

§1 Phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

Một phân thức đại số (hay gọi là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$ với A và B là các đa thức, B khác đa thức 0. A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ được gọi là bằng nhau nếu $A \cdot D = B \cdot C$.

Ta viết $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A \cdot D = B \cdot C$.

8. Chú ý

- ☒ Các tính chất về tỉ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau của phân số cũng đúng cho phân thức.
- ☒ Các giá trị của biến làm cho mẫu nhận giá trị bằng 0 gọi là giá trị hàm phân thức vô nghĩa hay không xác định.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 49. Chứng minh đẳng thức

Thực hiện theo ba bước

Bước 1 Lựa chọn 1 trong 3 cách biến đổi thường dùng sau

- ☒ Biến đổi về trái thành về phải.
- ☒ Biến đổi về phải thành về trái.
- ☒ Biến đổi đồng thời hai vế.

Bước 2 Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử.

Bước 3 Rút gọn bằng cách triệt tiêu nhân tử chung và sử dụng định nghĩa hai phân thức bằng nhau nếu cần, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{3x+6}{x+2} = 3$ với $x \neq -2$.

b) $\frac{x^2+2x}{3x+6} = \frac{x}{3}$ với $x \neq -2$.

c) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$.

d) $\frac{x^2+3x-4}{x-1} = x+4$ với $x \neq 1$.

Lời giải.

a) $\frac{3x+6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} = 3$.

b) $\frac{x^2+2x}{3x+6} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)} = \frac{x}{3}$.

c) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$.

d) $\frac{x^2+3x-4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x+4$.

□

Ví dụ 2. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{2x+4}{x+2} = 2$ với $x \neq -2$.

b) $\frac{x^2+x}{2(x+1)} = \frac{x}{2}$ với $x \neq -1$.

c) $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ với $x \neq \pm 2$.

d) $\frac{x^2+4x-5}{x-1} = x+5$ với $x \neq 1$.

Lời giải.

a) $\frac{2x+4}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} = 2$.

b) $\frac{x^2+x}{2(x+1)} = \frac{x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x}{2}$.

c) $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$.

d) $\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = x+5$.

□

 **Ví dụ 3.** Ba phân thức sau có bằng nhau không? Tại sao?

$$\frac{x^3 - 1}{x(x - 1)}; \frac{x^2 + x + 1}{x}; \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2}.$$

 **Lời giải.**

Ta có $\frac{x^3 - 1}{x(x - 1)} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x(x - 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ và $\frac{x^3 + x^2 + x}{x^2} = \frac{x(x^2 + x + 1)}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x}$.

Vậy ba phân thức trên bằng nhau. □

 **Ví dụ 4.** Ba phân thức sau có bằng nhau không?

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x(x - 1)}; \frac{x - 1}{x}; \frac{2x - 2}{2x}.$$

 **Lời giải.**

Ta có $\frac{x^2 - 2x + 1}{x(x - 1)} = \frac{(x - 1)^2}{x(x - 1)} = \frac{x - 1}{x}$ và $\frac{2x - 2}{2x} = \frac{2(x - 1)}{2x} = \frac{x - 1}{x}$.

Vậy ba phân thức trên bằng nhau. □

Dạng 50. Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử ở hai vế.

Bước 2. Triệt tiêu các nhân tử chung và rút ra đa thức cần tìm.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm đa thức A trong mỗi đẳng thức sau

1. $\frac{A}{x} = \frac{x}{2}$ với $x \neq 0$.

ĐS: $A = \frac{x^2}{2}$

2. $\frac{x^2 + x}{2x + 2} = \frac{A}{2}$ với $x \neq -1$.

ĐS: $A = x$

3. $\frac{2x - 1}{(x - 3)A} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ với $x \neq \frac{1}{2}; x \neq 1; x \neq 3$.

ĐS: $A = (x - 1)(2x - 1)$

 **Lời giải.**

1. $\frac{A}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow A = x^2 \Rightarrow A = \frac{x^2}{2}$.

2. $\frac{x^2 + x}{2x + 2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{x(x + 1)}{2(x + 1)} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{A}{2} \Rightarrow A = x$.

3. $\frac{2x - 1}{(x - 3)A} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \Rightarrow (2x - 1)(x - 1)(x - 3) = (x - 3)A \Rightarrow A = (x - 1)(2x - 1)$.

Ví dụ 2. Tìm đa thức B trong mỗi đẳng thức sau

$$1. \frac{B}{x+1} = \frac{x-1}{2} \text{ với } x \neq -1.$$

$$\text{ĐS: } B = \frac{(x-1)(x+1)}{2}$$

$$2. \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{B}{x+2} \text{ với } x \neq \pm 2.$$

$$\text{ĐS: } B = 1$$

$$3. \frac{x-3}{(x-1)B} = \frac{1}{x^2-4x+3} \text{ với } x \neq 1; x \neq 3.$$

$$\text{ĐS: } B = (x-3)^2$$

Lời giải.

$$1. \frac{B}{x+1} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow B = \frac{(x-1)(x+1)}{2}.$$

$$2. \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{B}{x+2} \Rightarrow B = 1.$$

$$3. \frac{x-3}{(x-1)B} = \frac{1}{x^2-4x+3} \Rightarrow (x-3)(x-3)(x-1) = (x-1)B \Rightarrow B = (x-3)^2.$$

Ví dụ 3. Tìm một cặp đa thức A và B thỏa mãn đa thức

$$1. (x+1)A = (x-1)B.$$

$$\text{ĐS: } A = x-1 \text{ và } B = x+1$$

$$2. \frac{x^2-1}{x+1}A = (x+1)B \text{ với } x \neq -1.$$

$$\text{ĐS: } A = x+1 \text{ và } B = x-1$$

Lời giải.

$$1. (x+1)A = (x-1)B. \text{ Chọn } A = x-1 \text{ và } B = x+1.$$

$$2. \frac{x^2-1}{x+1}A = (x+1)B \Rightarrow (x-1)A = (x+1)B. \text{ Chọn } A = x+1 \text{ và } B = x-1.$$

Ví dụ 4. Tìm một cặp đa thức A và B thỏa mãn đa thức

$$1. (x+2)A = (x-2)B.$$

$$\text{ĐS: } A = x-2 \text{ và } B = x+1$$

$$2. \frac{x^2-4}{x+2}A = (x+2)B, \text{ với } x \neq -2$$

$$\text{ĐS: } A = x+2 \text{ và } B = x-2$$

Lời giải.

$$1. (x+2)A = (x-2)B. \text{ Chọn } A = x-2 \text{ và } B = x+2.$$

$$2. \frac{x^2-4}{x+2}A = (x+2)B \Rightarrow (x-2)A = (x+2)B. \text{ Chọn } A = x+2 \text{ và } B = x-2.$$

Dạng 51. Chứng minh đẳng thức có điều kiện

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Xuất phát từ điều phải chứng minh, áp dụng tính chất hai phân thức bằng nhau (xem phần Tóm tắt lý thuyết).

Bước 2. Thu gọn biểu thức và dựa vào điều kiện đề bài để lập luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ thỏa mãn $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ và $B \neq D$. Chứng minh $\frac{A}{B} = \frac{A-C}{B-D}$.

Lời giải.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow AB - AD = BA - BC \Rightarrow A(B-D) = B(A-C) \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{A-C}{B-D}.$$

□

Ví dụ 2. Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ thỏa mãn $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ và $B \neq -D$. Chứng minh $\frac{A}{B} = \frac{A+C}{B+D}$.

Lời giải.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow AB + AD = BA + BC \Rightarrow A(B+D) = B(A+C) \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{A+C}{B+D}.$$

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{4x-8}{x-2} = 4$ với $x \neq 2$.

b) $\frac{x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$; $x \neq -3$.

c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$.

d) $\frac{x^2-3x-4}{x+1} = x-4$ với $x \neq -1$.

Lời giải.

a) $\frac{4x-8}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} = 4.$

b) $\frac{x+3}{x^2+3x} = \frac{x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{x}.$

c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}.$

d) $\frac{x^2-3x-4}{x+1} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = x-4.$

□

Bài 2. Ba phân thức sau có bằng nhau không? Tại sao?

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x(x + 1)}; \frac{x + 1}{x}; \frac{2x + 2}{2x}.$$

Lời giải.

Ta có $\frac{x^2 + 2x + 1}{x(x + 1)} = \frac{(x + 1)^2}{x(x + 1)} = \frac{x + 1}{x}$ và $\frac{2x + 2}{2x} = \frac{2(x + 1)}{2x} = \frac{x + 1}{x}$.

Vậy ba phân thức trên bằng nhau. □

Bài 3. Tìm đa thức A trong mỗi đẳng thức sau

1. $\frac{A}{x + 5} = \frac{x - 5}{2}$ với $x \neq -5$. **ĐS:** $A = \frac{(x - 5)(x + 5)}{2}$

2. $\frac{2x^2 + 4x}{x + 2} = \frac{A}{2}$ với $x \neq -2$. **ĐS:** $A = 4x$

3. $\frac{x - 1}{(x - 4)A} = \frac{1}{x^2 - 16}$ với $x \neq \pm 4$. **ĐS:** $A = (x - 1)(x + 4)$

Lời giải.

1. $\frac{A}{x + 5} = \frac{x - 5}{2} \Rightarrow A = \frac{(x - 5)(x + 5)}{2}$.

2. $\frac{2x^2 + 4x}{x + 2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{2x(x + 2)}{x + 2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{A}{2} \Rightarrow A = 4x$.

3. $\frac{x - 1}{(x - 4)A} = \frac{1}{x^2 - 16} \Rightarrow \frac{x - 1}{(x - 4)A} = \frac{1}{(x - 4)(x + 4)} \Rightarrow \frac{x - 1}{A} = \frac{1}{x + 4} \Rightarrow A = (x - 1)(x + 4)$. □

Bài 4. Tìm một cặp đa thức A và B thỏa mãn đa thức

1. $(x + 3)A = (x - 3)B$. **ĐS:** $A = x - 3$ và $B = x + 3$

2. $\frac{x^2 - 16}{x + 4}A = (x + 4)B$ với $x \neq -4$. **ĐS:** $A = x + 4$ và $B = x - 4$

Lời giải.

1. $(x + 3)A = (x - 3)B$. Chọn $A = x - 3$ và $B = x + 3$.

2. $\frac{x^2 - 16}{x + 4}A = (x + 4)B \Rightarrow (x - 4)A = (x + 4)B$. Chọn $A = x + 4$ và $B = x - 4$. □

Bài 5. Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ thỏa mãn $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$. Chứng minh $\frac{A + B}{A} = \frac{C + D}{D}$ với $A \neq 0$; $D \neq 0$.

Lời giải.

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C} \Rightarrow BD = AC \Rightarrow AD + BD = AC + AD \Rightarrow D(A + B) = A(C + D) \Rightarrow \frac{A + B}{A} = \frac{C + D}{D}.$$

□

§2 Tính chất cơ bản của phân thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Tính chất cơ bản của phân thức.

Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}$.

Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{A : N}{B : N}$ với N là một nhân tử chung của A và B .

2. Quy tắc đổi dấu.

Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.

Nếu đổi dấu tử hoặc mẫu đồng thời đổi dấu của phân thức được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B}$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 52. Tính giá trị của phân thức

Thực hiện theo ba bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức thành nhân tử.

Bước 2. Rút gọn từng phân thức.

Bước 3. Thay giá trị của biến vào phân thức và tính.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Tính giá trị của phân thức

1. $A(x) = \frac{x+1}{x-1}$ với $x \neq 1$ tại $x = 2$.

ĐS: $A(2) = 3$

2. $B(x) = \frac{x+1}{x-1}$ với $x \neq 1$ tại $2x-4=0$.

ĐS: $B(2) = 3$

3. $C(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ với $x \neq -1$ tại $x^2=4$.

ĐS: $C(2) = 0; C(-2) = -12$

4. $D(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ với $x \neq \pm 2$ tại $|x|=3$.

ĐS: $D(3) = \frac{6}{5}; D(-3) = 0$

 **Lời giải.**

1. $A(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3$.

2. $2x-4=0 \Rightarrow x=2$. Suy ra $B(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3$.

3. $x^2=4 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=-2$.

Ta có $C(2) = \frac{2^2-3 \cdot 2+2}{2+1} = 0$ và $C(-2) = \frac{(-2)^2-3 \cdot (-2)+2}{-2+1} = -12$.

4. $|x|=3 \Rightarrow x=3$ hoặc $x=-3$.

Ta có $D(3) = \frac{3+3}{3^2-4} = \frac{6}{5}$ và $D(-3) = \frac{-3+3}{(-3)^2-4} = 0$.

□

 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của phân thức

1. $A(x) = \frac{x+1}{3x+3}$ với $x \neq -1$ tại $x=2$.

ĐS: $A(2) = \frac{1}{3}$

2. $B(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ với $x \neq -2$ tại $3x-6=0$.

ĐS: $B(2) = \frac{3}{4}$

3. $C(x) = \frac{x^2-4x+3}{x+1}$ với $x \neq -1$ tại $x^2=9$.

ĐS: $C(3) = 0; C(-3) = -12$

4. $D(x) = \frac{-2x}{x-3}$ với $x \neq 3$ tại $|x|=1$.

ĐS: $D(1) = 1; D(-1) = -\frac{1}{2}$

 **Lời giải.**

1. $A(2) = \frac{2+1}{3 \cdot 2+3} = \frac{1}{3}$.

2. $3x-6=0 \Rightarrow x=2$. Suy ra $B(2) = \frac{2 \cdot 2-1}{2+2} = \frac{3}{4}$.

3. $x^2=9 \Rightarrow x=3$ hoặc $x=-3$.

Ta có $C(3) = \frac{3^2-4 \cdot 3+3}{3+1} = 0$ và $C(-3) = \frac{(-3)^2-4 \cdot (-3)+3}{-3+1} = -12$.

4. $|x|=1 \Rightarrow x=1$ hoặc $x=-1$.

Ta có $D(1) = \frac{-2 \cdot 1}{1-3} = 1$ và $D(-1) = \frac{-2 \cdot (-1)}{(-1)-3} = -\frac{1}{2}$.

□

Dạng 53. Biến đổi phân thức theo yêu cầu

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử hoặc lựa chọn tử thức (hay mẫu thức) thích hợp tùy theo yêu cầu đề bài.

Bước 2. Sử dụng tính chất cơ bản của phân thức (xem phân Tóm tắt lý thuyết) để đưa về phân thức mới thỏa mãn yêu cầu.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho phân thức $\frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x - 3)}$ với $x \neq -1; x \neq 3$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x - 1$. **ĐS:** $\frac{x - 1}{x - 3}$

Lời giải.

$$\frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{A}{x - 3}.$$

□

Ví dụ 2. Cho phân thức $\frac{x^2 - 4}{(x - 2)(x - 3)}$ với $x \neq 2; x \neq 3$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x + 2$. **ĐS:** $\frac{x + 2}{x - 3}$

Lời giải.

$$\frac{x^2 - 4}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{A}{x - 3}.$$

□

Ví dụ 3. Cho phân thức $\frac{x - 1}{x + 1}$ với $x \neq -1$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x^2 - 1$. **ĐS:** $\frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}$

Lời giải.

$$\frac{x - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x + 1)} = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}.$$

□

Ví dụ 4. Cho phân thức $\frac{x - 2}{x + 2}$ với $x \neq -2$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x^2 - 4$. **ĐS:** $\frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$

Lời giải.

$$\frac{x - 2}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)(x + 2)} = \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}.$$

□

Ví dụ 5. Cho hai phân thức $\frac{x+3}{2x}$ và $\frac{x^2-9}{x+1}$ với $x \neq 0; x \neq -1$ và $x \neq 3$, biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức. **ĐS:** $\frac{x^2-9}{2x(x-3)}$

Lời giải.

$$\frac{x+3}{2x} = \frac{(x+3)(x-3)}{2x(x-3)} = \frac{x^2-9}{2x(x-3)}. \text{ Vậy kết quả là cặp phân thức } \frac{x^2-9}{2x(x-3)} \text{ và } \frac{x^2-9}{x+1}. \quad \square$$

Ví dụ 6. Cho hai phân thức $\frac{x+2}{2x}$ và $\frac{x^2-4}{x+1}$ với $x \neq 0; x \neq -1$ và $x \neq 2$, biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức. **ĐS:** $\frac{x^2-4}{2x(x-2)}$ và $\frac{x^2-4}{x+1}$

Lời giải.

$$\frac{x+2}{2x} = \frac{(x+2)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{x^2-4}{2x(x-2)}. \text{ Vậy kết quả là cặp phân thức } \frac{x^2-4}{2x(x-2)} \text{ và } \frac{x^2-4}{x+1}. \quad \square$$

Ví dụ 7. Cho hai phân thức $\frac{x+3}{2x}$ và $\frac{x-3}{x+1}$ với $x \neq 0; x \neq -1$, biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức. **ĐS:** $\frac{(x+3)(x+1)}{2x(x+1)}$ và $\frac{(x-3)2x}{2x(x+1)}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{x+3}{2x} = \frac{(x+3)(x+1)}{2x(x+1)} \text{ và } \frac{x-3}{x+1} = \frac{(x-3)2x}{(x+1)2x}.$$

$$\text{Vậy kết quả là cặp phân thức } \frac{(x+3)(x+1)}{2x(x+1)} \text{ và } \frac{(x-3)2x}{2x(x+1)}. \quad \square$$

Ví dụ 8. Cho hai phân thức $\frac{x+1}{x}$ và $\frac{x+1}{x-1}$ với $x \neq 0$ và $x \neq 1$, biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức. **ĐS:** $\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}$ và $\frac{x(x+1)}{x(x-1)}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{x+1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} \text{ và } \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x(x-1)}.$$

$$\text{Vậy kết quả là cặp phân thức } \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} \text{ và } \frac{x(x+1)}{x(x-1)}. \quad \square$$

Dạng 54. Chứng minh cặp phân thức bằng nhau

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức thành nhân tử.

Bước 2. Rút gọn từng phân thức, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

⚠ 9. Chú ý: Trong nhiều trường hợp, có thể sử dụng định nghĩa hai phân thức bằng nhau $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A \cdot D = B \cdot C$.

BÀI TẬP MẪU

📖 Ví dụ 1. Cho cặp phân thức $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ và $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ với $x \neq \pm 1$. Chứng tỏ cặp phân thức trên bằng nhau.

✍ Lời giải.

Ta có $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1$ và $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$.

Vậy $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. □

📖 Ví dụ 2. Cho cặp phân thức $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ và $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ với $x \neq \pm 1$. Cặp phân thức trên có bằng nhau không?

✍ Lời giải.

Ta có $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = x - 1$ và $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$.

Vậy $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$. □

Dạng 55. Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử ở hai vế.

Bước 2. Triệt tiêu các nhân tử chung và rút ra đa thức cần tìm.

BÀI TẬP MẪU

📖 Ví dụ 1. Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

a) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$ với $x \neq \pm 1$. **ĐS:** x b) $\frac{x^2 + 2x}{3x + 6} = \frac{\dots}{3}$ với $x \neq -2$. **ĐS:** x

c) $\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$ với $x \neq \pm 1$. **ĐS:** 1 d) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \frac{x + 4}{\dots}$ với $x \neq 1$. **ĐS:** 1

 Lời giải.

$$\text{a) } \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là x .

$$\text{b) } \frac{x^2 + 2x}{3x + 6} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)} = \frac{x}{3}.$$

Vậy đa thức cần tìm là x .

$$\text{c) } \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là 1.

$$\text{d) } \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)}{x-1} = \frac{x+4}{1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là 1.

□

 **Ví dụ 2.** Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{2x+4}{x+2} = \frac{2}{\dots} \text{ với } x \neq -2. \quad \text{ĐS: } 1 \quad \text{b) } \frac{x^2+x}{2(x+1)} = \frac{\dots}{2} \text{ với } x \neq -1. \quad \text{ĐS: } x$$

$$\text{c) } \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{\dots} \text{ với } x \neq \pm 2. \quad \text{ĐS: } x+2 \quad \text{d) } \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{x+5}{\dots} \text{ với } x \neq 1. \quad \text{ĐS: } 1$$

 Lời giải.

$$\text{a) } \frac{2x+4}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} = \frac{2}{1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là 1.

$$\text{b) } \frac{x^2+x}{2(x+1)} = \frac{x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x}{2}.$$

Vậy đa thức cần tìm là x .

$$\text{c) } \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}.$$

Vậy đa thức cần tìm là $x+2$.

$$\text{d) } \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = \frac{x+5}{1}.$$

Vậy đa thức cần tìm là 1.

□

 **Ví dụ 3.** Tìm đa thức A thỏa mãn đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{A}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \text{ với } x \neq \pm 1. \quad \text{ĐS: } \begin{matrix} A = x+1 \\ A = x+1 \end{matrix} \quad \text{b) } \frac{x^2+2x}{A} = \frac{x}{3} \text{ với } x \neq 0. \quad \text{ĐS: } \begin{matrix} A = 3(x+2) \\ A = 3(x+2) \end{matrix}$$

$$\text{c) } \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} \text{ với } x \neq \pm 3. \quad \text{ĐS: } A = 1 \quad \text{d) } \frac{x^2+3x-4}{A} = x+4. \quad \text{ĐS: } A = x-1$$

$$\text{e) } \frac{2x^2-2y^2}{A} = \frac{2(x+y)}{3}. \quad \text{ĐS: } \begin{matrix} A = 3(x-y) \\ A = 3(x-y) \end{matrix}$$

 Lời giải.

$$\text{a) } \frac{A}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{A}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow A = x+1.$$

$$\text{b) } \frac{x^2+2x}{A} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x(x+2)}{A} = \frac{x}{3} \Rightarrow A = 3(x+2).$$

$$\text{c) } \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} \Rightarrow \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} \Rightarrow A = 1.$$

$$\text{d) } \frac{x^2+3x-4}{A} = x+4 \Rightarrow \frac{(x+4)(x-1)}{A} = x+4 \Rightarrow A = x-1.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{2x^2 - 2y^2}{A} &= \frac{2(x+y)}{3} \Rightarrow \frac{2(x+y)(x-y)}{A} = \frac{2(x+y)}{3} \\ &\Rightarrow A = 3(x-y). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 4. Tìm đa thức A thỏa mãn đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{-2x+4}{x-2} = \frac{2}{A} \text{ với } x \neq -2. \text{ ĐS: } A = -1 \quad \text{b) } \frac{2x^2+4x}{x+2} = \frac{A}{2} \text{ với } x \neq -2. \text{ ĐS: } A = 4x$$

$$\text{c) } \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{1}{A} \text{ với } x \neq \pm 4. \quad \text{ĐS: } A = x+4 \quad \text{d) } \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{A}{2} \text{ với } x \neq 2. \quad \text{ĐS: } A = 2(x^2-2x+4)$$

$$\text{e) } \frac{x^2-y^2}{A} = \frac{x+y}{3}. \quad \text{ĐS: } A = 3(x-y)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{-2x+4}{x-2} &= \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{-2(x-2)}{x-2} = \frac{2}{A} \\ &\Rightarrow A = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2x^2+4x}{x+2} &= \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{2x(x+2)}{x+2} = \frac{A}{2} \\ &\Rightarrow A = 4x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x-4}{x^2-16} &= \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{A} \\ &\Rightarrow A = x+4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x^3+8}{x+2} &= \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \frac{A}{2} \\ &\Rightarrow A = 2(x^2-2x+4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{x^2-y^2}{A} &= \frac{x+y}{3} \Rightarrow \frac{(x+y)(x-y)}{A} = \frac{x+y}{3} \\ &\Rightarrow A = 3(x-y). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 5. Hoàn thành chuỗi đẳng thức sau: $\frac{x+1}{x+2} = \frac{\dots}{x^2-4} = \frac{\dots}{x^2+x-2}$, với $x \neq \pm 2; x \neq 1$.
ĐS: $(x+1)(x-2)$ và $(x+1)(x-1)$

Lời giải.

Ta có $\frac{x+1}{x+2} = \frac{A}{(x-2)(x+2)} = \frac{B}{(x-1)(x+2)}$. Chọn $A = (x+1)(x-2)$ và $B = (x+1)(x-1)$.
□

Ví dụ 6. Hoàn thành chuỗi đẳng thức sau: $\frac{1}{x+1} = \frac{\dots}{x^2-1} = \frac{\dots}{x^2+3x+2}$, với $x \neq \pm 1; x \neq -2$.
ĐS: $x-1$ và $x+2$

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{x+1} = \frac{M}{(x+1)(x-1)} = \frac{N}{(x+1)(x+2)}$. Chọn $M = x-1$ và $N = x+2$. □

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Tính giá trị của phân thức

1. $A(x) = \frac{x+2}{x-4}$ với $x \neq 4$ tại $x = 5$. **ĐS:** $A(5) = 7$

2. $B(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ với $x \neq -1$ tại $2x-2=0$. **ĐS:** $B(1) = 1$

3. $C(x) = \frac{x^2-5x+6}{x+1}$ với $x \neq -1$ tại $x^2=1$. **ĐS:** $C(1) = 1$

4. $D(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$ tại $|x+1|=3$. **ĐS:** $D(2) = \frac{5}{3}; D(-4) = -\frac{1}{15}$

Lời giải.

1. $A(5) = \frac{5+2}{5-4} = 7$.

2. $2x-2=0 \Rightarrow x=1$. Suy ra $B(1) = \frac{1^2+1}{1+1} = 1$.

3. $x^2=1 \Rightarrow x=1$ hoặc $x=-1$ (loại). Ta có $C(1) = \frac{1^2-5 \cdot 1+6}{1+1} = 1$.

4. $|x+1|=3 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=-4$. Ta có $D(2) = \frac{2+3}{2^2-1} = \frac{5}{3}$ và $D(-4) = \frac{-4+3}{(-4)^2-1} = -\frac{1}{15}$. □

Bài 2. Cho phân thức $\frac{x^2-25}{(x+5)(x-3)}$ với $x \neq -5; x \neq 3$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x-5$. **ĐS:** $\frac{x-5}{x-3}$

Lời giải.

$$\frac{x^2-25}{(x+5)(x-3)} = \frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)(x-3)} = \frac{x-5}{x-3}.$$
□

Bài 3. Cho phân thức $\frac{x+3}{x-3}$ với $x \neq 3$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = x^2-9$. **ĐS:** $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}$

Lời giải.

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2-9}{(x-3)^2}.$$
□

Bài 4. Cho hai phân thức $\frac{x-6}{x}$ và $\frac{x+6}{x+1}$ với $x \neq 0$ và $x \neq -1$. Biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức. **ĐS:** $\frac{x^2-36}{x(x+6)}$ và $\frac{x^2-36}{(x+1)(x-6)}$

Lời giải.

Ta có $\frac{x-6}{x} = \frac{(x-6)(x+6)}{x(x+6)} = \frac{x^2-36}{x(x+6)}$ và $\frac{x+6}{x+1} = \frac{(x+6)(x-6)}{(x+1)(x-6)} = \frac{x^2-36}{(x+1)(x-6)}$.

Vậy cặp phân thức cần tìm là $\frac{x^2-36}{x(x+6)}$ và $\frac{x^2-36}{(x+1)(x-6)}$. $\square$

Bài 5. Cho hai phân thức $\frac{x+3}{x-1}$ và $\frac{x-9}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$. Biến đổi hai phân thức này thành cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức.

ĐS: $\frac{(x+3)(x+1)}{x^2-1}$ và $\frac{(x-9)(x-1)}{x^2-1}$

Lời giải.

Ta có $\frac{x+3}{x-1} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+3)(x+1)}{x^2-1}$ và $\frac{x-9}{x+1} = \frac{(x-9)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-9)(x-1)}{x^2-1}$.

Vậy cặp phân thức cần tìm là $\frac{(x+3)(x+1)}{x^2-1}$ và $\frac{(x-9)(x-1)}{x^2-1}$. $\square$

Bài 6. Cho cặp phân thức $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ và $\frac{x^2-1}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$. Chứng tỏ cặp phân thức trên bằng nhau.

Lời giải.

Ta có $\frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$ và $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$.

Vậy cặp phân thức trên bằng nhau. $\square$

Bài 7. Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

a) $\frac{-2x+4}{x^2-4} = \frac{\dots}{x+2}$ với $x \neq \pm 2$. **ĐS:** -2 b) $\frac{x^2+3x}{3x+9} = \frac{\dots}{3}$ với $x \neq -3$. **ĐS:** x

c) $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\dots}{x+1}$ với $x \neq \pm 1$. **ĐS:** $(x+1)^2$ d) $\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{x-2}{\dots}$ với $x \neq 3$. **ĐS:** 1

Lời giải.

a) $\frac{-2x+4}{x^2-4} = \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{x+2}$. b) $\frac{x^2+3x}{3x+9} = \frac{x(x+3)}{3(x+3)} = \frac{x}{3}$.

Vậy đa thức cần tìm là -2 .

Vậy đa thức cần tìm là x .

c) $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = \frac{(x+1)^2}{x+1}$. d) $\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \frac{x-2}{1}$.

Vậy đa thức cần tìm là $(x+1)^2$.

Vậy đa thức cần tìm là 1 .

$\square$

Bài 8. Tìm đa thức A thỏa mãn mỗi đẳng thức sau

1. $\frac{A}{x^2-25} = \frac{1}{x-5}$ với $x \neq \pm 5$. **ĐS:** $x+5$

2. $\frac{x^2-2x}{A} = x$ với $x \neq 0$. **ĐS:** $x-2$

3. $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{A}{x+3}$ với $x \neq -3$ và $x \neq 1$. **ĐS:** $(x+3)(x^2+x+1)$

4. $\frac{x^2-5x+6}{A} = x-2$ với $x \neq 2$ và $x \neq 3$. **ĐS:** $x-3$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{A}{x^2 - 25} = \frac{1}{x - 5} \Rightarrow \frac{A}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{1}{x - 5} \Rightarrow A = x + 5.$$

$$2. \frac{x^2 - 2x}{A} = x \Rightarrow \frac{x(x - 2)}{A} = x \Rightarrow A = x - 2.$$

$$3. \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{A}{x + 3} \Rightarrow \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \frac{A}{x + 3} \Rightarrow A = (x + 3)(x^2 + x + 1).$$

$$4. \frac{x^2 - 5x + 6}{A} = x - 2 \Rightarrow \frac{(x - 2)(x - 3)}{A} = x - 2 \Rightarrow A = x - 3.$$

□

 **Bài 9.** Hoàn thành chuỗi đẳng thức sau: $\frac{x + 1}{x + 3} = \frac{\dots}{x^2 - 9} = \frac{\dots}{x^2 + 5x + 6}$ với $x \neq \pm 3; x \neq -2$.
ĐS: $(x + 1)(x - 3)$ và $(x + 1)(x + 2)$

 **Lời giải.**

$$\frac{x + 1}{x + 3} = \frac{A}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{B}{(x + 2)(x + 3)}$$

Chọn $A = (x + 1)(x - 3)$ và $B = (x + 1)(x + 2)$.

□

§3 Rút gọn phân thức

1 Tóm tắt lý thuyết

Để rút gọn phân thức cho trước ta làm như sau

Bước 1. Sử dụng các phương pháp phân tích thức thành nhân tử để biến đổi cả tử và mẫu của phân thức.

Bước 2. Sử dụng các tính chất cơ bản của phân thức đã học để rút gọn phân thức đã cho.

2 Các dạng bài tập

Dạng 56. Rút gọn phân thức

Thực hiện theo hai bước sau

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử.

Bước 2. Rút gọn bằng cách triệt tiêu nhân tử chung.

 **10.** $A = -(-A)$.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{2(x+1)^2}{4x(x+1)}$	ĐS: $\frac{x+1}{2x}$	b) $\frac{2x^2+4x+2}{4x(x+1)}$	ĐS: $\frac{x+1}{2x}$
c) $\frac{(8-x)(-x-2)}{(x+2)^2}$	ĐS: $\frac{x-8}{x+2}$	d) $\frac{2(x-y)}{y-x}$	ĐS: -2

 **Lời giải.**

a) $\frac{2(x+1)^2}{4x(x+1)} = \frac{x+1}{2x}$	b) $\frac{2x^2+4x+2}{4x(x+1)} = \frac{2(x+1)^2}{4x(x+1)} = \frac{x+1}{2x}$
c) $\frac{(8-x)(-x-2)}{(x+2)^2} = \frac{(x-8)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x-8}{x+2}$	d) $\frac{2(x-y)}{y-x} = \frac{2(x-y)}{-(x-y)} = -2$

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn các phân thức sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{(x+2)^2}{2x+4} & \text{ĐS: } \frac{x+2}{2} & \text{b) } \frac{x^2+4x+4}{2x+4} & \text{ĐS: } \frac{x+2}{2} \\ \text{c) } \frac{(1-x)(-x-2)}{x+2} & \text{ĐS: } x-1 & \text{d) } \frac{x^2-y^2}{x+y} & \text{ĐS: } x-y \end{array}$$

 **Lời giải.**

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{(x+2)^2}{2x+4} = \frac{(x+2)^2}{2(x+2)} = \frac{x+2}{2}. & \text{b) } \frac{x^2+4x+4}{2x+4} = \frac{(x+2)^2}{2(x+2)} = \frac{x+2}{2}. \\ \text{c) } \frac{(1-x)(-x-2)}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} = x-1. & \text{d) } \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = x-y. \end{array}$$

□

 **Ví dụ 3.** Rút gọn các phân thức sau

$$\text{a) } \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+x} \quad \text{ĐS: } \frac{(x+1)^2}{x} \quad \text{b) } \frac{x^3-3x^2+3x-1}{2x-2} \quad \text{ĐS: } \frac{(x-1)^2}{2}$$

 **Lời giải.**

$$\text{a) } \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+x} = \frac{(x+1)^3}{x(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x}. \quad \text{b) } \frac{x^3-3x^2+3x-1}{2x-2} = \frac{(x-1)^3}{2(x-1)} = \frac{(x-1)^2}{2}.$$

□

 **Ví dụ 4.** Rút gọn các phân thức sau

$$\text{a) } \frac{3x-6}{x^3-6x^2+12x-8} \quad \text{ĐS: } \frac{3}{(x-2)^2} \quad \text{b) } \frac{x^3+2x^2}{x^3+6x^2+12x+8} \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{(x+2)^2}$$

 **Lời giải.**

$$\text{a) } \frac{3x-6}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{3(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{3}{(x-2)^2}. \quad \text{b) } \frac{x^3+2x^2}{x^3+6x^2+12x+8} = \frac{x^2(x+2)}{(x+2)^3} = \frac{x^2}{(x+2)^2}.$$

□

 **Ví dụ 5.** Cho phân thức $A = \frac{2x^3+2x^2}{x^3+x^2+x+1}$.

1. Rút gọn phân thức. ĐS: $\frac{2x^2}{x^2+1}$
2. Tính giá trị của phân thức tại $x = 2$. ĐS: $\frac{8}{5}$
3. Chứng minh A luôn dương với mọi giá trị của $x \neq -1$.

 **Lời giải.**

$$1. A = \frac{2x^3+2x^2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{2x^2(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

$$2. A(2) = \frac{2 \cdot 2^2}{2^2 + 1} = \frac{8}{5}.$$

$$3. 2x^2 \geq 0 \text{ và } x^2 + 1 > 0 \text{ nên } A \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

□

 **Ví dụ 6.** Cho phân thức $A = \frac{3 - 6x}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}$.

1. Rút gọn phân thức.

$$\text{ĐS: } \frac{-3}{x^2 + 1}$$

2. Tính giá trị của phân thức tại $x = 3$.

$$\text{ĐS: } \frac{-3}{10}$$

3. Chứng minh A luôn âm với mọi giá trị của $x \neq \frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

$$1. A = \frac{3 - 6x}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = \frac{-3(2x - 1)}{(2x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{-3}{x^2 + 1}.$$

$$2. A(3) = \frac{-3}{3^2 + 1} = \frac{-3}{10}.$$

$$3. -3 < 0 \text{ và } x^2 + 1 > 0 \text{ nên } A < 0 \text{ với mọi } x.$$

□

Dạng 57. Chứng minh đẳng thức

Thực hiện tương tự các bước chứng minh đẳng thức đã học trong bài 1 và bài 2.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chứng minh đẳng thức $\frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{x + 1}{2x - 1}$.

 **Lời giải.**

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(2x - 1)} = \frac{x + 1}{2x - 1}.$$

□

 **Ví dụ 2.** Chứng minh đẳng thức $\frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 - 7x + 12} = \frac{2x - 6}{x - 4}$.

 **Lời giải.**

$$\frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 - 7x + 12} = \frac{2(x - 3)^2}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{2(x - 3)}{x - 4} = \frac{2x - 6}{x - 4}.$$

□

 **Ví dụ 3.** Chứng tỏ rằng hai phân thức $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + xy}$ và $\frac{x^2 - y^2}{x(x - y)}$ bằng nhau.

 **Lời giải.**

Ta có $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + xy} = \frac{(x + y)^2}{x(x + y)} = \frac{x + y}{x}$ và $\frac{x^2 - y^2}{x(x - y)} = \frac{(x - y)(x + y)}{x(x - y)} = \frac{x + y}{x}$.

Vậy hai phân thức trên bằng nhau. □

 **Ví dụ 4.** Chứng tỏ rằng hai phân thức $\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y}$ và $x + 2y$ bằng nhau.

 **Lời giải.**

$$\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y} = \frac{(x + 2y)^2}{x + 2y} = x + 2y.$$
□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{2x - 6}{(x - 3)^2}$.	ĐS: $\frac{2}{x - 3}$	b) $\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 6x + 9}$.	ĐS: $\frac{x^2}{x - 3}$
c) $\frac{2x^2 - 8}{x^2 + 4x + 4}$.	ĐS: $\frac{2(x - 2)}{x + 2}$	d) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.	ĐS: $\frac{x}{x - 3}$

 **Lời giải.**

a) $\frac{2x - 6}{(x - 3)^2} = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)^2} = \frac{2}{x - 3}$.	b) $\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x^2(x - 3)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2}{x - 3}$.
c) $\frac{2x^2 - 8}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{2(x - 2)}{x + 2}$.	d) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \frac{x(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{x}{x - 3}$.

□

 **Bài 2.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$.	ĐS: $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$	b) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2x + 3}$.	ĐS: $\frac{x + 1}{2x + 3}$
--	-----------------------------	---	----------------------------

 **Lời giải.**

a) $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.	b) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2x + 3} = \frac{(x^2 + 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)(2x + 3)} = \frac{x + 1}{2x + 3}$.
--	---

□

 **Bài 3.** Cho phân thức $A = \frac{2x - 6}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$.

- | | |
|--|-------------------------|
| 1. Rút gọn biểu thức. | ĐS: $\frac{2}{x^2 + 1}$ |
| 2. Tính giá trị của phân thức tại $x = -2$. | ĐS: $\frac{2}{5}$ |

3. Chứng minh A luôn dương với mọi giá trị $x \neq 3$.

 **Lời giải.**

$$1. A = \frac{2x - 6}{x^3 - 3x^2 + x - 3} = \frac{2(x - 3)}{(x^2 + 1)(x - 3)} = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

$$2. A(-2) = \frac{2}{(-2)^2 + 1} = \frac{2}{5}.$$

3. $2 > 0$ và $x^2 + 1 > 0$ nên $A > 0$ với mọi x .

□

 **Bài 4.** Chứng minh đẳng thức $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{x + 1}{x + 2}$.

 **Lời giải.**

$$VT = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x + 1)(x^2 - 1)}{(x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{x + 1}{x + 2} = VP.$$

□

 **Bài 5.** Chứng tỏ rằng hai phân thức $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy}$ và $\frac{x - y}{x}$ bằng nhau.

 **Lời giải.**

$$VT = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy} = \frac{(x - y)^2}{x(x - y)} = \frac{x - y}{x} = VP$$

□

§4 Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Tìm mẫu thức chung

Tìm mẫu thức chung ta làm như sau:

Bước 1. Phân tích mẫu thức của các phân thức đã cho thành nhân tử;

Bước 2. Mẫu thức chung cần tìm là một tích mà các nhân tử được chọn theo quy tắc sau:

- + Nhân tử bằng số của mẫu thức chung là tích các nhân tử bằng số ở các mẫu thức của phân thức đã cho. (Nếu các nhân tử bằng số ở các mẫu thức là những số nguyên dương thì nhân tử bằng số của mẫu thức chung là BCNN của chúng);
- + Với mỗi lũy thừa của cùng một biểu thức có mặt trong các mẫu thức, ta chọn lũy thừa với số mũ cao nhất.

1.2 Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

Để quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung;

Bước 2. Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức;

Bước 3. Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

2 Bài tập và các dạng toán

 **Ví dụ 1.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

$$1. \frac{5}{xy} \text{ và } \frac{1}{xy^2}. \quad \text{ĐS: } \frac{5y}{xy^2}; \frac{1}{xy^2}.$$

$$2. \frac{1}{x^2 - x} \text{ và } \frac{2}{x - 1}. \quad \text{ĐS: } \frac{1}{x(x - 1)}; \frac{2x}{x(x - 1)}.$$

$$3. \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \text{ và } \frac{x}{x - 2}. \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{x(x - 2)}; \frac{(x - 2)^2}{x(x - 2)}.$$

$$4. \frac{2}{x^2 - 5x + 6} \text{ và } \frac{3}{x - 3}. \quad \text{ĐS: } \frac{2}{(x - 2)(x - 3)}; \frac{3(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}.$$

5. $\frac{4}{x^2 - 3x + 2}$ và $\frac{1}{x^2 - x}$.

ĐS: $\frac{4x}{x(x-1)(x-2)}; \frac{x-2}{x(x-1)(x-2)}$.

 Lời giải.

1. MTC = xy^2 , suy ra $\frac{5}{xy} = \frac{5y}{xy^2}$ và giữ nguyên $\frac{1}{xy^2}$.

2. Ta có $(x^2 - x) = x(x-1)$. MTC = $x(x-1)$.
Suy ra $\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$; $\frac{2}{x-1} = \frac{2x}{x(x-1)}$.

3. Ta có $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x}$. MTC = $x(x-2)$.
Suy ra $\frac{x-2}{x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)}$; $\frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{x(x-2)}$.

4. Ta có $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. MTC = $(x-2)(x-3)$.
Suy ra $\frac{2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2}{(x-2)(x-3)}$; $\frac{3}{x-3} = \frac{3(x-2)}{(x-2)(x-3)}$.

5. Ta có $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$; $x^2 - x = x(x-1)$. MTC = $x(x-1)(x-2)$.
Suy ra $\frac{4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4x}{x(x-1)(x-2)}$; $\frac{1}{x^2 - x} = \frac{x-2}{x(x-1)(x-2)}$.

□

 **Ví dụ 2.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

1. $\frac{1}{xy^3}$ và $\frac{2}{x^2y}$. ĐS: $\frac{x}{x^2y^3}; \frac{2y^2}{x^2y^3}$.

2. $\frac{1}{x^2 - 2x}$ và $\frac{2}{x}$. ĐS: $\frac{1}{x(x-2)}; \frac{2(x-2)}{x(x-2)}$.

3. $\frac{x}{x^2 - 9}$ và $\frac{x}{x-3}$. ĐS: $\frac{x}{(x-3)(x+3)}; \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)}$.

4. $\frac{2}{x^2 - x - 6}$ và $\frac{3}{x+2}$. ĐS: $\frac{2}{(x+2)(x-3)}; \frac{3(x-3)}{(x+2)(x-3)}$.

5. $\frac{4x}{x^2 - x - 6}$ và $\frac{1}{x^2 + 2x}$. ĐS: $\frac{4x^2}{x(x-3)(x+2)}; \frac{x-3}{x(x-3)(x+2)}$.

 Lời giải.

1. MTC = x^2y^3 . Suy ra $\frac{1}{xy^3} = \frac{x}{x^2y^3}$; $\frac{2}{x^2y} = \frac{2y^2}{x^2y^3}$.

2. Ta có $x^2 - 2x = x(x-2)$. MTC = $x(x-2)$. Suy ra $\frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x(x-2)}$; $\frac{2}{x} = \frac{2(x-2)}{x(x-2)}$.

3. Ta có $\frac{x}{x^2 - 9} = \frac{x}{(x-3)(x+3)}$; $\frac{x}{x-3} = \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)}$.

4. Ta có $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Suy ra $\frac{2}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{(x+2)(x-3)}$; $\frac{3}{x+2} = \frac{3(x-3)}{(x+2)(x-3)}$.

5. Ta có $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$; $x^2 + 2x = x(x+2)$.
Suy ra $\frac{4x}{x^2 - x - 6} = \frac{4x^2}{x(x-3)(x+2)}$; $\frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{x-3}{x(x-3)(x+2)}$.

□

Ví dụ 3. Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

1. $\frac{x}{x^2 + x}$ và $\frac{x+1}{x^2 - 1}$. **ĐS:** $\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$.

2. $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ và $\frac{3}{x+1}$. **ĐS:** $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$; $\frac{3}{x+1}$.

Lời giải.

1. MTC = $(x-1)(x+1)$. Suy ra $\frac{x}{x^2 + x} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{x+1}{x^2 - 1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$.

2. MTC = $x+1$. Suy ra $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$; giữ nguyên $\frac{3}{x+1}$.

□

Ví dụ 4. Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

1. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$ và $\frac{x+1}{x^2 - 1}$. **ĐS:** $\frac{(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$; $\frac{x}{x(x-1)}$.

2. $\frac{x^3 - 2^3}{x^2 - 4}$ và $\frac{3}{x+2}$. **ĐS:** $\frac{x^2 + 2x + 4}{x+2}$; $\frac{3}{x+2}$.

Lời giải.

1. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$.
 $\frac{x+1}{x^2 - 1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x(x-1)}$.

2. $\frac{x^3 - 2^3}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2}$; giữ nguyên $\frac{3}{x+2}$.

□

Ví dụ 5. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

1. $\frac{2}{5x^3y^2}$ và $\frac{3}{4xy}$. **ĐS:** $\frac{8}{20x^3y^2}$; $\frac{15x^2y}{20x^3y^2}$.

2. $\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2}$ và $\frac{x}{x^2 - xy}$. **ĐS:** $\frac{x}{(x-y)^2}$; $\frac{x-y}{(x-y)^2}$.

Lời giải.

$$1. \text{MTC} = 20x^3y^2. \text{ Suy ra } \frac{2}{5x^3y^2} = \frac{8}{20x^3y^2}; \frac{3}{4xy} = \frac{15x^2y}{20x^3y^2}.$$

$$2. \frac{x}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{x}{(x - y)^2}; \frac{x}{x^2 - xy} = \frac{x}{x(x - y)} = \frac{1}{x - y} = \frac{x - y}{(x - y)^2}.$$

□

 **Ví dụ 6.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

$$1. \frac{1}{x^2y} \text{ và } \frac{3}{xy}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{x^2y}; \frac{3x}{x^2y}.$$

$$2. \frac{x}{x^2 + 2xy + y^2} \text{ và } \frac{2x}{x^2 + xy}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x}{(x + y)^2}; \frac{2(x + y)}{(x + y)^2}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{Giữ nguyên } \frac{1}{x^2y}; \frac{3}{xy} = \frac{3x}{x^2y}.$$

$$2. \frac{x}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{x}{(x + y)^2}; \frac{2x}{x^2 + xy} = \frac{2x}{x(x + y)} = \frac{2}{x + y} = \frac{2(x + y)}{(x + y)^2}.$$

□

 **Ví dụ 7.** Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

$$1. \frac{1}{x + 2}; \frac{2}{2x + 4} \text{ và } \frac{3}{3x + 6}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{x + 2}$$

$$2. \frac{1}{x + 3}; \frac{2}{2x - 6} \text{ và } \frac{3}{3x - 9}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x - 3}{(x + 3)(x - 3)}; \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)}; \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)}.$$

$$3. \frac{1}{x^2 - 4}; \frac{2}{x + 2} \text{ và } \frac{3}{x - 2}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{x^2 - 4}; \frac{2x - 4}{x^2 - 4}; \frac{3x + 6}{x^2 - 4}.$$

$$4. \frac{1}{x}; \frac{2}{x + 2} \text{ và } \frac{3}{x(x + 2)}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x + 2}{x(x + 2)}; \frac{2x}{x(x + 2)}; \frac{3}{x(x + 2)}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{Giữ nguyên } \frac{1}{x + 2}; \frac{2}{2x + 4} = \frac{1}{x + 2}; \frac{3}{3x + 6} = \frac{1}{x + 2}.$$

$$2. \frac{1}{x + 3} = \frac{x - 3}{(x + 3)(x - 3)};$$

$$\frac{2}{2x - 6} = \frac{2}{2(x - 3)} = \frac{1}{x - 3} = \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)};$$

$$\frac{3}{3x - 9} = \frac{3}{3(x - 3)} = \frac{1}{x - 3} = \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)}.$$

$$3. \text{Giữ nguyên } \frac{1}{x^2 - 4}; \frac{2}{x + 2} = \frac{2x - 4}{x^2 - 4}; \frac{3}{x - 2} = \frac{3x + 6}{x^2 - 4}.$$

$$4. \frac{1}{x} = \frac{x + 2}{x(x + 2)}; \frac{2}{x + 2} = \frac{2x}{x(x + 2)}; \text{giữ nguyên } \frac{3}{x(x + 2)}.$$

□

 **Ví dụ 8.** Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

1. $\frac{1}{x-2}$; $\frac{2}{2x-4}$ và $\frac{3}{3x-6}$. **ĐS:** $\frac{1}{x-2}$
2. $\frac{1}{x+4}$; $\frac{1}{2x+8}$ và $\frac{3}{x-4}$. **ĐS:** $\frac{2x-8}{2(x-4)(x+4)}$; $\frac{x-4}{2(x-4)(x+4)}$; $\frac{6x+24}{2(x-4)(x+4)}$
3. $\frac{1}{x^2-1}$; $\frac{2}{x-1}$ và $\frac{2}{x+1}$. **ĐS:** $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}$
4. $\frac{1}{2x}$; $\frac{2}{x-2}$ và $\frac{3}{2x(x-2)}$. **ĐS:** $\frac{x-2}{2x(x-2)}$; $\frac{4x}{2x(x-2)}$; $\frac{3}{2x(x-2)}$

 **Lời giải.**

1. Giữ nguyên $\frac{1}{x-2}$; $\frac{2}{2x-4} = \frac{1}{x-2}$; $\frac{3}{3x-6} = \frac{1}{x-2}$.
2. $\frac{1}{x+4} = \frac{2x-8}{2(x-4)(x+4)}$; $\frac{1}{2x+8} = \frac{x-4}{2(x-4)(x+4)}$; $\frac{3}{x-4} = \frac{6x+24}{2(x-4)(x+4)}$.
3. $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{2}{x-1} = \frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{2}{x+1} = \frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}$.
4. $\frac{1}{2x} = \frac{x-2}{2x(x-2)}$; $\frac{2}{x-2} = \frac{4x}{2x(x-2)}$; giữ nguyên $\frac{3}{2x(x-2)}$.

□

 **Ví dụ 9.** Cho hai phân thức $\frac{1}{x^2-ax}$ và $\frac{2}{x-b}$ với $a < b$.

1. Hãy xác định a và b biết rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân thức có mẫu thức chung là $x^3 - 5x^2 + 6x$. **ĐS:** $a = 2, b = 3$
2. Với a và b tìm được hãy viết hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là $x^3 - 5x^2 + 6x$. **ĐS:** $\frac{1}{x^2-2x}$ và $\frac{2}{x-3}$;
 $\frac{x-3}{x(x-2)(x-3)}$ và $\frac{2x^2-4x}{x(x-2)(x-3)}$.

 **Lời giải.**

1. Ta có: $x^3 - 5x^2 + 6x = (x^2 - 2x)(x - 3) = (x - 2)(x^2 - 3x)$. Mà $a < b$ nên suy ra $a = 2$; $b = 3$.
2. Cặp phân thức ban đầu: $\frac{1}{x^2-2x}$ và $\frac{2}{x-3}$.
 Hai phân thức sau khi quy đồng: $\frac{x-3}{x(x-2)(x-3)}$ và $\frac{2x^2-4x}{x(x-2)(x-3)}$.

□

 **Ví dụ 10.** Cho hai phân thức $\frac{1}{x-a}$ và $\frac{2}{x-b}$ với $a < b$.

1. Hãy xác định a và b biết rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân

thức có mẫu thức chung là $x^2 - 5x + 6$.

ĐS: $a = 2, b = 3$.

2. Với a và b tìm được hãy viết hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là $x^2 - 5x + 6$. ĐS: $\frac{1}{x-2}$ và $\frac{2}{x-3}$; $\frac{x-3}{(x-2)(x-3)}$ và $\frac{2x-4}{(x-2)(x-3)}$.

Lời giải.

1. Ta có: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Mà $a < b$ nên suy ra $a = 2; b = 3$.

2. Cặp phân thức ban đầu: $\frac{1}{x-2}$ và $\frac{2}{x-3}$.

Hai phân thức sau khi quy đồng: $\frac{x-3}{(x-2)(x-3)}$ và $\frac{2x-4}{(x-2)(x-3)}$.

□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

1. $\frac{-1}{x^2 - 2x}$ và $\frac{x}{x-2}$.

ĐS: $\frac{-1}{x(x-2)}$; $\frac{x^2}{x(x-2)}$.

2. $\frac{2}{x^2 - 6x + 8}$ và $\frac{3}{x-4}$.

ĐS: $\frac{2}{(x-2)(x-4)}$; $\frac{3x-6}{(x-2)(x-4)}$.

3. $\frac{x-1}{x^2 - 5x + 4}$ và $\frac{1}{x^2 - 4x}$.

ĐS: $\frac{x}{x(x-4)}$; $\frac{1}{x(x-4)}$.

Lời giải.

1. $\frac{-1}{x^2 - 2x} = \frac{-1}{x(x-2)}$; $\frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{x(x-2)}$.

2. $\frac{2}{x^2 - 6x + 8} = \frac{2}{(x-2)(x-4)}$; $\frac{3}{x-4} = \frac{3x-6}{(x-2)(x-4)}$.

3. $\frac{x-1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{x-4} = \frac{x}{x(x-4)}$; $\frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{x(x-4)}$.

□

 **Bài 2.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

1. $\frac{25}{14x^2y}$ và $\frac{14}{21xy^5}$.

ĐS: $\frac{75y^4}{42x^2y^5}$; $\frac{28x}{42x^2y^5}$.

2. $\frac{x-y}{8y^2 - 2x^2}$ và $\frac{4}{x-2y}$.

ĐS: $\frac{y-x}{2(x-2y)(x+2y)}$; $\frac{8(x+2y)}{2(x-2y)(x+2y)}$.

Lời giải.

$$1. \frac{25}{14x^2y} = \frac{75y^4}{42x^2y^5}; \frac{14}{21xy^5} = \frac{28x}{42x^2y^5}.$$

$$2. \frac{x-y}{8y^2-2x^2} = \frac{x-y}{2(4y^2-x^2)} = \frac{y-x}{2(x-2y)(x+2y)}; \frac{4}{x-2y} = \frac{8(x+2y)}{2(x-2y)(x+2y)}.$$

□

 **Bài 3.** Đưa các phân thức sau về cùng mẫu thức:

$$1. \frac{1}{x-3}; \frac{-1}{2x-6} \text{ và } \frac{3}{3x-9}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{2}{2(x-3)}; \frac{-1}{2(x-3)}; \frac{2}{2(x-3)}.$$

$$2. \frac{1}{x^2-2x}; \frac{2}{2x-4} \text{ và } \frac{x}{x-2}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{x(x-2)}; \frac{x}{x(x-2)}; \frac{x^2}{x(x-2)}.$$

$$3. \frac{1}{x^2-1}; \frac{2}{x+1} \text{ và } \frac{1}{x-1}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{1}{(x-1)(x+1)}; \frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}; \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{1}{x-3} = \frac{2}{2(x-3)}; \frac{-1}{2x-6} = \frac{-1}{2(x-3)}; \frac{3}{3x-9} = \frac{1}{x-3} = \frac{2}{2(x-3)}.$$

$$2. \frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{x(x-2)}; \frac{2}{2x-4} = \frac{1}{x-2} = \frac{x}{x(x-2)}; \frac{x}{x-2} = \frac{x^2}{x(x-2)}.$$

$$3. \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}; \frac{2}{x+1} = \frac{2x-2}{(x-1)(x+1)}; \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}.$$

□

 **Bài 4.** Cho hai phân thức $\frac{2}{x^2-ax}$ và $\frac{-1}{x+b}$ với $a; b > 0$.

1. Hãy xác định a và b biết rằng khi quy đồng mẫu thức chúng trở thành những phân thức có mẫu thức chung là $x^3 - x^2 - 6x$. **ĐS:** $a = 3; b = 2$.

2. Với a và b tìm được hãy viết hai phân thức đã cho và hai phân thức thu được sau khi quy đồng với mẫu thức chung là $x^3 - x^2 - 6x$.

$$\text{ĐS: } \frac{2}{x^2-3x} \text{ và } \frac{-1}{x+2}; \frac{2x+4}{x(x+2)(x-3)} \text{ và } \frac{-x^2+3x}{x(x+2)(x-3)}.$$

 **Lời giải.**

1. Ta có: $x^3 - x^2 - 6x = x(x+2)(x-3) = (x^2+2x)(x-3) = (x+2)(x^2-3x)$.
Mà $a; b > 0$ nên suy ra $a = 3; b = 2$.

2. Cặp phân thức ban đầu: $\frac{2}{x^2-3x}$ và $\frac{-1}{x+2}$.

Hai phân thức sau khi quy đồng: $\frac{2x+4}{x(x+2)(x-3)}$ và $\frac{-x^2+3x}{x(x+2)(x-3)}$.

□

§5 Phép cộng các phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

- Quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu thức:** Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.
- Quy tắc cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau:** Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức, đưa về quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu thức.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 58. Cộng các phân thức đại số thông thường

Áp dụng hai quy tắc đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết*.

✦✦✦ BÀI TẬP MẪU ✦✦✦

 **Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{2x-4}{5} + \frac{3x+14}{5}. \quad \text{ĐS: } x+2. \quad \text{b) } \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5}. \quad \text{ĐS: } 3.$$

Lời giải.

$$1. \frac{2x-4}{5} + \frac{3x+14}{5} = \frac{(2x-4) + (3x+14)}{5} = \frac{5x+10}{5} = \frac{5(x+2)}{5} = x+2.$$

$$2. \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5} = \frac{(x+1) + (x-18) + (x+2)}{x-5} = \frac{3x-15}{x-5} = \frac{3(x-5)}{x-5} = 3.$$

□

 **Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{x-4}{7} + \frac{6x+4}{7}. \quad \text{ĐS: } x. \quad \text{b) } \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-10}{x-2} + \frac{x+3}{x-2}. \quad \text{ĐS: } 3.$$

Lời giải.

$$1. \frac{x-4}{7} + \frac{6x+4}{7} = \frac{(x-4) + (6x+4)}{7} = \frac{7x}{7} = x.$$

$$2. \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-10}{x-2} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{(x+1) + (x-10) + (x+3)}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} = 3.$$

□

 **Ví dụ 3.** Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1}. \quad \text{ĐS: } \frac{x-1}{2(x+1)}. \quad b) \frac{2x}{x^2+4x+4} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{2-x}{(x+2)^2}. \quad \text{ĐS: } 1.$$

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1} \\ = & \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{-2x}{(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{(x+1)^2}{2(x-1)(x+1)} + \frac{-4x}{2(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{(x+1)^2 - 4x}{2(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{x^2 - 2x + 1}{2(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)} \\ = & \frac{x-1}{2(x+1)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{x^2+4x+4} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{2-x}{(x+2)^2} \\ = & \frac{2x}{(x+2)^2} + \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2} + \frac{2-x}{(x+2)^2} \\ = & \frac{2x + (x+1)(x+2) + (2-x)}{(x+2)^2} \\ = & \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2)^2} \\ = & \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2} \\ = & 1 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{6}{x^2+4x} + \frac{3}{2x+8}. \quad \text{ĐS: } \frac{3}{2x}. \quad b) \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-14}{x^2-4}. \quad \text{ĐS: } 2.$$

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{6}{x^2+4x} + \frac{3}{2x+8} &= \frac{12}{2x(x+4)} + \frac{3x}{2x(x+4)} \\
 &= \frac{3x+12}{2x(x+4)} \\
 &= \frac{3(x+4)}{2x(x+4)} \\
 &= \frac{3}{2x}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-14}{x^2-4} \\
 &= \frac{(x+1)(x+2)}{x^2-4} + \frac{(x-2)^2}{x^2-4} + \frac{x-14}{x^2-4} \\
 &= \frac{2x^2-8}{x^2-4} \\
 &= \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

□

Dạng 59. Cộng các phân thức đại số kết hợp quy tắc đổi dấu

Bước 1. Áp dụng quy tắc đổi dấu phân thức: $\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$; $\frac{A}{-B} = \frac{-A}{B}$;

Bước 2. Thực hiện quy tắc cộng theo Dạng 1.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3}$. ĐS: $x-3$. b) $\frac{2}{x+2} + \frac{-4}{2-x} + \frac{5x+2}{4-x^2}$. ĐS: $\frac{1}{x-2}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
 &\frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3} \\
 &= \frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x^2-2x}{x-3} + \frac{5-4x}{x-3} \\
 &= \frac{(4-x^2) + (2x^2-2x) + (5-4x)}{x-3} \\
 &= \frac{x^2-6x+9}{x-3} \\
 &= \frac{(x-3)^2}{x-3} \\
 &= x-3
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{x+2} + \frac{-4}{2-x} + \frac{5x+2}{4-x^2} \\
 &= \frac{2}{x+2} + \frac{4}{x-2} + \frac{-5x-2}{x^2-4} \\
 &= \frac{2(x-2)}{x^2-4} + \frac{4(x+2)}{x^2-4} + \frac{-5x-2}{x^2-4} \\
 &= \frac{2(x-2) + 4(x+2) + (-5x-2)}{x^2-4} \\
 &= \frac{x+2}{x^2-4} \\
 &= \frac{1}{x-2}
 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{2x^2 - x}{x - 1} + \frac{x + 1}{1 - x} + \frac{2 - x^2}{x - 1}$. **ĐS:** $x - 1$. b) $\frac{2}{x + 1} + \frac{-4}{1 - x} + \frac{5x + 1}{1 - x^2}$. **ĐS:** $\frac{1}{x - 1}$.

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2 - x}{x - 1} + \frac{x + 1}{1 - x} + \frac{2 - x^2}{x - 1} \\ = & \frac{2x^2 - x}{x - 1} + \frac{-x - 1}{x - 1} + \frac{2 - x^2}{x - 1} \\ = & \frac{(2x^2 - x) + (-x - 1) + (2 - x^2)}{x - 1} \\ = & \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \\ = & x - 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x + 1} + \frac{-4}{1 - x} + \frac{5x + 1}{1 - x^2} \\ = & \frac{2}{x + 1} + \frac{4}{x - 1} + \frac{-(5x + 1)}{x^2 - 1} \\ = & \frac{2(x - 1)}{x^2 - 1} + \frac{4(x + 1)}{x^2 - 1} + \frac{-5x - 1}{x^2 - 1} \\ = & \frac{2x - 2 + 4x + 4 - 5x - 1}{x^2 - 1} \\ = & \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} \\ = & \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 3.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{y}{2x^2 - xy} + \frac{4x}{y^2 - 2xy}$. **ĐS:** $\frac{-2x - y}{xy}$. b) $\frac{x}{x^2 + xy} + \frac{x - 3y}{y^2 - x^2} + \frac{x}{xy - x^2}$. **ĐS:** $\frac{-1}{x + y}$.

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 & \frac{y}{2x^2 - xy} + \frac{4x}{y^2 - 2xy} \\
 = & \frac{y}{x(2x - y)} + \frac{4x}{y(y - 2x)} \\
 = & \frac{y^2}{xy(2x - y)} + \frac{-4x^2}{xy(2x - y)} \\
 = & \frac{y^2 - 4x^2}{xy(2x - y)} \\
 = & \frac{-2x - y}{xy}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \frac{x}{x^2 + xy} + \frac{x - 3y}{y^2 - x^2} + \frac{x}{xy - x^2} \\
 = & \frac{x}{x(x + y)} + \frac{-x + 3y}{x^2 - y^2} + \frac{-x}{x(x - y)} \\
 = & \frac{1}{x + y} + \frac{-x + 3y}{x^2 - y^2} + \frac{-1}{x - y} \\
 = & \frac{x - y}{x^2 - y^2} + \frac{-x + 3y}{x^2 - y^2} + \frac{-x - y}{x^2 - y^2} \\
 = & \frac{(x - y) + (-x + 3y) + (-x - y)}{x^2 - y^2} \\
 = & \frac{-x + y}{x^2 - y^2} \\
 = & \frac{-1}{x + y}
 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{y}{x^2 - xy} + \frac{x}{y^2 - xy}$. ĐS: $\frac{-x - y}{xy}$. b) $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{2}{y^2 - x^2} + \frac{1}{xy - x^2}$. ĐS: $\frac{-2}{x(x - y)}$.

 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 & \frac{y}{x^2 - xy} + \frac{x}{y^2 - xy} \\
 = & \frac{y}{x(x - y)} + \frac{x}{y(y - x)} \\
 = & \frac{y^2}{xy(x - y)} + \frac{-x^2}{xy(x - y)} \\
 = & \frac{y^2 - x^2}{xy(x - y)} \\
 = & \frac{-x - y}{xy}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x^2 + xy} + \frac{2}{y^2 - x^2} + \frac{1}{xy - x^2} \\
 = & \frac{1}{x(x + y)} + \frac{-2}{x^2 - y^2} + \frac{-1}{x(x - y)} \\
 = & \frac{x - y}{x(x^2 - y^2)} + \frac{-2x}{x(x^2 - y^2)} + \frac{-x - y}{x(x^2 - y^2)} \\
 = & \frac{(x - y) + (-2x) + (-x - y)}{x(x^2 - y^2)} \\
 = & \frac{-2x - 2y}{x(x^2 - y^2)} \\
 = & \frac{-2}{x(x - y)}
 \end{aligned}$$

□

Dạng 60. Rút gọn phân thức và tính giá trị biểu thức đó

Bước 1. Rút gọn biểu thức theo Dạng 1 hoặc Dạng 2;

Bước 2. Tính giá trị biểu thức sau khi rút gọn.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho biểu thức: $P = \frac{2}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 + x + 1} + \frac{4x}{1 - x^3}$ với $x \neq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P ;

$$P = \frac{2}{x(x^3 - 1)}.$$

ĐS: b) Tính giá trị biểu thức P tại $x = 2$. **ĐS:**

$$\frac{1}{7}.$$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 + x + 1} + \frac{4x}{1 - x^3} \\ &= \frac{2}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2 + x + 1} + \frac{-4x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2(x^2 + x + 1)}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} + \frac{2x(x-1)}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} + \frac{-4x^2}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2}{x(x^3 - 1)}. \end{aligned}$$

2. Với $x = 2$ thế vào P ta có: $P = \frac{2}{2(2^3 - 1)} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$

□

Ví dụ 2. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x}$ với $x \neq 0; x \neq -1$.

a) Rút gọn biểu thức P ; **ĐS:** $P = x + 1$. b) Tính giá trị biểu thức P tại $x = 1$. **ĐS:** 2.

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x} = \frac{x^3}{x(x+1)} + \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x+2}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x(x+1)} = \frac{x(x+1)^2}{x(x+1)} = x + 1. \end{aligned}$$

2. Với $x = 1$ thế vào P ta có: $P = 1 + 1 = 2.$



Dạng 61. Bài toán thực tế

Bước 1. Thiết lập các biểu thức theo yêu cầu của đề bài;

Bước 2. Sử dụng hai quy tắc cộng kết hợp với quy tắc đổi dấu.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

Ví dụ 1. Một đội máy xúc nhận nhiệm vụ xúc 11600 m^3 . Giai đoạn đầu, đội chỉ xúc được 5000 m^3 với năng suất trung bình của máy xúc là $x \text{ m}^3/\text{ngày}$. Giai đoạn sau, năng suất làm việc của máy xúc tăng được $25 \text{ m}^3/\text{ngày}$. Khi đó:

1. Hãy biểu diễn:

i) Thời gian xúc 5000 m^3 ở giai đoạn đầu tiên; ĐS: $\frac{5000}{x}$ ngày

ii) Thời gian làm nốt phần việc còn lại ở giai đoạn sau; ĐS: $\frac{6600}{x+25}$ ngày

iii) Tổng thời gian hoàn thành công việc. ĐS: $\frac{5000}{x} + \frac{6600}{x+25}$ ngày.

2. Giả sử năng suất trung bình của máy xúc là $250 \text{ m}^3/\text{ngày}$ thì tổng thời gian hoàn thành công việc là bao nhiêu ngày? ĐS: 44 ngày.

Lời giải.

1. Gọi ý công thức: Khối lượng công việc = thời gian làm việc $\times$ năng suất.

i) Thời gian xúc 5000 m^3 ở giai đoạn đầu tiên: $\frac{5000}{x}$ (ngày);

ii) Thời gian làm phần việc còn lại = (khối lượng công việc còn lại):(năng suất mới), được biểu thức $\frac{6600}{x+25}$ (ngày);

iii) Tổng thời gian hoàn thành công việc: $T = \frac{5000}{x} + \frac{6600}{x+25}$ (ngày).

2. Thay $x = 250$ vào biểu thức T , thì tổng thời gian hoàn thành công việc của đội máy xúc là $T = 44$ (ngày).



Ví dụ 2. Một tàu du lịch đi từ Hà Nội tới Việt Trì, sau đó nó nghỉ lại tại Việt Trì 2 giờ trước khi quay trở lại Hà Nội. Quãng đường từ Hà Nội tới Việt Trì là 70 km. Vận tốc của dòng nước là 5 km/h. Gọi vận tốc thực của tàu là $x \text{ km/h}$.

1. Hãy biểu diễn:

i) Thời gian tàu đi ngược dòng từ Hà Nội tới Việt Trì; ĐS: $\frac{70}{x-5}$ (giờ)

ii) Thời gian tàu đi xuôi dòng từ Việt Trì tới Hà Nội; ĐS: $\frac{70}{x+5}$ (giờ)

iii) Thời gian kể từ lúc tàu xuất phát đến khi tàu quay trở về Hà Nội. ĐS: $\frac{70}{x-5} + \frac{70}{x+5} + 2$ (giờ).

2. Tính thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi tàu về tới Hà Nội, biết rằng vận tốc lúc ngược dòng của tàu là 20 km/h. ĐS: 7 giờ 50 phút.

 Lời giải.

- Áp dụng công thức chuyển động $s = v \cdot t$;
 Trong đó s là quãng đường; v là vận tốc; t là thời gian.
 Ta có vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước;
 Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng - vận tốc dòng nước;
 i) Thời gian tàu đi ngược dòng từ Hà Nội tới Việt Trì: $\frac{70}{x-5}$ (giờ);
 ii) Thời gian tàu đi xuôi dòng từ Việt Trì tới Hà Nội: $\frac{70}{x+5}$ (giờ);
 iii) Thời gian kể từ lúc tàu xuất phát đến khi tàu quay trở về Hà Nội.

$$T = \frac{70}{x-5} + \frac{70}{x+5} + 2 \text{ (giờ).}$$

Vận tốc thực: 25 km/h. Thay $x = 25$ vào biểu thức T.
 Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi tàu về tới Hà Nội: $\frac{47}{6}$ giờ = 7 giờ 50 phút.

□

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{11x-4}{x-1} + \frac{10x+4}{2-2x}$. **ĐS:** 6. b) $\frac{1}{x+2} + \frac{5}{2x^2+3x-2}$. **ĐS:** $\frac{2}{2x-1}$.

c) $\frac{-3x^2}{x^3+1} + \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1}$. **ĐS:** $\frac{-2(x-1)}{x^2-x+1}$. d) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}$. **ĐS:** $\frac{8}{1-x^8}$.

 Lời giải.

1. $\frac{11x-4}{x-1} + \frac{10x+4}{2-2x} = \frac{11x-4}{x-1} + \frac{-2(5x+2)}{2(x-1)} = \frac{11x-4}{x-1} + \frac{-5x-2}{x-1} = \frac{6x-6}{x-1} = \frac{6(x-1)}{x-1} = 6.$

2. Ta có: $2x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x(x+2) - (x+2) = (2x-1)(x+2).$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} + \frac{5}{2x^2+3x-2} &= \frac{1}{x+2} + \frac{5}{(2x-1)(x+2)} = \frac{2x-1}{(2x-1)(x+2)} + \frac{5}{(2x-1)(x+2)} \\ &= \frac{2x+4}{(2x-1)(x+2)} = \frac{2}{2x-1}. \end{aligned}$$

3. Ta có: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$

$$\begin{aligned} \frac{-3x^2}{x^3+1} + \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{-3x^2}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{-2(x^2-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-2(x-1)}{x^2-x+1}. \end{aligned}$$

4. Ta có: $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4) = (1-x^4)(1+x^4) = 1-x^8$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} &= \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{2(1+x^2) + 2(1-x^2)}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{4(1+x^4) + 4(1-x^4)}{1-x^8} = \frac{8}{1-x^8}. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

1. $\frac{x+4y}{x^2-2xy} + \frac{x+y}{2y^2-xy}$. **ĐS:** $\frac{-x-2y}{xy}$.

2. $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$. **ĐS:** 0.

 **Lời giải.**

1.

$$\begin{aligned} \frac{x+4y}{x^2-2xy} + \frac{x+y}{2y^2-xy} &= \frac{x+4y}{x(x-2y)} + \frac{-x-y}{y(x-2y)} = \frac{y(x+4y)}{xy(x-2y)} + \frac{x(-x-y)}{xy(x-2y)} \\ &= \frac{4y^2-x^2}{xy(x-2y)} = \frac{-x-2y}{xy}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)} &= \frac{(z-x) + (x-y) + (y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{0}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0. \end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2+x}{x^3+x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+1}$

a) Rút gọn biểu thức P . **ĐS:** $P = \frac{x+1}{x^2+1}$. b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x=1$. **ĐS:** 1.

 **Lời giải.**

1. Ta có: $x^3+x^2+x+1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$

$$P = \frac{x^2+x}{x^3+x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

2. Thay $x=1$ vào P ta có: $P = \frac{1+1}{1^2+1} = 1$.

□

Bài 4. Đầu tháng 5 năm 2017, toàn thế giới ghi nhận hàng chục ngàn máy tính bị nhiễm một loại virus mới mang tên WannaCry. Theo ước tính, có 150000 thiết bị điện tử trở thành nạn nhân của cuộc tấn công mạng này. Trong thời gian đầu virus mới được phát tán, trung bình một ngày ghi nhận x thiết bị nhiễm virus và giai đoạn này khiến 60000 thiết bị bị thiệt hại. Sau đó tốc độ lan truyền gia tăng 500 thiết bị nhiễm virus mỗi ngày.

1. Hãy biểu diễn:

i) Thời gian 60000 thiết bị đầu tiên nhiễm virus;

$$\text{ĐS: } \frac{60000}{x}.$$

ii) Thời gian số thiết bị còn lại bị lây nhiễm;

$$\text{ĐS: } \frac{90000}{x+500}.$$

iii) Thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus.

$$\text{ĐS: } \frac{90000}{x+500} + \frac{60000}{x}.$$

2. Tính thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus với $x = 4000$.

$$\text{ĐS: } 35.$$

Lời giải.

1.

i) Thời gian 60000 thiết bị đầu tiên nhiễm virus: $\frac{60000}{x}$ (ngày);

ii) Thời gian số thiết bị còn lại bị lây nhiễm: $\frac{150000 - 60000}{x+500} = \frac{90000}{x+500}$ (ngày);

iii) Thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus là $\frac{90000}{x+500} + \frac{60000}{x}$ (ngày).

2. Thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus với $x = 4000$ là

$$\frac{90000}{4000+500} + \frac{60000}{4000} = 35 \text{ (ngày)}.$$

□

§6 Phép trừ các phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Phân thức đối

- + Phân thức đối của $\frac{A}{B}$ là $-\frac{A}{B}$.
- + Hai phân thức gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.

2. Quy tắc trừ hai phân thức đại số

Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng phân thức $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của phân thức $\frac{C}{D}$, tức là

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$$

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 62. Áp dụng phép trừ hai phân thức để thực hiện phép tính

Sử dụng phân thức đối trong phép trừ để chuyển thành phép cộng các phân thức đại số.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

$$1. \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-2}{x-1} \quad \text{ĐS: } \frac{x+1}{x-1}$$

$$2. \frac{2(2xy-1)}{3x^2y^2} - \frac{xy-2}{3x^2y^2} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{xy}$$

$$3. \frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$4. \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{y^2}{xy-y^2} - \frac{x^2}{x^2-xy} \quad \text{ĐS: } -\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}$$

 Lời giải.

$$1. \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{(2x-1) - (x-2)}{x-1} = \frac{2x-1-x+2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$2. \frac{2(2xy-1)}{3x^2y^2} - \frac{xy-2}{3x^2y^2} = \frac{(4xy-2) - (xy-2)}{3x^2y^2} = \frac{3xy}{3x^2y^2} = \frac{1}{xy}.$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} - \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^2+x+1}{x} - \frac{x^2-x+1}{x} = \frac{2x}{x} = 2. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{y^2}{xy-y^2} - \frac{x^2}{x^2-xy} &= \frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)} - \frac{y^2}{y(x-y)} - \frac{x^2}{x(x-y)} \\ &= \frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)} - \frac{y}{x-y} - \frac{x}{x-y} \\ &= \frac{(x^2+y^2) - y(x+y) - x(x+y)}{(x-y)(x+y)} \\ &= -\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}. \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{3x-2}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1} & \text{ĐS: } \frac{x-1}{x+1} & \text{b) } \frac{2(xy-1)}{x^2y^2} - \frac{xy-2}{x^2y^2} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{xy} \\ \text{c) } \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} & \text{ĐS: } \frac{x+1}{x} & \text{d) } \frac{1}{xy-y^2} - \frac{1}{x^2-xy} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{xy} \end{array}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{3x-2}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{(3x-2) - (2x-1)}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$2. \frac{2(xy-1)}{x^2y^2} - \frac{xy-2}{x^2y^2} = \frac{(2xy-2) - (xy-2)}{x^2y^2} = \frac{xy}{x^2y^2} = \frac{1}{xy}.$$

$$3. \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}.$$

$$4. \frac{1}{xy-y^2} - \frac{1}{x^2-xy} = \frac{1}{y(x-y)} - \frac{1}{x(x-y)} = \frac{x}{xy(x-y)} - \frac{y}{xy(x-y)} = \frac{x-y}{xy(x-y)} = \frac{1}{xy}.$$

□

Dạng 63. Tìm phân thức thỏa mãn yêu cầu

- Đưa phân thức cần tìm về riêng một vế.
- Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc trừ để rút gọn lại biểu thức. Từ đó suy ra phân thức cần tìm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm phân thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện: $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - P(x) = \frac{2x(1-x)}{9-x^2}$.
ĐS: $\frac{2}{x-3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - P(x) &= \frac{2x(1-x)}{9-x^2} \\ \Rightarrow P(x) &= \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2} \\ &= \frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9} - \frac{(1-x)(x-3)}{x^2-9} - \frac{-2x(1-x)}{x^2-9} \\ &= \frac{(x^2+4x+3) - (-x^2+4x-3) - (2x^2-2x)}{x^2-9} \\ &= \frac{2x+6}{x^2-9} = \frac{2}{x-3}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Tìm phân thức $Q(x)$ thỏa mãn đẳng thức sau: $Q(x) + \frac{x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$.
ĐS: $\frac{3}{x-3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} Q(x) + \frac{x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} &= \frac{x-1}{x^2-5x+6} \\ \Rightarrow Q(x) &= \frac{x-1}{x^2-5x+6} - \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-3} \\ &= \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} - \frac{(x-3)^2}{(x-2)(x-3)} + \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x-1 - (x^2-6x+9) + (x^2-4x+4)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{3x-6}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3}. \end{aligned}$$

□

Dạng 64. Phân tích một phân thức thành tổng (hiệu) của các phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất

- Với bài toán đơn giản, ta có thể sử dụng kĩ thuật thêm, bớt hệ số để đưa bài toán về dạng tách phân số như sau: $\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
- Với bài toán phức tạp hơn, ta đặt trước các tử số là các biến $A, B, C, \dots$ Từ đó quy đồng phân thức, tìm hệ số $A, B, C, \dots$ bằng cách chọn các giá trị x đặc biệt.

BÀI TẬP MẪU

Giáo viên:

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức $\frac{1}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right)$.

Áp dụng tính nhanh biểu thức sau:

$$1. P = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2017 \cdot 2018}. \quad \text{ĐS: } \frac{2017}{2018}.$$

$$2. Q(x) = \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \cdots + \frac{1}{(x+2016)(x+2018)}. \quad \text{ĐS: } \frac{1009}{x(x+2018)}.$$

Lời giải.

$$\frac{1}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{x+a-x}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \left[\frac{x+a}{x(x+a)} - \frac{x}{x(x+a)} \right] = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right).$$

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2017 \cdot 2018} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2018} = \frac{2017}{2018}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \cdots + \frac{1}{(x+2016)(x+2018)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \cdots + \frac{1}{x+2016} - \frac{1}{x+2018} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2018} \right) = \frac{1009}{x(x+2018)}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. 1. Chứng tỏ rằng hiệu của phân thức dưới đây có tử bằng 1: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
ĐS: $\frac{1}{x(x+1)}$.

2. Tính nhanh biểu thức sau: $Q(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$.
ĐS: $\frac{100}{x(x+100)}$.

Lời giải.

$$1. \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

2.

$$Q(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+99} - \frac{1}{x+100} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+100} = \frac{100}{x(x+100)}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Phân tích phân thức thành tổng (hiệu) của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

a) $\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}$. **ĐS:** $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$. b) $\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)}$. **ĐS:** $\frac{2}{2x-1} - \frac{3}{x+2}$.

 **Lời giải.**

1. $\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-3+x-2}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$.

2. Đặt $\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2}$

Quy đồng, tử thức thu được $-4x+7 = A(x+2) + B(2x-1)$.

Cho $x = -2 \Rightarrow B = -3$; Cho $x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2$.

Vậy ta có $\frac{-4x+7}{(2x-1)(x+2)} = \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{x+2}$.

□

Ví dụ 4. Phân tích phân thức thành tổng (hiệu) của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

a) $\frac{2x+2}{x(x+2)}$. **ĐS:** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$. b) $\frac{-x+12}{(x-2)(x+3)}$. **ĐS:** $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+3}$.

 **Lời giải.**

1. $\frac{2x+2}{x(x+2)} = \frac{x+x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$.

2. Đặt $\frac{-x+12}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$

Quy đồng, tử thức thu được $-x+12 = A(x+3) + B(x-2)$.

Cho $x = -3 \Rightarrow B = -3$; Cho $x = 2 \Rightarrow A = 2$.

Vậy ta có $\frac{-x+12}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+3}$.

□

Dạng 65. Bài toán thực tế

Bước 1. Thiết lập các biểu thức theo yêu cầu của đề bài.

Bước 2. Áp dụng quy tắc cộng, trừ phân thức đại số để tìm ra kết quả của bài toán.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Công ty da giày Hải Phòng nhận sản xuất 10000 đôi giày cho một đối tác nước ngoài với thời hạn là x ngày. Do cải tiến kĩ thuật, công ty không những hoàn thành trước kế hoạch đề ra một ngày mà còn sản xuất thêm được 200 đôi giày.

1. Hãy biểu diễn qua x :

- i) Số lượng đôi giày công ty phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch. **ĐS:** $\frac{10000}{x}$
- ii) Số lượng đôi giày thực tế công ty đã sản xuất được trong một ngày. **ĐS:** $\frac{10200}{x-1}$
- iii) Số lượng đôi giày làm thêm trong một ngày. **ĐS:** $\frac{200x + 10000}{x(x-1)}$.

2. Tính số lượng đôi giày mà công ty làm thêm trong một ngày với $x = 25$. **ĐS:** 25.

Lời giải.

1.

- i) Số lượng đôi giày công ty phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch là $\frac{10000}{x}$.
- ii) Số lượng đôi giày thực tế công ty đã sản xuất được trong một ngày là $\frac{10000 + 200}{x-1} = \frac{10200}{x-1}$.
- iii) Số lượng đôi giày làm thêm trong một ngày là $M = \frac{10200}{x-1} - \frac{10000}{x} = \frac{200x + 10000}{x(x-1)}$.

2. Số lượng đôi giày mà công ty làm thêm trong một ngày với $x = 25$:

$$M = \frac{200 \cdot 25 + 10000}{25(25-1)} = 25.$$

□

Ví dụ 2. Một công ty may mặc phải sản xuất 10000 sản phẩm trong x ngày. Khi thực hiện không những đã làm xong sớm một ngày mà còn làm thêm được 80 sản phẩm.

1. Hãy biểu diễn qua x :

- i) Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch. **ĐS:** $\frac{10000}{x}$
- ii) Số lượng sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày. **ĐS:** $\frac{10080}{x-1}$
- iii) Số sản phẩm làm thêm trong một ngày. **ĐS:** $\frac{80x + 10000}{x(x-1)}$.

2. Tính số sản phẩm làm thêm trong một ngày với $x = 25$. **ĐS:** 20.

Lời giải.

1.

- i) Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch là $\frac{10000}{x}$.
- ii) Số sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày là $\frac{10000 + 80}{x-1} = \frac{10080}{x-1}$.
- iii) Số sản phẩm làm thêm trong một ngày là $M = \frac{10080}{x-1} - \frac{10000}{x} = \frac{80x + 10000}{x(x-1)}$.

2. Số sản phẩm làm thêm trong một ngày với $x = 25$:

$$M = \frac{80 \cdot 25 + 10000}{25(25 - 1)} = 20.$$

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{3x+4}{x^3y^2} - \frac{4-x}{x^3y^2} & \text{ĐS: } \frac{4}{x^2y^2} & \text{b) } \frac{x^2+2}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} & \text{ĐS: } \frac{1}{x^2-x+1} \\ \text{c) } \frac{1}{x-1} - \frac{5x-4}{x^2-x} & \text{ĐS: } \frac{-4}{x} & \text{d) } \frac{x}{xy-y^2} - \frac{y-2x}{xy-x^2} & \text{ĐS: } \frac{x-y}{xy} \end{array}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{3x+4}{x^3y^2} - \frac{4-x}{x^3y^2} = \frac{(3x+4) - (4-x)}{x^3y^2} = \frac{4}{x^3y^2}.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} &= \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x^2+2-x^2+x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{1}{x^2-x+1}. \end{aligned}$$

$$3. \frac{1}{x-1} - \frac{5x-4}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{5x-4}{x(x-1)} = \frac{x}{x(x-1)} - \frac{5x-4}{x(x-1)} = \frac{x-5x+4}{x(x-1)} = \frac{-4x+4}{x(x-1)} = \frac{-4}{x}.$$

$$4. \frac{x}{xy-y^2} - \frac{y-2x}{xy-x^2} = \frac{x}{y(x-y)} + \frac{y-2x}{x(x-y)} = \frac{x^2+y(y-2x)}{xy(x-y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x-y)} = \frac{x-y}{xy}.$$

□

 **Bài 2.** Tìm phân thức $P(x)$ thỏa mãn đẳng thức sau:

$$1. \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - P(x) = \frac{6x-4}{x^2-1} \quad \text{ĐS: } P(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$2. \frac{2x+4}{x^3-1} - P(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \quad \text{ĐS: } \frac{-x}{x^2+x+1}.$$

 **Lời giải.**

1.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - P(x) &= \frac{6x-4}{x^2-1} \\ \Rightarrow P(x) &= \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{6x-4}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x+1)}{x^2-1} + \frac{3(x-1)}{x^2-1} + \frac{-6x+4}{x^2-1} \\ &= \frac{x^2+x+3x-3-6x+4}{x^2-1} \\ &= \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \\ &= \frac{x-1}{x+1}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{2x+4}{x^3-1} - P(x) &= \frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \\ \Rightarrow P(x) &= \frac{2x+4}{x^3-1} - \frac{2}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+1} \\ &= \frac{2x+4}{x^3-1} + \frac{(-2)(x^2+x+1)}{x^3-1} + \frac{(x-1)(x+2)}{x^3-1} \\ &= \frac{-x^2+x}{x^3-1} \\ &= \frac{-x}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

□

Bài 3. Tính nhanh biểu thức sau:

$$Q(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35}. \quad \text{ĐS: } Q(x) = \frac{4}{(x-1)(x+7)}.$$

Lời giải.

Ta sử dụng phương pháp tách mẫu các phân thức để xuất hiện thừa số.

Áp dụng đẳng thức $\frac{1}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right)$ với $a = 2$.

$$\begin{aligned}Q(x) &= \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+7)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+7} \right) \\ &= \frac{4}{(x-1)(x+7)}.\end{aligned}$$

□

Bài 4. Phân tích phân thức thành tổng (hiệu) của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

$$1. P(x) = \frac{1}{(x+1)(2-x)}.$$

$$\text{ĐS: } P(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2-x} \right).$$

$$2. Q(x) = \frac{-7}{(2x+3)(x-2)}.$$

$$\text{ĐS: } Q(x) = \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-2}.$$

 Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{(x+1)(2-x)} = \frac{1}{3} \left[\frac{x+1+2-x}{(x+1)(2-x)} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{x+1}{(x+1)(2-x)} + \frac{2-x}{(x+1)(2-x)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2-x} \right). \end{aligned}$$

$$2. \text{ Đặt } \frac{-7}{(2x+3)(x-2)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{x-2}$$

Quy đồng, tử thức thu được $-7 = A(x-2) + B(2x+3)$.

$$\text{Cho } x = 2 \Rightarrow B = -1; \text{ Cho } x = \frac{-3}{2} \Rightarrow A = 2.$$

$$\text{Vậy ta có } Q(x) = \frac{-7}{(2x+3)(x-2)} = \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-2}.$$

□

 **Bài 5.** Nếu mua lẻ thì giá một chiếc bút bi là x đồng. Nhưng nếu mua từ 10 bút trở lên thì giá mỗi chiếc rẻ hơn 100 đồng. Cô Dung dùng 180000 đồng để mua bút cho văn phòng. Hãy biểu diễn qua x :

$$1. \text{ Tổng số bút mua được khi mua lẻ. } \quad \text{ĐS: } \frac{180000}{x}.$$

$$2. \text{ Tổng số bút mua được khi mua cùng một lúc, biết rằng giá tiền một bút không quá 1200 đồng. } \quad \text{ĐS: } \frac{180000}{x-100}.$$

$$3. \text{ Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ. } \quad \text{ĐS: } \frac{18000000}{x(x-100)}.$$

 Lời giải.

$$1. \text{ Tổng số bút mua được khi mua lẻ là } \frac{180000}{x}.$$

$$2. \text{ Tổng số bút mua được khi mua cùng một lúc là } \frac{180000}{x-100} \text{ với } x \geq 1200 \text{ đồng.}$$

$$3. \text{ Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ là } \frac{180000}{x} - \frac{180000}{x-100} = \frac{18000000}{x(x-100)}.$$

□

§7 Phép nhân các phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 66. Áp dụng phép nhân hai phân thức để thực hiện phép tính

Vận dụng quy tắc đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết* để thực hiện yêu cầu của bài toán.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{6x}{15y^3} \cdot \left(-\frac{5y^2}{3x^2}\right)$	ĐS: $-\frac{2}{3xy}$	b) $\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$	ĐS: $\frac{x+2}{x+1}$
c) $\frac{3-3x}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x-1}$	ĐS: $\frac{-3}{x+3}$	d) $\frac{6x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{3x+2}$	ĐS: $\frac{2x}{x+2}$

Lời giải.

- $\frac{6x}{15y^3} \cdot \left(-\frac{5y^2}{3x^2}\right) = -\frac{6x \cdot 5y^2}{15y^3 \cdot 3x^2} = -\frac{30xy^2}{45x^2y^3} = -\frac{2}{3xy}$.
- $\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x^2-4)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$.
- $\frac{3-3x}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x-1} = \frac{(3-3x)(x-3)}{(x^2-9)(x-1)} = \frac{3(1-x)(x-3)}{(x+3)(x-3)(x-1)} = \frac{-3}{x+3}$.
- $\frac{6x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{3x+2} = \frac{(6x+4)(x^2-2x)}{(x^2-4)(3x+2)} = \frac{2(3x+2)x(x-2)}{(x-2)(x+2)(3x+2)} = \frac{2x}{x+2}$.

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{4x^2}{9y^4} \cdot \left(-\frac{3y^3}{2x}\right). \quad \text{ĐS: } -\frac{2x}{3y} \quad \text{b) } \frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3}. \quad \text{ĐS: } \frac{x+2}{x}$$

$$\text{c) } \frac{2x-2}{x^2-4} \cdot \frac{2-x}{x-1}. \quad \text{ĐS: } \frac{-2}{x+2} \quad \text{d) } \frac{6x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-3x+2}{3x-2}. \quad \text{ĐS: } \frac{2(x-1)}{x+2}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{4x^2}{9y^4} \cdot \left(-\frac{3y^3}{2x}\right) = -\frac{4x^2 \cdot 3y^3}{9y^4 \cdot 2x} = -\frac{12x^2y^3}{18xy^4} = -\frac{2x}{3y}.$$

$$2. \frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3} = \frac{x^2(x^2-4)}{(x-2)x^3} = \frac{x^2(x-2)(x+2)}{x^3(x-2)} = \frac{x+2}{x}.$$

$$3. \frac{2x-2}{x^2-4} \cdot \frac{2-x}{x-1} = \frac{(2x-2)(2-x)}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{2(x-1)(2-x)}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{-2}{x+2}.$$

$$4. \frac{6x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-3x+2}{3x-2} = \frac{(6x-4)(x^2-3x+2)}{(x^2-4)(3x-2)} = \frac{2(3x-2)(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(3x-2)} = \frac{2(x-1)}{x+2}.$$

□

Dạng 67. Rút gọn biểu thức kết hợp nhiều quy tắc đã học

☒ Phân tích đa thức thành nhân tử.

☒ Ưu tiên tối giản phân thức (nếu có thể) ngay từ đầu.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}. \quad \text{ĐS: } \frac{2x+1}{x+1} \quad \text{b) } \frac{2x-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-2} \cdot \frac{2(x-1)^2}{x+1}. \quad \text{ĐS:}$$

$$\text{c) } \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{2x-5}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{6-x}{x-1}. \quad \text{ĐS:} \quad \text{d) } \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2-2x+1}. \quad \text{ĐS: } \frac{x+2}{x-1}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{(2x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{2x+1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

$$2. \frac{2x-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-2} = \frac{(2x-4)(x^3-3x^2+3x-1)}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{2(x-2)(x-1)^3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{2(x-1)^2}{x+1}.$$

$$3. \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{2x-5}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{6-x}{x-1} = \frac{x^2}{x+1} \left(\frac{2x-5}{x-1} + \frac{6-x}{x-1} \right) = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{2x-5+6-x}{x-1} \\ = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}.$$

$$4. \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x-3} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x-3)(x-1)^2} = \frac{x+2}{x-1}.$$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-12}$. **ĐS:** $\frac{x-2}{x+4}$ b) $\frac{2-x}{x^2-1} \cdot \frac{x^3+1}{x-2}$. **ĐS:** $-\frac{x^2-x+1}{x-1}$

c) $\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{5-x}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{2x-6}{x+1}$. **ĐS:** $\frac{x^2}{x+1}$ d) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. **ĐS:** $\frac{x-3}{x-1}$

Lời giải.

1. $\frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-12} = \frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(x+4)(x-3)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+4)(x-3)} = \frac{x-2}{x+4}.$

2. $\frac{2-x}{x^2-1} \cdot \frac{x^3+1}{x-2} = \frac{(2-x)(x^3+1)}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{(2-x)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{x^2-x+1}{x-1}.$

3. $\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{5-x}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{2x-6}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \left(\frac{5-x}{x+1} + \frac{2x-6}{x+1} \right) = \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{5-x+2x-6}{x+1}$
 $= \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}.$

4. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$
 $= \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x-3}{x-1}.$

□

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức:

a) $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2-2} \cdot \frac{x-1}{2x+2} \cdot \frac{2x^2-4}{(x^2+1)^2}$. **ĐS:** $\frac{x-1}{x+1}$ b) $\frac{1-x}{x^3} \cdot \left(x^2+x+1 - \frac{x^3}{x-1} \right)$. **ĐS:** $\frac{1}{x^3}$

Lời giải.

1. $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2-2} \cdot \frac{x-1}{2x+2} \cdot \frac{2x^2-4}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2}{x^2-2} \cdot \frac{x-1}{2(x+1)} \cdot \frac{2(x^2-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}.$

2. $\frac{1-x}{x^3} \cdot \left(x^2+x+1 - \frac{x^3}{x-1} \right) = \frac{1-x}{x^3} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1) - x^3}{x-1} = \frac{1-x}{x^3} \cdot \frac{x^3-1-x^3}{x-1}$
 $= \frac{1-x}{x^3} \cdot \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{x^3}.$

□

Ví dụ 4. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2} \cdot \frac{x + 1}{2x - 2} \cdot \frac{2x^2 - 4}{(x^2 - 1)^2} \cdot \frac{x + 1}{x - 1} \quad \text{ĐS: } \frac{x + 1}{x - 1} \quad \text{b) } \frac{x + 1}{x^3} \cdot \left(x^2 - x + 1 - \frac{x^3}{x + 1} \right) \cdot \text{ĐS: } \frac{1}{x^3}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2} \cdot \frac{x + 1}{2x - 2} \cdot \frac{2x^2 - 4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 - 2} \cdot \frac{x + 1}{2(x - 1)} \cdot \frac{2(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x + 1}{x - 1}. \\ 2. \quad & \frac{x + 1}{x^3} \cdot \left(x^2 - x + 1 - \frac{x^3}{x + 1} \right) = \frac{x + 1}{x^3} \cdot \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1) - x^3}{x + 1} = \frac{x + 1}{x^3} \cdot \frac{x^3 + 1 - x^3}{x + 1} \\ & = \frac{x + 1}{x^3} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức $P = xy$, biết $(2a^3 + 2b^3)x + b = a$ và $(2a - 2b)y = 3(a + b)^2$ ($a \neq b, a \neq -b$). **ĐS:** $P = \frac{3(a + b)}{4(a^2 - ab + b^2)}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Do } (2a^3 + 2b^3)x + b &= a \text{ nên } x = \frac{a - b}{2a^3 + 2b^3} = \frac{a - b}{2(a + b)(a^2 - ab + b^2)}. \\ \text{Do } (2a - 2b)y &= 3(a + b)^2 \text{ nên } y = \frac{3(a + b)^2}{2a - 2b} = \frac{3(a + b)^2}{2(a - b)}. \\ \text{Khi đó } P = xy &= \frac{a - b}{2(a + b)(a^2 - ab + b^2)} \cdot \frac{3(a + b)^2}{2(a - b)} = \frac{3(a + b)}{4(a^2 - ab + b^2)}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức $P = xy$, biết $(3a^3 - 3b^3)x - 4b = 4a$ và $(4a + 4b)y = 3(a - b)^2$ ($a + b \neq 0, a - b \neq 0$). **ĐS:** $P = \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Do } (3a^3 - 3b^3)x - 4b &= 4a \text{ nên } x = \frac{4a + 4b}{3a^3 - 3b^3} = \frac{4(a + b)}{3(a - b)(a^2 + ab + b^2)}. \\ \text{Do } (4a + 4b)y &= 3(a - b)^2 \text{ nên } y = \frac{3(a - b)^2}{4a + 4b} = \frac{3(a - b)^2}{4(a + b)}. \\ \text{Khi đó } P = xy &= \frac{4(a + b)}{3(a - b)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{3(a - b)^2}{4(a + b)} = \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}. \end{aligned}$$

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{1 - x} \quad \text{ĐS: } -\frac{x + 1}{x + 2} \quad \text{b) } \frac{x + 2}{x - 1} \cdot \frac{1 - x^3}{x^3 + 8} \quad \text{ĐS: } -\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 4}$$

Giáo viên:

c) $\frac{x+4}{x-3} \cdot \frac{x^2+x-12}{x^2+5x+4}$.

ĐS: $\frac{x+4}{x+1}$

d) $\frac{x^2}{x^2-4x} \cdot (8-2x)$.

ĐS: $-2x$

 **Lời giải.**

1. $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^2-1}{(x+2)(1-x)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(1-x)} = -\frac{x+1}{x+2}$.

2. $\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1-x^3}{x^3+8} = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = -\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+4}$.

3. $\frac{x+4}{x-3} \cdot \frac{x^2+x-12}{x^2+5x+4} = \frac{x+4}{x-3} \cdot \frac{(x-3)(x+4)}{(x+1)(x+4)} = \frac{x+4}{x+1}$.

4. $\frac{x^2}{x^2-4x} \cdot (8-2x) = \frac{x^2}{x(x-4)} \cdot 2(4-x) = -2x$.

□

 **Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau:

1. $\frac{x^3-1}{x^2-4} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right)$.

ĐS: $\frac{1}{x-2}$

2. $\frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{10-2x}{x+2} + \frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{x-9}{x+2}$.

ĐS: $-(x^2-2x+4)$

3. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$.

ĐS: $\frac{x-1}{x+1}$

4. $\frac{x-1}{2-x} \cdot \left(\frac{x^3}{1-x} + x^2 + x + 1 \right)$.

ĐS: $\frac{1}{x-2}$

 **Lời giải.**

1. $\frac{x^3-1}{x^2-4} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) = \frac{x^3-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+x+1 - (x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$
 $= \frac{x^3-1}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x^2+x+1 - (x^2-1)}{x^3-1} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}$.

2. $\frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{10-2x}{x+2} + \frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{x-9}{x+2} = \frac{x^3+8}{x-1} \left(\frac{10-2x}{x+2} + \frac{x-9}{x+2} \right)$
 $= \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+2} = -(x^2-2x+4)$.

3. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+1}$.

4. $\frac{x-1}{2-x} \cdot \left(\frac{x^3}{1-x} + x^2 + x + 1 \right) = \frac{x-1}{2-x} \cdot \frac{x^3 + (1-x)(x^2+x+1)}{1-x} = \frac{1-x}{x-2} \cdot \frac{x^3+1-x^3}{1-x} =$
 $\frac{1}{x-2}$.

□

 **Bài 3.** Cho $(6a+15b)x = 3a+3$ và $(a^3+1)y = 4a^2-25b^2$. Rút gọn biểu thức $A = \frac{x^2-x}{2} \cdot \frac{2y}{x-1}$ theo a và b .

ĐS: $\frac{2a-5b}{a^2-a+1}$

 **Lời giải.**

Do $(6a+15b)x = 3a+3$ nên $x = \frac{3a+3}{6a+15b} = \frac{a+1}{2a+5b}$.

Do $(a^3+1)y = 4a^2-25b^2$ nên $y = \frac{4a^2-25b^2}{a^3+1} = \frac{(2a+5b)(2a-5b)}{(a+1)(a^2-a+1)}$.

Mặt khác $A = \frac{x^2-x}{2} \cdot \frac{2y}{x-1} = \frac{x(x-1)}{2} \cdot \frac{2y}{x-1} = xy$ nên

$$A = \frac{a+1}{2a+5b} \cdot \frac{(2a+5b)(2a-5b)}{(a+1)(a^2-a+1)} = \frac{2a-5b}{a^2-a+1}$$

□

§8 Phép chia các phân thức đại số

1 Tóm tắt lý thuyết

- ☑ Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$ là $\frac{B}{A}$. Tích của hai phân thức nghịch đảo bằng 1.
- ☑ Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D} \neq 0$, ta nhân phân thức $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{C}{D}$, tức là: $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$ với $\frac{C}{D} \neq 0$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 68. Sử dụng quy tắc chia để thực hiện phép tính

- ☑ Vận dụng quy tắc đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết* để thực hiện yêu cầu bài toán.
- ☑ Bài toán có nhiều phép chia phân thức $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} : \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \cdot \frac{F}{E}$.
- ☑ Ưu tiên thực hiện các phép tính trong ngoặc đơn trước (nếu có).

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1-x^2}{x^2+2x} : \frac{2-2x}{3x} & \quad \text{ĐS: } \frac{3}{2} \cdot \frac{x+1}{x+2} & \text{b) } \frac{x^3+1}{x-1} : (x^2-x+1) & \quad \text{ĐS: } \frac{x+1}{x-1} \\ \text{c) } \frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2} : \frac{x^2-4x+4}{x^2+2x} & \quad \text{ĐS: } \frac{x}{x-2} & \text{d) } \frac{x-2y}{x^2-xy+y^2} : \frac{x^2-4xy+4y^2}{x^3+y^3} & \quad \text{ĐS: } \frac{x+y}{x-2y} \end{aligned}$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{1-x^2}{x^2+2x} : \frac{2-2x}{3x} &= \frac{(1-x)(1+x)}{x(x+2)} \cdot \frac{3x}{2(1-x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x+1}{x+2} \\ 2. \quad \frac{x^3+1}{x-1} : (x^2-x+1) &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{x+1}{x-1} \\ 3. \quad \frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2} : \frac{x^2-4x+4}{x^2+2x} &= \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{x(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

$$4. \frac{x-2y}{x^2-xy+y^2} : \frac{x^2-4xy+4y^2}{x^3+y^3} = \frac{x-2y}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^2} = \frac{x+y}{x-2y}.$$

□

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1-x^2}{x^2-2x} : \frac{x+1}{x} & \quad \text{ĐS: } \frac{1-x}{x-2} & \text{b) } \frac{x^3-1}{x+2} : (x^2+x+1) & \quad \text{ĐS: } \frac{x-1}{x+2} \\ \text{c) } \frac{x^2-1}{x^2+x-2} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} & \quad \text{ĐS: } & \text{d) } \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^3-y^3} & \quad \text{ĐS: } \\ & & \frac{x-y}{x+2y} & \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \frac{1-x^2}{x^2-2x} : \frac{x+1}{x} &= \frac{(1-x)(1+x)}{x(x-2)} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{1-x}{x-2}. \\ 2. \frac{x^3-1}{x+2} : (x^2+x+1) &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{x-1}{x+2}. \\ 3. \frac{x^2-1}{x^2+x-2} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)^2} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2. \\ 4. \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^3-y^3} &= \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^2} = \frac{x-y}{x+2y}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức:

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{x^2}{(y+1)^2} : \frac{2x}{y+1} : \frac{2x}{y+1} & \text{ĐS: } \frac{1}{4} \\ 2. B &= \frac{x^2}{(y+1)^2} : \left(\frac{2x}{y+1} : \frac{2x}{y+1} \right) & \text{ĐS: } \frac{x^2}{(y+1)^2} \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{x^2}{(y+1)^2} : \frac{2x}{y+1} : \frac{2x}{y+1} = \frac{x^2}{(y+1)^2} \cdot \frac{y+1}{2x} \cdot \frac{y+1}{2x} = \frac{1}{4}. \\ 2. B &= \frac{x^2}{(y+1)^2} : \left(\frac{2x}{y+1} : \frac{2x}{y+1} \right) = \frac{x^2}{(y+1)^2} : \left(\frac{2x}{y+1} \cdot \frac{y+1}{2x} \right) = \frac{x^2}{(y+1)^2}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{x^2}{4y^2} : \frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{9} \quad \text{b) } B = \frac{x^2}{4y^2} : \left(\frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} \right) \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{4y^2}$$

Lời giải.

$$1. A = \frac{x^2}{4y^2} : \frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} = \frac{x^2}{4y^2} \cdot \frac{2y}{3x} \cdot \frac{2y}{3x} = \frac{1}{9}.$$

$$2. B = \frac{x^2}{4y^2} : \left(\frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} \right) = \frac{x^2}{4y^2} : \left(\frac{3x}{2y} \cdot \frac{2y}{3x} \right) = \frac{x^2}{4y^2}.$$

□

Dạng 69. Tìm phân thức thỏa mãn đẳng thức cho trước

Đưa phân thức cần tìm về riêng một vế. Bài toán đưa về Dạng 1.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm biểu thức A , biết: $\frac{2x+3y}{x^3-y^3} \cdot A = \frac{2x^2+3xy}{x^2+xy+y^2}$. **ĐS:** $x(x-y)$

 **Lời giải.**

$$A = \frac{2x^2+3xy}{x^2+xy+y^2} : \frac{2x+3y}{x^3-y^3} = \frac{x(2x+3y)}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2x+3y} = x(x-y)$$

□

 **Ví dụ 2.** Cho đẳng thức $\frac{x-2y}{x^3+y^3} \cdot B = \frac{x^2-2xy}{x^2-xy+y^2}$. Tìm biểu thức B . **ĐS:** $x(x+y)$

 **Lời giải.**

$$B = \frac{x^2-2xy}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x^3+y^3}{x-2y} = \frac{x(x-2y)}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-2y} = x(x+y).$$

□

3

Bài tập về nhà

 **Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$1. (x^2-9) : \frac{2x+6}{x-3}. \quad \text{ĐS: } \frac{(x-3)^2}{2}$$

$$2. \frac{xy}{2x-3} : \frac{x^2y^2}{6-4x}. \quad \text{ĐS: } \frac{-2}{xy}$$

$$3. \frac{x^2+2x}{x^2-2x+1} : \frac{x^2-4}{x^2-x}. \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$$

$$4. \frac{2x+3y}{2-x} : \frac{4x^2+12xy+9y^2}{x^3-8}. \quad \text{ĐS: } -\frac{x^2+2x+4}{2x+3y}$$

 **Lời giải.**

$$1. (x^2-9) : \frac{2x+6}{x-3} = (x-3)(x+3) \cdot \frac{x-3}{2(x+3)} = \frac{(x-3)^2}{2}.$$

$$2. \frac{xy}{2x-3} : \frac{x^2y^2}{6-4x} = \frac{xy}{2x-3} \cdot \frac{2(3-2x)}{x^2y^2} = \frac{-2}{xy}.$$

$$3. \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} : \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} = \frac{x(x+2)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}.$$

$$4. \frac{2x + 3y}{2 - x} : \frac{4x^2 + 12xy + 9y^2}{x^3 - 8} = \frac{2x + 3y}{2 - x} \cdot \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(2x + 3y)^2} = -\frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 3y}.$$

□

 **Bài 2.** Rút gọn biểu thức:

$$a) \frac{x+4}{x+5} : \frac{x+5}{x+6} : \frac{x+6}{x+4}. \quad \text{ĐS: } \left(\frac{x+4}{x+5}\right)^2 \quad b) \frac{x-7}{x+8} : \left(\frac{x-7}{x-9} : \frac{x+8}{x-9}\right). \quad \text{ĐS: } 1$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{x+4}{x+5} : \frac{x+5}{x+6} : \frac{x+6}{x+4} = \frac{x+4}{x+5} \cdot \frac{x+6}{x+5} \cdot \frac{x+4}{x+6} = \left(\frac{x+4}{x+5}\right)^2.$$

$$2. \frac{x-7}{x+8} : \left(\frac{x-7}{x-9} : \frac{x+8}{x-9}\right) = \frac{x-7}{x+8} : \left(\frac{x-7}{x-9} \cdot \frac{x-9}{x+8}\right) = \frac{x-7}{x+8} : \frac{x-7}{x+8} = 1.$$

□

 **Bài 3.** Tìm phân thức thỏa mãn đẳng thức sau:

$$1. \frac{x^2 + 3x}{x-4} : P = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x}. \quad \text{ĐS: } P = \frac{x^2}{x-3}$$

$$2. Q : \frac{x-2}{2x+3} = \frac{4x^2 + 12x + 9}{x^2 - 4}. \quad \text{ĐS: } Q = \frac{2x+3}{x+2}$$

 **Lời giải.**

$$1. P = \frac{x^2 + 3x}{x-4} : \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x} = \frac{x(x+3)}{x-4} \cdot \frac{x(x-4)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2}{x-3}.$$

$$2. Q = \frac{(2x+3)^2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{2x+3} = \frac{2x+3}{x+2}.$$

□

§9 Biến đổi biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Biến đổi các biểu thức hữu tỉ

- ☑ Biểu thức hữu tỉ là một phân thức hoặc biểu thị một dãy các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức.
- ☑ Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đã học.

1.2 Giá trị của phân thức

- ☑ Giá trị của một phân thức chỉ được xác định với điều kiện giá trị của mẫu thức khác 0.
- ☑ *Chú ý:* Biểu thức hữu tỉ có hai biến x và y thì giá trị của biểu thức đó chỉ được xác định với các cặp $(x; y)$ làm cho giá trị của mẫu thức khác 0.

2 Bài tập và các dạng toán

► Dạng 70. Biến đổi biểu thức hữu tỉ thành phân thức

Thực hiện theo hai bước:

- ☑ *Bước 1:* Sử dụng kết hợp các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân thức đại số đã học để biến đổi.
- ☑ *Bước 2:* Biến đổi cho tới khi được một phân thức có dạng $\frac{A}{B}$ với A, B là các đa thức và B khác đa thức 0.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

📖 **Ví dụ 1.** Đưa các biểu thức sau thành phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{\frac{x}{4} - 2 + \frac{15}{4x}}{\frac{x}{2} + \frac{6}{x} - \frac{7}{2}} \quad \text{ĐS: } \frac{x-5}{2(x-4)} \quad \text{b) } B = \frac{1 - \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{2x-3}{x^2-2x+1}} \quad \text{ĐS: } \frac{x-1}{x-2}$$

✍ **Lời giải.**

$$1. A = \left(\frac{x}{4} - 2 + \frac{15}{4x}\right) : \left(\frac{x}{2} + \frac{6}{x} - \frac{7}{2}\right) = \frac{x^2 - 8x + 15}{4x} : \frac{x^2 - 7x + 12}{2x}$$

$$= \frac{(x-3)(x-5)}{4x} \cdot \frac{2x}{(x-3)(x-4)} = \frac{x-5}{2(x-4)}.$$

$$2. B = \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \frac{2x-3}{x^2-2x+1}\right) = \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{(x-2)^2} = \frac{x-1}{x-2}.$$

□

 **Ví dụ 2.** Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức:

$$a) A = \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{x}{2}}. \quad \text{ĐS: } A = \frac{x-2}{x+2} \quad b) B = \frac{1 + \frac{1}{x+1}}{1 + \frac{2x+3}{x^2+2x+1}}. \quad \text{ĐS: } B = \frac{x+1}{x+2}$$

 **Lời giải.**

$$1. A = \left(1 - \frac{2}{x}\right) : \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x-2}{x} : \frac{x+2}{2} = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{2}{x+2} = \frac{x-2}{x+2}.$$

$$2. B = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) : \left(1 + \frac{2x+3}{x^2+2x+1}\right) = \frac{x+2}{x+1} : \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+1} = \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{x+1}{x+2}.$$

□

Dạng 71. Tìm điều kiện xác định của phân thức

Ta xác định các giá trị của biến để mẫu thức khác 0.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x để giá trị của mỗi phân thức sau được xác định:

$$a) \frac{4x}{3x-8}. \quad \text{ĐS: } x \neq \frac{8}{3} \quad b) \frac{8}{x^2-1}. \quad \text{ĐS: } x \neq \pm 1$$

$$c) \frac{x+2}{x^3-8}. \quad \text{ĐS: } x \neq 2 \quad d) \frac{x^2}{x^3-3x+2}. \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2. \end{cases}$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{4x}{3x-8} \text{ xác định} \Leftrightarrow 3x-8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{8}{3}.$$

$$2. \frac{8}{x^2-1} \text{ xác định} \Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

$$3. \frac{x+2}{x^3-8} \text{ xác định} \Leftrightarrow x^3-8 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq 8 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

$$4. \frac{x^2}{x^3-3x+2} \text{ xác định} \Leftrightarrow x^3-3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2. \end{cases}$$

□

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của mỗi phân thức sau:

a) $\frac{5x}{2x+6}$. **ĐS:** $x \neq -3$ b) $\frac{3}{x^2+1}$. **ĐS:** $\forall x \in \mathbb{R}$
 c) $\frac{3x-6}{x^3+1}$. **ĐS:** $x \neq -1$ d) $\frac{2x+1}{x^2-x-2}$. **ĐS:** $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Lời giải.

- DKXD: $2x+6 \neq 0 \Leftrightarrow x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.
- DKXD: $x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ (Do $x^2+1 > 0 \forall x$).
- DKXD: $x^3+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -1$.
- DKXD: $x^2-x-2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2. \end{cases}$

□

Dạng 72. Thực hiện phép tính với các biểu thức hữu tỉ

Sử dụng kết hợp các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân thức đại số đã học để biến đổi.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

1. $A = \left(\frac{3}{x+3} - \frac{9}{x^2+6x+9} \right) : \left(\frac{3}{x^2-9} + \frac{1}{3-x} \right)$. **ĐS:** $\frac{-3(x-3)}{x+3}$
 2. $B = \left(\frac{4a+b}{a^2-4ab} + \frac{4a-b}{a^2+4ab} \right) \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2}$. **ĐS:** $B = \frac{8}{a}$

Lời giải.

1. $A = \left[\frac{3}{x+3} - \frac{9}{(x+3)^2} \right] : \left[\frac{3}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{x-3} \right] = \frac{3(x+3)-9}{(x+3)^2} : \frac{3-(x+3)}{(x+3)(x-3)}$
 $= \frac{3x}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{-x} = \frac{-3(x-3)}{x+3}$
 2. $B = \frac{(4a+b)(a^2+4ab) + (4a-b)(a^2-4ab)}{(a^2-4ab)(a^2+4ab)} \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2} = \frac{8a^3+8ab^2}{a^2(a-4b)(a+4b)} \cdot \frac{(a-4b)(a+4b)}{a^2+b^2}$
 $= \frac{8a(a^2+b^2)}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{8}{a}$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = \left(\frac{x}{x+2} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3x^2}{4-x^2} \right)$. **ĐS:** $A = \frac{x-2}{2(x-1)}$
 2. $B = \left(\frac{2a^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2a-b} - \frac{1}{2a+b} \right)$. **ĐS:** $B = \frac{-1}{b}$

 Lời giải.

$$1. A = \frac{2x+2}{x+2} : \frac{4-4x^2}{4-x^2} = \frac{2(x+1)}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(2-x)}{4(x+1)(1-x)} = \frac{x-2}{2(x-1)}.$$

$$2. B = \frac{4a^2-b^2}{2b^2} \cdot \frac{2a+b-(2a-b)}{4a^2-b^2} = \frac{-2b}{2b^2} = \frac{-1}{b}$$

□

 **Ví dụ 3.** Cho biểu thức: $P = \frac{x^2+2x}{2x+12} + \frac{54-3x}{x^2+6x} - \frac{6}{x} + 1$.

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định. **ĐS:** $x \neq 0; -6$

b) Rút gọn phân thức. **ĐS:** $P = \frac{x^2-2x+6}{2x}$

c) Tìm giá trị của x để:

$$1) P = \frac{3}{2}. \quad \text{ĐS: } x \in \{2; 3\} \quad 2) P = -\frac{9}{2}. \quad \text{ĐS: } x = -1 \quad 3) P = 1. \quad \text{ĐS: } x \in \emptyset$$

 Lời giải.

$$a) P \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+12 \neq 0 \\ x^2+6x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0; -6. \\ x \neq 0 \end{cases}$$

b) Với $x \neq 0; -6$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2+2x}{2(x+6)} + \frac{54-3x}{x(x+6)} - \frac{6}{x} + 1 \\ &= \frac{x(x^2+2x) + 2(54-3x) - 12(x+6) + 2x(x+6)}{2x(x+6)} \\ &= \frac{x^3+4x^2-6x+36}{2x(x+6)} \\ &= \frac{(x+6)(x^2-2x+6)}{2x(x+6)} \\ &= \frac{x^2-2x+6}{2x}. \end{aligned}$$

c)

$$1) P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+6}{2x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện thấy $x=2, x=3$ thỏa mãn ĐKXD.

$$2) P = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+6}{2x} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-6. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện thấy $x=-1$ thỏa mãn ĐKXD và $x=-6$ không thỏa mãn ĐKXD.

$$3) P = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+6}{2x} = 1 \Leftrightarrow x^2-4x+6=0.$$

Do $x^2-4x+6 = (x-2)^2+2 > 0$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

□

Ví dụ 4. Cho phân thức $P = \frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5}$.

- a) Với điều kiện nào của x thì phân thức được xác định? **ĐS:** $x \neq -5$
- b) Rút gọn phân thức. **ĐS:** $P = x + 5$
- c) Tìm giá trị của x để:
- 1) $P = 1$. **ĐS:** $x = -4$ 2) $P = 0$. **ĐS:** $x \in \emptyset$

Lời giải.

- a) P xác định $\Leftrightarrow x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$.
- b) $P = \frac{(x + 5)^2}{x + 5} = x + 5$.
- c) 1) $P = 1 \Leftrightarrow x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = -4$ (thỏa mãn ĐKXD).
 Vậy $x = -4$.
- 2) $P = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ (không thỏa mãn ĐKXD).
 Vậy không tồn tại x thỏa mãn.

□

Dạng 73. Tìm x để giá trị của một phân thức đã cho thỏa mãn điều kiện cho trước

Ta sử dụng các kiến thức sau:

- ☑ Hằng đẳng thức đáng nhớ và $a^2 \geq 0$ với mọi giá trị của a .
- ☑ $\frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow A$ và B cùng dấu; $\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow A$ và B trái dấu.
- ☑ Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$ ta có: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \in \mathcal{U}(a)$.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho phân thức $B = \frac{x^2 - x + 2}{x - 3}$ với $x \neq 3$.

1. Tìm x để $B < 0$. **ĐS:** $x < 3$
2. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $B \in \mathbb{Z}$. **ĐS:** $x \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\}$

Lời giải.

1. Do $x^2 - x + 2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \forall x$ nên $B < 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.
2. Ta có $B = x + 2 + \frac{8}{x - 3}$ nên $B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{8}{x - 3} \in \mathbb{Z}$ hay $x - 3 \in \mathcal{U}(8)$.
 Khi đó: $x - 3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$ hay $x \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\}$.

□

Ví dụ 2. Cho phân thức $A = \frac{x+2}{x-1}$ với $x \neq 1$.

a) Tìm x để $A > 1$.

ĐS: $x > 1$ b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

ĐS:

$x \in \{0; 2; 4; 6\}$

Lời giải.

$$1. A > 1 \Leftrightarrow A - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$2. \text{Ta có } A = 1 + \frac{3}{x-1} \text{ nên } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z} \text{ hay } x-3 \in U(3).$$

Khi đó $x-3 \in \{\pm 1; \pm 3\}$ hay $x \in \{0; 2; 4; 6\}$

□

Ví dụ 3. 1. Tìm x để phân thức $M = \frac{3}{x^2-4x+7}$ đạt giá trị lớn nhất. **ĐS:** $x = 2$

2. Tìm x để phân thức $N = \frac{-3}{x^2+4x+7}$ đạt giá trị nhỏ nhất. **ĐS:** $x = -2$

Lời giải.

$$1. \text{Do } x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3 \geq 3 \forall x \text{ nên } \frac{3}{x^2-4x+7} \leq 1 \text{ hay } M \leq 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi và chỉ khi $x = 2$.

$$2. \text{Do } x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3 \geq 3 \forall x \text{ nên } \frac{3}{x^2+4x+7} \leq 1 \text{ hay } N \geq -1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của N là -1 khi và chỉ khi $x = -2$.

□

Ví dụ 4. 1. Tìm x để phân thức $M = \frac{4}{x^2-2x+5}$ đạt giá trị lớn nhất. **ĐS:** $x = 1$

2. Tìm x để phân thức $M = \frac{-2}{x^2+2x+7}$ đạt giá trị nhỏ nhất. **ĐS:** $x = -1$

Lời giải.

$$1. \text{Do } x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \text{ nên } \frac{4}{x^2-2x+5} \leq 1 \text{ hay } M \leq 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi và chỉ khi $x = 1$.

$$2. \text{Do } x^2 + 2x + 7 = (x+1)^2 + 6 \geq 6 \forall x \text{ nên } \frac{2}{x^2+2x+7} \leq \frac{1}{3} \text{ hay } N \geq -\frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của N là $-\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = -1$.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Đưa các biểu thức sau thành phân thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\frac{2a}{a-3} + 1}{\frac{a^2-9}{3}}. & \text{ĐS: } A &= (a-1)(a-3) & \text{b) } B &= \frac{1 - \frac{6}{a+3}}{1 - \frac{a^2-10}{a^2-9}}. & \text{ĐS: } B &= (a-3)^2 \\ \text{c) } C &= \frac{4 - \frac{4b}{a} + \frac{b^2}{a^2}}{\frac{1}{a} - \frac{2}{b}}. & \text{ĐS: } C &= \frac{b(b-2a)}{a} \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{3a-3}{a-3} : \frac{3}{a^2-9} = \frac{3(a-1)}{a-3} \cdot \frac{(a-3)(a+3)}{3} = (a-1)(a-3). \\ 2. B &= \frac{a+3-6}{a+3} : \frac{a^2-9-(a^2-10)}{a^2-9} = \frac{a-3}{a+3} \cdot \frac{(a-3)(a+3)}{a^2-9} = (a-3)^2. \\ 3. C &= \frac{4a^2-4ab+b^2}{a^2} : \frac{b-2a}{ab} = \frac{(b-2a)^2}{a^2} \cdot \frac{ab}{b-2a} = \frac{b(b-2a)}{a}. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Tìm giá trị của a để mỗi phân thức sau được xác định:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{a^2-1}{9a^2-16}. & \quad \text{ĐS: } a \neq \pm \frac{4}{3} & \text{b) } \frac{2a+1}{a^2-6a+9}. & \quad \text{ĐS: } a \neq 3 \\ \text{c) } \frac{a+1}{a^3-4a^2+3a}. & \quad \text{ĐS: } a \notin \{0; 1; 3\} \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \frac{a^2-1}{9a^2-16} \text{ xác định} &\Leftrightarrow 9a^2-16 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq \frac{16}{9} \Leftrightarrow a \neq \pm \frac{4}{3}. \\ 2. \frac{2a+1}{a^2-6a+9} \text{ xác định} &\Leftrightarrow a^2-6a+9 \neq 0 \Leftrightarrow (a-3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3. \\ 3. \frac{a+1}{a^3-4a^2+3a} \text{ xác định} &\Leftrightarrow a^3-4a^2+3a \neq 0 \Leftrightarrow a(a-1)(a-3) \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{0; 1; 3\}. \end{aligned}$$

□

Bài 3. Tìm điều kiện xác định của mỗi phân thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-2y}{x^2+2y^2+3}. & \quad \text{ĐS: } x, y \in \mathbb{R} & \text{b) } \frac{x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2}. & \quad \text{ĐS: } \begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -1. \end{cases} \\ \text{c) } \frac{2x-y}{x^2+y^2+2y+2}. & \quad \text{ĐS: } x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lời giải.

- Do $x^2 + 2y^2 + 3 > 0 \forall x, y$ nên ĐKXD: $x, y \in \mathbb{R}$.
- $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ nên ĐKXD: $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$.
- Do $x^2 + y^2 + 2y + 2 = x^2 + (y+1)^2 + 1 > 0 \forall x, y$ nên ĐKXD: $x, y \in \mathbb{R}$.

□

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + 2x}{x+5} + \frac{50-5x}{2x^2+10x} + \frac{x-5}{x}$.

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức A . **ĐS:** $x \neq 0; -5$.
- Rút gọn biểu thức A . **ĐS:** $A = \frac{2x^2 + 6x - 5}{2(x+5)}$
- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -4$. **ĐS:** $A = \frac{3}{2}$
- Tìm giá trị của x để $A = -\frac{3}{2}$. **ĐS:** $x \in \{-2; -\frac{5}{2}\}$

Lời giải.

$$1. \text{ ĐKXD: } \begin{cases} x+5 \neq 0 \\ 2x^2+10x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

2. Với $x \neq 0; -5$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x(x^2+2x) + 50-5x + 2(x-5)(x+5)}{2x(x+5)} \\ &= \frac{2x^3+4x^2+50-5x+2x^2-50}{2x(x+5)} = \frac{2x^3+6x^2-5x}{2x(x+5)} = \frac{2x^2+6x-5}{2(x+5)}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ Với } x = -4 \text{ thỏa mãn điều kiện xác định thì } A = \frac{2(-4)^2+6(-4)-5}{2(-4+5)} = \frac{3}{2}.$$

$$4. A = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2+9x+10=0 \Leftrightarrow (x+2)(2x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x = -2, x = -\frac{5}{2}$ đều thỏa mãn ĐKXD.

□

Bài 5. Cho biểu thức $B = \left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) \cdot \frac{(x+2)^2}{x} - \frac{x^2+6x+4}{x}$.

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức B . **ĐS:** $x \neq 0; -2$
- Rút gọn biểu thức B . **ĐS:** $B = -(x^2+2x+2)$
- Tìm giá trị của x để biểu thức B đạt giá trị lớn nhất. **ĐS:** $x = -1$

Lời giải.

1. ĐKXD: $x \neq 0; -2$.

2. Với $x \neq 0; -2$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{(x+2)^2}{x} - \frac{x^2}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x} - \frac{x^2+6x+4}{x} \\ &= \frac{x^2+4x+4-(x^2+6x+4)}{x} - x(x+2) = \frac{-2x}{x} - x^2 - 2x = -(x^2+2x+2). \end{aligned}$$

3. Do $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1$ nên $B \leq -1$.

Vậy giá trị lớn nhất của B là -1 khi và chỉ khi $x = -1$.

□

 **Bài 6.** Cho biểu thức $C = \frac{3}{x^2-2x+2}$.

1. Tìm x để biểu thức C đạt giá trị lớn nhất.

ĐS: $x = 1$

2. Tìm x để biểu thức C có giá trị nguyên âm.

ĐS: $x \in \emptyset$

 **Lời giải.**

1. Do $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \geq 1 > 0$ nên $0 < \frac{3}{x^2-2x+2} \leq 3$ hay $0 < C \leq 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của C là 3 khi và chỉ khi $x = 1$.

2. Do $0 < C \leq 3$ nên C không thể nhận giá trị nguyên âm.

□

§10 Ôn tập chương II (phần 1)

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem lại tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 9.

2 Bài tập và các dạng toán

Bài 1. Tìm điều kiện của x để các phân thức sau xác định:

a) $\frac{x}{2x-4}$. **ĐS:** $x \neq 2$ b) $\frac{2x-3}{x^2+x+1}$. **ĐS:** $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $\frac{2x-3}{8x^3-12x^2+6x-1}$. **ĐS:** $x \neq \frac{1}{2}$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $2x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

2. $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$. ĐKXD: $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. $8x^3-12x^2+6x-1 = (2x-1)^3$. ĐKXD: $2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

□

Bài 2. Tìm điều kiện của x để các phân thức sau xác định:

a) $\frac{x}{2x-1}$. **ĐS:** $x \neq \frac{1}{2}$ b) $\frac{2x-3}{x^2+x-2}$. **ĐS:** $x \neq 1; x \neq -2$

c) $\frac{2x-3}{x^3+x}$. **ĐS:** $x \neq 0$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq \frac{1}{2}$.

2. $x^2+x-2 = (x^2-x) + (2x-2) = (x-1)(x+2)$. ĐKXD: $x \neq 1; x \neq -2$.

3. $x^3+x = x(x^2+1)$.
Ta có $x^2+1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ĐKXD: $x \neq 0$.

□

 **Bài 3.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{3x^2 - 2x}{9x^2 - 12x + 4}$ tại $x = \frac{1}{2}$. **ĐS:** -1 b) $\frac{x^2 + 7x + 6}{x^3 + 6x^2 - x - 6}$ tại $x = 10001$. **ĐS:**
 $\frac{1}{10000}$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq \frac{2}{3}$.

$$\frac{3x^2 - 2x}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{x(3x - 2)}{(3x - 2)^2} = \frac{x}{3x - 2}.$$

Tại $x = \frac{1}{2}$ thỏa điều kiện xác định ta có: $\frac{\frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{1}{2} - 2} = -1$.

2. ĐKXD: $x \neq -6, x \neq \pm 1$

$$\frac{x^2 + 7x + 6}{x^3 + 6x^2 - x - 6} = \frac{(x + 1)(x + 6)}{(x + 6)(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}.$$

Tại $x = 10001$ thỏa điều kiện xác định ta có: $\frac{1}{10001 - 1} = \frac{1}{10000}$.

□

 **Bài 4.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 9}$ tại $x = 4$. **ĐS:** 8 b) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ tại $x = 10001$. **ĐS:**
 $\frac{1}{10000}$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq 3$.

$$\frac{2x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{2x(x - 3)}{(x - 3)^2} = \frac{2x}{x - 3}.$$

Tại $x = 4$ thỏa điều kiện xác định ta có: $\frac{2 \cdot 4}{4 - 3} = 8$.

2. ĐKXD: $x \neq -2, x \neq \pm 1$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}.$$

Tại $x = 10001$ thỏa điều kiện xác định ta có: $\frac{1}{10001 - 1} = \frac{1}{10000}$.

□

 **Bài 5.** Tìm x biết $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{43}{30}$.

ĐS: $x = 4$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{43}{30} &\Leftrightarrow \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{13}{30} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{30}{13} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{4}{13} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{x} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $x = 4$. □

 **Bài 6.** Tìm x biết $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{53}{37}$.

ĐS: $x = 5$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{53}{37} &\Leftrightarrow \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{16}{37} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{37}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{5}{16} \\ &\Leftrightarrow 3 + \frac{1}{x} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $x = 5$. □

 **Bài 7.** Tìm x biết $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{4x}{4-x^2} = 0$.

ĐS: $x = -3$

 **Lời giải.**

ĐKXD: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{4x}{4-x^2} = 0 &\Leftrightarrow 3(x+2) + x(x-2) + 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ (loại)} \\ x=-3 \text{ (nhận)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = -3$. □

 **Bài 8.** Tìm x biết $\frac{2x+1}{x^2-4x+4} - \frac{2x+5}{x^2-4} = 0$.

ĐS: $x = -3$

 **Lời giải.**

ĐKXD: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2-4x+4} - \frac{2x+5}{x^2-4} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-2)^2} - \frac{2x+5}{(x-2)(x+2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+1)(x+2) - (2x+5)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x+12=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

□

Bài 9. Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của biểu thức $A = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x + 1}$ với $x \neq -\frac{1}{3}$ nhận giá trị nguyên.

ĐS: $x \in \{0; -1\}$

Lời giải.

$$A = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x + 1} = \frac{x(3x + 1) - (3x + 1) + 2}{3x + 1} = x - 1 + \frac{2}{3x + 1}$$

$$A \text{ nguyên} \Leftrightarrow 3x + 1 \in \mathbb{U}(2) \text{ hay } 3x + 1 \in \{1; -1; 2; -2\}$$

1. $3x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = 1$. (nhận)

2. $3x + 1 = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$. (loại)

3. $3x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. (loại)

4. $3x + 1 = -2 \Rightarrow x = -1$ (nhận) $\Rightarrow A = -3$. (nhận)

□

Bài 10. Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của biểu thức $B = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ với $x \neq 2$ nhận giá trị nguyên.

ĐS: $x \in \{1; -1; 3; 5\}$

Lời giải.

$$B = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2} = \frac{(x - 2)^2 + (x - 2) + 3}{x - 2} = x - 1 + \frac{3}{x - 2}$$

$$B \text{ nguyên} \Leftrightarrow x - 2 \in \mathbb{U}(3) \text{ hay } x - 2 \in \{1; -1; 3; -3\}$$

1. $x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B = 5$ (nhận)

2. $x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow B = -3$ (nhận)

3. $x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow B = 5$ (nhận)

4. $x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow B = -3$ (nhận)

Vậy $x \in \{1; -1; 3; 5\}$.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 11. Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định:

a) $\frac{3x^3}{(x - 1)(x^2 + 4)}$.

ĐS: $x \neq 1$

b) $\frac{-4x^2}{25 - 20x + 4x^2}$.

ĐS: $x \neq \frac{5}{2}$

c) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$.

ĐS: $x \neq \pm 3$

Lời giải.

1. Do $x^2 + 4 > 0, \forall x$. Suy ra điều kiện xác định của biểu thức $x \neq 1$.

$$2. \frac{-4x^2}{25 - 20x + 4x^2} = \frac{-4x^2}{(2x - 5)^2}. \text{ Suy ra điều kiện xác định của biểu thức } x \neq \frac{5}{2}.$$

3. Điều kiện xác định của biểu thức $x \neq \pm 3$.

□

Bài 12. Tìm x biết:

$$1. \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x^2 + 6x + 9} = 0.$$

ĐS: $x = 1, x = -6$

$$2. \frac{8}{x^2 + 2x + 4} = 2 - x.$$

ĐS: $x = 0$

Lời giải.

1. DKXD $x \neq \pm 3$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x^2 + 6x + 9} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{2}{(x + 3)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x + 3) + 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Vậy $x = 1, x = -6$.

2. DKXD $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{8}{x^2 + 2x + 4} = 2 - x \Leftrightarrow 8 = (x^2 + 2x + 4)(2 - x) \Leftrightarrow 2^3 = (2 - x)^3 \Leftrightarrow 2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $x = 0$.

□

Bài 13. Cho biểu thức $A = \frac{9x^2 - 9x^3 + x^4}{x^3 - 3x^2}$. Tìm giá trị của x để:

a) $A = -3$.

ĐS: $x = 6$ b) $A = 5$.

ĐS: $x = 2, x = 12$

Lời giải.

DKXD $x \neq 0, x \neq 3$.

$$A = \frac{9x^2 - 9x^3 + x^4}{x^3 - 3x^2} = \frac{x^2(9 - 9x + x^2)}{x^2(x - 3)} = \frac{9 - 9x + x^2}{x - 3}.$$

$$1. A = -3 \Leftrightarrow \frac{9 - 9x + x^2}{x - 3} = -3 \Rightarrow 9 - 9x + x^2 = -3(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 6 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy $x = 6$.

$$2. A = 5 \Leftrightarrow \frac{9 - 9x + x^2}{x - 3} = 5 \Leftrightarrow 9 - 9x + x^2 = 5(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x = 2, x = 12$.

□

Bài 14. Tìm giá trị của x để giá trị tương ứng của biểu thức bằng 1:

$$\text{a) } M = \frac{1+x^2+\frac{4}{x}}{2+\frac{4}{x}}. \quad \text{ĐS: } x = \pm 1 \quad \text{b) } N = \frac{1+x^2-\frac{7}{x+1}}{2-\frac{7}{x+1}}. \quad \text{ĐS: } x = 1$$

 **Lời giải.**

1. ĐK: $x \neq 0$.

$$M = \frac{1+x^2+\frac{4}{x}}{2+\frac{4}{x}} = 1 \Leftrightarrow 1+x^2+\frac{4}{x} = 2+\frac{4}{x} \Leftrightarrow 1+x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ (nhận)}.$$

Vậy $x = \pm 1$.

2. ĐK: $x \neq -1$.

$$N = \frac{1+x^2-\frac{7}{x+1}}{2-\frac{7}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow 1+x^2-\frac{7}{x+1} = 2-\frac{7}{x+1} \Leftrightarrow 1+x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy $x = 1$.

□

 **Bài 15.** Tìm x nguyên để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên:

$$\text{a) } \frac{2}{x+3}. \quad \text{ĐS: } x \in \{-2; -1; 1; 2\} \quad \text{b) } \frac{x^2-3x+3}{x-4}. \quad \text{ĐS: } x \in \{-3; 3; 5; 11\}$$

 **Lời giải.**

1. ĐK: $x \neq -3$

$$\frac{2}{x+3} \text{ nguyên} \Leftrightarrow x+3 \in U(2) \text{ hay } x+3 \in \{1; -1; 2; -2\}$$

$$x+3 = 1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \frac{2}{-2+3} = 2. \text{ (nhận)}$$

$$x+3 = -1 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow \frac{2}{-4+3} = -2. \text{ (nhận)}$$

$$x+3 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow \frac{2}{-1+3} = 1. \text{ (nhận)}$$

$$x+3 = -2 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow \frac{2}{-5+3} = -1. \text{ (nhận)}$$

Vậy $x \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

2. ĐK: $x \neq 4$

$$\frac{x^2-3x+3}{x-4} = x+1 + \frac{7}{x-4}.$$

$$\frac{x^2-3x+3}{x-4} \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow \frac{7}{x-4} \text{ nguyên} \Leftrightarrow x-4 \in U(7) \text{ hay } x-4 \in \{1; -1; 7; -7\}$$

$$x-4 = 1 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow 5+1 + \frac{7}{5-4} = 13. \text{ (nhận)}$$

$$x-4 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow 3+1 + \frac{7}{3-4} = -3. \text{ (nhận)}$$

$$x-4 = 7 \Leftrightarrow x = 11 \Rightarrow 11+1 + \frac{7}{11-4} = 13. \text{ (nhận)}$$

$$x-4 = -7 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow -3+1 + \frac{7}{-3-4} = -3. \text{ (nhận)}$$

Vậy $x \in \{-3; 3; 5; 11\}$.



§11 Ôn tập chương II (phần 2)

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem lại tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 9.

2 Bài tập và các dạng toán

 **Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau

$$A = \left(\frac{4}{x^3 - 4x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(\frac{x - 2}{x^2 + 2x} - \frac{x}{2x + 4} \right) \text{ với } x \neq 0 \text{ và } x \neq \pm 2.$$

ĐS: $\frac{-2}{x - 2}$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4}{x^3 - 4x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(\frac{x - 2}{x^2 + 2x} - \frac{x}{2x + 4} \right) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x - 2)(x + 2)} : \frac{2x - 4 - x^2}{2x(x + 2)} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{2x(x + 2)}{2x - 4 - x^2} = \frac{-2}{x - 2}. \end{aligned}$$

□

 **Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau

$$B = \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{4} \text{ với } x \neq \pm 1.$$

ĐS: $\frac{x + 1}{2(x - 1)}$

 **Lời giải.**

Ta có

$$B = \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} \cdot \frac{(x + 1)^2}{4} = \frac{x + 1}{2(x - 1)}.$$

□

 **Bài 3.** Giả thiết biểu thức có nghĩa, chứng minh đẳng thức sau

$$\left[\frac{2}{5a} - \frac{2}{a + 1} \cdot \left(\frac{a + 1}{5a} - \frac{3a + 3}{5} \right) \right] : \frac{a - 1}{a} = \frac{6a}{5(a - 1)}.$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{5a} - \frac{2}{a+1} \cdot \left(\frac{a+1}{5a} - \frac{3a+3}{5} \right) \right] : \frac{a-1}{a} &= \left(\frac{2}{5a} - \frac{2}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(-3a+1)}{5a} \right) \cdot \frac{a}{a-1} \\ &= \left(\frac{2}{5a} - \frac{2(-3a+1)}{5a} \right) \cdot \frac{a}{a-1} \\ &= \frac{6a}{5a} \cdot \frac{a}{a-1} = \frac{6a}{a-1}. \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left[\frac{2}{5a} - \frac{2}{a+1} \cdot \left(\frac{a+1}{5a} - \frac{3a+3}{5} \right) \right] : \frac{a-1}{a} = \frac{6a}{5(a-1)}.$$

□

Bài 4. Giả thiết biểu thức có nghĩa, chứng minh đẳng thức sau:

$$\left(\frac{3}{a^2+6a+9} - \frac{1}{a+3} \right) : \left(\frac{3}{a^2-9} - \frac{1}{a-3} \right) = \frac{a-3}{a+3}.$$

 **Lời giải.**

$$\left(\frac{3}{a^2+6a+9} - \frac{1}{a+3} \right) : \left(\frac{3}{a^2-9} - \frac{1}{a-3} \right) = \frac{-a}{(a+3)^2} : \frac{-a}{a^2-9} = \frac{a-3}{a+3}.$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{3}{a^2+6a+9} - \frac{1}{a+3} \right) : \left(\frac{3}{a^2-9} - \frac{1}{a-3} \right) = \frac{a-3}{a+3}.$$

□

Bài 5. Cho biểu thức $M = \frac{a^2-1}{15} \cdot \left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{3}{a^2-1} - \frac{a+3}{2a+2} \right)$.

- Hãy tìm điều kiện của a để giá trị biểu thức được xác định; **ĐS:** $a \neq \pm 1$
- Chứng minh biểu thức M được xác định thì giá trị của nó không phụ thuộc vào giá trị của biến a .

 **Lời giải.**

- DKXD: Ta có $a \neq \pm 1$.

$$2. \quad M = \frac{a^2-1}{15} \cdot \left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{3}{a^2-1} - \frac{a+3}{2a+2} \right) = \frac{a^2-1}{15} \cdot \frac{10}{2(a^2-1)} = \frac{1}{3}.$$

□

Bài 6. Cho biểu thức $M = \frac{2}{a-1} - \frac{2a^3-2a}{a^2+1} \cdot \left(\frac{a}{a^2-2a+1} + \frac{1}{1-a^2} \right)$.

- Hãy tìm điều kiện của a để giá trị biểu thức được xác định; **ĐS:** $a \neq \pm 1$
- Chứng minh biểu thức M được xác định thì giá trị của nó không phụ thuộc vào giá trị của biến a .

 **Lời giải.**

- DKXD: $a \neq \pm 1$.

- Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{a-1} - \frac{2a^3-2a}{a^2+1} \cdot \left(\frac{a}{a^2-2a+1} + \frac{1}{1-a^2} \right) \\ &= \frac{2}{a-1} - \frac{2a(a^2-1)}{a^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{(a^2-1)(a-1)} = \frac{2}{a-1} - \frac{2a}{a-1} = -2. \end{aligned}$$

□

Bài 7. Tìm x biết biểu thức $M = \frac{3x^2 - 4x - 15}{x + 2} \in \mathbb{Z}$ **ĐS:** $x \in \{-7; -3; -1; 3\}$
 **Lời giải.**

$$M = \frac{3x^2 - 4x - 15}{x + 2} = 3x - 10 + \frac{5}{x + 2}$$

Ta có, $M \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x + 2) \in U(5) = \{-1; 1; -5; 5\} \Leftrightarrow x \in \{-7; -3; -1; 3\}$. □

Bài 8. Tìm x biết biểu thức $N = \frac{x^2 - x}{x - 3} \in \mathbb{Z}$ **ĐS:** $x \in \{-3; 0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}$
 **Lời giải.**

$$N = \frac{x^2 - x}{x - 3} = x + 2 + \frac{6}{x - 3}$$

Ta có $N \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x - 3) \in U(6) = \{-1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6\} \Leftrightarrow x \in \{2; 4; 1; 5; 0; 6; -3; 9\}$. □

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \left(x - 16 + \frac{64}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x - 8} + 17$ **ĐS:** $\min P = 1$
 **Lời giải.**

Ta có

$$P = \left(x - 16 + \frac{64}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x - 8} + 17 = \frac{(x - 8)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x - 8} + 17 = x(x - 8) + 17 = (x - 4)^2 + 1 \geq 1.$$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = 4$. □

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \left(x - 12 + \frac{36}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x - 6} + 10$ **ĐS:** $\min Q = 1$
 **Lời giải.**

ĐKXD: $x \neq 0, x \neq 6$.

$$Q = \left(x - 12 + \frac{36}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x - 6} + 10 = \frac{(x - 6)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x - 6} + 10 = x(x - 6) + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 1.$$

Vậy $\min Q = 1 \Leftrightarrow x = 3$. □

Bài tập về nhà

Bài 11. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{8}{x^2 + 1} + \frac{4x - 4x^3}{x^2 + 1} \cdot \left[\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{1 - x^2} \right]$$

ĐS: $A = \frac{-8}{(x^2 + 1)(x - 1)}$

 **Lời giải.**

ĐKXD: $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{8}{x^2 + 1} + \frac{4x - 4x^3}{x^2 + 1} \cdot \left[\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{1 - x^2} \right] \\ &= \frac{8}{x^2 + 1} + \frac{4x(1 - x^2)}{x^2 + 1} \cdot \frac{2}{(1 - x^2)(1 - x)} = \frac{8}{x^2 + 1} + \frac{8x}{(x^2 + 1)(1 - x)} = \frac{-8}{(x^2 + 1)(x - 1)}. \end{aligned}$$

Bài 12. Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

1. $B = \frac{x}{7 - x} + \left(\frac{x}{x^2 - 49} - \frac{x - 7}{x^2 + 7x} \right) : \frac{2x - 7}{x^2 + 7x}.$

$$2. C = \frac{3x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left(\frac{3x+9}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-9} \right).$$

 **Lời giải.**

1. ĐKXD: $x \neq 0, x \neq \pm 7$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{x}{7-x} + \left(\frac{x}{x^2-49} - \frac{x-7}{x^2+7x} \right) : \frac{2x-7}{x^2+7x} \\ &= \frac{x}{7-x} + \frac{14x-19}{x(x-7)(x+7)} : \frac{2x-7}{x(x+7)} = \frac{x}{7-x} + \frac{7}{x-7} = -1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào biến.

2. ĐKXD: $x \neq 0, x \neq \pm 3, x \neq \frac{-3}{2}$.

$$\begin{aligned} C &= \frac{3x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left(\frac{3x+9}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-9} \right) \\ &= \frac{3x}{x-3} - \frac{x(x+3)}{2x+3} \cdot \frac{9(2x+3)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{3x}{x-3} - \frac{9}{x-3} = 3. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào biến.

□

 **Bài 13.** Chứng minh đẳng thức sau với $x \neq 0; x \neq \pm 1$: $\left[\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] : \frac{x-1}{x^2} = \frac{x}{x-1}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] : \frac{x-1}{x^2} &= \left[\frac{x^2+1}{x(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] : \frac{x-1}{x^2} \\ &= \frac{x^2+2x+1}{x(x+1)^2} : \frac{x-1}{x^2} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)^2} \cdot \frac{x^2}{x-1} = \frac{x}{x-1}. (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left[\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] : \frac{x-1}{x^2} = \frac{x}{x-1} \text{ với } x \neq 0; x \neq \pm 1.$$

□

 **Bài 14.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{2-x} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{4x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2}{2-x} \right)$.

1. Rút gọn và tìm điều kiện của x để biểu thức P xác định. **ĐS:** $x \neq \pm 2, x \neq 0, P = \frac{4x^2}{x-3}$

2. Tìm các giá trị nguyên dương của x để $P < 0$. **ĐS:** $x = 1$

 **Lời giải.**

1. Điều kiện: $x \neq \pm 2, x \neq 0$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+2}{2-x} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{4x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2}{2-x} \right) \\ &= \frac{4x^2+8x}{4-x^2} : \frac{x-3}{x(2-x)} = \frac{4x(x+2)}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} = \frac{4x^2}{x-3}. \end{aligned}$$

$$2. P < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3.$$

Kết hợp điều kiện xác định và $x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = 1$.

□

 **Bài 15.** Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) - \left(x + 10 + \frac{4}{x}\right)$
 $\max Q = -5$

ĐS:

 **Lời giải.**

Điều kiện $x \neq 0; x \neq -2$.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) - \left(x + 10 + \frac{4}{x}\right) = \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \frac{x+2-x^2}{x+2} - \frac{x^2+10x+4}{x} \\ &= \frac{(x+2)(x+2-x^2)}{x} - \frac{x^2+10x+4}{x} = \frac{-x^3-2x^2-6x}{x} = -x^2-2x-6 = -(x+1)^2-5 \leq -5. \end{aligned}$$

Vậy $\max Q = -5 \Leftrightarrow x = -1$.

□