE}{DC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{AE}{DC} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle EDC$ (c.g.c).
 $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{DCE} \Rightarrow \widehat{AEB} + \widehat{DEC} = 90^\circ$.
Bởi vậy $\widehat{BEC} = 90^\circ$.



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2$ cm, $BC = 3$ cm. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A , kẻ tia Cx vuông góc với CB . Trên tia Cx lấy D sao cho $BD = 4,5$ cm. Chứng minh BD song song với AC .

 Lời giải.

Ta có $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} = \frac{3}{2}$, từ đó $\triangle ABC \sim \triangle CDB$ (c.h-c.g.v)
 $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{CBD} \Rightarrow BD \parallel AC$.



□

 Dạng 53. Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng.

Sử dụng định lí tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

1. Chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle ACB$.

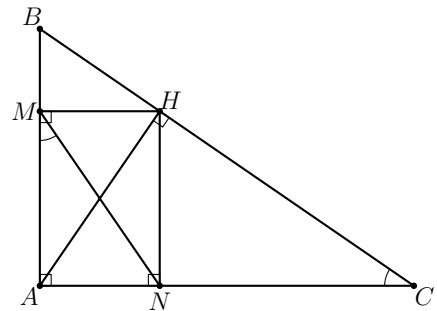
2. Biết $AH = 2$ cm, $BC = 5$ cm. Tính diện tích $\triangle AMN$.

ĐS: $S_{AMN} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$

 Lời giải.

1. Tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật, bởi vậy $\widehat{AMN} = \widehat{AHN}$. Ta có $\widehat{AHN} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$)
 $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ACB} \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ACB$ (g.g).

2. Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ cm}^2$, mặt khác từ kết quả câu a), ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{MN^2}{BC^2} = \frac{AH^2}{BC^2} = \frac{4}{25} \Rightarrow$
 $S_{AMN} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$.



□

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Lấy D thuộc cạnh AC , kẻ $DM \perp BC$ ($M \in BC$). Tia MD cắt BA tại N .

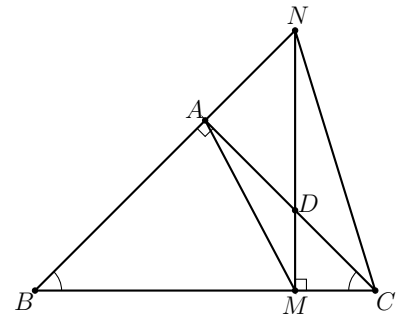
1. Chứng minh $\triangle BAM \sim \triangle BCN$.

2. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác BAM và BCN .

ĐS: $\frac{S_{BAM}}{S_{BCN}} = \frac{1}{2}$

 Lời giải.

- Xét $\triangle BAC$ và $\triangle BMN$ có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{BAC} = \widehat{BMN} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle BMN$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \triangle BAM \sim \triangle BCN$.
- $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $BC^2 = 2AB^2$,
do đó $\frac{S_{BAM}}{S_{BCN}} = \frac{BA^2}{BC^2} = \frac{1}{2}$.



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD .

- Chứng minh $\triangle AHB \sim \triangle BCD$.

- Tính độ dài đoạn thẳng AH .

ĐS: $AH = 7,2$ cm

- Tính diện tích tam giác AHB .

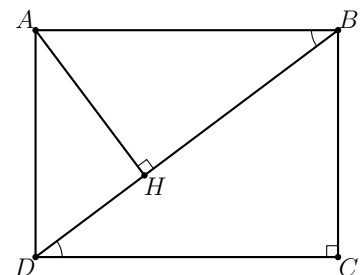
ĐS: $S_{AHB} = 34,56$ cm²

Lời giải.

- $\widehat{ABH} = \widehat{BDC}$ (so le trong) $\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle BCD$ (g.g).

- Từ kết quả câu a), ta có $\frac{AH}{BC} = \frac{AB}{BD}$
 $\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot BC}{BD} = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{12 \cdot 9}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = 7,2$ cm.

- $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{12^2 - 7,2^2} = 9,6$ cm
 $\Rightarrow S_{AHB} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = \frac{7,2 \cdot 9,6}{2} = 34,56$ cm².



□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 9$ cm, $BC = 24$ cm. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AC tại D , cắt BC tại M .

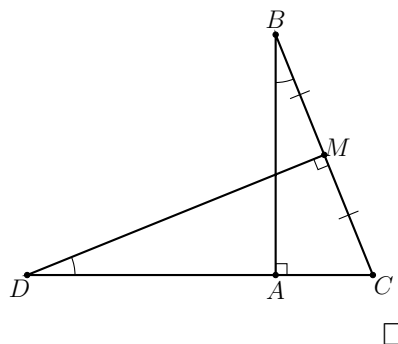
- Chứng minh $\triangle CMD \sim \triangle CAB$.

- Tính độ dài đoạn thẳng CD .

ĐS: $CD = 32$ cm

Lời giải.

- Xét $\triangle CMD$ và $\triangle CAB$ có $\widehat{C}$ chung và $\widehat{ABC} = \widehat{CDM}$ (hai góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \triangle CMD \sim \triangle CAB$ (g.g).
- Từ kết quả câu a), ta có $\frac{CD}{CM} = \frac{CB}{CA}$
 $\Rightarrow CD = \frac{CB \cdot CM}{CA} = \frac{24 \cdot 12}{9} = 32 \text{ cm.}$



 **Bài 3.** Cho hình bình hành $ABCD$. Kẻ $AM \perp BC$, $AN \perp DC$ với M thuộc BC , N thuộc DC . Chứng minh

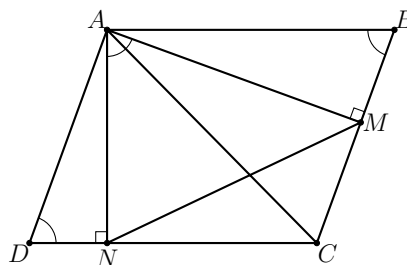
$$\text{a) } \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD};$$

b) $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.

 Lời giải.

1. Ta có $\widehat{B} = \widehat{D}$ suy ra $\triangle AMB \sim \triangle AND$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD}.$$
2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{AM}{AN} = \frac{BA}{BC}$ (do $BC = AD$),
 $\widehat{B} = \widehat{MAN}$ (cùng phụ $\widehat{BAM}$) $\Rightarrow \triangle MAN \sim \triangle ABC$ (c.g.c).



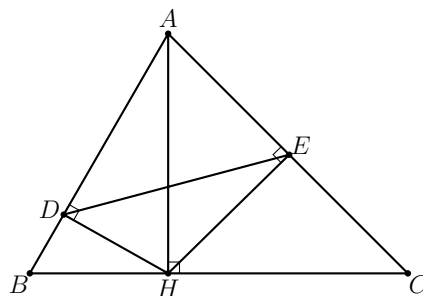
 **Bài 4.** Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

1. Chứng minh $AH^2 = AD \cdot AB$.
2. Chứng minh $AE \cdot AC = AD \cdot AB$, rồi suy ra $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.
3. Biết $AH = 5$ cm, $DE = 4$ cm, $BC = 8$ cm. Tính diện tích tam giác ADE .
 $S_{ADE} = 5 \text{ cm}^2$

DS:

 Lời giải.

1. Ta có $\triangle ADH \sim \triangle AHB$ (g.g) $\Rightarrow AH^2 = AD \cdot AB$.
2. Làm tương tự câu a), thu được $AH^2 = AE \cdot AC$
 $\Rightarrow AE \cdot AC = AD \cdot AB$
 $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACB$ (c.g.c).
3. Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$,
 mà $\frac{S_{ADE}}{S_{ACB}} = \frac{DE^2}{BC^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ADE} = 5 \text{ cm}^2$.



§9 Ôn tập chương III

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem phần Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 8

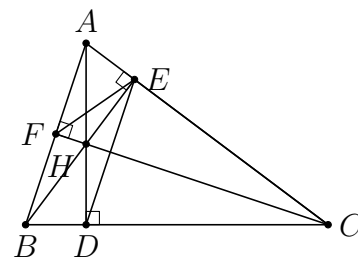
2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Chứng minh

- $\triangle HBF \sim \triangle HCE$.
- $HB \cdot HE = HF \cdot HC = HA \cdot HD$.
- EH là tia phân giác của góc DEF .

Lời giải.

- $\triangle HBF \sim \triangle HCE$ (g.g).
- Từ kết quả câu a) ta có $HB \cdot HE = HF \cdot HC$.
Làm tương tự ta thu được $HF \cdot HC = HA \cdot HD$. Suy ra $HB \cdot HE = HF \cdot HC = HA \cdot HD$.
- Từ câu b), chứng minh được $\triangle EHF \sim \triangle CHB$ (c.g.c) và $\triangle DHE \sim \triangle BHA$ (c.g.c), do đó $\widehat{HEF} = \widehat{HCB}$ và $\widehat{HED} = \widehat{HAB}$.
Ta có $\widehat{HAB} = \widehat{HCB}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$).
Do đó $\widehat{HED} = \widehat{HEF} \Rightarrow EH$ là tia phân giác của góc DEF .

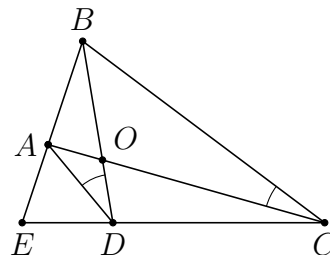


Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O .

- Chứng minh $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.
- Chứng minh $\triangle AOB \sim \triangle DOC$.
- Gọi E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD . Chứng minh $EA \cdot EB = ED \cdot EC$.

 Lời giải.

1. Ta có $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ (g.g).
2. Từ câu a) ta có $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle DOC$ (c.g.c).
3. Từ câu b), ta có $\widehat{ECA} = \widehat{EBD} \Rightarrow \triangle EAC \sim \triangle EDB$ (g.g). Suy ra $EA \cdot EB = ED \cdot EC$.



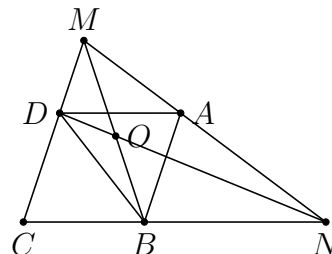
□

 **Ví dụ 3.** Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Một đường thẳng đi qua A cắt các tia CD , CB lần lượt tại M và N .

1. Chứng minh $\triangle ADM \sim \triangle NBA$.
2. Chứng minh $AD^2 = DM \cdot BN$, rồi suy ra $\triangle MDB \sim \triangle DBN$.
3. Gọi O là giao điểm của BM và DN . Tính $\widehat{MON}$.

 Lời giải.

1. Ta có $DA \parallel CN$ và $BA \parallel CM$ nên $\widehat{DMA} = \widehat{BAN}$, $\widehat{MAD} = \widehat{ANB} \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle NBA$ (g.g).
2. Từ câu a), ta có $MD \cdot BN = AD \cdot AB = BD^2$ (do $\triangle ABD$ đều) $\Rightarrow \frac{DM}{BD} = \frac{BD}{BN}$ mà $\widehat{MDB} = \widehat{NBD} = 120^\circ$.
Vậy $\triangle MDB \sim \triangle DBN$.
3. Từ kết quả câu b), ta có $\widehat{BDN} = \widehat{DMB}$, từ đó ta nhận được $\widehat{MON} = \widehat{DMB} + \widehat{MDN} = \widehat{BDM} = 120^\circ$.



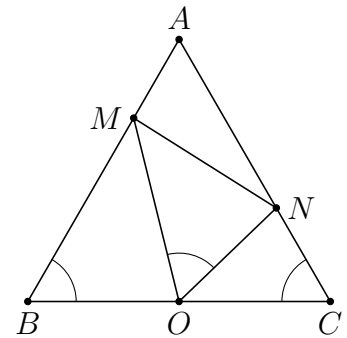
□

 **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC đều, O là trung điểm của BC . Trên AB , AC lần lượt lấy M , N sao cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Chứng minh

1. $\widehat{BMO} = \widehat{CON}$, từ đó suy ra $\triangle BMO \sim \triangle CON$.
2. $\frac{OM}{ON} = \frac{BM}{BO}$.
3. MO là tia phân giác của $\angle BMO$.

 Lời giải.

1. Xét $\triangle BMO$, ta có $\widehat{BMO} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{MOB}$.
Ta cũng có $\widehat{CON} = 180^\circ - \widehat{MON} - \widehat{MOB} = 120^\circ - \widehat{MOB}$
 $\Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{CON} \Rightarrow \triangle BMO \sim \triangle CON$ (g.g).
2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{OM}{ON} = \frac{BM}{CO} = \frac{BM}{BO}$ vì $OB = OC$.
3. Từ kết quả câu b), $\widehat{B} = \widehat{MON} = 60^\circ$.
Do đó $\triangle BMO \sim \triangle OMN$ (c.g.c).
Vậy MO là tia phân giác của $\angle BMO$.



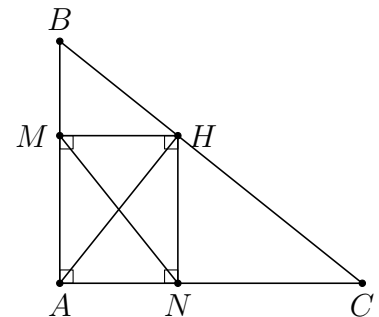
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Kẻ đường cao AH .

1. Chứng minh $AH \cdot BC = AB \cdot AC$
2. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle ACB$.
3. Chứng minh $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{AH^2}{BC^2}$.
4. Tính diện tích tứ giác $BMNC$.

ĐS: 18,4704 cm²

Lời giải.

1. Ta có $\triangle ABH \sim \triangle CAB$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{AH}{CB} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC$
2. Ta giả thiết ta có $\widehat{ABC} = \widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^\circ$
 $\Rightarrow AMHN$ là hình chữ nhật.
Do $ANHM$ là hình chữ nhật nên ta có $\widehat{ANM} = \widehat{AHM}$.
Mặt khác $\widehat{AHM} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ $\widehat{HAB}$)
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ACB$ (g.g).
3. Ta có $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{MN^2}{BC^2} = \frac{AH^2}{BC^2}$ (do $AH = MN$).
4. Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 4,8$ (cm²). Từ kết quả câu c), ta tính được $S_{AMN} = 5,5296$ cm² $\Rightarrow S_{BMNC} = 18,4704$ cm².



Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $AB = 8$ cm. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Qua D kẻ đường thẳng d vuông góc với BD , d cắt tia BC tại E . Chứng minh

1. $\triangle BDE \sim \triangle DCE$.
2. Kẻ $CH \perp DE$ tại H . Chứng minh $DC^2 = CH \cdot DB$.

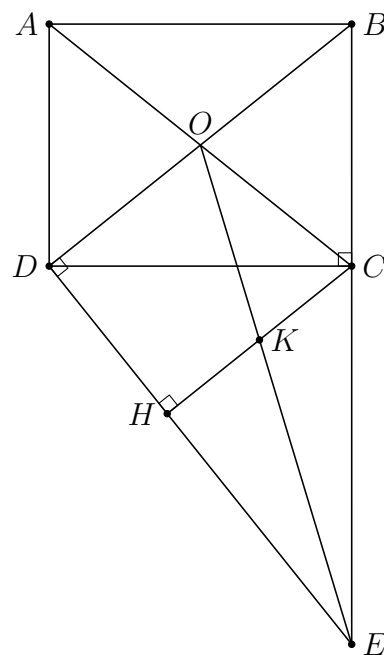
3. Gọi K là giao điểm của OC và HC . Chứng minh K là trung điểm của HC .

4. Tính tỉ số diện tích của tam giác EHC và tam giác EDB .

ĐS: 0,4096

Lời giải.

1. Ta có $\triangle BDE \sim \triangle DCE$ (g.g)
2. Ta có $CH \perp DE$ và $DB \perp DE \Rightarrow DB \parallel CH$.
Do đó $\triangle DHC \sim \triangle BCD$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{HC}{DC} \Rightarrow DC^2 = CH \cdot DB$.
3. Vì $CH \parallel BD$ nên theo định lý Ta-lét ta có
 $\frac{KH}{OD} = \frac{EK}{EO} = \frac{KC}{OB}$
mà $OD = OB$ nên $KH = KC$.
Do đó K là trung điểm của HC .
4. Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$ cm. Từ câu b) suy ra
 $CH = 6,4$ cm. Do đó $\frac{S_{\triangle EHC}}{S_{\triangle EDB}} = \frac{HC^2}{BD^2} = 0,4096$.



□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Gọi H là hình chiếu của A trên BD , tia AH cắt CD tại K .

1. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle DAK$.

2. Tính độ dài DK .

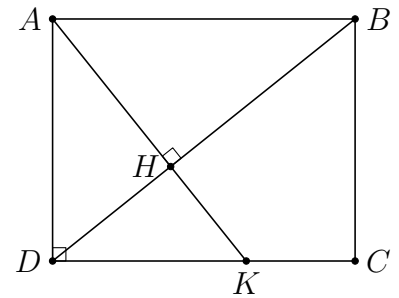
ĐS: $\frac{25}{12}$

3. Tính tỉ số diện tích của $\triangle DHK$ và $\triangle BHA$.

ĐS: $\frac{625}{20736}$

Lời giải.

1. Ta có $\widehat{DKA} = \widehat{ADB}$ (cùng phụ $\widehat{BDC}$)
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle DAK$ (g.g).
2. Từ câu a), ta có $\frac{DK}{AD} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DK = \frac{25}{12}$ cm.
3. Ta có $\frac{S_{\triangle DHK}}{S_{\triangle BHA}} = \frac{DK^2}{AB^2} = \frac{625}{20736}$.



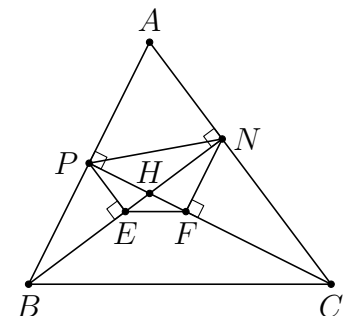
□

Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao BN , CP cắt nhau tại H .

1. Chứng minh $AN \cdot AC = AP \cdot AB$.
2. Chứng minh $\triangle ANP \sim \triangle ABC$.
3. Biết $BC = 2NP$ và diện tích tam giác ABC bằng 36 cm^2 . Tính diện tích tứ giác $BPNC$.
4. Gọi E , F lần lượt là hình chiếu của P , N trên BN , CP . Chứng minh $EF \parallel BC$.

Lời giải.

1. Ta có $\triangle ANB \sim \triangle APC$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AN \cdot AC = AP \cdot AB$.
2. Từ kết quả câu a) ta có $\triangle ANP \sim \triangle ABC$ (c.g.c)
3. Ta có $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{NP^2}{BC^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle ANP} = 9 \text{ cm}^2$.
 Do đó $S_{BPNC} = 27 \text{ cm}^2$.
4. Ta có $EP \parallel NC$, $FN \parallel BP$ nên theo định lý Ta-lét
 ta có $\frac{HE}{HN} = \frac{HP}{HC}$, $\frac{HF}{HP} = \frac{HN}{HB} \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{HF}{HC}$. Do đó
 $EF \parallel BC$.



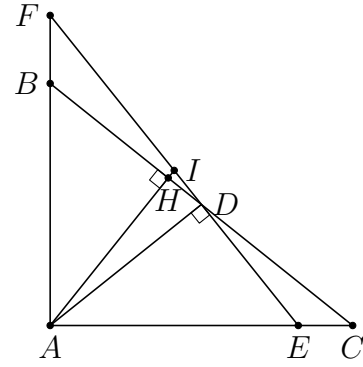
□

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) và trung tuyến AD . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt AC và AB lần lượt tại E và F .

1. Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle AEF$.
2. Chứng minh $BC^2 = 4DE \cdot DF$.
3. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC , tia AH cắt EF của tam giác ABC , tia AH cắt EF tại I . Chứng minh $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD^2}{AI^2}$.

Lời giải.

1. Ta có $\triangle DAC$ cân tại D nên $\widehat{ACB} = \widehat{DAC} = 90^\circ - \widehat{DAF} = \widehat{AFE} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AEF$ (g.g).
2. Theo câu a) ta có $\widehat{AFE} \sim \widehat{ACB} \Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle DBF$ (g.g)
 $\Rightarrow BC^2 = 4DE \cdot DF$.
3. Ta có $AI \perp CB$ và $AF \perp AC$. suy ra $\widehat{IAF} = \widehat{ACB}$ (góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc).
 Suy ra $\widehat{IAF} = \widehat{IFA} \Rightarrow \triangle IAF$ cân tại I . Suy ra $IA = IF$.
 Tương tự cũng có $IA = IE \Rightarrow IE = IF$.
 Do đó AI, AD lần lượt là hai đường trung tuyến tương ứng của $\triangle AEF$ và $\triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD^2}{AI^2}$.



□

4 Đề kiểm tra chương III

4.1 Đề 1

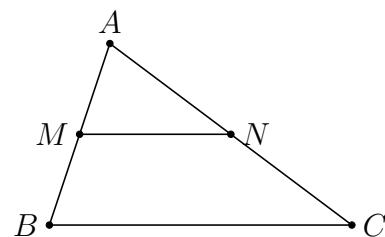
PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2,5 ĐIỂM)

Câu 1. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB, AC sao cho $MN \parallel BC$. Biết $AM = 16$ cm, $AN = 20$ cm, $NC = 15$ cm. Khi đó độ dài AB bằng

- (A) 28 cm. (B) 26 cm. (C) 24 cm. (D) 22 cm.

Lời giải.

Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$
 $\Rightarrow MB = \frac{AM \cdot NC}{AN} = 12$ cm
 $\Rightarrow AB = 16 + 12 = 28$ (cm).



Chọn đáp án (A)
A

□

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm và tam giác DEF có $DE = 6$ cm, $DF = 8$ cm, $EF = 10$ cm. Cách viết nào sau đây đúng quy ước về đỉnh:

- (A) $\triangle ABC \sim \triangle FED$. (B) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
 (C) $\triangle CAB \sim \triangle DEF$. (D) $\triangle BCA \sim \triangle EDF$.

Lời giải.

Ta có $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = 2 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (c.c.c).

Chọn đáp án (B)
B

□

Câu 3. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP theo tỉ số đồng dạng 3. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AC, MP . Tỉ số $\frac{BH}{NK}$ bằng

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{1}{9}$.

(C) 3.

(D) 9.

Lời giải.

Ta có $\frac{BH}{NK} = 3$.

Chọn đáp án (C)
C

□

Câu 4. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác PQR có $\frac{AB}{PQ} = 4, S_{\triangle ABC} = 32 \text{ cm}^2$. Diện tích tam giác PQR bằng

(A) 128 cm^2 .

(B) 64 cm^2 .

(C) 16 cm^2 .

(D) 2 cm^2 .

Lời giải.

Ta có $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PQR}} = \frac{AB^2}{PQ^2} = 16 \Rightarrow S_{\triangle PQR} = \frac{32}{16} = 2 \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án (D)
D

□

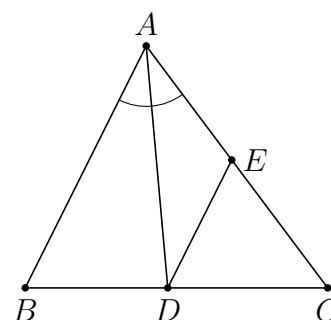
Bài 4.

Cho hình vẽ bên. Điền nội dung thích hợp vào chỗ chấm ($\dots$)

1. $\frac{DB}{DC} = \frac{\dots}{\dots}$

2. Nếu $\frac{DB}{DC} = \frac{\dots}{\dots}$ thì $DE \parallel AB$.

3. Nếu $DE \parallel AB$ thì $EA = \dots$.



Lời giải.

1. $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

2. Nếu $\frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC}$ thì $DE \parallel AB$.

3. Nếu $DE \parallel AB$ thì $EA = ED$.

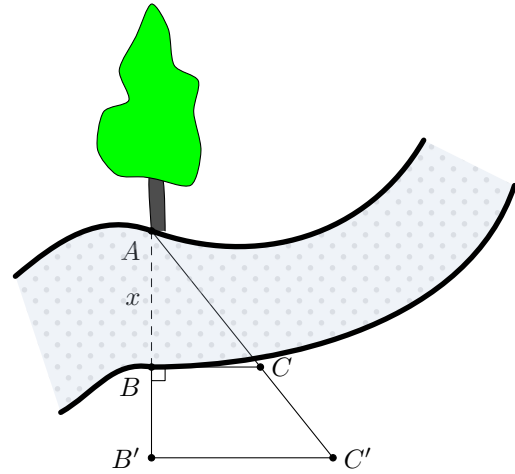
□

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 5.

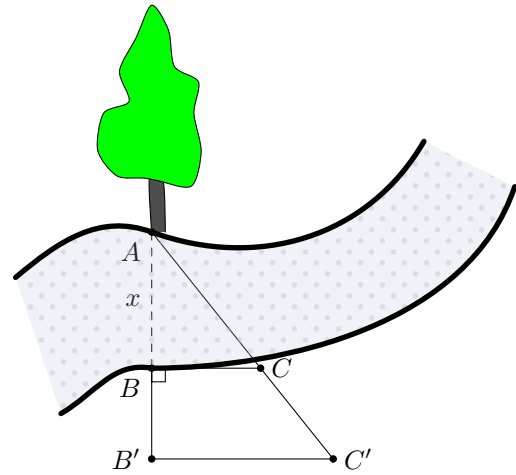
Tài liệu Toán 8 này là của:

Người ta tiến hành đo đạc các yếu tố cần thiết để tính chiều rộng của một khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia sông (hình vẽ bên). Biết $BB' = 20\text{m}$, $BC = 30\text{m}$ và $B'C' = 40\text{m}$. Tính độ rộng x của khúc sông. **ĐS:** 60 m



Lời giải.

Dùng hệ quả của định lý Ta-let, ta có

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{x}{x+20} = \frac{30}{40} \Rightarrow x = 60 \text{ m.}$$


□

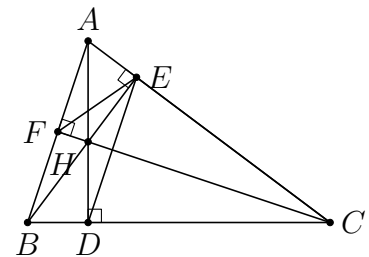
Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .

1. Chứng minh $HE \cdot HB = HF \cdot HC$.
2. Chứng minh $\triangle EHF \sim \triangle CHB$.
3. Chứng minh EH là tia phân giác của góc DEC .
4. Biết $\frac{HA}{HC} = \frac{2}{3}$. Tính tỉ số diện tích của tam giác AEF và tam giác DEC .

ĐS: $\frac{4}{9}$

Lời giải.

1. Ta có $\triangle HBF \sim \triangle HCE$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{HF}{HB} = \frac{HE}{HC} \Rightarrow HE \cdot HB = HF \cdot HC$.
2. Từ kết quả câu a), suy ra $\triangle EHF \sim \triangle CHB$ (g.c.g).
3. Làm tương tự câu a) và b) ta chứng minh được
 $\triangle AHB \sim \triangle EHD$, do đó $\widehat{FEH} = \widehat{BCH} = \widehat{BAH} = \widehat{DEH}$ hay EH là tia phân giác của góc DEC .
4. Ta có $\widehat{AEF} = 90^\circ - \widehat{FEH} = 90^\circ - \widehat{DEH} = \widehat{DEC}$,
do đó $\triangle AEF \sim \triangle DEC$ (g.g) mà $\triangle HFA \sim \triangle HDC$ (g.g).
Do đó $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{FA^2}{DC^2} = \frac{HA^2}{HC^2} = \frac{4}{9}$.

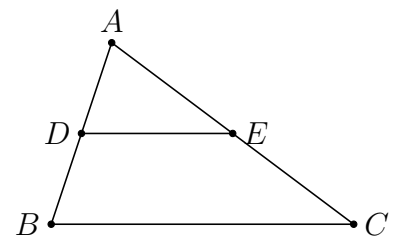


□

4.2 Đề 2

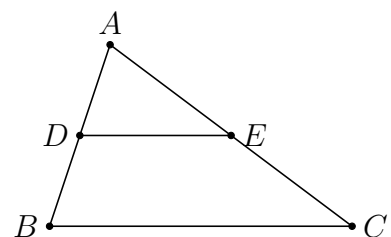
Bài 1.

Cho hình vẽ bên. Biết $DE \parallel BC$, $DE = 4$ cm, $BC = 10$ cm và $AB = 8$ cm. Tính độ dài cạnh BD . **ĐS:** 4,8 cm



Lời giải.

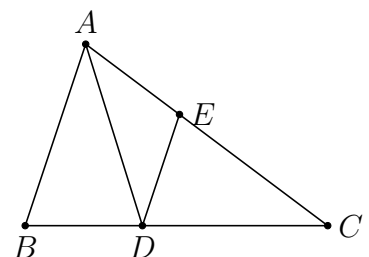
Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, từ đó $AD = 3,2$ cm.
Suy ra $BD = AB - AD = 4,8$ cm.



□

Bài 2.

Cho hình vẽ bên. Biết $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm và $BC = 9$ cm, phân giác AD và $DE \parallel AB$. Tính độ dài cạnh BD , DC , DE . **ĐS:** 3,375 cm, 5,625 cm, 3,75 cm



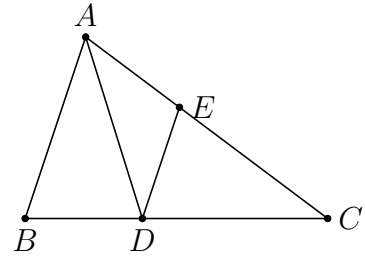
Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB+DC}{AB+AC} = \frac{9}{16}.$$

Từ đó tính được $DB = 3,375$ cm và $DC = 5,625$ cm.

Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DE = 3,75$ cm.



□

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ các đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

1. Chứng minh $AD \cdot AC = AE \cdot AB$.

2. Chứng minh $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

3. Biết $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính tỉ số diện tích của tam giác ADE và tam giác ABC .

ĐS: $\frac{1}{2}$

4. Chứng minh $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.

Lời giải.

1. Ta có $\triangle ADB \triangle AEC$ (g.g), từ đó

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AD \cdot AC = AE \cdot AB.$$

2. Từ kết quả câu a), ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (c.g.c).

3. Vì $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nên tam giác ADB vuông cân tại D , do đó $AB^2 = 2AD^2$. Suy ra $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{1}{2}$.

4. AH cắt BC tại F thì $AF \perp BC$. $\triangle BHF$ và $\triangle BCD$ là hai tam giác vuông có chung $\widehat{DBC}$ nên $\triangle BHF \sim \triangle BCD$ (g.g), tương tự ta cũng có $\triangle CHF \sim \triangle CBE$ (g.g), từ đó ta có $BH \cdot BD = BF \cdot BC$ và $CH \cdot CE = CF \cdot CB$. Vậy $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.

□

