

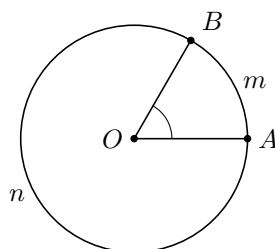
Chương 3

Góc với đường tròn

§1 Góc ở tâm. Số đo cung

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 6. Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.



Trong hình vẽ trên $\widehat{AOB}$ là một góc ở tâm, $\widehat{AmB}$ là cung nhỏ, $\widehat{AnB}$ là cung lớn.

Định nghĩa 7. ☒ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

☒ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).

☒ Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

⚠ 29. Chú ý

☒ Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180° .

☒ Cung lớn có số đo lớn hơn 180° .

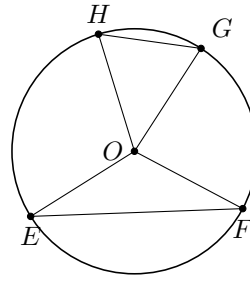
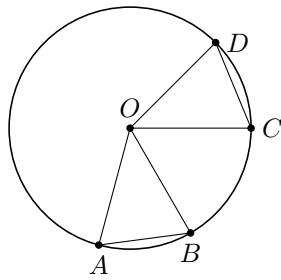
☒ Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có “cung không” với số đo 0° và cung cả đường tròn có số đo 360° .

Định nghĩa 8. Trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

☒ Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

☒ Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

Định lí 13. Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}$.



Trong hình trên $\widehat{AB} = \widehat{CD}$; $\widehat{EF} > \widehat{GH}$.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB .

Lời giải.

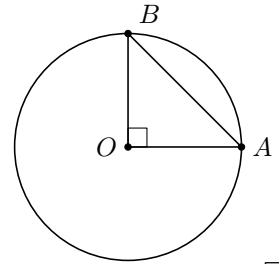
Xét tam giác $\triangle OAB$ ta có

$$AB^2 = 2R^2 = OA^2 + OB^2$$

nên tam giác vuông tại O .

Suy ra $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Vậy số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$ là $sđ\widehat{AB} = 90^\circ$.

Và số đo cung lớn $\widehat{AB}$ là $sđ\widehat{AB}$ lớn $= 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.



□

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Tính số đo của hai dây cung MN .

Lời giải.

Kẻ $OH \perp MN$ tại H .

$\Rightarrow HM = HN$ (định lý về đường kính vuông góc dây cung).

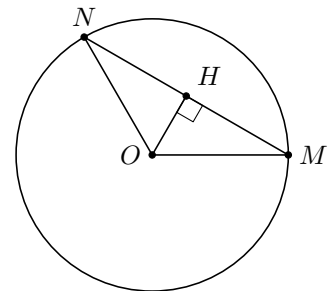
$$\text{Do đó } HM = HN = \frac{MN}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \cos HMO = \frac{MH}{MO} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Nên } \widehat{HMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 120^\circ.$$

Suy ra số đo cung nhỏ $\widehat{MN}$ là $sđ\widehat{MN} = \widehat{MON} = 120^\circ$.

Và số đo cung lớn $\widehat{MN}$ là $sđ\widehat{MN}$ lớn $= 360^\circ - sđ\widehat{MN} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.

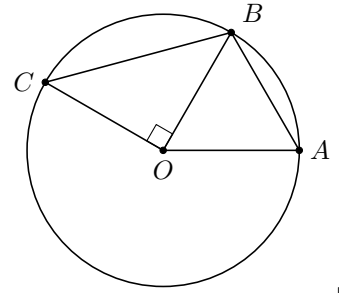


□

Ví dụ 3. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy ba điểm A, B, C sao cho dây cung $AB = R$, $BC = R\sqrt{2}$ và tia BO nằm giữa hai tia BA và BC . Tính số đo các cung nhỏ AB, BC và AC .

Lời giải.

$\triangle AOB$ đều nên $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
 $\triangle BOC$ vuông cân tại O nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$.
 Suy ra $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AOB} = 60^\circ$.
 $sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{BOC} = 90^\circ$.
 $sđ\widehat{AC} = sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{BC} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.



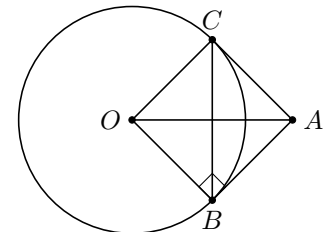
Ví dụ 4. Hai tiếp tuyến tại B và C của nửa đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại A . Biết $OA = R\sqrt{2}$. Tính số đo của cung BC .

Lời giải.

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 45^\circ.$$

Suy ra $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

Vậy $sđ\widehat{BC} = \widehat{BOC} = 90^\circ$.



Ví dụ 5. Trên dây cung AB của đường tròn (O) lấy hai điểm H và K sao cho $AH = HK = KB$. Vẽ bán kính OD qua H và bán kính OC qua K . Chứng minh rằng:

1. $\widehat{AD} = \widehat{BC}$;
2. $\widehat{AD} < \widehat{DC}$.

Lời giải.

1. Tam giác AOB cân tại O nên $\widehat{OAH} = \widehat{OBK}$.

Do đó $\triangle OAH = \triangle OBK$ (c.g.c).

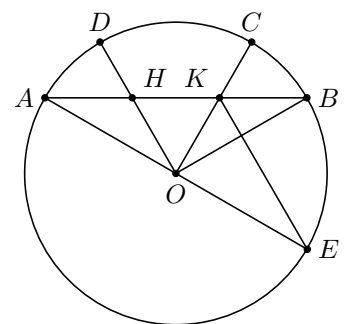
$$\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{BOK} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}.$$

2. Vẽ đường kính AE của đường tròn (O) . Ta thấy OH là đường trung bình của tam giác $\triangle AKE$ nên $OH \parallel KE$.

$$\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{OEK}, \widehat{HOK} = \widehat{OKE}.$$

Xét $\triangle OEK$ có $OK < OE \Rightarrow \widehat{OEK} < \widehat{OKE}$.

$$\Rightarrow \widehat{AOH} < \widehat{HOK} \Rightarrow \widehat{AD} < \widehat{DC}.$$



3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Tìm số đo cung lớn $\widehat{BC}$ của

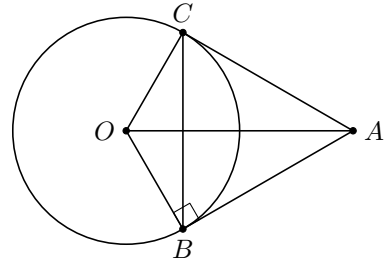
đường tròn (O).

 **Lời giải.**

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ.$$

Suy ra $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Nên $\text{sđ}\widehat{BC}$ nhỏ $= \widehat{BOC} = 120^\circ$.

Vậy $\text{sđ}\widehat{BC}$ lớn $= 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.



□

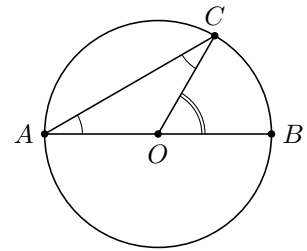
 **Bài 2.** Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây cung AC . Chứng minh rằng

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{BC}.$$

 **Lời giải.**

Mặt khác $\widehat{BOC}$ là góc ngoài của tam giác cân OAC .

Nên $\widehat{BOC} = 2\widehat{OAC}$. Suy ra $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC}$.



□

 **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác đó tiếp xúc với các cạnh AB , BC , CA theo thứ tự tại D , E , F . Tính số đo các cung $\widehat{DE}$, $\widehat{EF}$ và $\widehat{FD}$.

 **Lời giải.**

Tứ giác $BFID$ có $\widehat{FID} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

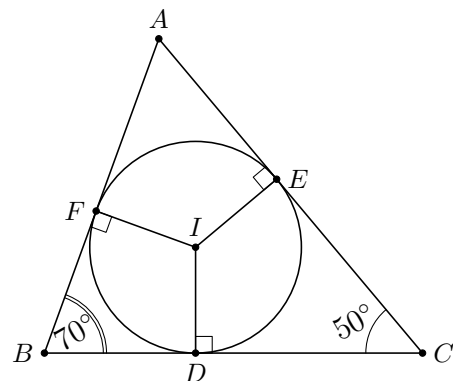
Nên số đo cung nhỏ $\text{sđ}\widehat{FD} = 110^\circ$.

Tứ giác $IDCE$ có $\widehat{EID} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Nên số đo cung nhỏ $\text{sđ}\widehat{ED} = 130^\circ$.

Từ đó suy ra số đo cung nhỏ

$$\text{sđ}\widehat{EF} = 360^\circ - 110^\circ - 130^\circ = 120^\circ.$$



□

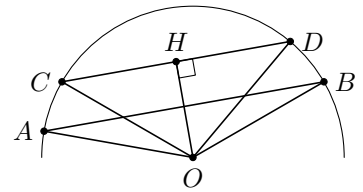
 **Bài 4.** Cho một nửa đường tròn (O) và hai dây cung $AB \parallel CD$ nằm trong nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

 **Lời giải.**

Gọi H là trung điểm của CD ta có $OH \perp CD$. Mà $AB \parallel CD$ nên $OH \perp AB$. Hai tam giác OAB, OCD đều cân tại O nên

$$\begin{cases} \widehat{AOH} = \widehat{BOH} \\ \widehat{COH} = \widehat{DOH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AOH} - \widehat{COH} = \widehat{BOH} - \widehat{DOH} \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD}.$$

Do đó $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.



□

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính 20 cm, C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Lấy điểm H thuộc OA sao cho $OH = 6$ cm. Đường vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn tại D . Vẽ dây AE song song với CD . Gọi K là hình chiếu của E trên AB . Tính diện tích tam giác AEK .

Lời giải.

Theo bài toán trên, vì $DC \parallel AE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CE} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Vì $OC \parallel EK$ nên $\widehat{O_2} = \widehat{OEK}$ (hai góc so le trong).

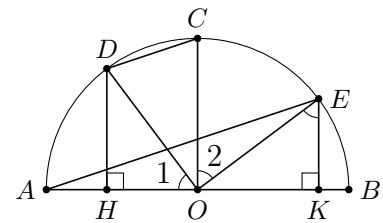
$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{OEK}$.

$\Rightarrow \triangle HOD = \triangle KEO$ (cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow OK = DH$ và $EK = OH = 6$ (cm).

Mà $DH^2 = AH \cdot HB = 4 \cdot 16 = 64 \Rightarrow DH = OK = 8$ (cm).

$$S_{AEK} = \frac{AK \cdot EK}{2} = \frac{(10 + 8) \cdot 6}{2} = 54 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



□

§2 Liên hệ giữa cung và dây

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lý 14.

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau.

1. Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
2. Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Nghĩa là $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$.

Định lý 15.

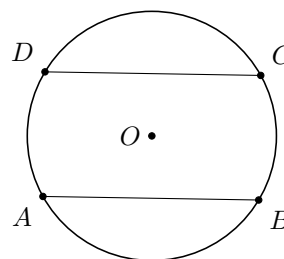
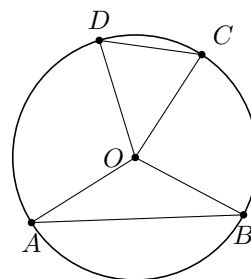
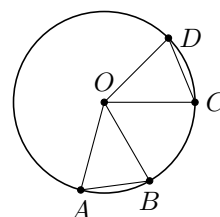
Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau.

1. Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
2. Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

Nghĩa là $\widehat{AB} < \widehat{CD} \Leftrightarrow AB < CD$.

Tính chất 4. Trong một đường tròn.

1. Hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
2. Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy và ngược lại.
3. Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

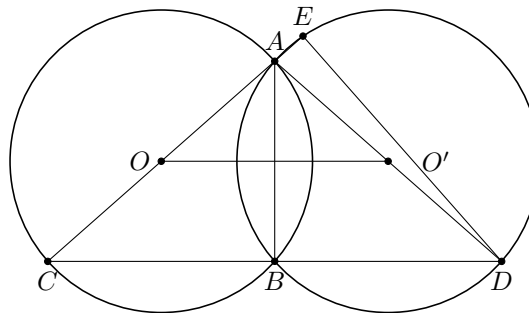


2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Kẻ các đường kính AOC , $A'O'D$. Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O').

1. So sánh các cung nhỏ BC , BD .
2. Chứng minh rằng B là điểm chính giữa của cung EBD (tức là điểm B chia cung EBD thành hai cung bằng nhau $\widehat{BE} = \widehat{BD}$).

Lời giải.



1. Vì $\triangle BAC$ và $\triangle BAD$ nội tiếp trong nửa đường tròn nên chúng là những tam giác vuông tại B .

Xét hai tam giác vuông $\triangle BAC$ và $\triangle BAD$ có $\begin{cases} AC = AD & \text{đường kính} \\ AB & \text{cạnh chung} \end{cases}$.

Vậy $\triangle BAC = \triangle BAD$. Suy ra $BC = BD$.

Mặt khác, hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên hai dây bằng nhau sẽ căng hai dây bằng nhau. Vậy $\widehat{BC} = \widehat{BD}$.

2. Vì điểm E nằm trên đường tròn đường kính AD nên $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Do $BC = BD$ (câu a) nên EB là đường trung tuyến của tam giác vuông ECD ($\widehat{E} = 90^\circ$). Suy ra $BE = BD$.

Trong (O') ta có, $BE = BD$ suy ra $\widehat{BE} = \widehat{BD}$ hay B là điểm chính giữa của cung EBD .

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC . Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC, K \in BD$).

a) Chứng minh rằng $OH > OK$.

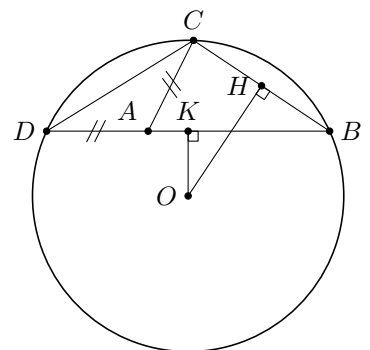
b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC .

Lời giải.

1. Trong tam giác ABC , theo bất đẳng thức tam giác, ta có $BC < AB + AC = AB + AD = BD$ hay $BC < BD$.

Theo định lý về dây cung và khoảng cách đến tâm suy ra $OH > OK$.

2. Vì $BC < BD$ ta suy ra $\widehat{BC} < \widehat{BD}$.



□

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng nửa đường tròn (O) đường kính BC . Trên nửa đường tròn lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$. Các đường thẳng AD, AE cắt đoạn thẳng BC tại M và N . Chứng minh rằng $BM = MN = NC$.

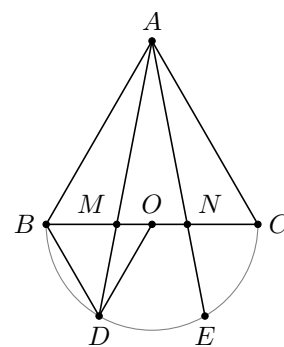
Lời giải.

Từ $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$ suy ra được $BD = DE = EC$. Do đó theo tính chất góc ở tâm suy ra $\widehat{BOD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OBD$ là tam giác đều.

Ta có $\triangle AMC \sim \triangle DMB$ (g.g) suy ra $\frac{AC}{DB} = \frac{MC}{MB}$.

Mặt khác, $AC = 2BD$ suy ra $MC = 2MB$, $BC = BM + MC$
 $\Rightarrow BC = 3BM$.

Tương tự, $BC = 3CN$. Vậy $BM = MN = NC$.

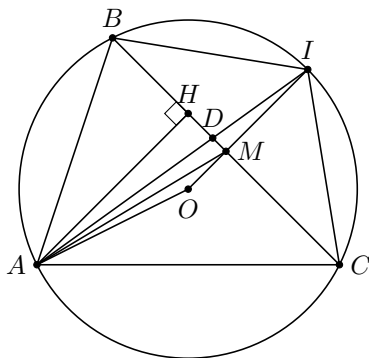


7

 **Ví dụ 4.** Cho tam giác $\triangle ABC$ không cân, từ đỉnh A kẻ đường cao AH , phân giác AD , trung tuyến AM .

1. Chứng minh rằng điểm D nằm giữa H và M .
2. Giả sử tam giác ABC nhọn, chứng minh rằng $\widehat{MAD} < \widehat{DAH}$.

 **Lời giải.**



1. Không mất tính tổng quát giả sử $AC > AB$, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường phân giác AD tại $I \Rightarrow \widehat{BI} = \widehat{IC} \Rightarrow BI = IC$.

Tam giác ABC không cân, suy ra H, D, M là ba điểm phân biệt.

Mặt khác, D nằm giữa A và I , AM là trung tuyến $\Rightarrow IM \perp BC$, AH là đường cao $\Rightarrow AH \perp BC$. Do đó D nằm giữa H và M .

2. Tam giác ABC nhọn $\Rightarrow \widehat{BAC} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{BC}$ nhỏ hơn nửa đường tròn.

$\Rightarrow M$ nằm giữa O và $I \Rightarrow AM$ nằm giữa hai tia AI và AO .

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{MAD} < \widehat{OAI} \\ OA = OI \end{cases} \Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OIA}.$$

Mà $AH \parallel IM \Rightarrow \widehat{OIA} = \widehat{IAH}$. Vậy $\widehat{MAD} < \widehat{DAH}$.

7

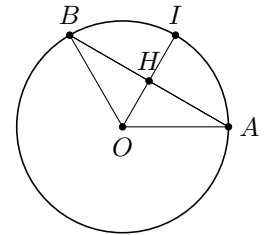
3

Luyện tập

 **Bài 1.** Cho đường tròn (O) . Gọi I là điểm chính giữa của cung AB (không phải là cung nửa đường tròn) và H là trung điểm của dây AB . Chứng minh rằng đường thẳng IH đi qua tâm O của đường tròn.

 Lời giải.

Vì I là điểm chính giữa cung $\widehat{AB}$ nên $\widehat{IA} = \widehat{IB}$, suy ra $IA = IB$.
 Mặt khác, $OA = OB = R$ bán kính. Do đó, IO là đường trung trực của đoạn AB .
 Lại có H là trung điểm của AB nên H thuộc IO .
 Vậy IH đi qua tâm O của đường tròn.

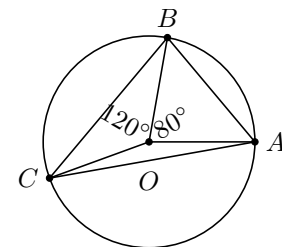


□

 **Bài 2.** Cho đường tròn tâm O bán kính R . Vẽ góc ở tâm $\widehat{AOB} = 80^\circ$, vẽ góc ở tâm $\widehat{BOC} = 120^\circ$ kề với $\widehat{AOB}$. So sánh và sắp xếp độ dài AB, BC, CA theo thứ tự tăng dần.

 Lời giải.

Ta có $\widehat{AOB} = 80^\circ$ và $\widehat{BOC} = 120^\circ$ kề nhau nên suy ra $\widehat{AOC} = 160^\circ$.
 Vì số đo của cung bị chắn bằng số đo của góc ở tâm nên suy ra $AB < BC < CA$.



□

 **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Trên cạnh AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC . Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC, K \in BD$).

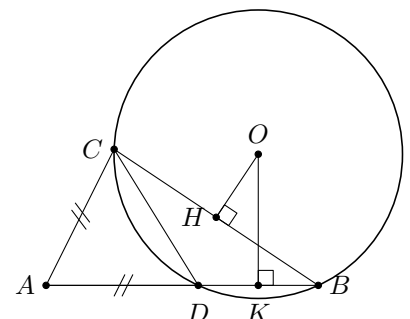
a) Chứng minh rằng $OH < OK$.

b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC .

 Lời giải.

1. Trong tam giác ABC , theo bất đẳng thức tam giác, ta có $BC > AB - AC = AD + AB = BD$ hay $BC > BD$.
 Theo định lý về dây cung và khoảng cách đến tâm, từ $BC > BD$ suy ra $OH < OK$.

2. Từ bất đẳng thức về dây cung $BC > BD$ suy ra $\widehat{BC} > \widehat{BD}$.

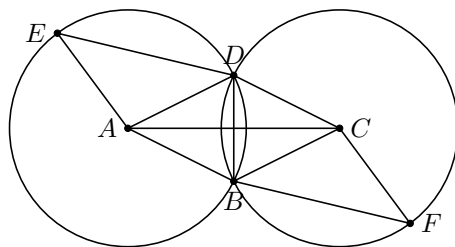


□

 **Bài 4.** Cho hình thoi $ABCD$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AD . Vẽ đường tròn tâm C , bán kính CB . Lấy điểm E bất kỳ trên đường tròn tâm A (không trùng với B và D), điểm F trên đường tròn tâm C sao cho BF song song với DE . So sánh hai cung nhỏ DE và BF .

 Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\widehat{EDB} = \widehat{FBD}$, suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{FBC}$.
 Từ đó hai tam giác cân ADE và CBF bằng nhau, suy ra $\widehat{EAD} = \widehat{BCF}$. Vậy hai cung DE và BF bằng nhau.



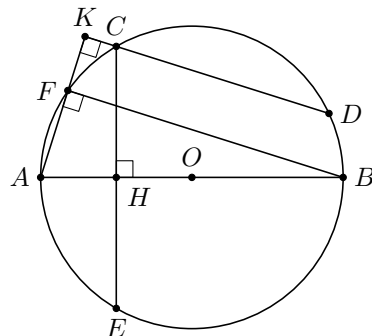
□

Bài 5. Cho đường tròn tâm O . Trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C, D . Từ C kẻ CH vuông góc với AB , nó cắt đường tròn tại điểm thứ hai là E . Từ A kẻ AK vuông góc với DC , nó cắt đường tròn tại điểm thứ hai là F . Chứng minh rằng:

1. Hai cung nhỏ CF và DB bằng nhau.
2. Hai cung nhỏ BF và DE bằng nhau.
3. $DE = BF$.

Lời giải.

1. CD và FB đều vuông góc với AK nên $CD \parallel FB$.
 Suy ra $\widehat{CF} = \widehat{DB}$ (hai cung bị chắn giữa hai dây song song).
 (1)
2. Do tính chất đối xứng qua đường kính AB ta có $\widehat{BC} = \widehat{BE}$ (2)
 Cộng từng vế của (1) và (2) ta được
 $\widehat{BC} + \widehat{CF} = \widehat{DB} + \widehat{BE}$ (tính chất cộng hai cung) hay
 $\widehat{BF} = \widehat{DE}$ (3).
3. Với (3) ta suy ra $BF = DE$.



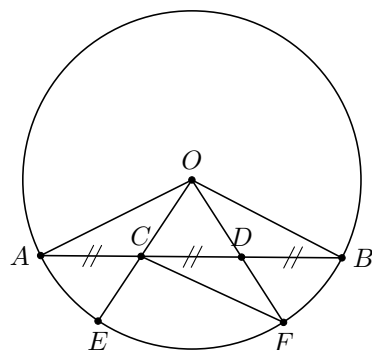
□

Bài 6. Trên dây cung AB của một đường tròn O , lấy hai điểm C và D chia dây này thành ba đoạn thẳng bằng nhau $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{AE} = \widehat{FB}$.
- b) $\widehat{AE} < \widehat{EF}$.

Lời giải.

1. Tam giác cân AOB có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
 Mặt khác, $\triangle AOC = \triangle BOD$ (c.g.c) vì có $OA = OB$, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$, $AC = BD$. Từ đó suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ suy ra $\widehat{AE} = \widehat{FB}$.
2. Tam giác OCD là tam giác cân ($OC = OD$ do $\triangle AOC = \triangle BOD$) nên $\widehat{ODC} < 90^\circ$, từ đó suy ra $\widehat{CDF} > 90^\circ$.
 Mặt khác, trong tam giác CDF có $\widehat{CDF} > \widehat{CFD}$ suy ra $CF > CD$ hay $CF > CA$.
 Xét $\triangle AOC$ và $\triangle COF$ có $OA = OF$, OC chung, nhưng $CF > AC$ suy ra $\widehat{COD} > \widehat{AOC}$. Từ đó suy ra $\widehat{EF} > \widehat{AE}$.





§3 Góc nội tiếp

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 9. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh là hai dây cung. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Định lý 16. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo cung bị chắn.

Định lý 17. Trong một đường tròn:

1. Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
2. Các góc nội tiếp chắn cùng một cung hoặc hai cung bằng nhau thì bằng nhau.
3. Góc nội tiếp (có số đo nhỏ hơn 90°) có số đo bằng một nửa số đo góc ở tâm chắn bởi cung đó.
4. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung nhỏ AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M . Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S . Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2 \cdot \widehat{MBA}$.

 **Lời giải.**

Vì SM là tiếp tuyến của (O) , nên ta có

$\widehat{OMS} = 90^\circ$, do đó $\widehat{O_1} + \widehat{OSM} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{O_2} + \widehat{O_1} = 90^\circ$.

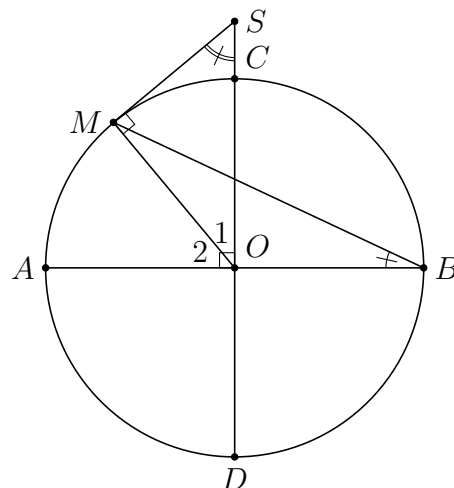
Từ đó suy ra

$$\widehat{OSM} = \widehat{O_2}. \quad (1)$$

Lại có $\widehat{O_2} = \text{sđ } \widehat{AM}$ và $\widehat{MBA} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AM}$, nên ta có

$$\widehat{O_2} = 2\widehat{MBA}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{MSD} = 2 \cdot \widehat{MBA}$.



Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB và S là một điểm nằm ngoài đường tròn. Các đường thẳng SA và SB lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai M, N . Gọi H là giao điểm của AN và BM . Chứng minh rằng

1. $SH \perp AB$.

2. $HM \cdot HB = HN \cdot HA$.

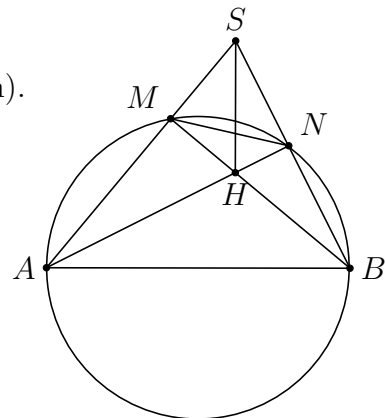
Lời giải.

1. Ta có M, N nằm trên đường tròn đường kính AB , nên ta có

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}.$$

Suy ra $BM \perp AS$, $AN \perp SB$ nên H là trực tâm tam giác SAB . Suy ra $SH \perp AB$.

2. Xét hai tam giác HMA và HNB có
 $\widehat{MHA} = \widehat{NHB}$ (đối đỉnh) và
 $\widehat{MAH} = \widehat{NBH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MN).
 Suy ra $\triangle HMA \sim \triangle HNB$, do đó $\frac{HM}{HN} = \frac{HA}{HB}$,
 hay $HM \cdot HB = HN \cdot HA$.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác trong góc B và C cắt (O) tại E và D .

1. Chứng minh $\triangle ACE = \triangle ABD$.

2. Gọi I là giao điểm của CD và BE . Tứ giác $ADIE$ là hình gì? Tại sao?

Lời giải.

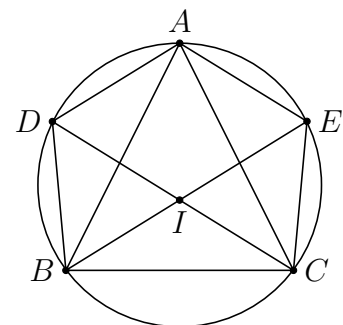
- 1.

Ta có tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{AB} = \widehat{AC}$. Lại có CD là phân giác của góc $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$, hay $\widehat{AD} = \widehat{BD}$. Tương tự $\widehat{AD} = \widehat{BD}$, do đó

$$\widehat{AD} = \widehat{BD} = \widehat{AD} = \widehat{BD}.$$

Suy ra $AD = BD = AE = CE$.

Xét hai tam giác ACE và ABD có $AC = AB$, $AD = AE$, $BD = CE$ nên $\triangle AEC = \triangle ADB$ (c-c-c).



2. Ta có $\widehat{AD} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$, $\widehat{AE} = \frac{1}{2}\widehat{AE}$. Mà $\widehat{AD} = \widehat{AE}$ nên ta có $\widehat{ACD} = \widehat{CAE}$, suy ra $CD \parallel AE$, hay $DI \parallel AE$. Chứng minh tương tự $EI \parallel AD$, kết hợp với $AD = AE$ ta có $ADIE$ là hình thoi.

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB ($C \in (O)$, $D \in (O')$). Tia CB cắt (O') tại E , tia BD cắt (O) tại F . Chứng minh rằng $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot CF$.

 **Lời giải.**

Xét tam giác CDB và CEA có góc C chung.

Trong đường tròn (O') , ta có

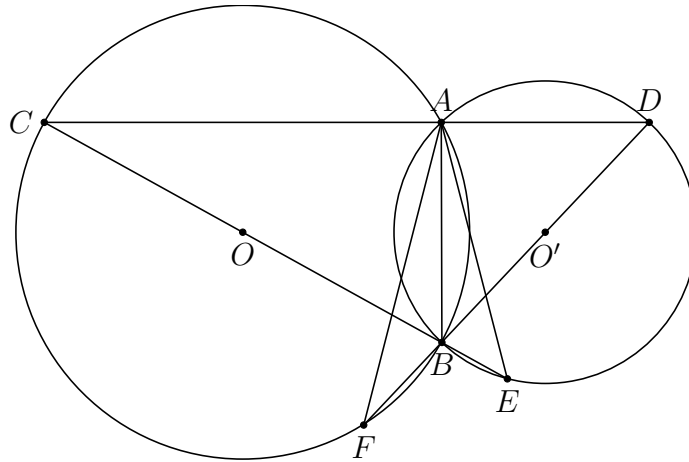
$$\widehat{CDB} = \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AB}, \quad \widehat{CEA} = \widehat{BEA} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AB}.$$

Suy ra $\widehat{CDB} = \widehat{CEA}$, do đó $\triangle CDB \sim \triangle CEA$. Suy ra

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CA} \Leftrightarrow CD \cdot CA = CB \cdot CE.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $DA \cdot DC = DB \cdot DF$. Do đó

$$CB \cdot CE + DB \cdot DF = CD \cdot CA + DA \cdot DC = DC(CA + AD) = CD^2.$$



□

Ví dụ 5. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên cung nhỏ BC . Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

 **Lời giải.**

Ta có $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{BAC} = 120^\circ$, do đó $BM, CN < BC < AM$. Trên đoạn AM lấy điểm N sao cho $BM = MN$. Do $\widehat{BMN} = \widehat{BMA} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AB} = 60^\circ$, nên $\triangle BMN$ đều, hay $BM = BN = MN$.

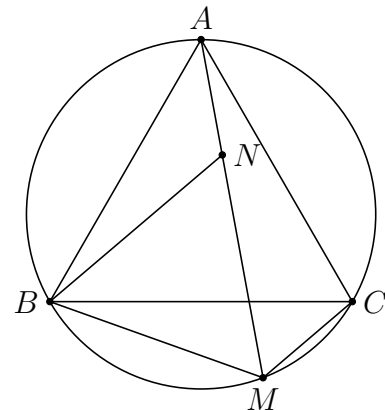
Xét hai tam giác ABN và CBM có $AB = BC$, $BN = BM$ và

$$\widehat{ABN} = \widehat{ABM} - \widehat{NBM} = \widehat{ABM} - 60^\circ = \widehat{ABM} - \widehat{ABC} = \widehat{CBM}.$$

Do đó $\triangle ABN = \triangle CBM$ nên ta có $CM = AN$. Từ đó ta có được

$$BM + CM = MN + AN = AM.$$

□



Ví dụ 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) , lấy điểm M . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

Trong đường tròn (O) ta có

$$\widehat{ABM} + \widehat{ACM} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{ACM} + \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

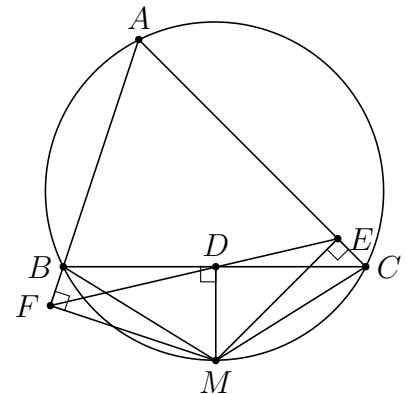
Lại có $\widehat{ABM} + \widehat{FBM} = 180^\circ$, nên $\widehat{ACM} = \widehat{FBM}$.

Do đó $\widehat{BMF} = \widehat{CME}$. (1)

Ta có $\widehat{MFB} = \widehat{MDB} = 90^\circ$, nên bốn điểm B, D, M, F nằm trên đường tròn đường kính BM , do đó $\widehat{BMF} = \widehat{BDF} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{BF}$. (2)

Chứng minh tương tự $\widehat{CDE} = \widehat{CME}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{BDF} = \widehat{CDE}$, suy ra E, D, F thẳng hàng.



□

Ví dụ 7. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ($R > R'$) tiếp xúc trong tại A . Một tiếp tuyến của đường tròn (O') tại M cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C . Đường thẳng BO' cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D và cắt đường thẳng AM tại E . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE với AC . Chứng minh rằng DF là phân giác của góc $\widehat{BDC}$.

Lời giải.

Gọi N là giao điểm thứ hai của AM với đường tròn (O) . Ta có

$$\widehat{AMO'} = \widehat{O'AM} = \widehat{OAN} = \widehat{ANO},$$

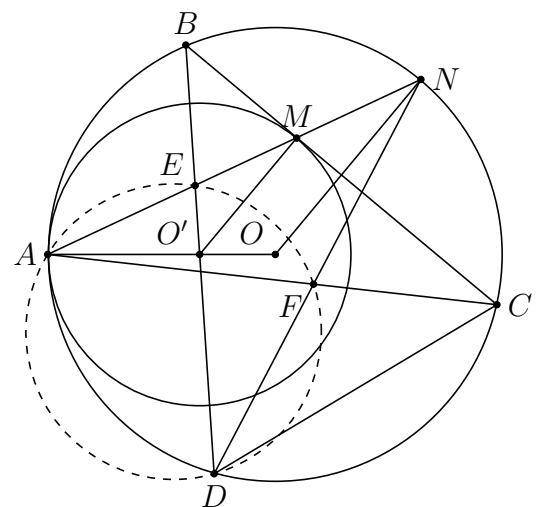
suy ra $O'M \parallel MN$. Mà $O'M \perp BC$, nên ta cũng có $ON \perp BC$, hay N là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$. Mặt khác $\widehat{NAC} = \widehat{NDC} = \frac{1}{2}\widehat{NC}$, $\widehat{BDN} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{BN}$ nên

$$\widehat{BDN} = \widehat{NAC} = \widehat{EAF}. \quad (1)$$

Trong đường tròn (AED) ta có

$$\widehat{EAF} = \widehat{EDF} = \widehat{BDF}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BDF} = \widehat{BDN}$, suy ra D, F, N thẳng hàng. Từ đó ta có $\widehat{BDN} = \widehat{NDC}$, hay DF là phân giác của góc $\widehat{BDC}$. □



3

Luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) . Từ điểm M nằm chính giữa cung AB vẽ dây cung MN song song với BC cắt AC tại S . Chứng minh rằng $SM = SC$ và $SN = SA$.

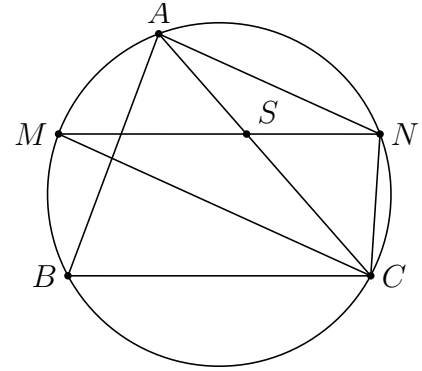
Lời giải.

Ta có $MN \parallel BC$, nên $\widehat{NMC} = \widehat{MCB}$.

Mà $\widehat{CMN} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{CN}$ và $\widehat{MCB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{BM}$.

Suy ra $\widehat{CN} = \widehat{BM}$. Mặt khác M là trung điểm của cung $\widehat{AB}$, nên $\widehat{AM} = \widehat{BM} = \widehat{CN}$. Suy ra $\widehat{ACM} = \widehat{CMN}$, hay $\widehat{SMC} = \widehat{SCM}$, $\widehat{MNA} = \widehat{NAC}$, hay $\widehat{SAN} = \widehat{SNA}$.

Từ đó ta có $SM = SC$ và $SA = SN$.



□

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A , $A < 90^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

1. $\triangle DBE$ cân.

2. $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Lời giải.

1. Ta có D, E nằm trên đường tròn đường kính AB , nên $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$, hay $AD \perp BC$ và $BE \perp AC$. Mà $\triangle ABC$ cân tại A nên D là trung điểm BC . Trong tam giác vuông BEC ta có $DE = DB = DC$, hay $\triangle BDE$ cân tại D .

2. Ta có AD là phân giác của góc A , nên

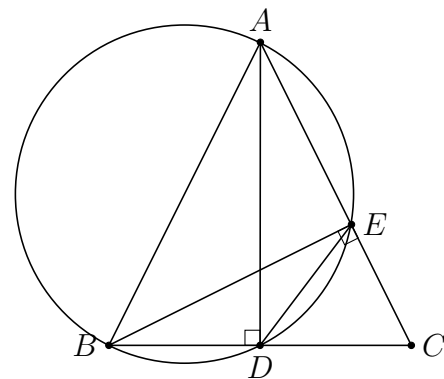
$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \widehat{EA}.$$

Mặt khác

$$\widehat{CBE} = \widehat{DBE} = \widehat{EAD} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{DE}.$$

Từ đó, suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

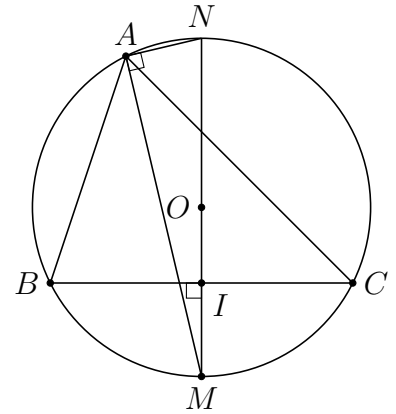
□



Bài 3. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ đường kính MN vuông góc với BC (M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng AM, AN là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của MN với BC , ta có I là trung điểm cạnh BC , nên ta có $IB = IC$ hay $\widehat{BM} = \widehat{CM}$.
 Mà $\widehat{BAM} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{MB}$, $\widehat{CAM} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{MC}$ nên ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$, hay AM là phân giác trong của $\widehat{BAC}$.
 Lại có MN là đường kính nên $AM \perp AN$, nên AN là phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$.



□

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE . Chứng minh rằng:

- $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.
- Tứ giác $ABEC$ là hình thang cân.
- Tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O) .

Lời giải.

- Xét hai tam giác MAC và MDB có $\widehat{AMB} = \widehat{BMD} = 90^\circ$, $\widehat{ACM} = \widehat{DBM} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AD}$. Do đó

$$\triangle MAC \sim \triangle MDB \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB},$$

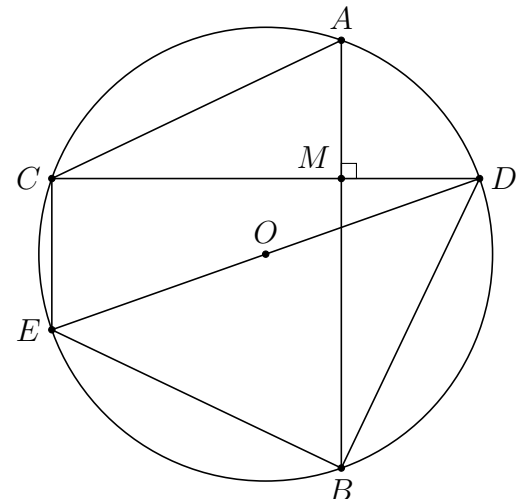
$$\text{hay } MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

- Vì DE là đường kính nên ta có $CE \perp CD$. Mà $AB \perp CD$, nên $AB \parallel CE$, suy ra $ABEC$ là hình thang. Hơn nữa bốn đỉnh của hình thang nằm trên đường tròn, nên $ABEC$ là hình thang cân.
- Ta có $ABEC$ là hình thang cân nên $AC = BE$ và $\triangle DBE$ vuông tại B , nên ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = AC^2 + BD^2 = BE^2 + BD^2 = ED^2 = 4R^2.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

□



Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng

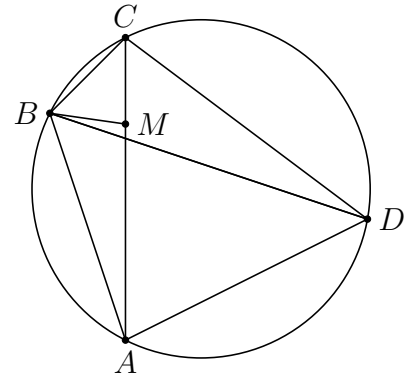
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

 Lời giải.

Trên đoạn AC , lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{BCD}$.
 Xét hai tam giác AMB và DCB có $\widehat{AMB} = \widehat{BCD}$, $\widehat{BAM} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BC}$). Suy ra $\triangle AMB \sim \triangle DCB$, nên ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{DC}{DB}$, hay $AM \cdot BD = AB \cdot CD$. (1)
 Lại có

$$\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BAD} + \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BCD} = 180^\circ,$$

$$\widehat{BMC} + \widehat{BCD} = \widehat{BMC} + \widehat{BMA} = 180^\circ.$$



Suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{BAD}$. Mà $\widehat{BCM} = \widehat{BDA} \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB} \right)$, nên ta có $\triangle BMC \sim \triangle BAD$, dẫn tới

$$\frac{BC}{MC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = BD \cdot CM. \quad (2)$$

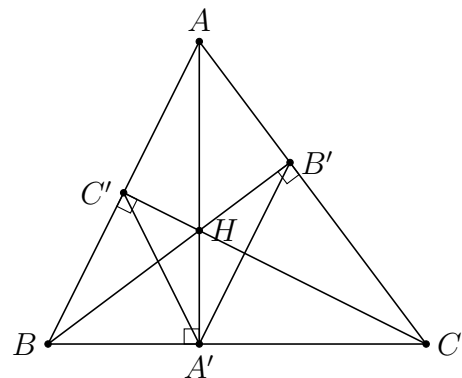
Từ (1) và (2) ta có

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AM \cdot BD + CM \cdot BD = AC \cdot BD.$$

 **Bài 6.** Cho tam giác ABC nhọn với các đường cao AA' , BB' , CC' . Chứng minh rằng AA' là phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$.

 Lời giải.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC .
 Ta có $\widehat{BC'H} = \widehat{BA'H} = 90^\circ$, nên bốn điểm B, A', H, C' nằm trên đường tròn. Do đó $\widehat{HA'C'} = \widehat{HBC'} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{HC'}$.
 Chứng minh tương tự, ta cũng có $\widehat{HA'B'} = \widehat{HCB'}$.
 Mà $\widehat{HBC'} = \widehat{HCB'}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$), nên ta có $\widehat{C'A'H} = \widehat{B'A'H}$.
 Từ đó, ta có AA' là phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$.



 **Bài 7.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , C là điểm cố định nằm trên đường tròn và M là điểm di động trên (O) sao cho M, O, C không thẳng hàng. CM và AB cắt nhau tại D . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ODM luôn đi qua một điểm cố định.

 Lời giải.

☐

§4 Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

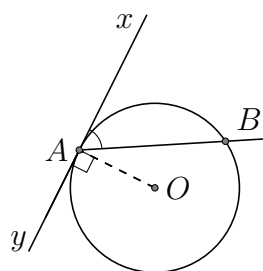
1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 10.

Đường thẳng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A .

AB là dây cung.

Góc $B Ax$ được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.



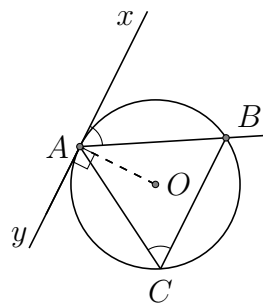
Định lý 18. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Cụ thể như hình trên, ta có $\widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB}$.

Hệ quả 5.

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Cụ thể $\widehat{BAx} = \widehat{BCA}$.

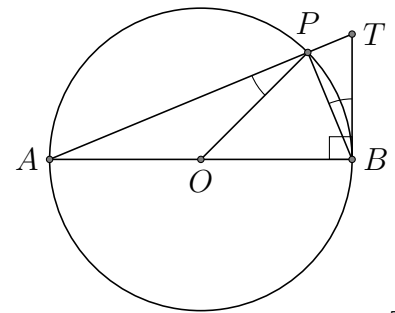


2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Lấy điểm P khác A và B trên đường tròn. Gọi T là giao điểm của AP với tiếp tuyến tại B của đường tròn. Chứng minh $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{PBT} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{PB}$ và $\widehat{PAB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{PB}$ nên $\widehat{PBT} = \widehat{PAB}$.
 $\triangle OAP$ cân tại O nên $\widehat{APO} = \widehat{PAB}$.
 Vậy $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$ (đpcm).

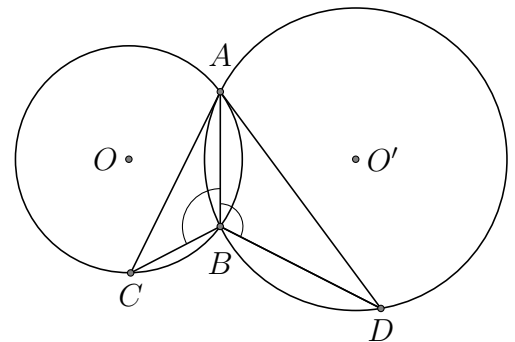


□

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Tiếp tuyến kẻ từ A đối với đường tròn (O') cắt (O) tại C và đối với đường tròn (O) cắt (O') tại D . Chứng minh $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$.

Lời giải.

Xét hai tam giác ABC và DBA có
 $\widehat{ACB} = \widehat{DAB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB).
 $\widehat{BAC} = \widehat{BDA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB).
 Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$ (đpcm).

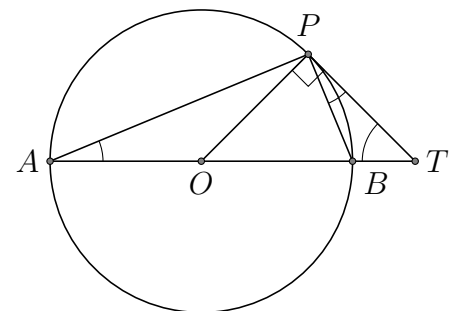


□

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Một tiếp tuyến của đường tròn tại P thuộc đường tròn cắt đường thẳng AB tại T (điểm B nằm giữa O và T). Chứng minh $\widehat{BTP} + 2 \cdot \widehat{TPB} = 90^\circ$.

Lời giải.

$\widehat{BPT} = \widehat{PAB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung PB).
 $\widehat{POB} = 2\widehat{BPT}$ (mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung PB).
 Suy ra $\widehat{BOP} = 2\widehat{BPT}$ (1)
 Tam giác POT vuông tại P nên $\widehat{OPT} + \widehat{TOP} = 90^\circ$. (2)
 (1), (2) $\Rightarrow \widehat{BTP} + 2 \cdot \widehat{TPB} = 90^\circ$. (đpcm)



□

Ví dụ 4. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn (O) . Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M . Từ A kẻ đường thẳng song song với MB , cắt (O) tại C . MC cắt đường tròn (O) tại E . Các tia AE và MB cắt nhau tại K . Chứng minh rằng

1. $MK^2 = AK \cdot EK$.
2. $MK = KB$.

✍ Lời giải.

$$1. MK^2 = AK \cdot EK.$$

Do $MB \parallel AC$ nên $\widehat{BMC} = \widehat{ACM}$.

$\widehat{ACM} = \widehat{ACE} = \widehat{MAE}$ (cùng chắn cung AE).

Suy ra $\triangle KME \sim \triangle KAM$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MK}{AK} = \frac{EK}{MK} \text{ hay } MK^2 = AK \cdot EK \text{ (đpcm).}$$

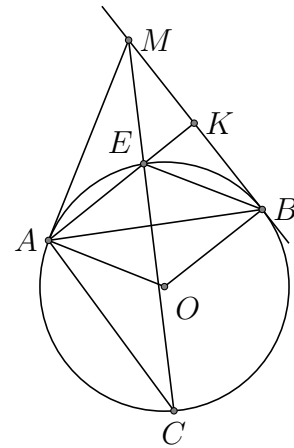
$$2. MK = KB.$$

Ta có $\widehat{EAB} = \widehat{EBK}$ (cùng chắn cung BE).

Suy ra $\triangle EBK \sim \triangle BAK$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{EK}{BK} \text{ hay } BK^2 = AK \cdot EK.$$

Suy ra $MK^2 = KB^2$ hay $MK = KB$ (đpcm).



□

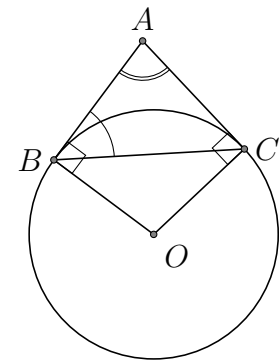
Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R$. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại A . Tính $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BAC}$.

✍ Lời giải.

$\triangle OBC$ đều nên $\widehat{BOC} = 60^\circ$.

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC} = \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Trong tứ giác $OBAC$ có $\widehat{BOC} + \widehat{OBA} + \widehat{BAC} + \widehat{ACO} = 360^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BAC} = 360^\circ - (\widehat{BOC} + \widehat{OBA} + \widehat{ACO}) = 120^\circ.$



□

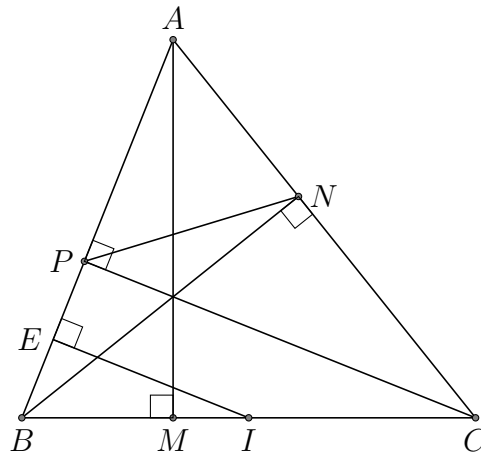
Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M, N, P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC .

1. Chứng minh rằng tam giác INP đều.

2. Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC . Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

3. Giả sử IA là phân giác của góc NIP . Tìm số đo góc BCP .

✍ Lời giải.



1. Chứng minh rằng tam giác INP đều.

Từ giả thiết, ta có $IN = IP = \frac{1}{2}BC$ nên tam giác INP cân tại I .

Vì B, P, N, C cùng nằm trên đường tròn tâm I , đường kính BC nên theo mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung, ta có $\widehat{PIN} = 2\widehat{PBN} = 60^\circ$.

Vậy tam giác INP đều.

2. Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC . Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

Rõ ràng bốn điểm I, M, E và K cùng nằm trên đường tròn đường kính AI .

3. Giả sử IA là phân giác của góc NIP . Tìm số đo góc BCP .

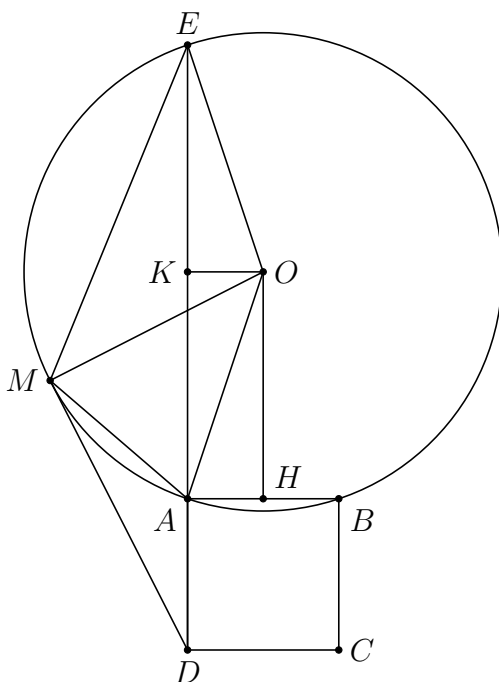
Từ điều kiện đề bài ta có AI là tia phân giác của góc BAC với $\widehat{BAC} = 60^\circ$, mà I là trung điểm của BC nên tam giác ABC đều. Suy ra $\widehat{BCP} = 60^\circ$.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh dài 2 cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua A và B biết rằng đoạn tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn đó bằng 4 cm.

Lời giải.



Gọi (O) là đường tròn cần tìm. Kéo dài DA cắt đường tròn (O) tại E . Xét $\triangle DAM$ và $\triangle DME$ có

$$\begin{cases} \widehat{D} \text{ chung} \\ \widehat{DMA} = \widehat{DEM} \text{ cùng chắn cung } MA \end{cases} \Rightarrow \triangle DAM \sim \triangle DME.$$

Từ $\triangle DAM \sim \triangle DME \Rightarrow \frac{DA}{DM} = \frac{DM}{DE} \Rightarrow DE = \frac{DM^2}{DA} = 8 \Rightarrow AE = DE - DA = 6 \text{ cm}.$

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AE . Khi đó ta có $OK \perp AE, OH \perp AB$ mà $AE \perp AB$ nên $OKAH$ là hình chữ nhật. Từ đó suy ra $OK = AH = \frac{1}{2}AB = 1 \text{ cm}.$

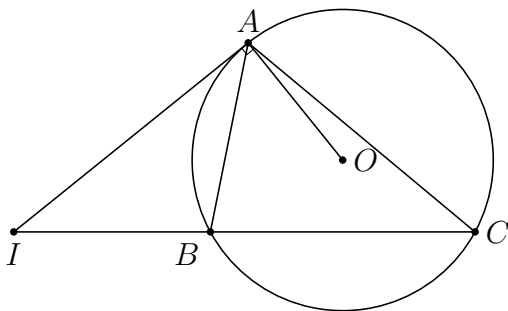
Xét $\triangle OKA$ vuông tại K có $OA = \sqrt{OK^2 + KA^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \text{ cm}.$ $\square$

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I .

1. Chứng minh rằng $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$

2. Tính IA, IC biết rằng $AB = 20 \text{ cm}, AC = 28 \text{ cm}, BC = 24 \text{ cm}.$

Lời giải.



1. Xét $\triangle BAI$ và $\triangle ACI$ có

$$\begin{cases} \widehat{I} \text{ chung} \\ \widehat{BAI} = \widehat{ICA} \text{ cùng chắn cung } AB \end{cases} \Rightarrow \triangle BAI \sim \triangle ACI \text{ (g.g.)}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IA} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IA^2}.$$

$$\text{Vì } \triangle ABI \sim \triangle ACI \Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{IA}{IC} \Rightarrow IA^2 = IB \cdot IC \text{ nên } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IB \cdot IC} = \frac{IB}{IC}.$$

2. Đặt $IA = x$, $IC = y$. Ta có

$$\triangle ABI \sim \triangle ACI \Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{AI} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y - 24}{x} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}.$$

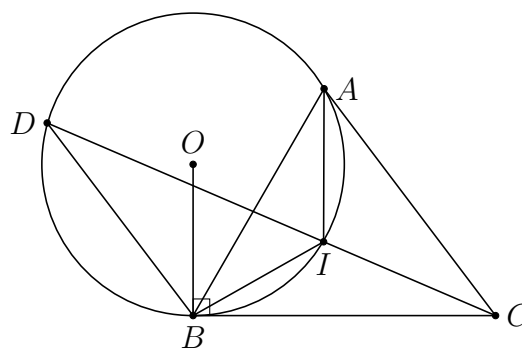
$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} 7x = 5y \\ 5x = 7(y - 24) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35x = 25y \\ 35x = 49(y - 24) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5y \\ y = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 49. \end{cases}$$

Vậy $IA = 35$ cm, $IC = 49$ cm.

□

Bài 3. Cho tam giác ABC . Vẽ đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B . Kẻ dây BD song song với AC . Gọi I là giao điểm của CD với đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$.

Lời giải.



$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{IAB} = \widehat{IDB} = \widehat{IBC} \text{ cùng chắn cung } IB \\ \widehat{IDB} = \widehat{ICA} \text{ so le trong} \end{cases} \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}.$$

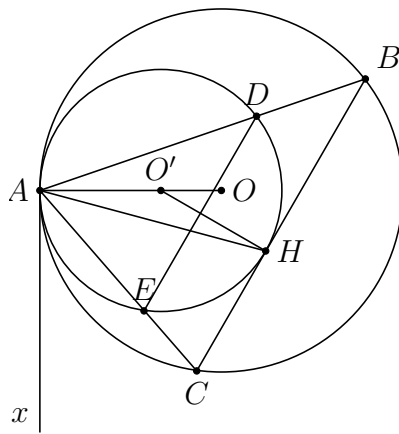
□

Bài 4. Cho đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại A . Dây BC của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại H . Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm (khác A) của AB, AC với đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng

1. DE song song với BC .

2. AH là tia phân giác của góc BAC .

Lời giải.



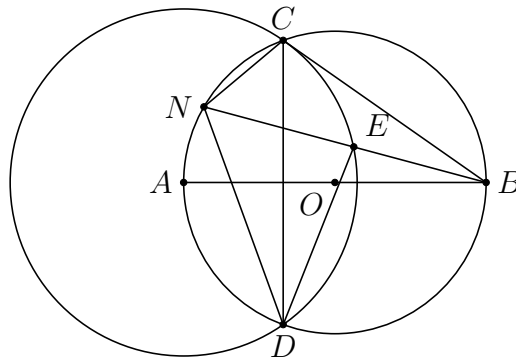
1. Kẻ tiếp tuyến chung Ax của hai đường tròn. Ta có $\widehat{B} = \widehat{ADE}$ (cùng bằng $\widehat{CAx}$) nên $DE \parallel BC$.
2. $DE \parallel BC$ mà $BC \perp O'H$ nên $DE \perp O'H \Rightarrow \widehat{HE} = \widehat{HD}$, do đó $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$. Vậy AH là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

□

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) ở C và D . Kẻ dây BN của đường tròn (O) , cắt đường tròn (A) tại điểm E ở bên trong đường tròn (O) . Chứng minh rằng

1. $\widehat{CEN} = \widehat{EDN}$.
2. $NE^2 = NC \cdot ND$.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{CEN} = \widehat{ECB} + \widehat{CBE} = \widehat{CDE} + \widehat{CDN} = \widehat{EDN}$.
2. Ta lại có $\widehat{CNB} = \widehat{DNB}$ (do $sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{BD}$).

Xét $\triangle CEN$ và $\triangle EDN$ có

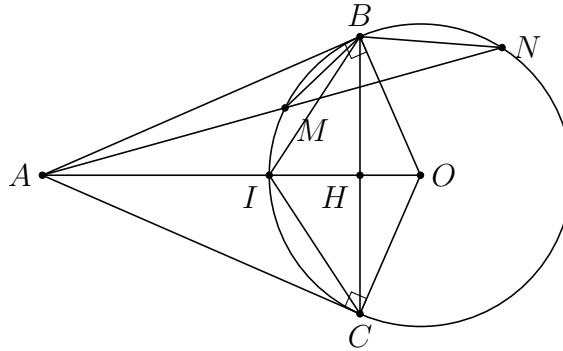
$$\begin{cases} \widehat{CEN} = \widehat{EDN} \\ \widehat{CNE} = \widehat{DNE} \end{cases} \Rightarrow \triangle CEN \sim \triangle EDN \text{ (g.g.)}, \text{ suy ra } \frac{NE}{ND} = \frac{NC}{NE} \Leftrightarrow NE^2 = NC \cdot ND.$$

□

Bài 6. Cho A nằm ngoài đường tròn (O) . Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AMN với (O) (M nằm giữa A và N).

1. Chứng minh $AB^2 = AM \cdot AN$.
2. Gọi H là giao điểm của AO và BC . Chứng minh: $AH \cdot AO = AM \cdot AN$.
3. Đoạn AO cắt đường tròn tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

 **Lời giải.**



1. Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ANB$ có

$$\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \widehat{MBA} = \widehat{NBA} \end{cases} \Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle ANB \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AN} \Leftrightarrow AB^2 = AM \cdot AN.$$

2. Dễ thấy $AO \perp BC$ tại H nên $\triangle ABO$ vuông tại B và nhận BH là đường cao.
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AB^2 = AH \cdot AO$.
Mặt khác $AB^2 = AM \cdot AN \Rightarrow AH \cdot AO = AM \cdot AN$.

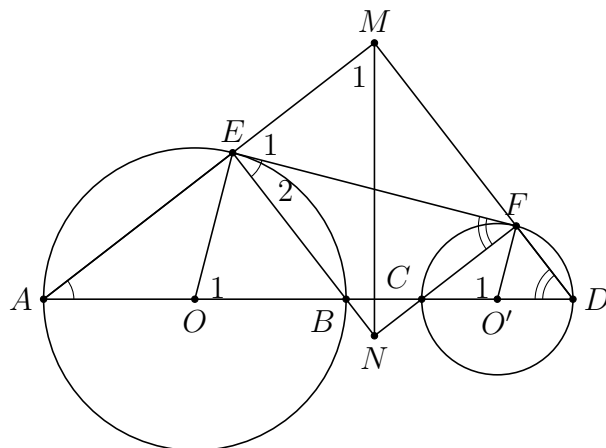
3. $\triangle ABC$ cân tại A nên I nằm trên phân giác của góc A .
Mặt khác $\widehat{ACI} = \frac{1}{2}\widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{ICB} = \widehat{ICB}$ nên I cũng nằm trên phân giác góc C . Điểm I là giao điểm của hai đường phân giác góc A và góc C của tam giác ABC nên I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

□

 **Bài 7.** Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt các đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF , $E \in (O)$, $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng

1. $MNEF$ là hình chữ nhật.
2. MN vuông góc với AD .
3. $ME \cdot MA = MF \cdot MD$.

 **Lời giải.**



1. Theo tính chất góc nội tiếp ta có

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{O_1}, \widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{O'_1} \text{ mà } \widehat{O_1} + \widehat{O'_1} = 180^\circ \text{ (vì } OE \parallel O'F \text{) nên } \widehat{A} + \widehat{D} = 90^\circ. \text{ Do đó } \widehat{AMD} = 90^\circ.$$

Ta lại có $\widehat{MEB} = 90^\circ, \widehat{MFC} = 90^\circ$.

Tứ giác $MENF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

2. Theo tính chất hình chữ nhật $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$.

Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{A} = \widehat{E_2}$.

Suy ra $\widehat{M_1} + \widehat{A} = 90^\circ$. Do đó $MN \perp AD$.

3. Xét $\triangle MFE$ và $\triangle MAD$ có

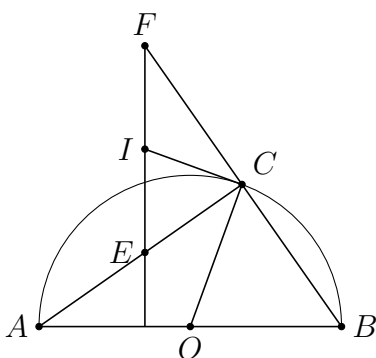
$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{E_2} = \widehat{MFE} \\ \widehat{M} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle MFE \sim \triangle MAD \Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{ME}{MD} \Leftrightarrow ME \cdot MA = MF \cdot MD.$$

□

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C trên nửa đường tròn. Gọi D là 1 điểm trên đường kính AB . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BC ở F , cắt AC ở E . Tiếp tuyến của nửa đường tròn ở C cắt EF ở I . Chứng minh

- I là trung điểm của EF .
- Đường thẳng OC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECF$.

Lời giải.



1. Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{ICE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{CA} \\ \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{CA} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{ABC}.$$

Mà $\widehat{IEC} = \widehat{AED}$ (2 góc đối đỉnh) và $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$). Từ đó suy ra $\widehat{ICE} = \widehat{IEC} \Rightarrow \triangle IEC$ cân tại $I \Rightarrow IE = IC$. (1)

$$\text{Lại có } \begin{cases} \widehat{CFI} = \widehat{CEI} = 90^\circ \\ \widehat{FCI} = \widehat{ECI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CFI} = \widehat{FCI} \Rightarrow \triangle CFI \text{ cân} \Rightarrow IF = IC. \\ \widehat{ECI} = \widehat{CEI} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $IC = IE = IF \Rightarrow I$ là trung điểm của EF .

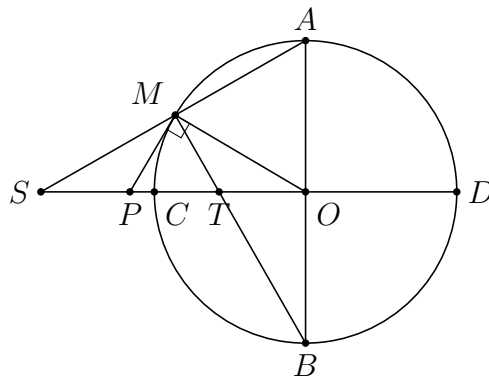
2. Vì $IE = IF = IC$ nên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECF$ là đường tròn tâm I , bán kính IC .
Mà $\widehat{ICO} = 90^\circ$, suy ra OC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF .

□

Bài 9. Cho đường tròn (O, R) , hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia CD lấy điểm S . SA cắt đường tròn tại M , tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt CD ở O , BM cắt CD ở T . Chứng minh

- $PT \cdot MA = MT \cdot OA$.
- $PS = PM = PT$.
- Biết $PM = R$, tính $TA \cdot SM$ theo R .

Lời giải.



$$1. \begin{cases} \widehat{PTM} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BM} \\ \widehat{MAO} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BM} \end{cases} \Rightarrow \widehat{PMT} = \widehat{MAO}. \quad (1)$$

$$\text{Có } \begin{cases} \widehat{MTS} + \widehat{MST} = 90^\circ (\triangle MST \text{ vuông tại } M) \\ \widehat{OAM} = \widehat{MST} = 90^\circ (\triangle AOS \text{ vuông tại } O) \Rightarrow \widehat{MTS} = \widehat{OMA}. \\ \widehat{OAM} = \widehat{OMA} (\triangle OAM \text{ cân tại } O) \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle PMT \sim \triangle OMA$ (g.g), suy ra $\frac{PT}{MT} = \frac{OA}{MA} \Rightarrow PT \cdot MA = OA \cdot MT$

2. Ta có

$$\begin{cases} \widehat{OAB} = \widehat{OBM} (\triangle OMB \text{ cân tại } M) \\ \widehat{OMB} = \widehat{PMS} \text{ (cùng phụ với } \widehat{PMT}) \Rightarrow \widehat{PMS} = \widehat{PSM} \Rightarrow \triangle PMS \text{ cân tại } P. \\ \widehat{MSP} = \widehat{MBO} \text{ (cùng phụ với } \widehat{A}) \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \widehat{PMS} + \widehat{PMT} = 90^\circ \\ \widehat{PSM} + \widehat{STM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PMT} = \widehat{PTM} \Rightarrow \triangle PMT \text{ cân tại } P. \\ \widehat{PMS} = \widehat{PSM} \end{cases}$$

Các tam giác PMS và PMT cân tại P nên $PM = PS = PT$.

3. Điểm T nằm trên trung trực của AB nên $\triangle TAB$ cân tại T .

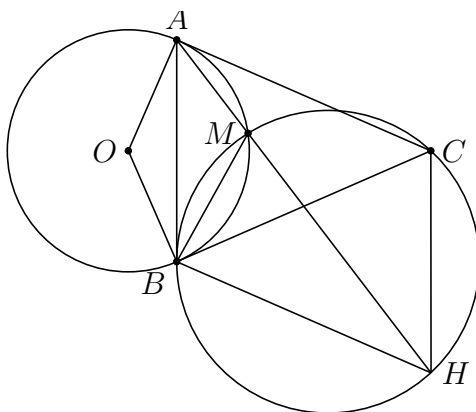
Mặt khác $\triangle PMS$ cân tại P và có $\widehat{PSM} = \widehat{TBA}$ (cùng phụ với $\widehat{A}$) nên $\triangle TAB \sim \triangle PMS$.

$$\text{Suy ra } \frac{SM}{AB} = \frac{PM}{TA} \Rightarrow SM \cdot TA = PM \cdot AB = 2R^2.$$

□

Bài 10. Cho (O) và điểm C nằm ngoài đường tròn. Qua C kẻ 2 tiếp tuyến CA, CB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ (O') đi qua C , tiếp xúc với AB tại B , cắt (O) tại M . Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của BC .

 **Lời giải.**



Tia AM cắt (O') tại H . Ta có

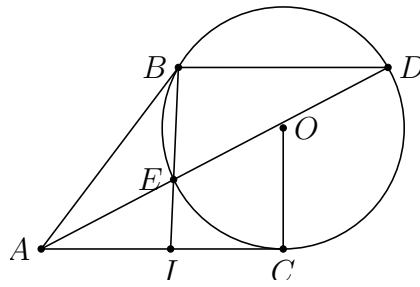
$$\begin{cases} \widehat{CAH} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AM} = \widehat{ABM} \\ \widehat{ABM} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BM} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)} \Rightarrow \widehat{CAH} = \widehat{BHA} \Rightarrow AC \parallel BH. \\ \widehat{BHA} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BM} \text{ (trong } (O')) \end{cases}$$

Tương tự $AB \parallel CH \Rightarrow$ tứ giác $ABHC$ là hình bình hành suy ra AM đi qua trung điểm của BC .

□

Bài 11. Từ điểm A nằm ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi BD là dây của đường tròn song song với AC , E là giao điểm của AD với đường tròn, I là giao điểm của BE và AC . Chứng minh rằng I là trung điểm của AC .

 **Lời giải.**



Ta có IC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $IC^2 = IE \cdot IB$.

Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{EBD} = \widehat{D_1}$, mà $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong, $BD \parallel AC$) nên $\widehat{EBA} = \widehat{A_1}$.

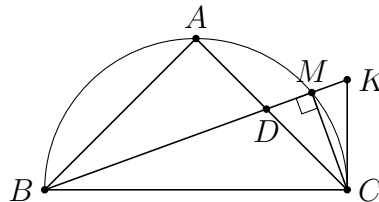
Từ đó suy ra $\triangle IBA \sim \triangle IAE$ (g.g) nên $\frac{IA}{IE} = \frac{IB}{IA} \Rightarrow IA^2 = IE \cdot IB$. $\square$



Các bài toán nâng cao

Bài 12. Tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) đường kính 5 cm. Tiếp tuyến với đường tròn C cắt tia phân giác của góc B tại K . Tính độ dài BK , biết rằng BK cắt AC tại D và $BD = 4$ cm.

Lời giải.



Gọi M là giao điểm của DK với nửa đường tròn. Dễ thấy $\triangle CDK$ cân. Đặt $DM = MK = x > 0$.

Ta có $BM \cdot BK = BC^2 \Leftrightarrow (x + 4)(2x + 4) = 25 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = \frac{27}{2} \Leftrightarrow (x + 3)^2 = \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2$.

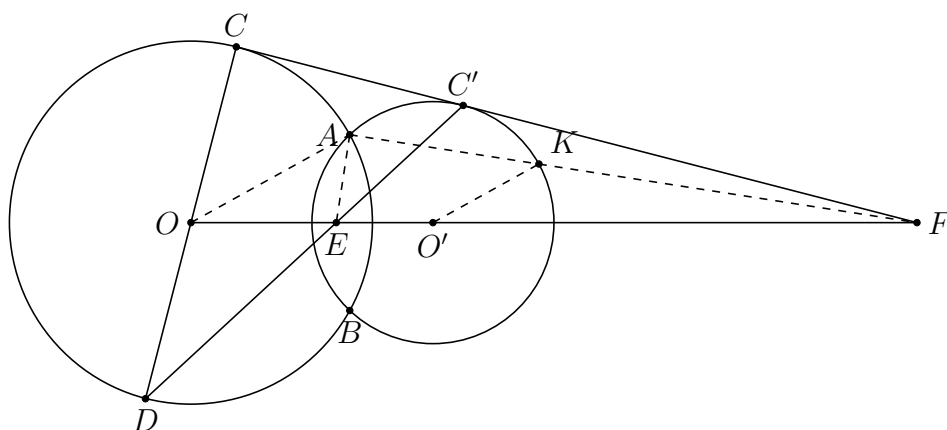
Nghiệm dương của phương trình là $x = \frac{3\sqrt{6} - 6}{2}$. Do đó $DK = 3\sqrt{6} - 6$ cm, $BK = 3\sqrt{6} - 2$ cm. $\square$

Bài 13. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B . Kẻ tiếp tuyến chung CC' ($C \in (O)$, $C' \in (O')$), kẻ đường kính COD . Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của OO' với $C'D, CC'$. Chứng minh rằng

1. $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (A, C, C' nằm cùng phía đối với OO').

2. FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC' .

Lời giải.



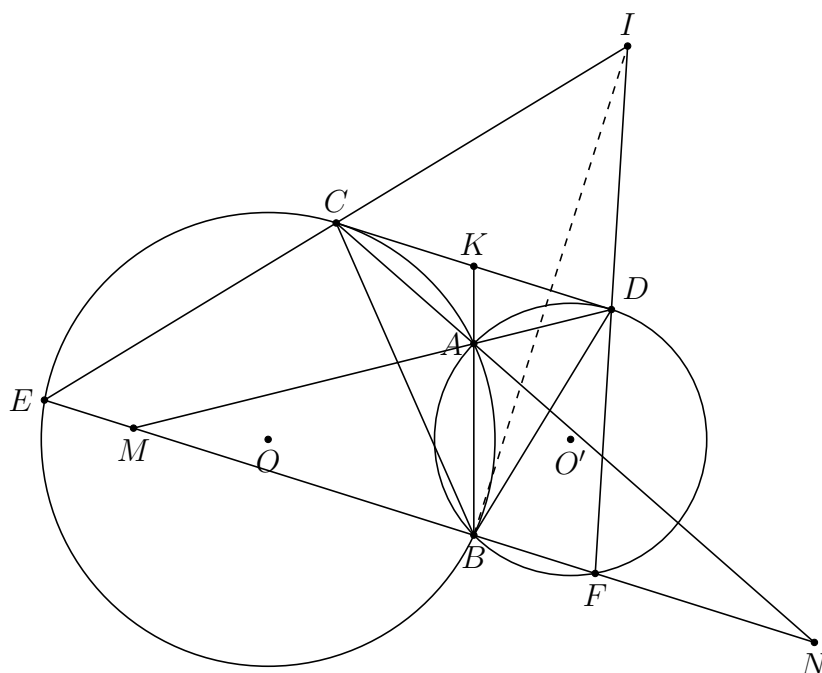
- Gọi R, R' là bán kính của đường tròn $(O), (O')$. Điểm E chia trong đoạn OO' , điểm F chia ngoài đoạn OO' theo cùng một tỉ số $\frac{R}{R'}$. Do đó AE là đường phân giác trong, AF là đường phân giác ngoài của $\triangle AOO'$. Suy ra $\widehat{EAF} = 90^\circ$.
- Kẻ bán kính $O'K$ song song và cùng chiều với OA . Gọi F' là giao điểm của AK với OO' . Theo định lí Ta-let ta có $\frac{F'O'}{F'O} = \frac{O'K}{AO} = \frac{R'}{R}$ hay F chia đoạn OO' theo tỉ số $\frac{R}{R'}$, như vậy $F \equiv F'$.
Ta có $\widehat{COA} = \widehat{C'O'K}$ nên $\widehat{C'CA} = \widehat{C'AK}$. Từ đó AF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC' .

☐

Bài 14. Cho hai đường tròn (O) , (O') cắt nhau ở A và B , trong đó tiếp tuyến chung CD song song với cát tuyến chung EBF , C và E thuộc (O) , D và F thuộc (O') , B nằm giữa E và F . Gọi M , N theo thứ tự là giao điểm của DA , CA với EF . Gọi I là giao điểm của EC và FD . Chứng minh rằng

1. $\triangle ICD = \triangle BCD$.
2. IB là đường trung trực của MN .

 Lời giải.



1. Ta có $\widehat{BCD} = \widehat{E} = \widehat{ICD}$. Tương tự $\widehat{BDC} = \widehat{IDC}$. Do đó $\triangle ICD = \triangle BCD$ (g.c.g)
2. Từ câu a) dễ dàng chứng minh được CD là trung trực của IB . Ta lại có $CD \parallel EF$ nên $IB \perp EF$. (1)

Gọi K là giao điểm của BA và CD . Ta có $\frac{KC}{BN} = \frac{KD}{BM}$ (cùng bằng $\frac{AK}{AB}$).

Ta lại có $KC = KD$ (cùng bằng $\sqrt{KA \cdot KB}$) nên $BN = BM$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IB là đường trung trực của MN .

□

§5

Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

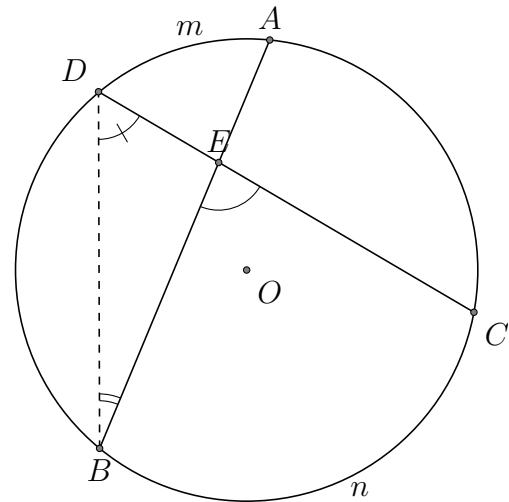
1

Tóm tắt lý thuyết

Quan sát hình bên ta thấy góc BEC có đỉnh E nằm bên trong đường tròn (O). Ta nói góc BEC là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

Người ta quy ước: Mỗi góc có đỉnh ở bên trong đường tròn chắn hai cung, một cung nằm bên trong góc, cung kia nằm bên trong góc đối đỉnh của nó.

Theo đó, trên hình vẽ ta có góc BEC chắn cung $\widehat{BnC}$ và cung $\widehat{DmA}$. Ta có định lý sau



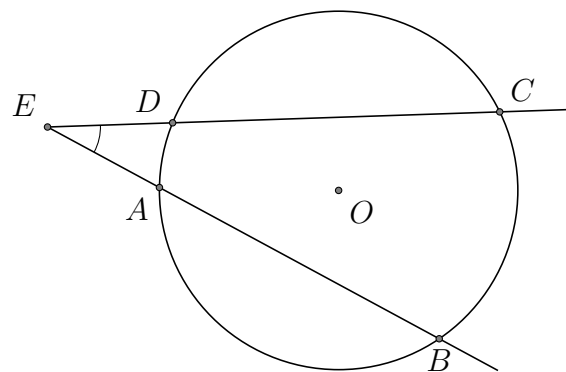
Định lý 19. Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BEC} = \frac{sđ\widehat{BnC} + sđ\widehat{DmA}}{2}.$$

Góc có đỉnh bên ngoài đường tròn là góc có hai đặc điểm sau

- ☑ Đỉnh nằm ngoài đường tròn.
- ☑ Các cạnh đều có 1 hoặc 2 điểm chung với đường tròn.

Mỗi góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn có hai cung bị chắn. Hai cung đó nằm bên trong góc. Góc BEC ở hình bên có hai cạnh cắt đường tròn, hai cung bị chắn là hai cung nhỏ $\widehat{AD}$ và $\widehat{BC}$. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn được xác định qua định lý:



Định lý 20. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BEC} = \frac{sđ\widehat{BC} - sđ\widehat{AD}}{2}.$$

2

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC bằng nhau. Trên cung nhỏ AC lấy một điểm M . Gọi S là giao điểm của AM và BC . Chứng minh $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{ASC}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài (O) nên

$$\widehat{ASC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{MC}). \quad (1)$$

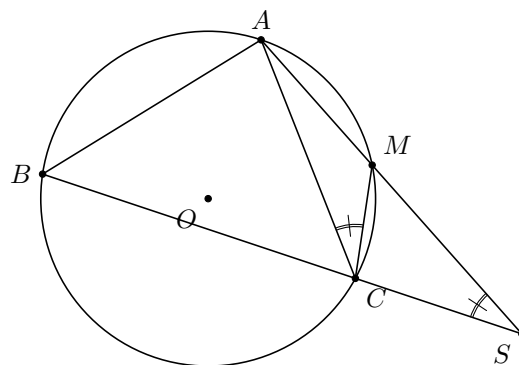
Ta có góc $\widehat{MCA}$ là góc nội tiếp trong (O) chắn cung AM nên

$$\widehat{MCA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM}. \quad (2)$$

Theo giả thiết, ta có $AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$. Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned} \widehat{ASC} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{MC}) \\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM}. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$. □



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường tròn đường kính AB cắt BC ở D , tiếp tuyến ở D cắt AC ở P . Chứng minh $PD = PC$.

Lời giải.

Góc $\widehat{C}$ có đỉnh ở bên ngoài đường tròn nên

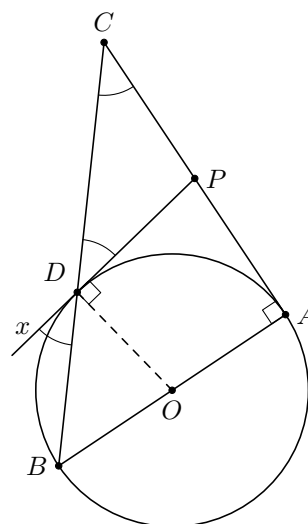
$$\widehat{C} = \frac{\text{sđ}\widehat{AmB} - \text{sđ}\widehat{AD}}{2} = \frac{\text{sđ}\widehat{ADB} - \text{sđ}\widehat{AD}}{2}.$$

$$\text{do đó } \widehat{C} = \frac{\text{sđ}\widehat{BD}}{2} \quad (1).$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{CDP} = \widehat{BDx} \quad (2),$$

$$\widehat{BDx} = \frac{\text{sđ}\widehat{BD}}{2} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{C} = \widehat{CDP}$ hay tam giác CPD cân, do đó $PD = PC$. □



Ví dụ 3. Trên đường tròn (O) cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Gọi A_1, B_1, C_1 và D_1 lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CD và DA . Chứng minh các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 vuông góc với nhau.

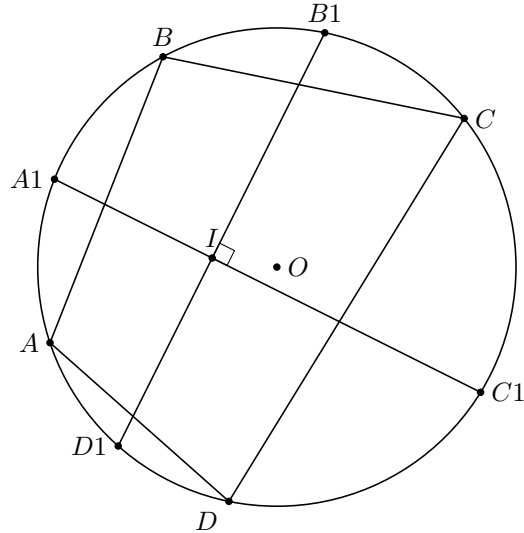
Lời giải.

Gọi I là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1 , $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ theo thứ tự là số đo của các cung $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$. Khi đó $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Xét góc $\widehat{A_1IB_1}$ là góc có đỉnh trong đường tròn (O) ta có

$$\begin{aligned}\widehat{A_1IB_1} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{A_1BB_1} + \text{sđ}\widehat{C_1DD_1}) \\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{A_1B} + \text{sđ}\widehat{BB_1} + \text{sđ}\widehat{C_1D} + \text{sđ}\widehat{DD_1}) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Nghĩa là $A_1C_1 \perp B_1D_1$.



□

Ví dụ 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Điểm D di động trên cung AC . Gọi E là giao điểm của AC và BD , gọi F là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng:

- $\widehat{AFB} = \widehat{ABD}$;
- Tích $AE \cdot BF$ không đổi.

Lời giải.

1.

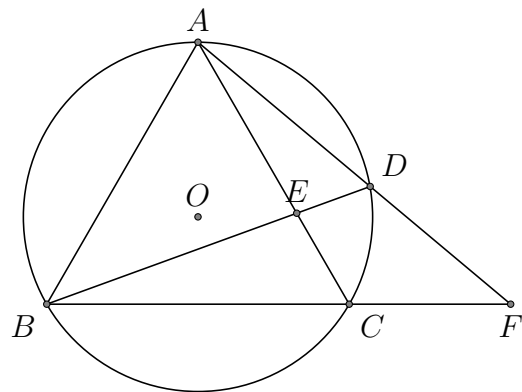
Theo tính chất góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn ta có

$$\widehat{AFB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{CD}). \quad (1)$$

Theo tính chất góc nội tiếp

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{CD}). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AFB} = \widehat{ABD}$.



2. $\triangle AFB$ và $\triangle EBA$ có $\widehat{AFB} = \widehat{EBA}$, $\widehat{FBA} = \widehat{BAE} = 60^\circ$ nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{BF}{AB}$. Do đó $AE \cdot BF = AB^2$.

Ví dụ 5. Trong tam giác ABC , đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D . Giả sử (T) là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A . Gọi M là giao điểm thứ hai của (T) và AC , P là giao điểm thứ hai của (T) và BM , E là giao điểm của AP và BC .

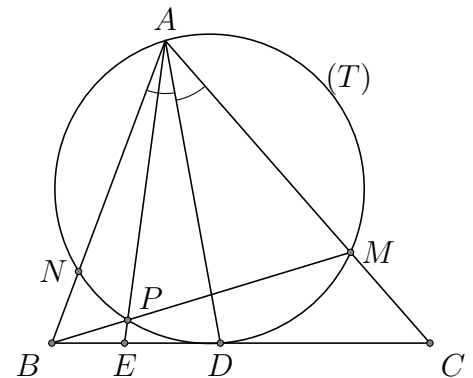
1. Chứng minh $\widehat{EAB} = \widehat{MBC}$.
2. Chứng minh $BE^2 = EP \cdot EA$.

Lời giải.

1.

Gọi N là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn (T) .
Do AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên $\text{sđ}\widehat{DM} = \text{sđ}\widehat{DN}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{MBC} &= \widehat{MBD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DM} - \text{sđ}\widehat{DP}) \\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DN} - \text{sđ}\widehat{DP}) \\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{NP} = \widehat{NAP} = \widehat{EAB}.\end{aligned}$$



2. Từ kết quả câu a) ta thấy $\widehat{EBP} = \widehat{EAB}$. Từ đó $\triangle EBP \sim \triangle EAB$ suy ra

$$\frac{BE}{EP} = \frac{EA}{BE} \Leftrightarrow BE^2 = EP \cdot EA.$$

Ví dụ 6. Trên đường tròn (O) ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

1. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$.
2. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là các đường phân giác trong của tam giác $A_1B_1C_1$.
3. Giả sử (T_1) và (T_2) là hai tam giác nội tiếp đường tròn (O) , đồng thời các đỉnh của tam giác (T_2) là các điểm chính giữa của các cung của đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác T_1 . Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác (T_1) và (T_2) các đường chéo nối các đỉnh đối diện nhau song song với các cạnh của tam giác (T_1) và đồng quy tại một điểm.

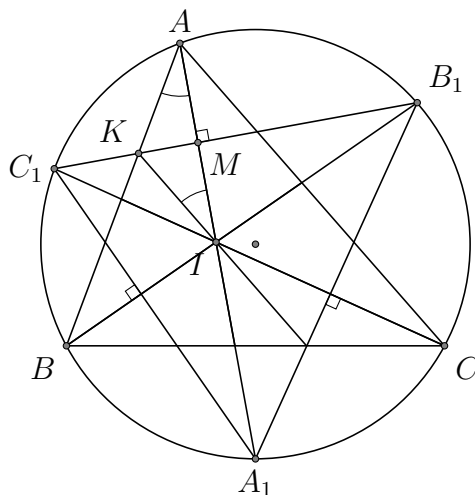
Lời giải.

1.

Ta chứng minh $AA_1 \perp BB_1$. Thật vậy, gọi M là giao điểm của AA_1 và B_1C_1 ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AMB_1} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB_1} + \text{sđ}\widehat{A_1BC_1}) \\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB_1} + \text{sđ}\widehat{A_1B} + \text{sđ}\widehat{BC_1}) \\ &= \widehat{ABB_1} + \widehat{A_1AB} + \widehat{BCC_1} \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA}) = 90^\circ\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $BB_1 \perp A_1C_1$; $CC_1 \perp A_1B_1$.



2. Gọi M_1 là giao điểm của BB_1 và AC ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BM_1A} &= \frac{1}{2}((\text{sđ}\widehat{AC_1B} + \text{sđ}\widehat{A_1C})) \\ &= \widehat{BCA} + \widehat{A_1C_1C}. \quad (1)\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\widehat{BM_2A} &= \frac{1}{2}((\text{sđ}\widehat{AC_1B} + \text{sđ}\widehat{B_1C})) \\ &= \widehat{BCA} + \widehat{B_1C_1C}. \quad (2)\end{aligned}$$

Bởi vì $\widehat{BM_1A} = \widehat{BM_2A} = 90^\circ$ nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1C_1C} = \widehat{B_1C_1C}$ tức là CC_1 là phân giác của góc $\widehat{A_1C_1B_1}$. Chứng minh tương tự ta cũng thu được AA_1 là phân giác của góc $\widehat{B_1A_1C_1}$; BB_1 là phân giác của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$.

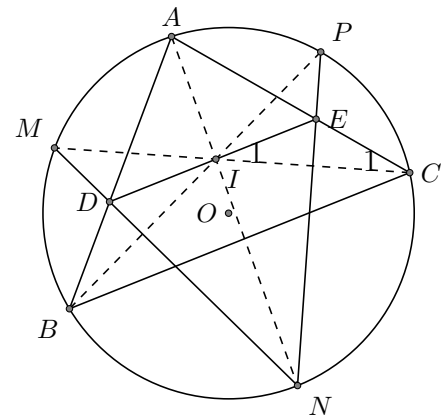
3. Kí hiệu các đỉnh của tam giác (T_1) là A, B, C ; A_1, B_1, C_1 là điểm chính giữa các cung BC, CA, AB tương ứng. Khi đó (T_2) là tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 chứa các đường phân giác của tam giác (T_1) nên chúng đồng quy tại điểm I . Giả sử K là giao điểm của AB và B_1C_1 . Ta chỉ cần chứng minh $IK \parallel AC$. Thật vậy, ta thấy tam giác AB_1I cân tại B_1 nên tam giác AIK cân tại K . Từ đó $\widehat{KIA} = \widehat{KAI} = \widehat{IAC}$ nên $IK \parallel AC$.

□

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA . Gọi D là giao điểm của MN và AB , E là giao điểm của PN và AC . Chứng minh rằng DE song song với BC .

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của CM và PB . Ta có A, I, N thẳng hàng. Vì $\widehat{PIC} = \widehat{PCI}$ nên $PI = PC$. Tương tự, $NI = NC$. Do đó PN là đường trung trực của IC , suy ra $IE = CE$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{I_1}$. Ta lại có $\widehat{C_1} = \widehat{ICB}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{ICB}$, do đó $IE \parallel BC$. Chứng minh tương tự, $ID \parallel BC$. Suy ra I, D, E thẳng hàng và $DE \parallel BC$.



□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC . Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của $\widehat{AB}$ và $\widehat{AC}$. Đường thẳng MN cắt dây AB tại E và cắt dây AC tại H . Chứng minh tam giác AEH cân.

Lời giải.

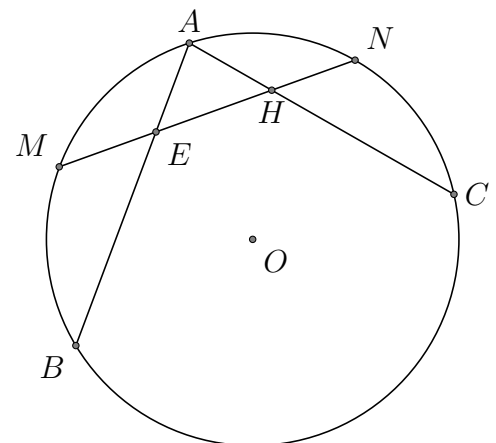
Vì $\widehat{AHM}$ và $\widehat{AEN}$ là các góc có đỉnh ở bên trong (O) nên ta có

$$\widehat{AHM} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AM} + \text{sđ}\widehat{NC}). \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{MB} + \text{sđ}\widehat{AN}). \quad (2)$$

Theo giả thiết ta có $\widehat{MA} = \widehat{MB}$ và $\widehat{NA} = \widehat{NC}$. Thế vào (2) ta được

$$\widehat{AEN} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AM} + \text{sđ}\widehat{NC}). \quad (3)$$



So sánh (1) và (3) ta được $\widehat{AHM} = \widehat{AEN}$ hay tam giác AEH cân. □

Bài 2. Cho A, B, C là ba điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến tại A cắt tia BC tại D . Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ở M , tia phân giác của $\widehat{D}$ cắt AM ở I . Chứng minh $DI \perp AM$.

Lời giải.

Gọi giao điểm của AM và BC là N , ta có

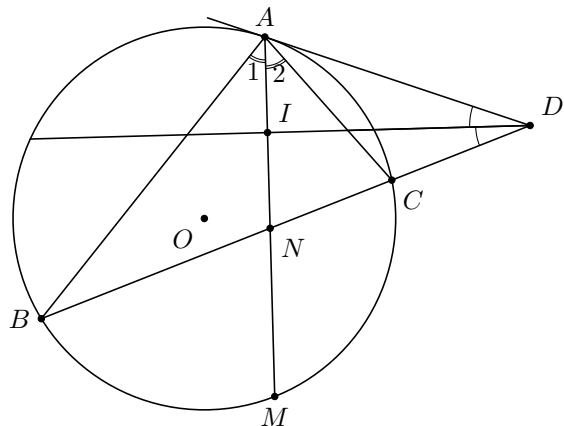
$$\widehat{AND} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{BM}).$$

Nhưng $\widehat{BM} = \widehat{CM}$ nên

$$\widehat{AND} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{CM}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM}. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{NAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM}. \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có $\widehat{AND} = \widehat{NAD}$ hay tam giác DAN cân tại D . Suy ra tia phân giác DI đồng thời là đường cao. Do đó $ID \perp AM$.



Bài 3. Trên một đường tròn, lấy liên tiếp ba cung AC , CD , DB sao cho $\text{sđ}\widehat{AC} = \text{sđ}\widehat{CD} = \text{sđ}\widehat{DB} = 60^\circ$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E . Hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại T . Chứng minh rằng:

- $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$;
- CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.

Lời giải.

- Chứng minh $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$.

Ta có $\widehat{AEB}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O) nên

$$\widehat{AEB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{CD}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ \quad (1)$$

Ta cũng có $\widehat{BTC}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O), nên $\widehat{BTC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BAC} - \text{sđ}\widehat{BDC})$

$$= \frac{1}{2}[(180^\circ + 60^\circ) - (60^\circ + 60^\circ)] = 60^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$, (đpcm).

- Chứng minh CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.

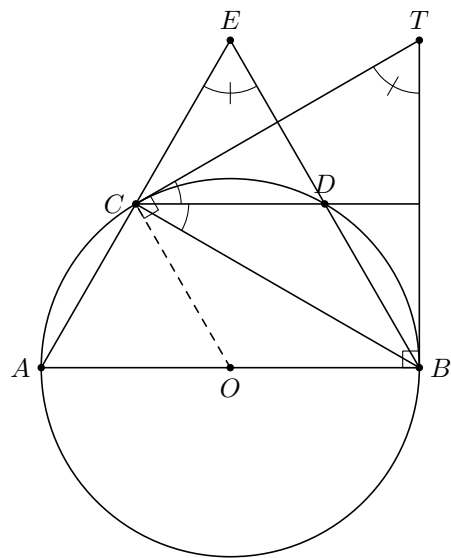
Vì $\widehat{DCT}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung nên

$$\widehat{DCT} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{CD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ. \quad (1)$$

Và $\widehat{DCB}$ là góc nội tiếp trong (O) chắn cung BD nên

$$\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DCT} = \widehat{DCB}$. Vậy CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.



Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (C và D nằm về cùng phía so với AB). Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B trên đường thẳng CD . Tia AD cắt tia BC tại I . Biết rằng $AE + BF = R\sqrt{3}$.

1. Tính số đo $\widehat{AIB}$.
2. Trên cung nhỏ CD lấy điểm K . Gọi giao điểm của KA, KB với CD lần lượt là M, N . Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD .

Lời giải.

a) Kẻ $OH \perp CD$ với H thuộc đoạn thẳng CD , ta thấy OH là đường trung bình của hình thang $ABFE$, suy

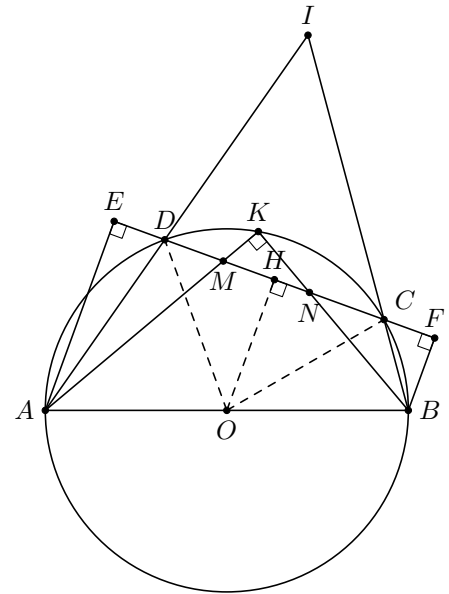
$$ra \quad OH = \frac{1}{2}(AE + BF) = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đó $\triangle OCD$ đều, suy ra $sđ\widehat{COD} = sđ\widehat{CKD} = 60^\circ$.

Ta thấy góc $\widehat{AIB}$ có đỉnh nằm ngoài đường tròn (O) nên

$$sđ\widehat{AIB} = \frac{1}{2}(sđ\widehat{AmB} - sđ\widehat{CKD}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ.$$

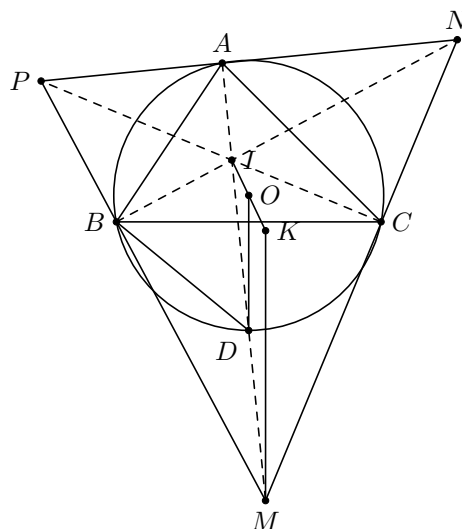
b) Ta thấy $\triangle AEM \sim \triangle NFB$ suy ra $EM \cdot NF = AE \cdot BF$, (không đổi). Do đó MN lớn nhất khi và chỉ khi $EM + NF$ nhỏ nhất. Theo trên $EM \cdot NF$ không đổi nên $EM + NF$ nhỏ nhất khi $EM = NF = \sqrt{AE \cdot BF}$. Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng $EF - 2\sqrt{AE \cdot BF}$.



□

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn ($O; R$). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó; M, N, P theo thứ tự là tâm các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C . Gọi K là điểm đối xứng với I qua O . Chứng minh rằng K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của AM với đường tròn (O). Ta chứng minh được các tam giác DBI và DBM cân suy ra $DI = DM$. Do đó OD là đường trung bình của $\triangle MIK$, suy ra $KM = 2OD = 2R$. Vậy M thuộc đường tròn ($K; 2R$). Tương tự đối với các điểm N và P .

30. Đường tròn (O) đi qua chân ba đường cao của $\triangle MNP$ nên là đường tròn Ô-le của tam giác đó. Theo tính chất của đường tròn Ô-le, trung điểm H của NP thuộc đường tròn. Từ đó suy ra "Trung điểm của đoạn thẳng nối tâm của hai đường tròn bàng tiếp tam giác nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó".

□

Bài 6. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên trong đường tròn. Chứng minh $\widehat{A} + \widehat{BSM} = 2\widehat{CMN}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{CAN}$ là góc ở bên ngoài đường tròn (O) nên

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{CN} - \text{sđ}\widehat{BM}) \quad (1)$$

Góc $\widehat{BSM}$ là góc có đỉnh trong đường tròn (O) nên

$$\widehat{BSM} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{CN} + \text{sđ}\widehat{BM}) \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) về với về ta có

$$\widehat{A} + \widehat{BSM} = \text{sđ}\widehat{CN} \quad (3)$$

Ta có $\widehat{CMN}$ là góc nội tiếp của (O) chắn $\widehat{CN}$ nên

$$\widehat{CMN} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{CN} \Leftrightarrow \text{sđ}\widehat{CN} = 2 \cdot \widehat{CMN} \quad (4)$$

Thế (4) vào (3) ta được $\widehat{A} + \widehat{BSM} = 2 \cdot \widehat{CMN}$.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C .

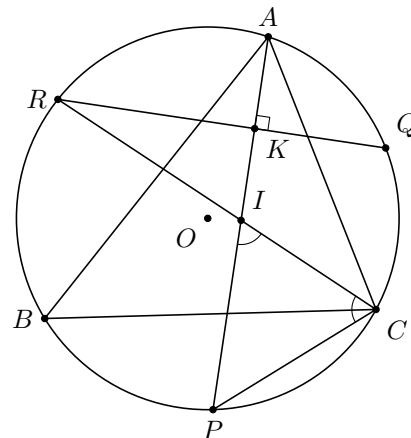
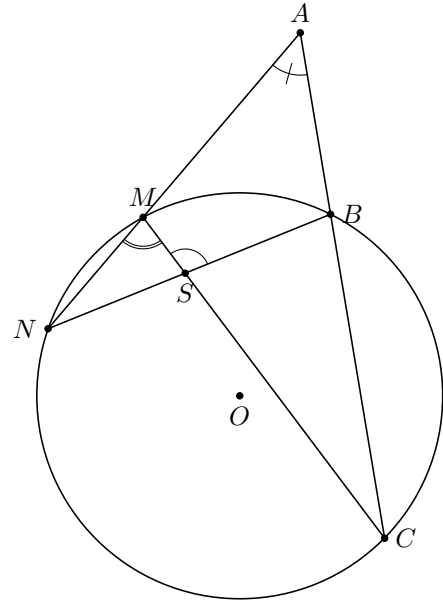
1. Chứng minh $AP \perp QR$.
2. AP cắt CR tại I . Chứng minh tam giác CPI cân.

Lời giải.

- a) Gọi K là giao điểm của AP và QR . Ta có $\widehat{AKR}$ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn (O) nên

$$\begin{aligned} \widehat{AKR} &= \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AR} + \text{sđ}\widehat{QCP}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AR} + \text{sđ}\widehat{QC} + \text{sđ}\widehat{CP}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AB} + \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AC} + \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{BC} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\text{sđ}\widehat{AB} + \text{sđ}\widehat{BC} + \text{sđ}\widehat{AC}) = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Vì $\widehat{AKR} = 90^\circ$. Suy ra $AP \perp QR$ (đpcm).



b) Ta có $\widehat{CIP}$ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên

$$\widehat{CIP} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{CP} + \text{sđ}\widehat{AR}). \quad (1)$$

Ta có $\widehat{PCI}$ là góc nội tiếp trong đường tròn (O) chắn cung $\widehat{PR}$ nên

$$\widehat{PCI} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{PBR} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{BP} + \text{sđ}\widehat{BR}). \quad (2)$$

Theo giả thiết ta có $\widehat{AR} = \widehat{RB}$ và $\widehat{PC} = \widehat{PB}$.

Thay vào (2), ta được $\widehat{PCI} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{CP} + \text{sđ}\widehat{AR}) = \widehat{CIP}$.

Điều này chứng tỏ tam giác CIP cân tại P .

□

§6 Cung chứa góc

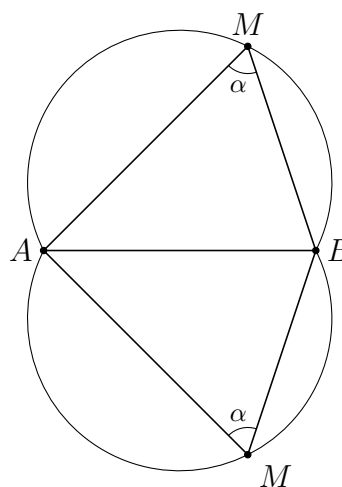
1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Bài toán quỹ tích cung chứa góc

Định lí 21. Quỹ tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc không đổi α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) là hai cung chứa góc α vẽ trên đoạn AB (quỹ tích cơ bản).

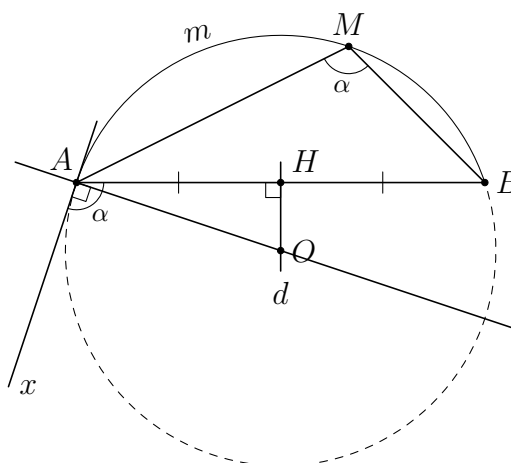
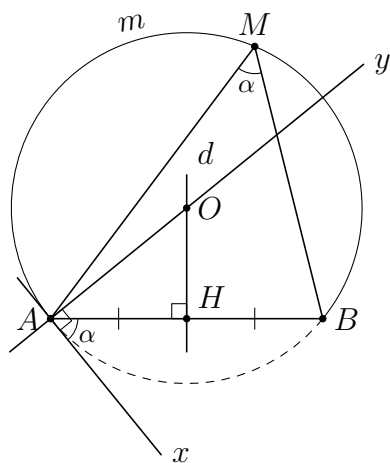
⚠ 31.

- ✓ Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB .
- ✓ Hai điểm A và B được coi là thuộc quỹ tích.
- ✓ Khi $\alpha = 90^\circ$ thì hai cung chứa góc α là hai nửa đường tròn đường kính AB . Như vậy quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .



1.2 Cách vẽ cung chứa góc

Để vẽ cung chứa góc α ta thực hiện các bước sau



- ✓ Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .
- ✓ Vẽ tia Ax tạo với đoạn thẳng AB một góc α .

- ☑ Vẽ tia Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- ☑ Vẽ cung AmB , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .

$\widehat{AmB}$ vẽ được như trên là cung chứa góc α .

1.3 Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) điểm M thỏa mãn tính chất $\mathcal{T}$ là một hình $\mathcal{H}$ nào đó, ta phải chứng minh hai phần

- ☑ Phần thuận: Mọi điểm có tính chất $\mathcal{T}$ đều thuộc hình $\mathcal{H}$.
- ☑ Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ đều có tính chất $\mathcal{T}$.
- ☑ Kết luận: Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất $\mathcal{T}$ là hình $\mathcal{H}$.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích I khi điểm A thay đổi.

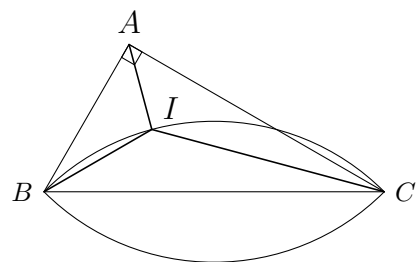
Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BIC} &= 180^\circ - (\widehat{ICB} + \widehat{IBC}) = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ.\end{aligned}$$

Ta thấy rằng B, C cố định, A thay đổi, I luôn nhìn cạnh BC dưới một góc 135° .

Vậy quỹ tích điểm I là cung chứa góc 135° dựng trên cạnh BC đối xứng nhau qua BC .

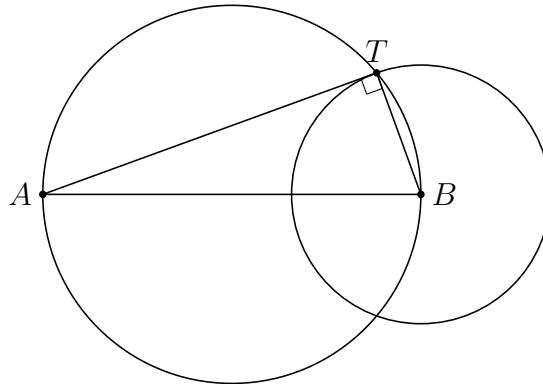


□

Ví dụ 2. Cho hai điểm A, B cố định. Từ A vẽ các tiếp tuyến với đường tròn tâm B có bán kính không lớn hơn AB . Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

Lời giải.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AT \perp BT$.
Do đó A, B cố định, T nhìn AB dưới một góc vuông.
Vậy quỹ tích điểm T là đường tròn đường kính AB .



□

Ví dụ 3. Cho I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi H là giao điểm của các đường cao BB' và CC' . Chứng minh các điểm B, O, C, H, I cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Xét tứ giác $AB'HC'$, ta có

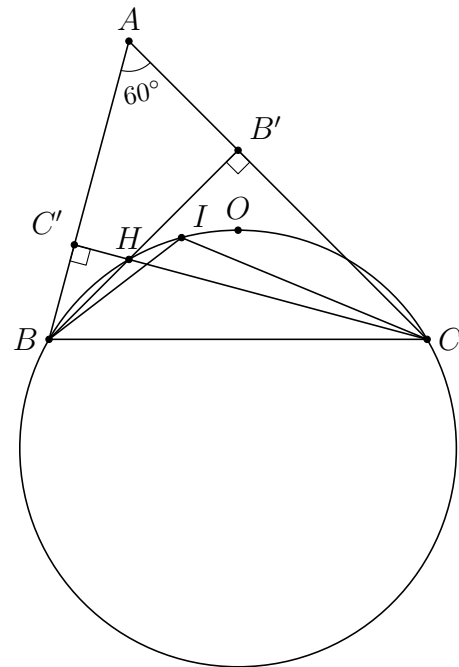
$$\begin{aligned}\widehat{B'HC'} &= 360^\circ - (\hat{A} + \hat{B'} + \hat{C'}) \\ &= 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 120^\circ. \\ \Rightarrow \widehat{BHC} &= \widehat{B'HC'} = 120^\circ.\end{aligned}$$

Xét $\triangle BIC$ ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BIC} &= 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) \\ &= 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} \right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{A}) = 120^\circ.\end{aligned}$$

Mặt khác, $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O) nên góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ trong đường tròn (O) có số đo là $60^\circ = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$.

Từ đó suy ra H, I , đều nằm trên cung chứa góc 120° dựng trên BC . Vậy các điểm B, O, C, H, I cùng thuộc một đường tròn.



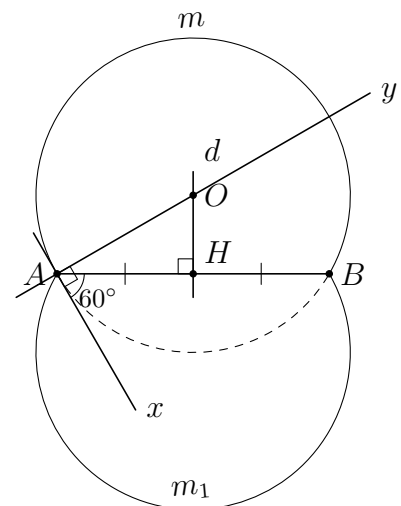
□

Ví dụ 4. Dựng cung chứa góc 60° trên đoạn $AB = 4$ cm.

Lời giải.

Ta lần lượt thực hiện

- ☑ Dụng đoạn thẳng $AB = 4$ cm và đường trung trực d của AB .
- ☑ Dụng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = 60^\circ$.
- ☑ Dụng tia Ay vuông góc với Ax cắt d tại O .
- ☑ Dụng đường tròn (O, OA) và chỉ lấy phần cung cùng phía với O , kí hiệu là $\widehat{AmB}$.
- ☑ Lấy đối xứng cung $\widehat{AmB}$ qua AB và kí hiệu là $\widehat{Am_1B}$.



Vậy hai cung $\widehat{AmB}$ và $\widehat{Am_1B}$ là cung chứa góc cần dựng.

Ví dụ 5. Dụng tam giác ABC biết $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$ và đường cao $AH = 4$ cm.

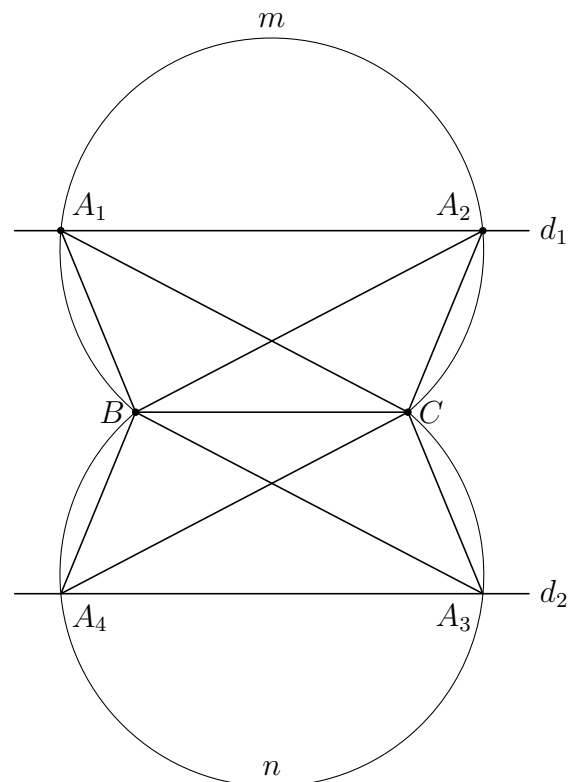
Lời giải.

Phân tích

- ☑ Giả sử dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn điều kiện $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$, $AH = 4$ cm.
- ☑ Khi đó, điểm A nằm trên đường thẳng d song song với đường thẳng BC và cách BC một đoạn bằng 4 cm.
- ☑ Mặt khác, $\widehat{BAC} = 40^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 40° dựng trên BC .

Cách dựng

- ☑ Dụng đoạn thẳng $BC = 6$ cm.
- ☑ Dụng các đường thẳng $d_1 \parallel \Delta$ và $d_2 \parallel \Delta$ và cách Δ một khoảng 4 cm.
- ☑ Dụng các cung chứa góc 40° dựng trên BC là $\widehat{BmC}$ và $\widehat{BnC}$. Hai cung này lần lượt cắt d_1 và d_2 tại A_1, A_2, A_3, A_4 .



Vậy $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$, $\triangle A_3BC$, $\triangle A_4BC$ là các tam giác cần dựng.

Ví dụ 6. Cho trước điểm A trên đường thẳng d và hai điểm C, D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau, bờ d . Hãy dựng một điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Lời giải.

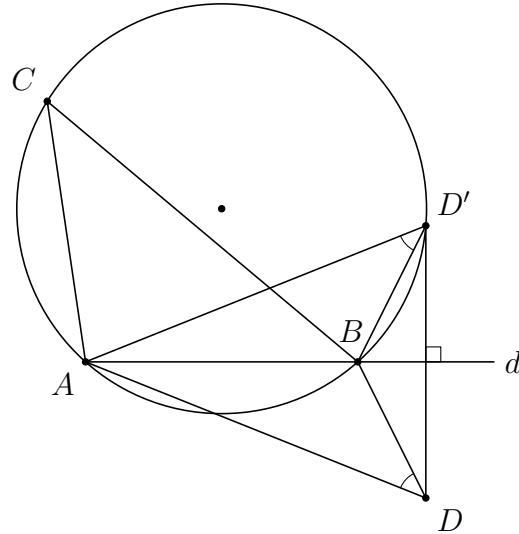
Phân tích

Giả sử dựng được điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua d . Khi đó $\widehat{ADB} = \widehat{AD'B}$, vậy $\widehat{ACB} = \widehat{AD'B}$

Suy ra C và D' cùng nằm trên một cung chứa góc dựng trên đoạn AD' . Từ đó ta thấy giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD'$.

Cách dựng

- ☑ Dựng điểm D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng d . Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD' .
- ☑ Dựng giao điểm B của đường thẳng d với đường tròn (ACD') .



Chứng minh: Rõ ràng với cách dựng trên, ta có $\widehat{ACB} = \widehat{AD'B} = \widehat{ADE}$.

Biện luận: Nếu ba điểm A, C, D không thẳng hàng, hoặc nếu ba điểm này thẳng hàng nhưng CD không vuông góc với d thì bài toán có một nghiệm hình.

Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng và d là đường trung trực của đoạn CD thì bài toán có vô số nghiệm hình. Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng, $d \perp CD$ nhưng d không phải là đường trung trực của CD thì bài toán không có nghiệm hình.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Dựng tam giác ABC biết:

1. $BC = 3$ cm, $AB = 2$ cm và $\hat{A} = 50^\circ$.
2. $BC = 6$ cm, $\hat{A} = 45^\circ$ và trung tuyến $AM = 5$ cm.

Lời giải.

1.

Giáo viên:

Phân tích: Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta có

✓ $\widehat{BAC} = 50^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 50° dựng trên đoạn thẳng BC .

✓ $AB = 2$ cm nên A nằm trên đường tròn tâm B bán kính 2 cm.

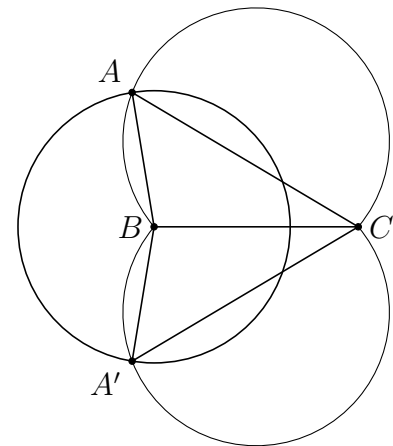
Cách dựng. Ta lần lượt thực hiện

✓ Dựng đoạn $BC = 3$ cm.

✓ Dựng cung chứa góc 50° dựng trên đoạn BC .

✓ Dựng đường tròn tâm B bán kính 2 cm cắt cung chứa góc ở trên tại A .

✓ Nối AB, AC ta được $\triangle ABC$ phải dựng.



Chứng minh. Ta có ngay

✓ $BC = 3$ cm theo cách dựng.

✓ $\hat{A} = 50^\circ$ vì A nằm trên cung chứa góc 50° dựng trên cạnh BC .

✓ $AB = 2$ cm, A nằm trên đường tròn tâm B đường kính 2 cm.

Vậy tam giác ABC thỏa mãn điều kiện bài toán.

Biện luận: Ta dựng được hai tam giác thỏa mãn yêu cầu là $\triangle ABC$ và $\triangle A'BC$, nhưng hai tam giác này bằng nhau (đối xứng qua BC) nên bài toán này chỉ có một nghiệm hình (bài toán này là bài toán dựng hình về kích thước).

2.

Phân tích: Giả sử dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn điều kiện đề bài, ta có

✓ A nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn BC .

✓ A nằm trên đường tròn tâm M bán kính 5 cm với M là trung điểm BC .

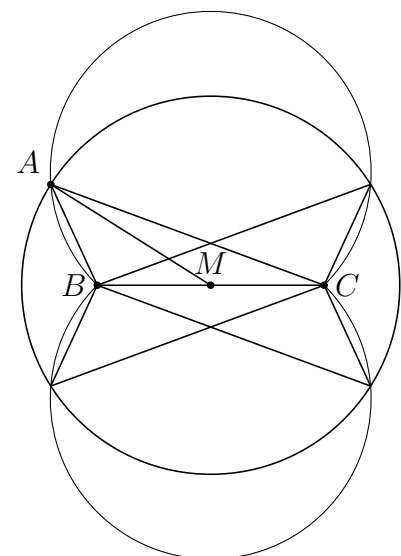
Vậy A là giao điểm của đường tròn tâm M bán kính 5 cm với cung chứa góc 45° .

Cách dựng

✓ Dựng đoạn $BC = 6$ cm.

✓ Dựng đường tròn tâm M bán kính 5 cm cắt cung chứa góc 45° tại A .

✓ Nối AB, AC ta được $\triangle ABC$ cần dựng.



Chứng minh: Ta có $BC = 6$ cm theo cách dựng.

$\widehat{A} = 45^\circ$ vì A nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn BC . Mặt khác $AM = 5$ cm vì A thuộc đường tròn tâm B bán kính 5 cm. Vậy $\triangle ABC$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Biện luận: Để xác định xem bài toán có bao nhiêu nghiệm hình ta cần tính độ dài A_0M , trong đó A_0 là điểm chính giữa cung chứa góc 45° . Trong $\triangle A_0BM$ vuông tại M , ta có:

$$\widehat{BA_0M} = \frac{1}{2}\widehat{A} = 22,5^\circ.$$

$$\widehat{A_0BM} = 90^\circ - \widehat{BA_0M} = 67,5^\circ.$$

$$A_0M = BM \tan \widehat{A_0BM} = 3 \tan 67,5^\circ \approx 7,24 > AM.$$

Do đó đường tròn tâm M bán kính 5 cm cắt mỗi cung chứa góc tại hai điểm phân biệt. Vậy bài toán có hai nghiệm hình. □

Bài 2. Xét các tam giác ABC có $BC = 6$ cm cố định, $\widehat{A} = 120^\circ$.

1. Tìm quỹ tích các điểm A .
2. Điểm A ở vị trí nào thì tam giác ABC có diện tích lớn nhất? Tính giá trị lớn nhất đó.

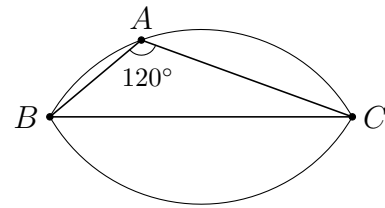
Lời giải.

1.

Phần thuận: Do BC cố định, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên A di chuyển trên hai cung chứa góc 120° dựng trên BC .

Phần đảo: Lấy điểm A thuộc cung chứa góc 120° dựng trên BC , ta thấy ngay 120° .

Kết luận: Quỹ tích điểm A là hai cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC .



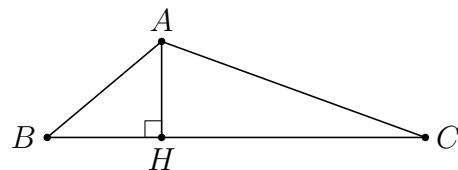
2.

Hạ AH vuông góc với BC , ta có ngay

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC.$$

Do đó, S_{ABC} có giá trị lớn nhất khi AH lớn nhất

$\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung chứa góc.



Khi đó xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$\widehat{BAH} = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = 2AH.$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow (2AH)^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3AH^2 = 9 \Leftrightarrow AH = \sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 6 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Nhật xét: Trong ví dụ trên, việc chỉ ra quỹ tích của điểm A được suy ra ngay từ giả thiết, do đó các bước thực hiện là rất đơn giản. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp chúng ta cần chỉ ra được cung chứa góc trong hình vẽ. □

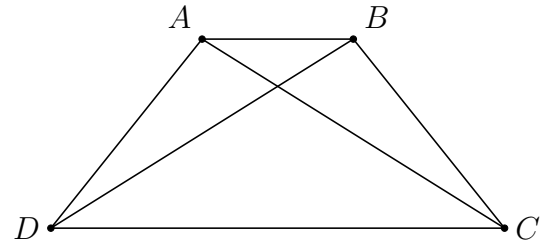
Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$, ta có

$$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ \widehat{BAD} = \widehat{ABC} \\ AD = BC \text{ (cạnh bên hình thang cân)} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle BAC \text{ (c.g.c)} \\ \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}.$$

Vậy các điểm C, D nằm cùng một phía đối với AB và thỏa mãn $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ nên bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.



□

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, nội tiếp đường tròn (O) . Trên cung nhỏ AC lấy một điểm D . Trên dây BD lấy điểm M sao cho $DM = DC$.

1. Chứng minh rằng tam giác MCD là tam giác đều.
2. Tìm quỹ tích các điểm M khi điểm D di động trên cung nhỏ AC .

Lời giải.

1. Xét $\triangle MCD$, ta có $DM = DC$ và $\widehat{CDM} = \widehat{CDB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$. Do đó $\triangle MCD$ là tam giác đều.
- 2.

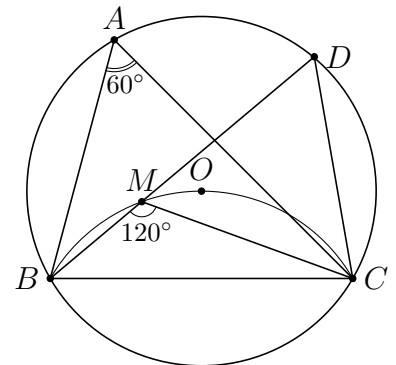
Phân thuận: Từ kết quả câu trên ta có

$$\widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{CMD} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Do BC cố định, $\widehat{BMC} = 120^\circ$ nên M di chuyển trên cung chứa góc 120° dựng trên BC .

Giới hạn: Vì D chỉ chạy trên cung $\widehat{AC}$ nên M chỉ chạy trên một cung chứa góc 120° dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A .

Phần đảo: Lấy điểm M thuộc cung chứa góc 120° dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A . Ta chứng minh $DM = DC$.



Thật vậy, xét $\triangle MCD$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{CDM} = \widehat{CAB} = 60^\circ \\ \widehat{CMD} = 180^\circ - \widehat{BMC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle MCD \text{ là tam giác đều.}$$

$$\Rightarrow DM = DC.$$

Kết luận: Quỹ tích điểm M là một cung chứa góc 120° dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A .

□

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ra phía ngoài của tam giác. Qua A vẽ cát tuyến MAN (M thuộc nửa đường tròn đường kính AB , N thuộc nửa đường tròn đường kính AC).

1. Tứ giác $BCNM$ là hình gì?
2. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi cát tuyến MAN quay quanh A .

 Lời giải.

1. Xét tứ giác $BCNM$, ta có

☑ $\widehat{AMB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow BM \perp MN$.

☑ $\widehat{ANC} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow CM \perp MN$.

$\Rightarrow BM \parallel CN$. Vậy tứ giác $BCNM$ là hình thang vuông.

2. Phần thuận: Gọi E là trung điểm BC , ta có

EI là đường trung bình của hình thang $BCNM$

$\Rightarrow EI \parallel CN \Rightarrow EI \perp MN \Leftrightarrow \widehat{AIE} = 90^\circ$.

Vậy điểm I nằm trên đường tròn đường kính AE .

Giới hạn: Ta có

☑ Nếu $M \equiv B \Rightarrow N \equiv A \Rightarrow I \equiv P$ là trung điểm của AB .

☑ Nếu $M \equiv A \Rightarrow N \equiv B \Rightarrow I \equiv Q$ là trung điểm của AC .

Do đó I chỉ nằm trên cung PQ của đường tròn đường kính AE .

Phần đảo: Lấy điểm I nằm trên cung PQ của đường tròn đường kính AE . Nối AI cắt (AB) và (AC) theo thứ tự tại M và N . Ta chứng minh $MI = NI$.

Thật vậy, $\widehat{AIE} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Leftrightarrow EI \perp MI$. $\Leftrightarrow EI \parallel BM \Rightarrow EI$ là đường trung bình của hình thang $BCNM \Rightarrow MI = NI$.

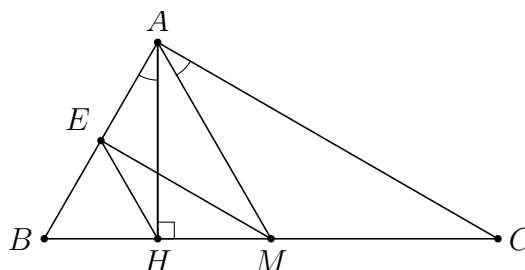
Kết luận: Quỹ tích các điểm I nằm trên cung PQ của đường tròn đường kính AE .

□

 **Bài 6.** Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là các góc nhọn, đường cao AH , trung tuyến AM thỏa mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Gọi E là trung điểm AB .

1. Tam giác AEH là tam giác gì? Vì sao?
2. Chứng minh A, E, H, M cùng thuộc một đường tròn.
3. Chứng minh tam giác ABC vuông.

 Lời giải.



1. Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có $EH = \frac{1}{2}AB$, trung tuyến ứng với cạnh huyền $\Leftrightarrow EH = EA \Leftrightarrow \triangle EAH$ cân tại E .
2. Nhận xét rằng

$$\begin{cases} \widehat{AHE} = \widehat{EAH} \text{ do } \triangle EAH \text{ cân tại } E \\ \widehat{EAH} = \widehat{MAC} \text{ theo giả thiết} \\ \widehat{MAC} = \widehat{AME} \text{ (hai góc so le trong do } ME \parallel AC) \end{cases}$$

Suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{AME}$. Vậy các điểm M, H nằm cùng một phía đối với AE và thỏa mãn $\widehat{AHE} = \widehat{AME}$ nên bốn điểm A, E, H, M thuộc cùng một đường tròn.

3. Từ kết quả câu trên, ta suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AM}$).
 $\Rightarrow ME \perp AB$. Mặt khác ta cũng có $ME \parallel AC$, suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A .

□

§7 Tứ giác nội tiếp

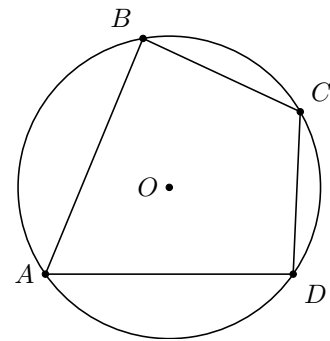
1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 11. Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

Định lí 22.

1. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° .
2. Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.



Δ 32. Từ định lí trên ta có

1. Với A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ giác thì:

$$ABCD \text{ nội tiếp} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \end{cases}$$

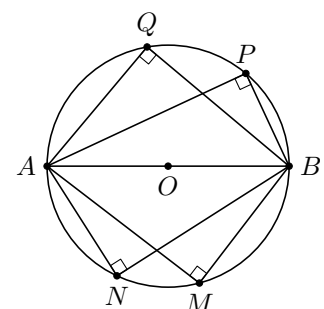
2. Hình thang nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi nó là hình thang cân.

1.2 Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- ☑ Dựa vào định nghĩa của tứ giác nội tiếp.
- ☑ Chứng minh tứ giác đó có hai góc đối bù nhau (hoặc tứ giác đó có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).
- ☑ Dựa vào khái niệm cung chứa góc: Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn.

Δ 33.

Tập hợp tất cả các điểm nhìn đoạn AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .



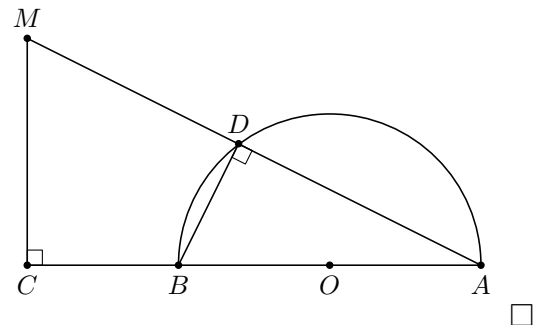
2

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn đường kính AB và D là một điểm thuộc đường tròn. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C . Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng AD tại M . Chứng minh tứ giác $MCBD$ nội tiếp được đường tròn, xác định tâm đường tròn đó.

Lời giải.

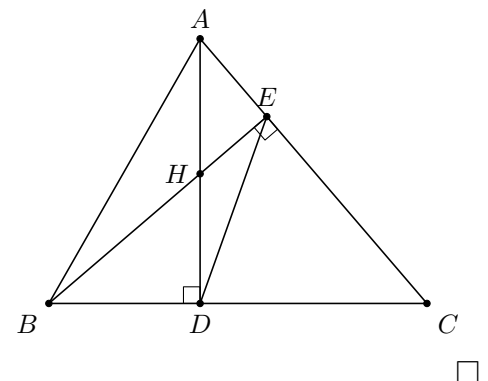
Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow \widehat{MDB} = 90^\circ$,
 Lại có $\widehat{MCB} = 90^\circ$ ($MC \perp BC$),
 Do đó $\widehat{MDB} + \widehat{MCB} = 180^\circ$.
 Tứ giác $MCBD$ có $\widehat{MDB} + \widehat{MCB} = 180^\circ$ nên $MCBD$ nội tiếp được đường tròn.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\hat{A} < 90^\circ$, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H (D thuộc BC , E thuộc AC). Chứng minh các tứ giác $DHEC$ và $ABDE$ nội tiếp được đường tròn.

Lời giải.

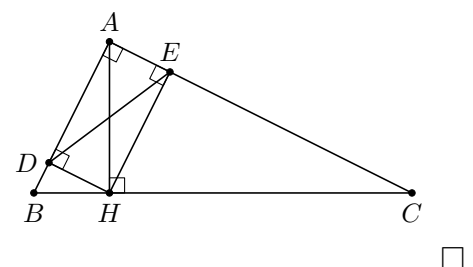
Ta có $\widehat{HDC} = 90^\circ$ (AD là đường cao),
 Lại có $\widehat{HEC} = 90^\circ$ (BE là đường cao),
 $\Rightarrow \widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 180^\circ$.
 Vậy tứ giác $DHEC$ nội tiếp được đường tròn.
 Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (AD là đường cao),
 Lại có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (BE là đường cao),
 $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$.
 Tứ giác $ABDE$ có E, D là hai đỉnh liên tiếp và $\widehat{ADB} = \widehat{AEB}$ nên nội tiếp được đường tròn.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HD \perp AB$ tại D , $HE \perp AC$ tại E . Chứng minh rằng tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

Lời giải.

Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{DAE} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$.
 $\Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật.
 $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AHD}$.
 Mà $\widehat{AHD} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ $\widehat{BAH}$) nên $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$.
 Suy ra tứ giác $BDEC$ nội tiếp.



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E , nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F .

1. Chứng minh tứ giác $AFHE$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Lời giải.

1. Ta có:

- ✓ $\widehat{BEH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BH) $\Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$.
- ✓ $\widehat{CFH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính CH) $\Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ$.
- ✓ $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (do tam giác ABC vuông tại A).

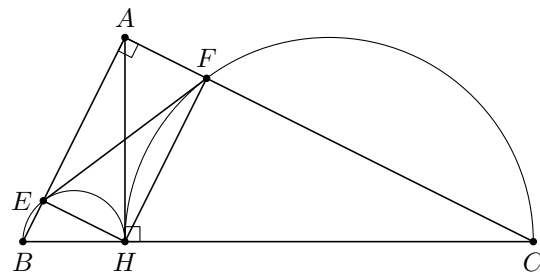
Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ nên $AEHF$ là hình chữ nhật.

2. $AEHF$ là hình chữ nhật nên $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AHF}.$$

Mà $\widehat{AHF} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{CAH}$) nên $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$.

Vậy tứ giác $BEFC$ nội tiếp.



□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Vẽ đường thẳng d song song với tiếp tuyến Ax của đường tròn và cắt hai dây AB, AC lần lượt tại M và N (M không trùng với B và N không trùng với C). Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Lời giải.

Gọi E, F là giao điểm của d với đường tròn (O).

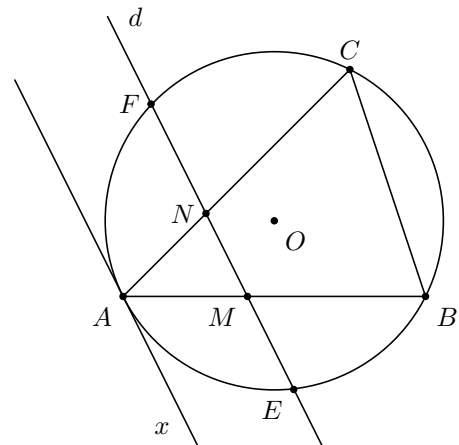
Vì $d \parallel Ax$ nên $\text{sđ}\widehat{AE} = \text{sđ}\widehat{AF}$. Do đó:

$$\begin{aligned} \widehat{AMN} &= \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AF} + \text{sđ}\widehat{EB}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AE} + \text{sđ}\widehat{EB}) \\ &= \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AB} = \widehat{ACB}. \end{aligned}$$

Mặt khác $\widehat{BMN} + \widehat{AMN} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

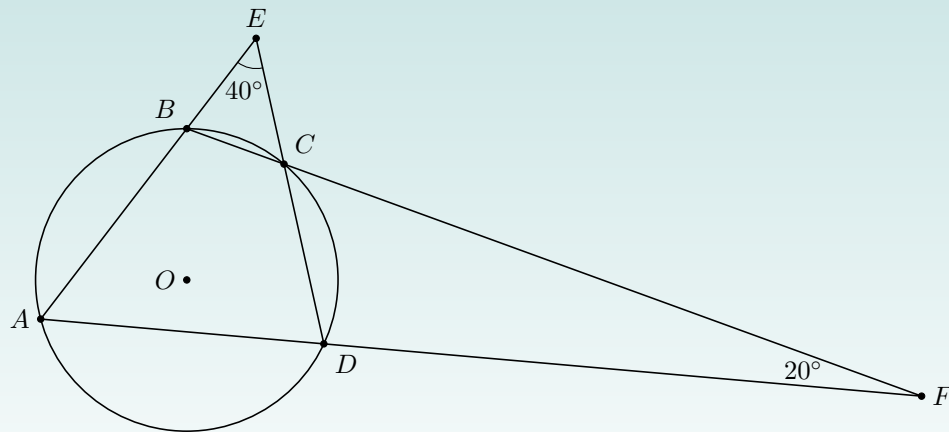
Suy ra $\widehat{BMN} + \widehat{NCB} = 180^\circ$.

Vậy tứ giác $BMNC$ nội tiếp được đường tròn.



□

Ví dụ 6. Hãy tìm số đo các góc của tứ giác $ABCD$ trong hình vẽ sau.



Lời giải.

Đặt $x = \widehat{BCE} = \widehat{DCF}$. Xét $\triangle BCE$ ta có $\widehat{EBC} = 180^\circ - 40^\circ - x = 140^\circ - x$.
Từ tứ giác $ABCD$ nội tiếp và tính chất góc ngoài của $\triangle DCF$ ta có

$$140^\circ - x = \widehat{EBC} = \widehat{ADC} = \widehat{DFC} + x = 20^\circ + x \Leftrightarrow x = 60^\circ.$$

Do đó

$$\widehat{ADC} = \widehat{DCF} + x = 20^\circ + x = 80^\circ.$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 100^\circ \text{ (do } ABCD \text{ nội tiếp)}$$

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{DCF} = 180^\circ - x = 120^\circ.$$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 60^\circ \text{ (do } ABCD \text{ nội tiếp)}.$$

□

Ví dụ 7. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . C là một điểm nằm giữa O và A . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I . K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M , tia BM cắt tia CI tại D . Gọi E đối xứng với B qua C .

1. Chứng minh $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle MBC$.
3. Chứng minh $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

1. Chứng minh $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

(O) có $\widehat{AMB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn.

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

Vì $CI \perp AB$ nên $\widehat{ACD} = 90^\circ$.

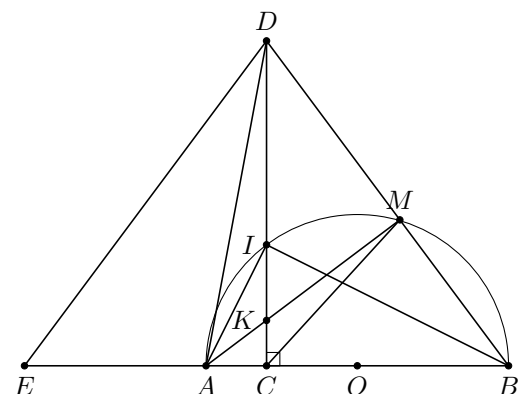
Tứ giác $ACMD$ có C, M là hai đỉnh kề nhau và $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^\circ$ nên $ACMD$ nội tiếp.

2. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle MBC$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle MBC$ có

$$\begin{cases} \widehat{ABD} \text{ chung} \\ \widehat{ADB} = \widehat{MCB} \text{ (vì } ACMD \text{ nội tiếp.)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle MBC \text{ (g-g)}.$$



3. Chứng minh $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

Vì E đối xứng với B qua C nên C là trung điểm của EB .

Mà $DC \perp EB$ tại C nên DC là trung trực của EB .

$\Rightarrow DE = DB \Rightarrow \triangle DEB$ cân tại D .

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABD}$.

Mà $\widehat{AKC} = \widehat{ABD}$ (cùng phụ $\widehat{CAK}$) nên $\widehat{AED} = \widehat{AKC}$.

$\Rightarrow AKDE$ nội tiếp.

□

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm là H . Giả sử M là một điểm trên cung BC không chứa A (M khác B , M khác C). Gọi N, P theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC .

1. Chứng minh tứ giác $AHCP$ nội tiếp.
2. Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.
3. Tìm vị trí của M để độ dài đoạn thẳng NP lớn nhất.

Lời giải.

1. Gọi I là giao điểm của CH và AB , K là giao điểm của AH và BC .

Ta có $\widehat{IBK} = \widehat{AMC}$ (cùng chắn $\widehat{AC}$), $\widehat{AMC} = \widehat{APC}$ (do P đối xứng với M qua AC)
 $\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{APC}$. (1)

Ta thấy $BIHK$ nội tiếp nên $\widehat{IBK} + \widehat{AHC} = 180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHC} + \widehat{APC} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AHCP$ nội tiếp.

2. Do tứ giác $AHCP$ nội tiếp nên $\widehat{AHP} = \widehat{ACP}$ (cùng chắn $\widehat{AP}$).

Có $\widehat{ACP} = \widehat{ACM}$ (tính chất đối xứng).

Suy ra $\widehat{AHP} = \widehat{ACM}$. (3)

Tương tự ta chứng minh được tứ giác $AHBN$ nội tiếp, nên $\widehat{AHN} = \widehat{ABN}$ (cùng chắn $\widehat{AP}$).

Có $\widehat{ABN} = \widehat{ABM}$ (tính chất đối xứng).

Suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{ABM}$. (4).

Vì tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $\widehat{ACM} + \widehat{ABM} = 180^\circ$. (5)

Thay (3), (4) vào (5), ta được $\widehat{AHP} + \widehat{AHN} = 180^\circ$. Vậy ba điểm N, H, P thẳng hàng.

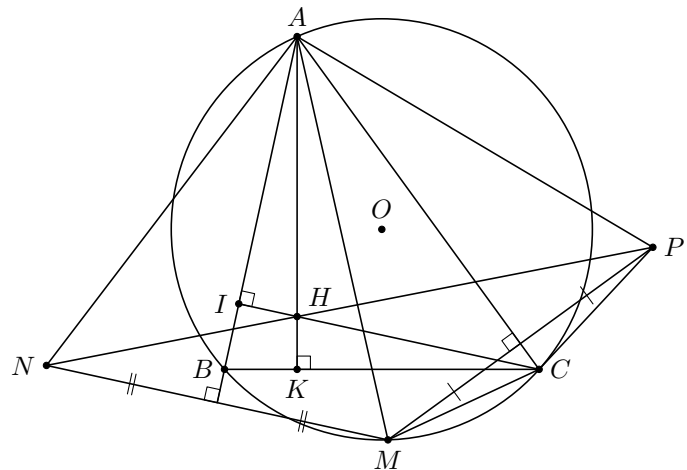
3. Từ $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAM}$; $\widehat{MAP} = 2\widehat{MAC}$ (tính chất đối xứng), suy ra

$$\widehat{NAP} = 2(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC} \text{ (không đổi)}.$$

Ta có $NP = 2AP \cdot \sin \widehat{BAC} = 2AM \cdot \sin \widehat{BAC}$. Do đó NP lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất, lúc đó AM là đường kính của đường tròn (O) .

Vậy NP lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm đối xứng của A qua O .

□



Ví dụ 9. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C trên cùng một nửa đường tròn đường kính AD tâm O . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E . Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE . Chứng minh rằng

1. Tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.
2. E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$.
3. Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

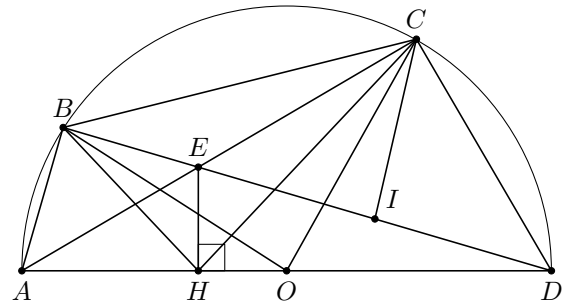
1. Tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.

Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn nửa (O)).

Lại có $\widehat{AHE} = \widehat{DHE} = 90^\circ$ (H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD).

Tứ giác $ABEH$ có $\widehat{ABE} + \widehat{AHE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $ABEH$ nội tiếp.

Tứ giác $DCEH$ có $\widehat{DCE} + \widehat{DHE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $DCEH$ nội tiếp.



2. E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$.

Ta có $\begin{cases} \widehat{ECH} = \widehat{EDH} & (\text{vì } DCEH \text{ nội tiếp}) \\ \widehat{BCE} = \widehat{EDH} & (\text{vì cùng nội tiếp } (O) \text{ và chắn } \widehat{AB}) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{BCE}$.

$\Rightarrow CE$ là đường phân giác của $\triangle BCH$.

Chứng minh tương tự ta có BE cũng là đường phân giác của $\triangle BCH$.

Mà E là giao điểm của BE và CE nên E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$.

3. Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECD vuông tại C nên $\widehat{BIC} = 2\widehat{BDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{CE}$). (1)

(O) có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{BC}$). (2)

Vì E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$ nên HE là phân giác của $\widehat{BHC}$.

$\Rightarrow \widehat{BHC} = 2\widehat{EHC}$.

Mà $\widehat{EHC} = \widehat{BDC}$ ($DCEH$ nội tiếp) nên $\widehat{BHC} = 2\widehat{BDC}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{BIC} = \widehat{BOC} = \widehat{BHC}$.

Vậy năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn. □

Ví dụ 10. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng xy cách tâm O một khoảng $OK = a$ ($0 < a < R$). Từ một điểm A thuộc xy nằm bên ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm; O và B nằm cùng phía với xy)

1. Chứng minh 5 điểm O, A, B, C, K cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này.
2. BC cắt OA và OK theo thứ tự tại M và S . Chứng minh tứ giác $AMKS$ nội tiếp được trong một đường tròn.

3. Chứng minh các tứ giác $BCKO$ nội tiếp.

✍ Lời giải.

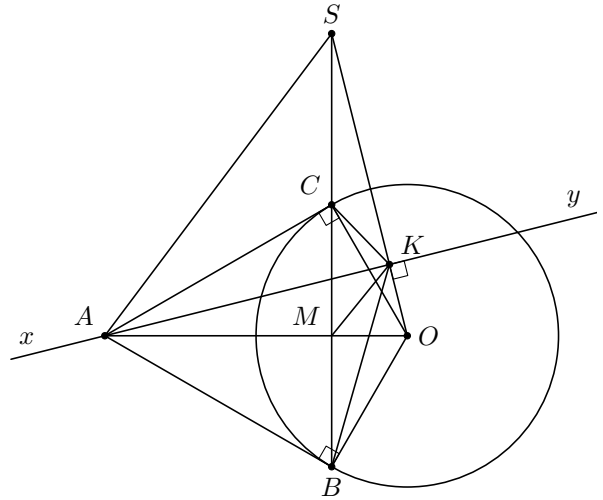
1. Ta có $\widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^\circ$ (TC tiếp tuyến), $\widehat{AKO} = 90^\circ$ (xy cách O một khoảng OK).
 $\Rightarrow C, B, K$ thuộc đường tròn đường kính AO
 $\Rightarrow O, A, B, C, K$ cùng nằm trên đường tròn đường kính AO , tâm I là trung điểm AO .

2. Ta có $AC = AB, OC = OB$
 $\Rightarrow AO$ là trung trực của BC
 $\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{AMS} = 90^\circ$.
 Có $\widehat{AKS} = 90^\circ$ (xy cách O một khoảng OK).

Tứ giác $AMKS$ có K, M là hai đỉnh kề nhau và $\widehat{AMS} = \widehat{AKS} = 90^\circ$ nên $AMKS$ nội tiếp.

3. Ta có:
 $\widehat{CKA} = \widehat{COA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$ của (I)),
 $\widehat{AKB} = \widehat{AOB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$ của (I))
 $\Rightarrow \widehat{CKB} = \widehat{COB}$.

Tứ giác $BCKO$ có K, O là hai đỉnh kề nhau và $\widehat{CKB} = \widehat{COB}$ nên $BCKO$ nội tiếp.



□

3

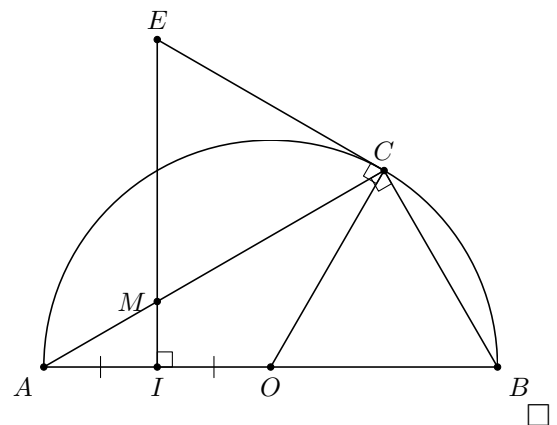
Luyện tập

✎ Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng vuông góc với AO tại trung điểm I của AO cắt AC tại M và cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn ở E . Chứng minh $OCEI, IMCB$ là các tứ giác nội tiếp, xác định tâm các đường tròn đó.

✍ Lời giải.

- ✓ Ta có $\widehat{OIE} = 90^\circ$ (giả thiết);
 $\widehat{OCE} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)
 Tứ giác $OCEI$ có $\widehat{OIE} + \widehat{OCE} = 180^\circ$ nên $OCEI$ nội tiếp.

- ✓ Ta có $\widehat{OIM} = 90^\circ$ (giả thiết);
 $\widehat{BCM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 Tứ giác $IMCB$ có $\widehat{OIM} + \widehat{BCM} = 180^\circ$ nên $IMCB$ nội tiếp.



□

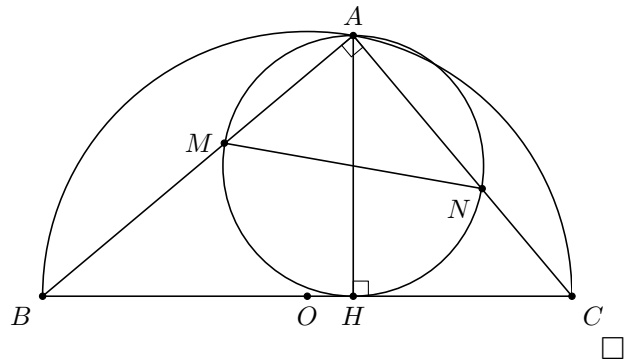
✎ Bài 2. Trên nửa đường tròn tâm (O) đường kính BC lấy điểm A ($AB > AC > 0$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC . Đường tròn đường kính AH lần lượt cắt AB, AC tại M và N . Chứng minh tứ giác $BCNM$ nội tiếp.

 Lời giải.

Xét đường tròn đường kính AH ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{MBC} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AH} - \text{sđ}\widehat{MH}) \\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM} \\ &= \widehat{ANM}.\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $BCNM$ nội tiếp.



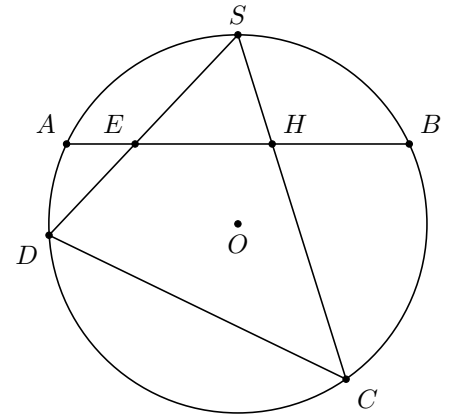
 **Bài 3.** Trên đường tròn tâm (O) có một cung AB và S là điểm chính giữa của cung đó. Trên dây AB lấy hai điểm E và H . Các đường thẳng SH và SE cắt đường tròn theo thứ tự tại C và D . Chứng minh $EHCD$ là một tứ giác nội tiếp.

 Lời giải.

Vì S là điểm chính giữa của cung AB nên $\text{sđ}\widehat{SA} = \text{sđ}\widehat{SB}$.

$$\begin{aligned}\widehat{DCH} &= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{SAD} \text{ (góc nội tiếp)} \\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{SA} + \text{sđ}\widehat{AD}) \\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{SB} + \text{sđ}\widehat{AD}) \\ &= \widehat{SEB} \text{ (góc có đỉnh bên trong đường tròn)}\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $EHCD$ nội tiếp.



 **Bài 4.** Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O ($AB < CD$); I là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Gọi E là giao điểm của IC và AD ; F là giao điểm của DI và CB . Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

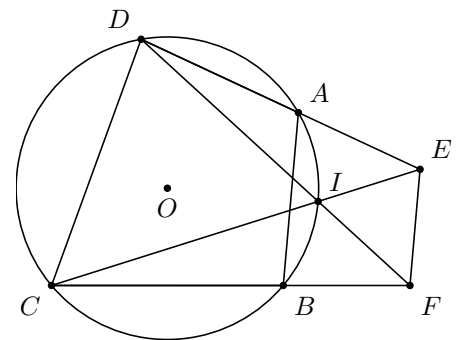
 Lời giải.

Vì I là điểm chính giữa của cung nhỏ AB nên $\text{sđ}\widehat{IA} = \text{sđ}\widehat{IB}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{CED} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CD} - \text{sđ}\widehat{IA}) \\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CD} - \text{sđ}\widehat{IB}) \\ &= \widehat{CFD}.\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $CDEF$ nội tiếp.



 **Bài 5.** Cho tam giác cân ABC có đáy BC và $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm D sao cho $DA = DB$ và $\widehat{DAB} = 40^\circ$. Gọi E là giao điểm của AB và CD . Chứng minh tứ giác $ACBD$ là tứ giác nội tiếp.

 Lời giải.

$\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{ABC} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

Vì $DA = DB$ nên $\triangle ADB$ cân tại D

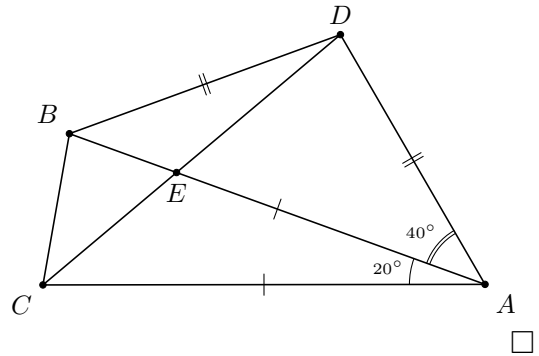
$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAD} = 40^\circ$.

Ta có:

$\widehat{CBD} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$.

$\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

Tứ giác $ACBD$ có $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = 180^\circ$ nên tứ giác $ACBD$ nội tiếp.



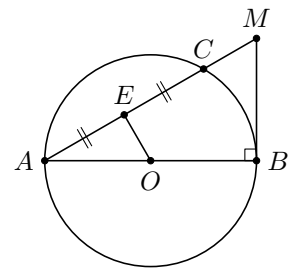
Bài 6. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Dây $BC = R$. Từ B kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Tia AC cắt Bx tại M . Gọi E là trung điểm của AC . Chứng minh tứ giác $OBME$ nội tiếp đường tròn.

 Lời giải.

(O) có E là trung điểm của dây cung AC nên $OE \perp AC$ tại E .

$\widehat{OBM} = 90^\circ$ ($Bx \perp AB$).

Tứ giác $OBME$ có $\widehat{OBM} + \widehat{OEM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $OBME$ nội tiếp.



Bài 7. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax . Tia BM cắt Ax tại I , tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E , cắt tia BM tại F . Tia BE cắt Ax tại H và cắt AM tại K . Chứng minh rằng $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

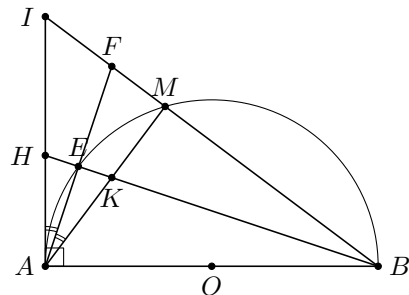
 Lời giải.

(O) có $\widehat{AEB}$ và $\widehat{AMB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AMB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{KEF} = \widehat{AMB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow EFMK$ nội tiếp.



Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E). Chứng minh $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

 Lời giải.

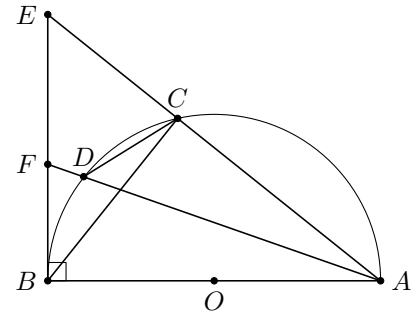
(O) có $\widehat{ACB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn.

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ.$$

Có $\begin{cases} \widehat{CEF} = \widehat{ABC} \text{ (vì cùng phụ } \widehat{BAC}) \\ \widehat{ADC} = \widehat{ABC} \text{ (vì cùng nội tiếp (O) chắn } \widehat{AC}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{ADC}.$$

Tứ giác $CEFD$ có $\widehat{CEF} = \widehat{ADC}$ nên $CEFD$ nội tiếp.



□

Bài 9. Cho đường tròn ($O; R$); AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn ($O; R$) cắt các đường thẳng AC , AD theo thứ tự tại E và F .

1. Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh $\triangle ACD = \triangle CBE$.
3. Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

Lời giải.

1. Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.
Tứ giác $ACBD$ có O là trung điểm của AB và CD .
 $\Rightarrow ACBD$ là hình bình hành.
Mà $AB = CD$ nên $ACBD$ là hình chữ nhật.

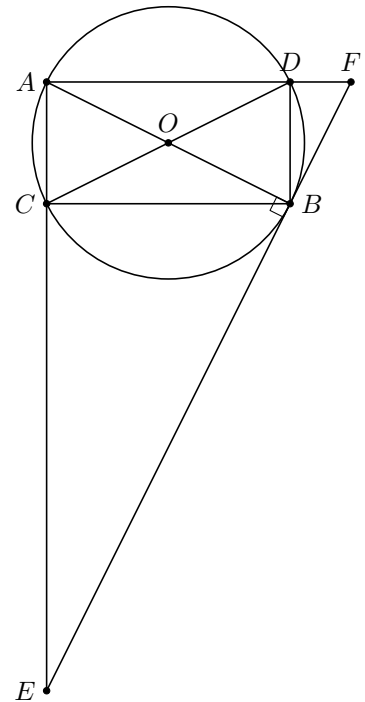
2. Chứng minh $\triangle ACD \sim \triangle CBE$.
Có $\begin{cases} \widehat{ACD} = \widehat{ABD} \text{ vì cùng nội tiếp (O) chắn } \widehat{AD} \\ \widehat{CBE} = \widehat{ABD} \text{ vì cùng phụ } \widehat{ABC} \end{cases}$
 $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CBE}$.

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle CBE$ có

$$\begin{cases} \widehat{CAD} \text{ chung} \\ \widehat{ACD} = \widehat{CBE} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CBE \text{ (g-g)}.$$

3. Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.
Tứ giác $CDFE$ có $\widehat{ADC} = \widehat{AEF}$ ($\triangle ACD \sim \triangle CBE$).
 $\Rightarrow CDFE$ nội tiếp.



□

Bài 10. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn ($O; R$) ta vẽ hai tiếp tuyến AB , AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M , vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ ($I \in AB$, $K \in AC$).

1. Chứng minh $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
2. Vẽ $MP \perp BC$ ($P \in BC$). Chứng minh $CPMK$ là tứ giác nội tiếp.

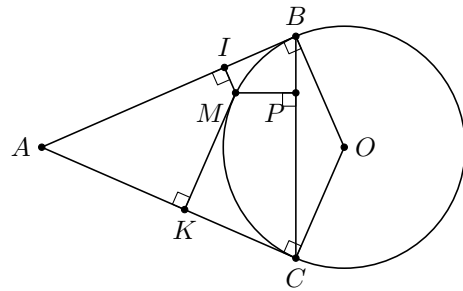
Lời giải.

1. Chứng minh $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Tứ giác $AIMK$ có $\widehat{AIM} + \widehat{AKM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $AIMK$ nội tiếp.

2. Vẽ $MP \perp BC$ ($P \in BC$). Chứng minh $CPMK$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $CPMK$ có $\widehat{CPM} + \widehat{CKM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $CPMK$ nội tiếp.



□

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E , MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B). Chứng minh $AMCO$ và $AMDE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Lời giải.

Tứ giác $AMCO$ có $\widehat{OAM} + \widehat{OCM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $AMCO$ nội tiếp.

Hai tiếp tuyến AM và CM cắt nhau tại M nên $MA = MC$.

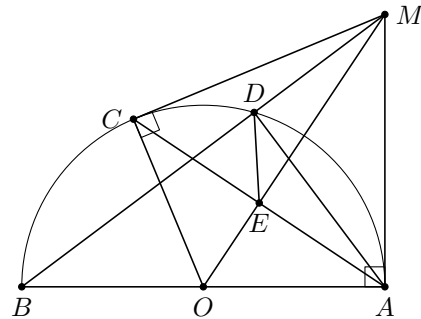
Mà $OA = OC = R$ nên OM là trung trực của AC .

$\Rightarrow \widehat{AEM} = 90^\circ$.

$\widehat{ADB}$ nội tiếp và chắn nửa (O) nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$.

Tứ giác $AMDE$ có E, D kề nhau và $\widehat{AEM} = \widehat{ADM} = 90^\circ$.

$\Rightarrow AMDE$ nội tiếp.



□

Bài 12. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA , điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By . Đường thẳng qua N và vuông góc với NM cắt Ax, By lần lượt tại C và D .

- Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Gọi I là giao điểm của AN và CM , K là giao điểm của BN và DM . Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle CMD$ từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

- Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Tứ giác $ACNM$ có $\widehat{MAC} + \widehat{MNC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $ACNM$ nội tiếp.

Tứ giác $BDNM$ có $\widehat{MBD} + \widehat{MND} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $BDNM$ nội tiếp.

- Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle CMD$ từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{ANB}$ nội tiếp và chắn nửa (O) nên

$\widehat{ANB} = 90^\circ$. Xét $\triangle ANB$ và $\triangle CMD$ có

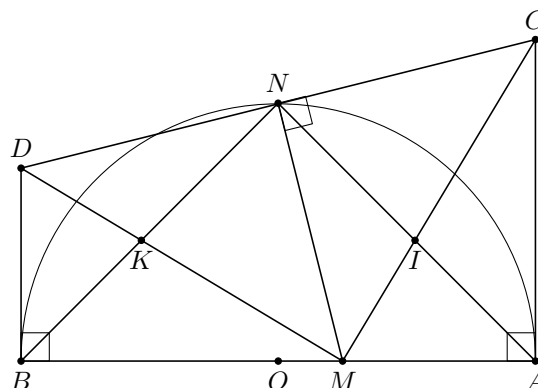
$\begin{cases} \widehat{NAB} = \widehat{MCD} \text{ (vì } ACNM \text{ nội tiếp)} \\ \widehat{NBA} = \widehat{MDC} \text{ (vì } BDNM \text{ nội tiếp).} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle CMD$ (g-g).

$\Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{ANB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{CMD} + \widehat{ANB} = 180^\circ$.

$\Rightarrow IMKN$ nội tiếp.





Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên hai cạnh AD và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{MBN} = 45^\circ$. BM và BN cắt AC theo thứ tự tại E và F .

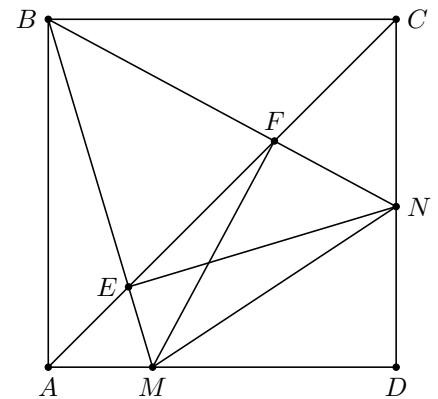
1. Chứng minh các tứ giác $BENC$ và $BFMA$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng tỏ $MEFN$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

1. Chứng minh các tứ giác $BENC$ và $BFMA$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{MAF} = \widehat{ECN} = 45^\circ$.
 Tứ giác $BENC$ có B, C kề nhau và $\widehat{EBN} = \widehat{ECN} = 45^\circ$ nên $BENC$ nội tiếp.
 Tứ giác $BFMA$ có A, B kề nhau và $\widehat{MAF} = \widehat{MBF} = 45^\circ$ nên $BFMA$ nội tiếp.

2. Chứng tỏ $MEFN$ là tứ giác nội tiếp.
 $BENC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{BCN} = 90^\circ$.
 $BFMA$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MFN} = \widehat{BAM} = 90^\circ$.
 Tứ giác $MEFN$ có E, F kề nhau và $\widehat{MEN} = \widehat{MFN} = 90^\circ$ nên $MEFN$ nội tiếp.



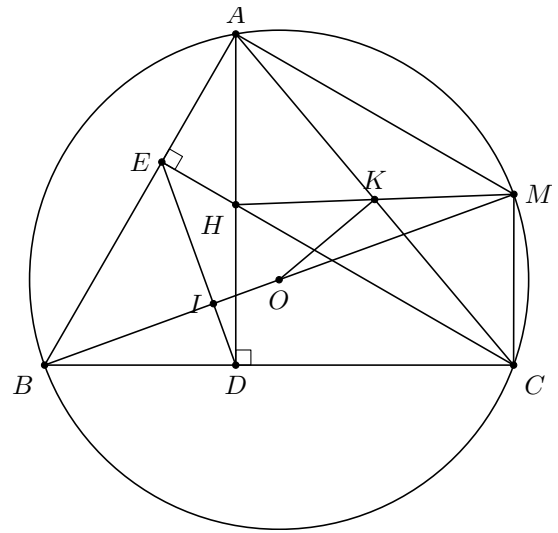
Bài 14. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn; AD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H ; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi M là điểm đối xứng của B qua O , I là giao điểm của BM và DE , K là giao điểm của AC và HM .

1. Chứng minh rằng các tứ giác $AEDC$ và $DIMC$ nội tiếp.
2. Chứng minh $OK \perp AC$.
3. Cho $\widehat{AOK} = 60^\circ$. Chứng minh tam giác HBO cân.

Lời giải.

1. Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ (AD, CE là đường cao của $\triangle ABC$).
 Tứ giác $AEDC$ có hai đỉnh D, E kề nhau và $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ nên $AEDC$ nội tiếp được đường tròn.
 Vì tứ giác $AEDC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDI}$ (cùng bù với $\widehat{EDC}$).
 Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BC}$) suy ra $\widehat{BDI} = \widehat{BMC}$, do đó tứ giác $DIMC$ nội tiếp.

2. Từ giả thiết BM là đường kính, ta có $MA \perp AB$, lại có $CH \perp AB$, suy ra $AM \parallel CH$. (1)
Do $CM \perp BC$, $AD \perp BC$ nên $AH \parallel CM$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AHCM$ là hình bình hành. Từ đó K là trung điểm của AC . Suy ra $OK \perp AC$.
3. $\triangle AKO$ vuông tại K có $\widehat{AOK} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{OAK} = 30^\circ$, dẫn đến $OK = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OB$. Lại do OK là đường trung bình của tam giác BHM nên $OK = \frac{1}{2}BH$.
Từ đó $BH = OB$, hay $\triangle BHO$ cân tại O .

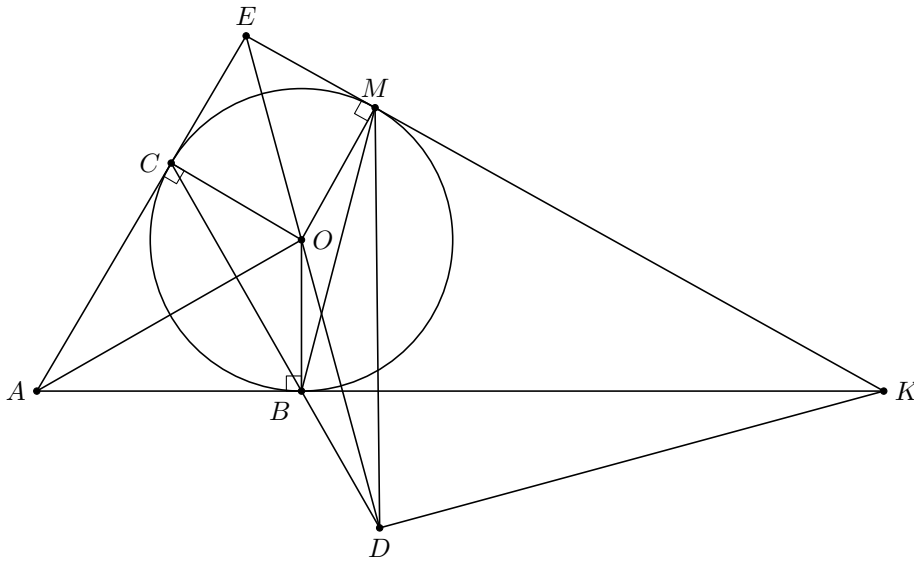


□

Bài 15. Từ một điểm A ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia BC, lấy điểm D. Gọi E là giao điểm của DO và AC. Qua E, vẽ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (O), có tiếp điểm là M; tiếp tuyến này cắt đường thẳng AB ở K.

1. Chứng minh bốn điểm D, B, O, M cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh D, B, O, M, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



1. Ta có OE là tia phân giác của $\widehat{MOC} \Rightarrow \widehat{MOE} = \frac{1}{2}\widehat{MOC}$.
Lại có $\widehat{MBC} = \frac{1}{2}\widehat{MOC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{MC}$).
Do đó $\widehat{MOE} = \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{MBD}$.
Tứ giác $DBOM$ có O, B kề nhau và $\widehat{MOD} = \widehat{MBD}$ nên $DBOM$ nội tiếp.
Vậy bốn điểm D, B, O, M cùng thuộc một đường tròn. (1)
2. Ta có $\widehat{OMC} = \widehat{OBK} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến).
Tứ giác $BOMK$ có $\widehat{OMC} + \widehat{OBK} = 180^\circ$ nên $BOMK$ nội tiếp. (2)
Từ (1) và (2) suy ra năm điểm D, B, O, M, K cùng thuộc một đường tròn.

□

§8 Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 12. ☒ Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác gọi là *đường tròn ngoại tiếp* đa giác và đa giác được gọi là *đa giác nội tiếp đường tròn*.

☒ Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác được gọi là *đường tròn nội tiếp đa giác* và đa giác gọi là *đa giác ngoại tiếp đường tròn*.

Định lý 23. Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

34. Trong đa giác đều, tâm của đường tròn nội tiếp trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp và được gọi là tâm của đa giác đều.

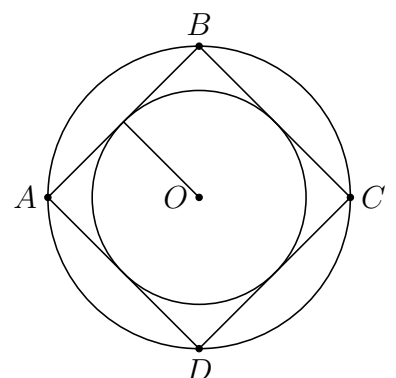
2 Các ví dụ

- Ví dụ 1.**
1. Vẽ đường tròn tâm (O) , bán kính 2 cm.
 2. Vẽ hình vuông nội tiếp đường tròn (O) ở câu a).
 3. Tính bán kính r đường tròn nội tiếp hình vuông ở câu b) rồi vẽ đường tròn $(O; r)$.

Lời giải.

- 1.
- 2.
3. $ABCD$ là hình vuông có đường chéo $AC = 4$ (cm)
 $\Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Vậy hình vuông có cạnh $2\sqrt{2}$.
 Đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có bán kính

$$r = \frac{AB}{2} = \sqrt{2} \text{ cm.}$$



Ví dụ 2. Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a . Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

Lời giải.

Gọi A, B là 2 đỉnh liên tiếp của đa giác đều n cạnh. Gọi O là tâm đa giác đều.

Ta có $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$.

Kẻ OH vuông góc AB , $H \in AB$. Ta có $\triangle OHA$ vuông tại H và

$$HA = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

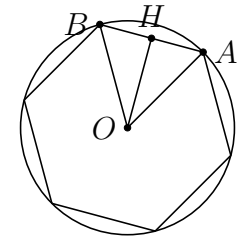
Hơn nữa ta có $\widehat{HOA} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ}{n}$.

Khi đó

☑ Bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $R = OA = \frac{HA}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$.

☑ Bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r = OH = HA \cot \frac{180^\circ}{n}$.

□



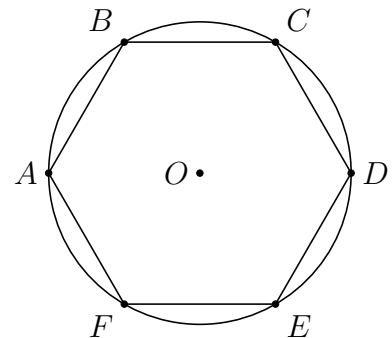
Ví dụ 3. Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R .

Lời giải.

Ta có $AB = R$ nên suy ra tam giác OAB đều. Tương tự ta có các tam giác OBC, OCD, ODE, OEF, OAF là các tam giác đều cạnh R .

Vậy diện tích lục giác $ABCDEF$ là

$$6 \cdot S_{OAB} = 6 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}.$$



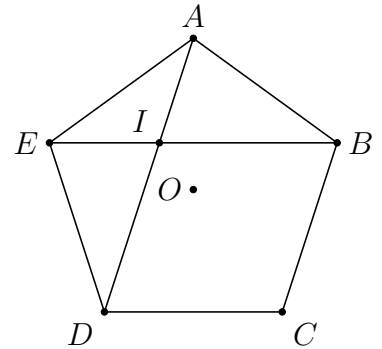
□

Ví dụ 4. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi I là giao điểm của AD và BE . Chứng minh rằng

1. $DIBC$ là hình bình hành;
2. $DI^2 = AI \cdot AD$.

Lời giải.

1. Ta có $\widehat{EID} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AB} + \text{sđ}\widehat{DE}) = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{EC} = \widehat{EBC}$.
Suy ra $AD \parallel BC$, chứng minh tương tự, ta có $BE \parallel CD$.
Vậy $DIBC$ là hình bình hành.



2. Xét tam giác AIE và tam giác AED , ta có

☑ Góc A chung;

☑ $\widehat{AEI} = \widehat{ADE}$.

$$\Rightarrow \triangle AIE \sim \triangle AED \text{ (g - g) suy ra } \frac{AI}{AE} = \frac{AE}{AD} \text{ suy ra}$$

$$AI \cdot AD = AE^2 \cdot BC^2 = DI^2$$

□

Ví dụ 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn và ngoại tiếp một đường tròn khác. Gọi các tiếp điểm với đường tròn nội tiếp theo thứ tự là M, P, Q, N . Chứng minh rằng QM vuông góc PN .

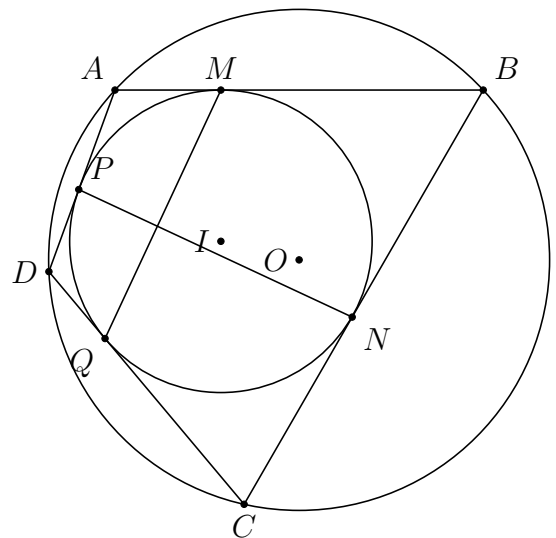
Lời giải.

$$\text{Ta có } \text{sđ}\widehat{PM} = 2\widehat{AMP} = 180^\circ - \widehat{A}. \quad (1)$$

$$\text{sđ}\widehat{QN} = 2\widehat{QNC} = 180^\circ - \widehat{C}. \quad (2)$$

$$\text{Lại có } ABCD \text{ nội tiếp suy ra } \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\text{sđ}\widehat{PM} + \text{sđ}\widehat{QN} = 180^\circ$ do đó $QM \perp PN$.



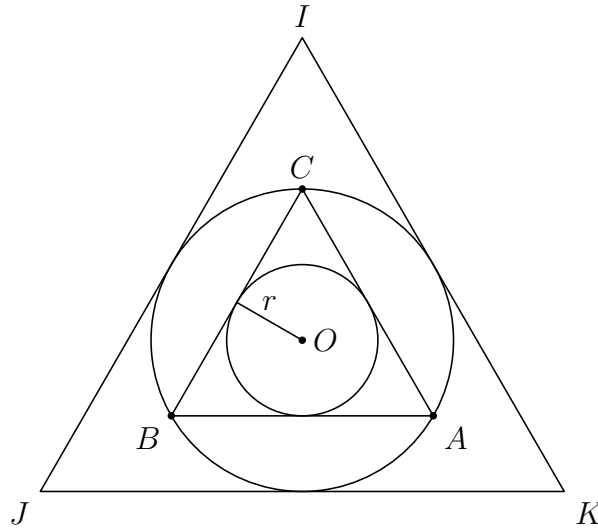
□

3 Luyện tập

Bài 1.

- Vẽ $\triangle ABC$ đều cạnh a .
- Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp $\triangle ABC$. Tính R .
- Vẽ đường tròn $(O; r)$ nội tiếp $\triangle ABC$. Tính r .
- Vẽ tam giác đều IKJ ngoại tiếp $(O; R)$.

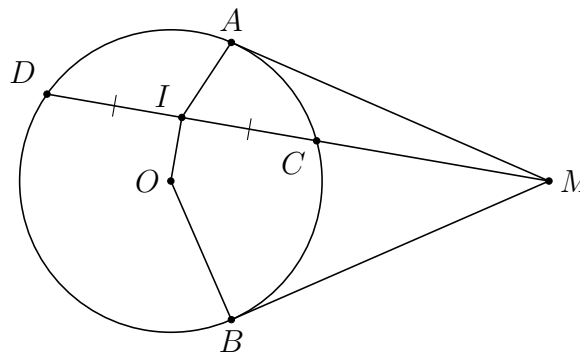
 **Lời giải.**



□

Bài 2. Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm M nằm bên ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) . Qua điểm M kẻ cát tuyến MCD với đường tròn (O) (đường thẳng qua M cắt (O) tại C, D). Gọi I là trung điểm dây CD . Khi đó ngũ giác $MAOIB$ có phải là ngũ giác nội tiếp không?

 **Lời giải.**



Ta có MA, MB là hai tiếp tuyến của (O) suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$;
Xét đường tròn (O) ,

✓ OI là một phần đường kính;

✓ CD là dây;

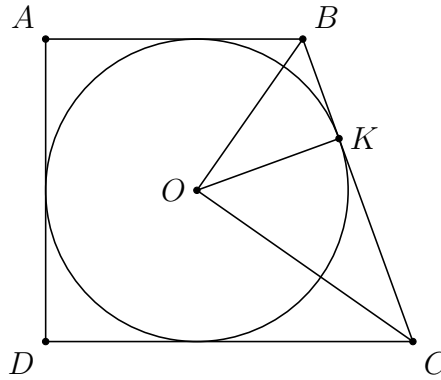
✓ $IC = ID$

$\Rightarrow OI \perp CD \Rightarrow \widehat{OIM} = 90^\circ$. Vậy $MAIOB$ nội tiếp đường tròn đường kính OM . □

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) ngoại tiếp đường tròn (O) , $OB = 15$ cm và $OC = 20$ cm.

1. Chứng minh rằng $\triangle BOC$ vuông;
2. Tính bán kính R của đường tròn (O) ;
3. Tính độ dài các cạnh AB và CD .

 Lời giải.



1. Ta có BA, BC là hai tiếp tuyến của (O)
 $\Rightarrow BO$ là phân giác góc BOC suy ra $\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. (1)

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{BCO} = \frac{1}{2}\widehat{BCD}$. (2)

Lại có tứ giác $ABCD$ là hình thang nên $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{BOC} + \widehat{BCO} = 90^\circ$. Vậy tam giác BOC vuông tại O .

2. Tam giác OBC vuông tại O $BC^2 = OB^2 + OC^2 = 625$. Do đó $BC = 25$.
 Gọi K là hình chiếu của O lên BC . Xét tam giác OBC vuông tại O , ta có

$$OB \cdot OC = OK \cdot BC \Rightarrow OK = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

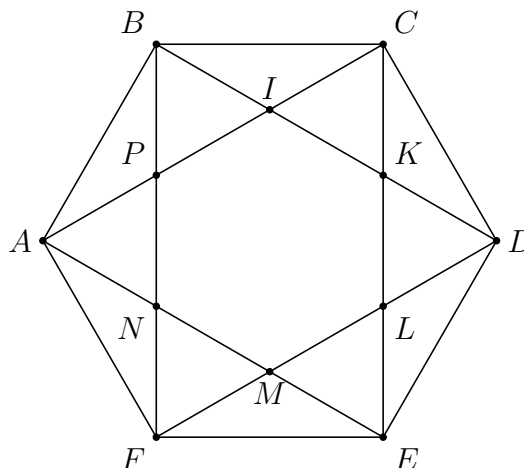
Vậy $R = 24$.

3. Gọi H là hình chiếu của B lên CD . Ta có $BH = AD = 2R = 24$.
 Tam giác BHR vuông tại H , ta có $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.
 Ta có $HC = CD - AB$. Suy ra $CD - AB = 7$.
 Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$ suy ra $AB + CD = 49$. Do đó
 $AB = 21, CD = 28$.

□

 **Bài 4.** Cho một lục giác đều bán kính R . Kẻ các đường chéo nối các đỉnh cách nhau một đỉnh. Tính diện tích lục giác có đỉnh là giao điểm của các đường chéo đó.

 Lời giải.



Kí hiệu các đỉnh như hình bên. Ta có $\triangle AMN$ đều (vì các góc bằng 60°).
 $\triangle ANB$ cân vì $\widehat{ABN} = \widehat{BAN} = 30^\circ$; tương tự ta có $\triangle AMF$ cân do đó

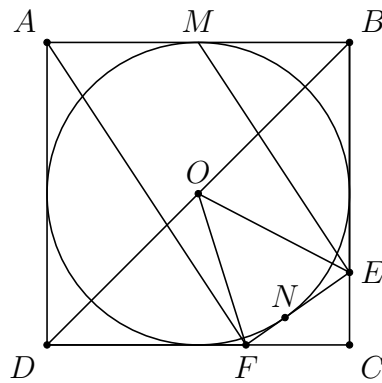
$$FM = MN = NB = \frac{BF}{3} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

$MNPQ$ là lục giác đều có diện tích bằng $\frac{MN^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 5. Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M . Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F . Chứng minh rằng

1. Các tam giác DFO và BOE đồng dạng.
2. ME song song với AF .

Lời giải.



1. Xét tam giác $\triangle DFO$, ta có $\widehat{DOF} + \widehat{DFO} + \widehat{ODF} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{DOF} + \widehat{DFO} = 145^\circ$ (do $\widehat{ODF} = 45^\circ$).
 Xét tứ giác $DBEF$, ta có $\widehat{D} + \widehat{B} + \widehat{E} + \widehat{F} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{DEF} + \widehat{BEF} = 270^\circ$.
 Mặt khác ta có FO, EO lần lượt là phân giác góc DFE và BEF nên ta có

$$\widehat{DFO} = \frac{1}{2}\widehat{DFE} \text{ và } \widehat{BEO} = \frac{1}{2}\widehat{BEF}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{DFO} + \widehat{BEO} = 145^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DOF} = \widehat{BEO}$.

Xét tam giác DOF và tam giác BEO , ta có

$$\checkmark \widehat{ODF} = \widehat{OBE} = 45^\circ;$$

$$\checkmark \widehat{DOF} = \widehat{BEO} \text{ (chứng minh trên).}$$

$$\Rightarrow \triangle DOF \sim \triangle BEO \text{ (g - g).}$$

$$2. \triangle DOF \sim \triangle BEO \Rightarrow \frac{DF}{BO} = \frac{DO}{BE} \Rightarrow DF \cdot BE = DO \cdot BO = \frac{BD^2}{4} = \frac{AB^2}{2} = BM \cdot AD.$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{DF} = \frac{BE}{AD}$$

Xét tam giác ADF và EBM , ta có

$$\checkmark \widehat{ADF} = \widehat{MBE};$$

$$\checkmark \frac{BM}{DF} = \frac{BE}{AD}.$$

Suy ra $\triangle ADF \sim \triangle EBM \Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{AFD}$.

Mặt khác ta có $\widehat{BAF} = \widehat{AFD}$ ($AB \parallel CD$).

Duy ra $\widehat{BME} = \widehat{BAF}$ suy ra $ME \parallel AF$.

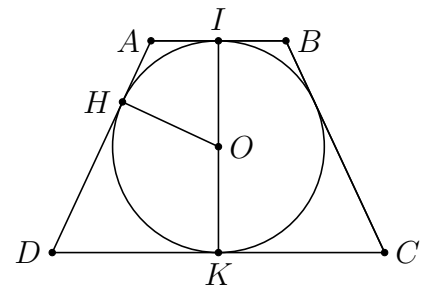
□

📌 **Bài 6.** Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ngoại tiếp đường tròn ($O; r$) và $CD = 4AB$.

1. Gọi H là hình chiếu của O lên AD . Chứng minh rằng $HD = 4HA$;
2. Tính AB và CD theo r .

📌 **Lời giải.**

1. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của O lên AB và CD . Ta có $AI = \frac{AB}{2}$; $DK = \frac{CD}{2}$.
(1)
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $HA = AI$,
 $HD = DK$.
(2)
Lại có $CD = 4AB$.
(3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $HD = 4HA$.



2. Tam giác AOD vuông tại O có đường cao OH , ta có

$$r^2 = OH^2 = HA \cdot HD = 4 \cdot HA^2.$$

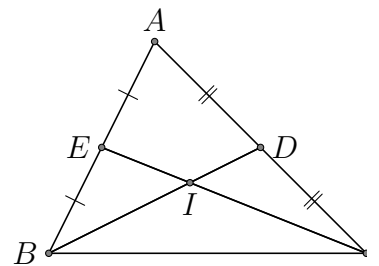
$$\text{Vậy } HA = \frac{r}{2}.$$

□

📌 **Bài 7.** Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại I . Cho biết tứ giác $ADIE$ ngoại tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

📌 **Lời giải.**

Ta có $ADIE$ là tứ giác ngoại tiếp suy ra $AD + IE = AE + ID$.
Không mất tính tổng quát giả sử $AB < AC$ khi đó ta chứng minh được $BD < CE$ suy ra $ID < IE$. Do đó $AE + ID < AD + EI$ (mâu thuẫn). Vậy $AB = AC$.



□

§9 Độ dài đường tròn, cung tròn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Độ dài đường tròn

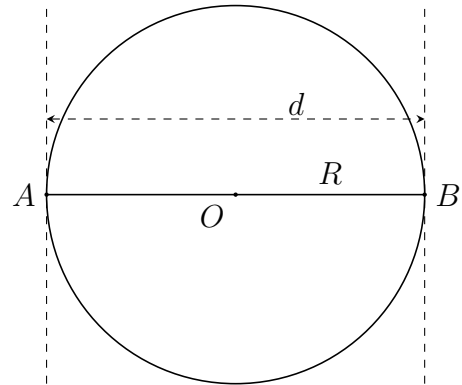
1. Độ dài đường tròn (hay “Chu vi hình tròn”) được kí hiệu là C .
2. Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức

$$C = 2\pi R.$$

3. Nếu gọi d là đường kính của đường tròn ($d = 2R$) thì

$$C = \pi d.$$

Trong đó π đọc là “pi” và $\pi \approx 3,14$ ($\pi = 3,14159265\dots$).



1.2 Độ dài cung tròn

1. Đường tròn bán kính R (ứng với cung 360°) có độ dài là $2\pi R$.
2. Mỗi cung 1° bán kính R có độ dài là

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

3. Một cung n° , bán kính R có độ dài

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

2 Các ví dụ

- Ví dụ 1.**
1. Tính độ dài cung 30° của một đường tròn có bán kính 5 cm.
 2. Tính chu vi của một vành xe đạp có đường kính 65 cm.

Lời giải.

1. Độ dài cung 30° của đường tròn có bán kính 5 cm là

$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 30}{180} = \frac{5\pi}{6} \approx 2,6 \text{ (cm)}.$$

2. Chu vi của vành xe đạp đường kính 65 cm là

$$C = \pi d = 65\pi \approx 204,2 \text{ (cm)}.$$

□

Ví dụ 2. Tính độ dài của đường tròn, biết

- Đường tròn có bán kính bằng 6 cm.
- Đường tròn có đường kính 8 cm.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.

1. Độ dài đường tròn bán kính 6 cm là

$$C = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 6 \approx 37,7 \text{ (cm)}.$$

2. Độ dài đường tròn đường kính 8 cm là

$$C = \pi d = 8\pi \approx 25,1 \text{ (cm)}.$$

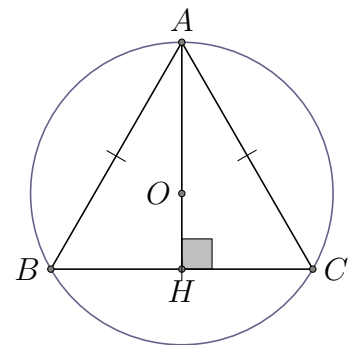
- 3.

Giả sử có O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Qua A kẻ đường cao AH . Khi đó ta có

$$R = OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \text{ (cm)}.$$

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là

$$C = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12,57 \text{ (cm)}.$$



□

Ví dụ 3. Một cái bàn tròn phục vụ trong nhà hàng có chu vi là 64π dm. Tính độ dài cung 90° của cái bàn đó.

Lời giải.

Ta có $C = 64\pi \text{ (dm)} \Rightarrow 2\pi R = 64\pi \Leftrightarrow R = \frac{64\pi}{2\pi} = 32 \text{ (dm)}.$

Vậy độ dài cung 90° của cái bàn tròn là

$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 32 \cdot 90}{180} = 16\pi \approx 50,3 \text{ (dm)}.$$

□

Ví dụ 4. Xích đạo là một đường tròn lớn của Trái Đất có độ dài khoảng 40000 km. Hãy tính bán kính của Trái Đất.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của Trái đất. Theo đề bài ta có

$$2\pi R = 40000 \Rightarrow R = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366 \text{ (km)}.$$

□

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O) , dây $AB = 9$ cm có khoảng cách đến tâm bằng một nửa bán kính của đường tròn.

1. Tính chu vi đường tròn.
2. Tính độ dài cung nhỏ AB .

Lời giải.

1. Kẻ $OH \perp AB$. Khi đó $HA = HB$ (tính chất đường kính và dây cung).

$$\Rightarrow HB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5 \text{ (cm)}.$$

Trong tam giác vuông OHB , ta có

$$\checkmark \sin B = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ.$$

$$\checkmark \cos B = \frac{HB}{OB} \Rightarrow OB = \frac{HB}{\cos B} = \frac{4,5}{\cos 30^\circ} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Chu vi đường tròn: } C = 2\pi R = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} \approx 32,65 \text{ (cm)}.$$

2. Ta có $\widehat{B} = 30^\circ$;

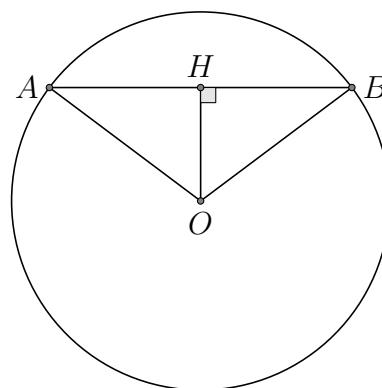
$$\Rightarrow \widehat{BOH} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{BOH} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sđ}\widehat{AB} = 120^\circ.$$

$$\text{Độ dài cung nhỏ } AB: l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi 3\sqrt{3} \cdot 120}{180} \approx 10,88 \text{ (cm)}.$$

□



Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M . Giả sử $AM = 1$ cm, $CD = 2\sqrt{3}$ cm. Tính

1. Độ dài đường tròn.
2. Độ dài của $\widehat{CAD}$.

Lời giải.

1. Ta có $AB \perp CD$ tại M (giả thiết) nên

$$MC = MD = CD : 2 = \sqrt{3} \text{ (cm) (tính chất đường kính và dây cung).}$$

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Do đó, $\triangle ACB$ vuông tại C có đường cao CM ($CD \perp AB$ tại M).

Theo hệ thức liên hệ giữa đường cao trong tam giác vuông ACB ta có

$$\begin{aligned} MC^2 &= MA \cdot MB \\ \Rightarrow MB &= \frac{MC^2}{MA} = \frac{(\sqrt{3})^2}{1} = 3 \\ \Rightarrow R &= \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AM + MB) = 2 \text{ (cm).} \end{aligned}$$

Độ dài đường tròn: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12,57 \text{ (cm)}$.

b) Ta có $AM = 1 \text{ cm}$, $OA = 2 \text{ cm} \Rightarrow MA = MO = 1 \text{ cm}$.

Xét tứ giác $OCAD$ có

$$\begin{cases} MC = MD \text{ (chứng minh trên)} \\ MA = MO \text{ (chứng minh trên)} \Rightarrow OCAD \text{ là hình thoi.} \\ CD \perp OA \text{ (giả thiết)} \end{cases}$$

$\Rightarrow CA = CO = OA$ (cùng bằng 2 cm) nên $\triangle OAC$ đều

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 120^\circ$.

Độ dài của $\widehat{CAD}$

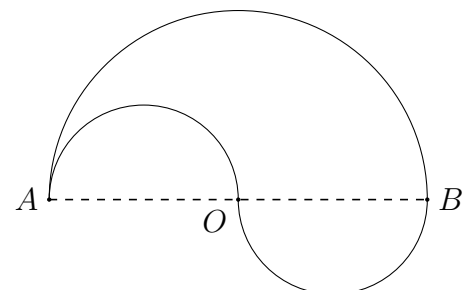
$$l_{\widehat{CAD}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 120}{180} = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19 \text{ (cm)}.$$

□

3 Luyện tập

Bài 1.

Tính chu vi của hình bên, biết $OA = 4 \text{ cm}$.



Lời giải.

Hình bên là hình giới hạn bởi hai nửa đường tròn đường kính 4 cm và một nửa đường tròn đường kính $AB = 8$ cm nên chu vi của hình đó là

$$\frac{1}{2} \cdot 8\pi + \pi \cdot 4 = 8\pi \approx 25,13 \text{ (cm)}.$$

□

Bài 2. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp của

1. Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 6 cm và 8 cm.
2. Một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 4 cm.

Lời giải.

1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông nhận cạnh huyền làm đường kính.
Theo định lý Py-ta-go, ta có

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \text{cạnh huyền bằng } 10 \text{ cm}.$$

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông với đường kính bằng 10 cm là

$$C = \pi d = 10\pi \approx 31,42 \text{ (cm)}.$$

2. Tương tự câu a), ta có $d = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông cân với đường kính bằng $4\sqrt{2}$ cm là

$$C = \pi d = 4\sqrt{2}\pi \approx 17,77 \text{ (cm)}.$$

□

Bài 3. Đường kính bánh xe của một chiếc xe đạp là 73 cm. Hỏi

1. Bánh xe đó quay được bao nhiêu vòng khi xe đi được một đoạn đường 8 km?
2. Xe đi được bao nhiêu ki-lô-mét nếu bánh xe quay đủ 1000 vòng?

Lời giải.

1. Bánh xe đạp quay được một vòng nghĩa là nó đi được một độ dài là chu vi của bánh xe.
Chu vi của bánh xe đạp: $C = \pi d = 73\pi$ (cm).
Số vòng mà bánh xe quay được khi đi đoạn đường dài 8 km = 800000 cm là

$$800000 : (73\pi) \approx 3488 \text{ (vòng)}.$$

2. Đoạn đường mà xe đi được khi bánh xe quay đủ 1000 vòng là

$$1000 \cdot 73\pi \approx 229336,3 \text{ (cm)}.$$

Đổi $229336,3$ (cm) $\approx 2,29$ (km).

Vậy xe đi được khoảng 2,29 km khi bánh xe quay đủ 1000 vòng.

□

Bài 4. Chiếc máy cày có bánh xe sau lớn hơn hai bánh xe trước. Biết rằng khi bơm căng, bánh xe trước có đường kính 0,8 m, bánh xe sau có đường kính 1,5 m. Hỏi bánh xe sau lăn được 16 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?

Lời giải.

Bánh xe lăn được một vòng nghĩa là nó đi được một độ dài là chu vi của bánh xe.

✓ Chu vi bánh xe trước: $C_1 = \pi d = 0,8\pi$ (m).

✓ Chu vi bánh xe sau: $C_2 = \pi d = 1,5\pi$ (m).

Độ dài bánh xe sau khi lăn được 16 vòng: $16 \cdot 1,5\pi = 24\pi$ (m).

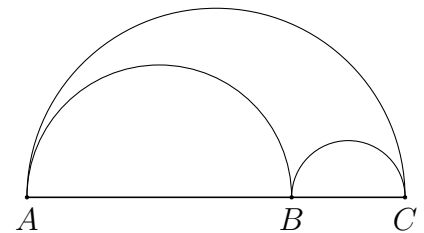
Số vòng mà bánh xe trước đã lăn khi bánh xe sau lăn được 16 vòng là

$$24\pi : 0,8\pi = 30 \text{ (vòng)}.$$

Vậy khi bánh xe sau lăn được 16 vòng thì bánh xe trước sẽ lăn 30 vòng. □

Bài 5.

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C (hình vẽ bên). Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC .



Lời giải.

Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là độ dài của các nửa đường tròn đường kính AC, AB và BC . Khi đó

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AC = \frac{\pi}{2} AC;$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AB = \frac{\pi}{2} AB;$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot BC = \frac{\pi}{2} BC.$$

$$\text{Xét } C_2 + C_3 = \frac{\pi}{2} AB + \frac{\pi}{2} BC = \frac{\pi}{2} (AB + BC) = \frac{\pi}{2} AC = C_1.$$

Vậy $C_1 = C_2 + C_3$ (điều phải chứng minh). □

Bài 6. Cho $(O; OM)$. Vẽ đường tròn (O') đường kính OM . Một bán kính OA của (O) cắt (O') ở B . Chứng minh hai cung MA và MB có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

Trên (O') đặt $\widehat{MOA} = \alpha$ thì $\widehat{BO'M} = 2\alpha$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BM).

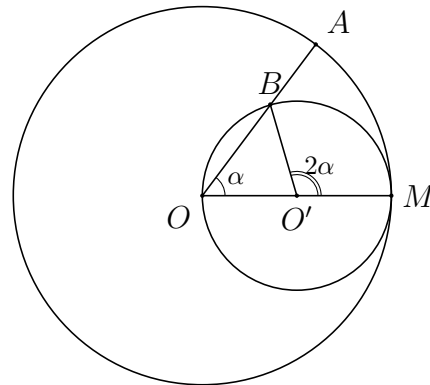
Suy ra $sđ\widehat{AM} = \alpha$, $sđ\widehat{MB} = 2\alpha$. Do đó

$$l_{\widehat{MA}} = \frac{\pi \cdot OM \cdot \alpha}{180^\circ} \quad (1)$$

$$l_{\widehat{MB}} = \frac{\pi \cdot OM \cdot 2\alpha}{180^\circ \cdot 2} = \frac{\pi \cdot OM \cdot \alpha}{180^\circ}. \quad (2)$$

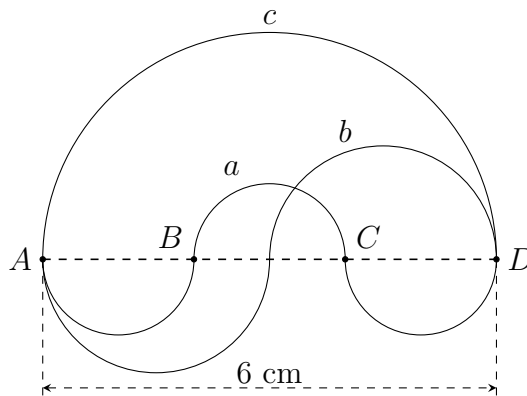
Từ (1) và (2) suy ra $l_{\widehat{MA}} = l_{\widehat{MB}}$.

Vậy hai cung $\widehat{MA}$ và $\widehat{MB}$ có độ dài bằng nhau.



□

Bài 7. Hãy so sánh độ dài của ba đường cong a , b và c trong hình vẽ bên dưới, biết $AB = BC = CD$ và $AD = 6$ cm.



Lời giải.

Gọi C_a , C_b và C_c là độ dài của ba đường cong a , b và c .

Theo hình vẽ, ta có C_a là độ dài của ba nửa đường tròn đường kính 2 cm nên

$$C_a = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 2}{2} = 3\pi \text{ (cm)}. \quad (1)$$

Tương tự C_b là độ dài của hai nửa đường tròn đường kính 3 cm nên

$$C_b = \pi \cdot 3 = 3\pi \text{ (cm)}. \quad (2)$$

C_c là độ dài của một nửa đường tròn đường kính 6 cm nên

$$C_c = \frac{\pi \cdot 6}{2} = 3\pi \text{ (cm)}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $C_a = C_b = C_c$.

Vậy ba đường cong a , b và c có độ dài bằng nhau.

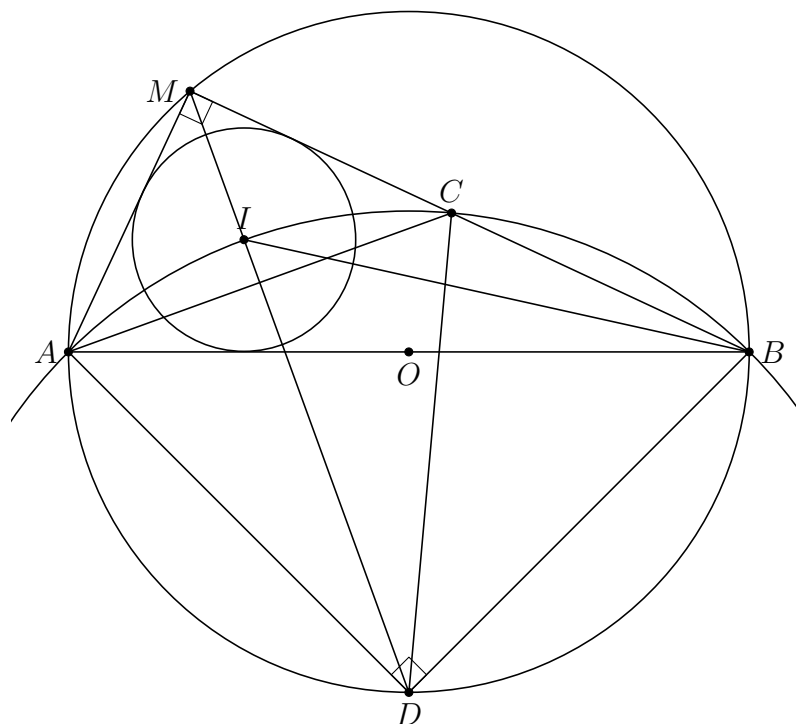
□

§10 Ôn tập chương III

Bài 1. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Lấy $M \in (O)$ với $AM < BM$. Trên cạnh MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Gọi OD là bán kính vuông góc với AB (M và D ở hai bên đường thẳng AB)

1. Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABD$.
2. Chứng tỏ MD là phân giác $\widehat{AMB}$ và $MD \perp AC$.
3. Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn (ABC) .
4. Đường tròn (ABC) cắt MD tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Lời giải.



1. Vì M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Tương tự ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$, và $OD \perp AB$ nên D nằm chính giữa cung AB , suy ra $DA = DB$.
Theo định lý Pythagore, $AB^2 = DA^2 + DB^2 \Leftrightarrow (2R)^2 = 2DA^2 \Leftrightarrow DA = DB = R\sqrt{2}$.
2. Vì $OD \perp AB$ nên D nằm chính giữa cung AB , hay $s\widehat{DA} = s\widehat{DB}$,
suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{DMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).
Vậy MD là phân giác $\widehat{AMB}$.
Mặt khác $MA = MC$ nên $\triangle MAC$ cân tại M nên $MD \perp AC$ (trong tam giác cân đường phân giác còn là đường cao).

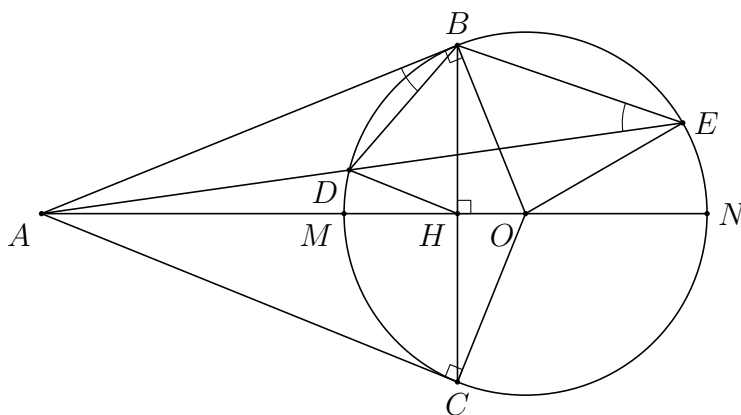
3. Theo câu b), ta có MD là đường trung trực AC nên $DA = DC = DB$, khi đó D là tâm của đường tròn (ABC) .
4. Vì D là tâm của đường tròn (ABC) và $MD \perp AC$ nên $s\widehat{IA} = s\widehat{IC}$, suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau). Khi đó, BI là tia phân giác góc ABI . Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

□

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE của đường tròn (O) (D, E thuộc đường tròn (O) ; D nằm giữa A và E , tia AD nằm giữa hai tia AB, AO).

1. Chứng minh rằng A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn này.
2. Chứng minh rằng $AB^2 = AD \cdot AE$.
3. Gọi H là giao điểm của OA và BC . Chứng minh rằng $\triangle AHD \sim \triangle AEO$ và tứ giác $DEOH$ nội tiếp.
4. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa A và O). Chứng minh rằng $\frac{EH}{AN} = \frac{MH}{AD}$.

 **Lời giải.**



1. Ta có: AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp OB, AC \perp OC$, suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $OBAC$ nội tiếp đường tròn đường kính OA có tâm K là trung điểm OA .
2. Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$, có

$\widehat{BAE}$: chung

$\widehat{ABD} = \widehat{BEA}$ (góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung BD).

nên $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g-g), suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$

Vậy $AB^2 = AD \cdot AE$.

3. Trong tam giác vuông ABO , ta có $AB^2 = AH \cdot AO$, do đó $AH \cdot AO = AD \cdot AE (= AB^2)$.
 Suy ra, $\frac{AH}{AD} = \frac{AO}{AE}$ và $\widehat{DAH}$: chung
 nên $\triangle AHD \sim \triangle AEO$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$.
 Do đó tứ giác $DEOH$ nội tiếp (tứ giác có góc trong bằng góc đối ngoài).

4. Ta có $\widehat{DEM} = \frac{\widehat{DOM}}{2}$, $\widehat{DOM} = \widehat{DEH} \Rightarrow \widehat{DEM} = \frac{\widehat{DEH}}{2} \Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{MEH}$.

Suy ra EM là đường phân giác của $\triangle EAH \Rightarrow \frac{EH}{AE} = \frac{MH}{AM}$ (1).

Mặt khác $\triangle AEM \sim \triangle AND$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AM}{AD}$ (2).

Từ (1), (2) cho : $\frac{EH}{AE} \cdot \frac{AE}{AN} = \frac{MH}{AM} \cdot \frac{AM}{AD}$.

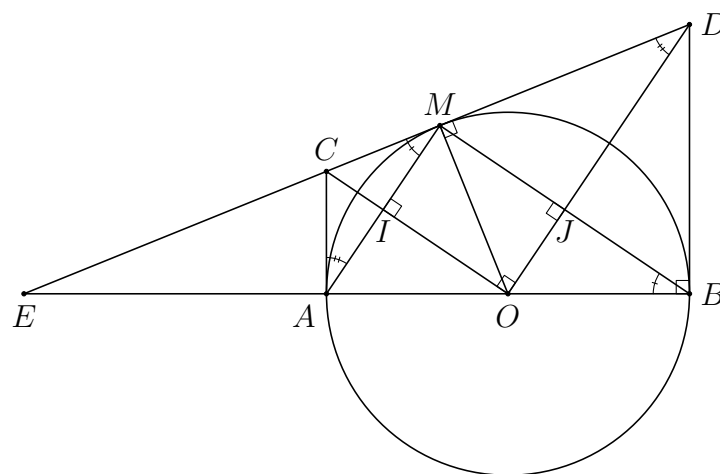
Vậy $\frac{EH}{AN} = \frac{MH}{AD}$.

□

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E . Hai tiếp tuyến EM và Bx của (O) cắt nhau tại D (M thuộc (O)).

1. Chứng minh rằng 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $\triangle EMA \sim \triangle EBM$, suy ra $EM^2 = EO^2 - R^2$.
3. Trên đoạn ME lấy điểm C sao cho hai góc $\widehat{CAM}, \widehat{EDO}$ bằng nhau. Chứng minh rằng $OC \parallel MB$.
4. Giả sử M là trung điểm đoạn ED . Tính EM theo R .

Lời giải.



1. Vì EM và BD là tiếp tuyến với đường tròn (O) nên $\widehat{DMO} = \widehat{DBO} = 90^\circ$.
 Vậy tứ giác $DMOB$ nội tiếp, suy ra 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn.

2. Xét hai tam giác $\triangle EMA$ và $\triangle EBM$, ta có

$\widehat{CEA}$: chung

$\widehat{EMA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung MA).

Vậy $\triangle EMA \sim \triangle EBM$.

Khi đó $\frac{EM}{EB} = \frac{EA}{EM} \Leftrightarrow EM^2 = EA \cdot EB = (EO + R)(EO - R) = EO^2 - R^2$.

Suy ra $EM^2 = EO^2 - R^2$.

3. Ta có $\widehat{CAM} = \widehat{EDO}$.

Mà $\widehat{CMA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung MA)

$\widehat{MDO} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MA trong tứ giác nội tiếp $DMOB$).

Suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{CMA}$, nên $\triangle CAM$ cân tại C , do đó $CM = CA$.

Mặt khác $OA = OM = R$, suy ra OC là đường trung trực của MA , do đó $OC \perp MA$.

Mà $MB \perp MA$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vậy $OC \parallel MB$.

4. Gọi I là giao điểm của CO và AM ; J là giao điểm của DO và BM .

Vì $CO \perp AM$; $DO \perp BM$ nên tứ giác $MIOJ$ là hình chữ nhật vì $\widehat{M} = \widehat{I} = \widehat{J}$.

Suy ra $MA \parallel OD$, mà M là trung điểm của ED nên A là trung điểm của EO .

Vậy $EM^2 = EO^2 - R^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow EM = R\sqrt{3}$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi đường tròn $(I; r)$ đường tròn nội tiếp tam giác ABC , H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I) , D là giao điểm của AI với đường tròn (O) , DK là đường kính của đường tròn (O) . Gọi d là độ dài của OI . Chứng minh rằng

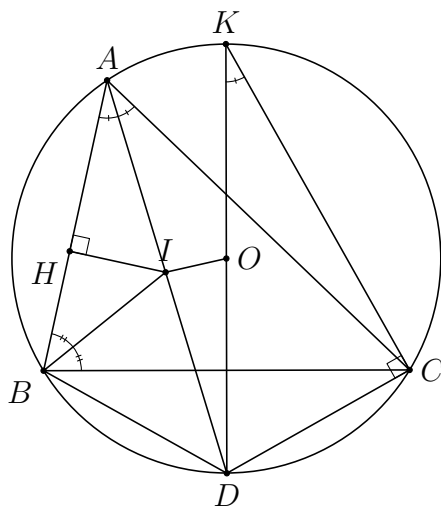
a) $\triangle AHI \sim \triangle KCD$.

b) $DI = DB = DC$.

c) $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.

d) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lí Euler).

Lời giải.



1. Xét hai tam giác $\triangle AHI$ và $\triangle KCD$.

$\widehat{AHI} = 90^\circ$ (H là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh tam giác),

$\widehat{KCD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{AHI} = \widehat{KCD}$ (1).

Vì AI là tia phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.

Mà $\widehat{DKC} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{DC}$).

Do đó $\widehat{DKC} = \widehat{BAD}$ (2).

Từ (1) và (2), $\triangle AHI \sim \triangle KCD$.

2. Vì AI là tia phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$, do đó $\widehat{DC} = \widehat{DB}$ (tính chất góc nội tiếp).

Suy ra $DB = DC$ (3).

Mặt khác $\widehat{BID} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$ (góc ngoài tam giác).

$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$.

mà $\widehat{IBC} = \widehat{IBD}$ và $\widehat{IBA} = \widehat{IAC} = \widehat{CBD}$.

Nên $\widehat{BID} = \widehat{IBD}$, do đó tam giác DBI cân tại D , suy ra $DI = DB$ (4).

Từ (3) và (4), $DI = DB = DC$.

- 3.

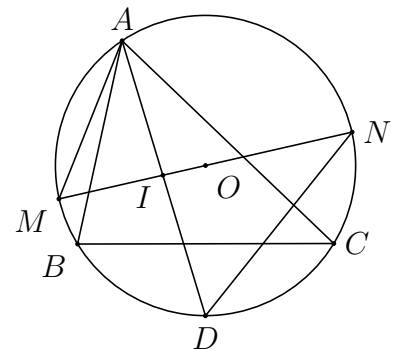
Gọi M, N là giao điểm của IO với đường tròn (O).

Xét hai tam giác $\triangle MAI$ và $\triangle DNI$.

$\widehat{MAI} = \widehat{IND}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{MD}$).

$\widehat{MIA} = \widehat{DIN}$ (đối đỉnh).

Suy ra $\triangle MAI \sim \triangle DNI$, do đó $\frac{IA}{IN} = \frac{IM}{ID}$.



Khi đó $IA \cdot ID = IM \cdot IN = (OM - OI)(ON + OI) = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$.

4. Theo câu a), ta có $\triangle AHI \sim \triangle KCD$,

suy ra $\frac{AI}{KD} = \frac{IH}{CD} \Rightarrow AI \cdot CD = IH \cdot KD = 2Rr \Leftrightarrow AI \cdot ID = 2Rr$ (do $DI = DC$).

mà $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.

Vậy $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lý Euler).

□

Bài 5. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn đó (Ax nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn). Tia phân giác của góc $C Ax$ cắt nửa đường tròn tại D . Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E . Kẻ EH vuông góc với Ax tại H .

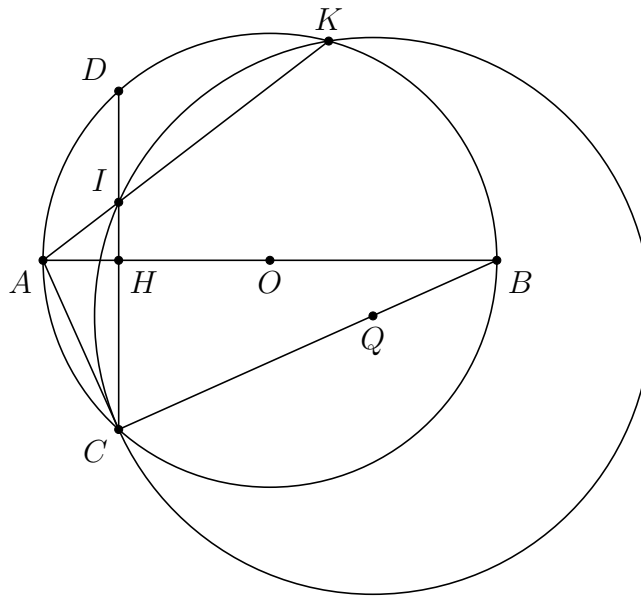
1. Chứng minh tứ giác $AHEC$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.
3. Chứng minh tam giác ABE cân.
4. Tia BD cắt AC và Ax lần lượt tại F và K . Chứng minh $AKEF$ là hình thoi.



Bài 6. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB cố định. H là điểm cố định thuộc đoạn OA (H không trùng O và A). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tâm O tại C và D . Gọi K là điểm tùy ý thuộc cung lớn CD (K không trùng các điểm $C; D$ và B). Gọi I là giao điểm của AK và CD .

1. Chứng minh tứ giác $HIKB$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh $AI \cdot AK = AH \cdot AB$.
3. Chứng minh khi điểm K thay đổi trên cung lớn CD của đường tròn tâm O thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.



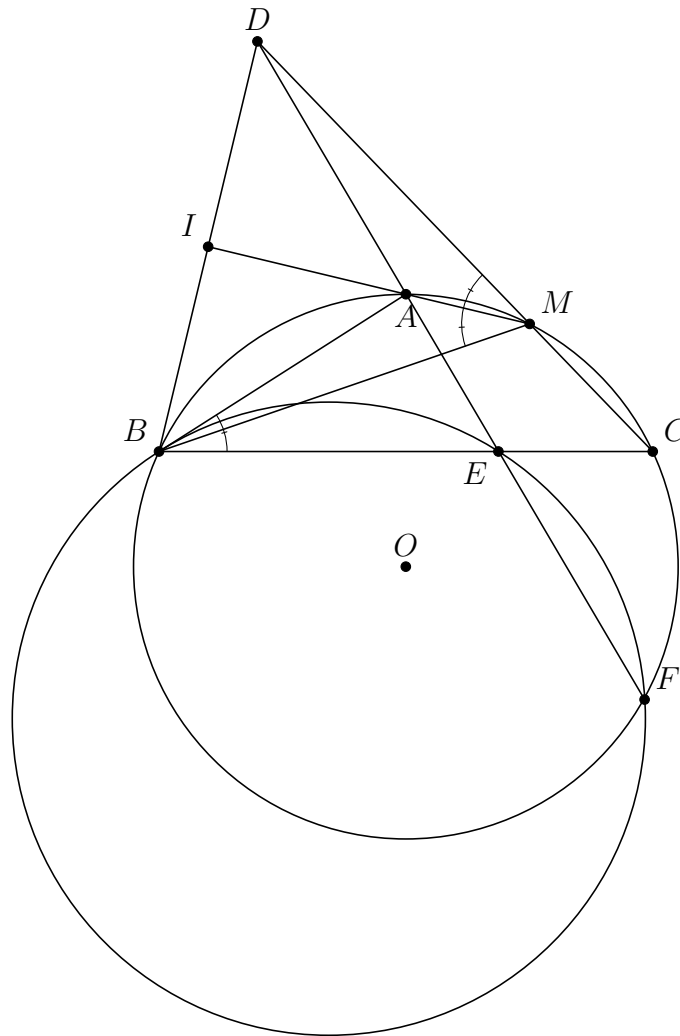
1. Tứ giác $HIKB$ có $\widehat{IHB} = 90^\circ$ (theo giả thiết).
Mặt khác $\widehat{IKB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra tứ giác $HIKB$ nội tiếp đường tròn (tổng hai góc đối diện bằng 180°)(đpcm).
2. Xét $\triangle AIB$ và $\triangle AHK$ có góc A chung, có $\widehat{IKH} = \widehat{IBH}$ (cùng chắn cung HI của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HIKB$). Suy ra $\triangle AIB$ đồng dạng với $\triangle AHK$. Suy ra $\frac{AI}{AH} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow AI \cdot AK = AH \cdot AB$ (đpcm).
3. Đường kính AB vuông góc với dây CD tại H (gt), suy ra $HC = HD \Rightarrow AC = AD$.
Suy ra $\widehat{AC} = \widehat{AD}$.
Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau).
Mặt khác tia CA và điểm K nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng CI .
Suy ra CA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI tại tiếp điểm C .
(Có thể chứng minh $AC^2 = AI \cdot AK$ để suy ra CA là tiếp tuyến).
Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI , suy ra Q nằm trên đường thẳng vuông góc với CA tại C .
Mặt khác $CB \perp CA$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Vậy Q thuộc đường thẳng CB cố định (đpcm).

□

Bài 7. Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây cung BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ $\widehat{AC}$, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D .

1. Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác của góc $\widehat{BMD}$.
2. Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và góc $\widehat{BCD}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M .
3. Tia DA cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F , Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .

 **Lời giải.**



1. Ta có $\widehat{MAC} + \widehat{MCA} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{MC} + \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{AM} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{AC} = \widehat{ABC}$.
 Mặt khác $\widehat{AMD} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA}$ (góc ngoài của tam giác ACM) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AMD}$.
 Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ACM} = \widehat{AMB} = \widehat{AMD} \Rightarrow MA$ là tia phân giác của góc $\widehat{BMD}$.
2. Do $MI \perp BD \Rightarrow$ tam giác MBD cân tại M .
 Suy ra MI là đường trung trực của $BD \Rightarrow AB = AD$,
 mà $AB = AC \Rightarrow AB = AC = AD \Rightarrow A$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .

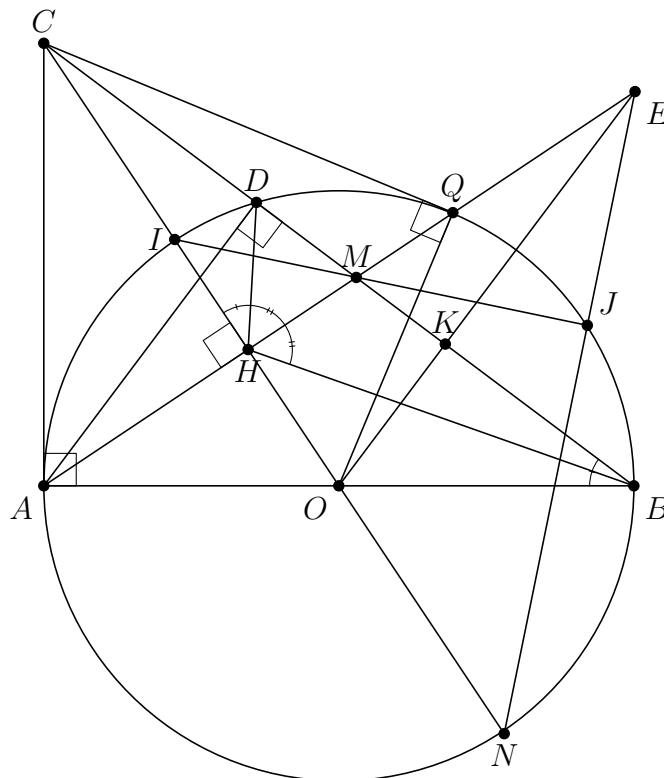
3. Trong tam giác vuông MID ta có $\widehat{IDM} + \widehat{IMD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IDM} = 90^\circ - \widehat{IMD}$.
 Vì $\widehat{IMD} = \widehat{ABC}$ (không đổi) nên $\widehat{IDM}$ không đổi hay $\widehat{BDM}$ không đổi.
 Xét đường tròn nội tiếp tam giác BEF ta có $\widehat{BFE}$ là góc nội tiếp chắn cung BE .
 Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{AFB}$
 nên AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .

□

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn tâm O đường kính AB cắt các đoạn BC và OC lần lượt tại D và I . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên OC ; AH cắt BC tại M .

1. Chứng minh tứ giác $ACDH$ là nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.
2. Chứng minh hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau và HM là tia phân giác của góc $\widehat{BHD}$.
3. Gọi K là trung điểm của BD chứng minh $MD \cdot BC = MB \cdot CD$ và $MB \cdot MD = MK \cdot MC$.
4. Gọi E là giao điểm của AM và OK ; J là giao điểm của IM và (O) (J khác I). Chứng minh hai đường thẳng OC và EJ cắt nhau tại một điểm trên (O) .

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{AHC} = 90^\circ$ ($AH \perp OC$).
 $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).
 Vậy $AHDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC .
 $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{CHD}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Mặt khác $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AID}$ (2). (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.

2. Xét hai tam giác $\triangle AHO$ và $\triangle CAO$ có

$$\widehat{CHO} = \widehat{CAO} = 90^\circ.$$

$$\widehat{HAO} = \widehat{ACO} \text{ (cùng phụ góc } \widehat{COA}).$$

Do đó, $\triangle AHO \sim \triangle CAO$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{HO}{AO}$.

Mà $OA = OB$ vì AB đường kính đường tròn tâm (O) .

$$\text{Vậy } \frac{OB}{CO} = \frac{HO}{OB}.$$

Xét $\triangle OHB$ và $\triangle OBC$ có

$$\widehat{HOB} = \widehat{BOC} \text{ (chung góc } \widehat{O}).$$

$$\frac{OB}{CO} = \frac{HO}{OB}.$$

Vậy $\triangle OHB \sim \triangle OBC$ (c-g-c).

Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{CHD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACDH$).

$\widehat{DBA} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung của đường tròn tâm O).

Mặt khác $\triangle OHB \sim \triangle OBC \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{CBO} = \widehat{DBA}$.

Vậy $\widehat{OHB} = \widehat{DHC}$ mà $\widehat{OHB} + \widehat{BHM} = \widehat{DHC} + \widehat{DHM} = 90^\circ$ ($AH \perp OC$). $\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{DHM} \Rightarrow HM$ là đường phân giác của góc $\widehat{BHD}$.

3. Xét tam giác BHD , vì HM là phân giác của $\widehat{BHD} \Rightarrow \frac{HB}{HD} = \frac{MB}{MD}$ (*).

Mặt khác $HM \perp HC \Rightarrow HC$ là đường phân giác ngoài tam giác BHD .

$$\Rightarrow \frac{HB}{HD} = \frac{CB}{CD} \quad (**).$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \frac{CB}{CD} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow CB \cdot MD = CD \cdot MB.$$

Gọi Q là giao điểm của AM với (O)

vì $AH \perp OC \Rightarrow CQ$ là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \widehat{CQO} = 90^\circ$.

Vậy năm điểm $C; O; A; K; Q$ nội tiếp một đường tròn đường kính CO .

Bốn điểm $B; A; D; Q$ cùng thuộc $(O) \Rightarrow MB \cdot MD = MA \cdot MQ$ (3).

Năm điểm $C; O; A; K; Q$ cùng thuộc một đường tròn $(O) \Rightarrow MC \cdot MK = MA \cdot MQ$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow MB \cdot MD = MC \cdot MK$.

4. Gọi N là giao điểm của CO và $(O) \Rightarrow \widehat{IJN} = 90^\circ$ (5).

Mà $MI \cdot MJ = MD \cdot MB = MK \cdot MC$ (chứng minh trên).

Vậy $\triangle MCI \sim \triangle MKJ$

$$\Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{MJK} = \widehat{MEO} \Rightarrow MKJE \text{ nội tiếp.}$$

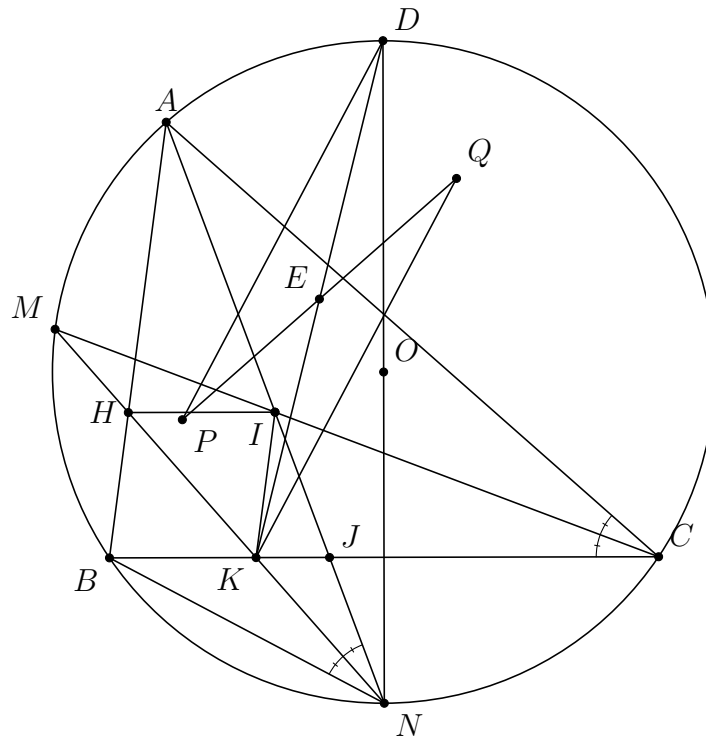
$$\Rightarrow \widehat{EJM} = 90^\circ \text{ (6) Từ (5) và (6) } \Rightarrow E; J; N \text{ thẳng hàng.}$$

□

Bài 9. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC . Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I . Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K .

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ . Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

 Lời giải.



1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
 Vì M là điểm chính giữa cung nhỏ AB của (O) (giả thiết) nên
 $\text{sđ}\widehat{AM} = \text{sđ}\widehat{MB} \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BCM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).
 Xét tứ giác $CNKI$ ta có
 $\widehat{INK} = \widehat{ICK}$ (vì $\widehat{ANM} = \widehat{BCM}$)
 $\Rightarrow CNKI$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau).
 Vậy C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.
 Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) (giả thiết)
 $\Rightarrow \text{sđ}\widehat{BN} = \text{sđ}\widehat{NC}$
 $\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).
 Xét $\triangle BMN$ và $\triangle KBN$ ta có
 $\widehat{BNM}$ là góc chung.
 $\widehat{BMN} = \widehat{NBK}$ (vì $\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$)
 $\Rightarrow \triangle BMN \sim \triangle KBN$ (g-g)
 $\Rightarrow \frac{NB}{NK} = \frac{NM}{NB}$.
 Vậy $NB^2 = NK \cdot NM$.

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

• Chứng minh $BHIK$ là hình bình hành.

Gọi J là giao điểm của AN và BC .

Ta có $s\widehat{AM} = s\widehat{MB}$ (cmt).

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow CM$ là phân giác của $\widehat{ACB} \Rightarrow CI$ là phân giác trong của $\triangle CAJ$.

$$\Rightarrow \frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ} \quad (1).$$

Ta có $s\widehat{AM} = s\widehat{MB}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BNM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow NM$ là phân giác của $\widehat{ANB}$.

$$\Rightarrow NH \text{ là phân giác trong của } \triangle NAB \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{NA}{NB} \quad (2).$$

Ta có $s\widehat{BN} = s\widehat{NC}$

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Xét $\triangle CAJ$ và $\triangle NAB$ ta có

$\widehat{ACJ} = \widehat{ANB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

$\widehat{BAN} = \widehat{CAJ}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle CAJ \sim \triangle NAB$ (g-g).

$$\Rightarrow \frac{CA}{NA} = \frac{CJ}{NB} \Rightarrow \frac{CA}{CJ} = \frac{NA}{NB} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } \frac{IA}{IJ} = \frac{HA}{HB} \Rightarrow HI \parallel BJ \text{ (định lí Thales đảo) hay } HI \parallel BK \quad (4).$$

Chứng minh tương tự các ý ở trên, ta được $KI \parallel BH$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $BHIK$ là hình bình hành.

• Chứng minh $BH = BK$.

Ta có $\triangle KBN \sim \triangle BMN$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{BK}{BM} = \frac{BN}{MN} \Rightarrow BK = \frac{BM \cdot BN}{MN} \quad (6).$$

Chứng minh tương tự câu b) ta có

$$\triangle HMB \sim \triangle BMN \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{BH}{BN} = \frac{BM}{MN} \Rightarrow BH = \frac{BM \cdot BN}{MN} \quad (7).$$

Từ (6) và (7) suy ra $BH = BK$.

Mà $BHIK$ là hình bình hành nên $BHIK$ là hình thoi.

4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ . Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Ta có $\widehat{NBK} = \widehat{BMK}$ (cmt) $\Rightarrow BN$ là tiếp tuyến tại B của $(P) \Rightarrow BN \perp BP$.

Mà $BN \perp BD$ (vì $\widehat{DBN} = 90^\circ$ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm (O))

nên B, P, D thẳng hàng.

$$\text{Ta có } \triangle PBK \text{ cân tại } P \text{ (} PB = PK \text{)} \Rightarrow \widehat{BPK} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{PBK} \quad (8).$$

Ta có

$$\begin{cases} NB = NC \text{ (} s\widehat{NB} = s\widehat{NC} \text{)} \\ OB = OC \end{cases}$$

$\Rightarrow ON$ là đường trung trực của đoạn $BC \Rightarrow DB = DC$ (D thuộc đường thẳng ON)

$$\Rightarrow \triangle DBC \text{ cân tại } D \Rightarrow \widehat{BDC} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{DBC} \quad (9).$$

Từ (8) và (9) suy ra $\widehat{BPK} = \widehat{BDC}$.

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $PK \parallel DC \Rightarrow PK \parallel DQ$ (10).

Chứng minh tương tự ta có C, Q, D thẳng hàng và $QK \parallel DP$ (11).

Từ (10) và (11) suy ra $DPKQ$ là hình bình hành.

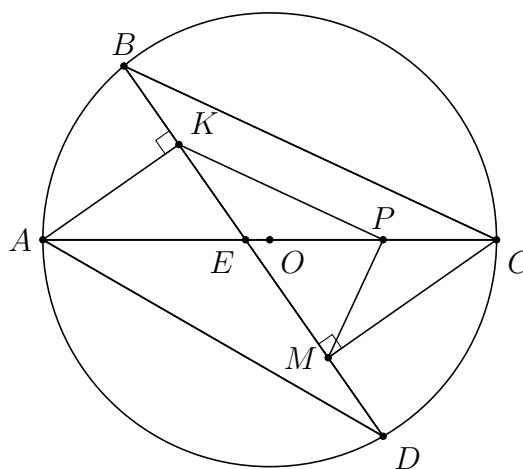
Mà E là trung điểm của đường chéo PQ nên E cũng là trung điểm của đường chéo DK .
 Vậy D, E, K thẳng hàng.

□

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC = 2R$. Gọi K và M lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C xuống BD , E là giao điểm của AC và BD , biết K thuộc đoạn BE ($K \neq B, K \neq E$). Đường thẳng qua K song song với BC cắt AC tại P .

1. Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.
2. Chứng minh $KP \perp PM$.
3. Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x .

Lời giải.



1. Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.
 Xét tứ giác $AKPD$ có $\widehat{APK} = \widehat{ACB}$ (2 góc ở vị trí đồng vị)
 Mặt khác: $\widehat{ACB} = \widehat{ADK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)
 $\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{APK}$
 $\Rightarrow ADPK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $KP \perp PM$.
 Theo câu a), tứ giác $AKPD$ nội tiếp nên $\widehat{APD} = \widehat{AKD} = 90^\circ$ và $\widehat{DKP} = \widehat{DAP}$
 Xét tứ giác $DMPC$ có $\widehat{DMC} = \widehat{DPC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow DMPC$ nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{DCA}$
 mà $\widehat{DCA} + \widehat{DAC} = 90^\circ$ và $\widehat{PMK} + \widehat{PKM} = 90^\circ$
 $\Rightarrow KP \perp PM$ (đpcm)
3. Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x .
 Xét tam giác ADC vuông tại D có $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 60^\circ$ nên
 $AD = 2R \cdot \sin 60 = R\sqrt{3}$ và $CD = 2R \cdot \cos 60 = R$.
 Xét tam giác vuông AKB có $AB = \frac{AK}{\sin 60} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$.
 Xét tam giác ABC vuông tại C có $BC = \sqrt{4R^2 - \frac{4x^2}{3}}$.
 Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, ta có:

$$\begin{aligned}
 AC \cdot BD &= AD \cdot BC + AB \cdot CD \\
 \Leftrightarrow 2R \cdot BD &= R\sqrt{3}\sqrt{4R^2 - \frac{4x^2}{3}} + \frac{2\sqrt{3}x}{3} \cdot R \\
 \Leftrightarrow BD &= \sqrt{3R^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

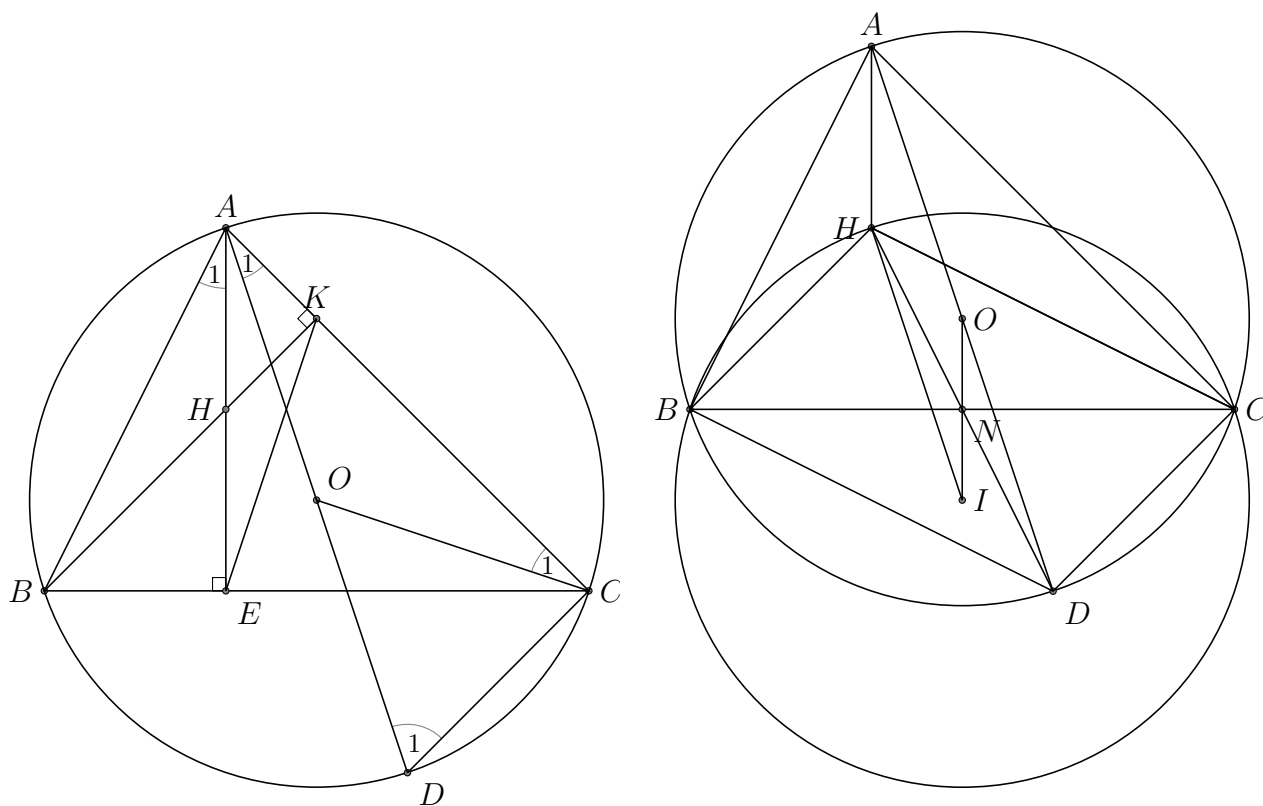
□

Bài 11.

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R . Hai đường cao AE và BK của tam giác ABC cắt nhau tại H (với E thuộc BC , K thuộc AC).

1. Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh $CE \cdot CB = CK \cdot CA$.
3. Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.
4. Cho B, C cố định và A di động trên (C) nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC nhọn, khi đó H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T) , biết $R = 3$ cm.

Lời giải.



1. Tứ giác $ABEK$ có: $\begin{cases} \widehat{AEB} = 90^\circ \text{ (} AE \perp BC \text{)} \\ \widehat{AKB} = 90^\circ \text{ (} BK \perp AC \text{)} \end{cases}$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $ABEK$ nội tiếp một đường tròn.

2. $\triangle CEA$ và $\triangle CKB$ có:

$$\begin{cases} \widehat{ACB} \text{ chung} \\ \widehat{CEA} = \widehat{CKB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle CEA \sim \triangle CKB \text{ (g.g)}$$

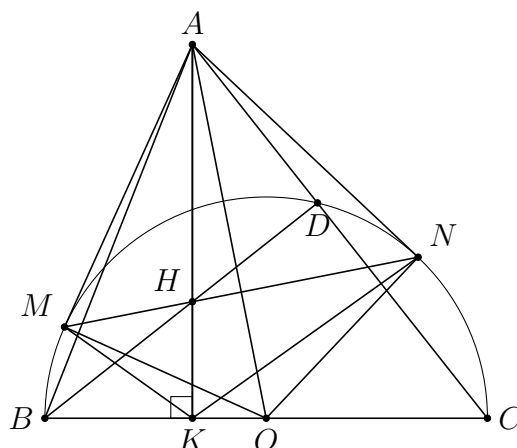
$$\Rightarrow \frac{CE}{CK} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CE.CB = CK.CA$$
3. Vẽ đường kính AD của (O) .
 Tam giác ABE vuông tại E nên $\widehat{A_1} + \widehat{ABC} = 90^\circ$.
 Mà $\widehat{ABC} = \widehat{D_1}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của (O)) $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$
 $\triangle ACD$ có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{D_1} = 90^\circ$.
 Mặt khác $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$ ($\triangle OAC$ cân tại O) $\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$
 Từ đó suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$
4. Gọi I là điểm đối xứng với O qua BC , OI cắt BC tại N
 $\Rightarrow N$ là trung điểm của OI, BC và các điểm I, N cố định.
 Ta có $BH \parallel CD$ (cùng $\perp AC$)
 Tương tự: $CH \parallel BD$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành
 $\Rightarrow N$ là trung điểm của BC thì N cũng là trung điểm của HD .
 $\triangle AHD$ có ON là đường trung bình $\Rightarrow AH = 2ON \Rightarrow AH = OI (= 2ON)$
 Lại có: $AH \parallel OI$ (cùng $\perp BC$) $\Rightarrow$ Tứ giác $AHIO$ là hình bình hành
 $\Rightarrow IH = OA = R = 3 \text{ (cm)} \Rightarrow H$ thuộc đường tròn $(I; 3 \text{ cm})$ cố định

□

Bài 12. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và đường cao AK . Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm; M và N nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AO). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng MN và AK . Chứng minh rằng:

1. Tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.
2. KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.
3. $AN^2 = AK \cdot AH$.
4. H là trực tâm của tam giác ABC .

Lời giải.



1. Chứng minh tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.

AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$.

AK là đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{AKO} = \widehat{AKC} = 90^\circ$.

Ba điểm M, K, N cùng nhìn đoạn AO dưới một góc vuông nên năm điểm M, K, N, A, O thuộc đường tròn đường kính AO .

Vậy tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.

AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AM = AN$. (1)

Theo chứng minh ở câu a), năm điểm M, K, N, O, A cùng thuộc một đường tròn nên ta có tứ giác $AMKN$ nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AKM} = \widehat{AKN}$ (các góc nội tiếp cùng chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau). Vậy KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.

3. Chứng minh $AN^2 = AH.AK$

$$\begin{cases} \widehat{ANH} = \widehat{AKM} & (\text{tứ giác } AMKN \text{ nội tiếp}) \\ \widehat{AKM} = \widehat{AKN} & (\text{chứng minh ý b}) \end{cases} \Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ANH}.$$

$\triangle AHN$ và $\triangle ANK$ có $\widehat{AKN} = \widehat{ANH}$, $\widehat{HAN} = \widehat{KAN}$ nên $\triangle AHN \sim \triangle ANK$ (g.g). Suy ra $\frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AN}$, hay $AN^2 = AH.AK$. (3)

4. Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC .

Gọi D là giao điểm của AC và đường tròn (O) .

$\triangle AND$ và $\triangle ACN$ có $\widehat{NAD} = \widehat{NAC}$, $\widehat{AND} = \widehat{ACN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau) nên $\triangle AND \sim \triangle ACN$ (g.g). Suy ra $\frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AN}$, hay $AN^2 = AD.AC$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AH.AK = AD.AC$, hay $\frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AK}$.

$$\triangle AHD \text{ và } \triangle ACK \text{ có } \begin{cases} \widehat{HAD} = \widehat{KAC} \\ \frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AK} \end{cases} \text{ nên } \triangle AHD \sim \triangle ACK \text{ (c.g.c).}$$

Suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$. Dẫn đến $\widehat{HDC} = 90^\circ$. (5)

Điểm D thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BDC} = 90^\circ$. (6)

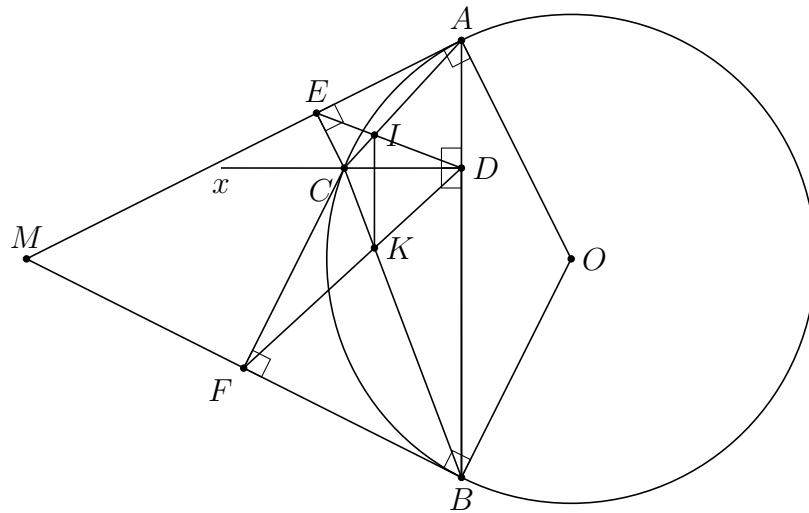
Từ (5) và (6) suy ra B, H, D thẳng hàng. Nghĩa là $BH \perp AC$. Lại có $AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC .

□

Bài 13. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không trùng với A, B). Từ điểm C kẻ CD vuông góc với AB , CE vuông góc với MA , CF vuông góc với MB ($D \in AB, E \in MA, F \in MB$). Gọi I là giao điểm của AC và DE , K là giao điểm của BC và DF . Chứng minh rằng

- Tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn.
- Hai tam giác CDE và CFD đồng dạng.
- Tia đối của tia CD là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$
- Đường thẳng IK song song với đường thẳng AB .

 **Lời giải.**



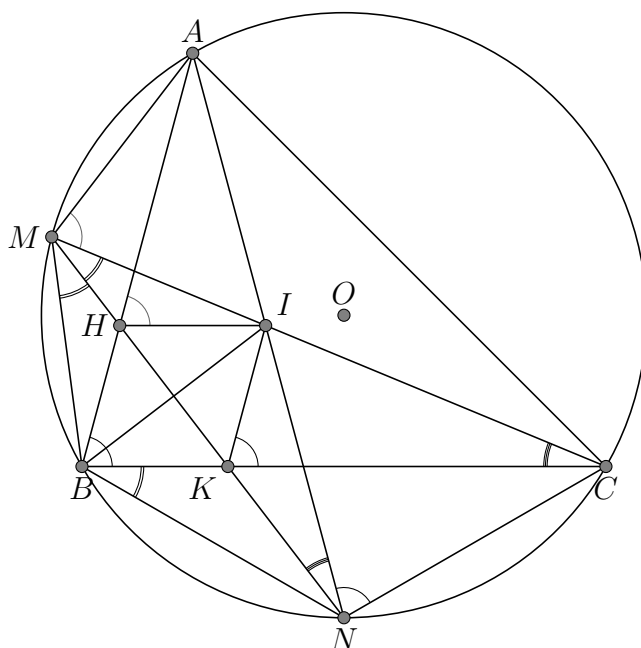
1. Tứ giác $ADCE$ có $\widehat{ADC} = \widehat{AEC} = 90^\circ$ nên $ADCE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Tứ giác $ADCE$ nội tiếp nên $\widehat{EAC} = \widehat{EDC}$.
Tương tự, tứ giác $BDCF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$.
Mặt khác, theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung thì $\widehat{EAC} = \widehat{CBD}$.
Do đó $\widehat{EDC} = \widehat{CFD}$.
Chứng minh tương tự thì $\widehat{CED} = \widehat{CDF}$.
Vậy hai tam giác $\triangle CDE$ và $\triangle CFD$ đồng dạng với nhau.
3. Gọi Cx là tia đối của tia CD . Tam giác $\triangle CDE$ đồng dạng với $\triangle CFD$ suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{DCF}$.
Do đó $\widehat{ECx} = \widehat{FCx}$. Vậy Cx là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$.
4. Ta có $\widehat{ICK} + \widehat{IDK} = \widehat{ICK} + \widehat{IDC} + \widehat{KDC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $ICKD$ nội tiếp, do đó $\widehat{CKI} = \widehat{KDC} = \widehat{CBF} = \widehat{CAB}$. Vậy $IK \parallel AB$.

□

Bài 14. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$ và cung nhỏ $\widehat{BC}$. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I . Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K .

1. Chứng minh các điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi PQ lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ . Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

 Lời giải.



1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn. Ta có M là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow AM = BM \Rightarrow \widehat{MNA} = \widehat{MCB} \Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{ICK}$. Tứ giác $CNKI$ có C và N là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh KI dưới hai góc bằng nhau nên $CNKI$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

Do đó bốn điểm C, N, I, K cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.

Ta có N là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow \widehat{BN} = \widehat{CN} \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Mà $\widehat{CBN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CN)

$\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BMN}$ (cùng bằng góc $\widehat{CNN}$) $\Rightarrow \widehat{KBN} = \widehat{BMN}$

Xét $\triangle KBN$ và $\triangle BMN$ có: $\begin{cases} \widehat{N} \text{ chung} \\ \widehat{KBN} = \widehat{BMN} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle KBN \sim \triangle BMN \Rightarrow \frac{KN}{BN} = \frac{BN}{MN} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$ (điều phải chứng minh).

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Mà $\widehat{AMC} = \widehat{AHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IC)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IKC}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HB \parallel IK$ (1).

Chứng minh tương tự phần 1 ta có tứ giác $AMHI$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{IKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AI)

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AHI}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $BK \parallel HI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHIK$ là hình bình hành.

Mặt khác AN, CM lần lượt là các tia phân giác của các góc A và C trong tam giác ABC nên I là giao điểm ba đường phân giác, do đó BI là tia phân giác của góc B .

Vậy tứ giác $BHIK$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

4. Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{NC}$ nên DN là trung trực của $BC \Rightarrow DN$ là phân giác $\widehat{BDC}$. Ta có $\widehat{KQC} = 2\widehat{KMC}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm của đường tròn (Q))

Lại có $\widehat{NDC} = \widehat{KMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BC}$)

Mà $\widehat{BDC} = 2\widehat{NDC} \Rightarrow \widehat{KQC} = \widehat{BDC}$

Xét tam giác $\triangle BDC$ và $\triangle KQC$ là các tam giác cân tại D và Q có hai góc $\widehat{BCD} = \widehat{BCQ}$ do vậy D, Q, C thẳng hàng nên $KQ \parallel PK$

Chứng minh tương tự ta có ta có D, P, B thẳng hàng và $DQ \parallel PK$

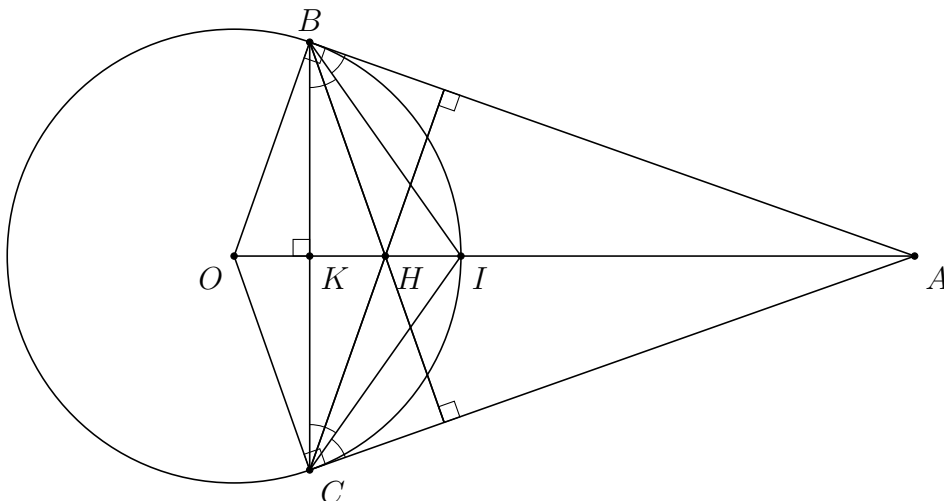
Do đó tứ giác $PDQK$ là hình bình hành nên E là trung điểm của PQ cũng là trung điểm của DK . Vậy D, E, K thẳng hàng (điều phải chứng minh).

□

Bài 15. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
3. Gọi I là giao điểm của đoạn OA với đường tròn (O) . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
4. Cho $OB = 3$ cm, $OA = 5$ cm. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải.



1. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) (tại B, C) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ \Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO .

2. Vì $\begin{cases} OB \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OB \parallel CH$ (1). Tương tự $OC \parallel BH$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $BOCH$ là hình bình hành. Mà $OB = OC$ nên $BOCH$ là hình thoi.

3. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$. Vì I là giao điểm của đoạn AO với (O) nên I là điểm chính giữa của cung (nhỏ) $\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{IBC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC}$ (3) (tính chất góc nội tiếp).

Vì I là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ và AB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ABI} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC}$ (4).

Từ (3) và (4) ta suy ra BI là tia phân giác $\widehat{ABC}$, do vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

4. Gọi K là giao điểm của OA và $BC \Rightarrow K$ là trung điểm của BC và $BK \perp AO$.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác AOB vuông tại B : $AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = 4$ cm.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác AOB vuông tại B :

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{25}{144} \Rightarrow BK = \frac{12}{5} \Rightarrow AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \frac{16}{5} \text{ cm.}$$

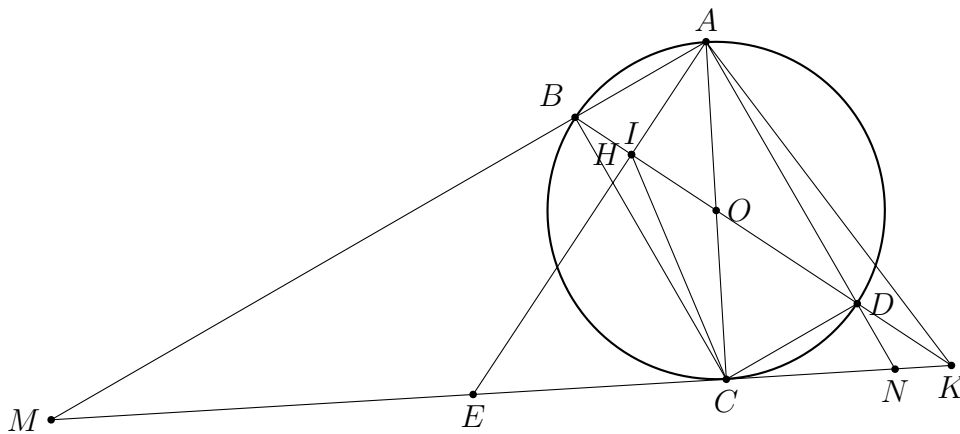
$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot BC = \frac{192}{25} \text{ cm}^2.$$

□

Bài 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại điểm C cắt các đường thẳng AB và AD theo thứ tự tại M, N . Dựng AH vuông góc với BD tại điểm H ; K là giao điểm của hai đường thẳng MN và BD .

1. Chứng minh tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh rằng: $AD \cdot AN = AB \cdot AM$.
3. Gọi E là trung điểm của MN . Chứng minh ba điểm A, H, E thẳng hàng.
4. Cho $AB = 6$ cm và $AD = 8$ cm. Tính độ dài đoạn MN .

Lời giải.



1. Xét tứ giác $AHCK$ ta có $\widehat{AHK} = 90^\circ$,
 CK là tiếp tuyến của đường tròn O và AC là đường kính nên $AC \perp CK \Rightarrow \widehat{ACK} = 90^\circ$.
 Vậy H và C cùng nhìn AK dưới một góc vuông nên tứ giác $AHCK$ nội tiếp một đường tròn.
2. Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$,
 đồng thời $\widehat{AMN} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AMN}$.
 Xét hai tam giác $\triangle AMN$ và $\triangle ADB$ có $\widehat{DAB} = \widehat{MAN} = 90^\circ$ và $\widehat{ADB} = \widehat{AMN}$,
 Nên hai tam giác $\triangle AMN$ và $\triangle ADB$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot AN = AB \cdot AM$.

3. Giả sử AE cắt BD tại I , ta chứng minh H trùng với I . Thật vậy
Ta có $\triangle AMN$ vuông tại A có E là trung điểm của cạnh $MN \Rightarrow \triangle AEN$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{ENA}$.
Theo chứng minh trên ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AMN}$.
Do đó $\widehat{EAN} + \widehat{ADB} = \widehat{AMN} + \widehat{ENA} = 90^\circ$ hay $\widehat{AID} = 90^\circ$.
Suy ra $AI \perp BD$ tại I , do đó H và I trùng nhau hay A, H, E thẳng hàng.
4. Đặt $AN = x > 0$ và $AM = y > 0$, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$.
Ta có $\begin{cases} AD \cdot AN = AB \cdot AM \\ \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AC^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{2} \\ y = \frac{50}{3} \end{cases}$.
Mặt khác $AM \cdot AN = AC \cdot MN \Rightarrow MN = \frac{125}{6}(cm)$.

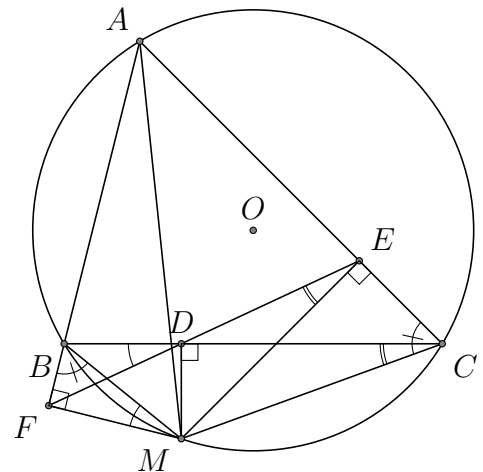
□

Bài 17. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm (O) , M là một điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

- Bốn điểm M, D, B, F thuộc một đường tròn và bốn điểm M, D, E, C thuộc một đường tròn;
- Ba điểm D, E, F thẳng hàng;
- $\frac{BC}{MD} = \frac{CA}{ME} + \frac{AB}{MF}$.

Lời giải.

1. Ta có: D và F lần lượt là hình chiếu của M lên BC và AB .
 $\Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{BFM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow DMFB$ nội tiếp đường tròn.
 $\Rightarrow M, D, B, F$ thuộc một đường tròn.
Ta có: D và E lần lượt là hình chiếu của M lên BC và AC .
 $\Rightarrow \widehat{MDC} = 90^\circ = \widehat{MEC}$
 $\Rightarrow MDEC$ nội tiếp đường tròn.
 $\Rightarrow M, D, E, C$ thuộc một đường tròn.



- b) Ta có: $\widehat{FMB} = \widehat{FDB}$ (do $MDBF$ nội tiếp). (i)
 $\widehat{CME} = \widehat{CDE}$ (do $DECM$ nội tiếp). (ii)
Mặt khác, tứ giác $ACMB$ nội tiếp (O) nên $\widehat{FBM} = \widehat{ACM}$. (1)
Xét hai tam giác vuông FBM và ECM , ta có: $\begin{cases} \widehat{FBM} + \widehat{FMB} = 90^\circ \\ \widehat{CME} + \widehat{ECM} = 90^\circ \end{cases}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FMB} = \widehat{CME}$. (iii)
Từ (i), (ii) và (iii) suy ra $\widehat{FDB} = \widehat{CDE}$.
 $\Rightarrow E, F, D$ thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có:

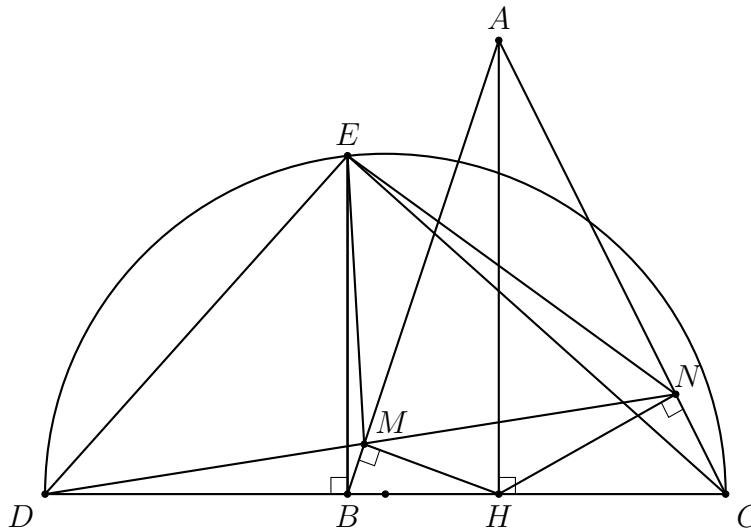
$$\begin{aligned}
 \frac{AC}{ME} + \frac{AB}{MF} &= \frac{AE - EC}{ME} + \frac{AF + FB}{MF} \\
 &= \frac{AE}{ME} - \frac{EC}{ME} + \frac{AF}{MF} + \frac{FB}{MF} \\
 &= \tan \widehat{AME} - \tan \widehat{CME} + \tan \widehat{AMF} + \tan \widehat{FMB} \\
 &= \tan \widehat{AME} + \tan \widehat{AMF} \text{ (cmt câu b)} \\
 &= \tan \widehat{BMD} + \tan \widehat{MDC} \text{ (do tứ giác } ABMC \text{ nội tiếp)} \\
 &= \frac{BD}{MD} + \frac{CD}{MD} \\
 &= \frac{BC}{MD} \text{ (đpcm)}.
 \end{aligned}$$

□

Bài 18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), dựng AH vuông góc với BC tại điểm H . Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm H trên AB và AC . Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm D . Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính CD . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt nửa đường tròn trên tại điểm E .

1. Chứng minh rằng tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{EBM} = \widehat{DNH}$.
3. Chứng minh rằng $DM \cdot DN = DB \cdot DC$.
4. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE . Chứng minh rằng $OE \perp DE$.

Lời giải.



1. Xét tứ giác $AMHN$ có
 $\widehat{AMH} = 90^\circ$ (gt)
 $\widehat{ANH} = 90^\circ$ (gt)
suy ra $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 180^\circ$.
Mà hai góc ở vị trí đối nhau nên $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có $\begin{cases} EB \perp DC \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow EB \parallel AH$, suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{BAH}$ (1) (so le trong).

Tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên ta có $\widehat{MAH} = \widehat{MNH}$ (2) (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EBM} = \widehat{DNH}$.

3. Ta có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DMB} = \widehat{AMN} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{AMN} = \widehat{AHN} \text{ (do tứ giác } AMHN \text{ nội tiếp)} \\ \widehat{AHN} = \widehat{NCH} \text{ (do cùng phụ với góc } \widehat{NHC}) \end{array} \right\} \text{ suy ra } \widehat{DMB} = \widehat{NCH}.$$

Xét tam giác DMB và DCN có $\widehat{DMB} = \widehat{NCD}$ và chung góc $\widehat{NDC}$, suy ra $\triangle DMB$ đồng dạng với $\triangle DCN$ theo trường hợp góc-góc. Từ đó suy ra $\frac{DM}{DC} = \frac{DB}{DN} \Rightarrow DM \cdot DN = DB \cdot DC$.

4. Ta có $\triangle DEC$ vuông tại E , EB là đường cao nên $DE^2 = DB \cdot DC$ mặt khác $DM \cdot DN = DB \cdot DC$ suy ra $DE^2 = DM \cdot DN \Rightarrow \frac{DM}{DE} = \frac{DE}{DN}$.

Từ đó suy ra $\triangle DEM$ đồng dạng với $\triangle DNE$ do $\frac{DM}{DE} = \frac{DE}{DN}$ và chung góc $\widehat{NDE}$.

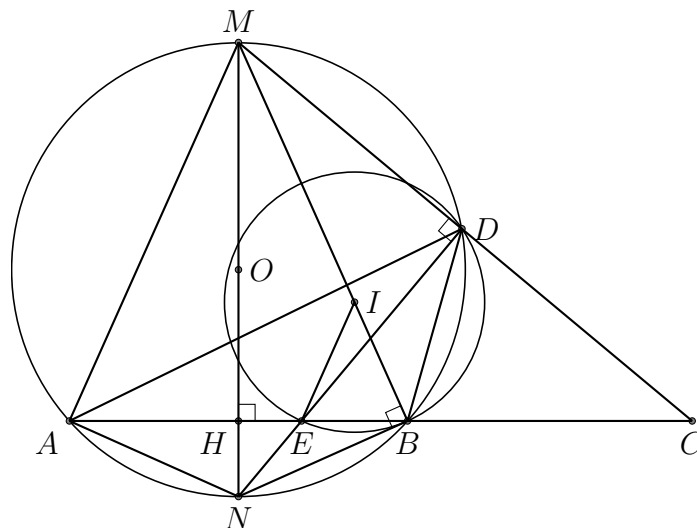
Suy ra $\widehat{DEM} = \widehat{ENM}$ suy ra DE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE tại E hay $DE \perp OE$.

□

Bài 19. Tam giác AMB cân tại M nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Kẻ MH vuông góc AB ($H \in AB$), MH cắt đường tròn tại N . Biết $MA = 10$ cm, $AB = 12$ cm.

- Tính MH và bán kính R của đường tròn.
- Trên tia đối tia BA lấy điểm C . Tia MC cắt đường tròn tại D , ND cắt AB tại E . Chứng minh tứ giác $MDEH$ nội tiếp và chứng minh các hệ thức sau: $NB^2 = NE \cdot ND$ và $AC \cdot BE = BC \cdot AE$.
- Chứng minh NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .

Lời giải.



- Theo tính chất đường kính và dây cung suy ra H là trung điểm AB và $AH = 6$ cm.
 $\triangle AMH$ vuông tại $H \Rightarrow MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm.
 $\triangle AMN$ vuông tại A , đường cao AH , do đó $AH^2 = HM \cdot HN \Rightarrow HN = \frac{AH^2}{MH} = \frac{36}{8} = 4,5$ cm.
 Bán kính $R = \frac{MN}{2} = \frac{MH + HN}{2} = \frac{8 + 4,5}{2} = 6,25$ cm.
- $\widehat{MDN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{MHE} = 90^\circ$ ($MH \perp AB$). Từ đó suy ra $\widehat{MDE} + \widehat{MHE} = 180^\circ$, do đó tứ giác $MDEH$ nội tiếp.
 Xét các tam giác $\triangle NBE$ và $\triangle NDB$ có góc N chung, $\widehat{NBE} = \widehat{NDB}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau là cung NA, NB).
 Suy ra $\triangle NBE \sim \triangle NDB$, do đó $\frac{NB}{ND} = \frac{NE}{NB} \Rightarrow NB^2 = NE \cdot ND$.
 Ta có cung NA bằng cung NB (tính chất đường kính và dây cung), suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{EDB} \Rightarrow DE$ là phân giác trong của $\triangle ABD$.
 Vì $ED \perp DC \Rightarrow DC$ là phân giác ngoài của $\triangle ABD$.
 Từ đó suy ra: $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow AC \cdot BE = BC \cdot AE$.
- Kẻ $EI \parallel AM$ ($I \in BM$) $\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle EIB \Rightarrow \triangle EIB$ cân tại $I \Rightarrow IE = IB$.
 Gọi (O') là đường tròn tâm I ngoại tiếp $\triangle EBD'$. Ta có $NB \perp BM$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O), từ đó suy ra $BN \perp BI \Rightarrow BN$ là tiếp tuyến đường tròn $(O') \Rightarrow \widehat{EBN} = \widehat{ED'B}$ (cùng chắn cung BE).
 Mặt khác trên đường tròn (O) , $\widehat{EBN} = \widehat{EDB}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau NA, NB) $\Rightarrow D$ nằm trên đường tròn (O') .
 Vậy NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .

□

Bài 20. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Gọi (O) là một đường tròn thay đổi luôn đi qua B và C (tâm O không thuộc đường thẳng BC). Từ A kẻ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn (O) (D, E là các tiếp điểm và D, O nằm cùng trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC). Gọi K, H lần lượt là trung điểm của BC và DE .

- Chứng minh $AE^2 = AB \cdot AC$.
- Trên DE lấy điểm M sao cho BM song song với AD . Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp đường tròn và MK song song với DC .
- Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK thuộc một đường thẳng cố định.

 **Lời giải.**

