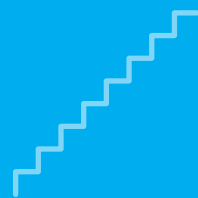




KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

GV PHẠM ĐÌNH QUANG



TOÁN 8

TẬP MỘT

1

Tóm tắt lý thuyết

2

Ví dụ minh họa

3

Bài tập tự luận

4

Bài tập trắc nghiệm

π

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

PHẦN I ĐẠI SỐ

Chương 1. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC	1
Bài 1. Nhân đơn thức với đa thức	1
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
(B) BÀI TẬP	1
Bài 2. Nhân đa thức với đa thức	4
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	4
(B) BÀI TẬP	4
Bài 5. Những hằng đẳng thức đáng nhớ	10
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	10
(B) BÀI TẬP	13
Bài 6. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung	23
(A) VÍ DỤ	23
(B) BÀI TẬP	24
Bài 7. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức	26
(A) VÍ DỤ	26
(B) BÀI TẬP	26
Bài 8. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử	28
(A) VÍ DỤ	28
(B) BÀI TẬP	29
Bài 9. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng các phương pháp khác (tách hạng tử, thêm bớt, đặt ẩn phụ)	33
(A) VÍ DỤ	33
(B) BÀI TẬP	33
Bài 10. Chia đơn thức cho đơn thức	42
(A) LÝ THUYẾT	42

Ⓑ	BÀI TẬP	43
Bài 11.	Chia đa thức cho đơn thức	43
Ⓐ	LÝ THUYẾT	43
Ⓑ	BÀI TẬP	44
Bài 12.	Chia đa thức một biến đã sắp xếp	45
Ⓐ	LÝ THUYẾT	45
Ⓑ	BÀI TẬP	46
Chương 2.	PHÂN THỨC ĐẠI SỐ	52
Bài 1.	Bài 1,2,3,4. Phân thức đại số	52
Ⓐ	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	52
Ⓑ	BÀI TẬP	52
Bài 2.	Bài 5, 6, 7, 8. Phép cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đại số	56
Ⓐ	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	56
Ⓑ	BÀI TẬP	57
Bài 3.	Biến đổi các biểu thức hữu tỉ - giá trị của phân thức đại số	65
Ⓐ	Lý thuyết	65

PHẦN II HÌNH HỌC

Chương 3.	TỨ GIÁC	82
Bài 1.	Tứ giác	82
Ⓐ	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	82
Ⓑ	BÀI TẬP	83
Bài 2.	Hình thang	87
Ⓐ	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	87
Ⓑ	BÀI TẬP	88
Bài 3.	Hình thang cân	90
Ⓐ	LÝ THUYẾT	90
Ⓑ	BÀI TẬP	91
Bài 4.	Đường trung bình	94
Ⓐ	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	94
Ⓑ	BÀI TẬP	95
Bài 6.	Đối xứng trục	105

(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	105
(B) BÀI TẬP	107
Bài 7. Hình bình hành	110
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	111
(B) BÀI TẬP	111
Bài 8. Đối xứng tâm	119
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	119
(B) BÀI TẬP	120
Bài 9. Hình chữ nhật - Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.	127
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	127
(B) BÀI TẬP	129
Bài 11. Hình thoi	141
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	142
(B) BÀI TẬP	142
Bài 12. Hình vuông	156
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	156
(B) BÀI TẬP	157
Chương 4. ĐA GIÁC, DIỆN TÍCH ĐA GIÁC	174
Bài 1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT	174
Bài 2. BÀI TẬP	175
Chương 5. Đề thi tham khảo	181
Bài 1. Đề kiểm tra giữa học kì I - Năm học 2009 - 2010	181
Bài 2. Đề kiểm tra giữa học kì I - Năm học 2010 - 2011	183
Bài 3. Đề kiểm tra giữa học kì I - Năm học 2011 - 2012	185
Bài 4. Đề kiểm tra giữa học kì I - Năm học 2012 - 2013	187
Bài 5. Đề kiểm tra giữa học kì I - Năm học 2013 - 2014	189
Bài 6. Đề kiểm tra giữa học kì I - Năm học 2014 - 2015	191
Bài 7. Đề kiểm tra giữa học kì I - Năm học 2015-2016	193
Bài 8. Đề kiểm tra giữa học kì I - Năm học 2016-2017	195
Bài 9. Đề kiểm tra học kì 1 - Năm học 2009 - 2010	197
Bài 10. Đề kiểm tra học kì I năm học 2010 - 2011	199

Bài 11. Đề kiểm tra học kì I năm học 2011 - 2012	202
Bài 12. Đề kiểm tra học kì 1 - Năm học: 2012 - 2013	206
Bài 13. Đề kiểm tra học kì I năm học 2013 - 2014	209
Bài 14. Đề kiểm tra học kì I năm học 2014 - 2015	213
Bài 15. Đề kiểm tra học kì I năm học 2015 - 2016 - Quận 1	216
Bài 16. Đề kiểm tra học kì I năm học 2016 - 2017 - Quận 1	219



PHẦN

I

ĐẠI SỐ

Chương 1

PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Bài

1

NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

B

BÀI TẬP

✎ Bài 1. Thực hiện phép nhân:

- a) $(-5x^2)(3x^3 - 2x^2 + x - 1)$;
- b) $\left(-4x^3 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{4}yz\right)\left(-\frac{1}{2}xy\right)$;
- c) $(-7mxy^2)(8m^2x - 3my + y^2 - 4ny)$;
- d) $-3a^2b(4ax + 2xy - 4b^2y)$.

💬 Lời giải.

- a) $(-5x^2)(3x^3 - 2x^2 + x - 1) = -15x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 5x^2$.
- b) $\left(-4x^3 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{4}yz\right)\left(-\frac{1}{2}xy\right) = 2x^4y - \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{8}xy^2z$.
- c) $(-7mxy^2)(8m^2x - 3my + y^2 - 4ny) = -56m^3x^2y^2 + 21m^2xy^4 - 7mxy^4 + 28mnxy^3$.
- d) $-3a^2b(4ax + 2xy - 4b^2y) = -12a^3bx - 6a^2bxy + 12a^2b^3y$.

□

✎ Bài 2. Rút gọn biểu thức

- a) $3x^2y(2x^2 - y) - 2x^2(2x^2y - y^2)$;
- b) $3x^2(2y - 1) - [2x^2(5y - 3) - 2x(x - 1)]$;
- c) $2 \cdot (x^{2n} + 2x^ny^n + y^{2n}) - y^n(4x^n + 2y^n)$, (với $n \in \mathbb{N}^*$);
- d) $3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2})$, (với $n \in \mathbb{N}, n > 2$).

 Lời giải.

$$\text{a) } 3x^2y(2x^2 - y) - 2x^2(2x^2y - y^2) = 6x^4y - 3x^2y^2 - 4x^4y + 2x^2y^2 = 2x^4y - x^2y^2.$$

b)

$$\begin{aligned} 3x^2(2y - 1) - [2x^2(5y - 3) - 2x(x - 1)] &= 6x^2y - 3x^2 - (10x^2y - 6x^2 - 2x^2 + 2x) \\ &= 6x^2y - 3x^2 - 10x^2y + 6x^2 + 2x^2 - 2x \\ &= -4x^2y + 5x^2 - 2x. \end{aligned}$$

$$\text{c) } 2 \cdot (x^{2n} + 2x^ny^n + y^{2n}) - y^n(4x^n + 2y^n) = 2x^{2n} + 4x^ny^n + 2y^{2n} - 4x^ny^n - 2y^{2n} = 2x^{2n}, \text{ (với } n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

$$\text{d) } 3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2}) = 3x^{2n} - 3x^{n-2}y^{n+2} + 3x^{n-2}y^{n+2} - y^{2n} = 3x^{2n} - y^{2n}.$$

□

 Bài 3. Tìm x biết

$$\text{a) } 3(2x - 1) - x(3x - 2) = 3x(1 - x) + 2;$$

$$\text{b) } \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{2}x - 4\right) \cdot \frac{1}{2}x = -14 - \frac{3}{2}\left(x - \frac{8}{3}\right);$$

$$\text{c) } 2x^3 \cdot (2x - 3) - x^2(4x^2 - 6x + 2) = 0.$$

 Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} 3(2x - 1) - x(3x - 2) &= 3x(1 - x) + 2 \\ 6x - 3 - 3x^2 + 2x &= 3x - 3x^2 + 2 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Vậy $x = 1$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{2}x - 4\right) \cdot \frac{1}{2}x &= -14 - \frac{3}{2}\left(x - \frac{8}{3}\right) \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + 2x &= -14 - \frac{3}{2}x + 4 \\ 2x + \frac{3}{2}x &= -10 \\ \frac{7}{2}x &= -10 \\ x &= \frac{-20}{7}. \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{20}{7}$.

c)

$$\begin{aligned}
 2x^3 \cdot (2x - 3) - x^2(4x^2 - 6x + 2) &= 0 \\
 4x^4 - 6x^3 - 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 &= 0 \\
 -2x^2 &= 0 \\
 x^2 &= 0 \\
 x &= 0.
 \end{aligned}$$

Vậy $x = 0$.

□

⇒ **Bài 4.** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x và y

- a) $3x(x - 5y) + (y - 5x)(-3y) - 1 - 3(x^2 - y^2)$;
- b) $x(x^3 + 2x^2 - 3x + 2) - (x^2 + 2x)x^2 + 3x(x - 1) + x - 12$;
- c) $3xy^2(4x^2 - 2y) - 6y(2x^3y + 1) + 6(xy^3 + y - 3)$;
- d) $2(3x^{n+1} - y^{n-1}) + 4(x^{n+1} + y^{n-1}) - 2x(5x^n + 1) - 2(y^{n-1} - x)$, (với $n \in \mathbb{N}, n > 1$).

💬 **Lời giải.**

- a) $3x(x - 5y) + (y - 5x)(-3y) - 1 - 3(x^2 - y^2) = 3x^2 - 15xy - 3y^2 + 15xy - 1 - 3x^2 + 3y^2 = -1$.
 Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào giá trị của x và y .

b)

$$\begin{aligned}
 &x(x^3 + 2x^2 - 3x + 2) - (x^2 + 2x)x^2 + 3x(x - 1) + x - 12 \\
 &= x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + x - 12 \\
 &= -12.
 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào giá trị của x .

c)

$$\begin{aligned}
 &3xy^2(4x^2 - 2y) - 6y(2x^3y + 1) + 6(xy^3 + y - 3) \\
 &= 12x^3y^2 - 6xy^3 - 12x^3y^2 - 6y + 6xy^3 + 6y - 18 \\
 &= -18.
 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào giá trị của x và y .

d)

$$\begin{aligned}
 &2(3x^{n+1} - y^{n-1}) + 4(x^{n+1} + y^{n-1}) - 2x(5x^n + 1) - 2(y^{n-1} - x) \\
 &= 6x^{n+1} - 2y^{n-1} + 4x^{n+1} + 4y^{n-1} - 10x^{n+1} - 2x - 2y^{n-1} + 2x \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào giá trị của x và y .

□

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hãy làm theo các hướng dẫn sau

- ☑ Hãy viết một đa thức bậc 3 có hai hạng tử và một đa thức bậc 4 có ba hạng tử (cả hai đa thức đều có cùng một biến x).
- ☑ Hãy nhân mỗi hạng tử của đa thức này với đa thức kia.
- ☑ Hãy cộng các kết quả vừa tìm được.

2. Quy tắc

Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A + B)(C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D.$$

3. Áp dụng

Làm tính nhẩm

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (x + 3)(x^2 + 3x - 5) \\ &= x^3 + 3x^2 - 5x + 3x^2 + 9x - 15 \\ &= x^3 + 6x^2 + 4x - 15. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & (xy - 1)(xy + 5) \\ &= x^2y^2 + 5xy - xy - 5 \\ &= x^2y^2 + 4xy - 5. \end{aligned}$$

B

BÀI TẬP

✧ Bài 1. Thực hiện phép nhân:

- a) $(2x + 3y)(2x - 3xy + 4y).$
- b) $(2a - 1)(a^2 - 5 + 2a).$
- c) $(5y^2 - 11y + 8)(3 - 2y).$
- d) $(x + 1)(x - 2)(2x - 1).$
- e) $(x - 2)(3x + 1)(x + 1).$

- f) $(3x^2 + 11 - 5x)(8x - 6 + 2x^2)$.
- g) $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$.
- h) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.
- i) $(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n})(x^n - y^n)(x^{3n} + y^{3n})$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- j) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
- k) $(a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd)$.

Lời giải.

- a) $(2x + 3y)(2x - 3xy + 4y) = 4x^2 - 6x^2y + 14xy - 9xy^2 - 12y^2$.
- b) $(2a - 1)(a^2 - 5 + 2a) = 2a^3 + 3a^2 - 12a + 5$.
- c) $(5y^2 - 11y + 8)(3 - 2y) = -10y^3 + 37y^2 - 49y + 24$.
- d) $(x + 1)(x - 2)(2x - 1) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.
- e) $(x - 2)(3x + 1)(x + 1) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$.
- f) $(3x^2 + 11 - 5x)(8x - 6 + 2x^2) = 6x^4 + 14x^3 - 36x^2 + 118x - 66$.
- g) $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1) = -x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$.
- h) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) = x^5 + x + 1$.
- i) $(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n})(x^n - y^n)(x^{3n} + y^{3n})$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
 $= (x^{3n} - y^{3n})(x^{3n} + y^{3n}) = x^{6n} - y^{6n}$.
- j) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
- k) $(a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd)$
 $= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3abc - 3abd - 3acd - 3bcd$.

□

 **Bài 2.** Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào x

- a) $x(x^3 + x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x + 3) + 4(x^2 - x - 2)$.
- b) $(x - 3)(x + 2) + (x - 1)(x + 1) - (2x - 1)x$.
- c) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$.
- d) $(x + 5)(x + 4)(x - 2) - (x^2 + 11x - 9)(x + 1) + 5x^2$.

Lời giải.

- a) $x(x^3 + x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x + 3) + 4(x^2 - x - 2)$
 $= x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x^2 + 2x + 6 + 4x^2 - 4x - 8$
 $= -2$.

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & (x-3)(x+2) + (x-1)(x+1) - (2x-1)x \\
&= x^2 + 2x - 3x - 6 + x^2 - 1 - 2x^2 + x = -7. \\
\text{c)} \quad & (x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) \\
&= x^3 + 1 - (x^3 - 1) = 2. \\
\text{d)} \quad & (x+5)(x+4)(x-2) - (x^2 + 11x - 9)(x+1) + 5x^2 \\
&= (x^2 + 9x + 20)(x-2) - (x^3 + 12x^2 + 2x - 9) + 5x^2 \\
&= x^3 + 7x^2 + 2x - 40 - x^3 - 12x^2 - 2x + 9 + 5x^2 = -31.
\end{aligned}$$

□

❖ **Bài 3.** Chứng minh các đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab. \\
\text{b)} \quad & (x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc. \\
\text{c)} \quad & (x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx. \\
\text{d)} \quad & (x+y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx. \\
\text{e)} \quad & (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4. \\
\text{f)} \quad & (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = x^5 + y^5. \\
\text{g)} \quad & (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \\
\text{h)} \quad & (x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x).
\end{aligned}$$

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & (x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab. \\
\text{b)} \quad & (x+a)(x+b)(x+c) = (x^2 + (a+b)x + ab)(x+c) \\
&= x^3 + cx^2 + (a+b)x^2 + c(a+b)x + abx + abc \\
&= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc. \\
\text{c)} \quad & (x-y-z)^2 = x^2 - 2x(y+z) + (y+z)^2 \\
&= x^2 - 2xy - 2zx + y^2 + z^2 + 2yz \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx. \\
\text{d)} \quad & (x+y-z)^2 = x^2 + 2x(y-z) + (y-z)^2 \\
&= x^2 + 2xy - 2zx + y^2 - 2yz + z^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx. \\
\text{e)} \quad & (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \\
&= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 - x^3y - x^2y^2 - xy^3 - y^4 = x^4 - y^4. \\
\text{f)} \quad & (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \\
&= x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 + x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 - xy^4 + y^5 \\
&= x^5 + y^5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g)} \quad & (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\
&= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)(xy+yz+zx) \\
&= x^3+y^3+z^3+x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2) \\
&\quad -x^2(y+z)-y^2(z+x)-z^2(x+y)-3xyz \\
&= x^3+y^3+z^3-3xyz.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{h)} \quad & (x+y+z)^3 = x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y+z)^2 + (y+z)^3 \\
&= x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y+z)^2 + y^3 + 3yz(y+z) + z^3 \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(y+z)(x^2+x(y+z)+yz) \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(x+z).
\end{aligned}$$

□

✎ Bài 4. Tìm x biết

a) $3(1-4x)(x-1) + 4(3x+2)(x+3) = 80.$

b) $5(2x+3)(x+2) - 2(5x-4)(x-1) = 128.$

c) $2x^2 + 3(x-1)(x+1) = 5x(x+1).$

d) $(x+2)(x+2) - (x-2)(x-2) = 8x.$

e) $(2x-1)(x^2-x+1) = 2x^3 - 3x^2 + 2.$

f) $(x+1)(x+2)(x+5) - x^3 - 8x^2 + 7 = 0.$

💬 Lời giải.

a) $3(1-4x)(x-1) + 4(3x+2)(x+3) = 80.$

Ta có

$$\begin{aligned}
& 3(1-4x)(x-1) + 4(3x+2)(x+3) = 80 \\
\Leftrightarrow & 3(x-1-4x^2+4x) + 4(3x^2+9x+2x+6) = 80 \\
\Leftrightarrow & 3(-4x^2+5x-1) + 4(3x^2+11x+6) = 80 \\
\Leftrightarrow & -12x^2+15x-3+12x^2+44x+24 = 80 \\
\Leftrightarrow & 59x = 59 \Leftrightarrow x = 1.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1.$

b) $5(2x+3)(x+2) - 2(5x-4)(x-1) = 128.$

Ta có

$$\begin{aligned}
& 5(2x+3)(x+2) - 2(5x-4)(x-1) = 128 \\
\Leftrightarrow & 5(2x^2+4x+3x+6) - 2(5x^2-5x-4x+4) = 128 \\
\Leftrightarrow & 5(2x^2+7x+6) - 2(5x^2-9x+4) = 128 \\
\Leftrightarrow & 10x^2+35x+30-10x^2+18x-8 = 128 \\
\Leftrightarrow & 53x = 106 \Leftrightarrow x = 2.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2.$

c) $2x^2 + 3(x-1)(x+1) = 5x(x+1)$. Ta có

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 3(x-1)(x+1) = 5x(x+1) \\ \Leftrightarrow & 2x^2 + 3(x^2 + x - x - 1) = 5x^2 + 5x \\ \Leftrightarrow & 5x^2 - 3 = 5x^2 + 5x \\ \Leftrightarrow & -5x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{3}{5}$.

d) $(x+2)(x+2) - (x-2)(x-2) = 8x$. Ta có

$$\begin{aligned} & (x+2)(x+2) - (x-2)(x-2) = 8x \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2x + 2x + 4 - x^2 + 2x + 2x - 4 = 8x \\ \Leftrightarrow & 0 = 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình vô số nghiệm.

e) $(2x-1)(x^2-x+1) = 2x^3-3x^2+2$.
Ta có

$$\begin{aligned} & (2x-1)(x^2-x+1) = 2x^3-3x^2+2 \\ \Leftrightarrow & 2x^3-2x^2+2x-x^2+x-1 = 2x^3-3x^2+2 \\ \Leftrightarrow & 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

f) $(x+1)(x+2)(x+5) - x^3 - 8x^2 + 7 = 0$.
Ta có

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+5) - x^3 - 8x^2 + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 2x + x + 2)(x+5) - x^3 - 8x^2 + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 3x + 2)(x+5) - x^3 - 8x^2 + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^3 + 5x^2 + 3x^2 + 15x + 2x + 10 - x^3 - 8x^2 + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & 17x = -17 \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$.

□

✎ **Bài 5.** Cho a, b, c là ba số cố định và các số thực x, y, z thỏa mãn $y+z=a, z+x=b, x+y=c$.

a) Biểu diễn ab theo x, y, z .

b) Chứng minh giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx$ không đổi khi x, y, z thay đổi.

💬 **Lời giải.**

a) Biểu diễn ab theo x, y, z .

Ta có $ab = (y+z)(x+y) = xy + y^2 + zx + yz = y^2 + xy + yz + zx$.

b) Chứng minh giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx$ không đổi khi x, y, z thay đổi.
Ta có

$$\textcircled{a} ab = (y + z)(z + x) = yz + xy + z^2 + zx = z^2 + xy + yz + zx.$$

$$\textcircled{b} bc = (z + x)(x + y) = zx + yz + x^2 + xy = x^2 + xy + yz + zx.$$

$$\textcircled{c} ca = (x + y)(y + z) = xy + zx + y^2 + yz = y^2 + xy + yz + zx.$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên, ta có

$$ab + bc + ca = x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx \Leftrightarrow P = ab + bc + ca.$$

Vậy giá trị biểu thức P không đổi khi x, y, z thay đổi. □

✎ **Bài 6.** Cho $x^2 - y = a$, $y^2 - z = b$, $z^2 - x = c$ (a, b, c là các hằng số). Chứng minh giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị các biến x, y, z .

$$P = x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1).$$

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} P &= x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1) \\ &= x^3(z - y^2) + y^3x - y^3z^2 + z^3y - z^3x^2 + x^2y^2z^2 - xyz \\ &= x^3(z - y^2) + x^2(y^2z^2 - z^3) + x(y^3 - yz) - y^3z^2 + z^3y \\ &= x^3(z - y^2) + x^2z^2(y^2 - z) + xy(y^2 - z) - yz^2(y^2 - z) \\ &= (z - y^2)(x^3 - x^2z^2 - xy + yz^2) \\ &= (z - y^2)[x^2(x - z^2) - y(x - z^2)] \\ &= (z - y^2)(x - z^2)(x^2 - y) \\ &= (x^2 - y)(y^2 - z)(z^2 - x) = abc. \end{aligned}$$

Vậy P không phụ thuộc vào giá trị các biến x, y, z . □

✎ **Bài 7.** Xác định hệ số a, b, c biết

a) $(x^2 + cx + 2)(ax + b) = x^3 - x^2 + 2$ với mọi x .

b) $(ay^2 + by + c)(y + 3) = y^3 + 2y^2 - 3y$ với mọi y .

💬 **Lời giải.**

a) $(x^2 + cx + 2)(ax + b) = x^3 - x^2 + 2$ với mọi x .

Ta có

$$\begin{aligned} (x^2 + cx + 2)(ax + b) &= x^3 - x^2 + 2 \\ \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + acx^2 + bcx + 2ax + 2b &= x^3 - x^2 + 2 \\ \Leftrightarrow ax^3 + (b + ac)x^2 + (bc + 2a)x + 2b &= x^3 - x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ b + ac = -1 \\ bc + 2a = 0 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2. \end{cases}$$

Vậy $a = 1, b = 1, c = -2$.

b) $(ay^2 + bx + c)(y + 3) = y^3 + 2x^2 - 3y$ với mọi y .

Ta có

$$\begin{aligned} (ay^2 + by + c)(y + 3) &= y^3 + 2y^2 - 3y \\ \Leftrightarrow ay^3 + 3ay^2 + by^2 + 3by + cy + 3c &= y^3 + 2y^2 - 3y \\ \Leftrightarrow ay^3 + (3a + b)y^2 + (3b + c)y + 3c &= y^3 + 2y^2 - 3y \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 2 \\ 3b + c = -3 \\ 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0. \end{cases}$$

Vậy $a = 1, b = -1, c = 0$.

□

Bài

5

NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bình phương của một tổng

- Thực hiện phép tính $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$.
- Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- Áp dụng

✧ Ví dụ 1.(a) Tính $(a + 1)^2$.

(b) Viết biểu thức $x^2 + 4x + 4$ dưới dạng bình phương của một tổng.

💬 Lời giải.

(a) Tính $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

(b) Viết biểu thức $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$.

□

2. Bình phương của một hiệu

- Thực hiện phép tính $[a + (-b)]^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- Áp dụng

❖ Ví dụ 2.(a) Tính $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

(b) Tính $(2x - 3y)^2$.

💬 Lời giải.

$$(a) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}.$$

$$(b) (2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2.$$

□

3. Hiệu hai bình phương

- Thực hiện phép tính $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.
- Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
- Áp dụng

❖ Ví dụ 3.(a) Tính $(x - 1)(x + 1)$.

(b) Tính $(x - 2y)(x + 2y)$.

💬 Lời giải.

$$(a) (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1.$$

$$(b) (x - 2y)(x + 2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2.$$

□

4. Lập phương của một tổng

- Thực hiện phép tính $(a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.
- Áp dụng

❖ Ví dụ 4.(a) Tính $(x + 1)^3$.

(b) Tính $(2x + y)^3$.

💬 Lời giải.

$$(a) (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

$$(b) (2x + y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3.$$

□

5. Lập phương của một hiệu

- Thực hiện phép tính $[a + (-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
- Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.
- Áp dụng

❖ Ví dụ 5.(a) Tính $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3$.

(b) Tính $(x - 2y)^3$.

💬 Lời giải.

$$(a) \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot \frac{1}{3} + 3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}.$$

$$(b) (x - 2y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3.$$

□

6. Tổng hai lập phương

- Thực hiện phép tính $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.
- Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.
- Ta quy ước $A^2 - AB + B^2$ là bình phương thiếu của hiệu A và B .
- Áp dụng

❖ Ví dụ 6.(a) Viết $x^3 + 8$ dưới dạng tích.

(b) Viết $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ ở dạng tổng.

💬 Lời giải.

$$(a) x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

$$(b) (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1.$$

□

7. Hiệu của hai lập phương

- Thực hiện phép tính $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.
- Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.
- Ta quy ước $A^2 + AB + B^2$ là bình phương thiếu của tổng A và B .
- Áp dụng

❖ Ví dụ 7.(a) Tính $(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

(b) Viết $8x^3 - y^3$ dưới dạng tích.

💬 Lời giải.

(a) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$.

(b) $8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x - y)[(2x)^2 + 2xy + y^2] = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$.

□

BẢY HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

1. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
2. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
3. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.
6. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.
7. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

B BÀI TẬP

❖ Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;

b) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.

💬 Lời giải.

a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Ta có

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 \\&= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\&= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.\end{aligned}$$

b) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

Ta có

$$\begin{aligned}(a - b + c)^2 &= [(a - b) + c]^2 \\&= (a - b)^2 + 2(a - b)c + c^2 \\&= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2 \\&= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc.\end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2.** Điền vào các chỗ trống sau đây để có đẳng thức đúng.

a) $(\dots - \dots)^2 = a^2 - 6ab + \dots;$

b) $(\dots + \dots)^2 = \dots + m + \frac{1}{4};$

c) $(\dots - \sqrt{2})^2 = 9x^2 - \dots + \dots;$

d) $\dots - 16y^4 = (x - \dots)(x + \dots);$

e) $(x - \dots)(x + \dots) = \dots - 3.$

💬 **Lời giải.**

a) $(\dots - \dots)^2 = a^2 - 6ab + \dots$

Áp dụng hằng đẳng thức $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ ta được

$$a^2 - 6ab + \dots = a^2 - 2 \cdot a \cdot (3b) + (3b)^2.$$

Vậy $(a - 3b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2.$

b) $(\dots + \dots)^2 = \dots + m + \frac{1}{4}$

Áp dụng hằng đẳng thức $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ta được

$$\dots + m + \frac{1}{4} = m^2 + 2 \cdot m \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Vậy $\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = m^2 + m + \frac{1}{4}.$

c) $(\dots - \sqrt{2})^2 = 9x^2 - \dots + \dots$

Áp dụng hằng đẳng thức $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ ta được

$$(3x - \sqrt{2})^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (3x - \sqrt{2})^2 = 9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2.$$

d) $\dots - 16y^4 = (x - \dots)(x + \dots)$

Áp dụng hằng đẳng thức $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ta được

$$x^2 - (4y^2)^2 = (x - 4y^2)(x + 4y^2) \Rightarrow x^2 - 16y^4 = (x - 4y^2)(x + 4y^2).$$

e) $(x - \dots)(x + \dots) = \dots - 3$

Áp dụng hằng đẳng thức $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ta được

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = x^2 - (\sqrt{3})^2 \Rightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = x^2 - 3.$$

□

❖ **Bài 3.** Điền vào chỗ trống để biểu thức trở thành bình phương của một tổng hoặc bình phương của một hiệu.

- a) $4a^2x^2 + 4abx + \dots$;
- b) $1 + 2x^2 - \dots$;
- c) $25m^2 - 40mn + \dots$;
- d) $\dots - 3px + p^2$;
- e) $16x^2 + \dots - 24xy$.

 Lời giải.

- a) $4a^2x^2 + 4abx + \dots$
 $\forall 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = (2ax + b)^2$
 nên $4a^2x^2 + 4abx + \dots = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$.
- b) $1 + 2x^2 - \dots$
 $\forall 1 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x = 1 + (\sqrt{2}x)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}x = (1 - \sqrt{2}x)^2$
 nên $1 + 2x^2 - \dots = 1 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x$.
- c) $25m^2 - 40mn + \dots$
 $\forall 25m^2 - 40mn + 16n^2 = (5m)^2 - 2 \cdot 5m \cdot 4n + (4n)^2 = (5m - 4n)^2$
 nên $25m^2 - 40mn + \dots = 25m^2 - 40mn + 16n^2$.
- d) $\dots - 3px + p^2$
 $\forall \frac{9x^2}{4} - 3px + p^2 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3x}{2} \cdot p + p^2 = \left(\frac{3x}{2} - p\right)^2$
 nên $\dots - 3px + p^2 = \frac{9x^2}{4} - 3px + p^2$.
- e) $16x^2 + \dots - 24xy$
 $\forall 16x^2 + 9y^2 - 24xy = (4x)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = (4x - 3y)^2$
 nên $16x^2 + \dots - 24xy = 16x^2 + 9y^2 - 24xy$.

□

 **Bài 4.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- a) $(2x - 1)^2 = (1 - 2x)^2$;
- b) $(x - 1)^3 = (1 - x)^3$;
- c) $(x + 1)^3 = (1 + x)^3$;
- d) $(x - 3)^2 = x^2 - 3x + 9$;
- e) $x^2 - 2x + 4 = (x - 2)^2$;
- f) $x^2 + 6x + 36 = (x + 6)^2$.

 Lời giải.

- a) $(2x - 1)^2 = (1 - 2x)^2$
 Ta có $(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2x + (2x)^2 = (1 - 2x)^2$.
 Vậy $(2x - 1)^2 = (1 - 2x)^2$ đúng.



b) $(x-1)^3 = (1-x)^3$

Ta có

☑ $(x-1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$

☑ $(1-x)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot x^2 - x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3.$

Vậy $(x-1)^3 \neq (1-x)^3$ nên $(x-1)^3 = (1-x)^3$ sai.

c) $(x+1)^3 = (1+x)^3$

Ta có $x+1 = 1+x$ nên $(x+1)^3 = (1+x)^3$.

Vậy $(x+1)^3 = (1+x)^3$ đúng.

d) $(x-3)^2 = x^2 - 3x + 9$

Ta có $(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9.$

Vậy $(x-3)^2 = x^2 - 3x + 9$ sai.

e) $x^2 - 2x + 4 = (x-2)^2$

Ta có $(x-2)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4.$

Vậy $x^2 - 2x + 4 = (x-2)^2$ sai.

f) $x^2 + 6x + 36 = (x+6)^2$

Ta có $(x+6)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36.$

Vậy $x^2 + 6x + 36 = (x+6)^2$ sai.

□

❖ Bài 5. Tính

a) $(3 - xy^2)^2 - (2 + xy^2)^2.$

g) $(2y - 3)^3.$

b) $9x^2 - (3x - 4)^2.$

h) $(2 - y)^3.$

c) $(a - b^2)(a + b^2).$

i) $(2y - 5)(4y^2 + 10y + 25).$

d) $(a^2 + 2a + 3)(a^2 + 2a - 3).$

j) $(3y + 4)(9y^2 - 12y + 16).$

e) $(x - y + 6)(x + y - 6).$

k) $(x - 3)^3 + (2 - x)^3.$

f) $(y + 2z - 3)(y - 2z - 3).$

l) $(x + y)^3 - (x - y)^3.$

💬 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} (3 - xy^2)^2 - (2 + xy^2)^2 &= [(3 - xy^2) - (2 + xy^2)] \cdot [(3 - xy^2) + (2 + xy^2)] \\ &= (3 - xy^2 - 2 - xy^2)(3 - xy^2 + 2 + xy^2) \\ &= (1 - 2xy^2) \cdot 5 \\ &= 5(1 - 2xy^2). \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} 9x^2 - (3x - 4)^2 &= (3x)^2 - (3x - 4)^2 = [3x - (3x - 4)] \cdot [3x + (3x - 4)] \\ &= (3x - 3x + 4)(3x + 3x - 4) \\ &= 4(6x - 4). \end{aligned}$$

$$c) (a - b^2)(a + b^2) = a^2 - (b^2)^2 = a^2 - b^4.$$

$$d) (a^2 + 2a + 3)(a^2 + 2a - 3) = [(a^2 + 2a) + 3] \cdot [(a^2 + 2a) - 3] = (a^2 + 2a)^2 - 9.$$

$$e) (x - y + 6)(x + y - 6) = [x - (y - 6)] \cdot [x + (y - 6)] = x^2 - (y - 6)^2.$$

$$f) (y + 2z - 3)(y - 2z - 3) = [(y - 3) + 2z] \cdot [(y - 3) - 2z] = (y - 3)^2 - (2z)^2 = (y - 3)^2 - 4z^2.$$

$$g) (2y - 3)^3 = (2y)^3 - 3 \cdot (2y)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2y) \cdot 3^2 - 3^3 = 8y^3 - 36y^2 + 54y - 27.$$

$$h) (2 - y)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot y + 3 \cdot 2 \cdot y^2 - y^3 = 8 - 12y + 6y^2 - y^3.$$

$$i) (2y - 5)(4y^2 + 10y + 25) = (2y - 5) [(2y)^2 + (2y) \cdot 5 + 5^2] = (2y)^3 - 5^3 = 8y^3 - 125.$$

$$j) (3y + 4)(9y^2 - 12y + 16) = (3y + 4) [(3y)^2 - (3y) \cdot 4 + 4^2] = (3y)^3 + 4^3 = 27y^3 + 64.$$

k) Ta có

$$\begin{aligned} (x - 3)^3 + (2 - x)^3 &= [(x - 3) + (2 - x)] \cdot [(x - 3)^2 - (x - 3)(2 - x) + (2 - x)^2] \\ &= (x - 3 + 2 - x) \cdot (x^2 - 6x + 9 + x^2 - 5x + 6 + 4 - 4x + x^2) \\ &= (-1) \cdot (3x^2 - 15x + 19) \\ &= -3x^2 + 15x - 19. \end{aligned}$$

l) Ta có

$$\begin{aligned} (x + y)^3 - (x - y)^3 &= [(x + y) - (x - y)] \cdot [(x + y)^2 + (x + y)(x - y) + (x - y)^2] \\ &= (x + y - x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - y^2 + x^2 - 2xy + y^2) \\ &= 2y(3x^2 + y^2). \end{aligned}$$

🔗 Bài 6. Rút gọn biểu thức

$$a) (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2).$$

$$b) (x + 1)^2 - (x - 1)^2 + 3x^3 - 3x(x + 1)(x - 1).$$

$$c) (2x + 1)^2 + 2(4x^2 - 1) + (2x - 1)^2.$$

$$d) (m + n)^2 - (m - n)^2 + (m - n)(m + n).$$

$$e) (3x + 1)^2 - 2(3x + 1)(3x + 5) + (3x + 5)^2.$$

$$f) (a - b + c)^2 - 2(a - b + c)(c - b) + (b - c)^2.$$

$$g) (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)(2x + 5)(4x^2 - 10x + 25) - 64x^6.$$

$$h) (a + b)^3 + (a - b)^3 - 2a^3.$$

$$i) (x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

💬 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2) &= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)(x^2 - 2)(x^2 + 2) \\ &= [(x^2 + 2)^2 - (2x)^2] \cdot [(x^2)^2 - 2^2] \\ &= (x^4 + 4)(x^4 - 4) \\ &= x^8 - 16. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 - (x-1)^2 + 3x^3 - 3x(x+1)(x-1) \\ &= [(x+1) - (x-1)] \cdot [(x+1) + (x-1)] + 3x^3 - 3x(x^2 - 1) \\ &= (x+1 - x+1)(x+1 + x-1) + 3x^3 - 3x^3 + 3x \\ &= 2 \cdot 2x + 3x \\ &= 4x + 3x \\ &= 7x. \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} (2x+1)^2 + 2(4x^2-1) + (2x-1)^2 &= (2x+1)^2 + 2(2x^2+1)(2x^2-1) + (2x-1)^2 \\ &= [(2x^2+1) + (2x^2-1)]^2 \\ &= (2x^2+1+2x^2-1)^2 \\ &= (4x^2)^2 \\ &= 16x^4. \end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} (m+n)^2 - (m-n)^2 + (m-n)(m+n) &= [(m+n) - (m-n)] \cdot [(m+n) + (m-n)] + m^2 - n^2 \\ &= (m+n - m+n) \cdot (m+n + m-n) + m^2 - n^2 \\ &= 2n \cdot 2m + m^2 - n^2 \\ &= 4nm + m^2 - n^2 \\ &= m^2 + 4mn - n^2. \end{aligned}$$

$$\text{e) } (3x+1)^2 - 2(3x+1)(3x+5) + (3x+5)^2 = [(3x+1) - (3x+5)]^2 = (-4)^2 = 16.$$

f) Ta có

$$\begin{aligned} (a-b+c)^2 - 2(a-b+c)(c-b) + (b-c)^2 &= (a-b+c)^2 - 2(a-b+c)(c-b) + (c-b)^2 \\ &= [(a-b+c) - (c-b)]^2 \\ &= (a-b+c-c+b)^2 \\ &= a^2. \end{aligned}$$

g) Ta có

$$\begin{aligned} & (2x-5)(4x^2+10x+25)(2x+5)(4x^2-10x+25) - 64x^6 \\ &= [(2x)^3 - 5^3] \cdot [(2x)^3 + 5^3] - 64x^6 \\ &= (8x^3 - 125)(8x^3 + 125) - 64x^6 \\ &= (8x^3)^2 - 125^2 - 64x^6 \\ &= 64x^6 - 15625 - 64x^6 \\ &= -15625. \end{aligned}$$

$$\text{h) } (a+b)^3 + (a-b)^3 - 2a^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 2a^3 = 6ab^2.$$

i) Ta có

$$\begin{aligned} & (x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 - 3(x^2+y^2+z^2) \\ &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz+x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2-3x^2-3y^2-3z^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

🔗 **Bài 7.** Tìm x , biết

a) $(x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15.$

b) $4x^2 - 81 = 0.$

c) $x(x-5)(x+5) - (x-2)(x^2+2x+4) = 3.$

d) $25x^2 - 2 = 0.$

e) $(x+2)^2 = (2x-1)^2.$

f) $(x+2)^2 - x^2 + 4 = 0.$

g) $(x^2-2)^2 + 4(x-1)^2 - 4(x^2-2)(x-1) = 0.$

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} & (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15 \\ \Leftrightarrow & x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - (x^3 - 27) + 9(x^2 + 2x + 1) - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow & 45x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & 45x = 6 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{15} \right\}.$

b) Ta có

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 81 = 0 \\ \Leftrightarrow & (2x)^2 = 9^2 \\ \Leftrightarrow & 2x = 9 \quad \text{hoặc} \quad 2x = -9 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{9}{2} \quad \text{hoặc} \quad x = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ -\frac{9}{2}; \frac{9}{2} \right\}.$

c) Ta có

$$\begin{aligned} & x(x-5)(x+5) - (x-2)(x^2+2x+4) = 3 \\ \Leftrightarrow & x(x^2-25) - (x^3-8) = 3 \\ \Leftrightarrow & x^3 - 25x - x^3 + 8 = 3 \\ \Leftrightarrow & -25x = -5 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}.$



d) Ta có

$$\begin{aligned}25x^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow (5x)^2 = 2 \Leftrightarrow 5x = \sqrt{2} \quad \text{hoặc} \quad 5x = -\sqrt{2} \\&\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{5} \quad \text{hoặc} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{5}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{5}\right\}$.

e) Ta có

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (2x-1)^2 \Leftrightarrow x+2 = 2x-1 \quad \text{hoặc} \quad x+2 = -(2x-1) \\&\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{hoặc} \quad x+2 = -2x+1 \\&\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{hoặc} \quad x = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}$.

f) Ta có: $(x+2)^2 - x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$.
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-2\}$.

g) Ta có

$$\begin{aligned}&(x^2 - 2)^2 + 4(x-1)^2 - 4(x^2 - 2)(x-1) = 0 \\&\Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - 2 \cdot (x^2 - 2) \cdot 2(x-1) + [2(x-1)]^2 = 0 \\&\Leftrightarrow [(x^2 - 2) - 2(x-1)]^2 = 0 \\&\Leftrightarrow (x^2 - 2 - 2x + 2)^2 = 0 \\&\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \\&\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{hoặc} \quad x - 2 = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{hoặc} \quad x = 2.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0; 2\}$.

□

❖ Bài 8.

a) Cho $x - y = 7$. Tính giá trị của biểu thức

$$\begin{aligned}A &= x(x+2) + y(y-2) - 2xy; \\B &= x^3 - 3xy(x-y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2.\end{aligned}$$

b) Cho $x + 2y = 5$. Tính giá trị của biểu thức sau

$$C = x^2 + 4y^2 - 2x + 10 + 4xy - 4y.$$

💬 Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= x(x+2) + y(y-2) - 2xy \\
 &= x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2xy \\
 &= (x^2 - 2xy + y^2) + (2x - 2y) \\
 &= (x-y)^2 + 2(x-y) \\
 &= 7^2 + 2 \cdot 7 = 63.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= x^3 - 3xy(x-y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2 \\
 &= (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - (x^2 - 2xy + y^2) \\
 &= (x-y)^3 - (x-y)^2 \\
 &= 7^3 - 7^2 = 294.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } C &= (x^2 + 4xy + 4y^2) - 2(x+2y) + 10 \\
 &= (x+2y)^2 - 2(x+2y) - 10 \\
 &= 5^2 + 2 \cdot 5 - 10 = 25.
 \end{aligned}$$

❖ **Bài 9.** Tính tổng $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 S &= 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 \\
 &= (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \dots + (2^2 - 1^2) \\
 &= (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots + (2 - 1)(2 + 1) \\
 &= 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 \\
 &= (100 + 1) + (99 + 2) + (98 + 3) + \dots + (52 + 49) + (51 + 50) \\
 &= 101 + 101 + 101 \dots 101 + 101 \\
 &= 101 \cdot 50 = 5050.
 \end{aligned}$$

❖ **Bài 10.** Chứng minh đẳng thức

$$\text{a) } (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

$$\text{b) } (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\text{c) } (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$\text{d) } (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$\text{e) } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$\text{f) } (a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$$

💬 **Lời giải.**

$$\text{a) } (a+b)^2 - 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = a^2 + b^2.$$

$$\text{b) } (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab.$$

$$\text{c) } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

$$\text{d) } (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a + b)^2 + 2ac + 2bc + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a + b)^2 + (b^2 + 2bc + c^2) + (a^2 + 2ac + c^2) \\ &= (a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2. \end{aligned}$$

□

❖ Bài 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $x^2 - 2x + 1$

b) $x^2 + x + 1$

c) $4x^2 + 4x - 5$

d) $(x - 3)(x + 5) + 4$

e) $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$

💬 Lời giải.

a) Ta có $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0, \forall x$.

Dấu “=” xảy ra khi $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Vậy GTNN của $x^2 - 2x + 1$ là 0 tại $x = 1$.

b) Ta có $x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x$.

Dấu “=” xảy ra khi $x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy GTNN của $x^2 + x + 1$ là $\frac{3}{4}$ tại $x = -\frac{1}{2}$.

c) Ta có $4x^2 + 4x - 5 = (4x^2 + 4x + 1) - 6 = (2x + 1)^2 - 6 \geq -6, \forall x$.

Dấu “=” xảy ra khi $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy GTNN của $4x^2 + 4x - 5$ là -6 tại $x = -\frac{1}{2}$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} (x - 3)(x + 5) + 4 &= x^2 + 5x - 3x - 15 + 4 \\ &= (x^2 + 2x + 1) - 12 \\ &= (x + 1)^2 - 12 \geq -12, \forall x. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Vậy GTNN của $(x - 3)(x + 5) + 4$ là -12 tại $x = -1$.

e) Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6 &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) - 14 \\ &= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 14 \geq -14, \forall x, y. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 2 = 0$ và $y - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ và $y = 4$.

Vậy GTNN của $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$ là -14 tại $x = 2$ và $y = 4$.

□

🔗 **Bài 12.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a) $2x - x^2 - 4$

b) $-x^2 - 4x$

c) $-9x^2 + 24x - 18$

d) $4x - x^2 - 1$

e) $5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $2x - x^2 - 4 = -(x^2 - 2x + 1) - 3 = -(x - 1)^2 - 3 \leq -3, \forall x$.

Dấu “=” xảy ra khi $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Vậy GTLN của $2x - x^2 - 4$ là -3 tại $x = 1$.

b) Ta có $-x^2 - 4x = -(x^2 + 4x + 4) + 4 = -(x + 2)^2 + 4 \leq 4, \forall x$.

Dấu “=” xảy ra khi $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Vậy GTLN của $-x^2 - 4x$ là 4 tại $x = -2$.

c) Ta có $-9x^2 + 24x - 18 = -(9x^2 - 24x + 16) - 2 = -(3x - 4)^2 - 2 \leq -2, \forall x$.

Dấu “=” xảy ra khi $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$.

Vậy GTLN của $-9x^2 + 24x - 18$ là -2 tại $x = \frac{4}{3}$.

d) Ta có $4x - x^2 - 1 = -(x^2 - 4x + 4) + 3 = -(x - 2)^2 + 3 \leq 3, \forall x$.

Vậy GTLN của $4x - x^2 - 1$ là 3 tại $x = 2$.

e) Ta có

$$\begin{aligned} 5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y &= -(x^2 - 2x + 1) - (4y^2 + 4y + 1) + 7 \\ &= -(x - 1)^2 - (2y + 1)^2 + 7 \leq 7. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 1 = 0$ và $2y + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ và $y = -\frac{1}{2}$.

Vậy GTLN của $5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$ là 7 tại $x = 1, y = -\frac{1}{2}$.

□

Bài

6

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

A

VÍ DỤ

a) $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2 = 7xy(2x - 3y + 4xy)$

b) $5x^2(x - 2y) - 15x(2y - x) = 5x^2(x - 2y) + 15x(x - 2y) = 5x(x - 2y)(x + 3)$

**❖ Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $5x^2y^2 + 20x^2y - 35xy^2$;
- b) $40a^3b^3c^2x + 12a^3b^4c^2 - 16a^4b^5cx$;
- c) $2x^3y^4 - 6x^4y^3 + 4x^2y^2$;
- d) $(2x - 5y)^2 - 4(2x - 5y)$;
- e) $3x(x - 2y) + 6y(2y - x)$;
- f) $(b - 2c)(a - b) - (a + b)(2c - b)$;
- g) $6(a - b)x^2y + (a - b)^2xy$;
- h) $14(x - y)^2 + 21(y - x)$;
- i) $8(a - b)x^2 + 24(a - b)^2xy$;
- j) $2x^2(a + b + c) - 4xy(a + b + c)$;

💬 Lời giải.

- a) $5x^2y^2 + 20x^2y - 35xy^2 = xy(xy + 4x - 7y)$
- b) $40a^3b^3c^2x + 12a^3b^4c^2 - 16a^4b^5cx = 4a^3b^3c(10cx + 3bc - 4ab^2x)$
- c) $2x^3y^4 - 6x^4y^3 + 4x^2y^2 = 2x^2y^2(xy^2 - 3x^2y + 2)$
- d) $(2x - 5y)^2 - 4(2x - 5y) = (2x - 5y)(2x - 5y - 4)$
- e) $3x(x - 2y) + 6y(2y - x) = 3x(x - 2y) - 6y(x - 2y) = 3(x - 2y)(x - 2y) = 3(x - 2y)^2$
- f) $(b - 2c)(a - b) - (a + b)(2c - b) = (b - 2c)(a - b) + (a + b)(b - 2c) = (b - 2c)(a - b + a + b) = 2a(b - 2c)$
- g) $6(a - b)x^2y + (a - b)^2xy = (a - b)xy(6x + a - b)$
- h) $14(x - y)^2 + 21(y - x) = 7(x - y)(2x - 2y - 3)$
- i) $8(a - b)x^2 + 24(a - b)^2xy = 8x(a - b)(x + 3ay - 3by)$
- j) $2x^2(a + b + c) - 4xy(a + b + c) = 2x(a + b + c)(x - 2y)$

**❖ Bài 2.** Phân tích đa thức thành nhân tử.

- a) $6(a + b)^2x^2y + 3(a + b)xy - 18(a + b)xy^2$.
- b) $(x - y)^2 - (y - x)^3$.
- c) $(x - y)^4 + (y - x)^2$.
- d) $(3x - 2y)^4 + (2y - 3x)^5$.

 Lời giải.

- a) $6(a+b)^2x^2y + 3(a+b)xy - 18(a+b)xy^2 = 3xy(a+b)[2(a+b)x + 1 - 6y]$.
 b) $(x-y)^2 - (y-x)^3 = (x-y)^2(1+x-y)$.
 c) $(x-y)^4 + (y-x)^2 = (x-y)^2[(x-y)^2 + 1]$.
 d) $(3x-2y)^4 + (2y-3x)^5 = (3x-2y)^4(1-3x+2y)$.



 Bài 3. Tìm x biết

- a) $3x(x-2) - x + 2 = 0$.
 b) $x^2(x+1) + 2x(x+1) = 0$.
 c) $x^4(x-2) - 2 + x = 0$.
 d) $x(2x-3) - 2(3-2x) = 0$.
 e) $5(x+3) = 2x(3+x)$.
 f) $(x-2)(x^2+2x+5) + 2(x-2)(x+2) - 5(x-2) = 0$.

 Lời giải.

a) $3x(x-2) - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$.

b) $x^2(x+1) + 2x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$.

c)

$$\begin{aligned} & x^4(x-2) - 2 + x = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2)(x^4-1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2)(x^2-1)(x^2+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-2=0 \\ x^2-1=0 \\ x^2+1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=2 \\ x=\pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

d) $x(2x-3) - 2(3-2x) = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases}$.

e) $5(x+3) = 2x(3+x) \Leftrightarrow (x+3)(5-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -3 \end{cases}$.



f)

$$\begin{aligned}
& (x-2)(x^2+2x+5)+2(x-2)(x+2)-5(x-2)=0 \\
& \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+5+2x+4-5)=0 \\
& \Leftrightarrow (x-2)(x^2+4x+4)=0 \\
& \Leftrightarrow (x-2)(x+2)^2=0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Bài

7

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC

A VÍ DỤ

✧ Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

- a) $(x+y)^2 - 9x^2 = (x+y-3x)(x+y+3x) = (y-2x)(y+4x).$
b) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = (2x+y)^3.$

B BÀI TẬP

✧ Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử.

- a) $a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy.$
b) $100 - (3x - y)^2.$
c) $27x^3 - a^3b^3.$
d) $(a+b)^3 - (a-b)^3.$
e) $(7x-4)^2 - (2x+1)^2.$
f) $(x-y+4)^2 - (2x+3y-1)^2.$
g) $x^2 - 2xy + y^2 - 4.$
h) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2.$
i) $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2.$
j) $x^2 - 2xy + y^2 - m^2 + 2mn - n^2.$
k) $a^2 - 10a + 25 - y^2 - 4yz - 4z^2.$
l) $x^2 + 3cd(2-3cd) - 10xy - 1 + 25y^2.$
m) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2.$

n) $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$.

o) $[4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)]^2 - 4[cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)]^2$.

Lời giải.

a) $a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = (ay - bx)^2$.

b) $100 - (3x - y)^2 = 10^2 - (3x - y)^2 = (10 - 3x + y)(10 + 3x - y)$.

c) $27x^3 - a^3b^3 = (3x)^3 - (ab)^3 = (3x - ab)(9x^2 + 3xab + a^2b^2)$.

d) $(a + b)^3 - (a - b)^3 = (a + b - a + b)[(a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2] = 2b(3a^2 + b^2)$.

e) $(7x - 4)^2 - (2x + 1)^2 = (7x - 4 + 2x + 1)(7x - 4 - 2x - 1) = (9x - 3)(5x - 5)$.

f)

$$\begin{aligned} & (x - y + 4)^2 - (2x + 3y - 1)^2 \\ &= (x - y + 4 + 2x + 3y - 1)(x - y + 4 - 2x - 3y + 1) \\ &= (3x + 2y + 3)(-x - 4y + 5). \end{aligned}$$

g) $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x - y)^2 - 2^2 = (x - y + 2)(x - y - 2)$.

h) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2 = x^2 - (y + z)^2 = (x + y + z)(x - y - z)$.

i) $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2 = 3(a - b)^2 - 3(2c)^2 = 3(a - b + 2c)(a - b - 2c)$.

j) $x^2 - 2xy + y^2 - m^2 + 2mn - n^2 = (x - y)^2 - (m - n)^2 = (x - y + m - n)(x - y - m + n)$.

k) $a^2 - 10a + 25 - y^2 - 4yz - 4z^2 = (a - 5)^2 - (y + 2z)^2 = (a - 5 + y + 2z)(a - 5 - y - 2z)$.

l)

$$\begin{aligned} & x^2 + 3cd(2 - 3cd) - 10xy - 1 + 25y^2 \\ &= x^2 - 10xy + (5y)^2 - [(3cd)^2 - 6cd + 1] \\ &= (x - 5y)^2 - (3cd - 1)^2 \\ &= (x - 5y + 3cd - 1)(x - 5y - 3cd + 1). \end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned} & 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] \\ &= (a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b). \end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned} & (4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 \\ &= (4x^2 - 3x - 18 + 4x^2 + 3x)(4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x) \\ &= (-6x - 18)(8x^2 - 18). \end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
 & [4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)]^2 - 4[cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)]^2 \\
 = & [4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - 2(cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2))] \\
 & \cdot [4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + 2(cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2))] \\
 = & [(a^2 + b^2)(c - d)^2 - 2ab(c - d)^2] \cdot [(a^2 + b^2)(c + d)^2 + 2ab(c + d)^2] \\
 = & (a - b)^2(c - d)^2(a + b)^2(c + d)^2 \\
 = & [(a - b)(c - d)(a + b)(c + d)]^2.
 \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2.** Tìm x biết $(x^2 + 2)^2 - 6(x^2 + 2) + 9 = 0$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 & (x^2 + 2)^2 - 6(x^2 + 2) + 9 = 0 \\
 \Leftrightarrow & [(x^2 + 2) - 3]^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = \pm 1.
 \end{aligned}$$

□

Bài

8

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÓM HẠNG TỬ

A

VÍ DỤ

❖ **Ví dụ 1.** Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - 3x + xy - 3y$

b) $x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x$

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3x + xy - 3y &= (x^2 - 3x) + (xy - 3y) \\
 &= x(x - 3) + y(x - 3) \\
 &= (x - 3)(x + y)
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x &= x(x^3 - 9x^2 + x - 9) \\
 &= x[(x^3 - 9x^2) + (x - 9)] \\
 &= x[x^2(x - 9) + (x - 9)] \\
 &= x(x - 9)(x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

□

**❖ Bài 1.** Phân tích đa thức thành nhân tử:

- a) $xy + 4x + y + 4$.
- b) $xy + x + y + 1$.
- c) $xy - 5x + y - 5$.
- d) $xy + x - 4y - 4$.
- e) $xy - x - y + 1$.
- f) $2x - 2y + x(y - x)$.
- g) $-x - z(x - y) + y$.
- h) $xy + 3x + 5y + 15$.
- i) $2xy + 3z + 2x + 3yz$.
- j) $x^2 + 3x - y^2 + 3y$.
- k) $x^2 + 5x - y^2 + 5y$.
- l) $x^2 - x - y^2 + y$.

💬 Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
 xy + 4x + y + 4 &= (xy + 4x) + (y + 4) \\
 &= x(y + 4) + (y + 4) \\
 &= (x + 1)(y + 4).
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 xy + x + y + 1 &= (xy + x) + (y + 1) \\
 &= x(y + 1) + (y + 1) \\
 &= (x + 1)(y + 1).
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 xy - 5x + y - 5 &= (xy - 5x) + (y - 5) \\
 &= x(y - 5) + (y - 5) \\
 &= (x + 1)(y - 5).
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 xy + x - 4y - 4 &= (xy + x) - (4y + 4) \\
 &= x(y + 1) - 4(y + 1) \\
 &= (x - 4)(y + 1).
 \end{aligned}$$



e)

$$\begin{aligned}
 xy - x - y + 1 &= (xy - x) - (y - 1) \\
 &= x(y - 1) - (y - 1) \\
 &= (x - 1)(y - 1).
 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
 2x - 2y + x(y - x) &= (2x - 2y) + x(y - x) \\
 &= 2(x - y) - x(x - y) \\
 &= (2 - x)(x - y).
 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
 -x - z(x - y) + y &= (-x + y) - z(x - y) \\
 &= -(x - y) - z(x - y) \\
 &= (x - y)(-1 - z) \\
 &= -(x - y)(z + 1)
 \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
 xy + 3x + 5y + 15 &= (xy + 3x) + (5y + 15) \\
 &= x(y + 3) + 5(y + 3) \\
 &= (x + 5)(y + 3).
 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
 2xy + 3z + 2x + 3yz &= (2xy + 2x) + (3z + 3yz) \\
 &= 2x(y + 1) + 3z(y + 1) \\
 &= (2x + 3z)(y + 1).
 \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
 x^2 + 3x - y^2 + 3y &= (x^2 - y^2) + (3x + 3y) \\
 &= (x - y)(x + y) + 3(x + y) \\
 &= (x + y)(x - y + 3).
 \end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
 x^2 + 5x - y^2 + 5y &= (x^2 - y^2) + (5x + 5y) \\
 &= (x - y)(x + y) + 5(x + y) \\
 &= (x + y)(x - y + 5).
 \end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - y^2 + y &= (x^2 - y^2) - (x - y) \\
 &= (x - y)(x + y) - (x - y) \\
 &= (x - y)(x + y - 1).
 \end{aligned}$$



🔗 **Bài 2.** Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2(x + 2y) - x - 2y$.

b) $3x^2 - 3y^2 - 2(x - y)^2$.

c) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$.

d) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$.

e) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

f) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$.

g) $x^3 - 4x^2 + 12x - 27$.

h) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

i) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$.

j) $x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + 2xyz$.

k) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

l) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}x^2(x + 2y) - x - 2y &= x^2(x + 2y) - (x + 2y) \\&= (x^2 - 1)(x + 2y) \\&= (x - 1)(x + 1)(x + 2y).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}3x^2 - 3y^2 - 2(x - y)^2 &= (3x^2 - 3y^2) - 2(x - y)^2 \\&= 3(x - y)(x + y) - 2(x - y)^2 \\&= (x - y)[3(x + y) - 2(x - y)] \\&= (x - y)(x + 5y).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 4y^2 - 4y &= (x^2 - 4y^2) - (2x + 4y) \\&= (x - 2y)(x + 2y) - 2(x - 2y) \\&= (x - 2y)(x + 2y - 2).\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 - 9x + 36 &= (x^3 - 4x^2) - (9x - 36) \\&= x^2(x - 4) - 9(x - 4) \\&= (x - 4)(x^2 - 9) \\&= (x - 4)(x - 3)(x + 3).\end{aligned}$$



e)

$$\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 + 2x + 1 &= (x^3 + 1) + (2x^2 + 2x) \\
&= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1) \\
&= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x) \\
&= (x + 1)(x^2 + x + 1).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
x^4 + 2x^3 - 4x - 4 &= (x^4 - 4) + (2x^3 - 4x) \\
&= (x^2 - 2)(x^2 + 2) + 2x(x^2 - 2) \\
&= (x^2 - 2)(x^2 + 2 + 2x) \\
&= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2x + 2).
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
x^3 - 4x^2 + 12x - 27 &= (x^3 - 27) - (4x^2 - 12x) \\
&= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 4x(x - 3) \\
&= (x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 4x) \\
&= (x - 3)(x^2 - x + 9).
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
x^4 - 2x^3 + 2x - 1 &= (x^4 - 1) - (2x^3 - 2x) \\
&= (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1) \\
&= (x^2 - 1)(x^2 + 1 - 2x) \\
&= (x - 1)(x + 1)(x - 1)^2 \\
&= (x + 1)(x - 1)^3.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 &= a^2[a^4 - a^2 + 2a + 2] \\
&= a^2[(a^4 - a^2) + (2a + 2)] \\
&= a^2[a^2(a^2 - 1) + 2(a + 1)] \\
&= a^2[a^2(a - 1)(a + 1) + 2(a + 1)] \\
&= a^2(a + 1)[a^2(a - 1) + 2] \\
&= a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2).
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + 2xyz &= (x^2y + xy^2) + (x^2z + y^2z + 2xyz) \\
&= xy(x + y) + z(x^2 + y^2 + 2xy) \\
&= xy(x + y) + z(x + y)^2 \\
&= (x + y)[xy + z(x + y)] \\
&= (x + y)(xy + zx + zy).
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 &= (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) \\
&= x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + 1)(x^2 + x + 1).
\end{aligned}$$

1)

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 &= (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1) \\&= x^2(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) \\&= (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1) \\&= (x + 1)^2(x^2 + 1).\end{aligned}$$

□

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC (TÁCH HẠNG TỬ, THÊM BỚT, ĐẶT ẨN PHỤ)

Bài

9

A

VÍ DỤ

✧ Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 3x + 2$.

b) $x^4 + 4$.

c) $A = (x^2 + 10x + 5)(x^2 + 10x + 13) + 16$.

💬 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 2 &= x^2 - x - 2x + 2 \\&= x(x - 1) - 2(x - 1) \\&= (x - 1)(x - 2).\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\&= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\&= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x).\end{aligned}$$

c) Đặt $y = x^2 + 10x + 9$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}A &= (y - 4)(y + 4) + 16 \\&= y^2 - 16 + 16 \\&= y^2 \\&= (x^2 + 10x + 9)^2 \\&= (x^2 + x + 9x + 9)^2 \\&= [x(x + 1) + 9(x + 1)]^2 \\&= (x + 1)^2(x + 9)^2.\end{aligned}$$

□

B

BÀI TẬP

❖ **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^2 - 6x + 5$.

b) $x^2 - x - 12$.

c) $x^2 + 8x + 15$.

d) $2x^2 - 5x - 12$.

e) $x^2 - 13x + 36$.

f) $x^2 - 5x - 24$.

g) $3x^2 + 13x + 10$.

h) $2x^2 - 7x + 3$.

i) $3x^2 - 16x + 5$.

j) $x^4 - 7x^2 + 6$.

k) $x^4 + 2x^2 - 3$.

l) $4x^4 - 12x^2 - 16$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 5x - x + 5 = x(x - 5) - (x - 5) = (x - 5)(x - 1).$$

b) Ta có

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = x(x - 4) + 3(x - 4) = (x - 4)(x + 3).$$

c) Ta có

$$x^2 + 8x + 15 = x^2 + 3x + 5x + 15 = x(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x + 5).$$

d) Ta có

$$2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 - 8x + 3x - 12 = 2x(x - 4) + 3(x - 4) = (x - 4)(2x - 3).$$

e) Ta có

$$x^2 - 13x + 36 = x^2 - 4x - 9x + 36 = x(x - 4) - 9(x - 4) = (x - 4)(x - 9).$$

f) Ta có

$$x^2 - 5x - 24 = x^2 - 8x + 3x - 24 = x(x - 8) + 3(x - 8) = (x - 8)(x + 3).$$

g) Ta có

$$3x^2 + 13x + 10 = 3x^2 + 3x + 10x + 10 = 3x(x + 1) + 10(x + 1) = (x + 1)(3x + 10).$$

h) Ta có

$$2x^2 - 7x + 3 = 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(2x - 1).$$

i) Ta có

$$3x^2 - 16x + 5 = 3x^2 - 15x - x + 5 = 3x(x - 5) - (x - 5) = (x - 5)(3x - 1).$$

j) Ta có

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^2 + 6 &= x^4 - 6x^2 - x^2 + 6 \\ &= x^2(x^2 - 6) - (x^2 - 6) \\ &= (x^2 - 6)(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 6)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

k) Ta có

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^2 - 3 &= x^4 + 3x^2 - x^2 - 3 \\&= x^2(x^2 + 3) - (x^2 + 3) \\&= (x^2 + 3)(x^2 - 1) \\&= (x^2 + 3)(x - 1)(x + 1).\end{aligned}$$

l) Ta có

$$\begin{aligned}4x^4 - 12x^2 - 16 &= 4[x^4 - 3x^2 - 4] \\&= 4[x^4 - 4x^2 + x^2 - 4] \\&= 4[x^2(x^2 - 4) + (x^2 - 4)] \\&= 4(x^2 - 4)(x^2 + 1) \\&= 4(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1).\end{aligned}$$

□

🔗 **Bài 2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $4x^4 + 81$.

b) $x^4 + 1$.

c) $64x^4 + y^4$.

d) $x^5 + x^4 + 1$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}4x^4 + 81 &= 4x^4 + 81 + 36x^2 - 36x^2 \\&= (4x^4 + 36x^2 + 81) - 36x^2 \\&= [(2x)^2 + 9]^2 - (6x)^2 \\&= (2x^2 + 9 - 6x)(2x^2 + 9 + 6x).\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}x^4 + 1 &= (x^2)^2 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \\&= (x^2 + 1)^2 - \sqrt{2x}^2 \\&= (x^2 - \sqrt{2x} + 1)(x^2 + \sqrt{2x} + 1).\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}64x^4 + y^4 &= (8x^2)^2 + 16x^2y^2 + (y^2)^2 - 16x^2y^2 \\&= (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 \\&= (8x^2 - 4xy + y^2)(8x^2 + 4xy + y^2).\end{aligned}$$

d) Ta có

$$x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^2 - x^2 + 1$$



$$\begin{aligned}
&= x^2(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1) \\
&= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) \\
&= (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) + [(x^2 + 1)^2 - x^2] \\
&= (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^3 - 1 + x^2 - x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 - x).
\end{aligned}$$



❖ **Bài 3.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | |
|---|---|
| a) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15.$ | b) $(x^2 + x)^2 + 9x^2 + 9x + 14.$ |
| c) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 15.$ | d) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12.$ |
| e) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35.$ | f) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12.$ |
| g) $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16.$ | h) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24.$ |
| i) $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128.$ | j) $(x - 2)(x + 1)(x + 5)(x + 2) + 20.$ |

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
&(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15 \\
&= (x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) - 5(x^2 + x) - 15 \\
&= (x^2 + x)(x^2 + x + 3) - 5(x^2 + x + 3) \\
&= (x^2 + x + 3)(x^2 + x - 5).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&(x^2 + x)^2 + 9x^2 + 9x + 14 \\
&= (x^2 + x)^2 + 9(x^2 + x) + 14 \\
&= (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 7(x^2 + x) + 14 \\
&= (x^2 + x)(x^2 + x + 2) + 7(x^2 + x + 2) \\
&= (x^2 + x + 7)(x^2 + x + 2).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 15 \\
&= (x^2 + 2xy + y^2) + 2x + 2y - 15 \\
&= (x + y)^2 + 2(x + y) - 15 \\
&= (x + y)^2 - 3(x + y) + 5(x + y) - 15 \\
&= (x + y)(x + y - 3) + 5(x + y - 2) \\
&= (x + y - 3)(x + y + 5).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} & x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12 \\ = & (x^2 + 2xy + y^2) - (x + y) - 12 \\ = & (x + y)^2 + 3(x + y) - 4(x + y) - 12 \\ = & (x + y)(x + y + 3) - 4(x + y) \\ = & (x + y - 4)(x + y + 3). \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35 \\ = & (x^2 - 4xy + 4y^2) - 2(x - 2y) - 35 \\ = & (x - 2y)^2 + 5(x - 2y) - 7(x - 2y) - 35 \\ = & (x - 2y)(x - 2y + 5) - 7(x - 2y + 5) \\ = & (x - 2y - 7)(x - 2y + 5). \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} & (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 \\ = & (x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) - 10 \\ = & (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) + 5(x^2 + x) - 10 \\ = & (x^2 + x)(x^2 + x - 2) + 5(x^2 + x - 2) \\ = & (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2) \\ = & (x^2 + x + 5)(x^2 - x + 2x - 2) \\ = & (x^2 + x + 5)(x - 1)(x + 2). \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} & (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 \\ = & (x + 2)(x + 8)(x + 4)(x + 6) + 16 \\ = & (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 16 \\ = & (x^2 + 10x)^2 + 40(x^2 + 10x) + 400 \\ = & (x^2 + 10x)^2 + 20(x^2 + 10x) + 20(x^2 + 10x) + 400 \\ = & (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 20) + 20(x^2 + 10x + 20) \\ = & (x^2 + 10x + 20)^2. \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} & (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 \\ = & (x + 2)(x + 5)(x + 3)(x + 4) - 24 \\ = & (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24 \\ = & (x^2 + 7x)^2 + 22(x^2 + 7x) + 96 \\ = & (x^2 + 7x)^2 + 6(x^2 + 7x) + 16(x^2 + 7x) + 96 \\ = & (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6) + 16(x^2 + 7x + 6) \\ = & (x^2 + 7x + 16)(x^2 + 7x + 6) \\ = & (x^2 + 7x + 16)(x + 1)(x + 6). \end{aligned}$$



i)

$$\begin{aligned}
 & x(x+4)(x+6)(x+10) + 128 \\
 = & x(x+10)(x+4)(x+6) + 128 \\
 = & (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128 \\
 = & (x^2 + 10x)^2 + 24(x^2 + 10x) + 128 \\
 = & (x^2 + 10x)^2 + 8(x^2 + 10x) + 16(x^2 + 10x) + 128 \\
 = & (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 8) + 16(x^2 + 10x + 8) \\
 = & (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 8) \\
 = & (x+2)(x+8)(x^2 + 10x + 8).
 \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
 & (x-2)(x+1)(x+5)(x+2) + 20 \\
 = & (x-2)(x+5)(x+1)(x+2) + 20 \\
 = & (x^2 + 3x - 10)(x^2 + 3x + 3) + 20 \\
 = & (x^2 + 3x)^2 - 7(x^2 + 3x) - 10 \\
 = & (x^2 + 3x)^2 - 5(x^2 + 3x) - 2(x^2 + 3x) - 10 \\
 = & (x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 5) - 2(x^2 + 3x - 5) \\
 = & (x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x - 5).
 \end{aligned}$$



❖ Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^3 + 2x - 3$;

b) $x^3 - 7x + 6$;

c) $x^3 - 2x^2 + 5x - 4$;

d) $x^3 - x^2 + x + 3$;

e) $x^6 - 9x^3 + 8$;

f) $2x^3 - 35x + 75$;

g) $3x^3 - 4x^2 + 13x - 4$;

h) $4x^3 - 24x^2 + 45x - 27$;

i) $4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

💬 Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
 x^3 + 2x - 3 &= (x^3 - 1) + (2x - 2) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x - 1) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1 + 2) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 3).
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 x^3 - 7x + 6 &= (x^3 - x) - (6x - 6) \\
 &= x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x - 6) \\
 &= (x - 1)[(x^2 - 2x) + (3x - 6)] \\
 &= (x - 1)[x(x - 2) + 3(x - 2)] \\
 &= (x - 1)(x - 2)(x + 3).
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
x^3 - 2x^2 + 5x - 4 &= x^3 - 2x^2 + x + 4x - 4 \\
&= x(x^2 - 2x + 1) + 4(x - 1) \\
&= x(x - 1)^2 + 4(x - 1) \\
&= (x - 1)[x(x - 1) + 4] \\
&= (x - 1)(x^2 - x + 4).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 + x + 3 &= (x^3 + 1) - (x^2 - 1) + (x + 1) \\
&= (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x - 1) + (x + 1) \\
&= (x + 1)(x^2 - x + 1 - x + 1 + 1) \\
&= (x + 1)(x^2 - 2x + 3).
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
x^6 - 9x^3 + 8 &= x^6 - x^3 - 8(x^3 - 1) \\
&= x^3(x^3 - 1) - 8(x^3 - 1) \\
&= (x^3 - 1)(x^3 - 8) \\
&= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
2x^3 - 35x + 75 &= (2x^3 + 10x^2) - (10x^2 + 50x) + (15x + 75) \\
&= 2x^2(x + 5) - 10x(x + 5) + 15(x + 5) \\
&= (x + 5)(2x^2 - 10x + 15).
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
3x^3 - 4x^2 + 13x - 4 &= (3x^3 - x^2) - (3x^2 - x) + (12x - 4) \\
&= x^2(3x - 1) - x(3x - 1) + 4(3x - 1) \\
&= (3x - 1)(x^2 - x + 4)
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
4x^3 - 24x^2 + 45x - 27 &= (4x^3 - 12x^2) - (12x^2 - 36x) + (6x - 27) \\
&= 4x^2(x - 3) - 12x(x - 3) + 9(x - 3) \\
&= (x - 3)(4x^2 - 12x + 9) \\
&= (x - 3)(2x - 3)^2.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 &= (4x^3 + 2x^2) + (4x^2 + 2x) + (2x + 1) \\
&= 2x^2(2x + 1) + 2x(2x + 1) + (2x + 1) \\
&= (2x + 1)(2x^2 + 2x + 1).
\end{aligned}$$



🔗 **Bài 5.** Tìm x , biết

a) $3x^2 + 4x = 2x$;

b) $25x^2 - 0,64 = 0$;

c) $x^4 - 16x^2 = 0$;

d) $x^2 + x = 6$;

e) $x^2 - 7x = -12$;

f) $x^3 - x^2 = -x$;

g) $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x = 0$;

h) $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$;

i) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0$;

j) $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) + 16 = 0$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$3x^2 + 4x = 2x$$

$$3x^2 + 2x = 0$$

$$x(3x + 2) = 0$$

Suy ra

$$x = 0 \text{ hoặc } 3x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{-2}{3}.$$

$$\text{Vậy } x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{-2}{3}.$$

b) Ta có

$$25x^2 - 0,64 = 0$$

$$(5x - 0,8)(5x + 0,8) = 0$$

Suy ra

$$5x - 0,8 = 0 \text{ hoặc } 5x + 0,8 = 0$$

$$x = \frac{4}{25} \text{ hoặc } x = \frac{-4}{25}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{4}{25} \text{ hoặc } x = \frac{-4}{25}.$$

c) Ta có

$$x^4 - 16x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 16) = 0$$

$$x^2(x-4)(x+4) = 0$$

Suy ra $x = 0$ hoặc $x = 4$ hoặc $x = -4$.

d) Ta có

$$x^2 + x = 6$$

$$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$$

$$x(x+3) - 2(x+3) = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

Suy ra $x = -3$ hoặc $x = 2$.

e) Ta có

$$\begin{aligned}x^2 - 7x &= -12 \\x^2 - 4x - 3x + 12 &= 0 \\x(x - 4) - 3(x - 4) &= 0 \\(x - 4)(x - 3) &= 0\end{aligned}$$

Suy ra $x = 4$ hoặc $x = 3$.

f) Ta có

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 &= -x \\x(x^2 - x + 1) &= 0\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}x = 0 \quad \text{hoặc} \quad x^2 - x + 1 &= 0 \\x = 0 \quad \text{hoặc} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} &= 0 \text{ (vô lý)}\end{aligned}$$

Vậy $x = 0$.

g) Ta có

$$\begin{aligned}x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x &= 0 \\x^2(x^2 + 1) - 4x(x^2 + 1) &= 0 \\x(x^2 + 1)(x - 4) &= 0\end{aligned}$$

Suy ra

$$x = 0 \quad \text{hoặc} \quad x = 4 \text{ (Vì } x^2 + 1 > 0\text{)}.$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 4$.

h) Ta có

$$\begin{aligned}2x^3 + 5x^2 + x - 2 &= 0 \\2x^3 + 4x^2 + x^2 + 2x - x - 2 &= 0 \\2x^2(x + 2) + x(x + 2) - (x + 2) &= 0 \\(x + 2)(2x^2 + x - 1) &= 0\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}x + 2 = 0 \quad \text{hoặc} \quad 2x^2 + x - 1 &= 0 \\x = -2 \quad \text{hoặc} \quad (x + 1)(2x - 1) &= 0 \\x = -2 \quad \text{hoặc} \quad x = -1 \quad \text{hoặc} \quad x &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

i) Ta có

$$\begin{aligned}x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 &= 0 \\x^4 - 3x^2 + x^3 - 3x + x^2 - 3 &= 0 \\x^2(x^2 - 3) + x(x^2 - 3) + (x^2 - 3) &= 0 \\(x^2 - 3)(x^2 + x + 1) &= 0\end{aligned}$$



Suy ra

$$\begin{aligned}x^2 - 3 = 0 & \text{ hoặc } x^2 + x + 1 = 0 \\x = \pm\sqrt{3} & \text{ hoặc } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \text{ (vô lý)}\end{aligned}$$

Vậy $x = \pm\sqrt{3}$.

j) Ta có

$$\begin{aligned}(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) + 16 &= 0 \\(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) + 16 &= 0 \\(t-4)(t+4) + 16 &= 0, \text{ với } t = x^2 + 4x - 1 \\t^2 &= 0 \\t &= 0 \\x^2 + 4x - 1 &= 0 \\(x+2)^2 &= 5 \\x = \sqrt{5} - 2 & \text{ hoặc } x = -\sqrt{5} - 2\end{aligned}$$

Vậy $x = \sqrt{5} - 2$ hoặc $x = -\sqrt{5} - 2$.

□

Bài

10

CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

A

LÝ THUYẾT

Cho A và B là hai đa thức, B khác đa thức không. Ta nói đa thức A chia hết cho đa thức B nếu tìm một đa thức Q sao cho $A = B \cdot Q$.

- ☑ A là đa thức bị chia.
- ☑ B là đa thức chia.
- ☑ Q là đa thức thương (gọi tắt là thương).

Kí hiệu: $Q = A : B$ hoặc $Q = \frac{A}{B}$.

🔵 **Nhận xét.** Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A .

Quy tắc: Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau

- ☑ Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B .
- ☑ Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B .
- ☑ Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

❖ Ví dụ 1. Tính

a) $\frac{5x^3y^4}{10x^2y}$.

b) $\frac{3}{4}x^3y^3z : \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$.

💬 Lời giải.

a) $\frac{5x^3y^4}{10x^2y} = \frac{xy^3}{2}$.

b) $\frac{3}{4}x^3y^3z : \left(-\frac{1}{2}x^2y\right) = -\frac{3}{2}xy^2z$.

□

B BÀI TẬP

❖ Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $12x^3y^4z : (15xy^3)$.

b) $20x^5y^4 : (-5x^2y^3)$.

c) $-99x^4y^2z^2 : (-11x^2y^2z^2)$.

d) $\frac{(3a^2b)^3(-2ab^3)^2}{(a^2b^2)^4}$.

e) $\frac{(2xy^2)^3 \cdot (3x^2y)^2}{(-2x^3y^2)^2}$.

f) $(-2x^2y)^4 : (-3xy)^3$.

💬 Lời giải.

a) $12x^3y^4z : (15xy^3) = \frac{4x^2yz}{5}$.

b) $20x^5y^4 : (-5x^2y^3) = -4x^3y$.

c) $-99x^4y^2z^2 : (-11x^2y^2z^2) = 9x^2$.

d) $\frac{(3a^2b)^3(-2ab^3)^2}{(a^2b^2)^4} = 108b$.

e) $\frac{(2xy^2)^3 \cdot (3x^2y)^2}{(-2x^3y^2)^2} = 18xy^4$.

f) $(-2x^2y)^4 : (-3xy)^3 = -\frac{16x^5y}{27}$.

□

Bài

11

CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

A

LÝ THUYẾT

Quy tắc: Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B), ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

❖ Ví dụ 1. Tính $(20x^4y - 25x^2y^2 - 3x^2y) : (5x^2y)$.

💬 Lời giải.

$$(20x^4y - 25x^2y^2 - 3x^2y) : (5x^2y) = \frac{20x^4y}{5x^2y} + \frac{-25x^2y^2}{5x^2y} + \frac{-3x^2y}{5x^2y} = 4x^2 - 5y - \frac{3}{5}.$$

□

B BÀI TẬP

❖ Bài 1. Thực hiện phép tính

- a) $(21a^4b^2x^3 - 6a^2b^3x^5 + 9a^3b^4x^4) : (3a^2b^2x^2)$.
- b) $(81a^4x^4y^3 - 36x^5y^4 - 18ax^5y^5) : (-9x^3y^3)$.
- c) $(10x^3y^2 + 12x^4y^3 - 6x^5y^4) : \left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right)$.
- d) $\left(-\frac{10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xy^3z^4 - 5xyz^2\right) : \left(\frac{5}{3}xyz^2\right)$.
- e) $[(x+y)^4 - 3(x+y)^2 + x+y] : (x+y)$.

💬 Lời giải.

- a) $(21a^4b^2x^3 - 6a^2b^3x^5 + 9a^3b^4x^4) : (3a^2b^2x^2) = 7a^2x - 2bx^3 + 3ab^2x^2$.
- b) $(81a^4x^4y^3 - 36x^5y^4 - 18ax^5y^5) : (-9x^3y^3) = -9a^4x + 4x^2y + 2ax^2y^2$.
- c) $(10x^3y^2 + 12x^4y^3 - 6x^5y^4) : \left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right) = -20 - 24xy + 12x^2y^2$.
- d) $\left(-\frac{10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xy^3z^4 - 5xyz^2\right) : \left(\frac{5}{3}xyz^2\right) = -2xz + \frac{9}{2}y^2z^2 - 3$.
- e) $[(x+y)^4 - 3(x+y)^2 + x+y] : (x+y) = (x+y)^3 - 3(x+y) + 1$.

□

❖ Bài 2. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$K = \frac{2}{3}x^2y^3 : \left(-\frac{1}{3}xy\right) + 2x(y-1)(y+1) + 2(x-2) \quad (x, y \neq 0).$$

💬 Lời giải.

Với $x, y \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{3}x^2y^3 : \left(-\frac{1}{3}xy\right) + 2x(y-1)(y+1) + 2(x-2) \\ &= -2xy^2 + 2x(y^2 - 1) + 2x - 4 = -2xy^2 + 2xy^2 - 2x + 2x - 4 = -4. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức trên không phụ thuộc vào giá trị của biến.

□

⇒ **Bài 3.** Tìm tất cả các số tự nhiên $n > 1$ để đa thức A chia hết cho đơn thức B .

a) $A = 4x^{n+1}y^2; B = 3x^3y^{n-1}$.

b) $A = 7x^{n-1}y^5 - 5x^3y^4; B = 5x^2y^n$.

c) $A = x^4y^3 + 3x^3y^3 + x^2y^n; B = 4x^ny^2$.

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{4x^{n+1}y^2}{3x^3y^{n-1}}$.

Đa thức A chia hết cho đa thức $B \Leftrightarrow \begin{cases} n+1 \geq 3 \\ 2 \geq n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3 \end{cases}$.

b) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{7x^{n-1}y^5 - 5x^3y^4}{5x^2y^n} = \frac{7x^{n-1}y^5}{5x^2y^n} - \frac{5x^3y^4}{5x^2y^n}$.

Đa thức A chia hết cho đa thức $B \Leftrightarrow \begin{cases} n-1 \geq 2 \\ 5 \geq n \\ 4 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 4 \end{cases}$.

c) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{x^4y^3 + 3x^3y^3 + x^2y^n}{4x^ny^2} = \frac{x^4y^3}{4x^ny^2} + \frac{3x^3y^3}{4x^ny^2} + \frac{x^2y^n}{4x^ny^2}$.

Đa thức A chia hết cho đa thức $B \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq n \\ 3 \geq n \\ 2 \geq n \\ n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow n = 2$.

□

Bài 12 CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

A LÝ THUYẾT

Người ta chứng minh được rằng đối với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho:

$$A = B \cdot Q + R$$

trong đó, $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của Q (R được gọi là dư trong phép chia A cho B). Khi $R = 0$, phép chia A cho B là phép chia hết.

⇒ **Ví dụ 1.** Thực hiện phép chia:

a) $(2x^4 - 13x^3 + 15x^2 + 11x - 3) \div (x^2 - 4x - 3)$

b) $(5x^3 - 3x^2 + 7) \div (x^2 + 1)$.

🗨 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 & (2x^4 - 13x^3 + 15x^2 + 11x - 3) \div (x^2 - 4x - 3) \\
 = & (2x^4 - 8x^3 - 6x^2 - 5x^3 + 20x^2 + 15x + x^2 - 4x - 3) \div (x^2 - 4x - 3) \\
 = & (2x^2 - 5x + 1) \cdot (x^2 - 4x - 3) \div (x^2 - 4x - 3) \\
 = & 2x^2 - 5x + 1
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & (5x^3 - 3x^2 + 7) \div (x^2 + 1) \\
 = & (5x^3 + 5x - 3x^2 - 3 - 5x + 10) \div (x^2 + 1) \\
 = & [(5x - 3) \cdot (x^2 + 1) - 5x + 10] \div (x^2 + 1) \\
 = & 5x - 3 \quad (\text{dư } -5x + 10).
 \end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 2.** Thực hiện phép chia:

- a) Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .
- b) Chứng minh $n^5 - n$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên n .

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên $n^3 - n$ chia hết cho 2, 3 từ đó suy ra $n^3 - n$ chia hết cho 6.

b) Ta có $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$

☑ Do $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$ nên $n^5 - n$ luôn chia hết cho 6 (1).

☑ +) $n = 5k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Khi đó

$n : 5$ suy ra $n^5 - n : 5$.

+) $n = 5k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Khi đó

$n - 1 = 5k : 5$ suy ra $n^5 - n : 5$.

+) $n = 5k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$). Khi đó

$n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 : 5$ suy ra $n^5 - n : 5$.

+) $n = 5k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$). Khi đó

$n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 : 5$ suy ra $n^5 - n : 5$.

+) $n = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{Z}$). Khi đó

$n + 1 = 5k + 5 : 5$ suy ra $n^5 - n : 5$.

Suy ra với mọi số nguyên n thì $n^5 - n$ luôn chia hết cho 5 (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n^5 - n$ luôn chia hết cho 30.

□



BÀI TẬP

⇒ **Bài 1 (8D1BC).** Thực hiện phép chia

a) $(x^3 - x^2 + x + 3) \div (x + 1).$

b) $(x^3 - 6x^2 - 9x + 14) \div (x - 7).$

c) $(12x^4 + 4x^3 + 9x + 3) \div (3x - 2).$

d) $(3x^3 - 4x^2 + 13x - 4) \div (3x - 1).$

e) $(6x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 15x^3 + x^2 + 7x - 2) \div (3x^2 + x - 1).$

f) $(-6x^4 + 5x^3 + 17x^2 - 23x + 7) \div (-3x^2 - 2x + 7).$

g) $(x^4 - 2x^3 - x^2 + 1) \div (x^2 - 1).$

h) $(x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 1) \div (2x^2 - 5x + 2).$

💬 **Lời giải.**

a) $(x^3 - x^2 + x + 3) \div (x + 1)$

x^3	$-x^2$	$+x$	$+3$	$x + 1$
$-x^3$	$-x^2$			$x^2 - 2x + 3$
$-2x^2$				
	$+x$	$+3$		
	$2x^2$	$+2x$		
$3x$				
		$+3$		
	$-3x$	-3		
0				

b) $(x^3 - 6x^2 - 9x + 14) \div (x - 7)$

x^3	$-6x^2$	$-9x$	$+14$	$x - 7$
$-x^3$	$+7x^2$			$x^2 + x - 2$
x^2				
	$-9x$	$+14$		
	$-x^2$	$+7x$		
$-2x$				
		$+14$		
	$+2x$	-14		
0				

c) $(12x^4 + 4x^3 + 9x + 3) \div (3x - 2)$

$$\begin{array}{r|l}
12x^4 + 4x^3 & +9x + 3 \\
-12x^4 + 8x^3 & \\
\hline
12x^3 & +9x + 3 \\
-12x^3 + 8x^2 & \\
\hline
8x^2 + 9x + 3 & \\
-8x^2 + \frac{16}{3}x & \\
\hline
\frac{43}{3}x + 3 & \\
-\frac{43}{3}x + \frac{86}{9} & \\
\hline
\frac{113}{9} &
\end{array}$$

d) $(3x^3 - 4x^2 + 13x - 4) \div (3x - 1)$

$$\begin{array}{r|l}
3x^3 - 4x^2 + 13x - 4 & 3x - 1 \\
-3x^3 + x^2 & \\
\hline
-3x^2 + 13x - 4 & \\
3x^2 - x & \\
\hline
12x - 4 & \\
-12x + 4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

e) $(6x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 15x^3 + x^2 + 7x - 2) \div (3x^2 + x - 1)$

$$\begin{array}{r|l}
6x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 15x^3 + x^2 + 7x - 2 & 3x^2 + x - 1 \\
-6x^6 - 2x^5 + 2x^4 & \\
\hline
-15x^3 + x^2 + 7x - 2 & \\
+15x^3 + 5x^2 - 5x & \\
\hline
6x^2 + 2x - 2 & \\
-6x^2 - 2x + 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

f) $(-6x^4 + 5x^3 + 17x^2 - 23x + 7) \div (-3x^2 - 2x + 7)$

$-6x^4 + 5x^3 + 17x^2 - 23x + 7$	$-3x^2 - 2x + 7$
$+6x^4 + 4x^3 - 14x^2$	$2x^2 - 3x + 1$
$9x^3 + 3x^2 - 23x + 7$	
$-9x^3 - 6x^2 + 21x$	
$-3x^2 - 2x + 7$	
$+3x^2 + 2x - 7$	
0	

g) $(x^4 - 2x^3 - x^2 + 1) \div (x^2 - 1)$

$x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$	$x^2 - 1$
$-x^4 + x^2$	$x^2 - 2x$
$-2x^3 + 1$	
$+2x^3 - 2x$	
$-2x + 1$	

h) $(x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 1) \div (2x^2 - 5x + 2)$

$x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 1$	$2x^2 - 5x + 2$
$-x^5 + \frac{5}{2}x^4 - x^3$	$\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{11}{16}$
$\frac{5}{2}x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 1$	
$-\frac{5}{2}x^4 + \frac{25}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^2$	
$\frac{5}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 1$	
$-\frac{5}{4}x^3 + \frac{25}{8}x^2 - \frac{5}{4}x$	
$-\frac{11}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$	
$\frac{11}{8}x^2 - \frac{55}{16}x + \frac{11}{8}$	
$-\frac{75}{16}x + \frac{19}{8}$	

🔗 **Bài 2 (8D1BC).** Tính

a) $(4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4) \div (2x^2 + 3y^2)$.

c) $(27x^3 - 8y^6) \div (3x - 2y^2)$.

b) $(64a^2b^2 - 49m^4n^2) \div (8ab + 7m^2n)$.

d) $(27x^3 + 8y^6) \div (9x^2 - 6xy^2 + 4y^4)$.

💬 **Lời giải.**

a) $(4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4) \div (2x^2 + 3y^2) = (2x^2 + 3y^2)^2 \div (2x^2 + 3y^2) = 2x^2 + 3y^2$.

b) $(64a^2b^2 - 49m^4n^2) \div (8ab + 7m^2n) = (8ab - 7m^2n) \cdot (8ab + 7m^2n) \div (8ab + 7m^2n)$
 $= 8ab - 7m^2n$.

c) $(27x^3 - 8y^6) \div (3x - 2y^2) = (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4) \div (3x - 2y^2)$
 $= 9x^2 + 6xy^2 + 4y^4$.

d) $(27x^3 + 8y^6) \div (9x^2 - 6xy^2 + 4y^4) = (3x + 2y^2)(9x^2 - 6xy^2 + 4y^4) \div (9x^2 - 6xy^2 + 4y^4)$
 $= 3x + 2y^2$.

□

🔗 **Bài 3 (8D1BC).** Xác định số hữu tỉ a sao cho

a) Đa thức $4x^2 - 6x + a$ chia hết cho đa thức $x - 3$.

b) Đa thức $2x^2 + x + a$ chia hết cho đa thức $x + 3$.

c) Đa thức $3x^2 + ax - 4$ chia hết cho đa thức $x - a$.

💬 **Lời giải.**

a) $(4x^2 - 6x + a) \div (x - 3) = (4x + 6)$ dư $a + 18$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có

$$a + 18 = 0 \Leftrightarrow a = -18.$$

Vậy $a = -18$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) $(2x^2 + x + a) \div (x + 3) = (2x - 5)$ dư $a + 15$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có

$$a + 15 = 0 \Leftrightarrow a = -15.$$

Vậy $a = -15$ thỏa yêu cầu bài toán.

c) $(3x^2 + ax - 4) \div (x - a) = (3x + 4a)$ dư $4a^2 - 4$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có

$$4a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1. \end{cases}$$

Vậy $a = 1$ hoặc $a = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

⇒ **Bài 4 (8D1KC).** Xác định các hệ số a và b sao cho đa thức $x^4 + ax^3 + bx + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $(x^4 + ax^3 + bx + b) \div (x^2 - 1) = (x^2 + ax + 1)$ dư $(a + b)x + b + 1$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy $a = 1$ và $b = -1$ thỏa yêu cầu bài toán. □

⇒ **Bài 5 (8D1KC).** Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $2n^2 - n + 2$ chia hết cho $2n + 1$.

💬 **Lời giải.**

$$\frac{2n^2 - n + 2}{2n + 1} = \frac{2n^2 + n - 2n + 2}{2n + 1} = \frac{n(2n + 1) - 2n + 2}{2n + 1} = n - \frac{2n + 1 - 3}{2n + 1} = n - 1 + \frac{3}{2n + 1}.$$

Theo yêu cầu bài toán, ta có $3 \vdots (2n + 1)$ hay $2n + 1$ là ước của 3. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} 2n + 1 = 1 \\ 2n + 1 = -1 \\ 2n + 1 = 3 \\ 2n + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ (nhận)} \\ n = -1 \text{ (nhận)} \\ n = 1 \text{ (nhận)} \\ n = -2 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Chương 2

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Bài

1

BÀI 1,2,3,4. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Định nghĩa:

Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và B khác đa thức 0. A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).
Mỗi đa thức cũng được coi như một phân thức với mẫu thức bằng 1.

b) Hai phân thức bằng nhau:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } A \cdot D = B \cdot C.$$

c) Tính chất:

☑ $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}$ (M là đa thức khác 0).

☑ $\frac{A}{B} = \frac{A \div N}{B \div N}$ (N là nhân tử chung của A và B).

d) Rút gọn phân thức:

- ☑ Tìm điều kiện để phân thức có nghĩa.
- ☑ Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.
- ☑ Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

e) Qui đồng mẫu thức:

- ☑ Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung.
- ☑ Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức.
- ☑ Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

B BÀI TẬP

🔗 Bài 1. Rút gọn phân thức

$$\text{a)} \quad \frac{9 - (x + 5)^2}{x^2 + 4x + 4}.$$

$$\text{f)} \quad \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}.$$

$$\text{b)} \quad \frac{3x^3 - 2x^2 + 4x - 5}{6x^2 + 3x - 9}.$$

$$\text{g)} \quad \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^2 - 3x - 2}.$$

$$\text{c)} \quad \frac{x^8 - 1}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}.$$

$$\text{h)} \quad \frac{a^2x^2y^2 - y^2 - a^2x^2 + 1}{a^2x^2y^2 - y^2 + a^2x^2y - y}.$$

$$\text{d)} \quad \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2(x - 3)^2 + 4x(x - 3)^2 + 4(x - 3)^2}.$$

$$\text{i)} \quad \frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz}.$$

$$\text{e)} \quad \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - x - 6}.$$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{9 - (x + 5)^2}{x^2 + 4x + 4} &= \frac{3^2 - (x + 5)^2}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{(3 - x - 5)(3 + x + 5)}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{(-x - 2)(x + 8)}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{-(x + 8)}{x + 2}. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 - 2x^2 + 4x - 5}{6x^2 + 3x - 9} &= \frac{3x^3 - 3x^2 + x^2 - x + 5x - 5}{6x^2 - 6x + 9x - 9} \\ &= \frac{3x^2(x - 1) + x(x - 1) + 5(x - 1)}{6x(x - 1) + 9(x - 1)} \\ &= \frac{(x - 1)(3x^2 + x + 5)}{(x - 1)(6x + 9)} \\ &= \frac{3x^2 + x + 5}{6x + 9}. \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^8 - 1}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} &= \frac{(x^4)^2 - 1}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} \\ &= \frac{(x^4 - 1)(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} \\ &= \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{(x^2)^2 - 1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} \\ &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2(x-3)^2 + 4x(x-3)^2 + 4(x-3)^2} &= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 2x - 6}{x^2(x-3)^2 + 4x(x-3)^2 + 4(x-3)^2} \\
 &= \frac{x^2(x-3) + 3x(x-3) + 2(x-3)}{(x-3)^2(x^2 + 4x + 4)} \\
 &= \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 2)}{(x-3)^2(x+2)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)(x+2)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x + x + 2}{(x-3)(x+2)^2} \\
 &= \frac{x(x+2) + x + 2}{(x-3)(x+2)^2} \\
 &= \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+2)^2} \\
 &= \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}.
 \end{aligned}$$

e) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - x - 6} &= \frac{(2x+3)^2}{2x^2 - 4x + 3x - 6} \\
 &= \frac{(2x+3)^2}{2x(x-2) + 3(x-2)} \\
 &= \frac{(2x+3)^2}{(x-2)(2x+3)} \\
 &= \frac{2x+3}{x-2}.
 \end{aligned}$$

f) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9} &= \frac{x^4 - x^2 - 4x^2 + 4}{x^4 - x^2 - 9x^2 + 9} \\
 &= \frac{x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)}{x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)} \\
 &= \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x^2 - 1)(x^2 - 9)} \\
 &= \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}.
 \end{aligned}$$

g) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^2 - 3x - 2} &= \frac{2x^2 + x + 4x + 2}{2x^2 + x - 4x - 2} \\
 &= \frac{x(2x+1) + 2(2x+1)}{x(2x+1) - 2(2x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1)(x+2)}{(2x+1)(x-2)} \\
 &= \frac{x+2}{x-2}.
 \end{aligned}$$

h) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^2x^2y^2 - y^2 - a^2x^2 + 1}{a^2x^2y^2 - y^2 + a^2x^2y - y} &= \frac{y^2(a^2x^2 - 1) - (a^2x^2 - 1)}{y^2(a^2x^2 - 1) + y(a^2x^2 - 1)} \\ &= \frac{(a^2x^2 - 1)(y^2 - 1)}{(a^2x^2 - 1)(y^2 + y)} \\ &= \frac{(y - 1)(y + 1)}{y(y + 1)} \\ &= \frac{y - 1}{y}.\end{aligned}$$

i) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz} &= \frac{z^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{x^2 + z^2 + 2xz - y^2} \\ &= \frac{z^2 - (x - y)^2}{(x + z)^2 - y^2} \\ &= \frac{(z - x + y)(z + x - y)}{(x + z - y)(x + z + y)} \\ &= \frac{z - x + y}{x + z + y}.\end{aligned}$$

□

❖ Bài 2. Chứng minh đẳng thức

a) $\frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a + 1}{a - 2}.$

b) $\frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3} = \frac{1}{x - y}.$

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} &= \frac{a^3 - a^2 - 3a^2 + 3a - 4a + 4}{a^3 - a^2 - 6a^2 + 6a + 8a - 8} \\ &= \frac{a^2(a - 1) - 3a(a - 1) - 4(a - 1)}{a^2(a - 1) - 6a(a - 1) + 8(a - 1)} \\ &= \frac{(a - 1)(a^2 - 3a - 4)}{(a - 1)(a^2 - 6a + 8)} \\ &= \frac{a^2 - 3a - 4}{a^2 - 6a + 8} \\ &= \frac{a^2 - 4a + a - 4}{a^2 - 4a - 2a + 8} \\ &= \frac{a(a - 4) + a - 4}{a(a - 4) - 2(a - 4)} \\ &= \frac{(a - 4)(a + 1)}{(a - 4)(a - 2)} \\ &= \frac{a + 1}{a - 2}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3} &= \frac{x^2 + xy + 2xy + 2y^2}{x^3 - xy^2 + 2x^2y - 2y^3} \\&= \frac{x(x+y) + 2y(x+y)}{x(x^2 - y^2) + 2y(x^2 - y^2)} \\&= \frac{(x+y)(x+2y)}{(x^2 - y^2)(x+2y)} \\&= \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} \\&= \frac{1}{x-y}.\end{aligned}$$

□

❖ **Bài 3.** Quy đồng mẫu các phân thức

a) $\frac{2}{36a^2b^2 - 1}, \frac{1}{6ab + 1}, \frac{1}{6ab - 1}$

c) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}, \frac{3x + 3}{x^2 - 2x + 1}, \frac{2x}{x^2 + 2x + 1}$

b) $\frac{x}{x^3 - 27}, \frac{2x}{x - 3}, \frac{1}{x^2 + 3x + 9}$

💬 **Lời giải.**

a) $\frac{2}{36a^2b^2 - 1}, \frac{1}{6ab + 1}, \frac{1}{6ab - 1}$

Ta có mẫu số chung là $36a^2b^2 - 1 = (6ab - 1)(6ab + 1)$.

$$\frac{1}{6ab + 1} = \frac{1 \cdot (6ab - 1)}{(6ab + 1)(6ab - 1)} = \frac{6ab - 1}{36a^2b^2 - 1}$$

$$\frac{1}{6ab - 1} = \frac{1 \cdot (6ab + 1)}{(6ab + 1)(6ab - 1)} = \frac{6ab + 1}{36a^2b^2 - 1}$$

b) $\frac{x}{x^3 - 27}, \frac{2x}{x - 3}, \frac{1}{x^2 + 3x + 9}$

Ta có mẫu số chung là $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

$$\frac{2x}{x - 3} = \frac{2x(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{2x^3 + 6x^2 + 18x}{x^3 - 27}$$

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{1 \cdot (x - 3)}{(x^2 + 3x + 9)(x - 3)} = \frac{x - 3}{x^3 - 27}$$

□

BÀI 5, 6, 7, 8. PHÉP CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Bài

2

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- a) Phép cộng phân thức: Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức. Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức. vừa tìm được.

Tính chất

- ☑ Giao hoán $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$
- ☑ Kết hợp $\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right)$

b) Phép trừ phân thức:

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$$

c) Phép nhân phân thức:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

- ☑ Giao hoán $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$
- ☑ Kết hợp $\left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}\right)$
- ☑ Phân phối đối với phép cộng $\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$

d) Phép chia phân thức:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \left(\frac{C}{D} \neq 0\right).$$

B BÀI TẬP

🔗 **Bài 1.** Thực hiện phép tính

- a) $\frac{x^3}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$
- b) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(1-x)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)};$
- c) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)};$
- d) $\frac{2x}{x^2+2xy} - \frac{y}{2y^2-xy} + \frac{4}{x^2-4y^2};$
- e) $\frac{2x+1}{2x^2-x} + \frac{32x^2}{1-4x^2} + \frac{1-2x}{2x^2+x};$
- f) $\left(\frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y}\right) \cdot \frac{y-x}{x^2+y^2};$
- g) $\frac{ab+a^2}{b^2-5b+5a-a^2} \cdot \frac{a^2-10a+25-b^2}{a^2-b^2};$
- h) $\left(\frac{x}{x^2-25} - \frac{x-5}{x^2+5x}\right) : \frac{2x-5}{x^2+5x} + \frac{x}{5-x};$
- i) $\frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{5x-8}{x+1945} - \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{4x-3}{x+1945};$

$$\begin{aligned}
 \text{j)} & \frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6}; \\
 \text{k)} & \frac{1}{a-b} + \frac{3ab}{a^3 - b^3} + \frac{a-b}{a^2 + ab + b^2}; \\
 \text{l)} & \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}; \\
 \text{m)} & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}; \\
 \text{n)} & \frac{2}{x^2 + 2x} + \frac{2}{x^2 + 6x + 8} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} + \frac{2}{x^2 + 14x + 48}; \\
 \text{o)} & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}; \\
 \text{p)} & x : \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 1)}{2x^2 + 2x} \cdot \frac{-4x}{(x-1)^2} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{x^3}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= \frac{x^3(x-1) + x^2(x+1) + (x-1) + (x+1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x^4 - x^3 + x^3 + x^2 + x - 1 + x + 1}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x^4 + x^2 + 2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(x^3 + x + 2)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x(x^3 + 1 + x + 1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x[(x+1)(x^2 - x + 1) + (x+1)]}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x(x+1)(x^2 - x + 2)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x(x^2 - x + 2)}{x-1}.
 \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(1-x)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} \\
 &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \\
 &= \frac{1}{x-3}.
 \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)} \\
 = & \frac{1}{(1-x)(2-x)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)} \\
 = & \frac{1}{(1-x)(2-x)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)} \\
 = & \frac{3-x+2 \cdot (1-x)+3 \cdot (2-x)}{(1-x)(2-x)(3-x)} \\
 = & \frac{11-6x}{(1-x)(2-x)(3-x)}.
 \end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{2x}{x^2 + 2xy} - \frac{y}{2y^2 - xy} + \frac{4}{x^2 - 4y^2} &= \frac{2x}{x(x+2y)} + \frac{y}{y(x-2y)} + \frac{4}{(x-2y)(x+2y)} \\
 &= \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{x-2y} + \frac{4}{(x-2y)(x+2y)} \\
 &= \frac{2(x-2y) + (x+2y) + 4}{(x+2y)(x-2y)} \\
 &= \frac{3x-2y+4}{(x+2y)(x-2y)}.
 \end{aligned}$$

e) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{2x+1}{2x^2-x} + \frac{32x^2}{1-4x^2} + \frac{1-2x}{2x^2+x} &= \frac{2x+1}{x(2x-1)} - \frac{32x^2}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{1-2x}{x(2x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1)^2 - 32x^3 - (2x-1)^2}{x(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{8x - 32x^3}{x(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{-8x(4x^2-1)}{x(2x-1)(2x+1)} = -8.
 \end{aligned}$$

f) Ta có

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y} \right) \cdot \frac{y-x}{x^2+y^2} &= \frac{(x+y)(x-y) - 2x^2}{x(x-y)} \cdot \frac{y-x}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{x^2 - y^2 - 2x^2}{x(x-y)} \cdot \frac{-(x-y)}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{-(x^2+y^2)}{x(x-y)} \cdot \frac{-(x-y)}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

g) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{ab + a^2}{b^2 - 5b + 5a - a^2} \cdot \frac{a^2 - 10a + 25 - b^2}{a^2 - b^2} \\
 = & \frac{a(b + a)}{(b - a)(b + a) - 5(b - a)} \cdot \frac{(a - 5)^2 - b^2}{(a - b)(a + b)} \\
 = & \frac{a}{(b - a)(b + a - 5)} \cdot \frac{(a - 5 + b)(a - 5 - b)}{a - b} \\
 = & \frac{-a(a - b - 5)}{(a - b)^2} = \frac{a(b - a + 5)}{(a - b)^2}.
 \end{aligned}$$

h) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{x}{x^2 - 25} - \frac{x - 5}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{x^2 + 5x} + \frac{x}{5 - x} \\
 = & \left(\frac{x}{(x - 5)(x + 5)} - \frac{x - 5}{x(x + 5)} \right) : \frac{2x - 5}{x(x + 5)} - \frac{x}{x - 5} \\
 = & \frac{x^2 - (x - 5)^2}{x(x - 5)(x + 5)} \cdot \frac{x(x + 5)}{2x - 5} - \frac{x}{x - 5} \\
 = & \frac{5(2x - 5)}{x(x - 5)(x + 5)} \cdot \frac{x(x + 5)}{2x - 5} - \frac{x}{x - 5} \\
 = & \frac{5}{x - 5} - \frac{x}{x - 5} \\
 = & \frac{5 - x}{x - 5} = -1.
 \end{aligned}$$

i) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x + 9}{x - 5} \cdot \frac{5x - 8}{x + 1945} - \frac{2x + 9}{x - 5} \cdot \frac{4x - 3}{x + 1945} \\
 = & \frac{2x + 9}{(x - 5)(x + 1945)} \cdot [(5x - 8) - (4x - 3)] \\
 = & \frac{2x + 9}{(x - 5)(x + 1945)} \cdot (x - 5) \\
 = & \frac{2x + 9}{x + 1945}.
 \end{aligned}$$

j) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \\
 = & \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{2x}{x(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\
 = & \frac{1}{x+2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) \\
 = & \frac{1}{x+2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} \right) \\
 = & \frac{1}{x+2} \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} \right) \\
 = & \frac{1}{(x+2)^2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) \\
 = & \frac{1}{(x+2)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)(x+3)} \\
 = & \frac{2}{(x+1)(x+2)^2(x+3)}.
 \end{aligned}$$

k) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a-b} + \frac{3ab}{a^3-b^3} + \frac{a-b}{a^2+ab+b^2} &= \frac{1}{a-b} + \frac{3ab}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} + \frac{a-b}{a^2+ab+b^2} \\
 &= \frac{a^2+ab+b^2+3ab+(a-b)^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \\
 &= \frac{2a^2+2ab+2b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \\
 &= \frac{2(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \\
 &= \frac{2}{a-b}.
 \end{aligned}$$

l) Đặt $a-b=x$; $b-c=y$; $c-a=z$. Suy ra $x+y+z=0$. Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \\
 = & - \left(\frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} \right) \\
 = & - \frac{y+z+x}{xyz} = 0.
 \end{aligned}$$

m) Ta có

$$\begin{aligned}
 \textcircled{v} \quad & \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}. \\
 \textcircled{v} \quad & \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}. \\
 \textcircled{v} \quad & \frac{1}{(x+9)(x+10)} = \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10}.
 \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \\ &= \frac{10}{x(x+10)}. \end{aligned}$$

n) Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{2}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+6x+8} + \frac{2}{x^2+10x+24} + \frac{2}{x^2+14x+48} \\ &= \frac{\frac{2}{2}}{x(x+2)} + \frac{\frac{2}{2}}{(x+2)(x+4)} + \frac{\frac{2}{2}}{(x+4)(x+6)} + \frac{\frac{2}{2}}{(x+6)(x+8)}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \textcircled{✓} \quad \frac{2}{x(x+2)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}. \\ \textcircled{✓} \quad \frac{2}{(x+2)(x+4)} &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}. \\ \textcircled{✓} \quad \frac{2}{(x+4)(x+6)} &= \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6}. \\ \textcircled{✓} \quad \frac{2}{(x+6)(x+8)} &= \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8}. \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+6x+8} + \frac{2}{x^2+10x+24} + \frac{2}{x^2+14x+48} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \\ &= \frac{8}{x(x+8)}. \end{aligned}$$

o) Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}} \\ &= \frac{\frac{2}{2}}{1-x^2} + \frac{\frac{2}{2}}{1+x^2} + \frac{\frac{4}{4}}{1+x^4} + \frac{\frac{8}{8}}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}} \\ &= \frac{\frac{4}{4}}{1-x^4} + \frac{\frac{4}{4}}{1+x^4} + \frac{\frac{8}{8}}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}} \\ &= \frac{\frac{8}{8}}{1-x^8} + \frac{\frac{8}{8}}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}} \\ &= \frac{16}{1-x^{16}} - \frac{16}{1-x^{16}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

p) Ta có

$$\begin{aligned}
 x &: \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{2x^2+2x} \cdot \frac{-4x}{(x-1)^2} - \frac{4x^2}{x^2-1} \\
 &= \frac{2x}{x-1} - \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{2x(x+1)} \cdot \frac{-4x}{(x-1)^2} - \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{2x}{x-1} + \frac{2(x^2+4x+1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{2x}{x-1} + \frac{2(x^2+4x+1) - 4x^2}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{2x}{x-1} + \frac{-2x^2+8x+2}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{-2x^2+8x+2}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{10x+2}{(x+1)(x-1)}.
 \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2.** Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các đẳng thức đều có nghĩa)

a) $\frac{4x^2 - (x-3)^2}{9(x^2-1)} - \frac{x^2-9}{(2x+3)^2-x^2} + \frac{(2x-3)^2-x^2}{4x^2-(x+3)^2} = 1;$

b) $\frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}.$

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 &\frac{4x^2 - (x-3)^2}{9(x^2-1)} - \frac{x^2-9}{(2x+3)^2-x^2} + \frac{(2x-3)^2-x^2}{4x^2-(x+3)^2} \\
 &= \frac{(2x-x+3)(2x+x-3)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{(2x+3-x)(2x+3+x)} + \frac{(2x-3-x)(2x-3+x)}{(2x-x-3)(2x+x+3)} \\
 &= \frac{(x+3)(3x-3)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(3x+3)} + \frac{(x-3)(3x-3)}{(x-3)(3x+3)} \\
 &= \frac{3(x+3)(x-1)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{3(x+3)(x+1)} + \frac{3(x-3)(x-1)}{3(x-3)(x+1)} \\
 &= \frac{x+3}{3(x+1)} - \frac{x-3}{3(x+1)} + \frac{3(x-1)}{3(x+1)} \\
 &= \frac{x+3-(x-3)+3(x-1)}{3(x+1)} \\
 &= \frac{3x+3}{3(x+1)} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x} \\
 = & \frac{(x-z) - (x-y)}{(x-y)(x-z)} + \frac{(y-x) - (y-z)}{(y-z)(y-x)} + \frac{(z-y) - (z-x)}{(z-x)(z-y)} \\
 = & \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z} + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y} \\
 = & \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z} \\
 = & \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}.
 \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 3.** Xác định a, b, c để có hằng đẳng thức đúng:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{5x+31}{(x-5)(x+2)} = \frac{a}{x-5} - \frac{b}{x+2}; & \text{b)} \quad & \frac{3x+5}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}; \\
 \text{c)} \quad & \frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.
 \end{aligned}$$

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \text{Ta có } \frac{5x+31}{(x-5)(x+2)} = \frac{8(x+2) - 3(x-5)}{(x-5)(x+2)} = \frac{8}{x-5} - \frac{3}{x+2} = \frac{a}{x-5} - \frac{b}{x+2}. \\
 & \text{Suy ra } a = 8, b = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \text{Ta có } \frac{3x+5}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1) + 8}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}. \\
 & \text{Suy ra } a = 3, b = 8.
 \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x} &= \frac{2x^2-6x+4+7x^2-10x}{x^3-3x^2+2x} \\
 &= \frac{2(x^2-3x+2)}{x(x^2-3x+2)} + \frac{x(7x-10)}{x(x^2-3x+2)} \\
 &= \frac{2}{x} + \frac{7x-10}{x^2-3x+2} \\
 &= \frac{2}{x} + \frac{4(x-1)+3(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\
 &= \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2} \\
 &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.
 \end{aligned}$$

Vậy $a = 2, b = 3, c = 4$.

□

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ - GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A

Lý thuyết

1. Biểu thức hữu tỉ

Định nghĩa 3.1. Biểu thức là một phân thức hoặc biểu thị một dãy các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức được gọi là biểu thức hữu tỉ.

✎ **Ví dụ 1.** Biểu thức $\frac{\frac{2x}{x-1} + 2}{\frac{3}{x^2-1}}$ biểu thị phép chia tổng $\frac{2x}{x-1} + 2$ cho $\frac{3}{x^2-1}$.

2. Biến đổi biểu thức hữu tỉ thành một phân thức

- ☑ Nhờ các quy tắc của phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

3. Giá trị của phân thức

- ☑ Khi làm những bài toán liên quan đến giá trị của phân thức thì ta phải tìm điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0 (nói cách khác là điều kiện để giá trị của phân thức được xác định).
- ☑ Nếu tại giá trị của biến mà giá trị của một phân thức được xác định thì phân thức ấy và phân thức rút gọn của nó có cùng một giá trị.

✎ **Bài 1.** Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức đại số

a) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$

b) $\frac{1 + \frac{2}{x-1}}{1 + \frac{2x}{x^2+1}}$

c) $\frac{\frac{x^2-y^2}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$

💬 **Lời giải.**

a) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x} : \frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$

b)

$$\begin{aligned}\frac{1 + \frac{2}{x-1}}{1 + \frac{2x}{x^2+1}} &= \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) : \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} \\ &= \frac{x+1}{x-1} : \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \\ &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}.\end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{x^2-y^2}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{x^2-y^2}{x} : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{x^2-y^2}{x} : \frac{y-x}{xy} = \frac{(x-y)(x+y)}{x} \cdot \frac{xy}{-(x-y)} = -\frac{(x+y)y}{x-y}.$$

□

✧ **Bài 2.** Tìm các giá trị của x để giá trị của các phân thức sau được xác định

a) $\frac{3x+2}{x^2-6x}.$

b) $\frac{2x-1}{x^2-3}.$

💬 **Lời giải.**

a) Phân thức xác định khi $x^2 - 6x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-6) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ và $x \neq 6$.

b) Phân thức xác định khi $x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$.

□

✧ **Bài 3.** Cho phân thức $M = \left[\frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}.$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức xác định. Rút gọn M .

b) Tìm giá trị của x để $|M| = 1$.

💬 **Lời giải.**

a) Biểu thức M xác định khi $x \neq 0$ và $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} M &= \left[\frac{(x-1)^2}{3x + (x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x} \\ &= \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{(x+1)^3 - (1-2x^2+4x) + (x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} : \frac{x+1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^3-3x^2+3x-1-1+2x^2-4x+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+1}{x+1} \\ &= \frac{x^3-1}{x^3-1} \cdot \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} |M| &= 1 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{x^2+1}{x+1} \right| &= 1 \\ \Leftrightarrow |x^2+1| &= |x+1| \\ \Leftrightarrow x^2+1 &= x+1 \text{ hoặc } x^2+1 = -x-1 \\ \Leftrightarrow x^2-x &= 0 \text{ hoặc } x^2+x+2 = 0. \end{aligned}$$

☑ $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=1$ (không thỏa ĐKXD).

☑ $x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$ (vô lý).

Vậy không có giá trị x nào để $|M|=1$.

□

🔗 **Bài 4.** Cho phân thức $K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2003}{x}$

a) Tìm điều kiện xác định của K và rút gọn K .

b) Tính giá trị của K khi $x=2$.

c) Tìm các giá trị x nguyên để K có giá trị nguyên.

💬 **Lời giải.**

a) Biểu thức K xác định khi $x \neq 0$ và $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2003}{x} \\ &= \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + (x^2-4x-1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+2003}{x} \\ &= \frac{(x^2+2x+1) - (x^2-2x+1) + (x^2-4x-1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+2003}{x} \\ &= \frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1+x^2-4x-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+2003}{x} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2-1} \cdot \frac{x+2003}{x} = \frac{x+2003}{x}. \end{aligned}$$

b) Thay $x = 2$ vào biểu thức K , ta có

$$K = \frac{2 + 2003}{2} = \frac{2005}{2}.$$

c) $K = \frac{x + 2003}{x} = 1 + \frac{2003}{x}.$

K nhận giá trị nguyên khi x là ước nguyên của 2003.

Vậy $x \in \{\pm 1; \pm 2003\}.$

□

✧ **Bài 5.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $A < 0$.

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right) \\ &= \frac{x - 2(x + 2) + (x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{(x^2 - 4) + (10 - x^2)}{x + 2} \\ &= \frac{x - 2x - 4 + x - 2}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{x^2 - 4 + 10 - x^2}{x + 2} \\ &= \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{6}{x + 2} \\ &= \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{6} = \frac{-1}{x - 2}. \end{aligned}$$

b) $A < 0$ khi $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy $A < 0$ khi $x > 2$.

□

✧ **Bài 6.** Tìm x nguyên để giá trị của mỗi biểu thức sau là số nguyên

a) $A = \frac{3}{2x - 1}.$

b) $B = \frac{5}{x^2 + 1}.$

c) $C = \frac{7}{x^2 - x + 1}.$

d) $D = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3}.$

e) $E = \frac{3x^2 - x + 3}{3x + 2}.$

f) $F = \frac{2x + 3}{x^2 + 1}.$

💬 **Lời giải.**

a) A là số nguyên khi $2x - 1$ là ước nguyên của 3.

$$\Rightarrow 2x - 1 \in \{\pm 1; \pm 3\}.$$

$2x - 1$	-1	1	-3	3
x	0	1	-1	2

$$\text{Vậy } x \in \{0; 1; -1; 2\}.$$

b) B là số nguyên khi $x^2 + 1$ là ước nguyên của 5.

$$\Rightarrow x^2 + 1 \in \{\pm 1; \pm 5\}.$$

$x^2 + 1$	-1	1	-5	5
x	không tồn tại	0	không tồn tại	± 2

Vậy $x \in \{0; \pm 2\}$.

c) C là số nguyên khi $x^2 - x + 1$ là ước nguyên của 7.

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 \in \{\pm 1; \pm 7\}.$$

$$\textcircled{v} x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

$$\textcircled{v} x^2 - x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ (vô lý)}.$$

$$\textcircled{v} x^2 - x + 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) + 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 3.$$

$$\textcircled{v} x^2 - x + 1 = -7 \Leftrightarrow x^2 - x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} = 0 \text{ (vô lý)}.$$

Vậy $x \in \{0; 1; -2; 3\}$.

$$\text{d) } D = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3} = \frac{2x^2(x - 3) + (x - 3) - 5}{x - 3} = 2x^2 + 1 - \frac{5}{x - 3}.$$

D là số nguyên khi $x - 3$ là ước nguyên của 5.

$$\Rightarrow x - 3 \in \{\pm 1; \pm 5\}.$$

$x - 3$	-1	1	-5	5
x	2	4	-2	8

Vậy $x \in \{2; 4; -2; 8\}$.

$$\text{e) } E = \frac{3x^2 - x + 3}{3x + 2} = \frac{3x^2 + 2x - 3x - 2 + 5}{3x + 2} = \frac{x(3x + 2) - (3x + 2) + 5}{3x + 2} = x - 1 + \frac{5}{3x + 2}.$$

E là số nguyên khi $3x + 2$ là ước nguyên của 5.

$$\Rightarrow 3x + 2 \in \{\pm 1; \pm 5\}.$$

$3x + 2$	-1	1	-5	5
x	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-7}{3}$	1
	(chọn)	(loại)	(loại)	(chọn)

Vậy $x \in \{-1; 1\}$.

f) F là số nguyên khi

$$2x + 3 : (x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x(2x + 3) : (x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x : (x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + 1) + 3x - 2 : (x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (3x - 2) : (x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (6x - 4) : (x^2 + 1).$$

$$\text{Mặt khác } (2x + 3) : (x^2 + 1) \Rightarrow (6x + 9) : (x^2 + 1).$$

$$\text{Suy ra } (6x + 9) - (6x - 4) : (x^2 + 1) \Rightarrow 13 : (x^2 + 1).$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 \in \{\pm 1; \pm 13\}.$$

$x^2 + 1$	-1	1	-13	13
x	không tồn tại	0 (chọn)	không tồn tại	$\pm\sqrt{12}$ (loại)
Thử lại, $\frac{2 \cdot 0 + 3}{0^2 + 1} = 3$ là số nguyên.				
Vậy $x = 0$.				

□

❖ **Bài 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của biểu thức:

a) $A = \frac{2x^2 - 16x + 50}{x^2 - 8x + 22}$.

b) $B = \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^2}$.

c) $C = \frac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x + 5}$.

d) $D = \frac{1}{4x - 7 - 4x^2}$.

e) $E = \frac{8x - 12}{x^2 + 4}$.

💬 **Lời giải.**

a) $A = \frac{2x^2 - 16x + 50}{x^2 - 8x + 22} = 2 + \frac{6}{(x-4)^2 + 6}$.

Ta có $(x-4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + 6 \geq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-4)^2 + 6} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{(x-4)^2 + 6} \leq 1$.

$\Rightarrow A \leq 2 + 1 = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là 3, không có giá trị nhỏ nhất.

b) $B = \frac{4x^2 - 4x + 1 + x^2}{x^2} = \frac{4x^2 + 4x + 1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \left(\frac{2x+1}{x}\right)^2 + 1$.

Vì $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2 \geq 0$ nên $B \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 1, không có giá trị lớn nhất.

c) $C = \frac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x + 5} = 2 - \frac{1}{(x-2)^2 + 1}$.

Ta có $(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-2)^2 + 1} \geq -1$.

$\Rightarrow C \geq 2 - 1 = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 1, không có giá trị lớn nhất.

d) $D = \frac{1}{4x - 7 - 4x^2} = \frac{-1}{4x^2 - 4x + 7} = \frac{-1}{(2x-1)^2 + 6}$.

Ta có

$$(2x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + 6 \geq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{(2x-1)^2 + 6} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{-1}{(2x-1)^2 + 6} \geq \frac{-1}{6}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $-\frac{1}{6}$, không có giá trị lớn nhất.

e) Ta có

$$\begin{aligned}E + 4 &= \frac{8x - 12}{x^2 + 4} + 4 \\ \Leftrightarrow E + 4 &= \frac{8x - 12 + 4x^2 + 16}{x^2 + 4} \\ \Leftrightarrow E + 4 &= \frac{4x^2 + 8x + 4}{x^2 + 4} \\ \Leftrightarrow E + 4 &= \frac{(2x + 2)^2}{x^2 + 4}.\end{aligned}$$

$$\forall \begin{cases} (2x + 2)^2 \geq 0 \\ x^2 + 4 \geq 4 \end{cases} \text{ nên } E + 4 \geq 0 \Leftrightarrow E \geq -4.$$

Ta có

$$\begin{aligned}E - 1 &= \frac{8x - 12}{x^2 + 4} - 1 \\ \Leftrightarrow E - 1 &= \frac{8x - 12 - x^2 - 4}{x^2 + 4} \\ \Leftrightarrow E - 1 &= \frac{-(x^2 - 8x + 16)}{x^2 + 4} \\ \Leftrightarrow E - 1 &= \frac{-(x - 2)^2}{x^2 + 4}.\end{aligned}$$

$$\forall \begin{cases} -(x - 2)^2 \leq 0 \\ x^2 + 4 \geq 4 \end{cases} \text{ nên } E - 1 \leq 0 \Leftrightarrow E \leq 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là -4 , giá trị lớn nhất của E là 1 .

□

✎ **Bài 8.** Cho $0 < x < y$ và $3x^2 + 3y^2 = 10xy$. Tính $N = \frac{x - y}{x + y}$.

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}3x^2 + 3y^2 &= 10xy \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10xy &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - xy + 3y^2 - 9xy &= 0 \\ \Leftrightarrow x(3x - y) - 3y(3x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x - y)(x - 3y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}.\end{aligned}$$

Do $0 < x < y$ nên ta chỉ nhận trường hợp $y = 3x$.

$$\text{Suy ra } N = \frac{x - y}{x + y} = \frac{x - 3x}{x + 3x} = \frac{-2x}{4x} = -\frac{1}{2}.$$

□

❖ **Bài 9.** Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{3x - 2y}{3x + 2y}$, biết $9x^2 + 4y^2 = 20xy$ và $2y < 3x < 0$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 &= 20xy \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 18xy + 4y^2 - 2xy &= 0 \\ \Leftrightarrow 9x(x - 2y) &= 2y(x - 2y) = 0 \\ \Leftrightarrow 9x(x - 2y)(9x - 2y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 9x = 2y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x \\ 2y = 9x. \end{cases} \end{aligned}$$

Do $2y < 3x < 0$ nên ta chỉ nhận $2y = 9x$.

$$A = \frac{3x - 2y}{3x + 2y} = \frac{3x - 9x}{3x + 9x} = \frac{-6x}{12x} = -\frac{1}{2}.$$

□

❖ **Bài 10.** Tính giá trị biểu thức:

a) $A = \frac{5a - b}{3a + 7} - \frac{3b - 2a}{2b - 7}$ với $2a - b = 7$ và $a \neq -\frac{7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$.

b) $B = \frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b}$ với $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$ và $b \neq \pm 3a$.

c) $C = \frac{2xy}{y^2 + xy - 6x^2}$ với $3x^2 - y^2 = 2xy, y \neq 2x, y \neq -3x$.

d) $E = \frac{3x^2y - 1}{4xy}$ với $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 6y + 13 = 0, x, y \neq 0$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $2a - b = 7 \Leftrightarrow b = 2a - 7$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{5a - b}{3a + 7} - \frac{3b - 2a}{2b - 7} \\ &= \frac{5a - (2a - 7)}{3a + 7} - \frac{3(2a - 7) - 2a}{2(2a - 7) - 7} \\ &= \frac{5a - 2a + 7}{3a + 7} - \frac{6a - 21 - 2a}{4a - 14 - 7} \\ &= \frac{3a + 7}{3a + 7} - \frac{4a - 21}{4a - 21} \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

b) Ta có $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow 15ab = 6a^2 + 5b^2$.

$$B = \frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2a-b)(3a+b) + (5b-a)(3a-b)}{(3a-b)(3a+b)} \\
&= \frac{6a^2 + 2ab - 3ab - b^2 + 15ab - 5b^2 - 3a^2 + ab}{9a^2 - b^2} \\
&= \frac{3a^2 + 15ab - 6b^2}{9a^2 - b^2} \\
&= \frac{3a^2 + 6a^2 + 5b^2 - 6b^2}{9a^2 - b^2} \\
&= \frac{9a^2 - b^2}{9a^2 - b^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}
&3x^2 - y^2 = 2xy \\
\Leftrightarrow &3x^2 - 3xy - (y^2 - xy) = 0 \\
\Leftrightarrow &3x(x - y) + y(x - y) = 0 \\
\Leftrightarrow &(x - y)(3x + y) = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y = x \text{ (nhận)} \\ y = -3x \text{ (loại)}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Thay $y = x$ vào biểu thức ban đầu ta được

$$C = \frac{2xy}{y^2 + xy - 6x^2} = \frac{2x^2}{x^2 + x^2 - 6x^2} = \frac{2x^2}{-4x^2} = -\frac{1}{2}.$$

d)

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 6y + 13 = 0 \\
\Leftrightarrow &(x - y)^2 - 2(x - y) + y^2 + 4y + 13 = 0 \\
\Leftrightarrow &(x - y - 1)^2 + (y^2 + 4y + 4) + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow &(x - y - 1)^2 + (y + 2)^2 + 8 = 0.
\end{aligned}$$

Do $\begin{cases} (x - y - 1)^2 \geq 0 \\ (y + 2)^2 \geq 0 \end{cases}$ nên $(x - y - 1)^2 + (y + 2)^2 + 8 = 0$ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại E thỏa yêu cầu bài toán.

□

⇒ **Bài 11.** Cho số thực x, y , thỏa mãn $x + y = 1$ ($x, y \neq 1$). Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{2(y - x)}{x^2y^2 + 3}.$$

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$VT = \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)} = \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)}.$$

Do $x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x$ và $x - 1 = y$ nên

$$\begin{aligned}
 VT &= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2) - (x-y)}{xy(x^2y^2 + y^2x + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)} \\
 &= \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2 + xy(x+y) + x^2 + y^2 + xy + 2]} \\
 &= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy[x^2y^2 + (x+y)^2 + 2]} = \frac{(x-y)[x(x-1) + y(y-1)]}{xy(x^2y^2 + 3)} \\
 &= \frac{(x-y)[x(-y) + y(-x)]}{xy(x^2y^2 + 3)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2 + 3)} \\
 &= \frac{-2(x-y)}{x^2y^2 + 3} = VP \text{ (đpcm)}.
 \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 12.** Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{a+b-c}{ab} - \frac{b+c-a}{bc} - \frac{c+a-b}{ac} = 0$. Chứng minh rằng: trong ba biểu thức ở vế trái thì có ít nhất một biểu thức bằng 0.

💬 **Lời giải.**

Từ điều kiện ta có

$$\begin{aligned}
 &\frac{a+b-c}{ab} - \frac{b+c-a}{bc} - \frac{c+a-b}{ca} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\frac{c(a+b-c) - a(b+c-a) - b(c+a-b)}{abc} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\frac{a^2 - 2ab + b^2 - c^2}{abc} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{abc} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} a-b-c=0 \\ a-b+c=0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy trong ba biểu thức ở vế trái của biểu thức đã cho thì có ít nhất một biểu thức bằng 0. □

✧ **Bài 13.** Cho a, b, c là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị nguyên: $M = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \\
 &= \frac{a^3(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} - \frac{b^3(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\
 &= \frac{a^3(b-c) - b^3(a-c) + c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\
 &= \frac{A}{(a-b)(a-c)(b-c)}.
 \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= a^3(b-c) - b^3(a-c) + c^3(a-b) \\
 &= a^3(b-c) - ab^3 + b^3c + ac^3 - bc^3 \\
 &= a^3(b-c) - a(b-c)(b^2+bc+c^2) + bc(b-c)(b+c) \\
 &= (b-c)(a^3 - ab^2 - abc - ac^2 + b^2c + bc^2) \\
 &= (b-c)[a(a-b)(a+b) - bc(a-b) - c^2(a-b)] \\
 &= (a-b)(b-c)(a^2 + ab - bc - c^2) \\
 &= (a-b)(b-c)[(a-c)(a+c) + b(a-c)] \\
 &= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = a+b+c.$$

Vì a, b, c đều là số nguyên nên M cũng là số nguyên.

□

❖ **Bài 14.** Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $a, b, c \neq 0$. Chứng minh

$$a) \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = 1;$$

$$b) \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}.$$

💬 **Lời giải.**

Theo giả thuyết, ta có

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\
 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &= a^2 + b^2 + c^2 \\
 \Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca &= 0 \\
 \Leftrightarrow ab + bc + ca &= 0. \quad (*)
 \end{aligned}$$

a) Từ (*), ta có $bc = -ab - ca$.
Do đó

$$\begin{aligned}
 a^2 + 2bc &= a^2 + bc + bc \\
 &= a^2 - ab - ca + bc = (a-b)(a-c).
 \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}
 b^2 + 2ca &= (b-c)(b-a) \\
 c^2 + 2ab &= (c-a)(c-b).
 \end{aligned}$$

Từ đó, ta được

$$\begin{aligned}
 &\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\
 &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\
 &= \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2(b-c) - b^2[(a-b) - (c-b)] + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\
&= \frac{a^2(b-c) - b^2(a-b) + b^2(c-b) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\
&= \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1 \text{ (đpcm)}.
\end{aligned}$$

b) Từ (*) và $a, b, c \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{ab+bc+ca}{abc} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c} \quad (1) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3 = \left(-\frac{1}{c}\right)^3 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{3}{a^2b} + \frac{3}{ab^2} + \frac{1}{b^3} = -\frac{1}{c^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{3}{ab} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b^3} = -\frac{1}{c^3}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Thay (1) vào (2), ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^3} - \frac{3}{abc} + \frac{1}{b^3} = -\frac{1}{c^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc} \text{ (đpcm)}.
\end{aligned}$$

□

❖ **Bài 15.** Cho $a + b + c = 0$ ($abc \neq 0$). Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}.$$

💬 **Lời giải.**

Theo giả thuyết

$$\begin{aligned}
&a + b + c = 0 \Leftrightarrow a + b = -c \\
&\Leftrightarrow (a + b)^3 = -c^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 \\
&\Leftrightarrow a^3 + b^3 - 3abc = -c^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.
\end{aligned}$$

Lại có $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a + b = -c \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = c^2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 - b^2 = 2ab$.

Tương tự $a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$ và $b^2 - c^2 - a^2 = 2ca$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2} \\
&= \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

□

🔗 **Bài 16.** Cho 3 số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a + b + c = 0$. Tính giá trị biểu thức:

$$M = \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right).$$

💬 **Lời giải.**

Theo giả thuyết

$$\begin{aligned} a + b + c = 0 &\Leftrightarrow a + b = -c \\ \Leftrightarrow (a + b)^3 &= -c^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 - 3abc &= -c^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc. \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{c}{a-b} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \\ &= 1 + \frac{c}{a-b} \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \\ &= 1 + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{b^2 - bc + ca - a^2}{ab} \\ &= 1 + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{(b-a)(b+a-c)}{b} \\ &= 1 + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{-(a-b)(a+b+c-2c)}{ab} \\ &= 1 + \frac{2c^2}{ab} = 1 + \frac{2c^3}{abc}. \quad (2) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{a}{b-c} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) = 1 + \frac{2a^3}{abc} \quad (3)$$

$$\frac{b}{c-a} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) = 1 + \frac{2b^3}{abc} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4), ta có

$$\begin{aligned} M &= 3 + \frac{2a^3 + 2b^3 + 2c^3}{abc} \\ &= 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\ &= 3 + \frac{6abc}{abc} = 3 + 6 = 9. \end{aligned}$$

□

🔗 **Bài 17.** Cho x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$ và $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Tính giá trị biểu thức

$$B = (x^5 - 1)(y^5 - 1)(z^{2016} - 1).$$

 Lời giải.

Từ giả thuyết, ta có

$$\begin{aligned}x + y + z &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ \Leftrightarrow x + y + z &= \frac{xy + yz + zx}{xyz} = xy + yz + zx \text{ (vì } xyz = 1) \\ \Leftrightarrow x + y + z - xy - yz - zx &= 0.\end{aligned}$$

Vì $xyz = 1$, nên ta có

$$\begin{aligned}xyz - xy - xz - yz + x + y + z - 1 &= 0 \\ &= (z - 1)(xy - x - y + 1) = 0 \\ &= (z - 1)(y - 1)(x - 1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Lần lượt thay $x = 1$ hoặc $y = 1$ hoặc $z = 1$ vào biểu thức B , ta đều được $B = 0$. □

✎ **Bài 18.** Cho ba số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$C = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}.$$

 Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{xy + yz + zx}{xyz} = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 0.$$

Khi đó

$$x^2 + 2yz = x^2 + 2yz - (xy + yz + zx) = x^2 + yz - xy - zx = (x^2 - xy) - (xz - yz) = (x - y)(x - z).$$

Tương tự, ta cũng có được

$$\begin{aligned}y^2 + 2xz &= (y - x)(y - z). \\ z^2 + 2xy &= (z - x)(z - y).\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy} \\
 &= \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{xz}{(y-x)(y-z)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)} \\
 &= \frac{yz(y-z) - xz(x-z) + xy(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\
 &= \frac{yz(y-z) - x^2z + xz^2 + x^2y - xy^2}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\
 &= \frac{yz(y-z) + x^2(y-z) + x(z^2 - y^2)}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\
 &= \frac{yz(y-z) + x^2(y-z) - x(y-z)(y+z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\
 &= \frac{(y-z)(yz + x^2 - xy - xz)}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\
 &= \frac{(y-z)[y(z-x) + x(x-z)]}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\
 &= \frac{(y-z)(z-x)(y-x)}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Vậy $C = 1$. □

❖ **Bài 19.** Cho $x + y + z = 1$. Tính giá trị biểu thức sau

$$A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(2x - y)^2 + (2y - z)^2 + (2z - x)^2 + 2}.$$

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(2x - y)^2 + (2y - z)^2 + (2z - x)^2 + 2} \\
 A &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5(x^2 + y^2 + z^2) - 4(xy + yz + zx) + 2} \\
 A &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5(x^2 + y^2 + z^2) - 2[1 - (x^2 + y^2 + z^2)] + 2} \\
 A &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{7(x^2 + y^2 + z^2)} \\
 A &= \frac{1}{7}.
 \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{1}{7}$. □

🔗 **Bài 20.** Tính giá trị biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$ biết $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}a + b + c = 0 &\Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0 \\&\Leftrightarrow 4 + 2(ab + bc + ca) = 0 \\&\Leftrightarrow ab + bc + ca = -2 \\&\Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = 4 \\&\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = 4 \\&\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 4.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}&(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 16 \\&\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 16 \\&\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 8 = 16 \\&\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 8.\end{aligned}$$

Vậy $M = 8$.



PHẦN



HÌNH HỌC

Chương 3

TỨ GIÁC

Bài

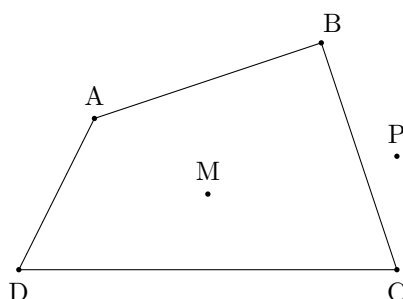
1

TỨ GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- ✓ Tứ giác $ABCD$ là hình gồm 4 đoạn thẳng AB , BC , CD , DA , trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.
- ✓ Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.
- ⚠ Khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.



- Hai đỉnh kề nhau: A và B ; B và C ; C và D ; D và A .
- Hai đỉnh đối nhau: A và C ; B và D .
- Đường chéo: AC ; BD .
- Hai cạnh kề nhau: AB và BC ; BC và CD ; CD và AD ; AD và AB .
- Hai cạnh đối nhau: AB và CD ; BC và AD .
- Hai góc kề nhau: $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ và $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$; $\widehat{A}$ và $\widehat{D}$.
- Hai góc đối nhau: $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$; $\widehat{D}$ và $\widehat{B}$.
- Điểm nằm trong tứ giác: M .
- Điểm nằm ngoài tứ giác: P .

2. Định lý

Tổng các góc của một tứ giác bằng 360° .

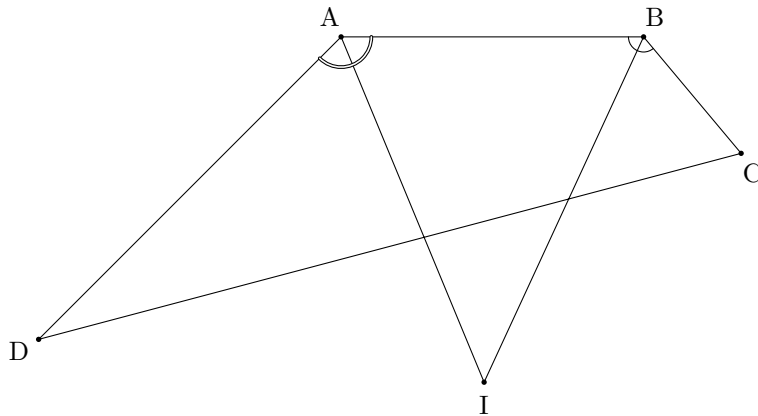
- ⚠ Trong tứ giác $ABCD$, ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$.

🔗 **Bài 1.** Cho tứ giác $ABCD$,

a) Biết $\widehat{B} + \widehat{C} = 200^\circ$, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, $\widehat{C} + \widehat{D} = 120^\circ$. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác.

b) Gọi I là giao điểm của các tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ của tứ giác. Chứng minh $\widehat{AIB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$.

💬 **Lời giải.**



a) Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 200^\circ$, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, $\widehat{C} + \widehat{D} = 120^\circ$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{C} + \widehat{D} &= 200^\circ + 180^\circ + 120^\circ \\ \Leftrightarrow 2\widehat{B} + 2\widehat{C} + 2\widehat{D} &= 500^\circ. \\ \Leftrightarrow 2(\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}) &= 500^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} &= 250^\circ. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} &= 360^\circ \text{ (Tổng 4 góc trong một tứ giác)} \\ \Rightarrow \widehat{A} + 250^\circ &= 360^\circ \\ \Rightarrow \widehat{A} &= 360^\circ - 250^\circ \\ \Rightarrow \widehat{A} &= 110^\circ. \end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned} \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} &= 250^\circ \\ \Rightarrow \widehat{B} + 120^\circ &= 250^\circ \\ \Rightarrow \widehat{B} &= 250^\circ - 120^\circ \\ \Rightarrow \widehat{B} &= 130^\circ. \end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned} \widehat{B} + \widehat{C} = 200^\circ &\Rightarrow \widehat{C} = 200^\circ - 130^\circ = 70^\circ, \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ &\Rightarrow \widehat{D} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ. \end{aligned}$$

Vậy số đo các góc của tứ giác $ABCD$ lần lượt là $\widehat{A} = 110^\circ$, $\widehat{B} = 130^\circ$, $\widehat{C} = 70^\circ$, $\widehat{D} = 50^\circ$.

b) Xét $\triangle ABI$ có

$$\widehat{BAI} = \widehat{DAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAD} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ.$$

$$\widehat{ABI} = \widehat{CBI} = \frac{1}{2}\widehat{CBA} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ.$$

Suy ra $\widehat{AIB} = 180^\circ - (\widehat{BAI} + \widehat{ABI}) = 180^\circ - (55^\circ + 65^\circ) = 60^\circ$.

Mặt khác, ta có

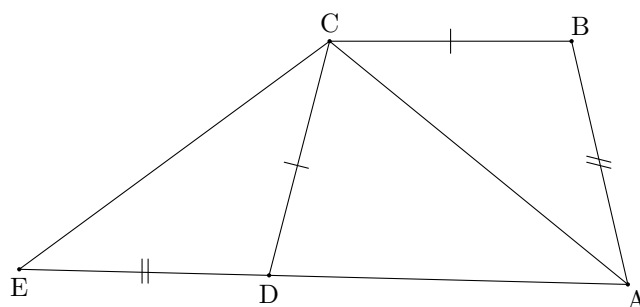
$$\frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \frac{70^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ = \widehat{AIB}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{AIB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}.$$

□

❖ **Bài 2.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, $CB = CD$. Chứng minh rằng AC là tia phân giác của $\widehat{BAD}$.

💬 **Lời giải.**



Trên tia đối của tia DA , lấy điểm E sao cho $DE = AB$.

Khi đó, ta có

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ \text{ (gt),}$$

$$\widehat{EDC} + \widehat{ADC} = 180^\circ \text{ (2 góc kề bù)}$$

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{EDC} = 180^\circ - \widehat{ADC}$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EDC$, có

$$AB = ED \text{ (cách vẽ),}$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{EDC} \text{ (cmt),}$$

$$DC = BC \text{ (gt).}$$

$$\text{Suy ra } \triangle ABC = \triangle EDC \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \begin{cases} AC = EC \text{ (hai cạnh tương ứng)} \\ \widehat{BAC} = \widehat{DEC} \text{ (hai góc tương ứng)} \end{cases}. \quad (1)$$

Xét $\triangle CAE$ có $AC = EC$.

$\Rightarrow \triangle CAE$ cân tại C .

$$\Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{CAE} \text{ hay } \widehat{DEC} = \widehat{CAD}. \quad (2)$$

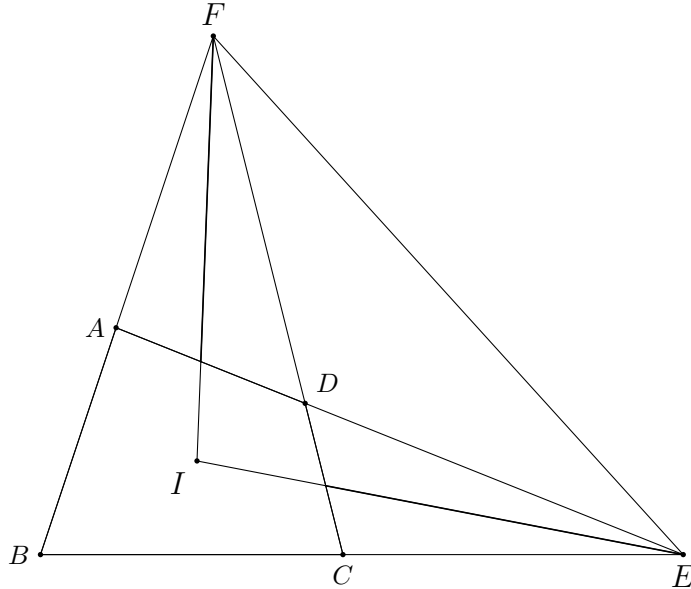
Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$.

Vậy AC là tia phân giác của $\widehat{BAD}$.

□

✎ **Bài 3.** Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai cạnh AD và BC cắt nhau tại E , hai cạnh DC và AB cắt nhau tại F . Kẻ 2 tia phân giác của 2 góc $\widehat{CED}$ và $\widehat{BFC}$ cắt nhau tại I . Tính $\widehat{EIF}$ theo các góc trong của tứ giác $ABCD$.

💬 **Lời giải.**



Ký hiệu các góc trong của tứ giác $ABCD$ là $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$.

Trong $\triangle BFC$ có $\widehat{BFI} + \widehat{IFC} = 2\widehat{IFC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})$. (1)

Trong $\triangle AEB$ có $\widehat{IEA} + \widehat{BEI} = 2\widehat{IEA} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})$. (2)

Trong $\triangle FED$ có $\widehat{FED} + \widehat{DFE} = 180^\circ - \widehat{D}$. (3)

Ta có $\widehat{EIF} = 180^\circ - (\widehat{IFC} + \widehat{IEA} + \widehat{FED} + \widehat{DFE})$.

Thay các kết quả ở (1), (2), (3) vào ta được:

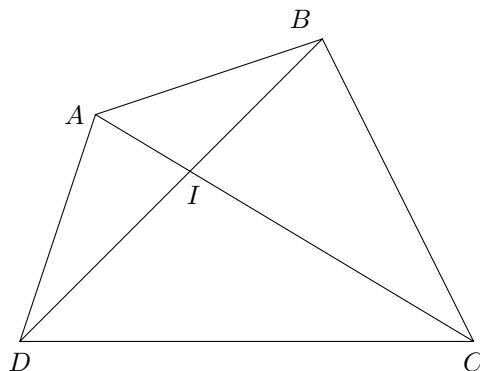
$$\begin{aligned}\widehat{EIF} &= 180^\circ - \left[\frac{180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})}{2} + \frac{180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})}{2} + 180^\circ - \widehat{D} \right] \\ &= \widehat{B} + \widehat{D} + \frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{2} - 180^\circ = \frac{2\widehat{B} + 2\widehat{D} + \widehat{A} + \widehat{C}}{2} - 180^\circ \\ &= \frac{(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}) + \widehat{B} + \widehat{D}}{2} - 180^\circ = \frac{360^\circ + \widehat{B} + \widehat{D}}{2} - 180^\circ.\end{aligned}$$

□

Vậy $\widehat{EIF} = \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2}$.

✎ **Bài 4.** Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh $\frac{1}{2}p < AC + BD < p$, (với p là chu vi của tứ giác $ABCD$).

💬 **Lời giải.**



Gọi p là chu vi của tứ giác $ABCD \Rightarrow p = AB + BC + CD + DA$.

Chứng minh $\frac{1}{2}p < AC + BD$.

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác vào các tam giác AID , AIB , BIC , CID ta có

$$AI + IB > AB \quad (1).$$

$$IB + IC > BC \quad (2).$$

$$IC + ID > CD \quad (3).$$

$$ID + IA > AD \quad (4).$$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3), (4) ta được

$$2(IA + IB + IC + ID) > AB + BC + CD + DA \Leftrightarrow \frac{1}{2}p < AC + BD \quad (5).$$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác vào các tam giác ABC , ACD , ABD , BCD ta có

$$AC < AB + BC \quad (6).$$

$$AC < AD + DC \quad (7).$$

$$BD < AB + AD \quad (8).$$

$$BD < BC + CD \quad (9).$$

Cộng vế theo vế của (6), (7), (8), (9) ta được

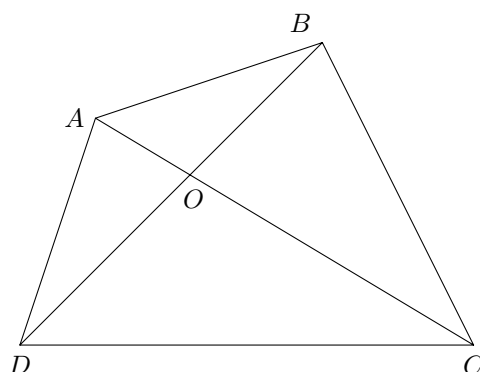
$$2AC + 2BD < 2(AB + BC + CD + DA) \Leftrightarrow AC + BD < p \quad (10).$$

Từ (5) và (10) suy ra $\frac{1}{2}p < AC + BD < p$



✧ **Bài 5.** Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm nằm trong tứ giác đó. Xác định vị trí của M để $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

💬 **Lời giải.**



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .
 Với điểm M bất kỳ ta luôn có

$$MA + MC \geq AC \quad (1).$$

$$MB + MD \geq BD \quad (2).$$

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta được

$$MA + MB + MC + MD \geq AC + BD.$$

Mà $AC + BD$ không đổi nên để $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất thì phải có dấu bằng xảy ra
 $MA + MB + MC + MD = AC + BD \Leftrightarrow M$ trùng với O hay M là giao của AD và BC . □

Bài

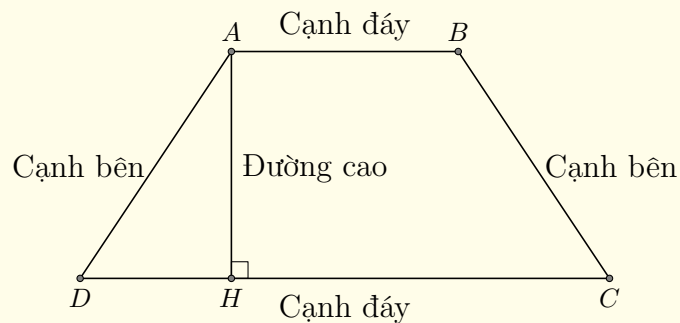
2

HÌNH THANG

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 2.1. Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.



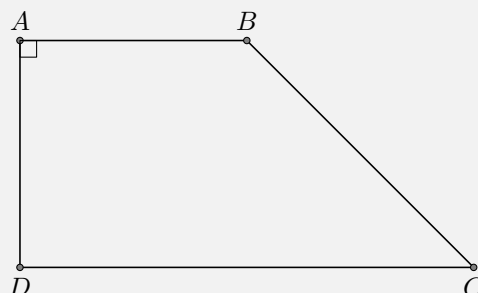
Tứ giác $ABCD$ là hình thang $\Leftrightarrow AB \parallel CD$ hoặc $BC \parallel AD$.

Tính chất 2.1.

Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.

Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

Hình thang vuông: Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

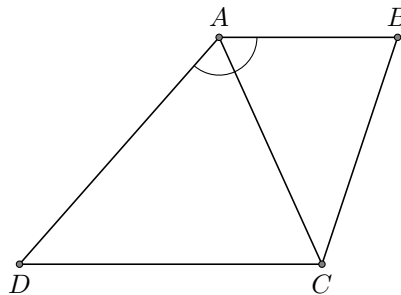




BÀI TẬP

✧ **Bài 1.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AD = DC$, đường chéo AC là phân giác $\widehat{A}$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

💬 **Lời giải.**



Xét $\triangle ADC$, ta có $AD = DC$

$\Rightarrow \triangle ADC$ là tam giác cân tại D .

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DCA}$.

Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{CAB}$ (AC là tia phân giác của $\widehat{A}$).

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ nên $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$.

$\Rightarrow AB \parallel CD$.

$\Rightarrow$ tứ giác $ABCD$ là hình thang. □

✧ **Bài 2.** Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB và CD và $\widehat{A} - \widehat{D} = 100^\circ, \widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tính số đo các góc của hình thang.

💬 **Lời giải.**

Vì $AB \parallel CD$ (tứ giác $ABCD$ là hình thang) nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Ta có $\widehat{A} = (180^\circ + 100^\circ) : 2 = 140^\circ$ và $\widehat{D} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

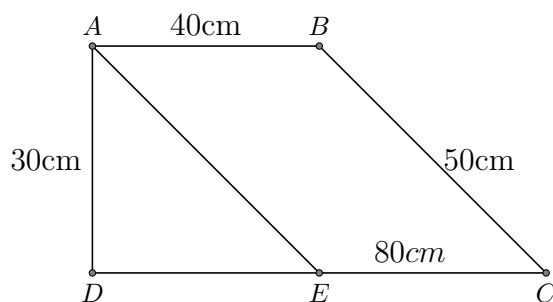
$\Rightarrow 3\widehat{C} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{B} = 120^\circ$. □

✧ **Bài 3.** Cho hình thang $ABCD$, đáy $AB = 40$ cm, $DC = 80$ cm, cạnh $BC = 50$ cm, $AD = 30$ cm. Chứng minh $ABCD$ là hình thang vuông.

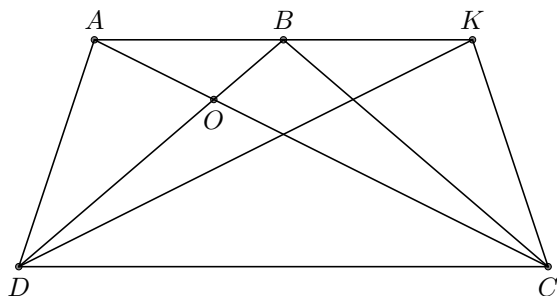
💬 **Lời giải.**



Qua A kẻ $AE \parallel BC$. Xét tứ giác $ABCE$ có: $AB \parallel EC$ ($AB \parallel CD, E \in CD$) Suy ra $ABCE$ là hình thang. Mà $AE \parallel BC$ (theo cách vẽ) Suy ra $\begin{cases} AE = BC = 50\text{cm} \\ AB = EC = 40\text{cm} \end{cases}$ Ta có: $DE + EC = CD \Rightarrow DE = CD - EC = 80 - 40 = 40\text{cm}$. Xét $\triangle ADE$ có: $\begin{cases} AE^2 = 50^2 = 2500 \\ AD^2 + DE^2 = 30^2 + 40^2 = 2500 \end{cases}$ Suy ra $AE^2 = AD^2 + DE^2$ Theo định lí Py-ta-go đảo suy ra $\triangle ADE$ là tam giác vuông tại D. Xét hình thang $ABCD$ có $\widehat{D} = 90^\circ$ ($\triangle ADE$ vuông tại D) nên $ABCD$ là hình thang vuông. $\square$

❖ **Bài 4.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{C} < \widehat{D}$. Chứng minh $AC > BD$.

💬 **Lời giải.**



Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ CD có chứa điểm A vẽ $\widehat{DCx} = \widehat{ADC}$.

Gọi K là giao điểm của AB và Cx .

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Xét tứ giác $ABCK$ có:

$$\begin{cases} AK \parallel CD \text{ (} AB \parallel CD, K \in AB \text{)} \\ \widehat{ADC} = \widehat{ACK} \text{ (} \widehat{DCx} = \widehat{ADC} \text{)}. \end{cases}$$

Suy ra $ABCK$ là hình thang cân $\Rightarrow DK = AC$ (tính chất hình thang cân).

Xét $\triangle AKC$ và $\triangle KAD$ có:

$$\begin{cases} AK \text{ cạnh chung} \\ \widehat{DAK} = \widehat{AKC} \text{ (} ABCK \text{ là hình thang cân) } \\ AC = KD \text{ (} ABCK \text{ là hình thang cân) } \end{cases}$$

Suy ra $\triangle AKC = \triangle KAD$ (c - g - c).

Suy ra $\widehat{KAC} = \widehat{AKD}$ (hai góc tương ứng).

(1)

Vì $\widehat{DBK}$ là góc ngoài của $\triangle AOB$ nên

$$\widehat{DBK} = \widehat{CAB} + \widehat{AOB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{DBK} > \widehat{DKA} = \widehat{DKB}$.

Xét $\triangle DBK$ có: $\widehat{DBK} > \widehat{DKB}$ (cmt)

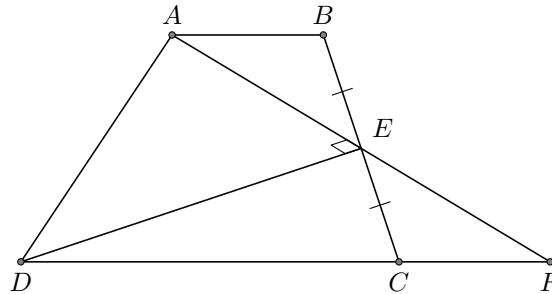
Suy ra $DK > DB$ (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong 1 tam giác).

Mà $KD = AC$ (cmt).

Vậy $AC > DB$ (đpcm). □

❖ **Bài 5.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có E là trung điểm BC và $\widehat{AED} = 90^\circ$. Chứng minh rằng DE là tia phân giác của $\widehat{ADC}$.

💬 **Lời giải.**



Gọi F là giao điểm của AE và CD (A, F thuộc hai nửa mặt phẳng bờ BC).

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle FCE$ có

$$\begin{cases} EB = EC \text{ (} E \text{ là trung điểm của } BC\text{)} \\ \widehat{AEB} = \widehat{CEF} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{ABE} = \widehat{ECF} \text{ (so le trong, } AB \parallel CE\text{)}. \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle FCE$ (g - c - g)

$\Rightarrow AE = EF$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow E$ là trung điểm của AF .

Xét $\triangle DAF$ có DE là đường cao ứng với cạnh AF ($\widehat{DEA} = 90^\circ$)

Mà DE cũng là đường trung tuyến (E là trung điểm của AF)

Suy ra $\triangle DAF$ là tam giác cân

Do đó DE cũng là phân giác của $\widehat{ADC}$. □

Bài

3

HÌNH THANG CÂN

A

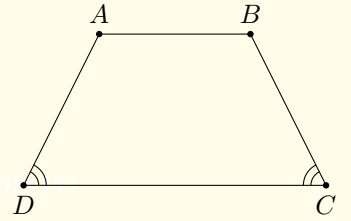
LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 3.1.

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân (đáy AB, CD) $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ \widehat{C} = \widehat{D} \\ \widehat{A} = \widehat{B} \end{cases}$



A Nếu $ABCD$ là hình thang cân (đáy AB, CD) thì $\widehat{C} = \widehat{D}$ và $\widehat{A} = \widehat{B}$.

2. Tính chất

Trong hình thang cân

- ☑ hai cạnh bên bằng nhau.
- ☑ hai đường chéo bằng nhau.

3. Dấu hiệu nhận biết

- ☑ Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- ☑ Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

B BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), AD cắt BC tại I , AC cắt BD tại H . Chứng minh rằng IJ là đường trung trực của AB và là đường trung trực của CD .

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $\widehat{IDC} = \widehat{ICD} \Rightarrow \triangle ICD$ cân tại I .
Nên $IC = ID$. (1)

Lại có $AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \widehat{IAB} = \widehat{IDC} \\ \widehat{IBA} = \widehat{ICD} \end{cases}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

Nên $\widehat{IAB} = \widehat{IBA} \Rightarrow \triangle IAB$ cân tại $I \Rightarrow IA = IB$. (2)

Xét hai tam giác IAC và IBD có $\begin{cases} \widehat{DIC} \text{ chung} \\ IA = IB \text{ (cmt)} \\ IC = ID \text{ (cmt)} \end{cases}$

Nên $\triangle IAC = \triangle IBD$.

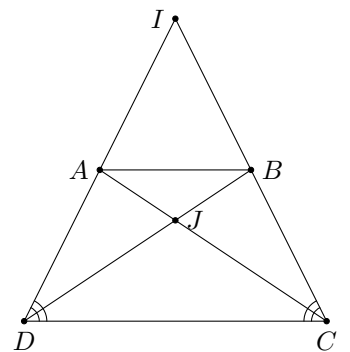
Suy ra $\widehat{ICA} = \widehat{IDB}$, mà $\widehat{ICD} = \widehat{IDC}$ (cmt) nên $\widehat{JCD} = \widehat{JDC}$.

Do đó $\triangle JCD$ cân tại $J \Rightarrow JC = JD$. (3)

Lại có $AB \parallel CD$ nên $\begin{cases} \widehat{JAB} = \widehat{JCD} \\ \widehat{JBA} = \widehat{JDC} \end{cases}$ (hai góc ở vị trí so le trong).

Suy ra $\widehat{JAB} = \widehat{JBA} \Rightarrow \triangle JAB$ cân tại $J \Rightarrow JA = JB$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra IJ là đường trung trực của đoạn thẳng AB , đồng thời cũng là đường trung trực của đoạn thẳng CD . □



❖ **Bài 2.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), AC cắt BD tại O . Biết $OA = OB$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

💬 **Lời giải.**

Ta có $OA = OB$ (gt) nên $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

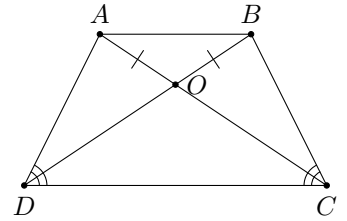
Lại có $AB \parallel CD$ nên $\begin{cases} \widehat{OAB} = \widehat{OCD} \\ \widehat{OBA} = \widehat{ODC} \end{cases}$ (hai góc ở vị trí so le trong).

Nên $\widehat{OCD} = \widehat{ODC} \Rightarrow \triangle OCD$ cân tại O .

Suy ra $OD = OC$.

Mà $\begin{cases} AC = OA + OC \\ BD = OB + OD \end{cases}$ nên $AC = BD$.

Vậy $ABCD$ là hình thang cân. (hình thang có hai đường chéo bằng nhau) □



❖ **Bài 3.** Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). AD cắt BC tại O .

- Chứng minh rằng $\triangle OAB$ cân.
- Gọi I , J lần lượt là trung điểm AB và CD . Chứng minh rằng ba điểm I , J , O thẳng hàng.
- Qua điểm M thuộc đoạn AC , vẽ đường thẳng song song với CD , cắt BD tại N . Chứng minh rằng $MNAB$ và $MNDC$ là các hình thang cân.

💬 **Lời giải.**

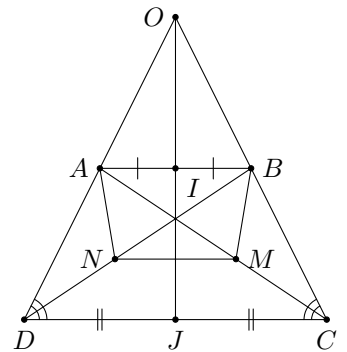
a)

Chứng minh $\triangle OAB$ cân.

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

Lại có $AB \parallel CD$ nên $\begin{cases} \widehat{OAB} = \widehat{ODC} \\ \widehat{OBA} = \widehat{OCD} \end{cases}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

Nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O .



b) Chứng minh O , I , J thẳng hàng.

$\triangle OAB$ cân tại O có I là trung điểm AB nên $OI \perp AB$. (1)

Lại có $\begin{cases} OA = OB \text{ (do } \triangle OAB \text{ cân tại } O) \\ AD = BC \text{ (do } ABCD \text{ là hình thang cân)} \end{cases}$ nên $OD = OC$.

Suy ra $\triangle OCD$ cân tại O .

Mà J là trung điểm CD nên $OJ \perp CD$.

Lại có $AB \parallel CD$ nên $OJ \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm O , I , J thẳng hàng.

c) Chứng minh các tứ giác $MNAB$ và $MNDC$ là hình thang cân.

Do $MN \parallel CD$ (gt) nên $CDNM$ là hình thang. Xét hai tam giác ADC và BCD có $\begin{cases} AD = BC \text{ (} ABCD \text{ cân)} \\ AC = BD \text{ (} ABCD \text{ cân)} \\ CD \text{ là cạnh chung} \end{cases}$

nên $\triangle ADC = \triangle BCD$.

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.

Vậy tứ giác $CDNM$ là hình thang cân. (hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau)

Lại có $CD \parallel AB$ và $MN \parallel CD$ nên $AB \parallel MN$, suy ra tứ giác $ABMN$ là hình thang.

Do $CDNM$ là hình thang cân nên $DN = CM$.

Mà $BD = AC$ (do $ABCD$ là hình thang cân), suy ra $AM = BN$.

Vậy $ABMN$ là hình thang cân. (hình thang có hai đường chéo bằng nhau)

□

✎ **Bài 4.** Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB < DC$. Chứng minh rằng $DC - AB < 2AD$.

💬 **Lời giải.**

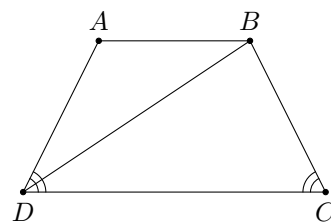
$ABCD$ là hình thang cân nên $AD = BC$.

Xét $\triangle ABD$ có $AB + AD > BD$ (bất đẳng thức tam giác)

Suy ra $AB + AD + BC > BD + BC > CD$ (bất đẳng thức trong tam giác BCD).

Do đó $AB + 2AD > CD$ hay $CD - AB < 2AD$.

• O



□

✎ **Bài 5.** Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB < CD$) có $AB = 8$ cm, $CD = 20$ cm và chu vi hình thang là 48 cm. Tính đường cao của hình thang.

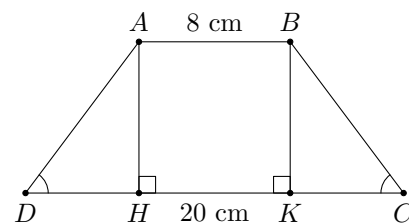
💬 **Lời giải.**

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A và B lên CD .

Lại có $AH \parallel BK$ (cùng vuông góc CD) nên $AB = HK = 8$ cm.

Xét hai tam giác vuông ADH và BCK có $\begin{cases} AD = BC \\ \widehat{ADH} = \widehat{BCK} \end{cases}$ (do

$ABCD$ là hình thang cân).



Nên $\triangle ADH = \triangle BCK \Rightarrow DH = CK$.

Lại có $DH + HK + KC = CD \Rightarrow DH + CK = CD - HK = 20 - 8 = 12$ cm.

Suy ra $DH = CK = 6$ cm.

Hình thang $ABCD$ có chu vi là 48 cm nên $AB + CD + AD + BC = 48$

$\Rightarrow AD + BC = 48 - 8 - 20 = 20$.

Suy ra $AD = BC = 10$ cm.

Xét $\triangle ADH$ vuông tại H có

$$\begin{aligned} AD^2 &= AH^2 + DH^2 \quad (\text{định lí Pytago}) \\ \Leftrightarrow AH^2 &= AD^2 - DH^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \\ \Leftrightarrow AH &= 8 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Vậy chiều cao của hình thang là $AH = 8$ cm. □

❖ **Bài 6.** Cho điểm M nằm bên trong tam giác đều ABC . Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC , độ dài cạnh lớn nhất nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại.

💬 **Lời giải.**

Giả sử MA là cạnh lớn nhất trong ba cạnh MA, MB, MC .

Ta có $MB + MC > BC$ (bất đẳng thức tam giác trong $\triangle MBC$). (1)

Do $\triangle ABC$ đều $AB = BC$. (2)

Lại có M là điểm nằm bên trong $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{BAM} < 60^\circ, \widehat{ABM} < 60^\circ$.

Do đó $\widehat{AMB} > 60^\circ$ nên trong $\triangle MAB$, góc $\widehat{AMB}$ là góc lớn nhất, suy ra AB là cạnh lớn nhất.

Từ đó suy ra $AB > MA$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MB + MC > MA$.

Vậy trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC , độ dài cạnh lớn nhất nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại. □

Bài

4

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH

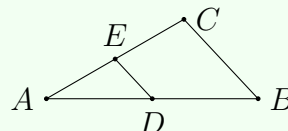
A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường trung bình của tam giác

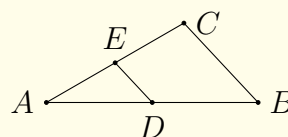
🔵 Định lý 4.1 (mở đầu).

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.



🟢 Định nghĩa 4.1.

Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.



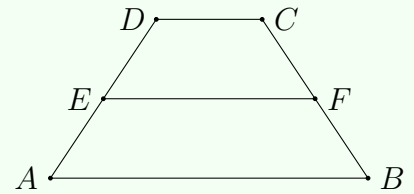
🔵 **Định lý 4.2 (Đường trung bình của tam giác).** Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng một nửa cạnh ấy.

Nếu DE là đường trung bình của tam giác ABC , ($D \in AB, E \in AC$) thì
$$\begin{cases} DE \parallel BC \\ DE = \frac{1}{2}BC. \end{cases}$$

2. Đường trung bình của hình thang

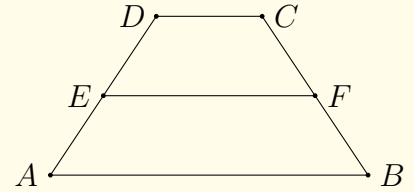
Định lí 4.3 (mở đầu).

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.



Định nghĩa 4.2.

Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.



Định lí 4.4 (đường trung bình của hình thang). Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

Nếu EF là đường trung bình của hình thang $ABCD$ (đáy AB, CD) thì

$$\begin{cases} EF \parallel AB, EF \parallel CD \\ EF = \frac{AB + CD}{2}. \end{cases}$$

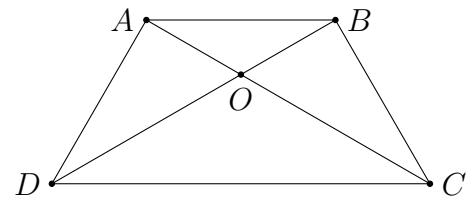
B

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thang cân $ABCD$ có $\widehat{D} = 60^\circ$, DB là phân giác của góc $\widehat{D}$. Biết chu vi của hình thang bằng 20 cm. Tính độ dài các cạnh hình thang.

Lời giải.

Ta có $\widehat{ADC} = 60^\circ$ và DB là tia phân giác góc $\widehat{ADC}$, suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 30^\circ$. ($AB \parallel CD$, góc so le trong)
Mà $\widehat{ADC} + \widehat{DAB} = 180^\circ$, suy ra $\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,
suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{BAD} - \widehat{BAC} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.



Và $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 30^\circ$, suy ra $\triangle ABD$ cân tại A , suy ra $AB = AD$.

Mặt khác $\triangle ACD$ vuông tại A , và $\widehat{ACD} = 30^\circ$, suy ra $AD = \frac{1}{2}CD \Rightarrow CD = 2AD$.

Suy ra $AB + BC + CD + DA = 20 \Leftrightarrow AB + AB + 2AB + AB = 20 \Leftrightarrow AB = 5$ cm.

Vậy độ dài các cạnh của hình thang là $AB = BC = AD = 5$ cm và $CD = 10$ cm. □

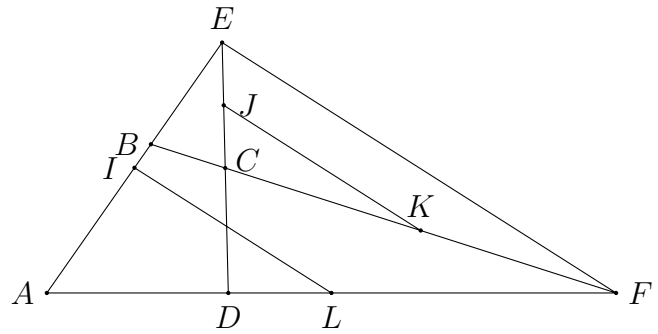
Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$, đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại E , đường thẳng BC cắt đường thẳng AD tại F . Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AE, CE, CF, AF . Chứng minh rằng $IL \parallel JK$.

Lời giải.

Xét tam giác AEF có $IA = IE$ và $LA = LF$, suy ra IL là đường trung bình của tam giác, suy ra $IL \parallel AF$. (1)

Xét tam giác CEF có $JE = JC$ và $KF = KC$, suy ra KJ là đường trung bình của tam giác, suy ra $KJ \parallel EF$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $IL \parallel KJ \parallel EF$.



□

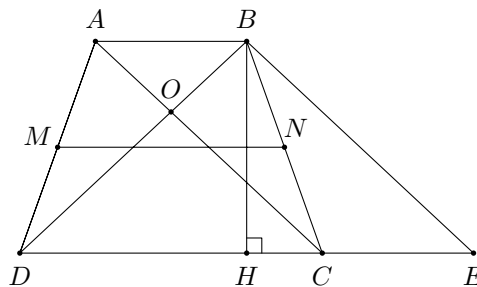
❖ **Bài 3.** Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có đáy nhỏ AB . Độ dài đường cao BH bằng độ dài đường trung bình MN ($M \in AD$, $N \in BC$) của hình thang $ABCD$. Vẽ $BE \parallel AC$ (E thuộc đường thẳng CD). Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng:

a) $MN = \frac{DE}{2}$.

b) $\triangle OAB$ cân.

c) $\triangle DBE$ vuông cân.

💬 **Lời giải.**



a) Do $AB \parallel CD$ (gt); $E \in CD$ nên $CE \parallel AB$.

Ta có $AB \parallel CE$ (cmt) và $BE \parallel AC$ (gt)

Suy ra tứ giác $ABEC$ là hình thang có hai cạnh bên song song nên $AB = CE$, $BE = AC$ (theo nhận xét trong bài hình thang).

Vì MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Suy ra $MN = \frac{1}{2}(AB + CE) = \frac{1}{2}DE$.

b) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BAD$, ta có

- AB là cạnh chung;
- $BC = AD$ (các cạnh bên hình thang cân $ABCD$, $AB \parallel CD$)
- $AC = BD$ (các đường chéo hình thang cân $ABCD$, $AB \parallel CD$)

Do đó $\triangle ABC = \triangle BAD$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$ hay $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$

Ta có $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$ suy ra $\triangle OAB$ cân tại O .

c) Ta có $BE = AC$ và $AC = BD$ (cmt) nên $BE = BD$, suy ra $\triangle BDE$ cân tại B . (1)

Trong $\triangle BDE$ cân tại B có $BH \perp DE$ (gt) nên BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến, suy ra $DH = HE = \frac{1}{2}DE$.

Ta lại có $BH = MN$ và $MN = \frac{1}{2}DE$.

Suy ra $BH = \frac{1}{2}DE = DH = HE$.

Ta có

- $BH = HE$ và $BH \perp HE$ nên $\triangle BHE$ vuông cân tại H , suy ra $\widehat{BHE} = 45^\circ$.
- $BH = HD$ và $BH \perp HD$ nên $\triangle BHD$ vuông cân tại H , suy ra $\widehat{BHD} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{DBE} = \widehat{DBH} + \widehat{HBE} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. (2)

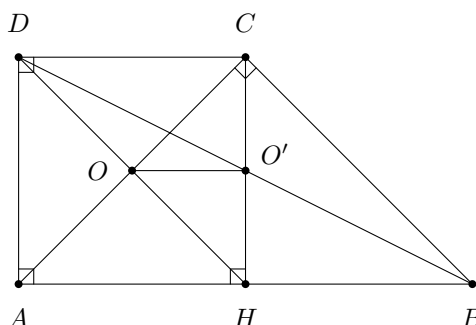
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BDE$ vuông cân tại B .

□

Bài 4. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $AB = 2AD = 2CD$. Kẻ CH vuông góc với AB tại H .

- Tính số đo các góc của hình thang $ABCD$.
- Chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân.
- Tính chu vi hình thang nếu $AB = 6$ cm.
- Gọi O là giao điểm AC và DH , O' là giao điểm của DB và CH . Chứng minh rằng $AB = 4 \cdot OO'$

Lời giải.



- a) Xét tứ giác $ADCH$, ta có:

- $AD \parallel CH$ (cùng vuông góc với AB)
- $CD \parallel AH$ (cùng vuông góc với AD)

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình thang có hai cạnh bên song song nên $CH = AD$, $AH = CD$ (theo nhận xét trong bài hình thang).

Mà $CD = AD = \frac{1}{2}AB$ (gt) nên $CH = AH = HB$.

Tam giác BCH có $CH = BH$ và $\widehat{BHC} = 90^\circ$ nên $\triangle BHC$ vuông cân tại H , suy ra $\widehat{HBC} = \widehat{HCB} = 45^\circ$.

Xét tứ giác $ADCH$, ta có $\widehat{ADC} = \widehat{DAH} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ nên $\widehat{DCH} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{BCD} = \widehat{BCH} + \widehat{DCH} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

Vậy tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$; $\widehat{BCD} = 135^\circ$ và $\widehat{B} = 45^\circ$.

- b) Tam giác AHC có $CH = AH$ và $\widehat{AHC} = 90^\circ$ nên $\triangle AHC$ vuông cân tại H , suy ra $\widehat{HAC} = \widehat{HCA} = 45^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{HAC} = \widehat{HBC} = 45^\circ$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại C .

- c) Ta có $AB = 6$ cm, suy ra $AD = DC = CH = HB = 3$ cm.

Trong $\triangle BHC$ vuông cân tại H , ta có: $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow BC = \sqrt{8}$.

Vậy chu vi hình thang $ABCD$ là $AB + BC + CD + DA = 6 + \sqrt{8} + 3 + 3 = 12 + \sqrt{8}$ cm.

d) Xét $\triangle OCD$ và $\triangle OAH$, ta có:

- $\widehat{OCD} = \widehat{OAH}$ (so le trong, $CD \parallel AH$)
- $CD = AH$ (cmt)
- $\widehat{ODC} = \widehat{OHA}$ (so le trong, $CD \parallel AH$)

Do đó $\triangle OCD = \triangle OAH$ (g.c.g), suy ra $OD = OH$.

Xét $\triangle O'CD$ và $\triangle O'HB$, ta có:

- $\widehat{O'CD} = \widehat{O'HB}$ (so le trong, $CD \parallel AB$)
- $CD = BH$ (cmt)
- $\widehat{O'DC} = \widehat{O'BH}$ (so le trong, $CD \parallel AB$)

Do đó $\triangle O'CD = \triangle O'HB$ (g.c.g), suy ra $O'D = O'B$.

Trong $\triangle HCD$, ta có

$OD = OH$ (cmt)

$O'D = O'B$ (cmt)

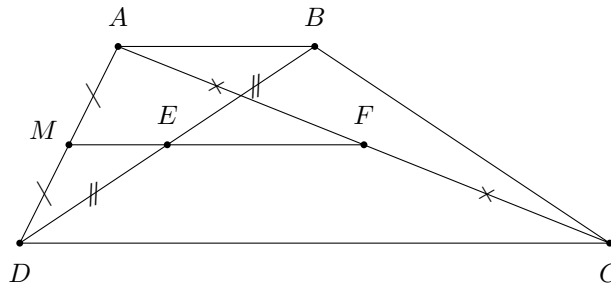
nên OO' là đường trung bình của tam giác nên $CD = 2O'O$.

Mà $AB = 2CD$ nên $AB = 4CD$.

□

✧ **Bài 5.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $CD > AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BD và AC . Chứng minh rằng $EF = \frac{CD - AB}{2}$.

💬 **Lời giải.**



Gọi M là trung điểm của AD .

Trong tam giác ABD có

- M là trung điểm của AD .
- E là trung điểm của BD (gt).

Suy ra ME là đường trung bình của tam giác ABD , suy ra $ME = \frac{1}{2}AB$. (1)

Trong tam giác ACD có

- M là trung điểm của AD .
- F là trung điểm của AC (gt).

Suy ra MF là đường trung bình của tam giác ACD , suy ra $MF = \frac{1}{2}CD$. (2)

Ta có $EF = MF - ME$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $EF = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}AB = \frac{CD - AB}{2}$.

□

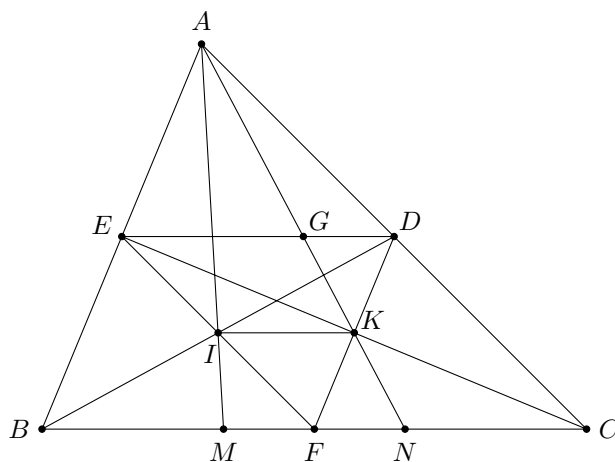
✧ **Bài 6.** Cho tam giác ABC có các trung tuyến BD và CE . Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD , K là giao điểm của AN và CE . Chứng minh rằng:

a) $BDCE$ là hình thang;

b) K là trung điểm của EC ;

c) $BC = 4IK$.

Lời giải.



a) Ta có DE là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow BCDE$ là hình thang.

b) Gọi G là giao điểm của AN và DE .

Ta có E là trung điểm của AB và $ED \parallel BN \Rightarrow G$ là trung điểm của AN .

$\Rightarrow EG$ là đường trung bình của tam giác ABN .

$\Rightarrow EG = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{3}BC$. Lại có $ED = \frac{1}{2}BC \Rightarrow EG = \frac{2}{3}ED$ nên G là trọng tâm $\triangle AEC$.

$\Rightarrow AK$ là đường trung tuyến. Do đó K là trung điểm của EC .

c) Chứng minh tương tự ta có I là trung điểm của BD .

Gọi F là trung điểm của BC , ta có $DF \parallel AB$ và $DK \parallel AB \Rightarrow D, K, F$ thẳng hàng.

Ta có $DK = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}DF \Rightarrow K$ là trung điểm của DF .

Suy ra IK là đường trung bình của $\triangle DEF \Rightarrow IK = \frac{1}{2}DE$.

Mà $DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow IK = \frac{1}{4}BC$ hay $BC = 4IK$.

□

Bài 7. Cho tam giác đều ABC . Trên tia đối tia AB lấy điểm D và trên tia đối tia AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn BE, AD, AC, AB .

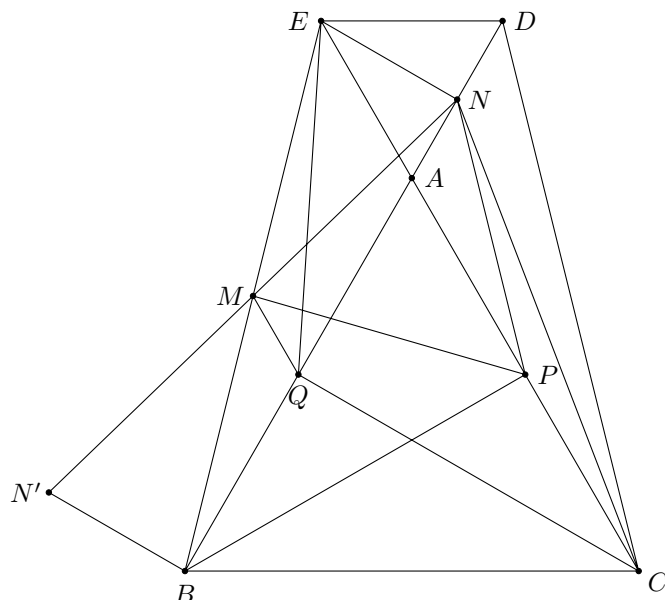
a) Chứng minh tứ giác $BDCE$ là hình thang cân.

b) Chứng minh tứ giác $CNEQ$ là hình thang.

c) Trên tia đối của tia MN , lấy điểm N' sao cho $N'M = MN$. Chứng minh rằng BN' vuông góc với BD ; $EB = 2 \cdot MN$.

d) Chứng minh rằng $\triangle MNP$ là tam giác đều.

Lời giải.



- a) Tam giác ADE đều (do $AE = AD$ và $\widehat{EAD} = 60^\circ$).
 $\Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{ABC} = 60^\circ$.
 $\Rightarrow ED \parallel BC$ (có hai góc so le trong bằng nhau). (1)
Mặt khác ta có $AB = AC$ và $AD = AE \Rightarrow BD = EC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BCDE$ là hình thang cân.
- b) Tam giác ABC đều có CQ là đường trung tuyến.
 $\Rightarrow CQ$ cũng là đường cao $\Rightarrow CQ \perp AB$ hay $CQ \perp BD$. (3)
Chứng minh tương tự ta cũng có $EN \perp BD$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $EN \parallel CQ$. Do đó $CNEQ$ là hình thang.
- c) Xét $\triangle MBN'$ và $\triangle MEN$, ta có:
 - $MN = MN'$ (gt)
 - $\widehat{NME} = \widehat{N'MB}$ (đối đỉnh)
 - $ME = MB$ (gt)
Do đó $\triangle MBN' = \triangle MEN$ (c.g.c)
Suy ra $\widehat{MNE} = \widehat{MN'B} \Rightarrow EN \parallel BN'$ (vì có cặp góc ở vị trí so le trong bằng nhau).
Mà $EN \perp BD$ nên $BN' \perp BD$.
Tam giác BNN' vuông tại B , có BM là đường trung tuyến $\Rightarrow BM = \frac{1}{2}NN' = MN$.
Do M là trung điểm của EB nên $EB = 2BM \Rightarrow EB = 2MN$.
- d) Tam giác ADC có NP là đường trung bình $\Rightarrow NP = \frac{1}{2}DC$.
Tam giác vuông NEB có NM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $\Rightarrow NM = \frac{1}{2}EB$.
Mà $EB = DC$ ($BCDE$ là hình thang cân) nên $NM = NP$. (5)
Tam giác BPE vuông tại P , PM là đường trung tuyến $\Rightarrow MP = \frac{1}{2}EB$.
Mà $EB = 2NM$ nên $MP = NM$. (6)
Từ (5) và (6) suy ra tam giác MNP đều.

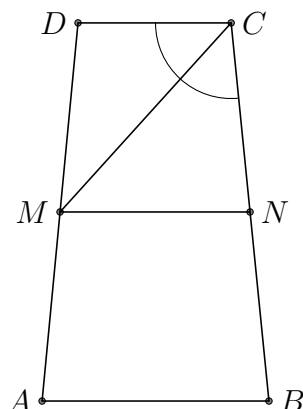
□

✦ **Bài 8.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của cạnh bên AD . Chứng minh rằng

a) $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

b) $BC = AB + CD$.

 **Lời giải.**



a) Chứng minh $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

Gọi N là trung điểm cạnh BC .

Ta có $MN \parallel CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{DCM} = \widehat{CMN}$ (So le trong).

Lại có $\widehat{DCM} = \widehat{MCN}$ (CM là đường phân giác góc $\widehat{DCN}$).

Suy ra $\widehat{MCN} = \widehat{CMN} \Rightarrow \triangle CMN$ cân tại $N \Rightarrow NM = NC = \frac{1}{2}CB$.

Xét $\triangle CMB$ có MN là đường trung tuyến và $NM = \frac{1}{2}CB$ nên suy ra $\triangle CMB$ vuông tại M hay $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

b) Chứng minh $BC = AB + CD$.

Trên BC lấy điểm E sao cho $CE = CD$.

Xét $\triangle CDM$ và $\triangle CEM$, ta có

$$\begin{cases} CD = CE \\ \widehat{DCM} = \widehat{ECM} \\ CM \text{ là cạnh chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle CDM = \triangle CEM \Rightarrow \begin{cases} MD = ME \\ \widehat{CDM} = \widehat{CEM} \\ \widehat{CMD} = \widehat{CME} \end{cases}$$

Mặt khác

$$\begin{cases} \widehat{BEM} + \widehat{CEM} = 180^\circ \\ \widehat{BAM} + \widehat{CDM} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{BAM}.$$

Lại có

$$\begin{cases} \widehat{BME} + \widehat{CME} = 90^\circ \\ \widehat{BMA} + \widehat{CMD} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BMA}.$$

Xét $\triangle BME$ và $\triangle BMA$, có

$$\begin{cases} \widehat{BEM} = \widehat{BAM} \\ ME = MA = MD \Rightarrow \triangle BME = \triangle BMA \Rightarrow BE = BA. \\ \widehat{BME} = \widehat{BMA} \end{cases}$$

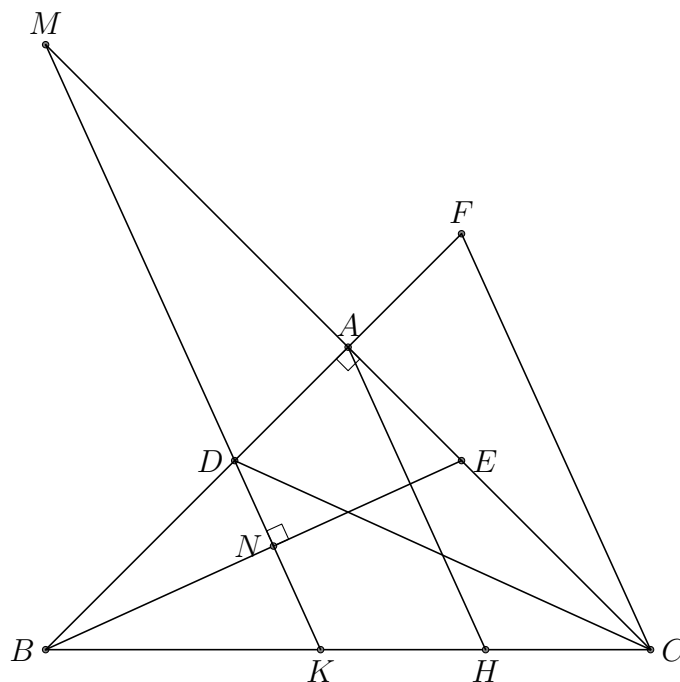
Do đó $AB + CD = EB + CE = BC$ (đpcm).



❖ **Bài 9.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên các cạnh góc vuông AB, AC lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BE , cắt BC ở K . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BE , cắt BC ở H . Gọi M là giao điểm của DK và AC . Chứng minh rằng

- $\triangle BAE = \triangle CAD$.
- MDC là tam giác cân.
- $KH = HC$.

💬 **Lời giải.**



- a) Chứng minh $\triangle BAE = \triangle CAD$.

Xét $\triangle BAE$ và $\triangle CAD$, có

$$\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{BAE} = \widehat{CAD} = 90^\circ \\ AE = AD \end{cases} \Rightarrow \triangle BAE = \triangle CAD.$$

- b) Chứng minh MDC là tam giác cân.

Gọi N là giao điểm của BE và DK . Xét $\triangle MNE$ vuông tại N , có

$$\widehat{DMA} + \widehat{NEM} = 90^\circ.$$

Xét $\triangle ABE$ vuông tại A có

$$\widehat{ABE} + \widehat{AEB} = 90^\circ.$$

Suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{ABE}$.

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{ABE} \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ACD}$.

Do đó $\triangle DMC$ cân tại D .

c) Chứng minh $KH = HC$.

Đựng $Cx \parallel DK$ và $Cx \cap AB = F$.

Ta có $\widehat{FCM} = \widehat{DMC}$ (so le trong). Suy ra $\widehat{FCA} = \widehat{DCA}$.

Xét $\triangle FCD$, có

$$\begin{cases} CA \perp DF \Rightarrow CA \text{ là đường cao} \\ \widehat{FCA} = \widehat{DCA} \Rightarrow CA \text{ là đường phân giác} \end{cases} \Rightarrow \triangle FCD \text{ cân tại } C.$$

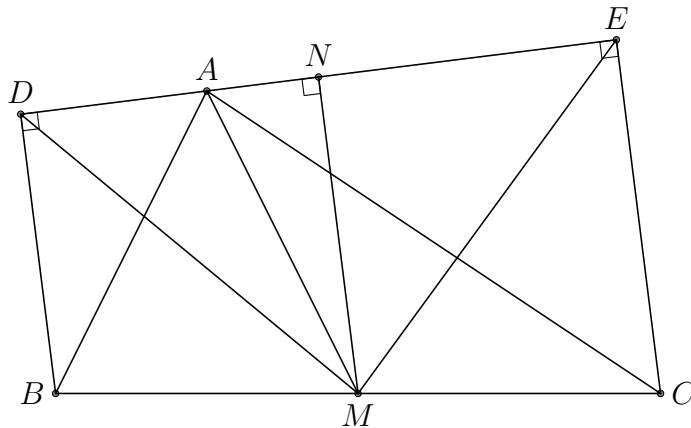
Suy ra A là trung điểm DF . Lại có $AH \parallel DK \parallel CF$ nên AH là đường trung bình hình thang $DKCF$.

Do đó $KH = HC$.

□

⇒ **Bài 10.** Cho $\triangle ABC$, đường thẳng d đi qua A không cắt các cạnh của tam giác ABC . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng d . Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng $MD = ME$.

💬 **Lời giải.**



Ta có

$$\begin{cases} BD \perp DE \\ CE \perp DE \end{cases} \Rightarrow BD \parallel CE \Rightarrow BDEC \text{ là hình thang vuông.}$$

Gọi N là trung điểm DE , ta có MN là đường trung bình hình thang $BDEC$

Suy ra $MN \parallel BD \parallel CE \Rightarrow MN \perp DE$.

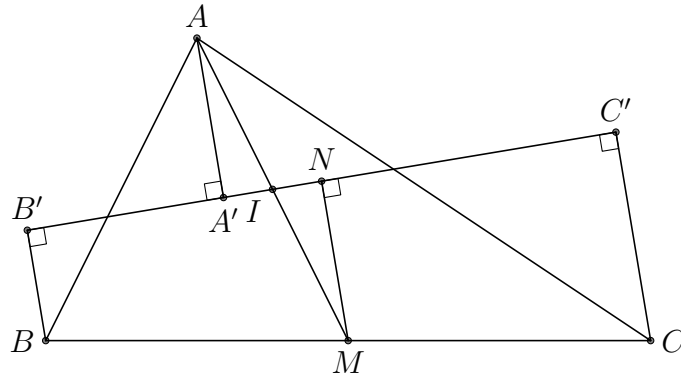
Xét $\triangle MDE$, có

$$\begin{cases} MN \perp DE \Rightarrow MN \text{ là đường cao} \\ DN = NE \Rightarrow MN \text{ là đường trung tuyến} \end{cases} \Rightarrow \triangle DME \text{ cân tại } M \Rightarrow MD = ME.$$

□

❖ **Bài 11.** Cho $\triangle ABC$, AM là trung tuyến. Vẽ đường thẳng d qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB , AC . Gọi A' , B' , C' thứ tự là hình chiếu của A , B , C lên đường thẳng d . Chứng minh rằng $BB' + CC' = 2AA'$.

💬 **Lời giải.**



Ta có

$$\begin{cases} BB' \perp d \\ CC' \perp d \end{cases} \Rightarrow BB' \parallel CC' \Rightarrow BB'C'C \text{ là hình thang.}$$

Gọi N là hình chiếu vuông góc của M xuống đường thẳng d .

Ta có $MN \parallel BB' \parallel CC'$ và M là trung điểm của BC nên MN là đường trung bình của hình thang $BB'C'C$, do đó

$$BB' + CC' = 2MN.$$

Lại xét $\triangle AA'I$ và $\triangle MNI$, có

$$\begin{cases} AI = MI \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{AIA'} = \widehat{MIN} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{AA'I} = \widehat{MNI} = 90^\circ. \end{cases} \Rightarrow \triangle AA'I = \triangle MNI \Rightarrow AA' = MN.$$

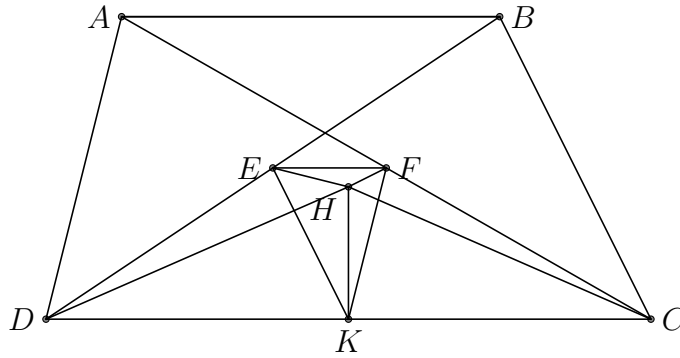
Từ đó suy ra $BB' + CC' = 2AA'$. □

❖ **Bài 12.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E , F , K lần lượt là trung điểm của BD , AC , DC . Gọi H là giao điểm của đường thẳng qua E vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC . Chứng minh rằng

a) H là trực tâm của $\triangle EFK$.

b) $\triangle HCD$ cân.

💬 **Lời giải.**



- a) Chứng minh H là trực tâm của $\triangle EFK$.
Xét $\triangle DBC$, có

$$\begin{cases} ED = EB \\ DK = KC \end{cases} \Rightarrow EK \parallel BC \Rightarrow FH \perp EK.$$

Xét $\triangle ADC$, có

$$\begin{cases} CF = AF \\ DK = KC \end{cases} \Rightarrow FK \parallel AD \Rightarrow EH \perp FK.$$

Xét $\triangle KEF$, có

$$\begin{cases} FH \perp EK \\ EH \perp FK \end{cases} \Rightarrow H \text{ là trực tâm } \triangle KEF.$$

- b) Chứng minh $\triangle HCD$ cân.

Ta có H là trực tâm $\triangle KEF \Rightarrow KH \perp EF$.

Gọi M là trung điểm BC suy ra EM là đường trung bình $\triangle BDC \Rightarrow EM \parallel CD$.

Lại có FM là đường trung bình $\triangle ABC \Rightarrow FM \parallel AB \Rightarrow FM \parallel CD$.

Suy ra E, F, M thẳng hàng hay $EF \parallel CD \Rightarrow KH \perp CD$.

Xét tam giác HDC , có

$$\begin{cases} HK \perp CD \Rightarrow HK \text{ là đường cao} \\ DK = KC \Rightarrow HK \text{ là đường trung tuyến} \end{cases} \Rightarrow \triangle HCD \text{ cân tại } H.$$

□

Bài 6

ĐỐI XỨNG TRỤC

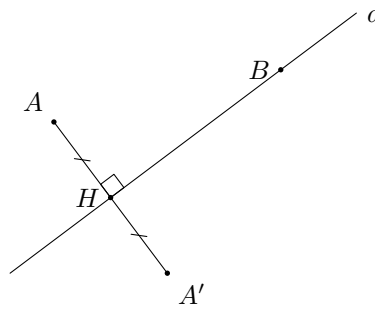


TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hai điểm đối xứng nhau qua một đường thẳng

Định nghĩa 6.1. Hai điểm đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

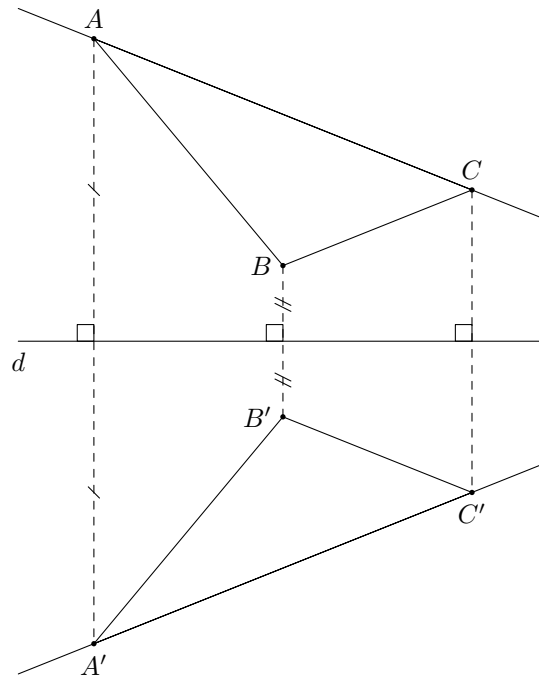
Quy ước: Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d cũng là điểm B .



2. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng

Định nghĩa 6.2. Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.



Nếu ba điểm không thẳng A, B, C lần lượt đối xứng với A', B', C' qua đường thẳng d thì

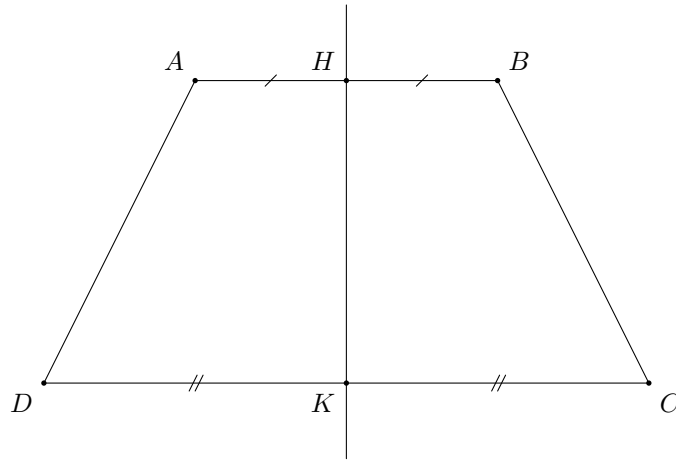
- ☑ Hai đường thẳng AC và $A'C'$ đối xứng với nhau qua đường thẳng d .
- ☑ Hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ đối xứng với nhau qua đường thẳng d và $AB = A'B'$.
- ☑ Hai góc ABC và $A'B'C'$ đối xứng với nhau qua đường thẳng d và $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
- ☑ Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đối xứng với nhau qua đường thẳng d và $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

3. Hình có trục đối xứng

Định nghĩa 6.3. Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H .

Khi đó ta nói hình H có trục đối xứng d .

Định lý 6.1. Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân.

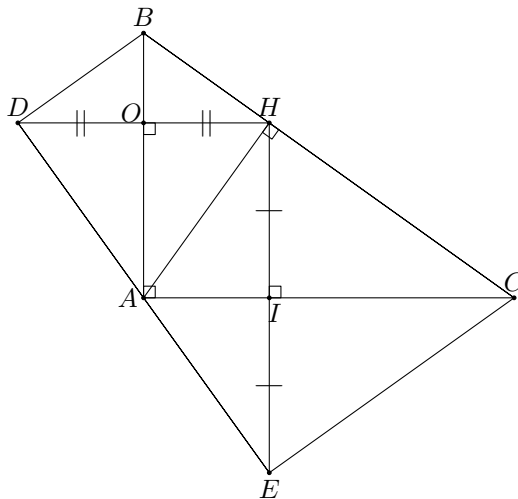


B BÀI TẬP

✎ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là điểm đối xứng của điểm H qua AB và AC . Chứng minh rằng:

- A là trung điểm của đoạn DE .
- Tứ giác $BDEC$ là hình thang vuông.
- Cho $BH = 2\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$. Tính AH và chu vi hình thang $BDEC$.

💬 **Lời giải.**



- Vì AH và AD đối xứng với nhau qua AB nên $AH = AD$ và $\widehat{HAB} = \widehat{DAB}$.
Vì AH và AE đối xứng với nhau qua AC nên $AH = AE$ và $\widehat{HAC} = \widehat{EAC}$.
Do đó $\widehat{DAE} = 2\widehat{BAC} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ và $AD = AE (= AH)$.
Vậy A là trung điểm DE .
- Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ (theo tính chất đối xứng của đoạn thẳng).
Ta lại có $\widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ (theo tính chất đối xứng của đoạn thẳng).
Do đó $BDEC$ là hình thang vuông.
- Trong $\triangle AHB$ vuông tại H , có $AB^2 = AH^2 + BH^2$ (theo định lý Py-ta-go).
Trong $\triangle AHC$ vuông tại H , có $AC^2 = AH^2 + HC^2$ (theo định lý Py-ta-go).

(1)
(2)

Trong $\triangle ABC$ vuông tại A , có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (theo định lý Py-ta-go). (3)

Mà $BC = BH + HC = 2 + 8 = 10$ cm. (2)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. (2)

Từ (4), (5) và $BH = 2$ cm, $CH = 8$ cm ta được

$10^2 = 2AH^2 + 2^2 + 8^2 \Rightarrow AH = 4$ cm (vì $AH > 0$).

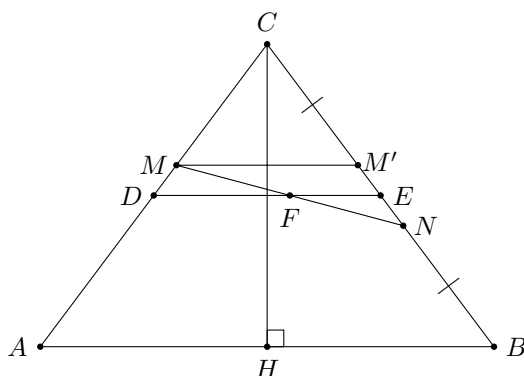
□

❖ **Bài 2.** Trên các cạnh bên CA, CB của tam giác CAB cân tại C lấy các điểm M, N sao cho $CM + CN = AC$

a) Trên cạnh CB lấy điểm M' sao cho $CM' = BN$. Chứng minh rằng M, M' đối xứng nhau qua đường cao CH của tam giác CAB .

b) Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, MN . Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**



a) Ta có
$$\begin{cases} CM + CN = AC \\ BN + CN = AC \Rightarrow CM = CM' \\ CM' = BN \end{cases}$$

Xét $\triangle CMM'$ có $CM = CM'$ suy ra $\triangle CMM'$ cân tại C . (1)

Đặt $I = CH \cap MM'$ suy ra CI là đường cao của $\triangle CMM'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra CI cũng là đường trung trực $\triangle CMM'$ hay CI là trung trực MM' .

Do đó M và M' đối xứng qua CH .

b) Ta có
$$\begin{cases} CE = BE \\ CM' = BN \\ CE = CM' + M'E \Rightarrow M'E = EN \\ BE = BN + NE \end{cases}$$

Vậy E là trung điểm $M'N$.

Mà E là trung điểm MM' (gt).

Do đó EF là đường trung bình trong $\triangle NMM'$ suy ra $EF \parallel MM'$. (3)

Ta lại có D là trung điểm AC và E là trung điểm BC nên DE là đường trung bình trong $\triangle ABC$ suy ra $DE \parallel AB$. (4)

Mặt khác $\begin{cases} MM' \perp CH \\ AB \perp CH \end{cases} \Rightarrow MM' \parallel AB$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $DE \parallel MM'$. (6)

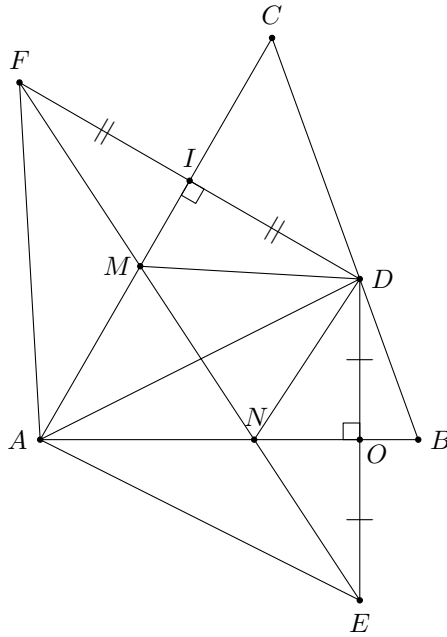
Từ (3) và (6) suy ra D, E, F thẳng hàng.

□

✎ **Bài 3.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn trong đó góc A có số đo bằng 60° . Lấy D là điểm bất kì trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của D qua cạnh AB và AC . EF cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại M và N .

- Chứng minh rằng $AE = AF$.
- Tính $\widehat{EAF}$.
- Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN .

💬 **Lời giải.**



- Vì AC là trung trực của FD nên $AF = AD$ (t/c đường trung trực của đoạn thẳng). (1)
 - Vì AB là trung trực của DE nên $AE = AD$ (t/c đường trung trực của đoạn thẳng). (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $AF = AE (= AD)$.

- Đặt $\begin{cases} I = AC \cap BD \\ O = DE \cap AB. \end{cases}$

Ta có $\widehat{FAI} = \widehat{DAI}$ và $\widehat{DAO} = \widehat{EAO}$ (tính chất đối xứng của đường trung trực). (3)

Mà $\widehat{DAI} + \widehat{DAO} = \widehat{IAO} = \widehat{CAB} = 60^\circ$. (4)

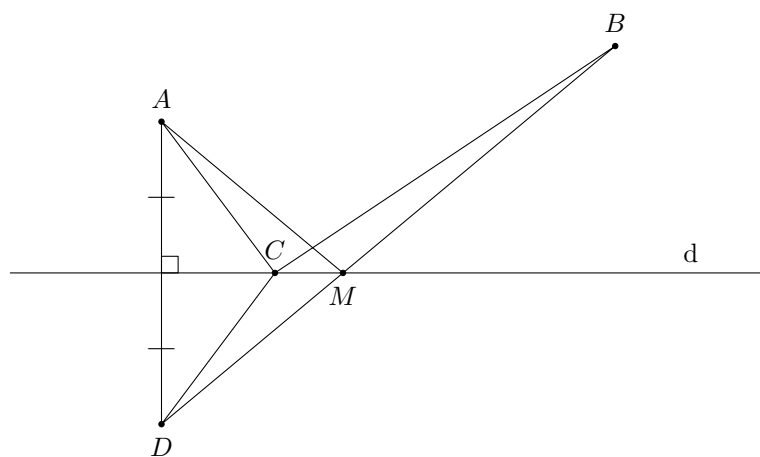
Từ (3) và (4) ta được $\widehat{FAI} + \widehat{DAI} + \widehat{DAO} + \widehat{EAO} = 2 \cdot (\widehat{DAI} + \widehat{DAO}) = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.
 Vậy $\widehat{EAF} = 120^\circ$.

- Theo tính chất đối xứng trục thì $\widehat{MDA} = \widehat{MFA}$, $\widehat{NDA} = \widehat{NEA}$.
 Mà $\triangle AEF$ cân nên $\widehat{MFA} = \widehat{NEA}$, suy ra DA là phân giác của góc MDN .

□

✎ **Bài 4.** Cho hai điểm A và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d . Tìm trên d một điểm C sao cho tổng độ dài $CA + CB$ là ngắn nhất.

💬 **Lời giải.**



Lấy D là điểm đối xứng với A qua d .

Theo tính chất đường trung trực: $CA = CD$. Do đó $CA + CB = CD + CB$.

Gọi M là giao điểm của BD và d .

Nếu C không trùng với M thì xét $\triangle BCD$, ta có: $CB + CD > BD$ hay $CA + CB > BD$ (1)

Nếu C trùng với M thì: $CA + CB = MA + MB = MD + MB = BD$. (2)

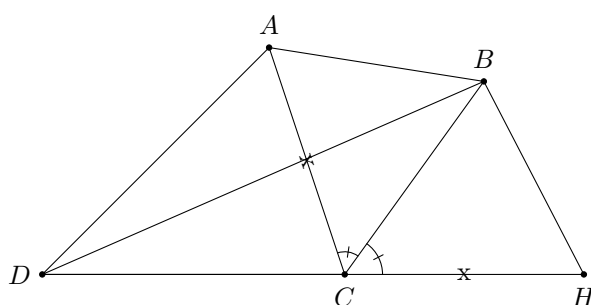
So sánh (1) và (2) ta thấy điểm C trùng M hay C là giao điểm của BD và d thì giá trị của tổng $CA + CB$ là nhỏ nhất.

Chú ý: Điểm C tìm được ở vị trí M như vậy là điểm duy nhất.

Thật vậy, nếu lấy E đối xứng với B qua d thì AE vẫn cắt d ở M đúng vị trí mà BD cắt d . □

✦ **Bài 5.** Cho tứ giác $ABCD$ có góc ngoài của tứ giác tại đỉnh C bằng góc ACB . Chứng minh rằng $AB + DB > AC + DC$.

💬 **Lời giải.**



Trên tia đối của tia CD lấy H sao cho $AC = HC$, nối B với H .

Vì $\triangle BCA = \triangle BCH$ (c.g.c) nên $AB = BH$ (hai cạnh tương ứng).

Do đó $AB + BD = BH + BD$. (1)

Mà $AC = HC$ (gt) $\Rightarrow AC + CD = CH + CD$, mà $HC + DC = DH$. (2)

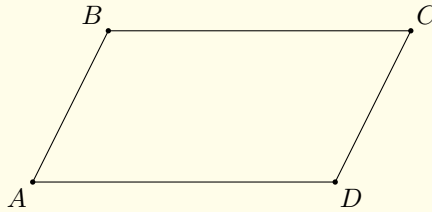
Trong $\triangle DBH$ có $BD + BH > DH$ (bất đẳng thức tam giác). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AB + BD (= BH + BD) > AC + CD (= HC + DC = DH)$. □

A

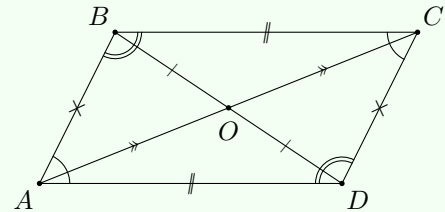
TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 7.1. Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.



Định lý 7.1. Trong hình bình hành

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



Định lý 7.2 (Dấu hiệu nhận biết hình bình hành).

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường là hình bình hành.

B

BÀI TẬP

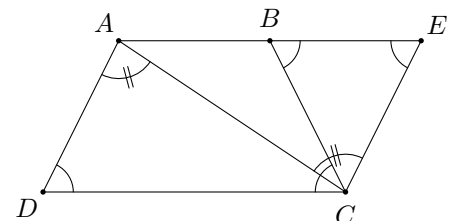
Bài 1. Cho hình thang cân $ABCD$, $AB \parallel CD$ và $AB < CD$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $CB = CE$. Chứng minh rằng tứ giác $AECD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Do $CB = CE$ nên tam giác CBE cân tại C , suy ra

$$\widehat{CEB} = \widehat{CBE} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA}.$$

Lại có $AE \parallel CD$ nên $\widehat{CAE} = \widehat{ACD}$. Do đó



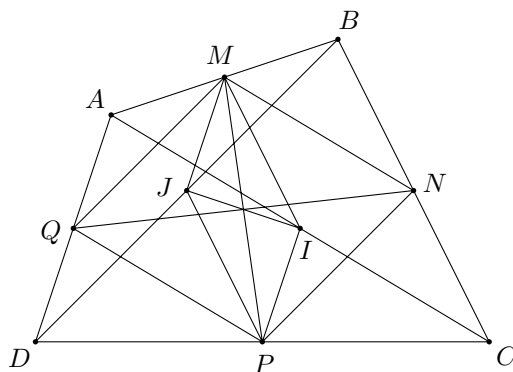
$$\widehat{CAD} = 180^\circ - \widehat{CDA} - \widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{AEC} - \widehat{CAE} = \widehat{ACE},$$

kéo theo $AD \parallel EC$. Mà $ABCD$ là hình thang cân nên $AD = BC = CE$, do đó $ADCE$ là hình bình hành.

❖ **Bài 2.** Cho tứ giác $ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

- Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.
- Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD . Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu I trùng J ? Vì sao?
- Giả sử I không trùng J , chứng minh rằng các đường thẳng MP, QN, IJ đồng quy tại một điểm.

💬 **Lời giải.**



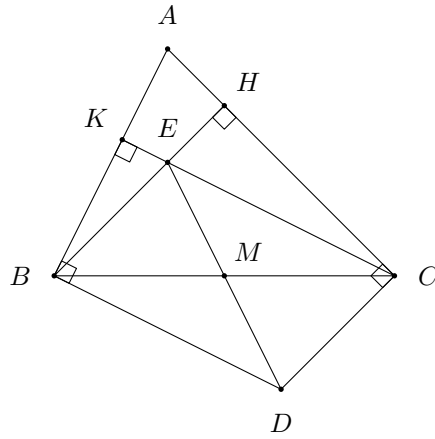
- Dễ thấy MN là đường trung bình của tam giác ABC , do đó $MN \parallel AC$ và $MN = \frac{AC}{2}$. Tương tự, ta có $PQ \parallel AC$ và $PQ = \frac{AC}{2}$. Suy ra $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$ hay $MNPQ$ là hình bình hành.
- Nếu I trùng J thì $ABCD$ là tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, tức $ABCD$ là hình bình hành.
- Tương tự a), ta chỉ ra được $MI \parallel PJ \parallel BC$ và $MI = PJ = \frac{BC}{2}$, do đó $MIPJ$ là hình bình hành. Mà $MNPQ$ cũng là hình bình hành nên MP, NQ, IJ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

□

❖ **Bài 3.** Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BH và CK cắt nhau tại E . Đường thẳng qua B vuông góc với AB và đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt nhau tại D . Gọi M là trung điểm của BC .

- Tứ giác $BDCE$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh rằng M là trung điểm của DE . Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện gì để DE đi qua A ?
- Chứng minh rằng $\widehat{BAC} + \widehat{BEC} = 180^\circ$.

💬 **Lời giải.**



a) Ta có $BD \parallel CE$, do cùng vuông góc với AB . Tương tự $CD \parallel BE$. Từ đó $BDCE$ là hình bình hành.

b) Do $BDCE$ là hình bình hành và M là trung điểm BC nên M cũng là trung điểm DE .

Đề ý E là trực tâm tam giác ABC , suy ra $AE \perp BC$. Do đó điểm A nằm trên đường thẳng DE khi DE vuông góc với BC , hay $AM \perp BC$, tức tam giác ABC cân tại A .

c) Ta có

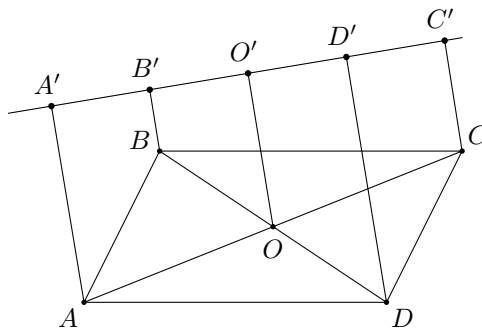
$$\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 360^\circ - \widehat{ABD} - \widehat{ACD} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ.$$

□

⇒ **Bài 4.** Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O , đường thẳng d nằm ngoài hình bình hành. Gọi A', B', C', D', O' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, O trên đường thẳng d . Chứng minh rằng

$$AA' + CC' = BB' + DD' = 2OO'.$$

💬 **Lời giải.**



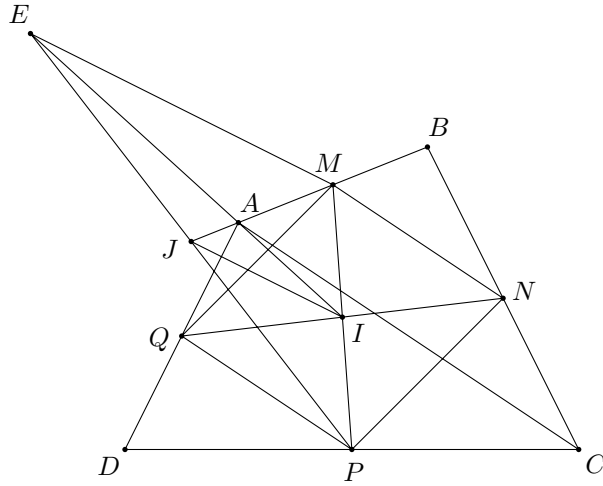
Do $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC , suy ra OO' là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$, do đó $AA' + CC' = 2OO'$. Hoàn toàn tương tự, ta có $BB' + DD' = 2OO'$. □

⇒ **Bài 5.** Cho tứ giác $ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Gọi I là giao điểm của MP và QN . Gọi E là điểm trên tia IA sao cho $EA = 2AI$ và J là giao điểm của tia MA và EP . Chứng minh rằng IJ song song với ME .

Lời giải.



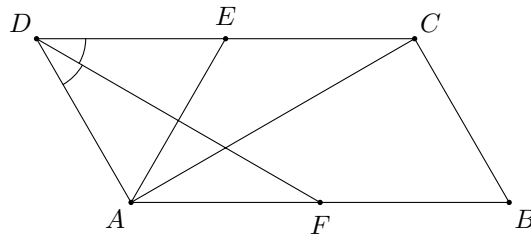
- a) Dễ thấy MN là đường trung bình của tam giác ABC , do đó $MN \parallel AC$ và $MN = \frac{AC}{2}$. Tương tự, ta có $PQ \parallel AC$ và $PQ = \frac{AC}{2}$. Suy ra $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$ hay $MNPQ$ là hình bình hành.
- b) Do $MNPQ$ là hình bình hành nên I là trung điểm của MP . Mà $EA = 2AI$ nên A là trọng tâm tam giác MEP , do đó J là trung điểm EP . Điều này dẫn đến IJ là đường trung bình của tam giác PEM . Vậy IJ song song với ME .

□

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$, phân giác $\widehat{D}$ đi qua trung điểm của cạnh AB . Gọi E là trung điểm của CD . Chứng minh rằng

- a) $AB = 2AD$. b) $\triangle ADE$ đều, $\triangle AEC$ cân. c) $AC \perp AD$.

Lời giải.



- a) Gọi F là trung điểm của AB . Do $\widehat{DAB} = 120^\circ$ và $ABCD$ là hình bình hành nên $\widehat{ADC} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{AFD} = \widehat{CDF} = \widehat{ADF} = 30^\circ$ hay tam giác ADF cân tại A . Vậy $AB = 2AF = 2AD$.
- b) Ta có $DE = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2} = DA$ và $\widehat{ADE} = 60^\circ$ nên tam giác DAE đều. Suy ra $EA = ED = \frac{CD}{2} = EC$ hay tam giác AEC cân tại E .
- c) Do tam giác EAC cân tại E nên $\widehat{DEA} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} = 2\widehat{EAC}$, suy ra $\widehat{EAC} = 30^\circ$. Do đó $\widehat{DAC} = \widehat{DAE} + \widehat{EAC} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

Vậy $AC \perp AD$.

✎ **Bài 7.** Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh BC và AD sao cho $BE = \frac{1}{3}BC$, $DF = \frac{1}{3}DA$ và EF lần lượt cắt AB và CD tại G và H .

- Chứng minh rằng $GE = EF = FH$.
- Chứng minh rằng tứ giác $AECF$ là hình bình hành.
- Trên tia đối của tia AG , lấy điểm I sao cho $AI = AG$. Chứng minh rằng C, F, I thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**

- a) Chứng minh rằng $GE = EF = FH$.

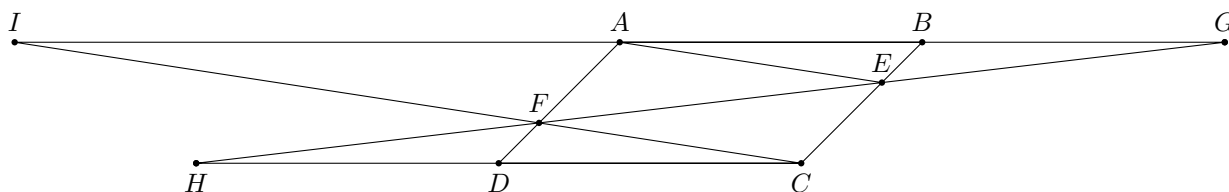
Ta có $BE = \frac{1}{3}BC$, $AF = \frac{2}{3}AD$ và $BC = AD$ nên $\frac{BE}{AF} = \frac{1}{2}$.

Vì $BE \parallel AF$ nên $\triangle GBF \sim \triangle GAF$ nên ta có $\frac{GE}{GF} = \frac{BE}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow GE = EF$. (1)

Ta có $DF = \frac{1}{3}DA$, $CE = \frac{2}{3}CB$ và $DA = CB$ nên $\frac{DF}{CE} = \frac{1}{2}$.

Vì $DF \parallel CE$ nên $\triangle HDF \sim \triangle HCE$ nên ta có $\frac{HF}{HE} = \frac{DF}{CE} = \frac{1}{2} \Rightarrow HF = EF$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $GE = EF = FH$.



- b) Chứng minh rằng tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

Ta có $AF = \frac{2}{3}AD$, $CE = \frac{2}{3}CB$ và $AD = CB$ nên $AF = EC$, mà $AF \parallel EC$, suy ra $AECF$ là hình bình hành.

- c) Trên tia đối của tia AG , lấy điểm I sao cho $AI = AG$. Chứng minh rằng C, F, I thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} \frac{BA}{BI} = \frac{1}{3} \\ \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{BA}{BI} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow CI \parallel EA$, mà $CF \parallel EA$, suy ra C, F, I thẳng hàng.

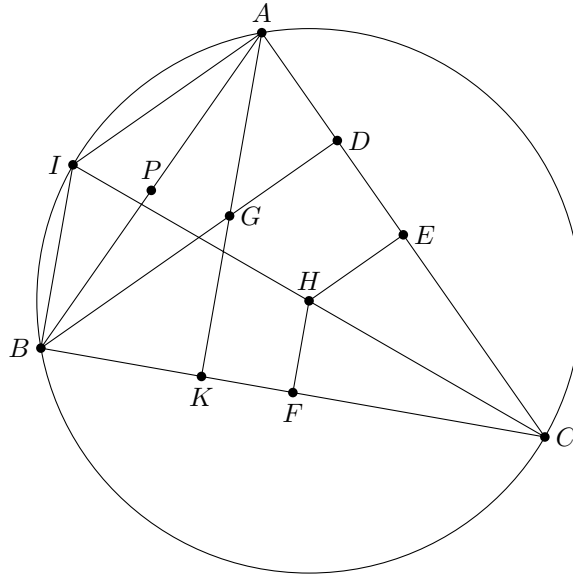
✎ **Bài 8.** Cho tam giác ABC , các đường cao AK và BD cắt nhau tại G . Vẽ các đường trung trực HE, HF của các cạnh AC và BC (với E, F lần lượt là trung điểm của AC và BC). Đường thẳng qua A và song song với BG cắt đường thẳng qua B và song song với AK tại I . Chứng minh rằng

- $BG = AI$.
- $BG = 2HE$.

💬 **Lời giải.**

a) $BG = AI$.

Vì $\begin{cases} AI \parallel GB \\ AG \parallel IB \end{cases}$ nên $ABCD$ là hình bình hành, suy ra $BG = IA$.



b) $BG = 2HE$.

Ta có $\widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 90^\circ$, mà $\widehat{IAB} = \widehat{ABD}$ nên $\widehat{IAB} + \widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAD} = 90^\circ$.

Ta có $\begin{cases} IA \perp AC \\ HE \perp AC \end{cases} \Rightarrow IA \parallel EH$, suy ra EH đi qua trung điểm của IC . (1)

Tương tự, ta có $IB \parallel FH$, suy ra FH đi qua trung điểm của IC . (2)

Từ (1) và (2) ta có H là trung điểm IC . Khi đó HE là đường trung bình của tam giác CIA nên

$$HE = \frac{1}{2}IA = \frac{1}{2}BG \text{ hay } BG = 2HE.$$

□

✧ **Bài 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng các tam giác đều ABE , ADF bên ngoài hình bình hành $ABCD$. Gọi M , N , I lần lượt là trung điểm của AF , BD , AE . Chứng minh rằng

a) $\triangle CEF$ đều.

b) $\widehat{MNI} = 60^\circ$.

💬 **Lời giải.**

a) $\triangle CEF$ đều.

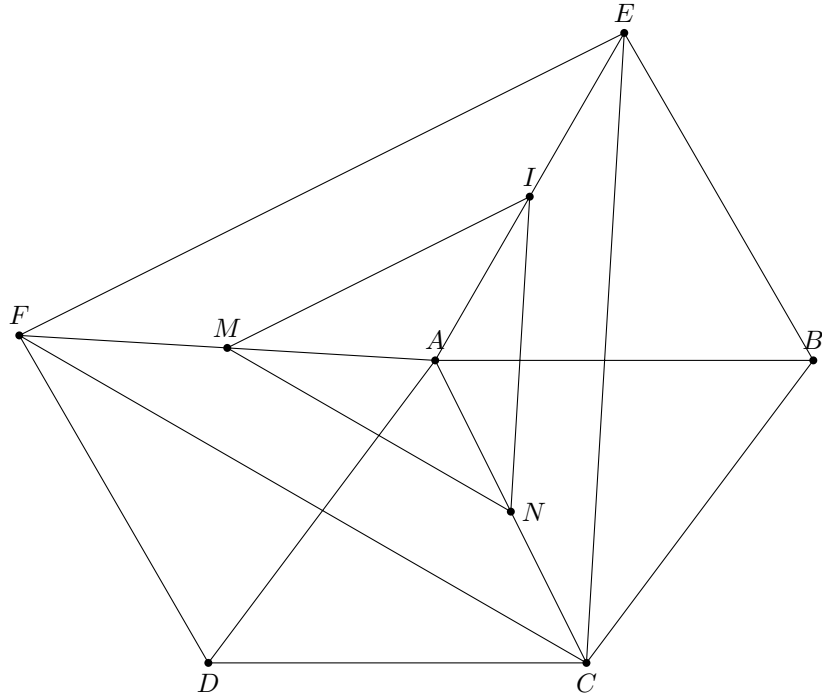
Xét $\triangle CDF$ và $\triangle EBC$ có $\begin{cases} CD = AB = EB \\ FD = AD = BC \\ \widehat{FDC} = 60^\circ + \widehat{ADC} = 60^\circ + \widehat{ABC} = \widehat{EBC}. \end{cases}$

Suy ra $\triangle CDF = \triangle EBC \Rightarrow CF = CE$. (1)

Ta có $\widehat{EAF} = 240^\circ - \widehat{DAB} = 240^\circ - (180^\circ - \widehat{ABC}) = 60^\circ + \widehat{ABC} = \widehat{EBC}$.

Mà $AE = BE$, $AF = AD = BC$ nên $\triangle EAF = \triangle CBE \Rightarrow EF = CE$. (2).

Từ (1) và (2) ta có $EF = FC = CE$ nên $\triangle CEF$ đều.



b) $\widehat{MNI} = 60^\circ$.

IN là đường trung bình của $\triangle AEC$ nên $IN = \frac{1}{2}EC$ (3).

IM là đường trung bình của $\triangle AEF$ nên $IM = \frac{1}{2}EF$ (4).

MN là đường trung bình của $\triangle AFC$ nên $MN = \frac{1}{2}FC$ (5).

Từ (3), (4), (5) ta có $NI = IM = MN$ nên $\triangle MNI$ đều, suy ra $\widehat{MNI} = 60^\circ$.

□

✧ **Bài 10.** Cho hình bình hành $ABCD$. Các phân giác của góc $\widehat{A}$ và $\widehat{D}$ cắt nhau tại M , các phân giác của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại N . Chứng minh $MN \parallel AB$.

💬 **Lời giải.**

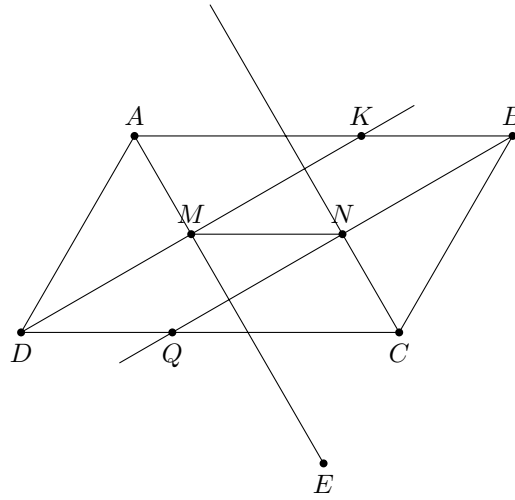
Gọi K là giao điểm của đường phân giác góc $\widehat{D}$ và AB , Q là giao điểm của đường phân giác góc $\widehat{B}$ và CD .

Ta có $\widehat{NBC} + \widehat{NCB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow CN \perp BQ \Rightarrow \triangle CBQ$ cân tại C và N là trung điểm BQ .

Tương tự ta có M là trung điểm DK .

Vì $AK = AD = BC = CQ$ nên $KB = DQ$, suy ra $KBQC$ là hình bình hành, mà M, N lần lượt là trung điểm DK, BQ , suy ra $MN \parallel KB$ hay $MN \parallel AB$.





✧ **Bài 11.** Cho hình bình hành $ABCD$, $\widehat{A}$ là góc nhọn, AC cắt BD tại O , $DE \perp AB$ tại E , $DF \perp BC$ tại F .

- Chứng minh $\triangle FOE$ cân.
- Giả sử $\widehat{BAD} = m$. Tính $\widehat{EOF}$ theo m .

🗨 **Lời giải.**

- Chứng minh $\triangle FOE$ cân.

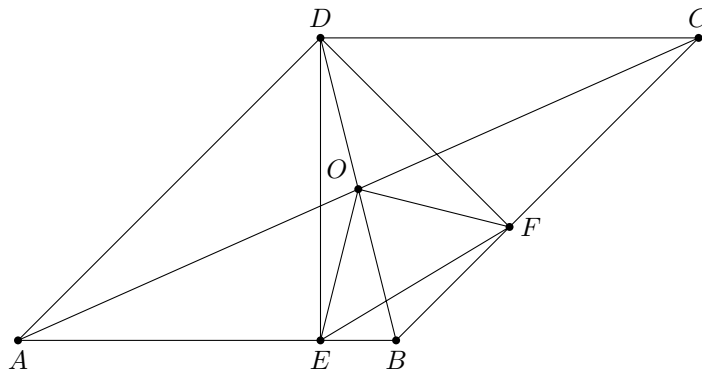
Vì $\triangle DFB$ vuông tại F và O là trung điểm BD nên $OF = \frac{DB}{2}$.

Vì $\triangle DEB$ vuông tại E và O là trung điểm BD nên $OE = \frac{DB}{2}$.

Suy ra $OF = OE$ nên $\triangle OEF$ cân tại O .

- Giả sử $\widehat{BAD} = m$. Tính $\widehat{EOF}$ theo m .
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{EOF} &= \widehat{EOB} + \widehat{BOF} = 180^\circ - 2\widehat{OBE} + 180^\circ - 2\widehat{OBF} = 360^\circ - 2\widehat{EBF} \\ &= 2(180^\circ - \widehat{ABC}) = 2\widehat{BAD} = 2m.\end{aligned}$$



A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hai điểm đối xứng nhau qua một điểm

Định lý 8.1. Nội dung định lý

Định nghĩa 8.1. Hai điểm gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

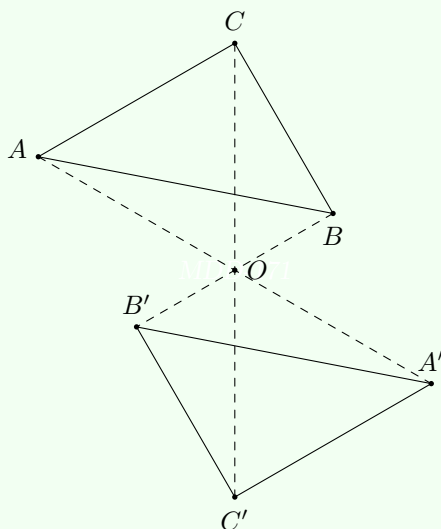
Quy ước: Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O cũng là điểm O .

⚠ Nội dung chú ý

2. Hai hình đối xứng nhau qua một điểm

Định nghĩa 8.2. Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại. Khi đó điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình H và H' .

Định lý 8.2. Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.



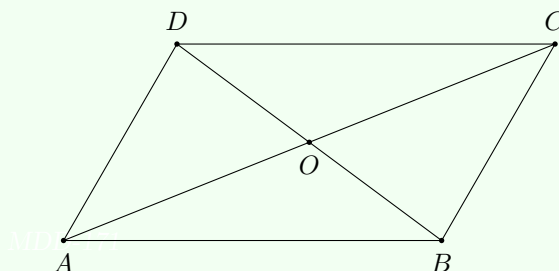
Nếu ba điểm không thẳng hàng A, B, C lần lượt đối xứng với A', B', C' qua tâm O thì

- ☑ Hai đường thẳng AC và $A'C'$ đối xứng với nhau qua tâm O .
- ☑ Hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ đối xứng với nhau qua tâm O và $AB = A'B'$.
- ☑ Hai góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{A'B'C'}$ đối xứng nhau qua tâm O và $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
- ☑ Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đối xứng nhau qua tâm O và $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

3. Hình có tâm đối xứng

Định nghĩa 8.3. Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H (hay hình H có tâm đối xứng là O) nếu mỗi điểm thuộc hình H có điểm đối xứng qua O cũng thuộc hình H .

Định lý 8.3. Giao điểm hai đường chéo hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.



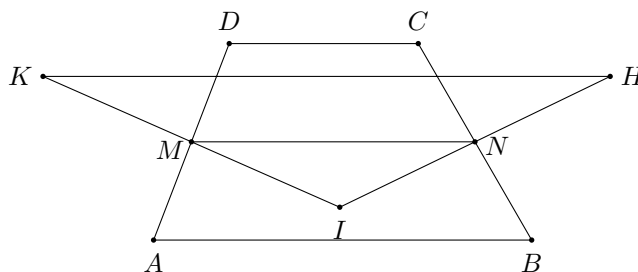
B BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ với $(AB \parallel CD)$, I là một điểm bất kỳ ở miền trong của hình thang $ABCD$ và không nằm trên đường thẳng chứa cạnh nào của hình thang. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Gọi K, H lần lượt là điểm đối xứng của I qua M và N . Chứng minh rằng

a) $KH \parallel CD$.

b) $KH = AB + CD$.

Lời giải.



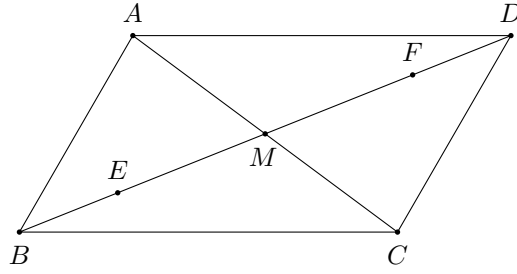
- a) Điểm K là đối xứng với I qua điểm M nên M là trung điểm của cạnh IK .
Điểm H là đối xứng với I qua điểm N nên N là trung điểm của cạnh IH .
Do đó MN là đường trung bình của tam giác IHK , suy ra $MN \parallel HK$ (1).
Hình thang $ABCD$ có đường trung bình là MN nên $MN \parallel CD$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $HK \parallel CD \parallel MN$.

- b) Do MN là đường trung bình của $\triangle IHK$ nên $HK = 2MN$. (3) Mặt khác MN cũng là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $AB + CD = 2MN$. (4)
Từ (3) và (4) ta có $HK = AB + CD = 2MN$.

□

Bài 2. Cho tam giác ABC . Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng qua C song song với AB tại D . Gọi M là trung điểm cạnh AC . Lấy E, F lần lượt trên các đoạn thẳng MB, MD sao cho $EB = FD$. Chứng minh rằng E đối xứng với điểm F qua M .

Lời giải.



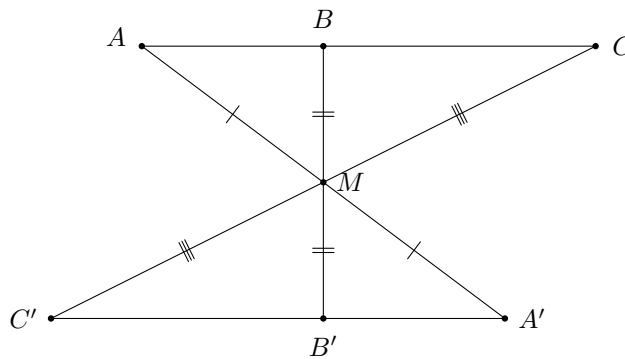
Xét tứ giác $ABCD$ có $\begin{cases} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD \end{cases}$ nên là hình bình hành.

Mà M là trung điểm của đường chéo AC nên cũng là trung điểm của đường chéo BD hay $MB = MD$. Khi đó $MB - BE = MD - DF \Leftrightarrow EM = FM$, mà E, M, F thẳng hàng nên M là trung điểm cạnh EF .

Vậy E đối xứng với điểm F qua M . □

🔗 **Bài 3.** Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M không thuộc đường thẳng đó. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C qua M . Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**



Xét $\triangle ABM$ và $\triangle A'B'M$

- ☑ $MB = MB'$ (giả thiết).
- ☑ $MA = MA'$ (giả thiết).
- ☑ $\widehat{AMB} = \widehat{A'MB'}$ (đối đỉnh).

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle A'B'M$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MA'B'} \Rightarrow AB \parallel A'B'$.

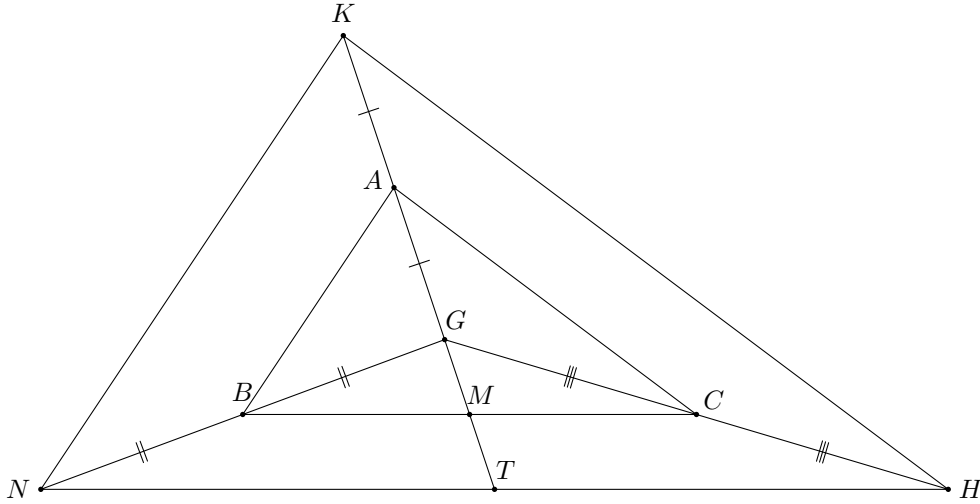
Tương tự $\triangle AMC = \triangle A'MC' \Rightarrow AC \parallel A'C'$.

Ta có $\begin{cases} AB \parallel A'B' \\ AC \parallel A'C' \end{cases}$. Mà A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow \begin{cases} AC \parallel A'B' \\ AC \parallel A'C' \end{cases}$. Do đó A', B', C' thẳng hàng. □

🔗 **Bài 4.** Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM và G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Gọi K, N, H lần lượt là các điểm đối xứng của G qua A, B, C . Gọi T là giao điểm của tia KG với NH .

- a) Chứng minh rằng M là trung điểm của GT .
- b) Chứng minh rằng G là trọng tâm của $\triangle KNH$.

💬 **Lời giải.**



a) Xét $\triangle NGH$ có $\begin{cases} B \text{ là trung điểm của } GN \\ C \text{ là trung điểm của } GH \end{cases} \Rightarrow BC \text{ là đường trung bình.}$
 $\Rightarrow BC \parallel NH$ hay $BC \parallel NT$.

Xét $\triangle NGT$ có $\begin{cases} B \text{ là trung điểm của } GN \\ BC \parallel NT \end{cases} \Rightarrow M \text{ là trung điểm của } GT.$

b) Ta có BM là đường trung bình của $\triangle NGT$ nên $BM = \frac{1}{2}NT$.

Ta có MC là đường trung bình của $\triangle GTH$ nên $MC = \frac{1}{2}TH$.

Mà $BM = MC \Rightarrow NT = TH$ hay T là trung điểm của NH .

Do đó KT là đường trung tuyến của $\triangle KNH$.

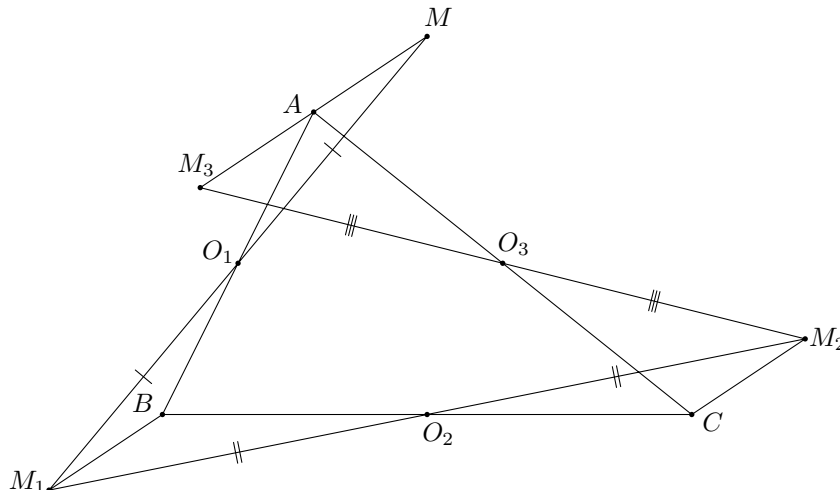
Ta có $\begin{cases} AG = 2GM \\ GT = 2GM \end{cases} \Rightarrow AG = GT$. Mà $KA = AG$ nên $KA = AG = GT$ hay $KG = \frac{2}{3}KT$.

Do đó G là trọng tâm của $\triangle KNH$.

□

❖ **Bài 5.** Cho $\triangle ABC$. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA . M là điểm tùy ý không thuộc các cạnh của $\triangle ABC$. Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua O_1 , M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua O_2 , M_3 là điểm đối xứng của M_2 qua O_3 . Chứng minh rằng M_3 đối xứng với M qua A .

💬 **Lời giải.**



Nối BM_1 và CM_2 . Xét $\triangle O_1M_1B$ và $\triangle AO_1M$:

- ☑ $O_1M_1 = O_1M$ (giả thiết).
- ☑ $O_1B = O_1A$ (giả thiết).
- ☑ $\widehat{M_1O_1B} = \widehat{AO_1M}$ (đối đỉnh).

$$\Rightarrow \triangle O_1M_1B = \triangle AO_1M \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \begin{cases} BM_1 = AM \\ \widehat{BM_1O_1} = \widehat{AMO_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BM_1 = AM \\ BM_1 \parallel AM. \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\Rightarrow \triangle CO_3M_2 = \triangle AO_3M_3 \Rightarrow \begin{cases} CM_2 = AM_3 \\ CM_2 \parallel AM_3. \end{cases} \quad (2)$$

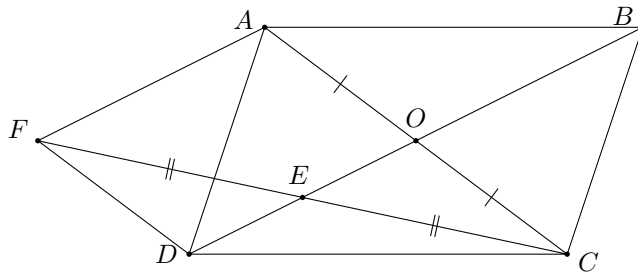
$$\Rightarrow \triangle BO_2M_1 = \triangle CO_2M_2 \Rightarrow \begin{cases} BM_1 = CM_2 \\ BM_1 \parallel CM_2. \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \begin{cases} M, A, M_3 \text{ thẳng hàng} \\ A \text{ là trung điểm } MM_3 \end{cases}$. Do đó M_3 đối xứng với M qua A . □

🔗 **Bài 6.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm đối xứng O , E là điểm bất kì trên đoạn OD . Gọi F là điểm đối xứng của C qua E .

- a) Chứng minh rằng $AF \parallel BD$.
- b) Điểm E ở vị trí nào trên OD để tứ giác $ODFA$ là hình bình hành.

💬 **Lời giải.**



- a) Xét $\triangle CAF$ có $\begin{cases} OA = OC \text{ (giả thiết)} \\ EF = EC \text{ (giả thiết)} \end{cases} \Rightarrow OE$ là đường trung bình.

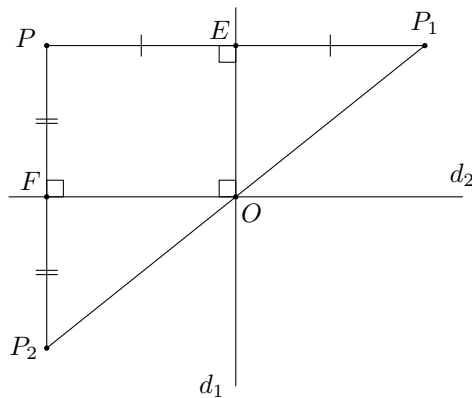
Suy ra $AF \parallel OE$, mà O, E thuộc BD nên $AF \parallel BD$.

- b) Ta có $AF \parallel BD$ nên tứ giác $ODFA$ là hình bình hành khi và chỉ khi $AF = OD$.

Mặt khác $OE = \frac{1}{2}AF \Rightarrow OE = \frac{1}{2}OD$. Suy ra E là trung điểm của OD . □

🔗 **Bài 7.** Cho 2 đường thẳng d_1, d_2 vuông góc nhau tại O và 1 điểm P không nằm trên d_1, d_2 . Gọi P_1 là điểm đối xứng của P qua d_1, P_2 là điểm đối xứng của P qua d_2 . Chứng minh rằng hai điểm P_1, P_2 đối xứng nhau qua O .

💬 **Lời giải.**



Tứ giác $PEOF$ có 3 góc vuông nên $PEOF$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow PF = EO, PE = FO$.

Xét $\triangle FP_2O$ và $\triangle EOP_1$

☑ $FP_2 = EO$ (từ giả thiết ta có $PF = FP_2$).

☑ $FO = EP_1$ (từ giả thiết ta có $PE = EP_1$).

Suy ra $\triangle FP_2O = \triangle EOP_1$ (hai cạnh góc vuông bằng nhau).

$$\Rightarrow \begin{cases} OP_1 = OP_2 & (1) \\ \widehat{FP_2O} = \widehat{EOP_1} \end{cases}$$

Ta có $\widehat{FOP_2} + \widehat{EOP_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FOP_2} + \widehat{EOF} + \widehat{EOP_1} = 180^\circ \Rightarrow P_1, O, P_2$ thẳng hàng (2).

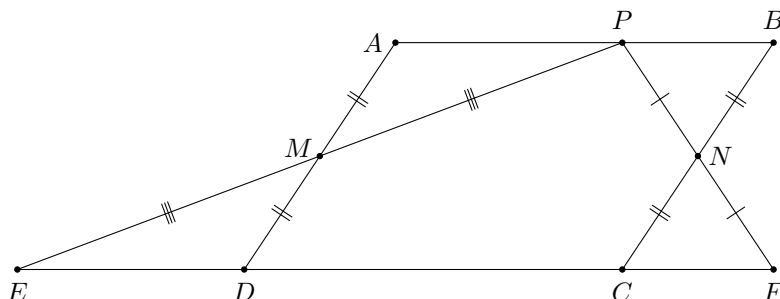
Từ (1) và (2) suy ra P_1, P_2 đối xứng nhau qua O . □

🔗 **Bài 8.** Cho hình bình hành $ABCD$, điểm P trên AB . Gọi M, N là các trung điểm AD, BC ; E, F lần lượt là điểm đối xứng của P qua M, N . Chứng minh rằng

a) E, F thuộc đường thẳng CD .

b) $EF = 2CD$.

💬 **Lời giải.**



a) Chứng minh E, F thuộc đường thẳng CD .

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$. M là trung điểm đoạn thẳng AD nên M là tâm đối xứng của AD , và M cũng là tâm đối xứng của PE . Mà P là điểm trên cạnh AB nên E nằm trên đường thẳng CD .

Lập luận tương tự ta được N là tâm đối xứng của đoạn thẳng BC và PF , và vì P nằm trên AB nên F nằm trên đường thẳng CD (do $AB \parallel CD$).

b) Chứng minh $EF = 2CD$.

Vì M là tâm đối xứng của hai tam giác EMD và PMA nên suy ra $AP = ED$.

Vì N là tâm đối xứng của hai tam giác PNB và FNC nên suy ra $PB = CF$.

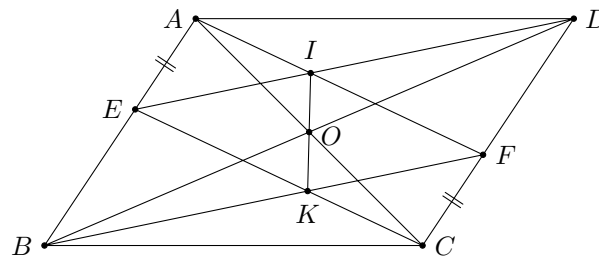
Mà $AP + PB = AB$ nên $ED + CF = AB$, mà $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$, do đó $ED + CF = CD$.

Suy ra $EF = ED + DC + CF = ED + CF + DC = CD + DC = 2CD$.

□

❖ **Bài 9.** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Lấy điểm E trên cạnh AB , F trên cạnh CD sao cho $AE = CF$. Gọi I là giao điểm của AF và DE ; K là giao điểm của BF và CE . Chứng minh rằng I đối xứng với K qua O .

💬 **Lời giải.**



Xét tứ giác $AECF$ ta có

☑ $AE = CF$ (giả thiết).

☑ $AE \parallel CF$ (vì $AB \parallel CD$)

Suy ra tứ giác $AECF$ là hình bình hành $\Rightarrow AF \parallel EC \Rightarrow \widehat{FAC} = \widehat{ECA}$ (so le trong).

Do đó $\widehat{IAO} = \widehat{OKC}$.

Vì O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$ nên O là trung điểm $AC \Rightarrow O$ là tâm đối xứng của cạnh AC .

Xét tam giác IOA và tam giác KOC , ta có

☑ $\widehat{IOA} = \widehat{KOC}$ (đối đỉnh).

☑ $OA = OC$ (O là tâm đối xứng của AC).

☑ $\widehat{IAO} = \widehat{OKC}$ (chứng minh trên).

Suy ra $\triangle IOA = \triangle KOC \Rightarrow IO = OK$ (hai cạnh tương ứng) (1).

Ta được

☑ $AECF$ là hình bình hành, O là trung điểm AC nên O là tâm đối xứng của $AECF$ (2).

☑ Điểm I thuộc AF , K thuộc CE , $AF \parallel CE$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra I đối xứng với K qua O .

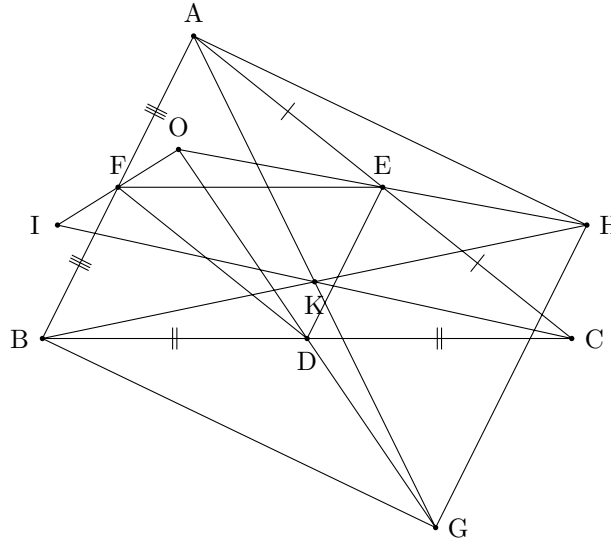
□



❖ **Bài 10.** Cho điểm O tùy ý nằm trong $\triangle ABC$. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm BC, CA, AB . Gọi G, H, I theo thứ tự là các điểm đối xứng với O qua $D, qua E, qua F$. Chứng minh rằng

- Ba đường thẳng AG, BH, CI đồng quy tại một điểm. (Gọi điểm đồng quy là K).
- Khi O di chuyển trong $\triangle ABC$ sao cho O không trùng K thì đường thẳng OK luôn đi qua một điểm cố định.

💬 **Lời giải.**



- Ba đường thẳng AG, BH, CI đồng quy tại một điểm. (Gọi điểm đồng quy là K).
Ta có

☑ DE là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $DE \parallel AB$ và $DE = \frac{1}{2}AB$ (1).

☑ Xét $\triangle OGH$ có DE là đường trung bình nên $DE \parallel GH$ và $DE = \frac{1}{2}GH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} AB \parallel GH \\ AB = GH. \end{cases}$

Do đó tứ giác $ABGH$ là hình bình hành, suy ra AG và BH cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (3).

Mặt khác

☑ EF là đường trung bình $\triangle ABC$ nên $EF \parallel BC$ và $EF = \frac{1}{2}BC$ (4).

☑ Xét $\triangle OIH$ có EF là đường trung bình nên $EF \parallel IH$ và $EF = \frac{1}{2}IH$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $\begin{cases} BC \parallel IH \\ BC = IH. \end{cases}$

Do đó tứ giác $BCHI$ là hình bình hành, suy ra BH và CI cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (6).

Lại có

☑ FD là đường trung bình $\triangle ABC$ nên $FD \parallel AC$ và $FD = \frac{1}{2}AC$ (7).

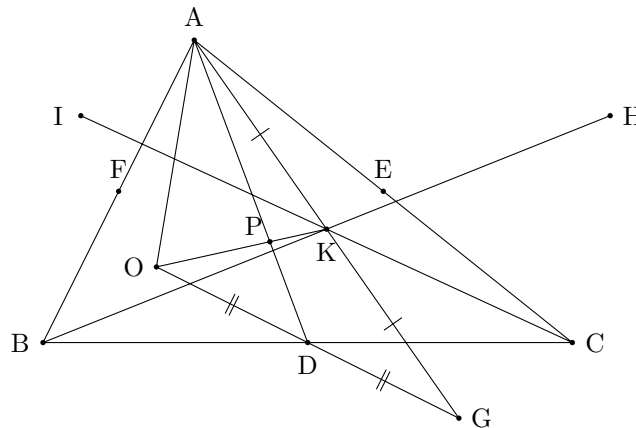
☑ Xét $\triangle OIG$ có FD là đường trung bình nên $FD \parallel IG$ và $FD = \frac{1}{2}IG$ (8).

Từ (7) và (8) suy ra $\begin{cases} AC \parallel IG \\ AC = IG. \end{cases}$

Do đó tứ giác $ACGI$ là hình bình hành, suy ra AG và CI cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (9).

Từ (3), (6) và (9) ta suy ra AG , BH và CI cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, đặt là điểm K .

b) Khi O di chuyển trong $\triangle ABC$ sao cho O không trùng K thì đường thẳng OK luôn đi qua một điểm cố định.



Khi điểm O di chuyển trong tam giác ABC và không trùng với điểm K . Ta xét tam giác AGO có AD là đường trung tuyến cố định, OK cũng là đường trung tuyến nên AD và OK cắt nhau tại trọng tâm của tam giác AGO , gọi trọng tâm này là P . Khi đó ta có P cũng là trọng tâm của $\triangle ABC$ vì $AP = \frac{2}{3}AD$.

Tam giác ABC cố định nên điểm P cố định.

Vậy OK luôn đi qua một điểm cố định là trọng tâm P của $\triangle ABC$.

□

HÌNH CHỮ NHẬT - ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC.

Bài

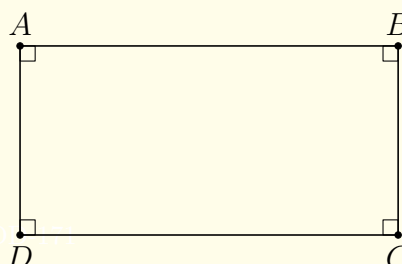
9



TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

☑ **Định nghĩa 9.1.** Hình chữ nhật là tứ giác có 4 góc vuông.

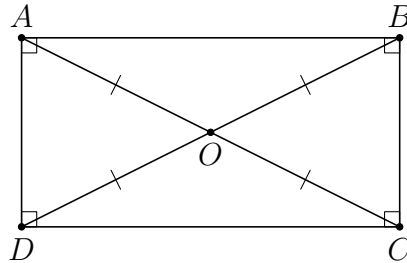


Nhận xét. Hình chữ nhật vừa là hình bình hành vừa là hình thang cân.

2. Tính chất

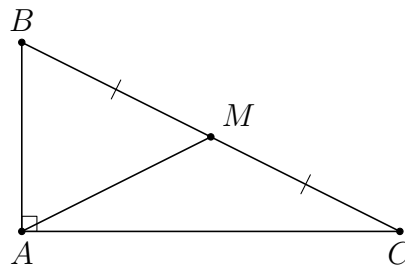
Hình chữ nhật có tất cả tính chất của hình bình hành và hình thang cân.

Tính chất đặc trưng của hình chữ nhật là: “Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường”.



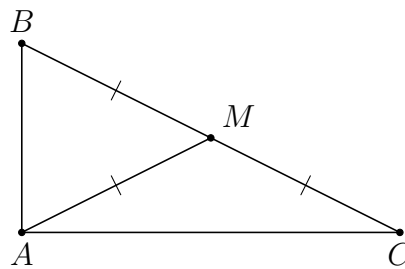
3. Hệ quả

- a) Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.



Nếu tam giác ABC vuông tại A có đường trung tuyến AM thì $AM = \frac{1}{2}BC$.

- b) Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.



Nếu tam giác ABC có đường trung tuyến AM và $AM = \frac{1}{2}BC$ thì tam giác ABC vuông tại A .

4. Dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật

- a) Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- b) Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- c) Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- d) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

6. Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước

Tập hợp các điểm cách đường thẳng a cố định một khoảng bằng h không đổi là 2 đường thẳng song song với đường thẳng a và cách đường thẳng a một khoảng bằng h .

7. Đường thẳng song song cách đều

Định nghĩa 9.2. Khi các đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và khoảng cách giữa các đường thẳng a và b, b và c, c và d bằng nhau thì ta gọi chúng là các đường thẳng song song cách đều.

Định lý 9.1.

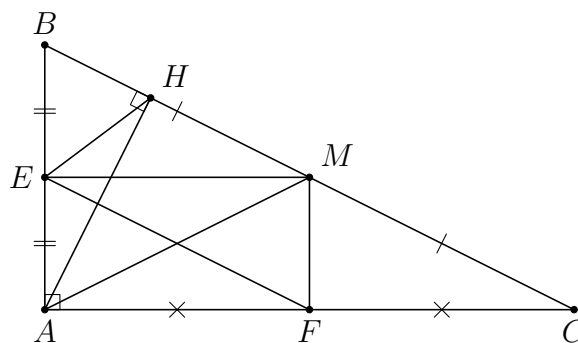
- ☑ Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.
- ☑ Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

B BÀI TẬP

🔗 **Bài 1.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), trung tuyến AM . E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC .

- Chứng minh rằng tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật.
- Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng tứ giác $EHMF$ là hình thang cân.

💬 **Lời giải.**



- a) Xét $\triangle ABC$, ta có:
- $$\begin{cases} M \text{ là trung điểm của } BC \text{ (AM là đường trung tuyến)} \\ F \text{ là trung điểm của } AC \text{ (gt).} \\ E \text{ là trung điểm } AB \text{ (gt)} \end{cases}$$
- $\Rightarrow MF, ME, EF$ là các đường trung bình trong $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow \begin{cases} MF \parallel AB \\ MF = \frac{1}{2}AB \end{cases} \text{ và } \begin{cases} ME \parallel AC \\ ME = \frac{1}{2}AC. \end{cases}$$

Như vậy $\begin{cases} MF \parallel AB & (cmt) \\ AB \perp AC & (\triangle ABC \text{ vuông tại } A) \end{cases} \Rightarrow MF \perp AC \Rightarrow \widehat{MFA} = 90^\circ.$

Tương tự, ta có: $\begin{cases} ME \parallel AC & (cmt) \\ AB \perp AC & (\triangle ABC \text{ vuông tại } A) \end{cases} \Rightarrow ME \perp AB \Rightarrow \widehat{MEA} = 90^\circ.$

Xét tứ giác $AEMF$ có:

$$\begin{cases} \widehat{EAF} = 90^\circ & (\triangle ABC \text{ vuông tại } A) \\ \widehat{MEA} = 90^\circ & (cmt) \\ \widehat{MFA} = 90^\circ & (cmt). \end{cases}$$

Vậy tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật (tứ giác có ba góc vuông).

b) Vì EF là đường trung bình trong $\triangle ABC$ (cmt) nên $EF \parallel BC \Rightarrow EF \parallel HM$.

Xét tứ giác $EHMF$ có $EF \parallel HM$, do đó $EHMF$ là hình thang.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{EFM} = \widehat{FMC} & (\text{so le trong và } EF \parallel BC) \\ \widehat{EBM} = \widehat{FMC} & (\text{đồng vị và } AB \parallel MF) \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{EBH}.$$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có HE là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB , do đó $EH = EB$.

Xét $\triangle EBH$ có $EH = EB$ (cmt), nên $\triangle EBH$ cân tại E , vì vậy $\widehat{EBH} = \widehat{EHB}$.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{EFM} = \widehat{EBH} & (cmt) \\ \widehat{EBH} = \widehat{EHB} \\ \widehat{EHB} = \widehat{HEF} & (\text{so le trong và } EF \parallel BC) \end{cases}$

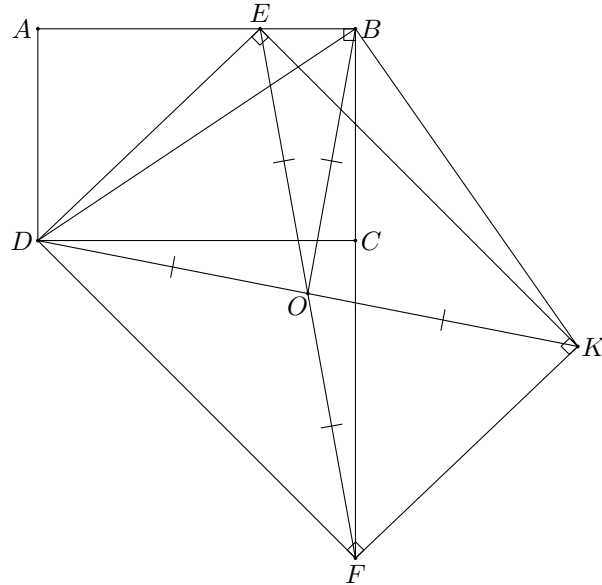
$$\Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{HEF}.$$

Xét hình thang $EHMF$ có $\widehat{EFM} = \widehat{HEF}$ (cmt), nên $EHMF$ là hình thang cân (hình thang có hai góc ở cùng một đáy bằng nhau).

□

❖ **Bài 2.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, điểm E thuộc cạnh AB . Lấy điểm F thuộc tia đối của tia CB sao cho $\widehat{EDF} = 90^\circ$. Vẽ hình chữ nhật $EDFK$. Tính $\widehat{DBK}$.

💬 **Lời giải.**



Gọi O là giao điểm của EF và DK .

Do $EDFK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OE = OF = OD = OK$ (1).

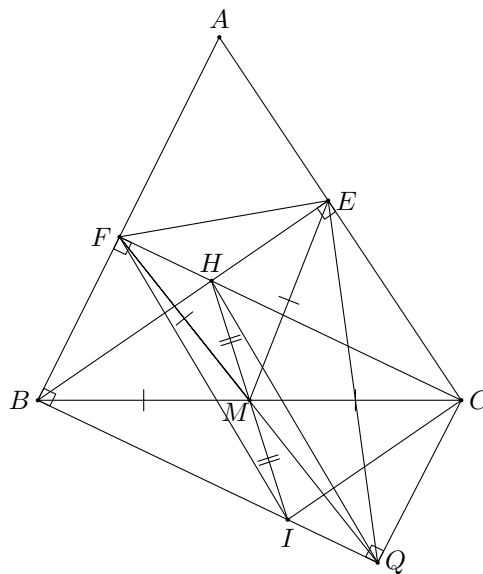
Mặt khác $\triangle EBF$ vuông tại $B \Rightarrow OB = OE = OF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OB = OE = OF = OD = OK \Rightarrow \triangle DBK$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{DBK} = 90^\circ$. □

✎ **Bài 3.** Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Lấy M là trung điểm của BC và I là điểm đối xứng của H qua M .

- Chứng minh $IC = BH$ và $IB \perp AB$.
- Chứng minh rằng $\triangle MEF$ là tam giác cân.
- Vẽ $CQ \perp BI$ tại Q . Chứng minh rằng $\triangle FEQ$ là tam giác vuông.

💬 **Lời giải.**



- Chứng minh $IC = BH$ và $IB \perp AB$.

Xét tứ giác $BHCI$ có M là trung điểm của 2 đường chéo BC và HI suy ra tứ giác $BHCI$ là hình bình hành.

$\Rightarrow IC = BH$ và $IB \parallel CH$ mà $CH \perp AB \Rightarrow IB \perp AB$.

b) Chứng minh rằng $\triangle MEF$ là tam giác cân.

Ta có $\triangle BEC$ vuông tại E và EM là đường trung tuyến nên $ME = MB = MC$ (1).

Ta có $\triangle BFC$ vuông tại F và FM là đường trung tuyến nên $MF = MB = MC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $ME = MF \Rightarrow \triangle MEF$ cân tại M .

c) Vẽ $CQ \perp BI$ tại Q . Chứng minh rằng $\triangle FEQ$ là tam giác vuông.

Ta có tứ giác $BFCQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CF = QB$, mà $CH = BI$ (do $BHCI$ là hình bình hành) $\Rightarrow FH = QI$.

Ta lại có $FH \parallel QI$ (do $CF \parallel BQ$) $\Rightarrow FHQI$ là hình bình hành.

Mà M là trung điểm của HI nên M cũng là trung điểm của $FQ \Rightarrow MF = MQ$.

Mặt khác theo câu (a) ta có $ME = MF \Rightarrow ME = MF = MQ \Rightarrow \triangle EFQ$ vuông tại E .

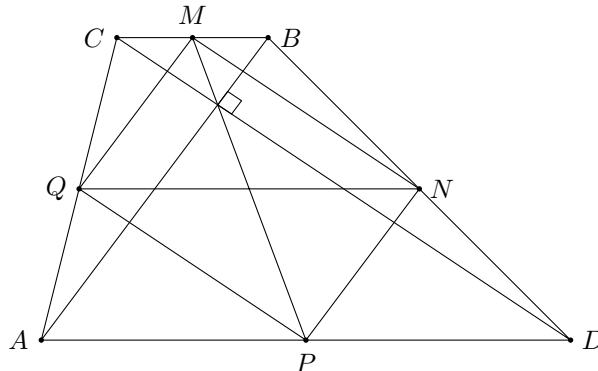
□

❖ **Bài 4.** Cho tứ giác $ACBD$ có $AB \perp CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, BD, AD, AC .

a) Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

b) Biết $BC \parallel AD, BC = 4\text{cm}, AD = 16\text{cm}$. Tính MP .

💬 **Lời giải.**



a) Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Ta có M là trung điểm của BC , N là trung điểm của BD .

$\Rightarrow MN \parallel DC$ và $MN = \frac{1}{2}DC$ (1).

Ta có Q là trung điểm của AC , P là trung điểm của AB .

$\Rightarrow PQ \parallel DC$ và $PQ = \frac{1}{2}DC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $PQMN$ là hình bình hành (3).

Lại có Q là trung điểm của AC , M là trung điểm của $BC \Rightarrow QM \parallel AB$.

Khi đó ta có $MQ \parallel AB$, $MN \parallel CD$, $AB \perp CD$ suy ra $MQ \perp MN$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $PQMN$ là hình chữ nhật.

b) Biết $BC \parallel AD, BC = 4\text{cm}, AD = 16\text{cm}$. Tính MP .

Ta có tứ giác $PQMN$ là hình chữ nhật nên $MP = QN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{4 + 16}{2} = 10\text{cm}$.

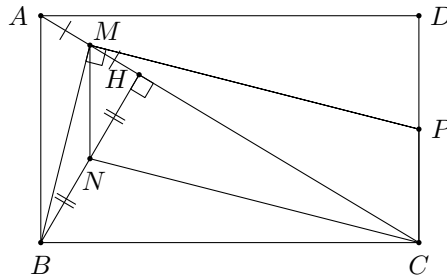
□

⇒ **Bài 5.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi $BH \perp AC$ tại H . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AH, BH, CD . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $CNMP$ là hình bình hành.

b) $\widehat{BMP} = 90^\circ$.

🗨️ **Lời giải.**



a) Tứ giác $CNMP$ là hình bình hành.

Ta có M là trung điểm của AH , N là trung điểm của $BH \Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ABH \Rightarrow MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$ (1).

Mặt khác P là trung điểm của $DC \Rightarrow PC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB$ và $CP \parallel AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $PC \parallel MN$ và $PC = MN \Rightarrow$ tứ giác $CNMP$ là hình bình hành.

b) $\widehat{BMP} = 90^\circ$.

Ta có $PC \perp BC$ lại có $MN \parallel CP$ (câu a) $\Rightarrow MN \perp BC$.

Xét $\triangle BMC$, có

$MN \perp BC, BN \perp AC \Rightarrow N$ là trực tâm của $\triangle BMC \Rightarrow NC \perp BM$.

Mà $NC \parallel MP \Rightarrow MP \perp BM \Rightarrow \widehat{BMP} = 90^\circ$.

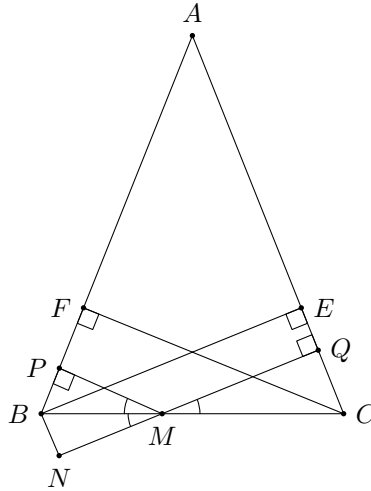
□

⇒ **Bài 6.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($AB > BC$) có 2 đường cao BE, CF và điểm M bất kì trên cạnh BC . Vẽ $MP \perp AB$ tại P , $MQ \perp AC$ tại Q . Trên tia đối của tia MQ lấy điểm N sao cho $MN = MP$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BEQN$ là hình chữ nhật.

b) $MP + MQ = CF$.

🗨️ **Lời giải.**



a) Chứng minh tứ giác $BEQN$ là hình chữ nhật.

Xét $\triangle BMP$ và $\triangle CMQ$, có

$$\widehat{BPM} = \widehat{CQM} = 90^\circ.$$

$$\widehat{PBM} = \widehat{QCM} \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A).$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BMP} = \widehat{CMQ} \text{ mà } \widehat{CMQ} = \widehat{BMN} \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \widehat{BMP} = \widehat{BMN}.$$

Xét $\triangle BMN$ và $\triangle BMP$, có

BM cạnh chung.

$$\widehat{BMP} = \widehat{BMN} \text{ (cmt).}$$

$$MN = MP \text{ (gt).}$$

$$\Rightarrow \triangle BMN = \triangle BMP \text{ (c-g-c).}$$

$$\Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{BPM} = 90^\circ.$$

Khi đó tứ giác $BEQN$ có $\widehat{E} = \widehat{Q} = \widehat{N} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BEQN$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $MP + MQ = CF$.

$$\text{Ta có } MP = MN \Rightarrow MP + MQ = MN + MQ = NQ.$$

Mà $NQ = BE$ (do $BEQN$ là hình chữ nhật).

$$\Rightarrow MP + MQ = BE \text{ (1).}$$

Xét $\triangle BFC$ và $\triangle CEB$, có

$$\widehat{CFB} = \widehat{BEC} = 90^\circ.$$

$$\widehat{FBC} = \widehat{ECB} \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A).$$

$$\Rightarrow \triangle BFC = \triangle CEB \text{ (cạnh huyền - góc nhọn).}$$

$$\Rightarrow BE = CF \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $MP + MQ = CF$.

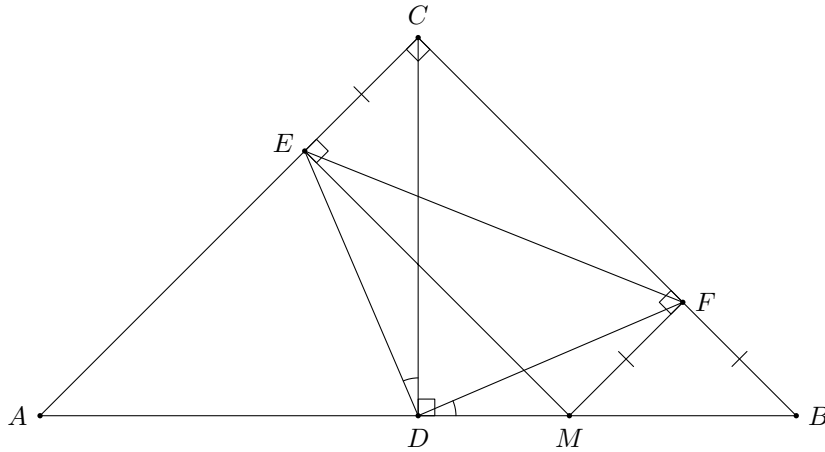
□

✧ **Bài 7.** Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại C , M là điểm bất kì trên cạnh AB . Vẽ $ME \perp AC$ tại E , $MF \perp BC$ tại F . Gọi D là trung điểm của AB . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $CFME$ là hình chữ nhật.

b) $\triangle DEF$ vuông cân.

🗨️ **Lời giải.**



a) Chứng minh tứ giác $CFME$ là hình chữ nhật.

Xét tứ giác $CFME$ có $\widehat{C} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $CFME$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\triangle DEF$ vuông cân.

Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại $C \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 45^\circ$.

Có $CD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ACD} = 45^\circ \\ DC = BD = DA. \end{cases}$

Tam giác MBF vuông tại F có $\widehat{B} = 45^\circ \Rightarrow \triangle MBF$ vuông cân tại F .

Suy ra $FB = FM$, mà $FM = CE$ (do $CFME$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow FB = EC$.

Xét $\triangle CED$ và $\triangle BFD$, có

$CE = BF$.

$\widehat{ECD} = \widehat{FBD} = 45^\circ$.

$DC = DB$.

$\Rightarrow \triangle CED = \triangle BFD$ (c-g-c).

Suy ra $ED = FD$ và $\widehat{EDC} = \widehat{FDB}$.

Mà $\widehat{FDB} + \widehat{FDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EDC} + \widehat{FDC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle DEF$ vuông cân tại D .

□

✦ **Bài 8.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, $E \in AC$. Đường thẳng qua E và song song với BD cắt các đường thẳng AD , CD lần lượt tại M , N . Vẽ hình chữ nhật $DMFN$. Gọi O , I lần lượt là giao điểm của 2 đường chéo của 2 hình chữ nhật $ABCD$, $DMFN$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $EIDO$ là hình bình hành.

b) E là trung điểm BF .

💬 **Lời giải.**

a)

Ta có: $BD \parallel ME \Rightarrow OD \parallel IE$. (1)

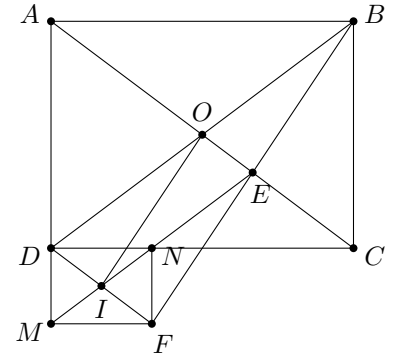
Lại có: $\widehat{NDI} = \widehat{DNI}$. (do $\triangle DNI$ cân tại I)

$\widehat{DNI} = \widehat{ODC}$. (so le trong)

$\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$. (do $\triangle ODC$ cân tại O)

Suy ra: $\widehat{NDI} = \widehat{OCD}$ nên $DI \parallel OE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $DIEO$ là hình bình hành.



b) Do tứ giác $DNFM$ là hình chữ nhật nên $DF = 2DI = 2OE$ (do tứ giác $OEID$ là hình bình hành), lại có $DI \parallel OE$.

Suy ra OE là đường trung bình của tam giác BFD nên E là trung điểm BF .

□

❖ **Bài 9.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$ tại H . Trên tia đối của tia BH lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Chứng minh $\widehat{ADE} = 45^\circ$.

💬 **Lời giải.**

Kẻ DK vuông góc AC tại K , suy ra $DK \parallel BH$ nên $\widehat{KDE} = \widehat{BDE}$.

Lại có: $BE = AC = BD \Rightarrow \triangle BED$ cân tại B .

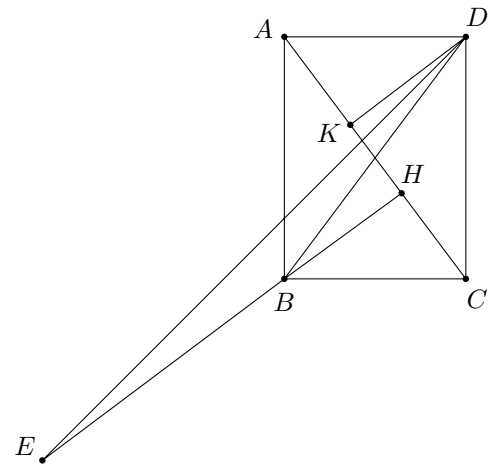
$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BDE} \Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{KDE}$. (1)

Lại có: $\widehat{ADK} = 90^\circ - \widehat{DAK} = \widehat{ACD}$.

Mà: $\widehat{DBC} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{BDC}$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{ADK} + \widehat{KDE} &= \widehat{BDC} + \widehat{EDB} \\ \Leftrightarrow \widehat{ADE} &= \widehat{EDC} \\ \Leftrightarrow \widehat{ADE} &= \frac{\widehat{ADC}}{2} = 45^\circ. \end{aligned}$$



□

❖ **Bài 10.** Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$, M nằm trong góc đó. Vẽ $MA \perp Ox$ tại A , $MB \perp Oy$ tại B . Trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB , lấy các điểm E, F sao cho $ME = MF = AB$. Chứng minh rằng:

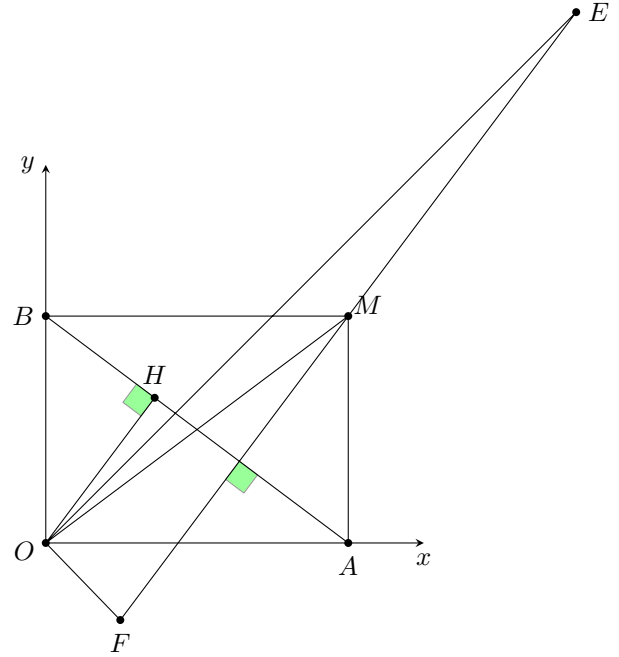
a) $\widehat{EOF} = 90^\circ$.

b) Ox là tia phân giác của $\widehat{EOF}$.

💬 **Lời giải.**

a) Do $\widehat{MBO} = \widehat{MAO} = \widehat{BOA} = 90^\circ$ nên tứ giác $BMAO$ là hình chữ nhật.
Suy ra: $AB = OM$, lại có: $AB = ME = MF \Rightarrow OM = ME = MF \Rightarrow \triangle EOF$ vuông tại O .

b) Ta có: $MO = ME$ nên tam giác OME cân tại M .
Suy ra $\widehat{MEO} = \widehat{MOE}$.
Lại có: $\widehat{HOE} = \widehat{OEM}$. (so le trong)
Suy ra: $\widehat{OHE} = \widehat{MOE}$.
Ta có: $\widehat{BOH} = 90^\circ - \widehat{HBO} = \widehat{BAO} = \widehat{MOA}$.
Suy ra: $\widehat{BOE} = \widehat{AOE} = \frac{\widehat{BOA}}{2} = 45^\circ$.
Suy ra: $\widehat{EOA} = \frac{\widehat{EOF}}{2} \Rightarrow Ox$ là tia phân giác $\widehat{EOF}$



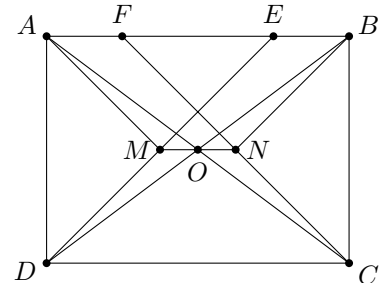
🔗 **Bài 11.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tia phân giác góc A cắt tia phân giác góc D tại M , tia phân giác góc B cắt tia phân giác góc C tại N . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của DM, CN với AB . Chứng minh rằng:

- $AM = DM = BN = CN = ME = NF$.
- Tứ giác $DNMC$ là hình thang cân.
- $AF = BE$.
- AC, BD, MN đồng quy.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{EAD} = 90^\circ &\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MAD} = 45^\circ. \\ \widehat{ADC} = 90^\circ &\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MDC} = 45^\circ. \\ &\Rightarrow \triangle AMD, \triangle AME \text{ cân tại } M \\ &\Rightarrow AM = MD = ME \quad (1). \\ \widehat{FBC} = 90^\circ &\Rightarrow \widehat{NBF} = \widehat{NBC} = 45^\circ. \\ \widehat{BCD} = 90^\circ &\Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{NCD} = 45^\circ. \\ &\Rightarrow \triangle BNC, \triangle BNF \text{ cân tại } N \\ &\Rightarrow FN = NB = NC \quad (2). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Để thấy } \triangle DAE &= \triangle CBF \Rightarrow DE = CF \\ \Rightarrow \frac{DE}{2} &= \frac{CF}{2} \Rightarrow DM = CN. \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $MA = ME = MD = NC = NB = NF$.

b) Đặt $O = AC \cap BD$.

Do M, O là trung điểm DE, BD nên $MO \parallel EB \Leftrightarrow MO \parallel AB$.

Do N, O là trung điểm CF, AC nên $NO \parallel AF \Leftrightarrow NO \parallel AB$.

Suy ra M, N, O thẳng hàng và $MN \parallel AB \Leftrightarrow MN \parallel CD$, lại có: $DM = CN \Rightarrow DMNC$ là hình thang cân.

c) Do $\widehat{DAE} = 90^\circ$ và $\widehat{AED} = \widehat{MAE} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AED$ cân tại $A \Rightarrow AE = AD$.

Do $\widehat{FBC} = 90^\circ$ và $\widehat{BFN} = \widehat{FBN} = 45^\circ \Rightarrow \triangle FBC$ cân tại $B \Rightarrow BF = BC$.

Từ đó ta có: $BF = AE \Leftrightarrow BE + EF = AF + EF \Leftrightarrow BE = AF$.

d) Do OM và ON cùng song song AB nên M, N, O thẳng hàng.

Lại có $O = AC \cap BD$ nên O là giao điểm chung của 3 đường AC, BD, MN nên 3 đường này đồng quy tại O .

□

✧ **Bài 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A , D thuộc cạnh BC . Vẽ $DE \perp AB$ tại E , $DF \perp AC$ tại F .

a) Gọi I là trung điểm EF . Chứng minh rằng A, I, D thẳng hàng.

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài ngắn nhất? Vì sao?

c) Dựng điểm D trên cạnh BC sao cho $\widehat{CFE} = 150^\circ$.

💬 **Lời giải.**

a)

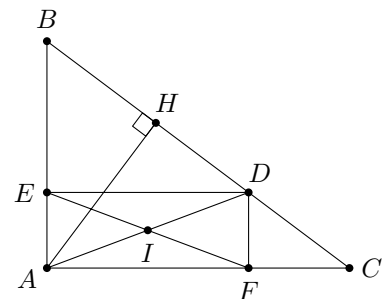
Do $\widehat{EAF} = \widehat{AED} = \widehat{DFA} = 90^\circ$ nên tứ giác $EAFD$ là hình chữ nhật.

Lại có I là trung điểm EF nên I cũng là trung điểm AD . Do đó A, I, D thẳng hàng.

b) Ta có: $EF = AD$ nên EF ngắn nhất khi AD ngắn nhất.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC .

Dễ thấy $AD \geq AH$ vậy AD nhỏ nhất khi D trùng với H .



c) $\widehat{CFE} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{DFE} = 60^\circ$, mà $EDFA$ là hình chữ nhật nên:

$$\widehat{EAD} = \widehat{EFD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ.$$

Vậy D là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = 60^\circ$ thì $\widehat{CFE} = 150^\circ$.

□

✧ **Bài 13.** Cho tam giác ABC . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC . Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của A trên 2 đường phân giác trong và ngoài của góc B và góc C . Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác $AMBN, APCQ$ là các hình chữ nhật.

b) M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.

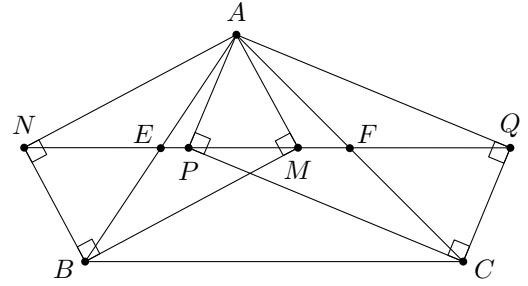
💬 **Lời giải.**

a)

Ta có: $BM \perp NB$. (tính chất phân giác trong và phân giác ngoài) $\Rightarrow \widehat{NBM} = 90^\circ$.

Lại có: $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $ANBM$ là hình chữ nhật.

Tương tự ta tứ giác $APCQ$ cũng là hình chữ nhật.



b) Do E là trung điểm AB và tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật nên E cũng là trung điểm MN . Tương tự F là trung điểm PQ .

Lại có: $ANBM$ là hình chữ nhật nên $\triangle EMB$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{EMB} \Rightarrow \widehat{AEM} = 2\widehat{EBM}$. Do BM là tia phân giác góc $\widehat{ABC} \Rightarrow 2\widehat{EBM} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{ABC}$.

Suy ra $EM \parallel BC$. (cặp góc đồng vị).

Chứng minh tương tự $PF \parallel BC$ từ đó suy ra M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.

□

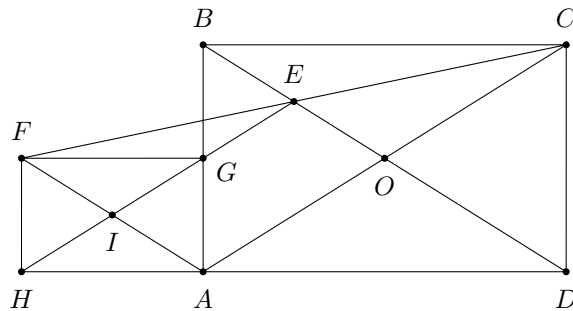
❖ **Bài 14.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, E thuộc đường chéo BD (E không là trung điểm của BD). Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $CE = EF$. Vẽ $FG \perp AB$ tại G , $FH \perp AD$ tại H .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AHFG$ là hình chữ nhật.

b) $AF \parallel BD$.

c) E, G, H thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**



a) Ta có $FG \perp (AB) \Rightarrow \widehat{AGF} = 90^\circ$; $FH \perp (AD) \Rightarrow \widehat{AHF} = 90^\circ$. Tứ giác $AHFG$ có $\widehat{AGF} = \widehat{AHF} = \widehat{HAG} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

b) Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow OA = OC$. Mà $EF = EC$ nên EO là đường trung bình tam giác $ACF \Rightarrow AF \parallel BD$.

c) Gọi I là giao điểm của AF và $HG \Rightarrow IA = IF$. Mặt khác $EC = EF$ nên EI là đường trung bình tam giác $ACF \Rightarrow EI \parallel AC$. (1)

Ta lại có $AF \parallel BD \Rightarrow \widehat{HAI} = \widehat{ADO}$ (so le trong). (2)

$AHFG, ABCD$ là hình chữ nhật nên các tam giác IAH, OAD cân $\Rightarrow \widehat{HAI} = \widehat{AHI}, \widehat{DAO} = \widehat{ADO}$. (3)

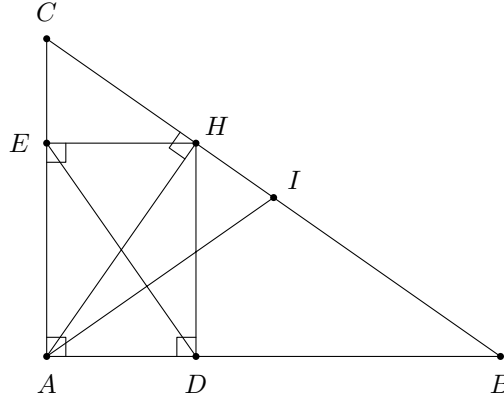
Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{AHI} = \widehat{DAO} \Rightarrow HG \parallel AC$. (4)

Từ (1) và (4) suy ra E, G, H thẳng hàng.



❖ **Bài 15.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , I là trung điểm BC . Vẽ $HD \perp AB$ tại D , $HE \perp AC$ tại E . Chứng minh rằng $AI \perp DE$.

💬 **Lời giải.**



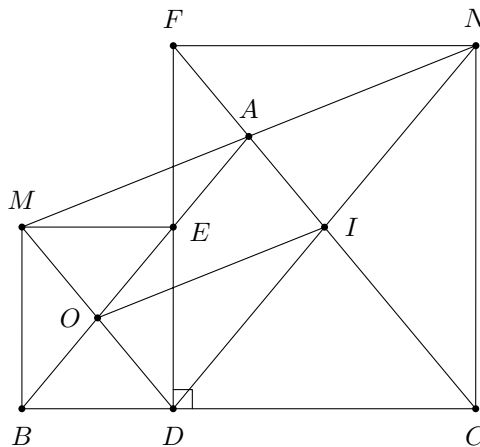
Ta có $HD \perp (AB) \Rightarrow \widehat{ADH} = 90^\circ$; $HE \perp AC \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$.
 Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{ADH} = \widehat{AEH} = \widehat{DAE} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.
 Do đó $\widehat{AED} = \widehat{EAH}$. (1)
 Tam giác ABC vuông tại A có I là trung điểm BC nên $IA = IC$.
 Do đó tam giác AIC cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICA}$. (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IAC} + \widehat{AED} = \widehat{ICA} + \widehat{EAH} = 180^\circ - \widehat{AHC} = 90^\circ$.
 Do đó $AI \perp DE$.



❖ **Bài 16.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Từ một điểm D trên đáy BC , vẽ đường thẳng vuông góc với BC , cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E, F . Vẽ các hình chữ nhật $BDEM, CDFN$ có tâm lần lượt là O, I . Chứng minh rằng

- Tứ giác $AODI$ là hình bình hành.
- A là trung điểm của MN .

💬 **Lời giải.**



- Tứ giác $BDEM$ là hình chữ nhật nên $\triangle OBD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{ODB}$.
 Tứ giác $CDFN$ là hình chữ nhật nên $\triangle ICD$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{ICD} = \widehat{IDC}$.

Mặt khác tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{IDC} = \widehat{ACB} = \widehat{ODB} \Rightarrow AB \parallel ID$ và $OD \parallel AC$.

Do đó tứ giác $AODI$ là hình bình hành.

b) Tứ giác $AODI$ là hình bình hành suy ra $AI = OD$ và $AI \parallel OD$.

Mà O là trung điểm của MD nên $AI = MO$ và $AI \parallel MO$.

Suy ra tứ giác $AIOM$ là hình bình hành, do đó $MA \parallel OI$ và $MA = OI$. (1)

Ta lại có $OD = OM$ và $ID = IN$ nên OI là đường trung bình tam giác DMN

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}MN$ và $OI \parallel MN$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm M, A, N thẳng hàng và $AM = AN$.

Vậy A là trung điểm của MN .

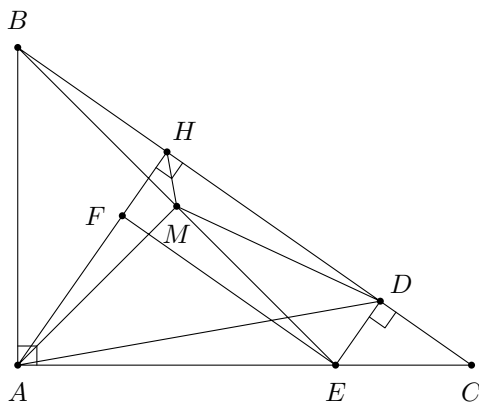
□

⇒ **Bài 17.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$, đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

a) Chứng minh rằng $AE = AB$.

b) Gọi M là trung điểm của BE . Tính $\widehat{AHM}$.

🗨 **Lời giải.**



a) Dựng $EF \perp AH \Rightarrow \widehat{EFH} = 90^\circ$.

Ta có $AH \perp BC$ và $ED \perp BC \Rightarrow \widehat{FHD} = \widehat{EDH} = 90^\circ$.

Tứ giác $EFHD$ có $\widehat{EFH} = \widehat{FHD} = \widehat{EDH} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

Do đó $EF = HD = HA$. (1)

Ta lại có $\widehat{EAF} + \widehat{BAH} = \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{ABH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác vuông AEF và BAH bằng nhau, do đó $AE = AB$.

b) Các tam giác vuông ABE và BDE có BE là cạnh huyền và M là trung điểm của BE nên $MA = MB = ME = MD$. Mặt khác $HA = HD$ do đó MH là đường trung trực của tam giác cân AHD , suy ra MH là đường phân giác của góc vuông $\widehat{AHD}$. Vậy $\widehat{AHM} = 45^\circ$.

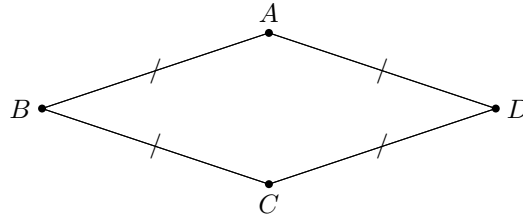
□



TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau

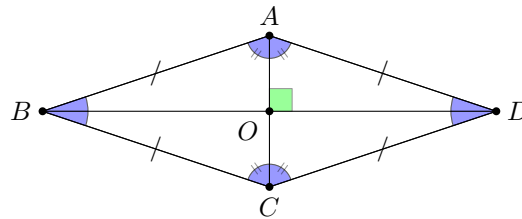


Tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow AB = BC = CD = DA$

2. Tính chất

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành và ngoài ra còn có:

- a) Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- b) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.



3. Dấu hiệu nhận biết

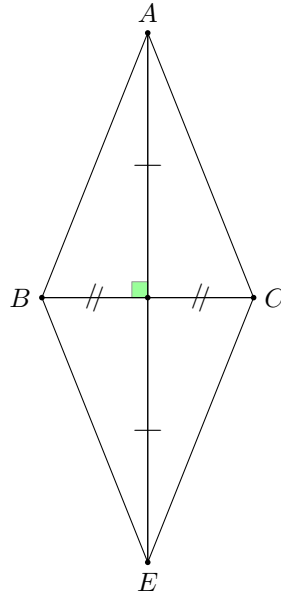
- a) Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- b) Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- c) Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- d) Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.



BÀI TẬP

✧ **Bài 1.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC . Chứng minh rằng tứ giác $ABEC$ là hình thoi.

💬 Lời giải.

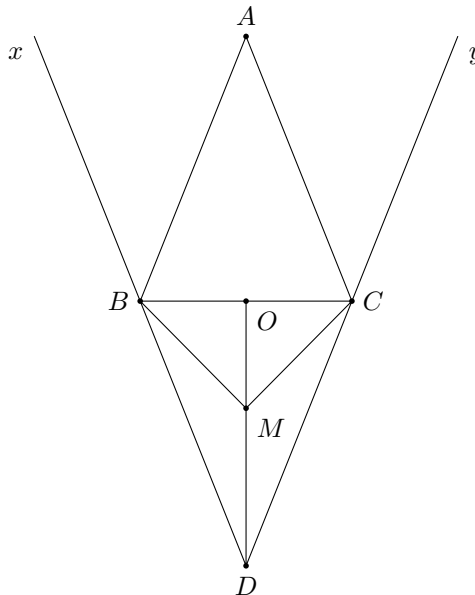


Vì E đối xứng với A qua BC nên BC là đường trung trực của đoạn $AE \Rightarrow \begin{cases} CE = CA \\ BE = BA \end{cases}$.

Vì ABC là tam giác cân tại A nên $AB = AC \Rightarrow AB = BE = EC = CA \Rightarrow ABEC$ là hình thoi. $\square$

✧ **Bài 2.** Cho tam giác ABC cân tại A . Đường thẳng qua B song song AC cắt đường thẳng qua C song song AB ở D , tia phân giác $\widehat{BCD}$ cắt AD tại M . Chứng minh rằng BM là tia phân giác của $\widehat{CBD}$.

💬 **Lời giải.**



Gọi Bx song song AC , Cy song song AB và đường kéo dài của Bx , Cy cắt nhau tại D nên $CD \parallel AB$, $BD \parallel AC$.

$\Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

Vì ABC là tam giác cân tại A nên $AB = BC$ nên $ABDC$ là hình thoi.

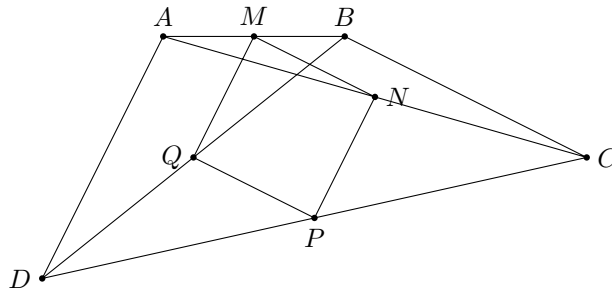
Gọi O là trung điểm của BC thì DO là tia phân giác $\widehat{BDC}$.

Tia phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt AD tại M nên M là giao 3 đường phân giác của tam giác BCD .

$\Rightarrow BM$ là tia phân giác của $\widehat{CBD}$. $\square$

✧ **Bài 3.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AD = BC$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

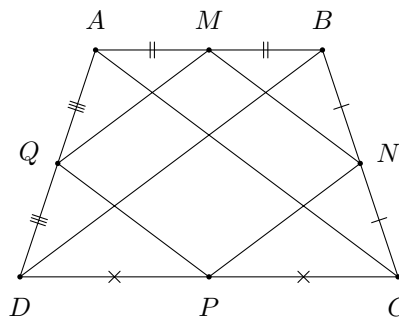
💬 **Lời giải.**



Có MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN = \frac{BC}{2}$.
 Có MQ là đường trung bình của tam giác ABD nên $MQ = \frac{AD}{2}$.
 Có NP là đường trung bình của tam giác ADC nên $NP = \frac{AD}{2}$.
 Có PQ là đường trung bình của tam giác DBC nên $PQ = \frac{BC}{2}$.
 Vì $AD = BC$ nên $MN = MQ = NP = PQ$. Vậy $MNPQ$ là hình thoi. □

✧ **Bài 4.** Cho hình thang cân $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

💬 **Lời giải.**



☑ Vì $ABCD$ là hình thang cân, suy ra $AC = BD$.

☑ Xét $\triangle ABD$ có QM là đường trung bình, suy ra $\begin{cases} QM \parallel BD \\ QM = \frac{1}{2}BD. \end{cases}$ (1)

☑ Tương tự ta chứng minh được $\begin{cases} PN \parallel BD \\ PN = \frac{1}{2}BD. \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} QM = PN = \frac{1}{2}BD \\ QM \parallel PN. \end{cases}$

- ☑ Chứng minh tương tự ta có $\begin{cases} MN = PQ = \frac{1}{2}AC \\ MN \parallel PQ. \end{cases}$

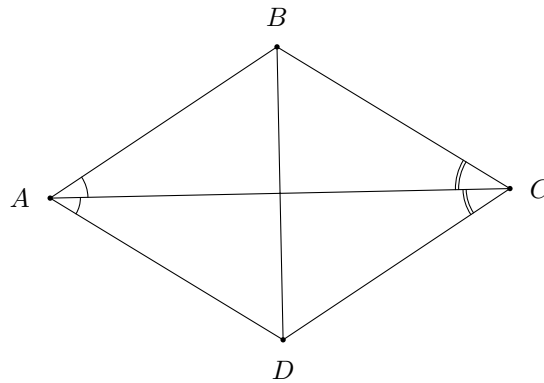
Mà $AC = BD \Rightarrow QM = MN = NP = PQ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

□

🔗 **Bài 5.** Cho tứ giác $ABCD$. Biết AC là đường phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$; BD là đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

💬 **Lời giải.**



- ☑ Vì AC là phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ nên ta có $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{DAC} \\ \widehat{BCA} = \widehat{DCA}. \end{cases}$
- Vì BD là phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$ nên ta có $\begin{cases} \widehat{ABD} = \widehat{CBD} \\ \widehat{ADB} = \widehat{CDB}. \end{cases}$

- ☑ Ta chứng minh được $\triangle BAC = \triangle DAC$ (g-c-g).

$$\Rightarrow \begin{cases} BA = DA \\ BC = DC. \end{cases} \quad (1)$$

- ☑ Ta chứng minh được $\triangle ABD = \triangle CBD$ (g-c-g).

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = CB \\ AD = CD. \end{cases} \quad (2)$$

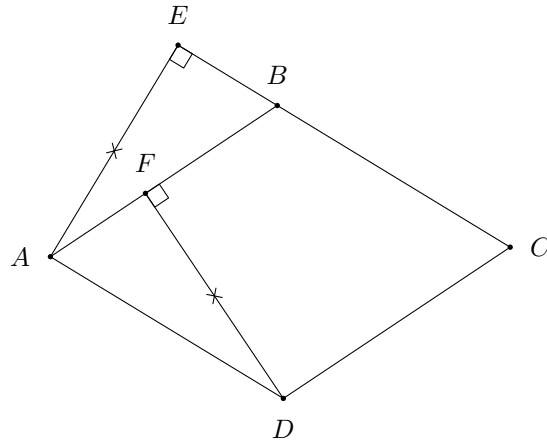
- ☑ Từ (1) và (2) ta suy ra $AB = BC = CD = DA$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

□

🔗 **Bài 6.** Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ $AE \perp BC$ tại E ; $DF \perp AB$ tại F . Biết $AE = DF$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

💬 **Lời giải.**



☑ Vì $ABCD$ là hình bình hành

$$\Rightarrow AD \parallel BC$$

$$\widehat{FAD} = \widehat{EBA} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{EAB}.$$

☑ Xét $\triangle EAB$ vuông tại E và $\triangle FDA$ vuông tại F ta có

$$\text{— } EA = FD \text{ (giả thiết)}$$

$$\text{— } \widehat{EAB} = \widehat{FDA} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle EAB = \triangle FDA \text{ (cgv-gnk).}$$

$$\Rightarrow AB = DA \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình thoi.}$$

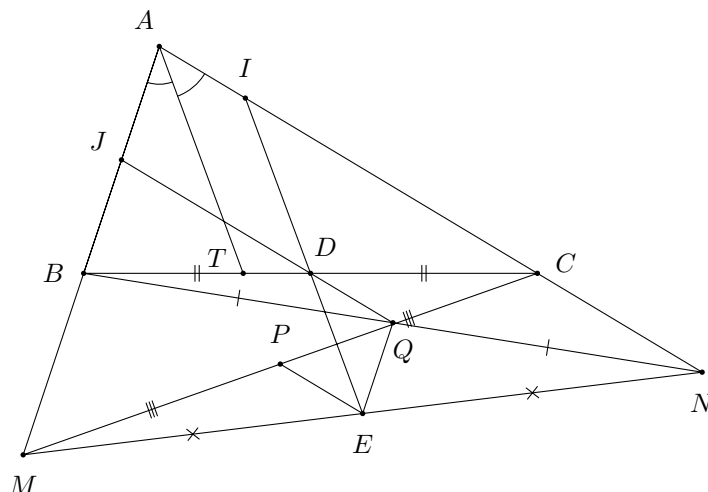


🔹 **Bài 7.** Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Trên tia đối của tia BA lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Gọi D ; E ; P ; Q lần lượt là trung điểm của BC ; MN ; MC ; NB .

a) DQ cắt AM tại J . Chứng minh rằng $\widehat{PEQ} = \widehat{MJQ}$.

b) DE cắt AN tại I . Chứng minh rằng DE song song với phân giác $\widehat{BAC}$.

💬 **Lời giải.**



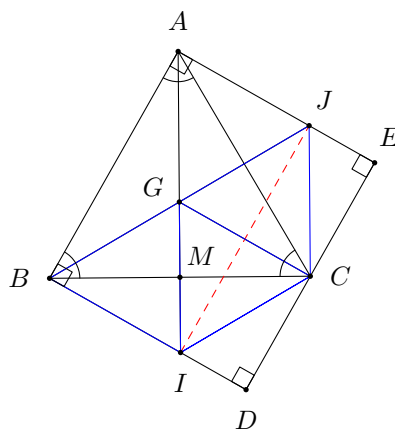
- a) $\checkmark$ Xét $\triangle MCN$ có PE là đường trung bình do đó $PE \parallel CN$. (1)
Tương tự $DQ \parallel CN$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $PE \parallel QD$.
 $\Rightarrow \widehat{PEQ} + \widehat{EQD} = 180^\circ$ (trong cùng phía). (3)
- $\checkmark$ Xét $\triangle NBM$ có QE là đường trung bình.
 $\Rightarrow QE \parallel BM$.
 $\Rightarrow QE \parallel JM$.
 $\Rightarrow \widehat{MJQ} + \widehat{JQE} = 180^\circ$ (trong cùng phía). (4)
- $\checkmark$ Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{PEQ} = \widehat{MJQ}$.
- b) $\checkmark$ Vì $PE \parallel DQ \Rightarrow DQ \parallel AC$.
 $\Rightarrow \widehat{QDE} = \widehat{DIC}$ (đồng vị).
 $\checkmark$ Dễ thấy tứ giác $DQEP$ là hình thoi.
 $\Rightarrow \widehat{QDE} = \widehat{QED} = \frac{\widehat{PDQ}}{2}$.
 $\checkmark$ Mặt khác ta có $\widehat{PDQ} = \widehat{PEQ}$; $\widehat{MJQ} = \widehat{BAC}$.
 $\Rightarrow \widehat{PDQ} = \widehat{BAC}$.
 $\Rightarrow \widehat{DIC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$.
 $\Rightarrow DE$ song song với phân giác $\widehat{BAC}$.

□

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ đều có trọng tâm G . Vẽ hình chữ nhật $ABDE$ sao cho C thuộc đoạn thẳng DE . Tia AG cắt BD tại I , tia AE cắt BG tại J . Chứng minh rằng:

- a) I và J đối xứng nhau qua CG .
b) Các tứ giác $CGBI$; $CIGJ$; $CJAG$ là hình thoi.

Lời giải.



- a) $\checkmark$ Vì $\triangle ABC$ đều, suy ra $\begin{cases} AB = AC = BC \\ \widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ \end{cases}$.
 $\checkmark$ Dễ thấy các $\triangle GAI$ và $\triangle GBI$ là các tam giác đều.
Từ đó dễ dàng suy ra các tứ giác $AJIB$; $JEDI$ là các hình chữ nhật.

$$\Rightarrow GJ = GI.$$

$\Rightarrow G$ thuộc đường trung trực của IJ .

(1)

☑ Ta dễ chỉ ra được $\widehat{CAE} = \widehat{ACG} = 30^\circ$.

$\Rightarrow CG \parallel AE$.

☑ Xét hình thang $DIAE$ có

$$\begin{cases} GA = GI \\ G \in CG \parallel AE \parallel DI \end{cases} \Rightarrow CD = CE.$$

Do đó dễ thấy hai tam giác vuông DCI và ECJ bằng nhau theo trường hợp cạnh góc vuông - cạnh góc vuông.

$$\Rightarrow CI = CJ.$$

$\Rightarrow C$ thuộc đường trung trực của IJ .

(2)

Từ (1) và (2) suy ra I và J đối xứng với nhau qua CG .

b) Ta chứng minh $CGBI$ là hình thoi, các tứ giác còn lại chứng minh tương tự.

Gọi M là giao điểm của BC và GI .

Vì $CG \parallel AE \Rightarrow CG \parallel BD$.

Dễ thấy $\triangle BMI = \triangle CMG$ (g-c-g).

$$\Rightarrow MI = MG.$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BGCI$ là hình bình hành.

Mà $GI \perp BC$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $CGBI$ là hình thoi.

□

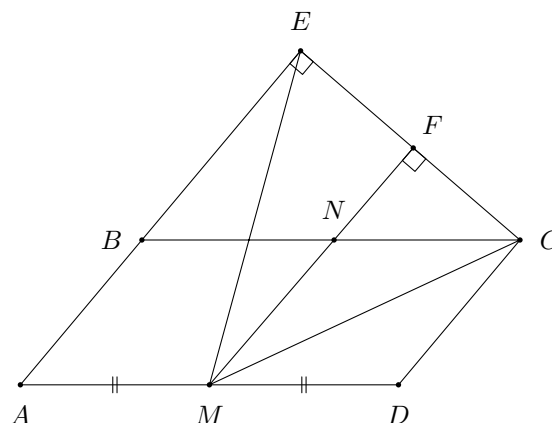
✧ **Bài 9.** Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn và $AD = 2 \cdot AB$. Gọi M là trung điểm của AD ; $CE \perp AB$ tại E ; $MF \perp CE$ tại F ; MF cắt BC tại N . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MNCD$ là hình thoi.

b) $\triangle EMC$ cân.

c) $\widehat{BAD} = 2 \cdot \widehat{AEM}$.

💬 **Lời giải.**



a) ☑ Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$.

$$\Rightarrow NC \parallel MD.$$

(1)

☑ Ta có $\begin{cases} AE \perp EC \\ MF \perp EC \end{cases} \Rightarrow AE \parallel MF$ (từ vuông góc đến song song) $\Rightarrow MN \parallel CD$. (2)

☑ Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} NC \parallel MD \\ MN \parallel CD \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNCD$ là hình bình hành.

b) ☑ Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AE \parallel CD$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECD$ là hình thang vuông.

☑ Xét hình thang $AECD$ có $\begin{cases} MA = MD \\ M \in MF \parallel CD \parallel AE \end{cases} \Rightarrow FE = FC$.

☑ Xét $\triangle MEC$ có MF là đường cao đồng thời là đường trung tuyến.
 $\Rightarrow \triangle MEC$ là $\triangle$ cân.

c) ☑ Vì $AE \parallel MF \Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{EMF}$ (so le trong).

☑ Vì $\triangle MEC$ cân tại M có MF là đường cao.

$\Rightarrow MF$ đồng thời là đường phân giác.

$\Rightarrow \widehat{EMF} = \widehat{FMC}$

☑ Dễ dàng chứng minh được $NCDM$ là hình bình thoi.

$\Rightarrow MC$ là phân giác $\widehat{NMD}$.

$\Rightarrow \widehat{NMC} = \frac{\widehat{NMD}}{2} = \frac{\widehat{NCD}}{2}$.

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{NCD}$.

$\Rightarrow \widehat{BAD} = 2 \cdot \widehat{AEM}$.

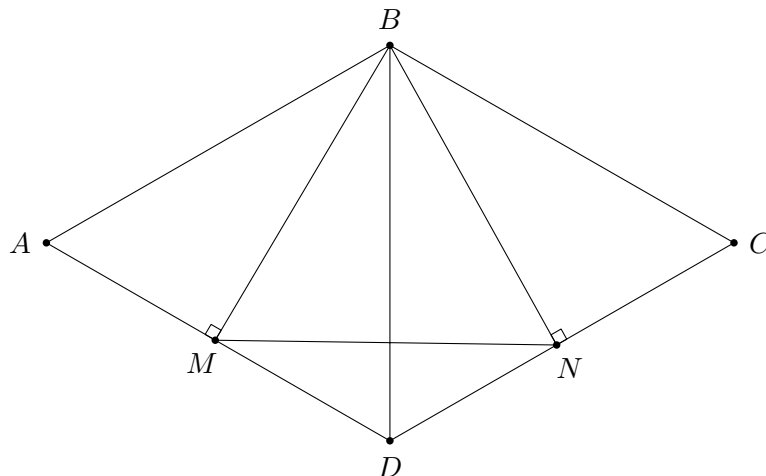
□

✧ **Bài 10.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\widehat{A} = 60^\circ$, $BM \perp AD$ tại M và $BN \perp CD$ tại N .

a) Tính AM, DN, BD .

b) Chứng minh rằng $\triangle BMN$ đều.

💬 **Lời giải.**



a) Xét $\triangle BAM$ vuông tại M có:

$\widehat{ABM} = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ (trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30° thì bằng nửa cạnh huyền)

Xét $\triangle BDM$ và $\triangle BDN$ có:

$$\widehat{BMD} = \widehat{BND} = 90^\circ$$

$\widehat{BDM} = \widehat{BDN}$ (vì BD là đường chéo của hình thoi $ABCD$)

BD chung

Nên $\triangle BDM = \triangle BDN$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow DN = DM \Rightarrow DM = AD - AM = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Xét $\triangle ABD$ có:

$$\widehat{BAD} = 60^\circ; AB = AD$$

$\Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều $\Rightarrow BD = a$.

b) Cmtt ý a) ta được $\triangle BCD$ đều.

Trong tam giác đều đường cao cũng đồng thời là đường phân giác nên $\widehat{ABM} = \widehat{CBN} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MBN} = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Xét $\triangle BMN$ có:

$$\widehat{MBN} = 60^\circ \text{ (cmt)}$$

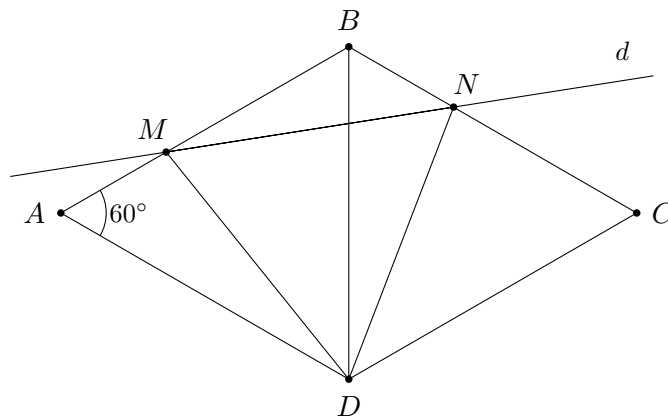
$$BM = BN \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow \triangle BMN$ đều.

□

❖ **Bài 11.** Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Đường thẳng d cắt 2 cạnh AB, BC lần lượt tại M, N sao cho $MB + NB = CD$. Chứng minh rằng $\triangle DMN$ đều.

💬 **Lời giải.**



Ta có:

$$MB + NB = CD; MB + MA = AB \text{ mà } AB = CD \text{ (vì } ABCD \text{ là hình thoi) suy ra } MA = NB.$$

$$\text{Vì } \widehat{A} = 60^\circ \text{ suy ra } \widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{NBD} = 60^\circ.$$

Tam giác ABD đều nên $AD = BD$.

Xét $\triangle MAD$ và $\triangle NBD$ có:

$$MA = NB \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{MAD} = \widehat{NBD} = 60^\circ \text{ (cmt)}$$

$$AD = BD \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle MAD = \triangle NBD$ (c-g-c).

Từ đó: $MD = ND$ và $\widehat{ADM} = \widehat{BDN}$.

$$\widehat{MDN} = \widehat{MDB} + \widehat{BDN} = \widehat{MDB} + \widehat{ADM} = \widehat{ADB} = 60^\circ \text{ (vì } \triangle ABD \text{ đều)}$$

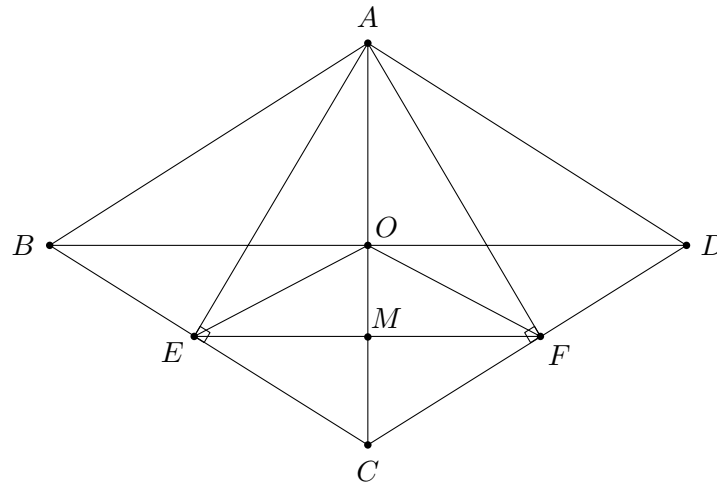
Xét $\triangle MND$ có:
 $MD = ND$ (cmt)
 $\widehat{MDN} = 60^\circ$ (cmt)
 Do đó $\triangle MND$ đều.



❖ **Bài 12.** Cho hình thoi $ABCD$ có góc A tù, 2 đường chéo cắt nhau tại O . Vẽ $AE \perp BC$ tại E , $AF \perp CD$ tại F . Biết $EF = \frac{1}{2}BD$.

- Chứng minh rằng EF là đường trung bình của $\triangle BCD$.
- Tính các góc của hình thoi $ABCD$.

💬 **Lời giải.**



- Gọi M là giao của AC và EF .
 Xét $\triangle AEC$ và $\triangle AFC$ có:
 $\widehat{AEC} = \widehat{AFC} = 90^\circ$
 AC chung
 $\widehat{ACE} = \widehat{ACF}$ (vì $ABCD$ là hình thoi)
 Do đó: $\triangle AEC = \triangle AFC$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow EC = FC$
 Xét $\triangle CME$ và $\triangle CMF$ có:
 $EC = FC$ (cmt)
 $\widehat{ECM} = \widehat{FCM}$ (vì $ABCD$ là hình thoi)
 MC chung
 Nên $\triangle CME = \triangle CMF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{CME} = \widehat{CMF}$
 Mà $\widehat{CME} + \widehat{CMF} = 180^\circ$ nên $\widehat{CME} = \widehat{CMF} = 90^\circ$
 Hay $AC \perp EF$ mà $AC \perp BD$ nên $BD \parallel EF$.
 Xét $\triangle CBD$ có:
 $EF \parallel BD$ (cmt); $EF = \frac{1}{2}BD$
 $\Rightarrow E, F$ lần lượt là trung điểm của BC, CD .
 Nên EF là đường trung bình của $\triangle CBD$.

- Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACE$ có:
 AE chung;
 $\widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 90^\circ$;
 $BE = CE$ (cmt)

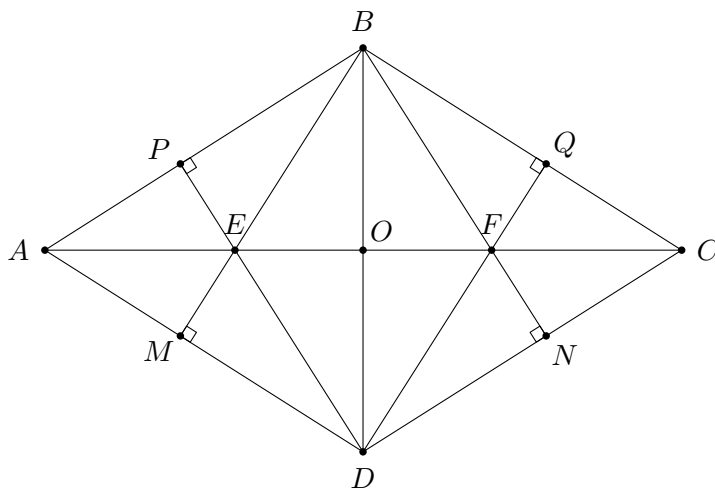


Nên $\triangle ABE = \triangle ACE$ (c-g-c) $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ đều.
 $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 60^\circ; \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 120^\circ$.

□

❖ **Bài 13.** Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{B} > 90^\circ$. Vẽ $BM \perp AD$ tại M , $BN \perp CD$ tại N , $DP \perp AB$ tại P , $DQ \perp BC$ tại Q , BM cắt DP tại E , BN cắt DQ tại F . Chứng minh rằng tứ giác $BFDE$ là hình thoi.

💬 **Lời giải.**



Xét $\triangle APE$ và $\triangle AME$ có:

$$\widehat{APE} = \widehat{AME} = 90^\circ$$

$$\widehat{PAE} = \widehat{MAE} \text{ (vì } ABCD \text{ là hình thoi)}$$

AE chung

$$\text{Nên } \triangle APE = \triangle AME \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)} \Rightarrow PE = ME$$

$$\text{Có } \triangle PEB = \triangle MED \text{ (g-c-g)} \Rightarrow BE = DE$$

Chứng minh tương tự ta được $FB = FD$.

Ta có:

$$DF \perp BC; BE \perp AD \text{ mà } AD \parallel BC \text{ nên } DF \parallel BE.$$

Xét $\triangle BOE$ và $\triangle DOF$ có:

$$\widehat{EBO} = \widehat{FDO} \text{ (so le trong)}$$

$$BO = DO \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BOE} = \widehat{DOF} = 90^\circ$$

$$\text{Nên } \triangle BOE = \triangle DOF \text{ (g-c-g)} \Rightarrow OE = OF.$$

Xét tứ giác $BFDE$ có:

$$BO = DO; EO = FO; BD \perp EF$$

Nên tứ giác $BFDE$ là hình thoi.

□

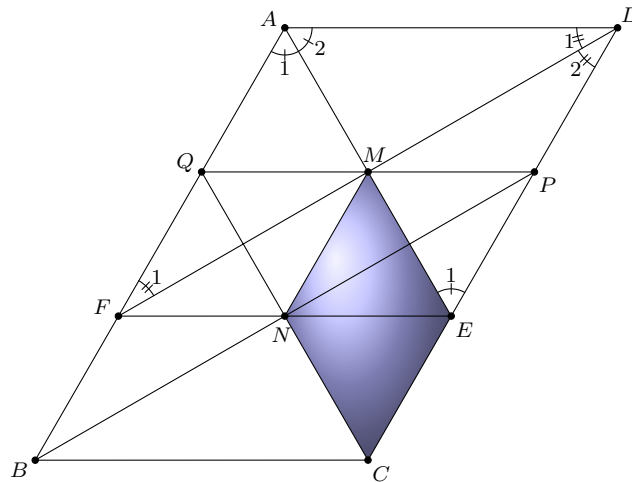
❖ **Bài 14.** Cho hình bình hành $ABCD$, $AB = \frac{3}{2}AD$. Đường phân giác góc A cắt CD tại E , đường phân giác góc D cắt AB tại F và hai đường phân giác này cắt nhau tại M .

a) Chứng minh rằng $ADEF$ là hình thoi.

b) Gọi N là giao điểm của phân giác $\widehat{ABC}$ và phân giác $\widehat{BCD}$. Chứng minh rằng N là trung điểm của EF .

c) Giả sử $\widehat{A} = 120^\circ$. Chứng minh rằng tứ giác $MNCE$ là hình thoi.

Lời giải.

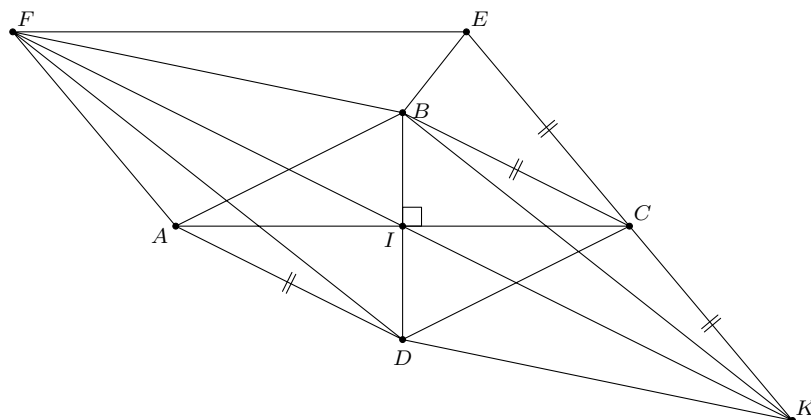


- a) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ và $\widehat{A_2} = \widehat{E_1}$ (so le trong).
 Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{E_1} \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại $D \Rightarrow AD = DE$ (1).
 Ta lại có $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ và $\widehat{D_2} = \widehat{F_1}$ (so le trong).
 Suy ra $\widehat{F_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow \triangle AFD$ cân tại $A \Rightarrow AF = AD$ (2).
 Mặt khác $AF \parallel DE$ (3).
 Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow ADEF$ là hình thoi.
- b) Ta có $AB = \frac{3}{2}AD$. Đặt $AD = 2a$ ($a > 0$) $\Rightarrow AB = 3a$.
 Vì $ADEF$ là hình thoi nên $AD = DE = EF = FA = 2a$.
 Gọi $Q = CN \cap AB$ và $P = BN \cap CD$.
 Chứng minh tương tự câu a ta cũng có tứ giác $BCPQ$ là hình thoi.
 Vì NE và FN lần lượt là đường trung bình của tam giác CPQ và tam giác BPQ nên $NE \parallel PQ$,
 $FE \parallel PQ$, $NE = FN = \frac{1}{2}PQ$.
 Vậy N là trung điểm của EF .
- c) Do $ADEF$ và $BCPQ$ là hình thoi nên $BF = FQ = QA = CE = EP = PD = a$ và M là trung điểm AC , N là trung điểm QC .
 Ta có $AQ \parallel CE$ và $AQ = CE \Rightarrow QAEC$ là hình bình hành, mà MN là đường trung bình của hình bình hành $QAEC$ nên $MECN$ là hình bình hành (4).
 Ta lại có $\triangle FAE$ cân tại A và có $\widehat{FAE} = 60^\circ \Rightarrow \triangle FAE$ đều.
 Mặt khác MN là đường trung bình của $\triangle FAE$ nên $MN = ME = \frac{1}{2}FA$ (5).
 Từ (3) và (4) suy ra $MNCE$ là hình thoi.

□

Bài 15. Cho hình thoi $ABCD$. Vẽ hình bình hành $ACEF$ có $CE = AD$. Gọi K là điểm đối xứng của E qua C (K, E không trùng với D). Chứng minh rằng:

- a) FK, BD, AC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- b) Một trong 4 điểm B, D, E, F là trực tâm của tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại.



a) Gọi I là giao điểm 2 đường chéo AC và BD hình thoi $ABCD$.

Ta có $IC \parallel FE$ và $IC = \frac{1}{2}FE$ (I thuộc AC và $ACEF$ là hình bình hành).

$\Rightarrow I$ thuộc FK .

$\Rightarrow IC$ là đường trung bình tam giác FKE .

$\Rightarrow I$ là trung điểm của FK .

Mà I là trung điểm của BD và AC .

Suy ra FK , BD và AC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Xét tam giác EBK có $BC = \frac{1}{2}KE$ ($BC = CE$ và E đối xứng với K qua C)

$\Rightarrow BK \perp BE$ (1).

Từ cm câu a ta có $\begin{cases} I = FK \cap BD \\ I \text{ là trung điểm của } FK \text{ và } BD \end{cases}$

$\Rightarrow FBKD$ là hình bình hành $\Rightarrow FD \parallel BK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow FD \perp BE$ (*).

Ta lại có $BD \perp AC$ và $AC \parallel FE \Rightarrow BD \perp FE$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow D$ là trực tâm tam giác FBE .

Từ đó suy ra FD vuông BE , ED vuông FB , BD vuông $FE \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

□

✧ **Bài 16.** Cho hình thoi $ABCD$. Trên các tia đối của tia BA , CB , DC , AD lấy các điểm M , N , E , F sao cho $BM = CN = DE = AF$. Chứng minh rằng:

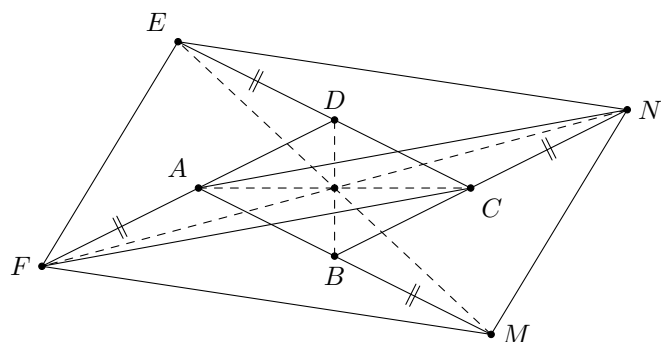
a) $\triangle FAM = \triangle NCE$;

b) $MNEF$ là hình bình hành;

c) AC , BD , ME , NF đồng quy.

$$\begin{cases} DC = AB \\ ED = BM \end{cases} \Rightarrow EC = AM.$$

$$\begin{cases} \widehat{FAM} + \widehat{DAB} = 180^\circ \\ \widehat{ECN} + \widehat{DCB} = 180^\circ \\ \widehat{DAB} = \widehat{DCB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{FAM} = \widehat{ECN}.$$



Xét $\triangle FAM$ và $\triangle NCE$ có

$$\left. \begin{aligned} AF &= CN \text{ (gt)} \\ \widehat{FAM} &= \widehat{ECN} \text{ (cmt)} \\ AM &= CE \text{ (cmt)} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle FAM = \triangle NCE \text{ (c.g.c).}$$

- b) Ta có $\triangle FAM = \triangle NCE$ (cmt) nên $EN = FM$.
 Chứng minh tương tự ý a), ta được $\triangle FED = \triangle NMB$.
 Suy ra $EF = MN$.
 Tứ giác $EFMN$ có $EF = MN$ và $EN = FM$ nên là hình bình hành.

- c) Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = EM \cap FN$.

Ta có $EFMN$ và $ABCD$ là hình bình hành.

Suy ra O và O' lần lượt là trung điểm của AC và FN .

Tứ giác $AFCN$ có $AF = CN$ và $AF \parallel CN$ nên là hình bình hành.

Từ (1) và (2) suy ra $O \equiv O'$.

Vậy AC, BD, ME, NF đồng quy.

□

❖ **Bài 17.** Cho $\triangle ABC$ đều có G là trọng tâm, đường cao AH . Lấy điểm M bất kì trên cạnh BC , I là trung điểm của AM . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC .

- a) Tứ giác $DIEH$ là hình gì? Vì sao?
 b) Chứng minh rằng IH, DE, MG đồng quy.

🗨️ **Lời giải.**

a) Ta có ID là trung tuyến ứng với cạnh huyền của $\triangle ADM$ vuông tại D .

$$\Rightarrow ID = \frac{1}{2}AM.$$

Ta có IH là trung tuyến ứng với cạnh huyền của $\triangle AHM$ vuông tại H .

$$\Rightarrow IH = \frac{1}{2}AM.$$

Suy ra $ID = IH \Rightarrow \triangle IDH$ cân tại I .

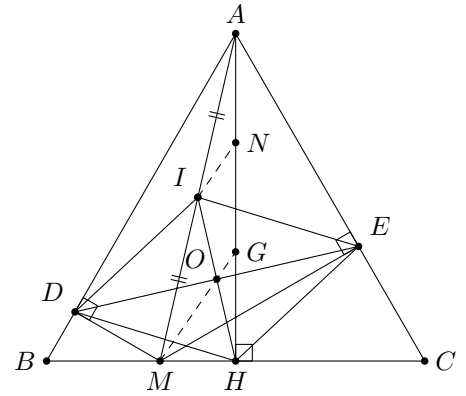
$$\left. \begin{aligned} \widehat{DIM} &= \widehat{IDA} + \widehat{IAD} = 2\widehat{IAD} \\ \widehat{HIM} &= \widehat{IHA} + \widehat{IAH} = 2\widehat{IAH} \end{aligned} \right\}$$

Suy ra $\widehat{DIH} = 2\widehat{DAH} = 60^\circ$.

Do đó $\triangle IDH$ đều.

Chứng minh tương tự ta được $\triangle IEH$ đều.

Vậy $IDHE$ là hình thoi.



b) Gọi N là trung điểm của AG . Khi đó G là trung điểm của NH .

Gọi O là giao điểm của IH và DE . Khi đó O là trung điểm của IH và DE .

Ta có G và O lần lượt là trung điểm của NH và IH .

$\Rightarrow OG$ là đường trung bình của $\triangle INH$.

$\Rightarrow OG \parallel IN$.

(1)

Ta có N và I lần lượt là trung điểm của AG và AM .

$\Rightarrow IN$ là đường trung bình của $\triangle AMG$.

$\Rightarrow MG \parallel IN$.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra M, O, G thẳng hàng.

Vậy IH, DE, MG đồng quy.

□

Bài

12

HÌNH VUÔNG

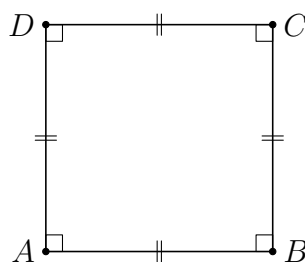
A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 12.1. Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

Như vậy, hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi.



$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$

2. Tính chất

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

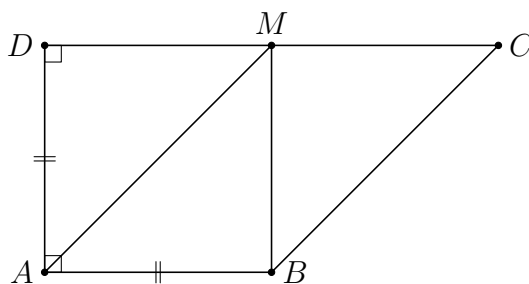
3. Dấu hiệu nhận biết

- a) Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- b) Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- c) Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông.
- d) Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- e) Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

B BÀI TẬP

✧ **Bài 1.** Cho hình thang $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) sao cho $DC = 2AD = 2AB$. Đường thẳng qua A song song với BC cắt CD tại M . Chứng minh rằng tứ giác $ABMD$ là hình vuông.

💬 Lời giải.



Xét tứ giác $ABCM$ có $AB \parallel CM$ ($ABCD$ là hình thang) và $AM \parallel BC$ (gt) nên tứ giác $ABCM$ là hình bình hành $\Rightarrow MC = AB$, mà $DC = 2AD = 2AB$ nên M là trung điểm của $CD \Rightarrow MD = MC = AB$. Xét $\triangle ABM$ và $\triangle MDA$, có

- ☑ $AB = MD$ (cmt).
- ☑ $\widehat{MAB} = \widehat{DMA}$ (so le trong vì $AB \parallel CD$).
- ☑ AM là cạnh chung.

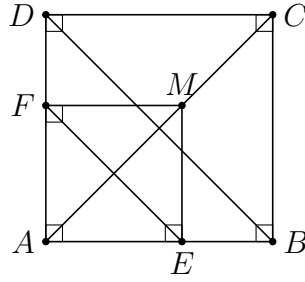
$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle MDA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{D} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ABMD$ có $\widehat{MBA} = \widehat{D} = \widehat{DAB} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật, mà $AB = AD$, suy ra tứ giác $ABMD$ là hình vuông. □

✧ **Bài 2.** Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm trên đường chéo AC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AD . Chứng minh rằng:

- a) $AEMF$ là hình vuông.
- b) $EF \parallel BD$.

💬 Lời giải.



a) Xét tứ giác $AEMF$ có $\widehat{FAE} = \widehat{MEA} = \widehat{MFA} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật, mà AC là phân giác của $\widehat{FAE}$ ($ABCD$ là hình vuông), suy ra $AEMF$ là hình vuông.

b) Ta có

☑ $AC \perp BD$ ($ABCD$ là hình vuông).

☑ $AC \perp EF$ ($AEMF$ là hình vuông).

$\Rightarrow EF \parallel BD$.

□

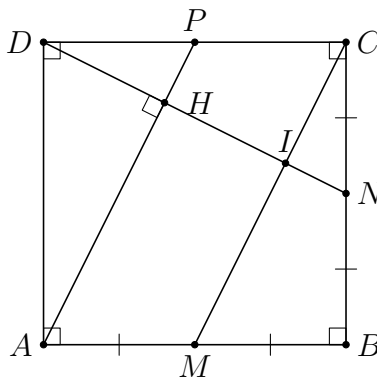
✧ **Bài 3.** Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Đoạn thẳng CM cắt DN tại I .

a) Chứng minh rằng $CM = DN$ và $CM \perp DN$.

b) Vẽ $AH \perp DN$ tại H , AH cắt CD tại P . Chứng minh rằng P là trung điểm của CD .

c) Chứng minh rằng $AI = AB$.

💬 **Lời giải.**



a) Xét $\triangle CMB$ và $\triangle DNC$, có

☑ $CD = BC$ ($ABCD$ là hình vuông).

☑ $\widehat{DCN} = \widehat{CBM} = 90^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).

☑ $CN = MB$ (M, N là trung điểm AB, BC).

$\Rightarrow \triangle CMB = \triangle DNC$ (c.g.c) $\Rightarrow CM = DN$ và $\widehat{BCM} = \widehat{CDN}$.

Mặt khác $\widehat{CND} + \widehat{CDN} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{BCM} + \widehat{CND} = 90^\circ$. Vậy $CM \perp DN$.

b) Ta có $\begin{cases} AP \perp DN \text{ (gt)} \\ CM \perp DN \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow AP \parallel CM \Rightarrow \widehat{APD} = \widehat{DCM} \text{ (đồng vị)}.$

Suy ra $\widehat{DAP} = \widehat{BCM}$ (cùng phụ góc $\widehat{APD}$).

Xét $\triangle ADP$ và $\triangle CBM$ có

☑ $\widehat{PDA} = \widehat{CBM} = 90^\circ.$

☑ $AD = CB$ ($ABCD$ là hình vuông).

☑ $\widehat{DAP} = \widehat{BCM}$ (cmt).

$\Rightarrow \triangle ADP = \triangle CBM$ (g.c.g) $\Rightarrow DP = BM = \frac{AB}{2}.$

Vì $P \in CD$, mà $AB = CD$ và $DP = \frac{AB}{2}$, suy ra $PD = PC$. Vậy P là trung điểm của CD .

c) Xét $\triangle CDI$ có $\begin{cases} PH \parallel CI \\ P \text{ là trung điểm của } CD \end{cases} \Rightarrow H \text{ là trung điểm của } DI.$

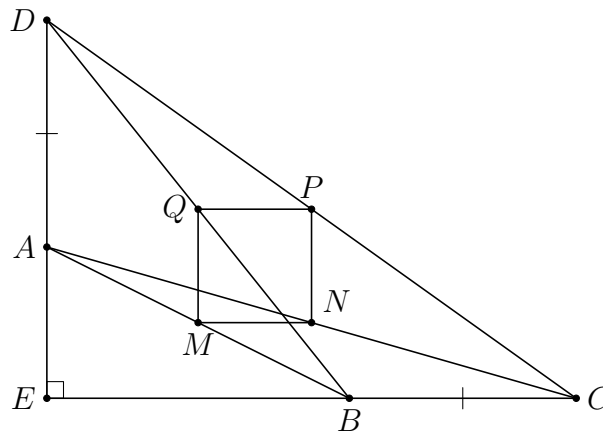
Trong $\triangle ADI$ có AH là đường cao và là trung tuyến, suy ra $\triangle ADI$ cân tại A .

Vậy $AI = AD = AB$ (đpcm).

□

🔗 **Bài 4.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 90^\circ$ và $AD = BC$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

💬 **Lời giải.**



Gọi E là giao điểm của AD và BC . Ta có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC$.

Xét $\triangle ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC nên MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow$

$MN \parallel BC$ và $MN = \frac{BC}{2}.$

Tương tự ta chứng minh được

☑ QP là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow QP \parallel BC$ và $QP = \frac{BC}{2}.$

☑ MQ là đường trung bình của $\triangle ABD \Rightarrow MQ \parallel AD$ và $MQ = \frac{AD}{2}.$

☑ PN là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow PN \parallel AD$ và $PN = \frac{AD}{2}.$

$$\text{Mà } AD = BC \Rightarrow MN = QP = MQ = PN. \quad (1)$$

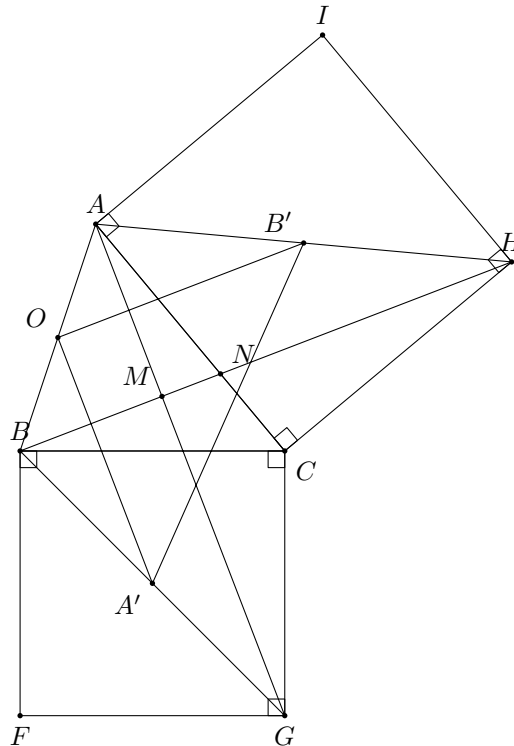
$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel BC \\ QM \parallel AD \Rightarrow QM \perp MN \Rightarrow \widehat{QMN} = 90^\circ. \\ BC \perp AD \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình vuông. □

❖ **Bài 5.** Cho $\triangle ABC$. Phía ngoài $\triangle ABC$ dựng hình vuông $BCGF$, $ACHI$. Gọi O , A' , B' lần lượt là trung điểm của AB , BG , AH . Chứng minh rằng

- $AG = BH$.
- $AG \perp BH$.
- $\triangle OA'B'$ vuông cân.

💬 **Lời giải.**



- Xét $\triangle ACG$ và $\triangle HCB$ có
 $AC = CH$ (do tứ giác $ACHI$ là hình vuông)
 $\widehat{ACG} = \widehat{HCB} (= 90^\circ + \widehat{ACB})$
 $CG = CB$ (do tứ giác $BCGF$ là hình vuông)
 Vậy $\triangle ACG = \triangle HCB$ (c-g-c). Suy ra $AG = HB$ (hai cạnh tương ứng).
- Gọi M , N lần lượt là giao điểm của đoạn BH với AG và AC .
 Theo câu trên, $\triangle ACG = \triangle HCB$ nên $\widehat{CAG} = \widehat{CHB}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{NAM} = \widehat{CHN}$.
 Xét $\triangle AMN$ và $\triangle CNH$ có
 $\widehat{NAM} = \widehat{CHN}$ (cmt)
 $\widehat{ANM} = \widehat{CNH}$ (hai góc đối đỉnh)
 Và $\widehat{NAM} + \widehat{ANM} + \widehat{AMN} = \widehat{CHN} + \widehat{CNH} + \widehat{HCN} = 180^\circ$.
 Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{HCN}$ mà $\widehat{HCN} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AMN} = 90^\circ$ hay $AG \perp BH$.

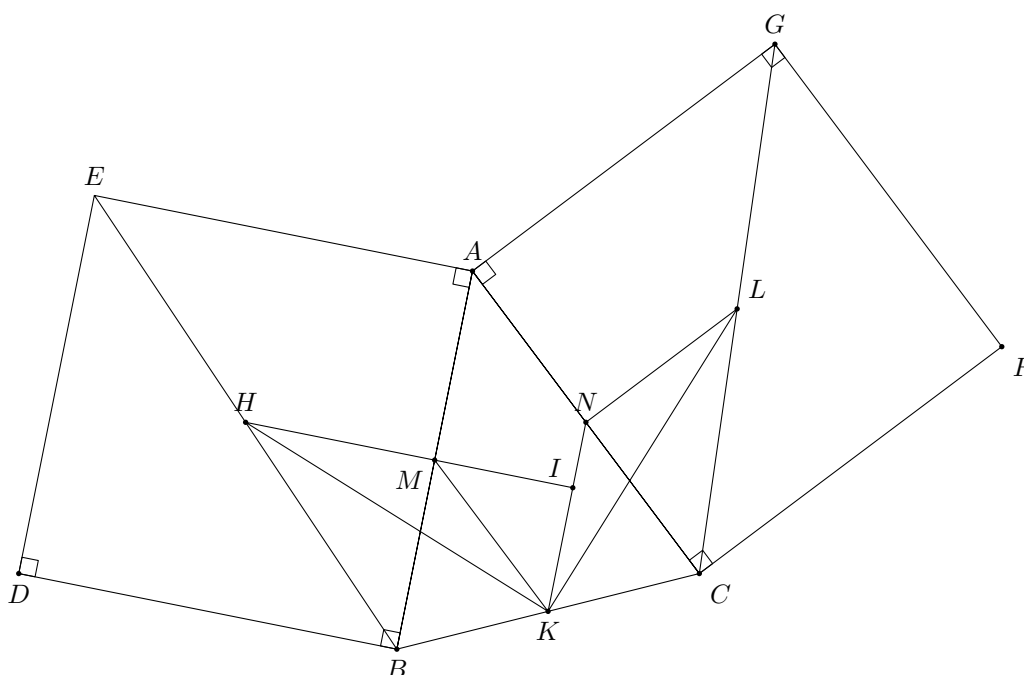
- c) Xét $\triangle ABG$ có A' là trung điểm của BG và O là trung điểm của AB .
 $\Rightarrow OA'$ là đường trung bình của $\triangle ABG$
 $\Rightarrow OA' \parallel AG$ và $OA' = \frac{1}{2}AG$. (1)
 Xét $\triangle ABH$ có B' là trung điểm của AH và O là trung điểm của AB .
 $\Rightarrow OB'$ là đường trung bình của $\triangle ABH$
 $\Rightarrow OB' \parallel BH$ và $OB' = \frac{1}{2}BH$. (2)
 Có $AG \perp BH$ (cm câu b) và $AG = HB$ (cm câu a). (3)
 Từ (1), (2) và (3) suy ra $OA' = OB'$ và $OA' \perp OB'$
 $\Rightarrow \triangle OA'B'$ là tam giác vuông cân tại O .

□

❖ **Bài 6.** Cho $\triangle ABC$. Phía ngoài $\triangle ABC$ dựng hình vuông $ACFG$, $ABDE$. Gọi H, K, L, M, N lần lượt là trung điểm của BE, BC, CG, AB, AC . Chứng minh rằng

- a) $\triangle KNL = \triangle HMK$.
 b) $HK \perp KL$.

💬 **Lời giải.**



- a) Xét $\triangle ABE$ có M là trung điểm của AB và H là trung điểm của BE .
 $\Rightarrow HM$ là đường trung bình của $\triangle AEB$
 $\Rightarrow HM = \frac{1}{2}AE$
 Xét $\triangle ABC$ có N là trung điểm của AC và K là trung điểm của BC .
 $\Rightarrow NK$ là đường trung bình của $\triangle ABC$
 $\Rightarrow NK = \frac{1}{2}AB$
 Mà $AB = AE$ (do tứ giác $ABED$ là hình vuông)
 Suy ra $HM = NK$. (1)
 Xét $\triangle ACG$ có N là trung điểm của AC và L là trung điểm của CG .

$\Rightarrow NL$ là đường trung bình của $\triangle ACG$

$$\Rightarrow NL = \frac{1}{2}AG$$

Xét $\triangle ABC$ có M là trung điểm của AB và K là trung điểm của BC .

$\Rightarrow MK$ là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow MK = \frac{1}{2}AC$$

Mà $AC = AG$ (do tứ giác $ACFG$ là hình vuông)

Suy ra $MK = NL$. (2)

$$\text{Ta có } \widehat{HMK} = \widehat{HMB} + \widehat{BMK} = 90^\circ + \widehat{BAC}$$

$$\widehat{KNL} = \widehat{LNC} + \widehat{CNK} = 90^\circ + \widehat{BAC}$$

Suy ra $\widehat{HMK} = \widehat{KNL}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\triangle KNL = \triangle HMK$.

b) Gọi I là giao điểm của HM và NK .

Do $HM \parallel AE$, $NL \parallel AB$ mà $AB \perp AE$ suy ra $HM \perp NK$ hay $\widehat{HIK} = 90^\circ$.

Xét $\triangle HIK$ vuông tại I có $\widehat{IHK} + \widehat{HKI} = 90^\circ$.

Mặt khác từ $\triangle KNL = \triangle HMK \Rightarrow \widehat{MHK} = \widehat{NKL}$.

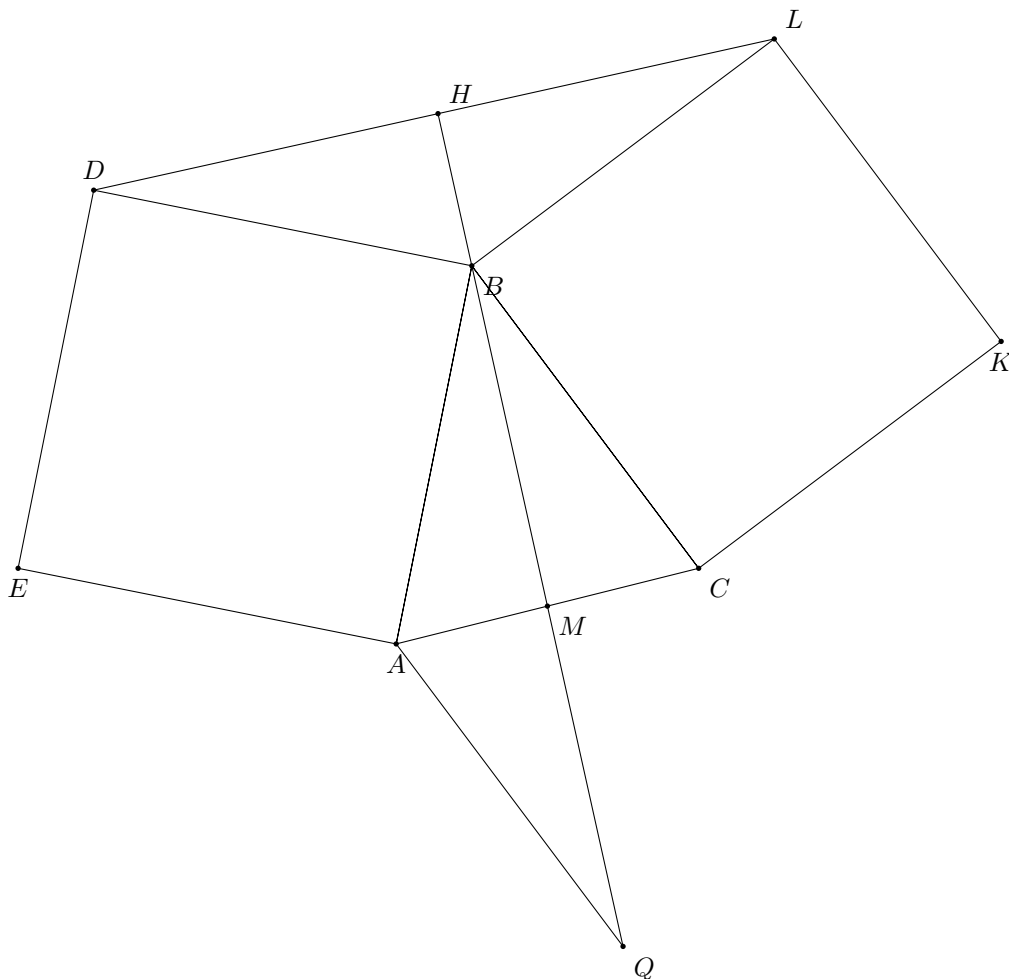
Suy ra $\widehat{NKL} + \widehat{HKI} = 90^\circ$ hay $\widehat{HKL} = 90^\circ$.

Vậy $HK \perp KL$.

□

✧ **Bài 7.** Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của AC . Phía ngoài $\triangle ABC$ dựng hình vuông $BCKL$, $ABDE$. Lấy điểm Q trên tia đối của MB sao cho $MB = MQ$. Chứng minh: $DL = BQ$.

💬 Lời giải.



Gọi H là giao điểm của QB và DL .

Khi đó $\widehat{DBL} + \widehat{DBA} + \widehat{ABC} + \widehat{CBL} = 360^\circ (= 2 \cdot \widehat{HBQ})$

$\Rightarrow \widehat{DBL} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. (1)

Có $\triangle AMQ = \triangle CMB$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{MAQ} = \widehat{MCB}$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc lại ở vị trí so le trong nên $AQ \parallel BC$ suy ra $\widehat{QAB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (2 góc trong cùng phía). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DBL} = \widehat{QAB}$.

Mặt khác từ $\triangle AMQ = \triangle CMB$ (cmt) $\Rightarrow AQ = BC$ (hai cạnh tương ứng) mà $BC = BL$ do tứ giác $BCKL$ là hình vuông nên $AB = BL$.

Xét $\triangle QAB$ và $\triangle LBD$ có

$AB = DB$ (do tứ giác $ABDE$ là hình vuông)

$\widehat{DBL} = \widehat{QAB}$ (cmt)

$AQ = BL$ (cmt)

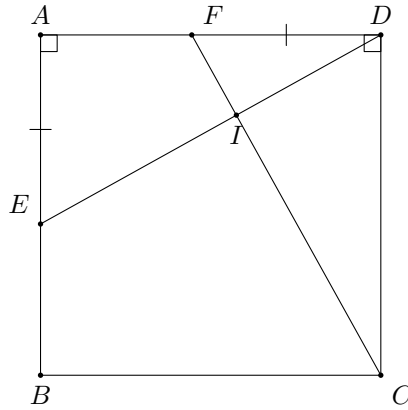
Vậy $\triangle QAB = \triangle LBD$ (c.g.c).

Suy ra $DL = BQ$.

□

✎ **Bài 8.** Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F trên cạnh AB, AD sao cho $AE = DF$. Chứng minh: $DE = CF$ và $DE \perp CF$.

💬 **Lời giải.**



Xét $\triangle ADE$ và $\triangle DCF$ có

$AD = DC$ (do tứ giác $ABCD$ là hình vuông)

$\widehat{EAD} = \widehat{FDC} = 90^\circ$ (do tứ giác $ABCD$ là hình vuông)

$AE = DF$ (giả thiết)

Vậy $\triangle ADE = \triangle DCF$ (c.g.c). Suy ra $DE = CF$ (hai cạnh tương ứng)

Gọi I là giao điểm của CF và DE .

Từ $\triangle ADE = \triangle DCF$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DCF}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{FDI} = \widehat{DCI}$.

Mà $\widehat{FDI} + \widehat{IDC} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{DCI} + \widehat{IDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DIC} = 90^\circ$ hay $DE \perp CF$.

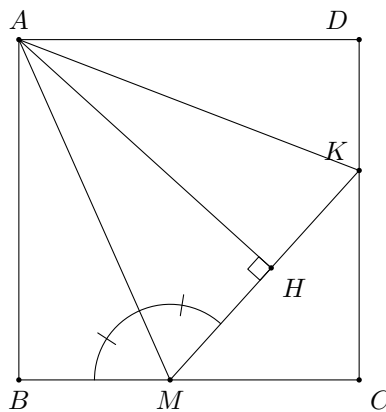
□

❖ **Bài 9.** Cho hình vuông $ABCD$. Từ điểm M tùy ý trên cạnh BC , vẽ một đường thẳng cắt CD tại K sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$, $AH \perp MK$ tại H . Chứng minh rằng:

a) $\triangle AMH = \triangle AMB$.

b) $\widehat{KAM} = 45^\circ$.

💬 **Lời giải.**



a) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMH$ có

$\widehat{ABM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$

$\widehat{AMB} = \widehat{AMH}$ (gt)

AM là cạnh chung

Vậy $\triangle AMB = \triangle AMH$ (cạnh huyền-góc nhọn).

b) Theo câu trên, $\triangle AMB = \triangle AMH$ nên $AB = AH$ (hai cạnh tương ứng).

Mà $AB = AD$ (do tứ giác $ABCD$ là hình vuông).

Nên $AH = AD$.

Suy ra $\triangle AHK = \triangle ADK$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông).

$\Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{HAK}$ (2 góc tương ứng).

Lại có $\widehat{BAM} = \widehat{HAM}$ (do $\triangle AMB = \triangle AMH$).

Suy ra $\widehat{HAM} + \widehat{HAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAB} + \frac{1}{2}\widehat{HAD} = \frac{1}{2}\widehat{DAB}$.

$\Rightarrow \widehat{KAM} = 45^\circ$.

□

✧ **Bài 10.** Cho hình vuông $ABCD$, E thuộc cạnh AB . Phân giác $\widehat{CDE}$ cắt BC tại K . Trên tia đối của tia AB , lấy điểm F sao cho $AF = CK$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle DEF$ cân.

b) $AE + CK = DE$.

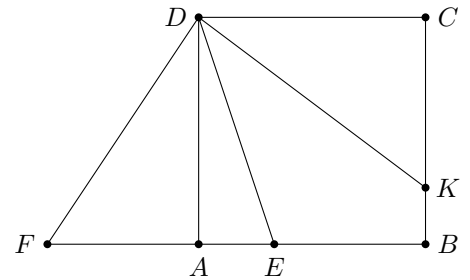
💬 **Lời giải.**

a)

Xét $\triangle ADF$ vuông tại A và $\triangle CDK$ vuông tại C có

$$\begin{cases} AF = CK \text{ (gt)} \\ AD = CD \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \end{cases} \Rightarrow \triangle ADF = \triangle CDK \text{ (cgv-cgv)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{DFA} = \widehat{CKD} \\ \widehat{ADF} = \widehat{CDK} \end{cases} \text{ (2 góc tương ứng).}$$



Ta có $\begin{cases} \widehat{ADF} = \widehat{CDK} \text{ (cmt)} \\ \widehat{KDE} = \widehat{CDK} \text{ (DK là phân giác)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{KDE} \Rightarrow \widehat{EDF} = \widehat{ADK}$,
mà $\widehat{ADK} = \widehat{CKD}$ (so le trong) nên $\widehat{EDF} = \widehat{CKD}$.
Từ đó suy ra $\widehat{EDF} = \widehat{EFD}$ (do cùng bằng $\widehat{CKD}$) nên $\triangle EDF$ cân tại $E \Rightarrow DE = EF$.

b) Ta có $FE = AE + AF$, mà $\begin{cases} AF = CK \text{ (gt)} \\ DE = EF \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow AE + CK = DE$.

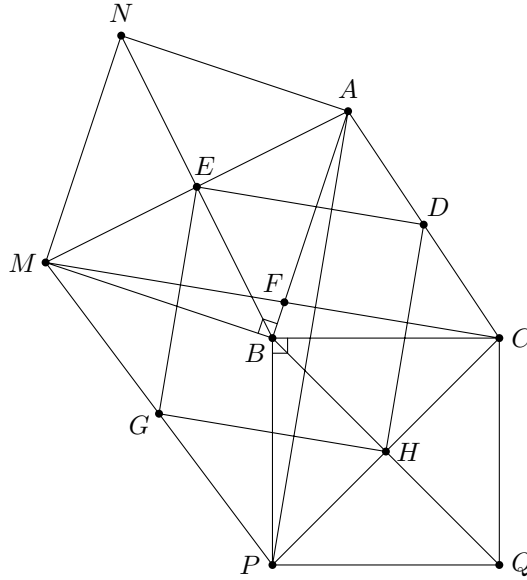
□

✧ **Bài 11.** Cho $\triangle ABC$. Bên ngoài $\triangle ABC$, dựng các hình vuông $ABMN$ và $BCQP$. Gọi D, E, G, H lần lượt là trung điểm của AC, BN, MP, BQ . Chứng minh rằng:

a) $AP = CM$ và $AP \perp CM$.

b) Tứ giác $DEGH$ là hình vuông.

💬 **Lời giải.**



a) Ta có
$$\begin{cases} \widehat{MBC} = 90^\circ + \widehat{ABC} \\ \widehat{ABP} = 90^\circ + \widehat{ABC} \end{cases} \Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{ABP}.$$

Xét $\triangle ABP$ và $\triangle CBM$ có

$$\begin{cases} CB = BP \text{ (BCQP là hình vuông)} \\ AB = BM \text{ (ABMN là hình vuông)} \\ \widehat{CBM} = \widehat{ABP} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle CBM = \triangle PBA$ (c-g-c),

suy ra $CM = AP$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{BAP} = \widehat{CMB}$ (hai góc tương ứng).

Gọi F là giao điểm của CM và AB .

Ta có $\widehat{BMF} + \widehat{BFM} = 90^\circ$, mà
$$\begin{cases} \widehat{BFM} = \widehat{AFC} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{CMB} = \widehat{BAP} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{AFC} + \widehat{BAP} = 90^\circ \Rightarrow AP \perp CM.$

b) Vì $ABMN$ là hình vuông, E là trung điểm của BN nên E là trung điểm AM .

Tương tự, ta cũng có H là trung điểm CP .

Xét $\triangle MCP$ có
$$\begin{cases} H \text{ là trung điểm } CP \\ G \text{ là trung điểm } MP \end{cases} \Rightarrow GH \text{ là đường trung bình của } \triangle PMC$$

$$\Rightarrow GH = \frac{1}{2}MC \text{ và } GH \parallel MC. \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có $ED = \frac{1}{2}MC$ và $ED \parallel MC$ (2); $DH = \frac{1}{2}AP$ và $DH \parallel AP$.

Từ (1) và (2) suy ra $ED = GH$ và $ED \parallel GH$, nên $DEGH$ là hình bình hành.

Ta có
$$\begin{cases} DH = \frac{1}{2}AP \text{ (cmt)} \\ ED = \frac{1}{2}MC \text{ (cmt)} \Rightarrow ED = DH, \\ AP = CM \text{ (cmt)} \end{cases}$$

mà $DEGH$ là hình bình hành nên $DEGH$ là hình thoi.

Vì
$$\begin{cases} AP \perp CM \text{ (cmt)} \\ CM \parallel ED \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow ED \perp AP, \text{ mà } AP \parallel DH \text{ (cmt)} \Rightarrow ED \perp DH \Rightarrow \widehat{EDH} = 90^\circ.$$

Do đó $DEGH$ là hình vuông.

🔗 **Bài 12.** Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M trên BD . Vẽ $ME \perp AB$ tại E và $MF \perp AD$ tại F . Chứng minh rằng:

a) $CF = DE$; $CF \perp DE$.

c) $BF = CE$; $BF \perp CE$.

b) $CM = EF$, $CM \perp EF$.

d) CM , BF , DE đồng quy.

💬 **Lời giải.**

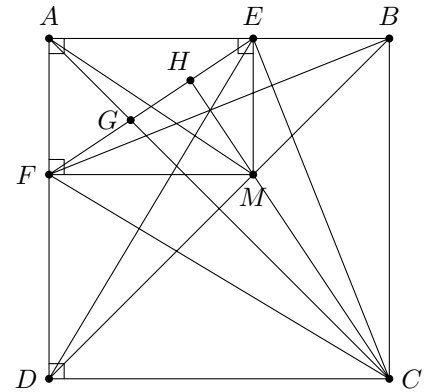
a)

Tứ giác $AEMF$ có $\widehat{MEA} = \widehat{EAF} = \widehat{MFA} = 90^\circ$ nên $AEMF$ là hình chữ nhật, suy ra $AE = MF$.

Xét $\triangle MFD$ vuông tại F có $\widehat{MDF} = 45^\circ$, suy ra $\triangle MFD$ vuông cân tại $F \Rightarrow MF = FD$, mà $MF = AE$ (cmt) nên $FD = AE$.

Xét $\triangle AED$ vuông tại A và $\triangle DFC$ vuông tại D có

$$\begin{cases} AE = DF \text{ (cmt)} \\ AD = DC \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \end{cases} \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \text{ (cgv-cgv)}$$



Suy ra $CF = DE$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{AED} = \widehat{CFD}$ (hai góc tương ứng).

Vì $\widehat{AED} + \widehat{ADE} = 90^\circ$, mà $\widehat{AED} = \widehat{CFD} \Rightarrow \widehat{CFD} + \widehat{ADE} = 90^\circ \Rightarrow CF \perp DE$.

b) Ta có
$$\begin{cases} BE = BA - AE \\ AF = AD - DF \\ AE = FD \text{ (cmt)}, AD = AB \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \end{cases} \Rightarrow BE = AF.$$

Xét $\triangle AFB$ vuông tại A và $\triangle BEC$ vuông tại B có

$$\begin{cases} AB = BC \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \\ AF = BE \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle AFB = \triangle BEC$ (cgv-cgv)

$\Rightarrow BF = CE$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{BFA} = \widehat{BEC}$ (hai góc tương ứng).

Vì $\widehat{BFA} + \widehat{ABF} = 90^\circ$, mà $\widehat{BFA} = \widehat{BEC}$ (cmt), nên $\widehat{BEC} + \widehat{ABF} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp EC$.

c) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle CBM$ có

$$\begin{cases} BM \text{ chung} \\ BA = BC \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \\ \widehat{ABM} = \widehat{CBM} = 45^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBM$ (c-g-c)

$\Rightarrow CM = AM$ (hai cạnh tương ứng), mà $AM = EF$ ($AEMF$ là hình chữ nhật), nên $CM = EF$.

Vì $CM = AM$ (cmt) nên $\triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{MAC}$.

Do $AEMF$ là hình chữ nhật nên $\widehat{AFE} = \widehat{MAF} = \widehat{MAC} + \widehat{CAD} = 45^\circ + \widehat{MCA}$.

Xét $\triangle AGF$ có $\widehat{EGC} = 180^\circ - \widehat{GAF} - \widehat{GFA}$

$$= 180^\circ - 45^\circ - \widehat{MAF}$$

$$= 135^\circ - (\widehat{MCA} + 45^\circ)$$

$$= 90^\circ - \widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{EGC} + \widehat{MCA} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp EF.$$

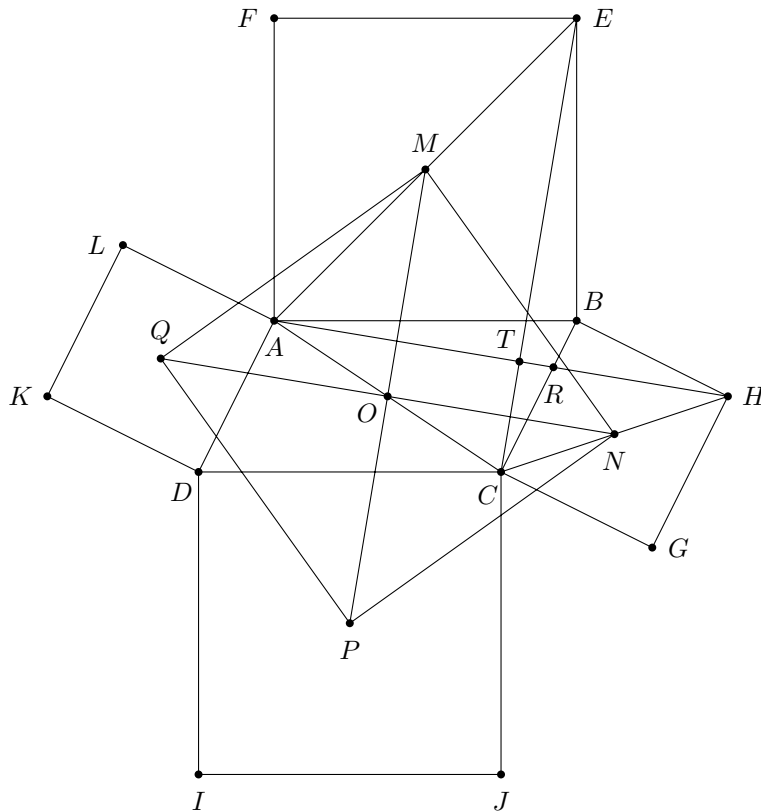
d) Xét $\triangle CEF$ có

$$\begin{cases} BF \text{ là đường cao (do } BF \perp CE) \\ DE \text{ là đường cao (do } DE \perp CF) \\ CM \text{ là đường cao (do } CM \perp FE) \end{cases} \Rightarrow BF, DE, CM \text{ đồng quy.}$$

□

❖ **Bài 13.** Cho hình bình hành $ABCD$. Bên ngoài hình bình hành, dựng các hình vuông $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $ADKL$. Gọi M , N , P , Q lần lượt là tâm của 4 hình vuông đó. Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình vuông.

💬 **Lời giải.**



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD \Rightarrow O$ là trung điểm của AC .

Vì M là tâm của hình vuông $ABEF \Rightarrow M$ là trung điểm của AE .

Chứng minh tương tự, ta cũng được N là trung điểm của CH .

Xét $\triangle AEC$ có $\begin{cases} M \text{ là trung điểm của } AE \\ O \text{ là trung điểm của } CA \end{cases} \Rightarrow MO \text{ là đường trung bình của } \triangle AEC$

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}EC \text{ và } MO \parallel EC. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có } NO = \frac{1}{2}AH \text{ và } NO \parallel AH. \quad (2)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{EBC} = 90^\circ + \widehat{ABC} \\ \widehat{ABH} = 90^\circ + \widehat{ABC} \end{cases} \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{ABH}.$$

Xét $\triangle ECB$ và $\triangle ABH$ có

$$\begin{cases} BE = BA \text{ (} ABEF \text{ là hình vuông)} \\ BH = BH \text{ (} BCGH \text{ là hình vuông)} \\ \widehat{CBE} = \widehat{ABH} \text{ (cnmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle EBC = \triangle ABH \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow EC = AH \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

(3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MO = ON$.

Gọi T, R lần lượt là giao điểm của AH với CE và BC .

Ta có $\widehat{BHR} + \widehat{BRH} = 90^\circ$, mà $\widehat{BRH} = \widehat{CRT}$ (đối đỉnh) và $\widehat{BHR} = \widehat{RCT}$ ($\triangle EBC = \triangle ABH$),

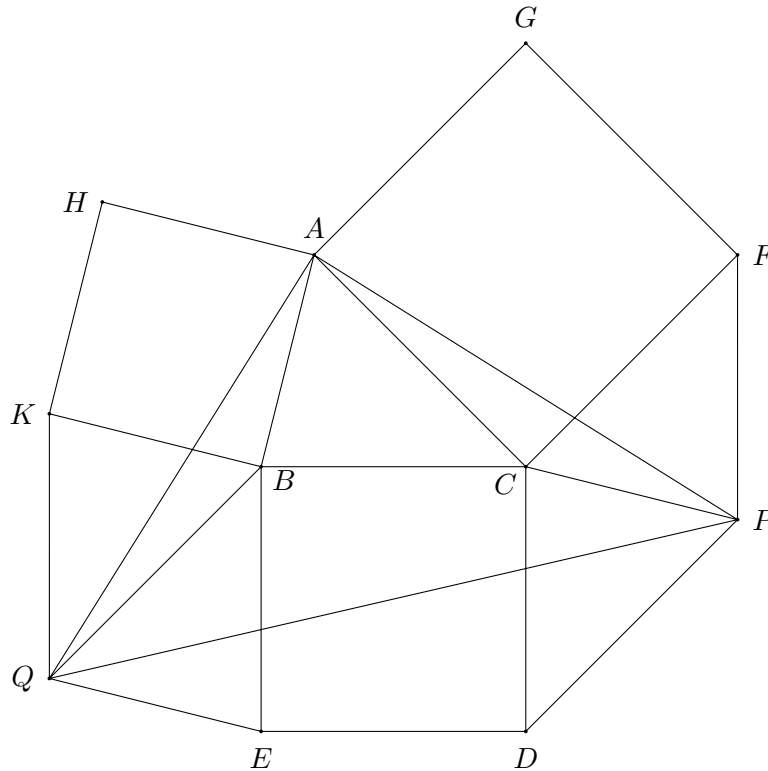
Suy ra $\widehat{CRT} + \widehat{RCT} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp CE$, mà $AH \parallel NO$ và $CE \parallel MO \Rightarrow MO \perp NO$.

Chúng minh tương tự, ta cũng có $\begin{cases} ON = OP \text{ và } ON \perp OP \\ OP = OQ \text{ và } OP \perp OQ \\ OQ = OM \text{ và } OQ \perp OM. \end{cases}$

Từ đó ta suy ra $MP = NQ$ và $MP \perp NQ$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình vuông. □

❖ **Bài 14.** Cho $\triangle ABC$. Phía ngoài $\triangle ABC$ dựng các hình vuông $BCDE, ACFG, ABKH$ rồi vẽ tiếp các hình bình hành $BEQK, CDPF$. Chứng minh rằng $\triangle APQ$ vuông cân.

💬 **Lời giải.**



Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CPF$ có

$$\begin{cases} AC = CF \text{ (gt)} \\ \widehat{ACB} = \widehat{CFP} \text{ (cùng bù với } \widehat{FCD}) \Rightarrow \triangle ABC = \triangle CPF \text{ (c.g.c).} \\ BC = PF (=CD) \end{cases}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BKQ$ có

$$\begin{cases} AB = BK \text{ (gt)} \\ \widehat{ABC} = \widehat{BKQ} \text{ (cùng bù với } \widehat{KBE}) \Rightarrow \triangle ABC = \triangle BKQ \text{ (c.g.c).} \\ BC = KQ (=BE) \end{cases}$$

Do đó, ta có $AB = CP, AC = BQ$.

$$\widehat{BAC} = \widehat{PCF} = \widehat{KBQ} \text{ và } \widehat{QAB} = \widehat{CPA}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ABQ} = \widehat{PCA}.$$

Vậy $\triangle ABQ = \triangle PCA$ (c.g.c) nên $AP = AQ \Rightarrow \triangle APQ$ cân tại A .
Mặt khác

$$\begin{aligned}\widehat{PAQ} &= \widehat{PAC} + \widehat{BAC} + \widehat{BAQ} \\ &= \widehat{CAP} + \widehat{PCF} + \widehat{CPA} \\ &= 180^\circ - \widehat{FCA} \\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

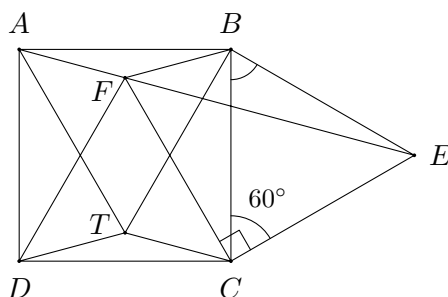
Do đó $\triangle APQ$ vuông cân tại A . □

✧ **Bài 15.** Cho hình vuông $ABCD$, bên trong ta dựng $\triangle FAB$ cân tại F có $\widehat{FAB} = 15^\circ$; E là 1 điểm nằm ngoài hình vuông sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 60^\circ$. Chứng minh rằng

a) $\triangle FCD$ đều.

b) A, F, E thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**



a) $\triangle FCD$ đều.

Lấy điểm T trong hình vuông sao cho $\triangle ABT$ đều $\Rightarrow \widehat{DAT} = 30^\circ$ và $AT = AD = AB$.
 $\triangle ADT$ cân tại A suy ra $\widehat{ADT} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{TDC} = 15^\circ$.

Xét $\triangle FAB$ và $\triangle TDC$ có

$$\begin{cases} \widehat{FAB} = \widehat{TDC} = 15^\circ \\ AB = CD \text{ (cạnh hình vuông)} \Rightarrow \triangle FAB = \triangle TDC \Rightarrow FA = TD. \\ \widehat{FBA} = \widehat{TCD} = 15^\circ \end{cases}$$

Xét $\triangle FAD$ và $\triangle TDA$ có

$$\begin{cases} FA = TD \text{ chứng minh trên} \\ \widehat{FAD} = \widehat{TDA} = 75^\circ \\ AD \text{ cạnh chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle FAD = \triangle TDA \Rightarrow FD = AT = AB$$

$\Rightarrow FD = FC = DC$.

Vậy $\triangle FCD$ đều.

b) A, F, E thẳng hàng.

Do $\triangle FCD$ đều suy ra $\triangle FCE$ vuông cân tại C suy ra $\widehat{CFE} = 15^\circ$.

Mà $\widehat{DFC} = 60^\circ, \widehat{DFA} = 75^\circ$ nên A, F, E thẳng hàng.

□

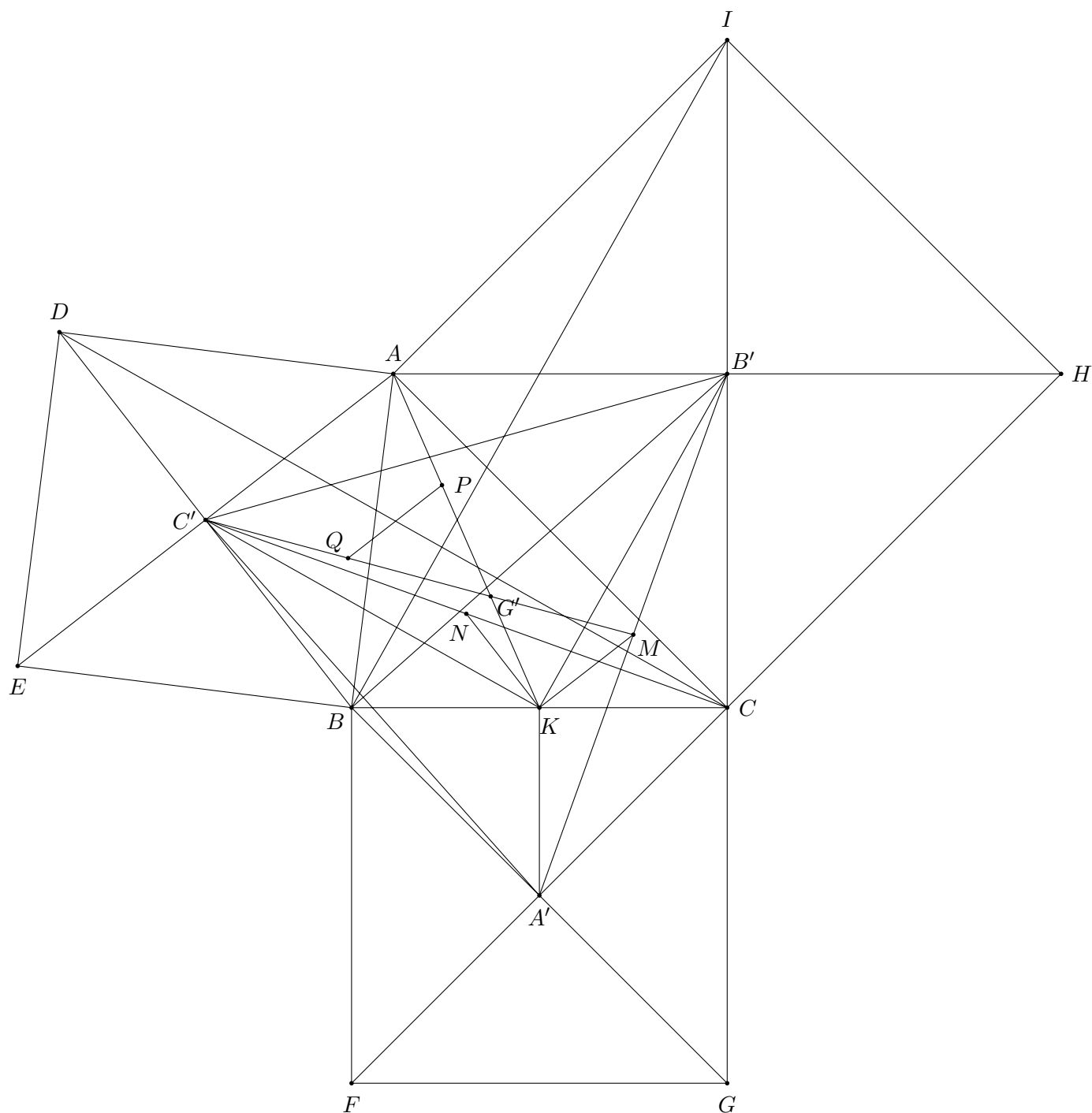
✧ **Bài 16.** Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn. Phía ngoài $\triangle ABC$ dựng các hình vuông $ABED, BCGF, ACHI$ có tâm lần lượt là C', A', B' . Chứng minh rằng

a) AA', BB', CC' là ba cạnh của một tam giác.

b) $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

c) Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là trung điểm của $B'C', AC, AA', AB$. Chứng minh rằng tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

 **Lời giải.**



a) AA', BB', CC' là ba cạnh của một tam giác. Gọi K là trung điểm của BC .
Xét $\triangle ACD$ và $\triangle AIB$ có

$$\begin{cases} AC = AI \text{ (cạnh hình vuông } ACBI) \\ \widehat{CAD} = \widehat{BAI} = 90^\circ + \widehat{BAC} \\ AD = AB \text{ (cạnh hình vuông } ABED) \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD = \triangle AIB (c.g.c)$$

$$\Rightarrow CD = BI \text{ và } \widehat{ACD} = \widehat{AIB}.$$

$$\text{Do } \widehat{ACD} = \widehat{AIB} \Rightarrow CD \perp BI. \quad (1)$$

Ta có

$CD = 2KC'$ và $CD \parallel KC'$ (đường trung bình $\triangle BCD$).

$BI = 2KB'$ và $BI \parallel KB'$ (đường trung bình $\triangle BCI$).

Từ (1) suy ra $KC' \perp KB'$ và $KC' = KB'$.

Vậy $\triangle C'KB'$ vuông cân tại K .

Xét $\triangle KC'A'$ và $\triangle KB'B$ có

$$\begin{cases} KC' = KB' \text{ (}\triangle C'KB' \text{ vuông cân)} \\ \widehat{C'KA'} = \widehat{BKB'} = 90^\circ + \widehat{BKC'} \\ KA' = KB \text{ (nửa cạnh hình vuông } BCGF) \end{cases} \Rightarrow \triangle KC'A' = \triangle KB'B (c.g.c).$$

Do đó $A'C' = BB'$.

Chứng minh tương tự ta có $B'C' = AA'$, $A'B' = CC'$.

Vậy AA' , BB' , CC' là ba cạnh của tam giác $A'B'C'$.

b) $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Gọi M là trung điểm $A'B'$, N là trung điểm CC' .

Xét $\triangle KA'B'$ và $\triangle KCC'$ có

$$\begin{cases} KA' = KC \text{ (}\triangle CKA' \text{ vuông cân)} \\ \widehat{A'KB'} = \widehat{CKC'} = 90^\circ + \widehat{CKB'} \\ KB' = KC' \text{ (}\triangle C'KB' \text{ vuông cân)} \end{cases} \Rightarrow \triangle KA'B' = \triangle KCC' (c.g.c).$$

Suy ra hai trung tuyến $KM = KN$ (3) và $\widehat{MKB'} = \widehat{NKC'}$. (4)

Mà MK là đường trung bình $\triangle BCC'$ suy ra $NK = KM = \frac{1}{2}BC' = \frac{1}{2}AC'$.

Từ (4) suy ra $\widehat{MKN} = 90^\circ$, mà $NK \parallel BC'$ và $BC' \perp AC' \Rightarrow KM \parallel AC'$.

Gọi G' là giao điểm của AK và MC' , P , Q là trung điểm các cạnh $G'A$, $G'C'$ suy ra PQ là đường trung bình tam giác $G'AC'$, do đó $PQ = KM = \frac{1}{2}AC'$.

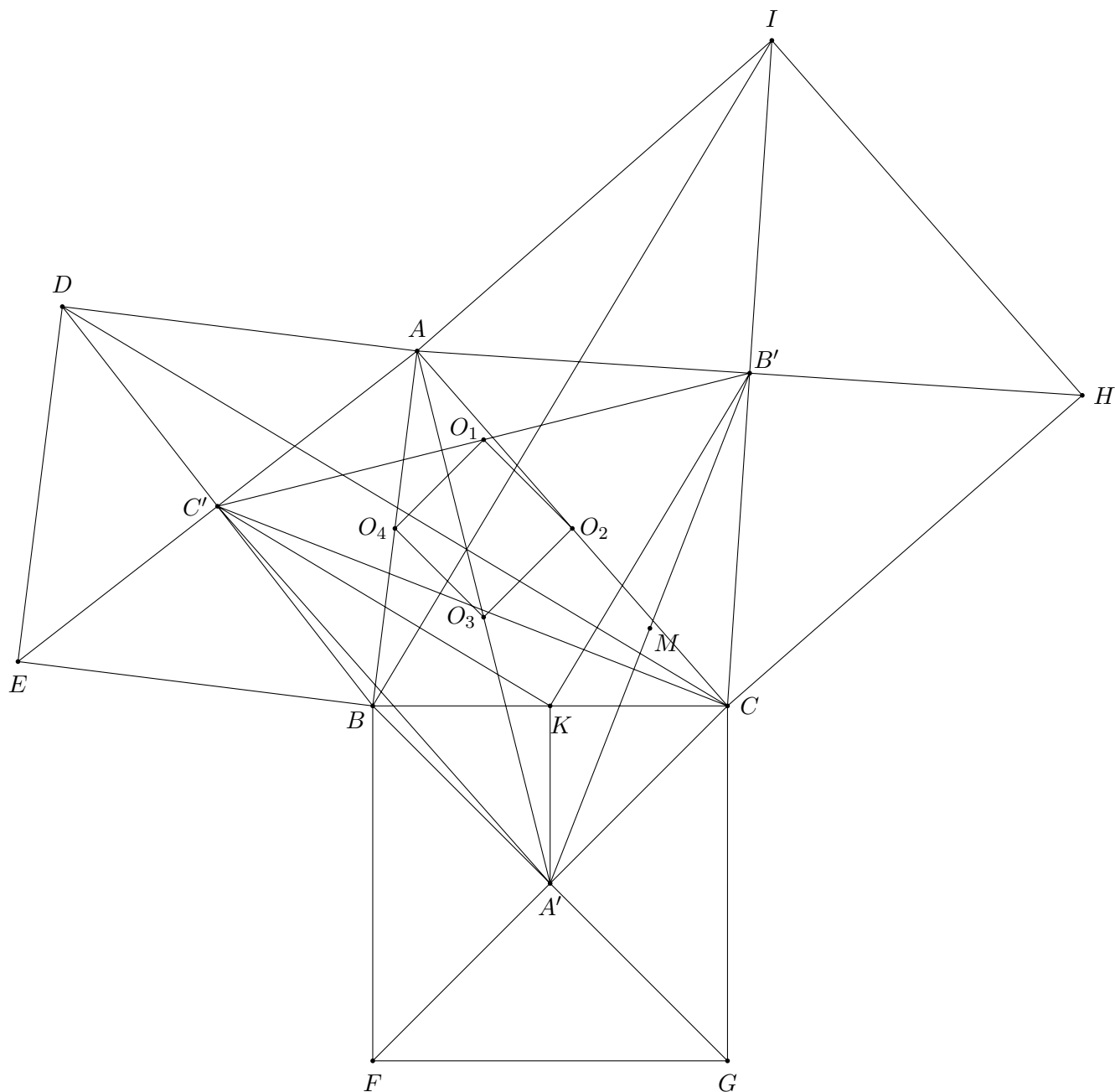
Xét $\triangle G'KM$ và $\triangle G'PQ$ có

$$\begin{cases} \widehat{G'KM} = \widehat{G'PQ} \text{ (so le trong)} \\ KM = PQ \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{G'MK} = \widehat{G'QP} \end{cases} \Rightarrow \triangle G'KM = \triangle G'PQ (g.c.g).$$

$\Rightarrow KG' = G'P = AP$ và $MG' = G'Q = G'C'$.

Vậy trọng tâm hai tam giác ABC và $A'B'C'$ trùng nhau.

c) Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là trung điểm của $B'C', AC, AA', AB$. Chứng minh rằng tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.



Chứng minh tương tự ta được tam giác $O_1O_2O_3$ và tam giác $O_1O_4O_3$ vuông cân. Suy ra tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

□



Chương 4

ĐA GIÁC, DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Bài

1

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- 1) Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.
- 2) Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.
- 3) Diện tích đa giác có các tính chất sau:

- ☑ Hai tam giác bằng nhau thì diện tích chúng bằng nhau.
- ☑ Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích các đa giác đó.
- ☑ Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1 cm, 1 dm, 1 m, ... làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là $1 \text{ cm}^2, 1 \text{ dm}^2, 1 \text{ m}^2, \dots$

- 4) Diện tích hình chữ nhật có 2 kích thước a, b là:

$$S = ab$$

- 5) Diện tích hình vuông (có độ dài cạnh a) là:

$$S = a^2.$$

- 6) Diện tích tam giác vuông có độ dài 2 cạnh góc vuông a, b là:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

- 7) Diện tích tam giác (có độ dài cạnh đáy a và chiều cao tương ứng h) là:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

- 8) Diện tích hình thang độ dài hai đáy a, b và chiều cao h là:

$$S = \frac{(a + b) \cdot h}{2}.$$

- 9) Diện tích hình bình hành có độ dài cạnh a , chiều cao tương ứng h_1 là:

$$S = ah_1.$$

- 10) Diện tích hình thoi hay tứ giác có hai đường chéo vuông góc có độ dài hai đường chéo d_1, d_2 là:

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2.$$

✧ **Bài 1.** Cho $\triangle ABC$, trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{BM}{CM}.$$

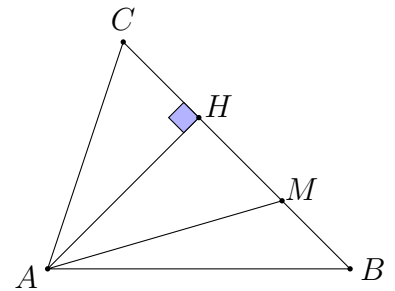
💬 **Lời giải.**

Vẽ đường cao AH trong $\triangle ABC$ với $H \in BC$.

Ta có $S_{ABM} = \frac{1}{2}AH \cdot BM$ và $S_{ACM} = \frac{1}{2}AH \cdot CM$.

Suy ra

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BM}{\frac{1}{2}AH \cdot CM} = \frac{BM}{CM}.$$



□

✧ **Bài 2.** Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , trọng tâm G . Chứng minh rằng:

$$S_{ABC} = 6 \cdot S_{BMG}$$

💬 **Lời giải.**

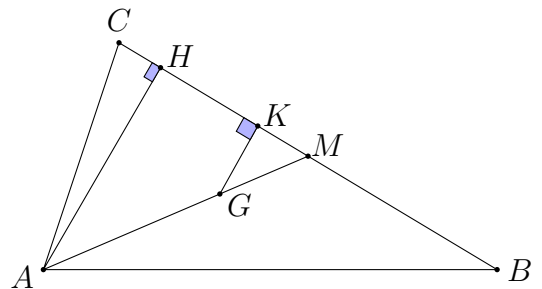
Vẽ đường cao AH trong $\triangle ABC$ với $H \in BC$.

Vẽ $GK \perp BC$ với $K \in BC$.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC$ và $S_{BGM} = \frac{1}{2}GK \cdot BM$.

Suy ra

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BMG}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BC}{\frac{1}{2}GK \cdot BM} = \frac{AH}{GM} \cdot \frac{BC}{BM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH}{GM}.$$



Mặt khác $AH \perp BC$ và $GK \perp BC$ suy ra $AH \parallel GK$.

Áp dụng định lý Thales, ta được: $\frac{AH}{AG} = \frac{AM}{GM} = 3$.

Từ đó ta được $\frac{S_{ABC}}{S_{BMG}} = \frac{1}{6}$ hay $S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot S_{BMG}$.

□

✧ **Bài 3.** Cho $\triangle ABC$. Trên BC lấy một điểm M bất kỳ. Trên đoạn thẳng AM lấy một điểm D bất kỳ. Chứng minh rằng $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BM}{CM}$.

💬 **Lời giải.**

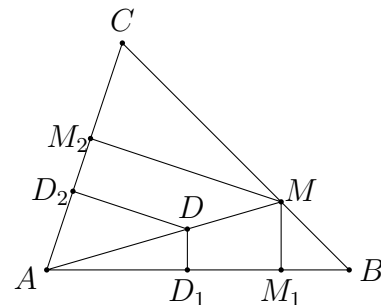
Vẽ DD_1 và MM_1 vuông góc với AB với $D_1, M_1 \in AB$.

Vẽ DD_2 và MM_2 vuông góc với AC với $D_2, M_2 \in AC$.

Ta có $\frac{S_{ADB}}{S_{AMB}} = \frac{DD_1}{MM_1} = \frac{AD}{AM}$.

Tương tự ta có: $\frac{S_{ADC}}{S_{AMC}} = \frac{DD_2}{MM_2} = \frac{AD}{AM}$.

Suy ra $\frac{S_{ADB}}{S_{AMB}} = \frac{S_{ADC}}{S_{AMC}}$ hay $\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{MB}{MC}$.



□

❖ **Bài 4.** Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA' , BB' , CC' cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

a) $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{HA'}{AA'}$.

b) $\frac{HA'}{AA'} + \frac{BB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AA' \cdot BC$ và $S_{HBC} = \frac{1}{2}HA' \cdot BC$.

Suy ra $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}HA' \cdot BC}{\frac{1}{2}AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'}$.

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$ và $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}$.

Suy ra

$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$.

□

❖ **Bài 5.** Cho $\triangle ABC$, trên các cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm M , N . Chứng minh rằng

$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$.

💬 **Lời giải.**

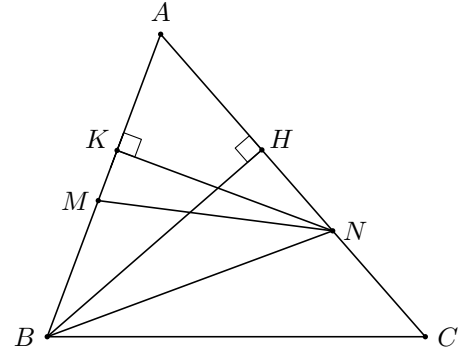
Kẻ $NK \perp AC$ tại K , $BH \perp AC$ tại H .

$$\text{Ta có } \frac{S_{AMN}}{S_{ABN}} = \frac{S_{NAM}}{S_{NAB}} = \frac{\frac{1}{2}NK \cdot AM}{\frac{1}{2}NK \cdot AB} = \frac{AM}{AB}. \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{S_{ABN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BAN}}{S_{BAC}} = \frac{\frac{1}{2}BH \cdot AN}{\frac{1}{2}BH \cdot AC} = \frac{AN}{AC}. \quad (2)$$

Nhân hai vế của (1) và (2) ta được

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABN}} \cdot \frac{S_{ABN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}.$$



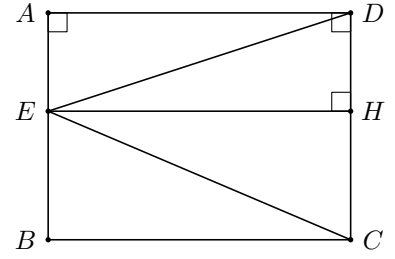
❖ **Bài 6.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, E là điểm tùy ý trên cạnh AB . Chứng minh rằng $S_{ABCD} = 2S_{ECD}$.

💬 **Lời giải.**

Kẻ $EH \perp CD$.

Tứ giác $EHDA$ có $\widehat{EHD} = \widehat{HDA} = \widehat{DAE} = 90^\circ \Rightarrow EHDA$ là hình chữ nhật, suy ra $EH = AD$.

$$\text{Ta có } \frac{S_{ABCD}}{S_{ECD}} = \frac{AD \cdot CD}{\frac{1}{2}EH \cdot CD} = 2 \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ECD}.$$

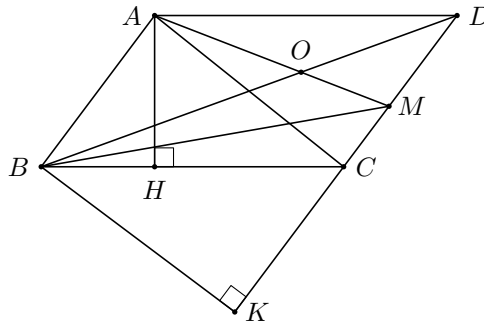


❖ **Bài 7.** Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy M tùy ý trên cạnh DC . Gọi O là giao điểm của AM và BD . Chứng minh rằng

a) $S_{ABCD} = 2S_{MAB}$;

b) $S_{ABO} = S_{MOD} + S_{BMC}$.

💬 **Lời giải.**



a) Kẻ $AH \perp BC$ tại H .

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABC}.$$

Mà $S_{CAB} = S_{MAB}$ (có cùng độ dài đường cao và cạnh đáy), suy ra $S_{ABCD} = 2S_{MAB}$.

$$\text{b) } S_{BCD} = \frac{1}{2}BK \cdot CD = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABC} = S_{MAB}.$$

Suy ra $S_{MAB} = S_{BCD} \Leftrightarrow S_{ABO} + S_{BMO} = S_{BMC} + S_{BMO} + S_{MOD} \Leftrightarrow S_{ABO} = S_{MOD} + S_{BMC}$.

□

✧ **Bài 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $BD > AC$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và C trên đường chéo BD . Chứng minh rằng đa giác $ABCH$ và $ADCK$ có cùng diện tích.

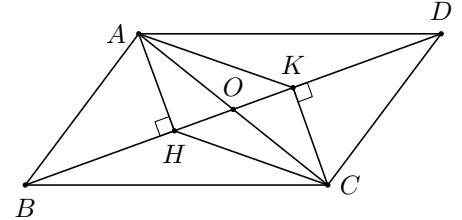
💬 **Lời giải.**

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$.

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle CKO$ có

$$\begin{cases} \widehat{AHO} = \widehat{CKO} = 90^\circ \\ AO = CO \\ \widehat{AOH} = \widehat{COK} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases} \Rightarrow \triangle AHO = \triangle CKO \text{ (ch-gn)}.$$



Suy ra $AH = CK$ (cạnh tương ứng). Dễ thấy $AH \parallel CK$ (cùng vuông góc với BD).

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle CKA$ có

$$\begin{cases} AC \text{ (chung)} \\ \widehat{ACK} = \widehat{CAH} \text{ (so le trong)} \\ CK = AH \end{cases} \Rightarrow \triangle AHC = \triangle CKA \text{ (c-g-c)}.$$

Suy ra $S_{AHC} = S_{CKA}$.

Mà $S_{ABC} = S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{ACD} - S_{AKC} = S_{ABC} - S_{AHC} \Leftrightarrow S_{ABCH} = S_{ADCK}$.

□

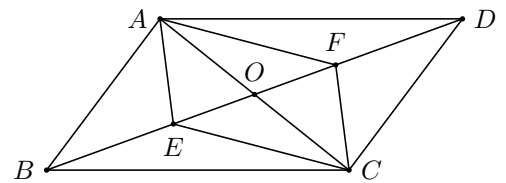
✧ **Bài 9.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD > AB$. Phân giác góc A và C cắt đường chéo BD tại E và F . Chứng minh rằng hai hình $ABCF$ và $ADCE$ có diện tích bằng nhau.

💬 **Lời giải.**

Vì CF là phân giác góc $\widehat{ACD}$ nên $\widehat{ACF} = \frac{1}{2}\widehat{ACD}$.

Vì AE là phân giác góc $\widehat{CAB}$ nên $\widehat{CAE} = \frac{1}{2}\widehat{CAB}$.

Mà $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{ACF} = \widehat{CAE}$.



$ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại $O \Rightarrow OA = OC$.

Xét $\triangle OAE$ và $\triangle OCF$ có

$$\begin{cases} \widehat{AOE} = \widehat{COF} \text{ (đối đỉnh)} \\ OA = OC \\ \widehat{OAE} = \widehat{OCF} \end{cases} \Rightarrow \triangle OAE = \triangle OCF \text{ (g-c-g)}$$

Suy ra $OE = OF$. Tứ giác $AECF$ có 2 đường chéo AC, EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $AECF$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết).

Suy ra $S_{AEC} = S_{CFA} = \frac{1}{2}S_{AECF}$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $S_{ABC} = S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Khi đó $S_{AEC} + S_{ACD} = S_{AFC} + S_{ABC} \Leftrightarrow S_{ABCF} = S_{ADCE}$. □

❖ **Bài 10.** (*) Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đều đến các cạnh không phụ thuộc vào vị trí của điểm ấy.

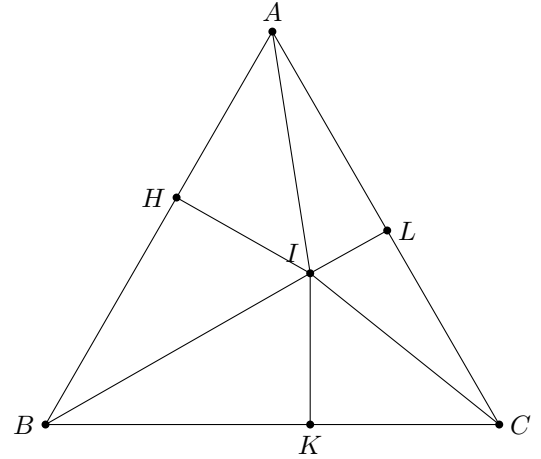
💬 **Lời giải.**

Lấy I bất kì nằm trong tam giác đều ABC cạnh a .

Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của I lên AB, BC, AC .

Ta có

$$\begin{aligned} IH + IK + IL &= \frac{2S_{AIB}}{AB} + \frac{2S_{BIC}}{BC} + \frac{2S_{AIC}}{AC} \\ &= \frac{2(S_{AIB} + S_{BIC} + S_{AIC})}{AB} \\ &= \frac{2S_{ABC}}{AB} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}}{AB} \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (không đổi) .} \end{aligned}$$



❖ **Bài 11.** (*) Cho tứ giác $ABCD$. Trên tia đối của các tia BA, CB, DC, AD lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $BM = AB, CN = BC, DP = CD$ và $AQ = DA$. Chứng minh rằng: $S_{MNPQ} = 5 \cdot S_{ABCD}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

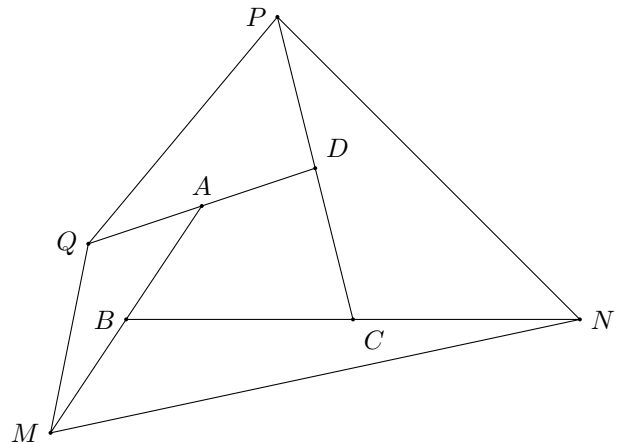
$$\begin{aligned} S_{ADC} &= S_{ADP} \text{ (vì } DC=DP) \\ &= \frac{1}{2}S_{PQD} \text{ (vì } QD=2AD). \end{aligned}$$

Tương tự

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{NMB},$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{AQM},$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{NCP}.$$



$$\text{Do đó } S_{ADC} + S_{ABC} + S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{S_{PQD} + S_{NMB} + S_{AQM} + S_{NCP}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 2S_{ABCD} = \frac{S_{MNPQ} - S_{ABCD}}{2} \Rightarrow S_{MNPQ} = 5 \cdot S_{ABCD}. \quad \square$$

❖ **Bài 12.** (*) Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm M trên BC và điểm N trên AB sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng đỉnh D của hình bình hành cách đều hai đường thẳng AM, CN .

 Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D lên AM, CN .

Do $ABCD$ là hình bình hành nên

$$S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

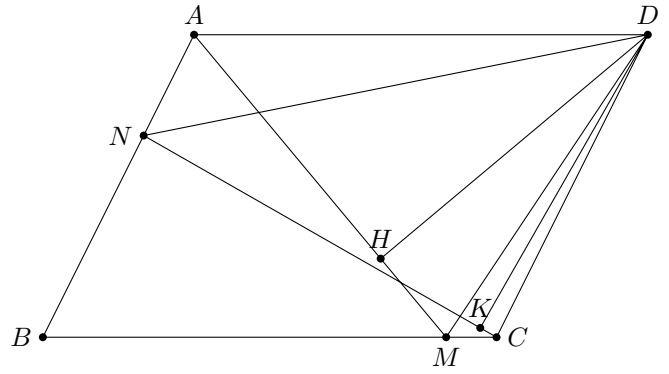
$$S_{CND} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Suy ra

$$S_{AMD} = S_{CND}.$$

$$\text{Hay } \frac{1}{2}DH \cdot AM = \frac{1}{2}DK \cdot CN.$$

Mà $AM = CN(gt)$ nên $DH = DK$.



□

Chương 5

ĐỀ THI THAM KHẢO

Bài

1

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2009 - 2010

✧ **Bài 1.** Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $3x^3y - 6x^2y^2 + 12x^2y$.
- b) $-x^2(2y - x) + 4x(x - 2y) - 4(2y - x)$.
- c) $(xy - 1)^2 - (y - 1)^2$.

💬 **Lời giải.**

a) $3x^3y - 6x^2y^2 + 12x^2y = 3x^2y(x - 2y + 12)$.

b)

$$\begin{aligned} & -x^2(2y - x) + 4x(x - 2y) - 4(2y - x) \\ &= x^2(x - 2y) + 4x(x - 2y) + 4(x - 2y) \\ &= (x - 2y)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x - 2y)(x + 2)^2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & (xy - 1)^2 - (y - 1)^2 \\ &= [(xy - 1) + (y - 1)][(xy - 1) - (y - 1)] \\ &= (xy + y - 2)(xy - y) \\ &= (xy + y - 2)y(x - 1). \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 2.** Cho $A = (x - 3)(x - 5) + 4$. Chứng minh $A > 0$ với mọi giá trị của x .

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 A &= (x-3)(x-5) + 4 \\
 &= x^2 - 5x - 3x + 15 + 4 \\
 &= x^2 - 8x + 19 \\
 &= (x^2 - 8x + 16) + 3 \\
 &= (x-4)^2 + 3.
 \end{aligned}$$

Vì $(x-4)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x .

Suy ra $(x-4)^2 + 3 \geq 3 > 0$ với mọi giá trị của x .

Vậy $A > 0$ với mọi giá trị của x . □

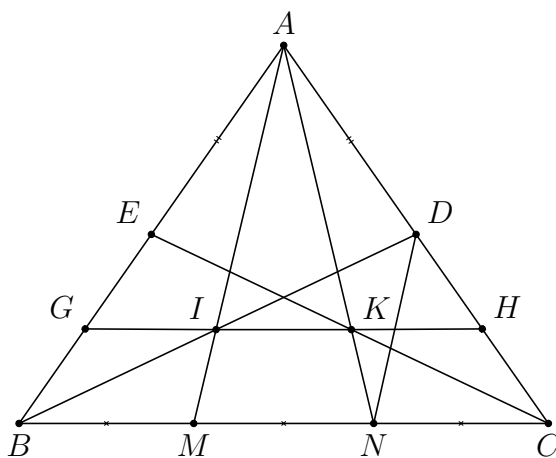
❖ Bài 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có các trung tuyến BD, CE . Trên BC lấy các điểm M, N thỏa $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD , K là giao điểm của AN và CE . Chứng minh rằng

a) $AM \parallel ND$ và I là trung điểm của đoạn thẳng BD .

b) $IK \parallel BC$ và $IK = \frac{BC - DE}{2}$.

c) Tứ giác $NMIK$ là hình thang cân.

💬 Lời giải.



a) Chứng minh $AM \parallel ND$ và I là trung điểm của đoạn thẳng BD .

Ta có N là trung điểm của đoạn thẳng MC ($MN = NC$).

Và D là trung điểm của đoạn thẳng AC (BD là trung tuyến của $\triangle ABC$).

Suy ra ND là đường trung bình của tam giác ACM .

Suy ra $AM \parallel ND$.

Xét $\triangle BDN$ có $\begin{cases} M \text{ là trung điểm của } BN & (BM = MN) \\ MI \parallel ND & (AM \parallel ND). \end{cases}$

Suy ra I là trung điểm của BD .

b) Chứng minh $IK \parallel BC$ và $IK = \frac{BC - DE}{2}$.

Gọi G, H lần lượt là trung điểm của BE, CD .

Ta có IG là đường trung bình của $\triangle BED$.

$\Rightarrow IG \parallel ED, \quad IG = \frac{1}{2}ED. \quad (1).$

Chứng minh tương tự câu a, ta có K là trung điểm của EC .

$\Rightarrow KH$ là đường trung bình của $\triangle CDE$.

$\Rightarrow KH \parallel ED, \quad KH = \frac{1}{2}ED. \quad (2).$

Ta có ED là đường trung bình của $\triangle ABC$.

$\Rightarrow ED \parallel BC$.

$\Rightarrow EDCB$ là hình thang.

Ta có GH là đường trung bình của hình thang $EDCB$.

$\Rightarrow GH \parallel ED \parallel BC, \quad GH = \frac{BC + ED}{2}. \quad (3).$

(1), (2), (3) $\Rightarrow I, G, H, K$ thẳng hàng.

$\Rightarrow IK \parallel ED \parallel BC$.

Ta có

$$\begin{aligned} IK &= GH - GI - KH \\ &= \frac{BC + DE}{2} - \frac{ED}{2} - \frac{ED}{2} \\ &= \frac{BC - ED}{2}. \end{aligned}$$

c) Chứng minh tứ giác $NMIK$ là hình thang cân.

Ta có $IK \parallel MN \quad (IK \parallel BC)$.

$\Rightarrow NMIK$ là hình thang.

Ta có $\triangle AMB = \triangle ANC$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ANC}$.

$\Rightarrow 180^\circ - \widehat{AMB} = 180^\circ - \widehat{ANC}$.

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.

Hay $\widehat{IMN} = \widehat{KNM}$.

Vậy $NMIK$ là hình thang cân.

□

Bài

2

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2010 - 2011

✧ **Bài 1.** Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $12x^2 + 12x + 3$.

b) $2x^2 + 4x + xy + 2y$.

c) $(x^2 + 1)^2 - (-2x^2 + 3)^2$.

💬 **Lời giải.**

a) $12x^2 + 12x + 3 = 3(4x^2 + 4x + 1) = 3(2x + 1)^2$.

b)

$$\begin{aligned} &2x^2 + 4x + xy + 2y \\ &= 2x(x + 2) + y(x + 2) \\ &= (2x + y)(x + 2). \end{aligned}$$

c)

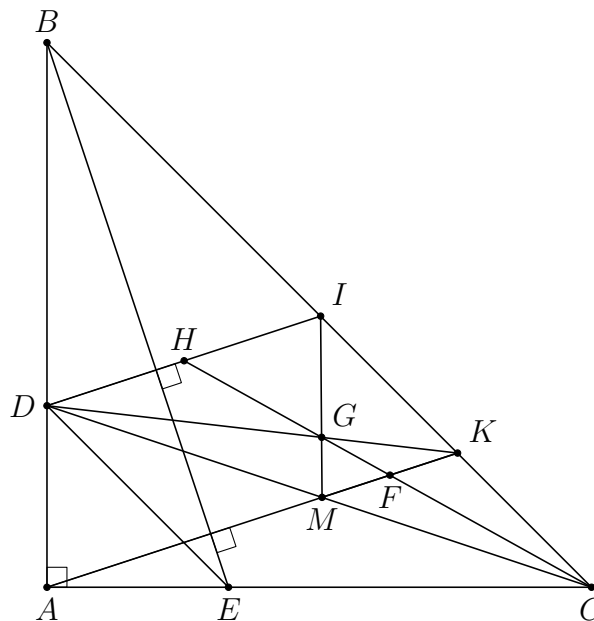
$$\begin{aligned}
 & (x^2 + 1)^2 - (-2x^2 + 3)^2 \\
 &= [(x^2 + 1) + (-2x^2 + 3)][(x^2 + 1) - (-2x^2 + 3)] \\
 &= (-x^2 + 4)(3x^2 - 2) \\
 &= (2 - x)(2 + x)(x\sqrt{3} - \sqrt{2})(x\sqrt{3} + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2.** Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $AD = AE$. Đường thẳng qua D vuông góc với BE cắt BC tại I . Đường thẳng qua A và vuông góc với BE cắt BC tại K . Gọi M là giao điểm của AK và CD .

- Chứng minh rằng $\triangle ABE = \triangle ACD$.
- Chứng minh rằng $\triangle MAC$ cân.
- Chứng minh rằng M là trung điểm của CD , K là trung điểm của IC .
- Gọi G là giao điểm của DK và IM , MK cắt GC tại F . Chứng minh rằng $FM = FK$.

💬 **Lời giải.**



- Chứng minh rằng $\triangle ABE = \triangle ACD$.
Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có

$$\begin{aligned}
 AB &= AC \quad (\triangle ABC \text{ vuông cân tại } A) \\
 \widehat{A} &\text{ chung} \\
 AE &= AD \quad (\text{gt}).
 \end{aligned}$$

Do đó $\triangle ABE = \triangle ACD$ (c-g-c).

- Chứng minh rằng $\triangle MAC$ cân.
Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$ ($\triangle ABE = \triangle ACD$).

Lại có $\widehat{ABE} = \widehat{MAC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAK}$)
 Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{MAC}$.
 Hay $\widehat{ACM} = \widehat{MAC}$.
 Vậy $\triangle MAC$ cân.

c) Chứng minh rằng M là trung điểm của CD , K là trung điểm của IC .

Ta có $\widehat{ADM} + \widehat{ACM} = 90^\circ$.
 Và $\widehat{DAM} + \widehat{MAC} = 90^\circ$.
 Mà $\widehat{ACM} = \widehat{MAC}$ (cmt).
 Suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{DAM}$.
 Suy ra $\triangle AMD$ cân tại M .
 $\Rightarrow MD = MA$.
 Mặt khác, $MA = MC$ ($\triangle AMC$ cân).
 Suy ra $MD = MC$.
 Hay M là trung điểm của CD .
 Lại có, $DI \parallel MK$ (cùng vuông góc với BE).
 Suy ra K là trung điểm của IC .

d) Gọi G là giao điểm của DK và IM , MK cắt GC tại F . Chứng minh rằng $FM = FK$.
 Xét $\triangle CDI$ có G là giao điểm của hai trung tuyến DK và IM nên G là trọng tâm tam giác.
 Gọi H là giao điểm của CG và DI .
 $\Rightarrow CH$ là trung tuyến của $\triangle CDI$
 $\Rightarrow HD = HI$. (1)
 Ta có MK là đường trung bình của $\triangle CDI$.
 $\Rightarrow MK \parallel DI$.
 Xét $\triangle CDH$ có $MF \parallel DH$ và M là trung điểm của CD .
 $\Rightarrow F$ là trung điểm của CH .
 $\Rightarrow MF$ là đường trung bình của $\triangle CDH$.
 $\Rightarrow MF = \frac{1}{2}DH$. (2)
 Chứng minh tương tự, $FK = \frac{1}{2}HI$. (3)
 Từ (1), (2), (3), suy ra $FM = FK$.

□

Bài 3 ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2011 - 2012

❖ Bài 1. (4,5 điểm)

Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $3x^3 - 12x^2 + 12x$.
- b) $(x + 2)^3 + (x - 2)^3$.
- c) $x^3 - 2x + 2x^2y - 4y$.

💬 Lời giải.

a) $3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x^2 - 4x + 4) = 3x(x - 2)^2$.

b)

$$\begin{aligned}(x+2)^3 + (x-2)^3 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ &= 2x^3 + 24x = 2x(x^2 + 12).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x^3 - 2x + 2x^2y - 4y &= x(x^2 - 2) + 2y(x^2 - 2) \\ &= (x + 2y)(x^2 - 2) \\ &= (x + 2y)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).\end{aligned}$$

□

❖ Bài 2. (1,5 điểm)

Cho đa thức: $f(x) = 2x^{2011} - 3x^{2010} + 2x^{2009} - 3x^{2008} + \dots + \dots + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$.
Hãy tính $f(a)$ biết $2a^2 = 3a$.

💬 Lời giải.

Ta có $2a^2 = 3a \Leftrightarrow 2a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a(2a - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$.

✔ Với $a = 0$, $f(a) = f(0) = -3$.

✔ Với $a = \frac{3}{2}$
 $f(x) = x^{2010}(2x - 3) + x^{2008}(2x - 3) + \dots + 2x^2(2x - 3) + (2x - 3)$.
 $\Rightarrow f(a) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

□

❖ Bài 3. (4 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ có $AD = BC$ ($\widehat{C} \neq \widehat{D}$) và đường thẳng AD cắt BC tại E . Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD, BD . Đường thẳng MN cắt AD, BC kéo dài lần lượt tại I, J . Chứng minh rằng:

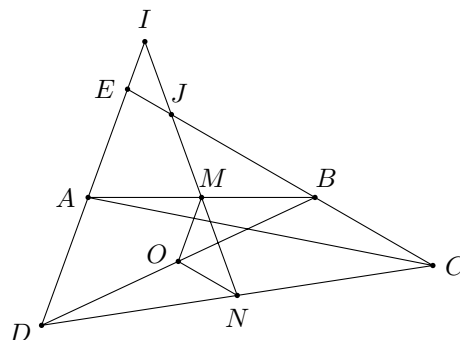
a) $ID \parallel OM$.

b) $\widehat{CJN} = \widehat{JNO}$.

c) $\triangle OMN$ cân.

d) $\triangle EIJ$ cân.

💬 Lời giải.



- a) Ta có O là trung điểm của BD , M là trung điểm của AB suy ra OM là đường trung bình của tam giác ABD nên $OM \parallel AD$. Mặt khác $I \in AD \Rightarrow ID \parallel OM$.
- b) Ta có O là trung điểm của BD , N là trung điểm của CD nên ON là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow ON \parallel BC$ mà $J \in BC \Rightarrow ON \parallel CJ$.
 $\Rightarrow \widehat{CJN} = \widehat{JNO}$ (so le trong).
- c) ☒ Có OM là đường trung bình của tam giác $ABD \Rightarrow OM \parallel = \frac{1}{2}AD$.
☒ Có ON là đường trung bình của tam giác BDC nên $ON \parallel = \frac{1}{2}BC$.
☒ Mặt khác $AD = BC$ (giả thiết).
 Suy ra $OM = ON \Rightarrow \triangle OMN$ cân tại O .
- d) ☒ Vì $E \in BC$ mà $ON \parallel BC$ nên $ON \parallel EJ \Rightarrow \widehat{IJE} = \widehat{MNO}$ (đồng vị).
☒ Vì $I \in AD$ mà $OM \parallel AD$ nên $OM \parallel EI \Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{EIJ}$ (đồng vị).
☒ Mặt khác $\widehat{OMN} = \widehat{ONM}$ ($\triangle OMN$ cân).
 Suy ra $\widehat{EIJ} = \widehat{EJI} \Rightarrow \triangle EIJ$ cân.

□

Bài

4

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2012 - 2013

❖ Bài 1. (6 điểm)

Phân tích đa thức thành nhân tử:

- a) $(x + 2y)^2 - (x - 2y + 1)^2$.
 b) $4x^2(x - 2) + 4x(2 - x) - 2 + x$.
 c) $x^3 + x^2 - 2x - 2$.
 d) $4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 1$.

💬 Lời giải.

a)

$$(x + 2y)^2 - (x - 2y + 1)^2 = [(x + 2y) - (x - 2y + 1)][(x + 2y) + (x - 2y + 1)]$$

$$\begin{aligned}
 &= (x + 2y - x + 2y - 1)(x + 2y + x - 2y + 1) \\
 &= (4y - 1)(2x + 1).
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 4x^2(x - 2) + 4x(2 - x) - 2 + x &= 4x^2(x - 2) - 4x(x - 2) + (x - 2) \\
 &= (x - 2)(4x^2 - 4x + 1) \\
 &= (x - 2)(2x - 1)^2.
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 x^3 + x^2 - 2x - 2 &= x^2(x + 1) - 2(x + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - 2) \\
 &= (x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 1 &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 2x^3 + x \\
 &= (2x^2 + 1)^2 + x(2x^2 + 1) \\
 &= (2x^2 + 1)(2x^2 + 1 + x) \\
 &= (2x^2 + 1)(2x^2 + x + 1).
 \end{aligned}$$

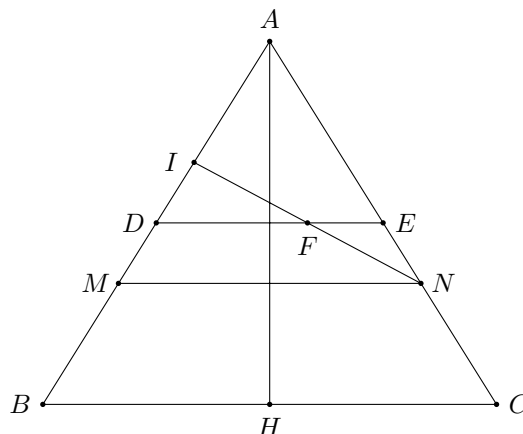
□

❖ Bài 2. (4 điểm)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC . Trên hai đoạn BD, CE lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $DM = EN$.

- Chứng minh $\triangle AMN$ cân.
- Chứng minh M và N đối xứng nhau qua đường cao AH của $\triangle ABC$.
- Trên cạnh AD lấy điểm I sao cho $AI = CN$. Chứng minh D là trung điểm của MI .
- Gọi F là trung điểm của IN . Chứng minh ba điểm D, F, E thẳng hàng.

🗨️ Lời giải.



a) Ta có D, E lần lượt là trung điểm của $AB, AC \Rightarrow \begin{cases} AD = \frac{1}{2}AB \\ AE = \frac{1}{2}AC. \end{cases}$

Mà $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân) nên $AD = AE$.

Mặt khác $DM = EN \Rightarrow AD + DM = AE + EN \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A .

b) $\triangle ABC$ cân tại A , $\triangle AMN$ cân tại A và $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC} \Rightarrow MN \parallel BC$.

Mặt khác $MH \perp BC$ ($\triangle ABC$ cân).

Suy ra $AH \perp MN$ và $\triangle AMN$ cân nên MN là đường trung trực của $AN \Rightarrow M$ và N đối xứng nhau qua đường cao AH .

c) Ta có $AD = CE, AI = NC, DI = AD - AI, EN = CE - CN$. Suy ra $DI = EN$.

Mặt khác $DM = EN$ (giả thiết). Suy ra $DM = DI$.

Vậy D là trung điểm của MI .

d) Ta có $MN \parallel BC$ (cmt), $DE \parallel BC$ (DE là đường trung bình của tam giác ABC). Suy ra $DE \parallel MN$ mà D là trung điểm của MI nên DE trùng với đường trung bình của $\triangle MIN$.

Lại có F là trung điểm của IN .

Vậy ba điểm D, F, E thẳng hàng.

□

————— HẾT —————

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2013 - 2014

Bài

5

⇒ **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5x^4y - 20x^3y^2 + 20x^2y^3$

b) $4x^2(x - 6) + 9y^2(6 - x)$

c) $x^2 - 49 - 6xy + 9y^2$

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} & 5x^4y - 20x^3y^2 + 20x^2y^3 \\ &= 5x^2y(x^2 - 4xy + 4y^2) \\ &= 5x^2y(x - 2y)^2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & 4x^2(x - 6) + 9y^2(6 - x) \\ &= 4x^2(x - 6) - 9y^2(x - 6) \\ &= (x - 6)(4x^2 - 9y^2) \\ &= (x - 6)(2x + 3y)(2x - 3y). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & x^2 - 49 - 6xy + 9y^2 \\ &= (x^2 - 6xy + 9y^2) - 49 \\ &= (x - 3y)^2 - 7^2 \\ &= (x - 3y + 7)(x - 3y - 7). \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 2.** Cho đa thức $A = x^3 + x^2 + 8y^3 + 4y^2 - 2xy$

- a) Phân tích A thành nhân tử.
- b) Tính A biết $x = 2a - 1$ và $y = -a$.

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} A &= x^3 + x^2 + 8y^3 + 4y^2 - 2xy \\ &= (x^2 + 8y^3) + (x^2 - 2xy + 4y^2) \\ &= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + (x^2 - 2xy + 4y^2) \\ &= (x^2 - 2xy + 4y^2)[(x + 2y) + 1] \\ &= (x^2 - 2xy + 4y^2)(x + 2y + 1). \end{aligned}$$

- b) Thay $x = 2a - 1$ và $y = -a$ vào biểu thức $x + 2y + 1$, ta được

$$(2a - 1) + 2(-a) + 1 = 0$$

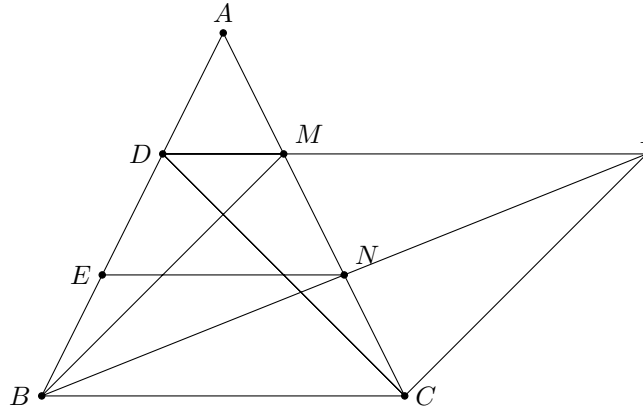
Suy ra $A = 0$.

□

✧ **Bài 3.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm D, E sao cho $AD = DE = EB$. Qua E vẽ đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC tại N . Gọi M là trung điểm của AN .

- a) Chứng minh rằng: tứ giác $DMCB$ là hình thang cân.
- b) Gọi I là giao điểm của tia BN và tia DM . Chứng minh rằng: $MI = BC$.
- c) Chứng minh rằng: $\triangle DCI$ cân.
- d) Chứng minh rằng: $MI = 3MD$

💬 **Lời giải.**



- a) Vì $AD = DE$ và M trung điểm của AN nên DM là đường trung bình của $\triangle AEN$.
Suy ra $DM \parallel EN$.
Lại có, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (vì $\triangle ABC$ cân)
Suy ra $BDMC$ là hình thang cân.

- b) Xét $\triangle MNI$ và $\triangle CNB$, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{MNI} &= \widehat{CNB} \text{ (đối đỉnh)} \\ MN &= NC \text{ (cmt)} \\ \widehat{IMN} &= \widehat{BCN} \text{ (so le trong)}\end{aligned}$$

Suy ra $\triangle MNI = \triangle CNB$ nên $BN = NI$.

Xét tứ giác $BCIM$, có $MN = NC$ và $BN = NI$. Suy ra $BCIM$ là hình bình hành.
Suy ra $MI = BC$.

- c) Theo câu b), ta có $BM = CI$
Mà $BM = CD$ (vì $BCMD$ là hình thang cân).
Từ đó suy ra $CI = CD$ hay $\triangle CID$ cân tại C .

- d) Ta có DM là đường trung bình $\triangle AEN$, suy ra $DM = \frac{1}{2}EN \Leftrightarrow EN = 2DM$ (3)

Lại có, EN là đường trung bình hình thang $BCMD$, suy ra $EN = \frac{1}{2}(DM + BC)$ (4)

Từ (3), (4) ta được $2DM = \frac{1}{2}(DM + BC) \Leftrightarrow 3DM = BC$.

□

Bài

6

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2014 - 2015

✧ **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- $24a^3b - 18ab$
- $x^2 + xy^2 + yx^2 - y^2$
- $(a - b)(a^2 + 3ab + b^2) + (a + b)^3 + ab(b - a)$
- $x^2 - 2014xy - 2016xz + (2015^2 - 1)yz$

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} & 24a^3b - 18ab \\ &= 6ab(4a^2 - 3). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & x^2 + xy^2 + yx^2 - y^2 \\ &= (x^2 - y^2) + (xy^2 + yx^2) \\ &= (x + y)(x - y) + xy(x + y) \\ &= (x + y)[(x - y) + xy] \\ &= (x + y)(x - y + xy). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & (a - b)(a^2 + 3ab + b^2) + (a + b)^3 + ab(b - a) \\ &= (a - b)(a^2 + 3ab + b^2) - ab(a - b) + (a + b)^3 \\ &= (a - b)(a^2 + 3ab + b^2 - ab) + (a + b)^3 \\ &= (a - b)(a + b)^2 + (a + b)^3 \\ &= (a + b)^2[(a - b) + (a + b)] \\ &= 2a(a + b)^2. \end{aligned}$$

d)

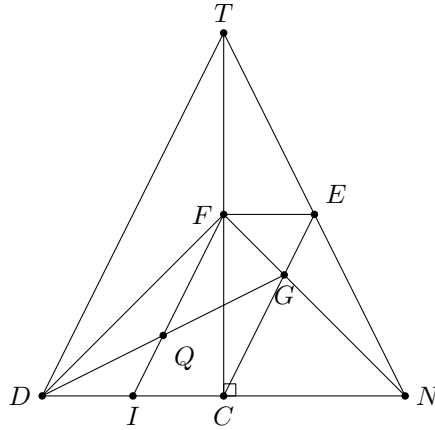
$$\begin{aligned} & x^2 - 2014xy - 2016xz + (2015^2 - 1)yz \\ &= x^2 - 2014xy - 2016xz + 2016 \cdot 2014yz \\ &= x(x - 2014y) - 2016z(x - 2014y) \\ &= (x - 2014y)(x - 2016z). \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2.** Cho $\triangle TDN$ cân tại T , đường cao TC . Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của TN, TC, DC .

- Chứng minh rằng IF song song với CE và $IF = CE$.
- Chứng minh rằng tứ giác $EFIN$ là hình thang cân.
- Gọi G là giao điểm của FN và CE , Q là giao điểm của DG với FI . Chứng minh rằng $CG = 2IQ$.
- Chứng minh rằng $CG = \frac{2}{3}CE$ và Q là trọng tâm của $\triangle CDF$.

🗨️ **Lời giải.**



a) Ta có EF là đường trung bình của $\triangle TCN$ nên $EF \parallel CN$ và

$$EF = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{2}DC = IC.$$

Suy ra tứ giác $IFEC$ là hình bình hành.

Suy ra $IF = CE$ và $IF \parallel CE$.

b) Ta có $EF \parallel IN$ (cmt).

(1)

Xét $\triangle TCN$ vuông tại C , có CE là đường trung tuyến. Suy ra

$$CE = \frac{1}{2}TN = EN \Rightarrow \triangle ECN \text{ cân tại } E.$$

Suy ra $\widehat{ENC} = \widehat{ECN}$. Mặt khác $\widehat{ECN} = \widehat{FIN}$ (vì $IF \parallel EC$)

Suy ra $\widehat{FIN} = \widehat{ENC}$.

(2)

Từ (1) và (2), suy ra $EFIN$ là hình thang cân.

c) Ta có $IQ \parallel CG$ (vì $IFEC$ là hình bình hành) và I là trung điểm DC nên IQ là đường trung bình $\triangle DCG$. Suy ra

$$CG \parallel IQ \text{ và } CG = 2IQ.$$

d) Xét $\triangle TCN$ có CE và NF là các đường trung tuyến. Suy ra giao điểm G là trọng tâm của $\triangle TCN$.

Từ đó, suy ra

$$CG = \frac{2}{3}CE.$$

Lại có $CG = 2IQ$ (theo câu c), suy ra $IQ = \frac{1}{2}CG = GE$.

Mà $IF = CE$. Suy ra $CG = FQ$.

Ta có $IQ = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2}FQ$ và IF là đường trung tuyến $\triangle DCF$ nên Q là trọng tâm $\triangle DCF$.

□

❖ **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a) $x(y - 2015) + 2016(2015 - y)$.
- b) $2x^3y - 6x^2y + 6xy - 2y$.
- c) $ab(x - 1)^2 + x(a + b)^2$.
- d) $x^3 + 8 - (2 + x)(5 - 2x)$.

💬 **Lời giải.**

a) $x(y - 2015) + 2016(2015 - y) = x(y - 2015) - 2016(y - 2015) = (y - 2015)(x - 2016)$.

b) $2x^3y - 6x^2y + 6xy - 2y = 2y(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 2y(x - 1)^3$.

c)

$$\begin{aligned} ab(x - 1)^2 + x(a + b)^2 &= abx^2 - 2xab + ab + xa^2 + 2xab + xb^2 \\ &= abx^2 + ab + xa^2 + xb^2 \\ &= (abx^2 + xa^2) + (ab + xb^2) \\ &= xa(bx + a) + b(a + bx) \\ &= (bx + a)(ax + b). \end{aligned}$$

d)

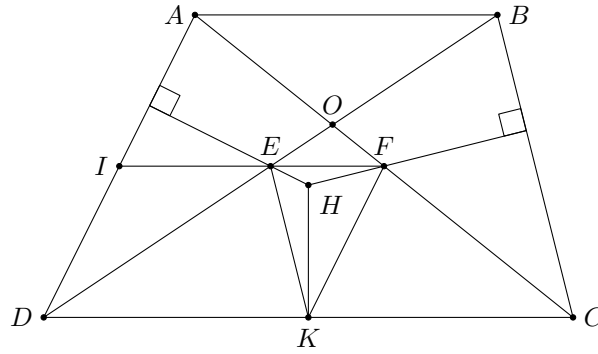
$$\begin{aligned} x^3 + 8 - (2 + x)(5 - 2x) &= x^3 + 8 - 10 + 4x - 5x + 2x^2 \\ &= x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ &= x^2(x + 2) - (x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 - 1) \\ &= (x + 2)(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$), $ABCD$ không là hình thang vuông. Gọi E , K lần lượt là trung điểm của BD và CD . Từ E vẽ đường thẳng song song với CD cắt AC tại F và cắt AD tại I .

- a) Chứng minh rằng $EK \parallel BC$.
- b) Chứng minh rằng I , F lần lượt là trung điểm của AD và AC .
- c) Đường thẳng qua E và vuông góc với AD cắt đường thẳng qua F và vuông góc với BC tại H . Chứng minh rằng H là trực tâm của $\triangle EFK$.
- d) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Giả sử ba điểm K , H , O thẳng hàng. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

💬 **Lời giải.**



a) Xét $\triangle BCD$ có $\begin{cases} E \text{ là trung điểm } BD \\ K \text{ là trung điểm } DC \end{cases} \Rightarrow EK \text{ là đường trung bình của } \triangle BCD.$
 $\Rightarrow EK \parallel BC.$

b) Trong $\triangle ABD$ có $\begin{cases} E \text{ là trung điểm } BD \\ EI \parallel AB \end{cases} \Rightarrow I \text{ là trung điểm } AD.$
 Trong $\triangle ACD$ có $\begin{cases} I \text{ là trung điểm } AD \\ IF \parallel DC \end{cases} \Rightarrow F \text{ là trung điểm } AC.$

c) Ta có $\begin{cases} EK \parallel BC \\ FH \perp BC \end{cases} \Rightarrow FH \perp EK.$

Xét $\triangle ACD$ có $\begin{cases} F \text{ là trung điểm } AC \\ K \text{ là trung điểm } DC \end{cases} \Rightarrow FK \text{ là đường trung bình của } \triangle ACD.$
 $\Rightarrow FK \parallel AD.$

Ta có $\begin{cases} FK \parallel AD \\ EH \perp AD \end{cases} \Rightarrow EH \perp FK.$

Ta có $\begin{cases} FH \perp EK \\ EH \perp FK \end{cases} \Rightarrow H \text{ là trực tâm của tam giác } EFK.$

d) Vì H là trực tâm của $\triangle EFK \Rightarrow KH \perp EF.$

Ta có $\begin{cases} EF \parallel DC \\ KH \perp EF \end{cases} \Rightarrow KH \perp DC.$

Do K, H, O thẳng hàng nên $OK \perp DC.$

Trong tam giác ODC có OK vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ODC$ cân tại O . Suy ra $OD = OC.$

$\Rightarrow OA = OB$

$\Rightarrow AC = BD$. Từ đó suy ra $ABCD$ là hình thang cân.

□

Bài 8

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ I - NĂM HỌC 2016-2017

❖ **Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $4x^3 - 4x(x-1)(x+1).$

b) $(x-2)^2 + 2(x-2)(x+2) + (x+2)^2.$

Lời giải.

a) $4x^3 - 4x(x-1)(x+1) = 4x^3 - 4x(x^2-1) = 4x^3 - 4x^3 + 4x = 4x.$

b) $(x-2)^2 + 2(x-2)(x+2) + (x+2)^2 = x^2 - 4x + 4 + 2(x^2 - 4) + x^2 + 4x + 4 = 4x^2.$

□

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $11x^5 + 44x^4 + 44x^3.$

b) $3x(2y-x) + 5(x-2y)^2.$

c) $32x^3y - 2xy^3 - 4xy^2 - 2xy.$

Lời giải.

a) $11x^5 + 44x^4 + 44x^3 = 11x^3(x^2 + 4x + 4) = 11x^3(x+2)^2.$

b) $3x(2y-x) + 5(x-2y)^2 = (2y-x)[3x + 5(2y-x)] = (2y-x)(10y-2x).$

c)

$$\begin{aligned} 32x^3y - 2xy^3 - 4xy^2 - 2xy &= 2xy(16x^2 - y^2 - 2y - 1) \\ &= 2xy[16x^2 - (y+1)^2] \\ &= 2xy(4x+y+1)(4x-y-1). \end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Gọi D, E và F lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC . Kẻ AH vuông góc với BC tại H , AH cắt DE tại M .

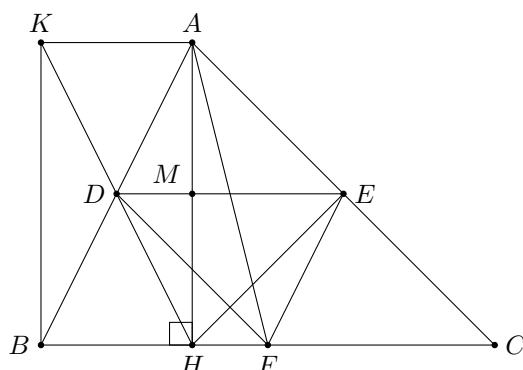
a) Chứng minh rằng $DM \parallel BH$.

b) Chứng minh rằng M là trung điểm AH và tam giác AEH cân.

c) Trên tia đối của tia DH lấy điểm K sao cho $DH = DK$. Chứng minh rằng tứ giác $DEFH$ là hình thang cân và tứ giác $KACB$ là hình thang vuông.

d) Giả sử $AB = AF$. Chứng minh rằng ba điểm K, M, F thẳng hàng.

Lời giải.



a) Xét $\triangle ABC$ có $\begin{cases} D \text{ là trung điểm } AB \\ E \text{ là trung điểm } AC \end{cases} \Rightarrow DE \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC.$
 $\Rightarrow DE \parallel BC \text{ hay } DM \parallel BH.$

b) Trong $\triangle ABH$ có $\begin{cases} D \text{ là trung điểm } AB \\ DM \parallel BH \end{cases} \Rightarrow M \text{ là trung điểm } AH.$

Ta có $\begin{cases} EM \parallel CH \\ CH \perp AH \end{cases} \Rightarrow EM \perp AH.$

Trong $\triangle EAH$ có đường EM vừa là đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến nên $\triangle EAH$ cân tại E .

c) Vì $DE \parallel HF$ nên $DEFH$ là hình thang.

Ta có DF là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow DF = \frac{1}{2}AC = EA$. Mà $EH = EA$ (do $\triangle EAH$ cân tại E), từ đó suy ra $DF = EH$.

Hình thang $DEFH$ có hai đường chéo $DF = EH$ suy ra $DEFH$ là hình thang cân.

Từ giác $AKBH$ có hai đường chéo AB và KH cắt nhau tại trung điểm D của mỗi đường nên $AKBH$ là hình bình hành. Hơn nữa $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên $AKBH$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow \begin{cases} KA \parallel BC \\ \widehat{AKB} = \widehat{KBH} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow KACB \text{ là hình thang vuông.}$

d) Ta có $AB = AF \Rightarrow \triangle ABF$ cân tại A .

$\triangle ABF$ cân tại A có đường cao $AH \Rightarrow AH$ là đường trung tuyến $\Rightarrow HF = HB$.

Mà $HB = AK$ (do $AKBH$ là hình chữ nhật) nên suy ra $HF = AK$.

Ta có $\begin{cases} HF = AK \\ HF \parallel AK \end{cases} \Rightarrow AKHF \text{ là hình bình hành.}$

Trong hình bình hành $AKHF$ có M là trung điểm của đường chéo AH nên M cũng là trung điểm của đường chéo KF . Suy ra K, M, F thẳng hàng.

□

Bài 9

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ 1 - NĂM HỌC 2009 - 2010

✎ **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 - x^3y + x - y.$

b) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2.$

💬 **Lời giải.**

a) $x^4 - x^3y + x - y = x^3(x - y) + (x - y) = (x - y)(x^3 + 1) = (x - y)(x + 1)(x^2 - x + 1).$

b)

$$\begin{aligned} & 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= (2bc - (b^2 + c^2 - a^2))(2bc + b^2 + c^2 - a^2) \\ &= (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2) \\ &= (a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)(b + c + a). \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2.** Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{2x - 2xy - 3 + 3y}{y^3 - 3y^2 + 3y - 1}.$

b) $\frac{(4x - 3)^2 - 9x^2}{-7x^2 + 24x - 9}.$

💬 **Lời giải.**

a) $\frac{2x - 2xy - 3 + 3y}{y^3 - 3y^2 + 3y - 1} = \frac{(2x - 3)(1 - y)}{(y - 1)^3} = \frac{3 - 2x}{(y - 1)^2}.$

b) $\frac{(4x - 3)^2 - 9x^2}{-7x^2 + 24x - 9} = \frac{(4x - 3 - 3x)(4x - 3 + 3x)}{(3 - x)(7x - 3)} = -1.$

□

❖ **Bài 3.** Cho hai đa thức $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + 14x + 13$ và $g(x) = 3x + 4$.

a) Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $g(x)$.

b) Phân tích đa thức $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + 14x + 8$ thành nhân tử.

💬 **Lời giải.**

a) Khi chia $f(x)$ cho $g(x)$ ta được $f(x) = (3x + 4)(x^2 + 2x + 2) + 5$.

b) Phân tích đa thức $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + 14x + 8$ thành nhân tử ta được

$$f(x) = 3x^3 + 10x^2 + 14x + 8 = (3x + 4)(x^2 + 2x + 2).$$

□

❖ **Bài 4.** Cho $2x^2 + 2y^2 = 5xy$ và $0 < x < y$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{x + y}{x - y}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $2x^2 + 2y^2 = 5xy \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(2x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \text{ (loại)} \\ y = 2x \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$ Thay $y = 2x$ vào biểu thức E ta có $E = \frac{x + y}{x - y} = -3.$

□

❖ **Bài 5.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E sao cho $BDCE$ là hình bình hành. Gọi F sao cho $BDFC$ là hình bình hành. Chứng minh rằng

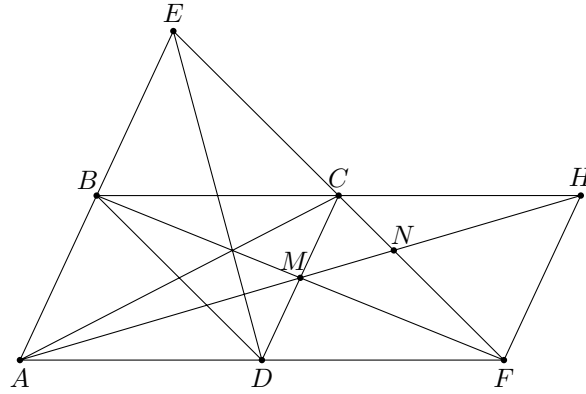
a) A đối xứng với E qua B .

b) Điểm C là trung điểm của EF .

c) Ba đường thẳng AC , BF , DE cắt nhau tại một điểm.

d) Gọi M là giao điểm của CD và BF , N là giao điểm của AM và CF . Chứng minh $FC = 3NC$.

💬 **Lời giải.**



- a) Vì các tứ giác $ABCD$ và $BECD$ là hình bình hành nên AB và BE cùng song song và bằng với CD suy ra ba điểm A, B và E thẳng hàng. Mà $AB = BE$ nên suy ra A đối xứng với E qua B .
- b) Ta có CE và CF cùng song song và bằng với BD nên ba điểm E, C và F thẳng hàng. Mà $CE = CF$ nên suy ra C là trung điểm của EF .
- c) Chứng minh tương tự câu b ta suy ra $DA = DF$ và ba điểm A, D và F thẳng hàng. Xét $\triangle AEF$ có AC, FB và DE là ba đường trung tuyến nên chúng cắt nhau tại một điểm.
- d) Gọi H là giao điểm của AM và BC .

Xét hai tam giác MAD và MHC có

$$\begin{cases} \widehat{AMD} = \widehat{HMC} \text{ (đối đỉnh)} \\ MD = MC \text{ (gt)} \\ \widehat{ADM} = \widehat{HCM} \text{ (so le trong)}. \end{cases}$$

Do đó $\triangle MAD = \triangle MCH$ (c.g.c) do đó $AD = CH$ mà $AD = BC$ nên $CH = CB$.

Vì tứ giác $BCFD$ là hình bình hành nên $MB = MF$.

Xét $\triangle BHF$ có hai trung tuyến HM và CF cắt nhau tại N nên N là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow CF = 3CN$.

□

Bài 10 ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I NĂM HỌC 2010 - 2011

✧ **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a) $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$.
- b) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 10$.

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 - 2xy)(x^2 + y^2 + 2xy) \\ &= (x + y)^2(x - y)^2. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 10$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 - 4)(x^2 - 1) - 10 \\
&= x^4 - 5x^2 - 6 \\
&= x^2(x^2 + 1) - 6(x^2 + 1) \\
&= (x^2 + 1)(x^2 - 6).
\end{aligned}$$



❖ **Bài 2.** Thực hiện phép tính

a) $\frac{y}{x^2 + xy} - \frac{x}{y^2 - xy} - \frac{2y}{(x - y)(x + y)}.$

b) $\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3}\right) : \left(\frac{1}{x^2+6x+9} - \frac{1}{x^2-6x+9}\right).$

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{y}{x^2 + xy} - \frac{x}{y^2 - xy} - \frac{2y}{(x - y)(x + y)} \\
&= \frac{y^2(x - y) - x^2(x + y) - 2xy^2}{xy(x + y)(x - y)} \\
&= -\frac{x^3 + xy^2 + y^3 + x^2y}{xy(x + y)(x - y)} = -\frac{(x + y)(x^2 + y^2)}{xy(x + y)(x - y)} \\
&= -\frac{x^2 + y^2}{xy(x - y)}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3}\right) : \left(\frac{1}{x^2+6x+9} - \frac{1}{x^2-6x+9}\right) \\
&= \frac{2x}{(x+3)(x-3)} : \frac{-12x}{(x+3)^2(x-3)^2} \\
&= \frac{9 - x^2}{6}.
\end{aligned}$$



❖ **Bài 3.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) Chứng minh $n^4 + \frac{1}{4} = \left[(n - 1)n + \frac{1}{2}\right] \left[n(n + 1) + \frac{1}{2}\right].$

b) Áp dụng câu a thu gọn phân thức $\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right) \left(3^4 + \frac{1}{4}\right) \left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(13^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right) \left(4^4 + \frac{1}{4}\right) \left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(14^4 + \frac{1}{4}\right)}.$

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} & \left[(n-1)n + \frac{1}{2} \right] \left[n(n+1) + \frac{1}{2} \right] \\ &= \left[\left(n^2 - n + \frac{1}{2} \right) \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \left(n^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - n^2 \\ &= n^4 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

b) Ta có

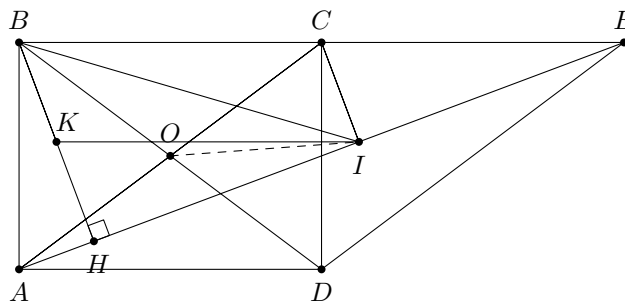
$$\begin{aligned} & \frac{\left(1^4 + \frac{1}{4} \right) \left(3^4 + \frac{1}{4} \right) \left(5^4 + \frac{1}{4} \right) \dots \left(13^4 + \frac{1}{4} \right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4} \right) \left(4^4 + \frac{1}{4} \right) \left(6^4 + \frac{1}{4} \right) \dots \left(14^4 + \frac{1}{4} \right)} \\ &= \frac{\left(0 + \frac{1}{2} \right) \left(1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \right) \left(2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \right) \left(3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \right) \dots \left(12 \cdot 13 + \frac{1}{2} \right) \left(13 \cdot 14 + \frac{1}{2} \right)}{\left(1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \right) \left(2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \right) \left(3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \right) \left(4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \right) \dots \left(13 \cdot 14 + \frac{1}{2} \right) \left(14 \cdot 15 + \frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} : \frac{421}{2} = \frac{1}{421}. \end{aligned}$$

□

✦ **Bài 4.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của B qua C . Vẽ BH vuông góc với AE tại H . Gọi I là trung điểm của HE .

- Chứng minh rằng tứ giác $ACED$ là hình bình hành.
- Gọi K là trực tâm của $\triangle ABI$. Chứng minh rằng K là trung điểm của HB .
- Chứng minh rằng tứ giác $BCIK$ là hình bình hành.
- Chứng minh rằng ba đường thẳng AC , BD và đường trung trực của IC đồng quy.

💬 **Lời giải.**



- Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$ và $AD = BC$ nên $AD = CE$. (1)
Mặt khác, ta có $BC = CE$ mà $BC = AD$ nên $AD = CE$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ACED$ là hình bình hành.
- Vì I là trung điểm của HE và $IK \parallel BE$ (cùng vuông góc với AB) suy ra $KB = KH$ hay K là trung điểm của BH .



- c) Xét tứ giác $BCIK$ có $IK \parallel BC$ và $CI \parallel BK$ nên tứ giác $BCIK$ là hình bình hành.
- d) Gọi O là giao điểm của AC và BD .
 Xét $\triangle ACI$ vuông tại I có IO là đường trung tuyến nên $OA = OC = OI$ suy ra O thuộc đường trung trực của CI .
 Mặt khác, O là giao điểm của AC và BD , từ đó suy ra ba đường thẳng AC , BD và đường trung trực của IC đồng quy.

□

Bài 11 ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I NĂM HỌC 2011 - 2012

❖ Bài 1 (2 điểm). Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $(x - 1)^2 - (xy - 1)^2$.
 b) $(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 3) - 8$.

💬 Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 - (xy - 1)^2 &= (x - 1)^2 - y^2(x - 1)^2 \\ &= (x - 1)^2(y - 1)^2 \\ &= (x - 1)^2(y - 1)(y + 1).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 3) - 8 &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 5x^2 + 10x + 15 - 8 \\ &= x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 7 \\ &= x^4 + x^3 + 3x^3 + 3x^2 + 9x^2 + 9x + 7x + 7 \\ &= x^3(x + 1) + 3x^2(x + 1) + 9x(x + 1) + 7(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^3 + 3x^2 + 9x + 7) \\ &= (x + 1)(x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 7x + 7) \\ &= (x + 1)[x^2(x + 1) + 2x(x + 1) + 7(x + 1)] \\ &= (x + 1)^2(x^2 + 2x + 7).\end{aligned}$$

□

❖ Bài 2 (3 điểm). Cho phân thức $A = \left(\frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x + 3} \right) : \left(\frac{x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{3x + 9} \right)$.

- a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức A được xác định.
 b) Thu gọn A .
 c) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức A là số nguyên.

💬 Lời giải.

a) Điều kiện xác định $\begin{cases} x^3 - 9x \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \\ x^2 + 3x \neq 0 \\ 3x + 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3. \end{cases}$

b)

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x + 3} \right) : \left(\frac{x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{3x + 9} \right) \\ &= \frac{9 + x(x - 3)}{x(x - 3)(x + 3)} : \frac{-x^2 + 3x - 9}{3x(x + 3)} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 9}{x(x - 3)(x + 3)} \cdot \frac{3x(x + 3)}{-(x^2 - 3x + 9)} \\ &= \frac{-3}{x - 3}. \end{aligned}$$

c) Để $\frac{-3}{x - 3}$ nguyên thì -3 phải chia hết cho $x - 3$.

Hay $x - 3 \in U(-3)$, $U(-3) = \pm 1, \pm 3$.

$$+ x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4.$$

$$+ x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2.$$

$$+ x - 3 = 3 \Rightarrow x = 6.$$

$$+ x - 3 = -3 \Rightarrow x = 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy các giá trị của x để A nguyên là 2; 4; 6.

□

❖ **Bài 3.** Cho $B = n(n - 2) + 3(2n + 1)$.

a) Phân tích B thành nhân tử.

b) Chứng minh B chia hết cho 8 với mọi số n lẻ.

💬 **Lời giải.**

a) $B = n(n - 2) + 3(2n + 1) = n^2 + 4n + 3 = (n + 1)(n + 3)$.

b) Vì n là số lẻ nên ta có $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Khi đó $B = (n + 1)(n + 3) = (2k + 2)(2k + 4) = 4(k + 1)(k + 2)$.

Do $(k + 1)(k + 2)$ là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp nên $(k + 1)(k + 2) : 2$.

Vậy $B = 4(k + 1)(k + 2) : 8$.

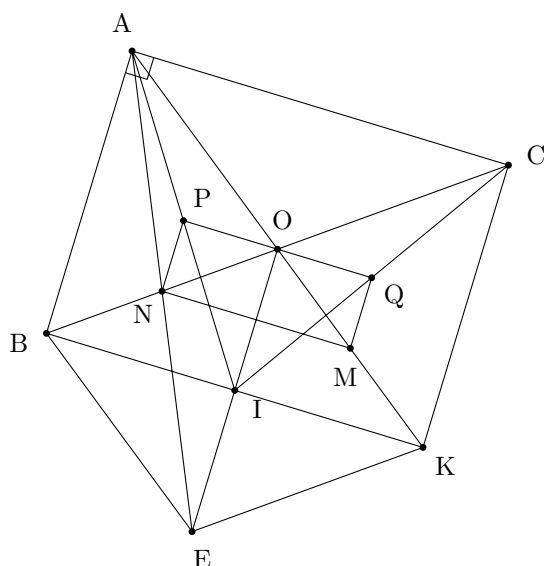
□

❖ **Bài 4.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi O là trung điểm của BC , gọi K là điểm đối xứng của A qua O .

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABKC$ là hình chữ nhật.

- b) Gọi I là trung điểm của BK . Qua B vẽ đường thẳng song song với AK cắt đường thẳng OI tại E . Chứng minh rằng $BEKO$ là hình thoi.
- c) Gọi N là trung điểm của OB . Chứng minh rằng N là trung điểm của AE .
- d) Gọi P, Q, M lần lượt là trung điểm của IA, IC, OK . Chứng minh rằng tứ giác $PQMN$ là hình chữ nhật.

🗨️ Lời giải.



- a) Vì $\triangle ABC$ vuông tại A suy ra $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
 Vì K là điểm đối xứng của A qua O nên O là trung điểm của AK .
 Xét tứ giác $ABKC$ có

- O là trung điểm của BC (gt),
- O là trung điểm của AK (cmt),
- $BC \cap AK = \{O\}$.

Suy ra tứ giác $ABKC$ là hình bình hành.

Xét hình bình hành $ABKC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow ABKC$ là hình chữ nhật.

- b) Vì $BE \parallel AK \Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{IKO}$ (so le trong).
 Xét $\triangle BIE$ và $\triangle KIO$ có

- $\widehat{EBI} = \widehat{IKO}$ (cmt),
- $BI = IK$ (I là trung điểm của BK),
- $\widehat{BIE} = \widehat{OIK}$ (đối đỉnh.)

Suy ra $\triangle BIE = \triangle KIO$ (g-c-g).

$\Rightarrow BE = OK$ (hai cạnh tương ứng).

Xét tứ giác $BEKO$ có

- $BE \parallel OK$ (theo cách vẽ),
- $BE = OK$ (cmt).

Suy ra tứ giác $BEKO$ là hình bình hành.

Vì tứ giác $ABKC$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{ABK} = 90^\circ$.

Xét $\triangle ABK$ vuông tại B có O là trung điểm của $AK \Rightarrow BO = \frac{1}{2}AK = OK$.

Xét hình bình hành $BEKO$ có $BO = OK$ (cmt)

$\Rightarrow$ tứ giác $BEKO$ là hình thoi.

c) Xét tứ giác $ABEO$ có

- $BE \parallel AO$ (theo cách vẽ),
- $BE = AO (= OK)$. .

Suy ra tứ giác $ABEO$ là hình bình hành.

Mà N là trung điểm của đường chéo $BO \Rightarrow N$ là trung điểm của đường chéo AE .

d) Xét $\triangle IAC$ có

- P là trung điểm của IA ,
- Q là trung điểm của IC . .

Suy ra PQ là đường trung bình của $\triangle IAC$.

$\Rightarrow PQ \parallel AC$ và $PQ = \frac{1}{2}AC$.

Xét $\triangle OKB$ có

- M là trung điểm của OK ,
- N là trung điểm của OB . .

Suy ra MN là đường trung bình của $\triangle OKB$.

$\Rightarrow MN \parallel BK$ và $MN = \frac{1}{2}BK$.

Mà $AC \parallel BK, AC = BK$ (tứ giác $ABKC$ là hình chữ nhật).

Suy ra $PQ \parallel MN$ và $PQ = MN$.

Suy ra tứ giác $PQMN$ là hình bình hành.

Xét $\triangle AEI$ có

- N là trung điểm của AE ,
- P là trung điểm của AI . .

Suy ra NP là đường trung bình của $\triangle AEI$.

$\Rightarrow NP \parallel EI$.

Vì tứ giác $BEKO$ là hình thoi $\Rightarrow EI \perp BK$.

Ta có $\begin{cases} NP \parallel EI \\ EI \perp BK \end{cases} \Rightarrow NP \perp BK$.

Mà $MN \parallel BK$ suy ra $NP \perp MN$ hay $\widehat{PNM} = 90^\circ$.

Xét hình bình hành $PQMN$ có $\widehat{PNM} = 90^\circ$ (cmt).

Suy ra tứ giác $PQMN$ là hình chữ nhật.

❖ **Bài 1. (2 điểm)** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

a) $x^4 - x^3y + 8x - 8y$;

b) $(x^2 - 2x)^2 - 6x^2 + 12x - 7$.

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} x^4 - x^3y + 8x - 8y &= (x^4 - x^3y) + (8x - 8y) \\ &= x^3(x - y) + 8(x - y) \\ &= (x - y)(x^3 + 8) \\ &= (x - y)(x + 2)(x^2 - 2x + 4). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x)^2 - 6x^2 + 12x - 7 &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6x^2 + 12x - 7 \\ &= x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7 \\ &= x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 5x^2 + 5x + 7x - 7 \\ &= (x^4 - x^3) - (3x^3 - 3x^2) - (5x^2 - 5x) + (7x - 7) \\ &= x^3(x - 1) - 3x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 7(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^3 - 3x^2 - 5x + 7) \\ &= (x - 1)^2(x^2 - 2x - 7). \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2. (3 điểm)** Thực hiện phép tính.

a) $\frac{x}{2x-1} - \frac{12x}{2x-1} : \frac{3}{x^2}$;

b) $\left(\frac{5x+50}{x^2+5x} - \frac{-2x+10}{x} + \frac{x^2}{5x+25} \right) : \frac{3x+15}{5}$.

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} 2x - 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2x-1} - \frac{12x}{2x-1} : \frac{3}{x^2} &= \frac{x}{2x-1} - \frac{12x}{2x-1} \cdot \frac{x^2}{3} \\ &= \frac{x}{2x-1} - \frac{12x^3}{3(2x-1)} \\ &= \frac{3x}{3(2x-1)} - \frac{12x^3}{3(2x-1)} \\ &= \frac{3x(1-4x^2)}{3(2x-1)} \\ &= \frac{-3x(2x-1)(2x+1)}{3(2x-1)} \\ &= -x(2x+1). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{5x+50}{x^2+5x} - \frac{-2x+10}{x} + \frac{x^2}{5x+25} \right) : \frac{3x+15}{5} \\ &= \left[\frac{5x+50}{x(x+5)} - \frac{-2x+10}{x} + \frac{x^2}{5(x+5)} \right] \cdot \frac{5}{3x+15}. \end{aligned}$$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+5 \neq 0 \\ 3x+15 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -5. \end{cases}$ Ta có

$$\begin{aligned} &\left(\frac{5x+50}{x^2+5x} - \frac{-2x+10}{x} + \frac{x^2}{5x+25} \right) : \frac{3x+15}{5} \\ &= \left[\frac{5x+50}{x(x+5)} - \frac{-2x+10}{x} + \frac{x^2}{5(x+5)} \right] \cdot \frac{5}{3x+15} \\ &= \frac{25x+250-5(x+5)(-2x+10)+x^3}{5x(x+5)} \cdot \frac{5}{3(x+5)} \\ &= \frac{25x+250+10x^2-50x+50x-250+x^3}{x(x+5)^2} = \frac{x^3+10x^2+25x}{3x(x+5)^2} = \frac{x(x+5)^2}{3x(x+5)^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

◆ **Bài 3. (1 điểm)** Cho đa thức $A = x^4 - 2x^3 - 2x + m - 1$ và đa thức $B = x^2 - 2x - 1$. Tìm m để đa thức A chia cho đa thức B có dư là giá trị của ẩn làm cho đa thức B bằng 0.

🗨 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} B = x^2 - 2x - 1 = 0 &\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} \\ x-1 = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} + 1 \\ x = -\sqrt{2} + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phép chia đa thức

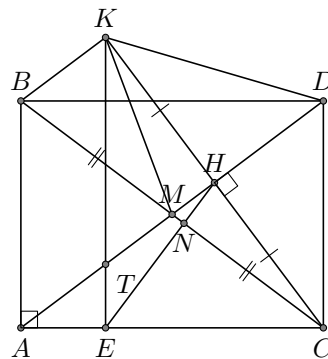
$$\begin{array}{r|l} -x^4 - 2x^3 - & 2x + m - 1 \\ x^4 - 2x^3 - x^2 & \\ \hline & -x^2 - 2x + m - 1 \\ & x^2 - 2x & -1 \\ \hline & & m \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - 2x - 1 \\ x^2 + 1 \end{array}$$

Vậy để đa thức A chia cho đa thức B có dư là giá trị của ẩn làm cho đa thức B bằng 0 thì $m = \sqrt{2} + 1$ hoặc $m = -\sqrt{2} + 1$. □

❖ **Bài 4. (4 điểm)** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và ($AB < AC$), có trung tuyến AM . Gọi D là điểm đối xứng của A qua M .

- Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.
- Kẻ $CH \perp AD$ tại H . Gọi K là điểm đối xứng của C qua H . Chứng minh rằng tứ giác $ABKD$ là hình thang cân.
- Gọi T là điểm đối xứng của D qua H , E là giao điểm của AC và KT . Chứng minh $CK = 2EH$.
- Chứng minh rằng $EH \perp BC$.

💬 **Lời giải.**



- Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Xét tứ giác $ABCD$, ta có

$$\begin{cases} M \text{ là trung điểm của } BC \\ M \text{ là trung điểm của } AD \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Mà $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

- Chứng minh tứ giác $AKBD$ là hình thang cân.

Ta có $DA \perp CK$ tại H và H là trung điểm của CK nên DA là đường trung trực của CK .

Ta có $M \in DA$ nên $MK = MC$. Mà $MC = \frac{1}{2}BC$ nên $KM = \frac{1}{2}BC$.

$\Rightarrow \triangle KBC$ vuông tại K .

Ta có $\begin{cases} BK \perp CK \\ AD \perp CK \end{cases} \Rightarrow BK \parallel AD$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BKDA$ là hình thang. Vì D nằm trên đường trung trực của CK nên $DK = DC$.

Suy ra $\triangle KDC$ cân tại D .

Mà DH là đường cao nên DH cũng là đường phân giác của $\widehat{KDC}$. Suy ra $\widehat{KDA} = \widehat{CDA}$.

Mà $\widehat{CDA} = \widehat{BAD}$ nên $\widehat{KDA} = \widehat{BAD}$.

Xét hình thang $BKDA$, ta có

$$\widehat{KDA} = \widehat{BAD} \text{ cmt}$$

$\Rightarrow$ Hình thang $BKDA$ là hình thang cân.

c) Chứng minh rằng $CK = 2EH$.

Xét $\triangle KTH$ và $\triangle KDH$, ta có:

$$\begin{cases} KH \text{ là cạnh chung} \\ \widehat{KHT} = \widehat{KHD} (= 90^\circ) \\ HD = HT \text{ (gt)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle KTH = \triangle KDH \Rightarrow \widehat{TKH} = \widehat{DKH}$. Mà $\widehat{DKH} = \widehat{DCH}$ ($\triangle DKC$ cân tại D) nên $\widehat{TKH} = \widehat{DCH}$.

Mà hai góc này nằm ở vị trí so le trong nên $KE \parallel CD$.

$\Rightarrow KE \perp AC$ (Vì $CD \perp AC$).

Tam giác DKC cân tại D có DH là đường cao nên DH cũng là đường trung tuyến. Suy ra H là trung điểm của CK .

Xét $\triangle KEC$ vuông tại E có EH là đường trung tuyến.

$\Rightarrow CK = 2HE$.

d) Chứng minh rằng $EH \perp BC$.

Gọi N là giao điểm của EH và BC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{NCE} + \widehat{ABC} = 90^\circ \\ \widehat{HCD} + \widehat{HDC} = 90^\circ \\ \widehat{ABC} = \widehat{HDC} \text{ (ABCD là hình chữ nhật)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{HCD}$.

Suy ra $\widehat{HCE} + \widehat{NCE} = 90^\circ$. Mà $\widehat{HEC} = \widehat{HCE}$ nên $\widehat{HEC} + \widehat{NCE} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{ENC} = 90^\circ$.

Suy ra $EH \perp BC$ tại N .

□

Bài 13 ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I NĂM HỌC 2013 - 2014

❖ Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $(x^2 - 2x)^2 + 6x^2 - 12x + 5$.

b) $(x^2 + 10x + 5)(x^2 + 10x + 13) + 16$.

💬 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x)^2 + 6x^2 - 12x + 5 &= (x^2 - 2x)^2 + 6(x^2 - 2x) + 5 \\ &= (x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 2x) + 5(x^2 - 2x) + 5 \\ &= (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 1) + 5(x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

$$= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 5) = (x - 1)^2(x^2 - 2x + 5).$$

b) $(x^2 + 10x + 5)(x^2 + 10x + 13) + 16.$

Đặt $t = x^2 + 10x + 5$, khi đó

$$\begin{aligned} & (x^2 + 10x + 5)(x^2 + 10x + 13) + 16 \\ &= t(t + 8) + 16 = t^2 + 8t + 16 = (t + 4)^2 = (x^2 + 10x + 5 + 4)^2 \\ &= (x^2 + x + 9x + 9)^2 = [x(x + 1) + 9(x + 1)]^2 \\ &= [(x + 1)(x + 9)]^2 = (x + 1)^2(x + 9)^2. \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 2.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)} + \frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{y(y-x)}.$

b) $\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \div \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab}.$

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y, x \neq -y.$

Ta có $\frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)} + \frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{y(y-x)} = \frac{y+x}{xy(x+y)} + \frac{y-x}{xy(x-y)} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{xy} = 0.$

b) Điều kiện $a \neq 0, b \neq 0, a \neq -b.$

Ta có

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \div \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab} \\ &= \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{ab} \right] \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} \\ &= \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} \right] \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} \\ &= \frac{(a+b)^2}{(ab)^2} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} = ab. \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 3.** Cho biểu thức $P = \frac{2a-1}{3a-1} + \frac{5-a}{3a+1}$ với $a \neq \frac{1}{3}$ và $a \neq -\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức P biết $10a^2 + 5a = 3$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $10a^2 + 5a = 3$ nên $5a = 3 - 10a^2$.

Khi đó

$$P = \frac{2a-1}{3a-1} + \frac{5-a}{3a+1} = \frac{(2a-1)(3a+1) + (5-a)(3a-1)}{(3a-1)(3a+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6a^2 + 2a - 3a - 1 + 15a - 5 - 3a^2 + a}{9a^2 - 1} = \frac{3a^2 + 15a - 6}{9a^2 - 1} \\
&= \frac{3a^2 + 3(3 - 10a^2) - 6}{9a^2 - 1} = \frac{-27a^2 + 3}{9a^2 - 1} = \frac{-3(9a^2 - 1)}{9a^2 - 1} = 3.
\end{aligned}$$

□

⇒ **Bài 4.** Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $3n^3 + 10n^2 - 5$ chia hết cho $3n + 1$.

💬 **Lời giải.**

Thực hiện phép chia $3n^3 + 10n^2 - 5$ cho $3n + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
3n^3 + 10n^2 & - 5 \\
\underline{3n^2 + n^2} & \\
9n^2 & - 5 \\
\underline{9n^2 + 3n} & \\
-3n & - 5 \\
\underline{-3n - 1} & \\
-4 &
\end{array}$$

Ta có $3n^3 + 10n^2 - 5 = (3n + 1) \cdot (n^2 + 3n - 1) - 4$.

Khi đó $(3n^3 + 10n^2 - 5)$ chia hết cho $3n + 1$ khi $4 \vdots (3n + 1)$.

Suy ra $3n + 1 \in \mathbb{U}\{4\} = \{1; 2; 4; -1; -2; -4\}$.

$3n + 1$	1	2	4	-1	-2	-4
n	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{5}{3}$

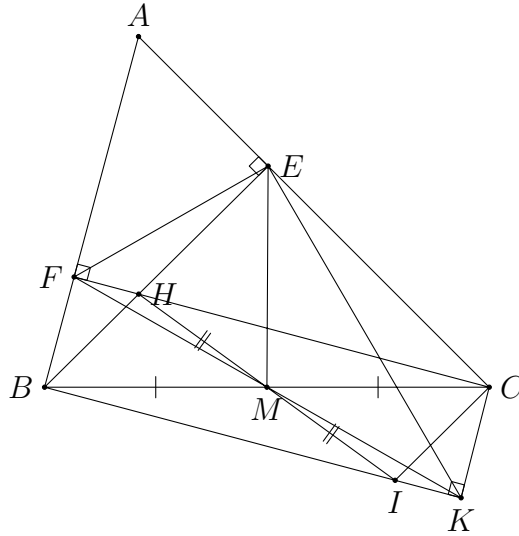
Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $n \in \{0; 1; -1\}$.

□

⇒ **Bài 5.** Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{A} = 60^\circ$, hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC và I là điểm đối xứng của H qua M .

- Chứng minh rằng $CI = BH$ và $BI \perp AB$.
- Lấy điểm K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BI . Chứng minh ba điểm F , M , K thẳng hàng.
- Chứng minh rằng $EF \perp EK$.
- Chứng minh rằng $\triangle MEF$ đều.

💬 **Lời giải.**



a) Chứng minh rằng $CI = BH$ và $BI \perp AB$.

Xét tứ giác $BICH$ có $\begin{cases} M \text{ là trung điểm của } BC & (\text{gt}) \\ M \text{ là trung điểm của } HI & (\text{do } H \text{ đối xứng với } I \text{ qua } M) \end{cases}$

Nên tứ giác $BICH$ là hình bình hành.

Suy ra $CI = BH$ và $BI \parallel CH$.

Mà $CH \perp AB$ (gt) nên $BI \perp AB$.

b) Lấy điểm K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BI . Chứng minh ba điểm F, M, K thẳng hàng.

Xét tứ giác $BFCK$ có $\begin{cases} \widehat{FBK} = 90^\circ & (\text{cmt}) \\ \widehat{BFC} = 90^\circ & (\text{do } CF \perp AB) \\ \widehat{BKC} = 90^\circ & (\text{gt}). \end{cases}$

Nên tứ giác $BFCK$ là hình chữ nhật.

Lại có M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của FK .

Vậy ba điểm F, M, K thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng $EF \perp EK$.

Do $BFCK$ là hình chữ nhật, có M là giao điểm hai đường chéo nên $FM = \frac{1}{2}FK = \frac{1}{2}BC$. Tam giác BEC vuông tại E có M là trung điểm BC nên $ME = \frac{1}{2}BC$.

Do đó $ME = MF = \frac{1}{2}FK$.

Tam giác EFK có EM là đường trung tuyến và $EM = \frac{1}{2}FK$ nên $\triangle EFK$ vuông tại E .

Vậy $EF \perp EK$.

d) Chứng minh rằng $\triangle MEF$ đều.

Ta có $ME = MF$ (cmt) nên $\triangle MEF$ cân tại M .

Tứ giác $BFCK$ là hình chữ nhật nên hai tam giác MBF và MCE cân tại M .

Suy ra $\begin{cases} \widehat{BMF} = 180^\circ - 2\widehat{ABC} \\ \widehat{EMC} = 180^\circ - 2\widehat{ACB} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{FMB} + \widehat{EMC} &= 360^\circ - 2(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ &= 360^\circ - 2(180^\circ - \widehat{BAC}) \\ &= 360^\circ - 360^\circ + 2\widehat{BAC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ. \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{EMF} = 180^\circ - (\widehat{FMB} + \widehat{EMC}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Vậy $\triangle MEF$ là tam giác đều.

□

Bài 14 ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I NĂM HỌC 2014 - 2015

❖ **Bài 1.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 6$.

b) $x^2(x+3)^2 - (x+3)^2 - (x^2 - 1)$.

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 6 &= (x - y)^2 - 4 - x + y - 2 \\ &= (x - y - 2)(x - y + 2) - (x - y + 2) \\ &= (x - y + 2)(x - y - 3). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^2(x+3)^2 - (x+3)^2 - (x^2 - 1) &= (x+3)^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)((x+3)^2 - 1) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2)(x+4). \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{3}{2x} - \frac{3-3x}{2x-1} + \frac{2x^2+1}{4x^2-2x}$.

b) $\left[\frac{1}{(2x-y)^2} + \frac{2}{4x^2-y^2} + \frac{1}{(2x+y)^2} \right] : \frac{16x}{4x^2+4xy+y^2}$.

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x} - \frac{3-3x}{2x-1} + \frac{2x^2+1}{4x^2-2x} &= \frac{3}{2x} = \frac{3-3x}{2x-1} + \frac{2x^2+1}{2x(2x-1)} \\ &= \frac{3(2x-1) - 2x(3-3x) + 2x^2+1}{2x(2x-1)} \\ &= \frac{6x-3-6x+6x^2+2x^2+1}{2x(2x-1)} \\ &= \frac{8x^2-2}{2x(2x-1)} \\ &= \frac{2(2x-1)(2x+1)}{2x(2x-1)} = \frac{2x+1}{x}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{(2x-y)^2} + \frac{2}{4x^2-y^2} + \frac{1}{(2x+y)^2} \right] : \frac{16x}{4x^2+4xy+y^2} \\
 = & \left[\frac{1}{(2x-y)^2} + \frac{2}{(2x-y)(2x+y)} + \frac{1}{(2x+y)^2} \right] : \frac{16x}{(2x+y)^2} \\
 = & \left[\frac{(2x+y)^2 + 2(2x-y)(2x+y) + (2x-y)^2}{(2x-y)^2(2x+y)^2} \right] : \frac{16x}{(2x+y)^2} \\
 = & \frac{(2x+y+2x-y)^2}{(2x-y)^2(2x+y)^2} \cdot \frac{(2x+y)^2}{16x} \\
 = & \frac{16x^2}{(2x-y)^2(2x+y)^2} \cdot \frac{(2x+y)^2}{16x} \\
 = & \frac{x}{(2x-y)^2}.
 \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 3.** Cho $3x^2 - y^2 = 2xy$ và $y \neq 2x$; $y \neq -3x$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{2xy}{-6x^2 + xy + y^2}.$$

💬 **Lời giải.**

Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}
 3x^2 - y^2 = 2xy & \Leftrightarrow 9x^2 - y^2 = 2xy + 6x^2 \\
 & \Leftrightarrow (3x-y)(3x+y) = 2x(3x+y) \\
 & \Leftrightarrow 3x-y = 2x \\
 & \Leftrightarrow y = x.
 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2xy}{-6x^2 + xy + y^2} \\
 &= \frac{2xy}{-6x^2 + xy + 3x^2 - 2xy} \\
 &= \frac{2xy}{-(3x^2 + xy)} \\
 &= -\frac{2y}{3x+y} \\
 &= -\frac{2x}{3x+x} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

✧ **Bài 4.** Cho $a + b + c = 1$ (a, b, c khác 1 và 2). Chứng minh rằng

$$\frac{c+ab}{a^2+b^2+abc-1} + \frac{a+bc}{b^2+c^2+abc-1} + \frac{b+ac}{a^2+c^2+abc-1} = \frac{bc+ac+ab+8}{(a-2)(b-2)(c-2)}.$$

💬 **Lời giải.**

Từ giả thiết $a + b + c = 1 \Rightarrow a + b = 1 - c \Rightarrow (a + b)^2 = (1 - c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 - 2c + 1 - 2ab$.
 Do đó $a^2 + b^2 + abc - 1 = c^2 - 2c + abc - 2ab = (c - 2)(c + ab) \Rightarrow \frac{c + ab}{a^2 + b^2 + abc - 1} = \frac{1}{c - 2}$.
 Tương tự, ta có $\frac{a + bc}{b^2 + c^2 + abc - 1} = \frac{1}{a - 2}$ và $\frac{b + ac}{a^2 + c^2 + abc - 1} = \frac{1}{b - 2}$.
 Do đó, từ đề ta được

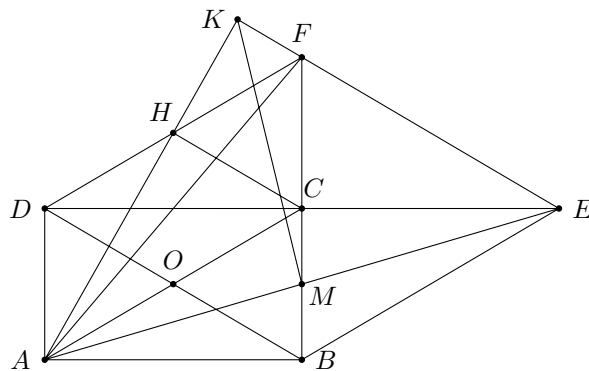
$$\begin{aligned} VT &= \frac{c + ab}{a^2 + b^2 + abc - 1} + \frac{a + bc}{b^2 + c^2 + abc - 1} + \frac{b + ac}{a^2 + c^2 + abc - 1} \\ &= \frac{1}{c - 2} + \frac{1}{b - 2} + \frac{1}{a - 2} \\ &= \frac{(b - 2)(c - 2) + (a - 2)(c - 2) + (a - 2)(b - 2)}{(a - 2)(b - 2)(c - 2)} \\ &= \frac{bc - 2b - 2c + 4 + ac - 2a - 2c + 4 + ab - 2a - 2b + 4}{(a - 2)(b - 2)(c - 2)} \\ &= \frac{bc + ac + ab + 12 - 4(a + b + c)}{(a - 2)(b - 2)(c - 2)} \\ &= \frac{bc + ac + ab + 8}{(a - 2)(b - 2)(c - 2)} \\ &= VP. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{c + ab}{a^2 + b^2 + abc - 1} + \frac{a + bc}{b^2 + c^2 + abc - 1} + \frac{b + ac}{a^2 + c^2 + abc - 1} = \frac{bc + ac + ab + 8}{(a - 2)(b - 2)(c - 2)}$. □

✎ **Bài 5.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm của BC và E là giao điểm của đường thẳng AM với đường thẳng CD .

- Chứng minh rằng tứ giác $ABEC$ là hình bình hành.
- Gọi F là điểm đối xứng của B qua C . Chứng minh rằng tứ giác $BEFD$ là hình thoi.
- Chứng minh rằng C là trọng tâm tam giác AEF .
- Cho $AB^2 = 3BC^2$. Gọi H là trung điểm của DF và K là giao điểm của đường thẳng AH với đường thẳng EF . Chứng minh rằng $AE = 2MK$.

💬 **Lời giải.**



- Ta có $CE \parallel AB$.
 Mà $\triangle ABM = \triangle ECM$ (vì $\widehat{AMB} = \widehat{MC}$ (đối đỉnh), $MB = MC$ và $\widehat{ABM} = \widehat{ECM} = 90^\circ$), suy ra $AB = CE$.
 Từ (1) và (2), suy ra $ABEC$ là hình bình hành.

b) Ta có C là trung điểm của hai đoạn thẳng DE và BF .

Lại có $DE \perp BF$, suy ra $BEFD$ là hình thoi.

c) Vì $ABEC$ là hình bình hành, có hai đường chéo cắt nhau tại M , suy ra M là trung điểm của AE . (3)

$$\text{Lại có } FM = FC + CM = FC + \frac{1}{2}CB = FC + \frac{1}{2}FC = \frac{3}{2}FC. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra C là trọng tâm của tam giác AEF .

d) Từ $AB^2 = 3BC^2$, tam giác ABC vuông tại B , theo định lý Pi-Ta-Go ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4BC^2$, suy ra $AC = 2BC$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có $AC = BD$, O là trung điểm của AC , BD nên $AC = BD = BF$.

Suy ra HO là đường trung bình của tam giác DBF , suy ra $OH = \frac{1}{2}BF$.

Tam giác HAC có HO là đường trung tuyến và $OH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BF$.

Suy ra $\triangle HAC$ vuông tại H , suy ra $\widehat{AHC} = 90^\circ$.

Mà $CD = CE$ và $HD = HF$ (gt), suy ra CH là đường trung bình của tam giác DEF , suy ra $CH \parallel EF$, suy ra $\widehat{AKE} = \widehat{AHC} = 90^\circ$.

Trong $\triangle KAE$ vuông tại K và KM là trung tuyến, nên $KM = \frac{1}{2}AE$.

Vậy $AE = 2KM$.

□

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I NĂM HỌC 2015 - 2016 - QUẬN 1

Bài

15

✧ **Bài 1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $2x^3 - 32x$.

b) $9x^2 + 6xy + y^2 - 36$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $2x^3 - 32x = 2x(x^2 - 16) = 2x(x - 4)(x + 4)$.

b) Ta có $9x^2 + 6xy + y^2 - 36 = (9x^2 + 6xy + y^2) - 36 = (3x + y)^2 - 6^2 = (3x + y - 6)(3x + y + 6)$.

□

✧ **Bài 2.** Tìm x , biết:

a) $(x - 3)^2 - (x + 2)(x - 1) = 0$.

b) $7x(x - 2) = x^2 - 4$.

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned}(x-3)^2 - (x+2)(x-1) &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 - (x^2 - x + 2x - 2) &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 - x^2 + x - 2x + 2 &= 0 \\ -7x + 11 &= 0 \\ x &= \frac{11}{7}.\end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{11}{7}$.

b)

$$\begin{aligned}7x(x-2) &= x^2 - 4 \\ 7x(x-2) - (x^2 - 4) &= 0 \\ 7x(x-2) - (x-2)(x+2) &= 0 \\ (x-2)[7x - (x+2)] &= 0 \\ (x-2)(7x - x - 2) &= 0 \\ (x-2)(6x - 2) &= 0 \\ x - 2 = 0 \text{ hoặc } 6x - 2 = 0 \\ x = 2 \text{ hoặc } x &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Vậy $x = 2$ và $x = \frac{1}{3}$.



❖ **Bài 3.** Thực hiện các phép tính sau:

$$A = (x^4 - x^2 + 2x - 1) : (x^2 + x - 1) - (x^2 - x);$$

$$B = \frac{x+1}{x-2} + \frac{4}{x+2} + \frac{2-7x}{x^2-4}.$$

💬 **Lời giải.**

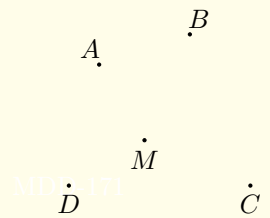
$$\begin{aligned}A &= (x^4 - x^2 + 2x - 1) : (x^2 + x - 1) - (x^2 - x) \\ &= (x^4 - (x^2 - 2x + 1)) : (x^2 + x - 1) - (x^2 - x) \\ &= (x^4 - (x-1)^2) : (x^2 + x - 1) - (x^2 - x) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1) : (x^2 + x - 1) - (x^2 - x) \\ &= (x^2 - x + 1) - (x^2 - x) \\ &= x^2 - x + 1 - x^2 + x \\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{x+1}{x-2} + \frac{4}{x+2} + \frac{2-7x}{x^2-4} \\
&= \frac{(x+1)(x+2)}{x-2} + \frac{4(x-2)}{x+2} + \frac{2-7x}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{(x+1)(x+2) + 4(x-2) + 2-7x}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{x^2 + 3x + 2 + 4x - 8 + 2 - 7x}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

❖ Bài 4.

Bốn nhà máy được xây dựng tại bốn địa điểm A, B, C, D (xem hình vẽ). Hãy tìm một điểm M nằm trong tứ giác $ABCD$ để xây dựng một trạm bơm nước sao cho tổng chiều dài đường ống dẫn nước từ M đến A , đến B , đến C và đến D là nhỏ nhất.



💬 Lời giải.

Trong tam giác MAC , ta có $MA + MC \geq AC$ (BDT trong tam giác). Dấu “=” xảy ra khi ba điểm M, A, C thẳng hàng. Khi đó $MA + MC$ có giá trị nhỏ nhất. (1).

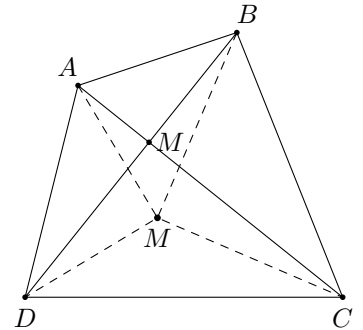
Trong tam giác MBD , ta có $MB + MD \geq BD$ (BDT trong tam giác).

Dấu “=” xảy ra khi ba điểm M, B, D thẳng hàng. Khi đó $MB + MD$ có giá trị nhỏ nhất. (2).

Từ (1) và (2), ta có $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất khi ba điểm M, B, D và M, A, C thẳng hàng.

Điều này chỉ xảy ra khi M là giao điểm của AC và BD .

Vậy ta xây dựng trạm bơm nước tại vị trí giao điểm của của AC và BD thì tổng chiều dài đường ống dẫn nước từ M đến A , đến B , đến C và đến D là nhỏ nhất.



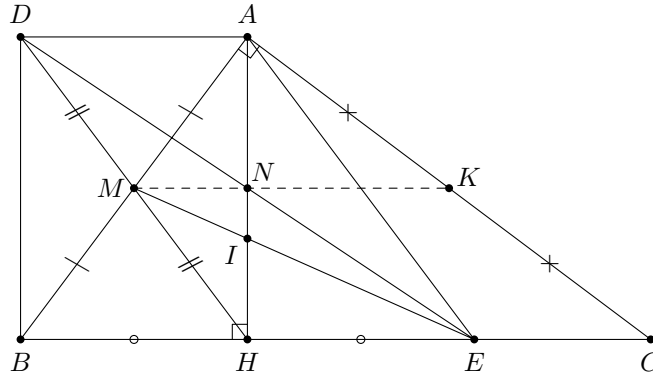
□

❖ Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$) của tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$.

- Chứng minh rằng tứ giác $AHBD$ là hình chữ nhật.
- Trên tia HC lấy điểm E sao cho $HE = HB$. Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ là hình bình hành.
- Gọi N là giao điểm của AH và DE , K là trung điểm của cạnh AC . Chứng minh $MN \parallel BC$ và ba điểm M, N, K thẳng hàng.

d) Gọi I là giao điểm của AH và ME . Chứng minh rằng $BD = 6NI$.

Lời giải.



a) Xét tứ giác $AHBD$, ta có:

- AB cắt DH tại M ;
- $MA = MB$ (gt);
- $MH = MD$ (gt);

Suy ra tứ giác $AHBD$ là hình bình hành.

Ta lại có $\angle AHB = 90^\circ$ (do $AH \perp BC$).

Vậy $AHBD$ là hình chữ nhật.

b) Do $AHBD$ là hình chữ nhật (cmt), suy ra $AD \parallel HB$, $AD = HB$;

Ta lại có $HB = HE$ và $H \in BC$ (gt), suy ra $AD \parallel HE$, $AD = HE$.

Vậy tứ giác $ADHE$ có $AD \parallel HE$, $AD = HE$ nên $ADHE$ là hình bình hành.

c) Ta có $ADHE$ là hình bình hành (cmt) và có AH cắt DE tại N nên $NA = NH$, $ND = NE$.

Trong tam giác ABH , ta có $MA = MB$ (gt) và $NA = NH$ (cmt),

suy ra MN là đường trung bình của $\triangle ABH \Rightarrow MN \parallel BH$ hay $MN \parallel BC$ (1).

Trong tam giác ABC , ta có $MA = MB$ (gt) và $KA = KC$ (gt),

suy ra MK là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MK \parallel BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm M, N, K thẳng hàng.

d) Ta có $MD = MH$ (gt) và $ND = NE$ (cmt).

Trong $\triangle DEH$ có các đường trung tuyến EM và HN cắt nhau tại I nên $NH = 3NI$.

Ta lại có $AH = BD$ ($AHBD$ là hình chữ nhật) và $AH = 2NH$ (N là trung điểm của AH).

Suy ra $BD = 6NI$.

□

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I NĂM HỌC 2016 - 2017 - QUẬN 1

Bài

16

⇒ **Bài 1 (2 điểm).** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $7x^2 - 14xy + 7y^2$.

b) $y^2 - 4x^2 + 4x - 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } 7x^2 - 14xy + 7y^2 \\ = 7(x^2 - 2xy + y^2) \\ = 7(x - y)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y^2 - 4x^2 + 4x - 1 \\ = y^2 - (4x^2 - 4x + 1) \\ = y^2 - (2x - 1)^2 \\ = (y - 2x + 1)(y + 2x - 1). \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 2 (1,5 điểm).** Tìm x , biết

$$\text{a) } 5x(x - 3) - x + 3 = 0.$$

$$\text{b) } 9x^2 - 25 - x(3x + 5) = 0.$$

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } 5x(x - 3) - x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x(x - 3) - (x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(5x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 5x - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 9x^2 - 25 - x(3x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x + 5)(3x - 5) - x(3x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x + 5)(2x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5 = 0 \\ 2x - 5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 3 (3 điểm).** a) Thực hiện các phép tính sau

$$A = (3x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x^2 - x + 1) + 2 \text{ và } B = \frac{x}{2x - 2} - \frac{3}{2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 1}.$$

b) Với $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq \pm 1$, tìm các giá trị của x để B nhận giá trị nguyên.

c) Bạn Luyện có 50 mảnh bìa hình vuông cạnh lần lượt là 2cm; 4cm; ...; 100cm. Bạn Toán có 50 mảnh bìa hình vuông cạnh lần lượt là 1cm; 3cm; ...; 99cm. Hỏi tổng diện tích các mảnh bìa bạn Luyện có lớn hơn tổng diện tích các mảnh bìa bạn Toán có là bao nhiêu xăng-ti-mét vuông?

💬 **Lời giải.**

a) Thực hiện phép tính

$$\begin{aligned} A &= (3x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x^2 - x + 1) + 2 \\ &= [(3x^3 - 3x^2 + 3x) + (-2x^2 + 2x - 2)] : (x^2 - x + 1) + 2 \\ &= [3x(x^2 - x + 1) - 2(x^2 - x + 2)] : (x^2 - x + 1) + 2 \\ &= (x^2 - x + 1)(3x - 2) + 2 \\ &= 3x - 2 + 2 = 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{x}{2x-2} - \frac{3}{2x+2} - \frac{1}{x^2-1} \\
&= \frac{x(x+1)}{2(x^2-1)} - \frac{3(x-1)}{2(x^2-1)} - \frac{2}{2(x^2-1)} \\
&= \frac{x^2+x-3x+3-2}{2(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{x^2-2x+1}{2(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{x-1}{2(x+1)}.
\end{aligned}$$

b) Với $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq \pm 1$, tìm các giá trị của x để B nhận giá trị nguyên.

Ta có

$$B = \frac{x-1}{2(x+1)} \Leftrightarrow (1-2B)x = 2B+1$$

Điều kiện $B \neq \frac{1}{2}$, ta có

$$x = \frac{1+2B}{1-2B} = -1 + \frac{2}{1-2B}$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $1-2B$ là ước của 2, do đó

$$\begin{cases} 1-2B=1 \\ 1-2B=-1 \\ 1-2B=2 \\ 1-2B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 \Rightarrow x=1 \text{ (không thỏa)} \\ B=1 \Rightarrow x=-3 \\ B=-\frac{1}{2} \text{ (không thỏa)} \\ B=\frac{3}{2} \text{ (không thỏa)}. \end{cases}$$

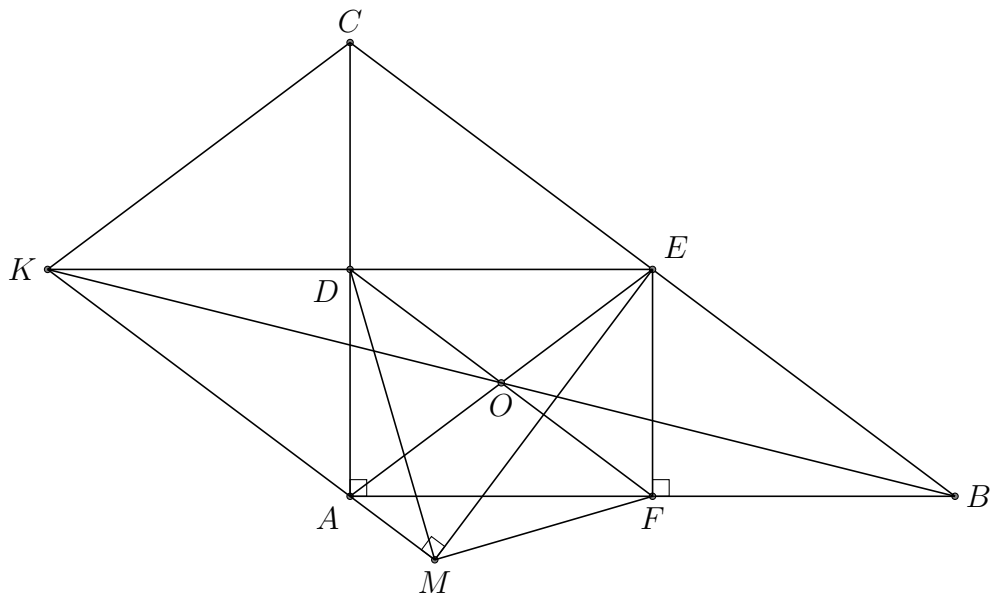
Vậy với $x = -3$ thì B nhận giá trị nguyên.

□

✎ **Bài 4 (3,5 điểm).** Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có D và E lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BC . Vẽ EF vuông góc với AB tại F .

- Chứng minh rằng $DE \parallel AB$ và tứ giác $ADEF$ là hình chữ nhật.
- Trên tia đối của tia DE lấy điểm K sao cho $DK = DE$. Chứng minh tứ giác $AECK$ là hình thoi.
- Gọi O là giao điểm của AE và DF . Chứng minh rằng O là trung điểm của AE và ba điểm B, O, K thẳng hàng.
- Vẽ EM vuông góc với AK tại M . Chứng minh rằng $\widehat{DMF} = 90^\circ$.

💬 **Lời giải.**



- a) Chứng minh rằng $DE \parallel AB$ và tứ giác $ADEF$ là hình chữ nhật.
Xét tam giác ABC , có

$$\begin{cases} D \text{ là trung điểm cạnh } AC \\ E \text{ là trung điểm cạnh } BC \end{cases} \Rightarrow DE \text{ là đường trung bình } \triangle ABC \Rightarrow DE \parallel AB.$$

Ta có

$$DE \parallel AB \Rightarrow DE \perp AC.$$

Xét tứ giác $ADEF$, có

$$\begin{cases} \widehat{EFA} = 90^\circ (EF \perp AB) \\ \widehat{FAD} = 90^\circ (\triangle ABC \text{ vuông tại } A) \\ \widehat{ADE} = 90^\circ (ED \perp AC) \end{cases} \Rightarrow ADEF \text{ là hình chữ nhật.}$$

- b) Trên tia đối của tia DE lấy điểm K sao cho $DK = DE$. Chứng minh tứ giác $AECK$ là hình thoi.

Xét tứ giác $AECK$, có

$$\begin{cases} D \text{ là trung điểm } AC \text{ (gt)} \\ D \text{ là trung điểm } EK (ED = DK) \end{cases} \Rightarrow AECK \text{ là hình bình hành.}$$

Lại có

$$DE \perp AC$$

Suy ra $AECK$ là hình thoi.

- c) Gọi O là giao điểm của AE và DF . Chứng minh rằng O là trung điểm của AE và ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Ta có $ADEF$ là hình chữ nhật; O là giao điểm của hai đường chéo AE và DF nên O là trung điểm của AE và DF .

Lại xét tứ giác $ABEK$, có

$$\begin{cases} AB \parallel EK \\ AB = EK = 2ED \end{cases} \Rightarrow ABEK \text{ là hình bình hành.}$$

Mà O là trung điểm của đường chéo AE nên O cũng là trung điểm của đường chéo BK . Do đó B, O, K thẳng hàng.

- d) Vẽ EM vuông góc với AK tại M . Chứng minh rằng $\widehat{DMF} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AFDK$, có

$$\begin{cases} AF \parallel DK \\ AF = DK = ED \end{cases} \Rightarrow AFDK \text{ là hình bình hành} \Rightarrow AK \parallel FD.$$

Mặt khác

$$EM \perp AK \Rightarrow EM \perp FD.$$

Lại có $AK \parallel FD$ mà FD đi qua trung điểm D của EK nên FD cũng đi qua trung điểm của E và M .

Ta có, FD vừa đi qua trung điểm EM vừa vuông góc với EM nên FD là đường trục đối xứng của E và M .

Suy ra $\triangle EFD$ và $\triangle MFD$ đối xứng nhau qua trục FD .

Mà $\triangle EFD$ vuông tại E suy ra $\triangle EMD$ vuông tại M hay $\widehat{DMF} = 90^\circ$.

□