

TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH - QUẢNG BÌNH
GV: NGUYỄN HOÀNG VIỆT

CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN



- ★ Tóm tắt lí thuyết
- ★ Phân Dạng Bài Tập
- ★ Bài Tập Minh Họa
- ★ Bài Tập Tự Luyện (Giải chi tiết)

Hình học 9

LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC



Chương 1.	HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG	1
Bài 1.	HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO	1
(A)	Kiến thức cần nhớ	1
(B)	Các ví dụ	1
(C)	Luyện tập	5
Bài 2.	TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN	15
(A)	Kiến thức cần nhớ	15
(B)	Các ví dụ	16
(C)	Luyện tập	17
Bài 3.	HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG	21
(A)	Kiến thức cần nhớ	21
(B)	Các dạng toán	21
Dạng 1.	Giải tam giác vuông	21
Dạng 2.	Tính cạnh và góc của tam giác	22
Dạng 3.	Toán thực tế	23
(C)	Luyện tập	24
Bài 4.	ÔN TẬP CHƯƠNG 1	29
(A)	Kiến thức cần nhớ	29
(B)	Bài tập trắc nghiệm	29
(C)	Bài tập tự luận	46
Bài 5.	ĐỀ KIỂM TRA 1 TIẾT.	61
(A)	Đề số 1A (Tự luận dành cho học sinh đại trà)	61
(B)	Đề số 1B (Tự luận dành cho học sinh đại trà)	63
(C)	Đề số 2A (Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đại trà)	66
(D)	Đề số 2B (Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đại trà)	66



(E) Đề số 3A (Tự luận dành cho học sinh giỏi)	70
(F) Đề số 3B (Tự luận dành cho học sinh giỏi)	72

Chương 2. ĐƯỜNG TRÒN 76

Bài 1. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn	76
(A) Tóm tắt lí thuyết	76
(B) Các ví dụ	77
(C) Luyện tập	80
Bài 2. Đường kính và dây của đường tròn	88
(A) Tóm tắt lí thuyết	88
(B) Các ví dụ	88
(C) Luyện tập	92
Bài 3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây	96
(A) Tóm tắt lí thuyết	96
(B) Các ví dụ	96
(C) Luyện tập	99
Bài 4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	104
(A) Tóm tắt lí thuyết	104
(B) Các ví dụ	105
(C) Luyện tập	107
Bài 5. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn	110
(A) Tóm tắt lí thuyết	110
(B) Các ví dụ	110
(C) Luyện tập	113
Bài 6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau	117
(A) Tóm tắt lí thuyết	117
(B) Các ví dụ	118
(C) Luyện tập	123
Bài 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn	127
(A) Tóm tắt lí thuyết	127
(B) Các ví dụ	128
(C) Luyện tập	133
Bài 8. Ôn tập chương II	140

(A)	Các ví dụ	140
(B)	Luyện tập	148
Chương 3.	GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN	160
Bài 1.	Góc ở tâm. Số đo cung	160
(A)	Tóm tắt lí thuyết	160
(B)	Các ví dụ	161
(C)	Luyện tập	162
Bài 2.	Liên hệ giữa cung và dây	165
(A)	Tóm tắt lí thuyết	165
(B)	Các ví dụ	165
(C)	Luyện tập	167
Bài 3.	Góc nội tiếp	170
(A)	Tóm tắt lí thuyết	170
(B)	Các ví dụ	170
(C)	Luyện tập	174
Bài 4.	Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung	178
(A)	Tóm tắt lí thuyết	178
(B)	Các ví dụ	178
(C)	Luyện tập	181
(D)	Thử thách	188
Bài 5.	Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn	191
(A)	Tóm tắt lí thuyết	191
(B)	Các ví dụ	191
(C)	Luyện tập	195
Bài 6.	Cung chứa góc	200
(A)	Tóm tắt lí thuyết	200
(B)	Các ví dụ	201
(C)	Luyện tập	204
Bài 7.	Tứ giác nội tiếp	209
(A)	Tóm tắt lí thuyết	209
(B)	Các ví dụ	210

(C) Luyện tập.....	215
Bài 8. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp	222
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	222
(B) Các ví dụ.....	222
(C) Luyện tập.....	224
Bài 9. Độ dài đường tròn, cung tròn	229
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	229
(B) Các ví dụ.....	229
(C) Luyện tập.....	232
Bài 10. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn	236
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	236
(B) Các ví dụ.....	237
(C) Luyện tập.....	239
Bài 11. Ôn tập chương III	244
Chương 4. HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU	269
Bài 1. Hình trụ. Diện tích xung quanh và thể tích hình trụ	269
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	269
(B) Các ví dụ.....	269
(C) Luyện tập.....	272
Bài 2. Hình nón - Hình nón cụt - Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt	277
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	277
(B) Các ví dụ.....	279
(C) Luyện tập.....	281
Bài 3. Hình cầu - Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu	285
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	285
(B) Các ví dụ.....	285
(C) Luyện tập.....	287
Bài 4. Ôn tập chương IV	291
(A) Các ví dụ.....	291
(B) Luyện tập.....	295

Chương 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1

HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO



Kiến thức cần nhớ

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .
Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AH = h$,
 $BH = c'$, $CH = b'$. Khi đó ta có các hệ thức sau

☑ $a^2 = b^2 + c^2$

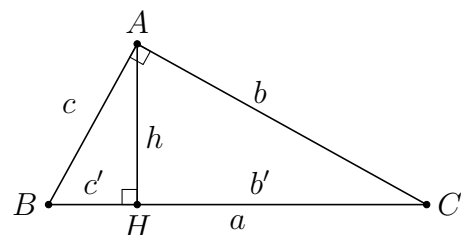
☑ $a \cdot c' = c^2$

☑ $a \cdot h = b \cdot c$

☑ $b' \cdot c' = h^2$

☑ $a \cdot b' = b^2$

☑ $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$



Các ví dụ

🔗 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Tính BC , AH , BH , CH .

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc cạnh BC) biết $AB = a$, $BC = 2a$. Tính theo a độ dài AC và AH .

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông tại C có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, đường cao AH . Gọi E, F là hình chiếu của H lên AB, AC . Tính diện tích tứ giác $AEHF$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Biết $BH = 25$ cm, $CH = 144$ cm. Tính AB, AC, BC, AH .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Biết $BH = \frac{25}{13}$ cm, $AH = \frac{60}{13}$ cm. Tính AB, AC, BC, CH .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC vuông tại B , đường cao $BH = \frac{12}{5}$ cm và $4AB = 3BC$. Tính AB , AC , BC , AH , CH .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 7.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $2\sqrt{5}$ cm. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD , DC và I là giao điểm của AN và BM .

- Chứng minh rằng AN vuông góc với MB .
- Tính AI , MI .
- Tính diện tích tứ giác $BINC$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 5$ cm, đường cao $AH = \frac{12}{5}$ cm. Tính BH , CH .

💬 **Lời giải.**

This image shows a full page of white paper with horizontal blue dotted lines, resembling notebook paper. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings present.This image shows a full page of white paper with horizontal blue dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins or other markings on the paper.

❖ **Ví dụ 9.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , kẻ HM vuông góc với AB tại M . Chứng minh rằng $BM = \frac{AB^3}{BC^2}$.

 **Lời giải.**

This image shows a single sheet of white paper with ten evenly spaced, horizontal blue dotted lines. The lines are parallel and extend across the entire width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the paper.[illegible]

❖ **Ví dụ 10.** Cho hình vuông $ABCD$, I là điểm thay đổi trên cạnh AB (I khác A và B). Đường thẳng DI cắt BC tại K . Chứng minh rằng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi.

 **Lời giải.**

[illegible][illegible]

.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 11.** Cho tam giác ABC cân tại A , có góc A nhọn. Vẽ BM vuông góc với AC . Chứng minh rằng

$$\frac{AM}{MC} = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 - 1.$$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

C Luyện tập

⇒ **Bài 1.** Cho tam giác vuông ABC , đường cao AH , cạnh góc vuông $AC = 60$ cm, cạnh huyền $BC = 100$ cm. Tính chu vi tam giác ABC , ABH , ACH .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Bài 2.** Cho tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 5 cm và 12 cm. Tìm cạnh huyền và các hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 3.** Tìm các cạnh của tam giác vuông, biết đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền theo thứ tự là 4 cm và 5 cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 4.** Tìm các cạnh của tam giác vuông, biết đường cao ứng với cạnh huyền là 4 cm, diện tích tam giác vuông bằng 20 cm^2 .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AH = 6 \text{ cm}$ và $HC - HB = 9 \text{ cm}$. Tính HB , HC .

💬 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

🔗 **Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, đường cao $AH = 18$ cm. Tính chu vi tam giác ABC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB < AC$ và đường cao AH . Tính AB , AC biết $AH = 6$ cm và diện tích tam giác ABC bằng $37,5$ cm².

 **Lời giải.**

❖ **Bài 8.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O . Biết $AB = 2\sqrt{13}$, $OA = 6$. Tính diện tích hình thang.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 9.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường cao AH , cạnh bên $AC = 30$, $HB = 32$. Tính độ dài AH , HC , AB .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 10.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh $AB = 60$ cm, $AD = 32$ cm. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC . Đường này cắt AC tại E và AB tại F . Tính độ dài các đoạn EA , EC , ED , FB , FD .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 11.** Tính diện tích hình thang $ABCD$, có đường cao bằng 12 cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, $DB = 15$ cm.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 12.** Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tìm đường cao của hình thang

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 13.** Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 14.** Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh AB, BC, CA là ba số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH , đường trung tuyến AM . Chứng minh rằng $HM = 2$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 15.** Tam giác ABC cân tại A , gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. Tính độ dài AB .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 16.** Tam giác ABC có $BC = 40$ cm, đường phân giác trong AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính các độ dài BD, DC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 17.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính BH , CH biết $AB = 12$ cm, $BC = 20$ cm.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 18.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính AC , CH biết $AH = 2$ cm, $HB = 1$ cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 19.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính AH , HB , HC biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 20.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính AB , AC biết $HB = 1$ cm, $HC = 2$ cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 21.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính BC , AC , AH biết $AB = 15$ cm, $HC = 16$ cm.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 22.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tính AB , AC biết $AH = 12$ cm, $BC = 25$ cm.

 Lời giải.

❖ **Bài 23.** Cho tam giác ABC cân tại A có AH, BK là 2 đường cao. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}.$$

b) $BC^2 = 2CK \cdot CA$.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 24.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A và một điểm M thuộc cạnh huyền BC . Chứng minh rằng $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Bài 2

TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A

Kiến thức cần nhớ

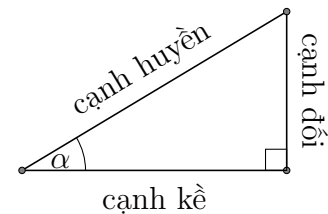
1. Khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Cho tam giác vuông và góc nhọn α như hình vẽ.

Khi đó

$$\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}};$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}.$$



Lưu ý: Nhận xét

Tỉ số lượng giác của một góc nhọn luôn dương.

$\sin \alpha < 1$, $\cos \alpha < 1$.

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

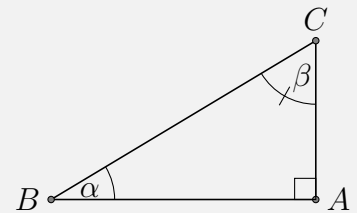
Định lý 2.1. Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

Hệ quả 2.1.

Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$, khi đó

$$\sin \alpha = \cos \beta; \quad \tan \alpha = \cot \beta;$$

$$\cos \alpha = \sin \beta; \quad \cot \alpha = \tan \beta.$$



Bảng tỉ số lượng giác một số góc đặc biệt

Tỉ số lượng giác góc α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

B Các ví dụ

❖ **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Viết các tỉ số lượng giác của góc B .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 2.** Dựng góc nhọn α biết $\tan \alpha = \frac{2}{5}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 3.** Hãy viết tỉ số lượng giác của các góc sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

$\sin 75^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 80^\circ$, $\cot 50^\circ$.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

❖ **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 10$. Tính độ dài cạnh AB và AC .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

.....	
.....	
.....	
.....	



Luyện tập

✎ **Bài 1.** Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34° rồi viết tỉ số lượng giác của góc 34° .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại C . Trong đó $AC = 0,9$ m, $BC = 1,2$ m. Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 3.** Hãy viết tỉ các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

$$\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \cot 82^\circ, \tan 80^\circ.$$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	

✎ **Bài 4.** Dựng góc nhọn α biết

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3};$

b) $\cos \alpha = 0,6;$

c) $\tan \alpha = \frac{3}{4};$

d) $\cot \alpha = \frac{3}{2}.$

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✧ **Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $\widehat{B} = \alpha$. Biết $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. Hãy tìm độ dài cạnh AC và BC .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 6.** Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = \frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ};$

b) $B = \tan 76^\circ - \cot 14^\circ.$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 7.** (*) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 8.** (*) Cho tứ giác $ABCD$ có α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo. Chứng minh rằng $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

 Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Bài 3

HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

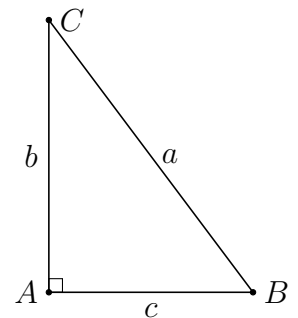
A Kiến thức cần nhớ

Định lý 3.1. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với **sin** góc đối hoặc nhân với **cos** góc kề;
- Cạnh góc vuông kia nhân với **tan** góc đối hoặc nhân với **cot** góc kề.

Vậy, trong tam giác ABC vuông tại A , ta có các hệ thức

- ☑ $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$.
- ☑ $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$.
- ☑ $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$.
- ☑ $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$.



B Các dạng toán

Dạng 1. Giải tam giác vuông

Sử dụng mối quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5$, $AC = 8$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 36^\circ$, $PQ = 7$. Hãy giải tam giác vuông OPQ .

Lời giải.

✎ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính độ dài

a) AC .

b) BC .

c) Phân giác BD .

💬 **Lời giải.**

Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác

Phương pháp: Kẻ thêm đường cao để xuất hiện tam giác vuông; áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

✎ **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC , trong đó $BC = 11$ cm, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Hãy tính độ dài đoạn thẳng AN .

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có $BC = 6$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính

- a) Chiều cao CH và cạnh AC . b) Diện tích tam giác ABC .

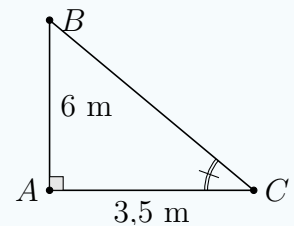
 **Lời giải.**

Dạng 3. Toán thực tế

Dùng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải quyết các tính huống thực tế.

🔗 Ví dụ 1.

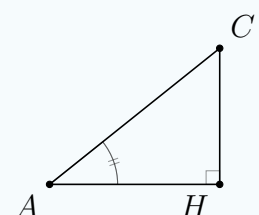
Một cột đèn điện AB cao 6 m có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5 m. Hãy tính góc $\widehat{BCA}$ (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.



 Lời giải.

↗ Ví dụ 2.

Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° , và có độ cao là 2,1 m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

C Luyện tập

Dễ

✧ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Giải tam giác ABC , biết rằng $b = 10$ cm, $\widehat{C} = 30^\circ$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

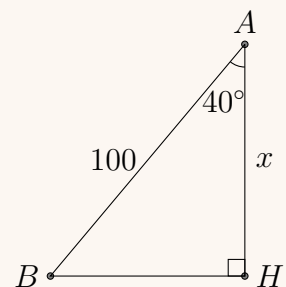
✧ **Bài 2.** Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5 m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 3.**

Một chiếc điều với đoạn dây thả điều AB dài 100 m, dây thả điều tạo với phương thẳng đứng một góc 40° (hình bên). Tính chiều cao của điều.



💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $HB = 25$ cm, $HC = 64$ cm. Tính số đo các góc B và C .

 **Lời giải.**

Trung bình

🔗 **Bài 5.** Cho tam giác ABC có $BC = 15$ cm, $\widehat{ABC} = 42^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AH .

b) Độ dài đoạn thẳng AC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm.

a) Giải tam giác vuông ABC .

b) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D . Tính độ dài các đoạn thẳng AD và BD .

 Lời giải.

🔗 **Bài 7.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 21$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD .

 Lời giải.

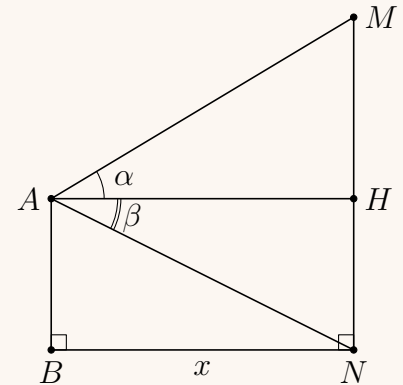
❖ **Bài 8.** Tính diện tích $\triangle ABC$ có $BC = 40$ cm, $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 55^\circ$.

 Lời giải.

Khó

❖ Bài 9.

Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là x (như hình vẽ). Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α . Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $x = 120$ m, $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 20^\circ$.



💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	

❖ Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 38^\circ$, $AB = 3,5$ và $AD = 3,1$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ Bài 11. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Tính góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa cạnh bên hình thang.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 12.** Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$, đường trung tuyến AM . Tính số đo góc AMC .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 13.** Tính diện tích tam giác ABC biết $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$, $BC = 2$ cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



ÔN TẬP CHƯƠNG 1

A Kiến thức cần nhớ

Các kiến thức trọng tâm của bài học theo sách giáo khoa hiện hành.

B Bài tập trắc nghiệm

⇒ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH . Hệ thức nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $AH^2 = BH \cdot BC$. Ⓑ $AC^2 = CH \cdot BC$. Ⓒ $AH^2 = AB \cdot AC$. Ⓓ $AH = BH \cdot AB$.

💬 Lời giải.

⇒ **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH . Hệ thức nào sau đây là sai?

- Ⓐ $AB^2 = BH \cdot BC$. Ⓑ $AH^2 = BH \cdot CH$. Ⓒ $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC}$. Ⓓ $\frac{AH}{HB} = \frac{AB}{AC}$.

💬 Lời giải.

⇒ **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $AB = 3$; $AC = 4$; $BC = 5$, kẻ đường cao AH . Hệ thức nào sau đây là sai?

- Ⓐ $AH^2 = BH \cdot CH$. Ⓑ $BH^2 = AH \cdot CH$.
Ⓒ $AB^2 = BH \cdot BC$. Ⓓ $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AC^2}$.

💬 Lời giải.

✧ **Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại B và có đường cao BH . Hệ thức nào sau đây là đúng?

☐ A $BH^2 = AH \cdot CH$.

☐ B $AH^2 = BH \cdot CH$.

☐ C $AB^2 = BH \cdot BC$.

☐ D $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 5.** Tam giác ABC có đường cao AH thỏa mãn $AH^2 = BH \cdot CH$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A Tam giác ABC vuông tại A .

☐ B $AB^2 = BH \cdot BC$.

☐ C $\triangle AHB \sim \triangle CHA$.

☐ D $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

✧ **Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$; $AC = 4$. Kẻ đường cao AH . Độ dài AH là

☐ A $AH = 5$.

☐ B $AH = 2,4$.

☐ C $AH = 2,25$.

☐ D $AH = \frac{16}{3}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 7.** Cho tam giác vuông tại A có $AB = 5$. Kẻ đường cao AH . Biết $BH = \frac{25}{13}$, độ dài AH là

☐ A $AH = \frac{60}{13}$.

☐ B $AH = 5$.

☐ C $AH = \frac{1}{13}$.

☐ D $AH = 13$.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Biết $AH = 9, BH = 12$. Giá trị $\frac{AB}{AC}$ là

A $\frac{4}{5}$.
B $\frac{3}{5}$.
C $\frac{4}{3}$.
D $\frac{3}{4}$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 9.** Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $AB = 6, BC = 10$. AH là đường cao. Độ dài BH và AH lần lượt là

A $BH = 6,4; AH = 4,6$.
B $BH = 3,6; AH = 4,8$.

C $BH = 3,6; AH = 6,4$.
D $BH = 6,4; AH = 4,8$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 10.** Cho tam giác vuông tại A có đường cao AH . Biết $BH = 9, CH = 7$. Độ dài AB và AC lần lượt là

A $AB = 3\sqrt{7}; AC = 12$.
B $AB = 12; AC = 3\sqrt{7}$.

C $AB = 12; AC = 4\sqrt{7}$.
D $AB = 3\sqrt{7}; AC = 4\sqrt{7}$.

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

 Lời giải.

✧ **Bài 11.** Tam giác vuông ABC có $AB : AC$ lần lượt tỉ lệ với $3 : 4$. Biết $AH = 6$. Cạnh BC có độ dài là bao nhiêu

- ☐ **A** $BC = 11,5$.
 ☐ **B** $BC = 12$.
 ☐ **C** $BC = 12,5$.
 ☐ **D** $BC = 13$.

 Lời giải.

✧ **Bài 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Biết $AH = 6$ và $AB^2 = 135 + AC^2$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

- ☐ **A** 5.
 ☐ **B** 3.
 ☐ **C** 4.
 ☐ **D** 6.

 Lời giải.

✧ **Bài 13.** Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$ ($H \in AB$). Cho $AB = 4$; $AC = 2$, hãy tính độ dài đoạn HE .

- ☐ **A** $HE = \frac{8}{5}$.
 ☐ **B** $HE = \frac{9}{5}$.
 ☐ **C** $HE = \frac{7}{5}$.
 ☐ **D** $HE = 2$.

 Lời giải.

❖ **Bài 14.** Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB (H \in AB)$. Cho $HE = 6; AC = 9$, tính độ dài đoạn BC .

- Ⓐ $BC = 9\sqrt{2}$. Ⓑ $BC = 6\sqrt{3}$. Ⓒ $BC = 9\sqrt{3}$. Ⓓ $BC = 18$.

 Lời giải.

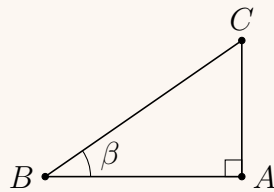
❖ **Bài 15.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ, AB = AD = 2, DC = 2\sqrt{2}$. Tính độ dài đường chéo AC .

- Ⓐ $AC = 8$. Ⓑ $AC = 6$. Ⓒ $AC = 4\sqrt{2}$. Ⓓ $AC = 2\sqrt{5}$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 16.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \beta$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A)** $\sin \beta = \frac{AC}{BC}$.
 (B) $\cos \beta = \frac{AB}{BC}$.
 (C) $\tan \beta = \frac{AC}{CB}$.
 (D) $\cot \beta = \frac{AB}{AC}$.



Lời giải.

.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 17.** Cho $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, với $0 < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của $\sin \alpha$ bằng

A $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

B $\sin \alpha = \frac{7}{13}$.

C $\sin \alpha = \frac{5}{12}$.

D $\sin \alpha = \frac{25}{169}$.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 18.** Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = \frac{2}{3}BC$. Tính $\cot C$.

A $\cot C = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

B $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

C $\cot C = \frac{6}{5}$.

D $\cot C = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 19.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\sin 55^\circ = \cos 45^\circ$.

B $\cos 12^\circ = \sin 78^\circ$.

C $\tan 60^\circ = \sin 30^\circ$.

D $\cot 75^\circ = \sin 15^\circ$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

🔗 **Bài 20.**

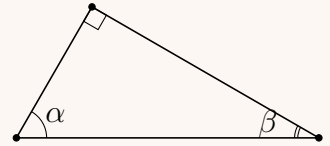
Cho tam giác như hình bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

- A** $\sin \alpha = \sin \beta$.

C $\cot \alpha = \sin \beta$.

B $\cos \alpha = \cos \beta$.

D $\tan \alpha = \cot \beta$.



💬 **Lời giải.**

.....

.....

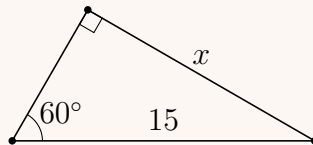
🔗 **Bài 21.** Trong hình bên, cạnh x được tính như thế nào?

- A** $x = \frac{15}{\sin 60^\circ}$.

B $x = 15 \cdot \tan 60^\circ$.

C $x = 15 \cdot \cos 30^\circ$.

D $x = \frac{15}{\cot 60^\circ}$.



💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

🔗 **Bài 22.**

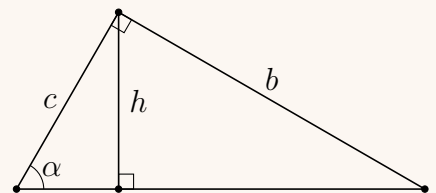
Cho hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

- A** $\sin \alpha = \frac{c}{b}$.

C $\tan \alpha = \frac{h}{c}$.

B $\cos \alpha = \frac{h}{b}$.

D $\cot \alpha = \frac{b}{c}$.



💬 **Lời giải.**

.....

.....

🔗 **Bài 23.** Cho tam giác ABC vuông tại A và $\cos C = 0,6$. Hãy tính $\tan B$.

- A** $\tan B = \frac{3}{4}$.

B $\tan B = \frac{4}{3}$.

C $\tan B = \frac{3}{5}$.

D $\tan B = \frac{4}{5}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Bài 24.

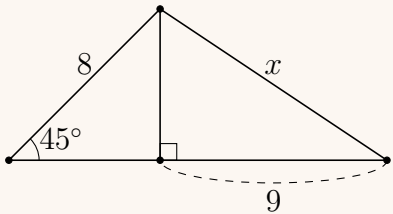
Tìm x trong hình vẽ bên.

A $x = \sqrt{97}$.

B $x = \frac{\sqrt{145}}{2}$.

C $\sqrt{65}$.

D $x = \sqrt{113}$.



💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Bài 25. Khẳng định nào sau đây là sai?

A $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$.

B $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ = 1$.

C $\tan 35^\circ \cdot \cot 55^\circ = 1$.

D $\cot 85^\circ \cdot \tan 85^\circ = 1$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Bài 26.

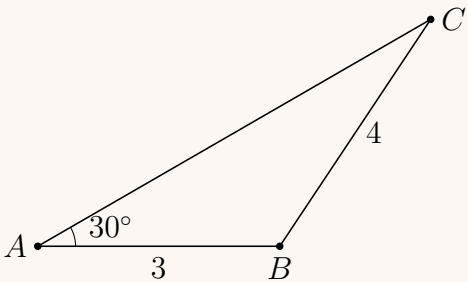
Cho hình vẽ bên. Hãy tính $\sin C$.

A $\sin C = \frac{3}{8}$.

B $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C $\sin C = \frac{2}{5}$.

D $\sin C = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.



💬 Lời giải.



.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 27.** Cho góc nhọn α với $\cot \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

☐ **A** $P = \frac{1}{7}$.
 ☐ **B** $P = -\frac{1}{7}$.
 ☐ **C** $P = -\frac{7}{25}$.
 ☐ **D** $P = \frac{7}{25}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 28.** Cho tam giác ABC , biết $BC = 11$ cm và $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đoạn AB (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

- ☐ **A** 7,32 cm.
 ☐ **B** 7,66 cm.
 ☐ **C** 6,98 cm.
 ☐ **D** 8,16 cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 29.** Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$. Biết $AB = 5$ cm, $CD = 9$ cm và $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Diện tích hình thang $ABCD$ gần bằng với số nào dưới đây?

- ☐ **A** $12,12 \text{ cm}^2$.
 ☐ **B** $48,49 \text{ cm}^2$.
 ☐ **C** $24,25 \text{ cm}^2$.
 ☐ **D** $19,8 \text{ cm}^2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 30.** Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích S và α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo AC và BD . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A** $S = AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$

C $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$
- B** $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \cos \alpha.$

D $S = AC \cdot BD \cdot \cos \alpha.$

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 31.** Cho tam giác ABC vuông tại B . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A** $AC^2 = AB^2 + BC^2.$

C $BC = AB \tan A.$
- B** $AB = BC \sin C.$

D $\sin A = \cos C.$

💬 **Lời giải.**

⇒ **Bài 32.** Trong tam giác vuông có góc nhọn α , mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cosin góc kề.
 (B) Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc kề hay nhân với cotang góc đối.
 (C) Tỷ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là cosin của góc α .
 (D) Tỷ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là tang của góc α .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Bài 33.** Cho tam giác MNP vuông tại M có $NP = 15$ cm và $\sin P = \frac{8}{15}$. Độ dài của cạnh MN bằng

- (A) $\sqrt{161}$ cm. (B) $\frac{225}{8}$ cm. (C) 8 cm. (D) $\frac{161}{15}$ cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Bài 34.** Cho tam giác IJK vuông tại J có $IJ = 10$ cm và $\tan K = \frac{12}{5}$. Tính độ dài của KJ .

- (A) 24 cm. (B) $\frac{25}{6}$ cm. (C) $\frac{62}{5}$ cm. (D) $\frac{38}{5}$ cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 35.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$ và $AB = 10$ cm. Độ dài của BC bằng bao nhiêu?

A $10\sqrt{3}$ cm.

B $20\sqrt{3}$ cm.

C $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

D $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 36.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm và $\widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh AC bằng

A 6 cm.

B $6\sqrt{3}$ cm.

C $3\sqrt{3}$ cm.

D 1,5 cm.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 37.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ và $\cos C = \frac{3}{5}$. Độ dài của cạnh AC bằng

A $\frac{9}{2}$.

B $\frac{15}{2}$.

C $\frac{18}{5}$.

D 10.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 38.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm và $\tan B = \frac{1}{3}$. Tính độ dài cạnh BC .

A $BC = 16$ cm.

B $BC = 18$ cm.

C $BC = 5\sqrt{10}$ cm.

D $BC = 4\sqrt{10}$ cm.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Bài 39.** Cho tam giác ABC có đường cao AH và trung tuyến AM (với H, M thuộc BC). Biết $HB = 9$ cm, $HC = 16$ cm. Tính $\tan \widehat{HAM}$.

A $\frac{3}{4}$.

B $\frac{4}{3}$.

C $\frac{9}{16}$.

D $\frac{7}{24}$.

🗨 **Lời giải.**

⇨ **Bài 40.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Cho biết $CH = 6$ cm và $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Độ dài đường cao AH là

A 2 cm.

B $2\sqrt{3}$ cm.

C 4 cm.

D $4\sqrt{3}$ cm.

🗨 **Lời giải.**

⇨ **Bài 41.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm và $BC = 5$ cm. Tính giá trị của biểu thức $P = \cot B + \cot C$.

A $P = \frac{3}{5}$.

B $P = \frac{25}{12}$.

C $P = \frac{25}{9}$.

D $P = \frac{16}{25}$.

🗨 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

---	---

✎ **Bài 42.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 25$, $AC = 15$. Số đo của góc C (làm tròn đến phút) bằng
Ⓐ $53^{\circ}8'$. Ⓑ $36^{\circ}52'$. Ⓒ $53^{\circ}13'$. Ⓓ $36^{\circ}53'$.

💬 **Lời giải.**

---	---

✎ **Bài 43.** Cho tam giác MNP có $\widehat{M} = 110^{\circ}$, $\widehat{P} = 35^{\circ}$ và $MN = 4$ cm. Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh M .
Ⓐ 3,28 cm. Ⓑ 3,76 cm. Ⓒ 2,29 cm. Ⓓ 4,26 cm.

💬 **Lời giải.**

---	---

✎ **Bài 44.** Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm và $\widehat{A} = 60^{\circ}$. Độ dài của cạnh BC bằng
Ⓐ $4\sqrt{13}$ cm. Ⓑ $4\sqrt{19}$ cm. Ⓒ $4\sqrt{7}$ cm. Ⓓ $4\sqrt{5}$ cm.

💬 **Lời giải.**

---	---

.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Bài 45.** Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm và $\hat{A} = 30^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

A $S = 48 \text{ cm}^2$.

B $S = 24 \text{ cm}^2$.

C $S = 96 \text{ cm}^2$.

D $S = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Bài 46.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ và $BC = 4$. Độ dài của AB bằng bao nhiêu?

A $4\sqrt{3} - 4$.

B $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

C $\sqrt{3} - 1$.

D $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Bài 47.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = \sqrt{3}$ cm, $HC = 2$ cm. Tính HB ?

A $HB = 1$ cm.

B $HB = 2$ cm.

C $HB = 3$ cm.

D $HB = 4$ cm.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 48.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , biết $9HB = 4HC$, $AH = 6$ cm. Tính BC .

A $BC = 13$ cm.

B $BC = 12$ cm.

C $BC = 11$ cm.

D $BC = 9$ cm.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 49.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 4$, tia phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh B của $\triangle ABC$ cắt AC tại D và E . Biết $AD = 2$ cm. Tính độ dài DE .

A $DE = 6$ cm.

B $DE = 8$ cm.

C $DE = 9$ cm.

D $DE = 10$ cm.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 50.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại B , phân giác trong AD , biết $CD = 2BD$. Tính $\widehat{C}$.

A $\widehat{C} = 20^\circ$.

B $\widehat{C} = 30^\circ$.

C $\widehat{C} = 45^\circ$.

D $\widehat{C} = 60^\circ$.

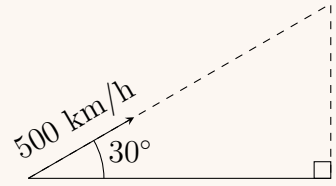
💬 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ Bài 51.

Một chiếc máy bay, bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 1,2 phút máy bay lên cao được bao nhiêu km theo phương thẳng đứng?

- Ⓐ 50 km. Ⓑ 10 km. Ⓒ 25 km. Ⓓ 5 km.



💬 Lời giải.

❖ Bài 52. Lúc 2 giờ chiều, ánh nắng mặt trời chiếu nghiêng tạo với mặt đất một góc 68° , lúc đó bóng một cây cau dài 1,2 m. Chiều cao của cây cau đó gần bằng

- Ⓐ 2,5 m. Ⓑ 3 m. Ⓒ 3,3 m. Ⓓ 3,5 m.

💬 Lời giải.

❖ Bài 53. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AH \perp BC$. Biết $\frac{AH}{HC} = \frac{4}{3}$. Tính $T = \frac{\sin B + \cos B}{\cos B}$.

- Ⓐ $\frac{7}{3}$. Ⓑ $\frac{7}{4}$. Ⓒ $\frac{3}{7}$. Ⓓ $\frac{4}{7}$.

💬 Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 54.** Cho góc nhọn α thỏa mãn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $B = \sin \alpha + \cos \alpha$.

A $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\textcircled{\text{C}} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

 Lời giải.

C Bài tập tự luận

❖ **Bài 55.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AH .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 56.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AB = 9$ cm, $HB = 5,4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 57.** Cho tam giác DEF vuông tại D , DK là đường cao. Kẻ KH vuông góc DE tại H , KI vuông góc DF tại I . Biết $KE = 7,2$ cm, $KF = 12,8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng HI .

 **Lời giải.**

✧ **Bài 58.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ và $AC = 20$ cm. Tính chu vi tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 59.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Vẽ trung tuyến AD . Biết $BC = 2\sqrt{3}$ cm. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 60.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , phân giác AD của góc $\widehat{BAC}$.

a) Chứng minh $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$.

b) Biết $BD = 45$ cm, $CD = 60$ cm. Tính độ dài HB, HC .

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 61.** Cho tam giác DEF vuông tại D , phân giác DM , đường cao DK . Biết $DE = 30$ cm, $DF = 40$ cm. Tính độ dài DM .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 62.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Các đường trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G . Biết $AB = 6$ cm. Tính BC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 63.** Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Biết $AH = 24$ cm, $BC = 50$ cm, $AB < AC$. Tính chu vi tam giác ABC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 64.** Cho tứ giác $ABCD$. Từ điểm O bất kì trong tứ giác kẻ OH, OK, OI, OL lần lượt vuông góc với các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh

$$HB^2 + KC^2 + ID^2 + LA^2 = AH^2 + BK^2 + CI^2 + DL^2.$$

 **Lời giải.**

❖ **Bài 65.** Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và hai đường chéo vuông góc tại O .

- Chứng minh rằng $AD^2 = AB \cdot DC$.
- Cho $AB = 9$; $CD = 16$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.
- Tính độ dài các đoạn thẳng OA , OB , OC , OD .

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 66.** Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120 cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

- Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.
- Tính khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 67.** Cho góc nhọn x thỏa mãn $\sin x = 0,8$, tính $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 68.** Cho góc nhọn x thỏa mãn $\sin x = \frac{1}{2}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc $(90^\circ - x)$.

 **Lời giải.**

❧ Bài 69. Tính

a) $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$.

b) $\tan 58^\circ - \cot 32^\circ$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 70.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 8$ cm. Hãy tính độ dài của các cạnh góc vuông.

 **Lời giải.**

✎ **Bài 71.** Cho tam giác ABC , vẽ đường cao AH , ($H \in BC$). Cho biết $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $BH = 20$ cm, $HC = 21$ cm. Tính AC .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 72.** Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), biết $AD = 12$ cm, $DC = 14$ cm, $AB = 9$ cm. Tính tỉ số lượng giác của góc C .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 73.** Hai trụ điện cùng chiều cao được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ rộng 80 m. Từ một điểm M trên mặt đường giữa hai trụ người ta nhìn thấy hai trụ điện với góc nâng lần lượt là 60° và 30° . Tính chiều cao của trụ điện và khoảng cách từ điểm M đến gốc mỗi trụ điện.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

↔ **Bài 74.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $AB = 5$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

a) Tính độ dài đường cao kẻ từ B .

b) Tính độ dài BC .

💬 Lời giải.

↔ **Bài 75.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có BM là đường trung tuyến. Biết $\widehat{BCA} = 30^\circ$ và $CM = 4,5$. Tính độ dài BM .

💬 Lời giải.

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

❖ **Bài 76.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} = 45^\circ$, $AB = BD = 18$ cm.

- a) Tính độ dài cạnh AD .
- b) Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 77.** Cho tam giác ABC có $AB = 18$; $BC = 24$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

 **Lời giải.**

✧ **Bài 78.** Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh 60. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$. Đường trung trực của AD cắt AB tại E . Tính độ dài DE .

 **Lời giải.**

🔹 **Bài 79.** Cho ABC là tam giác đều cạnh 6. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2$.

- Tính độ dài đoạn thẳng AD .
- Kẻ CK vuông góc với AD , ($K \in AD$). Tính độ dài đoạn thẳng CK .

 **Lời giải.**

✧ **Bài 80.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $AC = b$, đường phân giác AD , đường trung tuyến AM . Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N . Tính $\frac{BN}{CN}$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 81.** Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H , trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 82.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC . Chứng minh rằng $\sqrt{BC^2} = \sqrt{BD^2} + \sqrt{CE^2}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 83.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên tia đối của tia AH lấy điểm D sao cho $HD = AC$. Vẽ hình chữ nhật $CHDE$. Chứng minh rằng BE vuông góc với CD .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 84.** Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}$, $AC = 3$ và $\widehat{B} + 2\widehat{C} = 90^\circ$. Tính độ dài đoạn BC .

💬 **Lời giải.**

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 5

ĐỀ KIỂM TRA 1 TIẾT.

A **Đề số 1A (Tự luận dành cho học sinh đại trà)**

❖ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, AH là đường cao. Tính độ dài các cạnh BH, CH, AC, AH .

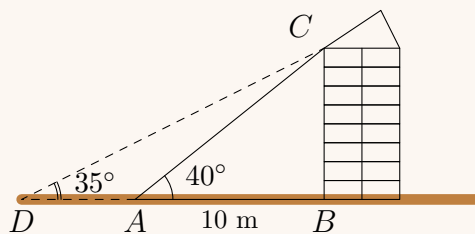
 **Lời giải.**

🔗 **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$ và $AH = 42\text{cm}$. Tính chu vi tam giác ABC .

 **Lời giải.**

❖ Bài 3.

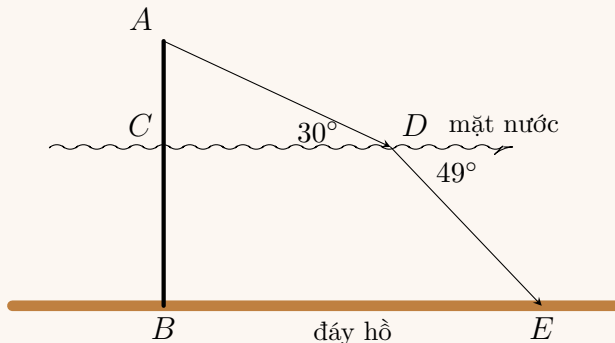
Bạn An đứng cách một tòa nhà một khoảng 10 m. Góc “nâng” từ chỗ bạn An đứng đến đỉnh tòa nhà là 40° . Hỏi nếu An di chuyển sao cho góc “nâng” là 35° thì An cách tòa nhà bao xa, (làm tròn hai chữ số thập phân, biết rằng An chỉ tiến tới hoặc lùi lại).



🗨️ Lời giải.

❖ Bài 4.

Một cây cọc cắm thẳng đứng xuống đáy hồ sâu 1,5 m. Phần cọc nhô lên khỏi mặt nước là 0,5 m. Tia sáng mặt trời chiếu xuống hồ theo phương hợp với mặt nước góc 30° . Nhưng khi vào trong nước tia sáng bị khúc xạ nên tia sáng hợp với mặt nước một góc 49° . Tính chiều dài bóng cây cọc trên mặt nước và dưới đáy hồ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai?



🗨️ Lời giải.

✎ **Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 2, \widehat{BAC} = 30^\circ$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 6.** Người ta cần kéo một vật lên cao 5 m bằng một mặt phẳng nghiêng tạo với phương nằm ngang một góc 36° . Hỏi chiều dài của mặt phẳng nghiêng là bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

B **Đề số 1B (Tự luận dành cho học sinh đại trà)**

✎ **Bài 1.** Không dùng máy tính bỏ túi, hãy sắp xếp giá trị các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần.

$$\sin 20^\circ, \cos 20^\circ, \sin 35^\circ, \cos 40^\circ.$$

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 2.** Cho tam giác MNP vuông tại M , đường cao MH . Biết rằng $MN = 36$ cm, $MP = 48$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng HM, HN, HP .

💬 **Lời giải.**

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

✧ **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 4,5$ cm, $BC = 7,5$ cm.

- Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- Tính $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ và đường cao AH .
- Lấy một điểm M bất kì trên cạnh BC (M khác B, C). Gọi hình chiếu của M trên AB, AC lần lượt là P và Q . Chứng minh $PQ = AM$.
- Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Bài 4.** Tính giá trị biểu thức $A = (3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha)^2 + (4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha)^2$.

 **Lời giải.**

C Đề số 2A (Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đại trà)

1. Trắc nghiệm

2. Tự luận

D Đề số 2B (Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đại trà)

1. Trắc nghiệm

Chọn câu trả lời đúng trong mỗi câu sau

✎ Bài 5. Tam giác MNP vuông tại M thì $\sin N$ bằng

A $\frac{MP}{NP}$.

B $\frac{MP}{MN}$.

C $\frac{MN}{NP}$.

D $\frac{NP}{MN}$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	

✎ Bài 6. Một cột đèn có bóng dài trên mặt đất là 7,5 m. Các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Chiều cao của cột đèn (làm tròn đến hàng phần mười) là

A 7 m.

B 6 m.

C 6,7 m.

D 6,8 m.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ Bài 7. Với α là góc nhọn, khẳng định nào sau đây là sai?

A $0 < \cos \alpha < 1$.

B $\cos^2 \alpha = 1 + \sin^2 \alpha$.

C $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

D $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao. Cho biết $AB = 9$, $BC = 15$. Khi đó độ dài AH bằng

A 6,5.

B 7,2.

C 7,5.

D 7,7.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 9.** Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khi đó $\sin \alpha$ bằng

A $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

B $\frac{4}{3}$.

C $\frac{3}{4}$.

D $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 10.** Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

A $\frac{4}{5}$.

B $\frac{3}{5}$.

C $\frac{4}{3}$.

D $\frac{3}{4}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 11.** Biểu thức $\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ bằng
A $\cos^2 \alpha$. **B** $\sin^2 \alpha$. **C** 1. **D** 2.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 12.** Một chiếc thang dài 3,5 m đặt dựa vào tường, góc “an toàn” giữa chân thang và mặt đất để thang không đổ khi người leo lên là 60° . Khoảng cách “an toàn” từ chân tường đến chân thang là
A 1 m. **B** 0,5 m. **C** 2 m. **D** 1,75 m.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2. Tự luận

✎ **Bài 13.** Dựng góc nhọn α , biết $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 14.** Cho tam giác KQP có $KQ = 5$ cm, $KP = 12$ cm và $QP = 13$ cm. Đường cao KH (H thuộc PQ).

- Chứng minh tam giác KQP vuông.
- Tính góc Q , góc P và độ dài KH , PH .
- Lấy điểm O bất kỳ trên cạnh QP (O khác P , Q). Gọi hình chiếu của O trên KP , KQ lần lượt là A và B . Chứng minh $AB = KO$. Điểm O ở vị trí nào thì AB là ngắn nhất.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 15.** Cho tam giác nhọn ABC , hai đường cao BD và CE . Chứng minh

$$S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A.$$

 **Lời giải.**

E Đề số 3A (Tự luận dành cho học sinh giỏi)

✎ **Bài 1.** Tính diện tích của một tam giác vuông có chu vi 144 cm, biết hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 14 cm.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 20$ cm, đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB, AC . Tính chu vi tam giác ABC sao cho diện tích tứ giác $ADHE$ lớn nhất.

💬 Lời giải.

🔹 **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 56$ cm, $AC = 70$ cm. Tính độ dài cạnh BC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Tam giác ABC có $BC = 40$ cm, đường phân giác AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính các độ dài BD và DC .

 Lời giải.

F Đề số 3B (Tự luận dành cho học sinh giỏi)

❖ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC . Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{EB}{EC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^3.$$

b) $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$.

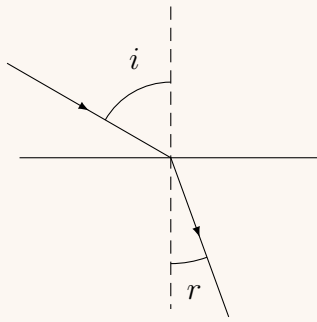
 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Cho hình thang cân $ABCD$, đáy lớn $CD = 10$, AH là đường cao, $AH = AB$, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** Một bể nước có thành cao 80 cm, mực nước đo được trong bể cao 60 cm. Ánh sáng mặt trời chiếu lệch một góc 30° so với về mặt nước. Biết khi chiếu tia sáng với góc tới i thì qua mặt

nước sẽ có góc khúc xạ r tính theo công thức $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{4}{3}$ (tia sáng như hình vẽ). Tính độ dài bóng của thành hồ in dưới đáy bể.



Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✧ **Bài 4.** Cho tam giác $\triangle ABC$, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD . Chứng minh rằng $\tan B \cdot \tan C = 2$.

Lời giải.

Chương 2

ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1

SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

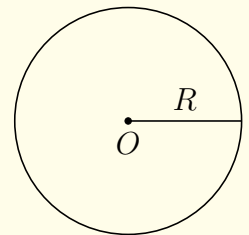
A Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa đường tròn

Định nghĩa 1.1.

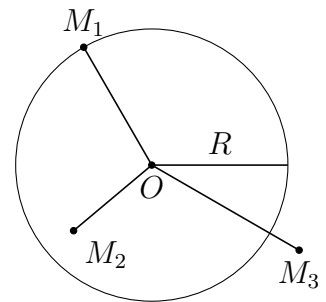
Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách đều điểm O một khoảng không đổi bằng R .

Đường tròn tâm O bán kính R được kí hiệu là $(O; R)$, ta cũng có thể kí hiệu là (O) khi không cần chú ý đến bán kính.



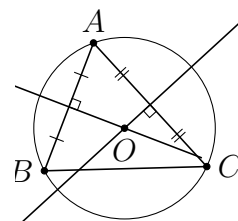
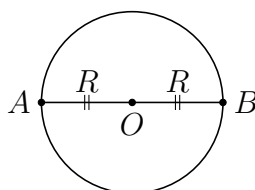
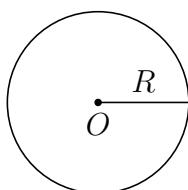
Nhận xét. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M . Khi đó

- ✓ M nằm trên $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM = R$.
- ✓ M nằm bên trong $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM < R$.
- ✓ M nằm bên ngoài $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM > R$.



2. Cách xác định đường tròn

- Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính của nó.
- Một đường tròn được xác định khi biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó.
- Qua ba điểm không thẳng hàng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.



3. Tính chất đối xứng của đường tròn

- Tính chất 1.1.** Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Tính chất 1.2.** Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.



Lưu ý: Đường tròn có một tâm đối xứng và có vô số trục đối xứng.

B Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A . Xác định tâm và bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 2. Chứng minh rằng, nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



❖ **Ví dụ 3.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Cho đường tròn (O) với hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 6.** Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 7.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(-1; -1), B(-1; -2), C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 8.** Cho góc nhọn xAy và hai điểm B, C thuộc tia Ax . Dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và C sao cho tâm O nằm trên tia Ay .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 9.** Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy tìm lại tâm của hình tròn đó.

Lời giải.

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Ví dụ 10.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

 Lời giải.

C Luyện tập

❖ **Bài 1.** Cho tam giác ABC cân tại A , $BC = 12$ cm, chiều cao $AH = 4$ cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .

 **Lời giải.**

✎ **Bài 2.** Cho tam giác ABC cân tại A có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) . Đường cao AH cắt (O) ở D . Biết $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O) .

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 3.** Cho hình thang cân $ABCD$ (với $AD \parallel BC$) có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $BC = 20$ cm. Chứng minh rằng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 4.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , M, N thuộc (O) sao cho $AM = BN$ và M, N nằm trên hai nửa đường tròn khác nhau. Chứng minh MN là đường kính của (O) .

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 5.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

- Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
- Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 6.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ tam giác AEC vuông tại E . Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Bài 8.** Cho tam giác ABC có AQ , KB , CI là ba đường cao và H là trực tâm.

- a) Chứng minh A , B , Q , K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
- b) Chứng minh A , I , H , K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Bài 9.** Cho tam giác đều ABC có AM , BN , CP là ba đường trung tuyến. Chứng minh B , P , N , C cùng thuộc một đường tròn.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Bài 10.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD$. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , BC , CD , DA . Chứng minh bốn điểm M , N , P , Q cùng thuộc một đường tròn.

 Lời giải.

🔗 **Bài 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A .

- Nêu cách dựng đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B .
- Nêu cách dựng đường tròn (O') đi qua A và tiếp xúc với BC tại C .

 Lời giải.

⇨ **Bài 12.** Cho năm điểm A, B, C, D, E . Biết rằng qua bốn điểm A, B, C, D có thể vẽ được một đường tròn, qua bốn điểm B, C, D, E cũng vẽ được một đường tròn. Hỏi qua cả năm điểm A, B, C, D, E có thể vẽ được một đường tròn không?

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 13.** Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Điểm A di động trên (O) , gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB và AC .

- Chứng minh PQ có độ dài không đổi khi A di động trên (O) .
- Tìm quỹ tích trung điểm M của PQ .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 14.** Cho tam giác ABC , các đường cao BD và CE . Trên cạnh AC lấy điểm M . Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F . Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 15.** Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Lấy M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C . Gọi D là hình chiếu của M lên AC và E là hình chiếu của N lên AB . Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 16.** Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 sao cho $S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{ABC}$. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2, H cùng thuộc một đường tròn.

 Lời giải.

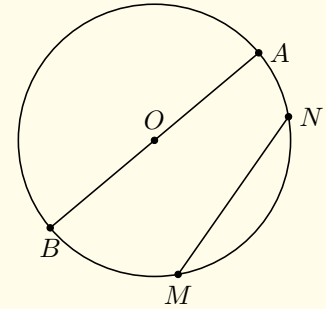
Bài 2

ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 2.1.

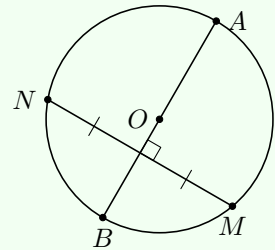
- ☑ Dây cung là đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn.
- ☑ Dây cung đi qua tâm của đường tròn gọi là đường kính của đường tròn.
- ☑ Một dây cung sẽ chia đường tròn thành hai phần, tương ứng với hai cung của đường tròn (cung lớn và cung nhỏ).



☑ Định lý 2.1. Trong các dây cung của một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

☑ Định lý 2.2. Trong một đường tròn

- 1) Đường kính vuông góc với một dây cung thì đi qua trung điểm của dây đó.
- 2) Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm của đường tròn thì vuông góc với dây đó.



B Các ví dụ

🔗 Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; 10)$. Lấy một điểm A tùy ý thuộc (O) . Vẽ dây MN vuông góc với OA tại trung điểm của OA .

- a) Chứng minh $OMAN$ là hình thoi.
- b) Tính độ dài dây MN .

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm trong đường tròn (O) .

- a) Hãy nêu cách dựng dây AB của đường tròn (O) nhận M làm trung điểm.

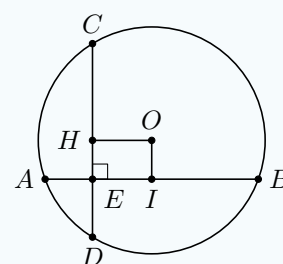
b) Tính độ dài dây AB ở câu a) biết $R = 5$ cm và $OM = 1,4$ cm.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ Ví dụ 3.

Trong hình vẽ bên có $AB \perp CD$, $AE = 2$, $EB = 6$, $EC = 4$ và $ED = 3$. Tính độ dài đường kính của đường tròn (O) .



Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) và dây $AB = 2a$ sao cho khoảng cách từ tâm O đến AB bằng h . Gọi I là trung điểm của AB . Tia IO cắt đường tròn (O) tại C .

- Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C .
- Tính khoảng cách từ O đến BC .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇔ **Ví dụ 5.** Cho đường tròn $(O; R)$ và hai bán kính OA, OB . Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M và N (M nằm giữa C và N).

a) Chứng minh rằng $CM = DN$.

b) Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$ và $CM = MN = ND$, hãy tính độ dài OM theo R .

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 6.** Cho đường tròn $(O; R)$ và hai dây $AB = R\sqrt{3}$, $AC = R\sqrt{2}$ (B, C nằm về hai phía đối với đường thẳng AO). Hãy tính các góc của tam giác ABC .

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 7.** Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $AB = 10$ cm. Một dây $MN = 8$ cm có hai đầu mút di chuyển trên nửa đường tròn (O) (điểm M nằm trên cung nhỏ $\widehat{AN}$). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng MN .

- Chứng minh EF và MN có trung điểm trùng nhau.
- Chứng minh $ME = NF$.
- Xác định vị trí của MN để diện tích tứ giác $ABFE$ lớn nhất.

 **Lời giải.**

C Luyện tập

🔗 **Bài 1.** Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và dây $AB = 8 \text{ cm}$.

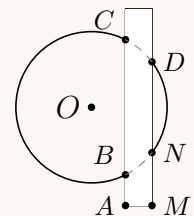
- Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .
- Lấy điểm I trên dây AB sao cho $AI = 1$ cm. Qua I kẻ dây CD vuông góc với AB . Chứng minh rằng $AB = CD$.

 **Lời giải.**

Bài 2.

Trong hình vẽ bên có một mảnh giấy hình chữ nhật che khuất một phần của đường tròn (O). Cho biết $AB = 1$ cm, $BC = 4$ cm và $MN = 2$ cm.

- a) Tính độ dài đoạn DN .
- b) Cho $AM = 1$ cm. Tính bán kính của đường tròn (O) .



 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** Cho đường tròn $(O; OA)$ và đường kính $AD = 12,5$ cm. Lấy điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho $AB = 10$ cm. Kẻ dây BC vuông góc với đường kính AD . Tính các khoảng cách từ tâm O đến các dây AB và BC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Cho đường tròn (O) và đường kính AB . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của OA, OB . Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD, EF song song với nhau (C, E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

- a) Chứng minh tứ giác $CDFE$ là hình chữ nhật.
- b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc 30° . Tính diện tích hình chữ nhật $CDFE$.

 **Lời giải.**

✧ **Bài 5.** Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 13$ cm. Dây $CD = 12$ cm vuông góc với AB tại H .

- Tính độ dài các đoạn HA , HB .
- Gọi M , N theo thứ tự là hình chiếu của H lên AC , BC . Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 6.** Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và điểm M cách O một đoạn là 3 cm.

- Tính độ dài dây cung ngắn nhất của (O) đi qua M .

b) Tính độ dài dây cung dài nhất của (O) đi qua M .

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 7.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm bất kỳ trên cung tròn $\widehat{BC}$ không chứa A . Gọi D, E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC . Tìm vị trí của M để độ dài DE nhỏ nhất.

 **Lời giải.**

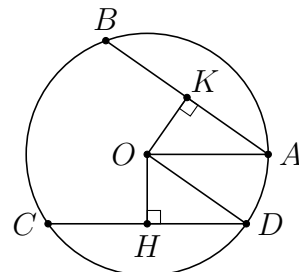
Bài 3

LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

A Tóm tắt lý thuyết

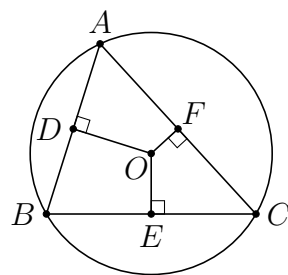
Định lý 3.1. Trong một đường tròn:

- 1) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
- 2) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.



Định lý 3.2. Trong hai dây của một đường tròn:

- 1) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
- 2) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.



Lưu ý: Cả hai định lý trên vẫn đúng với trường hợp hai đường tròn có bán kính bằng nhau (gọi là hai đường tròn bằng nhau).

B Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm (O) bán kính 5 cm, dây AB bằng 8 cm.

- a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .
- b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1$ cm. Kẻ dây CD qua I và vuông góc với AB . Chứng minh rằng $CD = AB$.

Lời giải.

↔ **Ví dụ 2.** Cho đường tròn tâm (O) các dây MN và PQ bằng nhau, các tia MN và PQ cắt nhau tại điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của MN và PQ . Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$.

b) $AN = AQ$.

💬 **Lời giải.**

↔ **Ví dụ 3.** Cho đường tròn tâm (O) , dây AB và dây CD , $AB < CD$. Giao điểm K của các đường thẳng AB , CD nằm ngoài đường tròn. Đường tròn $(O; OK)$ cắt KA và KC tại M và N . Chứng minh rằng $KM < KN$.

💬 **Lời giải.**

↔ **Ví dụ 4.** Cho đường tròn tâm (O) và điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng dây AB vuông góc với OI tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I .

💬 **Lời giải.**

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Ví dụ 5.** Cho đường tròn tâm (O) và hai dây AB, AC sao cho $AB < AC$ và tâm O nằm trong góc $\widehat{ABC}$. Chứng minh rằng $\widehat{OAB} > \widehat{OAC}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Ví dụ 6.** Cho đường tròn tâm (O, R) , dây AB di động sao cho $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng điểm M luôn di động trên một đường tròn cố định.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Ví dụ 7.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A . Gọi D, E theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua AB, AC . Tìm vị trí của M để DE có độ dài lớn nhất.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



Luyện tập

❖ **Bài 1.** Cho đường tròn tâm O bán kính $OA = 11$ cm. Điểm M thuộc bán kính OA và cách O là 7 cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18 cm, $MC < MD$. Tính các độ dài MC , MD .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Cho đường tròn tâm O bán kính 25 cm. Hai dây AB, CD song song với nhau và có độ dài lần lượt là 40 cm, 48 cm. Tính khoảng cách giữa hai dây AB, CD .

 Lời giải.

❖ **Bài 3.** Cho đường tròn tâm O , đường kính 10 dm , điểm M cách O là 3 dm .

- Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M .
- Tính độ dài dây dài nhất đi qua M .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Cho đường tròn tâm O , dây $AB = 24$ cm, dây $AC = 20$ cm. Biết $\widehat{BAC} < 90^\circ$ và điểm O nằm trong góc $\widehat{BAC}$. Gọi M là trung điểm của AC , khoảng cách từ M đến AB bằng 8 cm.

- a) Chứng minh rằng tam giác ABC cân.
b) Tính bán kính của đường tròn đã cho.

 **Lời giải.**

✧ **Bài 5.** Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 13$ cm. Dây CD có độ dài 12 cm và vuông góc với AB tại H .

- a) Tính độ dài đoạn AH và BH .
- b) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AC, BC . Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 6.** Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD . Cho biết $AB > CD$, chứng minh rằng $MH > MK$.

 **Lời giải.**

✧ **Bài 7.** Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm bên trong đường tròn và không cùng thuộc một đường kính. Dựng hai dây song song và bằng nhau sao cho điểm A nằm trên một dây, điểm B nằm trên một dây còn lại.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 8.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB , dây CD . Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến CD .

- Chứng minh rằng $CH = DK$.
- Chứng minh rằng $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$.
- Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $AHBK$, biết $AB = 30$ cm, $CD = 18$ cm.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



Bài 4

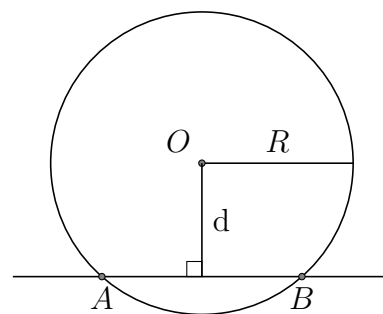
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A Tóm tắt lý thuyết

1. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

- Đường tròn và đường thẳng cắt nhau khi bán kính của đường tròn lớn hơn khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R > d$.
- Đường thẳng cắt đường tròn tại 2 điểm phân biệt. Số giao điểm bằng 2.

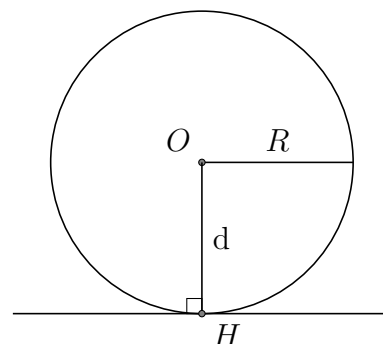
⚠ Lưu ý: Số giao điểm lớn nhất của đường thẳng và đường tròn là 2 giao điểm.



2. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

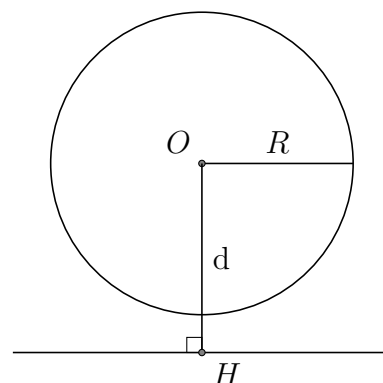
- Đường tròn và đường thẳng tiếp xúc nhau khi bán kính của đường tròn bằng khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R = d$.
- Đường thẳng tiếp xúc đường tròn tại 1 điểm duy nhất. Số giao điểm bằng 1.

⚠ Lưu ý: Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn được gọi là tiếp tuyến. Điểm tiếp xúc gọi là tiếp điểm. Một đường thẳng gọi là tiếp tuyến nếu đường thẳng đó vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.



3. Đường thẳng và đường tròn không cắt nhau

- Đường tròn và đường thẳng không cắt nhau khi bán kính của đường tròn nhỏ hơn khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R < d$.
- Đường thẳng không cắt đường tròn nên số giao điểm bằng 0.



B Các ví dụ

⇒ **Ví dụ 1.** Cho điểm A nằm trong đường tròn (O) . Chứng minh rằng mọi đường thẳng d đi qua A đều cắt (O) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 2.** Cho đường thẳng a và một điểm O cách a là 3 cm. Dựng $(O; 5\text{ cm})$.

a) Xét vị trí tương đối của a và đường tròn (O) .

b) Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và (O) . Tính độ dài BC .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 3.** Cho hình thang vuông $ABCD (A = D = 90^\circ)$, $AB = 4\text{ cm}$, $BC = 13\text{ cm}$ và $CD = 9\text{ cm}$. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 4.** Cho đường thẳng a . Tâm I của tất cả các đường tròn bán kính 3 cm, tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào?

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 5.** Cho đường tròn (O) , điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng đi qua A , cắt đường tròn ở B và C sao cho tổng $AB + AC$ có giá trị lớn nhất.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

.....	
.....	
.....	

C **Luyện tập**

⇨ **Bài 1.** Cho đường thẳng xy không cắt đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng mọi điểm thuộc xy đều ở bên ngoài đường tròn (O) .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 2.** Cho điểm O cách đường thẳng a là 6 cm. Vẽ đường tròn $(O, 10\text{ cm})$.

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng a .

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C . Tính diện tích tam giác OBC .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 3.** Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy , trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = R\sqrt{3}$. Điểm M di động trên đường nào?

Lời giải.

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

🔹 **Bài 4.** Cho đường tròn $(O; R)$ có dây $AB = R$. Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = a$. Qua M vẽ đường thẳng xy vuông góc với AB . Chứng minh rằng đường thẳng xy và đường tròn $(O; R)$ chỉ có điểm chung khi $a \leq \frac{3R}{2}$.

 Lời giải.

❖ **Bài 5.** Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm E trên cạnh BC và điểm F trên cạnh CD sao cho $AB = 3BE = 2DF$. Chứng minh EF tiếp xúc với cung tròn tâm A , bán kính AB .

 Lời giải.

❖ **Bài 6.** Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = \frac{8R}{5}$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB , cắt các tia OA, OB theo thứ tự tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN .

 Lời giải.



Bài 5

DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

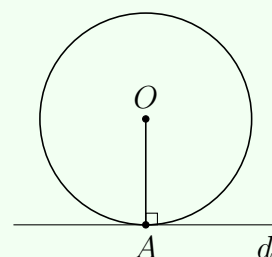
A Tóm tắt lý thuyết

🟢 **Định nghĩa 5.1 (Tiếp tuyến của đường tròn).** Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

🟢 **Định lý 5.1 (Tính chất của tiếp tuyến).** Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

🟢 **Định lý 5.2 (Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của một đường tròn).**

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.



B Các ví dụ

🔗 **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Vẽ đường tròn (B, BA) . Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 2.** Cho đường tròn (O) , điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Gọi M là trung điểm của AO . Vẽ đường tròn (M, MO) , nó cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C . Chứng minh rằng AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 3.** Cho đường tròn (O) có bán kính OA , dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA .

- a) Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?
- b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , nó cắt đường thẳng OA tại E . Tính độ dài BE , biết $OB = R$.

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , vẽ các đường cao BM, CN cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh rằng A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn tâm O .
- b) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh IM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy . Kẻ $AD \perp xy$ và $BC \perp xy$.

- Chứng minh $MC = MD$.
- Chứng minh tổng $AD + BC$ có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm M trên nửa đường tròn.
- Chứng minh đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB .
- Xác định vị trí điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất.

 Lời giải.

C **Luyện tập**

❖ **Bài 1.** Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4$ cm, $BC = 13$ cm, $CD = 9$ cm.

- a) Tính độ dài AD .
- b) Chứng minh rằng đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC .

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ hai đường tròn (B,BA) và (C,CA) cắt nhau tại D (khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (B) .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 3.** Cho đường tròn (O) và một dây AB . Gọi M là trung điểm của AB . Vẽ bán kính OI đi qua M . Từ I vẽ đường thẳng $xy \parallel AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 4.** Cho đường tròn (O,R) đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

b) $MC^2 = 3R^2$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 5.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ hai tiếp tuyến Ax và By . Trên Ax lấy điểm C . Nối C với O , từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By ở D .

- Tứ giác $ABDC$ là hình gì?
- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác COD tiếp xúc với đường thẳng AB tại O .
- Chứng minh $CA \cdot DB = R^2$. Tính CA , DB và CD khi $\widehat{ACD} = 60^\circ$.

 Lời giải.

❖ **Bài 6.** Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 2R$, một điểm M di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi D, C theo thứ tự là các hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất ấy.

 **Lời giải.**

Bài 6

TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

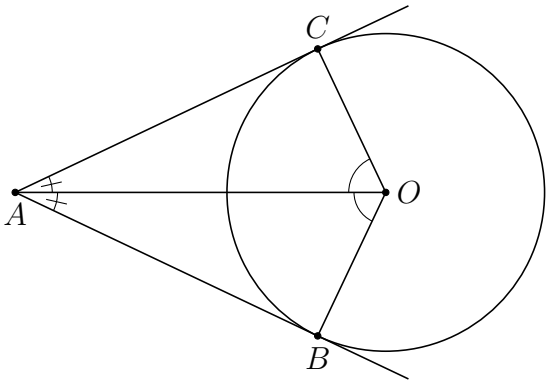
A

Tóm tắt lí thuyết

1) Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

Định lý 6.1. Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

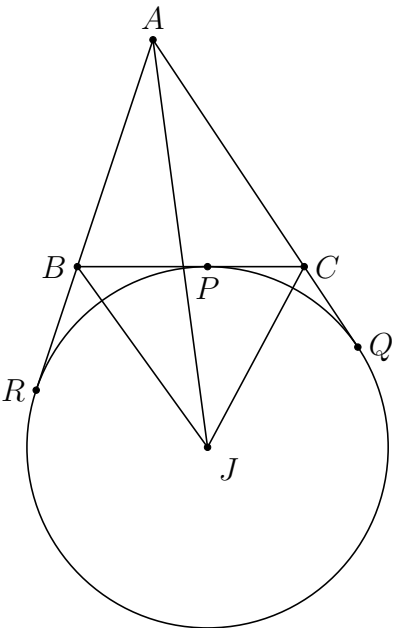
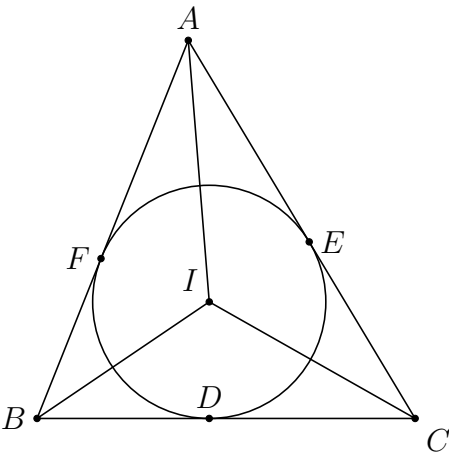


2) Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác của góc trong tam giác.

3) Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.
- Một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C (hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và phân giác ngoài tại B, hoặc C). Kí hiệu (J, r_A) .



B Các ví dụ

⇨ **Ví dụ 1.** Cho đường tròn tâm O , bán kính R . Từ điểm A nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn tâm O với B, C là tiếp điểm.

- Chứng minh AO là đường trung trực của BC .
- Kẻ đường kính CD của (O) . Chứng minh BD song song với AO .
- Kẻ OM vuông góc với OB (M thuộc AC). Chứng minh $MO = MA$.

💬 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

⇨ **Ví dụ 2.** Từ điểm A nằm ngoài $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là các tiếp điểm). Kẻ BE vuông góc với AC , CF vuông góc AB ($E \in AC; F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
- Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.
- Tìm vị trí của điểm A để H thuộc (O) .

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 3.** Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMO} = 30^\circ$.

- Chứng minh $MO = 2R$.
- Tính AB theo R .
- Tính S_{MAB} theo R .

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 4.** Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tiếp tuyến Ax, By . Điểm M nằm trên (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D . Đường thẳng AD cắt BC tại N .

- Chứng minh A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh OC song song BM .
- Tìm vị trí của M để S_{ABCD} nhỏ nhất.
- Chứng minh MN và AB vuông góc với nhau.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC cân tại A , điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác.

- Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm B, I, C, K . Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; OK)$.
- Tính bán kính của (O) , biết $AB = AC = 20$ cm, $BC = 24$ cm.

 **Lời giải.**

6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Kết nối tri thức với cuộc sống

❖ **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC , đường tròn tâm I , bán kính r nội tiếp tam giác ABC . Gọi D, E, F là các tiếp điểm ($D \in AB, E \in BC, F \in CA$). Đặt $AB = c, BC = a, AC = b, AD = x, BE = y, CF = z$.

- Tính x, y, z theo a, b, c .
- Chứng minh $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ (p là nửa chu vi tam giác ABC).
- Chứng minh $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ trong đó $h_a; h_b; h_c$ lần lượt là các độ dài đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

C **Luyện tập**

- ✎ **Bài 1.** Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).
- a) Gọi E là giao điểm của BC và OA . Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE \cdot OA = R^2$.
 - b) Trên cung nhỏ BC lấy điểm K bất kỳ (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn $(O; R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q . Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

- ✎ **Bài 2.** Cho góc xOy và đường tròn tâm I tiếp xúc các tia Ox, Oy tương ứng tại các điểm A, B . Một đường thẳng qua B và song song với Ox cắt đường tròn (I) lần thứ hai tại C .
- a) Chứng minh rằng $AB = AC$.
 - b) Đường thẳng OC cắt dây cung AB tại E . Chứng minh rằng $OE > AE$.
 - c) Gọi F là điểm đối xứng với O qua A . Chứng minh rằng CF tiếp xúc với đường tròn (I) .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường



✎ **Bài 3.** Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi O là trung điểm của cạnh BC . Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Lấy các điểm M, N tương ứng trên các đoạn thẳng AD, AE sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn tâm O .

a) Chứng minh rằng góc MON có số đo không đổi khi M, N thay đổi.

b) Chứng minh rằng $BM \cdot CN$ không đổi.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 4.** Cho đường tròn (O) nội tiếp hình thoi $ABCD$. Kẻ một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh AB, AD theo thứ tự ở E, F . Kẻ một tiếp tuyến khác với đường tròn (O) cắt cạnh CB, CD theo thứ tự ở G và H . Chứng minh rằng:

a) $BE \cdot DF = OB \cdot OD$.

b) EG song song với HF .

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 5.** Đường tròn (I, r) nội tiếp và đường tròn (J, r_a) bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tương ứng tại các điểm M và P . Đoạn thẳng AP cắt đường tròn (I, r) tại điểm N .

- Chứng minh rằng đoạn thẳng MN là đường kính của đường tròn (I, r) .
- Gọi Q là trung điểm của cạnh BC , đường thẳng IQ cắt đường cao AH tại K . Chứng minh rằng $AK = r$.

 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 6.** Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại D .

- a) Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $CA \cdot CB = 2 \cdot DA \cdot DB$.
- b) Chứng minh rằng nếu $CA \cdot CB = 2 \cdot DA \cdot DB$ thì $\triangle ABC$ vuông tại C .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 7.** Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng d cắt đường tròn tại A, B . Từ điểm M là điểm nằm trên tia đối tia AB kẻ các tiếp tuyến MC, MD . Chứng minh rằng khi M di chuyển trên tia đối tia AB , đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Bài 7

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

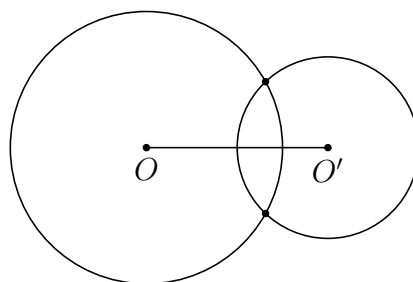


Tóm tắt lý thuyết

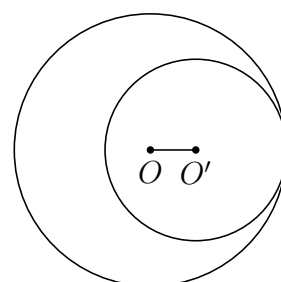
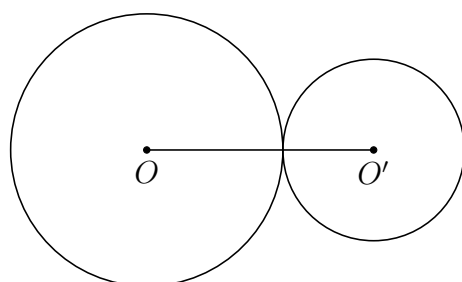
1. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Xét vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$.

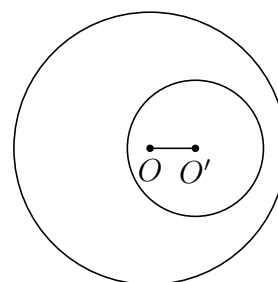
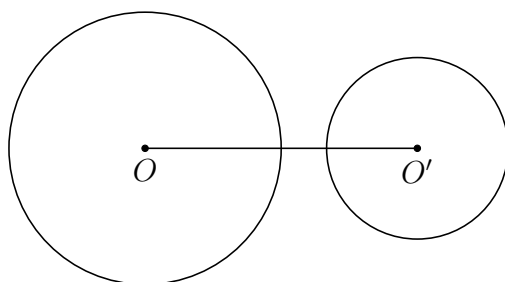
- a) Nếu $R - r < OO' < R + r$ thì (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.



- b) Nếu $OO' = R + r$ thì (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau.
Nếu $OO' = R - r$ thì (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau.



- c) Nếu $OO' > R + r$ thì (O) và (O') ở ngoài nhau.
Nếu $OO' < R - r$ thì (O) chứa (O') .



Chú ý.

- ☑ Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối hai tâm.
- ☑ Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối hai tâm.

2. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- a) Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.
- b) Tiếp tuyến chung của hai đường tròn không cắt đoạn nối hai tâm là tiếp tuyến chung ngoài, cắt đoạn nối tâm là tiếp tuyến chung trong.

B

Các ví dụ

❖ **Ví dụ 1.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R = 12\text{cm}$, $r = 5\text{cm}$, $OO' = 13\text{cm}$.

- Chứng minh hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B và OO' là đường trung trực của AB .
- Chứng minh AO là tiếp tuyến của đường tròn $(O'; r)$.
- Tính độ dài AB .

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Ví dụ 2.** Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I .

- Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.
- Chứng minh $\triangle BAC$ và $\triangle DAE$ có diện tích bằng nhau.
- Gọi K là trung điểm của DE . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle OKO'$ tiếp xúc với BC .

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 3.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt ở B và C . Đường vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M .

- Tính MA theo R và r .
- Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r .
- Tính diện tích tam giác BAC theo R và r .
- Gọi I là trung điểm của OO' . Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I; IM)$.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 4.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một cát tuyến qua A cắt (O) ở M , cắt (O') ở N sao cho A nằm giữa M và N . Từ A vẽ các đường kính AOC và $AO'D$.

- a) Tứ giác $CMND$ là hình gì?
- b) Gọi E là trung điểm của OO' . Với $MA = NA$, chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn $(E; EA)$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Gọi M là trung điểm của OO' . Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D .

- a) Khi $CD \perp MA$, chứng minh $AC = AD$.
- b) Khi CD qua A và không vuông góc với MA .
 - i) Vẽ đường kính AE của (O) , AE cắt (O') ở H . Vẽ đường kính AF của (O') , AF cắt (O) ở G . Chứng minh AB, EG, FH đồng quy.
 - ii) Tìm vị trí của CD để đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất?

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 6.** Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B . Gọi AM là dây cung của đường tròn (O_1) tiếp xúc với đường tròn (O_2) ở A và AN là dây cung của đường tròn (O_2) tiếp xúc với đường tròn (O_1) ở A . Gọi E là điểm đối xứng với A qua B .

- Chứng minh rằng bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
- Khi hai đường tròn (O_1) và (O_2) thay đổi nhưng luôn cắt nhau tại hai điểm cố định A và B , tìm tập hợp tâm I của đường tròn qua bốn điểm A, M, E, N .

 **Lời giải.**

C **Luyện tập**

🔗 **Bài 1.** Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Lấy các điểm I, K theo thứ tự trên các tia Ox, Oy . Vẽ đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn $(K; OI)$ cắt Oy tại N (K nằm giữa O và N).

- Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.
- Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C . Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.
- Gọi giao điểm của hai đường tròn (I) và (K) là A, B . Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Giả sử I và K theo thứ tự di động trên Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

 Lời giải.

❖ **Bài 2.** Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên đoạn OA lấy điểm B sao cho $OB = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB .

- a) Chứng minh đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O) .
- b) Vẽ đường tròn đồng tâm O với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C . Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D, E (D nằm giữa C và E). Chứng minh $AC = CD = DE$.

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 3.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB .

- Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I) .
- Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
- Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (I) . Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.
- Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Cho ba đường tròn (O_1) , (O_2) , (O_3) có cùng bán kính R và cùng đi qua điểm O . Gọi giao điểm thứ hai của từng cặp hai trong ba đường tròn là A , B , C . Chứng minh

- Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có bán kính bằng R .
- Ba đường thẳng xác định bởi tâm của một đường tròn và giao điểm của hai đường tròn còn lại cắt nhau tại một điểm.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 5.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt ở B và C . Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I . Gọi E, F thứ tự là giao điểm của IO với AB và của IO' với AC .

- Chứng minh A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn đó.
- Chứng minh $IE \cdot IO + IF \cdot IO' = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$.
- Gọi P là trung điểm của OA . Chứng minh PE tiếp xúc với (K) .
- Cho OO' cố định và có độ dài là $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

 Lời giải.

❖ **Bài 6.** Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C di động trên đoạn AB . Vẽ các đường tròn tâm I đường kính AC và đường tròn tâm K đường kính BC . Tia Cx vuông góc với AB tại C , cắt (O) tại M . Đoạn thẳng MA cắt đường tròn (I) tại E và đoạn thẳng MB cắt đường tròn (K) tại F .

- Chứng minh tứ giác $MECF$ là hình chữ nhật và EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K) .
- Cho $AB = 4\text{cm}$, xác định vị trí điểm C trên AB để diện tích tứ giác $IEFK$ lớn nhất.
- Khi C khác O , đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MECF$ cắt đường tròn (O) tại P (khác M), đường thẳng PM cắt đường thẳng AB tại N . Chứng minh tam giác MPF đồng dạng với tam giác MBN .
- Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



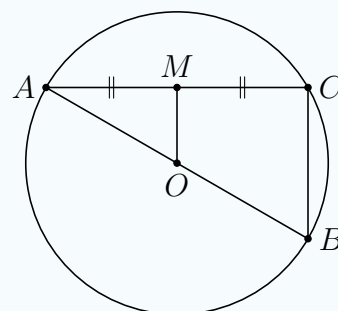
Bài 8

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A Các ví dụ

❖ **Ví dụ 1.** Cho hình vẽ bên, biết đường kính $AB = 10$ cm; $OM = 3$ cm.

- Tính số đo góc $\widehat{ACB}$;
- Tính độ dài dây AC ;
- Tiếp tuyến tại B của đường tròn cắt tia AC ở D . Tính độ dài CD .



Lời giải.

❖ **Ví dụ 2.** Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 12$ cm, dây MN vuông góc với AB tại trung điểm I của OB . Các tiếp tuyến của (O) tại M và N cắt nhau tại C . Vẽ đường tròn tâm I đường kính OB .

- Xác định vị trí tương đối của (O) và (I) ;
- Tính độ dài dây MN ;
- Tứ giác $BMON$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh: $CO \perp MN$;

f) Chứng minh $\frac{4}{MN^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{NC^2}$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 3.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$). Vẽ các đường kính AOB , $AO'C$. Dây DE của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC .

- Tứ giác $BDC E$ là hình gì? Vì sao?
- Gọi I là giao điểm của DA và đường tròn (O') . Chứng minh rằng ba điểm E, I, C thẳng hàng;
- Chứng minh rằng KI là tiếp tuyến của (O') .

 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 4.** Cho đường tròn $(O; 13 \text{ cm})$, dây $AB = 24 \text{ cm}$.

- a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB ;
- b) Gọi M là điểm thuộc dây AB . Qua M , vẽ dây CD vuông góc với dây AB tại điểm M . Xác định vị trí điểm M trên dây AB để $AB = CD$.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 5.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Kẻ các tiếp tuyến Ax , By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D .

- Chứng minh tam giác COD là tam giác vuông;
- Chứng minh $AC \cdot BD = OM^2$;
- Cho biết $OC = BA = 12$ cm. Tính độ dài AC và BD .

 Lời giải.

↔ **Ví dụ 6.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A . Một đường thẳng (d) tiếp xúc với cả hai đường tròn trên tại B và C với $B \in (O), C \in (O')$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông;

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') .

💬 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

↔ **Ví dụ 7.** Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến Ax lấy điểm $C \neq A$. Đoạn thẳng BC cắt (O) tại M . Gọi I là trung điểm của MB , K là trung điểm của AC .

- Chứng minh AM là đường cao của tam giác ABC và $AC^2 = CM \cdot CB$;
- Chứng minh A, I, C, M cùng nằm trên một đường tròn;
- Chứng minh KM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 8.** Cho đường tròn (O) , đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (O') có đường kính CB .

- Hai đường tròn (O) và (O') có vị trí tương đối như thế nào?
- Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?

- c) Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (O') . Chứng minh rằng 3 điểm E, C, K thẳng hàng;
- d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Ví dụ 9.** Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C thuộc (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D . Gọi E là trung điểm của AD .

- Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O) ;
- Chứng minh EO vuông góc với AC tại trung điểm I của AC .

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 10.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, N là điểm trên nửa đường tròn. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ hai tiếp tuyến Ax và By và một tiếp tuyến tại N cắt hai tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại C và D .

- Chứng minh $AC + BD = CD$ và $AC \cdot BD$ không đổi;
- Chứng minh AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD ;
- Biết $AC = \frac{R}{2}$. Tính NA và NB .

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

B **Luyện tập**

❖ **Bài 1 (Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2015 - 2016).** Cho đường tròn tâm O , bán kính R , kẻ đường kính AB và dây cung AM có độ dài bằng R . Tia OM cắt tiếp tuyến Ax (A là tiếp điểm) của đường tròn (O) tại P . Tiếp tuyến PN của (O) (N là tiếp điểm, N khác A) cắt đường thẳng AB ở Q .

- a) Chứng minh OP là đường trung trực của AN .
- b) Chứng minh AM song song với ON và tính AP theo R .
- c) Chứng minh tam giác APN đều và tính diện tích tam giác APQ theo R .
- d) Gọi H là giao điểm của AM và PQ . Chứng minh rằng AP và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn ($M; MH$).

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2 (Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2014 - 2015).** Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi M là một điểm trên đường tròn (O) (M không trùng với A và B). Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H . Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AC và BD với đường tròn tâm M (C, D là hai tiếp điểm).

- a) Chứng minh $AC + BD = AB$.
- b) Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) Gọi K là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng $KH \parallel AC$.

 Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 3 (Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2013-2014).** Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H .

- Chứng minh tam giác ABC vuông tại C và $CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$.
- Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC ở D . Gọi I là trung điểm của AD . Chứng minh đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt tia IC ở K . Chứng minh $IA \cdot BK = R^2$.
- Xác định vị trí điểm C trên đường tròn (O) để diện tích tứ giác $ABKI$ nhỏ nhất.

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 4 (Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Quận 12, HCM).** Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy C thuộc (O) , gọi E là trung điểm BC . Tiếp tuyến tại C của O cắt OE ở D .

- Chứng minh $\triangle ACB$ vuông và OE vuông góc với BC .
- Chứng minh DB là tiếp tuyến của (O) .
- Kẻ CH vuông góc với AB . Chứng minh $CB \cdot OC = OD \cdot HC$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 5 (Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Thủ Đức, Hồ Chí Minh).** Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax và By của đường tròn (O) .

- Chứng minh $Ax \parallel By$.
- Trên (O) lấy điểm M . Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) lần lượt cắt Ax và By tại D, E . Chứng minh $DE = DA + BE$.
- Chứng minh $\widehat{DOE} = 90^\circ$ và $DA \cdot BE = R^2$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 6 (Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Trần Đại Nghĩa, HCM).** Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường tròn tâm O đường kính AC cắt cạnh BC tại D . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AD và DC .

- Chứng minh tứ giác $OHKD$ là hình chữ nhật.
- Tia OH cắt cạnh AB tại E . Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Tia OK cắt đường thẳng DE tại N và cắt đường tròn tâm O tại I . Gọi S là giao điểm của OB với AD . Đường thẳng đi qua S và vuông góc với AO cắt tia OH tại T . Chứng minh AT vuông góc với BO và 3 điểm A, T, N thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 7 (Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Bắc Từ Liêm, Hà Nội).** Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Qua điểm A kẻ tia tiếp tuyến Ax đến đường tròn (O) . Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC > R$. Từ điểm C kẻ tiếp tuyến CM với đường tròn (O) (M là tiếp điểm).

- Chứng minh rằng bốn điểm A, C, O, M cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh rằng $MB \parallel OC$.
- Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $BC \cdot BK = 4R^2$.
- Chứng minh rằng $\widehat{CMK} = \widehat{MBC}$.

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 8 (Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Đề A, Sở GDĐT Tỉnh Thanh Hóa, năm 2016).** Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến MA với đường tròn (A là tiếp điểm). Tia Mx nằm giữa MA và MO cắt đường tròn ($O; R$) tại hai điểm C và D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của dây CD , kẻ AH vuông góc với MO tại H .

- Tính $OH \cdot OM$ theo R .
- Chứng minh: Bốn điểm M, A, I, O cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi K là giao điểm của OI với HA . Chứng minh KC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

 **Lời giải.**

✧ **Bài 9 (Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Vĩnh Long, năm 2017).** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng

- a) $\widehat{ACB} = 90^\circ$.
- b) $BC \parallel OM$.
- c) MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH .

🗨️ **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 10.** Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O)$, $C \in (O')$. Gọi M là trung điểm của OO' . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC .

- Tính số đo góc HOH' .
- Chứng minh rằng OH là tia phân giác của góc AOB .
- Chứng minh rằng AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') .
- Cho $R = 5$ cm, $r = 2$ cm. Tính độ dài BC .

 **Lời giải.**

Chương 3

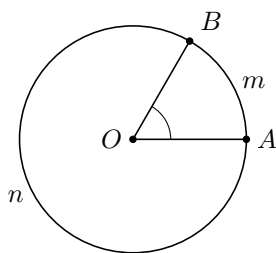
GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1

GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

A Tóm tắt lý thuyết

● **Định nghĩa 1.1.** Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.



Trong hình vẽ trên $\widehat{AOB}$ là một góc ở tâm, $\widehat{AmB}$ là cung nhỏ, $\widehat{AnB}$ là cung lớn.

● **Định nghĩa 1.2.**

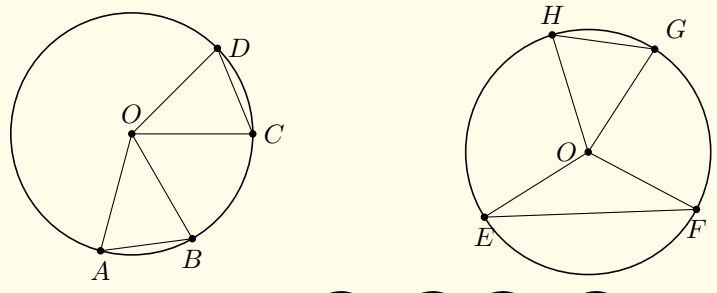
- ☑ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- ☑ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
- ☑ Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

⚠ **Lưu ý:** Chú ý

- ☑ Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180° .
- ☑ Cung lớn có số đo lớn hơn 180° .
- ☑ Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có “cung không” với số đo 0° và cung cả đường tròn có số đo 360° .

● **Định nghĩa 1.3.** Trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- ☑ Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- ☑ Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.



Trong hình trên $\widehat{AB} = \widehat{CD}$; $\widehat{EF} > \widehat{GH}$.

Định lí 1.1. Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}$.

B Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Tính số đo của hai dây cung MN .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 3. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy ba điểm A, B, C sao cho dây cung $AB = R, BC = R\sqrt{2}$ và tia BO nằm giữa hai tia BA và BC . Tính số đo các cung nhỏ AB, BC và AC .

Lời giải.

.....	
.....	
.....	

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Ví dụ 4.** Hai tiếp tuyến tại B và C của nửa đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại A . Biết $OA = R\sqrt{2}$. Tính số đo của cung BC .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Ví dụ 5.** Trên dây cung AB của đường tròn (O) lấy hai điểm H và K sao cho $AH = HK = KB$. Vẽ bán kính OD qua H và bán kính OC qua K . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{AD} = \widehat{BC}$;

b) $\widehat{AD} < \widehat{DC}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



Luyện tập

✎ **Bài 1.** Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Tìm số đo cung lớn $\widehat{BC}$ của đường tròn (O) .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 2.** Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây cung AC . Chứng minh rằng

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC}.$$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ, \widehat{C} = 50^\circ$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác đó tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự tại D, E, F . Tính số đo các cung $\widehat{DE}, \widehat{EF}$ và $\widehat{FD}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 4.** Cho một nửa đường tròn (O) và hai dây cung $AB \parallel CD$ nằm trong nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

❖ **Bài 5.** Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính 20 cm, C là điểm chính giữa của của nửa đường tròn. Lấy điểm H thuộc OA sao cho $OH = 6$ cm. Đường vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn tại D . Vẽ dây AE song song với CD . Gọi K là hình chiếu của E trên AB . Tính diện tích tam giác AEK .

 **Lời giải.**

Bài 2

LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

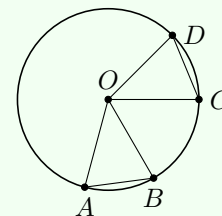
A Tóm tắt lý thuyết

Định lý 2.1.

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau.

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Nghĩa là $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$.

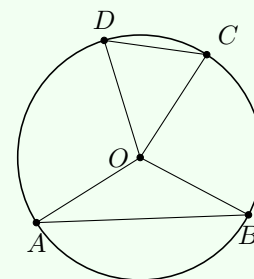


Định lý 2.2.

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau.

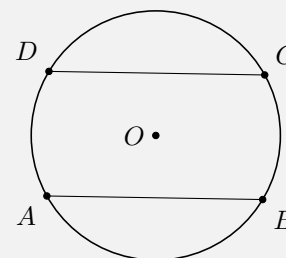
- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
- Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

Nghĩa là $\widehat{AB} < \widehat{CD} \Leftrightarrow AB < CD$.



Tính chất 2.1. Trong một đường tròn.

- Hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy và ngược lại.
- Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.



B Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Kẻ các đường kính AOC , $AO'D$. Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O') .

- So sánh các cung nhỏ BC , BD .
- Chứng minh rằng B là điểm chính giữa của cung $\widehat{EBD}$ (tức là điểm B chia cung $\widehat{EBD}$ thành hai cung bằng nhau $\widehat{BE} = \widehat{BD}$).

Lời giải.

.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC . Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC, K \in BD$).

- a) Chứng minh rằng $OH > OK$. b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC .

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 3.** Cho tam giác đều ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng nửa đường tròn (O) đường kính BC . Trên nửa đường tròn lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$. Các đường thẳng AD, AE cắt đoạn thẳng BC tại M và N . Chứng minh rằng $BM = MN = NC$.

 **Lời giải.**

a) Chứng minh rằng điểm D nằm giữa H và M .

b) Giả sử tam giác ABC nhọn, chứng minh rằng $\widehat{MAD} < \widehat{DAH}$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 1.** Cho đường tròn (O) . Gọi I là điểm chính giữa của cung AB (không phải là cung nửa đường tròn) và H là trung điểm của dây AB . Chứng minh rằng đường thẳng IH đi qua tâm O của đường tròn.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Cho đường tròn tâm O bán kính R . Vẽ góc ở tâm $\widehat{AOB} = 80^\circ$, vẽ góc ở tâm $\widehat{BOC} = 120^\circ$ kề với $\widehat{AOB}$. So sánh và sắp xếp độ dài AB, BC, CA theo thứ tự tăng dần.

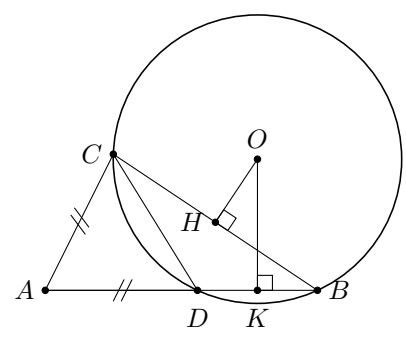
💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Trên cạnh AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC . Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC, K \in BD$).

a) Chứng minh rằng $OH < OK$. b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC .

Lời giải.

- a) Trong tam giác ABC , theo bất đẳng thức tam giác, ta có $BC > AB - AC = AD + AB = BD$ hay $BC > BD$.
Theo định lí về dây cung và khoảng cách đến tâm, từ $BC > BD$ suy ra $OH < OK$.
- b) Từ bất đẳng thức về dây cung $BC > BD$ suy ra $\widehat{BC} > \widehat{BD}$.



Chọn đáp án **(D)** □

❖ **Bài 4.** Cho hình thoi $ABCD$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AD . Vẽ đường tròn tâm C , bán kính CB . Lấy điểm E bất kì trên đường tròn tâm A (không trùng với B và D), điểm F trên đường tròn tâm C sao cho BF song song với DE . So sánh hai cung nhỏ DE và BF .

💬 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

↔ **Bài 5.** Cho đường tròn tâm O . Trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C, D . Từ C kẻ CH vuông góc với AB , nó cắt đường tròn tại điểm thứ hai là E . Từ A kẻ AK vuông góc với DC , nó cắt đường tròn tại điểm thứ hai là F . Chứng minh rằng:

- a) Hai cung nhỏ CF và DB bằng nhau.
- b) Hai cung nhỏ BF và DE bằng nhau.
- c) $DE = BF$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

↔ **Bài 6.** Trên dây cung AB của một đường tròn O , lấy hai điểm C và D chia dây này thành ba đoạn thẳng bằng nhau $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{AE} = \widehat{FB}$.
- b) $\widehat{AE} < \widehat{EF}$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường



GÓC NỘI TIẾP

🟢 **Định nghĩa 3.1.** Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh là hai dây cung. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

🔵 **Định lí 3.1.** Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo cung bị chắn.

🔵 **Định lí 3.2.** Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp chắn cùng một cung hoặc hai cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (có số đo nhỏ hơn 90°) có số đo bằng một nửa số đo góc ở tâm chắn bởi cung đó.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

❖ **Ví dụ 1.** Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung nhỏ AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M . Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S . Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2 \cdot \widehat{MBA}$.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 2.** Cho đường tròn tâm O , đường kính AB và S là một điểm nằm ngoài đường tròn. Các đường thẳng SA và SB lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai M, N . Gọi H là giao điểm của AN và BM . Chứng minh rằng

b) $HM \cdot HB = HN \cdot HA$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác trong góc B và C cắt (O) tại E và D .

a) Chứng minh $\triangle ACE = \triangle ABD$.

b) Gọi I là giao điểm của CD và BE . Tứ giác $ADIE$ là hình gì? Tại sao?

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB ($C \in (O)$, $D \in (O')$). Tia CB cắt (O') tại E , tia BD cắt (O) tại F . Chứng minh rằng $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot CF$.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 5.** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên cung nhỏ BC . Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) , lấy điểm M . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

 **Lời giải.**

 **Lời giải.**



Luyện tập

✧ **Bài 1.** Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) . Từ điểm M nằm chính giữa cung AB vẽ dây cung MN song song với BC cắt AC tại S . Chứng minh rằng $SM = SC$ và $SN = SA$.

🗨️ Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 2.** Cho tam giác ABC cân tại A , $A < 90^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

- a) $\triangle DBE$ cân.
- b) $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

🗨️ Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 3.** Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ đường kính MN vuông góc với BC (M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng AM, AN là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$.

🗨️ Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

c) Tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O) .

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✎ **Bài 5.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{BAD}$. Mà $\widehat{BCM} = \widehat{BDA} \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB} \right)$, nên ta có $\triangle BMC \sim \triangle BAD$, dẫn tới

$$\frac{BC}{MC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = BD \cdot CM. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AM \cdot BD + CM \cdot BD = AC \cdot BD.$$

✎ **Bài 6.** Cho tam giác ABC nhọn với các đường cao AA', BB', CC' . Chứng minh rằng AA' là phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 7.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , C là điểm cố định nằm trên đường tròn và M là điểm di động trên (O) sao cho M, O, C không thẳng hàng. CM và AB cắt nhau tại D . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ODM luôn đi qua một điểm cố định.

💬 **Lời giải.**

..... 	
---	---



Bài 4

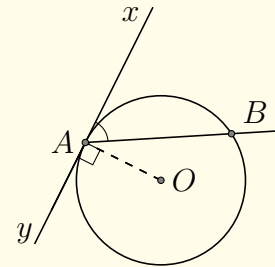
GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 4.1.

Đường thẳng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A .
 AB là dây cung.

Góc $B Ax$ được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

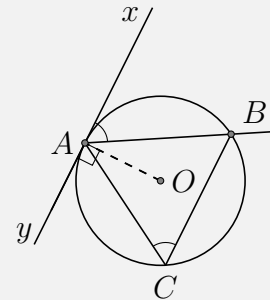


Định lý 4.1. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.
 Cụ thể như hình trên, ta có $\widehat{BAx} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AB}$.

Hệ quả 4.1.

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Cụ thể $\widehat{BAx} = \widehat{BCA}$.



B Các ví dụ

Ví dụ 1 (Bài 27, SGK trang 79). Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Lấy điểm P khác A và B trên đường tròn. Gọi T là giao điểm của AP với tiếp tuyến tại B của đường tròn. Chứng minh $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.

Lời giải.

⇨ **Ví dụ 2 (Bài 29, SGK trang 19).** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Tiếp tuyến kẻ từ A đối với đường tròn (O') cắt (O) tại C và đối với đường tròn (O) cắt (O') tại D . Chứng minh $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$.

Lời giải.

⇨ **Ví dụ 3.** Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Một tiếp tuyến của đường tròn tại P thuộc đường tròn cắt đường thẳng AB tại T (điểm B nằm giữa O và T). Chứng minh $\widehat{BTP} + 2 \cdot \widehat{TPB} = 90^\circ$.

Lời giải.

⇨ **Ví dụ 4.** Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn (O) . Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M . Từ A kẻ đường thẳng song song với MB , cắt (O) tại C . MC cắt đường tròn (O) tại E . Các tia AE và MB cắt nhau tại K . Chứng minh rằng

- $MK^2 = AK \cdot EK$.
- $MK = KB$.

Lời giải.

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 5 (Bài 31, SGK trang 79).** Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R$. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại A . Tính $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BAC}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 6.** Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M, N, P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC .

a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.

b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC . Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử IA là phân giác của góc NIP . Tìm số đo góc BCP .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 1.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh dài 2 cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua A và B biết rằng đoạn tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn đó bằng 4 cm.

 **Lời giải.**

✎ **Bài 2.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I .

a) Chứng minh rằng $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

b) Tính IA, IC biết rằng $AB = 20$ cm, $AC = 28$ cm, $BC = 24$ cm.

💬 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✎ **Bài 3.** Cho tam giác ABC . Vẽ đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B . Kẻ dây BD song song với AC . Gọi I là giao điểm của CD với đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Cho đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại A . Dây BC của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại H . Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm (khác A) của AB, AC với đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng

- a) DE song song với BC . b) AH là tia phân giác của góc BAC .

 **Lời giải.**

✧ **Bài 5.** Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) ở C và D . Kẻ dây BN của đường tròn (O) , cắt đường tròn (A) tại điểm E ở bên trong đường tròn (O) . Chứng minh rằng

- a) $\widehat{CEN} = \widehat{EDN}$.
- b) $NE^2 = NC \cdot ND$.

 **Lời giải.**

✧ **Bài 6.** Cho A nằm ngoài đường tròn (O) . Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AMN với (O) (M nằm giữa A và N).

- Chứng minh $AB^2 = AM \cdot AN$.
- Gọi H là giao điểm của AO và BC . Chứng minh: $AH \cdot AO = AM \cdot AN$.
- Đoạn AO cắt đường tròn tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 7.** Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt các đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF , $E \in (O)$, $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng

- $MNEF$ là hình chữ nhật.
- MN vuông góc với AD .

c) $ME \cdot MA = MF \cdot MD$.

 **Lời giải.**

✧ **Bài 8.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C trên nửa đường tròn. Gọi D là 1 điểm trên đường kính AB . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BC ở F , cắt AC ở E . Tiếp tuyến của nửa đường tròn ở C cắt EF ở I . Chứng minh

- a) I là trung điểm của EF .
- b) Đường thẳng OC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECF$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 9.** Cho đường tròn (O, R) , hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia CD lấy điểm S . SA cắt đường tròn tại M , tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt CD ở O , BM cắt CD ở T . Chứng minh

- $PT \cdot MA = MT \cdot OA$.
- $PS = PM = PT$.
- Biết $PM = R$, tính $TA \cdot SM$ theo R .

 Lời giải.

❖ **Bài 10.** Cho (O) và điểm C nằm ngoài đường tròn. Qua C kẻ 2 tiếp tuyến CA, CB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ (O') đi qua C , tiếp xúc với AB tại B , cắt (O) tại M . Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của BC .

 Lời giải.

❖ **Bài 11.** Từ điểm A nằm ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi BD là dây của đường tròn song song với AC , E là giao điểm của AD với đường tròn, I là giao điểm của BE và AC . Chứng minh rằng I là trung điểm của AC .

 Lời giải.

D Thử thách

❖ **Bài 12.** Tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) đường kính 5 cm. Tiếp tuyến với đường tròn C cắt tia phân giác của góc B tại K . Tính độ dài BK , biết rằng BK cắt AC tại D và $BD = 4$ cm.

 Lời giải.

❖ **Bài 13.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B . Kẻ tiếp tuyến chung CC' ($C \in (O)$, $C' \in (O')$), kẻ đường kính COD . Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của OO' với $C'D, CC'$. Chứng minh rằng

- a) $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (A, C, C' nằm cùng phía đối với OO').
- b) FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC' .

 Lời giải.

❖ **Bài 14.** Cho hai đường tròn (O) , (O') cắt nhau ở A và B , trong đó tiếp tuyến chung CD song song với cát tuyến chung EBF , C và E thuộc (O) , D và F thuộc (O') , B nằm giữa E và F . Gọi M , N theo thứ tự là giao điểm của DA , CA với EF . Gọi I là giao điểm của EC và FD . Chứng minh rằng

- a) $\triangle ICD = \triangle BCD$.
- b) IB là đường trung trực của MN .

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



Bài 5

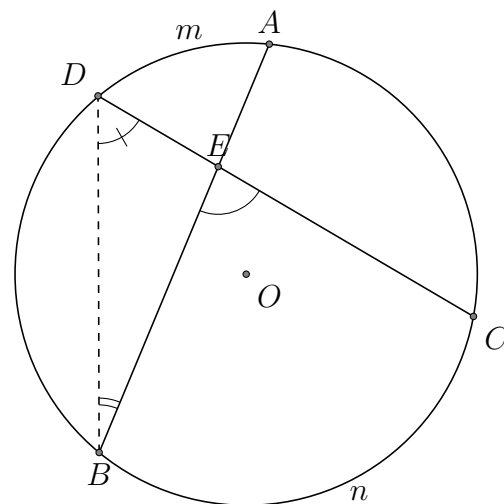
GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A Tóm tắt lý thuyết

Quan sát hình bên ta thấy góc BEC có đỉnh E nằm bên trong đường tròn (O) . Ta nói góc BEC là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

Người ta quy ước: Mỗi góc có đỉnh ở bên trong đường tròn chắn hai cung, một cung nằm bên trong góc, cung kia nằm bên trong góc đối đỉnh của nó.

Theo đó, trên hình vẽ ta có góc BEC chắn cung $\widehat{BnC}$ và cung $\widehat{DmA}$. Ta có định lý sau



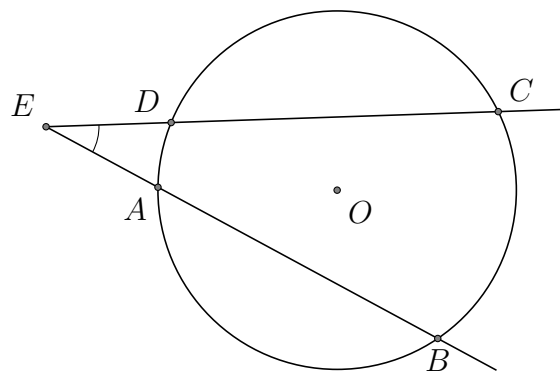
Định lý 5.1. Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BEC} = \frac{sđ\widehat{BnC} + sđ\widehat{DmA}}{2}.$$

Góc có đỉnh bên ngoài đường tròn là góc có hai đặc điểm sau

- ✔ Đỉnh nằm ngoài đường tròn.
- ✔ Các cạnh đều có 1 hoặc 2 điểm chung với đường tròn.

Mỗi góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn có hai cung bị chắn. Hai cung đó nằm bên trong góc. Góc BEC ở hình bên có hai cạnh cắt đường tròn, hai cung bị chắn là hai cung nhỏ $\widehat{AD}$ và $\widehat{BC}$. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn được xác định qua định lý:



Định lý 5.2. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BEC} = \frac{sđ\widehat{BC} - sđ\widehat{AD}}{2}.$$

B Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC bằng nhau. Trên cung nhỏ AC lấy một điểm M . Gọi S là giao điểm của AM và BC . Chứng minh $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 4.** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Điểm D di động trên cung AC . Gọi E là giao điểm của AC và BD , gọi F là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{AFB} = \widehat{ABD}$;

b) Tích $AE \cdot BF$ không đổi.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 5.** Trong tam giác ABC , đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D . Giả sử (T) là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A . Gọi M là giao điểm thứ hai của (T) và AC , P là giao điểm thứ hai của (T) và BM , E là giao điểm của AP và BC .

a) Chứng minh $\widehat{EAB} = \widehat{MBC}$.

b) Chứng minh $BE^2 = EP \cdot EA$.

💬 **Lời giải.**

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

❖ **Ví dụ 6.** Trên đường tròn (O) ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

- Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1 , BB_1 , CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$.
- Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1 , BB_1 , CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là các đường phân giác trong của tam giác $A_1B_1C_1$.
- Giả sử (T_1) và (T_2) là hai tam giác nội tiếp đường tròn (O) , đồng thời các đỉnh của tam giác (T_2) là các điểm chính giữa của các cung của đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác T_1 . Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác (T_1) và (T_2) các đường chéo nối các đỉnh đối diện nhau song song với các cạnh của tam giác (T_1) và đồng quy tại một điểm.

 **Lời giải.**

 **Lời giải.**

C **Luyện tập**

 **Lời giải.**

Việt Star Th.S Nguyễn Hoàng Việt – 0905.193.688



5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

Kết nối tri thức với cuộc sống

❖ **Bài 2.** Cho A, B, C là ba điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến tại A cắt tia BC tại D . Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ở M , tia phân giác của $\widehat{D}$ cắt AM ở I . Chứng minh $DI \perp AM$.

 Lời giải.

❖ **Bài 3.** Trên một đường tròn, lấy liên tiếp ba cung AC , CD , DB sao cho $\widehat{sđAC} = \widehat{sđCD} = \widehat{sđDB} = 60^\circ$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E . Hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại T . Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$;
b) CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.

 Lời giải.

a) Tính số đo $\widehat{AIB}$.

b) Trên cung nhỏ CD lấy điểm K . Gọi giao điểm của KA, KB với CD lần lượt là M, N . Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD .

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✎ **Bài 5.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó; M, N, P theo thứ tự là tâm các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C . Gọi K là điểm đối xứng với I qua O . Chứng minh rằng K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 6.** Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên trong đường tròn. Chứng minh $\widehat{A} + \widehat{BSM} = 2\widehat{CMN}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 7.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C .

- a) Chứng minh $AP \perp QR$.
- b) AP cắt CR tại I . Chứng minh tam giác CPI cân.

 **Lời giải.**

Bài 6

CUNG CHỨA GÓC

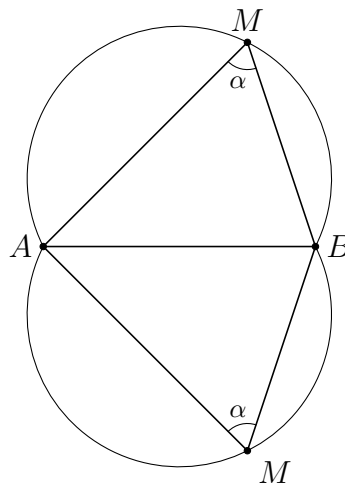
A Tóm tắt lý thuyết

1. Bài toán quỹ tích cung chứa góc

Định lý 6.1. Quỹ tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc không đổi α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) là hai cung chứa góc α vẽ trên đoạn AB (quỹ tích cơ bản).

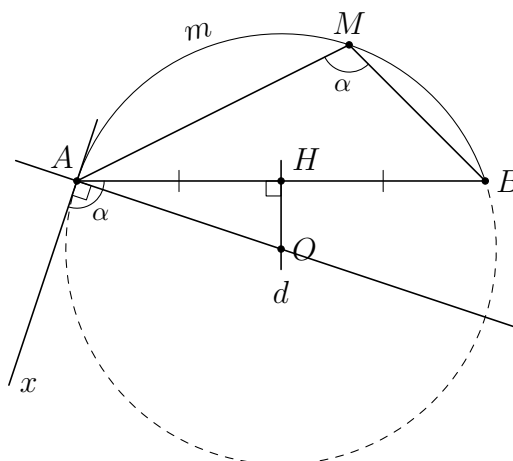
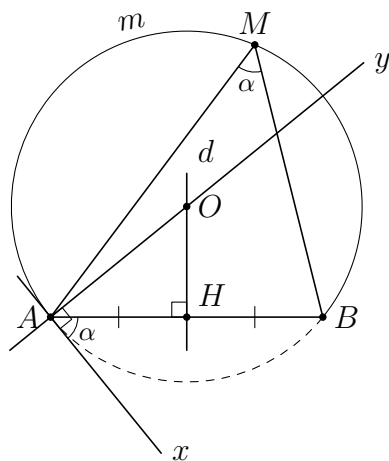
Lưu ý:

- Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB .
- Hai điểm A và B được coi là thuộc quỹ tích.
- Khi $\alpha = 90^\circ$ thì hai cung chứa góc α là hai nửa đường tròn đường kính AB . Như vậy quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .



2. Cách vẽ cung chứa góc

Để vẽ cung chứa góc α ta thực hiện các bước sau



- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .
- Vẽ tia Ax tạo với đoạn thẳng AB một góc α .
- Vẽ tia Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- Vẽ cung AmB , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .

$\widehat{AmB}$ vẽ được như trên là cung chứa góc α .

3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) điểm M thỏa mãn tính chất $\mathcal{T}$ là một hình $\mathcal{H}$ nào đó, ta phải chứng minh hai phần

- ✔ Phần thuận: Mọi điểm có tính chất $\mathcal{T}$ đều thuộc hình $\mathcal{H}$.
- ✔ Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ đều có tính chất $\mathcal{T}$.
- ✔ Kết luận: Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất $\mathcal{T}$ là hình $\mathcal{H}$.

B Các ví dụ

🔗 Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích I khi điểm A thay đổi.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 Ví dụ 2. Cho hai điểm A, B cố định. Từ A vẽ các tiếp tuyến với đường tròn tâm B có bán kính không lớn hơn AB . Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

❖ **Ví dụ 3.** Cho I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi H là giao điểm của các đường cao BB' và CC' . Chứng minh các điểm B, O, C, H, I cùng thuộc một đường tròn.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 4.** Dựng cung chứa góc 60° trên đoạn $AB = 4$ cm.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Dựng tam giác ABC biết $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$ và đường cao $AH = 4$ cm.

Lời giải.

🔗 **Ví dụ 6.** Cho trước điểm A trên đường thẳng d và hai điểm C, D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau, bờ d . Hãy dựng một điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

 **Lời giải.**

C

Luyện tập

- ✧ Bài 1. Dựng tam giác ABC biết:
- a) $BC = 3\text{ cm}$, $AB = 2\text{ cm}$ và $\widehat{A} = 50^\circ$.

b) $BC = 6\text{ cm}$, $\widehat{A} = 45^\circ$ và trung tuyến $AM = 5\text{ cm}$.

💬 Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

b) Điểm A ở vị trí nào thì tam giác ABC có diện tích lớn nhất? Tính giá trị lớn nhất đó.

 **Lời giải.**



❖ **Bài 3.** Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 4.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, nội tiếp đường tròn (O) . Trên cung nhỏ AC lấy một điểm D . Trên dây BD lấy điểm M sao cho $DM = DC$.

- a) Chứng minh rằng tam giác MCD là tam giác đều.
- b) Tìm quỹ tích các điểm M khi điểm D di động trên cung nhỏ AC .

 **Lời giải.**

b) Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi cát tuyến MAN quay quanh A .

 Lời giải.

.....

.....

.....

c) Chứng minh tam giác ABC vuông.

This image shows a full page of primary-ruled paper designed for handwriting practice. It features multiple rows of horizontal lines. Each row consists of three parallel lines: a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line. The lines are evenly spaced across the entire page, providing a guide for letter height and placement. There are no margins or other markings present.

Bài 7

TỨ GIÁC NỘI TIẾP

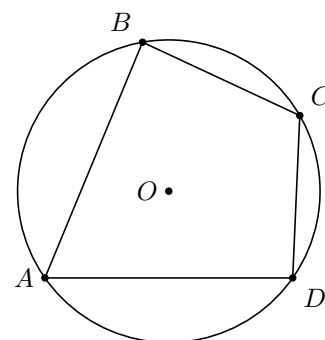
A Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 7.1. Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

Định lý 7.1.

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° .
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.



Lưu ý: Từ định lý trên ta có

- Với A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ giác thì:

$$ABCD \text{ nội tiếp} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \end{cases}$$

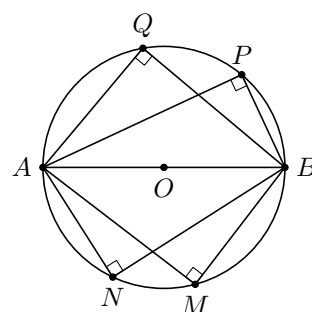
- Hình thang nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi nó là hình thang cân.

2. Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- ☑ Dựa vào định nghĩa của tứ giác nội tiếp.
- ☑ Chứng minh tứ giác đó có hai góc đối bù nhau (hoặc tứ giác đó có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).
- ☑ Dựa vào khái niệm cung chứa góc: Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn.

Lưu ý:

Tập hợp tất cả các điểm nhìn đoạn AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .



B

Các ví dụ

⇨ **Ví dụ 1.** Cho đường tròn đường kính AB và D là một điểm thuộc đường tròn. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C . Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng AD tại M . Chứng minh tứ giác $MCBD$ nội tiếp được đường tròn, xác định tâm đường tròn đó.

Lời giải.

⇨ **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H (D thuộc BC , E thuộc AC). Chứng minh các tứ giác $DHEC$ và $ABDE$ nội tiếp được đường tròn.

Lời giải.

⇨ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HD \perp AB$ tại D , $HE \perp AC$ tại E . Chứng minh rằng tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

Lời giải.

⇨ **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E , nửa đường tròn đường kính

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

a) Chứng minh tứ giác $AFHE$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Việt Star Th.S Nguyễn Hoàng Việt – 0905.193.688

[illegible]

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal lines, each consisting of a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line, providing a guide for letter height and placement. The paper is otherwise blank, with no text or markings.

- Chứng minh $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle MBC$.
- Chứng minh $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

 **Lời giải.**

This image shows a full page of primary-ruled notebook paper. It features ten sets of horizontal lines. Each set consists of a solid blue top line, a dashed red middle line, and a solid blue bottom line, providing a guide for letter height and placement. The paper is otherwise blank, with no handwriting or other markings.

[illegible]

- Chứng minh tứ giác $AHCP$ nội tiếp.
- Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.
- Tìm vị trí của M để độ dài đoạn thẳng NP lớn nhất.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 9.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C trên cùng một nửa đường tròn đường kính AD tâm O . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E . Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE . Chứng minh rằng

- a) Tứ giác $ABEH, DCEH$ nội tiếp được đường tròn.
- b) E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$.
- c) Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

💬 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

🔗 **Ví dụ 10.** Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng xy cách tâm O một khoảng $OK = a$ ($0 < a < R$). Từ một điểm A thuộc xy nằm bên ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm; O và B nằm cùng phía với xy)

- a) Chứng minh 5 điểm O, A, B, C, K cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này.
- b) BC cắt OA và OK theo thứ tự tại M và S . Chứng minh tứ giác $AMKS$ nội tiếp được trong một đường tròn.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 1.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng vuông góc với AO tại trung điểm I của AO cắt AC tại M và cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn ở E . Chứng minh $OCEI$, $IMCB$ là các tứ giác nội tiếp, xác định tâm các đường tròn đó.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Trên nửa đường tròn tâm (O) đường kính BC lấy điểm A ($AB > AC > 0$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC . Đường tròn đường kính AH lần lượt cắt AB, AC tại M và N . Chứng minh tứ giác $BCNM$ nội tiếp.

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✎ **Bài 3.** Trên đường tròn tâm (O) có một cung AB và S là điểm chính giữa của cung đó. Trên dây AB lấy hai điểm E và H . Các đường thẳng SH và SE cắt đường tròn theo thứ tự tại C và D . Chứng minh $EHCD$ là một tứ giác nội tiếp.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 4.** Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O ($AB < CD$); I là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Gọi E là giao điểm của IC và AD ; F là giao điểm của DI và CB . Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 5.** Cho tam giác cân ABC có đáy BC và $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm D sao cho $DA = DB$ và $\widehat{DAB} = 40^\circ$. Gọi E là giao điểm của AB và CD . Chứng minh tứ giác $ACBD$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

✎ **Bài 6.** Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Dây $BC = R$. Từ B kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Tia AC cắt Bx tại M . Gọi E là trung điểm của AC . Chứng minh tứ giác $OBME$ nội tiếp đường tròn.

Lời giải.

✎ **Bài 7.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax . Tia BM cắt Ax tại I , tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E , cắt tia BM tại F . Tia BE cắt Ax tại H và cắt AM tại K . Chứng minh rằng $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

✎ **Bài 8.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E). Chứng minh $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

❖ **Bài 9.** Cho đường tròn $(O; R)$; AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn $(O; R)$ cắt các đường thẳng AC , AD theo thứ tự tại E và F .

- Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh $\triangle ACD = \triangle CBE$.
- Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 10.** Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M , vẽ $MI \perp AB, MK \perp AC$ ($I \in AB, K \in AC$).

- a) Chứng minh $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- b) Vẽ $MP \perp BC$ ($P \in BC$). Chứng minh $CPMK$ là tứ giác nội tiếp.

 Lời giải.

❖ **Bài 11.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E , MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B). Chứng minh $AMCO$ và $AMDE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 12.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA , điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By . Đường thẳng qua N và vuông góc với NM cắt Ax , By lần lượt tại C và D .

- Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Gọi I là giao điểm của AN và CM , K là giao điểm của BN và DM . Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle CMD$ từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

💬 **Lời giải.**

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 13.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên hai cạnh AD và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{MBN} = 45^\circ$. BM và BN cắt AC theo thứ tự tại E và F .

a) Chứng minh các tứ giác $BENC$ và $BFMA$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng tỏ $MEFN$ là tứ giác nội tiếp.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 14.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn; AD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H ; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi M là điểm đối xứng của B qua O , I là giao điểm của BM và DE , K là giao điểm của AC và HM .

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEDC$ và $DIMC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $OK \perp AC$.

c) Cho $\widehat{AOK} = 60^\circ$. Chứng minh tam giác HBO cân.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 15.** Từ một điểm A ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia BC , lấy điểm D . Gọi E là giao điểm của DO và AC . Qua E , vẽ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (O) , có tiếp điểm là M ; tiếp tuyến này cắt đường thẳng AB ở K .

- a) Chứng minh bốn điểm D, B, O, M cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh D, B, O, M, K cùng thuộc một đường tròn.

 **Lời giải.**

Bài 8

ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

A Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 8.1.

- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác gọi là *đường tròn ngoại tiếp* đa giác và đa giác được gọi là *đa giác nội tiếp đường tròn*
- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác được gọi là *đường tròn nội tiếp* đa giác và đa giác gọi là *đa giác ngoại tiếp đường tròn*.

Định lí 8.1. Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Lưu ý: Trong đa giác đều, tâm của đường tròn nội tiếp trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp và được gọi là tâm của đa giác đều.

B Các ví dụ

- Ví dụ 1.**
- Vẽ đường tròn tâm (O) , bán kính 2 cm.
 - Vẽ hình vuông nội tiếp đường tròn (O) ở câu a).
 - Tính bán kính r đường tròn nội tiếp hình vuông ở câu b) rồi vẽ đường tròn $(O; r)$.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

- Ví dụ 2.** Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a . Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

Lời giải.

.....	
.....	

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 3.** Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 4.** Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi I là giao điểm của AD và BE . Chứng minh rằng

a) $DIBC$ là hình bình hành;

b) $DI^2 = AI \cdot AD$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường



🔗 **Ví dụ 5.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn và ngoại tiếp một đường tròn khác. Gọi các tiếp điểm với đường tròn nội tiếp theo thứ tự là M, P, Q, N . Chứng minh rằng QM vuông góc PN .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

C **Luyện tập**

- 🔗 **Bài 1.**
- a) Vẽ $\triangle ABC$ đều cạnh a .
 - b) Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp $\triangle ABC$. Tính R .
 - c) Vẽ đường tròn $(O; r)$ nội tiếp $\triangle ABC$. Tính r .
 - d) Vẽ tam giác đều IKK ngoại tiếp $(O; R)$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

 **Lời giải.**

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Cho một lục giác đều bán kính R . Kẻ các đường chéo nối các đỉnh cách nhau một đỉnh. Tính diện tích lục giác có đỉnh là giao điểm của các đường chéo đó.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 5.** Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M . Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F . Chứng minh rằng

- Các tam giác DFO và BOE đồng dạng.
- ME song song với AF .

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✎ **Bài 6.** Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ngoại tiếp đường tròn $(O; r)$ và $CD = 4AB$.

a) Gọi H là hình chiếu của O lên AD . Chứng minh rằng $HD = 4HA$;

b) Tính AB và CD theo r .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 7.** Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại I . Cho biết tứ giác $ADIE$ ngoại tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN



Tóm tắt lý thuyết

1. Độ dài đường tròn

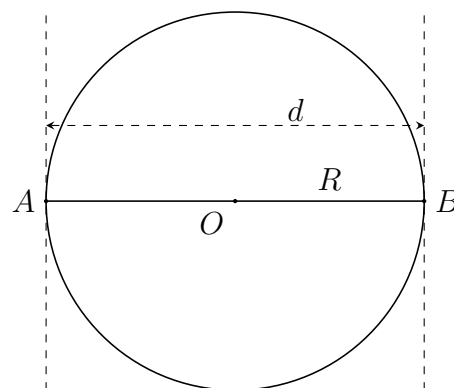
a) Độ dài đường tròn (hay “Chu vi hình tròn”) được kí hiệu là C .

b) Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức

$$C = 2\pi R.$$

c) Nếu gọi d là đường kính của đường tròn ($d = 2R$) thì

$$C = \pi d.$$



Trong đó π đọc là “pi” và $\pi \approx 3,14$ ($\pi = 3,14159265 \dots$).

2. Độ dài cung tròn

a) Đường tròn bán kính R (ứng với cung 360°) có độ dài là $2\pi R$.

b) Mỗi cung 1° bán kính R có độ dài là

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

c) Một cung n° , bán kính R có độ dài

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$



Các ví dụ

❖ **Ví dụ 1.** a) Tính độ dài cung 30° của một đường tròn có bán kính 5 cm.

b) Tính chu vi của một vành xe đạp có đường kính 65 cm.

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

🔗 **Ví dụ 2.** Tính độ dài của đường tròn, biết

- a) Đường tròn có bán kính bằng 6 cm.
- b) Đường tròn có đường kính 8 cm.
- c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 3.** Một cái bàn tròn phục vụ trong nhà hàng có chu vi là 64π dm. Tính độ dài cung 90° của cái bàn đó.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 4.** Xích đạo là một đường tròn lớn của Trái Đất có độ dài khoảng 40000 km. Hãy tính bán kính của Trái Đất.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 5.** Cho đường tròn (O) , dây $AB = 9$ cm có khoảng cách đến tâm bằng một nửa bán kính của đường tròn.

- a) Tính chu vi đường tròn.

b) Tính độ dài cung nhỏ AB .

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 6.** Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M . Giả sử $AM = 1$ cm, $CD = 2\sqrt{3}$ cm. Tính

- Độ dài đường tròn.
- Độ dài của $\widehat{CAD}$.

a) Độ dài đường tròn.

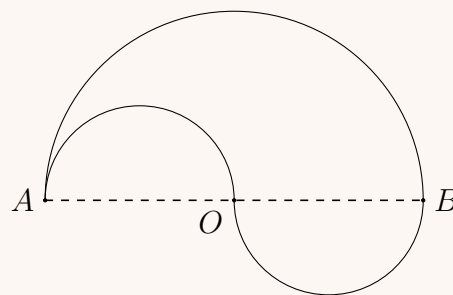
b) Độ dài của $\widehat{CAD}$.

 **Lời giải.**

C Luyện tập

❖ Bài 1.

Tính chu vi của hình bên, biết $OA = 4$ cm.



💬 Lời giải.

❖ Bài 2. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp của

- Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 6 cm và 8 cm.
- Một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 4 cm.

💬 Lời giải.

.....	
.....	

❖ **Bài 3.** Đường kính bánh xe của một chiếc xe đạp là 73 cm. Hỏi

- Bánh xe đó quay được bao nhiêu vòng khi xe đi được một đoạn đường 8 km?
- Xe đi được bao nhiêu ki-lô-mét nếu bánh xe quay đủ 1000 vòng?

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

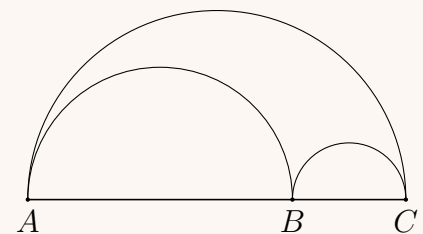
❖ **Bài 4.** Chiếc máy cày có bánh xe sau lớn hơn hai bánh xe trước. Biết rằng khi bơm căng, bánh xe trước có đường kính 0,8 m, bánh xe sau có đường kính 1,5 m. Hỏi bánh xe sau lăn được 16 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 5.**

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C (hình vẽ bên). Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC .



💬 **Lời giải.**

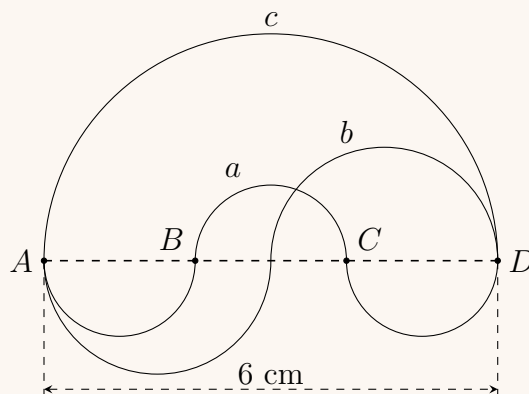
9. Độ dài đường tròn, cung tròn

Kết nối tri thức với cuộc sống

❖ **Bài 6.** Cho $(O; OM)$. Vẽ đường tròn (O') đường kính OM . Một bán kính OA của (O) cắt (O') ở B . Chứng minh hai cung MA và MB có độ dài bằng nhau.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 7.** Hãy so sánh độ dài của ba đường cong a , b và c trong hình vẽ bên dưới, biết $AB = BC = CD$ và $AD = 6$ cm.



 **Lời giải.**

Bài 10

DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

A Tóm tắt lý thuyết

● **Định nghĩa 10.1.** Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

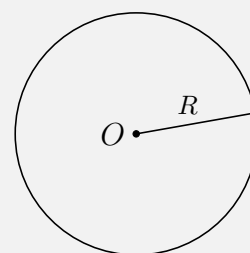
● **Định nghĩa 10.2.** Hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy.

● **Định nghĩa 10.3.** Hình vành khăn là phần hình tròn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm.

● **Tính chất 10.1.** Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức

$$S = \pi R^2.$$

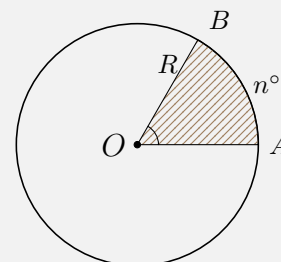


● **Tính chất 10.2.** Công thức tính diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2}.$$

(l là độ dài cung n° của hình quạt tròn).

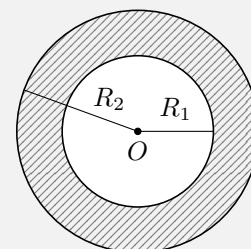


Tính chất bổ sung

● **Tính chất 10.3.** Công thức tính diện tích hình vành khăn

Diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm bán kính R_1, R_2 ($R_2 > R_1$) được tính theo công thức

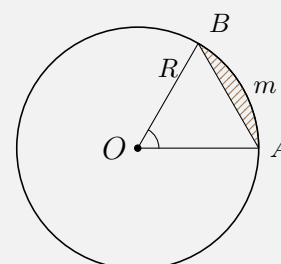
$$S = \pi(R_2^2 - R_1^2).$$



● **Tính chất 10.4.** Công thức tính diện tích hình viên phân

Diện tích hình viên phân của đường tròn bán kính R giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây AB (hình vẽ)

$$S = S_{\text{quạt } AOB} - S_{\triangle AOB}.$$



B

Các ví dụ

⇒ **Ví dụ 1.** Tính diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh là 4 cm.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 2.** Tính diện tích hình tròn, biết

- Bán kính bằng 8 cm.
- Đường kính bằng 12 cm.
- Chu vi của đường tròn bằng 18π cm.

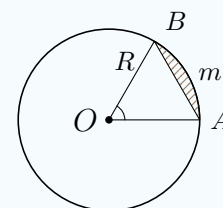
💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 3.** Tính diện tích hình tròn quạt tròn có bán kính bằng 6 cm và góc ở tâm tương ứng là 36° .

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 4.**

Tính diện tích hình viên phân $\widehat{AmB}$, biết $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn bằng 8 cm.



💬 **Lời giải.**

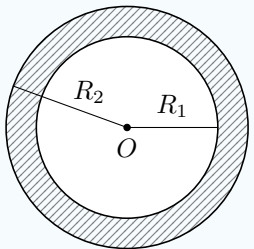
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 5.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 10\text{ m}$, $B = 60^\circ$. Vẽ nửa đường tròn (O) đường kính BC và đi qua điểm A . Tính tổng diện tích hai hình viên phân ứng với cung AB và AC .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

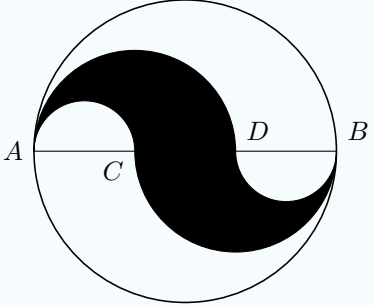
❖ **Ví dụ 6.**
Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính là $R_1 = 7,8\text{ cm}$ và $R_2 = 10,5\text{ cm}$.



💬 **Lời giải.**

.....	
.....	

❖ **Ví dụ 7.**
Cho đường tròn có đường kính AB . Trên đoạn AB lấy hai điểm C và D sao cho $AC = CD = DB$. Vẽ về một phía của AB hai nửa đường tròn đường kính AC và AD . Vẽ về phía bên kia của AB hai nửa đường tròn đường kính CB , DB . So sánh diện tích phần tô đen và diện tích mỗi phần còn lại.



💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

C **Luyện tập**

❖ **Bài 1.** Tính diện tích hình tròn bán kính 4 cm và các hình quạt tròn có góc ở tâm 30° và 150° của hình tròn đó.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Ở vườn quốc gia Cúc Phương (tỉnh Ninh Bình) có Cây Chò ngàn năm tuổi thân to đến mức 8 người ôm mới xuể. Hãy tính thiết diện ngang của thân cây (coi như hình tròn và mỗi sải tay khoảng 1,5 m).

 **Lời giải.**

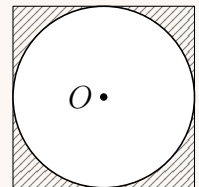
🔗 **Bài 3.** Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hình nào có diện tích lớn hơn?

 Lời giải.

Kết nối tri thức với cuộc sống

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Biết diện tích miền gạch sọc là 86 cm^2 . Tính diện tích hình tròn.



❖ **Bài 5.** Tính diện tích các hình tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng 3 cm và nêu nhận xét kết quả tìm được.

 **Lời giải.**

A semi-circular sector with its vertex at point O on a horizontal line. The sector is divided into three regions by two radial lines. The central angle between the two radial lines is labeled 30° . The region between the left radial line and the arc is labeled 'Khá'. The region between the two radial lines is labeled 'Giới' and is filled with diagonal hatching. The region between the right radial line and the arc is labeled 'TB'.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 8.** Người ta muốn may một chiếc khăn để phủ một chiếc bàn tròn đường kính 76 cm sao cho khăn rủ xuống khỏi mép bàn 10 cm (khăn có dạng hình tròn). Hãy tính diện tích vải cần để làm khăn (không kể viền, mép, phần thừa và phần diện tích vải rủ xuống khỏi mép bàn).

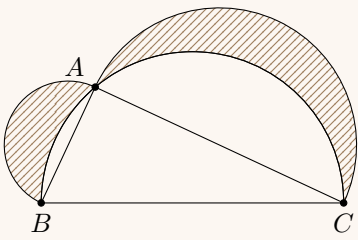
 **Lời giải.**

❖ **Bài 9.** Cho hai đường tròn đồng tâm tạo thành một hình vành khăn. Biết rằng đường tròn nhỏ có bán kính là 4 cm và hình vành khăn có diện tích là $20\pi \text{ cm}^2$. Tìm đường kính của đường tròn lớn.

 **Lời giải.**

❧ Bài 10.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính BC . Vẽ ra phía ngoài của tam giác các nửa đường tròn đường kính AB và AC . Chứng minh rằng tổng diện tích hai hình trăng khuyết giới hạn bởi ba nửa đường tròn bằng diện tích $\triangle ABC$ (hình trăng khuyết Hy-pô-crát).



Lời giải.

..... 	
---	---



Bài 11

ÔN TẬP CHƯƠNG III

✧ **Bài 1.** Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Lấy $M \in (O)$ với $AM < BM$. Trên cạnh MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Gọi OD là bán kính vuông góc với AB (M và D ở hai bên đường thẳng AB)

- Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABD$.
- Chứng tỏ MD là phân giác $\widehat{AMB}$ và $MD \perp AC$.
- Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn (ABC) .
- Đường tròn (ABC) cắt MD tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

🗨️ Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

- Chứng minh rằng A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn này.
- Chứng minh rằng $AB^2 = AD \cdot AE$.
- Gọi H là giao điểm của OA và BC . Chứng minh rằng $\triangle AHD \sim \triangle AEO$ và tứ giác $DEOH$ nội tiếp.
- Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa A và O). Chứng minh rằng $\frac{EH}{AN} = \frac{MH}{AD}$.

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

❖ **Bài 3.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E . Hai tiếp tuyến EM và Bx của (O) cắt nhau tại D (M thuộc (O)).

- Chứng minh rằng 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $\triangle EMA \sim \triangle EBM$, suy ra $EM^2 = EO^2 - R^2$.
- Trên đoạn ME lấy điểm C sao cho hai góc $\widehat{CAM}, \widehat{EDO}$ bằng nhau. Chứng minh rằng $OC \parallel MB$.
- Giả sử M là trung điểm đoạn ED . Tính EM theo R .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi đường tròn $(I; r)$ đường tròn nội tiếp tam giác ABC , H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I) , D là giao điểm của AI với đường tròn (O) , DK là đường kính của đường tròn (O) . Gọi d là độ dài của OI . Chứng minh rằng

a) $\Delta AHI \sim \Delta KCD$.

b) $DI = DB = DC$.

c) $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.

d) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lí Euler).

 **Lời giải.**

- Chứng minh tứ giác $AHEC$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.
- Chứng minh tam giác ABE cân.
- Tia BD cắt AC và Ax lần lượt tại F và K . Chứng minh $AKEF$ là hình thoi.



✎ **Bài 6.** Cho đường tròn tâm O , đường kính AB cố định. H là điểm cố định thuộc đoạn OA (H không trùng O và A). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tâm O tại C và D . Gọi K là điểm tùy ý thuộc cung lớn CD (K không trùng các điểm $C; D$ và B). Gọi I là giao điểm của AK và CD .

- a) Chứng minh tứ giác $HIKB$ nội tiếp đường tròn.
- b) Chứng minh $AI \cdot AK = AH \cdot AB$.
- c) Chứng minh khi điểm K thay đổi trên cung lớn CD của đường tròn tâm O thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI luôn thuộc một đường thẳng cố định.

🗨️ **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

- Chúng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác của góc $\widehat{BMD}$.
- Chúng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và góc $\widehat{BCD}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M .
- Tia DA cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F , Chúng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .

- a) Chứng minh tứ giác $ACDH$ là nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.
- b) Chứng minh hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau và HM là tia phân giác của góc $\widehat{BHD}$.
- c) Gọi K là trung điểm của BD chứng minh $MD \cdot BC = MB \cdot CD$ và $MB \cdot MD = MK \cdot MC$.
- d) Gọi E là giao điểm của AM và OK ; J là giao điểm của IM và (O) (J khác I). Chứng minh hai đường thẳng OC và EJ cắt nhau tại một điểm trên (O) .

 **Lời giải.**

✧ **Bài 9.** Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC . Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I . Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K .

- Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.
- Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
- Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ . Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

🗨 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 10.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC = 2R$. Gọi K và M lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C xuống BD , E là giao điểm của AC và BD , biết K thuộc đoạn BE ($K \neq B, K \neq E$). Đường thẳng qua K song song với BC cắt AC tại P .

- Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.
- Chứng minh $KP \perp PM$.
- Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x .

 **Lời giải.**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R . Hai đường cao AE và BK của tam giác ABC cắt nhau tại H (với E thuộc BC , K thuộc AC).

- Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Chứng minh $CE.CB = CK.CA$.
- Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.
- Cho B, C cố định và A di động trên (C) nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC nhọn, khi đó H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T) , biết $R = 3$ cm.

 Lời giải.

🔗 **Bài 12.** Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và đường cao AK . Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm; M và B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AO). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng MN và AK . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.
- KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.
- $AN^2 = AK \cdot AH$.
- H là trực tâm của tam giác ABC .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 13.** Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(A, B$ là hai tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không trùng với A, B). Từ điểm C kẻ CD vuông góc với AB , CE vuông góc với MA , CF vuông góc với MB ($D \in AB, E \in MA, F \in MB$).

Gọi I là giao điểm của AC và DE , K là giao điểm của BC và DF . Chứng minh rằng

- Tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn.
- Hai tam giác CDE và CFD đồng dạng.
- Tia đối của tia CD là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$.
- Đường thẳng IK song song với đường thẳng AB .

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

❖ **Bài 14.** Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$ và cung nhỏ $\widehat{BC}$. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I . Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K .

-  **Lời giải.**



- Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
- Gọi I là giao điểm của đoạn OA với đường tròn (O) . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- Cho $OB = 3$ cm, $OA = 5$ cm. Tính diện tích tam giác ABC .

 Lời giải.

- Chứng minh tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng: $AD \cdot AN = AB \cdot AM$.
- Gọi E là trung điểm của MN . Chứng minh ba điểm A, H, E thẳng hàng.
- Cho $AB = 6$ cm và $AD = 8$ cm. Tính độ dài đoạn MN .

 **Lời giải.**

❖ **Bài 17.** Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm (O) , M là một điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

- a) Bốn điểm M, D, B, F thuộc một đường tròn và bốn điểm M, D, E, C thuộc một đường tròn;
b) Ba điểm D, E, F thẳng hàng;

c) $\frac{BC}{MD} = \frac{CA}{ME} + \frac{AB}{MF}.$

 **Lời giải.**

- Chứng minh rằng tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $\widehat{EBM} = \widehat{DNH}$.
- Chứng minh rằng $DM.DN = DB.DC$.
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE . Chứng minh rằng $OE \perp DE$.

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✧ **Bài 19.** Tam giác AMB cân tại M nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Kẻ MH vuông góc AB ($H \in AB$), MH cắt đường tròn tại N . Biết $MA = 10$ cm, $AB = 12$ cm.

a) Tính MH và bán kính R của đường tròn.

b) Trên tia đối tia BA lấy điểm C . Tia MC cắt đường tròn tại D , ND cắt AB tại E . Chứng minh tứ giác $MDEH$ nội tiếp và chứng minh các hệ thức sau: $NB^2 = NE \cdot ND$ và $AC \cdot BE = BC \cdot AE$.

c) Chứng minh NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .

🗨️ Lời giải.

❖ **Bài 20.** Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Gọi (O) là một đường tròn thay đổi luôn đi qua B và C (tâm O không thuộc đường thẳng BC). Từ A kẻ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn (O) (D, E là các tiếp điểm và D, O nằm cùng trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC). Gọi K, H lần lượt là trung điểm của BC và DE .

- Chứng minh $AE^2 = AB \cdot AC$.
- Trên DE lấy điểm M sao cho BM song song với AD . Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp đường tròn và MK song song với DC .

c) Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK thuộc một đường thẳng cố định.

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Chương 4

HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU

Bài 1

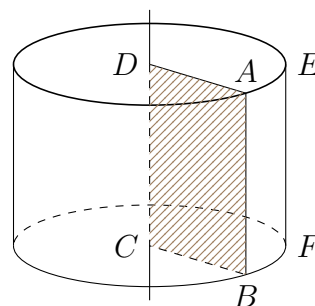
HÌNH TRỤ. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH TRỤ

A Tóm tắt lí thuyết

1 Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quay cạnh CD cố định, ta được một hình trụ (h.73). Khi đó:

- Hai đáy là hai hình tròn (C) và (D) bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song.
- Đường thẳng CD là trục của hình trụ.
- AB là một đường sinh. Đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao hình trụ.



Hình 73

2 Diện tích xung quanh của hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2.$$

3 Thể tích hình trụ

$$V = Sh = \pi R^2 h \text{ (} R \text{ là bán kính đáy, } h \text{ là chiều cao, } S \text{ là diện tích đáy).}$$

B Các ví dụ

❖ **Ví dụ 1.** Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 2 cm, chiều cao là 6 cm. Hãy tính:

- Diện tích xung quanh của hình trụ.
- Diện tích toàn phần của hình trụ.
- Thể tích hình trụ.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 2.** Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi \text{ cm}^2$ và diện tích toàn phần là $28\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 3.** Một hình trụ có chiều cao bằng 5 cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính thể tích hình trụ.

 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 4.** Một thùng phuy hình trụ có số đo diện tích xung quanh (tính bằng mét vuông) đúng bằng số đo thể tích (tính bằng mét khối). Tính bán kính đáy của hình trụ.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

↔ **Ví dụ 5.** Một lọ hình trụ được “đặt khít” trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là 270 cm^3 , tính thể tích của hộp giấy.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

↔ **Ví dụ 6.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a, BC = a$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có thể tích V_1 và khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có thể tích V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

↔ **Ví dụ 7.** Một hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính là 3 cm . Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $292,5\pi\text{ cm}^2$. Tính thể tích của hộp sữa đó.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

Nơi Đâu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

C **Luyện tập**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

✎ **Bài 1.** Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Hãy tính

a) Diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Thể tích của hình trụ.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 2.** Một hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 8 cm, 5 cm. Quay hình chữ nhật đó một vòng quanh chiều dài hay chiều rộng thì thể tích lớn hơn.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 3.** Người ta cắt hình trụ bằng một mặt phẳng chứa trục. Biết thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 36 cm^2 . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

Lời giải.

.....	
.....	

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 4.** Một hình trụ có chu vi đáy là 24π cm và diện tích toàn phần là $768\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 5.** Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một hình trụ là $\frac{3}{5}$. Biết bán kính đáy là 6 cm, tính chiều cao của hình trụ.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 6.** Một hình trụ có thể tích là 300 cm^3 và diện tích xung quanh là 120 cm^2 . Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Nơi Đầu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



✧ **Bài 7.** Một hình trụ có diện tích xung quanh là $24\pi \text{ cm}^2$ và diện tích toàn phần là $42\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 8.** Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao, thiết diện đi qua trục có diện tích bằng 72 cm^2 . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 9.** Một hình trụ có chiều cao là 18 cm và diện tích toàn phần là 176 cm^2 . Chứng minh rằng diện tích xung quanh hình trụ bằng 9 lần diện tích đáy.

💬 **Lời giải.**



❖ **Bài 10.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > BC$. Biết diện tích hình chữ nhật là 48 cm^2 , chu vi là 28 cm . Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ này.

Lời giải.

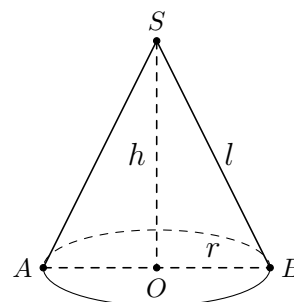
HÌNH NÓN - HÌNH NÓN CỤT - DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

Bài 2

A Tóm tắt lý thuyết

☑ Mô tả hình nón

- +) Đáy của hình nón là hình tròn (O);
- +) SA là một đường sinh;
- +) S là đỉnh, SO là đường cao.



☑ Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

$$\begin{aligned}S_{xq} &= \pi r l \\S_{tp} &= \pi r l + \pi r^2\end{aligned}$$

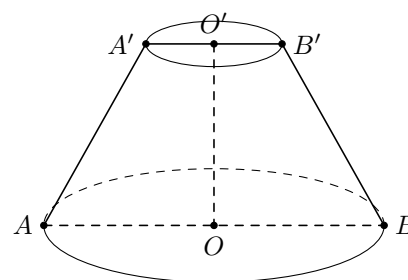
(r , l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón).

☑ Thể tích hình nón

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ (} h \text{ là chiều cao).}$$

☑ Hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng bị giới hạn bởi hình nón là một hình tròn. Phần hình tròn nằm giữa mặt phẳng nói trên và đáy là một hình nón cụt.



☑ Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón cụt

$$\begin{aligned}S_{xq} &= \pi(R + r)l \\S_{tp} &= \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2\end{aligned}$$

R , r lần lượt là bán kính hai đáy, l là độ dài đường sinh của hình nón cụt).

☑ Thể tích hình nón cụt:

$$V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)$$

(h là đường cao của hình nón cụt).



 **Lưu ý:** Hình khai triển mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt.



⚠ Lưu ý: Một hình nón được xác định khi biết 2 trong 3 yếu tố: bán kính đáy, chiều cao, đường sinh.

B Các ví dụ

🔗 **Ví dụ 1.** Một hình nón có bán kính đáy bằng r , diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Tính theo r

- Diện tích xung quanh của hình nón;
- Thể tích của hình nón.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 2.** Một hình nón có bán kính đáy bằng r , đường sinh bằng l . Khai triển mặt xung quanh hình nón ta được một hình quạt. Tính số đo cung của hình quạt theo r và l .

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 3.** Một hình nón cụt có các bán kính đáy bằng a và $2a$, chiều cao bằng a .

- Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt;
- Tính thể tích của hình nón cụt.

💬 Lời giải.



❖ **Ví dụ 4.** Một hình nón có bán kính đáy bằng 20 cm, số đo thể tích (tính bằng cm^3) bằng bốn lần số đo diện tích xung quanh (tính bằng cm^2). Tính chiều cao của hình nón.

❖ **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = 10$ cm, đường cao $AH = 4$ cm. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC . Tính thể tích hình tạo thành.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông cân, $\widehat{A} = 90^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$ cm. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AB cố định. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

Lời giải.

C

Luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 2a$ (đơn vị độ dài). Quay xung quanh tam giác một vòng quanh cạnh huyền BC . Tìm diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

Lời giải.



🔗 **Bài 2.** Một hình nón có bán kính đáy bằng 7 cm, chiều cao bằng 24 cm.

- a) Tính số đo cung hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón;
- b) Tính diện tích toàn phần của hình nón;
- c) Tính thể tích của hình nón.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Bài 3.** Một hình nón có bán kính đáy bằng 6 cm, đường sinh bằng 10 cm.

- a) Tính diện tích xung quanh của hình nón;
- b) Tính thể tích của hình nón;
- c) Một mặt phẳng đi qua trung điểm của đường cao và song song với đáy hình nón chia hình nón thành một hình nón nhỏ và một hình nón cụt. Tính thể tích hình nón cụt.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Bài 4.** Một hình nón cụt có bán kính đáy lớn bằng 8 cm, chiều cao bằng 12 cm và đường sinh bằng 13 cm.

- a) Tính bán kính đáy nhỏ của hình nón cụt;
- b) Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt;

c) Tính thể tích của hình nón cụt.

 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 5.** Mặt xung quanh của một hình nón khai triển thành một hình quạt $100^\circ 48'$, bán kính 25 cm.

- a) Tính diện tích toàn phần của hình nón;
- b) Tính thể tích của hình nón.

 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi V_1, V_2, V_3 theo thứ tự là thể tích của các hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh BC, AB, AC . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}.$$

 Lời giải.



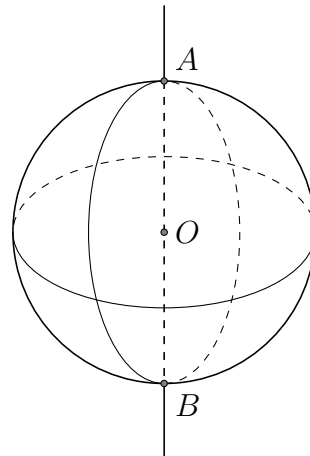
A Tóm tắt lý thuyết

1. Hình cầu

Định nghĩa 3.1. Khi quay nửa hình tròn $(0; R)$ một vòng quanh đường kính AB cố định, ta được một hình cầu.

- ☑ Nửa hình tròn khi quay quét nên mặt cầu.
- ☑ Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu.

Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì mặt cắt là một hình tròn.



2. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$, với R là bán kính; d là đường kính.
- Thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B Các ví dụ

Ví dụ 1. Một phao cơ hình cầu tự động đóng nước chảy vào bể khi bể đầy. Biết diện tích bề mặt của phao là 804 cm^2 , tính bán kính của phao.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	

Ví dụ 2. Phần trên của một chiếc cốc chân cao có dạng nửa hình cầu. Biết cốc này có thể chứa được $56,5 \text{ ml}$ nước. Tính đường kính của miệng cốc.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 3.** Một trái dưa có dạng hình cầu. Bỏ đôi trái dưa này ra thì mặt cắt có diện tích là 314 cm^2 . Tính thể tích của trái dưa đó.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 4.** Trái đất có bán kính 6400 km . Diện tích biển và đại dương chiếm $\frac{3}{4}$ bề mặt trái đất. Hãy tính diện tích biển và đại dương của trái đất (làm tròn đến triệu km^2).

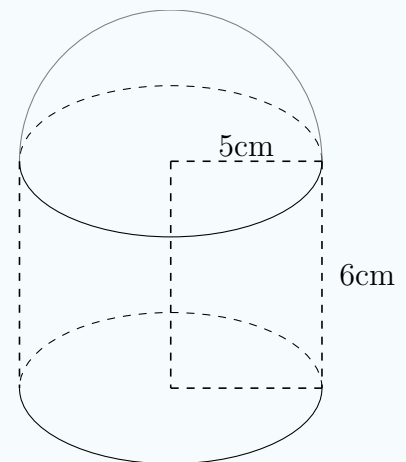
Lời giải.

.....	
.....	

⇒ **Ví dụ 5.**

Hình bên minh họa bộ phận lọc của một bình nước. Bộ phận này gồm một hình trụ và một nửa hình cầu với kích thước ghi trên hình. Hãy tính

- Thể tích của bộ phận đó;
- Diện tích mặt ngoài của bộ phận này.



Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

C Luyện tập

✧ **Bài 1.** Cho hình cầu có bán kính $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

- a) Tính diện tích mặt cầu.
- b) Tính thể tích của khối cầu tương ứng.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 2.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây $CD \perp AB$ tại H . Cho biết $CD = 12$ cm và $AH = 4$ cm. Quay đường tròn này một vòng quanh AB . Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu được tạo thành.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



❖ **Bài 3.** Cho đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác đều ABC . Quay đường tròn này một vòng quanh đường kính AOD ta được một hình cầu ngoại tiếp một hình nón. Tính thể tích phần bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Bạn An lấy thước dây đo vòng theo đường xích đạo của quả địa cầu trong thư viện được độ dài 94,2 cm. Hãy tính

- Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu.
- Thể tích của quả địa cầu.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 5.** Quả bóng bàn có số đo diện tích bề mặt (tính bằng cm^2) gấp 1,5 lần số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính, diện tích và thể tích của quả bóng bàn.

 **Lời giải.**

✧ **Bài 6.** Một hình cầu đặt vừa khít trong một hình trụ có chiều cao là 18 cm. Tính thể tích phần không gian nằm trong hình trụ nhưng nằm bên ngoài hình cầu.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 7.** Một trái bưởi hình cầu có đường kính 18 cm. Lớp vỏ dày 1 cm. Tính thể tích của lớp vỏ bưởi.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 8.** Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

✧ **Bài 9.** Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi \text{ m}^2$. Tính thể tích của hình cầu đó.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

✧ **Bài 10.** Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH . Ta quay nửa đường tròn nội tiếp và nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này một vòng quanh AH . Tính

- Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình nón.
- Tỉ số thể tích của hai hình cầu nói trên.
- Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón.

💬 **Lời giải.**



A Các ví dụ

🔗 **Ví dụ 1.** Cho hình tròn $(I, 1\text{ cm})$ nội tiếp hình vuông $ABCD$.

- a) Tính thể tích và diện tích của hình cầu tạo thành khi quay hình tròn ($I, 1\text{ cm}$) quanh một đường kính của nó.
- b) Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình trụ tạo thành khi quay hình vuông $ABCD$ quanh OO' , với O, O' lần lượt là trung điểm BC và AD .

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 2.** Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a , đường cao AH , nội tiếp đường tròn tâm O .

- a) Tính thể tích hình nón và hình cầu tạo thành khi quay $\triangle ABC$ và đường tròn (O) quanh trục AH , biết $a = 2$ cm.
- b) Tính tỉ số diện tích xung quanh hình nón và diện tích mặt cầu tạo thành khi quay $\triangle ABC$ và đường tròn (O) quanh trục AH .

 **Lời giải.**



- b) Tính thể tích khối tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AC .
- c) Tính thể tích khối tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục BC .

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 4.** Cho hình trụ (T) có hai đáy là hình tròn $(O; R)$ và (O', R) và hình nón (N) có đỉnh là O' , đáy là hình tròn (O, R) .

B Luyện tập

✧ **Bài 1.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ cm và $AD = 2$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD .

- Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN thì được khối gì? Tính thể tích của khối đó.
- Khi quay $\triangle NAB$ quanh trục MN thì được khối gì? Tính diện tích xung quanh của khối đó.

💬 **Lời giải.**



❖ **Bài 2.** Cho hình tròn (O, R) có diện tích bằng 4π . Quay hình tròn quanh một đường kính ta được hình cầu tâm O bán kính R .

- a) Tính thể tích hình cầu.
- b) Nếu diện tích hình tròn giảm một nửa thì diện tích của mặt cầu sẽ thay đổi như nào?

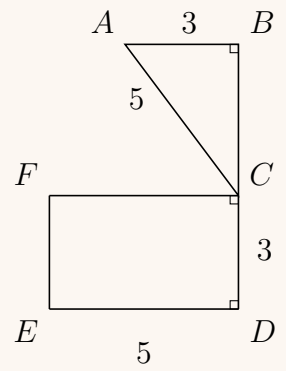
 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** Cho một khối xốp hình nón có đường kính đáy bằng 18 cm và độ dài từ đỉnh đến một điểm trên đường tròn đáy bằng 15 cm.

- Tính chiều cao và thể tích của hình nón đó.
- Cắt chỏm của khối xấp sao cho phần còn lại là hình nón cụt có chiều cao bằng một nửa chiều cao của hình nón ban đầu. Tính thể tích của phần bị cắt bỏ đi.
- Tiếp tục cắt khối nón cụt trên để tạo thành hình trụ có đáy là đáy nhỏ của hình nón cụt. Tính thể tích của hình trụ mới tạo thành.

 **Lời giải.**

Cho hình vẽ bên. Tính tổng thể tích của các khối tạo thành khi quay hình bên quanh trục BD .



 Lời giải.

❖ **Bài 6.** Một hình nón có đỉnh là tâm một hình cầu và có đáy là hình tròn tạo bởi một mặt phẳng cắt hình cầu. Biết diện tích đáy hình nón là $144\pi\text{cm}^2$ và diện tích xung quanh của nó là $180\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích phần không gian bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

 Lời giải.

[illegible]

Th.S Nguyễn Hoàng Việt – 0905.193.688 Việt Star

❖ **Bài 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi V_1, V_2, V_3 theo thứ tự là thể tích của những hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh BC, AB, AC . Chứng minh rằng

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 13.** Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB .

- a) Trên AB lấy điểm H sao cho $\frac{HA}{HB} = \frac{2}{3}$. Tính HA, HB theo R .
- b) Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt nửa đường tròn $(O; R)$ tại M ; tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn cắt các tiếp tuyến tại A, B lần lượt tại A', B' . Chứng minh rằng tam giác $A'OB'$ vuông và $AA' \cdot BB' = R^2$.
- c) Đặt $AA' = x; BB' = y$. Tính x, y theo R .
- d) Cho nửa hình tròn $(O; R)$ quay một vòng quanh cạnh AB được một hình có thể tích là V_1 ; cho hình thang vuông $ABB'A'$ quay quanh AB ta được một hình có thể tích là V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

 **Lời giải.**

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.