

Chương 1

Căn bậc hai - Căn bậc ba

§1 Căn bậc hai

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1.

1. Căn bậc hai của số thực a là số x sao cho $x^2 = a$.

- ☑ Mỗi số dương a đều có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau, số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ còn số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
- ☑ Số 0 có đúng một căn bậc hai chính là số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.
- ☑ Số âm không có căn bậc hai.

2. Với mỗi số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là **căn bậc hai số học** của a .

⚠ 1. Chú ý

- ☑ Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.
- ☑ $\sqrt{a}$ xác định khi và chỉ khi $a \geq 0$.

Định lý 1. Với hai số a, b không âm ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2 Các dạng toán

Dạng 1. Tìm căn bậc hai hoặc căn bậc hai số học của một số

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa hoặc máy tính cầm tay.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

 **Ví dụ 1.** Tính căn bậc hai của các số sau

1. 1

3. $\frac{16}{9}$

2. 9

4. 0,36

 Lời giải.

Ta có

1. Căn bậc hai của số 1 là ± 1 vì $1^2 = (-1)^2 = 1$.
2. Căn bậc hai của số 9 là ± 3 vì $3^2 = (-3)^2 = 9$.
3. Căn bậc hai của số $\frac{16}{9}$ là $\pm \frac{4}{3}$ vì $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.
4. Căn bậc hai của số 0,36 là $\pm 0,6$ vì $(0,6)^2 = (-0,6)^2 = 0,36$.

 **2.** Học sinh có thể sử dụng máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

□

 **Ví dụ 2.** Tính căn bậc hai số học của các số sau

- | | |
|---------|------------------|
| 1. 0,01 | 3. 0,25 |
| 2. 0,04 | 4. $\frac{4}{9}$ |

 Lời giải.

Ta có

- | | |
|--|---|
| 1. $\sqrt{0,01} = 0,1$ vì $0,1^2 = 0,01$. | 3. $\sqrt{0,25} = 0,5$ vì $0,5^2 = 0,25$. |
| 2. $\sqrt{0,04} = 0,2$ vì $0,2^2 = 0,04$. | 4. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ vì $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. |

 **3.** Học sinh có thể sử dụng máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

□

 **Ví dụ 3.** Tính tổng $S = \sqrt{0,49} + \sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{25}{4}}$.

 Lời giải.

Ta có $S = 0,7 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{22}{15}$

□

 **4.** Học sinh có thể sử dụng máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

Dạng 2. So sánh các căn bậc hai

Ta thường sử dụng tính chất cơ bản của bất đẳng thức, cụ thể:

☑ Nếu $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$ thì $a + c > b + d$.

☑ Nếu $\begin{cases} a > b \\ c > 0 \end{cases}$ thì $ac > bc$.

☑ Nếu $\begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases}$ thì $ac < bc$.

☑ Nếu $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases}$ thì $ac > bd$.

☑ Với hai số a, b không âm ta có $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

✦✦✦ BÀI TẬP MẪU ✦✦✦

📖 **Ví dụ 1.** So sánh các số sau:

1. $\sqrt{26}$ và 5.

3. $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ và $\sqrt{3} + 5$.

2. $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7.

4. $-5\sqrt{35}$ và -30 .

✍️ Lời giải.

1. Ta có $26 > 25 \Rightarrow \sqrt{26} > \sqrt{25}$ hay $\sqrt{26} > 5$.

2. Ta có $\begin{cases} 7 < 9 \\ 15 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} < \sqrt{9} \\ \sqrt{15} < \sqrt{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} < 3 \\ \sqrt{15} < 4 \end{cases}$
 Như vậy $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 3 + 4 = 7$.

3. Ta có $\begin{cases} 2 < 3 \\ 11 < 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \sqrt{11} < \sqrt{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \sqrt{11} < 5 \end{cases}$
 Như vậy $\sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{3} + 5$.

4. Ta có $35 < 36 \Rightarrow \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6 \Rightarrow -5\sqrt{35} > (-5) \cdot 6 \Rightarrow -5\sqrt{35} > -30$.

□

📖 **Ví dụ 2.** Cho $a > 0$. Chứng minh rằng

1. Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$.

2. Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

✍️ Lời giải.

1. Ta có tính chất, nếu $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, do đó từ giả thiết $a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{1} = 1$.
 Nhân cả hai vế với $\sqrt{a} > 0$ ta được $a > \sqrt{a}$.

2. Tương tự như trên ta có $a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{1} = 1$.
 Nhân cả hai vế với $\sqrt{a} > 0$ ta được $a < \sqrt{a}$.

Dạng 3. Tìm x

Phương pháp giải: Thường biến đổi biểu thức về dạng $\sqrt{f(x)} = a$. (*)

- ☑ Nếu $a < 0$ thì (*) vô nghiệm.
- ☑ Nếu $a = 0$ thì (*) $\Leftrightarrow f(x) = 0$.
- ☑ Nếu $a > 0$ thì (*) $\Leftrightarrow f(x) = a^2$.

⚠ 5. Nếu không biến đổi tương đương được các phương trình thì có thể dùng phép biến đổi suy ra sau đó phải thử lại.

BÀI TẬP MẪU

📖 Ví dụ 1. Tìm x thỏa mãn:

1. $\sqrt{x} = -2018$.

2. $\sqrt{x+1} - 1 = 2$.

✍ Lời giải.

1. Vì $\sqrt{x} \geq 0$ và $-2018 < 0$ nên không tồn tại x thỏa mãn.
2. Điều kiện $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.
 Khi đó $\sqrt{x+1} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 8$ (thỏa mãn điều kiện).
 Vậy $x = 8$.

📖 Ví dụ 2. Tìm x thỏa mãn

1. $\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4$.

2. $3 - \sqrt{x^2 + 5} = 4$.

✍ Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 5x + 20 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} + \frac{55}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{55}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4 &\Leftrightarrow x^2 + 5x + 20 = 16 \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = -1$ hoặc $x = -4$.

2. Điều kiện $x^2 + 5 \geq 0$ (luôn đúng). Ta có

$$3 - \sqrt{x^2 + 5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 3 - 4 = -1.$$

Vì $\sqrt{x^2 + 5} > 0$ còn $-1 < 0$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

Bài 1. Tìm căn bậc hai số học và các bậc hai của các số sau:

1. 0,25.
2. 81.
3. 169.
4. 2,25.

Lời giải.

1. Vì $0,25 = 0,5^2$ nên căn bậc hai số học của 0,25 là 0,5 và căn bậc hai của 0,25 là $\pm 0,5$.
2. Vì $81 = 9^2$ nên căn bậc hai số học của 81 là 9 và căn bậc hai của 81 là ± 9 .
3. Vì $169 = 13^2$ nên căn bậc hai số học của 169 là 13 và căn bậc hai của 169 là ± 13 .
4. Vì $2,25 = 1,5^2$ nên căn bậc hai số học của 2,25 là 1,5 và căn bậc hai của 2,25 là $\pm 1,5$.

□

Bài 2. Rút gọn biểu thức:

1. $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}$.
2. $B = \sqrt{147} + \sqrt{54} - 4\sqrt{27}$.
3. $C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$.
4. $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$.

Lời giải.

1. $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48} = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
2. $B = \sqrt{147} + \sqrt{54} - 4\sqrt{27} = 7\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 0$.
3. $C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2 = 12\sqrt{2} - 6 + 3(1 - 4\sqrt{2} + 8) = 12\sqrt{2} - 6 + 27 - 12\sqrt{2} = 21$.
4. $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605} = 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 11\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

□

Bài 3. So sánh các số sau:

1. 6 và $\sqrt{41}$.
2. $2\sqrt{27}$ và $\sqrt{147}$.
3. $-3\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$.
4. $2\sqrt{2} - 1$ và 2.

Lời giải.

1. Ta có $6 = \sqrt{36}$. Mà $36 < 41$ nên $6 < \sqrt{41}$.
2. Ta có $2\sqrt{27} = \sqrt{108}$. Mà $108 < 147$ nên $2\sqrt{27} < \sqrt{147}$.
3. Ta có $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ và $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$. Mà $45 < 75$ nên $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3} \Rightarrow -3\sqrt{5} > -5\sqrt{3}$.
4. Ta có $2\sqrt{2} - 1 = \sqrt{8} - 1$ và $2 = 3 - 1 = \sqrt{9} - 1$. Mà $8 < 9$ nên $2\sqrt{2} - 1 < 2$.

□

Bài 4. Tìm số thực x thỏa mãn:

1. $\sqrt{-2x^2 - 9} = 2$.
2. $\sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0$.
3. $\sqrt{3x - 1} = 4$.
4. $\sqrt{-3x + 4} = 12$.
5. $\sqrt{(\sqrt{x} - 7)(\sqrt{x} + 7)} = 2$.
6. $\sqrt{9(x - 1)} - 19 = 2$.

 Lời giải.

1. Điều kiện xác định $-2x^2 - 9 \geq 0$ (vô lí).
Vậy không tồn tại x thỏa mãn đề bài.
2. Điều kiện xác định $x^2 + 1 \geq 0$ (luôn đúng).
Ta có $\sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -2$ (vô lí vì $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ với mọi x).
Vậy không tồn tại x thỏa mãn đề bài.
3. Điều kiện xác định $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.
Ta có $\sqrt{3x - 1} = 4 \Leftrightarrow 3x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{17}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x = \frac{17}{3}$.
4. Điều kiện xác định $-3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$.
Ta có $\sqrt{-3x + 4} = 12 \Leftrightarrow -3x + 4 = 144 \Leftrightarrow x = -\frac{140}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x = -\frac{140}{3}$.
5. Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x} - 7)(\sqrt{x} + 7) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 49 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 49$.
Ta có $\sqrt{(\sqrt{x} - 7)(\sqrt{x} + 7)} = 2 \Leftrightarrow x - 49 = 4 \Leftrightarrow x = 53$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x = 53$.
6. Điều kiện xác định $9(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Ta có $\sqrt{9(x - 1)} - 19 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9(x - 1)} = 21 \Leftrightarrow 9(x - 1) = 441 \Leftrightarrow x - 1 = 49 \Leftrightarrow x = 50$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x = 50$.

□

 **Bài 5.** (*) Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

 Lời giải.

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ. Suy ra $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

$$\text{Khi đó } \sqrt{2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2. \quad (1)$$

Do $2n^2 : 2$ nên $m^2 : 2 \Rightarrow m : 2 \Rightarrow m = 2m_1, m_1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m^2 = 4m_1^2$.

Thay vào (1) suy ra $2n^2 = 4m_1^2 \Leftrightarrow n^2 = 2m_1^2 : 2 \Rightarrow n^2 : 2 \Rightarrow n : 2$.

Do đó m, n cùng chia hết cho 2 nên phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản, điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên.

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

□

 **Bài 6.** (*) Chứng minh rằng $\sqrt{5}$ là một số vô tỉ.

 **Lời giải.**

Giả sử $\sqrt{5}$ là số hữu tỉ. Suy ra $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

$$\text{Khi đó } \sqrt{5} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 5 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = 5n^2. \quad (1)$$

Do $5n^2 : 5$ nên $m^2 : 5 \Rightarrow m : 5 \Rightarrow m = 5m_1, m_1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m^2 = 25m_1^2$.

Thay vào (1) suy ra $5n^2 = 25m_1^2 \Leftrightarrow n^2 = 5m_1^2 : 5 \Rightarrow n^2 : 5 \Rightarrow n : 5$.

Do đó m, n cùng chia hết cho 5 nên phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản, điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên.

Vậy $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

□

§2 Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Ta có $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$

 **6.** Cần phân biệt $\sqrt{A^2}$ với $(\sqrt{A})^2$. Khi viết $\sqrt{A^2}$ thì A có thể là số âm. Khi viết $(\sqrt{A})^2$ thì A phải là số không âm.

2. Điều kiện xác định (hay có nghĩa) của $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

3. Cách giải các bất phương trình dạng $|x| \leq a$ và $|x| \geq a$ với $a > 0$ như sau

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\Leftrightarrow -a \leq x \leq a. \\ |x| \geq a &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a. \end{cases} \end{aligned}$$

2 Các dạng toán

Dạng 4. Tìm điều kiện để $\sqrt{A}$ xác định

Phương pháp giải

☒ $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$.

☒ $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$.

Kiến thức bổ sung: Chú ý rằng với a là số dương ta luôn có:

$$\begin{aligned} x^2 \leq a^2 &\Leftrightarrow -a \leq x \leq a. \\ x^2 \geq a^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a. \end{cases} \end{aligned}$$

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x để căn thức $\sqrt{5 - 2x}$ có nghĩa.

 **Lời giải.**

$\sqrt{5 - 2x}$ có nghĩa khi $5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$. □

Ví dụ 2. Tìm x để căn thức $\sqrt{\frac{1}{x^2 - 4x + 4}}$ có nghĩa.

Lời giải.

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 - 4x + 4}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2. \quad \square$$

Ví dụ 3. Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{25 - x^2}$ có nghĩa?

Lời giải.

$$\sqrt{25 - x^2} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow 25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \geq -25 \Leftrightarrow x^2 \leq 25 \Leftrightarrow |x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5. \quad \square$$

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của x để biểu thức $\sqrt{\frac{1}{x^2 - 100}}$ có nghĩa.

Lời giải.

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 - 100}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow x^2 - 100 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 100 \Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x < -10 \end{cases}. \quad \square$$

Ví dụ 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$ có nghĩa?

Lời giải.

$$M \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của x để biểu thức M có nghĩa. $\square$

Dạng 5. Rút gọn biểu thức dạng $\sqrt{A^2}$

Đưa biểu thức dưới căn về dạng bình phương.

$$\sqrt{A^2} = |A|.$$

! 7. Điều kiện xác định của $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

2. $(\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + 2\sqrt{3})^2} + 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 1 + 2\sqrt{3} + 2(2 - \sqrt{3}) = 5.$

2. $(\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} = (\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = (\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 4. \quad \square$

 **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau

1. $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$ với $a > b > 0$.

2. $\frac{2}{x-1} \cdot \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{4x^2}}$ với $0 < x < 1$.

 **Lời giải.**

1. $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

2. $\frac{2}{x-1} \cdot \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{4x^2}} = \frac{2}{x-1} \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(2x)^2}} = \frac{2}{x-1} \frac{|x-1|}{2|x|}.$

Do $0 < x < 1$ nên $|x-1| = 1-x$; $|x| = x$. Suy ra $\frac{2}{x-1} \frac{|x-1|}{2|x|} = -\frac{1}{x}.$

□

 **Ví dụ 3.** Rút gọn các biểu thức sau:

1. $\sqrt{x^4-4x^2+4}-x^2.$

2. $\frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{x+1}$, với $x > 1$.

 **Lời giải.**

1. $\sqrt{x^4+4x^2+4}-x^2 = \sqrt{(x^2+2)^2}-x^2 = x^2+2-x^2 = 2, (x^2+2 > 0).$

2. Vì $x > 1$ nên $\frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1.$

□

3 Luyện tập

 **Bài 1.** Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

1. $\sqrt{-3x}.$

2. $\sqrt{2x-4}.$

3. $\sqrt{7-6x}.$

4. $\sqrt{-3x+2}.$

 **Lời giải.**

1. $\sqrt{-3x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$

2. $\sqrt{2x-4}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2.$

3. $\sqrt{7-6x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 7-6x \geq 0 \Leftrightarrow 6x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{6}.$

4. $\sqrt{-3x+2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}.$

□

 **Bài 2.** Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

$$1. \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}. \quad 2. \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}. \quad 3. \sqrt{\frac{1}{3-2x}}. \quad 4. \sqrt{\frac{-2}{x+1}}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

$$2. \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

$$3. \sqrt{\frac{1}{3-2x}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \frac{1}{3-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

$$4. \sqrt{\frac{-2}{x+1}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \frac{-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

□

 **Bài 3.** (*) Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

$$1. \sqrt{\frac{4x^2}{3x-1}}. \quad 2. \sqrt{\frac{2-3x}{4x^2}}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \sqrt{\frac{4x^2}{3x-1}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \frac{4x^2}{3x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x = 0. \end{cases}$$

$$2. \sqrt{\frac{2-3x}{4x^2}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \frac{2-3x}{4x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

□

 **Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}.$$

$$2. \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}.$$

$$3. (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}}.$$

$$4. \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}.$$

$$5. \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

$$6. \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

 Lời giải.

1. $\sqrt{9+2-2\cdot 3\cdot \sqrt{2}}-\sqrt{9+2+2\cdot 3\cdot \sqrt{2}}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3-\sqrt{2}-3-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}.$
2. $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{9+5-2\cdot 3\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1.$
3. $(2+\sqrt{7})\sqrt{7+4-2\cdot 2\sqrt{7}}=(2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=7-4=3.$
4. $3+\sqrt{2}+\sqrt{4+2-2\cdot 2\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=5.$
5. $\sqrt{9-3\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$
 $=\sqrt{6+3-2\sqrt{6}\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2}$
 $=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}-\frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{2}$
 $=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
 $=0.$
6. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$
 $=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3-\sqrt{3})+(2\sqrt{2}+\sqrt{6})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$
 $=\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}-3\sqrt{6}+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}+2\sqrt{6}+3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=3\sqrt{2}.$

□

 Bài 5. Cho các biểu thức

$$A=\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$$

$$B=a^4+20a^3+100a^2$$

1. Rút gọn A.
2. Tìm a để $A+B=0$.

 Lời giải.

1. $A=\sqrt{20a+92+\sqrt{(a^2+8)^2}}=\sqrt{(a+10)^2}=|a+10|.$
2. $A+B=|a+10|+a^2\cdot (a+10)^2=0\Leftrightarrow a=-10.$

□

 Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}.$
2. $\sqrt{12+3\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}-2\sqrt{3}.$

 Lời giải.

$$1. \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 4 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 3.$$

$$\begin{aligned} 2. \sqrt{12 + 3\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} &= \sqrt{12 + 3\sqrt{3}} + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - 2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{12 + 3\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} = 1. \end{aligned}$$

□

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \frac{1}{2}\sqrt{12 - 8\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}. \quad 2. \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \frac{1}{2}\sqrt{12 - 8\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} - 4\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2}|2\sqrt{2} - 2| + |3 - 2\sqrt{2}| - 4\sqrt{2} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2} - 2) + 3 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -5\sqrt{2} + 2. \end{aligned}$$

$$2. \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6} + 2)^2} = \sqrt{6} + 2.$$

□

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1} \text{ với } x > -\frac{1}{2}. \quad 2. 9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2} \text{ với } x < 2.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1} = \frac{\sqrt{(2x + 1)^2}}{(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{|2x + 1|}{(2x + 1)(2x - 1)}. \\ \text{Do } x > -\frac{1}{2} \text{ nên } 2x + 1 > 0. \text{ Suy ra } A &= \frac{2x + 1}{(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{1}{2x - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. B &= 9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2} = 9 + x + \sqrt{(2 - x)^2} = 9 + x + |2 - x|. \\ \text{Do } x < 2 \text{ nên } 2 - x > 0. \text{ Suy ra } B &= 9 + x + 2 - x = 11. \end{aligned}$$

□

Bài 9. Tính

$$1. \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}. \quad 2. \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Lời giải.

$$1. \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1 + 3 - \sqrt{2} = 2.$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} - \sqrt{2(4 + \sqrt{15})} + \frac{6\sqrt{3}}{3} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} + 2\sqrt{3} = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

□

Bài 10. Giải phương trình

1. $\sqrt{x^2} = 1.$

2. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3.$

 **Lời giải.**

1. $\sqrt{x^2} = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

2. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)^2} = 3 \Leftrightarrow |2x - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \end{cases}$

□

§3 Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lý 2. Với hai số a và b không âm, ta có $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Hệ quả 1. Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

Hệ quả 2. Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

Hệ quả 3. Với hai biểu thức A và B không âm, ta có $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$. Đặc biệt, với biểu thức A không âm, ta có $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$.

2 Các dạng toán

Dạng 6. Khai phương một tích

Phương pháp giải

Áp dụng định lý: Với hai số a và b không âm, ta có $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

 **8.** Định lý trên có thể mở rộng cho tích của nhiều số không âm như sau:
Với $n \geq 2$ và các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ không âm, ta có $\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_n}$.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tính

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| 1. $\sqrt{27 \cdot 75}$; | 3. $\sqrt{160 \cdot 12,1}$; |
| 2. $\sqrt{200 \cdot 18}$; | 4. $\sqrt{3,6 \cdot 25,6}$. |

 **Lời giải.**

- $\sqrt{27 \cdot 75} = \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45.$
- $\sqrt{200 \cdot 18} = \sqrt{100 \cdot 4 \cdot 9} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 10 \cdot 2 \cdot 3 = 60.$
- $\sqrt{160 \cdot 12,1} = \sqrt{16 \cdot 100 \cdot 1,21} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{1,21} = 4 \cdot 10 \cdot 1,1 = 44.$
- $\sqrt{3,6 \cdot 25,6} = \sqrt{0,36 \cdot 100 \cdot 2,56} = \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{2,56} = 0,6 \cdot 10 \cdot 1,6 = 9,6.$

□

Ví dụ 2. 1. Cho a và b là các số âm. Chứng minh rằng $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

2. Áp dụng tính $\sqrt{(-81) \cdot (-36) \cdot 0,25}$.

Lời giải.

1. Ta có $\sqrt{ab} = \sqrt{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

2. $\sqrt{(-81) \cdot (-36) \cdot 0,25} = \sqrt{(-81) \cdot (-36)} \cdot \sqrt{0,25} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{0,25} = 9 \cdot 6 \cdot 0,5 = 27$.

□

Dạng 7. Nhân các căn bậc hai

Phương pháp giải

Áp dụng quy tắc: Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính

1. $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180}$;

3. $\sqrt{250} \cdot \sqrt{0,9}$;

2. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{105}$;

4. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{162}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180} = \sqrt{45 \cdot 180} = \sqrt{8100} = 90$.

2. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{175} = \sqrt{7 \cdot 175} = \sqrt{1225} = 35$.

3. $\sqrt{250} \cdot \sqrt{0,9} = \sqrt{250 \cdot 0,9} = \sqrt{225} = 15$.

4. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{162} = \sqrt{8 \cdot 162} = \sqrt{1296} = 36$.

□

Dạng 8. Rút gọn, tính giá trị biểu thức

Phương pháp giải

Kết hợp các hằng đẳng thức đáng nhớ và các quy tắc khai phương và nhân các căn bậc hai.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính

1. $\sqrt{10,6^2 - 5,6^2}$;

4. $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})$;

2. $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$;

5. $(\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}})^2$;

3. $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{26}}{2\sqrt{5} + \sqrt{52}}$;

6. $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

Lời giải.

$$1. \sqrt{5,3^2 - 2,8^2} = \sqrt{8,1 \cdot 2,5} = \sqrt{81 \cdot 100 \cdot 0,25} = 9 \cdot 10 \cdot 0,5 = 45.$$

$$2. \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} \\ = (3 + 2\sqrt{5}) + (2\sqrt{5} - 3) = 4\sqrt{5}.$$

$$3. \frac{\sqrt{10} + \sqrt{26}}{2\sqrt{5} + \sqrt{52}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{13})}{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{13})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 1 - (5 - 2\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} - 4.$$

$$5. \left(\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}}\right)^2 = 5 + \sqrt{21} + 2 \cdot \sqrt{5 + \sqrt{21}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{21}} + 5 - \sqrt{21} \\ = 10 + 2\sqrt{(5 + \sqrt{21})(5 - \sqrt{21})} \\ = 10 + 2\sqrt{4} = 14.$$

$$6. \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\ = \sqrt{2} + 1.$$

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức

$$1. A = \sqrt{(a-1)^2(2a+1)^2} \text{ với } a > 1;$$

$$2. B = \sqrt{(b-1)(b+7)+16} \text{ với } b < -3;$$

$$3. C = \sqrt{c^2 + 10c + 25} - \sqrt{c^2 - 10c + 5} \text{ với } -5 \leq c \leq 5;$$

$$4. D = \frac{1-d}{\sqrt{d^2-2d+1}} + \frac{\sqrt{d^2-4d+4}}{d-2} \text{ với } d > 2.$$

 **Lời giải.**

$$1. A = \sqrt{(a-1)^2} \cdot \sqrt{(2a+1)^2} = (a-1)(2a+1).$$

$$2. B = \sqrt{b^2 + 6b + 9} = \sqrt{(b+3)^2} = -(b+3).$$

$$3. C = \sqrt{(c+5)^2} - \sqrt{(c-5)^2} = (c+5) - (5-c) = 2c.$$

$$4. D = \frac{1-d}{\sqrt{(d-1)^2}} + \frac{\sqrt{(d-2)^2}}{d-2} = \frac{1-d}{d-1} + \frac{d-2}{d-2} = (-1) + 1 = 0.$$

□

Dạng 9. Phân tích biểu thức chứa căn thành nhân tử

Phương pháp giải

Kết hợp các hằng đẳng thức đáng nhớ và các quy tắc khai phương và nhân các căn bậc hai.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 **Ví dụ 1.** Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử

1. $A = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 4x}$ với $x > 4$;
2. $B = \sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x(x+2)+4}$ với $x > 2$;
3. $C = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x}$ với $x > 0$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} 1. A &= \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 4x} \\ &= \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+4} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-4} \\ &= \sqrt{x-4} (\sqrt{x+4} + \sqrt{x}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. B &= \sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x(x+2)+4} \\ &= \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 4} \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 4} (\sqrt{x-2} + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. C &= \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x} \\ &= \sqrt{(2x+1)^2} - \sqrt{4x(x+1)} \\ &= 2x+1 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} \\ &= (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^2. \end{aligned}$$

□

🔗 **Dạng 10. Giải phương trình**

Phương pháp giải

- ☑ Xác định điều kiện phương trình.
- ☑ Dùng các hằng đẳng thức và tính chất của dấu giá trị tuyệt đối.
- ☑ Phân tích đa thức thành nhân tử.

Một số công thức cần lưu ý.

☑ $\sqrt{A^2} = |A|.$

☑ $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B.$

☑ $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hoặc } B \geq 0) \\ A = B. \end{cases}$

☑ $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

☑ $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0. \end{cases}$

☑ $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B. \end{cases}$

☑ $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hoặc } A = -B. \end{cases}$

☑ $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ hoặc } A = -B.$

☑ $|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0. \end{cases}$

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{(x-1)^2} = 3-x;$

3. $\sqrt{x^2-4x+3} = x-3;$

2. $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x};$

4. $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0.$

 **Lời giải.**

1. $\sqrt{(x-1)^2} = 3-x \Leftrightarrow |x-1| = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \begin{cases} x-1 = 3-x & \Leftrightarrow x=2. \\ x-1 = -(3-x) \end{cases} \end{cases}$

2. $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2x+5 = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$

3. $\sqrt{x^2-4x+3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2-4x+3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

4. $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 = 0 \\ x^2+4x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-2) = 0 \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$

□

3

Luyện tập **Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147};$

4. $\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}};$

2. $(\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11};$

5. $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}};$

3. $\sqrt{24} - 6\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$

6. $(2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}};$

7. $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}};$

8. $\sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}.$

 **Lời giải.**

1. $\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147} = 4\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \frac{1}{7} \cdot 7\sqrt{3}$
 $= \sqrt{3} \left(4 - 2 \cdot 5 + 6 - \frac{1}{7} \cdot 7 \right) = -\sqrt{3}.$

2. $(\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11} = (2\sqrt{11} + \sqrt{11})\sqrt{11} = 3\sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 3 \cdot 11 = 33.$

3. $\sqrt{24} - 6\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0.$

$$\begin{aligned} 4. \quad \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{9 + 2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{9 + 2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} \\ &= 3 - \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} &= \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} + \sqrt{9 + 5 - 2 \cdot 3\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5} - 2 + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad (2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} &= (2 + \sqrt{7})\sqrt{7 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{7}} \\ &= (2 + \sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} \\ &= (\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2) = 7 - 4 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} &= 3 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= 3 + \sqrt{2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} \\ &= 3 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad \sqrt{9 - 3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6 + 3 - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{3 + 2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 0. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}, \quad (x \leq 3). & 3. \quad C &= \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2}, \quad (-2 \leq x \leq 0). \\ 2. \quad B &= |x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}, \quad (x < 2). & 4. \quad D &= 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}. \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x + 3 + |x - 3| = x + 3 + (3 - x) = 6. \\ 2. \quad B &= |x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} = -(x - 2) + \frac{|x - 2|}{x - 2} = -x + 2 + \frac{2 - x}{x - 2} = -x + 1. \\ 3. \quad C &= \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2} = |x + 2| + |x| = x + 2 - x = 2. \\ 4. \quad D &= 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{|x - 5|}{x - 5} \end{aligned}$$

✓ Với $x \geq 5$ thì $D = 2x - 1 - \frac{x-5}{x-5} = 2x - 1 - 1 = 2x - 2$.

✓ Với $x < 5$ thì $D = 2x - 1 - \frac{-(x-5)}{x-5} = 2x - 1 + 1 = 2x$.

□

 **Bài 3.** Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{1 - 12x + 36x^2} = 5$.

3. $|3x + 1| = |x + 1|$.

2. $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$.

4. $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$.

 **Lời giải.**

1. $\sqrt{1 - 12x + 36x^2} = 5 \Leftrightarrow |1 - 6x| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 6x = 5 \\ 1 - 6x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = 1 \end{cases}$.

2. $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

3. $|3x + 1| = |x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = x + 1 \\ 3x + 1 = -(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

4. $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$.

□

§4 Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lý 3. Với $A \geq 0, B > 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

2 Các dạng toán

Dạng 11. Khai phương một thương

Quy tắc. Muốn khai phương một thương $\frac{A}{B}$ của hai biểu thức $A \geq 0, B > 0$, ta có thể khai phương lần lượt biểu thức bị chia A và biểu thức chia B . Sau đó lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

Ví dụ 1. Tính:

$$1. A = \sqrt{\frac{49}{81}};$$

$$2. B = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

$$1. \text{ Ta có } A = \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}.$$

2. Ta có

$$B = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức:

$$1. A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}}, \text{ với } b > 0;$$

$$2. B = b^5 \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 9}{b^8}}.$$

Lời giải.

1. Ta sử dụng quy tắc nhân hai căn bậc hai rồi biến đổi tiếp

$$A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^8}{b^4}} = \frac{\sqrt{a^8}}{\sqrt{b^4}} = \frac{a^4}{b^2}.$$

2. Ta biến đổi

$$B = b^5 \cdot \sqrt{\frac{(a+3)^2}{b^8}} = b^5 \cdot \frac{\sqrt{(a+3)^2}}{\sqrt{b^8}} = b^5 \cdot \frac{|a+3|}{b^4} = b \cdot |a+3|$$

$$= \begin{cases} b \cdot (a+3) & \text{nếu } a \geq -3 \\ -b \cdot (a+3) & \text{nếu } a < -3. \end{cases}$$

□

Dạng 12. Chia các căn bậc hai

Phương pháp giải:

Quy tắc chia hai căn thức bậc hai: Muốn chia căn bậc hai của biểu thức không âm A cho căn bậc hai của số dương B , ta có thể chia biểu thức A cho biểu thức B rồi lấy căn bậc hai của thương đó.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Thực hiện phép tính:

1. $A = \sqrt{98} : \sqrt{2};$

3. $C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}.$

2. $B = (\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3};$

Lời giải.

1. Ta có $A = \sqrt{98} : \sqrt{2} = \sqrt{98 : 2} = \sqrt{49} = 7.$

2. Ta có $B = (\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3} = \sqrt{48 : 3} - \sqrt{27 : 3} + \sqrt{3 : 3} = \sqrt{16} - \sqrt{9} + 1 = 2.$

3. $C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15} = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : (\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$

□

Dạng 13. Rút gọn, tính giá trị biểu thức

Ta sử dụng tính chất

$$\text{Với } a \geq 0 \text{ và } b > 0 \text{ thì ta có } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

 **9.** Chú ý khi giải bài dạng này phải xét trong điều kiện có nghĩa của biểu thức chứa căn.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

1. $\sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}}$ với $x \geq 1;$

2. $\sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}}$ với $a < 1.$

Lời giải.

1. Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $16 > 0$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{16}} = \frac{|x-1|}{4} \underset{\text{vì } x \geq 1}{=} \frac{x-1}{4}.$$

2. Vì $x^4 \geq 0$ và $(a-1)^2 > 0$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{(a-1)^2}} = \frac{x^2}{|a-1|} \underset{\text{vì } a < 1}{=} \frac{x^2}{1-a}.$$

□

 **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

1. $\frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}}$ với $x \geq 5$; 2. $\frac{\sqrt{(x-4)^4}}{\sqrt{9(x-4)^2}}$ với $x < 4$.

 **Lời giải.**

1. Với $x \geq 5$ ta có

$$\frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27(x-5)^2}{3}} = \sqrt{9(x-5)^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{(x-5)^2} = 3 \cdot |x-5| \underset{\text{vì } x \geq 5}{=} 3(x-5).$$

2. Với $x < 4$ ta có

$$\frac{\sqrt{(x-4)^4}}{\sqrt{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^4}{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^2}{9}} = \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|x-4|}{3} \underset{\text{vì } x < 4}{=} \frac{4-x}{3}.$$

□

 **Ví dụ 3.** Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho và tính giá trị của nó:

1. $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ với $x \geq 0$; tính giá trị tại $x = 4$.
2. $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$ với $x < 3$; tính giá trị tại $x = 0,5$.

 **Lời giải.**

1. Với $x \geq 0$ ta có

$$\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{|\sqrt{x}+1|} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}.$$

Thay $x = 4$ vào ta có

$$\frac{|\sqrt{4}-1|}{\sqrt{4}+1} = \frac{1}{3}.$$

2. Với $x < 3$ ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3} &= \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{\sqrt{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{(x-2)^2}{|3-x|} + \frac{x^2-1}{x-3} \\ &= \frac{x^2-4x+4}{3-x} - \frac{x^2-1}{3-x} \\ &= \frac{-4x+5}{3-x}.\end{aligned}$$

Thay $x = 0,5$ vào ta có

$$\frac{-4 \cdot 0,5 + 5}{3 - 0,5} = \frac{6}{5}.$$

□

Dạng 14. Giải phương trình

Tìm điều kiện của biểu thức có mặt trong phương trình.

Thu gọn trong điều kiện của biến sau đó giải phương trình.

 **10.** Chú ý khi giải bài dạng này phải xét điều kiện có nghĩa của biểu thức chứa căn và cuối cùng phải đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tìm x thỏa mãn điều kiện:

1. $\sqrt{\frac{(x-1)^4}{x^2-2x+1}} = 2;$

2. $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}} = 3.$

Lời giải.

1. Điều kiện là $\frac{(x-1)^4}{x^2-2x+1} \geq 0$. Vì $(x-1)^4 \geq 0$ với mọi x nên điều kiện là $x^2-2x+1 > 0$ hay $(x-1)^2 > 0$ nghĩa là $x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\sqrt{\frac{(x-1)^4}{x^2-2x+1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x-1)^4}{(x-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow |x-1| = 2.$$

Ta xét hai trường hợp:

TH1: $x-1=2$ hay $x=3$;

TH2: $x-1=-2$ hay $x=-1$.

Đối chiếu điều kiện ta nhận $x=3$ và $x=-1$.

2. Điều kiện là $x-1 \geq 0$ và $x^2-x > 0$. Vì $x^2-x = x(x-1)$ nên điều kiện sẽ là $x-1 > 0$ và $x > 0$. Từ đó suy ra điều kiện là $x > 1$. Khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2-x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}.$$

Sử dụng định nghĩa của căn bậc hai số học ta có

$$x = \frac{1}{9}.$$

Đối chiếu điều kiện ta loại $x = \frac{1}{9}$. Vậy không có giá trị x thỏa mãn đề bài.

□

 **Ví dụ 2.** Tìm x thỏa mãn điều kiện:

1. $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2;$

2. $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x-4}} = 1.$

 **Lời giải.**

1. Điều kiện $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$, nghĩa là x thỏa mãn một trong hai trường hợp sau:

TH1. $2x-3 \geq 0$ và $x-1 > 0$, ta tìm được $x \geq \frac{3}{2};$

TH2. $2x-3 \leq 0$ và $x-1 < 0$, ta tìm được $x < 1.$

Khi đó ta có

$$\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2 \Rightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 4 \Rightarrow 2x-3 = 4x-4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

2. Điều kiện là $x-2 \geq 0$ và $3x-4 > 0$, suy ra $x \geq 2$ là điều kiện. Khi đó

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x-4}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{3x-4}} = 1 \Rightarrow \frac{x-2}{3x-4} = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta loại $x = 1$. Vậy không có giá trị x thỏa mãn đề bài.

□

Luyện tập

 **Bài 1.** Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

1. $\sqrt{\frac{121}{9}};$

2. $\sqrt{\frac{144}{169}};$

3. $\sqrt{3\frac{6}{25}};$

4. $\sqrt{4\frac{21}{25}}.$

 **Lời giải.**

1. $\sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}.$

3. $\sqrt{3\frac{6}{25}} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}.$

2. $\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}.$

4. $\sqrt{4\frac{21}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}.$

□

 **Bài 2.** Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính

1. $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}};$

2. $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{0,4}};$

3. $\frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}};$

4. $\sqrt{2+\sqrt{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}}.$

Lời giải.

1. $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}} = \sqrt{\frac{999}{444}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}.$

2. $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{0,4}} = \sqrt{\frac{160}{0,4}} = \sqrt{\frac{1600}{4}} = \frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{4}} = \frac{40}{2} = 20.$

3. $\frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{9+6\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1;$

4. $\sqrt{2+\sqrt{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{3}) : \frac{1}{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1.$

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01};$

2. $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}};$

3. $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}.$

Lời giải.

1. $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{49}{9} \cdot \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{25}{16}} \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{24}.$

2. $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165-124)(165+124)}{164}} = \sqrt{\frac{41 \cdot 289}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{4}} = \frac{17}{2}.$

3. $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} = \sqrt{\frac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}} = \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} = \sqrt{\frac{225}{841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{15}{29}.$

□

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\frac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}} \ (x > 0);$

2. $\frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2x} + \sqrt{2}} \ (x > -1);$

3. $\frac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}} \ (x < 0, y > 0).$

Lời giải.

1. $\frac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}} = \sqrt{\frac{96x^5}{24x}} = \sqrt{4x^4} = 2x^2.$

2. $\frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2x} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{18(x+1)^3}{2(x+1)^2}} = \sqrt{9(x+1)} = 3\sqrt{x+1} \text{ (với } x > -1).$

3. $\frac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}} = \sqrt{\frac{3x^4y^4}{27x^2y^4}} = \sqrt{\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{9}} = \frac{-x}{3} \text{ (với } x < 0, y > 0).$

□

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

$$1. (2x - 2)\sqrt{\frac{(x - 2)^4}{(x - 1)^2}} \quad (x < 1);$$

$$2. \sqrt{\frac{4 + 12a + 9a^2}{b^2}} \quad (a \leq -\frac{2}{3}).$$

 **Lời giải.**

$$1. (2x - 2)\sqrt{\frac{(x - 2)^4}{(x - 1)^2}} = 2(x - 1) \cdot \frac{\sqrt{(x - 2)^4}}{\sqrt{(x - 1)^2}} = 2(x - 1) \cdot \frac{(x - 2)^2}{-(x - 1)} = -2(x - 2)^2 \quad (\text{với } x < 1).$$

$$2. \sqrt{\frac{4 + 12a + 9a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{(2 + 3a)^2}{\sqrt{b^2}}} = \frac{\sqrt{(2 + 3a)^2}}{b^2} = \frac{-(2 + 3a)}{|b|} \quad (\text{với } a \leq -\frac{2}{3}).$$

□

 **Bài 6.** Giải các phương trình sau

$$1. \sqrt{\frac{(x + 1)^4}{x}} = 4\sqrt{x};$$

$$2. (x - 1)\sqrt{\frac{2x - x^2 - 1}{x}} - 2x = -2.$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{(x + 1)^4}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0. \text{ Khi đó phương trình tương đương với}$$

$$\frac{\sqrt{(x + 1)^4}}{\sqrt{x}} = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4x \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = 1$.

2. Điều kiện

$$\frac{2x - x^2 - 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x - 1)^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x < 0. \end{cases}$$

Khi đó phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & (x - 1)\sqrt{\frac{(x - 1)^2}{-x}} - 2(x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1) \left(\sqrt{\frac{(x - 1)^2}{-x}} - 2 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \sqrt{\frac{(x - 1)^2}{-x}} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (\text{thỏa mãn}) \\ \sqrt{\frac{(x - 1)^2}{-x}} = 2. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{(x - 1)^2}}{\sqrt{-x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = 2\sqrt{-x} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{-4x} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -4x \\ \Leftrightarrow & (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \pm 1$.

□

Bài 7. Chứng minh các bất đẳng thức sau

1. $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$, với $a, b \geq 0$;

2. $\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} \geq 2$, với $a > 0$.

Lời giải.

1. Ta có

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a + b) \geq a + b + 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a + b) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \sqrt{\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4}}.$$

Mà $\sqrt{\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$. Nên $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$, với $a, b \geq 0$.

2. Ta có

$$\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2 + 1}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}}.$$

Mà $(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + 1 \geq 2\sqrt{a}$. Nên $\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} \geq \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2$.

□

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 8. Cho $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$, với $a, b < 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

(B) $x = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

(C) $x = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.

(D) $x = -\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.

Lời giải.

Ta có $a, b < 0$ nên $-a > 0$ và $-b > 0$ do đó

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{-a}{-b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Bài 9. Điều kiện để $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ là

(A) $x \in \mathbb{R}$.

(B) $x \geq 0$.

(C) $x \geq -1$.

(D) $x > -1$.

Lời giải.

Để xảy ra đẳng thức thì điều kiện là

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Chọn đáp án (B)

□

 **Bài 10.** Cho $\frac{\sqrt{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Khi đó $a - b$ bằng?

(A) 1.

(B) -1.

(C) 2.

(D) -2.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{\sqrt{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10-4\sqrt{6}}{2}} = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Do đó $a = 3$, $b = 2$ và $a - b = 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

§5 Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$\text{Với } B \geq 0, \text{ ta có } \sqrt{A^2 B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$\text{Với } B \geq 0, \text{ ta có } A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2 B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2 B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$\text{Với } A, B \text{ mà } AB \geq 0, B \neq 0 \text{ ta có } \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}.$$

4. Trục căn thức ở mẫu

✓ Với $B > 0$ ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}.$

✓ Với $A \geq 0, A \neq B^2$ ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A} + B} = \frac{C(\sqrt{A} - B)}{A - B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A} - B} = \frac{C(\sqrt{A} + B)}{A - B^2}.$$

✓ Với $A \geq 0, B \geq 0, A \neq B$ ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}.$$

2 Các dạng toán

Dạng 15. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Phương pháp giải: Cách đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn:

$$\sqrt{A^2 B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases} \text{ với } B \geq 0.$$

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

1. $\sqrt{8x^2}$ với $x \geq 0$;

2. $\sqrt{27xy^2}$ với $x \geq 0$; $y \leq 0$.

Lời giải.

a) Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{8x^2} = \sqrt{2^2x^2 \cdot 2} = 2|x|\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}$.

b) Vì $x \geq 0$ và $y \leq 0$ nên $\sqrt{27xy^2} = \sqrt{3^2y^2 \cdot 3x} = 3|y|\sqrt{3x} = -3y\sqrt{3x}$.

Ví dụ 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$;

b) $\sqrt{48(x-1)^2y^4}$ với $x < 1$; $y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) $\sqrt{25x^3} = \sqrt{5^2x^2 \cdot x} = 5|x|\sqrt{x} = 5x\sqrt{x}$ (do $x > 0$)

b) $\sqrt{48(x-1)^2y^4} = 4|x-1|y^2\sqrt{3} = 4(1-x)y^2\sqrt{3}$ (do $x < 1$).

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}}$ với $x > 0$;

b) $B = \frac{1}{3}\sqrt{9+6y+y^2} + \frac{4y}{3} + 5$ với $y \leq -3$.

Lời giải.

a) Vì $x > 0$ nên ta có

$$\begin{aligned} A &= 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} \\ &= 5 \cdot 2\sqrt{x} - 3 \cdot \frac{10}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{x} \cdot \frac{x}{2}\sqrt{x} \\ &= 10\sqrt{x} - 10\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

b) Vì $y \leq -3$ nên $\sqrt{9+6y+y^2} = \sqrt{(3+y)^2} = |3+y| = -3-y$. Do đó

$$B = \frac{1}{3}(-3-y) + \frac{4y}{3} + 5 = y + 4.$$

Dạng 16. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Phương pháp giải: Cách đưa thừa số vào trong dấu căn:

$$A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $a\sqrt{11}$ với $a \geq 0$;

b) $a\sqrt{\frac{-23}{a}}$ với $a < 0$.

Lời giải.

a) Vì $a \geq 0$ nên $a\sqrt{11} = \sqrt{11a^2}$.

b) Vì $a < 0$ nên $a\sqrt{\frac{-23}{a}} = -\sqrt{a^2 \cdot \frac{-23}{a}} = -\sqrt{-23a}$. □

Ví dụ 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}}$ với $a > 0$;

b) $(a-2)\sqrt{3}$ với $a < 2$.

Lời giải.

a) Vì $a > 0$ nên $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{2^2} \cdot \frac{12}{a}} = \sqrt{3a}$.

b) Vì $a < 2$ nên $(a-2)\sqrt{3} = -\sqrt{3(2-a)^2}$. □

Dạng 17. Khử mẫu**Phương pháp giải:**Vận dụng công thức $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ ($A \cdot B \geq 0$; $B \neq 0$). Cụ thể gồm các bước sau:

- ☒ Biến đổi mẫu thành bình phương của một số hoặc một biểu thức (nếu cần);
- ☒ Khai phương mẫu và đưa ra ngoài dấu căn.

BÀI TẬP MẪU **Ví dụ 1.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn

1. $\sqrt{\frac{5}{2}}$;

3. $\sqrt{\frac{5}{14}}$;

2. $\sqrt{\frac{3m}{5n}}$ với $m \cdot n > 0$;

4. $\sqrt{\frac{7x}{18y}}$ với $x \cdot y > 0$.

Lời giải.

1. $\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. $\sqrt{\frac{3m}{5n}} = \sqrt{\frac{3m \cdot 5n}{5n \cdot 5n}} = \frac{\sqrt{15mn}}{(5n)^2} = \frac{\sqrt{15mn}}{5|n|}$.

3. $\sqrt{\frac{5}{14}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 14}{14 \cdot 14}} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{14^2}} = \frac{\sqrt{70}}{14}$.

4. $\sqrt{\frac{7x}{18y}} = \sqrt{\frac{7x \cdot 18y}{18y \cdot 18y}} = \frac{\sqrt{126xy}}{(18y)^2} = \frac{3\sqrt{14xy}}{18|y|} = \frac{\sqrt{14xy}}{6|y|}$.

 11. Trong câu d) ta có cách khác xử lý bài toán đơn giản hơn

$$\sqrt{\frac{7x}{18y}} = \sqrt{\frac{7x \cdot 2y}{18y \cdot 2y}} = \frac{\sqrt{14xy}}{(6y)^2} = \frac{\sqrt{14xy}}{6|y|}.$$

□

 **Ví dụ 2.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$1. \sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}, \text{ với } x > -1; \quad 2. \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}}, \text{ với } a < 0 \text{ hoặc } a \geq 1.$$

 **Lời giải.**

$$1. \sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}} = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^4}} = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2}.$$

$$2. \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}} = \sqrt{\frac{a-1}{a^3}} = \sqrt{\frac{a(a-1)}{a^4}} = \frac{\sqrt{a(a-1)}}{a^2}.$$

□

 **Ví dụ 3.** Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn

$$1. -x^2y\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ với } x > 0; y \geq 0; \quad 3. \sqrt{\frac{5x}{13y}} \text{ với } x \geq 0; y > 0;$$

$$2. \sqrt{\frac{-2x}{15}} \text{ với } x < 0; \quad 4. \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} \text{ với } x \geq \frac{1}{2}.$$

 **Lời giải.**

$$1. -x^2y\sqrt{\frac{y}{x}} = -x^2y\sqrt{\frac{xy}{x^2}} = \frac{-x^2y\sqrt{xy}}{x} = -xy\sqrt{xy}.$$

$$2. \sqrt{\frac{-2x}{15}} = \sqrt{\frac{-30x}{15^2}} = \frac{\sqrt{-2x}}{15}.$$

$$3. \sqrt{\frac{5x}{13y}} = \sqrt{\frac{65xy}{(13y)^2}} = \frac{\sqrt{65xy}}{13y}.$$

$$4. \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} = \sqrt{\frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)^2}} = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{2x+1}.$$

□

Dạng 18. Trục căn thức ở mẫu**Phương pháp giải:**

Để trục căn thức ở mẫu, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phân tích tử và mẫu ra thừa số chung chứa căn rồi rút gọn thừa số đó.

Cách 2: Nhân tử và mẫu với thừa số thích hợp để làm mất căn thức ở mẫu. Có các dạng cơ bản sau:

$$1. \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0).$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}{A - B} \quad \text{với } A > 0; B > 0; A \neq B.$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau

$$1. \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}};$$

$$3. \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{15}}{\sqrt{5}}$$

$$2. \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1};$$

$$4. \frac{1}{2 - 3\sqrt{3}}.$$

Lời giải.

$$1. \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3};$$

$$2. \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{5} + 1} = \sqrt{5};$$

$$3. \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \frac{(3\sqrt{5} + \sqrt{15}) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{5} = 3 + \sqrt{3};$$

$$4. \frac{1}{2 - 3\sqrt{3}} = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{(2 - 3\sqrt{3})(2 + 3\sqrt{3})} = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{4 - 27} = -\frac{2 + 3\sqrt{3}}{23}.$$

□

Ví dụ 2. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau, với các biểu thức đều có nghĩa.

$$1. \frac{1}{\sqrt{m} + n};$$

$$3. \frac{3}{2\sqrt{m} + 1};$$

$$2. \frac{2}{\sqrt{m} - \sqrt{n}};$$

$$4. \frac{2ab}{2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}.$$

Lời giải.

$$1. \frac{1}{\sqrt{m} + n} = \frac{\sqrt{m} - n}{(\sqrt{m} - n)(\sqrt{m} + n)} = \frac{\sqrt{m} - n}{m - n^2};$$

$$2. \frac{2}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \frac{2(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})} = \frac{2(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{m-n};$$

$$3. \frac{3}{2\sqrt{m}+1} = \frac{3(2\sqrt{m}-1)}{(2\sqrt{m}-1)(2\sqrt{m}+1)} = \frac{6\sqrt{m}-3}{4m-1};$$

$$4. \frac{2ab}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}} = \frac{2ab(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})} = \frac{2ab(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{4a-9b}.$$

□

Ví dụ 3. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau

$$1. \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1};$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{6}+\sqrt{35}}.$$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}+4} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(2\sqrt{6}-4)}{24-16} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(2\sqrt{6}-4)}{8}; \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{6}+\sqrt{35}} &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-\sqrt{12+2\sqrt{35}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}. \end{aligned}$$

□

3 Luyện tập

Bài 1. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 5\sqrt{48};$

b) $B = 3\sqrt{a^2+3} - 3\sqrt{16a^2+48} + 4\sqrt{25a^2+75}.$

Lời giải.

a) Vì

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3};$$

$$3\sqrt{27} = 3\sqrt{9 \cdot 3} = 9\sqrt{3};$$

$$5\sqrt{48} = 5\sqrt{16 \cdot 3} = 20\sqrt{3}$$

nên $A = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 20\sqrt{3} = -9\sqrt{3}$.

b) Vì

$$3\sqrt{16a^2 + 48} = 3\sqrt{16(a^2 + 3)} = 12\sqrt{a^2 + 3};$$

$$4\sqrt{25a^2 + 75} = 4\sqrt{25(a^2 + 3)} = 20\sqrt{a^2 + 3}$$

nên $B = 3\sqrt{a^2 + 3} - 12\sqrt{a^2 + 3} + 20\sqrt{a^2 + 3} = 11\sqrt{a^2 + 3}$. □

Bài 2. So sánh các cặp số dưới đây:

a) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$;

b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

 **Lời giải.**

a) Ta có $2\sqrt{29} = \sqrt{2^2 \cdot 29} = \sqrt{116}$ và $3\sqrt{13} = \sqrt{3^2 \cdot 13} = \sqrt{117}$.

Mà $\sqrt{116} < \sqrt{117}$ nên $2\sqrt{29} < 3\sqrt{13}$.

b) Ta có $\frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{8}}$.

Mà $\sqrt{\frac{25}{8}} < \sqrt{\frac{27}{8}}$ nên $\frac{5}{4}\sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. □

Bài 3. Tìm số bé hơn trong các cặp số sau:

a) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$;

b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$.

 **Lời giải.**

a) Ta có $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$ và $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$.

Mà $\sqrt{50} > \sqrt{48}$ nên số bé hơn là $4\sqrt{3}$.

b) Ta có $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{24}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}} = \sqrt{6^2 \cdot \frac{1}{37}} = \sqrt{\frac{36}{37}}$.

Mà $\sqrt{\frac{25}{24}} > \sqrt{\frac{36}{37}}$ nên số bé hơn là $6\sqrt{\frac{1}{37}}$. □

Bài 4. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $\sqrt{29}$ và $4\sqrt{2}$.

b) $5\sqrt{2}$; $\sqrt{39}$; $3\sqrt{8}$ và $2\sqrt{15}$.

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45};$$

$$2\sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24};$$

$$4\sqrt{2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}.$$

Do $\sqrt{24} < \sqrt{29} < \sqrt{32} < \sqrt{45}$ nên $2\sqrt{6} < \sqrt{29} < 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5}$.

b) Ta có

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50};$$

$$3\sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 8} = \sqrt{72};$$

$$2\sqrt{15} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{60}.$$

Do $\sqrt{39} < \sqrt{50} < \sqrt{60} < \sqrt{72}$ nên $\sqrt{39} < 5\sqrt{2} < 2\sqrt{15} < 3\sqrt{8}$. □

Bài 5. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự giảm dần:

a) $7\sqrt{2}$; $2\sqrt{8}$; $\sqrt{28}$ và $5\sqrt{2}$.

b) $3\sqrt{10}$; $5\sqrt{3}$; $\frac{20}{\sqrt{5}}$ và $12\sqrt{\frac{2}{3}}$.

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98};$$

$$2\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{32};$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}.$$

Do $\sqrt{98} > \sqrt{50} > \sqrt{32} > \sqrt{28}$ nên $7\sqrt{2} > 5\sqrt{2} > 2\sqrt{8} > \sqrt{28}$.

b) Ta có

$$3\sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{90};$$

$$5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75};$$

$$\frac{20}{\sqrt{5}} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{80}$$

$$12\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{144 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{96}$$

Do $\sqrt{96} > \sqrt{90} > \sqrt{80} > \sqrt{75}$ nên $12\sqrt{\frac{2}{3}} > 3\sqrt{10} > \frac{20}{\sqrt{5}} > 5\sqrt{3}$. □

 **Bài 6.** Giải phương trình

$$\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4. \quad (1)$$

 **Lời giải.**

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = 4$. □

 **Bài 7.** Giải phương trình

$$25\sqrt{\frac{x-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4x-12}{9}} - 7\sqrt{x^2-9} + 18\sqrt{\frac{9x^2-81}{81}} = 0. \quad (2)$$

 **Lời giải.**

Cách 1. Điều kiện $x \geq 3$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-9}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 3\sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-3) = 9(x^2-9) \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm là $x = 3$.

Cách 2. Điều kiện $x \geq 3$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-9} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-3} \left(\frac{1}{3} - \sqrt{x+3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 0, \\ \sqrt{x+3} = \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{thỏa mãn}) \\ x = -\frac{26}{9} & (\text{loại}) \end{cases} \Rightarrow x = 3.\end{aligned}$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm là $x = 3$. □

 **Bài 8.** Cho biểu thức

$$M = (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 2x - 2)^{2018} + 2019$$

Tính giá trị của M tại $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

 **Lời giải.**

Từ $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ suy ra $2x + 1 = -\sqrt{5} \Rightarrow (2x + 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$. Do đó

$$\begin{aligned}M &= (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 2x - 2)^{2018} + 2019 \\ &= [4x^3(x^2 + x - 1) - x(x^2 + x - 1) + (x^2 + x - 1) - 1]^{2018} + 2019 \\ &= 1 + 2019 = 2020.\end{aligned}$$

□

 **Bài 9.** Khử mẫu của các biểu thức sau

$$1. \sqrt{\frac{7}{27}}; \quad 2. \sqrt{\frac{5}{11}};$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}1. \sqrt{\frac{7}{27}} &= \sqrt{\frac{7 \cdot 3}{27 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{21}{9^2}} = \frac{\sqrt{21}}{9}; \\ 2. \sqrt{\frac{5}{11}} &= \sqrt{\frac{55}{11^2}} = \frac{\sqrt{55}}{11};\end{aligned}$$

□

 **Bài 10.** Trục căn thức các biểu thức sau

$$1. \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2}; \quad 2. \frac{2}{1 - 2\sqrt{5}}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(\sqrt{3} - 2)^2}{3 - 4} = -7 + 4\sqrt{3};$$

$$2. \frac{2}{1-2\sqrt{5}} = \frac{2(1+2\sqrt{5})}{1-20} = -\frac{2+4\sqrt{5}}{19}.$$

□

📁 **Bài 11.** Trục căn thức biểu thức $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$.
✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}} &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}. \end{aligned}$$

□

📁 **Bài 12.** Cho $x = \frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}$. Tính $x + \frac{2}{x}$.

✍ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } x = \frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-2)^2}{3-4} = -7+4\sqrt{3}.$$

$$\text{Khi đó } x + \frac{2}{x} = -7+4\sqrt{3} + \frac{2}{4\sqrt{3}-7} = -7+4\sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}+14}{48-49} = -21-4\sqrt{3}.$$

□

📁 **Bài 13.** Tính

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{10-2\sqrt{6}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}}}.$$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{10-2\sqrt{6}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{12-5} + \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \frac{4\sqrt{3}}{7}. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

📁 **Bài 14.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn của biểu thức $\sqrt{25 \cdot (-a)^2 b^3}$ với $b \geq 0$, ta được

(A) $-5ab\sqrt{b}$.

(B) $5ab\sqrt{b}$.

(C) $5|a|b\sqrt{b}$.

(D) $-5|a|b\sqrt{b}$.

✍ **Lời giải.**

$$\text{Với } b \geq 0 \text{ thì } \sqrt{25 \cdot (-a)^2 b^3} = \sqrt{5^2 a^2 b^2 \cdot b} = 5|a|b\sqrt{b}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Bài 15. Đưa thừa số vào trong dấu căn của biểu thức $(1-x)\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ với $x > 1$, ta được

- (A) $\sqrt{x(x-1)}$. (B) $\sqrt{x(1-x)}$. (C) $-\sqrt{x(x-1)}$. (D) $-\sqrt{x(1-x)}$.

Lời giải.

Vì $x > 1$ nên $(1-x)\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -(x-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -\sqrt{(x-1)^2 \cdot \frac{x}{x-1}} = -\sqrt{x(x-1)}$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 16. Khử mẫu của biểu thức $\sqrt{\frac{3}{5\sqrt{5}}}$ ta được:

- (A) $\frac{\sqrt{3\sqrt{5}}}{3}$. (B) $\frac{\sqrt{3\sqrt{5}}}{5}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. (D) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

$$\sqrt{\frac{3}{5\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{5^2}} = \frac{\sqrt{3\sqrt{5}}}{5}.$$

Chọn đáp án (B) □

Bài 17. Trục căn thức của biểu thức $\frac{m}{\sqrt{5m^3}}$, $m > 0$ ta được

- (A) $\frac{\sqrt{5m}}{5|m|}$. (B) $\frac{\sqrt{5m}}{-5m}$. (C) $\frac{\sqrt{5m}}{5m}$. (D) $\frac{\sqrt{5m}}{5m^2}$.

Lời giải.

$$\frac{m}{\sqrt{5m^3}} = \frac{m\sqrt{5m^3}}{5m^3} = \frac{m^2\sqrt{5m}}{5m^3} = \frac{\sqrt{5m}}{5m}.$$

Chọn đáp án (C) □

Bài 18. Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ ta được

- (A) $-3+2\sqrt{2}$. (B) $3+2\sqrt{2}$. (C) $-3-2\sqrt{2}$. (D) $3-2\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-2} = -3+2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

§6 Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

1 Tóm tắt lý thuyết

1) Tính chất về phân số (Phân thức)

$$\frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A}{B} \quad (M \neq 0, B \neq 0)$$

2) Các hằng đẳng thức đáng nhớ cơ bản thường được sử dụng

- ☑ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- ☑ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- ☑ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- ☑ $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$
- ☑ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
- ☑ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
- ☑ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

3) Các phép biến đổi căn thức cơ bản

- ☑ Nếu $a \geq 0, x \geq 0, \sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$.
- ☑ Để $\sqrt{A}$ có nghĩa thì $A \geq 0$.
- ☑ $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$.
- ☑ $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \cdot \sqrt{B} \quad (B \geq 0)$.
- ☑ $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A, B \geq 0)$.
- ☑ $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$
- ☑ $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$).
- ☑ $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0$ và $B \geq 0$).
- ☑ $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{AB}{|B|}$ (với $AB \geq 0$ và $B \neq 0$).
- ☑ $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$).
- ☑ $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \pm B)}{A - B^2}$ (Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$).
- ☑ $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$ (với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$).

- ☑ Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử: Bằng cách phân tích thành nhân tử ta có thể rút gọn nhân tử chung ở cả tử và mẫu của một phân thức.
- ☑ Các tính chất cơ bản của một phân thức. Sử dụng các tính chất này ta có thể nhân với biểu thức liên hợp của tử (hoặc mẫu) của một phân thức, giản ước cho một số hạng khác 0, đổi dấu phân thức, ... đưa phân thức về dạng rút gọn.

2 Các dạng toán

Dạng 19. Rút gọn biểu thức không chứa biến

Phương pháp giải

- ☑ Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.
- ☑ Rút gọn biểu thức được áp dụng trong nhiều bài toán về biểu thức có chứa các căn thức bậc hai.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 **Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau.

1. $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$.

2. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$.

3. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$.

4. $0,1 \cdot \sqrt{200} + 2 \cdot \sqrt{0,08} + 0,4 \cdot \sqrt{50}$.

✍ **Lời giải.**

1. $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5} = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

2. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{5}{2} \sqrt{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

3. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (2-3)\sqrt{5} + (9+6)\sqrt{2} = -\sqrt{5} + 15\sqrt{2}$.

4. $0,1 \cdot \sqrt{200} + 2 \cdot \sqrt{0,08} + 0,4 \cdot \sqrt{50} = 0,1 \cdot 10\sqrt{2} + 2 \cdot 0,2\sqrt{2} + 0,4 \cdot 5\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0,4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (1 + 0,4 + 2)\sqrt{2} = 3,4 \cdot \sqrt{2}$.

□

📖 **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau.

1. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$.

2. $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$.

3. $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

4. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$

 **Lời giải.**

1. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 5} + 3\sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{6^2 \cdot 2} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$
 $= (2 - 3)\sqrt{5} + (9 + 6)\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

2. $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84} = \sqrt{2^2 \cdot 7} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{2^2 \cdot 21}$
 $= 2 \cdot 7 - 2\sqrt{21} + 7 + 2\sqrt{21} = 14 + 7 + (2 - 2)\sqrt{21} = 21$.

3. $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120} = 6 + 2\sqrt{30} + 5 - \sqrt{2^2 \cdot 30} = 6 + 5 + 2\sqrt{30} - 2\sqrt{30} = 11$.

4. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{10^2 \cdot 2}\right) : \frac{1}{8}$
 $= \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right) \cdot 8 = 2\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 64\sqrt{2} = 54\sqrt{2}$.

□

 **Ví dụ 3.** Rút gọn các biểu thức sau.

1. $A = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

2. $B = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$.

 **Lời giải.**

1. $A = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = -\sqrt{3}$.

2. $B = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{|\sqrt{3} - 1|}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

 **Ví dụ 4.** Rút gọn các biểu thức sau.

1. $A = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}}$.

2. $B = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

 **Lời giải.**

1. $A = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}} = \sqrt{(8 - 3\sqrt{7})^2} - \sqrt{(8 + 3\sqrt{7})^2} = |8 - 3\sqrt{7}| - |8 + 3\sqrt{7}|$
 $= 8 - 3\sqrt{7} - 8 - 3\sqrt{7} = -6\sqrt{7}$ Vì $(8 > 3\sqrt{7})$.

$$\begin{aligned}
 2. B &= \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) + \sqrt{6}(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\
 &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Dạng 20. Chứng minh đẳng thức

Phương pháp giải

Biến đổi vế trái bằng vế phải bằng cách sử dụng các phép biến đổi căn thức và vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

✎✎✎ BÀI TẬP MẪU ✎✎✎

 **Ví dụ 1.** Chứng minh đẳng thức $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$.

 **Lời giải.**

Biến đổi vế trái ta có

$$VT = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2} = VP.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh. □

 **Ví dụ 2.** Chứng minh đẳng thức

$$\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \text{ với } a > 0, b > 0.$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } VT &= \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - b(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
 &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a - b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = VP.
 \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

 **Ví dụ 3.** Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và $a \neq b$)

$$1. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

$$2. \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 = 1.$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Ta có } VT &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{2b}{b-a} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4b}{2(a-b)} \\
 &= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - a + 2\sqrt{ab} - b + 4b}{2(a-b)} = \frac{4\sqrt{ab} + 4b}{2(a-b)} = \frac{4\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{2(a-b)} \\
 &= \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = VP.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Ta có } VT &= \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a-b} \right)^2 \\
 &= \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right]^2 \\
 &= (a - 2\sqrt{ab} + b) \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \\
 &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = 1 = VP.
 \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 4.** Chứng minh các đẳng thức sau.

$$1. \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2 = 1 \text{ với } a \geq 0 \text{ và } a \neq 1.$$

$$2. \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a| \text{ với } a+b > 0 \text{ và } b \neq 0.$$

 **Lời giải.**

1. Với $a \geq 0$ và $a \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned}
 VT &= \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2 = 1 \\
 &= \left[\frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right] \cdot \left[\frac{1 - \sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})} \right]^2 \\
 &= (1 + 2\sqrt{a} + a) \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} \\
 &= (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} = 1 = VP.
 \end{aligned}$$

2. Với $a+b > 0$ và $b \neq 0$ ta có

$$VT = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{(ab^2)^2}{(a+b)^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a|b^2}{a+b} = |a| = VP.$$

□

Dạng 21. Rút gọn biểu thức chứa biến và các câu hỏi phụ liên quan

Rút gọn biểu thức chứa biến. Sử dụng kết quả rút gọn để:

- ☒ Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.
- ☒ Giải phương trình, bất phương trình (so sánh biểu thức với một số).
- ☒ Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của một biểu thức.
- ☒ Tìm giá trị nguyên của biểu thức ứng với các giá trị nguyên của biến.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

1. Rút gọn P .
2. Tìm các giá trị x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Lời giải.

$$1. \text{ Ta có } P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

$$2. \text{ Theo câu a) ta có } P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

$$\Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Vậy với $x = \frac{1}{4}$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

 **Ví dụ 2.** Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \text{ với } (x > 0, x \neq 4)$$

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải.

1. Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}.$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$.

2. Ta có $\forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} > 0$.

$$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x} + 1)} < \frac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}.$$

Kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.

$$\checkmark A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\checkmark A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (không thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

□

Ví dụ 3. Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$.

1. Tìm điều kiện để A có nghĩa.
2. Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a .

Lời giải.

$$1. \text{ Biểu thức } A \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a \neq b. \end{cases}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b} = -2\sqrt{b}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của A không phụ thuộc vào a mà chỉ phụ thuộc vào b .

□

Ví dụ 4. Cho biểu thức: $A = \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$, với $x \geq 0$.

1. Tìm x để A có nghĩa.
2. Rút gọn biểu thức A .
3. Với giá trị nào của x thì $A < 1$?

 Lời giải.

$$1. A \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$2. \text{Ta có } A = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \\ = \sqrt{x}-1 + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}-1.$$

$$3. \text{Ta có } A < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1 < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1. \\ \text{Vậy với } 0 \leq x < 1 \text{ thì } A < 1.$$

□

 **Ví dụ 5.** 1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A với $x = 36$.

$$2. \text{Rút gọn biểu thức } B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2} \text{ (với } x \geq 0, x \neq 16 \text{)}.$$

3. Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

 Lời giải.

$$1. \text{Với } x = 36, \text{ ta có } A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

2. Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.$$

$$3. \text{Biểu thức } B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \left(\frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{2}{x-16}.$$

$B(A-1)$ nguyên khi $(x-16) \in \mathbb{U}(2) \Leftrightarrow (x-16) \in \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow x \in \{14; 15; 17; 18\}$.
Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 17; 18\}$.

□

 **Ví dụ 6.** Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} - \frac{3a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2a+2\sqrt{ab}+2b}$$

1. Rút gọn P .

2. Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên.

 Lời giải.

1. ĐKXD: $a, b > 0; a \neq b; a \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{2(a + \sqrt{ab} + b)}{(a - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{3a - 3\sqrt{ab} - 3a + a + \sqrt{ab} + b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} \cdot \frac{2(a + \sqrt{ab} + b)}{(a - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} \cdot \frac{2(a + \sqrt{ab} + b)}{(a - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{2}{a - 1}. \end{aligned}$$

2. Để P nhận giá trị nguyên thì $(a - 1) \in \mathbb{U}(2) \Leftrightarrow (a - 1) \in \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow a \in \{-1; 0; 2; 3\}$.
 Vậy với $a \in \{-1; 0; 2; 3\}$ thì P có giá trị nguyên.

□

3 Luyện tập

 **Bài 1.** Rút gọn biểu thức

1. $\frac{15}{3\sqrt{20}}$.

5. $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

2. $\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

6. $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

7. $\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

8. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

4. $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

9. $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

10. $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$.

 **Lời giải.**

1. $\frac{15}{3\sqrt{20}} = \frac{15\sqrt{20}}{3 \cdot 20} = \frac{15\sqrt{20}}{60} = \frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. $\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} + 3}{3} = \sqrt{3} + 1$.

3. $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$.

4. $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{30} - \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{30}}{2 - 5} = \frac{-2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{-3} = \sqrt{3}$.

$$5. \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{6 - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 6}{2 - 3} = \frac{\sqrt{6}}{-1} = -\sqrt{6}.$$

$$6. \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 4.$$

$$7. \sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{4 - 3} = 1.$$

$$8. \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| = \sqrt{3} + 1.$$

$$9. \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$10. \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = |\sqrt{5} - 1| + |\sqrt{5} + 1| = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} + 1 = 2\sqrt{5}.$$

□

 **Bài 2.** Chứng minh các đẳng thức sau

$$1. \sqrt{2006 - 2\sqrt{2005}} + \sqrt{2006 + 2\sqrt{2005}} = 2\sqrt{2005}.$$

$$2. \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = 2\sqrt{3}.$$

$$3. \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

$$4. \sqrt{8 + \sqrt{63}} - \sqrt{8 - 3\sqrt{7}} = \sqrt{14}.$$

$$5. \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}} = \sqrt{3} - 1.$$

$$6. \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = 1.$$

$$7. \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} = 5 + 3\sqrt{2}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \sqrt{2006 - 2\sqrt{2005}} + \sqrt{2006 + 2\sqrt{2005}} = 2\sqrt{2005}.$$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{2006 - 2\sqrt{2005}} + \sqrt{2006 + 2\sqrt{2005}} = \sqrt{(\sqrt{2005} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2005} + 1)^2} \\ &= |\sqrt{2005} - 1| + |\sqrt{2005} + 1| = \sqrt{2005} - 1 + \sqrt{2005} + 1 \\ &= 2\sqrt{2005} = VP. \end{aligned}$$

$$2. \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = 2\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} \\ &= |\sqrt{5} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} - \sqrt{3}| = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \\ &= 2\sqrt{3} = VP. \end{aligned}$$

3. $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} = VP. \end{aligned}$$

4. $\sqrt{8+\sqrt{63}} - \sqrt{8-3\sqrt{7}} = \sqrt{14}.$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{8+\sqrt{63}} - \sqrt{8-3\sqrt{7}} = \sqrt{8+3\sqrt{7}} - \sqrt{8-3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{16+6\sqrt{7}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{7}+3)^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{2}} - \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14} = VP. \end{aligned}$$

5. $\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}} = \sqrt{3}-1.$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}} = \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-2\sqrt{32}}} \\ &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{(4-\sqrt{2})^2}}} = \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+4-\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{12}+4}} = \sqrt{6-2\sqrt{2\sqrt{3}+4}} = \sqrt{6-2\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} \\ &= \sqrt{6-2(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \\ &= \sqrt{3}-1 = VP. \end{aligned}$$

6. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = 1.$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(3-2\sqrt{5})^2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-(2\sqrt{5}-3)}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)} \\ &= \sqrt{1} = 1 = VP. \end{aligned}$$

7. $\sqrt{13+30\sqrt{2}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = 5+3\sqrt{2}.$

$$VT = \sqrt{13+30\sqrt{2}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2}+\sqrt{(1+2\sqrt{2})^2}} = \sqrt{13+30\sqrt{2}+2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{13 + 30\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \sqrt{13 + 30(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = \sqrt{(5 + 3\sqrt{2})^2} \\
 &= 5 + 3\sqrt{2} = VP.
 \end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho biểu thức

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \quad \text{với } x > 0; x \neq 4.$$

1. Rút gọn biểu thức V .
2. Tìm giá trị của x để $V = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

1. Rút gọn biểu thức V .

$$\begin{aligned}
 V &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} + \frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \right) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x} - 2}.
 \end{aligned}$$

2. Tìm giá trị của x để $V = \frac{1}{3}$.

$$V = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64.$$

□

Bài 4. Cho

$$A = \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{3\sqrt{x} + 5}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right)$$

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Đặt $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$. Chứng minh $B > 1$ với $x > 0, x \neq 1$.

Lời giải.

1. Rút gọn biểu thức A .

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{3\sqrt{x} + 5}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{3\sqrt{x} + 5}{(x - 1)(\sqrt{x} - 1)} \right) \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)^2 - 4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \right) \\
 &= \left(\frac{4\sqrt{x} + 4}{(x - 1)(\sqrt{x} - 1)} \right) \left(\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{4\sqrt{x}} \right) \\
 &= \left(\frac{4(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \right) \left(\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{4\sqrt{x}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

$$2. B = (x - \sqrt{x} + 1) A = B = (x - \sqrt{x} + 1) \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vì $x \neq 1$ nên $(\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ (do $x > 0$).

Suy ra $B = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$ với $x > 0, x \neq 1$.

□

📖 **Bài 5.** Cho biểu thức

$$P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 3}{3 + \sqrt{x}}$$

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

✍ **Lời giải.**

1. Rút gọn biểu thức P .

$$\begin{aligned} P &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 3}{3 + \sqrt{x}} \\ &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(3\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{(2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{3x + 7\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{2x + \sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{-x + 9\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= -\frac{(\sqrt{x} - 8)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{8 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}. \end{aligned}$$

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

$$\text{Ta có } P = \frac{8 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = \frac{11}{\sqrt{x} + 3} - 1.$$

Do đó

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{x} + 3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11 : (\sqrt{x} + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 3 = 1 \\ \sqrt{x} + 3 = -1 \\ \sqrt{x} + 3 = 11 \\ \sqrt{x} + 3 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = 11 \Leftrightarrow x = 64.$$

□

📖 **Bài 6.** Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} + \frac{2-x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{x+2 - \sqrt{3x+6}} \right)$$

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức P xác định.

2. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

 **Lời giải.**

1. Điều kiện của x để biểu thức P xác định.

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+2} \neq \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1} \neq \sqrt{3} \\ \sqrt{x+2} \neq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

2. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} + \frac{2-x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{x+2 - \sqrt{3}x+6} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2} + \frac{(2-x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{3})^2} \right) \left(\frac{-2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} - \sqrt{3})} \right) \\ &= (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})) \left(\frac{-\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} - \sqrt{3})} \right) \\ &= (\sqrt{x+2} - \sqrt{3}) \left(\frac{-\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} - \sqrt{3})} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} - 1. \end{aligned}$$

Mặt khác ta có: $x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+2} \geq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \leq \sqrt{3} \Rightarrow P \leq \sqrt{3} - 1$.

Do đó $\max P = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow x = -1$.

□

§7 Căn bậc ba

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 2. Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow a = b^3$.

Tính chất 1. Cho $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Khi đó ta có

$$1. \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}.$$

$$2. \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

$$3. a \leq b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} \leq \sqrt[3]{b}.$$

2 Các dạng toán

Dạng 22. Tìm căn bậc ba của một số

Phương pháp giải

Dùng các phép biến đổi đưa biểu thức dưới dấu căn về dạng a^3 rồi tính.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Tính $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{-64}$.

 **Lời giải.**

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$$

□

 **Ví dụ 2.** Tính $\sqrt[3]{\frac{1}{0,008}}$; $\sqrt[3]{(-27) \cdot 8}$.

 **Lời giải.**

$$\sqrt[3]{\frac{1}{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{1^3}}{\sqrt[3]{0,2^3}} = \frac{1}{0,2} = 5.$$

$$\sqrt[3]{(-27) \cdot 8} = \sqrt[3]{(-27)} \cdot \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} = -3 \cdot 2 = -6.$$

□

 **Ví dụ 3.** Tính $\frac{\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{16}}$.

 **Lời giải.**

$$\frac{\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{36 \cdot 12}{16}} = \sqrt[3]{\frac{3^2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{4^2}} = \sqrt[3]{3^3} = 3.$$

□

Dạng 23. So sánh các căn bậc ba

Phương pháp giải

☒ Đưa hai biểu thức cần so sánh về dạng cơ bản $\sqrt[3]{a} \leq \sqrt[3]{b}$.

☒ Áp dụng tính chất cơ bản suy ra kết quả.

 **12.** Những bài không thể đưa ngay về dạng cơ bản thì có thể lập phương hai biểu thức đã cho rồi so sánh: Nếu $a^3 \geq b^3 \Leftrightarrow a \geq b$.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** So sánh $\sqrt[3]{5}$ và $\sqrt[3]{4}$.

 **Lời giải.**

Ta có $4 < 5 \Rightarrow \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{5}$.

□

 **Ví dụ 2.** So sánh $\sqrt[3]{5}$ và 2.

 **Lời giải.**

Ta có $8 > 5 \Rightarrow \sqrt[3]{8} > \sqrt[3]{5} \Rightarrow 2 > \sqrt[3]{5}$.

□

 **Ví dụ 3.** So sánh $4\sqrt[3]{5}$ và $5\sqrt[3]{4}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{500}$$

$$4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{320}$$

Suy ra $\sqrt[3]{320} < \sqrt[3]{500} \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{5} < 5\sqrt[3]{4}$.

□

 **Ví dụ 4.** So sánh $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{12}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}\right)^3 = 5 + 3\sqrt[3]{5^2 \cdot 7} + 3\sqrt[3]{5 \cdot 7^2} + 7 = 12 + 3\sqrt[3]{175} + 3\sqrt[3]{245} > 12 = \left(\sqrt[3]{12}\right)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{12}.$$

□

Dạng 24. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba

Phương pháp giải

Dùng các phép biến đổi đưa biểu thức dưới dấu căn về dạng a^3 hoặc mũ 3 cả hai vế của biểu thức đưa về giải phương trình bậc ba.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức sau

$$1. A = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}.$$

$$2. B = \sqrt[3]{72 - 32\sqrt{5}} \cdot \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}.$$

 Lời giải.

$$\begin{aligned} 1. A &= \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1^2 + 1^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1^2 - 1^3} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3} = (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. B &= \sqrt[3]{(3)^3 - 3 \cdot (3)^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^3} \cdot \frac{\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt[3]{(3 - \sqrt{5})^3} \cdot \frac{\sqrt{(3 + \sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

 Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức sau $A = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

 Lời giải.

$$\begin{aligned} A^3 &= 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}) = 4 - 3A. \\ \Rightarrow A^3 + 3A - 4 &= 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 4) = 0 \Leftrightarrow A = 1 \text{ (do } A^2 + A + 4 = \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall A) \\ \square \end{aligned}$$

Dạng 25. Giải phương trình chứa căn bậc ba

Phương pháp giải

Lũy thừa bậc ba hai vế của phương trình rồi đưa về dạng phương trình tích hoặc ta có thể đặt ẩn phụ.

BÀI TẬP MẪU

 Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x + 7} - 3 = 1$

 Lời giải.

$$\sqrt[3]{x + 7} - 3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x + 7} = 4 \Leftrightarrow x + 7 = 64 \Leftrightarrow x = 57.$$

□

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 0$.

 **Lời giải.**

Phương trình tương đương với $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x+2}$ (1)
Lũy thừa bậc ba cả hai vế ta được

$$\begin{aligned} x + x + 1 + 3\sqrt[3]{x(x+1)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}) &= -x - 2 \\ \Leftrightarrow 3x + 3 + 3\sqrt[3]{x(x+1)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}) &= 0 \\ \Rightarrow x + 1 - \sqrt[3]{x(x+1)(x+2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) &= (x+1)^3 \\ \Leftrightarrow x &= -1. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $x = -1$ là nghiệm của phương trình. □

 **Ví dụ 3.** Giải phương trình $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{5-x} = 1$.

 **Lời giải.**

Đặt $a = \sqrt[3]{2+x}$, $b = \sqrt[3]{5-x}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 1 \\ a^3 + b^3 = 2 + x + 5 - x = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ (a + b)^2 - 3ab = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ ab = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó a, b là nghiệm của phương trình $X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} & (2) \end{cases}$

$$\checkmark (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2+x} = -1 \\ \sqrt[3]{5-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

$$\checkmark (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2+x} = 2 \\ \sqrt[3]{5-x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = 6$. □

3

Luyện tập

 **Bài 1.** Tính các căn bậc ba sau

1. $\sqrt[3]{64}$.

2. $\sqrt[3]{-512}$.

3. $\sqrt[3]{0,064}$.

4. $\sqrt[3]{-0,216}$.

5. $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$.

6. $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$.

 **Lời giải.**

1. $\sqrt[3]{64} = 4$.

2. $\sqrt[3]{-512} = -8$.

3. $\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{4}{10}$.

4. $\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-6)^3} = -6$.

5. $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\frac{500}{4}} + \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216} = 5 + 6 = 11$.

6. $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6}{576}} - \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[3]{8} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$.

□

 **Bài 2.** So sánh các biểu thức sau

1. $\sqrt[3]{9}$ và 2.

2. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ và $\frac{3}{4}$.

3. $2\sqrt[3]{3}$ và $3\sqrt[3]{2}$.

4. $-6\sqrt[3]{7}$ và $7\sqrt[3]{(-6)}$.

5. $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{11}$.

6. $\sqrt[3]{10} - 2$ và $\sqrt[3]{2}$.

7. $\sqrt{2} + 1$ và $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$.

8. $\sqrt{3} - 2$ và $\sqrt[3]{15\sqrt{3} - 25}$.

 **Lời giải.**

1. $\sqrt[3]{9} > 2$.

2. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} < \frac{3}{4}$.

3. $\begin{cases} 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24} \\ 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$.

4. $\begin{cases} -6\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(-6)^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{-1512} \\ 7\sqrt[3]{(-6)} = \sqrt[3]{7^3 \cdot (-6)} = \sqrt[3]{-2058} \end{cases} \Rightarrow -6\sqrt[3]{7} > 7\sqrt[3]{(-6)}$.

5. $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{7})^3 = 4 + 3\sqrt[3]{112} + 3\sqrt[3]{196} + 7 = 11 + 3\sqrt[3]{112} + 3\sqrt[3]{196} > 11 = (\sqrt[3]{11})^3$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{11}$.

$$6. \quad \begin{cases} (\sqrt[3]{10})^3 = 10 \\ (\sqrt[3]{2} + 2)^3 = 2 + 6\sqrt[3]{4} + 12\sqrt[3]{2} + 8 = 10 + 6\sqrt[3]{4} + 12\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{10})^3 < (\sqrt[3]{2} + 2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{2} + 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{10} - 2 < \sqrt[3]{2}.$$

$$7. \quad (\sqrt{2} + 1)^3 = 2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1 = 7 + 5\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}.$$

$$8. \quad (\sqrt{3} - 2)^3 = 3\sqrt{3} - 18 + 12\sqrt{3} - 8 = 15\sqrt{3} - 26 < 15\sqrt{3} - 25$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - 2 < \sqrt[3]{15\sqrt{3} - 25}.$$

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}. \quad 2. B = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}.$$

 **Lời giải.**

$$1. A = \sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2 (\sqrt{2}) + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{2^3 - 3 \cdot 2^2 (\sqrt{2}) + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3}$$

$$= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$$

$$2. B^3 = 182 + \sqrt{33125} + 182 - \sqrt{33125} + 3\sqrt[3]{182^2 - 33125}B = 364 - 3B.$$

$$\text{Nên } B^3 + 3B - 364 = 0 \Leftrightarrow (B - 7)(B^2 + 7B + 52) = 0 \Leftrightarrow B = 7$$

$$\left(\text{do } B^2 + 7B + 52 = \left(B + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{159}{4} > 0 \right).$$

□

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] \cdot a \sqrt[3]{a}.$$

$$2. B = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}.$$

 **Lời giải.**

$$1. \text{ Ta có } A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\frac{a}{a^2} \sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a} \sqrt[3]{a^2} \right) \right] a \sqrt[3]{a}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right) + \left(\sqrt[6]{\frac{1}{a}} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}} \right) \right] a \sqrt[3]{a}$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \sqrt[3]{a^2} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}} \right) a \sqrt[3]{a}$$

$$= a^2 - 3a + \sqrt[3]{a}.$$

$$2. \text{ Ta có } B = \sqrt[3]{a^2} \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \sqrt[3]{b^2} \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$= (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}) \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3}.$$

 **Bài 5.** Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$

2. $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x$

 **Lời giải.**

1. $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15 \Leftrightarrow 10\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5 \Leftrightarrow x = 125$.
 Vậy phương trình có một nghiệm $x = 125$.

2. Ta có $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3} = x-3 \Leftrightarrow x-3 = (x-3)^3$
 $\Leftrightarrow (x-3)[(x-3)^2 - 1] = 0$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x-2)(x-4) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 3; 4\}$.

 **Bài 6.** Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$.

2. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$
 $\Leftrightarrow 2x-1 + x-1 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 3x-2$
 $\Rightarrow 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)(3x-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$

Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{2}{3}\right\}$.

2. Ta có $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$
 $\Leftrightarrow x+5 + x+6 + 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)}(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}) = 2x+11$
 $\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -6 \\ x = -\frac{11}{2}. \end{cases}$

Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-5; -\frac{11}{2}; -6\right\}$.

§8 Ôn tập chương 1

1 Rút gọn biểu thức không chứa căn.

Dạng 26. Rút gọn biểu thức không chứa căn.

Chúng ta thực hiện bài toán rút gọn biểu thức không chứa căn thông qua những bước như sau:

B1: Tìm điều kiện xác định.

B2: Đưa các mẫu về dạng tích.

B3: Quy đồng mẫu.

B4: Rút gọn biểu thức.

 **13.** Nếu trong biểu thức tồn tại dạng $A : B$ thì chú ý điều kiện $B \neq 0$.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

 **Ví dụ 1.** Cho biểu thức $P = \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-5} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P .
2. Rút gọn biểu thức P .

Lời giải.

1. Điều kiện xác định

$$\begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \\ (x-5)(x+5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 5.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Ta có } P &= \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-5} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} + \frac{2(x+5)}{(x-5)(x+5)} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x-5+2(x+5)-(2x+10)}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \frac{1}{x+5}. \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 2.** Cho biểu thức $P = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} - \frac{18}{9-x^2}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P .
2. Rút gọn biểu thức P .

 **Lời giải.**

1. Biểu thức P xác định khi
$$\begin{cases} x + 3 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \\ 9 - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 3.$$

2. Ta có
$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} - \frac{18}{9-x^2} \\ &= \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} + \frac{18}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{3x-9+x+3+18}{(x-3)(x+3)} = \frac{4x+12}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{4(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x-3}. \end{aligned}$$

□

 **Ví dụ 3.** Cho các biểu thức $P = \frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x+3} + \frac{3x+2}{9-x^2}$ và $Q = 2 + \frac{(7-2x)x}{x^2-3x}$. Rút gọn biểu thức P và Q .

 **Lời giải.**

Điều kiện xác định: $x \neq \pm 3$ và $x \neq 0$.

$$P = \frac{x(x+3) - (x-3)(x+1) - (3x+2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+1}{(x-3)(x+3)}.$$

$$Q = 2 + \frac{7-2x}{x-3} = \frac{1}{x-3}.$$

□

Dạng 27. Bài toán phụ sau khi rút gọn biểu thức.

Sau khi thực hiện bài toán rút gọn, ta thực hiện thêm một số yêu cầu với biểu thức sau rút gọn, các yêu cầu đó có thể thuộc một trong các dạng sau:

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức.

Dạng 2: Giải phương trình.

Dạng 3: Giải bất phương trình.

Dạng 4: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Dạng 5: Bài toán số nguyên.

.....

   **BÀI TẬP MẪU**   

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-5} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P .
2. Rút gọn biểu thức P .
3. Tìm giá trị của P tại $x = 1$.
4. Tìm giá trị của x để $P = 2$.
5. Cho $P = -3$. Tính giá trị của biểu thức $Q = 9x^2 - 42x + 49$

Lời giải.

$$1. \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \\ (x-5)(x+5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 5.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-5} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} + \frac{2(x+5)}{(x-5)(x+5)} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x-5+2(x+5)-(2x+10)}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \frac{1}{x+5}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ Với } x = 1 \text{ thì } P = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}.$$

4. Ta có

$$P = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+5} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2x+10 \Leftrightarrow x = \frac{-9}{2} \text{ (TMĐKXD).}$$

Vậy $x = \frac{-9}{2}$.

5. Ta có

$$P = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{x+5} = -3 \Leftrightarrow 1 = -3x-15 \Leftrightarrow x = \frac{-16}{3}.$$

$$\text{Khi đó } Q = 9 \left(\frac{-16}{3} \right)^2 - 42 \cdot \frac{-16}{3} + 49 = 529.$$

□

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} - \frac{18}{9-x^2}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P .
2. Rút gọn biểu thức P .
3. Tìm giá trị x để $P > 0$.
4. Tìm giá trị nguyên của x để P là số nguyên.

Lời giải.

1. Biểu thức P xác định khi $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 9-x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 3.$

2. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} - \frac{18}{9-x^2} \\ &= \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} + \frac{18}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{3x-9+x+3+18}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{4x+12}{(x-3)(x+3)} = \frac{4(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x-3} \end{aligned}$$

3. $P > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-3} > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$

4. Với $x \in \mathbb{Z}$ thì

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-3 \in \mathbb{U}(4) \Leftrightarrow x-3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \Leftrightarrow x \in \{2; 4; 1; 5; -1; 7\}.$$

$$\text{Vậy } x \in \{2; 4; 1; 5; -1; 7\}.$$

□

Ví dụ 3. Cho các biểu thức $P = \frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x+3} + \frac{3x+2}{9-x^2}$ và $Q = 2 + \frac{(7-2x)x}{x^2-3x}.$

1. Rút gọn biểu thức P và $Q.$

2. Tìm x để $\frac{P}{Q} < 2.$

Lời giải.

1. ĐKXD: $x \neq \pm 3$ và $x \neq 0.$

$$P = \frac{x(x+3) - (x-3)(x+1) - (3x+2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+1}{(x-3)(x+3)}.$$

$$Q = 2 + \frac{7-2x}{x-3} = \frac{1}{x-3}.$$

2. $\frac{P}{Q} = \frac{2x+1}{x+3} = 2 - \frac{5}{x+3} < 2 \Leftrightarrow \frac{-5}{x+3} < 0 \Leftrightarrow x > -3.$ Kết hợp điều kiện suy ra $x > -3$ và $x \neq 0.$

□

2 Luyện tập

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{2-x}{3-x} - \frac{x-8}{x^2-x-6} \right) : \left(1 - \frac{x+6}{2x+4} \right).$

1. Rút gọn P và tìm điều kiện xác định của $P.$

2. Tính giá trị của P biết $|2x - 3| + 1 = x$.
3. Tìm x nguyên để $P \cdot (x - 1)$ có giá trị là số tự nhiên.

 Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{2-x}{3-x} - \frac{x-8}{x^2-x-6} \right) : \left(1 - \frac{x+6}{2x+4} \right) \\ &= \left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{2-x}{3-x} - \frac{x-8}{(x+2)(x-3)} \right) : \left(\frac{2x+4-x-6}{2x+4} \right) \\ &= \left(\frac{x^2-9+4-x^2-x+8}{(x+2)(x-3)} \right) : \left(\frac{x-2}{2(x+2)} \right) \\ &= \left(\frac{3-x}{(x+2)(x-3)} \right) \cdot \left(\frac{2(x+2)}{x-2} \right) \\ &= -\frac{2}{x-2}. \end{aligned}$$

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

2. $|2x - 3| + 1 = x \Leftrightarrow |2x - 3| = x - 1$ (điều kiện $x \geq 1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = x - 1 \\ 2x - 3 = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (loại)} \\ x = \frac{4}{3} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Với $x = \frac{4}{3}$ ta có $P = 3$.

3. $P \cdot (x - 1) = -\frac{2(x-1)}{x-2} = -2 - \frac{2}{x-2}$.

Để $P \cdot (x - 1)$ là số tự nhiên thì $x - 2 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$. Ta có bảng giá trị

$x - 2$	-2	-1	1	2
x	0	1	3	4
Kết luận	loại	thỏa mãn	loại	loại

Vậy với $x = 1$ thì $P \cdot (x - 1)$ có giá trị là số tự nhiên.

□

 **Bài 2.** Cho biểu thức $A = \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+2}$.

1. Với điều kiện nào của x thì giá trị của biểu thức A được xác định?
2. Rút gọn biểu thức A .
3. Tìm giá trị biểu thức A tại $x = 1$.

 Lời giải.

1. Giá trị của biểu thức A xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 2$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} + \frac{2}{x + 2} \\ &= \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{x(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} + \frac{2(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x^2 - x^2 - 2x + 2x - 4}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{-4}{(x - 2)(x + 2)}. \end{aligned}$$

3. Tại $x = 1$ thì ta có $A = \frac{-4}{(1 - 2)(1 + 2)} = \frac{4}{3}$.

□

Bài 3. Cho biểu thức $P = \frac{x + 2}{x + 3} - \frac{5}{x^2 + x - 6} + \frac{1}{2 - x}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P .
2. Rút gọn biểu thức P .
3. Tìm x để $P = \frac{-3}{4}$.
4. Tìm các giá trị nguyên của x để P cũng có giá trị nguyên.
5. Tính giá trị của biểu thức P khi $x^2 - 9 = 0$.

Lời giải.

$$1. P \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \neq 0 \\ x^2 + x - 6 \neq 0 \\ 2 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ (x + 3)(x - 2) \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x + 2}{x + 3} - \frac{5}{x^2 + x - 6} + \frac{1}{2 - x} \\ &= \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 3)(x - 2)} - \frac{5}{(x - 2)(x + 3)} - \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 2)} \\ &= \frac{x^2 - 4 - 5 - x - 3}{(x + 3)(x - 2)} \\ &= \frac{x^2 - x - 12}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{(x + 3)(x - 4)}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{x - 4}{x - 2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Ta có } P = \frac{-3}{4} &\Leftrightarrow \frac{x - 4}{x - 2} = \frac{-3}{4} \Leftrightarrow 4(x - 4) = -3(x - 2) \Leftrightarrow 4x - 16 = -3x + 6 \\ &\Leftrightarrow 7x = 22 \Leftrightarrow x = \frac{22}{7}. \end{aligned}$$

$$4. \text{ Có } P = 1 - \frac{2}{x - 2}.$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì để P nguyên thì $x - 2 \in \mathcal{U}(2)$

Hay $x \in \{\pm 1; \pm 2\} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 3; 4\}$.

$$5. x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \text{ kết hợp với điều kiện xác định } \Rightarrow x = 3 \Rightarrow P = \frac{3 - 4}{3 - 2} = -1.$$

□

3

Rút gọn biểu thức chứa căn

Trả lời và ghi nhớ các câu hỏi sau:

- i) Khi nào $\sqrt{A}$ có nghĩa (xác định)?
- ii) $\sqrt{A^2} = ?$
- iii) Khi nào $\sqrt{A^2} = A$?
- iv) Khi nào $\sqrt{A^2} = -A$?
- v) $(\sqrt{X} + \sqrt{Y})(\sqrt{X} - \sqrt{Y}) =$
- vi) $(\sqrt{X} + 1)(\sqrt{X} - 1) =$
- vii) $(\sqrt{X} - \sqrt{Y})^2 =$
- viii) $(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2 =$
- ix) $X\sqrt{X} - 1 =$
- x) $X\sqrt{X} + 1 =$

3.1 Rút gọn biểu thức chứa căn và các câu hỏi phụ

Dạng 28. Tính giá trị của biểu thức khi biết x

Đối với dạng toán này sau khi rút gọn biểu thức ta mới thay giá trị cụ thể của x vào. Trong nhiều bài tập x được cho dưới dạng $x = a^2 \pm 2a\sqrt{b} + b$ ta cần biến đổi $x = (a \pm \sqrt{b})^2$. Chú ý thêm một số công thức:

- i) $x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$
- ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

 **14.** Giá trị cụ thể của x phải thỏa mãn điều kiện xác định của biểu thức ban đầu (chứ không phải biểu thức đã rút gọn) thì ta mới thực hiện tính.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{x}{\sqrt{x} + 3} - \frac{x + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{6x + \sqrt{x}}{x - 9} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} - 1 \right), \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

Hãy rút gọn biểu thức B và tính giá trị của B khi $x = 12 + 6\sqrt{3}$.

 **Lời giải.**

$$B = \left(\frac{x}{\sqrt{x} + 3} - \frac{x + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{6x + \sqrt{x}}{x - 9} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} - 1 \right)$$

Giáo viên:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x(\sqrt{x}-3) - (x+1)(\sqrt{x}+3) + 6x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{\sqrt{x}-3 - \sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \\
 &= \frac{-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{-6} = \frac{1}{2(\sqrt{x}-3)}.
 \end{aligned}$$

Khi $x = 12 + 6\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})^2$ ta có $B = \frac{1}{2(3 + \sqrt{3} - 3)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. □

Ví dụ 2. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$. Hãy rút gọn B và tính giá trị của B khi $x = 3 + \sqrt{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{x} - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) \\
 &= \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{4} \\
 &= \sqrt{x} - 1
 \end{aligned}$$

Với $x = 3 + \sqrt{8} = (\sqrt{2} + 1)^2$ ta có $\sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$. Do đó $B = \sqrt{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}$. □

Ví dụ 3. Cho biểu thức

$$A = \left(5 - \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \cdot \left(5 + \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \text{ với } x \geq 0, y \geq 0 \text{ và } x \neq y.$$

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1 - \sqrt{3}, y = 1 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \left(5 - \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \cdot \left(5 + \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \\
 &= \left(5 - \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \cdot \left(5 + \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \\
 &= (5 - \sqrt{xy})(5 + \sqrt{xy}) \\
 &= 25 - xy.
 \end{aligned}$$

2. Vì $1 - \sqrt{3} < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $x \geq 0$ nên không tồn tại giá trị của A khi $x = 1 - \sqrt{3}, y = 1 + \sqrt{3}$. □

Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = \frac{2x - 11\sqrt{x} + 15}{(x - 4\sqrt{x} + 3)} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$.

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 11 + 6\sqrt{2}$.

 **Lời giải.**

1. Điều kiện xác định: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \\ &= 5 - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{4\sqrt{x}-14}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

2. Với $x = 11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$ ta có

$$P = \frac{4(3 + \sqrt{2}) - 14}{3 + \sqrt{2} - 3} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = 4 - \sqrt{2}.$$

□

Dạng 29. Tìm x để biểu thức thỏa mãn phương trình

Đối với dạng toán này ta sử dụng biểu thức đã rút gọn để thay vào phương trình của đề bài, từ đó thực hiện giải phương trình bậc nhất hoặc bậc hai để tìm x .

 **15.** Giá trị của x tìm được phải thỏa mãn điều kiện xác định của biểu thức ban đầu (chứ không phải biểu thức đã rút gọn).

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}}{x-9}$, với $x \geq 0; x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của x để $P = 2$.

 **Lời giải.**

$$\text{a) } P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 3\sqrt{x}}{x-9} = \frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{x-9} = \frac{x}{x-9}.$$

$$\text{b) } P = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-9} = 2 \Leftrightarrow x = 2x - 18 \Leftrightarrow x = 18 \text{ (nhận).}$$

□

 **Ví dụ 2.** Cho biểu thức $P = \frac{(x+1)(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - x - \sqrt{x}$, với $x > 0$.

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức P bằng 2.

 **Lời giải.**

1. Với $x > 0$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(x+1)\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} - x - \sqrt{x} \\ &= (x+1)(\sqrt{x}+1) - x - \sqrt{x} \\ &= x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1 - x - \sqrt{x} \\ &= x\sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

2. Với $x > 0$, theo câu a) ta có $P = 2$ khi

$$x\sqrt{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $P = 2$ khi $x = 1$.

□

 **Ví dụ 3.** Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right) \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm giá trị của x để $A = 1$.

 **Lời giải.**

1. Ta có $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$
 $= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$
 $= \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$
 $= \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$
2. $A = 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$
 Vậy với $x = 4$ thì $A = 1$.

□

 **Ví dụ 4.** Cho biểu thức $P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tìm các giá trị x sao cho $3P = 1 + x$.

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{x - 1}. \end{aligned}$$

2. $3P = 1 + x \Leftrightarrow \frac{3}{x - 1} = 1 + x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ vì $x > 0$ và $x \neq 1$.

□

Dạng 30. Tìm x để biểu thức thỏa mãn bất phương trình

Đối với dạng toán này, ta thay biểu thức sau khi rút gọn vào phương trình. Cần chú ý các công thức

- i) Nếu $ab \geq 0$ và $b > 0$ thì $a \geq 0$.
- ii) Nếu $\frac{a}{b} \geq 0$ và $a > 0$ thì $b > 0$.
- iii) Khi nhân hai vế với số âm thì phải đổi chiều của bất phương trình.
- iv) $0 \leq a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

 **16.** Sau khi giải bất phương trình phải kết hợp với điều kiện xác định ban đầu để đưa ra tập nghiệm đúng.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x}{x - 2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4\sqrt{x} + 4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm tất cả các giá trị của x để $P > 0$.

Lời giải.

1. Với điều kiện $x > 0, x \neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x}{x - 2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4\sqrt{x} + 4} = \left(\frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} + \frac{x}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 2)^2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{x}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2). \end{aligned}$$

2. Với điều kiện $x > 0, x \neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} P > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có $x > 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

 **Ví dụ 2.** Cho biểu thức

$$P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right) \text{ (với } x > 0, x \neq 1)$$

. Rút gọn biểu thức P và tìm các giá trị của x để $P > 1$.

 **Lời giải.**

Với $x > 0$ và $x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}+1) - 2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Khi đó $P > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$.

Kết hợp với điều kiện ta được $P > 1$ khi và chỉ khi $0 < x < 4$ và $x \neq 1$.

 **Ví dụ 3.** Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \quad (x > 0; x \neq 1).$$

1. Rút gọn A .

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{\sqrt{x}} > 3$.

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{x-1} \cdot \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= \frac{-4\sqrt{x}(1-x)^2}{x-1} \cdot \frac{1-x}{4x} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2. Ta có $\frac{A}{\sqrt{x}} > 3 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 3 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x}{x} > 0 \Leftrightarrow 1-4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$.

Vậy $0 < x < \frac{1}{4}$.



Dạng 31. Tìm x để biểu thức nhận giá trị nguyên

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$; $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.
- Rút gọn biểu thức $T = A - B$.
- Tìm x để T là số nguyên.

Ví dụ 2. Cho biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Ví dụ 3.

Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

- Tìm x để $P(x)$ xác định và rút gọn $P(x)$.
- Tìm các giá trị của x để biểu thức $Q(x) = \frac{2\sqrt{x}}{P(x)}$ nhận giá trị nguyên.

4

Giải phương trình chứa căn

Dạng 32. Giải phương trình chứa căn

Để giải phương trình có căn bậc hai, căn bậc ba, ta thực hiện theo các bước:

- ☑ Đặt điều kiện phương trình có nghĩa ($\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$).
- ☑ Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$; $\sqrt[3]{A^3B} = A\sqrt[3]{B}$.
- ☑ Rút gọn các căn thức đồng dạng.
- ☑ Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ (với $B \geq 0$) hoặc $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2 + x} = x - 1$;

4. $\sqrt{x^2 - 3} = 0$;

2. $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{4x}$;

5. $2 - \sqrt{x^2 - 2} = 0$;

3. $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x}$;

6. $x + \sqrt{3x + 10} = 0$.

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\sqrt{x^2 + x} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 + x = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 + x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ loại.}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

2. Ta có

$$\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{4x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 0 \\ x^2 + 3 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = 3 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = 3 \end{bmatrix}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{1; 3\}$.

3. Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

$$2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} = 27 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 27 \Leftrightarrow 3x = 729 \Leftrightarrow x = 243.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 243$.

4.

$$\sqrt{x^2 - 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.

5.

$$2 - \sqrt{x^2 - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq 0 \text{ luôn đúng} \\ x^2 - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{6}$.

6. Ta có

$$x + \sqrt{3x + 10} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x + 10} = -x$$

Điều kiện xác định: $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

$$3x + 10 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 5 \\ x = -2 \end{bmatrix}.$$

So với điều kiện xác định, ta có nghiệm của phương trình $x = -2$.

□

Ví dụ 2. Giải phương trình

1. $\sqrt[3]{2x+1} = 3;$

2. $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1}.$

Lời giải.

1. Ta có

$$\sqrt[3]{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 27 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+1} &= \sqrt[3]{x^2-1} \Leftrightarrow x+1 = x^2-1 \Leftrightarrow x+1 = (x-1)(x+1) \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-1-1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

□

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

1. $x^6 - 5x^3 - 24 = 0;$

2. $\sqrt[3]{2x+1} - 1 = 2x$

Lời giải.

1. Biến đổi phương trình về dạng

$$\begin{aligned} x^6 + 3x^3 - 8x^3 - 24 &= 0 \Leftrightarrow x^3(x^3+3) - 8(x^3+3) = 0 \Leftrightarrow (x^3+3)(x^3-8) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+3=0 \\ x^3-8=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{-3} \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \sqrt[3]{-3}$ hoặc $x = 2$.

2. Biến đổi phương trình về dạng

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2x+1} &= 2x+1 \Leftrightarrow 2x+1 = (2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x+1)[(2x+1)^2-1] = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ (2x+1)^2=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \\ 2x+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x \in \left\{-1; 0; -\frac{1}{2}\right\}.$

□

5**Luyện tập****Bài 1.** Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2x-3} - \sqrt{3} = 0$;
2. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x-5} = 0$;
3. $\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{\frac{x^2}{2}} - 8 = 0$;
4. $\sqrt{2x^2-2x\sqrt{6}+3} - \sqrt{5-\sqrt{24}} = 0$;
5. $\sqrt{25x+25} - \sqrt{16x+16} = 12 - \sqrt{4(x+1)}$.

 Lời giải.

1. Ta có

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x-3 = 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

2. Ta có

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x-5} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = \sqrt{x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 3-x = x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

3.

$$\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{\frac{x^2}{2}} - 8 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 8 \geq 0 & (1) \\ x^2 + 4x = \frac{x^2}{2} - 8 & (2) \end{cases}$$

$$\checkmark (1) \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \Leftrightarrow |x| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq 4. \end{cases}$$

$$\checkmark (2) \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ (thỏa (1) nên nhận)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -4$.

4. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-2x\sqrt{6}+3} - \sqrt{5-\sqrt{24}} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2}x-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = 0 \\ \Leftrightarrow |\sqrt{2}x-\sqrt{3}| - |\sqrt{3}-\sqrt{2}| &= 0 \Leftrightarrow |\sqrt{2}x-\sqrt{3}| = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x-\sqrt{3} = -(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = 2\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6}-1 \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 1$ hoặc $x = \sqrt{6}-1$.

□

 Bài 2. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2-9} - \sqrt{x-3} = 0$;
2. $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$;
3. $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$.

 Lời giải.

1. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$

Biến đổi phương trình về dạng

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)(x+3)} - \sqrt{x-3} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}(\sqrt{x+3} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 0 \\ \sqrt{x+3} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \\ x+3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

So với điều kiện xác định, ta có nghiệm $x = 3$.

2. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2}.$

Biến đổi phương trình về dạng

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} &= \sqrt{x+4} \Leftrightarrow 1+x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} = x+4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} &= 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} &\Leftrightarrow x=0. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

3. Biến đổi phương trình về dạng

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sqrt{4(x-2)} - 9\sqrt{\frac{x-2}{9^2}} &= 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{x-2} - 9 \cdot \frac{1}{9}\sqrt{x-2} = 6 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} &= 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 6 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 &\Leftrightarrow x-2 = 9 \Leftrightarrow x = 11. \end{aligned}$$

Thay $x = 11$ vào phương trình ban đầu, ta thấy thỏa, vậy $x = 11$ là nghiệm cần tìm.

□

 **Bài 3.** Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 0;$
2. $\sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{x^2-9};$
3. $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x+1} = 1.$

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow |x^2-4| + |x-2| &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

2. Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+3} &= \sqrt[3]{x^2-9} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3} (\sqrt[3]{x-3}-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+3} = 0 \\ \sqrt[3]{x-3} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 0 \\ x-3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -3$ hoặc $x = 4$.

3. Điều kiện xác định: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = t^2 - 1$. Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{t^2+1} - t &= 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{t^2+1} = t+1 \\ \Leftrightarrow t^2+1 &= t^3+3t^2+3t+1 \Leftrightarrow t^3+2t^2+3t = 0 \\ \Leftrightarrow t(t^2+2t+3) &= 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ (Vì } t^2+2t+3 > 0 \text{)}.\end{aligned}$$

Khi đó ta có $\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. So với điều kiện, ta có nghiệm của bài toán là $x = -1$.

□

6 Các bài toán nâng cao

Bài 4. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

 **Lời giải.**

Ta có $A = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-1+3-\sqrt{5} = 2$.

□

Bài 5. Rút gọn $A = \sqrt{127-48\sqrt{7}} - \sqrt{127+48\sqrt{7}}$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{64-2 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{7}+63} + \sqrt{64+2 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{7}+63} \\ &= \sqrt{(8-3\sqrt{7})^2} + \sqrt{(8+3\sqrt{7})^2} \\ &= |8-3\sqrt{7}| + |8+3\sqrt{7}| \\ &= 8-3\sqrt{7}+8+3\sqrt{7} = 16.\end{aligned}$$

□

Bài 6. Tính $A = \frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}A &= \frac{(1+\sqrt{11})(2-\sqrt{11})}{4-11} + \sqrt{\frac{2(18+5\sqrt{11})}{49}} = \frac{-9+\sqrt{11}}{-7} + \frac{\sqrt{36+10\sqrt{11}}}{7} \\ &= \frac{9-\sqrt{11}}{7} + \frac{5+\sqrt{11}}{7} = \frac{14}{7} = 2.\end{aligned}$$

□

Bài 7. Rút gọn biểu thức $P = \frac{4 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{4 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}} = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} + \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2 - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}} + \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2 - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{10}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{10}}{3 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{24\sqrt{2} - 10\sqrt{2}}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 8. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(3 + \sqrt{5})}{4 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} + \frac{2(3 - \sqrt{5})}{4 - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{4 + \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}} + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4 - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} + 5} + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{5 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2. \end{aligned}$$

□

Bài 9. Khử căn ở mẫu số biểu thức $A = \frac{59}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{59}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{8 + 2\sqrt{15} - 7} = \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(1 - 2\sqrt{15})}{(1 + 2\sqrt{15})(1 - 2\sqrt{15})} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(1 - 2\sqrt{15})}{1 - 60} = (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1). \end{aligned}$$

□

Bài 10. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2}} + \frac{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2}}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}} + \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2}} + \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2}} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+1} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}+1} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}}{6} = 1. \end{aligned}$$

□

Bài 11. Tính tổng $S = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2013}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2}}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Áp dụng tính chất trên cho từng số hạng của tổng trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\dots \\ \frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2013}} &= \frac{\sqrt{2013}}{2} - \frac{\sqrt{2011}}{2}. \end{aligned}$$

Cộng theo từng vế ta được $S = \frac{\sqrt{2013}-\sqrt{3}}{2}$.

□

Bài 12. Rút gọn biểu thức sau

$$X = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}.$$

Lời giải.

Với mọi số tự nhiên $n > 0$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{\frac{[n(n+1)]^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{(n^2+n)^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(n^2+n)^2+2(n^2+n)+1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}} = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả trên ta được

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}} \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + 1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \\ &= 2017 + 1 - \frac{1}{2018} = 2018 - \frac{1}{2018} = \frac{2018^2 - 1}{2018}. \end{aligned}$$

□

Bài 13. Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt[3]{3\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} - 1}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1}$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt[3]{2})^3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} + \sqrt{2} + 1 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1} = 1.$$

□

Bài 14. Đặt $m = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $(m^3 + 3m - 1)^{100}$.

 **Lời giải.**

$$\text{Gọi } m = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}.$$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} = a \text{ và } b = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \text{ thì } a^3 + b^3 = 2 \text{ và } ab = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = -1.$$

$$\text{Từ hằng đẳng thức } (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \text{ ta có } m^3 = 2 - 3m \text{ nên } m^3 + 3m - 2 = 0.$$

$$\text{Suy ra } m^3 + 3m - 1 = 1. \text{ Do đó } (m^3 + 3m - 1)^{100} = 1.$$

□

Bài 15. Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$. Tính $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2017}$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } x\sqrt{2} = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = (\sqrt{7} + 1) - (\sqrt{7} - 1) = 2 \text{ nên } x = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } A = [(\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} - 1]^{2017} = 1.$$

□

Bài 16. Cho $x = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$. Tính $P = (1 + 5x^{2015} - x^{2017})^{2018}$.

 **Lời giải.**

Từ giả thiết ta thấy $x > 0$, ta thực hiện phép biến đổi

$$x = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} + 2\sqrt{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P &= (1 + 5x^{2015} - x^{2017})^{2018} = (1 + 5\sqrt{5}^{2015} - \sqrt{5}^{2017})^{2018} \\ &= (1 + \sqrt{5}^{2017} - \sqrt{5}^{2017})^{2018} = 1^{2018} = 1. \end{aligned}$$

□

Bài 17. Cho $x = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. Tính giá trị biểu thức $A = (77x^2 + 35x + 646)^{2017}$.

Lời giải.

Ta tính x như sau

$$\checkmark (\sqrt{5}-1)\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} = (\sqrt[3]{\sqrt{5}-1})^3 \cdot 2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 2\sqrt[3]{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)^3} = 2\sqrt[3]{8} = 4.$$

$$\checkmark \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3} = (\sqrt[3]{1+\sqrt{3}})^3 - \sqrt{3} = 1.$$

Do đó $x = 4$.

Thay vào A ta có $A = (77 \cdot 4^2 + 35 \cdot 4 + 646)^{2017} = 2018^{2017}$. □

Bài 18. Cho $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = (12x^2 + 4x - 55)^{2017}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 2.$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5} = \sqrt{5}+1-\sqrt{5} = 1.$$

Vậy $x = 2$. Thay giá trị x vào P ta được

$$P = (12 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 55)^{2017} = 1^{2017} = 1. \quad \square$$

Bài 19. Tính giá trị của biểu thức $M = (x-y)^3 + 3(x-y)(xy+1)$ biết

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}; y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

Áp dụng biến đổi $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$, ta có

$$x^3 = 4\sqrt{2} - 3x \Rightarrow x^3 + 3x = 4\sqrt{2}.$$

$$y^3 = 24\sqrt{2} - 3y \Rightarrow y^3 + 3y = 24\sqrt{2}.$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên ta được $x^3 - y^3 + 3(x-y) = -20\sqrt{2}$. Suy ra $M = -20\sqrt{2}$. □

Bài 20. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{2(\sqrt{a^2+1}-a)(\sqrt{a^2+1}-1)}$, với $a > 0$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } B^2 = 2(\sqrt{a^2+1}-a)(\sqrt{a^2+1}-1).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} B^2 &= 2[a^2+1-(a+1)\sqrt{a^2+1}+a] = (a^2+1+2a)-2(a+1)\sqrt{a^2+1}+(a^2+1) \\ &= (a+1-\sqrt{a^2+1})^2. \end{aligned}$$

Vì $a > 0$ nên $B = a+1-\sqrt{a^2+1}$.

Vậy $A = \sqrt{a^2+1} + a+1-\sqrt{a^2+1} = a+1$. □

Bài 21. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ với } a > b > 0.$$

Rút gọn biểu thức P .

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}) + \sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{a+b-a+b} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2b} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a^2+b^2}{b}. \end{aligned}$$

□

Bài 22. Cho biểu thức

$$Q = \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}} \text{ với } a > 0; b > 0; a \neq b.$$

Chứng minh rằng giá trị biểu thức Q không phụ thuộc vào a, b .

 **Lời giải.**

Với $a > 0; b > 0; a \neq b$, ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a}(a-b)} \\ &= \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{3\sqrt{a}(a - \sqrt{ab} + b)}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{3\sqrt{a}(a - \sqrt{ab} + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (3a^2 + 3b\sqrt{ab})}{(3a^2 + 3b\sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{3\sqrt{a}(a\sqrt{a} + b\sqrt{b}) - 3a^2 - 3b\sqrt{ab}}{(3a^2 + 3b\sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{3a^2 + 3b\sqrt{ab} - 3a^2 - 3b\sqrt{ab}}{(3a^2 + 3b\sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = 0. \end{aligned}$$

□

📌 **Bài 23.** Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ với điều kiện $x \geq 2$.
 ✍ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$.

Tương tự ta cũng có

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-1,$$

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1),$$

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}-1).$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{(\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{2x-1}+1} = \sqrt{2}\sqrt{x-1}.$$

□

📌 **Bài 24.** Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = a \cdot \sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} + b \cdot \sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} + c \cdot \sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}}.$$

✍ **Lời giải.**

Sử dụng giả thiết, ta có

$$\begin{cases} 1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = (a+b)(a+c) \\ 1+b^2 = ab+bc+ca+b^2 = (b+c)(b+a) \\ 1+c^2 = ab+bc+ca+c^2 = (c+a)(c+b). \end{cases}$$

Với a, b, c không âm ta có

$$\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2} = \frac{(c+a)(c+b)(a+b)(a+c)}{(b+c)(b+a)} = (a+c)^2.$$

$$\text{Nên } b \cdot \sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} = b \cdot |a+c| = b \cdot (a+c).$$

Từ các biểu thức tương tự, ta được

$$P = a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2(ab+bc+ca) = 2.$$

□

📌 **Bài 25.** Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-13}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.
 ✍ **Lời giải.**

Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}-13}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-13}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(2\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\sqrt{x} - 13 - (x - 9) + 2x - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{x - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}.
 \end{aligned}$$

□

Bài 26. Cho biểu thức

$$P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

Rút gọn P .

 **Lời giải.**

Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) + 1 + 2x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} + x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}.
 \end{aligned}$$

□

Bài 27. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \text{ với } 0 \leq x \neq 1.$$

Rút gọn biểu thức P .

 **Lời giải.**

Với điều kiện $0 \leq x \neq 1$, ta biến đổi biểu thức P

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \\
 &= \left(\frac{x + 2}{(\sqrt{x})^3 - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \\
 &= \frac{x + 2 + \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (x + \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \\
 &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1}.
 \end{aligned}$$

□

Bài 28. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{3\sqrt{x} + 1}{1 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2}{x - 1} \right) \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

Rút gọn biểu thức A.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}+1}{1-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1) + (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1) - (3\sqrt{x}+1)}{x-1} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 2}{x-1} \\ &= \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x + \sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

□

 **Bài 29.** Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$.

Rút gọn biểu thức $B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1}$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\ &= x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x} = 2x. \end{aligned}$$

Khi đó $B = 1 - \sqrt{4x - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - |2\sqrt{x} - 1|$.

Vì $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ nên $2\sqrt{x} - 1 \leq 0$. Do đó $B = 1 + (2\sqrt{x} - 1) = 2\sqrt{x}$.

□

 **Bài 30.** Cho biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1} + \frac{\sqrt{n+1}+3}{\sqrt{n+1}-3} - \frac{n-\sqrt{n+1}+7}{n-2\sqrt{n+1}-2} \text{ với } n \in \mathbb{N}, n \neq 8.$$

Rút gọn biểu thức $Q = \frac{P}{n + 3\sqrt{n+1} + 1}$ với $n \in \mathbb{N}, n \neq 8$.

 **Lời giải.**

$$\text{Quy đồng } P = \frac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}-3) + (\sqrt{n+1}+3)(\sqrt{n+1}+1) - (n-\sqrt{n+1}+7)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-3)}.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+1)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-3)} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-3}.$$

$$\text{Suy ra } Q = \frac{P}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+3)} = \frac{1}{n-8}.$$

□

Bài 31. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$. Rút gọn A . Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải.

Điều kiện $x > 4$.

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4} - 2|}{x-4}.$$

$$\text{Nếu } x > 8 \text{ thì } A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}.$$

$$\text{Nếu } 4 < x \leq 8 \text{ thì } A = \frac{4x}{x-4}.$$

$$\text{Với } A = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}.$$

$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 16 : (x-4)$. Do $x \in \mathbb{Z}, 4 < x \leq 8$ nên $x \in \{5, 6, 8\}$.

$$\text{Với } A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} \in \mathbb{Z} \text{ thì do } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } \sqrt{x-4} = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \frac{2(a^2+4)}{a} = 2a + \frac{8}{a} \Rightarrow 8 : a.$$

Lại có $x > 8 \Rightarrow a > 2$, do đó $a = 4$ hoặc $a = 8$. Từ đó suy ra $x = 20$ hoặc $x = 68$.

Vậy $x \in \{5, 6, 8, 20, 68\}$. □

Bài 32. Cho $a \geq 0, a \neq 1$. Rút gọn biểu thức

$$S = \sqrt{6-4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1 \right].$$

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 2-\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} = 2+\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} = \sqrt[3]{(\sqrt{a}-1)^3} = \sqrt{a}-1$$

$$\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1 = \frac{\sqrt{a}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{a}-1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } S = (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) + (\sqrt{a}-1) : \frac{\sqrt{a}-1}{2} = 4 - 2 + 2 = 4. \quad \square$$

Bài 33. Chứng minh rằng $\sqrt{2009^2 + 2009^2 \cdot 2010^2 + 2010^2}$ là một số nguyên dương.

Lời giải.

Đặt $a = 2009$, ta có

$$\begin{aligned} 2009^2 + 2009^2 \cdot 2010^2 + 2010^2 &= a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 \\ &= a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \\ &= a^4 + a^2 + 1 + 2a^3 + 2a^2 + 2a \\ &= (a^2 + a + 1)^2. \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt{2009^2 + 2009^2 \cdot 2010^2 + 2010^2} = \sqrt{(a^2 + a + 1)^2} = a^2 + a + 1$ là một số nguyên dương. □

Bài 34. Chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{2} = a \Leftrightarrow 2 = a^3$.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[3]{a-1} = \frac{1-a+a^2}{\sqrt[3]{9}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{9(a-1)} = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow (a^2 - a + 1)^3 = 9(a-1).$$

Ta có

$$\begin{aligned} (a^2 - a + 1)^3 &= (a^2 - a + 1)^2(a^2 - a + 1) = (a^4 + a^2 + 1 - 2a^3 - 2a + 2a^2)(a^2 - a + 1) \\ &= (2a + 3a^2 + 1 - 4 - 2a)(a^2 - a + 1) = 3(a^2 - 1)(a^2 - a + 1) \\ &= 3(a-1)(a+1)(a^2 - a + 1) = 3(a-1)(a^3 + 1) \\ &= 9(a-1) \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

□

Bài 35. Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn

$$a - b = \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - a^2}.$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 = 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} a - b = \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - a^2} &\Leftrightarrow a + \sqrt{1 - a^2} = b + \sqrt{1 - b^2} \Leftrightarrow a\sqrt{1 - a^2} = b\sqrt{1 - b^2} \\ \Rightarrow a^2 - a^4 &= b^2 - b^4 \Leftrightarrow a^4 - b^4 - (a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Theo đề bài ta có $a \neq b$ nên $a^2 - b^2 \neq 0$, suy ra $a^2 + b^2 - 1 = 0$ hay $a^2 + b^2 = 1$.

□

Bài 36. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a-2018} + \sqrt{b-2018}.$$

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2018} \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} = 2018.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a-2018} + \sqrt{b-2018} &= \sqrt{a - \frac{ab}{a+b}} + \sqrt{b - \frac{ab}{a+b}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a+b}} = \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{a+b}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{a+b}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

□

7 Bài tập trắc nghiệm

📁 **Bài 37.** Khi quy đồng mẫu thức các phân thức $\frac{xy}{x^2 - y^2}$; $\frac{y}{xy - x^2}$; $\frac{xy}{y^2 - xy}$ thì mẫu chung là

- (A) $x^2 - y^2$. (B) $x(x^2 - y^2)$. (C) $xy(x^2 - y^2)$. (D) $xy(x^2 + y^2)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

✓ $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

✓ $xy - x^2 = x(y - x)$.

✓ $y^2 - xy = y(y - x)$

⇒ mẫu chung là $xy(x - y)(x + y) = xy(x^2 - y^2)$.

Chọn đáp án (C) □

📁 **Bài 38.** Điều kiện xác định của biểu thức $P = \frac{x+1}{1-x} + \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$ là

- (A) $x \neq 1$. (B) $x \neq \pm 1$. (C) $x < 1$. (D) $x > 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ nên điều kiện xác định là $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Chọn đáp án (A) □

📁 **Bài 39.** Kết quả rút gọn phân thức $\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 12}$ là

- (A) $\frac{2-x}{3}$. (B) $\frac{x-2}{3(x+2)}$. (C) $-\frac{2+x}{3}$. (D) $\frac{2+x}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 12} = \frac{(x-2)^2}{3(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{3(x+2)}$.

Chọn đáp án (B) □

📁 **Bài 40.** Điều kiện để biểu thức $\frac{2017}{\sqrt{x} - 2}$ xác định là

- (A) $0 \leq x < 4$. (B) $x > 4$. (C) $0 \leq x \neq 4$. (D) $x \neq 4$.

📁 **Bài 41.** Giá trị của biểu thức $\sqrt{(3a-1)^2}$ là

- (A) $3a - 1$. (B) $1 - 3a$. (C) $3a - 1$ và $1 - 3a$. (D) $|3a - 1|$.

📁 **Bài 42.** Biết rằng $\sqrt{x} > 1$, rút gọn $P = \sqrt{(1 - \sqrt{x})^2}$

- (A) $\sqrt{x} - 1$. (B) $1 - \sqrt{x}$. (C) $(1 - \sqrt{x})^2$. (D) $(\sqrt{x} - 1)^2$.

📁 **Bài 43.** Biết rằng $1 \leq a < 2$, giá trị của biểu thức $\sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$ là

- (A) $\sqrt{a-1} - 1$. (B) $1 - \sqrt{a-1}$. (C) $\sqrt{a-1}$. (D) $(\sqrt{a-1} - 1)^2$.

📁 **Bài 44.** Phân tích $P = x\sqrt{x} - 8$ thành nhân tử

- (A) $(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)$. (B) $(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)$.
(C) $(\sqrt{x} - 2)^3$. (D) $(\sqrt{x} + 2)^3$.

Bài 45. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{5}x - \sqrt{80} = 0$.

☒ A $x = 4$.

☐ B $x = 16$.

☐ C $x = -4$.

☐ D $x = -16$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{5}x - \sqrt{80} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}x = \sqrt{80} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4.$$

Chọn đáp án ☒ A

□

Bài 46. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{11}x^2 - \sqrt{44} = 0$.

☐ A $x = \pm 2$.

☐ B $x = 2$.

☐ C $x = -2$.

☒ D $x = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{11}x^2 - \sqrt{44} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}} = \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án ☒ D

□

Bài 47. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $3x + 2\sqrt{32} - \sqrt{8} = 0$.

☐ A $x = 2\sqrt{2}$.

☐ B $x = 3\sqrt{2}$.

☒ C $x = -2\sqrt{2}$.

☐ D $x = -3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$3x + 2\sqrt{32} - \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow 3x + 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 3x + 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = -2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án ☒ C

□

Bài 48. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 + 8} = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A Phương trình có nghiệm $x = \pm 2$.

☐ B Phương trình có nghiệm $x = 0$.

☒ C Phương trình vô nghiệm.

☐ D Phương trình vô số nghiệm.

Lời giải.

Vì $x^2 \geq 0, \forall x$ nên $2x^2 + 8 \geq 8, \forall x$, nên phương trình trên vô nghiệm.

Chọn đáp án ☒ C

□

Bài 49. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{4(2-x)^2} = 10$.

☐ A $x = -3$.

☐ B $x = 7$.

☒ C $x = -3$ hoặc $x = 7$.

☐ D $x = -7$.

Lời giải.

Ta có $4(2-x)^2 \geq 0, \forall x$, biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{4(2-x)^2} = 10 \Leftrightarrow 4(2-x)^2 = 100 \Leftrightarrow (2-x)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=5 \\ 2-x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=7 \end{cases}.$$

□

Bài 50. Tính giá trị của biểu thức $Q = \left(\frac{2\sqrt{32}}{\sqrt{3}} - 1 \right) : \left(7 + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$.

☐ A $Q = \sqrt{3}$.

☐ B $Q = \sqrt{2}$.

☒ C $Q = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

☐ D $Q = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

 Lời giải.

Ta có

$$Q = \left(\frac{2\sqrt{32}}{\sqrt{3}} - 1 \right) : \left(7 + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{8\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} : \frac{8\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án **C** □ **Bài 51.** Kết quả của phép tính $\frac{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ bằng

A $3 + 2\sqrt{2}.$

B $1 + \sqrt{2}.$

C $\sqrt{2} - 1.$

D $2 - \sqrt{2}.$

 Lời giải.

Ta có

$$\frac{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{9-2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}+8}}{\sqrt{2-2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1+1}} = \frac{\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}-1.$$

Chọn đáp án **C** □ **Bài 52.** Rút gọn biểu thức $S = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$ ta được kết quả

A $A = 2\sqrt{5}.$

B $A = \sqrt{5}.$

C $A = 3.$

D $A = 6.$

 Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{4}} + \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{4}} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □ **Bài 53.** Giá trị của biểu thức $(4 - \sqrt{15})(\sqrt{10} + \sqrt{6})\sqrt{4 + \sqrt{15}}$ bằng

A $2.$

B $\sqrt{10} + \sqrt{6}.$

C $\sqrt{10} - \sqrt{6}.$

D $\sqrt{5} - \sqrt{3}.$

 Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (4 - \sqrt{15})(\sqrt{10} + \sqrt{6})\sqrt{4 + \sqrt{15}} &= (4 - \sqrt{15})(\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \\ &= (4 - \sqrt{15})(\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} \\ &= (4 - \sqrt{15})(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = (4 - \sqrt{15})(8 + 2\sqrt{15}) \\ &= 2(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15}) = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

📁 **Bài 54.** Tính giá trị của $T = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$.

(A) $T = 4$.

(B) $T = 3$.

(C) $T = 2$.

(D) $T = 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

📁 **Bài 55.** Với giá trị nào của x thì $\sqrt[3]{x} \geq 4$?

(A) $x \geq 64$.

(B) $x < 64$.

(C) $x \geq 16$.

(D) $0 < x < 8$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt[3]{x} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 4^3 \Leftrightarrow x \geq 64.$$

Chọn đáp án (A) □

📁 **Bài 56.** Khi $x = -\sqrt{2}$ thì giá trị của $4x - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{\sqrt{x + 2}}$ bằng

(A) $-6\sqrt{2}$.

(B) $-5\sqrt{2}$.

(C) $-7\sqrt{2}$.

(D) $4\sqrt{2}$.

✍ **Lời giải.**

Khi $x = -\sqrt{2}$ ta được

$$-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{-2\sqrt{2} + 4}}{\sqrt{-\sqrt{2} + 2}} = -6\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{2} + 2}}{\sqrt{-\sqrt{2} + 2}} = -6\sqrt{2} + \sqrt{2} = -5\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

📁 **Bài 57.** Với $a > 0$ biểu thức $P = \frac{\sqrt{a} - 1}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a} : \frac{1}{a^2 + \sqrt{a}}$ có kết quả bằng

(A) $\sqrt{a} - 1$.

(B) -1 .

(C) 1 .

(D) $a - 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a} - 1}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a} : \frac{1}{a^2 + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} (a\sqrt{a} + 1) (\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} (a - \sqrt{a} + 1)} = \frac{(a\sqrt{a} + 1) (\sqrt{a} - 1)}{a - \sqrt{a} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + 1) (a - \sqrt{a} + 1) (\sqrt{a} - 1)}{a - \sqrt{a} + 1} = (\sqrt{a} + 1) (\sqrt{a} - 1) = a - 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Bài 58. Tìm x sao cho $\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$.

(A) $x = 5$.

(B) $x = 6$.

(C) $x = 7$.

(D) $x = 9$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 2\sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} - \sqrt{x-5} = 2\sqrt{x-5}.$$

Khi đó

$$2\sqrt{x-5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Leftrightarrow x-5 = 4 \Leftrightarrow x = 9.$$

Chọn đáp án (D) □

Bài 59. Cho biểu thức $M = \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x-1}\right) : \frac{x-2\sqrt{x}}{x-1}$, với $x \geq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$. Với giá trị nào của x thì $M = \frac{1}{2}$?

(A) $x = 8$.

(B) $x = 16$.

(C) $x = 32$.

(D) $x = 64$.

 **Lời giải.**

Với điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} M &= \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x-1}\right) : \frac{x-2\sqrt{x}}{x-1} = \frac{x-1-4\sqrt{x}+4+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-4 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Chọn đáp án (B) □

§9 Giới thiệu đề kiểm tra 1 tiết chương 1

1 Đề số 1- Tự Luận cho HS đại trà

Bài 1. Tìm giá trị của x để các biểu thức sau xác định.

1. $\sqrt{2x} - 1$.

2. $\sqrt{3 - \frac{1}{2}x}$.

Lời giải.

1. Biểu thức $\sqrt{2x} - 1$ xác định khi và chỉ khi $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.
Vậy $x \geq 0$ thì biểu thức xác định.

2. Biểu thức $\sqrt{3 - \frac{1}{2}x}$ xác định khi và chỉ khi $3 - \frac{1}{2}x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$.
Vậy $x \leq 6$ thì biểu thức có nghĩa.

□

Bài 2. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần $7\sqrt{2}$; $4\sqrt{5}$; $6\sqrt{3}$; $\sqrt{97}$; $3\sqrt{11}$.

Lời giải.

Ta có $7\sqrt{2} = \sqrt{98}$; $4\sqrt{5} = \sqrt{80}$; $6\sqrt{3} = \sqrt{108}$; $3\sqrt{11} = \sqrt{99}$.
Thứ tự tăng dần theo các số là $4\sqrt{5}$; $\sqrt{97}$; $7\sqrt{2}$; $3\sqrt{11}$; $6\sqrt{3}$.

□

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức

1. $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2}$.

2. $\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2}$.

3. $\sqrt{(4 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(4 + \sqrt{5})^2}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} = |3 - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3$.

2. $\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2} = |\sqrt{6} - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

3. $\sqrt{(4 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(4 + \sqrt{5})^2} = |4 - \sqrt{5}| + |4 + \sqrt{5}| = 4 - \sqrt{5} + 4 + \sqrt{5} = 8$.

□

Bài 4. Rút gọn giá trị biểu thức

1. $A = (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{5}$.

$$2. B = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{7}}.$$

$$3. C = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}}}$$

 **Lời giải.**

$$1. A = (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{5} = \sqrt{16} - 3 \cdot 2 + \sqrt{20} - 2\sqrt{5} = 4 - 6 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -2.$$

$$2. B = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{-2} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{-2} = \sqrt{7}.$$

$$3. C = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{(4 + \sqrt{7})^2} + \sqrt{(4 - \sqrt{7})^2}}{\sqrt{(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})}} = \frac{4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}.$$

□

 **Bài 5.** Giải phương trình

$$1. 4\sqrt{x} - 2\sqrt{9x} + \sqrt{16x} = 5.$$

$$2. \sqrt{4x + 20} - 3\sqrt{5 + x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x + 45} = 6.$$

 **Lời giải.**

1. Điều kiện $x \geq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{x} - 2\sqrt{9x} + \sqrt{16x} = 5 \\ \Leftrightarrow & 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 5 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x} = 5 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{25}{4}. \quad (\text{thỏa điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{25}{4} \right\}$.

2. Điều kiện $x \geq -5$. Khi đó

$$\begin{aligned} & \sqrt{4x + 20} - 3\sqrt{5 + x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x + 45} = 6 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x + 5} - 3\sqrt{x + 5} + 4\sqrt{x + 5} = 6 \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt{x + 5} = 6 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x + 5} = 2 \\ \Leftrightarrow & x + 5 = 4 \\ \Leftrightarrow & x = -1. \quad (\text{thỏa điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1\}$.

□

 **Bài 6.** Cho biểu thức $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \right) \cdot \frac{x - 4}{\sqrt{4x}}$.

1. Rút gọn biểu thức với $x > 0$ và $x \neq 4$.
2. Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

 **Lời giải.**

1. Với $x > 0; x \neq 1; x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{4x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x-4} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{4x}} \\ &= 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \sqrt{x}$.

2. Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.
Thu gọn $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$.
Khi đó $P = \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$.

□

2

Đề số 2: Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đại

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (4.0 điểm)

 **Bài 1.** Căn bậc hai số học của số a không âm là

- (A) số có bình phương bằng a . (B) $-\sqrt{a}$.
(C) $\sqrt{a}$. (D) $\pm\sqrt{a}$.

 **Lời giải.**

Căn bậc hai số học của số a không âm là $\sqrt{a}$.

Chọn đáp án (C)

□

 **Bài 2.** Căn bậc hai của 16 là

- (A) 4. (B) -4. (C) 256. (D) ± 4 .

 **Lời giải.**

Số 16 có hai căn bậc hai là -4 và 4 .

Chọn đáp án (D)

□

 **Bài 3.** Kết quả khai căn của biểu thức $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ là

- (A) $1 - \sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3} - 1$. (C) $-1 - \sqrt{3}$. (D) $1 + \sqrt{3}$.

 **Lời giải.**

$$\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |(\sqrt{3}-1)| = \sqrt{3}-1.$$

Chọn đáp án (B)

□

Bài 4. Điều kiện xác định của căn thức $\sqrt{12 - 21x}$ là

- (A) $x \geq 12$. (B) $x \geq \frac{4}{7}$. (C) $x \leq \frac{4}{7}$. (D) $x \leq 21$.

Lời giải.

Căn thức xác định khi $12 - 21x \geq 0 \Leftrightarrow 21x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq \frac{12}{21} \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 5. So sánh 5 với $2\sqrt{6}$, kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) $5 > 2\sqrt{6}$. (B) $5 < 2\sqrt{6}$.
(C) $5 = 2\sqrt{6}$. (D) Không so sánh được.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{25} > \sqrt{24} \Rightarrow 5 > 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 6. Kết quả của phép tính $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{125}$ là

- (A) 2. (B) -2. (C) $\sqrt{98}$. (D) $\sqrt{98}$.

Lời giải.

$\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{5^3} = 3 - 5 = -2$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 7. Tất cả các giá trị của x để $\sqrt{x} \leq 4$ là

- (A) $x > 16$. (B) $0 \leq x \leq 16$. (C) $x < 16$. (D) $0 \leq x < 16$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

$\sqrt{x} \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 16$.

Vậy $0 \leq x \leq 16$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 8. Cho $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Khi đó giá trị $a - b$ bằng

- (A) 2. (B) -2. (C) 3. (D) -3.

Lời giải.

Ta có $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \sqrt{5} - \sqrt{3} \Rightarrow a = 5, b = 3$ và $a - b = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 9. Thu gọn biểu thức $A = |x| \sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$ với $-1 \leq x < 0$ ta được

- (A) $A = \sqrt{x+1}$. (B) $A = -\sqrt{x+1}$. (C) $A = x+1$. (D) $A = |x+1|$.

Lời giải.

Ta có $A = |x| \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{|x|} = \sqrt{x+1}$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 10. Nếu x thỏa mãn điều kiện $\sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3$ thì x nhận giá trị nào sau đây?

- (A) 0. (B) 6. (C) 9. (D) 36.

 **Lời giải.**

Với $x \geq 0$, ta có $\sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36$.

Chọn đáp án **D** □

II. PHẦN TỰ LUẬN (6.0 điểm)

 **Bài 11.** Tìm x , biết $\sqrt{2x - 5} - 2\sqrt{3} = 0$.

 **Lời giải.**

Điều kiện: $x \geq \frac{5}{2}$. Phương trình tương đương với

$$\sqrt{2x - 5} = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 = 12$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{17}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x = \frac{17}{2}$ là giá trị cần tìm. □

 **Bài 12.** Thực hiện các phép tính

1. $A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{8} - 2\sqrt{50}$;

2. $B = \frac{1}{3 + \sqrt{5}} + \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$.

 **Lời giải.**

1. $A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2^2 \cdot 2} - 2\sqrt{5^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

2. $B = \frac{3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5}}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{6}{9 - 5} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. □

 **Bài 13.** Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{a}} - \frac{1}{1 + \sqrt{a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + 1 \right)$ ($0 < a \neq 1$).

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tính giá trị của P khi $a = 9 + 4\sqrt{2}$.

3. Với những giá trị nào của a thì $P > \frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

1. Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{1 - \sqrt{a}} - \frac{1}{1 + \sqrt{a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + 1 \right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{a} - 1 + \sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})} \cdot \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})} \cdot \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{2}{1 - \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{2}{1 - \sqrt{a}}$.

$$2. a = 9 + 4\sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2}{1 - \sqrt{a}} = \frac{2}{1 - (1 + 2\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Với $a > 0$ và $a \neq 1$ thì điều kiện để $P > \frac{1}{2}$ là:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - \sqrt{a}} > \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \sqrt{a}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 1 + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} > 0 \Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{a} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow a < 1. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $a > 0$ ta được: $0 < a < 1$.

□



Đề số 3 - Dành cho HS Khá, Giỏi

Bài 14. Tính giá trị của các biểu thức

$$1. A = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}.$$

$$2. B = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{3}{3 - 2\sqrt{2}} - \frac{4}{3\sqrt{2} - 4}.$$

Lời giải.

1. Ta có

$$A = \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})^2}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}} + \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 3.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} + \frac{3(3 + 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} - \frac{4(3\sqrt{2} + 4)}{(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{1} + \frac{9 + 6\sqrt{2}}{1} - \frac{4(3\sqrt{2} + 4)}{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 15. Cho biểu thức

$$Q = \left(\frac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} - \frac{3 - \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} - \frac{36}{x - 9} \right) : \frac{\sqrt{x} - 5}{3\sqrt{x} - x} \quad (\text{với } x > 0, x \neq 9, x \neq 25)$$

1. Rút gọn Q .

2. Tìm x để $Q < 0$.

 **Lời giải.**

1. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} - \frac{3 - \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} - \frac{36}{x - 9} &= \frac{(3 + \sqrt{x})^2 - (3 - \sqrt{x})^2 + 36}{(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})} \\ &= \frac{12(\sqrt{x} + 3)}{(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})} = \frac{12}{3 - \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$Q = \frac{12}{3 - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}{\sqrt{x} - 5} = \frac{12\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5}.$$

2. Ta có

$$Q < 0 \Leftrightarrow \frac{12\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 5 < 0 \text{ (do } \sqrt{x} > 0 \text{)} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow x < 25.$$

Vậy $\begin{cases} 0 < x < 25 \\ x \neq 9 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

□

 **Bài 16.** Tính giá trị biểu thức: $B = 6x^3 + 3x^2 + 2014$ với $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \frac{1}{x^3} &= 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \right) = 6 + \frac{3}{x} \\ \Rightarrow 6x^3 + 3x^2 &= 1. \end{aligned}$$

Do đó $B = 1 + 2014 = 2015$.

□

 **Bài 17.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{1}} &> \sqrt{2} - \sqrt{1} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} &> \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} &> \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Công các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) > \sqrt{n+1} - 1.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

□

 **Bài 18.** Cho x, y thỏa mãn: $0 < x < 1, 0 < y < 1$ và $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}.$$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1 &\Leftrightarrow x(1-y) + y(1-x) = (1-x)(1-y) \\ &\Leftrightarrow x + y - 2xy = 1 - x - y + xy \\ &\Leftrightarrow 3xy - 2(x+y) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3xy = 2(x+y) - 1. \end{aligned}$$

Mà $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}(x+y)^2 \geq 2(x+y) - 1 &\Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 8(x+y) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y-2)(3(x+y)-2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x+y) - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x+y \leq \frac{2}{3} \text{ (do } x+y < 1+1=2). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P &= x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 3xy} = x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 2(x+y) + 1} \\ &= x + y + \sqrt{(x+y-1)^2} = x + y + 1 - (x+y) = 1. \end{aligned}$$

□