

Chương 1

Phép nhân và phép chia đa thức

§1 Nhân đơn thức với đa thức

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

Ta có $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Ví dụ $3x \cdot (2x^3 - x + 1) = 3x \cdot 2x^3 + 3x \cdot (-x) + 3x \cdot 1 = 6x^4 - 3x^2 + 3x$.

Vậy $3x \cdot (2x^3 - x + 1) = 6x^4 - 3x^2 + 3x$.

 **1.** Ta thường sử dụng các phép toán liên quan đến lũy thừa sau khi thực hiện phép nhân:

- $a^0 = 1$ với $a \neq 0$;
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ với $m \geq n$;
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

với m, n là số tự nhiên.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 1. Làm phép tính nhân đơn thức với đa thức

Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức và các phép toán liên quan đến lũy thừa.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Thực hiện phép tính

a) $M = 2x^2(1 - 3x + 2x^2)$;

b) $N = (2x^2 - 3x + 4) \cdot \left(\frac{-1}{2}x\right)$;

c) $P = \frac{1}{2}xy(-x^3 + 2xy - 4y^2)$.

 Lời giải.

a) $M = 2x^2 - 6x^3 + 4x^4.$

b) $N = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x.$

c) $P = -\frac{1}{2}x^4y + x^2y^2 - 2xy^3.$

□

 Ví dụ 2. Làm tính nhân

a) $M = 2x^3(x^2 - 2x + 1);$

b) $N = (2x^3 - 4x - 8) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right);$

c) $P = x^2y \cdot \left(xy^2 - x^2 - \frac{1}{2}y^3\right).$

 Lời giải.

a) $M = 2x^5 - 4x^4 + 2x^3.$

b) $N = x^4 - 2x^2 - 4x.$

c) $P = x^3y^3 - x^4y - \frac{1}{2}x^2y^4.$

□

 Ví dụ 3. Nhân đơn thức A với đa thức B biết rằng $A = \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2$ và $B = 4x^2 + 4xy^2 - 3.$

 Lời giải.

Ta có $A \cdot B = \frac{1}{4}x^4y^2 \cdot (4x^2 + 4xy^2 - 3) = x^6y^2 + x^5y^4 - \frac{3}{4}x^4y^2.$

□

 Ví dụ 4. Nhân đa thức A với đơn thức B biết rằng $A = \frac{1}{4}x^3y + \frac{-1}{2}x^2 - y^3$ và $B = (-2xy)^2.$

 Lời giải.

Ta có $A \cdot B = \left(\frac{1}{4}x^3y + \frac{-1}{2}x^2 - y^3\right) \cdot 4x^2y^2 = x^5y^3 - 2x^4y^2 - 4x^2y^5$

□

 Dạng 2. Sử dụng phép nhân đơn thức với đa thức, rút gọn biểu thức cho trước

Thực hiện theo hai bước

- ☒ Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức để phá ngoặc;
- ☒ Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức đã cho.

 BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau

1. $M = 2x(-3x + 2x^3) - x^2(3x^2 - 2) - (x^2 - 4)x^2;$

ĐS: $M = 0$



2. $N = x(y^2 - x) - y(yx - x^2) - x(xy - x - 1).$

ĐS: $N = x$

Lời giải.

1. Ta có $M = -6x^2 + 4x^4 - 3x^4 + 2x^2 - x^4 + 4x^2 = 0.$

2. Ta có $N = xy^2 - x^2 - y^2x + x^2y - x^2y + x^2 + x = x.$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau

1. $A = 3x^2(6x^2 + 1) - 9x(2x^3 - x);$

ĐS: $A = 12x^2$

2. $B = x^2(x - 2y) + 2xy(x - y) + \frac{1}{3}y^2(6x - 3y).$

ĐS: $B = x^3 - y^3$

Lời giải.

1. $A = 18x^4 + 3x^2 - 18x^4 + 9x^2 = 12x^2.$

2. $B = x^3 - 2x^2y + 2x^2y - 2xy^2 + 2xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

□

Dạng 3. Tính giá trị của biểu thức cho trước

Thực hiện theo hai bước

☒ Rút gọn biểu thức đã cho;☒ Thay các giá trị của biến vào biểu thức sau khi đã rút gọn ở bước 1. **BÀI TẬP MẪU**

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức

1. $P = 2x^3 - x(3 + x^2) - x(x^2 - x - 3)$ tại $x = 10;$

ĐS: $P = 100$

2. $Q = x^2(x - y + y^2) - x(xy^2 + x^2 - xy - y)$ tại $x = 5$ và $y = 20.$

ĐS: $Q = 100$

Lời giải.

1. Rút gọn được $P = x^2$, thay $x = 10$ ta được $P = 100.$

2. Rút gọn được $Q = xy$, thay $x = 5$ và $y = 20$ ta được $Q = 100.$

□

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức

1. $M = 2x^2(x^2 - 5) + x(-2x^3 + 4x) + (6 + x)x^2$ tại $x = -4;$

ĐS: $M = -64$

2. $N = x^3(y + 1) - xy(x^2 - 2x + 1) - x(x^2 + 2xy - 3y)$ tại $x = 8$ và $y = -5.$

ĐS:
 $Q = -80$

Lời giải.

1. Rút gọn được $M = x^3$, thay $x = -4$ ta được $P = -64$.
2. Rút gọn được $N = 2xy$, thay $x = 8$ và $y = -5$ ta được $Q = -80$.

□

Dạng 4. Tìm x biết x thỏa mãn điều kiện cho trước

Thực hiện theo hai bước

- B1. Sử dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức để phá ngoặc;
- B2. Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức ở hai vế để tìm x .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết $3x(1 - 4x) + 6x(2x - 1) = 9$.

ĐS: $x = -3$

 **Lời giải.**

Biến đổi phương trình thành: $3x - 12x^2 + 12x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow -3x = 9 \Leftrightarrow x = -3$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết $3x(2 - 8x) - 12x(1 - 2x) = 6$.

ĐS: $x = -1$

 **Lời giải.**

Biến đổi phương trình thành: $6x - 24x^2 - 12x + 24x^2 = 6 \Leftrightarrow -6x = 6 \Leftrightarrow x = -1$.

□

Dạng 5. Chứng tỏ giá trị biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến

Rút gọn biểu thức đã cho và chứng tỏ kết quả đó không phụ thuộc vào biến.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức $Q = 3x(x^3 - x + 4) - \frac{1}{2}x^2(6x^2 - 2) - 2x(6 - x) + 1$ không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

 **Lời giải.**

Rút gọn $Q = 1 \Rightarrow Q$ không phụ thuộc vào biến x .

□

 **Ví dụ 2.** Cho biểu thức $P = x^2(1 - 2x^3) + 2x(x^4 - x + 2) + x(x - 4)$. Chứng tỏ giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của x .

 **Lời giải.**

Rút gọn $P = 0 \Rightarrow P$ không phụ thuộc vào biến x .

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $A = 2x^2y^2 \left(x^3y^2 - x^2y^3 - \frac{1}{2}y^5 \right);$

b) $B = -\frac{1}{3}xy(3x^3y^2 - 6x^2 + y^2);$

c) $C = \left(-2xy^2 + \frac{2}{3}y^2 + 4xy^2 \right) \cdot \frac{3}{2}xy.$

Lời giải.

a) $A = 2x^5y^4 - 2x^4y^5 - x^2y^7.$

b) $B = -x^4y^3 + 2x^3y - \frac{1}{3}xy^3.$

c) $C = 5x^2y^3 + xy^3.$

□

Bài 2. Làm tính nhân

a) $M = 2x(-3x^3 + 2x - 1);$

b) $N = (x^2 - 3x + 2)(-x^2);$

c) $P = (-xy^2)^2 \cdot (x^2 - 2x + 1).$

Lời giải.

a) $M = -6x^4 + 4x^2 - 2x.$

b) $N = -x^4 + 3x^3 - 2x^2.$

c) $P = x^4y^4 - 2x^3y^4 + x^2y^4.$

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

1. $A = (-x)^2(x + 3) - x^2(2 - 3x) - 4x^3;$

ĐS: $A = x^2$

2. $B = x^2(x - y^2) - xy(1 - yx) - x^3;$

ĐS: $B = -xy$

3. $C = x(x + 3y + 1) - 2y(x - 1) - (y + x + 1)x.$

ĐS: $C = 2y$

Bài 4. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức

1. $P = x(x^2 - y) + y(x - y^2)$ tại $x = -\frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2};$

ĐS: $P = 0$

2. $Q = x^2(y^3 - xy^2) + (-y + x + 1)x^2y^2$ tại $x = -10$ và $y = -10.$

ĐS: $Q = 10000$

Lời giải.

1. Rút gọn $P = x^3 - y^3$, thay $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ ta được $P = 0.$

2. Rút gọn $Q = x^2y^2$, thay $x = -10, y = -10$ ta được $Q = 10000.$

□

Bài 5. Tìm x , biết

1. $2(3x - 2) - 3(x - 2) = -1$; ĐS: $x = -1$
2. $3(3 - 2x^2) + 3x(2x - 1) = 9$; ĐS: $x = 0$
3. $(2x)^2(x - x^2) - 4x(-x^3 + x^2 - 5) = 20$. ĐS: $x = 1$

 **Lời giải.**

1. Biến đổi phương trình thành $6x - 4 - 3x + 6 = -1 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.
2. Biến đổi phương trình thành $9 - 6x^2 + 6x^2 - 3x = 9 \Leftrightarrow -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. Biến đổi phương trình thành $4x^3 - 4x^4 + 4x^4 - 4x^3 + 20x = 20 \Leftrightarrow 20x = 20 \Leftrightarrow x = 1$.

□

 **Bài 6.** Chứng tỏ rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

1. $P = x(3x + 2) - x(x^2 + 3x) + x^3 - 2x + 3$;
2. $Q = x(2x - 3) + 6x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) + 1$.

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $P = 3 \Rightarrow P$ không phụ thuộc vào biến x .
2. Rút gọn $Q = 1 \Rightarrow Q$ không phụ thuộc vào biến x .

□

§2 Nhân đa thức với đa thức

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 2. Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với mỗi hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích lại với nhau.

Ta có

$$(A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

với A, B, C, D là các đơn thức.

Ví dụ

$$(x + 2)(x - 1) = x(x - 1) + 2(x - 1) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2.$$

Vậy $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 6. Làm phép tính nhân đa thức với đa thức

Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Nhân các đa thức sau

a) $(x - 2)(3x + 5)$; b) $(-2x^2 + x - 1)(x + 2)$; c) $(x - y)(y^2 + xy + x^2)$.

 **Lời giải.**

a) $3x^2 - x - 10$. b) $-2x^3 - 3x^2 + x - 2$. c) $x^3 - y^3$.

□

 **Ví dụ 2.** Thực hiện phép nhân

a) $(x + 1)(x^2 - x)$; b) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; c) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$.

 **Lời giải.**

a) $x^3 - x$. b) $x^3 + 8$. c) $x^3 - 8y^3$.

□

 **Ví dụ 3.** Tính giá trị của biểu thức

1. $M = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$ tại $x = \frac{-1}{2}$; ĐS: $M = -2$

2. $N = (2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$ tại $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$. ĐS: $N = -63$

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $M = 8x^3 - 1$, thay $x = \frac{-1}{2}$ ta được $M = -2$.

2. Rút gọn $N = 8x^3 - y^6$, thay $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$ ta được $N = -63$. □

 **Ví dụ 4.** Tính giá trị của biểu thức

1. $P = (4x - 3)(4x + 3)$ tại $x = \frac{1}{4}$; ĐS: $P = -8$

2. $Q = (3y + x)(9y^2 - 3xy + x^2)$ tại $x = 3$ và $y = \frac{1}{3}$. ĐS: $Q = 28$

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $P = 16x^2 - 9$, thay $x = \frac{1}{4}$ ta được $P = -8$.

2. Rút gọn $Q = 27y^3 + x^3$, thay $x = 3$ và $y = \frac{1}{3}$ ta được $Q = 28$. □

Dạng 7. Chứng tỏ giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến

Thực hiện theo hai bước

B1. Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức;

B2. Áp dụng các quy tắc rút gọn đa thức để thu được kết quả không còn chứa biến.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$A = (x - 2)(2x - 1) - (2x - 3)(x - 1) - 2.$$

 **Lời giải.**

Rút gọn $A = -3 \Rightarrow A$ không phụ thuộc vào biến x . □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$B = (3 - 2x)(3 + 2x) + (2x - 1)(2x + 1).$$

 Lời giải.

Rút gọn $B = 8 \Rightarrow B$ không phụ thuộc vào biến x . □

 Dạng 8. Tìm x thỏa mãn điều kiện cho trước

Thực hiện theo hai bước

B1. Sử dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức để khai triển;

B2. Nhóm các đơn thức đồng dạng và rút gọn biểu thức ở hai vế để tìm x .

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết $(2x + 1)(2x - 3) - (4x + 1)(x + 2) = 8$.

ĐS: $x = -1$

 Lời giải.

Biến đổi phương trình thành $4x^2 - 4x - 3 - 4x^2 - 9x - 2 = 8 \Leftrightarrow -13x = 13 \Leftrightarrow x = -1$. □

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết $(1 - 2x)(3x + 1) + 3x(2x - 1) = 9$.

ĐS: $x = -4$

 Lời giải.

Biến đổi phương trình thành $-6x^2 + x + 1 + 6x^2 - 3x = 9 \Leftrightarrow -2x = 8 \Leftrightarrow x = -4$. □

 Dạng 9. Chứng minh đẳng thức

Thực hiện phép nhân đa thức với đa thức ở vế thứ nhất, sau đó rút gọn đa thức để thu được kết quả như vế còn lại.

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh

a) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 8x^3 - 1$;

b) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$.

 Lời giải.

1. Ta có $VT = 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1 = 8x^3 - 1$ (đpcm).

2. Ta có $VT = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$ (đpcm). □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh

a) $(x^2 - 2x + 4)(x + 2) = x^3 + 8$;

b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

 Lời giải.

1. Ta có $VT = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 4x + 8 = x^3 + 8$.

2. Ta có $VT = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$.

Dạng 10. Chứng minh các bài toán về số nguyên

Thực hiện theo 4 bước

- B1. Gọi số phải tìm và đặt điều kiện;
- B2. Biểu diễn các dữ kiện của đề bài theo số phải tìm;
- B3. Áp dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức để tìm ra đáp án của bài toán;
- B4. Kiểm tra điều kiện và kết luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 24. **ĐS:** 11; 12; 13

Lời giải.

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $x; x + 1; x + 2$ ($x \in \mathbb{N}$).
 Tích hai số sau là $(x + 1)(x + 2)$, tích hai số đầu là $x(x + 1)$.
 Vì tích hai số sau lớn hơn hai số trước là 24 nên:

$$(x + 1)(x + 2) - x(x + 1) = 24 \Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11.$$

Vậy ba số tự nhiên cần tìm là 11; 12; 13.

Ví dụ 2. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số trước lớn hơn tích của hai số sau là 26. **ĐS:** 12; 13; 14

Lời giải.

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $x; x + 1; x + 2$ ($x \in \mathbb{N}$).
 Tích hai số sau là $(x + 1)(x + 2)$, tích hai số đầu là $x(x + 1)$.
 Vì tích của hai số trước lớn hơn tích của hai số sau là 26 nên:

$$(x + 1)(x + 2) - x(x + 1) = 26 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12.$$

Vậy ba số tự nhiên cần tìm là 12; 13; 14.

Ví dụ 3. Chứng minh $n^2(3 - 2n) - n(3n - 2n^2 - 3)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Lời giải.

Rút gọn $n^2(3 - 2n) - n(3n - 2n^2 - 3) = 3n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Ví dụ 4. Chứng minh $n(1 - 2n) - (n - 1)(5 - 2n) + 1$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Lời giải.

Rút gọn $n(1 - 2n) - (n - 1)(5 - 2n) + 1 = -6n + 6$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Nhân các đa thức sau

a) $(2x + 3)(x - 2);$

b) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4);$

c) $4\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right).$

 **Lời giải.**

a) $2x^2 - x - 6.$

b) $x^3 + 8.$

c) $4x^4 - y^2.$

□

Bài 2. Cho biểu thức $P = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x - 2)(x + 2) - x^2(2 + x)$. Chứng minh giá trị của P không phụ thuộc vào x .

 **Lời giải.**

Rút gọn $P = x^3 - 1 + 2(x^2 - 4) - 2x^2 - x^3 = -9$. Vậy giá trị của P không phụ thuộc vào x . □

Bài 3. Tìm x biết

1. $(x^2 - 2x + 4)(x + 2) - x(x - 1)(x + 1) + 3 = 0;$

ĐS: $x = -11$

2. $(x - 1)(3 - 2x) + (2x - 1)(x + 3) = 4.$

ĐS: $x = 1$

 **Lời giải.**

1. Biến đổi phương trình thành $x^3 + 8 - x^3 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -11.$

2. Biến đổi phương trình thành $3x - 2x^2 - 3 + 2x + 2x^2 + 6x - x - 3 = 4 \Leftrightarrow 10x = 10 \Leftrightarrow x = 1.$

□

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi x, y ta luôn có $(xy + 1)(x^2y^2 - xy + 1) + (x^3 - 1)(1 - y^3) = x^3 + y^3$.

 **Lời giải.**

Ta có $VT = x^3y^3 + 1 + x^3 - x^3y^3 - 1 + y^3 = x^3 + y^3.$

□

Bài 5. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích hai số sau lớn hơn hai số trước là 30.
14; 15; 16

ĐS:

 **Lời giải.**

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $x; x + 1; x + 2$ ($x \in \mathbb{N}$).

Tích hai số sau là $(x + 1)(x + 2)$, tích hai số đầu là $x(x + 1)$.

Vì tích hai số sau lớn hơn hai số trước là 30 nên:

$$(x + 1)(x + 2) - x(x + 1) = 30 \Leftrightarrow 2x = 28 \Leftrightarrow x = 14.$$

Vậy ba số tự nhiên cần tìm là 14; 15; 16. □

Bài 6. Cho biểu thức $Q = (2n - 1)(2n + 3) - (4n - 5)(n + 1) + 3$. Chứng minh Q luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Rút gọn $Q = (2n - 1)(2n + 3) - (4n - 5)(n + 1) + 3 = 5n + 5$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên n .

□

§3 Những hằng đẳng thức đáng nhớ (Phần 1)

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Bình phương của một tổng

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Ví dụ $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 = x^2 + 4x + 4.$

1.2 Bình phương của một hiệu

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Ví dụ $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 = x^2 - 6x + 9.$

1.3 Hiệu hai bình phương

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Ví dụ $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 11. Thực hiện phép tính

Sử dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để khai triển các biểu thức.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

📖 Ví dụ 1. Thực hiện phép tính

a) $(x + 3)^2$; b) $(3x - 1)^2$; c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)$; d) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2$.

✍️ Lời giải.

a) $x^2 + 6x + 9.$ b) $9x^2 - 6x + 1.$ c) $\frac{1}{4} - x^2.$ d) $x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}.$

□

📖 Ví dụ 2. Thực hiện phép tính

a) $(x + 1)^2$; b) $(2x - 1)^2$; c) $(x - 3)(3 + x)$; d) $(x^2 + 2)^2.$

✍️ Lời giải.

- a) $x^2 + 2x + 1$. b) $4x^2 - 4x + 1$. c) $x^2 - 9$. d) $x^4 + 4x^2 + 4$.

□

 **Ví dụ 3.** Khai triển các biểu thức sau

- a) $(2x + 3y)^2$; b) $(xy - 3)^2$;
c) $(2xy - 1)(2xy + 1)$; d) $2\left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)(x^2 - 2y)$.

 **Lời giải.**

- a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$. b) $x^2y^2 - 6xy + 9$. c) $4x^2y^2 - 1$. d) $x^4 - 4y^2$.

□

 **Ví dụ 4.** Khai triển các biểu thức sau

- a) $(2x + y)^2$; b) $(2 - xy)^2$;
c) $(3x - 2y)(3x + 2y)$; d) $2\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)(2x^2 - y)$.

 **Lời giải.**

- a) $4x^2 + 4xy + y^2$ b) $4 - 4xy + x^2y^2$ c) $9x^2 - 4y^2$ d) $4x^4 - y^2$

□

 **Ví dụ 5.** Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

- a) $x^2 + 4x + 4$; b) $4x^2 - 4x + 1$;
c) $x^2 - x + \frac{1}{4}$; d) $4(x + y)^2 - 4(x + y) + 1$.

 **Lời giải.**

- a) $(x + 2)^2$ b) $(2x - 1)^2$ c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ d) $(2x + 2y - 1)^2$

□

 **Ví dụ 6.** Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

- a) $x^2 + 6x + 9$; b) $9x^2 - 6x + 1$;
c) $x^2y^2 + xy + \frac{1}{4}$; d) $(x - y)^2 + 6(x - y) + 9$.

 **Lời giải.**

- a) $(x + 3)^2$. b) $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^2$.
c) $\left(xy + \frac{1}{2}\right)^2$. d) $\left(x - y + 3\right)^2$.

□

Ví dụ 7. Điền các đơn thức vào chỗ “...” để hoàn thành các hằng đẳng thức sau

- a) $x^2 + 6x + \dots = (x + \dots)^2$; b) $4x^2 - 4x + \dots = (2x - \dots)^2$;
c) $9x^2 - \dots + \dots = (3x - 2y)^2$; d) $(x - \dots) \left(\dots + \frac{y}{3} \right) = \dots - \frac{y^2}{9}$.

Lời giải.

- a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$. b) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.
c) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$. d) $\left(x - \frac{y}{3}\right) \left(x + \frac{y}{3}\right) = x^2 - \frac{y^2}{9}$.

□

Ví dụ 8. Hoàn thiện các hằng đẳng thức sau

- a) $\dots - 10x + 25 = (x - \dots)^2$; b) $\dots - 4x^2 + x^4 = (\dots - x^2)^2$;
c) $x^2 - \dots + 9y^2 = (x - \dots)^2$; d) $(2x + \dots)(\dots - y^2) = 4x^2 - y^4$.

Lời giải.

- a) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. b) $4 - 4x^2 + x^4 = (2 - x^2)^2$.
c) $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$. d) $(2x + y^2)(2x - y^2) = 4x^2 - y^4$.

□

Dạng 12. Chứng minh các đẳng thức, rút gọn biểu thức

Áp dụng các hằng đẳng thức một cách linh hoạt trong các phép biến đổi.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh các đẳng thức sau

- a) $(a^2 - 1)^2 + 4a^2 = (a^2 + 1)^2$. b) $(x - y)^2 + (x + y)^2 + 2(x^2 - y^2) = 4x^2$.

Lời giải.

1. Ta có $VT = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2$.
2. Ta có $VT = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + 2x^2 - 2y^2 = 4x^2$.

□

Ví dụ 2. Chứng minh các đẳng thức sau

- a) $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$; b) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

Lời giải.

1. Ta có $VP = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$;
2. Ta có $VT = (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2) = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2)$.

□

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. M = (x + 3y)^2 - (x - 3y)^2;$$

$$\text{ĐS: } M = 12xy$$

$$2. Q = (x - y)^2 - 4(x - y)(x + 2y) + 4(x + 2y)^2.$$

$$\text{ĐS: } Q = (-x - 5y)^2$$

Lời giải.

$$1. M = x^2 + 6xy + 9y^2 - x^2 + 6xy - 9y^2 = 12xy.$$

$$2. Q = (x - y - 2x - 4y)^2 = (-x - 5y)^2.$$

□

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức

$$1. A = (2x + y)^2 - (2x - y)^2;$$

$$\text{ĐS: } M = 8xy$$

$$2. B = (x - 2y)^2 - 4(x - 2y)y + 4y^2.$$

$$\text{ĐS: } Q = x^2 - 8xy + 16y^2$$

Lời giải.

$$1. A = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x^2 + 2xy - y^2 = 8xy.$$

$$2. B = (x - 2y - 2y)^2 = x^2 - 8xy + 16y^2.$$

□

Ví dụ 5. Khai triển các biểu thức sau

$$1. A = (x + y + z)^2;$$

$$\text{ĐS: } A = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$2. B = (a - b - c)^2.$$

$$\text{ĐS: } B = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

Lời giải.

$$1. A = (x + y)^2 + 2x(x + y) + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.$$

$$2. B = (a - b)^2 - 2c(a - b) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$$

□

Ví dụ 6. Khai triển các biểu thức sau

$$1. C = (x + y - z)^2;$$

$$\text{ĐS: } C = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$$

$$2. D = (a + 1 - b)^2.$$

$$\text{ĐS: } D = a^2 + 1 + b^2 + 2a - 2ab - 2b$$

Lời giải.

$$1. C = (x + y)^2 - 2z(x + y) + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx.$$

$$2. D = (a + 1)^2 - 2b(a + 1) + b^2 = a^2 + 1 + b^2 + 2a - 2ab - 2b.$$

□

Dạng 13. Tính nhanh

Áp dụng linh hoạt các hằng đẳng thức cho các số tự nhiên.

BÀI TẬP MẪU

Giáo viên:

c) $x = \frac{-11}{3}$.

ĐS: $Q = 100$

 **Lời giải.**Ta có $Q = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$ nên

1. Thay $x = 33$ ta được $Q = 100^2 = 10000$.
2. Thay $x = \frac{-1}{3}$ ta được $Q = 0$.
3. Thay $x = \frac{-11}{3}$ ta được $Q = (-10)^2 = 100$.

□

Dạng 14. Chứng minh bất đẳng thức; tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thứcSử dụng các hằng đẳng thức và chú ý rằng $A^2 \geq 0$ và $-A^2 \leq 0$ với A là một biểu thức bất kỳ**BÀI TẬP MẪU** **Ví dụ 1.** Chứng minh

1. Biểu thức $4x^2 - 4x + 3$ luôn dương với mọi x .
2. Biểu thức $y - y^2 - 1$ luôn âm với mọi y .

 **Lời giải.**

1. Ta có $4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2 > 0 \forall x$.
2. Ta có $y - y^2 - 1 = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0 \forall x$.

□

 **Ví dụ 2.** Chứng tỏ

- a) $x^2 - 6x + 10 > 0$ với mọi x ; b) $4y - y^2 - 5 < 0$ với mọi y .

 **Lời giải.**

1. $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi x .
2. $4y - y^2 - 5 = -(y - 2)^2 - 1 < 0$ với mọi y .

□

 **Ví dụ 3.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1. $M = x^2 - 4x + 5$;

ĐS: $M_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

2. $N = y^2 - y - 3;$

ĐS: $N_{\min} = \frac{-13}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

3. $P = x^2 + y^2 - 4x + y + 7.$

ĐS: $P_{\min} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

 **Lời giải.**

1. Từ $M = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow M_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

2. Từ $N = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \geq -\frac{13}{4} \Rightarrow N_{\min} = \frac{-13}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$

3. Từ $P = (x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \Rightarrow P_{\min} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$

□

 **Ví dụ 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1. $P = x^2 - 6x + 11;$

ĐS: $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 3$

2. $Q = y^2 + y;$

ĐS: $Q_{\min} = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$

3. $K = x^2 + y^2 - 6x + y + 10.$

ĐS: $K_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

 **Lời giải.**

1. Từ $P = (x - 3)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow P_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$

2. Từ $Q = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow Q_{\min} = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}.$

3. Từ $K = (x - 3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow K_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$

□

 **Ví dụ 5.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -x^2 - 6x + 1.$
 $A_{\max} = 10 \Leftrightarrow x = -3$

ĐS:

 **Lời giải.**

Từ $A = -(x + 3)^2 + 10 \leq 10 \Rightarrow A_{\max} = 10 \Leftrightarrow x = -3.$

□

 **Ví dụ 6.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = 4x - x^2 + 5.$ ĐS: $B_{\max} = 9 \Leftrightarrow x = 2$

 **Lời giải.**

Từ $B = -(x - 2)^2 + 9 \leq 9 \Rightarrow B_{\max} = 9 \Leftrightarrow x = 2.$

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Khai triển biểu thức sau

- a) $(x + 3)^2$; b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$; c) $(3x - y)^2$;
 d) $\left(x - \frac{1}{2}x^2y\right)^2$; e) $(2xy^2 - 1)(1 + 2xy^2)$; f) $(x - y + 2)^2$.

Lời giải.

- a) $x^2 + 6x + 9$. b) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$.
 c) $9x^2 - 6xy + y^2$. d) $x^2 - x^3y + \frac{1}{4}x^4y^2$.
 e) $4x^2y^4 - 1$. f) $x^2 + y^2 + 4 + 4x - 2xy - 4y$.

□

Bài 2. Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

- a) $x^2 + 8x + 16$; b) $9x^2 - 24x + 16$;
 c) $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$; d) $4x^2y^4 - 4xy^3 + y^2$;
 e) $(x - 2y)^2 - 4(x - 2y) + 4$; f) $(x + 3y)^2 - 12xy$.

Lời giải.

- a) $(x + 4)^2$. b) $(3x - 4)^2$. c) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.
 d) $(2xy^2 - y)^2$. e) $(x - 2y - 2)^2$. f) $(x - 3y)^2$.

□

Bài 3. Tính nhanh

- a) 103^2 ; **ĐS:** 10609 b) $96^2 + 8 \cdot 96 + 4^2$; **ĐS:** 10000
 c) $99 \cdot 101$. **ĐS:** 9999

Lời giải.

1. $103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10609$.
 2. $96^2 + 8 \cdot 96 + 4^2 = (96 + 4)^2 = 100^2 = 10000$.
 3. $99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 9999$.

□

Bài 4. Rút gọn biểu thức

1. $A = (2x - 3)^2 - (2x + 3)^2$; **ĐS:** $A = -24x$

2. $B = (x + 1)^2 - 2(2x - 1)(1 + x) + 4x^2 - 4x + 1.$

ĐS: $B = (-x + 2)^2$

 Lời giải.

1. $A = 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 - 12x - 9 = -24x.$

2. $B = (x + 1 - 2x + 1)^2 = (-x + 2)^2.$

□

 Bài 5. Tính giá trị của biểu thức

1. $N = x^2 - 10x + 25$ tại $x = 55$;

ĐS: $N = 2500$

2. $P = \frac{x^4}{4} - x^2y + y^2$ tại $x = 4; y = \frac{1}{2}.$

ĐS: $P = \frac{225}{9}$

 Lời giải.

1. Ta có $N = (x - 5)^2 \Rightarrow N = 2500$ tại $x = 55$;

2. Ta có $P = \left(\frac{x^2}{2} - y\right)^2 \Rightarrow P = \frac{225}{9}$ tại $x = 4; y = \frac{1}{2}.$

□

 Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1. $A = x^2 - 4x + 6$;

ĐS: $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 2$

2. $B = y^2 - y + 1$;

ĐS: $B_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

3. $C = x^2 - 4x + y^2 - y + 5.$

ĐS: $C_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

 Lời giải.

1. Từ $A = (x - 2)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$

2. Từ $B = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow B_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

3. Từ $C = (x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow C_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$

□

 Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

a) $A = -x^2 + 4x + 2$; ĐS: $A_{\max} = 6 \Leftrightarrow x = 2$ b) $B = x - x^2 + 2.$ ĐS: $B_{\max} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

 Lời giải.

1. Từ $A = -(x - 2)^2 + 6 \leq 6 \Rightarrow A_{\max} = 6 \Leftrightarrow x = 2.$

2. Từ $B = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4} \Rightarrow B_{\max} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

□

§4 Những hằng đẳng thức đáng nhớ (phần 2)

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Lập phương của một tổng

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Ví dụ: $(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

1.2 Lập phương của một hiệu

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Ví dụ: $(x - 1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 15. Khai triển biểu thức cho trước

Áp dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để khai triển biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Thực hiện phép tính:

a) $(x + 2)^3$; b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$; c) $(x - 2y)^3$; d) $\left(x + \frac{y^2}{2}\right)^3$.

 Lời giải.

a) $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$.

c) $(x - 2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$. d) $\left(x + \frac{y^2}{2}\right)^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{3}{4}xy^4 + \frac{y^6}{8}$.

□

 Ví dụ 2. Thực hiện phép tính:

a) $(x + 3)^3$; b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3$; c) $(x - 3y)^3$; d) $\left(x + \frac{y^2}{3}\right)^3$.

 Lời giải.

a) $(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$

b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = x^3 - x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{27}.$

c) $(x - 3y)^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3.$

d) $\left(x + \frac{y^2}{3}\right)^3 = x^3 + x^2y^2 + \frac{xy^4}{3} + \frac{y^6}{27}.$

□

Ví dụ 3. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc hiệu:

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1;$

b) $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27};$

c) $x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3;$

d) $(x - y)^3 + (x - y)^2 + \frac{1}{3}(x - y) + \frac{1}{27}.$

Lời giải.

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (-x + 1)^3.$

b) $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^3.$

c) $x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = (x^2 - y)^3.$

d) $(x - y)^3 + (x - y)^2 + \frac{1}{3}(x - y) + \frac{1}{27} = \left(x - y + \frac{1}{3}\right)^3.$

□

Ví dụ 4. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc hiệu:

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8;$

b) $-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1;$

c) $x^3 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3;$

d) $(x - y)^3 + 6(x - y)^2 + 12(x - y) + 8.$

Lời giải.

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3.$

b) $-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 = (-2x + 1)^3.$

c) $x^3 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^3.$

d) $(x - y)^3 + 6(x - y)^2 + 12(x - y) + 8 = (x - y + 2)^3.$

□

Dạng 16. Tính giá trị của biểu thức cho trước

Áp dụng các hằng đẳng thức để rút gọn biểu thức trước, sau đó thay số và tính toán hợp lí.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính giá trị biểu thức:

1. $A = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ tại $x = -28;$

ĐS: 27000

2. $B = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ tại $x = \frac{1}{2};$

ĐS: 8

3. $C = (x + 2y)^3 - 6(x + 2y)^2 + 12(x + 2y) - 8$ tại $x = 20, y = 1.$

ĐS: 8000

Lời giải.

1. Khi $x = -28$, ta có $A = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = (-x + 2)^3 = (28 + 2)^3 = 27000$.

2. Khi $x = \frac{1}{2}$, ta có $B = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3 = (1 + 1)^3 = 8$.

3. Khi $x = 20$, $y = 1$, ta có

$$C = (x + 2y)^3 - 6(x + 2y)^2 + 12(x + 2y) - 8 = (x + 2y - 2)^3 = (20 + 2 - 2)^3 = 8000.$$

□

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị biểu thức:

1. $M = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ tại $x = 99$; **ĐS:** 1000000

2. $P = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$ tại $x = -\frac{1}{3}$; **ĐS:** -8

3. $N = (x - y)^3 + 3(x - y)^2 + 3(x - y) + 1$ tại $x = 10$, $y = 1$. **ĐS:** 1000

 **Lời giải.**

1. Khi $x = 99$, ta có $M = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3 = (99 + 1)^3 = 1000000$.

2. Khi $x = -\frac{1}{3}$, ta có $P = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x - 1)^3 = (-1 - 1)^3 = -8$.

3. Khi $x = 10$, $y = 1$, ta có $N = (x - y)^3 + 3(x - y)^2 + 3(x - y) + 1 = (x - y + 1)^3 = (10 - 1 + 1)^3 = 1000$.

□

Dạng 17. Rút gọn biểu thức

Áp dụng linh hoạt các hằng đẳng thức, lựa chọn biến đổi về đẳng thức có thể áp dụng hằng đẳng thức dễ dàng.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Rút gọn biểu thức:

a) $A = (x + 2)^3 + (x - 2)^3 - 2x(x^2 + 12)$; b) $B = (xy + 2)^3 - 6(xy + 2)^2 + 12(xy + 2) - 8$.

 **Lời giải.**

1. $A = (x + 2)^3 + (x - 2)^3 - 2x(x^2 + 12) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 2x^3 - 24x = 0$.

2. $B = (xy + 2)^3 - 6(xy + 2)^2 + 12(xy + 2) - 8 = (xy + 2 - 2)^3 = x^3y^3$.

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn biểu thức:

a) $C = (x + 1)^3 + (x - 1)^3 - 2x(x^2 + 3)$; b) $D = (x + y)^3 - 3(x + y)^2y + 3(x + y)y^2 - y^3$.

 **Lời giải.**

1. $C = (x + 1)^3 + (x - 1)^3 - 2x(x^2 + 3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x^3 - 6x = 0$.

$$2. D = (x + y)^3 - 3(x + y)^2y + 3(x + y)y^2 - y^3 = (x + y - y)^3 = x^3.$$

□

Dạng 18. Tính nhanh

Áp dụng linh hoạt các hằng đẳng thức cho các số tự nhiên.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Tính nhanh:

- a) 101^3 ; **ĐS:** 1030301 b) $98^3 + 6 \cdot 98^2 + 12 \cdot 98 + 8$; **ĐS:** 1000000
c) 99^3 ; **ĐS:** 970299 d) $13^3 - 9 \cdot 13^2 + 27 \cdot 13 - 27$. **ĐS:** 1000

 Lời giải.

1. $101^3 = (100 + 1)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 + 1^3 = 1000000 + 30000 + 300 + 1 = 1030301.$
2. $98^3 + 6 \cdot 98^2 + 12 \cdot 98 + 8 = (98 + 2)^3 = 1000000.$
3. $99^3 = (100 - 1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 - 1^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299.$
4. $13^3 - 9 \cdot 13^2 + 27 \cdot 13 - 27 = (13 - 3)^3 = 1000.$

□

 Ví dụ 2. Tính nhanh:

- a) 199^3 ; **ĐS:** 7880599 b) $199^3 + 3 \cdot 199^2 + 3 \cdot 199 + 1$; **ĐS:** 8000000
c) 103^3 ; **ĐS:** 1092727 d) $103^3 - 9 \cdot 103^2 + 27 \cdot 103 - 27$. **ĐS:** 1000000

 Lời giải.

1. $199^3 = (200 - 1)^3 = 200^3 - 3 \cdot 200^2 \cdot 1 + 3 \cdot 200 \cdot 1^2 - 1^3 = 8000000 - 120000 + 600 - 1 = 7880599.$
2. $199^3 + 3 \cdot 199^2 + 3 \cdot 199 + 1 = (199 + 1)^3 = 8000000.$
3. $103^3 = (100 + 3)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 3 + 3 \cdot 100 \cdot 3^2 + 113^3 = 1000000 + 90000 + 2700 + 27 = 1092727.$
4. $103^3 - 9 \cdot 103^2 + 27 \cdot 103 - 27 = (103 - 3)^3 = 1000000.$

□

Bài tập về nhà

 Bài 1. Tính:

- a) $(x - 2)^3$; b) $(2x - 3y)^3$; c) $\left(x + \frac{y}{x}\right)^3$; d) $(2x^2 + 3y)^3$.

 Lời giải.

a) $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$

b) $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3.$

c) $\left(x + \frac{y}{x}\right)^3 = x^3 + 3xy + \frac{3y^2}{x} + \frac{y^3}{x^3}.$

d) $(2x^2 + 3y)^3 = 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3.$

□

 **Bài 2.** Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27;$

b) $-\frac{x^3}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1;$

c) $x^6 - \frac{3}{2}x^4y + \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{1}{8}y^3.$

 Lời giải.

a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3.$

b) $-\frac{x^3}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = \left(-\frac{x}{2} + 1\right)^3.$

c) $x^6 - \frac{3}{2}x^4y + \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{1}{8}y^3 = \left(x^2 - \frac{y}{2}\right)^3.$

□

 **Bài 3.** Rút gọn biểu thức:

a) $A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8;$

b) $B = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{8};$

c) $C = (2x + y)^3 - 6(2x + y)^2 \cdot x + 12(2x + y)x^2 - 8x^3.$

 Lời giải.

1. $A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3.$

2. $B = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{8} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3.$

3. $C = (2x + y)^3 - 6(2x + y)^2 \cdot x + 12(2x + y)x^2 - 8x^3.$

□

 **Bài 4.** Tính giá trị biểu thức:

1. $M = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ tại $x = 25,5;$

ĐS: 125000

2. $N = 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}$ tại $x = -27;$

ĐS: 1000

3. $Q = \frac{x^3}{y^3} + 6\frac{x^2}{y^2} + 12\frac{x}{y} + 8$ tại $x = 36, y = 2.$

ĐS: 8000 **Lời giải.**

1. Khi $x = 25,5$, ta có $M = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3 = (51 - 1)^3 = 125000.$

2. Khi $x = -27$, ta có $N = 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27} = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^3 = (1 + 9)^3 = 1000.$

3. Khi $x = 36, y = 2$, ta có $Q = \frac{x^3}{y^3} + 6\frac{x^2}{y^2} + 12\frac{x}{y} + 8 = \left(\frac{x}{y} + 2\right)^3 = (18 + 2)^3 = 8000.$



Bài 5. Tính nhanh:

a) 51^3 ; **ĐS:** 132651 b) $89^3 + 33 \cdot 89^2 + 3 \cdot 121 \cdot 89 + 11^3$; **ĐS:**
1000000

c) $23^3 - 9 \cdot 23^2 + 27 \cdot 23 - 27$. **ĐS:** 8000

Lời giải.

1. $51^3 = (50 + 1)^3 = 50^3 + 3 \cdot 50^2 \cdot 1 + 3 \cdot 50 \cdot 1^2 + 1^3 = 125000 + 7500 + 150 + 1 = 132651$.

2. $89^3 + 33 \cdot 89^2 + 3 \cdot 121 \cdot 89 + 11^3 = (89 + 11)^3 = 1000000$.

3. $23^3 - 9 \cdot 23^2 + 27 \cdot 23 - 27 = (23 - 3)^3 = 8000$.



§5 Những hằng đẳng thức đáng nhớ (phần 3)

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Tổng hai lập phương

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Ví dụ: $x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

⚠ 2. Chú ý: $A^2 - AB + B^2$ được gọi là bình phương thiếu của hiệu.

1.2 Hiệu hai lập phương

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Ví dụ: $x^3 - 3^2 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

⚠ 3. Chú ý: $A^2 + AB + B^2$ được gọi là bình phương thiếu của tổng.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 19. Sử dụng hằng đẳng thức để phân tích hoặc rút gọn biểu thức cho trước

Áp dụng trực tiếp các hằng đẳng thức đã học để khai triển các biểu thức đã cho.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

 Ví dụ 1. Viết các biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $x^3 + 27$; b) $x^3 - \frac{1}{8}$; c) $8x^3 + y^3$; d) $8x^3 - 27y^3$.

 Lời giải.

a) $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$. b) $x^3 - \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$.

c) $8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$. d) $8x^3 - 27y^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$.

□

 Ví dụ 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $x^3 + 1$; b) $x^3 - \frac{1}{27}$; c) $x^3 - 27y^3$; d) $27x^3 + 8y^3$.

 **Lời giải.**

a) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. b) $x^3 - \frac{1}{27} = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)$.
c) $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$. d) $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$.

□

 **Ví dụ 3.** Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu các lập phương:

a) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$; b) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$;
c) $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$; d) $\left(y - \frac{x}{y}\right)\left(y^2 + x + \frac{x^2}{y^2}\right)$.

 **Lời giải.**

a) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 2^3$. b) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = (2x)^3 + 1^3$.
c) $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) = 1^3 - \left(\frac{x}{2}\right)^3$. d) $\left(y - \frac{x}{y}\right)\left(y^2 + x + \frac{x^2}{y^2}\right) = y^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^3$.

□

 **Ví dụ 4.** Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu các lập phương:

a) $M = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$; b) $N = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$;
c) $P = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$; d) $Q = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$.

 **Lời giải.**

a) $M = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 3^3$. b) $N = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2) = 1^3 - (3x)^3$.
c) $P = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) = x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$. d) $Q = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) = (2x)^3 + (3y)^3$.

□

 **Ví dụ 5.** Rút gọn các biểu thức:

1. $A = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (x^3 + 3)$;
2. $B = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$;
3. $C = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - (2y - 3x)(4y^2 + 6xy + 9x^2)$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $A = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (x^3 + 3) = x^3 - 27 - x^3 - 3 = -30$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} B &= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \\ &= 8x^3 + 1^3 - 8\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) = 8x^3 + 1 - 8x^3 - 1 = 0. \end{aligned}$$

3. Ta có

$$\begin{aligned} C &= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - (2y - 3x)(4y^2 + 6xy + 9x^2) \\ &= x^3 + (2y)^3 - (8y^3 - 27x^3) = x^3 + 8y^3 - 8y^3 + 27x^3 = 28x^3. \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 6.** Rút gọn các biểu thức:

1. $A = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^3 + 2$;
2. $B = (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$;
3. $C = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + (y - 3x)(y^2 + 3xy + 9x^2)$.

 **Lời giải.**

1. $A = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^3 + 2 = x^3 + 8 - x^3 + 2 = 10$.
2. $B = (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 1 - (x^3 + 1) = -2$.
3. $C = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + (y - 3x)(y^2 + 3xy + 9x^2) = 8x^3 - y^3 + y^3 - 27x^3 = -19x^3$.

□

Dạng 20. Tìm x

Áp dụng các hằng đẳng thức đã học để rút gọn biểu thức từ đó tìm được x .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x biết:

1. $(1 - x)(1 + x + x^2) + x(x^2 - 5) = 11$; **ĐS:** $x = -2$
2. $8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - x(1 + 8x^2) + 2 = 0$. **ĐS:** $x = 1$

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $VT = 1 - x^3 + x^3 - 5x = 1 - 5x$. Từ đó $x = -2$.
2. Rút gọn $VT = 8x^3 - 8 \cdot \frac{1}{8} - x - 8x^3 = -x + 1$. Từ đó $x = 1$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x biết:

1. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x(x^2 - 1) = 15;$

ĐS: $x = 2$

2. $(x - 1)(x^2 + x + 1) - (2 + x)(4 - 2x + x^2) = 3x.$

ĐS: $x = -3$

 **Lời giải.**

1. Rút gọn $VT = (2x)^3 - 1^3 - (8x^3 - 8x) = 8x - 1$. Từ đó $x = 2$.

2. Rút gọn $VT = x^3 - 1^3 - (2^3 + x^3) = -9$. Từ đó $x = -3$.

□

Dạng 21. Khai triển biểu thức cho trước

Áp dụng các hằng đẳng thức đã học để rút gọn các biểu thức đã cho, sau đó thay số và tính giá trị các biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** 1. Chứng minh $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$ và $A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B)$.

2. Áp dụng để tính $101^3 - 1$.

ĐS: 1030300

3. Tính giá trị biểu thức $x^3 + y^3$ biết $x + y = 2$ và $x \cdot y = -3$.

ĐS: 26

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$A^3 + B^3 = (A + B) [(A + B)^2 - 3AB] = (A + B)^3 - 3AB(A + B).$$

$$A^3 - B^3 = (A - B) [(A - B)^2 + 3AB] = (A - B)^3 + 3AB(A - B).$$

2. Áp dụng với $A = 101$, $B = 1$ ta được $101^3 - 1^3 = 100^3 + 3 \cdot 101 \cdot 1 \cdot 100 = 1030300$.

3. Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 2^3 - 3 \cdot (-3) \cdot 2 = 26$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính bằng cách hợp lí:

1. Tính $11^3 - 1$;

ĐS: 1330

2. Tính giá trị biểu thức $x^3 - y^3$ biết $x - y = 6$ và $x \cdot y = 9$.

ĐS: 378

 **Lời giải.**

1. Áp dụng phần a bài trước ta có $11^3 - 1^3 = 10^3 + 3 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 10 = 1330$.

2. Ta có $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 6^3 + 3 \cdot 9 \cdot 6 = 378$.

□

 **Ví dụ 3.** Tính giá trị biểu thức:

1. $M = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9)$ tại $x = 20$; **ĐS:** 72000

2. $N = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 16y^3$ biết $x + 2y = 0$. **ĐS:** 0

 **Lời giải.**

1. Khi $x = 20$, ta có

$$M = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9) = x^3 + 3^3 - (3^3 - (2x)^3) = 9x^3 = 72000.$$

2. Khi $x + 2y = 0$, ta có

$$N = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 16y^3 = x^3 - (2y)^3 + 16y^3 = x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0.$$

□

 **Ví dụ 4.** Tính giá trị biểu thức:

1. $P = (x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (64 - x^3)$ tại $x = 100$; **ĐS:** 2000000

2. $Q = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + 2y^3$ biết $2x + y = 0$. **ĐS:** 0

 **Lời giải.**

1. Khi $x = 100$, ta có

$$P = (x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (64 - x^3) = x^3 + 4^3 - 64 + x^3 = 2x^3 = 2000000.$$

2. Khi $2x + y = 0$, ta có

$$Q = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + 2y^3 = (2x)^3 - y^3 + 2y^3 = 8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 0.$$

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Đơn giản biểu thức:

a) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;

b) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$;

c) $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$;

d) $\left(\frac{x}{3} - y\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{3} + y^2\right)$.

 **Lời giải.**

a) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27$.

b) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) = 27x^3 - 1$.

c) $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) = 1 - \frac{x^3}{8}$.

d) $\left(\frac{x}{3} - y\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{3} + y^2\right) = \frac{x^3}{27} - y^3$.

□

 **Bài 2.** Rút gọn biểu thức:

1. $P = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) + (x + 1)(x^2 - x + 1)$;
2. $Q = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2y^3$.

 **Lời giải.**

1. $P = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) + (x + 1)(x^2 - x + 1) = 8x^3 - 1 + x^3 + 1 = 9x^3$;
2. $Q = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2y^3 = x^3 - y^3 - (x^3 + y^3) + 2y^3 = 0$.

□

 **Bài 3.** Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x

- a) $A = 6(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 6x^3 - 2$;
- b) $B = 2(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 54x^3$.

 **Lời giải.**

1. $A = 6(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 6x^3 - 2 = 6(x^3 + 8) - 6x^3 - 2 = 46$.
2. $B = 2(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 54x^3 = 2(27x^3 + 1) - 54x^3 = 2$.

□

 **Bài 4.** Tính giá trị biểu thức:

- a) $A = (x + y)^3 + x^3$ biết $2x + y = 0$; **ĐS:** 0
- b) $B = x^3 - y^3 - 3xy$ biết $x - y = 1$. **ĐS:** 1

 **Lời giải.**

1. $A = (x + y)^3 + x^3 = (2x + y)(x^2 + xy + y^2) = 0$ (do $2x + y = 0$).
2. $B = x^3 - y^3 - 3xy = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 1$ (do $x - y = 1$).

□

§6 Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phân tích đa thức thành nhân tử

Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

1.2 Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

Khi các số hạng của đa thức có một thừa số chung, ta đặt thừa số chung đó ra ngoài dấu ngoặc có được bằng cách lấy số hạng của đa thức chia cho nhân tử chung.

Ví dụ: Hãy viết $x^2 + 2x$ thành tích của những đa thức.

Ta có $x^2 + 2x = x(x + 2)$.

Cách làm này gọi là phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 22. Khai triển biểu thức cho trước

Đặt các nhân tử chung của biểu thức cho trước và đưa biểu thức về dạng tích.

 4. Chú ý: Một số trường hợp để làm xuất hiện nhân tử chung ta cần đổi dấu các hạng tử.

Tức là $A = -(-A)$.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x - 6y$;

b) $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2y + x$;

c) $3x^3y - 6xy + 8x^2y^2$;

d) $2x(y - 2) - 2y(y - 2)$;

e) $x^2(x - y) - xy(x - y)$;

f) $3x(y - x) + 6y(y - x)$.

Lời giải.

a) $4x - 6y = 2(2x - 3y)$.

b) $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2y + x = x\left(\frac{1}{2}x^2 - 5xy + 1\right)$.

c) $3x^3y - 6xy + 8x^2y^2 = xy(3x^2 + 8xy - 6)$.

d) $2x(y - 2) - 2y(y - 2) = 2(y - 2)(x - y)$.

e) $x^2(x - y) - xy(x - y) = x(x - y)^2$.

f) $3x(y - x) + 6y(y - x) = 3(y - x)(x - 2y)$.

□

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $2x + 4y$;

b) $\frac{1}{4}x^2 + xy + x$;

c) $x^3y + 2xy + xy^2$;

d) $x(y + 1) - 2y(y + 1)$;

e) $x^2(x + y) - y(x + y)$;

f) $x(y - x) + 2y(y - x)$.

Lời giải.

a) $2x + 4y = 2(x + 2y)$.

b) $\frac{1}{4}x^2 + xy + x = x\left(\frac{1}{4}x + y + 1\right)$.

c) $x^3y + 2xy + xy^2 = xy(x^2 + 2 + y)$.

d) $x(y + 1) - 2y(y + 1) = (x - 2y)(y + 1)$.

e) $x^2(x + y) - y(x + y) = (x^2 - y)(x + y)$.

f) $x(y - x) + 2y(y - x) = (x + 2y)(y - x)$.

□

Dạng 23. Khai triển biểu thức cho trước

Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, thay giá trị của biến (nếu cần) để tính nhanh giá trị biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $15 \cdot 80,5 + 15 \cdot 19,5$;

ĐS: 1500

b) $46 \cdot 101,5 - 46 \cdot 1,5$;

ĐS: 4600

c) $28 \cdot 92,5 + 280 \cdot 0,75$;

ĐS: 2800

d) $110 \cdot 102,9 - 1100 \cdot 0,29$.

ĐS: 11000

Lời giải.

1. $15 \cdot 80,5 + 15 \cdot 19,5 = 15 \cdot (80,5 + 19,5) = 15 \cdot 100 = 1500$.

2. $46 \cdot 101,5 - 46 \cdot 1,5 = 46 \cdot (101,5 - 1,5) = 46 \cdot 100 = 4600$.

3. $28 \cdot 92,5 + 280 \cdot 0,75 = 28 \cdot (92,5 + 7,5) = 2800$.

4. $110 \cdot 102,9 - 1100 \cdot 0,29 = 110(102,9 - 2,9) = 11000$.

□

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $10 \cdot 81,5 + 10 \cdot 18,5$;

ĐS: 1000

b) $25 \cdot 11,5 - 25 \cdot 1,5$;

ĐS: 250

c) $13 \cdot 91,5 + 130 \cdot 0,85$;

ĐS: 1300

d) $10 \cdot 105,9 - 100 \cdot 0,59$.

ĐS: 1000

Lời giải.

1. $10 \cdot 81,5 + 10 \cdot 18,5 = 10 \cdot (81,5 + 18,5) = 10 \cdot 100 = 1000$.

$$2. 25 \cdot 11,5 - 25 \cdot 1,5 = 25 \cdot (11,5 - 1,5) = 25 \cdot 10 = 250.$$

$$3. 13 \cdot 91,5 + 130 \cdot 0,85 = 13 \cdot 91,5 + 13 \cdot 8,5 = 13 \cdot (91,5 + 8,5) = 13 \cdot 100 = 1300.$$

$$4. 10 \cdot 105,9 - 100 \cdot 0,59 = 10 \cdot 105,9 - 10 \cdot 5,9 = 10 \cdot (105,9 - 5,9) = 10 \cdot 100 = 1000.$$

□

Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$1. y(x - 2) + x(x - 2) \text{ tại } x = 102, y = 8; \quad \text{ĐS: } 11000$$

$$2. x(x - 1) + y(1 - x) \text{ tại } x = 101, y = 1. \quad \text{ĐS: } 10000$$

Lời giải.

$$1. \text{ Khi } x = 102, y = 8, \text{ ta có } y(x - 2) + x(x - 2) = (y + x)(x - 2) = 110 \cdot 100 = 11000.$$

$$2. \text{ Khi } x = 101, y = 1, \text{ ta có } x(x - 1) + y(1 - x) = (x - 1)(x - y) = 100 \cdot 100 = 10000.$$

□

Ví dụ 4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$1. y(x + 1) + x(x + 1) \text{ tại } x = 99, y = 1; \quad \text{ĐS: } 10000$$

$$2. x(x - 2) + y(2 - x) \text{ tại } x = 102, y = 2. \quad \text{ĐS: } 10000$$

Lời giải.

$$1. \text{ Khi } x = 99, y = 1, \text{ ta có } y(x + 1) + x(x + 1) = (y + x)(x + 1) = 100 \cdot 100 = 10000.$$

$$2. \text{ Khi } x = 102, y = 2, \text{ ta có } x(x - 2) + y(2 - x) = (x - y)(x - 2) = 100 \cdot 100 = 10000.$$

□

Dạng 24. Khai triển biểu thức cho trước

☑ **Bước 1.** Chuyển tất cả các hạng tử về vế trái (nếu cần), vế phải bằng 0;
Ví dụ số đó có ba chữ số thì tập giá trị là $\{100; 101; \dots; 999\}$;

☑ **Bước 2.** Phân tích vế trái thành tích các nhân tử dạng $A \cdot B = 0$;

☑ **Bước 3.** Lần lượt tìm x sao cho $A = 0$ hoặc $B = 0$ và kết luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm x , biết:

$$a) x^3 + 4x = 0; \quad \text{ĐS: } x = 0 \quad b) x(x - 2) + 3(x - 2) = 0; \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$c) 3x(2x - 1) - 2x + 1 = 0; \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad d) 3(x - 1) = (x - 1)^2. \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Lời giải.

1. $x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 4 = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$
2. $x(x - 2) + 3(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3. \end{cases}$
3. $3x(2x - 1) - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$
4. $3(x - 1) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4. \end{cases}$

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

- a) $x^3 + 2x = 0$; **ĐS:** $x = 0$ b) $x(x + 1) + 2(x + 1) = 0$; **ĐS:** $\begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$
- c) $x(x + 1) - x - 1 = 0$; **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ d) $2x + 1 = (2x + 1)^2$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

 **Lời giải.**

1. $x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$
2. $x(x + 1) + 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1. \end{cases}$
3. $x(x + 1) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$
4. $2x + 1 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow 2x(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

□

Dạng 25. Chứng minh tính chia hết

Để chứng minh biểu thức P chia hết cho biểu thức Q , ta phân tích biểu thức P về dạng tích các nhân tử trong đó có ít nhất một nhân tử là biểu thức Q .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh rằng $A = n^2(n + 1) - n(n + 1)$ chia hết cho 6 với một số nguyên n .

 **Lời giải.**

$A = n^2(n+1) - n(n+1) = (n-1)n(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên A chia hết cho 2 và 3.

Suy ra A chia hết cho 6. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $B = n^2(n+2) + n(n+2)$ chia hết cho 6 với một số nguyên n .

 **Lời giải.**

$B = n^2(n+2) + n(n+2) = n(n+1)(n+2)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên B chia hết cho 3. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $A = 20^{n+1} - 20^n$ chia hết cho 19 với một số tự nhiên n .

 **Lời giải.**

$A = 20^{n+1} - 20^n = 20^n \cdot 19$ suy ra A chia hết cho 19. □

Ví dụ 4. Chứng minh rằng $B = 18^{n+1} - 18^n$ chia hết cho 17 với một số nguyên n .

 **Lời giải.**

$B = 18^{n+1} - 18^n = 18^n \cdot 17$ suy ra B chia hết cho 17. □

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

1. $A = x(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x)$ chia hết cho $x - 2$;
2. $B = x^3y^2 - 3yx^2 + xy$ chia hết cho xy ;
3. $C = x^3y^2 - 3x^2y^3 + xy^2$ chia hết cho $x^2 - 3xy + 1$.

 **Lời giải.**

1. $A = x(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x) = x(x-2)(x+1)$ suy ra A chia hết cho $x - 2$.
2. $B = x^3y^2 - 3yx^2 + xy = xy(x^2y - 3x + 1)$ suy ra B chia hết cho xy .
3. $C = x^3y^2 - 3x^2y^3 + xy^2 = xy^2(x^2 - 3xy + 1)$ suy ra C chia hết cho $x^2 - 3xy + 1$. □

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

1. $A = x(x+2) + x+2$ chia hết cho $x+2$;
2. $B = x^2y^2 + yx^2 + xy$ chia hết cho xy ;
3. $C = xy(xy + y + 1) + xy$ chia hết cho $xy + y + 2$.

 **Lời giải.**

1. $A = x(x+2) + x+2 = (x+1)(x+2)$ suy ra A chia hết cho $x+2$.
2. $B = x^2y^2 + yx^2 + xy = xy(xy + x + 1)$ suy ra B chia hết cho xy .
3. $C = xy(xy + y + 1) + xy = xy(xy + y + 2)$ suy ra C chia hết cho $xy + y + 2$. □

 Lời giải.

$$1. x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 5 = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2. 2x(x - 3) + (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 3. \end{cases}$$

$$3. (x + 2)(x - 1) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$$

$$4. x + 3 = (x + 3)^2 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2. \end{cases}$$

□

 **Bài 5.** Chứng minh rằng $A = (n - 1)^2(n + 1) + (n - 1)(n + 1)$ chia hết cho 6 với một số nguyên n .

 Lời giải.

$A = (n - 1)^2(n + 1) + (n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên A chia hết cho 2 và 3.

Suy ra A chia hết cho 6.

□

 **Bài 6.** Chứng minh rằng $A = 10^{n+1} - 10^n$ chia hết cho 3 với một số tự nhiên n .

 Lời giải.

$A = 10^{n+1} - 10^n = 10^n \cdot 9$ suy ra A chia hết cho 3.

□

 **Bài 7.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

1. $A = x(x^2 + x) + x(x + 1)$ chia hết cho $x + 1$;
2. $B = xy^2 - yx^2 + xy$ chia hết cho xy ;
3. $C = x^2y^3 + x^3y^3 - xy^2$ chia hết cho $x^2y + xy - 1$.

 Lời giải.

$$1. A = x(x^2 + x) + x(x + 1) = x(x + 1)^2 \text{ suy ra } A \text{ chia hết cho } x + 1.$$

$$2. B = xy^2 - yx^2 + xy = xy(y - x + 1) \text{ suy ra } B \text{ chia hết cho } xy.$$

$$3. C = x^2y^3 + x^3y^3 - xy^2 = xy^2(x^2y + xy - 1) \text{ suy ra } C \text{ chia hết cho } x^2y + xy - 1.$$

□

§7 Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.
2. Để phân tích một đa thức thành nhân tử, bên cạnh *Phương pháp đặt nhân tử chung* đã học ở *Bài 6*, ta còn có phương pháp dùng các hằng đẳng thức sau đây:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2; & \text{b) } A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2; \\ \text{c) } A^2 - B^2 = (A + B)(A - B); & \text{d) } A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3; \\ \text{e) } A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3; & \text{f) } A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2); \\ \text{g) } A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2). \end{array}$$

3. Ví dụ minh họa:

a) Để phân tích đa thức $x^2 - 4$ ta làm như sau: $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$.

b) Để phân tích đa thức $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ta làm như sau

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3.$$

c) Để phân tích đa thức $x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ ta làm như sau

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x - 9 &= (x^3 - 6x + 12x - 8) - 1 \\ &= (x - 2)^3 - 1 \\ &= (x - 2 - 1)[(x - 2)^2 + (x - 2) + 1] \\ &= (x - 3)(x^2 - 3x + 3). \end{aligned}$$

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 26. Phân tích đa thức thành nhân tử

Biến đổi đa thức đã cho về đúng dạng hằng đẳng thức cần sử dụng, từ đó phân tích đa thức thành nhân tử.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 4x + 4$. **ĐS:** $(x + 2)^2$ b) $4x^2 - 4x + 1$. **ĐS:** $(2x - 1)^2$

c) $2x - 1 - x^2$. **ĐS:** $-(x - 1)^2$ d) $x^2 + x + \frac{1}{4}$. **ĐS:** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2.2x + 2^2 = (x + 2)^2$.
2. Ta có $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2.2x + 1 = (2x - 1)^2$.
3. Ta có $2x - 1 - x^2 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2$.
4. Ta có $x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

□

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 6x + 9$. **ĐS:** $(x + 3)^2$ b) $9x^2 - 6x + 1$. **ĐS:** $(3x - 1)^2$

c) $4x - 4 - x^2$. **ĐS:** $-(x - 2)^2$ d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$. **ĐS:** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.3x + 3^2 = (x + 3)^2$.
2. Ta có $9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2.3x + 1 = (3x - 1)^2$.
3. Ta có $4x - 4 - x^2 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x - 2)^2$.
4. Ta có $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2.\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

□

Ví dụ 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $3 - x^2$. **ĐS:** $(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$ b) $3 - (x + 1)^2$. **ĐS:**
 $(\sqrt{3} + x + 1)(\sqrt{3} - x - 1)$

c) $(x + 5)^2 - 4x^2$. **ĐS:** $(3x + 5)(5 - x)$ d) $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2$. **ĐS:** $3x(-x + 2)$

Lời giải.

1. Ta có $3 - x^2 = (\sqrt{3})^2 - x^2 = (\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$.
2. Ta có $3 - (x + 1)^2 = (\sqrt{3})^2 - (x + 1)^2 = (\sqrt{3} + x + 1)(\sqrt{3} - x - 1)$.
3. Ta có $(x + 5)^2 - 4x^2 = (x + 5)^2 - (2x)^2 = (3x + 5)(5 - x)$.
4. Ta có $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 3x(-x + 2)$.

□

 **Ví dụ 4.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^2 - 9$. **ĐS:** $(x - 3)(x + 3)$ b) $(x + 1)^2 - 9$. **ĐS:** $(x - 2)(x + 4)$
 c) $(4x - 1)^2 - 9x^2$. **ĐS:** $(x - 1)(7x - 1)$ d) $(x + 2)^2 - (3x - 1)^2$. **ĐS:**
 $(3 - 2x)(4x + 1)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$.
2. Ta có $(x + 1)^2 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 = (x - 2)(x + 4)$.
3. Ta có $(4x - 1)^2 - 9x^2 = (4x - 1)^2 - (3x)^2 = (x - 1)(7x - 1)$.
4. Ta có $(x + 2)^2 - (3x - 1)^2 = (3 - 2x)(4x + 1)$.

□

 **Ví dụ 5.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 - 6xy + 9y^2$. **ĐS:** $(x - 3y)^2$
2. $x^2 - 9y^2$. **ĐS:** $(x - 3y)(x + 3y)$
3. $x^2y^2 - 4xy + 4$. **ĐS:** $(xy - 2)^2$
4. $y^2 - (x^2 - 2x + 1)$. **ĐS:** $(y - x + 1)(y + x - 1)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^2 - 6xy + 9y^2 = x^2 - 2.x.3y + (3y)^2 = (x - 3y)^2$.
2. Ta có $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x - 3y)(x + 3y)$.
3. Ta có $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy)^2 - 2.xy.2 + 2^2 = (xy - 2)^2$.
4. Ta có $y^2 - (x^2 - 2x + 1) = y^2 - (x - 1)^2 = (y - x + 1)(y + x - 1)$.

□

 **Ví dụ 6.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 - 4xy + 4y^2$. **ĐS:** $(x - 2y)^2$
2. $9x^2 - y^2$. **ĐS:** $(3x - y)(3x + y)$
3. $9x^2y^2 - 6xy + 1$. **ĐS:** $(3xy - 1)^2$
4. $x^2 - (y^2 - 4y + 4)$. **ĐS:** $(x + y - 2)(x - y + 2)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2.x.2y + (2y)^2 = (x - 2y)^2$.
2. Ta có $9x^2 - y^2 = (3x)^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y)$.
3. Ta có $9x^2y^2 - 6xy + 1 = (3xy)^2 - 2.3xy.1 + 1^2 = (3xy - 1)^2$.

4. Ta có $x^2 - (y^2 - 4y + 4) = x^2 - (y - 2)^2 = (x + y - 2)(x - y + 2)$.

□

Ví dụ 7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $8x^3 - 1$. **ĐS:** $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

2. $8(x + 2)^3 - 1$. **ĐS:** $(2x + 3)(4x^2 + 18x + 21)$

3. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. **ĐS:** $(x + 2)^3$

4. $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$. **ĐS:** $(2x - y)^3$

Lời giải.

1. Ta có $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$.

2. Ta có $8(x + 2)^3 - 1 = (2x + 4)^3 - 1^3 = (2x + 3)(4x^2 + 18x + 21)$.

3. Ta có $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$.

4. Ta có $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x)^3 - 3 \cdot 4x^2y + 3 \cdot xy^2 - y^3 = (2x - y)^3$.

□

Ví dụ 8. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 8$. **ĐS:** $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ b) $x^3 - (x + 3)^3$. **ĐS:** $-3(3x^2 + 9x + 9)$

c) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$. **ĐS:** $(x + 2)^3$ d) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$. **ĐS:** $(2x - y)^3$

Lời giải.

1. Ta có $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

2. Ta có $x^3 - (x + 3)^3 = (x - x - 3)(x^2 + x(x + 3) + (x + 3)^2) = -3(3x^2 + 9x + 9)$.

3. Ta có $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$.

4. Ta có $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x)^3 - 3 \cdot 4x^2y + 3 \cdot xy^2 - y^3 = (2x - y)^3$.

□

Dạng 27. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách thêm bớt

Sử dụng các phép phân tách hoặc thêm bớt hợp lý để đưa biểu thức đã cho về dạng hằng đẳng thức cần sử dụng và phân tích thành nhân tử.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $4x^2 - 4x + 1$. **ĐS:** $(2x - 1)^2$

2. $4x^2 - 4x - 3$. **ĐS:** $(2x - 3)(2x + 1)$

3. $4x^2 + 4x - 1$.

ĐS: $(2x + 1 - \sqrt{2})(2x + 1 + \sqrt{2})$

4. $x^2 - 4xy - 5y^2$.

ĐS: $(x - 5y)(x + y)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

2. Ta có $4x^2 - 4x - 3 = (2x - 1)^2 - 4 = (2x - 3)(2x + 1)$.

3. Ta có $4x^2 + 4x - 1 = (2x + 1)^2 - 2 = (2x + 1 - \sqrt{2})(2x + 1 + \sqrt{2})$.

4. Ta có $x^2 - 4xy - 5y^2 = (x - 2y)^2 - (3y)^2 = (x - 5y)(x + y)$.

□

 **Ví dụ 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 + 2x + 1$.

ĐS: $(x + 1)^2$

2. $x^2 + 2x - 3$.

ĐS: $(x + 3)(x - 1)$

3. $x^2 - 2x - 2$.

ĐS: $(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$

4. $4x^2 - 4xy - y^2$.

ĐS: $(2x - y - \sqrt{2}y)(2x - y + \sqrt{2}y)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

2. Ta có $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4 = (x + 3)(x - 1)$.

3. Ta có $x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3 = (x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$.

4. Ta có $4x^2 - 4xy - y^2 = (2x - y)^2 - (\sqrt{2}y)^2 = (2x - y - \sqrt{2}y)(2x - y + \sqrt{2}y)$.

□

 **Ví dụ 3.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $(x + 2)^3 + 1$.

ĐS: $(x + 3)(x^2 + 3x + 3)$

2. $x^3 + 6x^2 + 12x + 9$.

ĐS: $(x + 3)(x^2 + 3x + 3)$

3. $x^3 + 6x^2 + 12x + 7$.

ĐS: $(x + 1)(x^2 + 5x + 7)$

4. $2x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

ĐS: $(2x + 2)(x^2 + 2x + 4)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $(x + 2)^3 + 1 = (x + 3)[(x + 2)^2 - (x + 2) + 1] = (x + 3)(x^2 + 3x + 3)$.

2. Ta có $x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = (x + 2)^3 + 1 = (x + 3)[(x + 2)^2 - (x + 2) + 1] = (x + 3)(x^2 + 3x + 3)$.

3. Ta có $x^3 + 6x^2 + 12x + 7 = (x + 2)^3 - 1 = (x + 1)[(x + 2)^2 + (x + 2) + 1] = (x + 1)(x^2 + 5x + 7)$.

4. Ta có $2x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + (x + 2)^3 = (2x + 2)(x^2 + 2x + 4)$.

□

 **Ví dụ 4.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $(x - 1)^3 - 1$. **ĐS:** $(x - 2)(x^2 - x + 1)$

2. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. **ĐS:** $(x - 2)(x^2 - x + 1)$

3. $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$. **ĐS:** $(x + 1)(x^2 - 4x + 7)$

4. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. **ĐS:** $(2x - 1)(x^2 - x + 1)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $(x - 1)^3 - 1 = (x - 2) [(x - 1)^2 + (x - 1) + 1] = (x - 2)(x^2 - x + 1)$.

2. Ta có $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x - 1)^3 - 1 = (x - 2)(x^2 - x + 1)$.

3. Ta có $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x - 1)^3 + 8 = (x + 1)(x^2 - 4x + 7)$.

4. Ta có $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + (x - 1)^3 = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$.

□

Dạng 28. Tính nhanh biểu thức

Sử dụng hằng đẳng thức một cách hợp lý để phân tích các biểu thức đã cho thành tích rồi tính.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tính nhanh:

a) $65^2 - 35^2$. **ĐS:** 3000 b) $65^2 - 35^2 + 83^2 - 17^2$. **ĐS:** 9600

c) $35^2 + 40.35 + 20^2 - 45^2$. **ĐS:** 1000 d) $\frac{83^2 - 17^2}{(51,5)^2 - (48,5)^2}$. **ĐS:** 22

 **Lời giải.**

1. Ta có $65^2 - 35^2 = (65 - 35)(65 + 35) = 30 \cdot 100 = 3000$.

2. Ta có $65^2 - 35^2 + 83^2 - 17^2 = (65 - 35)(65 + 35) + (83 - 17)(83 + 17) = 3000 + 6600 = 9600$.

3. Ta có $35^2 + 40.35 + 20^2 - 45^2 = (30 + 25)^2 - 45^2 = 55^2 - 45^2 = (55 - 45)(55 + 45) = 1000$.

4. Ta có $\frac{83^2 - 17^2}{(51,5)^2 - (48,5)^2} = \frac{(83 - 17)(83 + 17)}{(51,5 - 48,5)(51,5 + 48,5)} = \frac{6600}{300} = 22$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính nhanh:

a) $85^2 - 15^2$. **ĐS:** b) $85^2 - 15^2 + 77^2 - 23^2$. **ĐS:**

c) $30^2 + 60.45 + 45^2 - 25^2$. **ĐS:** d) $\frac{77^2 - 23^2}{(50,5)^2 - (49,5)^2}$. **ĐS:**

 **Lời giải.**

1. Ta có $85^2 - 15^2 = (85 - 15)(85 + 15) = 70 \cdot 100 = 7000$.
2. Ta có $85^2 - 15^2 + 77^2 - 23^2 = (85 - 15)(85 + 15) + (77 - 23)(77 + 23) = 7000 + 5400 = 12400$.
3. Ta có $30^2 + 60 \cdot 45 + 45^2 - 25^2 = (30 + 45)^2 - 25^2 = 75^2 - 25^2 = (75 - 25)(75 + 25) = 5000$.
4. Ta có $\frac{77^2 - 23^2}{(50,5)^2 - (49,5)^2} = \frac{(77 - 23)(88 + 23)}{(50,5 - 49,5)(50,5 + 49,5)} = \frac{5400}{100} = 54$.

□

Dạng 29. Tìm x thỏa mãn điều kiện cho trước

Thực hiện theo 3 bước:

Bước 1. Chuyển tất cả các hạng tử về về trái, về phải bằng 0.

Bước 2. Phân tích về trái thành nhân tử để được dạng tích, chẳng hạn $A \cdot B = 0$. Từ đó suy ra $A = 0$ hoặc $B = 0$.

Bước 3. Lần lượt tìm x để $A = 0$ hoặc $B = 0$ rồi kết luận.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết:

- | | | |
|----------------------------|---|--|
| a) $x^2 + 4 = 4x$. | ĐS: $x = 2$ b) $4x^2 - 1 = 0$. | ĐS: $x = \pm \frac{1}{2}$ |
| c) $x^3 - 3x^2 + 3x = 1$. | ĐS: $x = 1$ d) $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0$. | ĐS: $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ |

Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
2. Ta có $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$.
3. Ta có $x^3 - 3x^2 + 3x = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
4. Ta có $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

- | | | |
|------------------------------|--|--|
| a) $x^2 + 6x = -9$. | ĐS: $x = -3$ b) $2x^2 - 9 = 0$. | ĐS: $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ |
| c) $8x^3 - 12x^2 + 6x = 1$. | ĐS: $x = \frac{1}{2}$ d) $(2x + 1)^2 - (3x + 2)^2 = 0$. | ĐS: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}$ |

Lời giải.

1. Ta có: $x^2 + 6x = -9 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.
2. Ta có: $2x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x - 3)(\sqrt{2}x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.
3. Ta có: $8x^3 - 12x^2 + 6x = 1 \Leftrightarrow (2x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
4. Ta có: $(2x + 1)^2 - (3x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (-x - 1)(5x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}$.

□

Dạng 30. Chứng minh các bài toán về số học

Phân tích biểu thức đang cần chứng minh thành nhân tử. Từ đó suy ra kết luận cần tìm.

 **5.** Chú ý: Số nguyên a chia hết cho số nguyên b nếu có số nguyên k sao cho $a = b.k$.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh:

- a) $(2k - 1)^2 - 9$ chia hết cho 4. b) $4 - (1 + 3k)^2$ chia hết cho 3.

 **Lời giải.**

1. Ta có $(2k - 1)^2 - 9 = (2k - 1)^2 - 3^2 = (2k - 4)(2k + 2) = 4(k - 1)(k + 1)$.
Suy ra $(2k - 1)^2 - 9$ chia hết cho 4.
2. Ta có $4 - (1 + 3k)^2 = 2^2 - (1 + 3k)^2 = 3(1 + k)(1 - 3k)$. Suy ra $4 - (1 + 3k)^2$ chia hết cho 3.

□

 **Ví dụ 2.** Chứng minh:

- a) $(3k - 2)^2 - 4$ chia hết cho 3. b) $9 - (1 + 4k)^2$ chia hết cho 8.

 **Lời giải.**

1. Ta có $(3k - 2)^2 - 4 = (3k - 2)^2 - 2^2 = 3k \cdot (3k - 4) \Rightarrow (3k - 2)^2 - 4$ chia hết cho 3.
2. Ta có $9 - (1 + 4k)^2 = 3^2 - (1 + 4k)^2 = 8(1 - 2k)(k + 1) \Rightarrow 9 - (1 + 4k)^2$ chia hết cho 8.

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^2 + 8x + 16$. **ĐS:** $(x + 4)^2$ b) $9x^2 - 6x + 1$. **ĐS:** $(3x - 1)^2$
 c) $10x - 25 - x^2$. **ĐS:** $-(x - 5)^2$ d) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$. **ĐS:** $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

 Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$.
2. Ta có $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$.
3. Ta có $10x - 25 - x^2 = -(x^2 - 10x + 25) = -(x - 5)^2$.
4. Ta có $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$.

□

 Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $16 - x^2$. **ĐS:** $(4 - x)(4 + x)$ b) $16 - (3x + 1)^2$. **ĐS:** $(3 - 3x)(5 + 3x)$
 c) $(2x + 5)^2 - 9x^2$. **ĐS:** $(5 - x)(5x + 5)$ d) $(2x - 1)^2 - (3x - 1)^2$. **ĐS:** $-x(5x - 2)$

 Lời giải.

1. $16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$.
2. $16 - (3x + 1)^2 = 4^2 - (3x + 1)^2 = (3 - 3x)(5 + 3x)$.
3. $(2x + 5)^2 - 9x^2 = (2x + 5)^2 - (3x)^2 = (5 - x)(5x + 5)$.
4. $(2x - 1)^2 - (3x - 1)^2 = -x(5x - 2)$.

□

 Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $4x^2 - 4xy + y^2$. **ĐS:** $(2x - y)^2$ b) $(x + 1)^2 - 9y^2$. **ĐS:**
 $(x + 3y + 1)(x - 3y + 1)$
 c) $x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4$. **ĐS:** $(x^2y^2 + 2)^2$ d) $y^2 - 4y + 4 - x^2$. **ĐS:** $(y - 2 - x)(y - 2 + x)$

 Lời giải.

1. Ta có $4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$.
2. Ta có $(x + 1)^2 - 9y^2 = (x + 3y + 1)(x - 3y + 1)$.
3. Ta có $x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4 = (x^2y^2 + 2)^2$.
4. Ta có $y^2 - 4y + 4 - x^2 = (y - 2)^2 - x^2 = (y - 2 - x)(y - 2 + x)$.

□

 Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $1 - 27x^3$. **ĐS:** $(1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$ b) $(x - 3)^3 + 27$. **ĐS:** $x(x^2 - 9x + 27)$
 c) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$. **ĐS:** $(3x + 1)^3$ d) $\frac{x^6}{27} - \frac{x^4y}{3} + x^2y - y^3$. **ĐS:** $\left(\frac{x^2}{3} - y\right)^3$

 Lời giải.

1. Ta có $1 - 27x^3 = 1^3 - (3x)^3 = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$.

2. Ta có $(x-3)^3 + 27 = (x-3)^2 + 3^3 = x(x^2 - 9x + 27)$.

3. Ta có $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (3x+1)^3$.

4. Ta có $\frac{x^6}{27} - \frac{x^4y}{3} + x^2y - y^3 = \left(\frac{x^2}{3} - y\right)^3$.

□

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $(2x-1)^3 + 8$.

ĐS: $(2x+1)(4x^2 - 8x + 7)$

2. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

ĐS: $(2x-1)^3$

3. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 2$.

ĐS: $(2x-2)(4x^2 - 2x + 1)$

4. $9x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

ĐS: $(3x-1)(3x^2 - 3x + 1)$

Lời giải.

1. Ta có $(2x-1)^3 + 8 = (2x-1)^3 + 2^3 = (2x+1)(4x^2 - 8x + 7)$.

2. Ta có $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x-1)^3$.

3. Ta có $8x^3 - 12x^2 + 6x - 2 = (2x-1)^3 - 1 = (2x-2)(4x^2 - 2x + 1)$.

4. Ta có $9x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = x^3 + (2x-1)^3 = (3x-1)(3x^2 - 3x + 1)$.

□

Bài 6. Tìm x , biết:

a) $4x^2 = 4x - 1$.

ĐS: $\frac{1}{2}$

b) $4x^2 - 27 = 0$.

ĐS: $\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $8x^3 + 6x - 1 = 12x^2$.

ĐS: $\frac{1}{2}$

d) $(2x+1)^2 - (x-3)^2 = 0$.

ĐS: $\begin{cases} x = -4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $4x^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

2. Ta có $4x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - (3\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3\sqrt{3})(2x + 3\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. Ta có $8x^3 + 6x - 1 = 12x^2 \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

4. Ta có $(2x+1)^2 - (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$.

□

Bài 7. Tính nhanh:

a) $75^2 - 25^2$.

ĐS: 5000

b) $86^2 - 14^2 + 87^2 - 13^2$.

ĐS: 14600

c) $33^2 - 52.33 + 26^2 - 17^2$.

ĐS: -240

d) $\frac{112^2 - 12^2}{(52,5)^2 - (47,5)^2}$.

ĐS: $\frac{124}{5}$

 Lời giải.

1. Ta có $75^2 - 25^2 = (75 + 25)(75 - 25) = 100.50 = 5000$.

2. Ta có $86^2 - 14^2 + 87^2 - 13^2 = (86 + 14)(86 - 14) + (87 + 13)(87 - 13) = 100.72 + 100.74 = 7200 + 7400 = 14600$.

3. Ta có $33^2 - 52.33 + 26^2 - 17^2 = (33 - 26)^2 - 17^2 = 7^2 - 17^2 = (7 - 17)(7 + 17) = -240$.

4. Ta có $\frac{112^2 - 12^2}{(52,5)^2 - (47,5)^2} = \frac{(112 - 12)(112 + 12)}{(52,5 - 47,5)(52,5 + 47,5)} = \frac{12400}{500} = \frac{124}{5}$.

□

 Bài 8. Chứng minh:

a) $(2k - 3)^2 - 5$ chia hết cho 4.

b) $9 - (2 + 5k)^2$ chia hết cho 5.

 Lời giải.

1. Ta có $(2k - 3)^2 - 5 = 4k^2 - 12k + 9 - 5 = 4k^2 - 12k + 4 = 4(k^2 - 3k + 1)$.
Suy ra $(2k - 3)^2 - 5$ chia hết cho 4.

2. Ta có $9 - (2 + 5k)^2 = 3^2 - (2 + 5k)^2 = 5(1 - 5k)(k + 1) \Rightarrow 9 - (2 + 5k)^2$ chia hết cho 5.

□

§8

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử

1

Tóm tắt lý thuyết

1. Để phân tích một đa thức thành nhân tử, ta thường sử dụng các phương pháp cơ bản:

a) Đặt nhân tử chung.

b) Dùng các hằng đẳng thức.

2. Tuy nhiên, một số trường hợp không thể áp dụng ngay hai phương pháp này, mà cần nhóm các hạng tử một cách thích hợp để xuất hiện dạng hằng đẳng thức hoặc xuất hiện nhân tử chung mới.

3. Ví dụ: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 2x + xy - 2y$.
Thực hiện biến đổi như sau

$$x^2 - 2x + xy - 2y = (x^2 - 2x) + (xy - 2y) = x(x - 2) + y(x - 2) = (x - 2)(x + y).$$

4. Với phương pháp này để tìm cách nhóm hạng tử một cách thích hợp, cần thay đổi vị trí các hạng tử (nếu cần) sao cho khi nhóm thì từng nhóm đa thức có thể phân tích được thành nhân tử bằng hai phương pháp đã nêu ở trên. Khi đó, đa thức đã cho mới xuất hiện nhân tử chung.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 31. Phân tích đa thức thành nhân tử

Nhóm các hạng tử để tạo nhân tử chung của biểu thức cho trước và đưa biểu thức về dạng tích.

 6. Chú ý: Một số trường hợp để làm xuất hiện nhân tử chung, ta cần thay đổi vị trí các hạng tử (nếu cần) hoặc đổi dấu các hạng tử, tức là: $A = -(-A)$.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$.

ĐS: $x(x - 2)(x^2 + 1)$

2. $x^4 + x^3 - 8x - 8$.

ĐS: $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

3. $x^2 + xy - x - y$.

ĐS: $(x + y)(x - 1)$

4. $xy + 1 - x^2 + y$.

ĐS: $(1 + x)(y + 1 - x)$

5. $xy + 2y - 3(x + 2)$.

ĐS: $(x + 2)(y - 3)$

6. $3(x - y) + ay - ax$.

ĐS: $(x - y)(3 - a)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = x^3(x - 2) + x(x - 2) = (x - 2)(x^3 + x) = x(x - 2)(x^2 + 1)$.
2. Ta có $x^4 + x^3 - 8x - 8 = x^3(x + 1) - 8(x + 1) = (x - 1)(x^3 - 8) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.
3. Ta có $x^2 + xy - x - y = x(x + y) - (x + y) = (x + y)(x - 1)$.
4. Ta có $xy + 1 - x^2 + y = (xy + y) + (1 - x^2) = y(1 + x) + (1 + x)(1 - x) = (1 + x)(y + 1 - x)$.
5. Ta có $xy + 2y - 3(x + 2) = y(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(y - 3)$.
6. Ta có $3(x - y) + ay - ax = 3(x - y) - a(x - y) = (x - y)(3 - a)$.

□

 **Ví dụ 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^4 + x^3 + x^2 + x$.

ĐS: $x(x + 1)(x^2 + 1)$

2. $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

ĐS: $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$

3. $x^2 - xy - x + y$.

ĐS: $(x - y)(x - 1)$

4. $xy + 4 - x^2 + 2y$.

ĐS: $(2 + x)(y + 2 - x)$

5. $xy + y - 2(x + 1)$.

ĐS: $(x + 1)(y - 2)$

6. $2(x + y) + ay + ax$.

ĐS: $(x + y)(2 + a)$

 **Lời giải.**

1. Ta có $x^4 + x^3 + x^2 + x = x^3(x + 1) + x(x + 1) = (x + 1)(x^3 + x) = x(x + 1)(x^2 + 1)$.
2. Ta có $x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.
3. Ta có $x^2 - xy - x + y = x(x - y) - (x - y) = (x - y)(x - 1)$.
4. Ta có $xy + 4 - x^2 + 2y = (xy + 2y) + (4 - x^2) = y(2 + x) + (2 - x)(2 + x) = (2 + x)(y + 2 - x)$.
5. Ta có $xy + y - 2(x + 1) = y(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(y - 2)$.
6. Ta có $2(x + y) + ay + ax = 2(x + y) + a(x + y) = (x + y)(2 + a)$.

□

 **Ví dụ 3.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 - 2x + 1 - y^2$.

ĐS: $(x - 1 + y)(x - 1 - y)$

2. $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2$.

ĐS: $(x - y - 3z)(x - y + 3z)$

3. $x^2 - 4xy + 4y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2$.

ĐS: $(x - 2y - z + 2t)(x - 2y + z - 2t)$

4. $a^4 - ax^3 - ay + xy.$

ĐS: $(a - x)(a^3 + a^2x + ax^2 - y)$

5. $2x^2(y + 2z) + 2y^2(z + 2x) + 2z^2(x + 2y) + 9xyz.$

ĐS: $(y + 2z)(2x + z)(x + 2y)$

 Lời giải.

1. $x^2 - 2x + 1 - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 + y)(x - 1 - y).$

2. $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2 = (x - y)^2 - (3z)^2 = (x - y - 3z)(x - y + 3z).$

3. $x^2 - 4xy + 4y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2 = (x - 2y)^2 - (z - 2t)^2 = (x - 2y - z + 2t)(x - 2y + z - 2t).$

4. $a^4 - ax^3 - ay + xy = a(a^3 - x^3) - y(a - x) = a(a - x)(a^2 + ax + x^2) - y(a - x) = (a - x)(a^3 + a^2x + ax^2 - y).$

5. Đặt $2x^2(y + 2z) + 2y^2(z + 2x) + 2z^2(x + 2y) + 9xyz = T$ thì

$$\begin{aligned}
 T &= 2x^2(y + 2z) + (xyz + 2y^2z + 4xy^2) + (2z^2x + 4z^2y + 8xyz) \\
 &= 2x^2(y + 2z) + y(xz + 2yz + 4xy) + 2z(xz + 2yz + 4xy) \\
 &= 2x^2(y + 2z) + (xz + 2yz + 4xy)(y + 2z) \\
 &= (y + 2z)(2x^2 + xz + 2yz + 4xy) \\
 &= (y + 2z)(x(2x + z) + 2y(2x + z)) \\
 &= (y + 2z)(2x + z)(x + 2y).
 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x^2 + 2x + 1 - y^2.$

ĐS: $(x + 1 + y)(x + 1 - y)$

2. $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2.$

ĐS: $(x + y + 2z)(x + y - 2z)$

3. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2.$

ĐS: $(x - y + z - t)(x - y - z + t)$

4. $a^3 - ax^2 - ay + xy.$

ĐS: $(a - x)(a^2 + ax - y)$

5. $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz.$

ĐS: $(y + z)(x + z)(x + y)$

 Lời giải.

1. $x^2 + 2x + 1 - y^2 = (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 + y)(x + 1 - y).$

2. $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x + y)^2 - (2z)^2 = (x + y + 2z)(x + y - 2z).$

3. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x - y)^2 - (z - t)^2 = (x - y + z - t)(x - y - z + t).$

4. $a^3 - ax^2 - ay + xy = a(a^2 - x^2) - y(a - x) = a(a - x)(a + x) - y(a - x) = (a - x)(a^2 + ax - y).$

5. Đặt $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz = T$ thì

$$\begin{aligned}
 T &= x^2(y + z) + (xyz + y^2z + xy^2) + (z^2x + z^2y + xyz) \\
 &= x^2(y + z) + y(xz + yz + xy) + z(xz + yz + xy) \\
 &= x^2(y + z) + (xz + yz + xy)(y + z) \\
 &= (y + z)(x^2 + xz + yz + xy) \\
 &= (y + z)(x(x + z) + y(x + z)) \\
 &= (y + z)(x + z)(x + y).
 \end{aligned}$$

Dạng 32. Tính giá trị của biểu thức cho trước

Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, thay giá trị của biến (nếu cần) để tính nhanh giá trị các biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $11.81,5 + 11.18,5 - 10.28,5 - 10.71,5$. **ĐS:** 100

2. $40^2 - 28^2 + 32^2 + 80.32$. **ĐS:** 4400

Lời giải.

1. $11.81,5 + 11.18,5 - 10.28,5 - 10.71,5 = 11(81,5 + 18,5) - 10(28,5 + 71,5) = 1100 - 1000 = 100$.

2.

$$\begin{aligned} 40^2 - 28^2 + 32^2 + 80.32 &= (40^2 + 2.40.32 + 32^2) - 28^2 \\ &= (40 + 32)^2 - 28^2 \\ &= 72^2 - 28^2 \\ &= (72 - 28)(72 + 28) \\ &= 4400 \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $13 \cdot 65,5 + 13 \cdot 34,5 - 3 \cdot 9,5 - 3 \cdot 90,5$. **ĐS:** 1000

2. $39^2 - 35^2 + 26^2 + 52 \cdot 39$. **ĐS:** 3000

Lời giải.

1. $13 \cdot 65,5 + 13 \cdot 34,5 - 3 \cdot 9,5 - 3 \cdot 90,5 = 13(65,5 + 34,5) - 3(9,5 + 90,5) = 1300 - 300 = 1000$.

2.

$$\begin{aligned} 39^2 - 35^2 + 26^2 + 52 \cdot 39 &= (39^2 + 2 \cdot 39 \cdot 26 + 26^2) - 35^2 \\ &= (39 + 26)^2 - 35^2 \\ &= 65^2 - 35^2 \\ &= (65 + 35)(65 - 35) \\ &= 100 \cdot 30 \\ &= 3000. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $A = x(x - 2) + x - 2$ tại $x = 102$. **ĐS:** 10300

2. $B = xy - 1 + x - y$ tại $x = 101$ và $y = 99$. ĐS: 10000

3. $C = x^2 + 2xy - z^2 + y^2$ tại $x = 25$, $y = 35$ và $z = 40$. ĐS: 2000

4. $D = x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2$ tại $x = 26$, $y = 6$, $z = 13$ và $t = 3$. ĐS: 300

 Lời giải.

1. $A = x(x - 2) + x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.

Thay $x = 102$ ta được $A = (102 - 2)(102 + 1) = 100.103 = 10300$

2. $B = xy - 1 + x - y = x(y + 1) - (y + 1) = (y + 1)(x - 1)$.

Thay $x = 101$ và $y = 99$ ta được $B = (99 + 1)(101 - 1) = 100.100 = 10000$.

3. $C = x^2 + 2xy - z^2 + y^2 = (x + y)^2 - z^2 = (x + y + z)(x + y - z)$.

Thay $x = 25$, $y = 35$ và $z = 40$ ta được $C = 100.20 = 2000$.

4. $D = x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x - y)^2 - (z - t)^2 = (x - y + z - t)(x - y - z + t)$.

Thay $x = 26$, $y = 6$, $z = 13$ và $t = 3$ ta được $D = 30.10 = 300$.

□

 **Ví dụ 4.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $A = 2x(x + 1) + x + 1$ tại $x = 99$. ĐS: 19900

2. $B = xy + 1 + x + y$ tại $x = 99$ và $y = 99$. ĐS: 10000

3. $C = x^2 + 2xz + z^2 - y^2$ tại $x = 25$, $y = 35$ và $z = 40$. ĐS: 3000

4. $D = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 - 2zt - t^2$ tại $x = 89$, $y = 11$, $z = 60$ và $t = 30$. ĐS: 1900

 Lời giải.

1. $A = 2x(x + 1) + x + 1 = (x + 1)(2x + 1)$.

Thay $x = 99$ ta được $A = 100.199 = 19900$.

2. $B = xy + 1 + x + y = x(y + 1) + (y + 1) = (y + 1)(x + 1)$.

Thay $x = 99$ và $y = 99$ ta được $B = 100.100 = 10000$.

3. $C = x^2 + 2xz + z^2 - y^2 = (x + z)^2 - y^2 = (x + z + y)(x + z - y)$.

Thay $x = 25$, $y = 35$ và $z = 40$ ta được $C = 100.30 = 3000$.

4. $D = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 - 2zt - t^2 = (x + y)^2 - (z + t)^2 = (x + y + z + t)(x + y - z - t)$.

Thay $x = 89$, $y = 11$, $z = 60$ và $t = 30$ ta được $D = 190.10 = 1900$.

□

 Dạng 33. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước

Bước 1 Chuyển tất cả các hạng tử về về trái (nếu cần), về phải bằng 0;

Bước 2 Phân tích về trái thành tích các nhân tử dạng $A.B = 0$;

Bước 3 Lần lượt tìm x sao cho $A = 0$ và $B = 0$ và kết luận.

 BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết:

a) $x(x+2) + x + 2 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$ b) $4x(x-1) - x + 1 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

c) $x^3 - 4x + x - 2 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$ d) $x^2(x-6) - x^2 + 36 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 6 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $x^3 + x - x^2 - 1 = 0$. **ĐS:** $x = 1$ f) $a^3 - x - x^3 + a = 0$. **ĐS:** $x = a$

 **Lời giải.**

1. $x(x+2) + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2. \end{cases}$

2. $4x(x-1) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases}$

3. $x^3 - 4x + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) + (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \end{cases}$

4.

$$\begin{aligned} x^2(x-6) - x^2 + 36 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-6) - (x-6)(x+6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-6)(x^2 - x - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-6)(x-3)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 3 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

5. $x^3 + x - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) - (x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

6. $a^3 - x - x^3 + a = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a^2 + ax + x^2) + (a-x) = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a^2 + ax + x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = a$. □

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

a) $x(x-1) + x - 1 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ b) $x(x+2) - x - 2 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$. **ĐS:** $x = 1$ d) $x^2(2x-1) - 1 + 4x^2 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ f) $a^2 + x - x^2 - a = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = a \\ x = 1 - a \end{cases}$

 **Lời giải.**

$$1. x(x-1) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$2. x(x+2) - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1. \end{cases}$$

$$3. x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

4.

$$\begin{aligned} x^2(2x-1) - 1 + 4x^2 = 0 &\Leftrightarrow x^2(2x-1) + (2x-1)(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x-1) - (x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$6. a^2 + x - x^2 - a = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a+x) - (a-x) = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a+x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 1 - a. \end{cases}$$

□

Dạng 34. Chứng minh tính chia hết

Để chứng minh biểu thức P chia hết cho biểu thức Q , ta phân tích biểu thức P về dạng tích các nhân tử trong đó có ít nhất một nhân tử là biểu thức Q .
Tương tự cho trường hợp đặc biệt nếu Q là hằng số.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

 **Ví dụ 1.** Chứng minh $A = n^3 + 2n^2 - 2n - 1$ chia hết cho $n - 1$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có $A = (n^3 - 1) + (2n^2 - 2n) = (n-1)(n^2 + n + 1) + 2n(n-1) = (n-1)(n^2 - n + 1)$.
Suy ra A chia hết cho $n - 1$ với mọi số nguyên n . □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh $B = n^3 + n^2 + n + 1$ chia hết cho $n + 1$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có $B = n^3 + n^2 + n + 1 = n^2(n+1) + (n+1) = (n+1)(n^2+1)$.
Suy ra B chia hết cho $n + 1$ với mọi số nguyên n . □

 **Ví dụ 3.** Chứng minh với mọi số nguyên x, y, z thì:

1. $A = x^3 - x + x^2 - 1$ chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^2 - xy + y - x$ chia hết cho $x - y$.
3. $C = xy(x + y) + xy - x - y - 1$ chia hết cho $x + y + 1$.
4. $D = x^2 + 4xy + 4y^2 - 9z^2$ chia hết cho $x + 2y + 3z$.

 **Lời giải.**

1. $A = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$.
Vậy A chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^2 - xy + y - x = x(x - y) - (x - y) = (x - y)(x - 1)$.
Vậy B chia hết cho $x - y$.
3. $C = xy(x + y) + xy - x - y - 1 = xy(x + y + 1) - (x + y + 1) = (x + y + 1)(xy - 1)$.
Vậy C chia hết cho $x + y + 1$.
4. $D = x^2 + 4xy + 4y^2 - 9z^2 = (x + 2y)^2 - (3z)^2 = (x + 2y + 3z)(x + 2y - 3z)$.
Vậy D chia hết cho $x + 2y + 3z$.

□

 **Ví dụ 4.** Chứng minh với mọi số nguyên x, y, z thì:

1. $A = x^3 + x + x^2 + 1$ chia hết cho $x + 1$.
2. $B = x^2 + xy + y + x$ chia hết cho $x + y$.
3. $C = x^2y + xy^2 - x - y + 2(xy - 1)$ chia hết cho $x + y + 2$.
4. $D = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$ chia hết cho $x + y + z$.

 **Lời giải.**

1. $A = x^3 + x + x^2 + 1 = x(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x + 1)$.
Vậy A chia hết cho $x + 1$.
2. $B = x^2 + xy + y + x = x(x + y) + (x + y) = (x + y)(x + 1)$.
Vậy B chia hết cho $x + y$.
3. $C = x(xy - 1) + y(xy - 1) + 2(xy - 1) = (xy - 1)(x + y + 2)$.
Vậy C chia hết cho $x + y + 2$.
4. $D = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - z^2 = (x + y + z)(x + y - z)$.
Vậy D chia hết cho $x + y + z$.

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Phân tích các đa thức thành nhân tử:

$$1. x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x. \quad \text{ĐS: } x(x+3)(x^2+1)$$

$$2. x^4 + x^2 - 27x - 9. \quad \text{ĐS: } (x-3)(x^3+3x^2+10x+3)$$

$$3. x^2 - xy - x + y. \quad \text{ĐS: } (x-y)(x-1)$$

$$4. xy + 4 - x^2 + 2y. \quad \text{ĐS: } (2+x)(y+2-x)$$

$$5. xy + y - 2(x+1). \quad \text{ĐS: } (x+1)(y-2)$$

$$6. 5(x-y) + ax - ay. \quad \text{ĐS: } (x-y)(5+a)$$

Lời giải.

$$1. x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x = x^3(x+3) + x(x+3) = x(x+3)(x^2+1).$$

2.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 27x - 9 &= x(x^3 - 27) + (x^2 - 9) \\ &= x(x-3)(x^2+3x+9) + (x-3)(x+3) \\ &= (x-3)(x^3+3x^2+10x+3). \end{aligned}$$

$$3. x^2 - xy - x + y = x(x-y) - (x-y) = (x-y)(x-1).$$

$$4. xy + 4 - x^2 + 2y = y(2+x) + (2-x)(2+x) = (2+x)(y+2-x).$$

$$5. xy + y - 2(x+1) = y(x+1) - 2(x+1) = (x+1)(y-2).$$

$$6. 5(x-y) + ax - ay = 5(x-y) + a(x-y) = (x-y)(5+a).$$

□

Bài 2. Phân tích các đa thức thành nhân tử:

$$1. x^2 + 4x + 4 - 4y^2. \quad \text{ĐS: } (x+2+2y)(x+2-2y)$$

$$2. x^2 + 6xy + 9y^2 - 4z^2. \quad \text{ĐS: } (x+3y+2z)(x+3y-2z)$$

$$3. x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2. \quad \text{ĐS: } (x+y+z-2t)(x+y-z+2t)$$

$$4. a^2 - x^2 - ay + xy. \quad \text{ĐS: } (a-x)(a+x-y)$$

$$5. x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y). \quad \text{ĐS: } (y-z)(x-y)(x-z)$$

Lời giải.

$$1. x^2 + 4x + 4 - 4y^2 = (x+2)^2 - (2y)^2 = (x+2+2y)(x+2-2y).$$

$$2. x^2 + 6xy + 9y^2 - 4z^2 = (x+3y)^2 - (2z)^2 = (x+3y+2z)(x+3y-2z).$$

$$3. x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 4zt - 4t^2 = (x+y)^2 - (z-2t)^2 = (x+y+z-2t)(x+y-z+2t).$$

$$4. a^2 - x^2 - ay + xy = (a-x)(a+x) - y(a-x) = (a-x)(a+x-y).$$

5.

$$\begin{aligned}
 x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) &= x^2(y-z) + (y^2z - z^2y) - (xy^2 - xz^2) \\
 &= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y-z)(y+z) \\
 &= (y-z)(x^2 + yz - xy - xz) \\
 &= (y-z)(x(x-y) - z(x-y)) \\
 &= (y-z)(x-y)(x-z).
 \end{aligned}$$

□

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $10 \cdot 80,5 + 10 \cdot 19,5 - 8 \cdot 20,5 - 8 \cdot 79,5$.

ĐS: 200

2. $50^2 - 18^2 + 32^2 + 100 \cdot 32$.

ĐS: 6400

Lời giải.

1. $10 \cdot 80,5 + 10 \cdot 19,5 - 8 \cdot 20,5 - 8 \cdot 79,5 = 10(80,5 + 19,5) - 8(20,5 + 79,5) = 10 \cdot 100 - 8 \cdot 100 = 200$.

2.

$$\begin{aligned}
 50^2 - 18^2 + 32^2 + 100 \cdot 32 &= 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 32 + 32^2 - 18^2 \\
 &= (50 + 32)^2 - 18^2 \\
 &= 82^2 - 18^2 \\
 &= (82 + 18)(82 - 18) \\
 &= 6400.
 \end{aligned}$$

□

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $A = x(3x + 1) + 3x + 1$ tại $x = 33$.

ĐS: 3400

2. $B = xy + 2x + 2y + 4$ tại $x = 98, y = 98$.

ĐS: 1000

3. $C = x^2 - z^2 + 4y^2 + 4xy$ tại $x = 40, y = 20, z = 20$.

ĐS: 6000

4. $D = x^2 + 4xy + 4y^2 - z^2 + 2zt - t^2$ tại $x = 10, y = 40, z = 30$ và $t = 20$.

ĐS: 8000

Lời giải.

1. $A = x(3x + 1) + 3x + 1 = (3x + 1)(x + 1)$.

Thay $x = 33$ ta có $A = 100 \cdot 34 = 3400$.

2. $B = xy + 2x + 2y + 4 = x(y + 2) + 2(y + 2) = (x + 2)(y + 2)$.

Thay $x = 98, y = 98$ ta có $B = 100 \cdot 100 = 1000$.

3. $C = x^2 - z^2 + 4y^2 + 4xy = (x + 2y)^2 - z^2 = (x + 2y + z)(x + 2y - z)$.

Thay $x = 40, y = 20, z = 20$ ta có $C = 100 \cdot 60 = 6000$.

4. $D = x^2 + 4xy + 4y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x + 2y)^2 - (z - t)^2 = (x + 2y + z - t)(x + 2y - z + t)$.

Thay $x = 10, y = 40, z = 30$ và $t = 20$ ta có $D = 100 \cdot 80 = 8000$.

□

 **Bài 5.** Tìm x , biết:

1. $2x(x - 3) + x - 3 = 0.$

ĐS: $x = 3; x = -\frac{1}{2}$

2. $x(x + 1) - x - 1 = 0.$

ĐS: $x = -1; x = 1$

3. $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$

ĐS: $x = 3$

4. $3x^2(2x - 1) + 1 - 4x^2 = 0.$

ĐS: $x = \frac{1}{2}; x = 1; x = -\frac{1}{3}$

5. $x^3 + 2x - x^2 - 2 = 0.$

ĐS: $x = 1$

6. $4a^2 + x - x^2 - 2a = 0.$

ĐS: $x = 2a; x = 1 - 2a$

 **Lời giải.**

1. $2x(x - 3) + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

2. $x(x + 1) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$

3. $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) + (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

4.

$$\begin{aligned} 3x^2(2x - 1) + 1 - 4x^2 = 0 &\Leftrightarrow 3x^2(2x - 1) - (2x - 1)(2x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)(3x^2 - 2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)(3x(x - 1) + x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)(x - 1)(3x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

5. $x^3 + 2x - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2) - (x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

6. $4a^2 + x - x^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow (2a - x)(2a + x) - (2a - x) = 0 \Leftrightarrow (2a - x)(2a + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ x = 1 - 2a. \end{cases}$

□

 **Bài 6.** Chứng minh $A = n^3 + 2n - n^2 - 2$ chia hết cho $n - 1$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có $A = n^3 + 2n - n^2 - 2 = n^2(n - 1) + 2(n - 1) = (n - 1)(n^2 + 2).$

Suy ra A chia hết cho $n - 1$ với mọi số nguyên n .

□

 **Bài 7.** Chứng minh với mọi số nguyên x, y, z thì:

1. $A = x^2 - 3x + 2(x - 3)$ chia hết cho $x - 3$.

2. $B = y^2 - xy + y - x$ chia hết cho $x - y$.
3. $C = x^2y + xy^2 + 2x + 2y$ chia hết cho $x + y$.
4. $D = x^2 + 6xy + 9y^2 - z^2$ chia hết cho $x + 3y + z$.

 Lời giải.

1. $A = x^2 - 3x + 2(x - 3) = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2)$.
Vậy A chia hết cho $x - 3$.
2. $B = y^2 - xy + y - x = y(y - x) + (y - x) = (y - x)(y + 1)$.
Vậy B chia hết cho $x - y$.
3. $C = x^2y + xy^2 + 2x + 2y = xy(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(xy + 2)$.
Vậy C chia hết cho $x + y$.
4. $D = x^2 + 6xy + 9y^2 - z^2 = (x + 3y)^2 - z^2 = (x + 3y + z)(x + 3y - z)$.
Vậy D chia hết cho $x + 3y + z$.

□

§9 Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

1 Tóm tắt lý thuyết

- a) Ngoài trừ một số trường hợp đơn giản có thể sử dụng một trong các phương pháp như đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức hay nhóm hạng tử thì trong nhiều bài toán, ta phải phối hợp nhiều phương pháp ấy mới giải quyết được bài toán.
- b) *Ví dụ:* Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + 4x + 3$.
Biểu diễn đa thức đã cho dưới dạng:

$$x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 1 = (x + 2)^2 - 1 = (x + 1)(x + 3).$$

Cách làm này gọi là phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 35. Phân tích đa thức thành nhân tử

Đối với loại toán phân tích đa thức thành nhân tử, cần làm nhiều bài tập để qua đó có thể rút ra kinh nghiệm, tạo được thói quen có thể thêm bớt, ghép hạng tử, ... sao cho phù hợp.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $x(x - 1) + x(x + 3)$. ĐS: $2x(x + 1)$

2. $x^2 + 3x + 2$. ĐS: $(x + 2)(x + 1)$

3. $2x^2 - 5x + 3$. ĐS: $(x - 1)(2x - 3)$

4. $-4x^2 + 8x - 4$. ĐS: $-4(x - 1)^2$

5. $4x^4 + 1$. ĐS: $(2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$

6. $xy + 2x + y + 2$. ĐS: $(y + 2)(x + 1)$

7. $3xy^2 - 6xy + 3x$. ĐS: $3x(y - 1)^2$

 **Lời giải.**

1. $x(x-1) + x(x+3) = x(x-1+x+3) = x(2x+2) = 2x(x+1).$
2. $x^2 + 3x + 2 = x(x+2) + (x+2) = (x+2)(x+1).$
3. $2x^2 - 5x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (x-1)(2x-3).$
4. $-4x^2 + 8x - 4 = -4(x^2 - 2x + 1) = -4(x-1)^2.$
5. $4x^4 + 1 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1).$
6. $xy + 2x + y + 2 = x(y+2) + (y+2) = (y+2)(x+1).$
7. $3xy^2 - 6xy + 3x = 3x(y^2 - 2y + 1) = 3x(y-1)^2.$

□

 **Ví dụ 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | |
|------------------------|---|
| 1. $x(x-2) + x(x+4).$ | ĐS: $2x(x+1)$ |
| 2. $x^2 + 5x + 4.$ | ĐS: $(x+1)(x+4)$ |
| 3. $x^2 - 3x + 2.$ | ĐS: $(x-1)(x-2)$ |
| 4. $-5x^2 + 10x - 5.$ | ĐS: $-5(x-1)^2$ |
| 5. $x^4 + 4.$ | ĐS: $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ |
| 6. $xy - 3x + y - 3.$ | ĐS: $(y-3)(x+1)$ |
| 7. $4xy^2 - 8xy + 4x.$ | ĐS: $4x(y-1)^2$ |

 **Lời giải.**

1. $x(x-2) + x(x+4) = x(x-2+x+4) = x(2x+2) = 2x(x+1).$
2. $x^2 + 5x + 4 = x(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x+4).$
3. $x^2 - 3x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2).$
4. $-5x^2 + 10x - 5 = -5(x^2 - 2x + 1) = -5(x-1)^2.$
5. $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$
6. $xy - 3x + y - 3 = x(y-3) + (y-3) = (y-3)(x+1).$
7. $4xy^2 - 8xy + 4x = 4x(y^2 - 2y + 1) = 4x(y-1)^2.$

□

Dạng 36. Tính giá trị của biểu thức cho trước

Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, thay giá trị của biến (nếu cần) để tính nhanh giá trị các biểu thức.

   **BÀI TẬP MẪU**   

 **Ví dụ 1.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $7^3 + 2 \cdot 7^2 \cdot 13 + 7 \cdot 13^2$. **ĐS:** 2800
2. $17^3 - 2 \cdot 17^2 \cdot 7 + 17 \cdot 7^2$. **ĐS:** 1700
3. $10^3 \cdot 7^2 + 42000 + 10^3 \cdot 9$. **ĐS:** 100000
4. $75^2 - 25^2 + 35^2 - 65^2$. **ĐS:** 2000
5. $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$ tại $x = 1$. **ĐS:** $\frac{16}{25}$
6. $4x^2 - y^2 + 6y - 9$ tại $x = 2, y = 1$. **ĐS:** 12
7. $x(2x^2 + 2y^2) - x(x^2 + 3y^2)$ tại $x = 12, y = 2$. **ĐS:** 1680
8. $xy(y - 1) + y(1 + x)$ tại $x = 1, y = 201$. **ĐS:** 40602

 **Lời giải.**

1. $7^3 + 2 \cdot 7^2 \cdot 13 + 7 \cdot 13^2 = 7(7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 13 + 13^2) = 7(7 + 13)^2 = 7 \cdot 20^2 = 2800$.
2. $17^3 - 2 \cdot 17^2 \cdot 7 + 17 \cdot 7^2 = 17(17^2 - 2 \cdot 17 \cdot 7 + 7^2) = 17(17 - 7)^2 = 1700$.
3. $10^3 \cdot 7^2 + 42000 + 10^3 \cdot 9 = 10^3(7^2 + 42 + 9) = 10^3 \cdot 100 = 100000$.
4. $75^2 - 25^2 + 35^2 - 65^2 = (75 - 25)(75 + 25) - (65 - 35)(65 + 35) = 5000 - 3000 = 2000$.
5. $A = x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2$. Thay $x = 1$ ta được $A = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.
6. $B = 4x^2 - y^2 + 6y - 9 = (2x)^2 - (y - 3)^2 = (2x + y - 3)(2x - y + 3)$.
Thay $x = 2, y = 1$ ta được $B = 2 \cdot 6 = 12$.
7. $C = x(2x^2 + 2y^2) - x(x^2 + 3y^2) = x(x^2 - y^2) = x(x - y)(x + y)$.
Thay $x = 12, y = 2$ ta được $C = 12 \cdot 10 \cdot 14 = 1680$.
8. $D = xy(y - 1) + y(1 + x) = xy^2 + y = y(xy + 1)$.
Thay $x = 1, y = 201$ ta được $D = 201 \cdot 202 = 40602$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $5^3 + 2 \cdot 5^2 \cdot 15 + 5 \cdot 15^2$. **ĐS:** 2000
2. $11^3 - 2 \cdot 11^2 \cdot 9 + 11 \cdot 9^2$. **ĐS:** 44
3. $10^3 \cdot 3^2 + 24000 + 10^3 \cdot 4$. **ĐS:** 37000
4. $89^2 - 11^2 + 13^2 - 87^2$. **ĐS:** 400
5. $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ tại $x = 9$. **ĐS:** $\frac{676}{9}$
6. $x^2 - y^2 + 10y - 25$ tại $x = 4, y = 6$. **ĐS:** 15
7. $x(3x^2 + 3y^2) - x(2x^2 + 4y^2)$ tại $x = 6, y = 1$. **ĐS:** 210

8. $xy(y-2) + 2y(1+x)$ tại $x = -1, y = 2$.

ĐS: 0

 **Lời giải.**

1. $5^3 + 2 \cdot 5^2 \cdot 15 + 5 \cdot 15^2 = 5(5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 15 + 15^2) = 5(5 + 15)^2 = 5 \cdot 20^2 = 2000$.
2. $11^3 - 2 \cdot 11^2 \cdot 9 + 11 \cdot 9^2 = 11(11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 + 9^2) = 11(11 - 9)^2 = 11 \cdot 2^2 = 44$.
3. $10^3 \cdot 3^2 + 24000 + 10^3 \cdot 4 = 10^3(3^2 + 24 + 4) = 10^3 \cdot 37 = 37000$.
4. $89^2 - 11^2 + 13^2 - 87^2 = (89 + 11)(89 - 11) - (87 + 13)(87 - 13) = 7800 - 7400 = 400$.
5. $A = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$.
Thay $x = 9$ ta được $A = \left(9 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{676}{9}$.
6. $B = x^2 - y^2 + 10y - 25 = x^2 - (y - 5)^2 = (x + y - 5)(x - y + 5)$.
Thay $x = 4, y = 6$ ta được $C = 5 \cdot 3 = 15$.
7. $C = x(3x^2 + 3y^2) - x(2x^2 + 4y^2) = x^3 - xy^2 = x(x - y)(x + y)$.
Thay $x = 6, y = 1$ ta được $C = 6 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.
8. Thay $x = -1, y = 2$ ta được $D = -2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$.

□

Dạng 37. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước

Bước 1 Chuyển tất cả các hạng tử về vế trái (nếu cần), vế phải bằng 0;

Bước 2 Phân tích vế trái thành tích các nhân tử dạng $A \cdot B = 0$;

Bước 3 Lần lượt tìm x sao cho $A = 0$ và $B = 0$ và kết luận.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết:

1. $2x(x-2) + x(x+5) = 0$. ĐS: $x = 0; x = -\frac{1}{3}$
2. $x(3x^2 + 3) - x(2x^2 + 3) = 0$. ĐS: $x = 0$
3. $2x(x-1)^2 - 2x(x+1)^2 = 0$. ĐS: $x = 0$
4. $4 - 5x + x^2 = 0$. ĐS: $x = 1; x = 4$
5. $3x^3 - 48x = 0$. ĐS: $x = 0; x = 4; x = -4$

 **Lời giải.**

1. $2x(x-2) + x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x(3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$.
2. $x(3x^2 + 3) - x(2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 + 3 - 2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$3. 2x(x-1)^2 - 2x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(-4x) = 0 \Leftrightarrow -8x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$4. 4 - 5x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

$$5. 3x^3 - 48x = 0 \Leftrightarrow 3x(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -4. \end{cases}$$

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

$$1. x(x-5) + x(x+15) = 0. \quad \text{ĐS: } x = 0; x = -5$$

$$2. x(2x^2 + 5) - x(x^2 + 5) = 0. \quad \text{ĐS: } x = 0$$

$$3. x(x-2)^2 - x(x+2)^2 = 0. \quad \text{ĐS: } x = 0$$

$$4. 5 - 6x + x^2 = 0. \quad \text{ĐS: } x = 1; x = 5$$

$$5. 2x^3 - 16x = 0. \quad \text{ĐS: } x = 0; x = \pm 2\sqrt{2}$$

 **Lời giải.**

$$1. x(x-5) + x(x+15) = 0 \Leftrightarrow x(2x+10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5. \end{cases}$$

$$2. x(2x^2 + 5) - x(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 5 - x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$3. x(x-2)^2 - x(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x(-4x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$4. 5 - 6x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 5(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5. \end{cases}$$

$$5. 2x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

□

Dạng 38. Chứng minh tính chia hết

Để chứng minh biểu thức P chia hết cho biểu thức Q , ta phân tích biểu thức P về dạng tích các nhân tử trong đó có ít nhất một nhân tử là biểu thức Q .
Tương tự cho trường hợp đặc biệt nếu Q là hằng số.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh $n(7n^2 + 5) - n(6n^2 + 6)$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Đặt $A = n(7n^2 + 5) - n(6n^2 + 6)$ thì ta có $A = n(7n^2 + 5 - 6n^2 - 6) = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$.
Vì A là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên A chia hết cho 2 và 3. Do đó, A chia hết cho 6. □

Ví dụ 2. Chứng minh $5(n^2 + 7n + 12) + n(n^2 + 7n + 12)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Lời giải.

Đặt $A = 5(n^2 + 7n + 12) + n(n^2 + 7n + 12)$ thì ta có

$$A = (n^2 + 7n + 12)(n + 5) = [n(n + 3) + 4(n + 3)](n + 5) = (n + 3)(n + 4)(n + 5).$$

Vì A là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên A chia hết cho 3. □

Ví dụ 3. Chứng minh với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = x(5x^2 + 1) - x(4x^2 + 2)$ chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^3y^2 - 3x^2y + 2x$ chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 2) - y(xy^3 + 2x)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Lời giải.

1. $A = x(5x^2 + 1) - x(4x^2 + 2) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. Vậy A chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^3y^2 - 3x^2y + 2x = x(x^2y^2 - 3xy + 2) [xy(xy - 1) - 2(xy - 1)] = x(xy - 1)(xy - 2)$.
Vậy B chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 2) - y(xy^3 + 2x) = x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3) = xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
Vậy C chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. □

Ví dụ 4. Chứng minh với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = x(3x^2 + 1) - x(2x^2 + 2)$ chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^3y^2 - 2x^2y + x$ chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 2) - y(xy^3 + 3x)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Lời giải.

1. $A = x(3x^2 + 1) - x(2x^2 + 2) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. Vậy A chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x^3y^2 - 2x^2y + x = x(x^2y^2 - 2xy + 1) = x(xy - 1)^2$. Vậy B chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 2) - y(xy^3 + 3x) = x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3) = xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
Vậy C chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. □

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:



1. $x(x - 3) + x(x + 5)$. **ĐS:** $2x(x + 1)$
2. $x^2 + 4x + 3$. **ĐS:** $(x + 3)(x + 1)$
3. $x^2 - 7x + 6$. **ĐS:** $(x - 1)(x - 6)$
4. $-3x^2 + 6x - 3$. **ĐS:** $-3(x - 1)^2$
5. $x^4 - 81$. **ĐS:** $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
6. $xy - 7x + y - 7$. **ĐS:** $(y - 7)(x + 1)$
7. $8xy^2 - 16xy + 8x$. **ĐS:** $8x(y - 1)^2$

Lời giải.

1. $x(x - 3) + x(x + 5) = x(x - 3 + x + 5) = x(2x + 2) = 2x(x + 1)$.
2. $x^2 + 4x + 3 = x(x + 3) + (x + 3) = (x + 3)(x + 1)$.
3. $x^2 - 7x + 6 = x(x - 1) - 6(x - 1) = (x - 1)(x - 6)$.
4. $-3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x - 1)^2$.
5. $x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$.
6. $xy - 7x + y - 7 = x(y - 7) + (y - 7) = (y - 7)(x + 1)$.
7. $8xy^2 - 16xy + 8x = 8x(y^2 - 2y + 1) = 8x(y - 1)^2$.

□

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $13^3 - 2 \cdot 13^2 \cdot 3 + 13 \cdot 3^2$. **ĐS:** 1300
2. $23^3 - 2 \cdot 23^2 \cdot 3 + 23 \cdot 3^2$. **ĐS:** 9200
3. $10^3 \cdot 5^2 + 110000 + 10^3 \cdot 11$. **ĐS:** 146000
4. $73^2 - 27^2 + 21^2 - 79^2$. **ĐS:** -1200
5. $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ tại $x = 16$. **ĐS:** $\frac{3969}{16}$
6. $9x^2 - y^2 + 4y - 4$ tại $x = 1, y = 5$. **ĐS:** 0
7. $x(4x^2 + 3y^2) - x(3x^2 + 4y^2)$ tại $x = -3, y = -2$. **ĐS:** -15
8. $xy(y - 7) + 7y(1 + x)$ tại $x = -6, y = 1$. **ĐS:** 1

Lời giải.

1. $13^3 - 2 \cdot 13^2 \cdot 3 + 13 \cdot 3^2 = 13(13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 3 + 3^2) = 13(13 - 3)^2 = 1300$.
2. $23^3 - 2 \cdot 23^2 \cdot 3 + 23 \cdot 3^2 = 23(23^2 - 2 \cdot 23 \cdot 3 + 3^2) = 23(23 - 3)^2 = 9200$.
3. $10^3 \cdot 5^2 + 110000 + 10^3 \cdot 11 = 10^3(5^2 + 110 + 11) = 146 \cdot 10^3 = 146000$.
4. $73^2 - 27^2 + 21^2 - 79^2 = (73 - 27)(73 + 27) - (79 - 21)(79 + 21) = 4600 - 5800 = -1200$.

5. $A = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$. Thay $x = 16$ ta được $A = \left(16 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3969}{16}$.

6. $B = 9x^2 - y^2 + 4y - 4 = (3x)^2 - (y - 2)^2 = (3x + y - 2)(3x - y + 2)$.
Thay $x = 1, y = 5$ ta được $B = 6 \cdot 0 = 0$.

7. $C = x(4x^2 + 3y^2) - x(3x^2 + 4y^2) = x^3 - xy^2 = x(x - y)(x + y)$.
Thay $x = -3, y = -2$ ta được $C = -3 \cdot (-1) \cdot (-5) = -15$.

8. $D = xy(y - 7) + 7y(1 + x) = xy^2 + 7y = y(xy + 7)$.
Thay $x = -6, y = 1$ ta được $D = 1 \cdot (-6 + 7) = 1$.

□

 **Bài 3.** Tìm x , biết:

1. $5x(x - 1) + x(x + 17) = 0$. **ĐS:** $x = 0; x = -2$

2. $x(5x^2 + 6) - x(4x^2 + 6) = 0$. **ĐS:** $x = 0$

3. $3x(x - 3)^2 - 3x(x + 3)^2 = 0$. **ĐS:** $x = 0$

4. $7 - 9x + 2x^2 = 0$. **ĐS:** $x = 1; x = \frac{7}{2}$

5. $4x^3 - 4x = 0$. **ĐS:** $x = 0; x = 1; x = -1$

 **Lời giải.**

1. $5x(x - 1) + x(x + 17) = 0 \Leftrightarrow x(5x - 5 + x + 17) = 0 \Leftrightarrow x(6x + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

2. $x(5x^2 + 6) - x(4x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x.x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. $3x(x - 3)^2 - 3x(x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x[(x - 3)^2 - (x + 3)^2] = 0 \Leftrightarrow 3x(-12x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

4. $7 - 9x + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 1) - 7(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$.

5. $4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

□

 **Bài 4.** Chứng minh $2n(1 - n) + n^2(n - 1)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Đặt $A = 2n(1 - n) + n^2(n - 1)$ thì ta có:

$$A = -2n(n - 1) + n^2(n - 1) = (n - 1)(n^2 - 2n) = n(n - 1)(n - 2).$$

Vì A là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên suy ra A chia hết cho 3.

□

 **Bài 5.** Chứng minh với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = x(7x^2 + 2) - x(6x^2 + 3)$ chia hết cho $x - 1$.



2. $B = x^3y^2 - 4x^2y + 3x$ chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = xy(x^3 + 4) - y(xy^3 + 4x)$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

 Lời giải.

1. $A = x(7x^2 + 2) - x(6x^2 + 3) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. Vậy A chia hết cho $x - 1$.
2. $B = x(x^2y^2 - 4xy + 3) = x(xy(xy - 1) - 3(xy - 1)) = x(xy - 1)(xy - 3)$.
Vậy B chia hết cho $xy - 1$.
3. $C = x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3) = xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Vậy C chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

□

§10 Chia đơn thức cho đơn thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Chia đơn thức cho đơn thức

Cho A và B là hai đơn thức, $B \neq 0$.

Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ của B không lớn hơn số mũ của A .

1.2 Quy tắc

Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau:

- ☒ Chia hệ số của A cho hệ số của B .
- ☒ Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của từng biến đó trong B .
- ☒ Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 39. Thu gọn biểu thức

Nội dung phương pháp

- ☒ Sử dụng kiến thức chia hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($m \geq n, m, n \in \mathbb{N}$).
- ☒ Một số trường hợp cần phân tích đa thức bị chia thành nhân tử để rút gọn các nhân tử.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 Ví dụ 1. Làm phép tính

- a) $9(x-1)^3 : [3(x-1)^2]$; **ĐS:** $3x-3$ b) $(-5x+2)^3 : (5x-2)$; **ĐS:** $-(5x-2)^2$
 c) $27^2 : (-3)^3$; **ĐS:** -27 d) $(x^3-3x+2)^3 : (x^3-3x+2)^2$; **ĐS:** x^3-3x+2
 e) $\frac{(-17)^4}{15^4} : \left(\frac{17}{15}\right)^2$; **ĐS:** $\frac{289}{225}$ f) $18(-x)^5 y^2 : (9x^2 y)$. **ĐS:** $-2x^3 y$

 Lời giải.

- $9(x-1)^3 : [3(x-1)^2] = 3(x-1)^{3-2} = 3(x-1) = 3x-3;$
- $(-5x+2)^3 : (5x-2) = -(5x-2)^3 : (5x-2) = -(5x-2)^2;$
- $27^2 : (-3)^3 = 3^6 : (-3^3) = -3^3 = -27;$
- $(x^3-3x+2)^3 : (x^3-3x+2)^2 = (x^3-3x+2)^{3-2} = x^3-3x+2$
- $\frac{(-17)^4}{15^4} : \left(\frac{17}{15}\right)^2 = \frac{(17)^4}{15^4} : \left(\frac{17}{15}\right)^2 = \frac{17^2}{15^2} = \frac{289}{225};$
- $18(-x)^5y^2 : (9x^2y) = -2x^{5-2}y^{2-1} = -2x^3y.$

□

 Ví dụ 2. Làm phép tính

- a) $3(x+1)^2 : (x+1)^2;$ **ĐS:** 3 b) $6(3x+2)^3 : (3x+2)^2;$ **ĐS:** $6(3x+2)$
 c) $17^7 : (-17)^3;$ **ĐS:** -17^4 d) $(x^2+3x+4)^4 : (x^2+3x+4)^3;$ **ĐS:**
 x^2+3x+4
 e) $\frac{(7)^4}{13^4} : \left(\frac{7}{13}\right)^2;$ **ĐS:** $\frac{49}{169}$ f) $16x^5y^2 : (4x^3y).$ **ĐS:** $4x^2y$

 Lời giải.

- a) $3(x+1)^2 : (x+1)^2 = 3(x+1)^{2-2} = 3;$ b) $6(3x+2)^3 : (3x+2)^2 = 6(3x+2);$
 c) $17^7 : (-17)^3 = -17^4;$ d) $(x^2+3x+4)^4 : (x^2+3x+4)^3 = x^2+3x+4$
 e) $\frac{(7)^4}{13^4} : \left(\frac{7}{13}\right)^2 = \frac{7^2}{13^2} = \frac{49}{169};$ f) $16x^5y^2 : (4x^3y) = 4x^2y.$

□

 Dạng 40. Tính giá trị của biểu thức

Sử dụng chia đơn thức cho đơn thức để rút gọn biểu thức, thay giá trị của biến (nếu cần) để tính nhanh giá trị các biểu thức

❖❖❖ **BÀI TẬP MẪU** ❖❖❖

 Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- $15(x+2)^3 : [3(x+2)^2]$ tại $x = -102;$ **ĐS:** 500
- $(x^2-3x+2)^3 : [(x-1)^2 \cdot (x-2)^3]$ tại $x = 101;$ **ĐS:** 100
- $27x^5y^3 : (9x^3y^2)$ tại $x = -3, y = 2;$ **ĐS:** 54
- $x^2(x+y)^3 : [x^2(x+y)^2]$ tại $x = -7, y = 3;$ **ĐS:** -4
- $(x+y)^2z^3 : (z^3x + z^3y)$ tại $x = 102, y = -2, z = 100.$ **ĐS:** 100

 Lời giải.

1. Ta có $15(x+2)^3 : [3(x+2)^2] = 5(x+2)$. Thay $x = -102$, ta được kết quả là $5(-102+2) = 500$.

2. Ta có $(x^2 - 3x + 2)^3 : [(x - 1)^2 \cdot (x - 2)^3] = [(x - 1)^3 \cdot (x - 2)^3] : [(x - 1)^2 \cdot (x - 1)^3] = x - 1$.
Thay $x = 101$, ta được kết quả là $101 - 1 = 100$.
3. Ta có $27x^5y^3 : (9x^3y^2) = 3x^2y$. Thay $x = -3, y = 2$, ta được kết quả là $3 \cdot (-3)^2 \cdot 2 = 54$.
4. Ta có $x^2(x + y)^3 : [x^2(x + y)^2] = x + y$. Thay $x = -7, y = 3$, ta được kết quả là $-7 + 3 = -4$.
5. Ta có $(x + y)^2z^3 : (z^3x + z^3y) = (x + y)^2z^3 : (x + y)z^3 = x + y$. Thay $x = 102, y = -2, z = 100$, ta được kết quả là $102 - 2 = 100$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $21(x + 3)^3 : (3x + 9)^2$ tại $x = -6$; **ĐS:** -7
2. $(2x^2 - 5x + 3)^4 : [(2x - 3)^3 \cdot (x - 1)^2]$ tại $x = 2, y = 3$; **ĐS:** 1
3. $36x^4y^3 : (-6x^3y^2)$ tại $x = 10, y = 7$; **ĐS:** -280
4. $y^2(x - y)^3 : [y^2(x - y)^2]$ tại $x = 13, y = 3$; **ĐS:** 10
5. $(x - y)^2z^2 : (z^2x - z^2y)$ tại $x = 54, y = 4, z = 10$. **ĐS:** 50

 **Lời giải.**

1. Ta có $21(x + 3)^3 : (3x + 9)^2 = \frac{7}{3}(x + 3)$. Thay $x = -6$, ta được kết quả là $\frac{7}{3}(-6 + 3) = -7$.
2. Ta có $(2x^2 - 5x + 3)^4 : [(2x - 3)^3 \cdot (x - 1)^2] = [(2x - 3)^4 \cdot (x - 1)^4] : [(2x - 3)^3 \cdot (x - 1)^2] = (2x - 3) \cdot (x - 1)^2$. Thay $x = 2$, ta được kết quả là 1 .
3. Ta có $36x^4y^3 : (-6x^3y^2) = -4xy$. Thay $x = 10, y = 7$, ta được kết quả là -280 .
4. Ta có $y^2(x - y)^3 : [y^2(x - y)^2] = x - y$. Thay $x = 13, y = 3$, ta được kết quả là $13 - 3 = 10$.
5. Ta có $(x - y)^2z^2 : (z^2x - z^2y) = x - y$. Thay $x = 54, y = 4$, ta được kết quả là $54 - 4 = 50$.

□

Dạng 41. Tìm giá trị của ẩn thỏa mãn đẳng thức cho trước

Thực hiện phép chia đơn thức cho đơn thức để rút gọn và tìm x .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x , biết:

1. $(x - 2)^2 = x - 2$ với $x \neq 2$; **ĐS:** $x = 3$
2. $(7x - 28)^3 : (7x - 28)^2 = 1$ với $x \neq 4$; **ĐS:** $x = \frac{29}{7}$
3. $18(x - 1)^4 = 3(x - 1)^3$ với $x \neq 1$; **ĐS:** $x = \frac{7}{6}$
4. $2 - 15x + 13x^2 = (x - 1)^2$ với $x \neq 1$; **ĐS:** $x = \frac{1}{12}$

5. $27x^3 - 3x = 2(3x)^2 - 2$ với $x \neq \pm \frac{1}{3}$.

ĐS: $x = \frac{2}{3}$

 **Lời giải.**

1. Ta có $(x - 2)^2 = x - 2 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$;

2. $(7x - 28)^3 : (7x - 28)^2 = 1 \Leftrightarrow 7x - 28 = 1 \Leftrightarrow 7x = 29 \Leftrightarrow x = \frac{29}{7}$;

3. $18(x - 1)^4 = 3(x - 1)^3 \Leftrightarrow \frac{18(x - 1)^4}{3(x - 1)^3} = 1 \Leftrightarrow 6(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}$;

4. $2 - 15x + 13x^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)(13x - 2) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 13x - 2 = x - 1 \Leftrightarrow 12x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$;

5. $27x^3 - 3x = 2(3x)^2 - 2 \Leftrightarrow 3x(9x^2 - 1) = 2(9x^2 - 1) \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x , biết:

1. $(x - 3)^2 = x - 3$ với $x \neq 3$; ĐS: $x = 3$

2. $(5x - 15)^3 : (5x - 15)^2 = 1$ với $x \neq 3$; ĐS: $x = \frac{29}{7}$

3. $8(x - 2)^4 = 4(x - 2)^3$ với $x \neq 2$; ĐS: $x = \frac{10}{9}$

4. $1 - 12x + 11x^2 = (x - 1)^2$ với $x \neq 1$; ĐS: $x = \frac{1}{12}$

5. $8x^3 - 2x = 3(2x)^2 - 3$ với $x \neq \pm \frac{1}{2}$. ĐS: $x = \frac{3}{2}$

 **Lời giải.**

1. Ta có $(x - 3)^2 = x - 3 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$;

2. $(5x - 15)^3 : (5x - 15)^2 = 1 \Leftrightarrow 5x - 15 = 1 \Leftrightarrow 5x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$;

3. $8(x - 2)^4 = 4(x - 2)^3 \Leftrightarrow \frac{8(x - 2)^4}{4(x - 2)^3} = 1 \Leftrightarrow 2(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$;

4. $1 - 12x + 11x^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)(11x - 1) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 11x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

5. $8x^3 - 2x = 3(2x)^2 - 3 \Leftrightarrow 2x(4x^2 - 1) = 3(4x^2 - 1) \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

□

Dạng 42. Chứng minh tính chia hết

Để chứng minh biểu thức P chia hết cho biểu thức Q , ta thực hiện chia đơn thức cho đơn thức hoặc phân tích biểu thức P về dạng tích các nhân tử trong đó có ít nhất một nhân tử là biểu thức Q .

Tương tự trường hợp đặc biệt nếu Q là hằng số.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh rằng $A = [n^2(n+2) + n(n+2)]^4$ chia hết cho $n^2(n+1)^2(n+2)^2$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= [n^2(n+2) + n(n+2)]^4 = [n(n+2)(n+1)]^4 = [n(n+2)(n+1)]^2 \cdot [n(n+2)(n+1)]^2 \\ &= n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot [n(n+2)(n+1)]^2. \end{aligned}$$

Suy ra khi phân tích A thành nhân tử thì có nhân tử $n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2$ nên A chia hết cho $n^2(n+1)^2(n+2)^2$. □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh rằng $B = (n^2 - 2n + 1)^3$ chia hết cho $(n-1)^2$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có $B = (n^2 - 2n + 1)^3 = (n-1)^6 = (n-1)^2 \cdot (n-1)^4$.

Suy ra khi phân tích B thành nhân tử thì có nhân tử $(n-1)^2$ nên B chia hết cho $(n-1)^2$. □

 **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng $A = 111^{n+1} : 111^n + 1$ chia hết cho 112 với mọi số tự nhiên n .

 **Lời giải.**

Ta có $A = 111^{n+1-n} + 1 = 111 + 1 = 112$. Suy ra A chia hết cho 112. □

 **Ví dụ 4.** Chứng minh rằng $B = 101^{2n+1} : 101^n$ chia hết cho 101 với mọi số tự nhiên n .

 **Lời giải.**

Ta có $B = 101^{2n+1-n} = 101^{n+1}$. Suy ra B chia hết cho 101. □

 **Ví dụ 5.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

1. $A = x(x+5)^3 : (x+5)^2 + x^2 + x$ chia hết cho $x+3$;
2. $B = x^4y^4 : y^3x^3 + xy + 2$ chia hết cho $xy+1$;
3. $C = xy(xy+y+1)^3 : (xy+y+1)^2 + xy$ chia hết cho $xy+y+2$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $A = x(x+5)^3 : (x+5)^2 + x^2 + x = x(x+5) + x^2 + x = x(x+5+x+1) = x(2x+6) = 2x(x+3)$.
Suy ra A khi hết cho $x+3$.
2. Ta có $B = x^4y^4 : y^3x^3 + xy + 2 = xy + xy + 2 = 2xy + 2 = 2(xy+1)$.
Suy ra B chia hết cho $xy+1$.
3. Ta có $C = xy(xy+y+1)^3 : (xy+y+1)^2 + xy = xy(xy+y+1) + xy = xy(xy+y+2)$.
Suy ra C chia hết cho $xy+y+2$.

□

3 Bài tập về nhà

📁 Bài 1. Làm phép tính

- a) $64(x+2)^3 : [32(x+2)^2]$; **ĐS:** $2(x+2)$ b) $(13x+1)^4 : (13x+1)^2$; **ĐS:** $(13x+1)^2$
 c) $8^7 : (-2)^3$; **ĐS:** -2^{18} d) $(2x^3+7)^7 : (-2x^3-7)^2$; **ĐS:** $(2x^3+7)^5$
 e) $\frac{(-115)^4}{19^2} : \left(\frac{115}{19}\right)^3$; **ĐS:** 2185 f) $18(-xy)^4 : (4x^2y)^2$. **ĐS:** $\frac{9}{8} \cdot y^2$

✍️ Lời giải.

1. Ta có $64(x+2)^3 : [32(x+2)^2] = 2(x+2)$.
2. Ta có $(13x+1)^4 : (13x+1)^2 = (13x+1)^2$.
3. Ta có $8^7 : (-2)^3 = -2^{21} : 2^3 = -2^{18}$.
4. Ta có $(2x^3+7)^7 : (-2x^3-7)^2 = (2x^3+7)^7 : (2x^3+7)^2 = (2x^3+7)^5$.
5. Ta có $\frac{(-115)^4}{19^2} : \left(\frac{115}{19}\right)^3 = \frac{115^4}{19^2} : \frac{115^3}{19^3} = 115 \cdot 19 = 2185$.
6. Ta có $18(-xy)^4 : (4x^2y)^2 = 18x^4y^4 : 16x^4y^2 = \frac{9}{8} \cdot y^2$.

□

📁 Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $(x+11)^3 : (2x+22)^2$ tại $x = -12$; **ĐS:** $-\frac{1}{4}$
2. $(7x^2 - 11x + 4)^3 : [(7x-4)^3 \cdot (x-1)^2]$ tại $x = \frac{1}{7}$; **ĐS:** $-\frac{6}{7}$
3. $125x^4y^4 : (-5x^2y^2)$ tại $x = 8, y = -2$; **ĐS:** -1280
4. $xy(5x^2 + y^2) : [xy(4x^2 + 2y^2)]$ tại $x = 22, y = -2$; **ĐS:** $\frac{101}{81}$
5. $(x+y)^2z^3 : (z^3x + z^3y)$ tại $x = 5, y = 5, z = 12$. **ĐS:** 10

 Lời giải.

$$1. (x + 11)^3 : (2x + 22)^2 = (x + 11)^3 : [2(x + 11)]^2 = \frac{x + 11}{4}.$$

Thay $x = -12$ vào biểu thức ta được kết quả $\frac{-12 + 11}{4} = -\frac{1}{4}$.

$$2. (7x^2 - 11x + 4)^3 : [(7x - 4)^3 \cdot (x - 1)^2] = [(x - 1) \cdot (7x - 4)]^3 : [(7x - 4)^3 \cdot (x - 1)^2] = x - 1.$$

Thay $x = \frac{1}{7}$ vào biểu thức ta được kết quả $\frac{1}{7} - 1 = -\frac{6}{7}$.

$$3. 125x^4y^4 : (-5x^2y^2) = -5x^2y^2.$$

Thay $x = 8, y = -2$ vào biểu thức ta được kết quả $-5 \cdot 8^2(-2)^2 = -1280$.

$$4. xy(5x^2 + y^2) : [xy(4x^2 + 2y^2)] = (5x^2 + y^2) : (4x^2 + 2y^2).$$

Thay $x = 22, y = -2$ vào biểu thức ta được kết quả

$$[5 \cdot 22^2 + (-2)^2] : [4 \cdot 22^2 + 2(-2)^2] = 2424 : 1944 = \frac{101}{81}.$$

$$5. (x + y)^2z^3 : (z^3x + z^3y) = (x + y)^2z^3 : (x + y)z^3 = x + y.$$

Thay $x = 5, y = 5$ vào biểu thức ta được kết quả $5 + 5 = 10$.

□

 Bài 3. Tìm x , biết:

$$1. (x - 4)^2 = x - 4 \text{ với } x \neq 4;$$

$$\text{ĐS: } x = 5$$

$$2. (3x - 6)^3 : (3x - 6)^2 = 1 \text{ với } x \neq 2;$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{7}{3}$$

$$3. 9(x - 5)^4 = 3(x - 5)^3 \text{ với } x \neq 5;$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{16}{3}$$

$$4. 4 - 11x + 7x^2 = x - 1 \text{ với } x \neq 1;$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{5}{7}$$

$$5. x^3 - x = 2x^2 - 2 \text{ với } x \neq \pm 1.$$

$$\text{ĐS: } x = 2$$

 Lời giải.

$$1. \text{Ta có } (x - 4)^2 = x - 4 \Leftrightarrow x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 5;$$

$$2. (3x - 6)^3 : (3x - 6)^2 = 1 \Leftrightarrow 3x - 6 = 1 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3};$$

$$3. 9(x - 5)^4 = 3(x - 5)^3 \Leftrightarrow \frac{9(x - 5)^4}{3(x - 5)^3} = 1 \Leftrightarrow 3(x - 5) = 1 \Leftrightarrow x - 5 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{3};$$

$$4. 4 - 11x + 7x^2 = x - 1 \Leftrightarrow (x - 1)(7x - 4) = x - 1 \Leftrightarrow 7x - 4 = 1 \Leftrightarrow 7x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{7};$$

$$5. x^3 - x = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow x = 2.$$

□

Bài 4. Chứng minh rằng $A = (n-3)^4(n+3)^4 : [(n^2-9)^2]$ chia hết cho $(n^2-9) \cdot (n-3)$ với mọi số nguyên n .

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= (n-3)^4(n+3)^4 : [(n^2-9)^2] = (n-3)^4(n+3)^4 : (n-3)^2(n+3)^2 = (n-3)^2(n+3)^2 \\ &= (n^2-9)(n-3)(n+3). \end{aligned}$$

Suy ra khi phân tích A thành nhân tử thì có nhân tử $(n^2-9)(n-3)$, suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài 5. Chứng minh rằng $B = 10^{3n+1} : 10^{3n} + 1$ chia hết cho 11 với mọi số tự nhiên n .

 **Lời giải.**

Ta có $B = 10^{3n+1-3n} + 1 = 10 + 1 = 11$. Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

- $A = 7x(x+3)^3 : (x+3)^2 + 5x^2 + 5x$ chia hết cho $6x+13$;
- $B = 34x^7y^7 : (2y^6x^6) + 3xy + 2$ chia hết cho $10xy+1$;
- $C = 3xy(2xy+3y+1)^5 : (2xy+3y+1)^4 + xy$ chia hết cho $6xy+9y+4$.

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned} A &= 7x(x+3)^3 : (x+3)^2 + 5x^2 + 5x = 7x(x+3) + 5x^2 + 5x = 7x^2 + 21x + 5x^2 + 5x \\ &= 12x^2 + 26x = 2x(6x+13). \end{aligned}$$

Suy ra A khi hết cho $6x+13$.

2. Ta có $B = 34x^7y^7 : (2y^6x^6) + 3xy + 2 = 17xy + 3xy + 2 = 20xy + 2 = 2(10xy+1)$.
Suy ra B chia hết cho $10xy+1$.

3. Ta có

$$\begin{aligned} C &= 3xy(2xy+3y+1)^5 : (2xy+3y+1)^4 + xy = 3xy(2xy+3y+1) + xy \\ &= xy(6xy+9y+3+1) = xy(6xy+9y+4). \end{aligned}$$

Suy ra C chia hết cho $6xy+9y+4$. $\square$

§11 Chia đa thức cho đơn thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Quy tắc

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B) ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 43. Xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không

Xét xem tất cả các hạng tử của đa thức A có thể chia hết cho đơn thức B hay không (hay đa thức A có thể có nhân tử chung là phần biến của đơn thức B hay không).

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Không làm phép tính chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không:

1. $A = 4x^2y^3 - 6xy^2 + 2y^5, B = 5y^2;$ **ĐS:** chia hết

2. $A = \frac{12}{5}x^6y^3 + 5,1x^4y^7 - \frac{2}{3}xy^2, B = 3xy^2;$ **ĐS:** chia hết

3. $A = 2x^3y + 3x^2y^2 + 5xy^2, B = y^2.$ **ĐS:** không chia hết

Lời giải.

1. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho y^2 .
2. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho xy^2 .
3. Ta thấy A không chia hết cho B vì hạng tử $2x^3y$ của A không chia hết cho y^2 .

□

 **Ví dụ 2.** Không làm phép tính chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không:

1. $A = x^2y^4 + 2x^2y^2 + 5x^4, B = 7x^2;$ **ĐS:** chia hết

$$2. A = \frac{5}{6}x^6y^5 - 3,3x^3y^3 + \frac{7}{2}x^6y^2, B = \frac{1}{2}x^2y^2;$$

ĐS: chia hết

$$3. A = 5xy^2 + 4x^3y^4 + 3x^5y^6, B = x^2.$$

ĐS: không chia hết

Lời giải.

1. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho x^2 .
2. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho x^2y^2 .
3. Ta thấy A không chia hết cho B vì hạng tử $5xy^2$ của A không chia hết cho x^2 .

□

Dạng 44. Thực hiện phép tính chia

Sử dụng quy tắc chia đa thức cho đơn thức.

BÀI TẬP MẪU **Ví dụ 1.** Thực hiện phép chia

$$a) (15 \cdot 2^4 + 7 \cdot 4^3 - 2^6) : 2^3; \quad \text{ĐS: } 78 \quad b) (3^8 + 4 \cdot 9^5 - 5 \cdot 27^3) : 3^7. \quad \text{ĐS: } 66$$

Lời giải.

1. $(15 \cdot 2^4 + 7 \cdot 4^3 - 2^6) : 2^3 = 15 \cdot 2^4 : 2^3 + 7 \cdot 2^6 : 2^3 - 2^6 : 2^3 = 15 \cdot 2 + 7 \cdot 2^3 - 2^3 = 30 + 56 - 8 = 78.$
2. $(3^8 + 4 \cdot 9^5 - 5 \cdot 27^3) : 3^7 = 3^8 : 3^7 + 4 \cdot 3^{10} : 3^7 - 5 \cdot 3^9 : 3^7 = 3 + 4 \cdot 27 - 5 \cdot 9 = 3 + 108 - 45 = 66.$

□

Ví dụ 2. Thực hiện phép chia

$$a) (7 \cdot 4^4 - 6 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^5) : 4^3; \quad \text{ĐS: } -58 \quad b) (2 \cdot 5^7 + 3 \cdot 25^2 + 5^6) : 5^4. \quad \text{ĐS: } 278$$

Lời giải.

1. $(7 \cdot 4^4 - 6 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^5) : 4^3 = 7 \cdot 4^4 : 4^3 - 6 \cdot 4^3 : 4^3 - 5 \cdot 4^5 : 4^3 = 7 \cdot 4 - 6 - 5 \cdot 4^2 = 28 - 6 - 80 = -58.$
2. $(2 \cdot 5^7 + 3 \cdot 25^2 + 5^6) : 5^4 = 2 \cdot 5^7 : 5^4 + 3 \cdot 5^4 : 5^4 + 5^6 : 5^4 = 2 \cdot 5^3 + 3 + 5^2 = 250 + 3 + 25 = 278$

□

Ví dụ 3. Làm tính chia:

$$1. (2x^4 + 4x^3 - x^6) : 2x^3; \quad \text{ĐS: } x + 2 - \frac{1}{2}x^3$$

$$2. (x^8y^8 + 2x^5y^5 + 7x^3y^3) : (-x^2y^2); \quad \text{ĐS: } -x^6y^6 - 2x^3y^3 - 7xy$$

$$3. \left(2x^5y^3 - 5x^3y^5 + \frac{3}{4}x^3y^3 \right) : \frac{2}{3}xy; \quad \text{ĐS: } 3x^4y^2 - \frac{15}{2}x^2y^4 + \frac{9}{8}x^2y^2$$

$$4. (9x^2y^4z - 12x^3y^2z^4 - 4xy^3z^2) : xyz. \quad \text{ĐS: } 9xy^3 - 12x^2yz^3 - 4y^2z$$

Lời giải.

$$1. (2x^4 + 4x^3 - x^6) : 2x^3 = 2x^4 : (2x^3) + 4x^3 : (2x^3) - x^6 : (2x^3) = x + 2 - \frac{1}{2}x^3;$$

2.

$$\begin{aligned}(x^8y^8 + 2x^5y^5 + 7x^3y^3) : (-x^2y^2) &= x^8y^8 : (-x^2y^2) + 2x^5y^5 : (-x^2y^2) + 7x^3y^3 : (-x^2y^2) \\ &= -x^6y^6 - 2x^3y^3 - 7xy.\end{aligned}$$

$$3. 2x^5y^3 : \frac{2}{3}xy - 5x^3y^5 : \frac{2}{3}xy + \frac{3}{4}x^3y^3 : \frac{2}{3}xy = 3x^4y^2 - \frac{15}{2}x^2y^4 + \frac{9}{8}x^2y^2;$$

4.

$$\begin{aligned}(9x^2y^4z - 12x^3y^2z^4 - 4xy^3z^2) : xyz &= 9x^2y^4z : xyz - 12x^3y^2z^4 : xyz - 4xy^3z^2 : xyz \\ &= 9xy^3 - 12x^2yz^3 - 4y^2z\end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Làm tính chia:

$$1. (3y^5 + 2y^7 - 4y^4) : 6y^3; \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^4 - \frac{2}{3}y$$

$$2. (2x^2y^4 + 3x^5y^6 - 5x^7y^2) : (-xy); \quad \text{ĐS: } -2xy^3 - 3x^4y^5 + 5x^6y$$

$$3. \left(\frac{2}{5}x^4y^6 + 2x^2y^4 - \frac{1}{5}x^4y^2 \right) : \frac{4}{5}x^2y^2; \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$4. (3x^3y^2z^2 + 5x^4y^5z^3 + 6x^6y^4z^7) : x^3yz^2. \quad \text{ĐS: } 3y + 5xy^4z + 6x^3y^3z^5$$

 **Lời giải.**

$$1. (3y^5 + 2y^7 - 4y^4) : 6y^3 = 3y^5 : 6y^3 + 2y^7 : 6y^3 - 4y^4 : 6y^3 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^4 - \frac{2}{3}y.$$

$$2. 2x^2y^4 : (-xy) + 3x^5y^6 : (-xy) - 5x^7y^2 : (-xy) = -2xy^3 - 3x^4y^5 + 5x^6y.$$

3.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{5}x^4y^6 + 2x^2y^4 - \frac{1}{5}x^4y^2 \right) : \frac{4}{5}x^2y^2 &= \frac{2}{5}x^4y^6 : \frac{4}{5}x^2y^2 + 2x^2y^4 : \frac{4}{5}x^2y^2 - \frac{1}{5}x^4y^2 : \frac{4}{5}x^2y^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^2.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(3x^3y^2z^2 + 5x^4y^5z^3 + 6x^6y^4z^7) : x^3yz^2 &= 3x^3y^2z^2 : x^3yz^2 + 5x^4y^5z^3 : x^3yz^2 + 6x^6y^4z^7 : x^3yz^2 \\ &= 3y + 5xy^4z + 6x^3y^3z^5.\end{aligned}$$

□

 **Dạng 45. Bài toán chia đa thức cho đơn thức áp dụng hằng đẳng thức**

Vận dụng các hằng đẳng thức đã học để thực hiện.

   **BÀI TẬP MẪU**  

Ví dụ 1. Làm tính chia

$$1. [(x-y)^3 - (x-y)^2 + (x-y)] : (y-x); \quad \text{ĐS: } -(x-y)^2 + (x-y) - 1$$

$$2. [3(2x+y)^2 + 5(2x+y)^5 - 6(2x+y)^3] : (2x+y)^2; \quad \text{ĐS: } 3 + 5(2x+y)^3 - 6(2x+y)$$

$$3. (3x+4y)^3 : (6x+8y); \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}(3x+4y)^2$$

$$4. (8x^3 + 27y^3) : (2x+3y). \quad \text{ĐS: } 4x^2 - 6xy + 9y^2$$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} [(x-y)^3 - (x-y)^2 + (x-y)] : (y-x) &= -[(x-y)((x-y)^2 - (x-y) + 1)] : (x-y) \\ &= -[(x-y)^2 - (x-y) + 1] \\ &= -(x-y)^2 + (x-y) - 1. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} [3(2x+y)^2 + 5(2x+y)^5 - 6(2x+y)^3] : (2x+y)^2 \\ = [(2x+y)^2 (3 + 5(2x+y)^3 - 6(2x+y))] : (2x+y)^2 = 3 + 5(2x+y)^3 - 6(2x+y). \end{aligned}$$

$$3. (3x+4y)^3 : (6x+8y) = (3x+4y)^3 : [2(3x+4y)] = \frac{1}{2}(3x+4y)^2.$$

$$4. (8x^3 + 27y^3) : (2x+3y) = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) : (2x+3y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2.$$

□

Ví dụ 2. Làm tính chia

$$1. [4(x-y)^4 - (x-y)^5 + 3(x-y)^3] : (y-x)^2; \quad \text{ĐS: } 4(x-y)^2 - (x-y)^3 + 3(x-y)$$

$$2. [2(x+y)^4 - 2(x+y)^3 + (x+y)^2] : 3(x+y)^2; \quad \text{ĐS: } \frac{1}{3}(2(x+y)^2 - 2(x+y) + 1)$$

$$3. 3(2x-y)^3 : (4x-2y); \quad \text{ĐS: } \frac{3}{2}(2x-y)^2$$

$$4. (64x^3 - y^3) : (4x-y). \quad \text{ĐS: } 16x^2 + 4xy + y^2$$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} [4(x-y)^4 - (x-y)^5 + 3(x-y)^3] : (y-x)^2 &= [(x-y)^2 (4(x-y)^2 - (x-y)^3 + 3(x-y))] : (x-y)^2 \\ &= 4(x-y)^2 - (x-y)^3 + 3(x-y). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} [2(x+y)^4 - 2(x+y)^3 + (x+y)^2] : 3(x+y)^2 &= [(x+y)^2 (2(x+y)^2 - 2(x+y) + 1)] : 3(x+y)^2 \\ &= \frac{1}{3}(2(x+y)^2 - 2(x+y) + 1). \end{aligned}$$

$$3. 3(2x - y)^3 : (4x - 2y) = 3(2x - y)^3 : [2(2x - y)] = \frac{3}{2}(2x - y)^2;$$

$$4. (64x^3 - y^3) : (4x - y) = (4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2) : (4x - y) = 16x^2 + 4xy + y^2.$$

□

Dạng 46. Tìm giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vận dụng Dạng 1

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

$$1. (6x^3 + 3x^2 - x) : x^n; \quad \text{ĐS: } n = 1$$

$$2. (5x^5y^4 - 2x^3y^2 + x^4y^5) : 3x^ny^n. \quad \text{ĐS: } n \in \{1, 2\}$$

Lời giải.

1. Để $(6x^3 + 3x^2 - x) : x^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $6x^3 + 3x^2 - x$ phải chia hết cho x^n .

Để x chia hết cho x^n thì $n \leq 1$ suy ra $n = 1$.

2. Để $(5x^5y^4 - 2x^3y^2 + x^4y^5) : 3x^ny^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $5x^5y^4 - 2x^3y^2 + x^4y^5$ phải chia hết cho x^ny^n .

Để $2x^3y^2$ chia hết cho x^ny^n thì $n \leq 2$, suy ra $n \in \{1, 2\}$.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

$$1. (27^7 + 5y^4 + 4y) : y^n; \quad \text{ĐS: } n = 1$$

$$2. (3x^7y^7 - 4x^6y^6 - 5x^3y^3) : 2x^ny^n. \quad \text{ĐS: } n \in \{1, 2, 3\}$$

Lời giải.

1. Để $(27^7 + 5y^4 + 4y) : y^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $27^7 + 5y^4 + 4y$ phải chia hết cho y^n . Để $4y$ chia hết cho y^n thì $y \leq 1$ suy ra $n = 1$.

2. Để $(3x^7y^7 - 4x^6y^6 - 5x^3y^3) : 2x^ny^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $3x^7y^7 - 4x^6y^6 - 5x^3y^3$ phải chia hết cho x^ny^n . Để $5x^3y^3$ chia hết cho x^ny^n thì $n \leq 3$, suy ra $n \in \{1, 2, 3\}$.

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Không làm phép tính chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B hay không:

$$1. A = 2x^3y^2 - 3yx^2 + xy^5, B = 3xy; \quad \text{ĐS: chia hết}$$

$$2. A = \frac{3}{5}x^3y^2 - 6,3x^2y^3 + 2x^4y^2, B = 2x^2;$$

ĐS: chia hết

$$3. A = x^3y^4 + x^4y^6 + 3x^2y^3, B = 2x^3.$$

ĐS: không chia hết

Lời giải.

1. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho $3xy$.
2. Ta thấy A chia hết cho B vì mỗi hạng tử của A đều chia hết cho $2x^2$.
3. Ta thấy A không chia hết cho B vì hạng tử $3x^2y^3$ của A không chia hết cho x^3 .

□

Bài 2. Thực hiện phép chia

$$a) (6 \cdot 2^7 + 8^4 - 4^3) : 2^5;$$

ĐS: 150

$$b) (2 \cdot 3^9 + 5 \cdot 9^3 - 2 \cdot 27^2) : 3^5.$$

ĐS: 171

Lời giải.

1. $(6 \cdot 2^7 + 8^4 - 4^3) : 2^5 = (6 \cdot 2^7 + 2^{12} - 2^6) : 2^5 = 6 \cdot 2^7 : 2^5 + 2^{12} : 2^5 - 2^6 : 2^5 = 6 \cdot 2^2 + 2^7 - 2 = 24 + 128 - 2 = 150;$
2. $(2 \cdot 3^9 + 5 \cdot 9^3 - 2 \cdot 27^2) : 3^5 = (2 \cdot 3^9 + 5 \cdot 3^6 - 2 \cdot 3^6) : 3^5 = (2 \cdot 3^9 + 3 \cdot 3^6) : 3^5 = 2 \cdot 3^9 : 3^5 + 3 \cdot 3^6 : 3^5 = 2 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3 = 162 + 9 = 171.$

□

Bài 3. Làm tính chia:

$$1. (3x^5 - 5x^6 - 7x^3) : 5x^2;$$

ĐS: $\frac{3}{5}x^3 - x^4 - \frac{7}{5}x$

$$2. (5x^6y^7 + 4x^5y^6 + 3x^4y^5) : (-x^3y^2);$$

ĐS: $-5x^3y^5 - 4x^2y^4 - 3xy^3$

$$3. \left(\frac{5}{8}x^5y^8 - 5x^4y^2 + \frac{7}{9}x^7y^9\right) : \frac{5}{3}x^3y;$$

ĐS: $\frac{3}{8}x^2y^7 - 3xy + \frac{7}{15}x^4y^8$

$$4. (x^3y^4z^2 - 2x^4y^2z^4 + 7x^5y^2z^3) : x^2y^2z^2.$$

ĐS: $xy^2 - 2x^2z^2 + 7x^3z$ **Lời giải.**

$$1. (3x^5 - 5x^6 - 7x^3) : 5x^2 = 3x^5 : 5x^2 - 5x^6 : 5x^2 - 7x^3 : 5x^2 = \frac{3}{5}x^3 - x^4 - \frac{7}{5}x.$$

2.

$$\begin{aligned} (5x^6y^7 + 4x^5y^6 + 3x^4y^5) : (-x^3y^2) &= 5x^6y^7 : (-x^3y^2) + 4x^5y^6 : (-x^3y^2) + 3x^4y^5 : (-x^3y^2) \\ &= -5x^3y^5 - 4x^2y^4 - 3xy^3. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{8}x^5y^8 - 5x^4y^2 + \frac{7}{9}x^7y^9\right) : \frac{5}{3}x^3y &= \frac{5}{8}x^5y^8 : \frac{5}{3}x^3y - 5x^4y^2 : \frac{5}{3}x^3y + \frac{7}{9}x^7y^9 : \frac{5}{3}x^3y \\ &= \frac{3}{8}x^2y^7 - 3xy + \frac{7}{15}x^4y^8. \end{aligned}$$

$$4. (x^3y^4z^2 - 2x^4y^2z^4 + 7x^5y^2z^3) : x^2y^2z^2 = x^3y^4z^2 : x^2y^2z^2 - 2x^4y^2z^4 : x^2y^2z^2 + 7x^5y^2z^3 : x^2y^2z^2 = xy^2 - 2x^2z^2 + 7x^3z.$$



Bài 4. Làm tính chia

1. $[3(x - y)^6 - (y - x)^4 + 2(x - y)^3] : (y - x);$ **ĐS:** $-[3(x - y)^5 - (x - y)^3 + 2(x - y)^2]$
2. $[2(3x + 2y)^7 - 4(3x + 2y)^3 + 9(3x + 2y)^5] : (3x + 2y)^3;$ **ĐS:** $2(3x + 2y)^4 - 4 + 9(3x + 2y)^2$
3. $(4x - 2y)^3 : (2x - y);$ **ĐS:** $8(2x - y)^2$
4. $(x^3 - 27y^3) : (6y - 2x).$ **ĐS:** $-2(x^2 + 3xy + 9y^2)$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} & [3(x - y)^6 - (y - x)^4 + 2(x - y)^3] : (y - x) \\ &= -[3(x - y)^6 : (x - y) - (y - x)^4 : (x - y) + 2(x - y)^3 : (x - y)] \\ &= -[3(x - y)^5 - (x - y)^3 + 2(x - y)^2]. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & [2(3x + 2y)^7 - 4(3x + 2y)^3 + 9(3x + 2y)^5] : (3x + 2y)^3 \\ &= 2(3x + 2y)^7 : (3x + 2y)^3 - 4(3x + 2y)^3 : (3x + 2y)^3 + 9(3x + 2y)^5 : (3x + 2y)^3 \\ &= 2(3x + 2y)^4 - 4 + 9(3x + 2y)^2. \end{aligned}$$

$$3. (4x - 2y)^3 : (2x - y) = 8(2x - y)^3 : (2x - y) = 8(2x - y)^2;$$

$$4. (x^3 - 27y^3) : (6y - 2x) = (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) : [2(3y - x)] = -2(x^2 + 3xy + 9y^2).$$



Bài 5. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

1. $(x^2 - x^5 + 8x^6) : 2x^n;$ **ĐS:** $n \in \{1, 2\}$
2. $(4x^2y^3 - 3x^3y^2 - 2x^3y^3) : (-x^ny^n).$ **ĐS:** $n \in \{1, 2\}$

Lời giải.

1. Để $(x^2 - x^5 + 8x^6) : 2x^n$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $x^2 - x^5 + 8x^6$ phải chia hết cho x^n .
Để x^2 chia hết cho x^n thì $n \leq 2$ suy ra $n \in \{1, 2\}$.
2. Để $(4x^2y^3 - 3x^3y^2 - 2x^3y^3) : (-x^ny^n)$ là phép chia hết thì từng hạng tử của $4x^2y^3 - 3x^3y^2 - 2x^3y^3$ phải chia hết cho x^ny^n . Để $4x^2y^3$ chia hết cho x^ny^n thì $n \leq 2$, suy ra $n \in \{1, 2\}$.



§12 Chia đa thức một biến đã sắp xếp

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phép chia hết

Phép chia có số dư bằng 0 là phép chia hết.

Muốn chia đa thức A cho đa thức B (A và B đều là các đa thức một biến đã sắp xếp), ta làm như sau:

- ☒ Đặt phép chia.
- ☒ Chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia.
- ☒ Nhân thương vừa tìm được với đa thức chia rồi lấy đa thức bị chia trừ đi tích đó nhận được một hiệu. Hiệu vừa tìm được gọi là dư thứ nhất.
- ☒ Chia hạng tử bậc cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia.
- ☒ Nhân thương vừa tìm được với đa thức chia rồi lấy dư thứ nhất trừ đi tích đó nhận được dư thứ hai.
- ☒ Cứ tiếp tục như vậy đến khi được dư bằng 0, ta được thương cần tìm.

1.2 Phép chia có dư

Khác với phép chia hết, phép chia có dư khác 0 là phép chia có dư.

Chia hai đa thức một biến đã sắp xếp với phép chia có dư ta thực hiện tương tự như phép chia hết, đến khi đa thức dư có bậc nhỏ hơn đa thức chia thì dừng lại. Đa thức đó gọi là dư.

⚠ 7. Đối với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B \cdot Q + R$, trong đó R bằng 0 hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B (R được gọi là dư trong phép chia A cho B).

Khi $R = 0$, phép chia A cho B là phép chia hết.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 47. Thực hiện phép tính chia

Nội dung phương pháp: Xem phần Tóm tắt lý thuyết.

BAI TAP MAU

Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến rồi thực hiện phép chia:

a) $(6x + x^3 + 4 + 4x^2) : (x + 2);$

b) $(x^2 + x^4 + 1) : (x^2 - x + 1);$

c) $(x + x^3 - 3x^2 - 3) : (x - 3);$

d) $(2x - 5x^3 + 2x^4 + 2x^2 - 1) : (x^2 - x - 1);$

e) $(x^4 - 14 - x) : (x - 2);$

f) $(x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 + 1).$

 Lời giải.

a) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

b) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 4x^2 + 6x + 4 \\
 -(x^3 + 2x^2) \\
 \hline
 2x^2 + 6x + 4 \\
 -(2x^2 + 4x) \\
 \hline
 2x + 4 \\
 -(2x + 4) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x + 2 \\
 \hline
 x^2 + 2x + 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad + x^2 \quad + 1 \\
 -(x^4 - x^3 + x^2) \\
 \hline
 x^3 \quad + 1 \\
 -(x^3 - x^2 + x) \\
 \hline
 x^2 - x + 1 \\
 -(x^2 - x + 1) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x^2 - x + 1 \\
 \hline
 x^2 + x + 1
 \end{array}$$

c) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
 -(x^3 - 3x^2) \\
 \hline
 x - 3 \\
 -(x - 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x - 3 \\
 \hline
 x^2 + 1
 \end{array}$$

d) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \\
 -(2x^4 - 2x^3 - 2x^2) \\
 \hline
 -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \\
 -(-3x^3 + 3x^2 + 3x) \\
 \hline
 x^2 - x - 1 \\
 -(x^2 - x - 1) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 - x - 1 \\
 \hline
 2x^2 - 3x + 1
 \end{array}$$

e) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x - 14 \\
 -(x^4 - 2x^3) \\
 \hline
 2x^3 - x - 14 \\
 -(2x^3 - 4x^2) \\
 \hline
 4x^2 - x - 14 \\
 -(4x^2 - 8x) \\
 \hline
 7x - 14 \\
 -(7x - 14) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

f) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 + 1 \\
 x - 2 \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 + 4x + 7 \\
 -(x^3 + x) \\
 \hline
 2x^2 - x + 1 \\
 -(2x^2 + 2) \\
 \hline
 -x - 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 1 \\
 \hline
 x + 2
 \end{array}$$

□

Ví dụ 2. Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến rồi thực hiện phép chia:

- a) $(-2x + 2x^3 - 3 - 5x^2) : (x - 3);$ b) $(-x^3 + 3x + x^4 + x^2) : (x^2 - 2x + 3);$
 c) $(2 + x + 8x^3 - 2x^2) : (2x + 1);$ d) $(22x^2 + 5x^3 + 10 - 13x) : (5x^2 - 3x + 2);$
 e) $(-x^2 + 6x^3 - 26x + 21) : (x - 1);$ f) $(8x - 5 - 3x^3 - 3x^2 + x^4) : (x - 1).$

 Lời giải.

a) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: b) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$ \begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline x^2 - 2x - 3 \\ -(x^2 - 3x) \\ \hline x - 3 \\ -(x - 3) \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^4 - x^3 + x^2 + 3x \\ -(x^4 - 2x^3 + 3x^2) \\ \hline x^3 - 2x^2 + 3x \\ -(x^3 - 2x^2 + 3x) \\ \hline 0 \end{array} $
--	---

c) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: d) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$ \begin{array}{r} 8x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ -(8x^3 + 4x^2) \\ \hline -6x^2 + x + 2 \\ -(-6x^2 - 3x) \\ \hline 4x + 2 \\ -(4x + 2) \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 5x^3 + 22x^2 - 13x + 10 \\ -(5x^3 - 3x^2 + 2x) \\ \hline 25x^2 - 15x + 10 \\ -(25x^2 - 15x + 10) \\ \hline 0 \end{array} $
--	---

e) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: f) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$ \begin{array}{r} 6x^3 - x^2 - 26x + 21 \\ -(6x^3 - 9x^2) \\ \hline 8x^2 - 26x + 21 \\ -(8x^2 - 12x) \\ \hline -14x + 21 \\ -(-14x + 21) \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2x - 3 \\ \hline 3x^2 + 4x - 7 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x - 5 \\ -(x^4 - x^3) \\ \hline -2x^3 - 3x^2 + 8x - 5 \\ -(-2x^3 + 2x^2) \\ \hline -5x^2 + 8x - 5 \\ -(-5x^2 + 5x) \\ \hline 3x - 5 \\ -(3x - 3) \\ \hline -2 \end{array} $
--	---	---

□

Ví dụ 3. Cho hai đa thức $A = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 4$ và $B = x^2 - 2x + 3$. Tìm thương Q và dư R sao cho $A = B \cdot Q + R$. **ĐS:** $Q = x^2 + 5x + 9$ và dư là $R = 2x - 31$

 **Lời giải.**

Thực hiện phép chia ta được

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 4 \\
 -(x^4 - 2x^3 + 3x^2) \\
 \hline
 5x^3 - x^2 - x - 4 \\
 -(5x^3 - 10x^2 + 15x) \\
 \hline
 9x^2 - 16x - 4 \\
 -(9x^2 - 18x + 27) \\
 \hline
 2x - 31
 \end{array}$$

Suy ra thương $Q = x^2 + 5x + 9$ và dư là $R = 2x - 31$. □

Ví dụ 4. Cho hai đa thức $A = x^3 + x + 1$ và $B = x^2 + x + 1$. Tìm thương Q và dư R sao cho $A = B \cdot Q + R$. **ĐS:** $Q = x - 1$ và dư là $R = x + 2$

 Lời giải.

Thực hiện phép chia ta được

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & + x + 1 \\
 -(x^3 + x^2 + x) & \\
 \hline
 -x^2 & + 1 \\
 -(-x^2 - x - 1) & \\
 \hline
 x & + 2
 \end{array}$$

Suy ra thương $Q = x - 1$ và dư là $R = x + 2$. □

 **Ví dụ 5.** Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chia:

- a) $(4x^2 + 4xy + y^2) : (2x + y)$; **ĐS:** $2x + y$ b) $(27x^3 + 8) : (3x + 2)$; **ĐS:** $9x^2 - 6x + 4$
 c) $(x^4 - 2x^2y + y^2) : (y - x^2)$. **ĐS:** $y - x^2$

 Lời giải.

1. $(4x^2 + 4xy + y^2) : (2x + y) = (2x + y)^2 : (2x + y) = 2x + y$;
 2. $(27x^3 + 8) : (3x + 2) = [(3x)^3 + 2^3] : (3x + 2) = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) : (3x + 2) = 9x^2 - 6x + 4$;
 3. $(x^4 - 2x^2y + y^2) : (y - x^2) = (x^2 - y)^2 : (y - x^2) = (y - x^2)^2 : (y - x^2) = y - x^2$.
-

 **Ví dụ 6.** Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chia:

- a) $(x^2 + 6xy + 9y^2) : (x + 3y)$; **ĐS:** $x + 3y$ b) $(64y^3 - 27) : (4y - 3)$; **ĐS:** $16y^2 + 12y + 9$
 c) $(x^2 - 2xy^2 + y^4) : (x - y^2)$. **ĐS:** $x - y^2$

 Lời giải.

1. $(x^2 + 6xy + 9y^2) : (x + 3y) = (x + 3y)^2 : (x + 3y) = x + 3y$;
 2. $(64y^3 - 27) : (4y - 3) = [(4y)^3 - 3^3] : (4y - 3) = (4y - 3)(16y^2 + 12y + 9) : (4y - 3) = 16y^2 + 12y + 9$;
 3. $(x^2 - 2xy^2 + y^4) : (x - y^2) = (x - y^2)^2 : (x - y^2) = x - y^2$.
-

 Dạng 48. Tìm giá trị chưa biết thỏa mãn yêu cầu bài toán

Nội dung phương pháp: Dựa vào tính chia hết, chia có dư của đa thức để thực hiện.

 BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm a, b để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ với:

1. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b, g(x) = x^2 - x - 2;$ **ĐS:** $a = 1, b = -30$

2. $f(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a, g(x) = x^2 - x + 5.$ **ĐS:** $a = 5$

Lời giải.

1. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b \\
 -(x^4 - x^3 - 2x^2) \\
 \hline
 -8x^3 + 23x^2 + ax + b \\
 -(-8x^3 + 8x^2 + 16x) \\
 \hline
 15x^2 + (a - 16)x + b \\
 -(15x^2 - 15x - 30) \\
 \hline
 (a - 1)x + b + 30
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^2 - x - 2 \\
 \hline
 x^2 - 8x + 15
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $(a - 1)x + b + 30$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -30 \end{cases}$

2. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a \\
 -(x^4 - x^3 + 5x^2) \\
 \hline
 x^2 - x + a \\
 -(x^2 - x + 5) \\
 \hline
 a - 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^2 - x + 5 \\
 \hline
 x^2 + 1
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $a - 5$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5$.

□

Ví dụ 2. Tìm a để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ với:

1. $f(x) = 3x^3 + 10x^2 - 5 + a, g(x) = 3x + 1;$ **ĐS:** $a = 4$

2. $f(x) = x^3 - 3x + a, g(x) = x^2 - 2x + 1.$ **ĐS:** $a = 2$

Lời giải.

1. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 + 10x^2 & -5 + a \\
 -(3x^3 + x^2) & \\
 \hline
 9x^2 & -5 + a \\
 -(9x^2 + 3x) & \\
 \hline
 & -3x - 5 + a \\
 -(-3x - 1) & \\
 \hline
 & -4 + a
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $-4 + a$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $-4 + a = 0 \Leftrightarrow a = 4$.

2. Thực hiện phép chia ta được

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & -3x + a \\
 -(x^3 - 2x^2 + x) & \\
 \hline
 2x^2 - 4x + a & \\
 -(2x^2 - 4x + 2) & \\
 \hline
 & a - 2
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $a - 2$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

□

Ví dụ 3. Tìm các số nguyên x để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

1. $x^2 + 7$ chia hết cho $x - 2$;

ĐS: Tập các giá trị của x là $\{-9, 1, 3, 13\}$

2. $x^3 + 2x^2 + 15$ chia hết cho $x + 3$.
 $\{-9, -6, -5, -4, -2, 0, 1, 3, \}$

ĐS: Tập các giá trị của x là

Lời giải.

1. Ta có phép chia $\frac{x^2 + 7}{x - 2} = \frac{x^2 - 4 + 11}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} + \frac{11}{x - 2} = x + 2 + \frac{11}{x - 2}$.

Với x nguyên, $x^2 + 7$ chia hết cho $x - 2$ khi $x - 2$ là ước của 11.

Ta có bảng giá trị:

$x - 2$	11	1	-1	-11
x	13	3	1	-9

Vậy tập các giá trị của x là $\{-9, 1, 3, 13\}$.

2. Ta có phép chia

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 2x^2 + 15}{x + 3} &= \frac{(x^3 + 3x^2) - (x^2 + 3x) + (3x + 9) + 6}{x + 3} \\ &= \frac{x^2(x + 3)}{x + 3} - \frac{x(x + 3)}{x + 3} + \frac{3(x + 3)}{x + 3} + \frac{6}{x + 3} = x^2 - x + 3 + \frac{6}{x + 3}.\end{aligned}$$

Với x nguyên, $x^3 + 2x^2 + 15$ chia hết cho $x + 3$ khi $x + 3$ là ước của 6.

Ta có bảng giá trị:

$x + 3$	6	1	-1	-6	-3	-2	2	3
x	3	-2	-4	-9	-6	-5	1	0

Vậy tập các giá trị của x là $\{-9, -6, -5, -4, -2, 0, 1, 3\}$.

□

Ví dụ 4. Tìm các số nguyên x để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

1. $x^3 + 4x^2 - 2x + 4$ chia hết cho $x - 1$; **ĐS:** Tập các giá trị của x là $\{-8, -2, 2, 8\}$

2. $x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 10$ chia hết cho $x^2 + 1$. **ĐS:** Tập các giá trị của x là $\{-2, 0, 2\}$

Lời giải.

a) Ta có phép chia
$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 4}{x - 1} = \frac{(x^3 - x^2) + 5(x^2 - x) + 3(x - 1) + 7}{x - 1} = x^2 + 5x + 3 + \frac{7}{x - 1}.$$

Với x nguyên, $x^3 + 4x^2 - 2x + 4$ chia hết cho $x - 1$ khi $x - 1$ là ước của 7.

Ta có bảng giá trị:

$x - 1$	7	1	-1	-7
x	8	2	-2	-8

Vậy tập các giá trị của x là $\{-8, -2, 2, 8\}$.

b) Ta có phép chia

$$\begin{aligned}\frac{x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 10}{x^2 + 1} &= \frac{(x^5 + x^3) - 3(x^4 + x^2) + 3(x^3 + x) + 5(x^2 + 1) + 5}{x^2 + 1} \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x + 5 + \frac{5}{x^2 + 1}.\end{aligned}$$

Với x nguyên, $x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 10$ chia hết cho $x^2 + 1$ khi $x^2 + 1$ là ước của 5.

Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên ta có 2 trường hợp:

TH1. $x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

TH2. $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy tập các giá trị của x là $\{-2, 0, 2\}$.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến rồi thực hiện phép chia:

- a) $(x^3 - 3x^2) : (x - 3)$; b) $(2x^2 + 2x - 4) : (x + 2)$;
 c) $(12 - x^3 - x^2) : (x - 2)$; d) $(6x - 5x^2 - 15 + 2x^3) : (2x - 5)$;
 e) $(6x - 5x^2 - 15 + 2x^3) : (2x - 5)$; f) $(5x^2 + 15 - 3x^3 - 9x) : (5 - 3x)$;
 g) $(x^3 + 2x^4 - 5x^2 - 3 - 3x) : (x^2 - 3)$; h) $(x^3 + x^5 + x^2 + 1) : (x^3 + 1)$;
 i) $(3 - 2x + 2x^3 + 5x^2) : (2x^2 - x + 1)$.

Lời giải.

- a) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: b) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 3 \\ \hline x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x - 4 \\ -(2x^2 + 4x) \\ \hline -2x - 4 \\ -(-2x - 4) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x + 2 \\ \hline 2x - 2 \end{array}$$

- c) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được: d) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r} -x^3 - x^2 + 12 \\ -(-x^3 + 2x^2) \\ \hline -3x^2 + 12 \\ -(-3x^2 + 6x) \\ \hline -6x + 12 \\ -(-6x + 12) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 2 \\ \hline -x^2 - 3x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + 6x - 15 \\ -(2x^3 - 5x^2) \\ \hline 6x - 15 \\ -(6x - 15) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x - 5 \\ \hline x^2 + 3 \end{array}$$

e) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 -3x^3 + 5x^2 - 9x + 15 \\
 -(-3x^3 + 5x^2) \\
 \hline
 -9x + 15 \\
 -(-9x + 15) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 -3x + 5 \\
 \hline
 x^2 + 3
 \end{array}$$

f) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x - 3 \\
 -(2x^4 - 6x^2) \\
 \hline
 x^3 + x^2 - 3x - 3 \\
 -(x^3 - 3x) \\
 \hline
 x^2 - 3 \\
 -(x^2 - 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x^2 - 3 \\
 \hline
 2x^2 + x + 1
 \end{array}$$

g) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 x^5 + x^3 + x^2 + 1 \\
 -(x^5 + x^2) \\
 \hline
 x^3 + 1 \\
 -(x^3 + 1) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x^3 + 1 \\
 \hline
 x^2 + 1
 \end{array}$$

h) Sắp xếp các đa thức rồi đặt tính ta được:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3 \\
 -(2x^3 - x^2 + x) \\
 \hline
 6x^2 - 3x + 3 \\
 -(6x^2 - 3x + 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2x^2 - x + 1 \\
 \hline
 x + 3
 \end{array}$$

□

Bài 2. Cho hai đa thức $A = 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 8x - 5$ và $B = 3x^2 - 2x + 3$. Tìm thương Q và dư R sao cho $A = B \cdot Q + R$.

ĐS: $Q = x^2 - 2x - 6$ và dư là $R = 2x + 13$

 **Lời giải.**

Thực hiện phép chia ta được

Giáo viên:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 8x - 5 & 3x^2 - 2x + 3 \\
 -(3x^4 - 2x^3 + 3x^2) & \\
 \hline
 -6x^3 - 14x^2 + 8x - 5 & \\
 -(-6x^3 + 4x^2 - 6x) & \\
 \hline
 -18x^2 + 14x - 5 & \\
 -(-18x^2 + 12x - 18) & \\
 \hline
 2x + 13 &
 \end{array}$$

Suy ra thương $Q = x^2 - 2x - 6$ và dư là $R = 2x + 13$. □

Bài 3. Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chia:

1. $(4x^2 + 12xy + 9y^2) : (2x + 3y);$ **ĐS:** $2x + 3y$
2. $(125x^3 + 27) : (5x + 3);$ **ĐS:** $25x^2 - 15x + 9$
3. $(9x^4 - 12x^2y + 4y^2) : (2y - 3x^2).$ **ĐS:** $2y - 3x^2$

Lời giải.

1. $(4x^2 + 12xy + 9y^2) : (2x + 3y) = (2x + 3y)^2 : (2x + 3y) = 2x + 3y;$
2. $(125x^3 + 27) : (5x + 3) = [(5x)^3 + 3^3] : (5x + 3) = (5x + 3)(25x^2 - 15x + 9) : (5x + 3) = 25x^2 - 15x + 9;$
3. $(9x^4 - 12x^2y + 4y^2) : (2y - 3x^2) = (3x^2 - 2y)^2 : (2y - 3x^2) = (2y - 3x^2)^2 : (2y - 3x^2) = 2y - 3x^2.$

□

Bài 4. Tìm a, b để đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ với:

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b, g(x) = x^2 - 3x + 4;$ **ĐS:** $a = 1, b = 4$
2. $f(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 + ax + b, g(x) = x^2 + 2x + 3.$ **ĐS:** $a = -23, b = -21$

Lời giải.

1. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x^2 + ax + b & x^2 - 3x + 4 \\
 -(x^3 - 3x^2 + 4x) & \\
 \hline
 x^2 + (a - 4)x + b & \\
 -(x^2 - 3x + 4) & \\
 \hline
 (a - 1)x + b - 4 &
 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $(a - 1)x + b - 4$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$.

2. Thực hiện phép chia đa thức ta được:

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - 10x^2 + ax + b \\ -(x^4 + 2x^3 + 3x^2) \\ \hline -3x^3 - 13x^2 + ax + b \\ -(-3x^3 - 6x^2 - 9x) \\ \hline -7x^2 + (a + 9)x + b \\ -(-7x^2 - 14x - 21) \\ \hline (a + 23)x + b + 21 \end{array}$$

Suy ra phép chia có dư là $(a + 23)x + b + 21$.

Đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ khi dư là 0, hay $\begin{cases} a + 23 = 0 \\ b + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -23 \\ b = -21 \end{cases}$.

□

Bài 5. Tìm các số nguyên x để mỗi phép chia sau là phép chia hết:

1. $2x^2 + 3x - 4$ chia hết cho $2x + 1$; **ĐS:** Tập các giá trị của x là $\{-3, -1, 0, 2\}$

2. $3x^3 + x^2 - 12$ chia hết cho $x - 2$. **ĐS:** Tập các giá trị của x là $\{-14, -6, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 10, 18\}$

Lời giải.

1. Ta có phép chia $\frac{2x^2 + 3x - 4}{2x + 1} = \frac{(2x^2 + x) + (2x + 1) - 5}{2x + 1} = x + 1 - \frac{5}{2x + 1}$.

Với x nguyên, $2x^2 + 3x - 4$ chia hết cho $2x + 1$ khi $2x + 1$ là ước của 5.

Ta có bảng giá trị:

$2x + 1$	5	1	-1	-5
x	2	0	-1	-3

Vậy tập các giá trị của x là $\{-3, -1, 0, 2\}$.

2. Ta có phép chia $\frac{3x^3 + x^2 - 12}{x - 2} = \frac{(3x^3 - 6x^2) + (7x^2 - 14x) + (14x - 28) + 16}{x - 2} = 3x^2 + 7x + 14 + \frac{16}{x - 2}$.

Với x nguyên, $3x^3 + x^2 - 12$ chia hết cho $x - 2$ khi $x - 2$ là ước của 16.

Ta có bảng giá trị:

$x - 2$	16	8	4	2	1	-1	-2	-4	-8	-16
x	18	10	6	4	3	1	0	-2	-6	-14

Vậy tập các giá trị của x là $\{-14, -6, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 10, 18\}$.

□

§13 Ôn tập chương 1

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem lại phần Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 12.

2 Bài tập và các dạng toán

 **Ví dụ 1.** Rút gọn biểu thức

$$1. A = (x + 3)(x + 2) - (x + 1)(x + 4); \quad \text{ĐS: } 2$$

$$2. B = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^2(x - 1); \quad \text{ĐS: } x^2 + 8$$

$$3. C = (x + y)^2 - 2(x - y)(x + y) + (x - y)^2. \quad \text{ĐS: } 4y^2$$

 **Lời giải.**

$$\text{a) } A = x^2 + 5x + 6 - x^2 - 5x - 4 = 2.$$

$$\text{b) } B = x^3 + 8 - x^3 + x^2 = x^2 + 8.$$

$$\text{c) } C = (x + y - x + y)^2 = 4y^2.$$

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn biểu thức

$$1. M = (x + 5)(x - 7) - (x - 5)(x + 3); \quad \text{ĐS: } -20$$

$$2. N = (x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6x^2; \quad \text{ĐS: } 2$$

$$3. P = (x + 2y)(x - 6y) - (x - 2y)^2. \quad \text{ĐS: } -16y^2$$

 **Lời giải.**

$$1. M = x^2 - 2x - 35 - x^2 + 2x + 15 = -20.$$

$$2. N = 2(x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 + x^2 - 2x + 1) - 6x^2 = 2(3x^2 + 1) - 6x^2 = 2.$$

$$3. P = x^2 - 4xy - 12y^2 - x^2 + 4xy - 4y^2 = -16y^2.$$

□

 **Ví dụ 3.** Tính nhanh giá trị của biểu thức sau

$$1. A = x^2 + 16y^2 - 8xy \text{ tại } x = 16 \text{ và } y = 3; \quad \text{ĐS: } 16$$

2. $B = x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$ tại $x = -12$ và $y = 8$.

ĐS: 64

 **Lời giải.**

1. $A = x^2 + 16y^2 - 8xy = (x - 4y)^2$. Với $x = 16$ và $y = 3$ thì $A = (16 - 12)^2 = 16$.

2. $B = x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2 = (x + 2y)^3$. Với $x = -12$ và $y = 8$ thì $B = (-12 + 16)^3 = 64$.

□

 **Ví dụ 4.** Tính nhanh giá trị của biểu thức sau

1. $A = x^2 + 9y^2 - 6xy$ tại $x = 8$ và $y = -2$.

ĐS: 196

2. $B = x^3 + 27y^3 + 9x^2y + 27xy^2$ tại $x = -18$ và $y = 5$.

ĐS: 27

 **Lời giải.**

1. $A = x^2 + 9y^2 - 6xy = (x - 3y)^2$. Với $x = 8$ và $y = -2$ thì $A = (8 + 6)^2 = 196$.

2. $B = x^3 + 27y^3 + 9x^2y + 27xy^2 = (x + 3y)^3$. Với $x = -18$ và $y = 5$ thì $B = (-18 + 15)^3 = -27$.

□

 **Ví dụ 5.** Tính giá trị của biểu thức

1. $M = (3x - 1)^2 + (2x - 3)^2 - (6x - 2)(2x - 3)$ tại $x = 18$;

ĐS: 400

2. $N = 4(x - y)^2 + 4(x - y)(y - 1) + y^2 - 2y + 1$ tại $x = 3$ và $y = 5$.

ĐS: 0

 **Lời giải.**

1. $M = (3x - 1)^2 + (2x - 3)^2 - (6x - 2)(2x - 3) = (3x - 1 - 2x + 3)^2 = (x + 2)^2$. Với $x = 18$ thì

$$M = (18 + 2)^2 = 20^2 = 400.$$

2. $N = 4(x - y)^2 + 4(x - y)(y - 1) + y^2 - 2y + 1 = (2x - 2y + y - 1)^2 = (2x - y - 1)^2$. Với $x = 3$ và $y = 5$ thì $N = (6 - 5 - 1)^2 = 0$.

□

 **Ví dụ 6.** Tính giá trị của biểu thức

1. $A = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - x(8x^2 - x)$ tại $x = 10$;

ĐS: 99

2. $B = (2x - y^2)(2x + y^2) - (y^2 - 2x)^2 - 4xy^2$ tại $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

ĐS: -32

 **Lời giải.**

1. $A = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - x(8x^2 - x) = 8x^3 - 1 - 8x^3 + x^2 = x^2 - 1$.

Với $x = 10$ thì $A = 10^2 - 1 = 99$.

2. $B = (2x - y^2)(2x + y^2) - (y^2 - 2x)^2 - 4xy^2 = 4x^2 - y^4 - y^4 + 4xy^2 - 4x^2 - 4xy^2 = -2y^4$.

Với $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$ thì $B = -2 \cdot 2^4 = -32$.

□

Ví dụ 7. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$A = (x - 1)^3 + (x + 1)^3 + 2(2 - x)(x^2 + 2x + 4) - 6x.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= (x - 1)^3 + (x + 1)^3 + 2(2 - x)(x^2 + 2x + 4) - 6x \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(8 - x^3) - 6x \\ &= 2x^3 + 16 - 2x^3 \\ &= 16. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x . □

Ví dụ 8. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$B = (x + 1)^3 + x \cdot (2 - x)(x + 2) - (3x + 4)(x + 1).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= (x + 1)^3 + x \cdot (2 - x)(x + 2) - (3x + 4)(x + 1) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x(4 - x^2) - 3x^2 - 7x - 4 \\ &= x^3 - 4x - 3 + 4x - x^3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x . □

Ví dụ 9. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $4x^2 + 1 - 4x$; | ĐS: $(2x - 1)^2$ |
| 2. $x^2 - y^2 + 2x - 2y$; | ĐS: $(x - y)(x + y + 2)$ |
| 3. $x^2 - y^2 + 4y - 4$; | ĐS: $(x - y + 2)(x + y - 2)$ |
| 4. $(x^2 - 2xy)^2 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + y^4$. | ĐS: $(x + y)^4$ |

Lời giải.

1. $4x^2 + 1 - 4x = (2x - 1)^2$.
2. $x^2 - y^2 + 2x - 2y = (x + 1)^2 - (y + 1)^2 = (x - y)(x + y + 2)$.
3. $x^2 - y^2 + 4y - 4 = x^2 - (y - 2)^2 = (x - y + 2)(x + y - 2)$.
4. $(x^2 - 2xy)^2 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + y^4 = (x^2 + 2xy + y^2)^2 = (x + y)^4$.

Ví dụ 10. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $x^3 - 2x^2 - 2x + 4$; | ĐS: $(x - 2)(x^2 - 2)$ |
|----------------------------|-------------------------------|

2. $x^2 - 4y^2 + 3x - 6y$;

ĐS: $(x - 2y)(x + 2y + 3)$

3. $4x^2 + 4x + 1 - y^2$;

ĐS: $(2x - y + 1)(2x + y + 1)$

4. $x^3 - y^3 - x^2 + y^2$.

ĐS: $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y)$

 Lời giải.

1. $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = x^2(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 2)$.

2. $x^2 - 4y^2 + 3x - 6y = (x - 2y)(x + 2y) + 3(x - 2y) = (x - 2y)(x + 2y + 3)$.

3. $4x^2 + 4x + 1 - y^2 = (2x + 1)^2 - y^2 = (2x - y + 1)(2x + y + 1)$.

4. $x^3 - y^3 - x^2 + y^2 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)(x + y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y)$. □

 Ví dụ 11. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1. $x^2 - 4x - 5$;

ĐS: $(x + 1)(x - 5)$

2. $x^2 + 3x + 2$;

ĐS: $(x + 1)(x + 2)$

3. $x^4 + 4y^4$;

ĐS: $(x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$

4. $(x^2 - 1)^2 - 2y(x + 1)(x - 1) + y^2$.

ĐS: $(x^2 - 1 - y)^2$

 Lời giải.

1. $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$.

2. $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$.

3. $x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$.

4. $(x^2 - 1)^2 - 2y(x + 1)(x - 1) + y^2 = (x^2 - 1 - y)^2$. □

 Ví dụ 12. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1. $x^2 - 3x - 4$;

ĐS: $(x + 1)(x - 4)$

2. $x^2 - x - 6$;

ĐS: $(x + 2)(x - 3)$

3. $x^4 + 4$;

ĐS: $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

4. $x^3 + 8y^3 - 3x^2y - 6xy^2$.

ĐS: $(x + 2y)(x - y)(x - 4y)$

 Lời giải.

1. $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$.

2. $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$.

3. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

4. $x^3 + 8y^3 - 3x^2y - 6xy^2 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 3xy(x + 2y) = (x + 2y)(x^2 - 5xy + 4y^2) = (x + 2y)(x - y)(x - 4y)$. □

 **Ví dụ 13.** Tìm x , biết

1. $3x(4x^2 - 1) = 0$;

ĐS: $x \in \left\{0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

2. $(x + 5)^2 - (x + 5)(x - 2) = 0$;

ĐS: $x = -5$

3. $x^3 + 7x^2 + 6x = 0$;

ĐS: $x \in \{0; -1; -6\}$

4. $(x + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$.

ĐS: $x \in \left\{-\frac{4}{3}; -2\right\}$

 **Lời giải.**

$$1. 3x(4x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x(2x - 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$2. (x + 5)^2 - (x + 5)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x + 5 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

$$3. x^3 + 7x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -6 \end{cases}.$$

$$4. (x + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x + 4)(-x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4 = 0 \\ -x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = -2 \end{cases}.$$

□

 **Ví dụ 14.** Tìm x , biết

1. $4x(9x^2 - 1) = 0$;

ĐS: $x \in \left\{0; \pm\frac{1}{3}\right\}$

2. $(x + 2)^2 - (x + 2)(x - 3) = 0$;

ĐS: $x = -2$

3. $2x^3 - 4x^2 + 2x = 0$;

ĐS: $x = 0; x = 1$

4. $(x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = 0$.

ĐS: $x = 0; x = -2$

 **Lời giải.**

$$1. 4x(9x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x(3x - 1)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 3x - 1 = 0 \\ 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$2. (x + 2)^2 - (x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 2 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$3. 2x^3 - 4x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$4. (x-1)^2 - (2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(-x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

□

 **Ví dụ 15.** Làm tính chia

$$1. (x^2 - 11x + 10) : (x - 1); \quad \text{ĐS: } x - 10$$

$$2. (2x^3 - 2x^2 + x - 1) : (2x^2 + 1); \quad \text{ĐS: } x - 1$$

$$3. (x^2 - 4y^2 + 6x + 9) : (x + 2y + 3). \quad \text{ĐS: } x - 2y + 3$$

 **Lời giải.**

$$1. (x^2 - 11x + 10) : (x - 1) = x - 10.$$

$$2. (2x^3 - 2x^2 + x - 1) : (2x^2 + 1) = x - 1.$$

$$3. (x^2 - 4y^2 + 6x + 9) : (x + 2y + 3) = x - 2y + 3.$$

□

 **Ví dụ 16.** Làm tính chia

$$1. (x^2 + 5x + 4) : (x + 1); \quad \text{ĐS: } x + 4$$

$$2. (3x^3 - 3x^2 + x - 1) : (3x^2 + 1); \quad \text{ĐS: } x - 1$$

$$3. (x^2 - 9y^2 + 10x + 25) : (x + 3y + 5). \quad \text{ĐS: } x - 3y + 5$$

 **Lời giải.**

$$1. (x^2 + 5x + 4) : (x + 1) = x + 4.$$

$$2. (3x^3 - 3x^2 + x - 1) : (3x^2 + 1) = x - 1.$$

$$3. (x^2 - 9y^2 + 10x + 25) : (x + 3y + 5) = x - 3y + 5.$$

□

 **Ví dụ 17.** Chứng minh rằng

a) $4x^2 - 4xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x và y ; b) $-9x^2 + 3x - 1 < 0$ với mọi số thực x .

 **Lời giải.**

1. Vì $4x^2 - 4xy + y^2 + 1 = (2x - y)^2 + 1 > 0$ nên $4x^2 - 4xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x và y .

2. Vì $-9x^2 + 3x - 1 = -\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$ nên $-9x^2 + 3x - 1 < 0$ với mọi số thực x .

□

 **Ví dụ 18.** Chứng minh rằng

- a) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x và y ; b) $-25x^2 + 5x - 1 < 0$ với mọi số thực x .

 **Lời giải.**

1. Vì $x^2 - 6xy + 9y^2 + 1 = (x - 3y)^2 + 1 > 0$ nên $x^2 - 6xy + 9y^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x và y ;
 2. Vì $-25x^2 + 5x - 1 = -\left(5x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$ nên $-25x^2 + 5x - 1 < 0$ với mọi số thực x .

□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Thực hiện phép tính

- a) $\frac{1}{2}x^2(2x^3 - 4x^2 + 3)$; **ĐS:** $x^5 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2$ b) $2y(xy - 1)(xy + 1)$; **ĐS:** $2x^2y^3 - 2y$
 c) $(x + 2)(x^2 - x + 1)$; **ĐS:** $x^3 + x^2 - x + 2$ d) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$. **ĐS:** $x^3 - 8y^3$

 **Lời giải.**

- a) $\frac{1}{2}x^2(2x^3 - 4x^2 + 3) = x^5 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2$. b) $2y(xy - 1)(xy + 1) = 2y(x^2y^2 - 1) = 2x^2y^3 - 2y$.
 c) $(x + 2)(x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - x + 2$. d) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = x^3 - 8y^3$.

□

 **Bài 2.** Tính nhanh giá trị của biểu thức

1. $A = (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x^2 - 1)$ tại $x = 7$; **ĐS:** 6
 2. $B = x^2 + 25y^2 + 10xy$ tại $x = -20$ và $y = 2$; **ĐS:** 100
 3. $C = x^3 - 64y^3 - 12x^2y + 48xy^2$ tại $x = 25$ và $y = 6$. **ĐS:** 1

 **Lời giải.**

1. Ta có $A = (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x^2 - 1) = x^3 - 1 - x^3 + x = x - 1$. Với $x = 7$ thì $A = 7 - 1 = 6$.
 2. Ta có $B = x^2 + 25y^2 + 10xy = (x + 5y)^2$. Với $x = -20$ và $y = 2$ thì $B = (-20 + 10)^2 = 100$.
 3. Ta có $C = x^3 - 64y^3 - 12x^2y + 48xy^2 = (x - 4y)^3$. Với $x = 25$ và $y = 6$ thì $C = (25 - 24)^3 = 1$.

□

 **Bài 3.** Phân tích đa thức thành nhân tử

1. $(x - 7)^2 + x^2 - 49$; **ĐS:** $2x(x - 7)$
 2. $y + x^2y + 3x^2 + 3$; **ĐS:** $(x^2 + 1)(y + 3)$

$$3. 2y^3 - 6y^2 + 12y - 8.$$

$$\text{ĐS: } 2(y-1)(y^2 - 2y + 4)$$

 **Lời giải.**

$$1. (x-7)^2 + x^2 - 49 = (x-7)^2 + (x-7)(x+7) = (x-7)(x-7+x+7) = 2x(x-7).$$

$$2. y + x^2y + 3x^2 + 3 = y(1+x^2) + 3(x^2+1) = (x^2+1)(y+3).$$

$$3. 2y^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 2(y^3 - 3y^2 + 6y - 4) = 2(y^3 - y^2 - 2y^2 + 2y + 4y - 4) = 2(y-1)(y^2 - 2y + 4).$$

□

 **Bài 4.** Tìm x , biết

$$1. 7x(16x^2 - 1) = 0;$$

$$\text{ĐS: } x = 0; x = \pm \frac{1}{4}$$

$$2. (x+4)^2 - (x+4)(x-5) = 0;$$

$$\text{ĐS: } x = -4$$

$$3. x^3 + 3x^2 + 2x = 0.$$

$$\text{ĐS: } x = 0; x = -1; x = -2$$

 **Lời giải.**

$$1. 7x(16x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 7x(4x-1)(4x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 0 \\ 4x-1 = 0 \\ 4x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$2. (x+4)^2 - (x+4)(x-5) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+4-x+5) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

$$3. x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

□

 **Bài 5.** Phân tích đa thức thành nhân tử

$$1. x^2 + 5x + 6;$$

$$\text{ĐS: } (x+2)(x+3)$$

$$2. x^3 - 3x^2 + 3x - 1;$$

$$\text{ĐS: } (x-1)^3$$

$$3. 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1;$$

$$\text{ĐS: } (2x-1)(x^2 - x + 1)$$

$$4. 4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 4y.$$

$$\text{ĐS: } (2x-y)(2x-y-4)$$

 **Lời giải.**

$$1. x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3).$$

$$2. x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3.$$

$$3. 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + (x-1)^3 = (2x-1)[x^2 - x(x-1) + x^2 - 2x + 1] = (2x-1)(x^2 - x + 1).$$

$$4. 4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 4y = (2x-y)^2 - 4(2x-y) = (2x-y)(2x-y-4).$$

□

 **Bài 6.** Làm tính chia

1. $(x^2 - 8x + 7) : (x - 7);$

ĐS: $x - 1$

2. $(7x^3 - 7x^2 + x - 1) : (7x^2 + 1);$

ĐS: $x - 1$

3. $(x^2 - 16y^2 + 2x + 1) : (x + 4y + 1).$

ĐS: $x - 4y + 1$

 **Lời giải.**

a) $(x^2 - 8x + 7) : (x - 7) = x - 1.$

b) $(7x^3 - 7x^2 + x - 1) : (7x^2 + 1) = x - 1.$

c) $(x^2 - 16y^2 + 2x + 1) : (x + 4y + 1) = x - 4y + 1.$

□

 **Bài 7.** Chứng minh rằng

a) $16x^2 - 8xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi x và y ; b) $-4x^2 + 2x - 1 < 0$ với mọi x .

 **Lời giải.**

Chứng minh rằng

1. Vì $16x^2 - 8xy + y^2 + 1 = (4x - y)^2 + 1 > 0$ nên $16x^2 - 8xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi x và y .

2. Vì $-4x^2 + 2x - 1 = -\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$ nên $-4x^2 + 2x - 1 < 0$ với mọi x .

□

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I - ĐỀ 01

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1. Cho hai đa thức $P = -2x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y - 3x^3y^2$ và $Q = 2x^2y$. Kết quả của biểu thức $P \cdot Q$ là

(A) $4x^4y^3 + x^4y^2 - 6x^5y^3$.

(B) $-4x^4y^3 + x^4y^2 - 6x^5y^3$.

(C) $4x^4y^2 + x^4y - 6x^5y^3$.

(D) $-4x^4y^3 + 4x^4y - 6x^5y^3$.

Lời giải.

$$P \cdot Q = -4x^4y^3 + x^4y^2 - 6x^5y^3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hai đa thức $P = -2x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y - 3x^3y^2$ và $Q = 2x^2y$. Kết quả của phép chia đa thức P cho đơn thức Q là

(A) $y + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}xy$.

(B) $y + 1 - \frac{3}{2}xy$.

(C) $-y + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}xy$.

(D) $-y + 1 - \frac{3}{2}xy$.

Lời giải.

$$P : Q = -y + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}xy.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Khai triển của hằng đẳng thức $(x - 3)^2$ là

(A) $x^2 - 3^2$.

(B) $3 + 6x + x^2$.

(C) $9 - 6x + x^2$.

(D) $9 + 6x + x^2$.

Lời giải.

$$(x - 3)^2 = 9 - 6x + x^2$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Giá trị của biểu thức $x^2 + 4x + 4$ tại $x = -2$ là

(A) 0.

(B) -2.

(C) -9.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ nên tại $x = -2$ thì giá trị của biểu thức bằng 0.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

(B) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(C) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

(D) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 - xy + y^2)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Giá trị của a để đa thức $x^3 + 2x + 2 - a$ chia hết cho đa thức $x - 1$ là

(A) $a = 1$.

(B) $a = 5$.

(C) $a = 2$.

(D) $a = -3$.

Lời giải.

Đặt $A(x) = x^3 + 2x + 2 - a$. Để $A(x)$ chia hết cho $x - 1$ thì

$$A(1) = 0 \Leftrightarrow 5 - a = 0 \Leftrightarrow a = 5.$$

Chọn đáp án **B**

□

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. Thu gọn biểu thức: $M = (x + y)^2 + (x - y)^2 - 2 \cdot (x + y)(x - y) - 4x^2$.

Lời giải.

$$M = (x + y)^2 + (x - y)^2 - 2 \cdot (x + y)(x - y) - 4x^2 = (x + y - x + y)^2 - 4x^2 = 4y^2 - 4x^2.$$

□

Bài 2. Tìm x , biết

a) $x^2 - 5x = 0$;

b) $3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) = 1$;

c) $x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0$.

Lời giải.

$$1. \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5. \end{cases}$$

$$2. \quad 3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 - 3x^2 + 15x - 1 = 0 \Leftrightarrow 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{9}.$$

3.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0 &\Leftrightarrow (x^4 + 2x^3 + x^2) - (x^2 + 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - (x + 3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \text{ (vì } x^2 + 2x + 3 > 0) \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

□

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^3 - x^2y + 5x - 5y$;

b) $x^3 - 2x^2 - 4xy^2 + x$;

c) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 8$.

Lời giải.

1. Ta có $x^3 - x^2y + 5x - 5y = x^2(x - y) + 5(x - y) = (x - y)(x^2 + 5)$.

2. Ta có $x^3 - 2x^2 - 4xy^2 + x = x(x^2 - 2x + 1 - 4y^2) = x[(x - 1)^2 - (2y)^2] = x(x - 1 - 2y)(x - 1 + 2y)$.

3. Ta có

$$\begin{aligned} (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 8 &= (x + 2)(x + 5)(x + 3)(x + 4) - 8 \\ &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 8 \\ &= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 8 \\ &= (x^2 + 7x + 11)^2 - 9 \\ &= (x^2 + 7x + 11 - 3)(x^2 + 7x + 11 + 3) \\ &= (x^2 + 7x + 8)(x^2 + 7x + 14). \end{aligned}$$

□

 **Bài 4.** Làm tính chia: $(x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2) : (x^2 - 1)$.

 **Lời giải.**

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 & x^2 - 1 \\ -x^4 & x^2 - x - 2 \\ \hline & -x^3 - 2x^2 + x \\ & x^3 & -x \\ \hline & -2x^2 & +2 \\ & 2x^2 & -2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

□

ĐÁP ÁN

1 B 2 C 3 C 4 A 5 D 6 B

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I - ĐỀ 02

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1. Kết quả của phép nhân $2x^2y(x^2 - y^2 + 3xy)$ là

(A) $2x^4y + 2x^2y^3 - 6x^3y^2$.

(B) $2x^4y - 2x^2y^3 + 6x^3y^2$.

(C) $x^4y - x^2y^3 + x^3y^2$.

(D) $x^4y - x^2y^3 + x^3y^2$.

 **Lời giải.**

Ta có $2x^2y(x^2 - y^2 + 3xy) = 2x^4y - 2x^2y^3 + 6x^3y^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

(B) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

(C) $(3 - x)(x + 3) = -x^2 + 9$.

(D) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

 **Lời giải.**

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Giá trị của biểu thức $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ tại $x = 1, y = \frac{1}{2}$ là

(A) 2.

(B) 8.

(C) 0.

(D) -1.

 **Lời giải.**

Ta có $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = (x - 2y)^3$. Với $x = 1, y = \frac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức là

$$(1 - 2 \cdot \frac{1}{2})^3 = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Kết quả phân tích đa thức $x^3 - y^2x$ thành nhân tử là

(A) $(x + y)(x - y)$.

(B) $x(x^2 + y^2)$.

(C) $x(x - y)(x + y)$.

(D) $x(x - y)^2$.

 **Lời giải.**

Ta có $x^3 - y^2x = x(x^2 - y^2) = x(x - y)(x + y)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Các giá trị của x thỏa mãn $x^2 - 2x - 3 = 0$ là

(A) -1; 3.

(B) 1; -3.

(C) -1; -3.

(D) 1; 3.

 **Lời giải.**

Ta có $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Kết quả phép chia đa thức $2x^3 + x^2 - 3x + 1$ cho đa thức $2x - 1$ là

(A) $x^2 - x - 1$.

(B) $x^2 - 1$.

(C) $x^2 - x + 1$.

(D) $x^2 + x - 1$.

 **Lời giải.**

2. Ta có

$$\begin{aligned}(x+2)(x^2-2x+4) + (1-x)^3 &= 9 \Leftrightarrow x^3 + 8 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $x = 0, x = 1$.

$$3. (x-2)^2 - (2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(-x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -3. \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{3}, x = -3$.

□

Bài 3. 1. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến x :

$$A = (x+1)^2 - 4(x-1)(x+1) + x(3x-2).$$

2. Tính giá trị của biểu thức $M = (x^2 - 2xy)^2 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + y^4$ biết $x = 24$ và $y = 4$.

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned}A &= (x+1)^2 - 4(x-1)(x+1) + x(3x-2) = x^2 + 2x + 1 - 4(x^2 - 1) + 3x^2 - 2x \\ &= 4x^2 + 1 - 4x^2 + 4 = 5.\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

2. Ta có $M = (x^2 - 2xy)^2 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + y^4 = (x^2 - 2xy + y^2)^2 = (x - y)^4$. Với $x = 24$ và $y = 4$ thì $M = (24 - 4)^4 = 20^4 = 160000$.

□

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = -x^2 - 3x + 2$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = -x^2 - 3x + 2 = -\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + \frac{17}{4} = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \leq \frac{17}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{17}{4}$ khi và chỉ khi $x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

□

ĐÁP ÁN

1 B 2 D 3 C 4 C 5 A 6 D 7 C 8 B