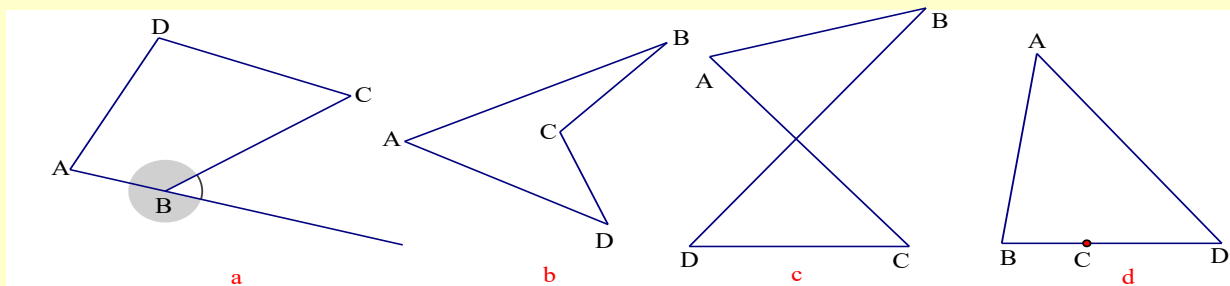


TỨ GIÁC

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Tứ giác



a) **Định nghĩa:** Tứ giác $ABCD$ là hình gồm 4 đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kỳ 2 đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên 1 đường thẳng

Ta có hình a), b), c) là tứ giác. Hình d) không là tứ giác

b) **Tứ giác lồi:** Là tứ giác luôn nằm trong 1 nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác

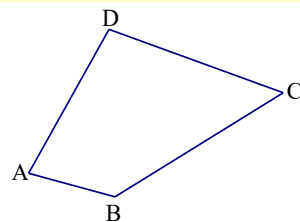
Ta có: Hình a) là tứ giác lồi. Hình b), c) không là tứ giác lồi

c) **Chú ý:** Khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi

2. Tổng các góc của 1 tứ giác

a) **Định lý:** Tổng các góc của một tứ giác bằng 360°

GT	Tứ giác $ABCD$
KL	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$



*) **Chú ý:** Để bốn góc cho trước thỏa mãn là bốn góc của một tứ giác khi bốn góc đó có tổng bằng 360°

- Bất đẳng thức đường gấp khúc: $AB + BC + CD > AD$

- Mở rộng: Tổng bốn góc ngoài ở bốn đỉnh của một tứ giác bằng 360° .

3. Góc ngoài của tứ giác: Góc kề bù với 1 góc trong của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác

B. Bài tập và các dạng toán

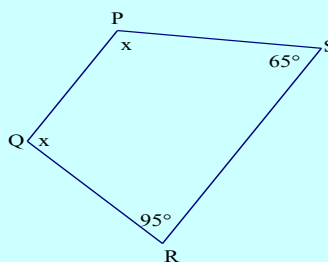
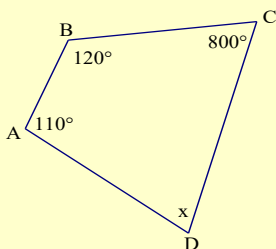
Dạng 1: Tính số đo góc trong hình vẽ của tứ giác

Cách giải

- Sử dụng định lý tổng bốn góc trong một tứ giác

- Tổng hai góc kề bù bằng 180°
- Tổng ba góc của một tam giác bằng 180°
- Trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau
- Kết hợp các kiến thức về tỷ lệ thức, tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, toán tổng hiệu,... để tính ra số đo góc.

Bài 1: Tính x trong mỗi hình vẽ sau



Lời giải

a) Xét tứ giác $ABCD$, có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow 110^\circ + 120^\circ + 80^\circ + x = 360^\circ$

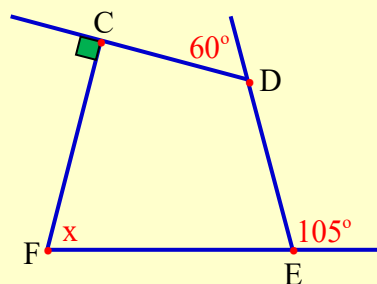
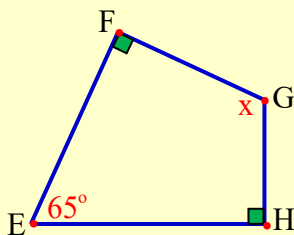
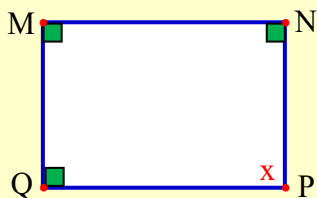
$$\Rightarrow 310^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$$

Vậy $x = 50^\circ$.

b) Xét tứ giác $MNPQ$, có: $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ \Rightarrow x + x + 95^\circ + 55^\circ \Rightarrow 2x = 210^\circ \Rightarrow x = 105^\circ$

Vậy $x = 105^\circ$.

Bài 2: Tính x trong mỗi hình vẽ sau



Lời giải

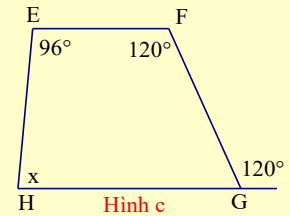
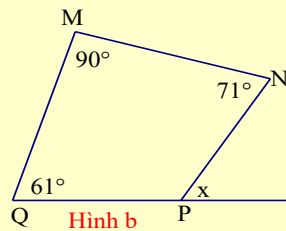
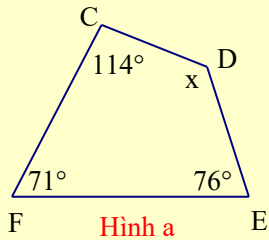
Hình a) Ta có: $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ \Rightarrow 270^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$

Hình b) Ta có: $\widehat{E} + \widehat{F} + \widehat{G} + \widehat{H} = 360^\circ \Rightarrow 65^\circ + 180^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 115^\circ$

Hình c) Ta có: $\widehat{CDE}$ kề bù với 60° nên $\widehat{CDE} = 120^\circ$. $\widehat{DEF}$ kề bù với góc 105° nên $\widehat{DEF} = 75^\circ$
 $\widehat{FCD} = 90^\circ$

Mà $\widehat{FCD} + \widehat{CDE} + \widehat{DEF} + x = 360^\circ \Rightarrow 90^\circ + 120^\circ + 75^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$.

Bài 3: Tính x trong mỗi hình vẽ sau



Lời giải

Hình a) Ta có: $\widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 360^\circ \Rightarrow 114^\circ + x + 76^\circ + 71^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 99^\circ$

Hình b) Ta có: $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ \Rightarrow 90^\circ + 71^\circ + \widehat{P} + 61^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 138^\circ$

Mà $\widehat{P}$ kề bù với góc $x \Rightarrow x = 42^\circ$

Hình c) Ta có: $\widehat{G}$ kề bù với 120° nên $\widehat{G} = 60^\circ$

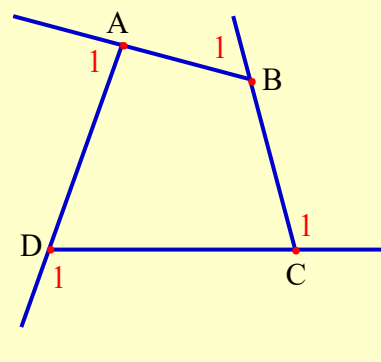
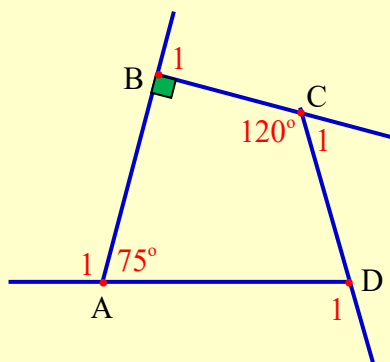
Mà $\widehat{E} + \widehat{F} + \widehat{G} + x = 360^\circ \Rightarrow 96^\circ + 120^\circ + 60^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 84^\circ$

Bài 4: Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác

a) Hãy tính các góc ngoài của tứ giác ở hình a)

b) Tính tổng các góc ngoài của tứ giác ở Hình b) (tại mỗi đỉnh của tứ giác chỉ chọn một góc ngoài): $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = ?$

c) Có nhận xét gì về tổng các góc ngoài của tứ giác?



Lời giải

a) $\widehat{B} + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{B}_1 = 90^\circ$, $\widehat{C} + \widehat{C}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{C}_1 = 60^\circ$, $\widehat{A} + \widehat{A}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{A}_1 = 105^\circ$.

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$ (định lý) $\Rightarrow \widehat{D} = 75^\circ$.

Ta có: $\widehat{D} + \widehat{D}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{D}_1 = 105^\circ$.

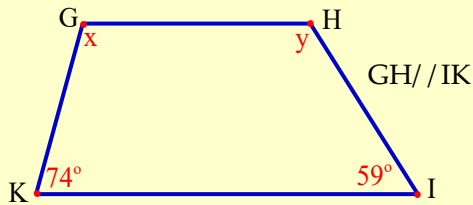
b) Ta có $\widehat{B} + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù), $\widehat{C} + \widehat{C}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù), $\widehat{D} + \widehat{D}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù), $\widehat{A} + \widehat{A}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{A}_1 + \widehat{B} + \widehat{B}_1 + \widehat{C} + \widehat{C}_1 + \widehat{D} + \widehat{D}_1 = 4.180^\circ = 720^\circ.$$

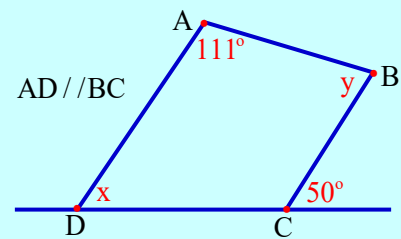
$$\text{Mà } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \text{ (định lý)} \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 360^\circ.$$

c) Nhận xét: Tổng các góc ngoài của tứ giác bằng tổng các góc trong của tứ giác và bằng 360° .

Bài 5: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau



Hình a)



Hình b)

Lời giải

Hình a) Ta có: $GH // IK$, theo tính chất một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song ta có:

$$x + 74^\circ = 180^\circ \text{ (hai góc trong cùng phía)}$$

$$\Rightarrow x = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ.$$

$$y + 59^\circ = 180^\circ \text{ (hai góc trong cùng phía)}$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 59^\circ = 121^\circ.$$

Hình b) Ta có: $AD // BC$, theo tính chất một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song ta có:

$$y + 111^\circ = 180^\circ \text{ (hai góc trong cùng phía)}$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ.$$

$$x = 50^\circ \text{ (hai góc đồng vị).}$$

Bài 6:

Cho $\diamond ABCD$ có $\hat{B} = 80^\circ, \hat{D} = 120^\circ$. Góc ngoài tại đỉnh C bằng 130° . Tính góc $\hat{A}$

Lời giải

Ta có góc ngoài tại đỉnh C có số đo bằng 130° và kề bù với $\hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 50^\circ$.

Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ (định lý) $\Rightarrow \hat{A} + 80^\circ + 50^\circ + 120^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 110^\circ$.

Dạng 2: Tính các góc của tứ giác khi biết mối quan hệ giữa các góc

Cách giải

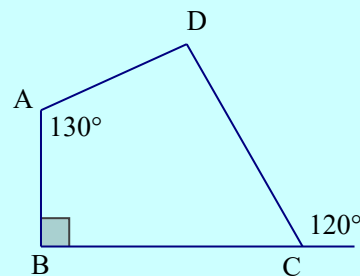
- Thay liên hệ giữa các góc vào hệ thức “Tổng 4 góc trong một tứ giác bằng 360° ”.
- Nếu tứ giác $ABCD$ biết $\hat{A}:\hat{B}:\hat{C}:\hat{D}=m:n:p:q$ (m,n,p,q là các số nguyên dương)

$$\Rightarrow \frac{\hat{A}}{m} = \frac{\hat{B}}{n} = \frac{\hat{C}}{p} = \frac{\hat{D}}{q} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{m+n+p+q} = \frac{360^\circ}{m+n+p+q} \text{ (tính chất dãy tỷ số bằng nhau)}$$

Từ đó tính được số đo các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$

Bài 1:

Cho $\diamond ABCD$ có $\hat{A} = 130^\circ, \hat{B} = 90^\circ$. Góc ngoài tại đỉnh C bằng 120° . Tính góc $\hat{D}$



Lời giải

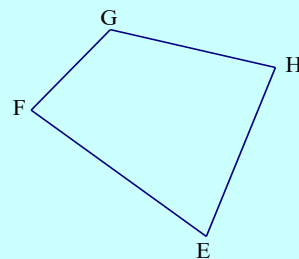
Ta có $\hat{C}_2 = 120^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 60^\circ$

Xét $\diamond ABCD$, có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 + \hat{D} = 360^\circ \Leftrightarrow 130^\circ + 90^\circ + 60^\circ + \hat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow \hat{D} = 80^\circ$$

Bài 2:

Cho $\diamond EFGH$ có $\hat{E} = 70^\circ, \hat{F} = 80^\circ$. Tính $\hat{G}, \hat{H}$, biết $\hat{G} - \hat{H} = 20^\circ$.



Lời giải

Theo đầu bài ta có: $\hat{E} = 70^\circ; \hat{F} = 80^\circ \Rightarrow \hat{G} + \hat{H} = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$ (1)

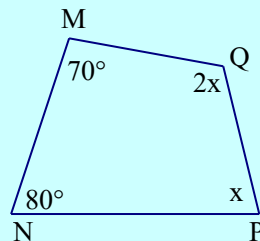
Mà $\hat{G} - \hat{H} = 20^\circ$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \hat{G} = 115^\circ; \hat{H} = 95^\circ$

Vậy $\widehat{G} = 115^\circ; \widehat{H} = 95^\circ$

Bài 3:

Cho hình vẽ, hãy tính $\widehat{P}; \widehat{Q}$



Lời giải

Áp dụng định lý tổng bốn góc trong 1 tứ giác, ta có :

$$\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ \Leftrightarrow 150^\circ + 3x = 360^\circ \Leftrightarrow 3x = 210^\circ \Leftrightarrow x = 70^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 70^\circ; \widehat{Q} = 140^\circ$$

Vậy $\widehat{P} = 70^\circ; \widehat{Q} = 140^\circ$

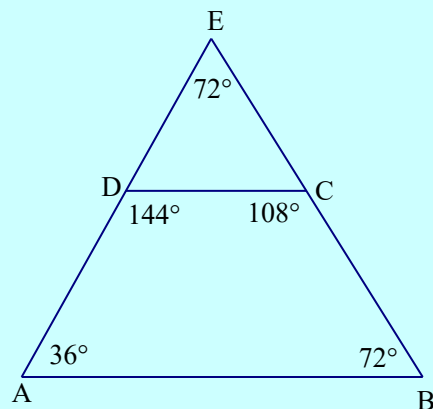
Bài 4:

Cho $\diamond ABCD$, biết $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 1 : 2 : 3 : 4$

a) Tính các góc của $\diamond ABCD$

b) Chứng minh rằng $AB \parallel CD$

c) Gọi giao điểm của AD và BC là E . Tính các góc của $\triangle CDE$



Lời giải

a) Theo đầu bài ta có: $\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{D}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{1+2+3+4} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 36^\circ; \widehat{B} = 72^\circ; \widehat{C} = 108^\circ; \widehat{D} = 144^\circ$$

b) $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$

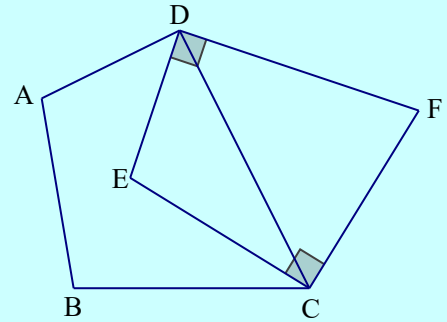
c) $\widehat{EDC} = 36^\circ; \widehat{ECD} = 72^\circ$.

Bài 5:

Cho $\diamond ABCD$, biết $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}:\widehat{D} = 4:3:2:1$

a) Tính các góc của $\diamond ABCD$

b) Các tia phân giác của góc C và D cắt nhau tại E . Các đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại F . Tính $\widehat{CED}$; $\widehat{CFD}$

**Lời giải**

a) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được: $\widehat{A} = 144^\circ$; $\widehat{B} = 108^\circ$; $\widehat{C} = 72^\circ$; $\widehat{D} = 36^\circ$

b) Ta có: $\widehat{CED} = 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\widehat{D} + \frac{1}{2}\widehat{C} \right) = 126^\circ$

Ta có: DE và DF là hai tia phân giác của hai góc kề bù nên vuông góc với nhau

$$\Rightarrow \widehat{EDF} = \widehat{ECF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DFC} = 54^\circ$$

Bài 6:

Tính các góc của $\diamond ABCD$, biết $\widehat{B} = \widehat{A} + 15^\circ$; $\widehat{C} = \widehat{B} + 30^\circ$; $\widehat{D} = 2\widehat{A} + 10^\circ$

Lời giải

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$ (định lý).

$$\text{Mà } \widehat{B} = \widehat{A} + 15^\circ, \widehat{C} = \widehat{B} + 30^\circ = \widehat{A} + 45^\circ, \widehat{D} = 2\widehat{A} + 10^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{A} + 15^\circ + \widehat{A} + 45^\circ + 2\widehat{A} + 10^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 5\widehat{A} = 290^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 58^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 73^\circ, \widehat{C} = 103^\circ, \widehat{D} = 126^\circ$$

Bài 7:

Cho $\diamond ABCD$, biết $\widehat{B} = \widehat{A} + 15^\circ$; $\widehat{C} = 3\widehat{A}$; $\widehat{D} - \widehat{C} = 25^\circ$. Tính các góc của $\diamond ABCD$

Lời giải

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$ (định lý).

$$\text{Mà } \widehat{B} = \widehat{A} + 15^\circ, \widehat{C} = 3\widehat{A}, \widehat{D} - \widehat{C} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C} + 25^\circ = 3\widehat{A} + 25^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{A} + 15^\circ + 3\widehat{A} + 3\widehat{A} + 25^\circ = 360^\circ \Rightarrow 8\widehat{A} + 40^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 55^\circ, \widehat{C} = 120^\circ, \widehat{D} = 145^\circ.$$

Bài 8:

Cho $\diamond EFGH$, biết $\widehat{G} = \widehat{E} + 10^\circ$; $\widehat{F} = \widehat{E} + 30^\circ$; $\widehat{H} = 2\widehat{G}$. Tính các góc của $\diamond EFGH$

Lời giải

Ta có: $\widehat{E} + \widehat{F} + \widehat{G} + \widehat{H} = 360^\circ$ (định lý).

$$\begin{aligned}\text{Mà } \widehat{G} &= \widehat{E} + 10^\circ, \widehat{F} = \widehat{E} + 30^\circ, \widehat{H} = 2\widehat{G} = 2\widehat{E} + 20^\circ \Rightarrow \widehat{E} + \widehat{E} + 30^\circ + \widehat{E} + 10^\circ + 2\widehat{E} + 20^\circ = 360^\circ \\ \Rightarrow 5\widehat{E} + 60^\circ &= 360^\circ \Rightarrow \widehat{E} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{G} = 70^\circ, \widehat{F} = 90^\circ, \widehat{H} = 140^\circ.\end{aligned}$$

Bài 9:

Cho $\diamond MNPQ$, biết $\widehat{P} = \widehat{Q} + 5^\circ$; $\widehat{M} = \widehat{Q} + 45^\circ$; $\widehat{N} = 2\widehat{Q} - 40^\circ$. Tính các góc của $\diamond MNPQ$

Lời giải

Ta có: $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ$ (định lý).

$$\begin{aligned}\text{Mà } \widehat{P} &= \widehat{Q} + 5^\circ, \widehat{M} = \widehat{Q} + 45^\circ, \widehat{N} = 2\widehat{Q} - 40^\circ \Rightarrow \widehat{Q} + 45^\circ + 2\widehat{Q} - 40^\circ + \widehat{Q} + 5^\circ + \widehat{Q} = 360^\circ \\ \Rightarrow 5\widehat{Q} + 10^\circ &= 360^\circ \Rightarrow \widehat{Q} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 75^\circ, \widehat{M} = 115^\circ, \widehat{N} = 100^\circ.\end{aligned}$$

Bài 10:

Cho $\diamond ABCD$, có $\widehat{A} = 70^\circ$; $\widehat{B} = 80^\circ$; $\widehat{C} - \widehat{D} = 20^\circ$. Tính các góc $\widehat{C}$; $\widehat{D}$

Lời giải

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$ (định lý).

$$\begin{aligned}\text{Mà } \widehat{A} &= 70^\circ, \widehat{B} = 80^\circ, \widehat{C} - \widehat{D} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D} + 20^\circ \Rightarrow 70^\circ + 80^\circ + \widehat{D} + 20^\circ + \widehat{D} = 360^\circ \\ \Rightarrow 2\widehat{D} + 170^\circ &= 360^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 95^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 115^\circ.\end{aligned}$$

Bài 11:

Cho $\diamond ABCD$, biết $\widehat{B} + \widehat{C} = 200^\circ$; $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$; $\widehat{C} + \widehat{D} = 120^\circ$. Tính số đo các góc của tứ giác $\diamond ABCD$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $2\widehat{B} + 2\widehat{C} + 2\widehat{D} = 200^\circ + 180^\circ + 120^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 250^\circ$

$$\text{Vì: } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 110^\circ$$

$$\widehat{B} = 250^\circ - (\widehat{C} + \widehat{D}) = 250^\circ - 120^\circ = 130^\circ$$

$$\widehat{C} = 200^\circ - \widehat{B} = 200^\circ - 130^\circ = 70^\circ$$

$$\widehat{D} = 120^\circ - \widehat{C} = 120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$$

Dạng 3: Tính độ dài các cạnh của tứ giác

Cách giải: Ta sử dụng các kiến thức sau

- Sử dụng định lý pytago
- Sử dụng công thức tính chu vi của tam giác, tứ giác

Bài 1:

Tính độ dài các cạnh a, b, c, d của một tứ giác có chu vi bằng 76cm và $a:b:c:d = 2:5:4:8$

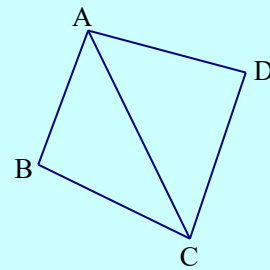
Lời giải

Theo đầu bài ta có: $a:b:c:d = 2:5:4:8 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = \frac{d}{8} = \frac{a+b+c+d}{2+5+4+8} = \frac{76}{19} = 4$

$\Rightarrow a = 8; b = 20; c = 16; d = 32.$

Bài 2:

Cho hình vẽ, biết $\triangle ABC$ có chu vi bằng 25cm . Tam giác ADC có chu vi bằng 27cm . Tứ giác $ABCD$ có chu vi bằng 32cm . Tính AC



Lời giải

Chu vi $\triangle ABC = 25 \Rightarrow AB + BC + CA = 25(1)$

Chu vi $\triangle ADC = 27 \Rightarrow AD + DC + CA = 27(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow AB + BC + CA + AD + DC + CA = 52 \Leftrightarrow 32 + 2AC = 52 \Rightarrow AC = 10(\text{cm})$

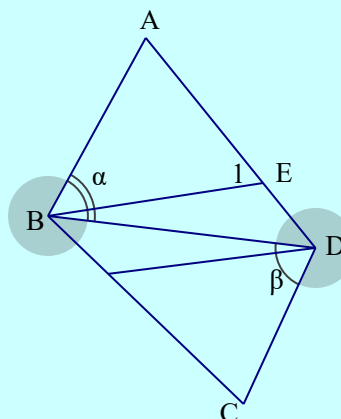
Dạng 4: Dạng toán chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau, song song, vuông góc, hoặc trung điểm của các đoạn thẳng

Cách giải: Ta cần chú ý tới các kiến thức sau

- Dựa vào các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía, ...
- Hai góc phụ nhau có tổng số đo bằng 90°
- Đôi khi có thể chia tứ giác thành các tam giác để sử dụng bất đẳng thức tam giác.

Bài 1:

Cho $\diamond ABCD$ có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$, phân giác trong của $\widehat{ABC}$ cắt AD tại E . Phân giác trong của $\widehat{ADC}$ cắt BC tại F . Chứng minh $BE \parallel DF$



Lời giải

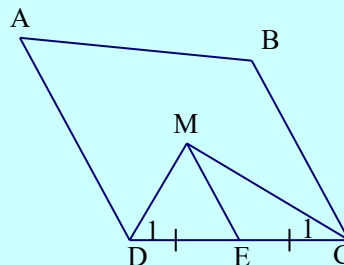
+) Ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$ (1)

+) Xét $\triangle ABE$, có $\alpha + \widehat{E_1} = 90^\circ$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \beta = \widehat{E_1} \Rightarrow BE \parallel DF$

Bài 2:

Cho $\diamond ABCD$ có $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 180^\circ$. Phân giác trong của các góc $\widehat{BCD}, \widehat{CAD}$ cắt nhau tại E , biết $CD = 2DE$. Chứng minh rằng $\widehat{ADC} = 2\widehat{BCD}$



Lời giải

Theo đầu bài ta có:

$$\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^\circ$$

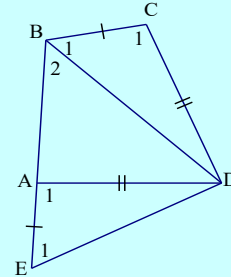
Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow EM = MC = MD = \frac{CD}{2} \Rightarrow \triangle DEM$ đều

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 2\widehat{C}.$$

Bài 3:

Cho $\diamond ABCD$ có $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$; $DA = DC$.

Chứng minh rằng BD là phân giác của $\widehat{ABC}$



Lời giải

Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = BC$

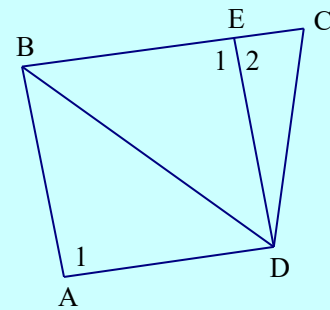
$$\Rightarrow \triangle BCD = \triangle EAD (cgc) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{E_1} \\ DB = DE \end{cases} (1) \Rightarrow \triangle BED \text{ cân tại } D \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{B_2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}.$$

Bài 4:

Cho $\diamond ABCD$ có BD là phân giác của $\widehat{ABC}$,
 $AD = CD$, $AB < AC$. Chứng minh rằng

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$



Lời giải

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$

$$\triangle BED = \triangle BAD (cgc) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{E_1} \quad (1) \\ AD = ED \Rightarrow ED = CD \Rightarrow \triangle EDC \text{ cân tại } D \Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{C_1} \quad (2). \\ CD = AD \end{cases}$$

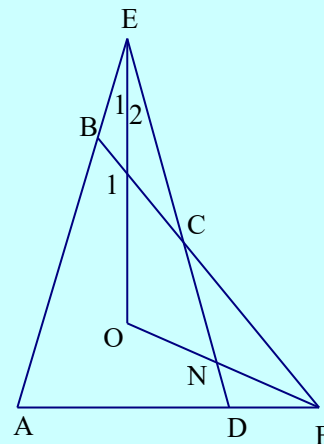
$$\text{Từ (1)(2)} \quad \widehat{A_1} + \widehat{C_1} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 180^\circ.$$

Bài 5:

Cho $\diamond ABCD$, biết $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}:\widehat{D}=5:8:13:10$

a) Tính các góc của $\diamond ABCD$

b) $AB \cap CD = E; AD \cap BC = F$. Phân giác của $\widehat{AED}$ và $\widehat{AFB}$ cắt nhau tại O , phân giác của $\widehat{AFB}$ cắt CD và AB tại M và N . Chứng minh rằng O là trung điểm của MN



Lời giải

a) Ta tính được $\widehat{A} = 50^\circ; \widehat{B} = 80^\circ; \widehat{C} = 130^\circ; \widehat{D} = 100^\circ$

b) $\widehat{E} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{D}; \widehat{F} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 50^\circ; \widehat{EMN} = 180^\circ - \widehat{F}_1 - \widehat{B}_1 = 75^\circ$

$\widehat{ENM} = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$

$\Rightarrow \triangle EMN$ cân tại $E \Rightarrow OM = ON \Rightarrow đpcm$

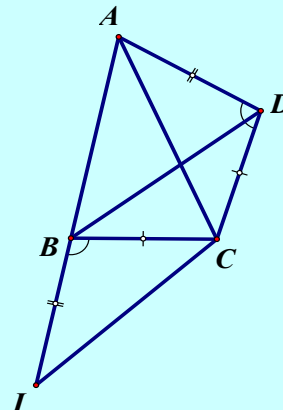
Dạng 5 : Một số bài toán chứng minh, tính số đo góc liên quan đến phân giác của một góc trong tứ giác

Ta chú ý :

- Tia phân giác của một góc sẽ chia góc thành hai góc bằng nhau.
- Tia phân giác trong và phân giác ngoài của một góc sẽ vuông góc với nhau.

Bài 1:

Cho tứ giác lồi $\diamond ABCD$, có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$
 $CB = CD$. Chứng minh AC là tia phân giác của $\widehat{BAD}$



Lời giải

- Trên tia đối tia BA lấy điểm I sao cho $BI = AD$

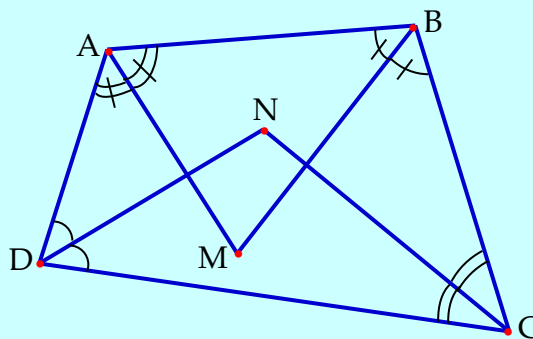
Ta có: $\widehat{ADC} = \widehat{IBC}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$$AD = BI; CD = BC \Rightarrow \triangle ADC = \triangle IBC \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BIC}; AC = IC$$

$\triangle ACI$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BIC} = \widehat{DAC}$. Vậy AC là phân giác trong góc $\widehat{BAD}$.

Bài 2:

Cho tứ giác $\diamond ABCD$, các tia phân giác của góc A và B cắt nhau tại M . Các tia phân giác góc C và D cắt nhau tại N . Chứng minh rằng: $\widehat{AMB} + \widehat{CND} = 180^\circ$



Lời giải

Xét $\triangle CND$ có $\widehat{CND} + \widehat{CDN} + \widehat{DCN} = 180^\circ$ (định lý).

Xét $\triangle AMB$ có $\widehat{AMB} + \widehat{ABM} + \widehat{BAM} = 180^\circ$ (định lý).

Do đó: $\widehat{CND} + \widehat{CDN} + \widehat{DCN} + \widehat{AMB} + \widehat{ABM} + \widehat{BAM} = 360^\circ$

Mà $\widehat{ABM} = \frac{\widehat{B}}{2}$ (vì BM là tia phân giác của $\widehat{B}$)

$\widehat{BAM} = \frac{\widehat{A}}{2}$ (vì AM là tia phân giác của $\widehat{A}$), $\widehat{DCN} = \frac{\widehat{C}}{2}$ (vì CN là tia phân giác của $\widehat{C}$), $\widehat{CDN} = \frac{\widehat{D}}{2}$

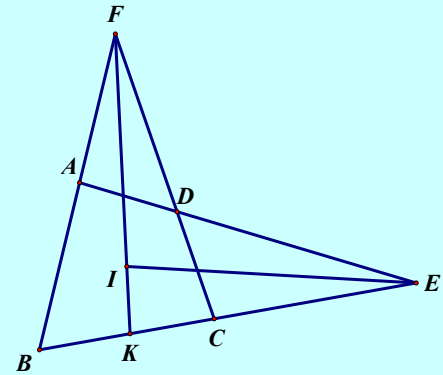
(vì DN là tia phân giác của $\widehat{D}$).

$$\Rightarrow \widehat{CND} + \widehat{AMB} + \frac{\widehat{D}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{CND} + \widehat{AMB} = 360^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{2}$$

Mà trong tứ giác ABCD có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$ (định lý) $\Rightarrow \widehat{CND} + \widehat{AMB} = 180^\circ$ (đpcm).

Bài 3:

Cho tứ giác lồi ABCD, hai cạnh AD và BC cắt nhau tại E, hai cạnh DC và AB cắt nhau tại F. Kẻ tia phân giác của hai góc CDE và BFC cắt nhau tại I. Tính góc EIF theo các góc trong ABCD



Lời giải

FI cắt BC tại K $\Rightarrow K \in$ đoạn BC $\Rightarrow \widehat{EIF} = \widehat{EKI} + \widehat{IEK}$ ($\widehat{EIF}$ là góc ngoài của $\triangle IKE$)
 $= \widehat{B} + \widehat{BFK} + \widehat{IEK}$ ($\widehat{CKF}$ là góc ngoài của $\triangle FBK$)

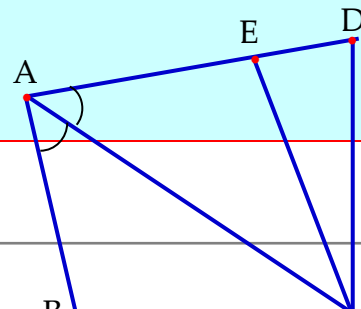
$$\widehat{BFC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) \Rightarrow \widehat{BFK} = 90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$$

$$\widehat{AEB} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \Rightarrow \widehat{IEK} = 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$$

$$\text{Vậy } \widehat{EIF} = \widehat{B} + 90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} + 90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{A}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2}$$

Bài 4:

Cho tứ giác ABCD, có AC là tia phân giác của $\widehat{A}$, $BC = CD$, $AB < CD$



- a) Lấy điểm E trên cạnh AD sao cho $AE = AB$. Chứng minh rằng: $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$
- b) Chứng minh: $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$

Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AEC$ có:

$$AB = AE \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{EAC} \text{ (vì } AC \text{ là tia phân giác của góc } A).$$

AC chung.

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle AEC \text{ (c - g - c)}. \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEC} \text{ (đpcm)} \quad (1)$$

b) Ta có $\triangle ABC = \triangle AEC$ (cmt)

$$\Rightarrow CB = CE, \text{ mà } CB = CD \text{ (giả thiết)} \Rightarrow CE = CD$$

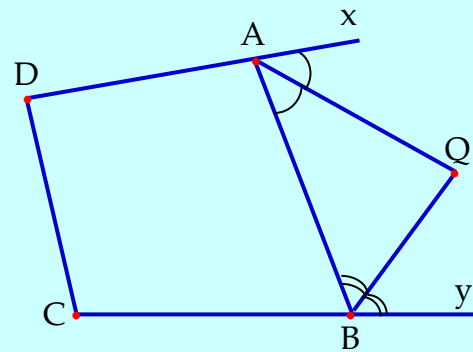
$$\Rightarrow \triangle CED \text{ cân tại } C \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CDE} \text{ hay } \widehat{CED} = \widehat{D} \quad (2)$$

Mà $\widehat{AEC} + \widehat{CED} = 180^\circ$ (hai góc kề bù), nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$

Bài 5:

Cho tứ giác $ABCD$, phân giác ngoài của góc A và B cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng:

$$\widehat{AQB} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$$



Lời giải

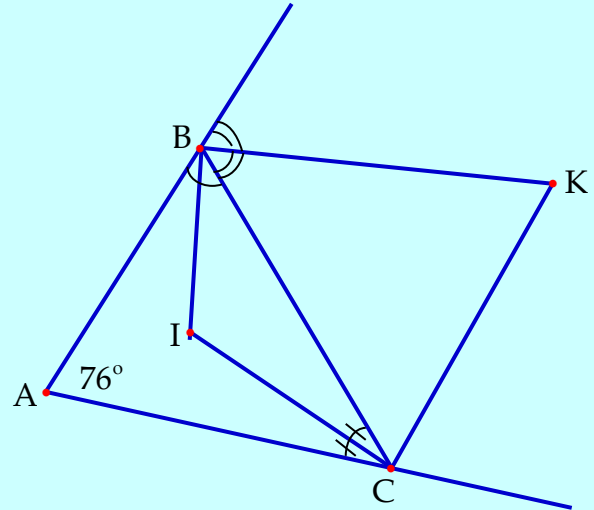
Ta có AQ là tia phân giác của $\widehat{xAB}$ là góc ngoài của $\widehat{A} \Rightarrow \widehat{QAB} = \frac{\widehat{xAB}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$

Ta có BQ là tia phân giác của $\widehat{yBA}$ là góc ngoài của $\widehat{B} \Rightarrow \widehat{QBA} = \frac{\widehat{yBA}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}$

Trong tam giác ABQ có: $\widehat{AQB} = 180^\circ - \widehat{QAB} - \widehat{QBA} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$

Bài 6:

Tam giác ABC có $\hat{A} = 76^\circ$, các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I, các tia phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau tại K. Tính các góc của tứ giác BICK.



Lời giải

Ta có BI là tia phân giác của góc ABC, BK là tia phân giác góc ngoài đỉnh B

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{IBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \\ IB \perp BK \Rightarrow \widehat{IBK} = 90^\circ \end{cases} \quad (1)$$

Ta có CI là tia phân giác của góc ACB, CK là tia phân giác góc ngoài đỉnh C

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{ICB} = \frac{\widehat{ACB}}{2} \\ IC \perp CK \Rightarrow \widehat{ICK} = 90^\circ \end{cases} \quad (1)$$

Trong tam giác BIC có:

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^\circ - \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ + \hat{A}}{2}$$

Mà $\hat{A} = 76^\circ$, nên $\widehat{BIC} = 128^\circ$

Trong tứ giác IBKC có: $\widehat{BIC} + \widehat{ICK} + \widehat{IBK} + \widehat{BKC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BKC} = 52^\circ$

Bài 7:

Cho tứ giác lồi $ABCD$, biết có $\hat{A} = 90^\circ$,
 $\hat{D} = 90^\circ$; góc B và C khác nhau.

a) Chứng minh $AB \parallel DC$.

b) Chứng tỏ trong hai góc B và C phải có một góc nhọn.

c) Khi góc C nhọn. Chứng minh $AB < DC$.

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{D} = 90^\circ$ nên: $AB \perp AD$ và $DC \perp AD$

$\Rightarrow AB \parallel DC$ (từ vuông góc đến song song).

b) Xét tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ (định lý)

Mà $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{D} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (*)

Nếu $\hat{B}$, $\hat{C}$ đều là các góc tù, tức là $\hat{B} > 90^\circ$, $\hat{C} > 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$ (mâu thuẫn với (*))

Nếu $\hat{B}$, $\hat{C}$ đều là các góc nhọn, tức là $\hat{B} < 90^\circ$, $\hat{C} < 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$ (mâu thuẫn với (*))

Vậy trong hai góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ phải có một góc nhọn.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tổng số đo bốn góc của một tứ giác bằng

a) 90^0

b) 180^0

c) 270^0

d) 360^0

Chọn đáp án A

Giải thích: Ta có:

Áp dụng định lí Pytago vào tam giác ABC vuông tại A , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $= 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow BC = 15(cm)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BC.BH \Leftrightarrow 9^2 = 15BH \Rightarrow BH = \frac{81}{15} = 5,4(cm)$$

Ta có: $CH = BC - BH = 15 - 5,4 = 9,6(cm)$.

Câu 2: Tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} = 78^0$, $\hat{B} = 52^0$, $\hat{D} = 154^0$. Số đo của góc C là:

a) 75^0

b) 128^0

c) 76^0

d) 26^0

Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OEF vuông tại O , đường cao OI , ta có:

Câu 3: Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} + \hat{B} = 140^0$. Tổng $\hat{C} + \hat{D}$ bằng bao nhiêu

a) 220^0

b) 200^0

c) 160^0

d) 150^0

Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OEF vuông tại O , đường cao OI , ta có:

Câu 4: Chọn câu đúng trong các câu sau

- a) Tứ giác $ABCD$ có bốn góc đều là góc nhọn
- b) Tứ giác $ABCD$ có bốn góc đều là góc tù
- c) Tứ giác $ABCD$ có 2 góc vuông và 2 góc tù
- d) Tứ giác $ABCD$ có bốn góc đều là góc vuông

Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

Câu 5: Cho $\diamond ABCD$ biết $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 110^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$. Hỏi số đo góc ngoài tại đỉnh D bằng bao nhiêu

- a) 150°
- b) 130°
- c) 120°
- d) 50°

Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

Câu 6: Các số đo nào chỉ bốn góc của một tứ giác

- a) $80^\circ; 90^\circ; 110^\circ; 90^\circ$
- b) $120^\circ; 100^\circ; 60^\circ; 80^\circ$
- c) $75^\circ; 75^\circ; 40^\circ; 140^\circ$
- d) $86^\circ; 70^\circ; 80^\circ; 90^\circ$

Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

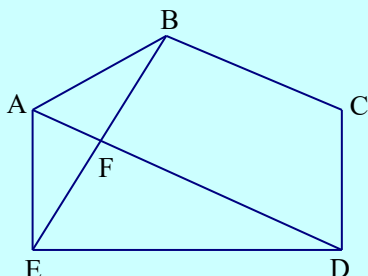
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

Câu 7: Cho $\diamond ABCD$ biết $\hat{B} = 50^\circ$ và góc A gấp đôi góc B , góc C gấp đôi góc D . Số đo các góc của tứ giác $ABCD$ là:

- a) $\hat{A} = 100^\circ; \hat{B} = 50^\circ; \hat{C} = 140^\circ; \hat{D} = 70^\circ$
- b) $\hat{A} = 90^\circ; \hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 140^\circ; \hat{D} = 70^\circ$
- c) $\hat{A} = 80^\circ; \hat{B} = 70^\circ; \hat{C} = 140^\circ; \hat{D} = 70^\circ$
- d) $\hat{A} = 80^\circ; \hat{B} = 50^\circ; \hat{C} = 160^\circ; \hat{D} = 70^\circ$

Chọn đáp án D

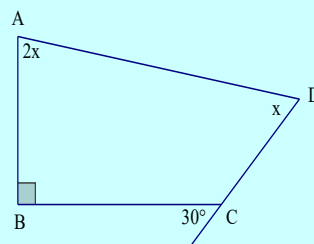
Giải thích: Ta có:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông			
Câu 8: Số đo các góc của $\diamond ABCD$ tỉ lệ: $A:B:C:D=4:3:2:1$. Số đo các góc theo thứ tự đó là:			
a) $120^0;90^0;60^0;30^0$		b) $140^0;105^0;70^0;35^0$	
c) $140^0;105^0;70^0;40^0$		d) $140^0;108^0;72^0;36^0$	
Chọn đáp án D			
Giải thích: Ta có: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông			
Câu 9: Một tứ giác có nhiều nhất			
a) 3 góc nhọn		b) 4 góc nhọn	
c) 2 góc nhọn		d) 1 góc nhọn	
Chọn đáp án D			
Giải thích: Ta có: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông			
Câu 10: Hình vẽ bên khẳng định nào sau đây là sai			
a) $ABCD$ là tứ giác lồi			
b) $ABED$ là tứ giác lồi			
c) $BCDF$ là tứ giác lồi			
d) $BCDE$ là tứ giác lồi			
Chọn đáp án D			
Giải thích: Ta có: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông			
Câu 11: Cho hình vẽ bên, chọn giá trị của x			
a) $x=80^0$	b) $x=70^0$	c) $x=40^0$	d) $x=60^0$

Chọn đáp án D

Giải thích: Ta có:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông



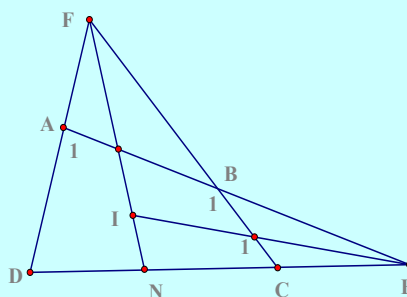
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau

Cho tứ giác $ABCD$, AB cắt CD tại E , BC cắt AD tại F . Các tia phân giác của góc E và F cắt nhau tại I . Chứng minh

a) $\widehat{EIF} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ADC}}{2}$

b. Nếu $\widehat{BAD} = 130^\circ$ và $\widehat{BCD} = 50^\circ$ thì $IE \perp IF$



Lời giải

a. Gọi N là giao điểm của IF và CD

Theo định lý góc ngoài của tam giác ta có

$$\Delta NIE : \widehat{FIE} = \widehat{FNE} + \frac{\widehat{E}}{2}, \quad \Delta DNF : \widehat{FNE} = \widehat{D} + \frac{\widehat{E}}{2}$$

Vậy $\widehat{EIF} = \widehat{D} + \frac{\widehat{E} + \widehat{F}}{2} \quad (1)$

Xét ΔADE có : $\widehat{E} = 180^\circ - (\widehat{D} + \widehat{A}_1)$. Xét ΔDFC có : $\widehat{F} = 180^\circ - (\widehat{D} + \widehat{C}_1)$

$$\Rightarrow \widehat{E} + \widehat{F} = 360^\circ - (2\widehat{D} + \widehat{A}_1 + \widehat{C}_1) = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D} - (2\widehat{D} + \widehat{A}_1 + \widehat{C}_1) = \widehat{B}_1 - \widehat{D}$$

Thay vào (1) ta được : $\widehat{EIF} = \widehat{D} + \frac{\widehat{B}_1 - \widehat{D}}{2} = \frac{\widehat{D} + \widehat{B}_1}{2} \quad (dpcm)$

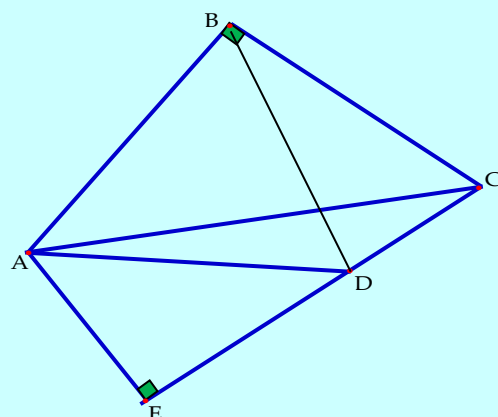
b. Áp dụng câu a ta được điều cần chứng minh.

Bài 2: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau

Cho tứ giác $ABCD$, biết $AB = AD$; $\widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{D} = 135^\circ$.

a) Tính góc C .

b) Từ A ta kẻ AE vuông góc với đường thẳng CD . Tính các góc của tam giác AEC .



Lời giải

a) Trong tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ (định lý).

Mà $\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{D} = 135^\circ$

$$\Rightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{C} + 135^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{C} = 75^\circ.$$

b) Ta có $AB = AD$ và $\hat{A} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều

Mà $\hat{D} = \widehat{ADC} = 135^\circ$, nên $\widehat{BDC} = 75^\circ$

Mà $\hat{C} = 75^\circ$, nên tam giác BDC cân tại B , suy ra $BD = BC$.

Do đó $BA = BC$, mà $\hat{B} = 90^\circ$ nên tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 45^\circ$

Trong tứ giác $ABCE$ có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{E} = 360^\circ$ (định lý),

Mà $\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{E} = 90^\circ$ (vì $AE \perp CD$ tại E), $\widehat{BCD} = \hat{C} = 75^\circ$ nên $\widehat{BAE} = 105^\circ$.

Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{CAE} = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.

Mặt khác $\triangle AEC$ có $\hat{E} = 90^\circ$ (vì $AE \perp CD$ tại E), nên $\widehat{ECA} = 30^\circ$

Bài 3: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau

Tính các góc của tứ giác $ABEF$ biết

$$\hat{A} : \hat{B} : \hat{E} : \hat{F} = 1 : 3 : 4 : 7.$$

Lời giải

$$\text{a có: } \hat{A} : \hat{B} : \hat{E} : \hat{F} = 1 : 3 : 4 : 7 \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{E}}{4} = \frac{\hat{F}}{7}.$$

Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{E} + \hat{F} = 360^\circ$ (định lý) và theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

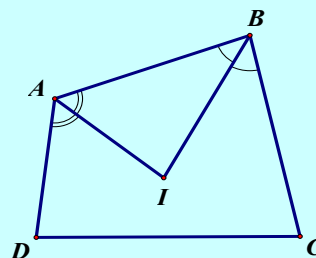
$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{E}}{4} = \frac{\hat{F}}{7} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{E} + \hat{F}}{1 + 3 + 4 + 7} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$$

Khi đó: $\hat{A} = 24^\circ$, $\hat{B} = 3.24^\circ = 72^\circ$, $\hat{E} = 4.24^\circ = 96^\circ$, $\hat{F} = 7.24^\circ = 168^\circ$.

Bài 4: Tính x, y trong mỗi hình vẽ sau

Tính các góc của tứ giác $ABCD$ biết

$$\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} : \hat{D} = 1 : 2 : 4 : 5.$$



Lời giải

Ta có: $\widehat{IAB} = \frac{\widehat{A}}{2}$ (vì AI là tia phân giác của $\widehat{A}$)

$\widehat{IBA} = \frac{\widehat{B}}{2}$ (vì BI là tia phân giác của $\widehat{B}$)

Trong tam giác ABI : $\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$.

HÌNH THANG

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

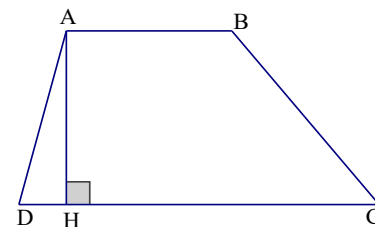
$\diamond ABCD$ là hình thang (đáy AB, CD) $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ là } \diamond \\ AB \parallel CD \end{cases}$

+) AB : Đáy nhỏ

+) CD : Đáy lớn

+) AD, BC : Cạnh bên

+) AH : Đường cao



Nhận xét:

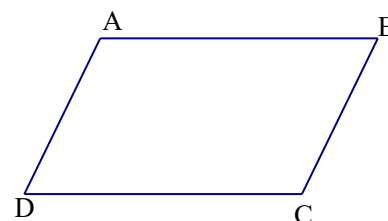
- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau và hai cạnh đáy cũng bằng nhau

$\Rightarrow$ hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) nếu có $AD \parallel BC$

Thì $\Rightarrow AD = BC; AB = CD$

- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau

$\Rightarrow$ hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) nếu có $AB = CD \Rightarrow AD \parallel BC; AD = BC$

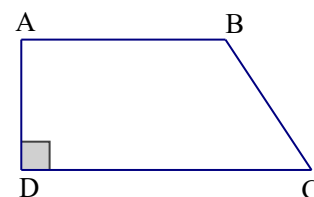


2. Hình thang vuông:

a) Định nghĩa: Hình thang vuông là hình thang có một cạnh bên vuông góc với đáy

b) Dấu hiệu nhận biết: Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông

$ABCD$ là hình thang và $\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ là hình thang vuông.



B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Tính số đo góc, tính độ dài cạnh của hình thang

Cách giải: Sử dụng tính chất hai đường thẳng song song và tổng bốn góc của một tứ giác. Kết hợp các kiến thức về tính chất dãy tỉ số bằng nhau, toán tổng hiệu..... để tính ra số đo các góc.

Bài 1:

Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{A} - \hat{D} = 40^\circ$; $\hat{A} = 2\hat{C}$. Tính các góc của hình thang

Lời giải

$$\text{Ta có: } \diamond ABCD \text{ là hình thang} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} - \hat{D} = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 110^\circ \\ \hat{D} = 70^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 55^\circ \\ \hat{B} = 125^\circ \end{cases}$$

Bài 2:

Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{A} - \hat{D} = 20^\circ$; $\hat{B} = 2\hat{C}$. Tính các góc của hình thang

Lời giải

$$\text{Ta có: } \diamond ABCD \text{ là hình thang} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} - \hat{D} = 20^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 100^\circ \\ \hat{D} = 80^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 60^\circ \\ \hat{B} = 120^\circ \end{cases}$$

Bài 3:

Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{D} = 60^\circ$

a) Tính $\hat{A}$

b) Biết $\frac{\hat{B}}{\hat{D}} = \frac{4}{5}$. Tính $\hat{B}, \hat{C}$

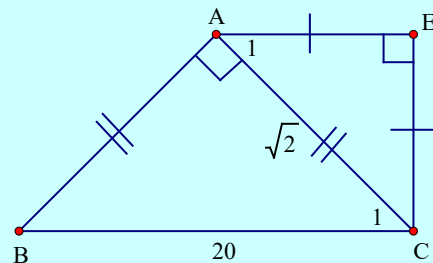
Lời giải

a) Ta có $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$

b) Ta có: $\frac{\hat{B}}{\hat{D}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \hat{B} = \frac{4}{5}\hat{D} = 48^\circ \Rightarrow \hat{C} = 132^\circ$

Bài 4:

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , $BC = 20\text{cm}$. Vẽ tam giác ACE vuông cân tại E (E và B khác phía với C). Chứng minh rằng tứ giác $AECB$ là hình thang vuông, tính các góc và các cạnh của hình thang.



Lời giải

Ta có $\hat{A}_1, \hat{C}_1$ mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow \diamond AECB$ là hình thang

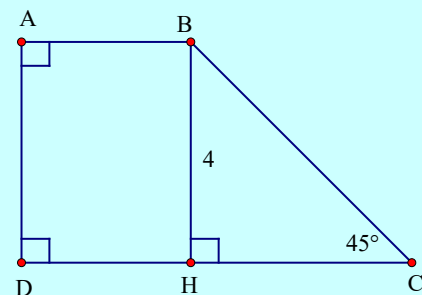
Lại có $\hat{E} = 90^\circ \Rightarrow \diamond AECB$ là hình thang vuông

+) Đặt $AB = AC = x \Rightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{cm} (\text{pytago})$

+) Đặt $AE = EC = y \Rightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow y = 1 \text{cm} (\text{pytago})$

Bài 5:

Hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, \hat{C} = 45^\circ$, biết đường cao $AD = 4 \text{cm}, AB + CD = 10 \text{cm}$. Tính độ dài hai đáy và AC, BC



Lời giải

Xét hình thang $ABHD$, có $AD \parallel BH \Rightarrow AD = BH; AB = DH$

(Hình thang có hai cạnh bên song song)

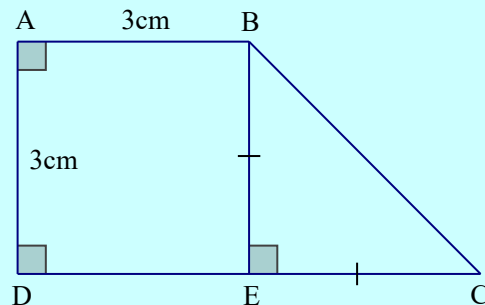
Xét $\triangle BHC (\hat{C} = 45^\circ) \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \triangle BHC$ cân tại $H \Rightarrow BH = CH$

$AB + CD = 10 \Rightarrow AB + DH + HC = 10 \Rightarrow DH = 3 \text{cm} \Rightarrow CD = 7 \text{cm}, AB = 3 \text{cm}$

Áp dụng định lý Pytago ta tính được AC và BC

Bài 6:

Hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 3 \text{cm}, DC = 6 \text{cm}$. Tính $\hat{B}, \hat{C}$ của hình thang



Lời giải

Kẻ $BE \perp CD$ thì $AD \parallel BE$ do cùng vuông góc với CD nên hình thang $ABED$ có hai cạnh bên song song

Áp dụng nhận xét về hình thang có hai cạnh bên song song vào hình thang $ABED$ và giả thiết ta được $AD = BE = 3 \text{cm}; DE = AB = 3 \text{cm}$, do đó $EC = DC - DE = 6 - 3 = 3 \text{cm}$

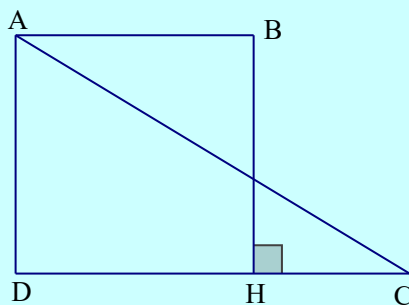
Suy ra $\triangle BEC$ vuông cân tại E nên $\hat{C} = 45^\circ$

Do đó góc B và C là hai góc trong cùng phía của $AB \parallel DC$ nên chúng bù nhau

$$\text{Hay } \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Bài 7:

Hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$,
 $AB = 9\text{cm}$, $AC = 17\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh bên



Lời giải

Tam giác ADC vuông tại D , theo định lý Pythagore ta có: $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$$\Rightarrow AD^2 = AC^2 - DC^2 = 17^2 - 15^2 = 64 = 8^2. \text{ Vậy } AD = 8\text{cm}$$

Kẻ $BH \perp CD$. Hình thang $ABHD$ có $AD \parallel BH$, nên: $BH = AD = 8\text{cm}$, $DH = AB = 9\text{cm}$

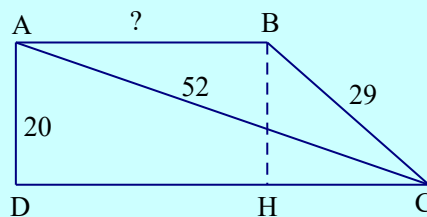
$$\Rightarrow HC = 15 - 9 = 6\text{cm}$$

Tam giác BHC vuông tại H , theo định lý Pythagore ta có: $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 8^2 + 6^2 = 10^2$

$$\text{Vậy } BC = 10\text{cm}$$

Bài 8:

Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$,
 $AD = 20\text{cm}$, $AC = 52\text{cm}$, $BC = 29\text{cm}$. Tính độ dài AB



Lời giải

Vẽ $BH \perp CD$ ta được: $AB = DH$; $BH = AD = 20$

$$\text{Xét } \triangle BHC \text{ vuông tại } H \text{ có: } HC^2 = BC^2 - BH^2 = 29^2 - 20^2 = 441 \Rightarrow HC = 21$$

$$\text{Xét } \triangle ADC \text{ vuông tại } D \text{ có: } CD^2 = AC^2 - AD^2 = 52^2 - 20^2 = 2304 \Rightarrow CD = 48$$

$$\text{Do đó } DH = CD - HC = 48 - 21 = 27 \Rightarrow AB = 27$$

*) Nhận xét: Bài toán này đã vẽ thêm đường cao BH của hình thang. Đó là một cách vẽ hình phụ thường dùng khi giải toán về hình thang.

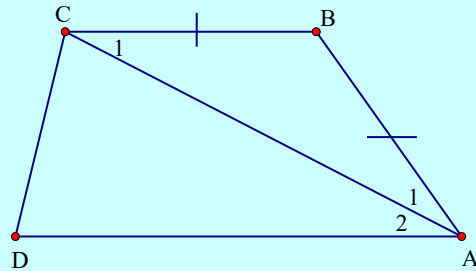
Dạng 2: Dạng toán chứng minh

Cách giải:

- Chứng minh 1 tứ giác là hình thang, hình thang vuông (định nghĩa)
- Bất đẳng thức độ dài (bất đẳng thức tam giác)
- 3 điểm thẳng hàng (Tiên đề Ôclit, cộng góc,...)
- Tia phân giác của góc

Bài 1:

Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$ và AC là phân giác của góc A . Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang

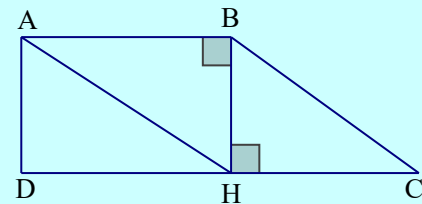


Lời giải

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}; \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{C_1} \Rightarrow AD // BC \Rightarrow \diamond ABCD$ là hình thang.

Bài 2:

Cho hình thang $ABCD$, đáy $AB = 40cm, CD = 80cm, BC = 50cm, AD = 30cm$.
Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang vuông



Lời giải

Gọi H là trung điểm của CD . Ta có $DH = CH = 40cm$

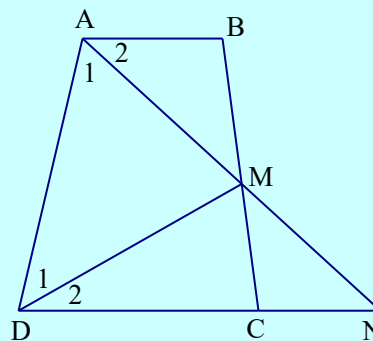
Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CBH$ có:
$$\begin{cases} AB = CH = 40cm \\ \widehat{ABH} = \widehat{CHB} (slt) \Rightarrow \triangle ABH = \triangle CHB (cgc) \Rightarrow AH = CB = 50cm \\ BH = HC \end{cases}$$

Tam giác ADH có: $AD^2 + DH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2 = AH^2 \Rightarrow \triangle ADH$ vuông tại D

Vậy hình thang $ABCD$ là hình thang vuông.

Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), các tia phân giác của góc A , góc D cắt nhau tại M thuộc cạnh BC . Cho biết $AD = 7\text{cm}$. Chứng minh rằng một trong hai đáy của hình thang có độ dài nhỏ hơn 4cm .



Lời giải

Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{N}$ (so le trong)

Mặt khác $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N} \Rightarrow \triangle DAN$ cân tại $D \Rightarrow DA = DN$ (1)

Xét $\triangle DAN$ có $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên DM đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow MA = MN$

Ta có: $\triangle ABM = \triangle NCM$ (gcg) $\Rightarrow AB = CN$

Lại có: $DC + AB = DC + CN = DN = DA = 7\text{cm}$

Vậy $AB + CD < 8\text{cm}$

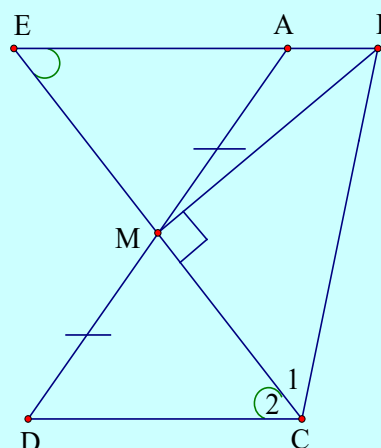
Vậy một trong hai đáy AB, CD phải có độ dài nhỏ hơn 4cm .

Bài 4:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của AD và cắt cạnh AB tại E . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{BMC} = 90^\circ$

b) $BC = AB + CD$



Lời giải

a. Ta có $\begin{cases} \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 90^\circ (gt) \\ \widehat{C}_2 = \widehat{E} (Sl) \end{cases} \Rightarrow \triangle EBC \text{ cân tại } B$

Ta đi chứng minh $ME = MC \Rightarrow BM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh BC thì nó là đường cao.

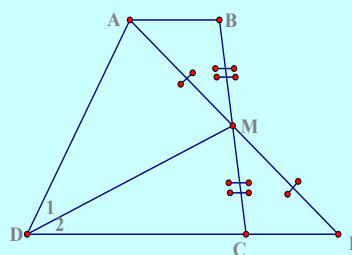
$\triangle EAM = \triangle CDM (g-c-g) \Rightarrow EM = MC \Rightarrow MB$ là đường trung tuyến ứng với cạnh EC

Lại có $\triangle EBC$ cân tại $B \Rightarrow MB$ là đường cao $\Rightarrow \widehat{BMC} = 90^\circ$

b) $BC = BE = BA + AE = BA + CD$ (đpcm)

Bài 5:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$),
 $AB + CD = AD$. Chứng minh rằng phân giác
 trong các góc A và D cắt nhau tại trung
 điểm của BC



Lời giải

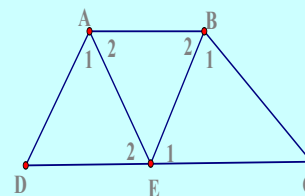
Gọi M là trung điểm của BC , kéo dài AM cắt CD tại E

$\triangle ABM = \triangle ECM (g-c-g) \Rightarrow \begin{cases} AB = CE \\ AM = EM \end{cases} \Rightarrow AB + CD = DE = AD \Rightarrow \triangle ADE \text{ cân tại } D$. Có AM là đường

trung tuyến $\Rightarrow DM$ là phân giác của $\widehat{D} \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (đpcm)

Bài 6:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), trong đó
 $CD = BC + AD$. Hai đường phân giác của hai
 góc A và B cắt nhau tại K . Chứng minh
 rằng C, D, K thẳng hàng.



Lời giải

Trên CD lấy điểm E sao cho $CE = CB \Rightarrow AD = ED \Rightarrow \triangle CBE$ cân tại C

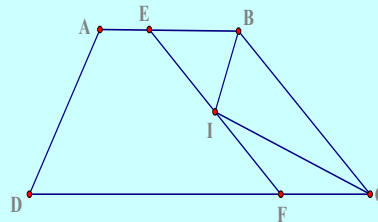
$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{E}_1 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{E}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (so le trong)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{E}_1$$

Chúng minh tương tự: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{E}_2 \Rightarrow EA, EB$ là phân giác của góc A và góc B

$\Rightarrow$ giao điểm của hai đường phân giác $\widehat{A} = \widehat{B}$ cắt nhau tại $E \in BC \Rightarrow E \equiv K \Rightarrow D, E, C$ thẳng hàng.

Bài 7:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$)
hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau ở I . Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, CD lần lượt ở E và F .



- Tìm các hình thang
- Chứng minh tam giác BEI cân ở E và tam giác IFC cân ở F
- Chứng minh: $EF = BE + CF$

Lời giải

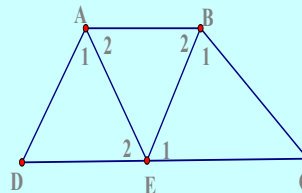
b) Ta có $EIB = IBC = IBE \Rightarrow \triangle IBE$ cân tại E .

Tương tự ta chứng minh $\Rightarrow \widehat{BIC} = 90^\circ$

c) $EF = EI + IF = EB + FC$ (đpcm)

Bài 8:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), trong đó $CD = BC + AD$. Hai đường phân giác của hai góc A và B cắt nhau tại K . Chứng minh rằng C, D, K thẳng hàng



Lời giải

Trên CD lấy điểm E sao cho $CE = CB \Rightarrow AD = ED \Rightarrow \triangle CDE$ cân tại C

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{E}_1 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{E}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (so le trong)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{E}_1$$

Chứng minh tương tự: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{E}_2 \Rightarrow EA, EB$ là phân giác của góc A và góc B

$\Rightarrow$ Giao điểm của hai đường phân giác $\widehat{A}; \widehat{B}$ cắt nhau tại $E \in BC \Rightarrow E \equiv K \Rightarrow D, E, C$ thẳng hàng.

Bài 9:

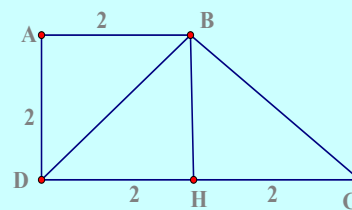
Cho hình thang vuông $ABCD$ có

$\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, AB = AD = 2cm, DC = 4cm, BH \perp CD \equiv H$

a. Chứng minh $\triangle ABD = \triangle HDB$

b. Chứng minh $\triangle BHC$ vuông cân tại H

c. Tính diện tích hình thang $ABCD$



Lời giải

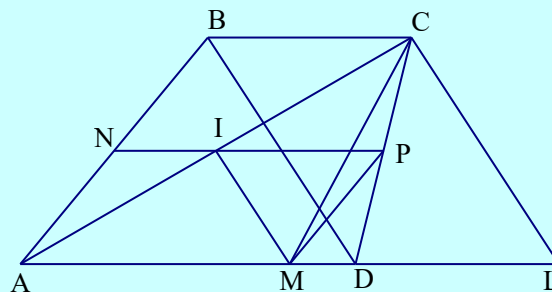
a) $\triangle ABD = \triangle HDB$ (cgc)

b) Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau nên là tam giác vuông cân

c) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD = \frac{1}{2}(2 + 4) \cdot 2 = 6 (cm^2)$

Bài 10:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AD > BC$), có đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại I . Trên đáy AD lấy M sao cho AM bằng độ dài đường trung bình của hình thang. Chứng minh tam giác ACM cân tại M .



Lời giải

Gọi L là điểm đối xứng với A qua M . Gọi NP là đường trung bình của hình thang $ABCD$

Gọi $I = AC \cap NP$. Vì $NP \parallel BC \Rightarrow NI \parallel BC$, mà N là trung điểm của $AB \Rightarrow I$ cũng là trung điểm của AC (1) $\Rightarrow IM \parallel CL$ (2)

Xét hình thang $ABCD$ ta có: $NP = \frac{BC + AD}{2} = AM \Rightarrow BC + AD = 2AM \Rightarrow BC + AD - AM = AM$

$\Rightarrow BC + MD = AM = ML \Rightarrow BC = DL$, mà $BD \perp AC$ (gt) $\Rightarrow CL \perp AC$ (3)

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow IM \perp AC$ và MI là đường trung trực của đoạn AC

Suy ra $MA = MC \Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết $\hat{A} = 3\hat{D}$; $\hat{B} - \hat{C} = 30^\circ$. Tính các góc của hình thang

Lời giải

Ta có: $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$, mà $\hat{A} = 3\hat{D} \Rightarrow 4\hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} = 180^\circ : 4 = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} \Rightarrow \hat{B}, \hat{C}$

Bài 2:

Tính các góc của hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết rằng: $\hat{A} = \frac{1}{3}\hat{D}$; $\hat{B} - \hat{C} = 50^\circ$

Lời giải

Ta tính được $\hat{A} = 45^\circ$; $\hat{B} = 115^\circ$; $\hat{C} = 65^\circ$; $\hat{D} = 135^\circ$

Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết $\hat{A} = 3\hat{D}$; $\hat{B} = \hat{C}$; $AB = 3cm$, $CD = 4cm$. Tính đường cao AH của hình thang và diện tích của hình thang

Lời giải

a tính được $\hat{A} = 135^\circ$; $\hat{B} = 90^\circ$; $\hat{C} = 90^\circ$; $\hat{D} = 45^\circ \Rightarrow BC \perp DC$

Vận dụng nhận xét hình thang $ABCH$ ($AB \parallel CH$) có hai cạnh bên song song thì hai cạnh đáy bằng nhau, để tính được $CH = 3cm$ từ đó suy ra $DH = 1cm$

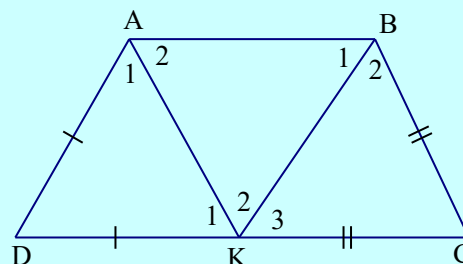
Chúng minh được tam giác AHD vuông cân tại H nên $AH = 1cm \Rightarrow A_{ABCD} = 3,5(cm^2)$

Bài 4:

Cho hình thang $ABCD$, biết $CD = AD + BC$.

Gọi K là điểm thuộc đáy CD sao cho $KD = AD$. Chứng minh rằng:

- AK là tia phân giác của $\hat{A}$
- $KC = BC$
- BK là tia phân giác của $\hat{B}$



Lời giải

a) $\triangle ADK$ cân $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{K}_1 \Rightarrow AK$ là phân giác của $\hat{A}$

b) $\begin{cases} KD + KC = DC \\ BC + KD = DC \end{cases} \Rightarrow CK = BC$

c) $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{K}_3 \Rightarrow BK$ là phân giác của $\widehat{B}$.

HÌNH THANG CÂN

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau

$ABCD$ là hình thang cân (đáy AB, CD) $\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \widehat{C} = \widehat{D} \end{cases}$

Hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \widehat{A} = \widehat{B} \end{cases}$

2. Tính chất:

a) Định lý 1: Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau

GT	$ABCD$ là hình thang cân (đáy là AB, CD)
KL	$AD = BC$

b) Định lý 2: Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau

GT	$ABCD$ là hình thang cân (đáy là AB, CD)
KL	$AC = BD$

3. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân

Để chứng minh một hình thang là hình thang cân ta phải chứng minh hình thang đó có một trong các tính chất sau

a) Hai góc ở một đáy bằng nhau

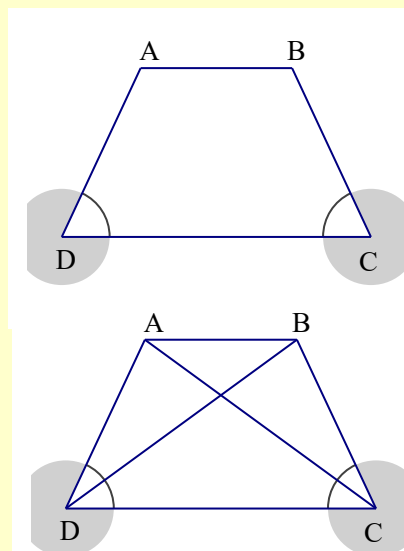
b) Hai đường chéo bằng nhau

4. Chú ý: Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau chưa chắc đã là hình thang cân (hình bình hành)

B. Bài tập và các dạng toán

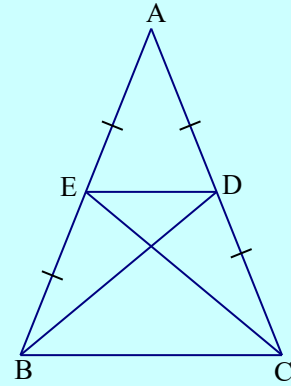
Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình thang cân

Cách giải: Dựa vào các dấu hiệu nhận biết hình thang cân



Bài 1:

Cho tam giác ABC cân tại A có BD và CE là hai đường trung tuyến của tam giác. Chứng minh tứ giác $BCDE$ là hình thang cân

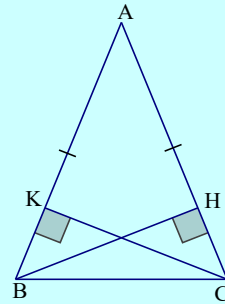


Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có DE là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \diamond BCDE$ là hình thang
Lại có $\widehat{B} = \widehat{C} (gt) \Rightarrow \diamond BCDE$ là hình thang cân (dấu hiệu nhận biết).

Bài 2:

Cho tam giác ABC cân tại A có BH và CK là hai đường cao của tam giác. Chứng minh $BCHK$ là hình thang cân



Lời giải

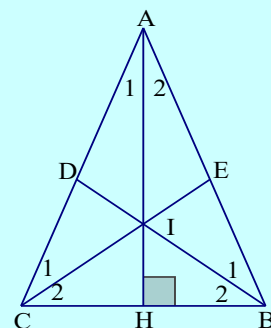
Chứng minh $\triangle BKC = \triangle CHB (ch - gn) \Rightarrow CK = BH; AK = AH$

$$\Rightarrow \widehat{AHK} = \frac{180^\circ - \widehat{KHA}}{2} = \widehat{ABC} \Rightarrow HK \parallel BC$$

Bài 3:

Cho tam giác ABC cân tại A , điểm I thuộc đường cao AH , BI giao với AC tại D , CI giao với AB tại E

- Chứng minh rằng $AD = AE$
- Xác định dạng của tứ giác $BDEC$
- Xác định vị trí của điểm I sao cho



$$BE = ED = DC$$

Lời giải

$$a. \Delta AIC = \Delta AIB(cgc) \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow \Delta ACE = \Delta ABD(gcg) \Rightarrow AE = AD$$

b. Ta có $\Delta AED, \Delta ABC$ cân tại A , có chung $\widehat{A}$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \Rightarrow \begin{cases} DE \parallel BC \\ \widehat{B} = \widehat{C} \end{cases} \Rightarrow \diamond BDEC \text{ là hình thang cân (đpcm)}$$

c. Ta có: $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{D}_2$

$$\text{Đề } BE = ED \text{ thì tam giác } BED \text{ cân tại } E \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B}_1 = \widehat{D}_2 \\ \widehat{B}_2 = \widehat{D}_2 \end{cases} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$$

Tương tự ta phải có $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$. Vậy CE và BD là phân giác của $\widehat{B}, \widehat{C}$

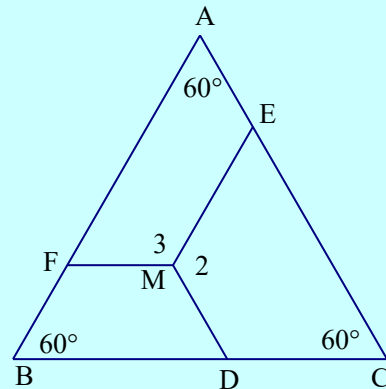
Vậy I là giao điểm của 3 đường phân giác.

Bài 4:

Cho tam giác ABC đều, M là điểm nằm trong tam giác đó. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC và cắt BC ở D , kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E , kẻ đường thẳng song song với BC và cắt AB ở F . Chứng minh rằng

a. Tứ giác $BFMD, CDME, AEMF$ là các hình thang cân

$$b. \widehat{DME}, \widehat{EMF}, \widehat{DMF}$$



Lời giải

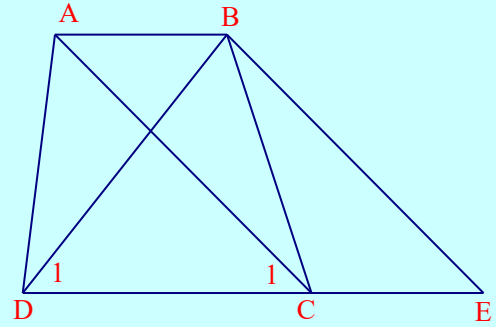
a) Chứng minh hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau

$$b) \text{ Ta có: } \widehat{DME}, \widehat{EMF}, \widehat{DMF} = 120^\circ$$

Bài 5:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AC = BD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC , cắt đường thẳng DC tại E . Chứng minh rằng:

- a) $\triangle BDE$ là tam giác cân
- b) $\triangle ACD = \triangle BDC$
- c) Hình thang $ABCD$ là hình thang cân



Lời giải

a) Áp dụng nhận xét hình thang có hai cạnh bên song song và giả thiết vào hình thang $ABEC$, ta thu được: $BE = AC, BD = AC \Rightarrow BD = BE$

$\triangle BDE$ có hai cạnh bằng nhau nên cân tại B

b) Áp dụng tính chất về góc vào tam giác cân BDE và tính chất góc đồng vị của $AC \parallel BE$,

$$\text{ta được: } \begin{cases} \widehat{D_1} = \widehat{E} \\ \widehat{C_1} = \widehat{E} \end{cases} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1} \quad (1)$$

Lại có $AC = BD$ (giả thiết) (2) và $CD = DC$ (3)

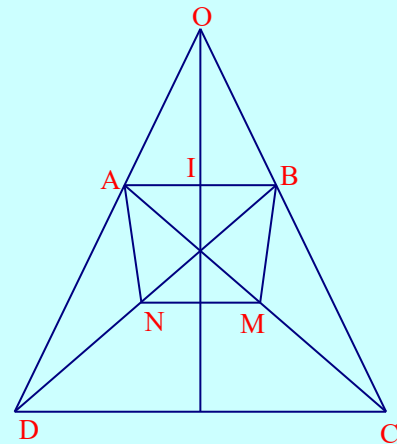
Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BDC$ (cgc)

c) Hình thang $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình thang cân.

Bài 6:

Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$),
 AD cắt BC tại O

- a) Chứng minh rằng $\triangle OAB$ cân
- b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng ba điểm I, J, O thẳng hàng
- c) Qua điểm M thuộc cạnh AC , vẽ đường thẳng song song với CD , cắt BD tại N . Chứng minh rằng $MNAB, MNDC$ là các hình



Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $\widehat{C} = \widehat{D} \Rightarrow \triangle OCD$ cân

Ta có: $\widehat{OAB} = \widehat{D} = \widehat{C} = \widehat{OBA}$ (hai góc đồng vị) $\Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O

b) OI là trung tuyến của tam giác OAB nên OI cũng là đường cao của tam giác OAB
 $\Rightarrow OI \perp AB$

Mà $AB \parallel CD \Rightarrow OI \perp CD$

Tam giác OCD cân tại O có $OI \perp CD$ nên OI cắt CD tại trung điểm J của CD

Vậy ba điểm O, I, J thẳng hàng

c) Xét $\triangle ACD$ và $\triangle BDC$ có: $AC = BD$ (hai đường chéo hình thang cân); $AD = BC$ (hai cạnh bên hình thang cân); $CD = DC$

Do đó $\triangle ACD = \triangle BDC$ (ccc) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ hay $\widehat{MCD} = \widehat{NDC}$

Hình thang $MNDC$ có $\widehat{MCD} = \widehat{NDC}$ nên $MNDC$ là hình thang cân

$\Rightarrow MC = ND \Rightarrow AC - MC = BD - ND \Rightarrow AM = BN$

Hình thang $MNAB$ có hai đường chéo AM và BN bằng nhau nên $MNAB$ là hình thang cân.

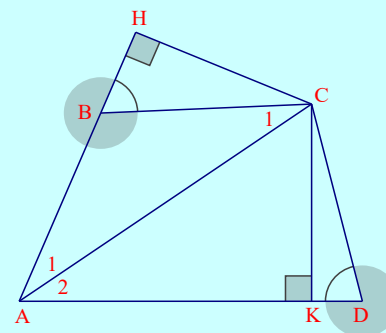
Bài 7:

Tứ giác $ABCD$, có $\widehat{B} = 105^\circ, \widehat{D} = 75^\circ$ và

$AB = BC = CD$

a) AC là tia phân giác của góc A

b) $ABCD$ là hình thang cân

**Lời giải**

Kẻ $CH \perp AB, CK \perp AD$ (H thuộc tia đối của tia BA vì $\widehat{BAC} > 90^\circ, K$ thuộc cạnh AD vì $\widehat{D} < 90^\circ$)

$\triangle CBH = \triangle CDK$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $CH = CK$. Vậy AC là tia phân giác của góc A

$\widehat{C_1} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow BC \parallel AD$

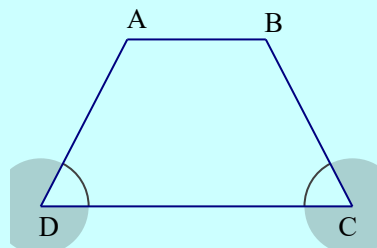
Ta lại có: $\widehat{A} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ = \widehat{D} \Rightarrow ABCD$ là hình thang cân.

Dạng 2: Tính số đo góc, độ dài và diện tích hình thang cân

Cách giải: Sử dụng tính chất hình thang cân về cạnh, góc, đường chéo và công thức tính diện tích hình thang để tính toán.

Bài 1:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{A} = 2\hat{C}$. Tính các góc của hình thang cân

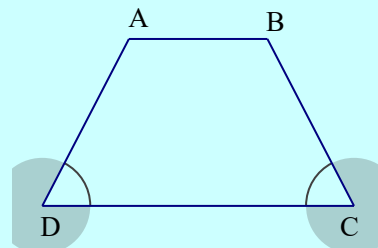


Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên: $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$; $\hat{A} = 2\hat{C} = 2\hat{D} \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} = 60^\circ$; $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$

Bài 2:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{A} = 3\hat{D}$. Tính các góc của hình thang cân



Lời giải

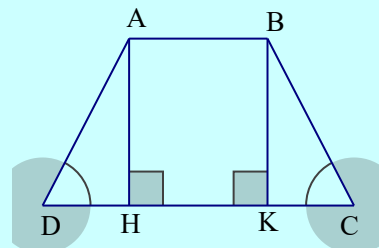
Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$; $\hat{A} = 3\hat{D} \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} = 45^\circ$; $\hat{A} = \hat{B} = 135^\circ$

Bài 3:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có AH và BK là hai đường cao của hình thang

a. Chứng minh: $DH = \frac{CD - AB}{2}$

b. Biết $AB = 6\text{cm}$, $AD = 5\text{cm}$, $CD = 14\text{cm}$, tính AH , DH và diện tích hình thang cân $ABCD$.



Lời giải

a. Ta có $\triangle ADH = \triangle BCK$ (ch - gn) $\Rightarrow DH = CK$

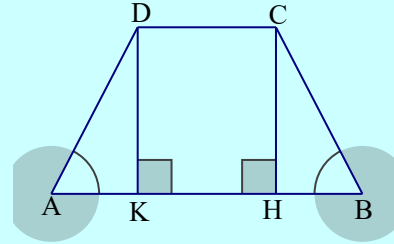
Hình thang $ABKH$ ($AB \parallel HK$), có $AH \parallel BK \Rightarrow AB = HK$

Vậy $DH = \frac{CD - AB}{2}$

b) Tính được $DH = 4\text{cm}$, $AH = 3\text{cm}$, $S_{ABCD} = 30(\text{cm}^2)$

Bài 4:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ$; $AB = 4,5\text{cm}$; $AD = BC = 2\text{cm}$. Tính độ dài đáy CD và diện tích hình thang cân $ABCD$



Lời giải

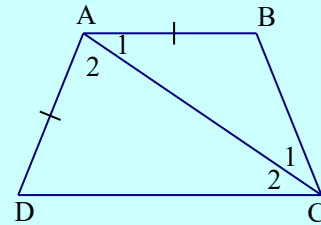
Hạ CH và DK vuông góc với AB

Ta có: $AK = BH = \frac{1}{2}AD = 1\text{cm} \Rightarrow CD = 2,5\text{cm}$; $CH = \sqrt{3}\text{cm}$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot CH}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$$

Bài 5:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AD = AB$ và $AC = CD$. Tính các góc của hình thang cân



Lời giải

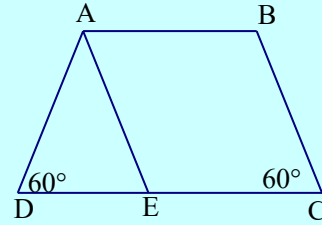
Ta có $\triangle ABC$ cân tại $B \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{A_1} = \widehat{C_2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

Tương tự ta chứng minh được: $\widehat{D} = \widehat{A_2}$

$$\text{Có: } \widehat{D} + \widehat{A_2} + \widehat{C_2} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{D} + \widehat{C_2} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{D} + \frac{\widehat{C}}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{D} + \frac{\widehat{D}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 36^\circ$$

Bài 6:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) đáy lớn $CD = 2,7cm$. Cạnh bên dài $1cm$, $\widehat{ADC} = 60^\circ$, Kẻ $AE \parallel BC$. Tính độ dài AB

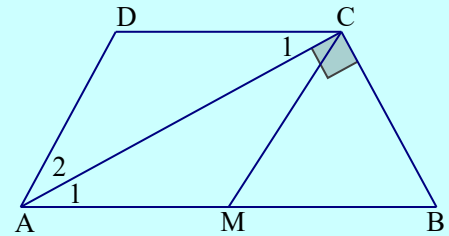
**Lời giải**

Kẻ $AE \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} AE = BC \\ AB = EC \end{cases} \Rightarrow \triangle AED$ là tam giác đều

$\Rightarrow DE = DA = 1cm \Rightarrow EC = AB = 1,7cm$

Bài 7:

Cho hình thang cân $ABCD$ có tổng hai góc A và B bằng 1 nửa tổng hai góc C và D . Đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC



a. Tính các góc của hình thang

b. Chứng minh AC là phân giác của $\widehat{DAB}$

c. Tính chu vi của hình thang, biết $CD = 6cm$

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{A} = \widehat{B}; \widehat{C} = \widehat{D}; \widehat{A} + \widehat{B} = \frac{1}{2}(\widehat{C} + \widehat{D}) \Leftrightarrow 2\widehat{A} = \widehat{D}$ (1)

Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A} = 2\widehat{D} = 360^\circ$ (2) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ; \widehat{C} = \widehat{D} = 120^\circ$

b) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 30^\circ$

Tia AC nằm giữa AB và AD và $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 30^\circ \Rightarrow đpcm$

c. Kẻ $CM \parallel AD \Rightarrow CM = AD = CB \Rightarrow \begin{cases} \triangle MBC : \text{cân} \\ \widehat{B} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle MBC$ đều

$\triangle ADC$ cân tại $D \Rightarrow AD = DC = 6cm = CB = MB = 6cm$

+) $AD \parallel CM \Rightarrow CD = AM = 6cm$

Chu vi hình thang $ABCD$ là: $6 + 6 + 6 + 12 = 30(cm)$

Dạng 3: Chứng minh các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau trong hình thang cân

Cách giải:

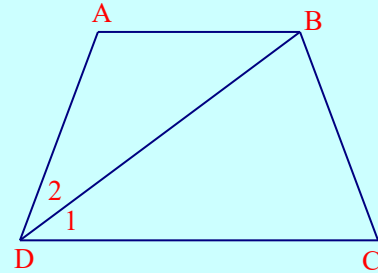
- Dựa vào các tam giác bằng nhau suy ra các cạnh tương ứng và các góc tương ứng bằng nhau
- Dựa vào các góc so le trong bằng nhau, các góc đồng vị bằng nhau

Bài 1:

Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có $\widehat{C} = 60^\circ$

DB là tia phân giác của góc D , $AB = 4\text{cm}$

- Chứng minh rằng BD vuông góc với BC
- Tính chu vi hình thang.



Lời giải

Ta có: $\widehat{D} = \widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{D}_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 90^\circ$

Tính được $AD = 4\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $CD = 8\text{cm}$

Chu vi hình thang $ABCD$ là 20cm .

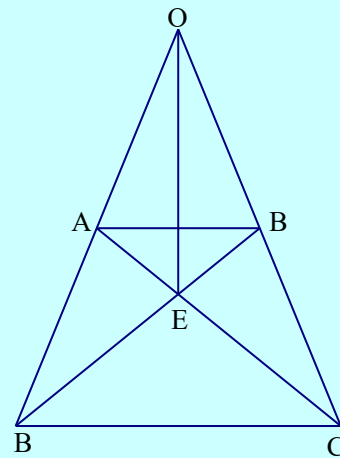
Bài 2:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) với

$AB < CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC , gọi E là giao điểm của AC và BD .

Chứng minh

- Tam giác OAB cân tại O
- $\triangle ABD = \triangle BAC$
- $EC = ED$
- OE là đường trung trực chung của AB và CD



Lời giải

a. Ta có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O

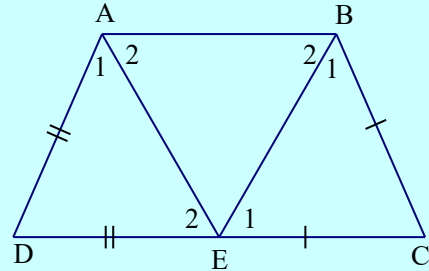
c. $\widehat{ADB} = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ECD} \Rightarrow \Delta ECD$ cân tại E

d. Ta có $OA = OB, EA = EB \Rightarrow OE$ là đường trung trực chung của AB

Tương tự ta có: OE là đường trung trực chung của CD .

Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), trong đó $CD = BC + AD$. Hai đường phân giác của hai góc A và B cắt nhau tại K . Chứng minh rằng C, D, K thẳng hàng



Lời giải

Trên CD lấy điểm E sao cho $CB = CE \Rightarrow AD = ED \Rightarrow \Delta CBE$ cân tại C

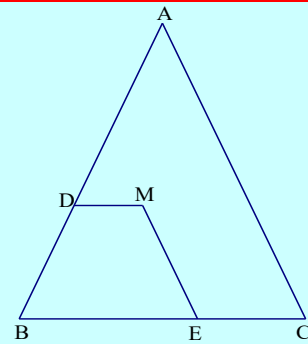
$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{E_1} = \widehat{B_1} \\ \widehat{E_2} = \widehat{B_2} \text{ (so le trong)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{E_1}$$

Chứng minh tương tự: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{E_2} \Rightarrow EA, EB$ là phân giác của góc A và góc B

$\Rightarrow$ giao điểm của hai đường phân giác $\widehat{A}, \widehat{B}$ cắt nhau tại $E \in BC \Rightarrow E \equiv K \Rightarrow D, E, C$ thẳng hàng.

Bài 4:

Cho tam giác ABC cân tại A và điểm M tùy ý nằm trong tam giác. Kẻ tia Mx song song với BC cắt AB tại D , tia My song song với AC cắt BC ở E . Chứng minh rằng: $\widehat{DME} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$



Lời giải

$$\text{Do } MD \parallel BC \Rightarrow \widehat{DME} + \widehat{MEB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DME} = 180^\circ - \widehat{MEB} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$$

Bài 5:

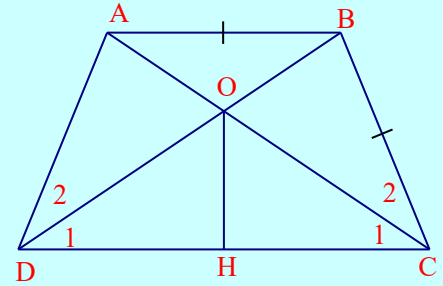
Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$)

, $AB = BC$ và $BC \perp BD$

a) Chứng minh rằng $AC \perp AD$

b) Tính số đo các góc của hình thang

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng điểm O cách đều hai cạnh bên và đáy lớn.



Lời giải

a) Ta có: $\triangle CAD = \triangle DBC \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{DBC} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp AD$

b) Dùng góc $\widehat{A_1}$ là trung gian để chứng minh $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

Chứng minh tương tự ta được: $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$. Ta còn có $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$

Xét $\triangle BDC$ vuông tại B ta có:

$$\widehat{D_1} + \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ \Rightarrow 3\widehat{D_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 60^\circ; \widehat{DAB} = \widehat{CBA} = 120^\circ$$

c) Vẽ $OH \perp CD \Rightarrow OA = OH; OB = OH$ (tính chất điểm nằm trên tia phân giác của một góc)

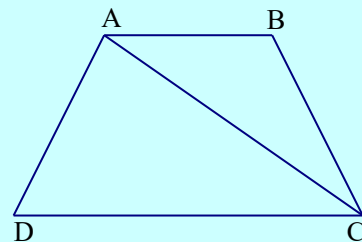
Suy ra $OA = OB = OH$

Vậy điểm O cách đều hai cạnh bên và đáy lớn.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB bằng cạnh bên BC . Chứng minh CA là tia phân giác của $\widehat{BCD}$

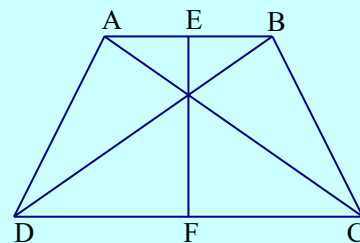


Lời giải

Chứng minh được: $\widehat{ACB} = \widehat{CAB} = \widehat{DCA} \Rightarrow CA$ là phân giác của $\widehat{BCD}$

Bài 2:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có E và F lần lượt là trung điểm hai đáy AB và CD . Chứng minh $EF \perp AB$



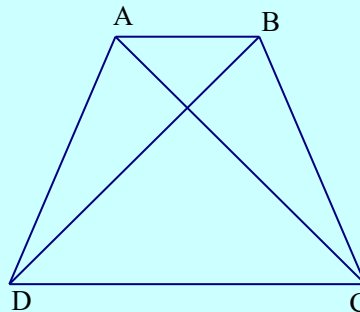
Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD

- Chứng minh $OE \perp AB$
- Tương tự, có $OF \perp CD \Rightarrow OF \perp AB \Rightarrow EF \perp AB$

Bài 3:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo vuông góc với nhau. Chứng minh chiều cao của hình thang cân bằng nửa tổng hai cạnh đáy



Lời giải

Xét hình thang $ABCD$ có các đường cao AH và BK . Từ A kẻ đường thẳng song song với

BD cắt CD ở $E \Rightarrow AB = ED$

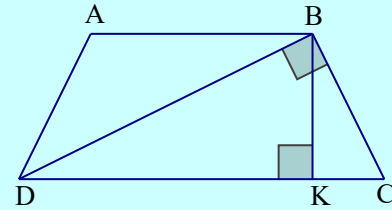
Chứng minh $\widehat{ACH} = 45^\circ$

Do tam giác ACE vuông cân ở A nên: $AH = CH = EH = \frac{AB + CD}{2}$

Bài 4:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC và đồng thời DB là tia phân giác của $\widehat{ACD}$

- Tính các góc của hình thang cân $ABCD$
- Biết $BC = 6cm$, tính chu vi và diện tích của hình thang cân $ABCD$



Lời giải

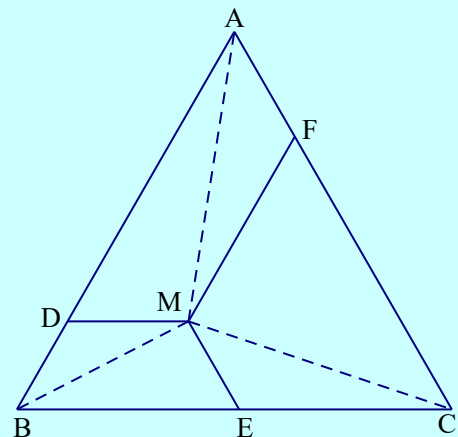
a) $\triangle DBC$ ($\widehat{B} = 90^\circ$) có $\widehat{BCD} = 2\widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 60^\circ$; $\widehat{DAB} = \widehat{CBA} = 120^\circ$

b) Tính được: $DC = 2BC$; $P_{ABCD} = 30cm$

Hạ đường cao BK , ta có $BK = 3\sqrt{3}cm \Rightarrow S_{ABCD} = 27\sqrt{3}(cm^2)$.

Bài 5:

Cho tam giác đều ABC . Từ 1 điểm M nằm bên trong tam giác ta vẽ các tia gốc M song song với BC cắt AB ở D , song song với AC cắt BC tại E , song song với AB cắt AC tại F . Chứng minh rằng chu vi tam giác DEF bằng tổng các khoảng cách từ M đến ba đỉnh của tam giác.



Lời giải

Chu vi tam giác ABC là: $DE + DF + EF$

Khoảng cách từ M đến 3 đỉnh là: $MA + MB + MC$

Ta cần chứng minh: $DE = DF + EF = MA + MB + MC$

+) Ta có hình thang $BDME$ là hình thang cân ($MD \parallel BE, \hat{B} = \hat{E} = \hat{C} = 60^\circ$) $\Rightarrow DE = MB$

Chứng minh tương tự ta có: $DF = MA, EF = MC \Rightarrow DE + DF + EF = MA + MB + MC$ (đpcm).

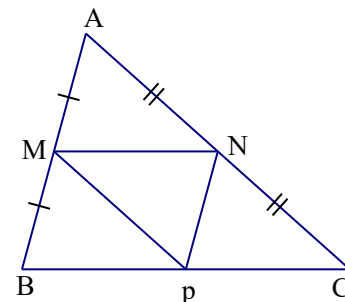
ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

$$\left. \begin{matrix} MA = MB \\ NA = NC \end{matrix} \right\} \Rightarrow MN \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC$$

Tương tự ta có MP, NP là đường trung bình của $\triangle ABC$



2. Các định lý

a. Định lý 1: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba

GT	$\triangle ABC, MA = MB, MN \parallel BC$
KL	$AN = NC$

b. Định lý 2: Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy

GT	$\triangle ABC, MA = MB, NA = NC$
KL	$MN \parallel BC; MN = \frac{1}{2} BC$

B. Bài tập áp dụng

Bài 1:

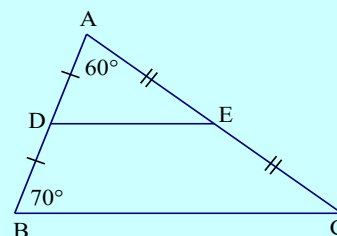
Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC . Tính chu vi của tam giác MNP , biết $MN = \frac{1}{2} BC; AB = 8cm, AC = 10cm, BC = 12cm$

Lời giải

Chu vi $\triangle MNP = MN + NP + PM = 4 + 5 + 6 = 15(cm)$

Bài 2:

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 70^\circ$. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC . Xác định dạng của tứ giác $BDEC$ và tính các góc của tứ giác đó.



Lời giải

Ta có ED là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \diamond BDEC$ là hình thang

$$\widehat{C} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 110^\circ; \widehat{E} = 130^\circ$$

Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và

$AB = 2AD = 2CD$. Kẻ CH vuông góc với AB

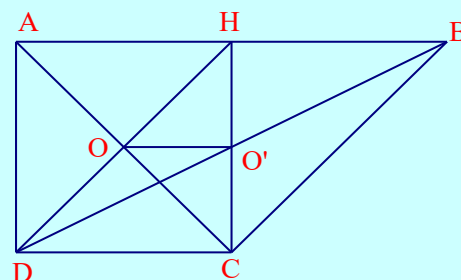
Tại H

a) Tính số đo các góc của hình thang $ABCD$

b) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông cân

c) Tính chu vi hình thang nếu $AB = 6\text{cm}$

d) Gọi O là giao điểm của AC và DH , O' là giao điểm của DB và CH . Chứng minh rằng $AB = 4OO'$



Lời giải

a) Ta có $\diamond ADCH$, có: $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = \widehat{C} = 90^\circ$ và $AH \parallel CD, AD \parallel CH$

$AHCD$ là hình thang cân hai đáy $AH, CD \Rightarrow AD = CH$

$AHCD$ cũng là hình thang cân với hai đáy AD, CH

$$AH = CD$$

$$BH = AB - AH = 2CD - CD = CD \text{ và } CH = AD = BH$$

Do đó $\triangle BCH$ vuông cân tại H , suy ra $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{BCH} = 45^\circ, \widehat{C} = \widehat{BCH} + \widehat{DCH} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 135^\circ$

b) $\triangle ABC$ có H là trung điểm của AB và $CH \perp AB \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại C

Lại có $\widehat{B} = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại C

c) Ta có $AB = 6\text{cm}, AD = CD = \frac{1}{2}AB = 3\text{cm}$

$\triangle ABC$ vuông cân tại $C \Rightarrow BC = \frac{1}{\sqrt{2}}AB = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$

Chu vi hình thang $ABCD$ là: $AB = BC + CD + DA = 6 + 3\sqrt{2} + 3 + 3 = 12 + 3\sqrt{2} (cm)$

d) Dễ thấy $\widehat{ACD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{HDC} = 45^\circ \Rightarrow DH \parallel BC \Rightarrow DH \perp AC$

Vì $\triangle ACD$ vuông cân tại O nên O là trung điểm của AC

Ta có $\triangle DO'C = \triangle BO'H (gcg) \Rightarrow OC = O'H$ hay O' là trung điểm của CH

Xét $\triangle AHC$ có $O'O$ là đường trung bình nên $AH = 2O'O$

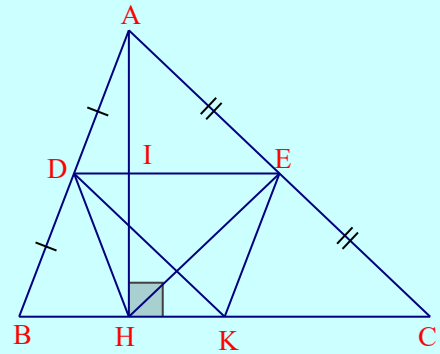
Mà $AB = 2AH \Rightarrow AB = 4O'O$.

Bài 4:

Cho $\triangle ABC (AC > AB)$, đường cao AH . Gọi D, E, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC . Chứng minh rằng:

a) DE là đường trung trực của AH

b) $DEKH$ là hình thang cân



Lời giải

a) Ta có DE là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow DE \perp AH$ (1)

Gọi I là giao điểm của DE và AH

$\triangle ABH$ có $AD = DB$ và $DI \parallel BC \Rightarrow AI = IH$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow DE$ là đường trung trực của AH

DE là đường trung trực của $AH \Rightarrow EH = EA = \frac{1}{2} AC$ (3)

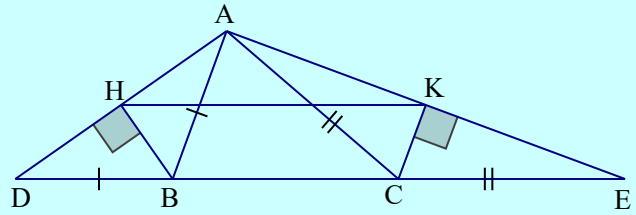
DK là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow DK = \frac{1}{2} AC$ (4)

Từ (3)(4) $\Rightarrow EH = DK$

Hình thang $DEKH$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

Bài 5:

Cho tam giác ABC , trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CA$. Kẻ $BH \perp AD, CK \perp AE$. Chứng minh rằng



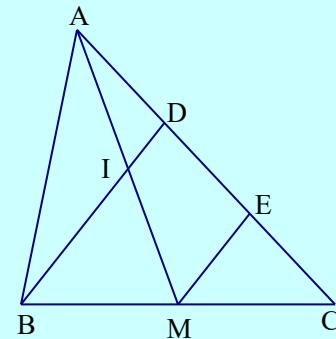
- $AH = HD$
- $HK \parallel BC$

Lời giải

- Ta có $\triangle ABH = \triangle DBH \Rightarrow AH = HD; \triangle ACK = \triangle ECK \Rightarrow AK = KE$
- Xét $\triangle ADE$, có $AH = HD; AK = KE \Rightarrow HK \parallel DE \Rightarrow HK \parallel BC$

Bài 6:

Cho tam giác ABC , kẻ trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm D, E sao cho $AD = DE = EC$



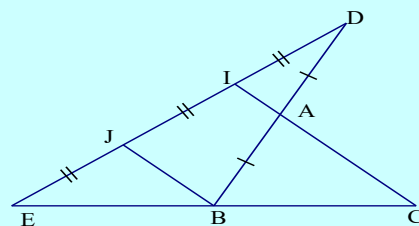
- Chứng minh rằng: $ME \parallel BD$
- Gọi I là giao điểm của AM, BD . Chứng minh $AI = IM$
- Chứng minh: $ID = \frac{1}{4}BD$

Lời giải

- Ta có ME là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow ME \parallel BD$
- Xét $\triangle AME$ có D là trung điểm của $AE, ID \parallel ME \Rightarrow IA = IM$
- $DI = \frac{1}{2}EM; EM = \frac{1}{2}DB \Rightarrow DI = \frac{1}{4}BD$

Bài 7:

Cho tam giác ABC , A là trung điểm của BD, B là trung điểm của EC . AC và DE cắt nhau tại I . Chứng minh rằng: $DI = \frac{DE}{3}$



Lời giải

Qua B kẻ đường thẳng $BJ // CI$ cắt ED tại J

$$\Rightarrow \begin{cases} EJ = JI \\ JI = ID \end{cases} \Rightarrow DI = \frac{DE}{3} \text{ (đpcm)}.$$

Bài 8:

Cho ΔABC vuông tại A , kẻ đường cao AH .

Từ H kẻ $Hx \perp AB = P$, trên Hx lấy điểm D

sao cho P là trung điểm của HD . Từ H kẻ

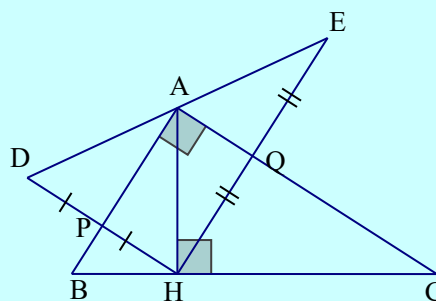
Hy vuông góc với AC tại Q và trên Hy lấy

điểm E sao cho Q là trung điểm của HE

a) Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng

b) $PQ // DE$

c) $PQ = AH$



Lời giải

a) $\Delta ADP = \Delta AHP$ (cgc) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_3}$, tương tự ta có $\widehat{A_2} = \widehat{A_4} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = 180^\circ \Rightarrow A, D, E$ thẳng hàng (đpcm)

b. Ta có PQ là đường trung bình của $\Delta HDE \Rightarrow PQ // ED$

$$c. PQ = \frac{1}{2} DE = \frac{DA + AE}{2} = \frac{2AH}{2} = AH$$

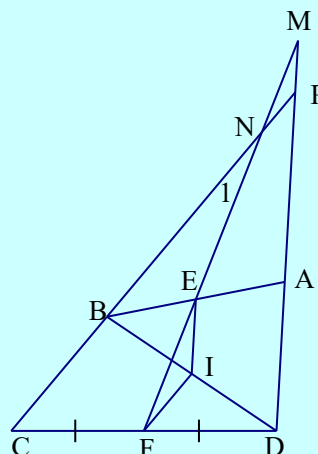
Bài 9:

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} = 40^\circ, \widehat{D} = 80^\circ$.

$AD = BC$. E, F lần lượt là trung điểm của

AB, CD . Tính góc nhọn tạo bởi các đường

thẳng AD và BC , AD và EF



Lời giải

Ta có $\widehat{D} = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$

Gọi I là trung điểm của $BD \Rightarrow \begin{cases} EI \parallel BC \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{E} \\ IF \parallel BC \Rightarrow \widehat{F} = \widehat{N} \text{ (slt)} \end{cases}$

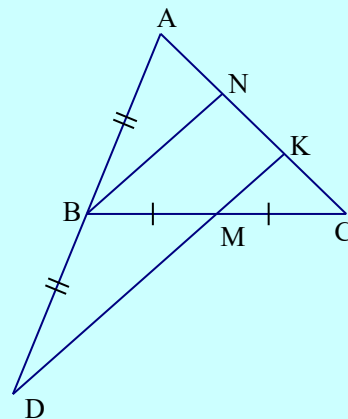
Lại có: $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$ (đối đỉnh)

+) Có: $IE = IF = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F} \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{M}$

Mà $\widehat{N}_1 + \widehat{M} = 60^\circ$ (góc ngoài của tam giác) $\Rightarrow \widehat{M} = 30^\circ$

Bài 10:

Cho tam giác ABC . Điểm D thuộc tia đối của tia BA sao cho $BD = BA$, M là trung điểm của BC . Gọi K là giao điểm của DM và AC , Chứng minh rằng: $AK = 2KC$



Lời giải

Kẻ $BN \parallel DM$ (N thuộc AC)

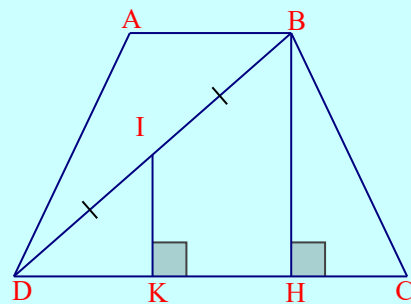
Xét $\triangle ADK$, có: $AB = DB, BN \parallel DK \Rightarrow BN$ là đường trung bình của $\triangle ADK$
 $\Rightarrow AN = NK \Leftrightarrow AK = 2NK$ (1)

Lại có MK là đường trung bình của $\triangle BNC \Rightarrow NK = KC$ (2) $\Rightarrow AK = 2KC$ (đpcm).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4:

Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có
 $AB = 4\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$. Tính khoảng
 cách từ trung điểm I của BD đến CD



Lời giải

Kẻ $BH \perp CD$, $IK \perp CD$

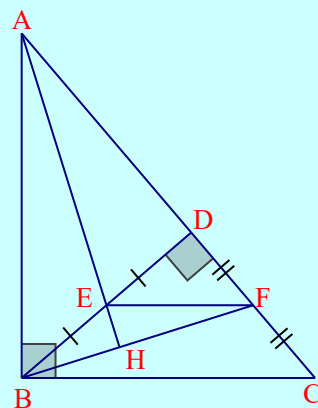
Ta có $CH = \frac{CD - AB}{2} = \frac{10 - 4}{2} = 3(\text{cm})$

Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle BHC$, ta có: $BH^2 = BC^2 - CH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 = 4^2 \Rightarrow BH = 4(\text{cm})$

Tam giác BDH có $BI = ID$, $IK \parallel BH \Rightarrow IK$ là đường trung bình $\Rightarrow IK = \frac{BH}{2} = 2(\text{cm})$

Bài 2:

Tam giác vuông ABC ($\widehat{B} = 90^\circ$) có đường
 cao BD . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của
 BD, DC và H là giao điểm của AE, BF . Tính
 góc AHF



Lời giải

Từ giả thiết suy ra EF là đường trung bình của $\triangle BCD$

Áp dụng định lý đường trung bình và giả thiết vào $\triangle BCD$, ta được:

$$\begin{cases} EF \parallel BC \\ \widehat{B} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow EF \perp AB \text{ hay } EF \text{ là đường cao của } \triangle ABF$$

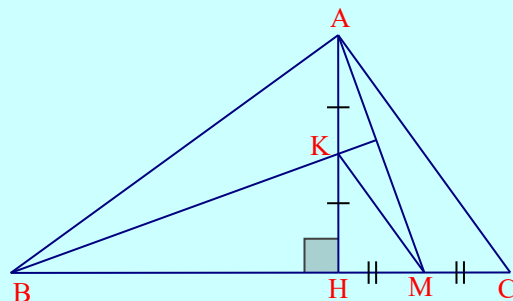
Theo giả thiết BD là đường cao của $\triangle ABC$ nên cũng là đường cao của tam giác ABF suy ra

E là trực tâm của tam giác ABF hay AH là đường cao thứ ba của tam giác này

Do đó $\widehat{AHF} = 90^\circ$.

Bài 3:

Cho $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$), đường cao AH . Gọi M là trung điểm của HC , K là trung điểm của AH . Chứng minh rằng $BK \perp AM$



Lời giải

Tam giác AHC có $AK = HK$ và $HM = MC \Rightarrow MK$ là đường trung bình của $\triangle AHC \Rightarrow MK \parallel AC$

Ta lại có $AC \perp AB \Rightarrow MK \perp AB$

$\triangle AMB$ có $AH \perp BM, MK \perp AB \Rightarrow K$ là trực tâm $\Rightarrow BK \perp AM$

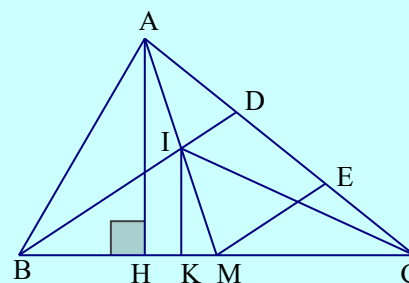
Bài 4:

Cho tam giác $\triangle ABC$ có AM là trung tuyến ứng với BC . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = \frac{1}{2}DC$. Kẻ $Mx \parallel BD$ và cắt AC tại E . Đoạn BD cắt AM tại I . Chứng minh rằng:

a) $AD = DE = EC$

b) $S_{AIB} = S_{IBM}$

c) $S_{ABC} = 2S_{IBC}$



Lời giải

a. Xét $\triangle BDC$ có $ME \parallel BD$, M là trung điểm của BC . E là trung điểm của $DC \Rightarrow DE = EC = \frac{1}{2}DC \Rightarrow AD = DE = EC$.

b. Ta có D là trung điểm của $AE \Rightarrow ID$ là đường trung bình của $\triangle AME \Rightarrow IA = IM \Rightarrow S_{AIB} = S_{IBM}$

c. Hạ đường cao AH và IK của $\triangle ABC, \triangle IBC$

IK là đường trung bình của $\triangle AHM \Rightarrow IK = \frac{1}{2}AH$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle IBC$ có chung đáy BC và hai đường cao $AH = 2IK$

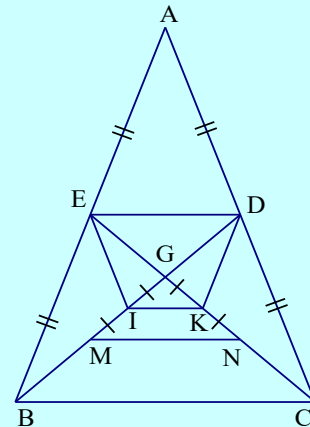
Bài 5:

Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG và CG , I và K là trung điểm của GM và GN

a. Chứng minh $BD = CE$

b. Chứng minh tứ giác $IEDK$ là hình thang cân

c. Tính $DE + IK$, biết $BC = 10cm$



Lời giải

a) $\triangle ABD = \triangle ACE (cgc) \Rightarrow BD = CE$

b) Có $IK \parallel ED \parallel MN \parallel BC \Rightarrow \diamond IEDK$ là hình thang

Ta đi chứng minh $DI = EK$

$$- DI = DG + GI = DG + \frac{1}{2}GM = GM (= MB) + \frac{1}{2}GM = \frac{3}{2}GM = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}DB = \frac{1}{2}DB$$

$$+) EK = EG + GK = EG + \frac{1}{2}GN = GN + \frac{1}{2}GN = \frac{3}{2}GN = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}EC = \frac{1}{2}EC$$

Ta lại có $BD = EC \Rightarrow DI = EK \Rightarrow \diamond IEDK$ là hình thang cân.

c) $DE + IK = 7,5cm$

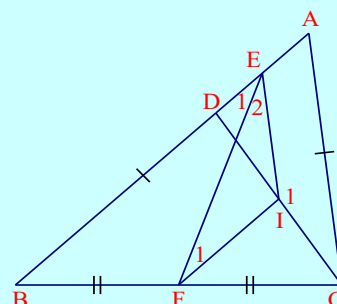
Bài 6:

Cho tam giác ABC ($AB > AC$) có $\hat{A} = 50^\circ$.

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC

Tính $\widehat{BEF}$



Lời giải

Do E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC nên ta vẽ thêm I là trung điểm của DC thì EI và FI theo thứ tự là đường trung bình của hai tam giác ADC và BCD

Đặt $BD = AC = 2a$

Áp dụng định lí đường trung bình vào hai tam giác trên ta có:

$$FI \parallel BD(1), FI = a(2), EI = a(3), EI \parallel AC(4)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{F_1} \text{ (so le trong)} \quad (5)$$

$$\text{Từ (2)(3)} \Rightarrow FI = EI \Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{F_1} \text{ (trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau)} \quad (6)$$

$$\text{Từ (5)(6)} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2}$$

$$\text{Từ (4)} \Rightarrow (1) \Rightarrow \widehat{BEI} = \widehat{A} = 50^\circ \text{ (đồng vị)}$$

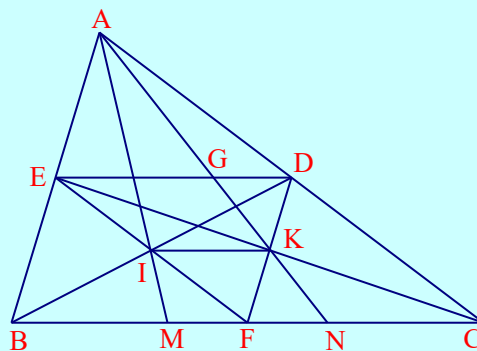
$$\text{Mà } \widehat{BEI} = 2\widehat{E_1} \Rightarrow \widehat{E_1} = 25^\circ.$$

Bài 7:

Cho tam giác ABC có các trung tuyến BD và CE . Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD , K là giao điểm của AN và CE .

Chứng minh rằng:

- $BCDE$ là hình thang
- K là trung điểm của EC
- $BC = 4IK$



Lời giải

a) Ta có DE là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow BCDE$ là hình thang

b) Gọi G là giao điểm của AN và DE

Ta có E là trung điểm của AB và $DE \parallel BN \Rightarrow G$ là trung điểm của $AN \Rightarrow EG$ là đường trung

$$\text{bình của } \triangle ABN \Rightarrow EG = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{3}BC$$

Ta lại có $DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow EG = \frac{2}{3}ED \Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle ACE$

$\Rightarrow AK$ là trung tuyến của $\triangle ACE \Rightarrow K$ là trung điểm của EC

c) Chứng minh tương tự ta có I là trung điểm của EF

Gọi F là trung điểm của BC , ta có $DF \parallel AB$ và $DK \parallel AB \Rightarrow D, K, F$ thẳng hàng

$$DK = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}DF \Rightarrow K \text{ là trung điểm của } DF$$

Suy ra IK là đường trung bình của $\triangle DEF \Rightarrow IK = \frac{1}{2}DE$, mà $DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow IK = \frac{1}{4}BC$

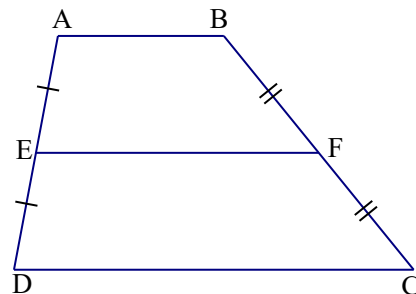
Hay $BC = 4IK$.

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang

$$\left. \begin{array}{l} EA = ED \\ FB = FC \end{array} \right\} \Rightarrow EF \text{ là đường trung bình của hình thang}$$



2. Các định lý

a. Định lý 1: Đường thẳng đi qua trung điểm 1 cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai

GT	$ABCD$ là hình thang (đáy AB, CD) $EA = ED, EF \parallel AB \parallel DC$
KL	$FB = FC$

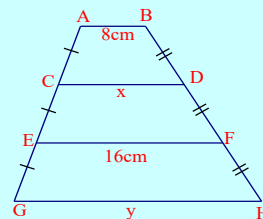
b. Định lý 2: Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy

GT	$ABCD$ là hình thang (đáy AB, CD) $EA = ED, FB = FC$
KL	$EF \parallel AB, EF \parallel CD, EF = \frac{AB + CD}{2}$

B. Bài tập áp dụng

Bài 1:

Tính x, y trên hình vẽ



Lời giải

Xét hình thang $ABFE$ có $CD = \frac{AB + EF}{2} = \frac{8 + 16}{2} = 12 \Rightarrow x = 12cm.$

Xét hình thang $CDHG$ có $EF = \frac{CD + GH}{2} \Rightarrow 16 = \frac{12 + y}{2} \Rightarrow y = 20$

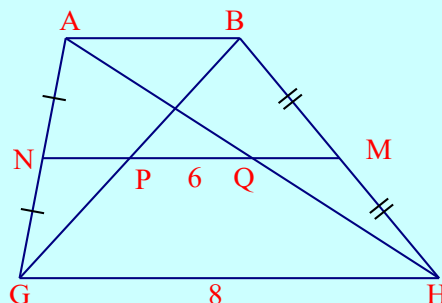
Vậy $x = 12\text{cm}, y = 20\text{cm}$

Bài 2:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của AD , N là trung điểm của BC . Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của MN với BD và AC . Cho $CD = 8\text{cm}$, $MN = 6\text{cm}$

a. Tính AB

b. Tính MP, PQ, QN



Lời giải

a. Xét hình thang $ABCD$ có M là trung điểm AD , N là trung điểm của BC

$$\Rightarrow MN \text{ là đường trung bình của hình thang } ABCD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

$$\Rightarrow AB = 2MN - CD = 4\text{cm}$$

b. Ta có: $MP = \frac{1}{2}AB = 2\text{cm}, NQ = \frac{1}{2}AB = 2\text{cm} \Rightarrow PQ = 6\text{cm}$

Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC . Phân giác của góc A và B cắt EF theo thứ tự tại I và K

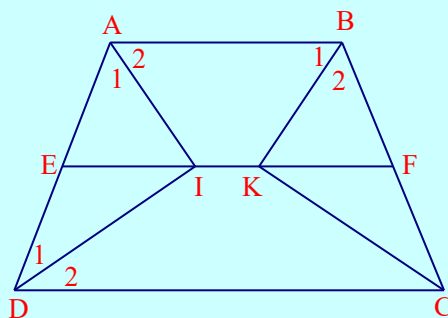
a. Chứng minh $\triangle AIE, \triangle BKF$ là các tam giác cân

b. Chứng minh $\triangle AID, \triangle BKC$ là các tam giác vuông

c. $IE = \frac{1}{2}AD, KF = \frac{1}{2}BC$

d. Cho $AB = 5\text{cm}, CD = 13\text{cm}, AD = 6\text{cm}, BC = 7$.

Tính IK



Lời giải

a. Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{I_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \triangle AEI$ cân tại E ,

tương tự $\triangle BKF$ cân tại F

b. $\widehat{I} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle AID$ vuông tại I , tương tự $\triangle BKC$ vuông tại K

c. Ta có $\triangle AID$ vuông tại I . E là trung điểm của $AD \Rightarrow EI = \frac{1}{2} AD$

d $EF = 9 = EI + IK + KF \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{2} AD + IK + \frac{1}{2} BC \Rightarrow IK = 2,5cm$

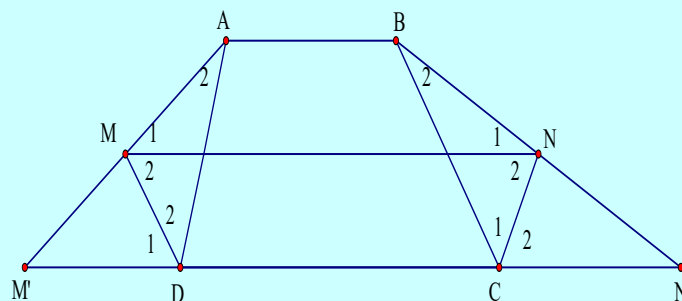
Bài 4:

Cho hình thang $ABCD$, các đường phân giác của các góc ngoài tại đỉnh A và D cắt nhau ở M . Các đường phân giác của các góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở N

a. Chứng minh rằng $MN \parallel CD$

b. Tính chu vi hình thang $ABCD$, biết $MN = 4cm$

c. MN có độ dài bằng nửa chu vi hình thang $ABCD$



Lời giải

a. Gọi M' và N' lần lượt là giao điểm của AM, BN với DC

Ta có: $\widehat{D_2} + \widehat{A_2} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{D}) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AMD$

vuông tại $M \Rightarrow DM$ là đường cao, đường phân giác $\Rightarrow \triangle ADM', \triangle BCN'$ cân tại D và C

$\Rightarrow M, N$ là trung điểm của AM' và $BN' \Rightarrow MN \parallel CD$

b. Chu vi hình thang $ABCD$ là:

$$AB + BC + CD + DA = AB + M'D + DC + CN' = AB + M'N' = 2MN = 8(cm)$$

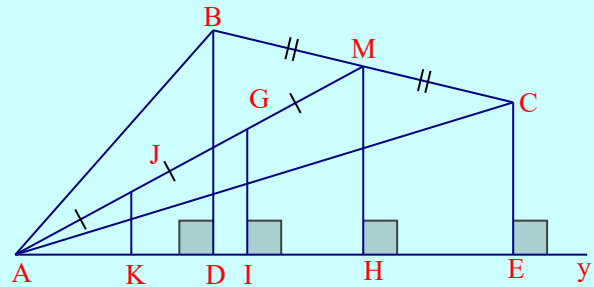
c. Từ ý a ta có: $MN = \frac{1}{2}(AB + M'N')$

mà: $M'N' = M'D + BC + CN' = AD + DC + BC (\triangle ADM'; \triangle BCN : can) \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$

Bài 5:

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của cạnh BC . Gọi G là trọng tâm của tam giác. Vẽ đường thẳng BD, CE, MH, GI cùng vuông góc với Ay . Chứng minh rằng:

$$BD + CE = 2MH \text{ và } BD + CE = 3GI$$



Lời giải

Theo giả thiết M là trung điểm của BC nên AM là trung tuyến của $\triangle ABC$ nên trọng tâm G của tam giác nằm trên đường trung tuyến AM và $AG = \frac{2}{3}AM$

Gọi J là trung điểm của AG thì $AJ = JG = GM$ (1)

Vẽ $JK \perp Ay (K \in Ay)$, ta có: $JK \parallel GI \parallel MH \parallel BD \parallel CE$ (2)

Ta được hai hình thang vuông $BDEC$ và $JKHM$

Từ (1)(2) $\Rightarrow AK = KI = IH$ và $DH = HE$ theo định nghĩa đường trung bình

Do đó JK là đường trung bình của $\triangle AIG$ và GI, MH lần lượt là đường trung bình của hình thang vuông $JKHM$ và $BDEC$

Áp dụng định lý đường trung bình vào hai hình thang vuông $BDEC$ và $JKHM$, ta được:

$$BD + CE = 2MH \text{ (3) và } MH + JK = 2GI \text{ (4)}$$

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác AIG , ta có: $JK = \frac{1}{2}GI$ (5)

Thay (5) vào (4) ta được: $MH + \frac{1}{2}GI = 2GI \Rightarrow MH = \frac{3}{2}GI$ (6)

Thay (6) vào (3) ta được: $BD + CE = 3GI$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

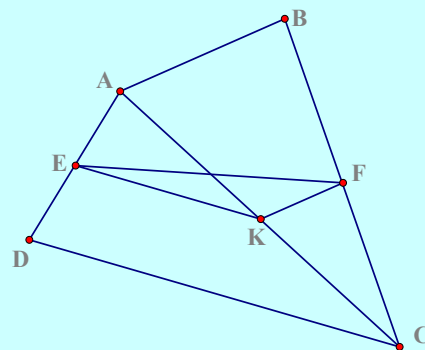
Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, K, F lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC

a. Chứng minh $EK \parallel CD, FK \parallel AB$

b. So sánh EF và $\frac{1}{2}(AB + CD)$

c. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để 3 điểm E, F, K thẳng hàng, chứng minh

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$



Lời giải

b. Xét $\triangle EFK$, có $EF \leq EK + KF = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AB + CD)$

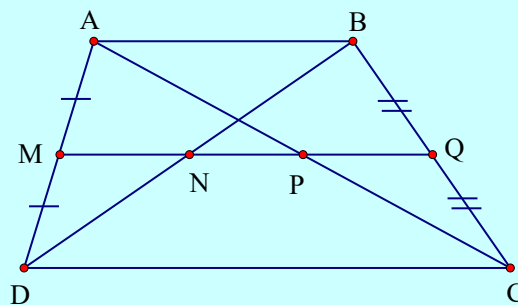
c. Để E, F, K thẳng hàng, khi đó EF đồng thời song song với AB, CD . Tức là tứ giác $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$) $\Rightarrow EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

Bài 2:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BD, AC, BC . Chứng minh

a) M, N, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng

b) $NP = \frac{1}{2}|DC - AB|$



Lời giải

a) Ta có MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN \parallel AB$

Tương tự, ta được: $MP \parallel CD; MQ \parallel AB, CD$

$$\Rightarrow MN, MP, MQ \parallel AB \Rightarrow dpcm$$

b) Ta có: $\frac{1}{2}|DC - AB| = \frac{1}{2}|2MP - MN| = |MP - MN| = NP$

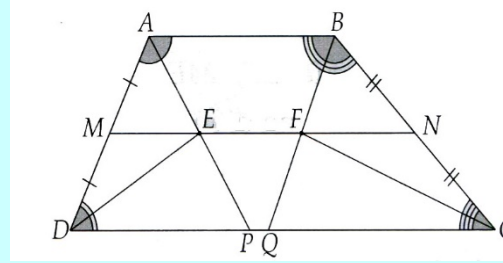
Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). với

$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. Các tia phân giác của góc A và D cắt nhau tại E , các tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại F . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD và BC

a) Chứng minh M, E, N, F cùng nằm trên một đường thẳng

b) Tính độ dài MN, MF, NF theo a, b, c, d



Lời giải

a) Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của AE, AF với CD

Chứng minh tương tự bài 2

b) Ta có: $MN = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(a + c)$

Lại có: $c = CD = CQ + QD = BC + QD = b + QD$ ($\triangle BCD: can$) $\Rightarrow QD = c - b$

Trong hình thang $ABQD$ có M là trung điểm của AD và $MF \parallel DQ$ nên chứng minh được F là trung điểm của BQ , từ đó chứng minh MF là đường trung bình của hình thang $ABQD$.

Vì MF là đường trung bình của hình thang $ABQD \Rightarrow MF = \frac{1}{2}(AB + DQ) = \frac{1}{2}(a + c - b)$

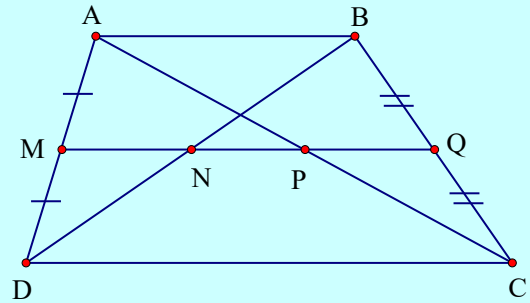
Mặt khác, FN là đường trung bình của tam giác BCQ , tức là $FN = \frac{1}{2}CQ = \frac{1}{2}b$.

Bài 4:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BD, AC, BC . Chứng minh

a) M, N, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng

b) $NP = \frac{1}{2}|DC - AB|$



Lời giải

a) Ta có MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN \parallel AB$

Tương tự, ta được: $MP \parallel CD; MQ \parallel AB, CD$

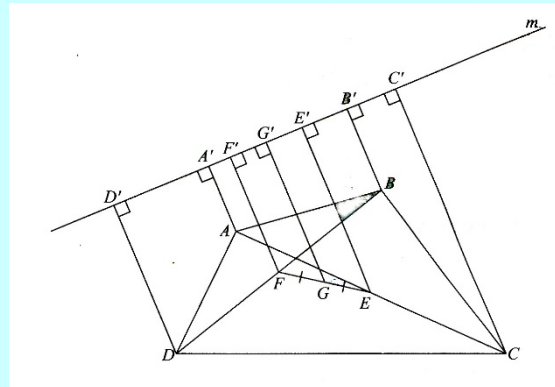
$\Rightarrow MN, MP, MQ \parallel AB \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có: $\frac{1}{2}|DC - AB| = \frac{1}{2}|2MP - MN| = |MP - MN| = NP$

Bài 5:

Cho tứ giác $ABCD$. Có G là trung điểm của đoạn nối các trung điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi m là một đường thẳng không cắt cạnh nào của hình thang $ABCD$; Gọi A', B', C', D', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, G lên đường thẳng m . Chứng

minh $GG' = \frac{1}{2}(A'A + BB' + CC' + DD')$.



Lời giải

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và BD ; E' và F' lần lượt là hình chiếu của E, F trên đường thẳng m

Khi đó, GG' là đường trung bình của hình thang $EE'FF'$

$$GG' = \frac{1}{2}(EE' + FF') = \frac{1}{2}$$

Mà EE' và FF' lần lượt là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$ và $BB'D'D$

$$\Rightarrow EE' = \frac{1}{2}(AA' + CC'); FF' = \frac{1}{2}(BB' + DD')$$

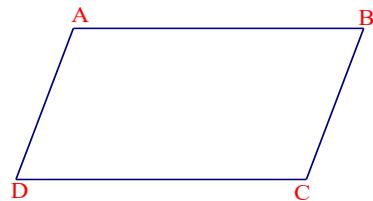
Thay vào (1) ta được đpcm.

ÔN TẬP HÌNH BÌNH HÀNH

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song

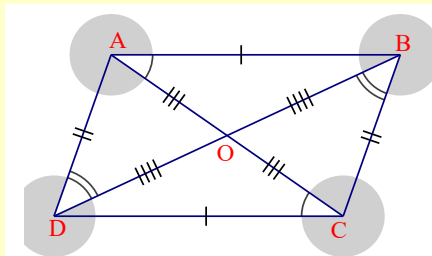
$$\diamond ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases}$$



- **Chú ý:** Hình bình hành là hình thang đặc biệt có hai cạnh bên song song

2. Tính chất: Trong hình bình hành

- Tính chất về cạnh: Các cạnh đối bằng nhau
- Tính chất về góc: Các góc đối bằng nhau
- Tính chất về đường chéo: Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường
- Tính chất đối xứng: Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành



3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành

4. Cách vẽ hình bình hành

Có 5 cách vẽ hình bình hành nhưng hay dùng nhất là 2 cách

Cách 1: Sử dụng lưới ô để vẽ hai đoạn thẳng song song và bằng nhau

Cách 2: Trên hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại O , lấy O làm tâm vẽ hai cung tròn, cung thứ nhất cắt d_1 ở A và C , cung thứ hai cắt d_2 ở B và D

*) Lưu ý:

- +) Cách 1: Không chứng minh được là nhận được hình bình hành, chỉ là ảnh của hình bình hành
- +) Cách 2: Chứng minh được là hình bình hành

5. Từ tính chất hình bình hành ta thu được nghiệm thứ hai

Cứ nói tới trung điểm phải nói tới hình bình hành

Ý nghĩa của kinh nghiệm này là, với các bài toán mà giả thiết hoặc kết luận đề cập đến trung điểm của một đoạn thẳng thì khi vẽ đường phụ ta vẽ hình bình hành để sử dụng tính chất hai cạnh đối song song và bằng nhau hoặc hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

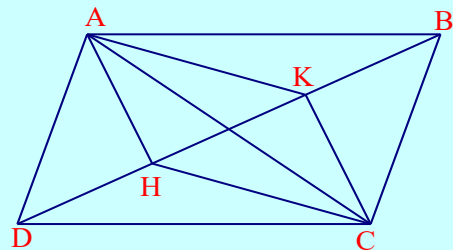
B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh 1 tứ giác là hình bình hành

Cách giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh 1 tứ giác là hình bình hành

Bài 1:

Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Từ A và C kẻ AE, CF vuông góc với BD ở H và K . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.



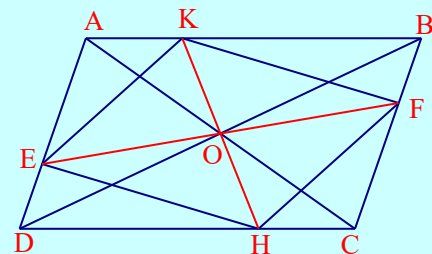
Lời giải

Ta có: $AH \perp BD, CK \perp BD \Rightarrow AH \parallel CK$

$\triangle AHD = \triangle CKB(ch - gn) \Rightarrow AH = CK \Rightarrow \diamond AHCK$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Bài 2:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Qua điểm O , vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F . Qua điểm O vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại H, K . Chứng minh tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.



Lời giải

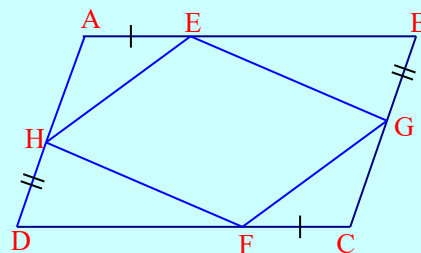
Ta có $\triangle AOK = \triangle COH \Rightarrow OK = OH$

Lại có $\triangle DOE = \triangle BOF \Rightarrow OE = OF$

Xét tứ giác $EKFH$, có $OK = OH, OE = OF \Rightarrow \diamond EKFH$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Bài 3:

Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự ta lấy hai điểm H và G sao cho $DH = BG$ và trên các cạnh AB, CD theo thứ tự lấy các điểm E, F sao cho $AE = CF$. Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.



Lời giải

Theo giả thiết ta có: $AE = CF \Rightarrow EB = DF$

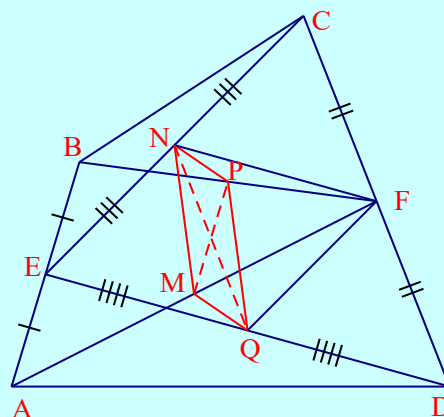
$DH = BG \Rightarrow AH = CG$

$\triangle AHE = \triangle CGF \Rightarrow HE = GF; \triangle EBD = \triangle FDH \Rightarrow HF = EG$

$\Rightarrow \diamond EGFH$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Bài 4:

Cho tứ giác $ABCD$, E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AF, CE, BF, DE . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.



Lời giải

Sử dụng đường trung bình trong tam giác ta được $ENFQ$ là hình bình hành

$\Rightarrow EF$ và NQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường (1)

Tương tự ta được $EMFP$ là hình bình hành $\Rightarrow EF, MP$ cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (2)

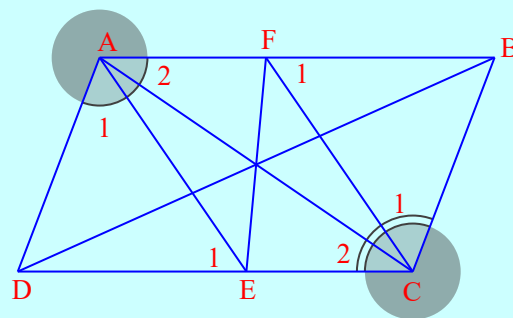
Từ (1)(2) suy ra MP và NQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường

Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài 5:

Cho hình bình hành $ABCD$. Tia phân giác của góc A cắt CD ở E , tia phân giác của góc C cắt AB ở F . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AFCE$ là hình bình hành
- Các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy tại một điểm.



Lời giải

- a) Áp dụng định nghĩa vào hình bình hành $ABCD$, ta được $AB \parallel CD \Rightarrow AF \parallel EC$ (1)

Áp dụng tính chất về góc, giả thiết vào hình bình hành $ABCD$ và tính chất của các cặp góc so

le, ta được:
$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_1}, \widehat{C_2} = \widehat{C_1} \\ \widehat{A} = \widehat{C}, \widehat{F_1} = \widehat{C_1} \end{cases} \Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow AE \parallel CF$$
 (2) (các cặp góc đồng vị bằng nhau)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \diamond AFCE$ có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.

- b) Áp dụng tính chất về đường chéo vào hai hình bình hành $ABCD$ và $AFCE$ ta được hai đường chéo còn lại của hai hình bình hành trên là BD, EF cùng đi qua trung điểm của đường chéo chung AC . Điều đó chứng tỏ rằng các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy tại trung điểm của AC .

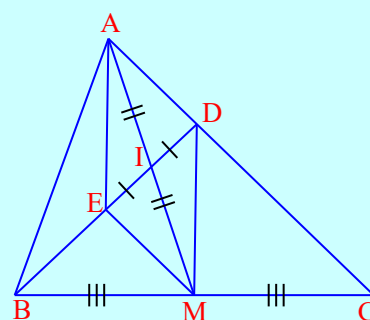
Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

Cách giải: Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc, đường chéo của hình bình hành để giải toán.

- Chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau
- Chứng minh các góc bằng nhau
- Chứng minh các đường thẳng song song
- Chứng minh các tam giác bằng nhau

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM , D là giao điểm của BI và AC . Chứng minh rằng $AD = \frac{1}{3}AC$



Lời giải

Do I là trung điểm của AM theo giả thiết nên chọn AM là một đường chéo

Vẽ thêm điểm E sao cho I là trung điểm của ED thì tứ giác $ADME$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành

Áp dụng định nghĩa và tính chất về cạnh vào hình bình hành $ADME$, ta được $ME = AD$ (1)

Và $ME \parallel AD, ME \parallel DC$ (2)

Lại có $BM = MC$ (3)

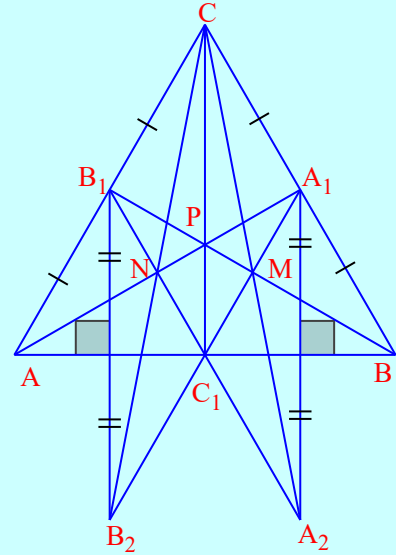
Từ (2)(3) $\Rightarrow BE = ED$ theo định lý đường trung bình, lúc đó ME là đường trung bình của $\triangle BDC$

Áp dụng định lý đường trung bình vào $\triangle BDC$, ta được: $ME = \frac{1}{2}CD$ (4)

Từ (1)(4) $\Rightarrow \frac{AD}{1} = \frac{DC}{2} = \frac{AD+DC}{3} = \frac{AC}{3}$. Vậy $AD = \frac{1}{3}AC$.

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ cân tại C . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC và AB . Lấy các điểm A_2, B_2 tương ứng đối xứng qua AB của A_1, B_1 . CA_2 và A_1C_1 cắt nhau tại M , CB_2 và B_1C_1 cắt nhau tại N . Gọi P là giao điểm của AN và BM . Chứng minh rằng $AP = BP$



Lời giải

Ta có $CC_1 \parallel A_1A_2$ và $CC_1 = A_1A_2 \Rightarrow \diamond CC_1A_1A_2$ là hình bình hành $\Rightarrow A_1M = C_1M$

Mặt khác $A_1B_1C_1B$ cũng là hình bình hành, do đó B, B_1, M thẳng hàng $\Rightarrow P \in BB_1$

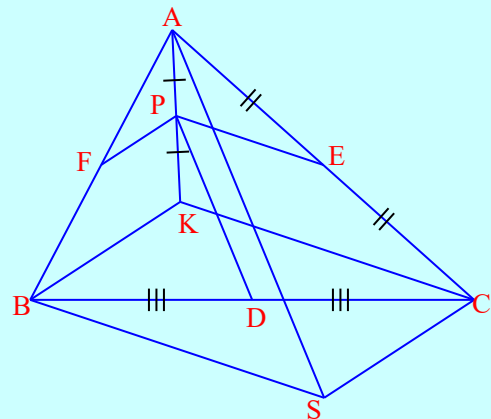
Tương tự ta có $P \in AA_1$

$\triangle ABC$ có AA_1, BB_1 là đường trung tuyến cắt nhau tại $P \Rightarrow AP = \frac{2}{3} AA_1; BP = \frac{2}{3} BB_1$

Mà $AA_1 = BB_1 \Rightarrow AP = BP$.

Bài 3*:

Cho điểm P nằm trong $\triangle ABC$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Từ A vẽ đường thẳng song song với PD cắt đường thẳng kẻ từ B song song với PE tại S . Chứng minh rằng nếu $BS = 2EP$ thì $CS \parallel PF$



Lời giải

Trên tia đối của tia PA lấy điểm K sao cho $PK = PA$

Áp dụng tính chất đường trung bình trong tam giác ABK, ACK ta có:

$$PF \parallel BK, PE \parallel CK, PE = \frac{1}{2} KC$$

Vì $PE \parallel BS, PE = \frac{1}{2} BS \Rightarrow KC \parallel BS, KC = BS \Rightarrow \diamond BSKC$ là hình bình hành

$$\Rightarrow CS \parallel BK \Rightarrow CS \parallel PF$$

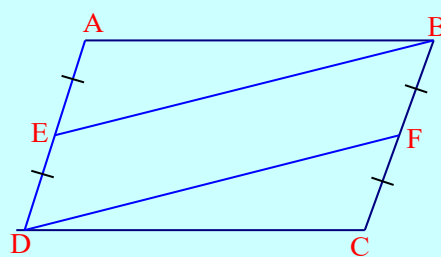
Bài 4:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD , F là trung điểm của BC

Chứng minh

a) $BE = DF; \widehat{ABE} = \widehat{CDF}$

b) $BE \parallel DF$



Lời giải

a) Ta chứng minh được $BEDF$ là hình bình hành $BE = DF$ và $\widehat{EBF} = \widehat{CDF}$.

Cách khác: $\triangle AEB = \triangle CFD (cgc) \Rightarrow BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$

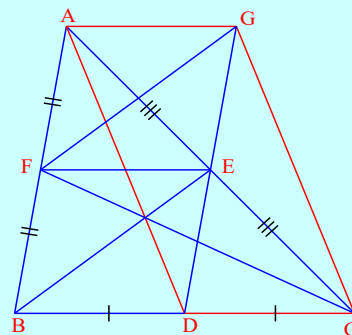
b) Vì $BEDF$ hình bình hành $\Rightarrow đpcm$.

Bài 5:

Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến AD, BE, CF . Đường thẳng kẻ qua E song song với AB , qua F song song với BE cắt nhau tại G . Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $AFEG$ là hình bình hành

b. D, E, G thẳng hàng và $CG = AD$



Lời giải

a. $\diamond AFE G$ là hình bình hành $\Rightarrow AF = EG, AF \parallel EG (gt) \Rightarrow BF = EG \Rightarrow \diamond BFE G$ là hình bình hành

(các cạnh đối song song)

b. D, E, G thẳng hàng và $CG = AD \Rightarrow \diamond AGCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AG = CD; AG \parallel CD$

Ta có: $AG = EF = \frac{1}{2}BC; AG \parallel EF \parallel BC$

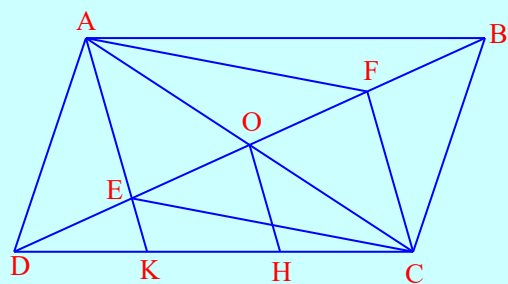
Bài 6:

Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. E và F lần lượt là trung điểm của OD và OB

a. Chứng minh rằng $AE \parallel CF$

b. Gọi K là giao điểm của AE và DC .

Chứng minh rằng: $DK = \frac{1}{2}KC$



Lời giải

a. Xét tứ giác $AECF$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường $\Rightarrow \diamond AECF$ là hình bình hành $\Rightarrow AE \parallel CF$

b. Qua O kẻ $OH \parallel CF \parallel AE$

Xét $\triangle DOH$, có EK là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow DK = KH(1)$

Xét hình thang $EFCK$, có OH là đường trung bình $\Rightarrow OH = \frac{1}{2}(EK + CF), KH = HC = \frac{1}{2}KC(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow DK = \frac{1}{2}KC \Leftrightarrow KC = 2DK$ (đpcm).

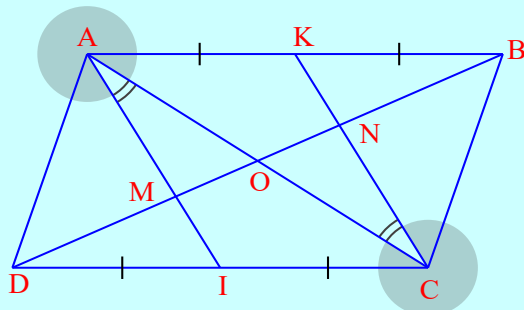
Bài 7:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

Gọi M và N lần lượt là giao điểm của AI và CK với BD . Chứng minh

a. $\triangle ADM = \triangle CBN$

b. $\widehat{MAC} = \widehat{NCA}, IM \parallel CN$



c. $DM = MN = NB$

Lời giải

a. Ta có $\diamond AKCI$ là hình bình hành $\Rightarrow \triangle ADI = \triangle CBK (ccc) \Rightarrow \triangle ADM = \triangle CBN (gcg)$

b. Vì $AKCI$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NCA}, IM \parallel CN$

c. Theo câu a $\Rightarrow DM = NB, MN = NB \Rightarrow DM = MN = NB$

Bài 8:

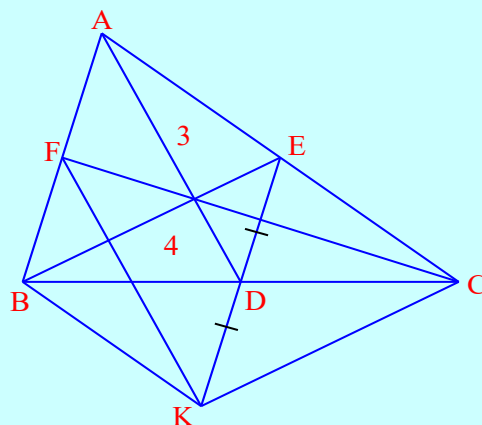
Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến

AD, BE, CF trong đó $AD = 3cm, BE = 4cm$

$AD \perp BE$

a. Vẽ điểm K sao cho D là trung điểm của EK , chứng minh rằng tứ giác $AFKD$ là hình bình hành

b. Tính độ dài đoạn thẳng CF



Lời giải

a) $\diamond AFKD$ là hình bình hành $\Rightarrow AF \parallel KD, AF = KD \Rightarrow AF = ED, AF \parallel ED \Rightarrow ED \parallel AB, ED = \frac{1}{2} AB$

b. Tính $FC \Rightarrow \triangle EKC$ vuông tại K và $BE = KC$ ($BECK$ là hình bình hành)

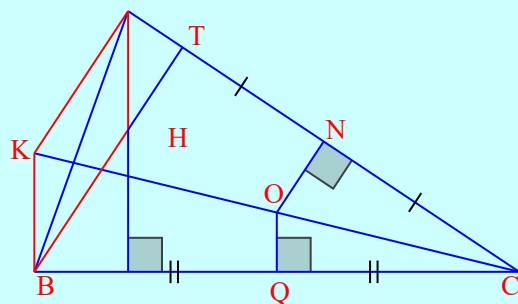
$\Rightarrow AD \perp BE, AD \parallel FK \Rightarrow FK \perp BE, BE \parallel CK \Rightarrow FK \perp KC$

Bài 9:

Cho tam giác ABC trực tâm H . Gọi M là trung điểm của BC , các đường trung trực của BC và AC cắt nhau tại O . Trên tia đối của tia OC lấy điểm K sao cho $OK = OC$. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $AHBK$ là hình bình hành

b. $OM = \frac{1}{2} AH$



Lời giải

a. Tứ giác $AHBK$ là hình bình hành $\Rightarrow AK \parallel BH, AH \parallel BK \Rightarrow \begin{cases} AK \parallel ON, BH \parallel ON \\ BK \parallel OQ (AH \parallel OQ) \end{cases}$

b. Ta có $OM = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}AH (BK = AH)$

Bài 10:

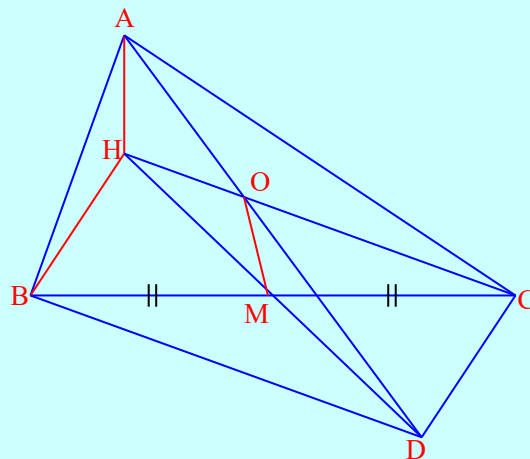
Cho tam giác ABC trực tâm H . Các đường thẳng vuông góc với AB tại B , vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D , Chứng minh rằng

a. Tứ giác $BDCH$ là hình bình hành

b. $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$

c. H, M, D thẳng hàng ($MB = MC$)

d. $OM = \frac{1}{2}AH (OA = OD)$



Lời giải

a. Tứ giác $BDCH$ có: $\begin{cases} BH \parallel CD (\perp AC) \\ CH \parallel BD (\perp AB) \end{cases} \Rightarrow \diamond BHCD$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

b. Xét Tứ giác $BDCH$ có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$

c. Ta có $\diamond BHCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của $BC \Rightarrow M$ là trung điểm của $DH \Rightarrow D, H, M$ thẳng hàng nhau.

d. Xét $\triangle AHD$, có $OA = OD (O \in AD), MH = MD (M \in HD) \Rightarrow OM$ là đường trung bình của $\triangle AHD$
 $\Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH \Rightarrow AH = 2.OM$

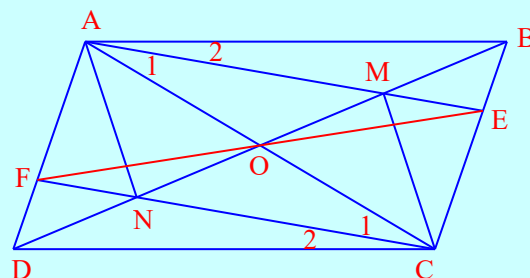
Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, các đường đồng quy

Cách giải: Vận dụng tính chất về đường chéo của hình bình hành

Bài 1:

Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OD

- a. Chứng minh rằng tứ giác $AMCN$ là hình bình hành
- b. Tia AM cắt BC ở E , tia CN cắt AD ở F . Chứng minh rằng AC, BD, EF đồng quy



Lời giải

- a. Cách 1: Ta có $\begin{cases} OA = OC \\ OM = ON \end{cases} \Rightarrow \diamond AMCN$ là hình bình hành

Cách 2: $\triangle AOM = \triangle OCN (cgc) \Rightarrow AM \parallel CN, AM = CN \Rightarrow \diamond AMCN$ là hình bình hành.

- b. Ta có AC và BD cắt nhau tại O , ta đi chứng minh AC cắt EF tại O

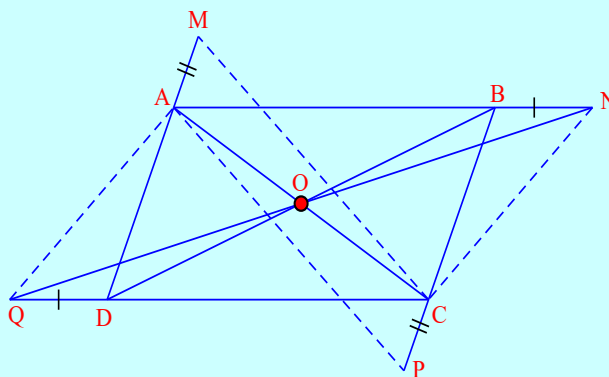
+) $\widehat{A} = \widehat{C}_1 \Rightarrow AE \parallel CF$

+) Ta có: $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \Rightarrow \triangle ABE = \triangle CDF \Rightarrow AE = CF$

Vậy $\diamond AE CF$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \cap BD \equiv O$

Bài 2:

Cho hình bình hành $ABCD$. Trên tia đối của tia AD và CB , lấy các điểm M và P sao cho $AM = CP$. Trên tia đối của BA và DC lấy các điểm N và Q sao cho $BN = DQ$. Chứng minh rằng bốn đường thẳng MP, NQ, AC và BD đồng quy.



Lời giải

Tứ giác $AMCP$ là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC

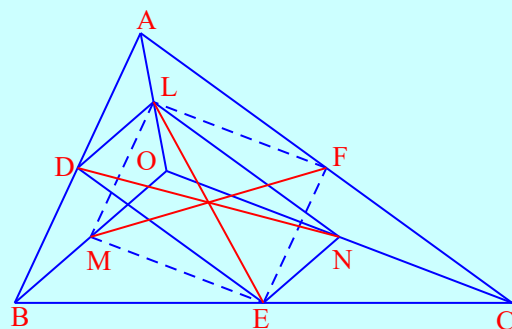
Tứ giác $ANCQ$ là hình bình hành nên NQ đi qua trung điểm O của AC

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên BD đi qua trung điểm O của AC

Do đó bốn đường thẳng MP, NQ, BD và AC đồng quy.

Bài 3:

Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC . Chứng minh rằng EL, EM, DN đồng quy.



Lời giải

Gọi I là trung điểm của LE , ta có: $DL \parallel EN \parallel OB$

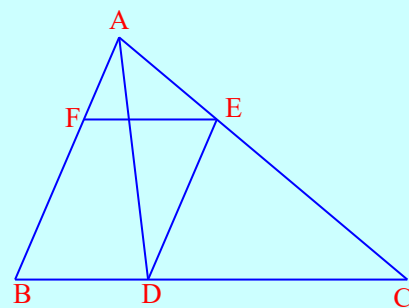
Và $DL = EN = \frac{1}{2}OB \Rightarrow \diamond DENL$ là hình bình hành

Chứng minh tương tự ta có $LMEF$ là hình bình hành $\Rightarrow EL, FM, DN$ đồng quy tại 1 điểm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho tam giác ABC . Từ 1 điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D . Giả sử $AE = BF$, chứng minh



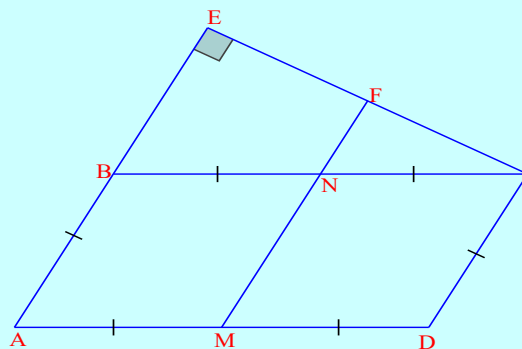
- Tam giác AED cân
- AD là phân giác của góc A

Lời giải

- Chứng minh $BDEF$ là hình bình hành $\Rightarrow ED = BF = AE \Rightarrow \triangle AED$ cân tại E
- Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} (= ADE) \Rightarrow AD$ là phân giác của $\widehat{A}$

Bài 2:

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 2AB$. Từ C vẽ CE vuông góc với AB . Nối E với trung điểm M của AD . Từ M vẽ MF vuông góc với CE cắt BC tại N



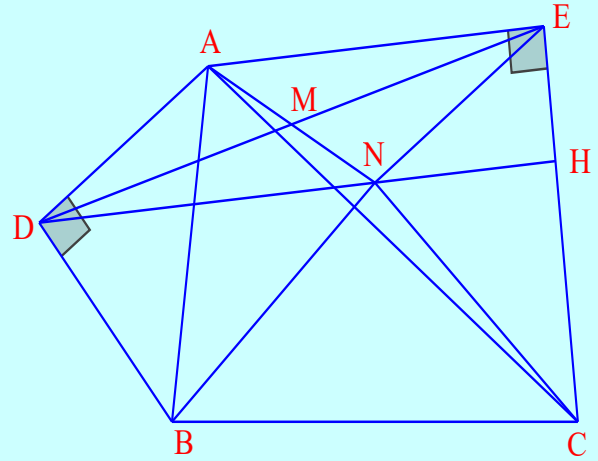
- Tứ giác $MNCD$ là hình gì?
- Tam giác EMC là tam giác gì?
- Chứng minh $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$

Lời giải

- Ta có $MNCD$ là hình bình hành
- Chứng minh được F là trung điểm của $CE \Rightarrow \triangle ECM$ cân tại M
- Chứng minh được $\widehat{AEM} = \widehat{FMC} \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{DCM} = \widehat{MCB}$ cân tại M
mà $AE \parallel MF$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{FMD} = 2\widehat{CMD} = 2\widehat{AEM}$

Bài 3:

Cho hai điểm cố định B, C . Một điểm A thay đổi trên một trong hai nửa mặt phẳng bờ BC sao cho A, B, C không thẳng hàng. Dựng hai tam giác vuông cân ADB và ACE với $DA = DB, EA = EC$ sao cho điểm D nằm khác phía đối với C đối với đường thẳng AB và điểm E nằm khác phía điểm B đối với đường thẳng AC . Gọi M là trung điểm của DE . Chứng minh rằng đường thẳng AM luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải

Trường hợp $\widehat{BAC}$ nhọn: Dựng hình bình hành $AEND$ ta có: $BD = DA = EN; DN = AE = EC$

Lại có $\widehat{NDB} = 90^\circ - \widehat{NDA} = 90^\circ - \widehat{AEN} = \widehat{CEN}$

$\triangle BDN$ và $\triangle NEC$ có:

$BD = NE; \widehat{NDB} = \widehat{CEN}; DN = CE \Rightarrow \triangle BDN = \triangle NEC \Rightarrow BN = CN, \widehat{DNB} = \widehat{ECN}$

Mặt khác $AE \perp CE, DN \parallel AE \Rightarrow DN \perp CE$ (1)

Đặt DN cắt CE tại $H \Rightarrow \widehat{HCN} + \widehat{HNC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BNC} = 90^\circ$

Do đó $\triangle BNC$ vuông cân tại $N \Rightarrow N$ cố định.

Vậy AM luôn đi qua điểm N cố định.

HÌNH CHỮ NHẬT

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông

$$ABCD \text{ là hình chữ nhật} \Leftrightarrow \begin{cases} \diamond ABCD \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} \end{cases}$$

***) Nhận xét:** Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành, một hình thang cân

2. Tính chất: Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân

- Tính chất về cạnh: Các cạnh đối bằng nhau, song song với nhau
- Tính chất về góc: Bốn góc bằng nhau
- Tính chất về đường chéo: Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
- Hình thang cân có 1 góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có 1 góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật

4. Cách vẽ hình chữ nhật

Có bốn cách vẽ hình chữ nhật cơ bản nhưng hay dùng nhất là hai cách sau

Cách 1: Sử dụng lưới ô vuông để vẽ tứ giác có bốn góc vuông

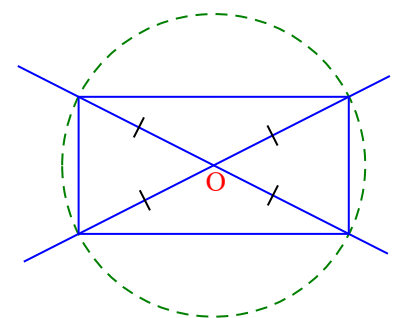
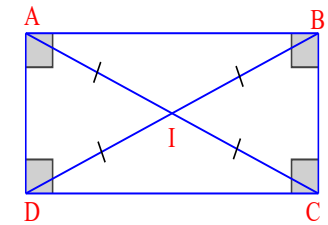
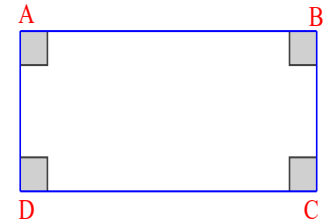
Cách 2: Vẽ tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường theo hai bước

Bước 1: Vẽ hai đường thẳng cắt nhau tại O

Bước 2: Vẽ đường tròn tâm O bán kính bất kì cắt hai đường thẳng trên tại bốn điểm ta được bốn đỉnh của hình chữ nhật

***) Lưu ý:**

- +) Cách 1 không chứng minh được là nhận được hình chữ nhật, chỉ là ảnh của hình chữ nhật
- +) Cách 2: Chứng minh được là hình chữ nhật

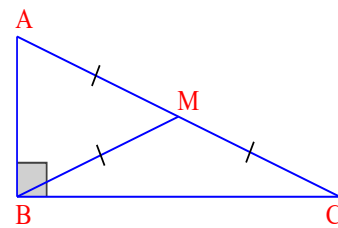


5. Ứng dụng vào tam giác vuông

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, ta có: $BM = \frac{1}{2} AC$

- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông:

Nếu $BM = \frac{1}{2} AC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A



6. Từ tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta thu được khái niệm thứ ba

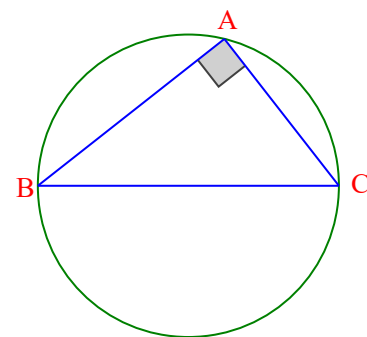
- Cứ nói đến tam giác vuông phải nghĩ tới đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

- Ý nghĩa của kinh nghiệm này là: Với các bài toán mà giả thiết hoặc kết luận đề cập đến tam giác vuông thì khi vẽ đường phụ ta vẽ thêm đường trung tuyến ứng với cạnh huyền.

7. Từ dấu hiệu nhận biết tam giác vuông ta có cách vẽ $\triangle ABC$ vuông tại A theo hai bước sau

Bước 1: Vẽ đường tròn đường kính BC

Bước 2: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn ta được $\triangle ABC$ vuông tại A



8. Từ dấu hiệu nhận biết tam giác vuông ta có thể vẽ các đường cao của tam giác nhọn $\triangle ABC$ bằng thước kẻ và compa theo hai bước

Bước 1: Vẽ nửa đường tròn đường kính BC

Bước 2: Giao điểm của hai cạnh AB, AC với nửa đường tròn chính là chân đường cao kẻ từ B và C . Giao điểm của hai đường cao là trực tâm của tam giác, nối đỉnh A với trực tâm ta được đường cao thứ ba

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh 1 tứ giác là hình chữ nhật

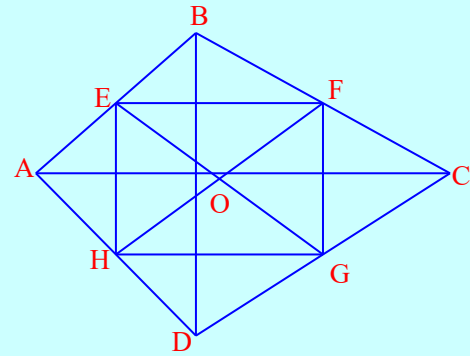
Cách giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh 1 tứ giác là hình chữ nhật

Bài 1:

Cho tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD \equiv O$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng

a. $OE + OF + OG + OH$ bằng nửa chu vi tứ giác $ABCD$

b. Tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật



Lời giải

a. Ta có

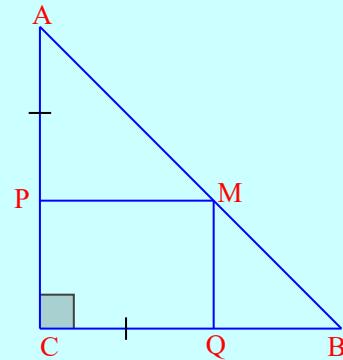
$$OE + OF + OG + OH = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) = \frac{1}{2}P_{ABCD}$$

b. Có $\begin{cases} EF \parallel GH \\ EF = GH \end{cases} \Rightarrow EFGH$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \parallel EF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD \perp EF \\ BD \parallel EH \end{cases} \Rightarrow EH \perp EF \Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật (dnhb)

Bài 2:

Cho tam giác ABC vuông cân tại C . Trên cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ $PM \parallel BC$ (M thuộc AB). Chứng minh tứ giác $PCQM$ là hình chữ nhật



Lời giải

Ta có $\triangle ABC$ vuông cân $\Rightarrow \hat{A} = 45^\circ \Rightarrow \triangle APM$ vuông cân $\Rightarrow AP = PM$

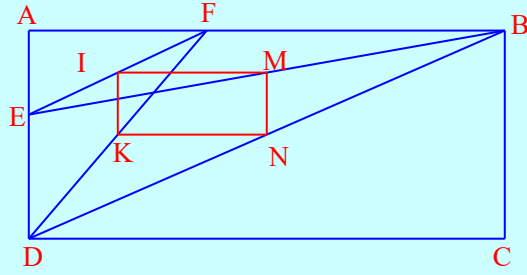
Theo giả thiết $AP = CQ \Rightarrow PM = CQ$

Lại có $PM \parallel CQ \Rightarrow \triangle PMCQ$ là hình bình hành

Mặt khác $\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \triangle PMCQ$ là hình chữ nhật (dnhb)

Bài 3:

Cho hình chữ nhật $ABCD$, E thuộc AD , F thuộc AB . Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của EF, DF, BE, BD . Chứng minh rằng $IN = KM$



Lời giải

Ta đi chứng minh tứ giác $IKMN$ là hình chữ nhật

$$+) \text{ Theo giả thiết có: } \begin{cases} IM \parallel KN (\parallel FB) \\ IM = KN = \frac{1}{2}FB \end{cases} \Rightarrow \diamond IKMN$$

Là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

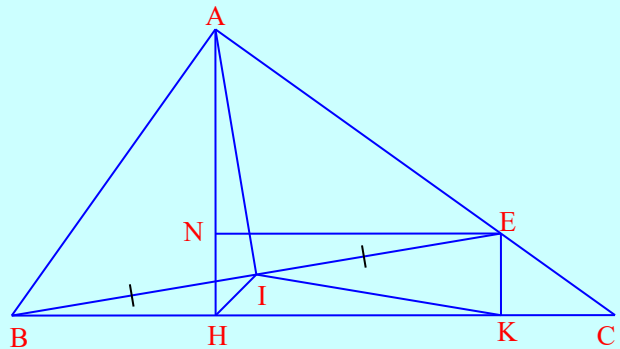
$$+) \begin{cases} IK \parallel DA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK \perp AB \\ IM \parallel AB \end{cases} \Rightarrow IM \perp IK \Rightarrow \diamond IKMN \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow IN = KM$$

Bài 4:

Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB < AC$, đường cao AH . Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $AE = AB$. Gọi I là trung điểm của BE , kẻ $EK \perp BC (K \in BC)$, $EN \perp AH (N \in AH)$

a. Chứng minh tứ giác $NEKH$ là hình chữ nhật

b. $\widehat{IHA} = \widehat{IHC}$



Lời giải

a. Tứ giác $NEKH$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật

b. Ta đi chứng minh $\triangle IHA = \triangle IHK$

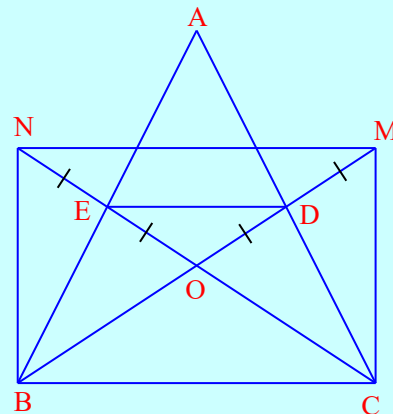
Xét $\triangle IHA, \triangle IHK$: IH cạnh chung, $AI = IK = \frac{1}{2}BE$

Cần thêm $AH = HK$ hoặc $AH = NE$ (do $HK = NE$)

$$\Delta ABH = \Delta AEN(ch - gn) \Rightarrow AH = NE \Rightarrow AH = HK \Rightarrow \Delta IHA = \Delta IHK \Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IHC}$$

Bài 5:

Cho tam giác ABC cân tại A , các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại O . Gọi M là điểm đối xứng với O qua D và N là điểm đối xứng với O qua E . Tứ giác $BNMC$ là hình gì? Vì sao?



Lời giải

Tứ giác $BNMC$ là hình chữ nhật

Giải thích: Ta có M đối xứng với O qua D nên $OD = DM$

O là trọng tâm của ΔABC nên $BO = 2OD \Rightarrow BO = OM$

Chứng minh tương tự ta có: $CO = ON$

Tứ giác $BNMC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành

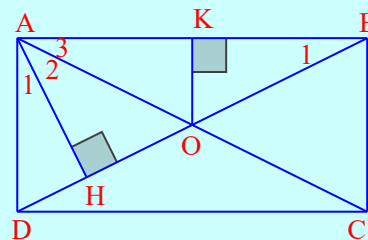
Có $\Delta BDC = \Delta CEB(cgc) \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow BO = CO \Rightarrow BM = CN$

Hình bình hành $BNMC$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật.

Bài 6:

Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $AD = \frac{1}{2}AC$

Và $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$. Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật



Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có: $OA = OC$

$$\text{Vì } AD = \frac{1}{2} AC \Rightarrow AD = 2AO$$

$$\text{Vẽ } AH \perp OD, OK \perp AB$$

Xét $\triangle AOD$ cân tại A , AH là đường cao $\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến, đường phân giác

$$\text{Do đó } HO = HD \text{ và } \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

$$\text{Vì } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1}$$

$$\triangle AOK = \triangle AOH \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)} \Rightarrow OK = OH = \frac{1}{2} OD \Rightarrow OK = \frac{1}{2} OB \Rightarrow \widehat{B_1} = 30^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle ABH \text{ vuông tại } H, \text{ có } \widehat{B_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{HAB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = 90^\circ$$

Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

Dạng 2: Vận dụng tính chất của HCN để chứng minh quan hệ bằng nhau, song song, vuông góc, đồng quy, tính độ dài các đoạn thẳng

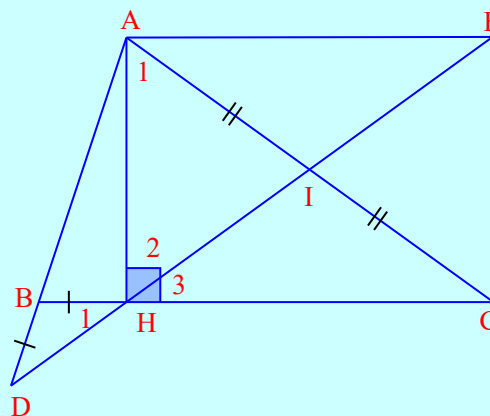
Cách giải: Áp dụng các tính chất của hình chữ nhật

- Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ có góc B nhọn và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ đường cao AH , trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BH$, gọi I là giao điểm của DH và BC . Chứng minh rằng:

- $AI = IC$
- $AD = HC$



Lời giải

Đặt $\widehat{C} = \alpha \Rightarrow \widehat{B} = 2\alpha$

a) Từ giả thiết $BD = BH \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{H_1}$ (1)

Vì trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau

Vì $\widehat{B} = 2\alpha$ là góc ngoài của $\triangle BDH$ nên $\widehat{B} = 2\alpha = \widehat{D} + \widehat{H} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{H} = \alpha$

Trong tam giác vuông AHC ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (2), vì cùng phụ với α

Từ (1)(2) $\Rightarrow \begin{cases} IC = IH \\ IH = IA \end{cases} \Rightarrow IA = IC$

b) Do I là trung điểm của AC theo câu a) nên chọn AC là một đường chéo

Vẽ thêm E sao cho I là trung điểm của HE thì tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật, vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và có góc H vuông.

Áp dụng định nghĩa vào hình chữ nhật $AHCE$ ta được $AE \parallel HC \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{H_3} = \alpha$

Lại có $\widehat{D} = \alpha \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{D}$

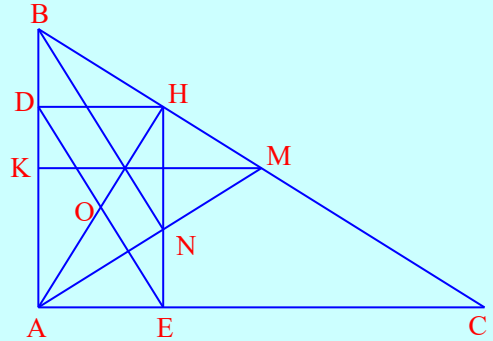
Áp dụng tính chất về cạnh vào hình chữ nhật $AHCE$ và tính chất hai cạnh đối diện với hai góc bằng nhau ta được:

$$\begin{cases} AE = HC \\ AE = AD \end{cases} \Rightarrow HC = AD.$$

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH, AM tương ứng là đường cao, đường trung tuyến. Kẻ HD, HE lần lượt vuông góc với AB, AC . Kẻ $MK \perp AB$. Gọi N là giao điểm của AM và HE . Chứng minh rằng:

- $AM \perp DE$
- $BN \parallel DE$
- MK, BN, AH đồng quy.



Lời giải

a) Gọi O là giao điểm của AH và DE

Ta có $ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \triangle OAD$ cân $\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODA}$ (1)

AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông ABC

$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \triangle AMB$ cân $\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAB}$ (2)

Mà $\widehat{OAD} + \widehat{MBA} = 90^\circ$ nên từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{ODA} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Leftrightarrow AM \perp DE$

b) $AM = MC \Rightarrow \triangle AMC$ cân $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{BHD}$

mặt khác $AE = HD \Rightarrow \triangle EAN = \triangle DHB$ (g.c.g) $\Rightarrow NE = BD$

Lại có $BD \parallel NE \Rightarrow BDEN$ là hình bình hành $\Rightarrow BN \parallel DE$

c) Ta có: $BN \parallel DE \Rightarrow BN \perp AM \Rightarrow \triangle BMA$ có AH, BN, MK là ba đường cao do đó AH, BN, MK đồng quy.

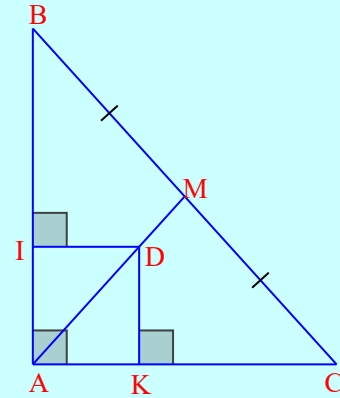
Bài 3:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có AM là đường trung tuyến. Gọi D là một điểm thuộc AM . Kẻ DI vuông góc với AB , DK vuông góc với AC

a) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$

b) Xác định vị trí điểm D trên AM sao cho

$$IK = \frac{1}{3}BC$$



Lời giải

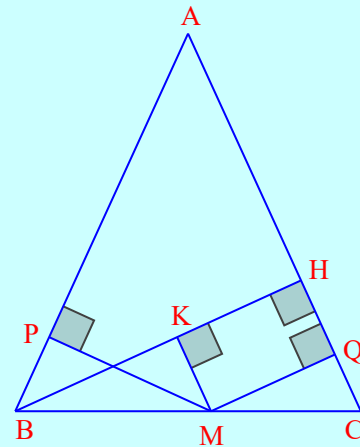
a) $AIDK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{KAI}$

$\triangle AMB$ cân (tính chất) $\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{MBA} \Rightarrow \widehat{KIA} = \widehat{MBA} \Rightarrow IK \parallel BC$

b) $IK = AD \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}.2AM = \frac{2}{3}AM \Rightarrow D$ là trọng tâm của $\triangle ABC$

Bài 4:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao BH . Từ điểm M trên cạnh BC kẻ $MP \perp AB, MQ \perp AC$. Chứng minh rằng $MP + MQ = BH$



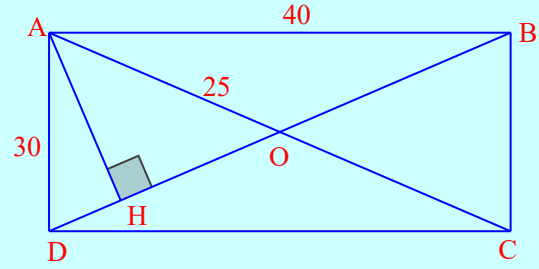
Lời giải

Kẻ $MK \perp BH \Rightarrow MK \parallel AC$ và $\widehat{K} = \widehat{H} = \widehat{Q} = 90^\circ$

Tứ giác

Bài 5:

Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 40\text{cm}$, $AD = 30$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD . Tính độ dài đoạn DH, OH, OB



Lời giải

Áp dụng định lý Pytago $\Rightarrow BD = 50\text{cm}$

$$OA = OB = OC = OD = 25\text{cm}$$

$$AD^2 - DH^2 = AH^2 = AO^2 - HO^2 = AO^2 - (DO^2 - DH^2)^2$$

$$\text{Hay } 30^2 - DH^2 = 25^2 - (25 - DH)^2 \Leftrightarrow 30^2 - DH^2 = 25^2 - (625 - 50DH + DH^2) \Leftrightarrow 50DH = 900$$

$$\Rightarrow DH = 18 \Rightarrow HO = 7\text{CM}$$

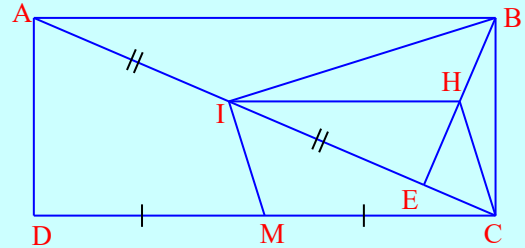
$$\text{Cách 2: } S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot AB = 600 = \frac{1}{2} AH \cdot BD \Rightarrow 600 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot AH \Rightarrow AH = 24 \Rightarrow DH = 18\text{cm}$$

Bài 6:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC . I là trung điểm của AE , M là trung điểm của CD , H là trung điểm của BE

a. Chứng minh rằng $CH \parallel IM$

b. Tính góc BIM



Lời giải

$$\text{a. Ta có IH là đường trung bình } \triangle AEB \Rightarrow \begin{cases} IH \parallel AB \\ IH = \frac{1}{2} AB \end{cases}$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} MC \parallel AB \\ MC = \frac{1}{2} AB \end{cases} \Rightarrow \diamond IMCH \text{ là hình bình hành} \Rightarrow CH \parallel IM$$

$$\text{Ta có: } IH \parallel MC, MC \perp BC \Rightarrow IH \perp BC$$

Xét $\triangle ABC$ có H là trực tâm $\Rightarrow \begin{cases} CH \perp BI \\ CH // IM \end{cases} \Rightarrow \widehat{BIM} = 90^\circ$

Bài 7:

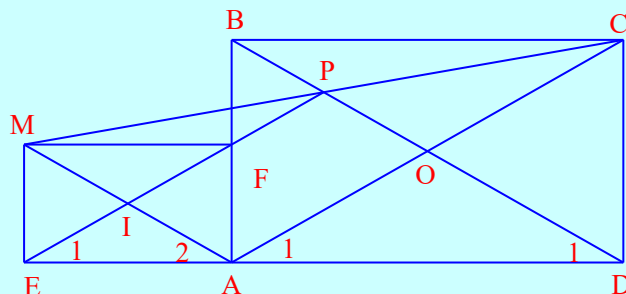
Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy điểm P tùy ý trên đường chéo BD . Gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a. Chứng minh $AM // BD$

b. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD, AB . Chứng minh $AEMF$ là hình chữ nhật

c. $EF // AC$

d. E, P, F thẳng hàng



Lời giải

a. Gọi O là giao điểm của BD và AC

Ta có OP là đường trung bình của $\triangle AMC \Rightarrow OP // AM$

b. Xét $\square AEMF$, có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow \square AEMF$ là hình chữ nhật

c. Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{D_1} (slt), \widehat{A_2} = \widehat{E_1}, \widehat{D_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow EF // AC$

d. E, F, P thẳng hàng $\Leftrightarrow IE // AC, IP // AC \Leftarrow IP$ là đường trung bình của $\triangle AMC$

Lại có $EF // AC \Rightarrow IE // AC$

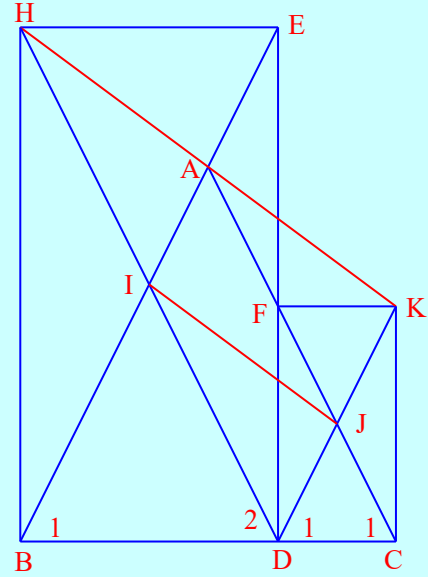
Theo tiên đề Ôclit thì E, F, P thẳng hàng

Bài 8:

Cho tam giác ABC cân tại A . Từ điểm D trên đáy BC kẻ đường vuông góc với BC cắt AB ở E và AC ở F . Vẽ các hình chữ nhật $DBHE$ và $CDFK$. Gọi I là tâm của hình chữ nhật $BDEH$, J là tâm của hình chữ nhật $CDFK$. Chứng minh rằng

a. $AIDJ$ và $AHIJ$ là các hình chữ nhật

b. A, H, K thẳng hàng và A là trung điểm của HK



Lời giải

a. $\diamond AIDJ$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AI \parallel DJ (\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1) \\ AJ \parallel DI (\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{D}_2) \end{cases}$

$\diamond AHIJ$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} HI \parallel AJ (HD \parallel AC) \\ AJ \parallel HI (\parallel ID) \end{cases}$

b. A, H, K thẳng hàng $\Rightarrow \diamond AJIK$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AI \parallel KJ (AI \parallel DJ) \\ AI = KJ (AI = DJ) \end{cases}$

Vậy qua A có $HA \parallel IJ, AK \parallel IJ \Rightarrow A, H, K$ thẳng hàng.

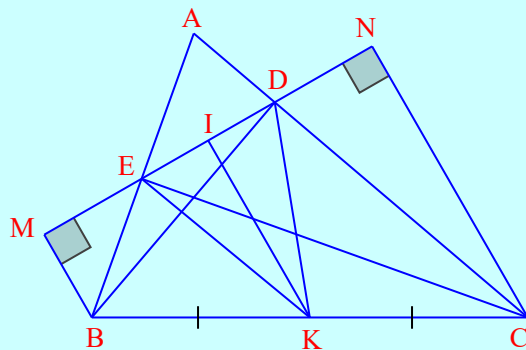
Dạng 3: Sử dụng định lý thuận và đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông

Cách giải: Sử dụng định lý về tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh các hình bằng nhau hoặc chứng minh tam giác vuông

Bài 1:

Cho tam giác ABC , các đường cao BD và CE . Gọi M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C đến DE . Gọi I là trung điểm của DE , K là trung điểm của BC . Chứng minh rằng

- a. $IK \perp ED$
- b. $EM = DN$



Lời giải

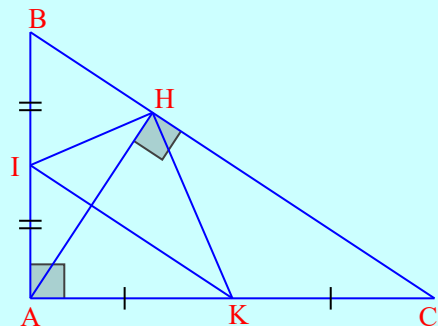
a. Ta có $EK = DK = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \begin{cases} \Delta EKD (KE = KD) \\ IE = ID \end{cases} \Rightarrow IK \perp ED$ (đpcm)

b. $\begin{cases} KB = KC (K \in BC) \\ KI \parallel BM \parallel NC \end{cases} \Rightarrow KI$ là đường trung bình của hình thang $MBNC \Rightarrow \begin{cases} IM = IN \\ IE = ID \end{cases} \Rightarrow ME = DN$

Bài 2:

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC . Chứng minh

- a. $\widehat{IHK} = 90^\circ$
- b. Chu vi tam giác IHK bằng nửa chu vi tam giác ABC



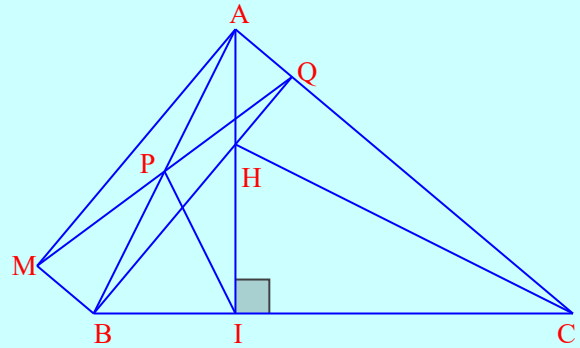
Lời giải

a) Ta có: $\triangle IAH, \triangle KAH$ cân tại I và K $\widehat{IHA} = \widehat{IAH}, \widehat{HAK} = \widehat{AHK}$

b. Ta có $IH = \frac{1}{2}AB, HK = \frac{1}{2}BC, IK = \frac{1}{2}BC \Rightarrow P_{IHK} = \frac{1}{2}P_{ABC}$ (đpcm)

Bài 3:

Cho tam giác ABC có đường cao AI . Từ A kẻ tia Ax vuông góc với AC , từ B kẻ tia By song song với AC . Gọi M là giao điểm của hai tia Ax và By . Nối M với trung điểm P của AB , đường MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H



a. Tứ giác $AMBQ$ là hình gì

b. Chứng minh rằng CH vuông góc với AB

c. Chứng minh tam giác PIQ cân

Lời giải

a. Ta có tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và bằng nhau)

b. Ta có H là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow CH \perp AB$.

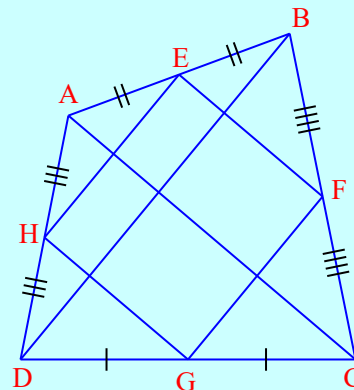
c. có $PI = PQ = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle PIQ$ cân tại P

Dạng 4: Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật

Cách giải: Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật

Bài 1:

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật



Lời giải

Ta có tứ giác $EFGH$ là hình bình hành

Để $EFGH$ trở thành hình chữ nhật thì:

$$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^\circ \Rightarrow HE \perp EF \Rightarrow AC \perp BD$$

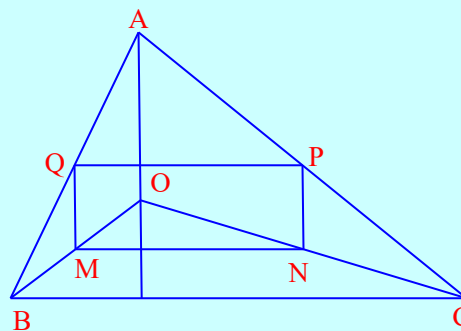
Vậy điều kiện là hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ vuông góc với nhau.

Bài 2:

Cho tam giác ABC . Gọi O là 1 điểm thuộc miền trong của tứ giác. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB

a. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

b. Xác định vị trí của điểm O để tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật



Lời giải

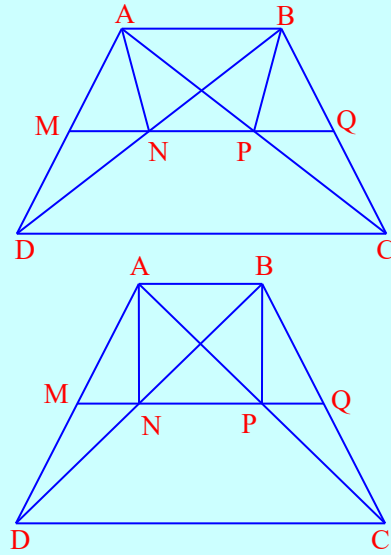
a. Ta có $MNPQ$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

b. Để $MNPQ$ trở thành hình bình hành thì O nằm trên đường cao xuất phát từ đỉnh A của

Bài 3:

Cho hình thang cân $ABCD (AB \parallel CD)$,
 $AB < CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung
điểm của các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC

- Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng
hàng
- Chứng minh tứ giác $ABPN$ là hình thang
cân
- Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD
để $ABPN$ là hình chữ nhật

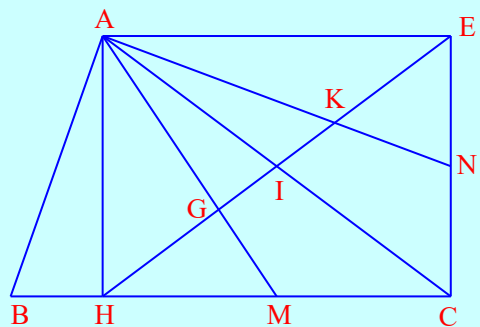
**Lời giải**

- Ta có $MN \parallel AB, MP \parallel AB, PQ \parallel AB, PN \parallel AB \Rightarrow M, N, P, Q$
thẳng hàng nhau.
- Hình thang $ABPN$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân
- Để $ABPN$ là hình chữ nhật thì $NP = AB$ hay $CD = 3AB$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho tam giác ABC , đường cao AH . Gọi I là trung điểm của AC . Lấy E là điểm đối xứng với H qua I . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE . Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K



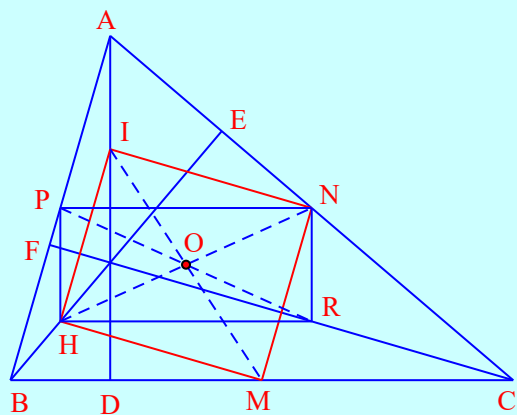
- Chứng minh tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật
- Chứng minh $HG = GK = KE$

Lời giải

- Chứng minh tứ giác $AHCE$ là hình bình hành, có $\widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow \diamond AHCE$ là hình chữ nhật
- Chứng minh G, K lần lượt là các trọng tâm của tam giác AHC, AEC và sử dụng tính chất 2 đường chéo của hình chữ nhật

Bài 2:

Cho tam giác ABC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , gọi I, H, R theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB . Chứng minh rằng



- Tứ giác $MNIK, PNRK$ là các hình chữ nhật
- P, N, R, K, I, M cùng thuộc 1 đường tròn
- D, E, F cũng thuộc đường tròn trên

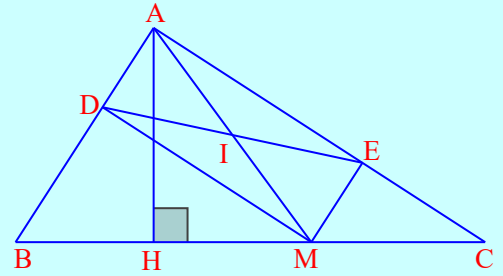
Lời giải

Ta có: $OD = \frac{1}{2}IM, OE = \frac{1}{2}KN, OF = \frac{1}{2}PR$

Bài 3:

Cho tam giác ABC vuông tại A , M thuộc BC . Gọi D và E là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC

- Định dạng tứ giác $ADME$
- Gọi I là trung điểm của DE . Chứng minh A, I, M thẳng hàng
- Điểm M nằm ở đâu trên BC thì DE nhỏ nhất. Tính DE trong trường hợp đó biết $AB = 15cm, AC = 20cm$



Lời giải

- Tứ giác $ADME$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật
- DE nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất ($DE = AM$). AM nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM = AH$ khi M trùng H

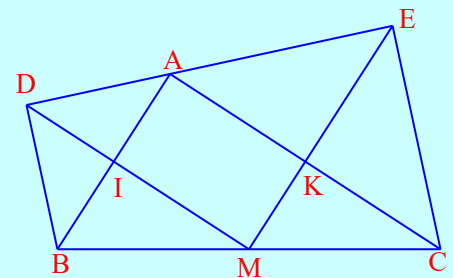
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A

$$\Rightarrow BC = 25cm(\text{pytago}) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12(cm)$$

Bài 4:

Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác ABC , vẽ hai tam giác vuông cân ADB ($DA = DB$) và ACE ($AE = EC$). Gọi M là trung điểm của BC , I là giao điểm của DM với AB , và K là giao điểm của EM với AC . Chứng minh:

- Ba điểm D, A, E thẳng hàng.
- Tứ giác $IAKM$ là hình chữ nhật.



c) Tam giác DME là tam giác vuông cân.

Lời giải

a) Chứng minh $\widehat{DEA} = 180^\circ$

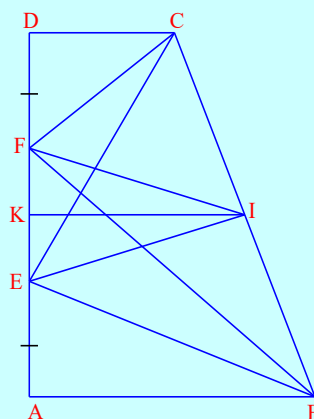
b) Chứng minh $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = \widehat{IAK} = 90^\circ$

c) Chứng minh $\triangle DME$ có $\widehat{EDM} = \widehat{DEM} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle DME$ vuông cân ở M .

Bài 5:

Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có các điểm E và F thuộc cạnh AD sao cho $AE = DF$ và $\widehat{BFC} = 90^\circ$. Chứng minh $\widehat{BEC} = 90^\circ$.



Lời giải

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, AD

Chú ý $\triangle FEI$ cân ở I

Chứng minh: $IE - IB = IC \Rightarrow \triangle EBC$ vuông tại $E \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$.

HÌNH THOI

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau

$$ABCD \text{ là hình thoi} \Leftrightarrow \begin{cases} \diamond ABCD \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$

2. Tính chất: Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành

- Tính chất về cạnh:

+) Có bốn cạnh bằng nhau

+) Các cạnh đối song song

- Tính chất về góc: Các góc đối bằng nhau

- Tính chất về đường chéo:

+) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

+) Hai đường chéo vuông góc với nhau

+) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi

- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi

- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi

- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh là hình thoi

4. Chú ý:

- Hình thoi có 1 tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo

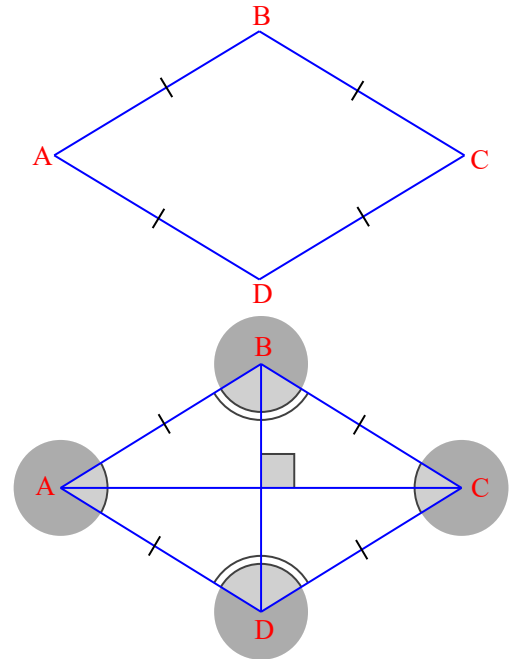
- Hình thoi có hai trục đối xứng là các đường chéo của hình thoi

5. Cách vẽ hình thoi

Có bốn cách vẽ hình thoi nhưng hay dùng nhất là hai cách sau

Cách 1: Vẽ một đường chéo, dựng đường trung trực của đường chéo đó, nối hai đầu đường chéo với hai giao điểm của hai cung tròn vừa vẽ thu được bốn đỉnh của hình thoi

Cách 2: Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường



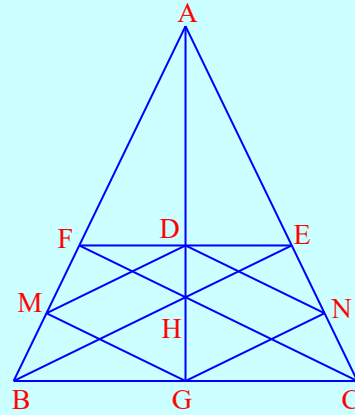
B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh 1 tứ giác là hình thoi

Cách giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh 1 tứ giác là hình thoi

Bài 1:

Cho tam giác ABC cân tại A . Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt EF tại D , cắt BC tại G . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB, AC . Chứng minh rằng tứ giác $DNGM$ là hình thoi.



Lời giải

Ta có $\triangle ABE = \triangle ACF$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AE = AF, BE = CF$

Vì H là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow AH$ là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến, từ đó ta có $GB = GC$ và $DE = DF$

Xét $\triangle EBC$ có $GN \parallel BE (\perp AC)$ và $GB = GC \Rightarrow NE = NC$

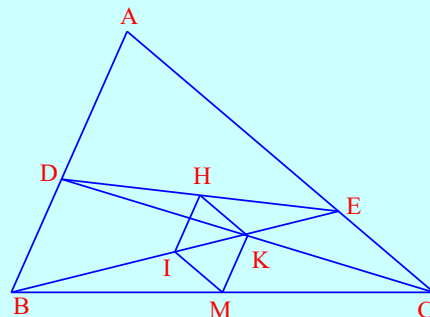
Chứng minh tương tự ta được $MF = MB$

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $DM \parallel GN$ và $DM = GN$
 $\Rightarrow \diamond DNGM$ là hình bình hành

Mặt khác, $DM = DN$ (cùng bằng một nửa của hai cạnh bằng nhau) nên $DNGM$ là hình thoi.

Bài 2:

Cho tam giác ABC , điểm D thuộc cạnh AB , điểm E thuộc cạnh AC sao cho $BD = CE$. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, BC, DE . Chứng minh rằng tứ giác $MNIK$ là hình thoi.



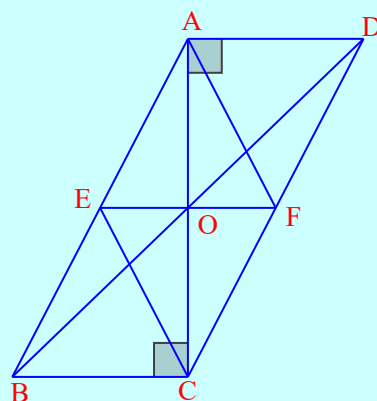
Lời giải

Ta có: $KN = NI = IM = MK = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CE \Rightarrow \diamond MNIK$

là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

Bài 3:

Cho hình bình hành $ABCD$ có AC vuông góc với AD . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh tứ giác $AECF$ là hình thoi.



Lời giải

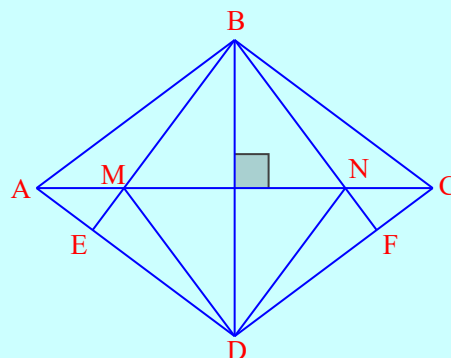
Cách 1: Ta có tứ giác $AECF$ là hình hành có hai đường chéo vuông góc $\Rightarrow \diamond AECF$ là hình thoi (dấu hiệu)

Cách 2: $AE = EC = CF = FA \Rightarrow \diamond AECF$ là hình thoi (dấu hiệu)

Bài 4:

Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Từ đỉnh góc tù B kẻ các đường vuông góc BE, BF đến AD và DC , cắt AC theo thứ tự ở M và N . Chứng minh rằng

- $AE = CF$
- Tam giác BEF đều
- Tứ giác $BMND$ là hình thoi
- Cho $AC = 16cm$, tính chu vi tam giác BEF



Lời giải

b. $\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC, \triangle ABD$ là các tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{EBD} = \widehat{FBD} = 30^\circ \Rightarrow \triangle BEF$ đều (tam giác cân có 1 góc bằng 60°)

c. Ta đi chứng minh $MB = BN = ND = DM$

+) AC là đường trung trực của $BD \Rightarrow MB = MD(1)$

+) AC là đường trung trực của $BD \Rightarrow NB = ND(2)$

+) $\triangle ABE = \triangle CBF(ch - gn) \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CBF} \Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBN$

$\Rightarrow MB = NB(3) \Rightarrow MB = BN = ND = DM \Rightarrow \diamond BMDN$

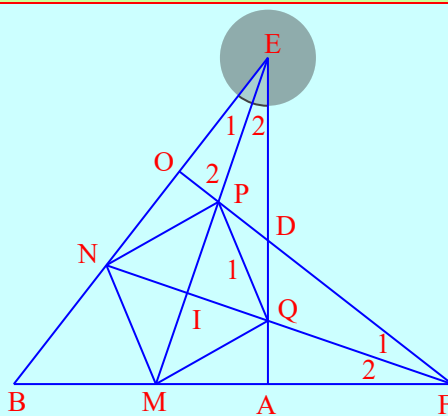
d. Ta có EF là đường trung bình của tam giác $ACD \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AC = 8cm \Rightarrow P_{BEF} = 24(cm)$

Bài 5:

Cho tam giác ABE vuông tại A . Từ điểm O trên cạnh BE kẻ đường vuông góc với BE cắt tia đối của tia AB tại F , cắt AE ở D . Tia phân giác của góc E cắt AB, OD lần lượt tại M và P , tia phân giác của góc F cắt BO, DA ở N và Q . Chứng minh rằng

a. $EM \perp FN$

b. $\diamond MNPQ$ là hình thoi



Lời giải

a. Gọi I là giao điểm của MP và NQ

+) $\hat{E} = \hat{F}$ (cùng phụ với $\hat{B}$)

+) $\triangle FIP, \triangle OEP$ ($\hat{P}_1 = \hat{P}_2, \hat{E}_1 = \hat{F}_1$) $\Rightarrow \hat{O} = \hat{I} = 90^\circ \Rightarrow EM \perp FN$

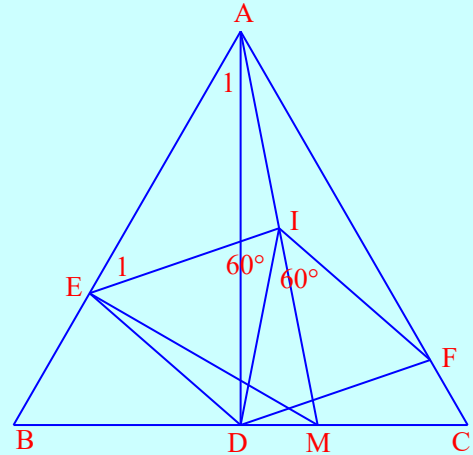
b. Ta có $\triangle PFM$ cân tại $F \Rightarrow PI = IM$, $\triangle ENQ$ cân tại $E \Rightarrow NI = IQ$

Tứ giác $MNPQ$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau nên là hình thoi

Bài 6:

Cho tam giác đều ABC . Gọi M là điểm thuộc cạnh BC , E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Gọi I là trung điểm của AM , D là trung điểm của BC

- Tính số đo các góc $\widehat{DIE}, \widehat{DIF}$
- Chứng minh rằng tứ giác $DEIF$ là hình thoi



Lời giải

$$a. \widehat{DIE} = \widehat{MIE} - \widehat{MID} = \widehat{A_1} + \widehat{E_1} - (\widehat{DAI} + \widehat{ADI}) = 2\widehat{A_1} - 2\widehat{DAI} = 2(\widehat{EAI} - \widehat{DAI}) = 2.30^\circ = 60^\circ$$

Tương tự ta có:

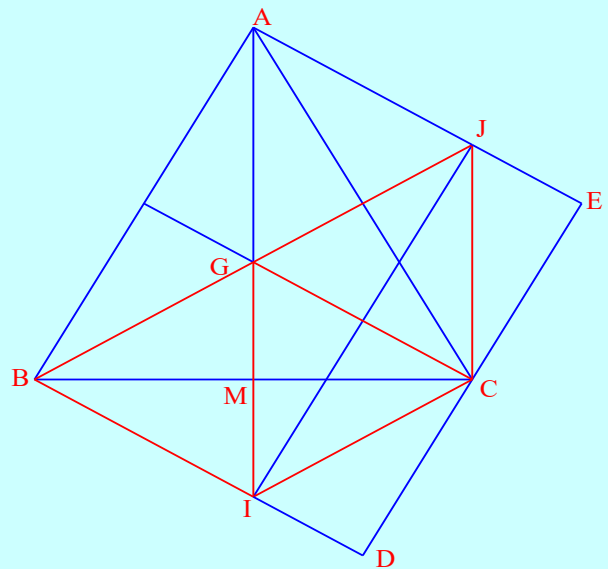
$$\widehat{DIF} = 2(\widehat{FAI} + \widehat{DAI}) = \widehat{BAC} = 60^\circ = \widehat{DIM} + \widehat{MIF}$$

- Ta có $\triangle DEI, \triangle DFI$ là các tam giác đều $\Rightarrow EI = IF = FD = DE \Rightarrow \diamond DEIF$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết).

Bài 7:

Cho tam giác ABC đều trọng tâm G . Vẽ hình chữ nhật $ABDE$ sao cho C thuộc đoạn thẳng DE . Tia AG cắt BD tại I , tia AE cắt BG tại J . Chứng minh rằng

- I và J đối xứng nhau qua CG
- Các tứ giác $CGBI, GICJ, CJAG$ là hình thoi.



Lời giải

Ta có $\triangle ABJ = \triangle BAI$ (g.c.g) $\Rightarrow AI = BJ \Rightarrow \diamond ABIJ$ là hình thang cân có hai đáy AI và BJ

Vì hình thang cân $ABIJ$ có một góc vuông nên suy ra $ABIJ$ là hình chữ nhật, tâm G

Mặt khác $CG \perp AB \Rightarrow CG$ là đường trung trực của cạnh IJ

Vậy I và J đối xứng nhau qua đường thẳng CG

b) Ta có $\widehat{ABI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{GBC} = \widehat{IBC} = 30^\circ$

Gọi M là trung điểm của BC , trong tam giác BGI có BM là đường cao, đường phân giác nên M là trung điểm của GI

Tứ giác $CBDI$ có hai đường chéo BC, GI vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, do đó $CBGI$ là hình thoi

Chúng minh tương tự ta có $CGAI$ là hình thoi

Vì I, J đối xứng nhau qua đường thẳng CG nên $CI = CJ, GI = GJ$ (1)

Dễ thấy $\triangle BGI$ là tam giác đều $\Rightarrow CI = BG = GI$ (2)

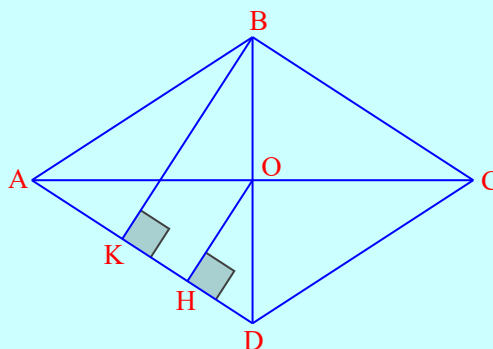
Từ (1)(2) $\Rightarrow GICJ$ có bốn cạnh bằng nhau, vậy $GICJ$ là hình thoi.

Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình thoi để chứng minh quan hệ bằng nhau, song song, vuông góc, tính độ dài các đoạn thẳng

Cách giải: Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc, đường chéo của hình thoi

Bài 1:

Cho hình thoi $ABCD$, độ dài mỗi cạnh là 13cm . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ $OH \perp AD$. Biết $OH = 6\text{cm}$, tính tỉ số của hai đường chéo BD và AC



Lời giải

Vẽ $BK \perp AD$

Xét $\triangle BKD$ có $OH \parallel BK (\perp AD)$, $OB = OD \Rightarrow KH = HD$

Vậy OH là đường trung bình của $\triangle BKD \Rightarrow OH = \frac{1}{2}BK \Rightarrow BK = 12\text{cm}$

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K , ta có: $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow AK = 5\text{cm} \Rightarrow KD = 8\text{cm}$

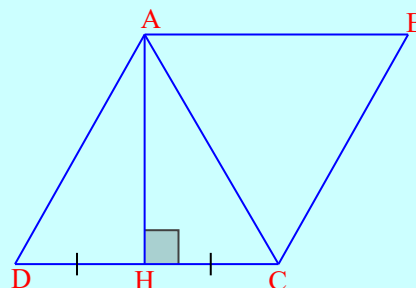
Xét $\triangle BKD$ vuông tại K , ta có: $BD^2 = BK^2 + DK^2 = 12^2 + 8^2 = 208$

Xét $\triangle AOH$ vuông tại H , ta có: $OA^2 = OH^2 + AH^2 = 6^2 + 9^2 = 117 \Rightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 117 \Rightarrow AC^2 = 468$

Do đó $\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{208}{468} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{2}{3}$.

Bài 2:

Cho hình thoi $ABCD$ có góc A tù. Biết đường cao kẻ từ đỉnh A đến cạnh CD chia đôi cạnh đó. Tính các góc của hình thoi



Lời giải

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh CD và từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} AH \perp CD \\ CH = HD \end{cases} \Rightarrow AH \text{ là đường trung trực của đoạn } CD \text{ nên } AC = AD \quad (1)$$

Áp dụng định nghĩa vào hình thoi $ABCD$ nên $\triangle ACD$ là tam giác đều, do đó $\widehat{D} = 60^\circ$

Vì góc D và góc $\widehat{A}$ là hai góc trong cùng phía của $AB \parallel CD$ nên chúng bù nhau hay

$$\widehat{D} + \widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Áp dụng tính chất về góc vào hình thoi ta được $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^\circ, \widehat{A} = \widehat{C} = 120^\circ$.

Bài 3:

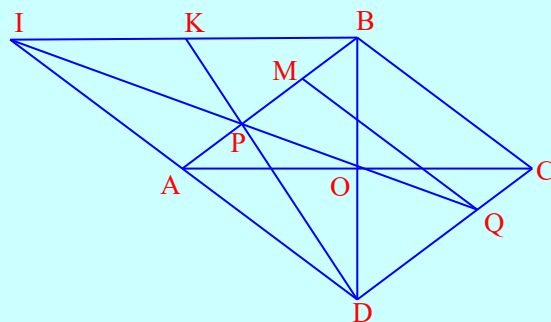
Trên cạnh AB và CD của hình thoi $ABCD$ lấy các điểm P và Q sao cho

$$AP = \frac{1}{3}AB, CQ = \frac{1}{3}CD. \text{ Gọi } I \text{ là giao điểm}$$

của PQ và AD , K là giao điểm của DP và BI . Chứng minh rằng:

a) $\triangle BID$ vuông

b) $BK = IK$



Lời giải

a) Gọi M là trung điểm của $BP \Rightarrow BM = CQ \Rightarrow BMCQ$ là hình bình hành

$$\Rightarrow QM = BC, QM \parallel BC$$

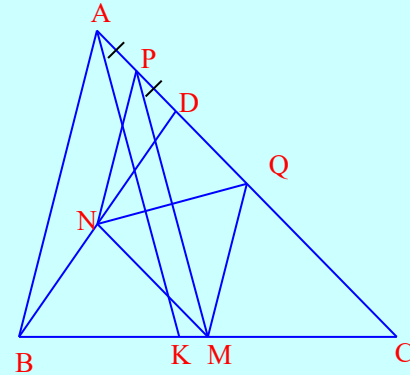
$$\triangle AIP = \triangle MQP (g.c.g) \Rightarrow AI = MQ \Rightarrow AI = AD (= MQ) \Rightarrow \triangle BID \text{ có } BI \text{ là đường trung tuyến,}$$

$$AI = AD = AB \Rightarrow \triangle BID \text{ vuông tại } B$$

b) $\triangle BID$ có BI là đường trung tuyến, $AP = \frac{1}{3}AB \Rightarrow P$ là trọng tâm $\Rightarrow BK = IK$.

Bài 4:

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Trên cạnh AC của tam giác lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi Q là trung điểm của AC , N là trung điểm của BD . Vẽ đường phân giác AK của góc BAC . Chứng minh rằng $AK \perp NQ$



Lời giải

a. Ta có $\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều $\Rightarrow AH = HD$

Tứ giác $ABDE$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau nên là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

b. Có $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow CD \parallel AB$

Có $ABDE$ là hình thoi $\Rightarrow DE \parallel AB \Rightarrow E, D, C$ thẳng hàng

c. Xét $\diamond ABCE$ có $AB \parallel CE \Rightarrow \diamond ABCE$ là hình thang

Lại có $AE = AB = BC \Rightarrow$ là hình thang có hai cạnh kề bằng nhau

$\hat{C} = \hat{E} = 60^\circ \Rightarrow ABCE$ là hình thang cân $\Rightarrow AC = BE$

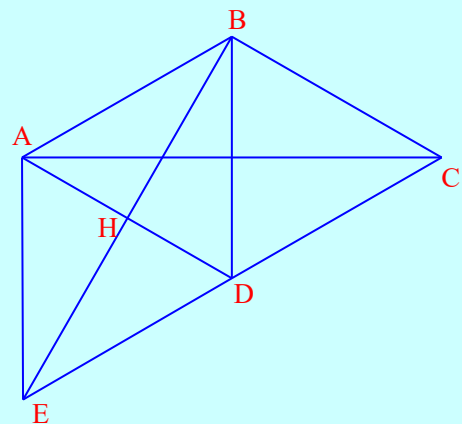
Bài 5:

Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$, vẽ BH vuông góc với AD rồi kéo dài một đoạn $HE = HB$. Nối E với A , E với D

a. Chứng minh rằng tứ giác $ABDE$ là hình thoi

b. E, D, C thẳng hàng

c. $EB = AC$



Lời giải

a. Ta có $\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều $\Rightarrow AH = HD$

Tứ giác $ABDE$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau nên là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

b. Có $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow CD \parallel AB$

Có $ABDE$ là hình thoi $\Rightarrow DE \parallel AB \Rightarrow E, D, C$ thẳng hàng

c. Xét $\diamond ABCE$ có $AB \parallel CE \Rightarrow \diamond ABCE$ là hình thang

Lại có $AE = AB = BC \Rightarrow$ là hình thang có hai cạnh kề bằng nhau

$\widehat{C} = \widehat{E} = 60^\circ \Rightarrow ABCE$ là hình thang cân $\Rightarrow AC = BE$

Bài 6:

Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AD = 2AB$. Gọi M là trung điểm của AD , N là trung điểm của BC . Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với MN ở E cắt AB ở F . Chứng minh rằng

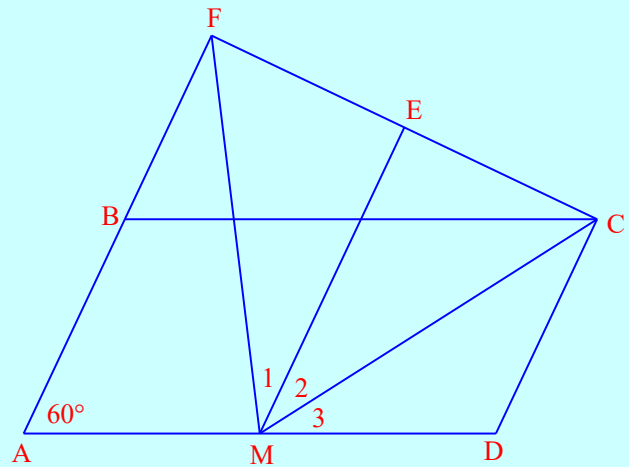
a. Tứ giác $MNCD$ là hình thoi

b. E là trung điểm của CF

c. Tam giác MCF đều

d. F, N, D thẳng hàng

e. $\widehat{BAD} = 2\widehat{AFM}$



Lời giải

a. $\diamond MNCD$ có: $\begin{cases} NC = MD = \frac{1}{2}BC \\ NC \parallel MD \end{cases} \Rightarrow \diamond MNCD$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Ta lại có $MD = DC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \diamond MNCD$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

b. Xét $\triangle BCF$ có N là trung điểm của BC ,

$NE \parallel BF \Rightarrow E$ là trung điểm của FC

c. Xét $\triangle MCF$ có ME là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle MCF$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

Mặt khác ta lại có $MNCD$ là hình thoi $\Rightarrow \widehat{M}_2 = 2\widehat{M}_3$

$\Rightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 60^\circ \Rightarrow \widehat{FMC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle MFC$ là tam giác đều

d. Xét $\triangle MFC$ có $FM = FC \Rightarrow F$ thuộc đường trung trực của MC

mặt khác $DM = DC \Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của MC

Vậy FD là đường trung trực của MC (1)

$\diamond MNCD$ là hình thoi $\Rightarrow ND$ là đường trung trực của MC (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow FD \equiv ND \Rightarrow F, N, D$ thẳng hàng

$$\text{e. } \begin{cases} \widehat{BAD} = \widehat{NMD} \\ \widehat{NMD} = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 2\widehat{M}_3 \Rightarrow \widehat{BAD} = 2\widehat{AFM} \\ \widehat{M}_3 = \widehat{AFM} \end{cases}$$

Bài 7:

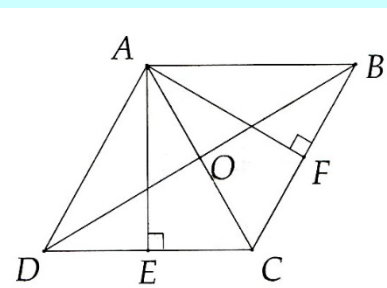
Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{B} = 60^\circ$. Kẻ

$AE \perp DC, AF \perp BC$

a) Chứng minh $AE = AF$

b) Chứng minh tam giác AEF đều.

c) Biết $BD = 16\text{cm}$, tính chu vi tam giác AEF



Lời giải

a) Do AC là phân giác của góc $\widehat{DBC}$ nên $AE = FA$

b) Có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ là các tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{FAC} = 30^\circ$. Vậy $\triangle AEF$ cân và có $\widehat{FAE} = 60^\circ$ nên $\widehat{B} = 60^\circ$ đều.

c) EF là đường trung bình của tam giác BCD .

Vậy $FE = \frac{1}{2}DB = 8\text{cm}$;

Chu vi $\triangle AEF$ là 24cm

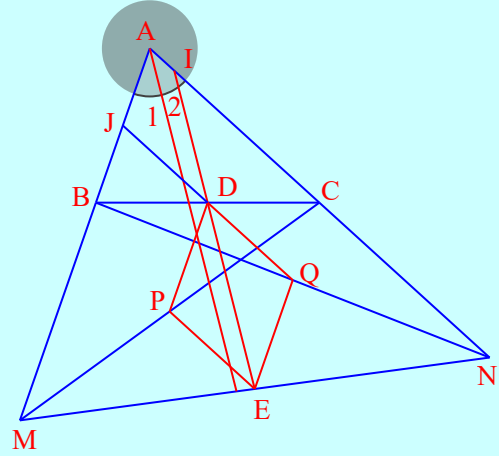
Bài 8:

Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Trên tia đối của tia BA lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Gọi D, E, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, MN, MC, NB

a) DE cắt AM tại J . Chứng minh rằng

$$\widehat{PEQ} = \widehat{MJQ}$$

b) DE cắt AN tại I . Chứng minh rằng DE song song với đường phân giác của $\widehat{BAC}$



Lời giải

a) $\triangle BMN$ có QE là đường trung bình nên ta có $QE \parallel BM$

Tương tự ta có $DP \parallel BM, QD \parallel CN, PE \parallel CN \Rightarrow QE \parallel DP, PE \parallel DQ \Rightarrow DPEQ$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \widehat{PEQ} = \widehat{PDQ}$$

Mặt khác $\widehat{PDQ} = \widehat{MJQ}$ (so le trong)

$$\text{Vậy } \widehat{PEQ} = \widehat{MJQ}$$

b) Gọi Ax là đường phân giác của $\widehat{BAC}$

$$\text{Ta có } DP = \frac{1}{2}BM, PE = \frac{1}{2}CN \Rightarrow DP = PE \text{ (} BM = CN \text{)}$$

Do đó $DPEQ$ là hình thoi $\Rightarrow DE$ là phân giác của $\widehat{DPQ}$ đồng thời $\widehat{PDQ} = \widehat{PEQ} = \widehat{MJQ} = \widehat{BAC}$

$$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{D_2} = \widehat{DIC} \text{ (đồng vị)} \Rightarrow DE \parallel Ax \text{ (hai góc đồng vị bằng nhau).}$$

Dạng 3: Tìm điều kiện để tứ giác là hình thoi

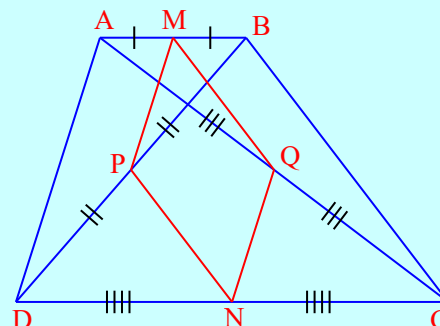
Cách giải: Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình thoi

Bài 1:

Cho hình thang $ABCD$ gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của hai đáy và hai đường chéo của hình thang

a. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

b. Hình thang $ABCD$ phải có thêm điều kiện gì để tứ giác $MNPQ$ là hình thoi



Lời giải

a. Áp dụng tính chất đường trung bình của tam giác cho tam giác ABC và BCD , ta có:

$$MQ \parallel PN \parallel BC; MQ = PN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \diamond MNPQ$$

Là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

b. Tương tự câu a ta có: $QN \parallel MP \parallel AD; QN = MP = \frac{1}{2}AD$

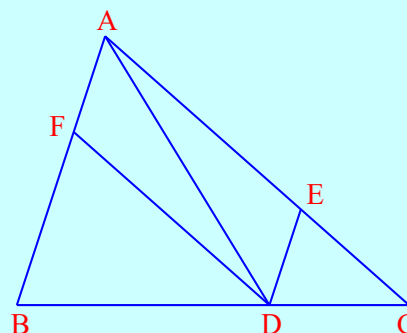
Để $MNPQ$ là hình thoi thì $MN \perp PQ \Rightarrow MN \perp CD \Rightarrow MN$ là trục đối xứng của hình thang $ABCD$ hay hình thang $ABCD$ phải là hình thang cân

Bài 2:

Cho tam giác ABC , qua điểm D thuộc cạnh BC , kẻ các đường thẳng song song với AB và AC , cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F

a. Tứ giác $AEDF$ là hình gì?

b. Điểm D ở vị trí nào trên BC thì $AEDF$ là hình thoi



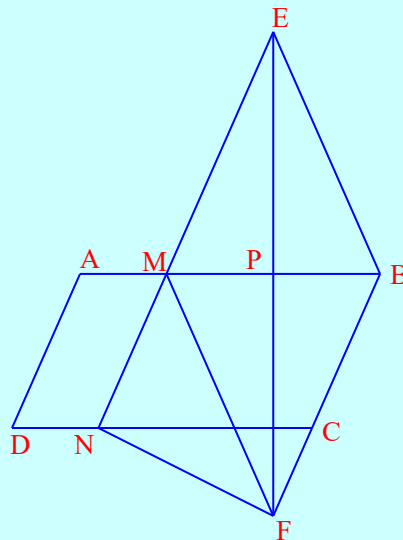
Lời giải

- a. Ta có tứ giác $AEDF$ là hình bình hành (các cạnh đối song song)
- b. Để $AEDF$ trở thành hình thoi thì AD là phân giác của $\widehat{FAE}$
 $\Rightarrow AD$ là phân giác $\widehat{BAC}$. Vậy D là giao điểm của đường phân giác của góc A và cạnh BC

Bài 3:

Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = DN$. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F .

- a. Chứng minh E và F đối xứng với nhau qua AB
- b. Chứng minh tứ giác $MEBF$ là hình thoi
- c. Hình bình hành $ABCD$ có thêm điều kiện gì để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân



Lời giải

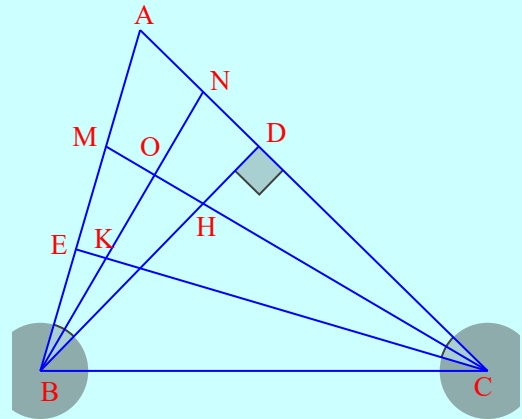
- a. Ta có $AM = DN \Rightarrow \diamond MADN$ là hình bình hành
 $\widehat{D} = \widehat{AMN} = \widehat{EMB} = \widehat{MBC}$
 $\triangle MPE = \triangle BPE \Rightarrow EP = FP \Rightarrow \diamond MEBF$ là hình bình hành và 2 điểm E, F đối xứng nhau qua AB
- b. Tứ giác $MEBF$ có MB giao EF tại P . Lại có P là trung điểm của EF , $MB \perp EF \Rightarrow \diamond MEBF$ là hình thoi
- c. Để $BCNE$ là hình thang cân thì $\widehat{CNE} = \widehat{BNE}$
 mà $\widehat{CNE} = \widehat{D} = \widehat{MBC} = \widehat{EMB} = \widehat{EBM}$ nên tam giác MEB có 3 góc bằng nhau, vậy điều kiện là:
 $\widehat{ABC} = 60^\circ$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD, CE . Tia phân giác của các góc ABD và ACE cắt nhau tại O , và lần lượt cắt AC, AB tại N, M . Tia BN cắt CE tại K , tia CM cắt BD tại H . Chứng minh rằng

- a. $BN \perp CM$
- b. Tứ giác $MNHK$ là hình thoi



Lời giải

a. Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} \Rightarrow \widehat{NBD} = \widehat{MCA}$

Xét $\triangle BDN$, có: $\widehat{NBD} + \widehat{BND} = 90^\circ$ ($BD \perp AC$) $\Rightarrow \widehat{BND} + \widehat{ACM} = 90^\circ$

Gọi O là giao điểm của CM và $BN \Rightarrow CM \perp BN \equiv O$ (1)

b. Xét $\triangle CNK$, có $CO \perp KN \Rightarrow CO \perp BN$, CO là phân giác của $\widehat{ACE} \Rightarrow \triangle CNK$ cân tại $C \Rightarrow O$ là trung điểm của KN (2)

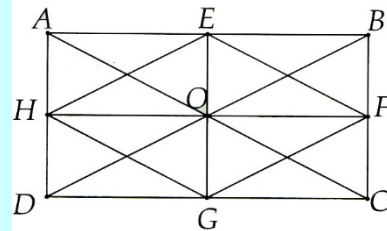
Tương tự chứng minh được O là trung điểm của MH (3)

Từ (1)(2)(3) suy ra $MNHK$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

Bài 2:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi $EFGH$ lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA

- a) $EFGH$ là hình gì, vì sao
- b) Chứng minh AC, BD, EG, FH đồng quy.



Lời giải

a) Áp dụng tính chất đường trung bình cho $\triangle BAC$ và $\triangle ADC$ ta có: $EF \parallel GH, EF = GH = \frac{1}{2} AC$

và $HE \parallel FG, HE = FG = \frac{1}{2} BD$

Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB = BD \Rightarrow EFGH$ là hình thoi.

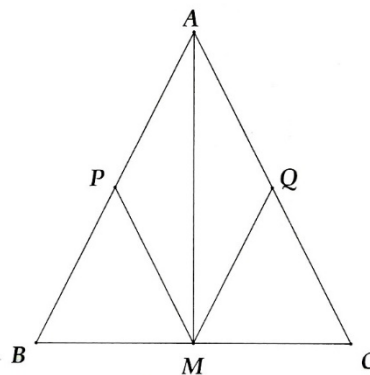
b) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm của AC và BD . Chứng minh $EBGD$ và $BFDH$ là hình bình hành suy ra AC, BD, EG, FH đồng quy tại trung điểm mỗi đường (điểm O)

Bài 3:

Cho tam giác ABC cân tại A , trung tuyến AM . Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại P và đường thẳng song song với AB cắt AC tại Q

a) Tứ giác $APMQ$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh $PQ \parallel BC$



Lời giải

a) Vận dụng định lý 1 về đường trung bình của tam giác suy ra $APMQ$ là hình thoi do có 4 cạnh bằng nhau

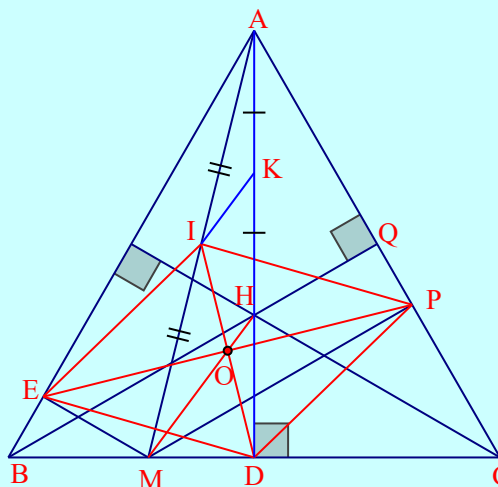
b) Vì $PQ \perp AM$ mà $AM \perp BC$ (tính chất tam giác cân) nên $PQ \parallel BC$

Bài 4:

Cho tam giác đều ABC có AD là đường cao, H là trực tâm. Từ một điểm M bất kỳ trên cạnh BC kẻ ME, MP theo thứ tự vuông góc với AB, AC . Gọi I là trung điểm của AM . Chứng minh:

a) $DEIP$ là hình thoi

b) Ba đường thẳng MH, ID, EP đồng quy



Lời giải

a) Áp dụng đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có:

$$EI = DI = PI = MI = AI = \frac{1}{2} AM \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta có:

$$\widehat{EID} = \widehat{EIM} + \widehat{MID} = 2\widehat{EAI} + 2\widehat{IAD} = 2\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle EID \text{ đều} \Rightarrow EI = ED \quad (2)$$

Tương tự ta có: $\widehat{DIP} = \widehat{MIP} - \widehat{MID} = 2\widehat{MAC} - 2\widehat{MAD} = 2\widehat{DAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle DIP \text{ đều} \Rightarrow DP = IP \quad (3)$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow EI = IP = DP = ED \Rightarrow \diamond DEIP$ là hình thoi

b) Gọi O là giao điểm EP và ID , K là trung điểm của $AH \Rightarrow AK = KH = HD$

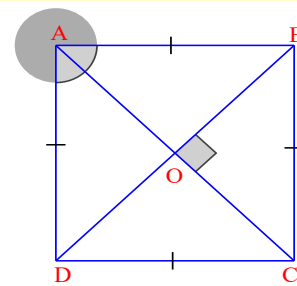
Theo tính chất đường trung bình ta có: $OH \parallel IK, MK \parallel IK \Rightarrow M, O, H$ thẳng hàng hay MH, ID, EP đồng quy.

HÌNH VUÔNG

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau

$$\diamond ABCD \text{ là hình vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$



2. Nhận xét: Từ định nghĩa hình vuông ta suy ra

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau
- Hình vuông là hình thoi có 4 góc vuông

$\Rightarrow$ Hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi

2. Tính chất: Hình vuông có tất cả các tính chất của hình bình thoi và hình chữ nhật

- Tính chất về cạnh:

+) Có bốn cạnh bằng nhau

+) Các cạnh đối song song

- Tính chất về góc: Bốn góc bằng nhau

- Tính chất về đường chéo:

+) Hai đường chéo bằng nhau

+) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

+) Hai đường chéo vuông góc với nhau

+) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi

3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông

- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông

- Hình chữ nhật có 1 đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông

- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông

- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông

4. Nhận xét: Một tứ giác vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông

5. Tính chất đối xứng của hình vuông

- Hình vuông có 1 tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo

- Hình vuông có bốn trục đối xứng:

+) 2 đường chéo của hình vuông

+) 2 đường thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của hình vuông

6. Cách vẽ hình vuông

Có 5 cách vẽ hình vuông nhưng có hai cách vẽ hay sử dụng

Cách 1: Vẽ một đường chéo, dựng đường trung trực của đường chéo đó. Lấy trung điểm vừa dựng làm tâm vẽ đường tròn có đường kính bằng đường chéo vừa vẽ, nó cắt đường trung trực tại hai điểm ta được đường chéo thứ hai.

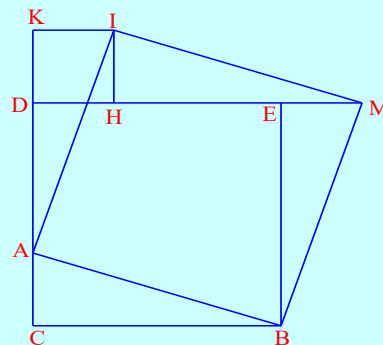
B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Chứng minh 1 tứ giác là hình vuông

Cách giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh 1 tứ giác là hình vuông

Bài 1:

Cho hình vuông $DEBC$. Trên cạnh CD lấy điểm A , trên tia đối của tia DC lấy điểm K , trên tia đối của tia ED lấy điểm M sao cho $CA = DK = EM$. Vẽ hình vuông $DKIH$ ($H \in DE$). Chứng minh rằng tứ giác $ABMI$ là hình vuông



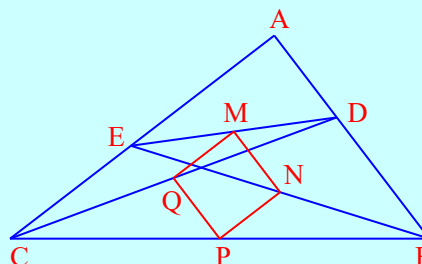
Lời giải

Ta có: $\triangle ABC = \triangle BEM = \triangle HIM = \triangle AKI \Rightarrow AI = MI = AB = BM$

$\triangle ACB = \triangle BEM \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{EBM} \Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{EBM} = 90^\circ \Rightarrow \diamond ABMI$ là hình vuông (dấu hiệu nhận biết)

Bài 2:

Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh AB, AC theo thứ tự lấy các điểm D và E sao cho $BD = EC$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của DE, EB, BC, CD . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông



Lời giải

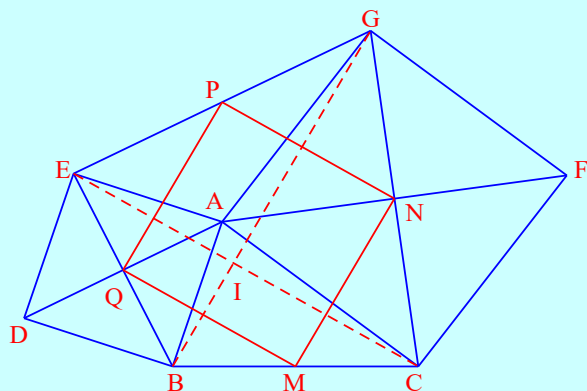
Ta có $MN = PQ = NP = MQ = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}BD(1)$

$$\begin{cases} MN // AB \\ MQ // AC \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ (AB \perp AC)(2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \diamond MNPQ$ là hình vuông

Bài 3:

Cho tam giác ABC . Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của hình vuông $ABDE$ và hình vuông $ACFG$. Gọi M, P lần lượt là trung điểm BC và EG . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông



Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} QM = PN = \frac{1}{2}EC, QM // PN // EC \\ QP = MN = \frac{1}{2}BG, QP // MN // BG \end{cases} \quad (1)$$

$$\triangle AEC = \triangle ABG (cgc) \Rightarrow EC = BG(2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow QM = PN = QP = MN \Rightarrow \diamond MNPQ$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

Gọi I là giao điểm của EC và BG , ta có: $\widehat{ICG} + \widehat{IGC} = \widehat{ACG} + \widehat{ACE} + \widehat{IGC} = \widehat{ACG} + \widehat{AGB} + \widehat{IGC}$
(Do $\widehat{ACE}, \widehat{AGB}$ là cặp góc tương xứng của hai tam giác bằng nhau)

$$\widehat{ICG} + \widehat{IGC} = \widehat{ACG} + \widehat{ACE} + \widehat{IGC} = \widehat{ACG} + \widehat{AGB} + \widehat{IGC} = \widehat{ACG} + \widehat{AGC} = 90^\circ \Rightarrow EC \perp BG(4)$$

Từ (1)(4) $\Rightarrow QM \perp QP \Rightarrow \diamond MNPQ$ là hình vuông (hình thoi có 1 góc vuông là hình vuông)

Bài 4:

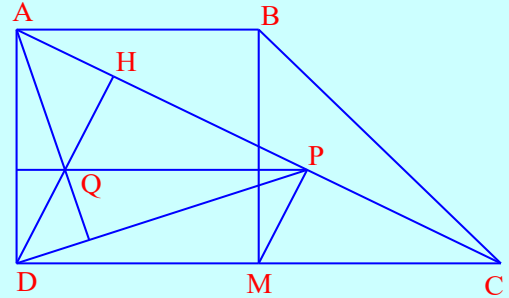
Cho hình thang $ABCD$, có:

$\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $CD = 2AB = 2AD$. Gọi H là hình chiếu của D lên AC . M, N, P lần lượt là trung điểm của CD, HC, HD

a. Chứng minh tứ giác $ABMD$ là hình vuông, tam giác BCD vuông cân

b. Chứng minh tứ giác $DMPQ$ là hình bình hành

c. $AQ \perp PD$



Lời giải

a. Ta có $AB \parallel DM$, $AB = \frac{1}{2}DC = DM \Rightarrow \diamond ABMD$

là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Lại có: $AB = AD \Rightarrow \diamond ABMD$ là hình thoi, mà $\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \diamond ABMD$ là hình vuông.

+) Xét $\triangle BCD$, có $BM = MD = \frac{1}{2}DC \Rightarrow \triangle BDC$ vuông cân ($\widehat{BDC} = 45^\circ$)

b. Xét $\triangle DHC$, có: $PQ \parallel DM$, $PQ = \frac{1}{2}DM \Rightarrow \diamond DMPQ$ là hình bình hành

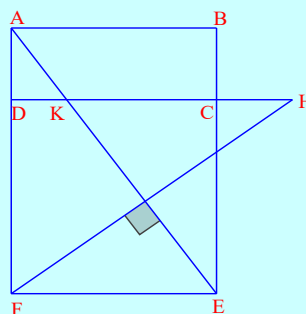
c. $PQ \parallel DM$, $DM \perp AD \Rightarrow PQ \perp AD$. Ta có tam giác ADP có Q là trực tâm $\Rightarrow AQ \perp DP$

Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình vuông để chứng minh các tính chất hình học

Cách giải: Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc, đường chéo của hình vuông.

Bài 1:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên tia đối của tia CB và DA lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho $CE = DF = CD$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho $CH = CB$. Chứng minh AE vuông góc FH



Lời giải

Tứ giác $CDFE$ có $CE = DF = CD, DF \parallel CE, \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow CDFE$ là hình vuông

Ta có: $AF = HD, \widehat{HDF} = \widehat{AFE} = 90^\circ, FE = DF \Rightarrow \triangle AFE = \triangle HDF \Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{FHD}$

Gọi K là giao điểm của AE và CD

$$\widehat{AKD} = \widehat{HKE}, \widehat{AKD} + \widehat{FAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{FAE} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{EAF} = \widehat{FHD} \Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{FHD} = 90^\circ$$

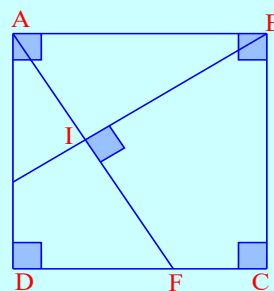
Vậy AE vuông góc với HF

Bài 2:

Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AD, CD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = DF$. Chứng minh

a. $\triangle ADF = \triangle BAE$

b. $BE \perp AF$



Lời giải

a. Ta có $\triangle ADF = \triangle BAE (cgc) \Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{DFA}$

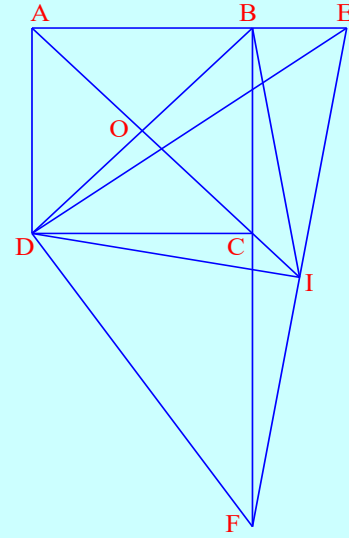
b. Gọi I là giao điểm của AF và BE

Có: $\widehat{EAI} = \widehat{AEI} = \widehat{EAI} + \widehat{DFA} = 90^\circ$ (đpcm)

Bài 3:

Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E , trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$

- Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân
- Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh $IB = ID$
- Chứng minh A, C, I thẳng hàng



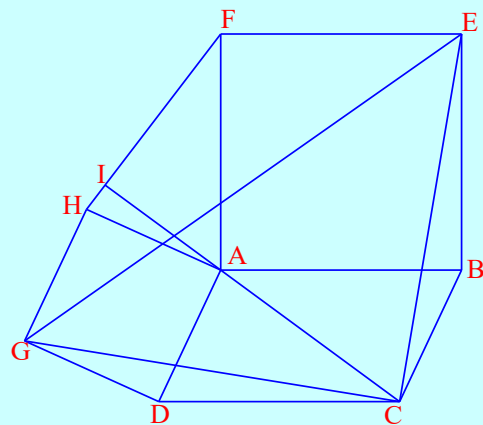
Lời giải

- $\triangle AED = \triangle CFD (cgc) \Rightarrow DE = DF, \widehat{ADE} = \widehat{CDF}$
 $\Rightarrow \widehat{EDF} = \widehat{EDC} + \widehat{CDF} = \widehat{EDC} + \widehat{ADE} = 90^\circ$
- Ta có $IB = ID = \frac{1}{2}EF$
- Do $IB = ID$ nên I thuộc đường trung trực của $BD \Rightarrow I \in AC$

Bài 4:

Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ về phía ngoài hình bình hành hai hình vuông $ABEF$ và $ADGH$. Chứng minh

- $AC = FH$ và $AC \perp FH$
- $\triangle CEG$ vuông cân



Lời giải

- $\triangle AFH = \triangle BAC (cgc) \Rightarrow FH = AC$
Gọi I là giao điểm của FH và AC

Do $\widehat{AFH} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IAF} + \widehat{AFH} = \widehat{IAF} + \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow FH \perp AC$

b. $\triangle GCD = \triangle CEB(cgc) \Rightarrow GC = CE$

Ta có: $180^\circ = \widehat{ECB} + \widehat{CBE} + \widehat{BEC} = \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + 90^\circ + \widehat{BEC} \Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{BEC} = 90^\circ$

mà $\widehat{BEC} = \widehat{GCD} \Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{GCD} = 90^\circ (1)$

Mặt khác do $ABCD$ là hình bình hành, $\widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ECB} + \widehat{GCE} + \widehat{GCD} + \widehat{CBA} = 180^\circ (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{GCE} = 90^\circ$

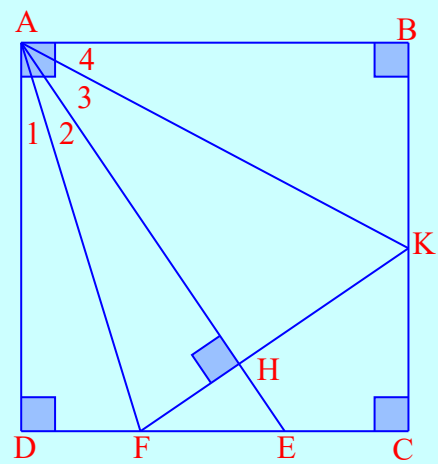
Bài 5:

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $6cm$, điểm E thuộc cạnh CD , tia phân giác của góc DAE cắt CD ở F . Gọi H là hình chiếu của F trên AC , AC là giao điểm của HF và BC

a. Tính độ dài AH

b. Chứng minh rằng AK là phân giác của góc $\widehat{BAE}$

c. Tính chu vi tam giác CFK



Lời giải

a. Ta có $\triangle ADF = \triangle AHF(cgc) \Rightarrow AH = HD = 6cm$

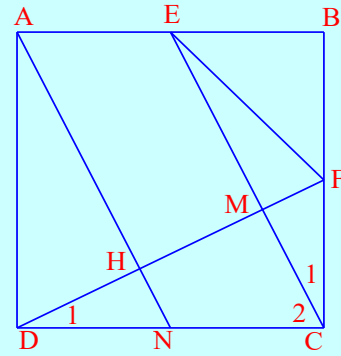
b. $\triangle AHK = \triangle ABK(ch - cgvc) \Rightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 \Rightarrow AK$ là phân giác của $\widehat{BAE}$

c. Chu vi $\triangle CFK = CF + FK + KC = CF + FH + HK + CK = CF + FD + KB + KC = 12(cm)$

Bài 6:

Cho hình vuông $ABCD$ và E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC

- Chứng minh rằng $CE \perp DF$
- Gọi M là giao điểm của CE và DF . Chứng minh $AM = BM$ (Gợi ý có thể gọi N là trung điểm của CD).



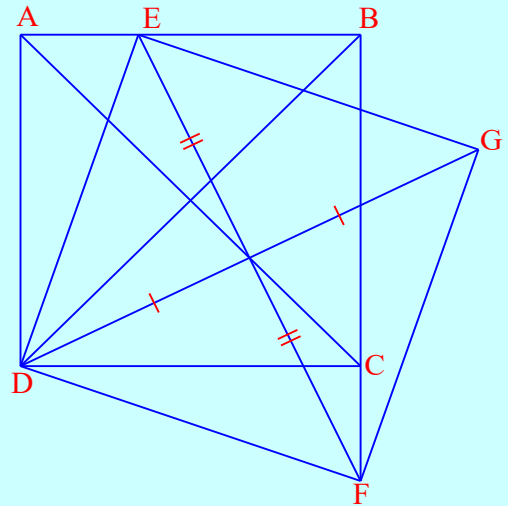
Lời giải

- Ta có: $\widehat{M} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \triangle DCF = \triangle CBE (cgc)$
- Gọi N là trung điểm của CD
 - $\Rightarrow \diamond AECN$ là hình bình hành $\Rightarrow AN \parallel EC \Rightarrow DF \perp AN = H$
 - $\Rightarrow \triangle DMC$ có: $\begin{cases} ND = NC \\ NH \parallel MC (AN \parallel EC) \end{cases} \Rightarrow H$ là trung điểm của MD
 - $\Rightarrow \triangle ADM$ có AH là đường cao, H là trung điểm của $MD \Rightarrow AM = AD = AB$ (đpcm).

Bài 7:

Cho hình vuông $ABCD$ và 1 điểm E bất kỳ nằm giữa hai điểm A và B . Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$

- Tính $\widehat{EDF} = 90^\circ$
- Gọi G là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của EF . Tứ giác $DEGF$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh ba đường thẳng AC, DG, EF đồng quy tại 1 điểm.



Lời giải

- $\widehat{EDF} = \widehat{EDC} + \widehat{CDF} = \widehat{EDC} + \widehat{EDA} = 90^\circ (\widehat{CDF} = \widehat{EDA})$

b. Xét $\diamond DEGF$ có $EI = IF, DI = IG \Rightarrow \diamond DEGF$ là hình bình hành, lại có $\widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow \diamond DEGF$ là hình chữ nhật

mà $\triangle ADE = \triangle CDF \Rightarrow ED = FD \Rightarrow \diamond DEGF$ là hình vuông (dấu hiệu nhận biết)

c. Ta có EF giao DG tại I , ta đi chứng minh I thuộc đường trung trực của AC

Có: $IB = ID = \frac{1}{2}EF \Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của $BD \Rightarrow I \in AC$ (AC là đường trung trực của BD)

Bài 8:

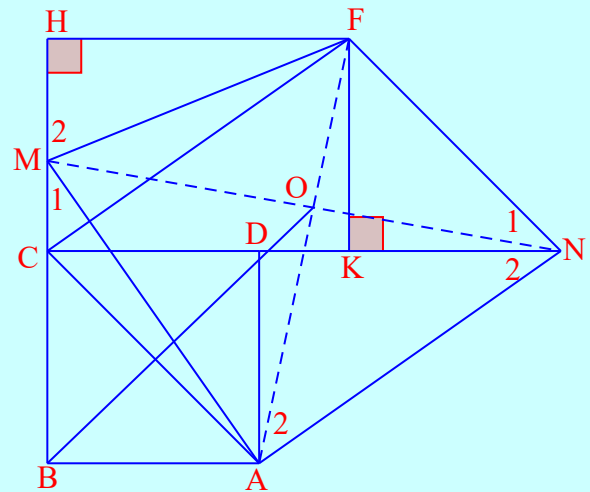
Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$. Vẽ hình bình hành $AFMN$. Chứng minh rằng:

a. $\triangle ABM = \triangle ADN$

b. Tứ giác $AFMN$ là hình vuông

c. Kẻ $FH \perp BM, FK \perp CN$, chứng minh rằng $\widehat{ACF} = 90^\circ$

d. B, O, D thẳng hàng (O là trung điểm của AF)



Lời giải

a. $\triangle ABM = \triangle ADN$ (cgc) $\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{BAM}$

b. Hình bình hành $AMFN$, có $AM = AN \Rightarrow \diamond AMFN$ là hình thoi.

Lại có $\widehat{MAB} = \widehat{MAD} + \widehat{DAN} = \widehat{MAD} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Rightarrow \diamond AMFN$ là hình vuông

c. $\widehat{ACF} = \widehat{ACD} + \widehat{DCF} = 45^\circ + \widehat{DCF}$

Ta đi chứng minh $\widehat{DCF} = 45^\circ \Rightarrow \diamond CHFK$ là hình vuông

Có $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{N}_2 + \widehat{M}_2 = 90^\circ, \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{N}_1 \Rightarrow \triangle MHF = \triangle NKF$ (ch - gn) $\Rightarrow FH = FK$

$\Rightarrow \diamond CHFK$ là hình vuông $\widehat{DCF} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DCF} = 90^\circ$ (đpcm)

d. Ta đi chứng minh 3 điểm B, D, O nằm trên đường trung trực của AC

Ta có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow B, D$ nằm trên đường trung trực của AC

O là trung điểm của $AF \Rightarrow O$ là trung điểm của $MN \Rightarrow OA = OM$

Lại có $OC = OM = \frac{1}{2} AC \Rightarrow OM = OC \Rightarrow OA = OC \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của AC

$\Rightarrow B, D, O$ thẳng hàng.

Bài 9:

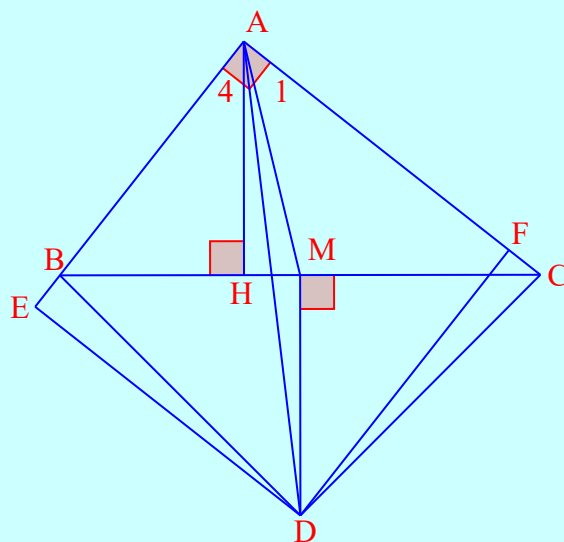
Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH và trung tuyến AM

a. Chứng minh rằng $\widehat{MAC} = \widehat{BAH}$

b. Kẻ trung trực của BC và trên đó lấy điểm D sao cho $MD = MA$ (D và A nằm trong hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ là đường thẳng BC). Chứng minh AD là phân giác của 2 góc $\widehat{MAH}, \widehat{A}$

c. Kẻ $DE \perp AB, DF \perp AC$. Tứ giác $AEDF$ là hình gì?

d. Chứng minh: $\triangle DBE = \triangle DCF$



Lời giải

a. $\triangle ABC (\widehat{A} = 90^\circ) \Rightarrow AM = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$, mà $\widehat{C_1} + \widehat{B} = 90^\circ = \widehat{A_4} + \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{A_4}$

b. $\triangle AMD$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{D_1}, \widehat{A_3} = \widehat{D_1} (slt) \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{A_3}$

c. Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật có AD là phân giác của $\widehat{EAF} \Rightarrow \diamond AEDF$ là hình vuông

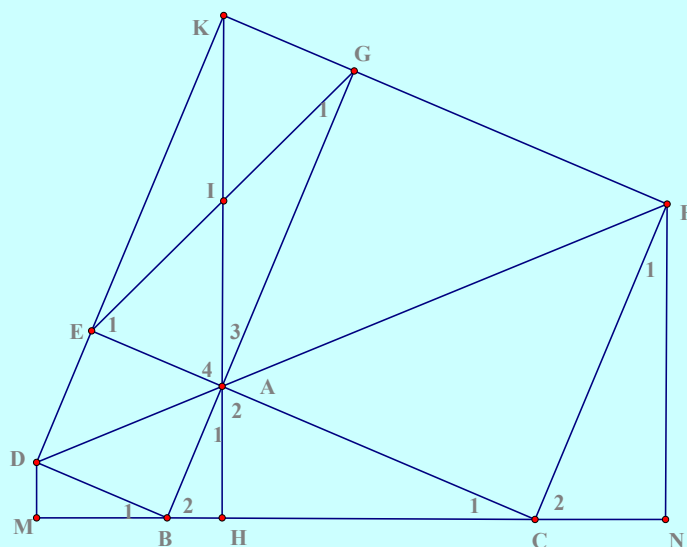
d. Xét $\triangle DBE, \triangle DCF$ có $DE = DF, DB = DC$ (MD là trung trực của BC)

$\Rightarrow \triangle DBE = \triangle DCF (ch - cv)$

Bài 10:

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ về phía ngoài tam giác hai hình vuông $ABDE$ và $ACFG$

- Gọi M, N là chân các đường vuông góc hạ từ D và E đến BC . Chứng minh $DM + DN = BC$
- D, A, E thẳng hàng
- AH đi qua trung điểm của EG
- Giả sử DE và FG cắt nhau tại K . Chứng minh rằng AH cũng đi qua K



Lời giải

$$a. DM + FN = BC \Leftrightarrow DM + FN = BH + HC \Leftrightarrow DM = BH, FN = HC \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle DMB = \triangle AHB \\ \triangle AHC = \triangle CNF \end{cases}$$

$$b. D, A, F \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \widehat{DAF} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{DAE} + \widehat{EAG} + \widehat{GAF} = 180^\circ$$

c. Gọi I là giao điểm của AH và EG , ta đi chứng minh $EI = GI (= AI)$

+) Ta đi chứng minh $\triangle AIG$ cân tại $I \Leftrightarrow \widehat{G_1} = \widehat{A_3}$

$$\triangle ABC = \triangle AEG \Rightarrow \begin{cases} \widehat{G_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{C_1} = \widehat{A_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{G_1} = \widehat{C_{11}} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_3} \end{cases} \Rightarrow \widehat{G_1} = \widehat{A_3} \Rightarrow \triangle AIG \text{ cân tại } I$$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle IAE$ cân tại $I \Rightarrow IE = IG = IA$

d. Có Tứ giác $AEKG$ là hình bình hành (các cạnh đối song song)

Lại có AI đi qua trung điểm của EG mà AI là đường chéo thứ 2 nên AI đi qua K . Vậy AI đi qua K

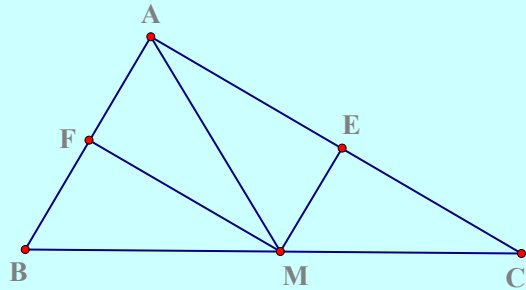
Dạng 3: Tìm điều kiện để tứ giác là hình vuông

Cách giải: Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình vuông

Bài 1:

Cho tam giác ABC vuông tại A , M là một điểm thuộc cạnh BC . Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC , chúng cắt các cạnh AC, AB theo thứ tự tại E và F

- Tứ giác $FFME$ là hình gì
- Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để tứ giác $AFME$ là hình vuông



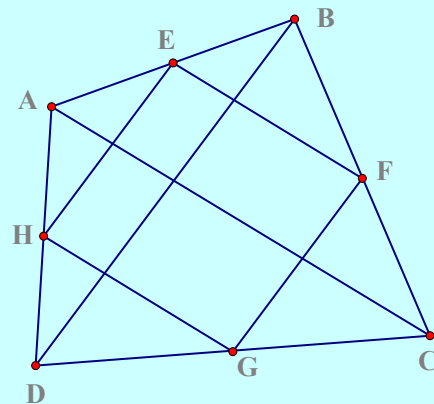
Lời giải

- Tứ giác $AFME$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật
- Để tứ giác $AFME$ là hình vuông thì đường chéo AM trở thành đường phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow M$ là giao điểm của đường phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{A}$

Bài 2:

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là

- Hình chữ nhật
- Hình thoi
- Hình vuông



Lời giải

Ta có tứ giác $EFGH$ là hình bình hành (các cạnh đối bằng nhau)

- Để $EFGH$ trở thành hình chữ nhật thì $EF \perp FG \Rightarrow AC \perp BD$

b. Để $EFGH$ trở thành hình thoi thì $EF = FG \Rightarrow AC = BD$

c. Để $EFGH$ trở thành hình vuông thì $AC \perp BD, AC = BD$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

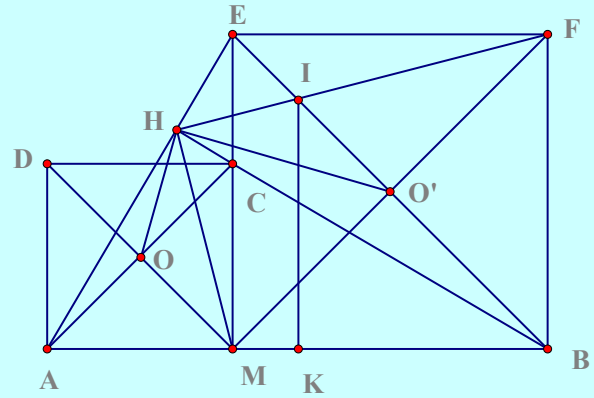
Bài 1:

Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMCD, BMEF$

a. Chứng minh $AE \perp BC$

b. Gọi H là giao điểm của AE và BC . Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng

c. Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB



Lời giải

a. Có $MD \parallel BE$ (hai góc đồng vị bằng nhau)

mà $MD \perp AC \Rightarrow AC \perp BE$. Lại có $EC \perp AB \Rightarrow C$ là trực tâm tam giác $\triangle ABE \Rightarrow AE \perp BC$

b. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$

Tam giác vuông AHC có OH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC

$$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM \Rightarrow \triangle DMH (\widehat{H} = 90^\circ) \Rightarrow DH \perp MH (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được $HF \perp MH$ (2) $\Rightarrow D, H, F$ thẳng hàng.

c. Gọi I là giao điểm của AC và DF

Chứng minh được OI là đường trung bình của tam giác DMF , hay I là trung điểm DF

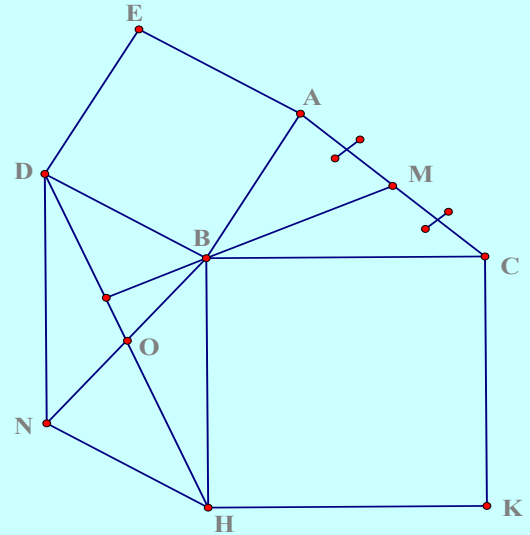
Kẻ IK vuông góc AB (K thuộc AB) $\Rightarrow K$ là trung điểm của AB , vậy K cố định

Mặt khác $IK = \frac{1}{2}(AD + BF) = \frac{1}{2}AB$ (không đổi) $\Rightarrow I$ cố định. Vậy DE luôn đi qua I cố định.

Bài 2:

Cho tam giác ABC , vẽ ra phía ngoài tam giác các hình vuông $ABDE$ và $BCKH$, BM là trung tuyến của AC

- Chứng minh $\widehat{DBH} + \widehat{ABC} = 180^\circ$
- Vẽ hình bình hành $DBHN$. Chứng minh $\triangle ABC = \triangle NHB$
- Chứng minh $DH = 2BM$
- Chứng minh $BM \perp DH$



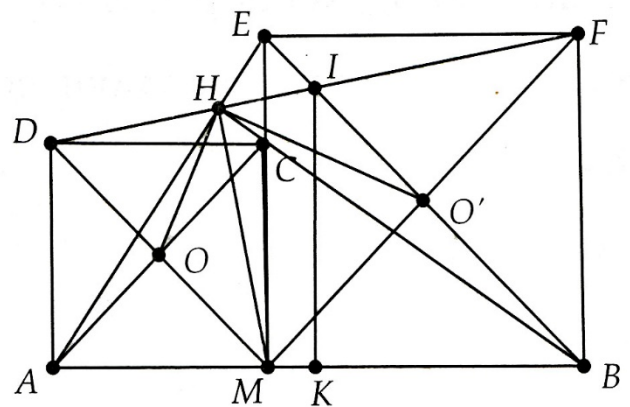
Lời giải

- Chú ý: $\widehat{DBH} + \widehat{HBC} + \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 360^\circ$, $\widehat{HBC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$
- Gọi O là giao điểm của DH và $BN \Rightarrow O$ là trung điểm của DH và BN
Ta có $\triangle ABC = \triangle NHB$ (cgc)
mà $DH = 2OH$ (đpcm)
- Chứng minh được $\widehat{BHO} = \widehat{MBC} \Rightarrow$ đpcm

Bài 3:

Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB , các hình vuông $AMCD$, $BMEF$

- Chứng minh AE vuông góc với BC
- Gọi H là giao điểm của AE và BC . Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.
- Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên



đoạn thẳng cố định AB .

Lời giải

a) Chứng minh được MD song song với BE

Mà $MD \perp AC \Rightarrow AC \perp BE$

lại có $EC \perp AB \Rightarrow C$ là trực tâm của tam giác ABE

b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$. Tam giác vuông AHC có OH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $AC \Rightarrow OH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM$

$\Rightarrow \triangle DMH$ vuông tại H , hay $DH \perp MH$ (1)

Chứng minh tương tự, ta được $HF \perp HM$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra đpcm

c) Gọi I là giao điểm của AC và DF

Chứng minh được OI là đường trung bình của tam giác DMF , hay I là trung điểm của DF .

Kẻ IK vuông góc với AB ($K \in AB$)

$\Rightarrow K$ là trung điểm của AB , tức là K cố định.

Mặt khác $IK = \frac{1}{2}(AD + BF) = \frac{1}{2}AB$ (không đổi) $\Rightarrow I$ cố định.

Vậy DF luôn đi qua điểm I cố định.

Bài 4:

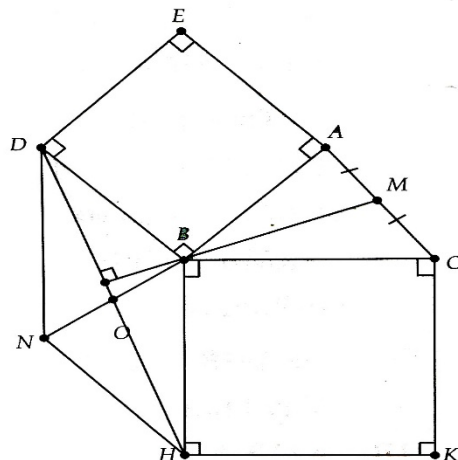
Cho tam giác ABC , vẽ ra phía ngoài tam giác các hình vuông $ABDE$ và $BCKH$. BM là đường trung tuyến của tam giác ABC

a) Chứng minh $\widehat{DBH} + \widehat{ABC} = 180^\circ$.

b) Vẽ hình bình hành $DBHN$. Chứng minh $\triangle ABC = \triangle NHB$

c) Chứng minh $DH = 2BM$

d) Chứng minh BM vuông góc với DH



Lời giải

a) Chú ý $\widehat{DHB} + \widehat{HBC} + \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 360^\circ$

Mà $\widehat{HBC} + \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Chứng minh được hai tam giác ABC và NBH bằng nhau theo trường hợp (cgc)

c) Gọi $O = DH \cap BN$

$\Rightarrow O$ là trung điểm của DH và BN . Ta có:

$\triangle ABC = \triangle NHB \Rightarrow OH = BM$ (2 đường trung tuyến tương ứng)

Mà $DH = 2OH \Rightarrow \text{đpcm}$

d) Chứng minh $\widehat{BHO} = \widehat{MBC}$. Từ đó quy ra đpcm

DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT

A. Diện tích hình chữ nhật

1. Khái niệm diện tích đa giác

- Số đo của phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là diện tích của đa giác đó
- Mỗi đa giác có một diện tích xác định là một số dương
- Diện tích đa giác $ABCD$ thường được kí hiệu là S_{ABCD} hoặc S

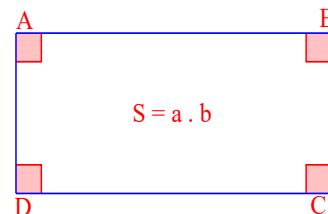
2. Diện tích đa giác có các tính chất sau

- Tính chất bất biến: Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau, điều ngược lại chưa hẳn đúng
 - Tính chuẩn hóa: Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng $1cm, 1dm, 1m, \dots$ làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là $1cm^2, 1dm^2, 1m^2, \dots$
- Hình vuông có cạnh dài $10m, 100m$ có diện tích tương ứng là $1a, 10ha$

3. Tính cộng diện tích: Nếu một đa giác được chia thành những đa giác nhỏ không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

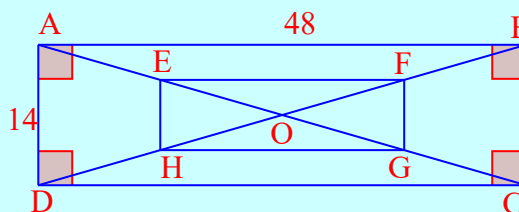
4. Công thức tính diện tích hình chữ nhật

*) Định lí: Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó: $S = a.b$



Bài 1:

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 14cm$ và $BD = 50cm$. O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC, OD . Tính S_{EFGH}



Lời giải

- Ta có tứ giác $EFGH$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật
- Tính được $AB = 48cm, EF = 24cm, EH = 7cm, S_{EFGH} = 24.7 = 168(cm^2)$

Bài 2:

Chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật tỷ lệ với 9, 4. Chu vi của hình chữ nhật là 52cm. Tính diện tích của hình chữ nhật

Lời giải

Gọi a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ($a > b > 0$)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{b}{4} \\ 2(a+b) = 52 \Rightarrow a+b = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = 18.8 = 144(cm^2)$$

Bài 3:

Tính các cạnh của hình chữ nhật, biết diện tích của hình chữ nhật là $3cm^2$, chu vi bằng 8cm

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a và b ($a > b$)

Theo giả thiết ta có $a.b = 3, a+b = 4 \Rightarrow a = 4-b \Rightarrow (4-b).b = 3 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 3 = 0 \Rightarrow a = 3, b = 1$

Vậy chiều dài là 3cm, chiều rộng là 1cm

Bài 4:

Diện tích của hình chữ nhật thay đổi như thế nào, nếu chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng giảm 4 lần

Lời giải

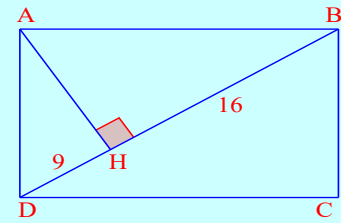
Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là a và b ($a > b > 0$) $\Rightarrow S = a.b$

Chiều dài mới $a' = 2a$, chiều rộng mới $b' = \frac{b}{4} \Rightarrow S' = a'.b' = 2a.\frac{b}{4} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}S$

Vậy diện tích giảm 2 lần so với ban đầu

Bài 5:

Tính diện tích của hình chữ nhật $ABCD$, biết rằng đường vuông góc kẻ từ A đến BD chia BD thành hai đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 9cm và 16cm



Lời giải

Giả sử AH vuông góc với BD tại H

Ta có $HD = 9\text{cm}$, $HB = 16\text{cm}$

Lại có $AB^2 + AD^2 = 25^2$

$$\triangle ABH (\widehat{H} = 90^\circ) \Rightarrow AB^2 = AH^2 + 16^2 \quad (1), \triangle AHD \Rightarrow AD^2 = AH^2 + 9^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 - AD^2 = 16^2 - 9^2 = 175 \\ AB^2 + AD^2 = 625 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 20\text{CM} \\ AD = 15\text{CM} \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = 300(\text{cm}^2)$$

Bài 6:

Tính diện tích của hình chữ nhật có đường chéo $d = 40\text{cm}$ và các cạnh của nó tỉ lệ với hai số 3 và 4

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là a và b ($a > b > 0$)

$$\text{Theo đầu bài ta có: } \begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 = 1600 \\ \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 32 \\ b = 24 \end{cases}$$

Vậy chiều dài là 32cm , chiều rộng là 24cm

Bài 7:

Hình chữ nhật có diện tích 6000cm^2 . Nếu chiều dài tăng thêm 20cm còn chiều rộng giảm 5cm thì diện tích tăng thêm 600cm^2 . Tính chu vi của hình chữ nhật ban đầu

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là a và b ($a > b > 0$)

Theo đầu bài ta có: $\begin{cases} ab = 6000 \\ (a+20)(b-5) - ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 100 \\ b = 60 \end{cases} \Rightarrow P_{HCN} = 320cm$

Bài 8:

Một thửa đất hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài $20cm$ còn chiều rộng giảm $5cm$ thì diện tích tăng thêm $600cm^2$. Nếu chiều dài giảm $10cm$ còn chiều rộng tăng $10cm$ thì diện tích tăng $300cm^2$. Tính chu vi hình chữ nhật ban đầu.

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là a và b ($a > b > 0$)

Theo đầu bài ta có: $\begin{cases} (a+20)(b-5) - ab = 600 \\ (a-10)(b+10) - ab = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 100 \\ b = 60 \end{cases} \Rightarrow P_{HCN} = 320(cm)$

Bài 9:

Cho hình chữ nhật có chu vi $320cm$, diện tích $6000m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó

Lời giải

Gọi độ dài của chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho lần lượt là a và b ($a, b > 0$)

Theo đầu bài ta có: $\begin{cases} 2(a+b) = 320 \\ ab = 6000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 100 \\ b = 60 \end{cases}$

Bài 10:

Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích bằng $100m^2$, hình nào có chu vi nhỏ nhất

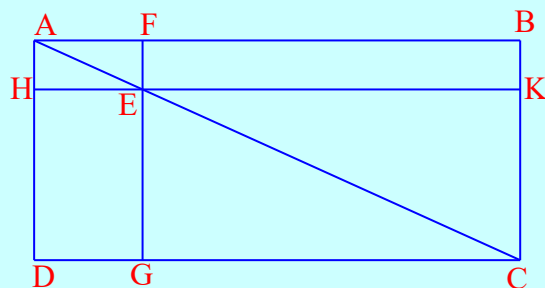
Lời giải

Gọi độ dài của chiều dài và chiều rộng lần lượt là a và b ($a, b > 0$). Bài toán trở thành: Cho $a, b > 0$ và $ab = 100$. Tìm GTNN của $2(a+b)$

Áp dụng bất đẳng thức coossi cho 2 số dương a và b , ta được chu vi nhỏ nhất bằng $40cm$ khi $a = b = 10cm$ hay hình chữ nhật trở thành hình vuông.

Bài 11:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua điểm E là một điểm bất kì nằm trên đường chéo AC , kẻ hai đường thẳng $FG \parallel AD$ và $HK \parallel AB$ ($F \in AB, G \in DC, H \in AD, K \in BC$). Chứng minh rằng hai hình chữ nhật $EFBK$ và $EGDH$ có cùng diện tích.



Lời giải

Vì $FG \parallel AD, HK \parallel AB$ (giả thiết) nên $HE \parallel AF, AH \parallel FE$

Tứ giác $AHEF$ có các cạnh đối song song nên là hình bình hành

Lại có $\hat{A} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật suy ra $\triangle AHE = \triangle AFE$ (cgc)

Áp dụng tính chất bất biến của diện tích ta được $S_{AFE} = S_{AHE}$

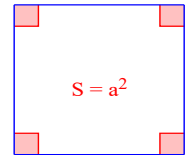
Tương tự: $S_{EKC} = S_{EGC}; S_{ABC} = S_{ADC} \Rightarrow S_{ABC} - S_{AFE} - S_{EKC} = S_{ADC} - S_{AHE} - S_{EGC}$

Hay $S_{EFBK} = S_{EGDH}$.

B. Diện tích hình vuông

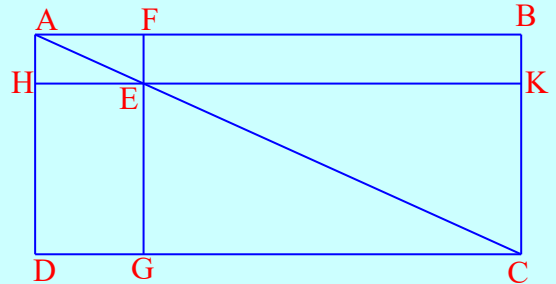
*) Diện tích hình vuông: Bằng bình phương cạnh của nó

$$S = a^2$$



Bài 1:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua điểm E là một điểm bất kì nằm trên đường chéo AC , kẻ hai đường thẳng $FG \parallel AD$ và $HK \parallel AB$ ($F \in AB, G \in DC, H \in AD, K \in BC$). Chứng minh rằng hai hình chữ nhật $EFBK$ và $EGDH$ có cùng diện tích.



Lời giải

Vì $FG \parallel AD, HK \parallel AB$ (giả thiết) nên $HE \parallel AF, AH \parallel FE$

Tứ giác $AHEF$ có các cạnh đối song song nên là hình bình hành

Lại có $\hat{A} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật suy ra $\triangle AHE = \triangle AFE$ (cgc)

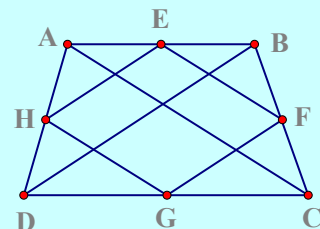
Áp dụng tính chất bất biến của diện tích ta được $S_{AFE} = S_{AHE}$

Tương tự: $S_{EKC} = S_{EGC}; S_{ABC} = S_{ADC} \Rightarrow S_{ABC} - S_{AFE} - S_{EKC} = S_{ADC} - S_{AHE} - S_{EGC}$

Hay $S_{EFBK} = S_{EGDH}$.

Bài 2:

Một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau, độ dài đường chéo bằng 4cm . Tính diện tích của tứ giác có đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình thang đó



Lời giải

Ta có tứ giác $EFGH$ là hình thoi có 1 góc vuông nên là hình vuông

$$S_{EFGH} = 2.2 = 4(cm^2)$$

Bài 3:

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $10cm$.

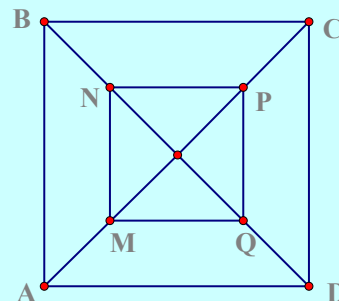
O là giao điểm của AC và BD . Gọi

M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của OA, OB

OC, OD

a. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Vì sao

b. Tính diện tích phần hình vuông $ABCD$ nằm ngoài tứ giác $MNPQ$



Lời giải

a. Tứ giác $MNPQ$ có 4 cạnh bằng nhau nên là hình thoi

Hình thoi $MNPQ$ có 1 góc vuông nên là hình vuông

b. $S_{MNPQ} = 8.8 = 64(cm^2) \Rightarrow S = S_{ABCD} - S_{MNPQ} = 16^2 - 8^2 = 192(cm^2)$

Bài 4:

Một hình chữ nhật có diện tích $350cm^2$ và hai cạnh tỉ lệ với các số 2 và 7. Tính diện tích hình vuông có cùng chu vi với hình chữ nhật

Lời giải

Gọi độ dài chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là a và b ($a, b > 0$)

Theo đầu bài ta có: $\begin{cases} ab = 350 \\ \frac{a}{7} = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow$ chu vi hình chữ nhật là 90 (cm)

Chu vi hình vuông là $90cm \Rightarrow$ cạnh hình vuông là $22,5$ $S_{HV} = 22,5.22,5 = 506,25(cm^2)$

Bài 5:

Diện tích một hình vuông tăng thêm bao nhiêu % nếu mỗi cạnh của nó tăng thêm 20%?

Lời giải

Gọi độ dài 1 cạnh của hình vuông là a ($a > 0$)

Độ dài cạnh hình vuông lúc sau là $120\%.a = 1,2a$

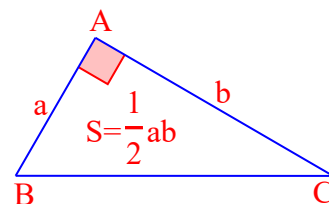
Theo đầu bài ta có: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{(1,2a)^2}{a^2} = 1,44$

Vậy diện tích hình vuông tăng thêm 44%.

C. Diện tích tam giác vuông

*) Diện tích tam giác vuông: Bằng nửa tích hai cạnh góc vuông

$$S = \frac{1}{2}ab$$



Trong đó a và b là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông.

Bài 1:

Tính diện tích tam giác ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), biết $AB = 5cm$, $BC = 13cm$

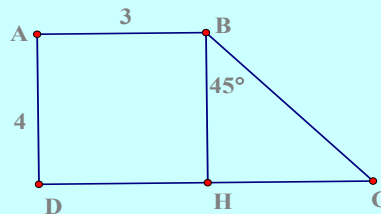
Lời giải

Theo định lý pytago ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 12(cm) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30(cm^2)$

Bài 2:

Cho hình vẽ, biết $AB = 3cm$, $AD = 4cm$

$\widehat{ABC} = 135^\circ$. Tính S_{ABCD} ?



Lời giải

Ta có $S_{ABCD} = S_{ABHD} + S_{BHC} = 12 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 20(cm^2)$

Vậy diện tích tứ giác $ABCD$ là $20cm^2$

Bài 3:

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có

$BC = 1cm$. Tính diện tích tam giác ABC

Lời giải

Áp dụng định lý Pitago ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{4}(cm^2)$

Bài 4:

Tính diện tích của 1 tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10cm . Tổng hai cạnh góc vuông bằng 14cm

Lời giải

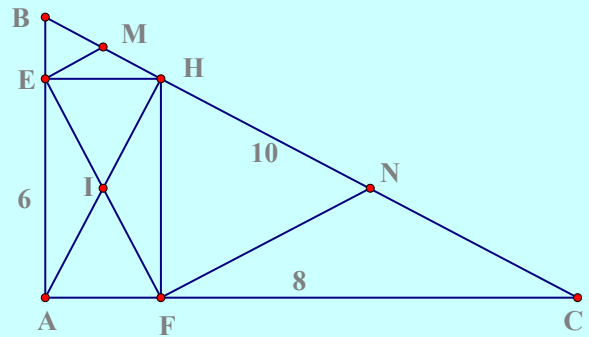
Gọi 2 cạnh góc vuông lần lượt là a và b ($a, b > 0$)

Theo đầu bài ta có: $\begin{cases} a+b=14 \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2=14^2 \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Rightarrow ab=48(\text{cm}) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = 24(\text{cm}^2)$

Bài 5:

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC = 8\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$

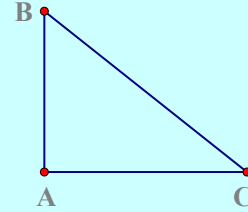
- Tính BC
- Hạ AH vuông với BC . Tính AH
- Qua H kẻ HE vuông góc AB , HF vuông góc với AC . Tính EF
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HB, HC , tứ giác $MNEF$ là hình gì. Tính S_{MNEF}

**Lời giải**

- Theo định lý pytagoc ta được $BC = 10\text{cm}$
 - $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}AH.BC \Rightarrow AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = 4(\text{cm})$
 - $EF = AH = 4,8\text{cm}$
 - $\triangle MEI = \triangle MNI(ccc) \Rightarrow \widehat{MEI} = \widehat{MHI} = 90^\circ$
- Tương tự ta có: $\widehat{NFI} = \widehat{NHI} = 90^\circ \Rightarrow \diamond EMNF$ là hình thang vuông
- $$\Rightarrow S_{MNFE} = \frac{(EM + FN).EF}{2} = 24(\text{cm}^2)$$

Bài 6:

Tính diện tích của tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10cm , tỉ số hai cạnh góc vuông là $1:2$

**Lời giải**

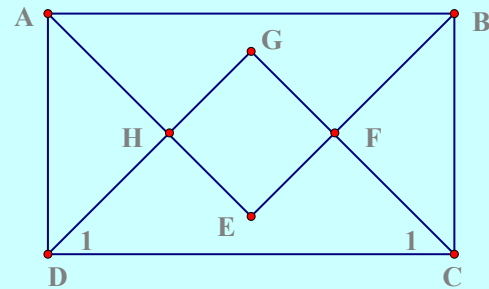
Ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2AB$

Mặt khác: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5AB^2 \Leftrightarrow 100 = 5AB^2 \Rightarrow AB^2 = 20 \Rightarrow AB = \sqrt{20} \Rightarrow AC = 2\sqrt{20}(\text{cm})$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = 20(\text{cm}^2).$

Bài 7:

Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB = a(\text{cm})$
 $BC = b(\text{cm})$ ($a \geq b$). Các tia phân giác của góc A và B ; Góc B và C ; Góc C và D ; Góc D và A cắt nhau tại E, F, G, H



a. Tính S_{ABCD}

b. Tính $S_{CDG}, S_{ADH}, S_{BCF}$

c. Tính S_{EFGH}

Lời giải

a. $S_{ABCD} = a.b$

b. Xét $\triangle CDG$, có $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 = 45^\circ \Rightarrow \triangle CDG$ vuông cân tại G

Có $GD^2 + GC^2 = CD^2 \Rightarrow GD = GC = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{DGC} = \frac{a^2}{4}$

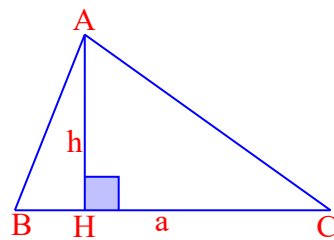
Tương tự $DH = AH = CF = BF = \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ADH} = S_{BCF} = \frac{b^2}{4}$

c. Có $HG = DG - DH = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a-b}{\sqrt{2}} = GF = EF = EH \Rightarrow \diamond HGEF$ là hình thoi, lại có 1 góc vuông nên là hình vuông $\Rightarrow S_{\text{EFGH}} = GH^2 = \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{2}$

D. Công thức tính diện tích tam giác

*) Diện tích tam giác bằng nửa tích một cạnh với chiều cao tương

ứng: $S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h$

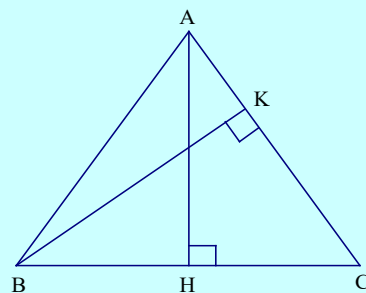


Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng bằng cách sử dụng công thức tính diện tích tam giác

Cách giải: Từ công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h \Rightarrow a = \frac{2S}{h}; h = \frac{2S}{a}$

Bài 1:

Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh đáy $BC = 60cm$, đường cao $AH = 40cm$. Tính đường cao tương ứng với cạnh bên



Lời giải

$$BH = HC = \frac{1}{2} BC = 30cm$$

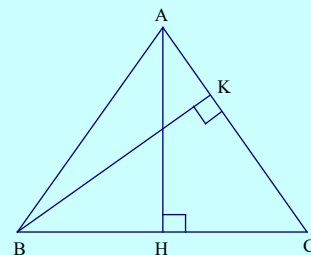
Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông AHC tính được $AC = 50cm$

Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2} AC.BK \Rightarrow AC.BK = 2400 \Rightarrow BK = 48cm.$$

Bài 2:

Một tam giác cân có đường cao ứng với cạnh đáy bằng $15cm$, đường cao ứng với cạnh bên bằng $20cm$. Tính các cạnh của tam giác đó (chính xác đến $0,1cm$)



Lời giải

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AC \cdot BK \Rightarrow 15BC = 20AC \Rightarrow BC = \frac{4}{3} AC$$

$$\Rightarrow BH = HC = \frac{2}{3} AC$$

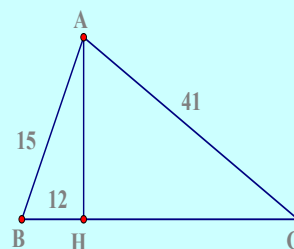
Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông AHC , ta có:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 15^2 + \frac{4}{9} AC^2 \Rightarrow AC = AB = 20,1cm; BC = 26,8cm$$

Bài 3:

Cho tam giác ABC đường cao AH (H thuộc BC), biết $AB = 15cm, AC = 41cm, BH = 12cm$.

Tính S_{ABC}

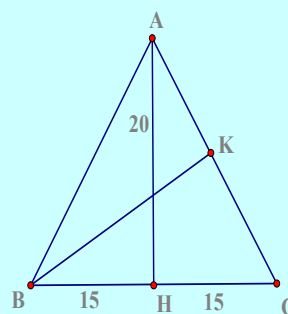


Lời giải

Theo định lý Pytago $\Rightarrow AH = 9cm, HC = 40cm \Rightarrow S_{ABC} = 234(cm^2)$

Bài 4:

Cho hình vẽ, tính BK



Lời giải

$$+) S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 30(cm^2)(1)$$

$$+) S_{ABC} = \frac{1}{2} BK \cdot AC = 30(cm^2)(2)$$

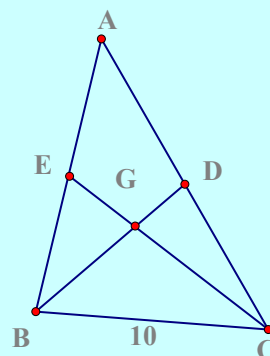
$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow 300 = \frac{1}{2} BK \cdot AC(*)$$

Xét $\triangle AHC (\widehat{H} = 90^\circ) \Rightarrow AC = 25(cm) \Rightarrow (*) : BK = 24(cm)$

Bài 5:

Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD và CE . Cho $BC = 10cm, BD = 9cm$ và $CE = 12cm$. Chứng minh rằng tam giác BGC vuông (G là giao điểm của BD và CE).

Tính S_{BEC}, S_{BGC}



Lời giải

Ta có G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow GB = \frac{2}{3}BD = 6cm; GC = \frac{2}{3}CE = 8cm \Rightarrow \triangle BGC \text{ vuông tại } G$$

$$+) S_{BEC} = \frac{1}{2}BG \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36(cm^2)$$

$$+) S_{BGC} = \frac{1}{2}BG \cdot GC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24(cm^2)$$

Dạng 2: Tính toán, chứng minh về diện tích tam giác

Cách giải: Sử dụng công thức tính diện tích tam giác

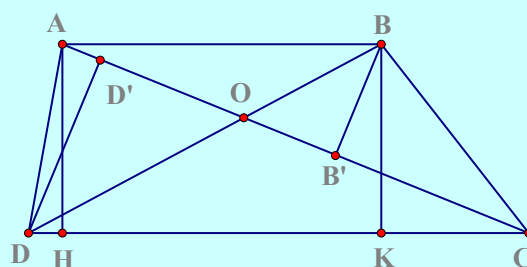
Bài 1:

Cho hình thang $ABCD (AB \parallel CD)$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Kẻ AH, BK vuông góc với CD . Chứng minh rằng:

a. $S_{ACD} = S_{BGC}$

b. Biết $S_{OAB} = 4cm^2, S_{COD} = 9cm^2$. Tính

$S_{AOD} = S_{BOC}$



Lời giải

$$a. S_{ACD} = \frac{1}{2} AH \cdot CD(1); S_{BCD} = \frac{1}{2} BK \cdot CD \quad (2)$$

$$\text{mà } AH = BK(3) \Rightarrow S_{ACD} = S_{BCD} \Rightarrow S_{AOD} + S_{DOC} = S_{BOC} + S_{DOC} \Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC} (dpcm)$$

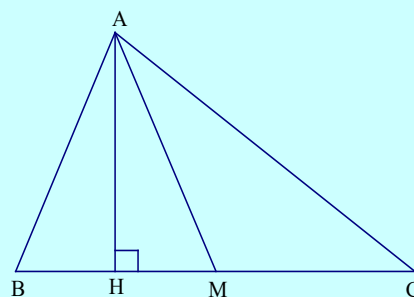
$$b. S_{AOB} = \frac{1}{2} BB' \cdot OA; S_{BOC} = \frac{1}{2} BB' \cdot OC \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{OA}{OC} (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{OA}{OC} (2) \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_{COD}} (= \frac{OA}{OC}) \Leftrightarrow \frac{4}{S_{BOC}} = \frac{S_{BOC}}{9} \Rightarrow S_{BOC} = 6(cm^2)$$

Bài 2:

Cho tam giác ABC và đường trung tuyến

AM . Chứng minh $S_{AMB} = S_{AMC}$



Lời giải

$$\text{Kẻ đường cao } AH, \text{ ta có: } S_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH; S_{AMC} = \frac{1}{2} CM \cdot AH$$

$$\text{Mà } BM = CM (gt) \Rightarrow S_{AMB} = S_{AMC} (dpcm)$$

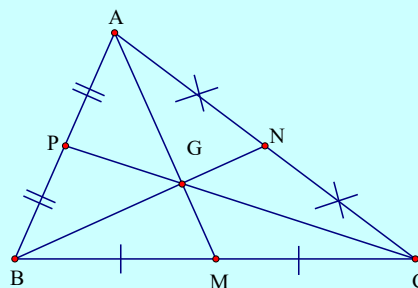
Bài 3:

Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến

AM, BN, CP cắt nhau tại trọng tâm G . Chứng minh:

$$a) S_{AGP} = S_{PGB} = S_{BGM} = S_{MGC} = S_{CGN} = S_{NGA}$$

b) Các tam giác GAB, GBC, GCA có diện tích bằng nhau



Lời giải

$$a) \text{ Tam giác } AGP, PGB \text{ có chung đường cao hạ từ đỉnh } G \text{ và } AP = PB \text{ nên } S_{AGP} = S_{PGB}$$

Tương tự ta có: $S_{BGM} = S_{MGC}; S_{CGN} = S_{NGA}$

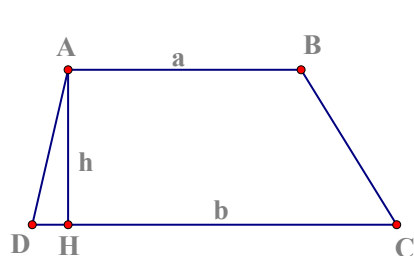
Vì G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow AG = 2GM \Rightarrow S_{BGM} = \frac{1}{2}S_{ABG} \Rightarrow S_{BGM} = S_{AGP} = S_{PGB}$

Chúng minh tương tự ta có: $S_{AGP} = S_{PGB} = S_{BGM} = S_{MGC} = S_{CGN} = S_{NGA}$

b) Sử dụng kết quả câu a, ta có diện tích mỗi tam giác bằng $\frac{1}{6}S_{ABC} \Rightarrow đpcm.$

E. DIỆN TÍCH HÌNH THANG

1. Công thức tính diện tích hình thang

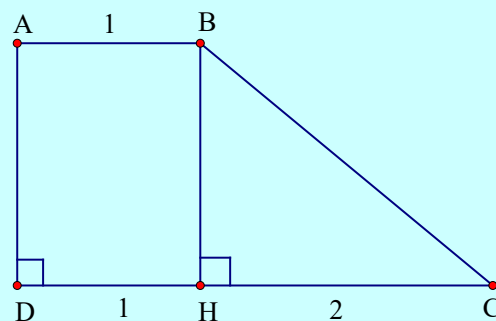


$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b).h$$

Bài 1:

Tính diện tích hình thang ABCD, biết

$$\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, \hat{C} = 45^\circ, AB = 1cm, CD = 3cm$$



Lời giải

Kẻ $BH \perp CD = H \Rightarrow \triangle BHC$ vuông cân tại H

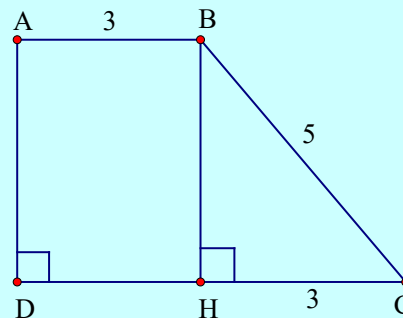
$$\Rightarrow BH = 2cm$$

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot BH}{2} = \frac{(1 + 3) \cdot 2}{2} = 4 (cm^2)$$

Bài 2:

Cho hình thang ABCD có

$\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, AB = 3cm, BC = 5cm, CD = 6cm$. Tính diện tích hình thang



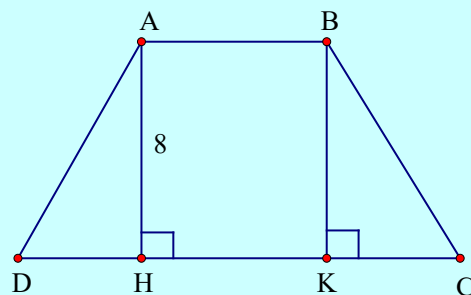
Lời giải

Kẻ $BH \perp CD = H \Rightarrow CH = 3cm$

Xét tam giác vuông $BHC \Rightarrow BH = 4\text{cm} \Rightarrow S_{ABCD} = 18\text{cm}^2$

Bài 3:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Kẻ đường cao AH , biết $AH = 8\text{cm}, HC = 12\text{cm}$. Tính diện tích hình thang cân $ABCD$



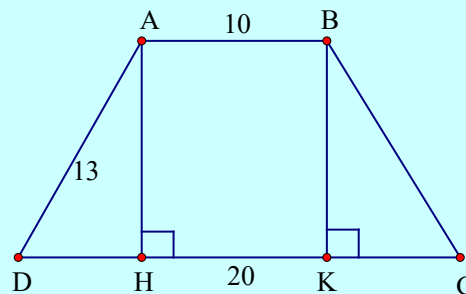
Lời giải

Kẻ $BK \perp CD = K \Rightarrow AB = HK$

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{(2HK + 2KC) \cdot AH}{2} = HC \cdot AH = 96(\text{cm}^2)$

Bài 4:

Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Biết $AB = 10\text{cm}, CD = 20\text{cm}, AD = 13\text{cm}$. Tính diện tích hình thang cân $ABCD$



Lời giải

Kẻ $AH \perp CD = H; BK \perp CD = K$

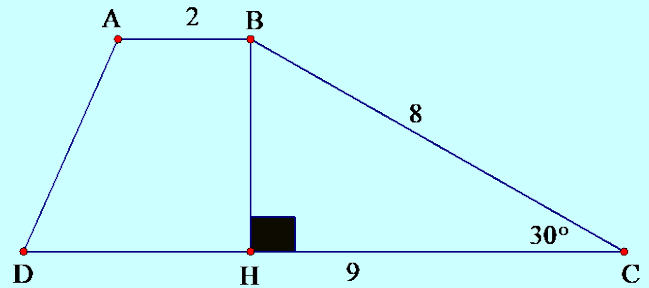
Ta có: $S_{ABCD} = 180(\text{cm}^2)$

Bài 5:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có

$AB = 2\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $CD = 9\text{cm}$ và $\widehat{C} = 30^\circ$. Tính

diện tích hình thang $ABCD$



Lời giải

***) Nhận xét:** Trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30° có độ dài bằng nửa cạnh huyền.

$$\text{Kẻ } BH \perp CD = H \Rightarrow BH = \frac{BC}{2} = 4\text{cm}$$

$$\text{Tính được: } S_{ABCD} = 22(\text{cm}^2)$$

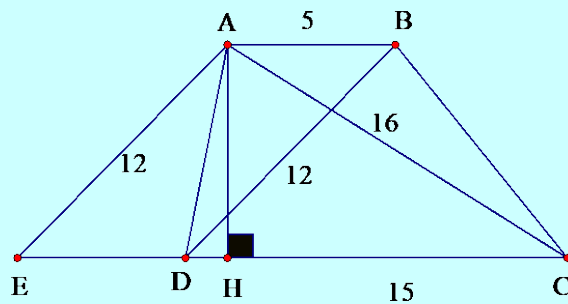
Bài 6:

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy

$AB = 5\text{cm}$, $CD = 15\text{cm}$ và hai đường chéo là

$AC = 16\text{cm}$, $BD = 12\text{cm}$. Tính diện tích hình

thang $ABCD$



Lời giải

Qua A kẻ $AE \parallel BD$ ($E \in DC$) $\Rightarrow AE = BD = 12(\text{cm})$

$$DE = AB = 5(\text{cm}) \Rightarrow \triangle AEC \text{ vuông tại } A \text{ (Pytago đảo)} \Rightarrow AH = \frac{AE \cdot AC}{EC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6(\text{cm}^2)$$

Bài 7:

Cho hình thang cân

$ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 10\text{cm}$, $CD = 22\text{cm}$, DB là phân giác của $\widehat{D}$

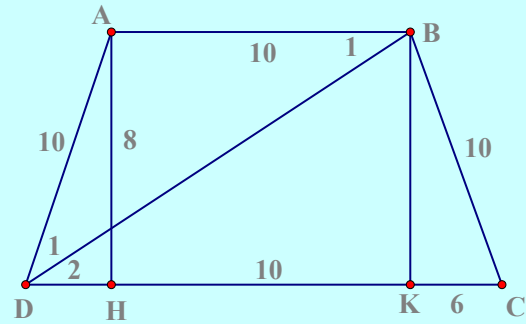
a. Tính chu vi của hình thang

b. Kẻ $AH \perp CD$, $BK \perp CD$. Chứng minh rằng:

$$HD = KC$$

c. Tính chiều cao AH

d. Tính diện tích của hình thang.



Lời giải

a. Xét $\triangle ABD$, có: $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại $A \Rightarrow AB = AD = 10\text{cm}$

Chu vi hình thang là 52cm

b. Tứ giác $ABHK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HK = 10\text{cm}$

Có: $DH + HK + KC = CD \Rightarrow DH = KC = 6(\text{cm})$

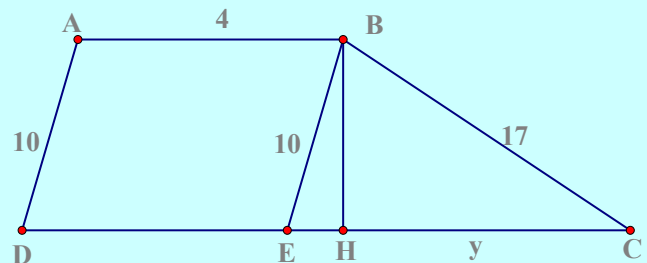
c) Xét $\triangle AHD \Rightarrow AH = 8\text{cm}$

$$d) S_{ABCD} = \frac{1}{2}(10 + 22) \cdot 8 = 128(\text{cm}^2)$$

Bài 8:

Tính S_{ABCD} ($AB \parallel CD$), biết $AB = 4\text{cm}$

$CD = 25\text{cm}$, $AD = 10\text{cm}$, $BC = 17\text{cm}$



Lời giải

Kẻ $BE \parallel AD \Rightarrow \diamond ABED$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AD = BE = 10 \\ AB = DE \end{cases} \Rightarrow EC = 21(\text{cm})$

Kẻ BH vuông góc với CD tại H

$$+\left. \begin{array}{l} \Delta BEH(\widehat{H} = 90^\circ) \Rightarrow x^2 = 100^2 - BH^2 \\ \Delta BHC(\widehat{H} = 90^\circ) \Rightarrow y^2 = 17^2 - BH^2 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 - x^2 = 189 \Rightarrow y - x = \frac{189}{y + x}$$

$$\text{Mà } x + y = 21 \Rightarrow \begin{cases} y - x = 9 \\ y + x = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EH = 6 \\ HC = 15 \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(4 + 25).BH = \dots$$

Bài 9:

Trên đường chéo AC của hình vuông ta lấy một điểm E ($E \neq A, C$). Đường thẳng qua E và song song với AB cắt AD và BC theo thứ tự tại các điểm Q, N . Đường thẳng qua E và song song với BC cắt AB và CD theo thứ tự tại P, M

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân

b) So sánh S_{MNPQ} và S_{ABCD}

c) Xác định vị trí của E để hình thang $MNPQ$ có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải

a) Chứng minh được $MN \parallel PQ$ (cùng vuông góc với AC)

Chứng minh được $MP = QN \Rightarrow \text{đpcm}$

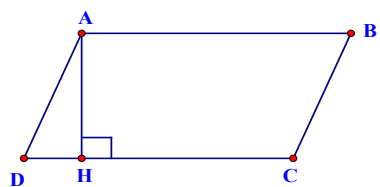
$$\text{b) Ta có } S_{MNE} = \frac{1}{2} S_{MENC}; S_{NPE} = \frac{1}{2} S_{NPBE}; S_{PQE} = \frac{1}{2} S_{PQEQ}; S_{MQE} = \frac{1}{2} S_{MQEMD} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\text{c) Chu vi } \diamond MNPQ = MN + NP + PQ + QM = EC + AE + BE + ED = AC + BE + ED$$

Trong tam giác $BED: BE + ED \geq BD \Rightarrow$ Chu vi $MNPQ \geq AC + BD \Rightarrow E$ là tâm của hình vuông $ABCD$

DIỆN TÍCH HÌNH BÌNH HÀNH

1. Công thức tính diện tích hình bình hành

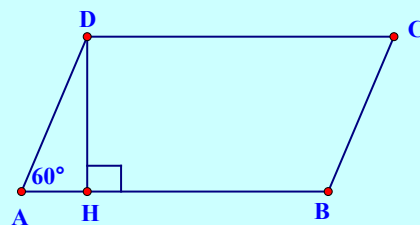


$$S_{ABCD} = AH \cdot CD$$

Bài 1:

Cho hình bình hành $ABCD$ có cạnh

$$AB = 10\sqrt{3}cm; AD = 8cm, \hat{A} = 60^\circ. S_{ABCD} = ?$$



Lời giải

- Kẻ $DH \perp AB \equiv H \Rightarrow AH = \frac{AD}{2} = 4cm$

- Xét $\triangle ADH \Rightarrow DH = 4\sqrt{3}cm \Rightarrow S_{ABCD} = DH \cdot AB = 120cm^2$

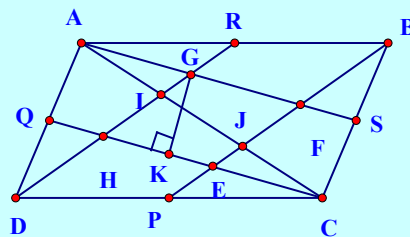
Bài 2:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, DA, CB, AB . Đoạn DR cắt CQ, CA, SA theo thứ tự tại H, I, G . Đoạn BP cắt SA, AC, CQ theo thứ tự tại F, J, E . Chứng minh rằng:

a. Tứ giác $EFGH$ là hình bình hành

b. $AI = IJ = JC$

c. $S_{EFGH} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$



Lời giải

a. $EFGH$ là hình bình hành vì các cặp cạnh đối song song

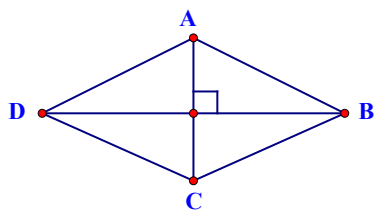
b. Xét $\triangle CID \Rightarrow JC = JI$, Xét $\triangle ABJ \Rightarrow AI = IJ \Rightarrow AI = JI = JC$

c. Ta có: $S_{ASCQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$; $HE = \frac{2}{5}CQ$

Kẻ $GK \perp CQ \equiv K \Rightarrow S_{EFGH} = GK.HE = GK.\frac{2}{5}CQ = \frac{2}{5}S_{ASCQ} \Rightarrow S_{EFGH} = \frac{2}{5}.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$

DIỆN TÍCH HÌNH THOI

1. Công thức tính diện tích hình thoi



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

Bài 1:

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$).

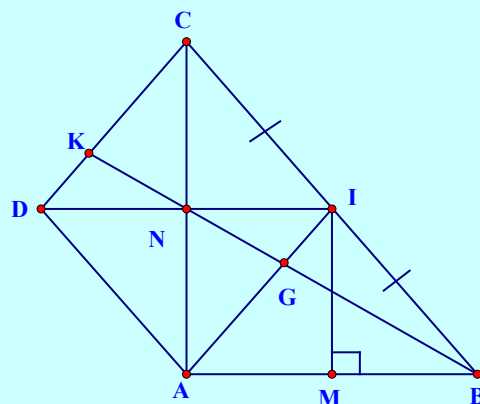
Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Qua I kẻ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N . Lấy D đối xứng với I qua N

a. Tứ giác $ADCI$ là hình gì?

b. Đường thẳng BN cắt DC tại K . Chứng

minh $\frac{DK}{DC} = \frac{1}{3}$

c. Cho $AB = 12\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$. Tính diện tích hình thoi $ADCI$



Lời giải

a. Chứng minh được $ADCI$ là hình thoi

b. Gọi $AI \cap BN \equiv G \Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABC$

Ta chứng minh $DK = GI$, lại có: $DC = AI \Rightarrow \frac{DK}{DC} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3}$

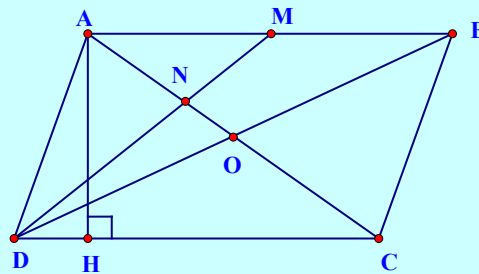
c. $S_{ADCI} = 2S_{ACI} = S_{ABC} = 96\text{cm}^2$

DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Bài 1:

Cho hình bình hành $ABCD$ có $CD = 4cm$, đường cao vẽ từ A đến cạnh CD bằng $3m$

- Tính diện tích hình bình hành $ABCD$
- Gọi M là trung điểm của AB . Tính diện tích tam giác ADM
- DM cắt AC tại N . Chứng minh rằng $DN = 2NM$
- Tính diện tích tam giác AMN



Lời giải

- $S_{ABCD} = 3.4 = 12cm^2$
- $AM = 2cm; S_{ADM} = \frac{1}{2}.2.3 = 3(cm^2)$
- Gọi $O = AC \cap BD$. Chứng minh được N là trọng tâm của tam giác ABD
 $\Rightarrow DN = \frac{2}{3}DM \Rightarrow DN = 2NM \Leftrightarrow NM = \frac{1}{3}MD$
- $S_{ANM} = \frac{1}{3}S_{ADM} = \frac{1}{3}.3 = 1cm^2$

ÔN TẬP ĐỊNH LÝ TA – LÉT TRONG TAM GIÁC

A. Lý thuyết

1. Đoạn thẳng tỉ lệ: Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$

nếu $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ (hoặc $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$)

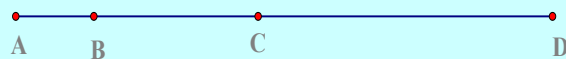
Bài 1:

Trên tia Ax lấy các điểm B, C, D theo thứ tự

đó sao cho $AB = 2cm, BC = 4cm, CD = 8cm$

a. Tính các tỉ số $\frac{AB}{BC}; \frac{BC}{CD}$

b. Chứng minh: $BC^2 = AB.CD$



Lời giải

a) Ta có: $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}; \frac{BC}{CD} = \frac{1}{2}$

b) Có: $BC^2 = AB.CD = (16cm)$

Bài 1:

Trên đường thẳng d lấy bốn điểm A, B, C, D

theo thứ tự đó sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}; \frac{BC}{CD} = \frac{5}{6}$

a. Tính tỉ số $\frac{AB}{CD}$

b. Cho biết $AD = 28cm$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC và CD

Lời giải

a) Ta có: $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AB = \frac{3BC}{5}; \frac{BC}{CD} = \frac{5}{6} \Rightarrow CD = \frac{6BC}{5} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$

b) Ta có:

$$AD = AB + BC + CD \Leftrightarrow 28 = \frac{3BC}{5} + BC + \frac{6BC}{5} \Rightarrow 28 = \frac{3BC + 5BC + 6BC}{5} \Leftrightarrow 14BC = 140 \Leftrightarrow BC = 10(cm)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6 \text{ cm}; CD = 12 \text{ cm}.$$

Bài 1:

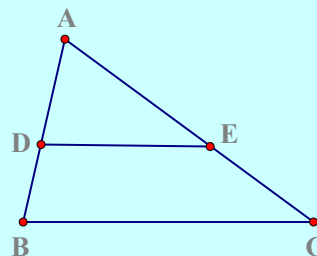
Cho tam giác ABC và các điểm D, E lần lượt nằm trên hai cạnh AB, AC sao cho

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

a. Chứng minh $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$

b. Cho biết $AD = 2 \text{ cm}, BD = 1 \text{ cm}, AE = 4 \text{ cm}$.

Tính AC



Lời giải

a. Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có:

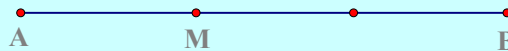
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AD - AB} = \frac{AE}{AE - AC} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \text{ (dpcm)}$$

b. Ta có: $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow EC = 2 \text{ cm}, AC = 6 \text{ cm}$

Bài 1:

Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng AB sao

cho $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$. Tính $\frac{AM}{AB}, \frac{MB}{AB}$.



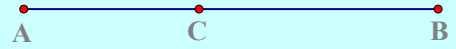
Lời giải

Ta có:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MA}{1} = \frac{MB}{2} = \frac{MA + MB}{3} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{MA}{1} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{1}{3}; \frac{MB}{2} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{2}{3}$$

Bài 1:

Cho điểm C thuộc đoạn AB , biết $AB = 20cm$,
 $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{3}$. Tính AC, BC



Lời giải

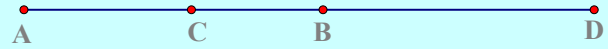
Ta có:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CA}{2} = \frac{CB}{3} = \frac{CA+CB}{5} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow CA = 8cm, CB = 12cm$$

Bài 1:

Cho đoạn thẳng AB , điểm C thuộc AB ,
điểm D thuộc tia đối của tia BA sao cho:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = 2, \text{ biết } CD = 4cm. \text{ Tính } AB$$



Lời giải

Ta có:

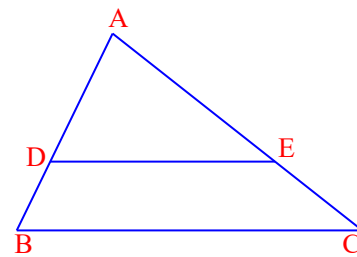
$$\frac{CA}{CB} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{CA}{2} = \frac{CB}{1} = \frac{CA+CB}{3} = \frac{AB}{3} \Rightarrow CB = \frac{AB}{3}; \frac{DA}{DB} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{DA}{2} = \frac{DB}{1} = \frac{DA-DB}{1} = \frac{AB}{1} \Rightarrow DB = AB$$

$$\Rightarrow CB + DB = \frac{AB}{3} + AB = \frac{4AB}{3} \Rightarrow CD = \frac{4AB}{3} \Rightarrow AB = 3(cm)$$

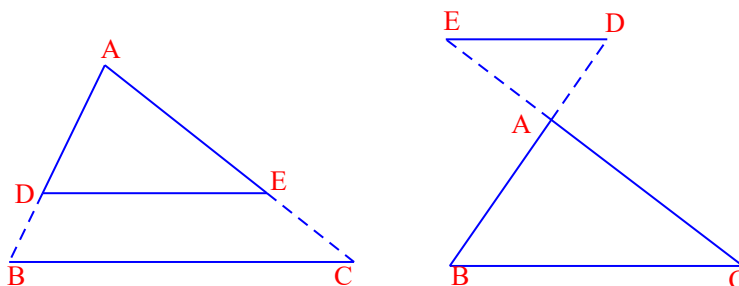
2. Định lý Ta – Lét

***) Định lý :** Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh kia thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC \\ DE // BC \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



3. Chú ý : Định lý Ta lét vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại



Dạng 1: Sử dụng định lý Talet để tính tỉ số đoạn thẳng, tính độ dài đoạn thẳng

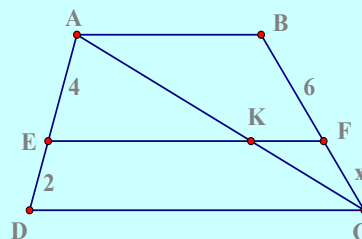
Cách giải: Ta thực hiện theo hai bước sau

Bước 1: Xác định cặp đoạn thẳng tỉ lệ có được nhờ định lý TaLet.

Bước 2: Sử dụng độ dài đoạn thẳng đã có và vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức để tìm độ dài đoạn thẳng cần tính.

Bài 1:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$). Một đường thẳng song song với hai đáy cắt các cạnh bên AD và BC theo thứ tự tại E và F . Tính FC ? Biết $AE = 4cm, ED = 2cm, BF = 6cm$



Lời giải

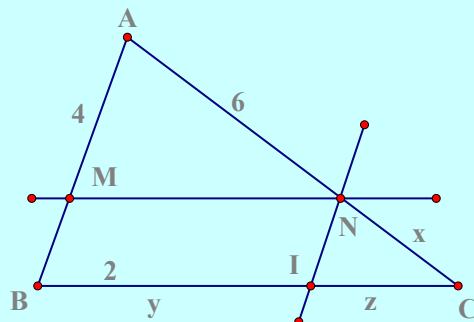
Xét ΔADC , có $EK // CD$, theo định lý Talet ta có: $\frac{AE}{ED} = \frac{AK}{KC}$ (1)

Xét ΔABC , có $AB // FK$, theo định lý Talet ta có :

$$\frac{AK}{KC} = \frac{BF}{FC} (2) \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 3cm$$

Bài 2:

Tính x, y, z trong hình vẽ sau, biết $MN \parallel BC$
và $AB \parallel NI$



Lời giải

Ta có: $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 3(cm)$

Lại có: $NI \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{CI}{IB} \Leftrightarrow \frac{3}{9} = \frac{z}{12} \Rightarrow z = 4(cm)$

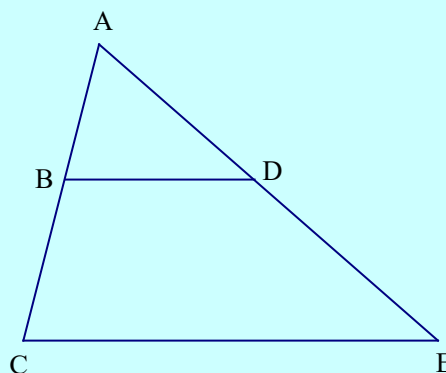
Ta có: $BC = BI + IC \Leftrightarrow 12 = y + 4 \Rightarrow y = 8(cm)$

Bài 3:

Cho tam giác ACE có $AC = 11cm$. Lấy điểm B trên cạnh AC sao cho $BC = 6cm$. Lấy điểm D trên cạnh AE sao cho $BD \parallel EC$. Giả sử $AE + ED = 25,5cm$. Hãy tính:

a. Tỉ số $\frac{DE}{AE}$

b. Độ dài các đoạn thẳng AE, DE, AD



Lời giải

a) Xét tam giác ACE , có: $\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$ (Định lý TaLet) $\Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{6}{11}$

b) **Cách 1:** Theo tính chất tỉ lệ thức ta có:

$$\frac{DE + AE}{AE} = \frac{17}{11} \Rightarrow AE = 16,5\text{cm}; DE = 9\text{cm}; AD = 7,5\text{cm}.$$

Cách 2: Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

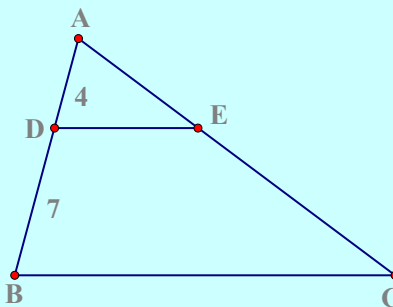
Cách 3: Thay $DE = 25,5 - AE$ vào $\frac{DE}{AE} = \frac{6}{11}$.

Bài 4:

Cho tam giác ABC có $AB = 11\text{cm}$. Lấy điểm D trên cạnh AB sao cho $AD = 4\text{cm}$. Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$. Giả sử $EC - AC = 1,5\text{cm}$. Hãy tính:

a. Tỉ số $\frac{AE}{EC}$

b. Độ dài các đoạn thẳng AE, EC, AC



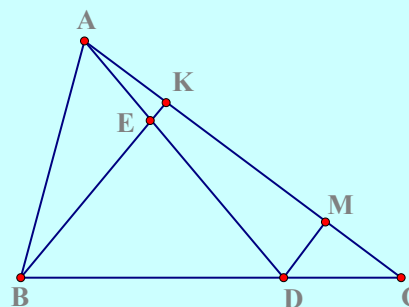
Lời giải

a) Xét $\triangle ADE$, có $DE \parallel BC$, theo định lý Talet ta có: $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{AE}{4} = \frac{EC}{7} = \frac{1,5}{3} \Rightarrow AE = 2\text{cm}, EC = 3,5\text{cm}, AC = 5,5\text{cm}$

Bài 5:

Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC sao cho $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$, điểm E trên đoạn thẳng AD sao cho $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}$. Gọi K là giao điểm của BE và AC . Tính tỉ số $\frac{AK}{KC}$?



Lời giải

Kẻ $DM \parallel BK$ (M thuộc AC)

Áp dụng định lý TaLet trong $\triangle CBK$, ta có:

$$\frac{KM}{KC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{KM}{KC} = \frac{3}{4} (1)$$

Áp dụng định lý TaLet trong $\triangle ADM$, ta có: $\frac{AK}{KM} = \frac{1}{2} (2) \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{3}{8}$

Dạng 2: Sử dụng định lý Talet để chứng minh hệ thức cho trước

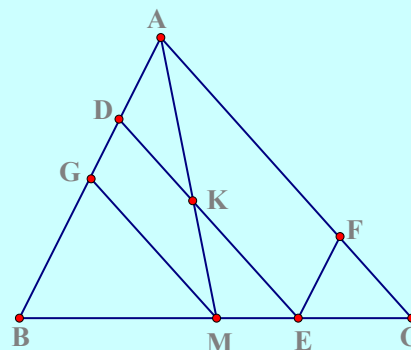
Cách giải: Thực hiện theo hai bước sau

Bước 1: Xác định cặp đoạn thẳng tỉ lệ có được nhờ định lý Ta-Let

Bước 2: Vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức và các kiến thức cần thiết khác để chứng minh được hệ thức đề bài yêu cầu.

Bài 1:

Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến và điểm E thuộc đoạn thẳng MC . Qua E kẻ đường thẳng song song với AC , cắt AB tại D và cắt AM tại K . Qua E kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AC ở F . Chứng minh $CF = DK$.



Lời giải

Ta có tứ giác $AB \parallel FK$ là hình bình hành (dnhb) $\Rightarrow EF = AD$ (1)

Kẻ $MG \parallel AC$ ($G \in AB$) $\Rightarrow AG = BG$

$$\triangle ABC \Rightarrow \frac{CF}{EF} = \frac{AC}{AB} \quad (2), \triangle AGM, \triangle ABC \Rightarrow \frac{DK}{AD} = \frac{MG}{AG} = \frac{MG}{BG} = \frac{AC}{AB} \quad (3)$$

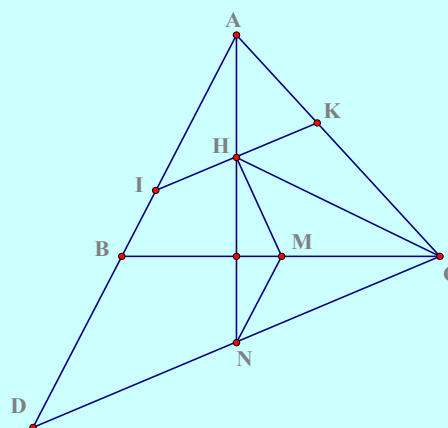
Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow CF = DK$

Bài 1:

Cho tam giác nhọn ABC , M là trung điểm của BC và H là trực tâm. Đường thẳng qua H và vuông góc với MH cắt AB và AC theo thứ tự ở I và K . Qua C kẻ đường thẳng song song với IK , cắt AH và AB theo thứ tự ở N và D . Chứng minh

a. $NC = ND$

b. $HI = HK$



Lời giải

a) Chứng minh M là trực tâm $\Delta HNC \Rightarrow MN \perp HC$

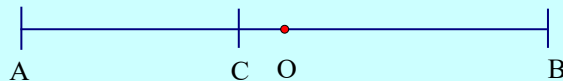
$$\Rightarrow MN \parallel AB \Leftrightarrow MN \parallel DB \Rightarrow NC = ND$$

b) Ta có: $IH \parallel DN; HK \parallel NC \Rightarrow \frac{HI}{DN} = \frac{HK}{NC} \Rightarrow HI = HK$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Cho đoạn thẳng $AB = 42\text{cm}$ và điểm C thuộc đoạn thẳng đó sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{3}$. Tính độ dài các đoạn thẳng CA, CB và khoảng cách từ C đến trung điểm O của AB .

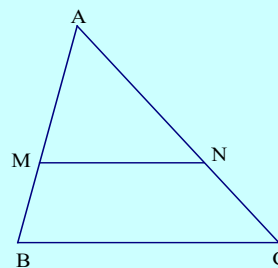


Lời giải

Ta tính được: $CA = 12\text{cm}, CB = 30\text{cm}, CO = 9\text{cm}$

Bài 2:

Cho tam giác ABC , điểm M bất kì trên cạnh AB . Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC ở N . Biết $AM = 11\text{cm}, MB = 8\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn AN, NC

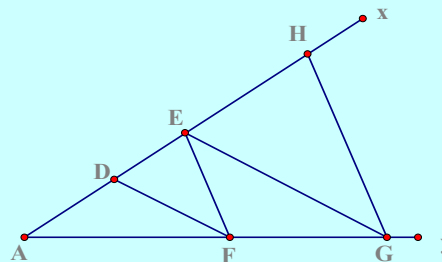


Lời giải

Ta tính được: $AN = 22\text{cm}, NC = 16\text{cm}$

Bài 3:

Cho $\widehat{xAy}$, trên tia Ax lấy hai điểm D và E , trên tia Ay lấy hai điểm F và G sao cho $FD \parallel EG$. Đường thẳng kẻ qua G song song với EF cắt tia Ax ở H . Chứng minh: $AE^2 = AD.AH$

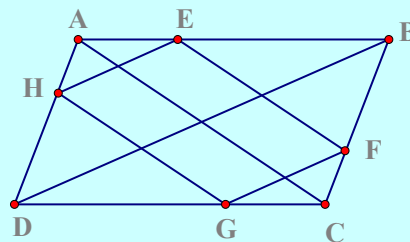


Lời giải

Chúng minh được: $\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AE} \left(= \frac{FA}{AG} \right) \Rightarrow AE^2 = AD.AH$

Bài 4:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là một điểm bất kỳ trên cạnh AB . Qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC ở F và kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD ở H . Đường thẳng kẻ qua F song song với BD cắt CD ở G . Chứng minh: $AH \cdot CD = AD \cdot CG$



Lời giải

Áp dụng định lý TaLet trong các tam giác ADB, ABC, BCD :

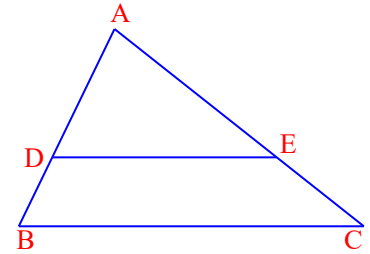
$$\frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} \Rightarrow AH \cdot CD = AD \cdot CG$$

ÔN TẬP ĐỊNH LÝ TALET ĐẢO, HỆ QUẢ ĐỊNH LÝ TALET

A. Lý thuyết

1. Định lý Ta-lét đảo: Nếu ột đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song với cạnh còn lại của tam giác.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC (D \in AB, E \in AC) \\ \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \end{array} \right\} \Rightarrow DE // BC$$



2. Hệ quả định lý Ta-Lét: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC (D \in AB, E \in AC) \\ DE // BC \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

***) Chú ý:** Hệ quả trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng d song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

3. Tính chất của tỉ lệ thức: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}; \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

4. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$

B. Bài tập

Dạng 1: Sử dụng hệ quả của định lý TaLet để tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau

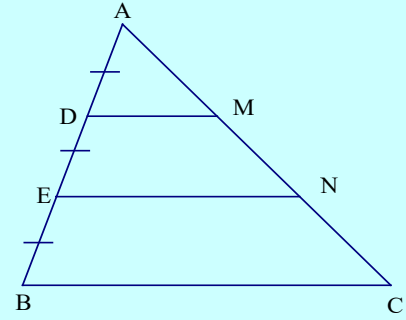
Cách giải: Thực hiện theo 2 bước sau

Bước 1: Xét đường thẳng song song với một cạnh của tam giác, sử dụng hệ quả để lập các đoạn thẳng tỉ lệ.

Bước 2: Sử dụng các tỉ số đã có, cùng các tính chất của tỉ lệ thức, các tỉ số trung gian (nếu cần) để tính độ dài các đoạn thẳng hoặc chứng minh các hệ thức có được từ hệ quả, từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau.

Bài 1:

Cho tam giác ABC có cạnh $BC = m$. Trên cạnh AB lấy các điểm D, E sao cho $AD = DE = EB$. Từ D, E kẻ các đường thẳng song song với BC , cắt cạnh AC theo thứ tự tại M và N . Tính độ dài các đoạn thẳng DM và EN theo m .



Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có $DM \parallel BC \Rightarrow \frac{DM}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DM = \frac{m}{3}$ (Ta-lét)

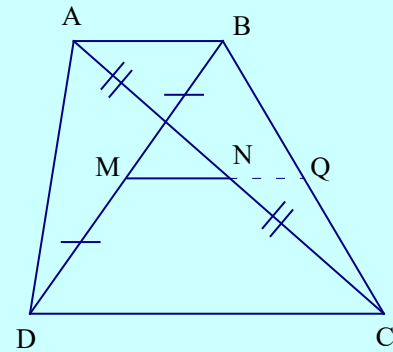
Tương tự: $EN \parallel BC \Rightarrow \frac{EN}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow EN = \frac{2}{3}m$

Bài 2:

Cho hình thang $ABCD$ (với $AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi trung điểm của đường chéo BD là M . Qua M kẻ đường thẳng song song với DC cắt AC tại N . Chứng minh:

a) N là trung điểm của AC

b) $MN = \frac{CD - AB}{2}$



Lời giải

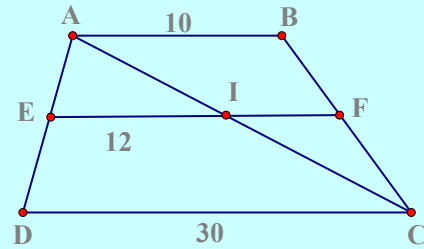
a) Gọi Q là giao điểm của MN với BC ($Q \in BC$)

Xét $\triangle BCD$ ($MQ \parallel DC$) và $BM = MD \Rightarrow BQ = QC; NQ \parallel AB$

b) Ta có: $MQ = \frac{1}{2}CD; NQ = \frac{1}{2}AB \Rightarrow MN = MQ - QN = \frac{CD - AB}{2}$

Bài 3:

Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. E thuộc AD sao cho $\frac{AE}{AD} = \frac{2}{5}$. Qua E kẻ đường thẳng song song với CD , cắt BC ở F . Tính EF , biết $AB = 10\text{cm}, CD = 30\text{cm}$

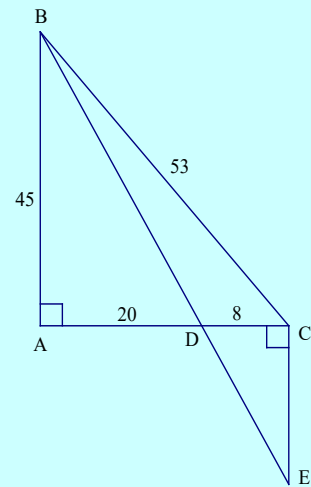


Lời giải

Ta có: $\frac{EI}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{2}{5} \Rightarrow EI = 12(\text{cm}); \frac{FI}{AB} = \frac{CI}{CA} = \frac{DE}{DA} = \frac{3}{5}$
 $\Rightarrow FI = 6(\text{cm}); EF = 18(\text{cm})$

Bài 4:

Cho tam giác ABC vuông tại $A, BC = 53\text{cm}$, D thuộc AC , $AD = 20\text{cm}, CD = 8\text{cm}$. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng BD tại E . Tính CE ?



Lời giải

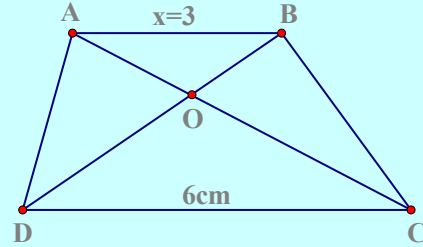
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , áp dụng định lý Pytago

$$\Rightarrow AB = 45\text{cm}$$

Xét $\triangle ABC$, ta có: $AB \parallel CE \Rightarrow \frac{CE}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{8}{20} \Rightarrow CE = 18(\text{cm})$

Bài 5:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , biết $\frac{OA}{AC} = \frac{1}{3}$, $CD = 6\text{cm}$. Tính AB .



Lời giải

Xét $\triangle OCD$, có $AB \parallel CD$ ($A \in OC, B \in OD$)

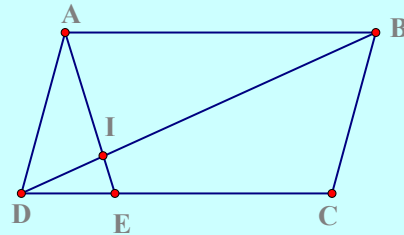
$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \text{ (HQ.TaLet)} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OA+OC} = \frac{AB}{AB+CD} \Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{x}{x+6} \Rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = x+6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3(\text{cm}) \Rightarrow AB = 3\text{cm}.$$

Bài 6:

Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh CD lấy điểm E sao cho $\frac{DE}{DC} = \frac{1}{4}$. Gọi I là giao điểm của AE và BD . Tính $\frac{DI}{DB}$.



Lời giải

Xét $\triangle IAB$, có: $DE \parallel AB$ ($D \in IB, E \in IA$)

$$\Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{DE}{AB} \text{ (Hệ quả TaLet)}$$

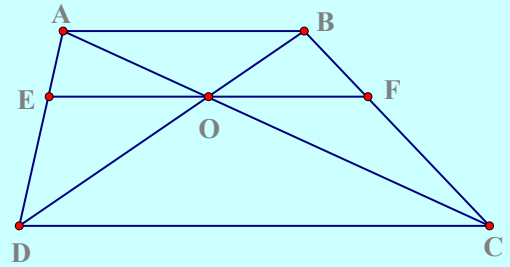
$$\Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DI}{DI+IB} = \frac{1}{1+4} \Rightarrow \frac{DI}{DB} = \frac{1}{5}$$

Bài 1:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có O là giao điểm của 2 đường chéo. Đường thẳng qua O song song với hai đáy cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng

a. $OE = OF$

b*. $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OE}$



Lời giải

a. Xét $\triangle ABD$, $OE \parallel AB$ ($E \in AB, O \in BD$)

$$\Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{DO}{DB} \quad (\text{Hệ quả TaLet}) \quad (1)$$

Xét $\triangle ABC$, có $OF \parallel AB$ ($F \in BC, O \in AC$)

$$\Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{CO}{CA} \quad (\text{Hệ quả TaLet}) \quad (2)$$

$$\text{Xét } \triangle OCD, AB \parallel CD (A \in OC, B \in OD) \Rightarrow \frac{DO}{OB} = \frac{CO}{AO} \Rightarrow \frac{DO}{DO+OB} = \frac{CO}{CO+OA} \Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{OF}{AB} \Rightarrow OE = OF$$

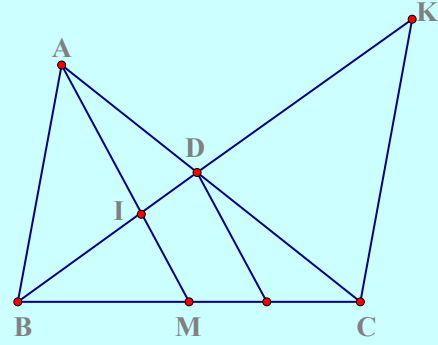
b. Xét $\triangle ABC$, có $EF \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{CF}{CB}$ (Hệ quả Ta-lét) (4)

$$\text{Xét } \triangle BCD, OF \parallel CD \Rightarrow \frac{OF}{CD} = \frac{BF}{CB} \quad (\text{H.Q. TaLet}) \quad (5) \Rightarrow \frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} = \frac{CF}{BC} + \frac{BF}{BC} = 1 \Rightarrow OF \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 1$$

$$\text{Hay } \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OF}$$

Bài 7:

Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM .
Trên cạnh AC lấy điểm D . Gọi I là giao điểm của AM và BD . Qua C kẻ đường thẳng song song với AB , cắt BD ở K .
Chứng minh rằng: $IB^2 = ID.IK$



Lời giải

Từ D kẻ $DH \parallel AM$ (H thuộc BC)

Xét $\triangle BDH$, có $IM \parallel DK \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{MB}{MH}$ (Hệ quả TaLet) (1)

Xét $\triangle ACM$, có $DH \parallel AM \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{AC}{AD}$ (Hệ quả TaLet)

$$\Rightarrow \frac{MB}{MH} = \frac{AC}{AD} (MB = MC) (2)$$

Xét $\triangle ABD$, có $CK \parallel AB \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DK}$ (Hệ quả TaLet) $\Rightarrow \frac{AD+DC}{DC} = \frac{BD+DK}{DK} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BK}{DK}$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BK}{BD} (3) \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{AC}{AD} (4)$$

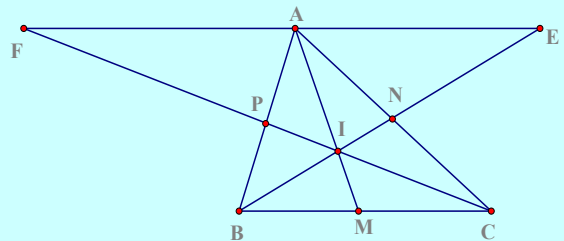
Từ (3)(4) $\Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{BK}{BD} \Rightarrow IB.BD = ID.BK \Rightarrow IB(IB + ID) = ID(IB + IK) \Rightarrow IB^2 + IB.ID = ID.IB + ID.IK$

$$\Rightarrow IB^2 = ID.IK (dpcm)$$

Bài 7:

Cho tam giác ABC , I là một điểm trong tam giác. IA, IB, IC lần lượt cắt BC, CA, AB ở M, N, P . Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BN, CM tại E và F . Chứng minh rằng:

a. $\frac{AE}{BM} = \frac{AF}{MC}$



$$b. \frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } AE // BM \Rightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{AE}{BM}$$

$$\text{Lại có: } FA // MC \Rightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{FA}{MC} \Rightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{AF}{MC}$$

$$b. \text{ Cách 1: Xét } \triangle NBC, \text{ có: } AE // BC \Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{AE}{BC} \text{ (hệ quả Ta-lét)} \quad (1)$$

$$\text{Xét } \triangle PBC, \text{ có: } AF // BC \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{AF}{BC} \text{ (H.Q. TaLet)} (2) \Rightarrow \frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{AE}{BC} + \frac{AF}{BC} = \frac{EF}{BC} (3)$$

$$\text{Xét } \triangle IBC, \text{ có: } EF // BC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{IE}{IB} \text{ (H.Q. TaLet)} (4)$$

$$\text{Xét } \triangle IBM, \text{ có: } AE // BM \Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{IA}{IM} \text{ (H.Q. TaLet)} (5) \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{IA}{IM} (6)$$

$$\text{Từ (3)(6)} \Rightarrow \frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM} \text{ (dpcm)}$$

$$\text{Cách 2: Ta có: } \frac{AE}{MB} = \frac{AF}{MC} = \frac{AE + AF}{MB + MC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AI}{IM} (1)$$

$$\text{Ta chứng minh được: } \frac{AP}{PB} = \frac{AF}{BC} (2); \frac{AN}{NC} = \frac{AE}{BC} (3) \Rightarrow \frac{AN}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$$

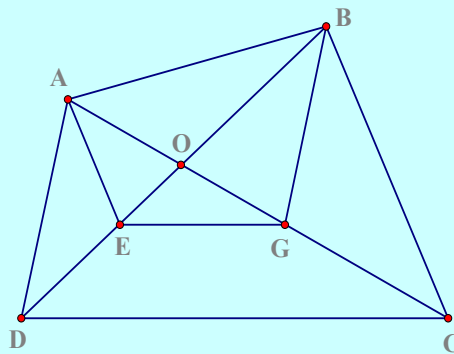
Dạng 2: Sử dụng định lý TaLet để chứng minh các đường thẳng song song

Cách giải: Thực hiện theo hai bước sau

- Xác định cặp đoạn thẳng tỉ lệ trong tam giác
- Sử dụng định lý đảo của định lý TaLet để chứng minh các đoạn thẳng song song

Bài 1:

Cho tứ giác $ABCD$. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt BD ở E . Đường thẳng qua B và song song với AD cắt AC ở G . Chứng minh rằng $EG \parallel CD$



Lời giải

Xét $\triangle OAD$, có: $BE \parallel AD \Rightarrow \frac{OA}{OG} = \frac{OD}{OB}$ (HQ)(1)

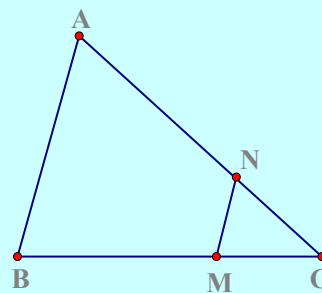
Xét $\triangle OBC$, có: $AG \parallel BC \Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OA}$ (HQ)(2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{OA}{OG} \cdot \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \cdot \frac{OB}{OE} \Leftrightarrow \frac{OC}{OG} = \frac{OD}{OE}$

Xét $\triangle OCD$, có: $E \in OD, G \in OC$, có: $\frac{OC}{OG} = \frac{OD}{OE} \Rightarrow EG \parallel CD$ (Ta-lét đảo).

Bài 2:

Cho tam giác ABC có điểm M trên cạnh BC sao cho $BC = 4CM$. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{3}$. Chứng minh $MN \parallel AB$

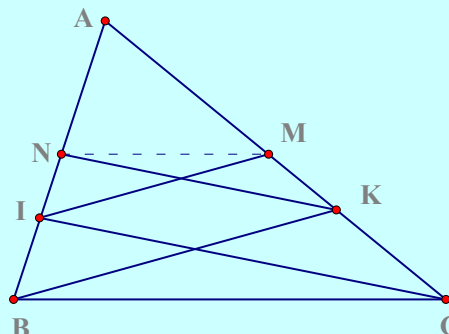


Lời giải

Ta có: $BC = 4CM \Rightarrow BM = 3CM \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{1}{3} = \frac{CN}{AN} \Rightarrow MN \parallel AB$

Bài 3:

Cho tam giác ABC , điểm I thuộc cạnh AB , điểm K thuộc cạnh AC . Kẻ $IM \parallel BK$ (M thuộc AC), kẻ $KN \parallel CI$ (N thuộc AB). Chứng minh $MN \parallel BC$

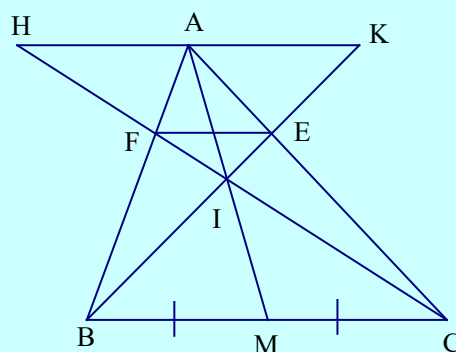


Lời giải

Ta có: $IM \parallel BK, KN \parallel IC \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AM}{AC}, \frac{AN}{AB} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$

Bài 4:

Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM , điểm I thuộc đoạn thẳng AM . Gọi E là giao điểm của BI và AC , F là giao điểm của CI và AB . Chứng minh $EF \parallel BC$



Lời giải

Cách 1: Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt tia CF tại H và cắt tia BE tại K .

Xét $\triangle AIH, \triangle AIK$ ($HA \parallel BM; AK \parallel MC$) $\Rightarrow AH = AK$

Lại có: $\frac{AH}{BC} = \frac{AF}{FB}; \frac{AK}{BC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow EF \parallel BC$

Cách 2: Áp dụng định lí Xê-va, ta có:

AM, BE, CF đồng quy tại $I \Rightarrow \frac{MB}{MC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$, mà $\frac{FB}{FA} = \frac{EC}{EA} \Rightarrow EF \parallel BC$.

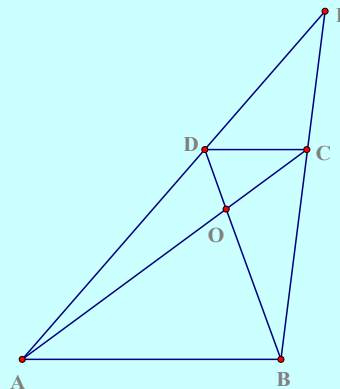
BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Cho tam giác AOB có $AB=18cm, OA=12cm, OB=9cm$. Trên tia đối của tia OB lấy điểm D sao cho $OD=3cm$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt tia AO ở C . Gọi F là giao điểm của AD và BC . Tính

a. Độ dài OC, OD

b. Tính tỉ số: $\frac{FD}{FA}$



Lời giải

a. $AB \parallel CD$, áp dụng định lý TaLet, được $OC = 4cm, CD = 6cm$

b. Áp dụng hệ quả định lý TaLet cho $\triangle ABF$, ta được: $\frac{FD}{FA} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{3}$

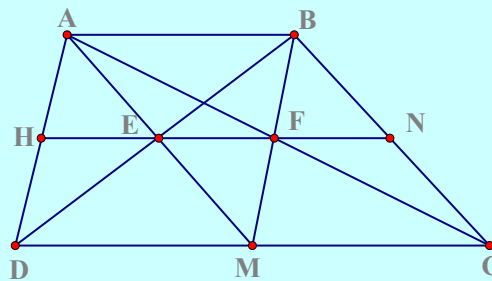
Bài 2:

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD . Gọi M là trung điểm của CD , E là giao điểm của MA và BD , F là giao điểm của MB và AC

a. Chứng minh $EF \parallel AB$

b. Đường thẳng EF cắt AD, BC lần lượt tại H và N . Chứng minh $HE = EF = FN$

c. Biết $AB = 7,5cm, CD = 12cm$. Tính độ dài HN .



Lời giải

a. Từ $AB \parallel DM, AB \parallel MC \Rightarrow \frac{AE}{EM} = \frac{BF}{FM} \Rightarrow EF \parallel AB$

b. $HF // DC \Rightarrow \frac{HE}{DM} = \frac{EF}{MC} \Rightarrow HE = EF(1)$

Tương tự: $FE = FN(2) \Rightarrow HE = FE = FN(dpcm)$

c. Chứng minh được:

$$\frac{AE}{EM} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{AE}{AE + EM} = \frac{5}{5 + 4} \Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{5}{9}; \frac{HE}{DM} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow HE = \frac{10}{3}(cm) \Rightarrow HN = 10cm$$

ÔN TẬP TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. Lý thuyết

1. Định lý: Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

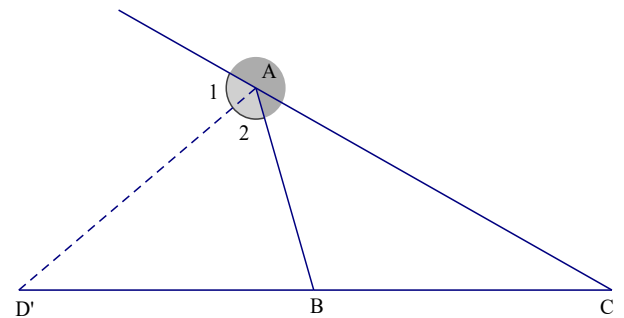
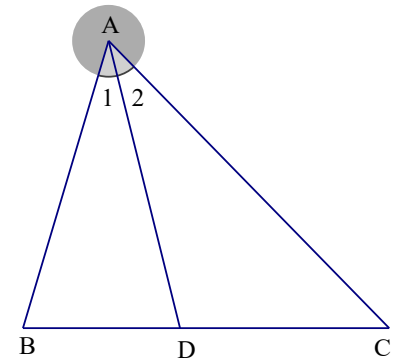
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC (D \in BC) \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

2. Chú ý 1: Định lý trên vẫn đúng đối với tia phân giác ngoài của tam giác

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} (AB \neq AC)$$

3. Chú ý 2: Nếu D thuộc BC mà

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD \text{ là phân giác } \widehat{BAC}.$$



B. Bài tập

Dạng 1: Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính độ dài đoạn thẳng

Cách giải: Thực hiện theo hai bước sau

- Xác định đường phân giác và lập các đoạn thẳng tỷ lệ
- Sử dụng các đoạn thẳng tỷ lệ đó để tính độ dài đoạn thẳng chưa biết.

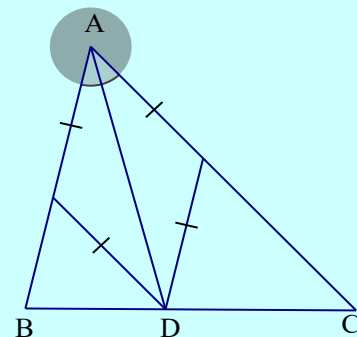
Bài 1:

Cho tam giác ABC có $AB = 30cm$,
 $AC = 45cm; BC = 50cm$, đường phân giác AD

a. Tính BD, CD

b. Qua D vẽ

$DE \parallel AB, DF \parallel AC (E \in AC; F \in AB)$. Tính các cạnh của $\diamond AEDF$



Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$, có AD là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DB}{2} = \frac{DC}{3} = \frac{DB+DC}{5} = 10$

$$\Rightarrow DB = 20(cm), DC = 30(cm)$$

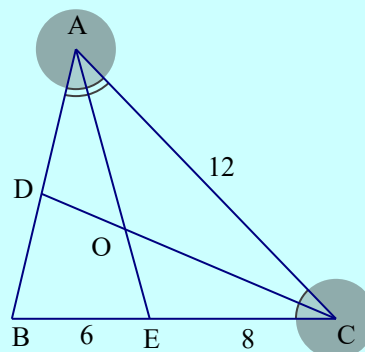
b) Xét tứ giác $AEDF$, có: $FD \parallel AE; DE \parallel AF \Rightarrow \diamond AEDF$ là hình bình hành (dnhb)

Lại có AD là phân giác $\hat{A} \Rightarrow \diamond AEDF$ là hình thoi

+) Xét $\triangle ABC$, có $DE \parallel AB \Rightarrow \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow \frac{DE}{30} = \frac{30}{50} \Rightarrow DE = 18(cm)$ (hệ quả Ta-lét).

Bài 2: Cho tam giác ABC , hai đường phân giác AE và BD cắt nhau tại O . Tính AC , biết

$$AB = 12cm, \frac{OA}{OE} = \frac{3}{2}, \frac{AD}{DC} = \frac{6}{7}$$



Lời giải

Xét $\triangle AEC$, có CO là phân giác của $\widehat{ACE} \Rightarrow \frac{OA}{OE} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{12}{BE} \Rightarrow BE = 8(cm)$

Xét $\triangle ABC$, có BD là phân giác của $\widehat{ACB} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{6}{7} = \frac{12}{BC} \Rightarrow BC = 14(cm)$

Ta có: $CE = BC - BE = 14 - 8 = 6(cm)$

Xét $\triangle ABC$, $\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{EB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = 9cm$ có AE là đường phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{EB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

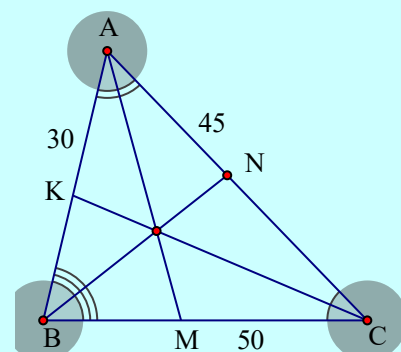
(tính chất đường phân giác) $\Rightarrow AC = 9cm$.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AM, BN, CK . Biết $AB = 30, AC = 45,$

$$BC = 50$$

a. Tính KA, KB, MB, NC, NA

b. Chứng minh rằng: $\frac{KA}{KB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$



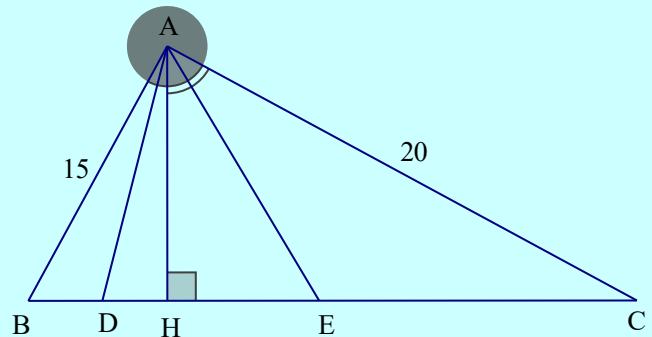
Lời giải

$$a) \frac{KA}{KB} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{KA}{9} = \frac{KB}{10} = \frac{KA+KB}{19} = \frac{35}{19} \Rightarrow KA = \frac{315}{19}, KB = \frac{350}{19}$$

Tương tự: $MB = 20, MC = 30, NC = \frac{225}{8}, NA = \frac{135}{8}$

$$b) \frac{KA}{KB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1$$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , $AB = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$. Tia phân giác của góc HAB cắt HB tại O , tia phân giác của góc AHC cắt HC ở E . Tính AH, HD, HE



Lời giải

+) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 15^2 + 20^2 \Leftrightarrow BC = 625 \Rightarrow BC = 25 (BC > 0)$

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot AH \Rightarrow AB \cdot AC = BC \cdot AH \Rightarrow AH = 12(\text{cm})$

Xét $\triangle AHB$ ($\widehat{H} = 90^\circ$) $\Rightarrow BH = 9(\text{cm}) \Rightarrow HC = 16(\text{cm})$

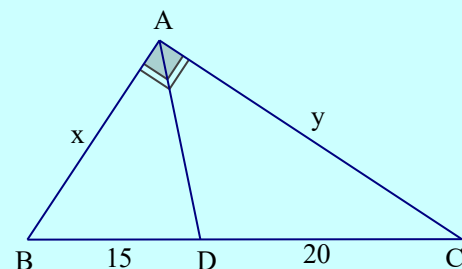
Xét $\triangle ABH$, có AD là phân giác của $\widehat{BAH}$ ($D \in BH$)

$$\Rightarrow \frac{DH}{DB} = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{DH}{BH} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{DH}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow DH = 4$$

Xét $\triangle ACH$, có AE là phân giác của $\widehat{HAC}$ ($E \in CH$)

$$\Rightarrow \frac{DH}{DB} = \frac{HE}{EC} = \frac{AH}{AC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{HE}{HC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{HE}{16} = \frac{3}{8} \Rightarrow HE = 6(\text{cm}).$$

Bài 5*: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác AD . Tính AB, AC biết $DB = 15\text{cm}, DC = 20\text{cm}$



Lời giải

Đặt $AB = x; AC = y$, ta có $\triangle ABC$ vuông tại A , theo định lý Pytago $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1225$

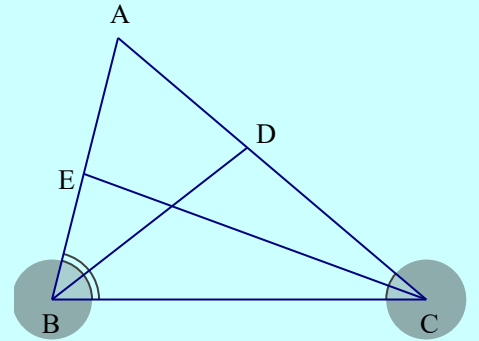
Xét $\triangle ABC$, có AD là đường phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{DB}{DC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2 + y^2}{25} = 49 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = 7 \Rightarrow AB = 21(cm); AC = 28(cm)$$

Cách 2: Ta có $BC = BD + CD = 35(cm)$

$$AB = \frac{3}{4}AC; BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = \frac{9}{16}AC^2 + AC^2 = \frac{25}{16}AC^2 \Rightarrow AC = 28(cm), AB = 21(cm)$$

Bài 6*: Cho tam giác ABC , các đường phân giác của BD và CE , biết: $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}; \frac{AE}{EB} = \frac{5}{6}$. Tính các cạnh của tam giác ABC , biết chu vi tam giác bằng 45cm.



Lời giải

Xét $\triangle ABC$, theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{5}{6} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{5} = \frac{BC}{6} (1); \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{BC}{3} \Rightarrow \frac{AC}{4} = \frac{BC}{6} (2) \Rightarrow \frac{AC}{5} = \frac{BC}{6} = \frac{AB}{4}$$

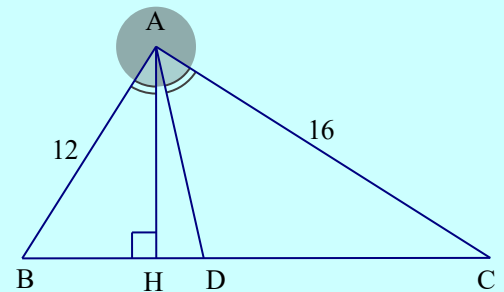
$$= \frac{AB + BC + CA}{15} = 3$$

$$\Rightarrow AB = 15(cm), BC = 18(cm), AC = 12(cm).$$

Bài 7*: Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = 12cm, AC = 16cm$, phân giác của góc A cắt BC tại D

a. Tính BC, BD, CD

b. Vẽ đường cao AH . tính AH, HD, AD



Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$, áp dụng định lý Pytago, ta được $BC = 20(cm)$

$$\text{Theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có: } \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Leftrightarrow \frac{BD}{12} = \frac{CD}{16} = \frac{BC - BD}{16}$$

$$\Rightarrow 16BD = 12BC - 12BD \Leftrightarrow 28BD = 12BC$$

$$\Rightarrow BD = 11,43 \Rightarrow CD = 8,57(cm)$$

$$b) S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = 9,6(cm)$$

$$\text{Xét } \triangle ABH (\widehat{H} = 90^0) \Rightarrow BH = 7,2(cm), BD = 8,57(cm) \Rightarrow HD = 1,37(cm)$$

$$\text{Xét } \triangle ADH (\widehat{H} = 90^0), \text{ áp dụng định lý Pytago ta được } AD = 9,69(cm).$$

Dạng 2: Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính tỉ số, chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song.

Cách giải: Thực hiện theo hai bước:

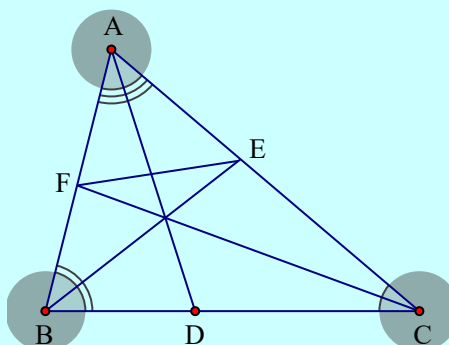
- Xác định đường phân giác và lập các đoạn thẳng tỉ lệ
- Sử dụng các tỉ số đã có, cùng các tính chất tỉ lệ thức, các tỉ số trung gian và định lý đảo định lý TaLet để tính tỉ số đoạn thẳng hoặc chứng minh các hệ thức, từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau hay các đường thẳng song song.

Bài 1: Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF

a. Chứng minh: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{AE} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$

b. Khi tam giác ABC cân tại A , chứng minh $EF \parallel BC$

c. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$, tính tỉ số diện tích hai tam giác ABD và ACD .



Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ có AD, BE, CF là ba đường phân giác của các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ nên theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$ (đpcm)

b) Khi $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{BA}{BC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AF}{BF} \Rightarrow EF \parallel BC$ (Ta-lét đảo)

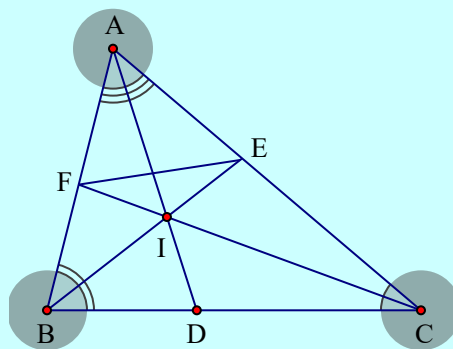
c) Ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$.

Gọi h là chiều cao từ đỉnh A xuống đáy BC , ta có: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{h \cdot BD}{2}}{\frac{h \cdot DC}{2}} = \frac{DB}{DC} = \frac{2}{3}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC , các đường phân giác AD, BE, CF giao nhau tại I . Chứng minh:

a) $\frac{DI}{DA} = \frac{BC}{C_{ABC}}$

b) $\frac{DI}{DA} + \frac{EI}{EB} + \frac{FI}{FC} = 1$



Lời giải

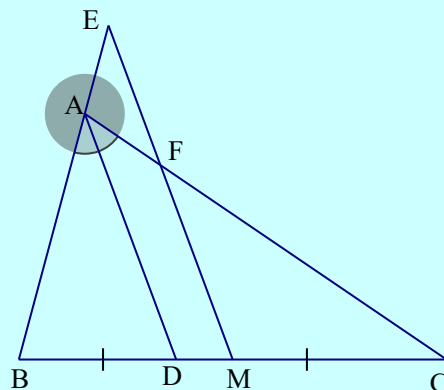
a) Xét $\triangle ABD$, có BI là đường phân giác $\widehat{ABD} \Rightarrow \frac{DI}{AI} = \frac{DC}{AC}$ (tính chất đường phân giác)

Tương tự ta có:

$$\frac{DI}{AI} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{DI}{AI} = \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB+DC}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC} \Rightarrow \frac{DI}{AI+DI} = \frac{BC}{AB+AC+BC} \Leftrightarrow \frac{DI}{AD} = \frac{BC}{P_{ABC}}$$

b) Sử dụng kết quả câu a, ta có $\frac{DI}{DA} + \frac{EI}{EB} + \frac{FI}{FC} = 1$.

Bài 3: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường phân giác AD của $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$). Từ trung điểm M của BC , kẻ một đường thẳng song song với AD , cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E . Chứng minh: $AE = AF$.

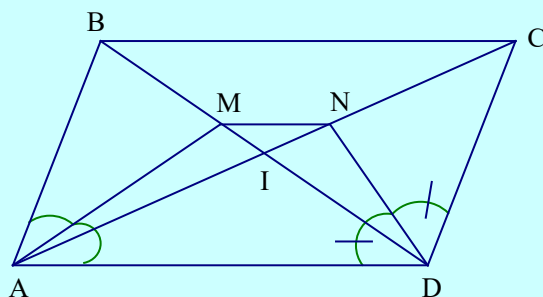


Lời giải

Ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{BAD}$; $\widehat{EFA} = \widehat{DAC}$ (góc so le trong)

$\Rightarrow \triangle AEF$ cân tại $A \Rightarrow EA = FA$

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD, phân giác của góc $\widehat{A}; \widehat{D}$ cắt các đường chéo BD và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh $MN \parallel AD$.



Lời giải

Gọi I là giao điểm của BD và AC

Xét $\triangle ABD$, có AM là phân giác $\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DM}$

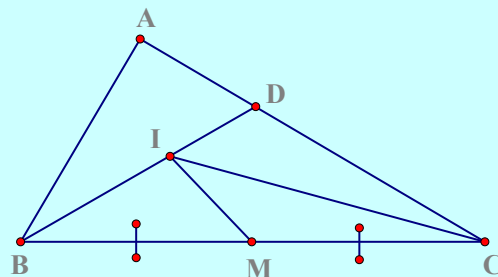
Tương tự ta có: $\frac{CD}{AD} = \frac{CN}{AN}$

Mà $AB = CD \Rightarrow \frac{BM}{DM} = \frac{CN}{AN} \Rightarrow \frac{BM}{DM} + 1 = \frac{CN}{AN} + 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{CA}{AN} \Leftrightarrow \frac{DI}{DM} = \frac{AI}{AN} \Rightarrow MN \parallel AD$.

Bài 5: Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Phân giác của góc AMB cắt AB ở D , phân giác của góc AMC cắt AC ở E

a. Chứng minh $DE \parallel BC$

b. Gọi I là giao điểm của DE với AM . Chứng minh I là trung điểm của DE .



Lời giải

a. Xét $\triangle AMB$, phân giác MD có: $\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM}$

Tương tự ta có: $\frac{AE}{CE} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow DE \parallel BC$

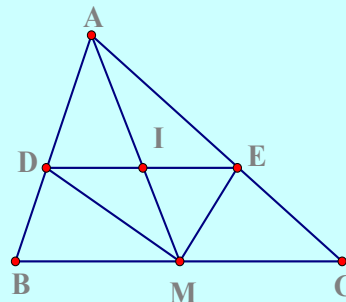
b. Vì $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DI}{BM} = \frac{AI}{AM} = \frac{IE}{MC}$, $MB = MC \Rightarrow DI = IE$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và đường phân giác BD

a. Tính các độ dài DA, DC

b. Tia phân giác của góc C cắt BD tại I . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh $\widehat{BIM} = 90^\circ$.



Lời giải

b) Theo câu a ta có: $MB = MC = 5\text{cm}$

$$\Rightarrow \triangle CID = \triangle CIM \Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{IDC}$$

Trong tam giác BMI có góc IMC là góc ngoài nên ta có:

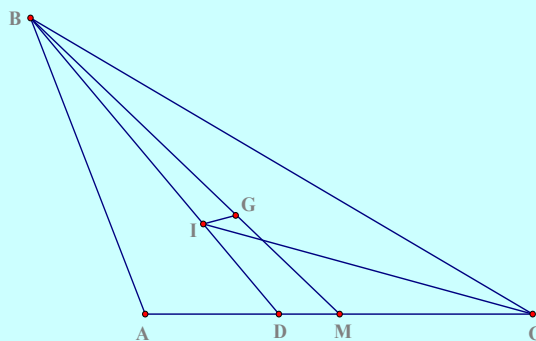
$$\widehat{IMC} = \widehat{BIM} + \widehat{IBM}; \widehat{IDC} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{BIM} + \widehat{IBM} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD}$$

$$\text{mà } \widehat{ABD} = \widehat{IBM} \Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BAD} = 90^\circ.$$

Bài 2: Cho tam giác ABC có $BC = 15\text{cm}$, $CA = 18\text{cm}$, $AB = 12\text{cm}$. Gọi I và G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm tam giác ABC

a. Chứng minh $IG \parallel BC$

b. Tính độ dài đoạn thẳng IG



Lời giải

a) Gọi M là trung điểm của BC .

AD là tia phân giác của góc BAC (D nằm trên BC)

Tính được $CD = 9\text{cm}$

$$\text{Trong tam giác } ACD, \text{ phân giác } CI \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{AC}{CD} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\text{Chứng minh được: } \frac{AG}{MG} = 2 \Rightarrow \frac{AG}{MG} = \frac{AI}{DI} \Rightarrow dpcm$$

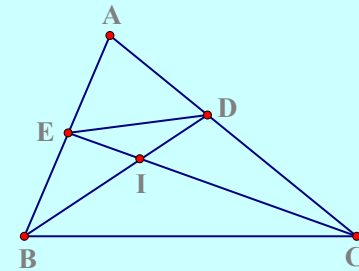
b) Ta tính được $DM = 1,5cm$

$$\text{Vì } IG \parallel DM \Rightarrow \frac{IG}{DM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG = \frac{2}{3} DM = 1cm$$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $AB = 4cm$
 $AC = 5cm, BC = 6cm$. Các đường phân giác BD
 và CE cắt nhau tại I

a. Tính AD, CD

b. Tính tỉ số diện tích các tam giác DIE và ABC .



Lời giải

a) $AD = 2, CD = 3, AE = \frac{20}{11}, EB = \frac{24}{11}$

b) Tam giác DIE và DCE có chung chiều cao hạ từ D nên:

$$\Rightarrow \frac{S_{DIE}}{S_{DCE}} = \frac{IE}{CE} = \frac{IE}{IE + IC} = \frac{EB}{EB + BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{DIE} = \frac{4}{5} \cdot S_{DCE} \quad (1)$$

Tam giác DCE và ACE có chung chiều cao hạ từ E nên:

$$\Rightarrow \frac{S_{DCE}}{S_{ACE}} = \frac{DC}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{DCE} = \frac{3}{5} \cdot S_{ACE} \quad (2)$$

Tam giác ACE và ABC có chung chiều cao hạ từ C nên: $\Rightarrow \frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB} = \frac{20}{11} : 4 = \frac{5}{11}$

$$\Rightarrow \frac{S_{AEC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{11} \Rightarrow S_{AEC} = \frac{5}{11} \cdot S_{ABC} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow S_{DEI} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{11} \cdot S_{ABC} = \frac{12}{55} \cdot S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{DEI}}{S_{ABC}} = \frac{12}{55}.$$

KHÁI NIỆM HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa: Hai tam giác gọi là *đồng dạng* với nhau nếu chúng có ba cặp góc bằng nhau đôi một và ba cặp cạnh tương ứng tỷ lệ

$$\text{Ta có: } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

2. Tính chất

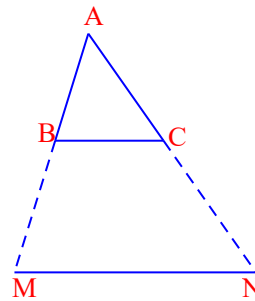
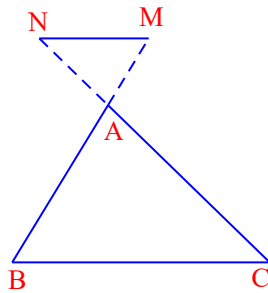
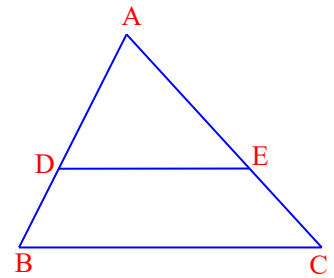
a. Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó (hoặc nói hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng)

b. Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỉ số k thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $\frac{1}{k}$

c. Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; $\triangle A'B'C' \sim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

3. Định lý: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho

$$\triangle ABC, DE \parallel BC (D \in AB, E \in AC) \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$



4. Chú ý: Định lý trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

B. Bài tập

Dạng 1: Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Cách giải: Dựa vào định nghĩa, tính chất hoặc định lý để chứng minh các tam giác đồng dạng.

Bài 1:

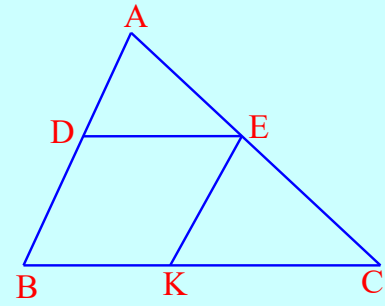
Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$.

Các điểm D và E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $BD = 4\text{cm}$, $CE = 6\text{cm}$

a. Chứng minh rằng: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ và xác định tỉ số đồng dạng

b. Kẻ $EK \parallel AB$ (K thuộc BC). Chứng minh: $\triangle ADE \sim \triangle EKC$

c. Tính tỉ số chu vi tam giác ADE và EKC .



Lời giải

a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

b) Ta có $EK \parallel AB \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EKC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle EKC$

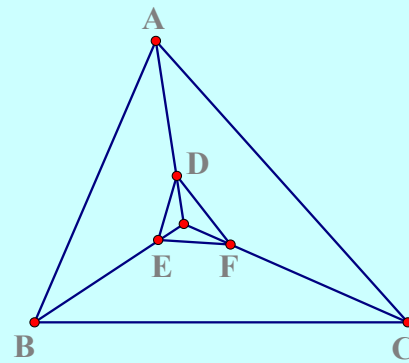
c) $\triangle ADE \sim \triangle EKC \Rightarrow \frac{AD}{EK} = \frac{DE}{KC} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} = \frac{AD + DE + AE}{EK + KC + EC} \Rightarrow \frac{P_{ADE}}{P_{EKC}} = \frac{1}{2}$

Bài 2:

Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC . Trên OA lấy điểm D sao cho:

$OD = \frac{1}{3}OA$. Qua D vẽ đường thẳng song song với AB cắt OB tại E . Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt OC tại F .

Chứng minh rằng: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ và xác định tỉ số đồng dạng.



Lời giải

Xét $\triangle OAB$ có $DE \parallel AB$ ($D \in OA, E \in OB$) $\Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OA}$ (TaLet) (1)

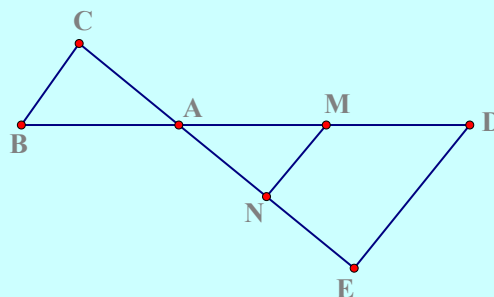
Xét $\triangle OBC$ có $EF \parallel BC$ ($E \in OB, F \in OC$) $\Rightarrow \frac{OF}{OC} = \frac{OE}{OB}$ (TaLet) (2)

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle DFE, \triangle ABC, \text{ có: } \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \triangle DFE \sim \triangle ABC$$

Bài 3:

Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = 2AB$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = 2AC$.
Chứng minh $\triangle ADE \sim \triangle ABC$



Lời giải

Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AD, AE
 $\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ADE; \triangle ABC = \triangle AMN \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$

Dạng 2: Tính độ dài cạnh, tỉ số đồng dạng thông qua các tam giác đồng dạng

Cách giải: Sử dụng định nghĩa, các tính chất của hai tam giác đồng dạng

Bài 1:

Cho tam giác ABC có $AB = 3cm, BC = 4cm, CA = 5cm$, biết $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

a. Tính các cạnh A_1B_1, A_1C_1 , biết $B_1C_1 = 8cm$

b. Tính các cạnh A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 biết $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng bằng 3.

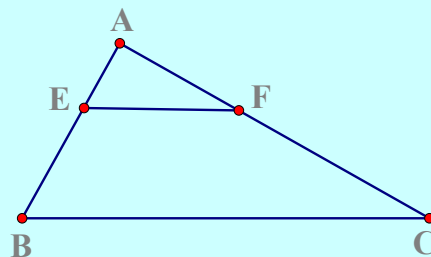
Lời giải

$$a) \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} \Leftrightarrow \frac{A_1B_1}{3} = \frac{8}{4} = \frac{C_1A_1}{5} \Rightarrow A_1B_1 = 6; A_1C_1 = 10$$

$$b) \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{3} = \frac{B_1C_1}{4} = \frac{C_1A_1}{5} = 3 \Rightarrow A_1B_1 = 9; B_1C_1 = 12, C_1A_1 = 15(cm)$$

Bài 2:

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6cm$
 $BC = 10cm$. Kẻ một đường thẳng song song với BC , cắt các cạnh AB, AC tại E và F .
Biết $AE = 2cm$, tính tỉ số đồng dạng của tam giác AEF và ABC và độ dài các cạnh AF, EF .



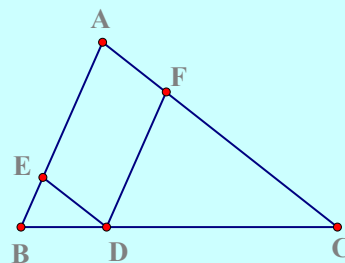
Lời giải

$$\text{Ta có: } \Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\text{Có: } \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AF = \frac{AC}{3} = \frac{8}{3}, EF = \frac{BC}{3} = \frac{10}{3}$$

Bài 3:

Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$
 $AC = 7\text{cm}$. Điểm D nằm trên cạnh BC sao
cho $BD = 2\text{cm}$. Qua D kẻ các đường thẳng
song song với AB và AC , cắt AB , AC lần
lượt tại F và E



a. Chứng minh: $\triangle BDE \sim \triangle DCF$

b. Tính chu vi tứ giác $AEDF$.

Lời giải

a) $\triangle BED \sim \triangle BAC, \triangle DFC \sim \triangle BAC \Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle DCF$

b) Tính được $BE = \frac{5}{4}, ED = \frac{7}{4} \Rightarrow P_{ABCD} = 2AE + 2ED = 11(\text{cm})$.

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức cạnh thông qua các tam giác đồng dạng

Bài 1:

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 6\text{cm}$

$AD = 5\text{cm}$. Lấy F trên cạnh BC sao cho

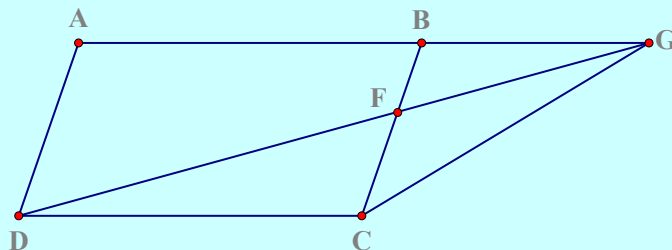
$CF = 3\text{cm}$. Tia DF cắt tại AB tại G

a. Chứng minh: $\triangle GBF \sim \triangle DCF$ và

$\triangle GAD \sim \triangle DCF$

b. Tính độ dài đoạn thẳng AG

c. Chứng minh $AG.CF = AD.AB$



Lời giải

a) $\triangle GBF \sim \triangle GAD; \triangle GBF \sim \triangle DCF \Rightarrow \triangle GAD \sim \triangle DCF$

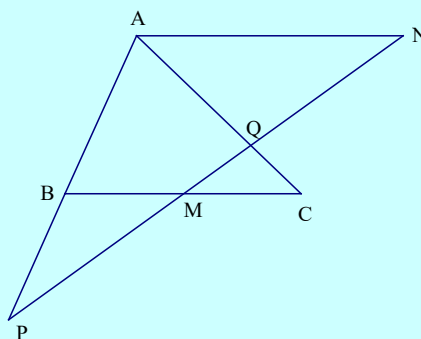
b. Do $\triangle GBF \sim \triangle DCF \Rightarrow \frac{BG}{CD} = \frac{BF}{CF} \Rightarrow BG = 4 \Rightarrow AG = 10$

c. $\triangle GAD \sim \triangle DCF \Rightarrow \frac{GA}{DC} = \frac{AD}{CF} \Rightarrow GA.CF = CD.AD, AB = CD \Rightarrow đpcm$

Bài 2:

Cho tam giác ABC , kẻ $Ax \parallel BC$. Từ trung điểm M của cạnh BC , kẻ một đường thẳng bất kì cắt Ax ở N , cắt AB ở P cắt AC ở

Q . Chứng minh: $\frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}$.



Lời giải

Ta có: $\triangle PBM \sim \triangle PAN \Rightarrow \frac{PM}{PN} = \frac{BM}{AN}$ (1)

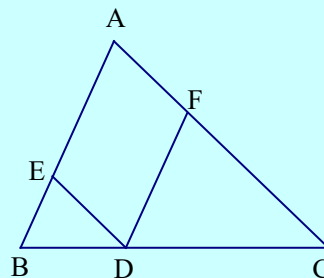
Theo định lí Ta-lét ta có: $\frac{QM}{QN} = \frac{MC}{AN} = \frac{BM}{AN}$ (2)

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow \frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}.$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Cho tam giác ABC có $BC = 10\text{cm}$, $CA = 14\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF có cạnh nhỏ nhất là 9cm . Tính các cạnh còn lại của tam giác DEF .



Lời giải

$$\text{Ta có } \triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{6}{DE} = \frac{10}{EF} = \frac{14}{DF}$$

Ta có cạnh nhỏ nhất của $\triangle ABC$ phải tỉ lệ với cạnh nhỏ nhất của $\triangle DEF \Rightarrow DE = 9\text{cm}$

$$\text{và } \frac{6}{9} = \frac{10}{EF} = \frac{14}{DF} \Rightarrow EF = 15\text{cm}, DF = 21\text{cm}.$$

Bài 2:

Cho tam giác ABC có $AB = 2\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $CA = 4\text{cm}$ đồng dạng với $\triangle MNP$. Tính độ dài các cạnh của $\triangle MNP$, biết chu vi $\triangle MNP$ là 36cm .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{C_{ABC}}{C_{MNP}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} \Rightarrow MN = 8\text{cm}, NP = 12\text{cm}, MP = 16\text{cm}.$$

Bài 3:

Cho tam giác, lấy M trên cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{1}{2}$. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại D . Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E .

a) Tìm các cặp tam giác đồng dạng và tìm tỉ số đồng dạng

b) Tính chu vi các tam giác DMB, EMC biết chu vi tam giác ABC bằng 24cm .

Lời giải

a) Ta có: $\frac{BM}{CM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}; \frac{CM}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle BAC$ với tỉ số đồng dạng $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$.

$\triangle MEC \sim \triangle BAC$ với tỉ số đồng dạng $\frac{CM}{BC} = \frac{2}{3}$.

Bài 4:

Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP theo tỉ số $\frac{2}{5}$. Tính chu vi mỗi tam giác biết hiệu chu vi của hai tam giác là 51cm.

Lời giải

Gọi chu vi của tam giác ABC và MNP lần lượt là x và y

Theo giả thiết ta có: $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ và $y - x = 51 \Rightarrow x = 34cm; y = 85cm$.

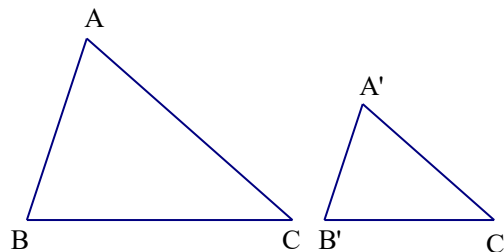
CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

I. Lý thuyết

A. Trường hợp đồng dạng thứ nhất (cạnh – cạnh – cạnh)

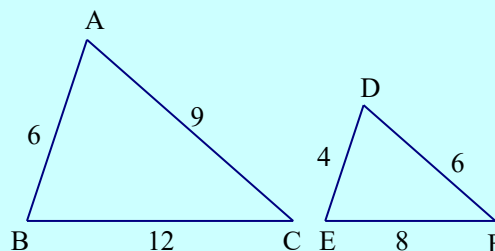
1. Định lý: Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' (c.c.c)$



Bài 1: Cho hình vẽ

- a) ΔABC có đồng dạng với ΔDEF hay không?
b) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác

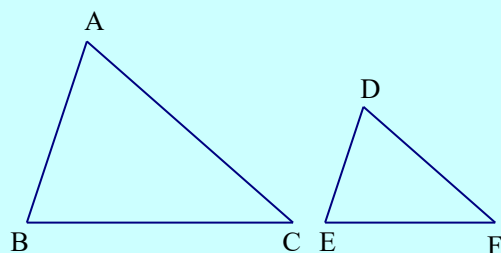


Lời giải

a) Ta có: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF (ccc)$

b) $\frac{C_{ABC}}{C_{DEF}} = \frac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD} = \frac{6 + 9 + 12}{4 + 6 + 8} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$

Bài 2: Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh tỉ lệ với 4, 5, 6. Cho biết: $\Delta DFE \sim \Delta ACB$ và cạnh nhỏ nhất của ΔDEF là 0,8cm. Tính độ dài các cạnh còn lại của ΔDEF .



Lời giải

Vì $\Delta DFE \sim \Delta ACB$ nên ΔDEF cũng có độ dài các cạnh tỉ lệ với 4, 5, 6

Giải sử $DE < EF < DF \Rightarrow DE = 0,8cm$

Vì ba cạnh của tam giác ABC có độ dài tỉ lệ với 4, 5, 6 nên ta có:

$\frac{DE}{4} = \frac{EF}{5} = \frac{FD}{6} = 0,2 \Rightarrow EF = 1(cm); FD = 1,2(cm)$

Bài 3: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$. Cho biết $AB = 6cm, BC = 10cm, CA = 14cm$ và chu vi tam giác $A'B'C'$ bằng $45cm$. Tính độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow A'B' = 9cm, B'C' = 15cm, A'C' = 21cm.$$

Bài 4: Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác đó. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OA, OB, OC .

a) Chứng minh: $\Delta PQR \sim \Delta ABC$

b) Cho biết ΔABC có chu vi bằng $543cm$. Tính chu vi ΔPQR

Lời giải

$$\text{Ta có: } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow A'B' = 9cm, B'C' = 15cm, A'C' = 21cm.$$

Bài 5: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$. Cho biết $BC = 24,3cm, CA = 32,4cm, AB = 16,2cm$. Tính độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$ nếu:

a) $AB - A'B' = 10cm$

b) $A'B' - AB = 10cm$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{16,2}{A'B'} = \frac{24,3}{B'C'} = \frac{32,4}{C'A'}$$

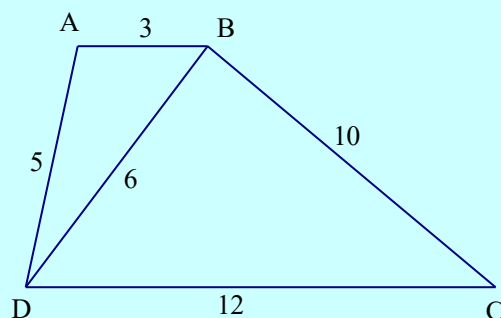
a) Tính được: $A'B' = 6,2cm \Rightarrow B'C' = 9,3cm; A'C' = 12,4cm$

b) Tương tự tính được: $A'B' = 26,2cm \Rightarrow B'C' = 39,3cm; A'C' = 52,4cm$

Bài 6: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 3cm, BC = 10cm, CD = 12cm, AD = 5cm$, đường chéo $BD = 6cm$. Chứng minh rằng:

a. $\Delta ABD \sim \Delta BCD$

b. $ABCD$ là hình thang.



Lời giải

a) Ta có: $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BCD (ccc) \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow AB \parallel CD$

b) Ta có $AB \parallel CD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \diamond ABCD$ là hình thang.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 10cm, AC = 8cm$ và tam giác $A'B'C'$ vuông tại A' có $B'C' = 5cm, A'C' = 4cm$

a. Chứng minh rằng: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

b. Tính tỉ số chu vi của $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$

Lời giải

a) Xét các tam giác vuông $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$, theo định lý Pytago tính được:

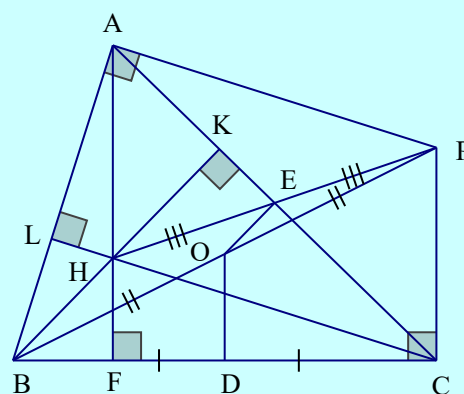
$$AB = 6cm, A'B' = 3cm \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = 2 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' (ccc)$$

b) Ta có: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = 2 = \frac{AB + BC + CA}{A'B' + B'C' + C'A'} \Rightarrow$ tỉ số chu vi là 2.

Bài 8: Cho tam giác ABC . Các đường cao AF, BK, CL cắt nhau tại H . Từ A kẻ Ax vuông góc với BC , từ C kẻ Cy vuông góc với AB . Gọi P là giao điểm của Ax và Cy

a. Chứng minh tứ giác $AHCP$ là hình bình hành

b. Lấy O là trung điểm của BP . D, E lần lượt là trung điểm của BC và AC . Chứng minh rằng: $\triangle ODE \sim \triangle HAB$.



Lời giải

a) Tứ giác $AHCP$ có các cạnh đối song song nên là hình bình hành

b) Ta có: $OB = OP = OA = OC$ nên O là giao điểm các đường trung trực của các cạnh $BC, AC, AB \Rightarrow OD \perp BC, OE \perp AC$

Lại có: $OD = \frac{1}{2}PC = \frac{1}{2}AH, OE = \frac{1}{2}BH, DE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ODE \sim \triangle HAB (ccc)$

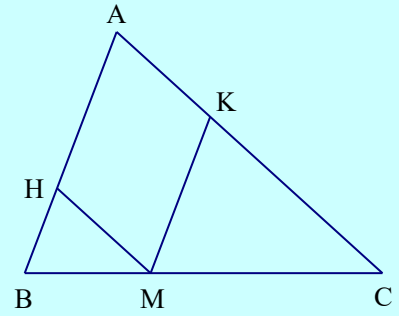
Bài 9: Cho tam giác ABC . Điểm M thuộc cạnh BC sao

cho $\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3}$. Kẻ $MH \parallel AC (H \in AB)$; $MK \parallel AB (K \in AC)$

a) Tính độ dài MB, MC biết $BC = 25(cm)$

b) Tính chu vi tam giác ABC khi biết chu vi $\triangle KMC$ bằng $30cm$

c. Chứng minh: $HB \cdot MC = BM \cdot KM$



Lời giải

a) Ta có $\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MB}{2} = \frac{MC}{3} = \frac{BC}{5} = 5 \Rightarrow MC = 15(cm), MB = 10(cm)$

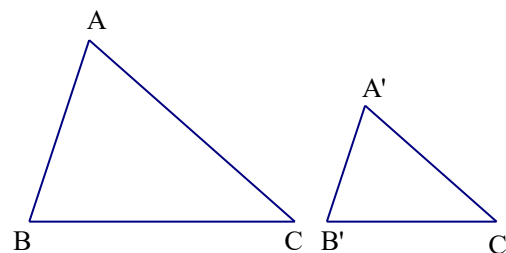
b) $\triangle KMC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{C_{KMC}}{C_{ABC}} = \frac{30.5}{3} = 50$

c) $\triangle HMB \sim \triangle KMC (\sim \triangle ABC) \Rightarrow \frac{HB}{KM} = \frac{MB}{CM} \text{ (đpcm)}.$

B. Trường hợp đồng dạng thứ hai (cạnh – góc – cạnh)

1. Định lý: Nếu hai cạnh của tam giác này tỷ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau

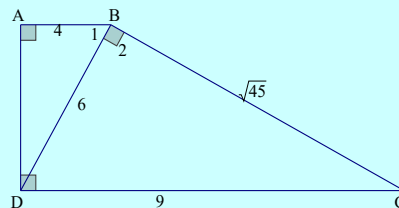
Nếu: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}; \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' (cgc)$



Bài 1: Hình thang vuông ABCD có: $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$,

$AB = 4cm$

$BD = 6cm, CD = 9cm$. Tính BC?



Lời giải

Xét ΔABD và ΔDBC , có:

$$\hat{B}_1 = \hat{D}_1 (slt), \frac{AB}{DB} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta DBC \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_2 = 90^\circ$$

Xét $\Delta ABD (\hat{B} = 90^\circ) \Rightarrow BC = \sqrt{45} (cm)$

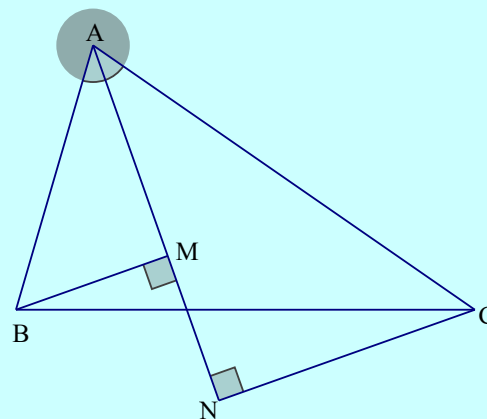
Bài 2: Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = 24cm$

$AC = 28cm$. Đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D.

Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của các điểm B, C trên đường thẳng AD.

a) Tính tỉ số $\frac{BM}{CN}$

b) Chứng minh $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$



Lời giải

a) Ta có: $BM \parallel CN (\perp AD) \Rightarrow \Delta BMD \sim \Delta CND \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{7}$

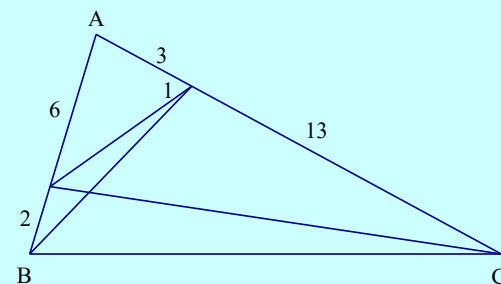
b) $\Delta ABM \sim \Delta ACN (cgc) \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN} \left(= \frac{BM}{CN} \right)$.

Bài 3: Cho tam giác ABC có $AB = 8\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$. Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên cạnh AB và AC sao cho $BD = 2\text{cm}$, $CE = 13\text{cm}$. Chứng minh rằng

a. $\triangle AEB \sim \triangle ADC$

b. $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$, cho $DE = 5\text{cm}$. Tính BC ?

c. $AE \cdot AC = AD \cdot AB$



Lời giải

a. $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ (cgc)

b) Xét $\triangle AED$ và $\triangle ABC$, có: $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ và $\hat{A}$: chung

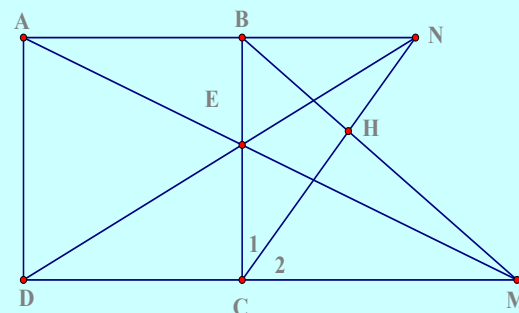
$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ABC$ (cgc) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABC}$

c. Vì $\triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AD$

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E , tia AE cắt đường thẳng CD tại M , tia DE cắt đường thẳng AB tại N , Chứng minh rằng:

a) $\triangle NBE \sim \triangle ECM$

b) $BM \perp CN$



Lời giải

a. Xét $\triangle EDC$, có: $BN \parallel CD \Rightarrow \frac{BN}{CD} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{BE}{EC}$ (1)

Xét $\triangle ECN$, có: $AB \parallel CM \Rightarrow \frac{AB}{CM} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{BC}{CM} = \frac{BE}{EC}$ (2)

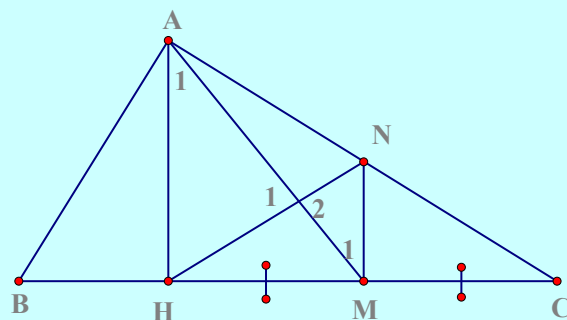
Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{BC}{CM}$; $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \triangle NBE \sim \triangle ECM$ (cgc)

b. $\triangle NBE \sim \triangle ECM \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{M}$, $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 + \hat{M} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CHM} = 90^\circ$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N là trung điểm của CH và AC . Nối AM, MN . Lấy G thuộc AM sao cho $GM = \frac{1}{2}GA$.

Chứng minh rằng

- $\triangle GAH \sim \triangle GMN$
- H, G, N thẳng hàng.



Lời giải

a. Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (so le trong) và $AH = 2MN$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} = \widehat{M_1} \\ \frac{AG}{MG} = \frac{AH}{MN} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle GAH \sim \triangle GMN (cgc)$$

b. $\triangle GAH \sim \triangle GMN \Rightarrow \widehat{AGH} = \widehat{MGN}; \widehat{AGH} + \widehat{HGM} = 180^\circ$

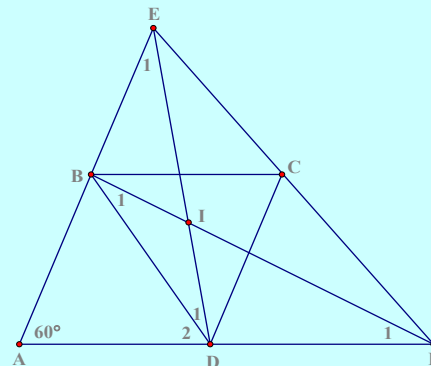
$$\Rightarrow \widehat{MGN} + \widehat{HGM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{HGN} = 180^\circ$$

Bài 6: Cho hình thoi $ABCD$, $\hat{A} = 60^\circ$. Qua C kẻ đường thẳng d cắt các tia đối của các tia BA, DA theo thứ tự tại E, F . Chứng minh rằng

a. $\frac{EB}{AB} = \frac{AD}{DF}$

b. $\triangle EBD \sim \triangle BDF$

c. $\widehat{BID} = 120^\circ (DE \cap BF = I)$



Lời giải

a) Ta có: $BC \parallel AF \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{EC}{FC}$ (hệ quả talét) (1)

$$CD \parallel AB \Rightarrow \frac{EC}{CF} = \frac{AD}{DF} (HQ.TaLet)(2) \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{AD}{DF}$$

b) $\frac{EB}{AB} = \frac{AD}{DF} \Rightarrow \frac{EB}{BD} = \frac{BD}{DF}; \widehat{EBD} = \widehat{BDF} = 120^\circ \Rightarrow \triangle EBD \sim \triangle BDF$

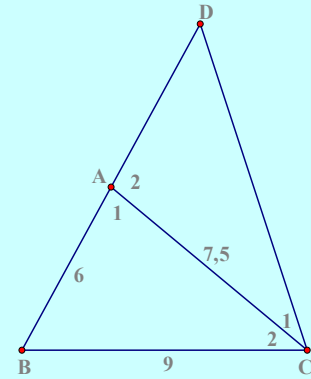
$$c) \triangle EBD = \triangle BDF \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{F}_1; \widehat{E}_1 = \widehat{B}_1; \widehat{F}_1 + \widehat{B}_1 = \widehat{D}_2 = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BID} = 60^\circ (dpcm)$$

Bài 7: Cho tam giác ABC có $AB = 6cm, AC = 7,5cm, BC = 9cm$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$

a. Chứng minh rằng: $\triangle ABC \# \triangle CBD$

b. Tính CD

c. Chứng minh rằng: $\widehat{BAC} = 2\widehat{ACB}$



Lời giải

a. Ta có: $BD = 13,5cm$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BA}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{AC}{BD} \\ \widehat{B}: chung \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \# \triangle CBD (cgc)$$

$$b. \text{ Ta có: } \triangle ABC \# \triangle CBD \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow CD = 11,25(cm)$$

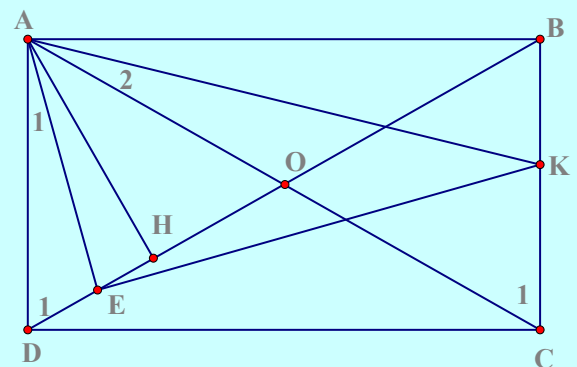
$$c) \triangle ABC \# \triangle CBD \Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{D}; \widehat{BAC} = \widehat{C} + \widehat{D} = 2\widehat{D} \text{ (góc ngoài tam giác).}$$

Bài 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD . Lấy điểm E trên DH , K trên CB sao cho $\frac{DE}{DH} = \frac{CK}{CB}$. Chứng minh rằng:

a. $\triangle ADE \# \triangle ACK$

b. $\triangle AEK \# \triangle ADC$

c. $\widehat{AEK} = 90^\circ$



Lời giải

a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, có:

$\triangle AOD$ và $\triangle BOC$ cân $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$

Xét $\triangle AOD$ và $\triangle BOC$ có:

$$\widehat{H} = \widehat{B} = 90^\circ, \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \triangle ADH \# \triangle ACB (gg) \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DH}{CB} (1)$$

$$\text{Mà } \frac{DE}{CK} = \frac{DH}{CB} (gt)(2) \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DE}{CK}, \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \triangle ADE \# \triangle ACK (cgc)$$

$$b) \triangle ADE \# \triangle ACK \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ \frac{AE}{AK} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AK}{KC} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{DAC} = \widehat{A}_1 + \widehat{EAC}; \widehat{EAK} = \widehat{A}_2 + \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{EAK} (\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2).$$

$$\triangle AEK \text{ và } \triangle ADC, \text{ có: } \widehat{EAK} = \widehat{DAC}; \frac{AE}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow \triangle AEK \# \triangle ADC (cgc)$$

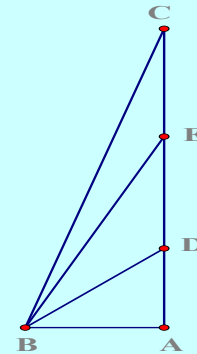
$$c. \triangle AEK \# \triangle ADC \Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{ADC} = 90^\circ$$

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 1cm$,
 $AC = 3cm$. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho
 $AD = DE = EC$

a. Tính độ dài BD

b. Chứng minh: $\triangle BDE \# \triangle CDB$

c. Tính: $\widehat{DEB} + \widehat{DCB}$



Lời giải

$$a. \text{ Áp dụng định lí Pytago } \Rightarrow BD = \sqrt{2}(cm)$$

$$b. \frac{DB}{DC} = \frac{DE}{DB} (= \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \triangle BDE \# \triangle CDB (c - g - c)$$

$$c. \text{ Từ câu b } \Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{DBE} \Rightarrow \widehat{DEB} + \widehat{DCB} = \widehat{DEB} + \widehat{DBE} = \widehat{ADB} = 45^\circ.$$

Bài 10*: Cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của cạnh đáy BC . Một điểm D thay đổi trên cạnh AB . Lấy một điểm E trên cạnh AC sao cho

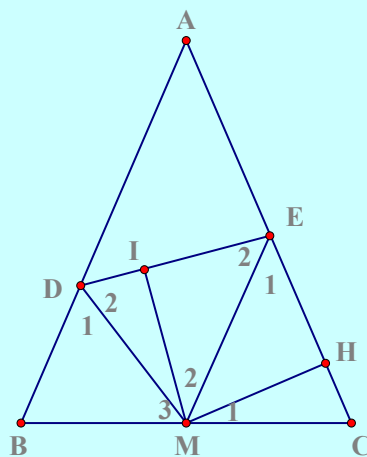
$$CE = \frac{MB^2}{BD}. \text{ Chứng minh:}$$

a. $\triangle DBM \sim \triangle MCE$

b. $\triangle DME$ đồng dạng với hai tam giác trên

c. DM là phân giác của $\widehat{BDE}$, EM là phân giác của $\widehat{CED}$

d. Khoảng cách từ M đến DE không đổi khi D thay đổi trên AB



Lời giải

a) Ta có: $CE = \frac{MB^2}{BD} \Rightarrow \frac{CE}{MB} = \frac{MB}{BD} \Rightarrow \frac{CE}{MB} = \frac{MC}{BD}; \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle \sim \triangle (cgc)$

b) $\triangle \sim \triangle \Rightarrow \frac{CM}{ME} = \frac{BD}{DM} \Leftrightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{BD}{DM}$

Xét $\triangle DBM$ và $\triangle DME$, có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{M}_2 \\ \frac{BM}{ME} = \frac{BD}{DM} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DBM \sim \triangle DME (cgc) \Rightarrow \triangle DBM \sim \triangle MCE \sim \triangle DME$

c. $\triangle DBM \sim \triangle DME \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow DM$ là phân giác $\widehat{BDE}$

$\triangle DME \sim \triangle MCE \Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{E}_1 \Rightarrow EM$ là phân giác $\widehat{DEC}$

d. Từ M kẻ $MH \perp AC, MI \perp DE$

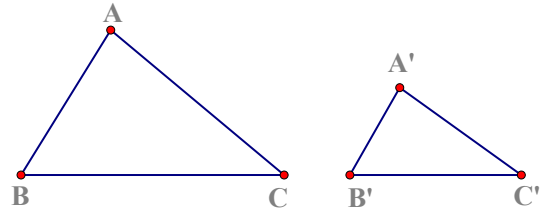
Ta có M nằm trên phân giác của $\widehat{CED} \Rightarrow MI = MH$, mà MH không đổi.

Vậy MI không đổi khi D thay đổi trên AB .

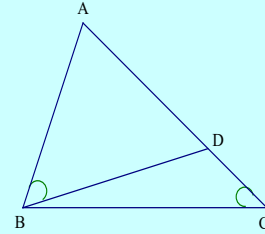
C. Trường hợp đồng dạng thứ 3 (góc.góc)

1. Định lý: Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \Delta ABC \# \Delta A'B'C'$ (gg)



Bài 1: Cho tam giác ABC có $AB = 6cm$, $AC = 9cm$, D thuộc AC sao cho $\widehat{ABD} = \hat{C}$. Tính AD ?



Lời giải

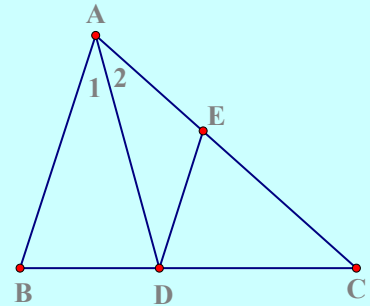
Xét ΔABD và ΔACB , có:

$$\begin{cases} \hat{A}: \text{chung} \\ \widehat{ABD} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \# \Delta ACB (gg) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD = 4cm$$

Bài 2: Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Đường phân giác AD . Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $\widehat{CED} = \widehat{BAC}$

a. Tìm tam giác đồng dạng với ΔABC

b. Chứng minh rằng $DE = DB$



Lời giải

a) Ta có: $\Delta ABC \# \Delta DEC (gg) \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC} (1)$

b. Xét ΔABC , có: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{DB}{AB} (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DB}{AB} \Rightarrow DE = DB$ (đpcm).

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ có AM là phân giác $\widehat{BAC}$ ($M \in BC$).

Kẻ tia Cx thuộc nửa mặt phẳng bờ BC không chứa

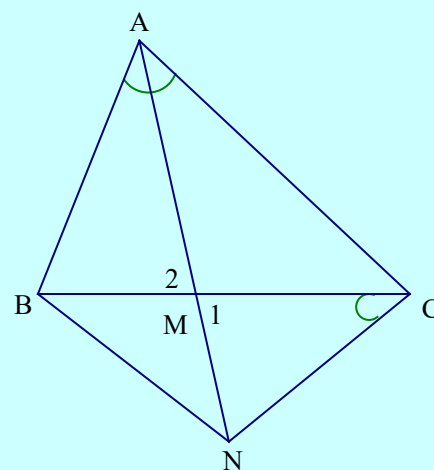
A sao cho $\widehat{BCx} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Gọi N là giao điểm của Cx

và tia AM . Chứng minh:

a) $BM \cdot MC = MN \cdot MA$

b) $\triangle ABM \# \triangle ANC$

c) Tam giác BCN cân



Lời giải

a) Xét $\triangle BAM$ và $\triangle NCM$, có: $\widehat{BAM} = \widehat{MCN}$; $\widehat{M_1} = \widehat{M_2} \Rightarrow \triangle BAM \# \triangle NCM$ (gg) $\Rightarrow BM \cdot MC = MN \cdot MA$

b) Từ câu a $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CNM} \Rightarrow \triangle ABM \# \triangle ANC$ (gg)

c) Từ câu a ta lại có: $\frac{BM}{MA} = \frac{MN}{CA} \Rightarrow \triangle BMN \# \triangle AMC$ (cgc)

$$\Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{CAM} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Có: $\widehat{NBM} = \widehat{BCN} \Rightarrow \triangle BCN$ cân.

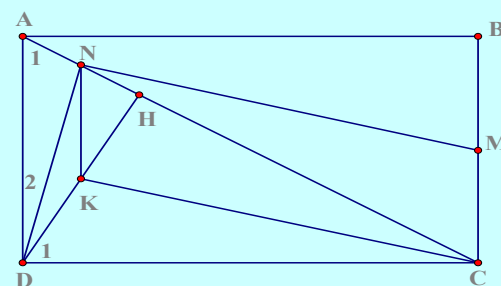
Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $DH \perp AC \equiv H$.

Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của BC, AH, DH

a. Tứ giác $MNCK$ là hình gì?

b. Chứng minh $\triangle ADN \# \triangle DCK$

c. $DN \perp MN$



Lời giải

a) Ta có $KN \parallel MC, KN = MC \Rightarrow \diamond MNKC$ là hình bình hành

b) Ta có $\triangle ADH \# \triangle DCH$ (gg) $\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AH}{DH}$

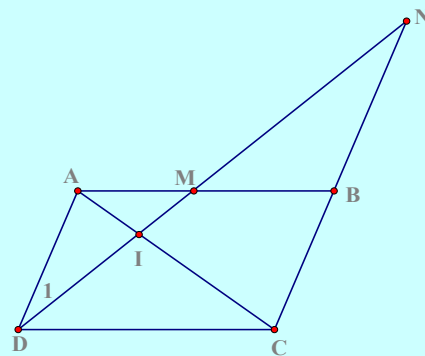
$$AN = NH = \frac{1}{2}AH, DK = HK = \frac{1}{2}DH \Rightarrow \begin{cases} \frac{AD}{CD} = \frac{AN}{DK} \\ \widehat{A_1} = \widehat{D_1} \end{cases}$$

c) **Cách 1:** Chứng minh H là trực tâm của tam giác

Cách 2:
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{D_2} = \widehat{N_1} (slt) \\ \widehat{D_2} = \widehat{C_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{N_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{KNM} = \widehat{KCM} (hbh) \end{array} \right\} \Rightarrow DN \perp MN$$

Bài 5: Cho hình bình hành $ABCD$, qua D kẻ đường thẳng cắt AC, AB, BC lần lượt tại I, M, N . Chứng minh rằng:

- $\triangle AID \sim \triangle CIN$
- $\triangle ADM \sim \triangle CND$
- $AM \cdot CN = AB \cdot AC$
- $DI^2 = IN \cdot IM$ (khó)



Lời giải

a) ta có: $\triangle AID \sim \triangle CIN (gg)$

b) $\triangle ADM \sim \triangle CND (gg) (\widehat{DAN} = \widehat{CND}, \widehat{N} = \widehat{D})$

c) $\triangle ICD$, có: $AM \parallel CD \Rightarrow \frac{AI}{IC} = \frac{AM}{CD}$ (Hệ quả TaLet) mà: $\frac{AI}{IC} = \frac{AD}{CN} (\triangle AID \sim \triangle CIN)$

Vậy: $\frac{AD}{CN} = \frac{AM}{DC} \Rightarrow AM \cdot CN = AD \cdot DC = AB \cdot BC$

d) Xét $\triangle CIN$, có: $AD \parallel CN \Rightarrow \frac{ID}{IN} = \frac{AD}{CN} (3)$

Xét $\triangle ADM$, có: $AM \parallel DC \Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{AM}{CD} (4)$. Mà $\triangle ADM \sim \triangle CND \Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{CD} (5)$

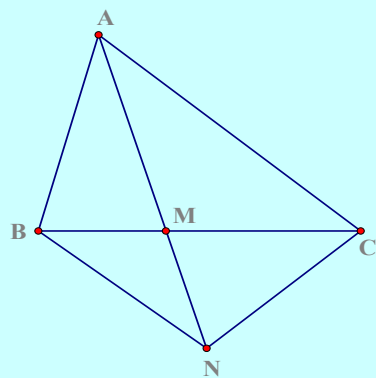
Từ (3)(4)(5) $\Rightarrow \frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID} \Rightarrow ID^2 = IM \cdot IN$

Bài 6: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), phân giác AM .

Ở miền ngoài tam giác vẽ tia Cx sao cho $\widehat{BCx} = \widehat{BAD}$.

Gọi N là giao điểm của Cx và AM . Chứng minh rằng:

- $BM.MC = MN.MA$
- $\triangle ABM \# \triangle ACN$
- $\triangle BCN$ cân
- $AM^2 = AB.AC - MB.MC$



Lời giải

a. $\triangle BAM \# \triangle NCM (g - g) \Rightarrow BM.MC = MN.MA$

b) Từ câu a $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CNM} \Rightarrow \triangle ABM \# \triangle ANC (gg)$

c. Từ câu a, có: $\Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{MN}{CM} \Rightarrow \triangle BMN \# \triangle AMC (cgc)$

$\Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{MN}{CM} \Rightarrow \triangle BMN \# \triangle AMC (cgc) \Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{CAM} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{BCN}$ d.

$\triangle AMB \# \triangle ACN (g - g) \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow AM.AN = AB.AC (1)$

$\triangle AMB \# \triangle CMN (g - g) \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{MB}{MN} \Rightarrow AM.AN = MB.MC (2)$

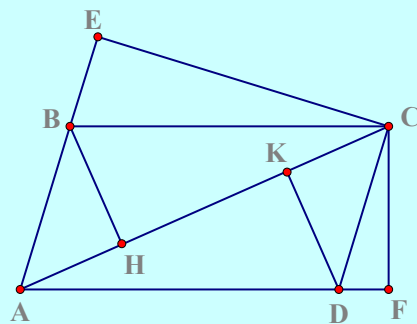
Trừ từng vế của (1) và (2) ta được: $AM(AN - NM) = AB.AC - MB.MC \Leftrightarrow AM^2 = AB.AC - MB.MC$

Bài 7: [GVG Tỉnh 2016 – 2017]

Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo AC lớn hơn BD . Từ C hạ các đường vuông góc CE, CF lần

lượt xuống các tia AB và AD . Chứng minh rằng:

$AB.AE + AD.FA = AC^2$.



Lời giải

Kẻ $BH \perp AC \equiv H, DK \perp AC \equiv K$

$$\Delta ABH \# \Delta ACE (gg) \Rightarrow AB.AE = AC.AH(1)$$

$$\Delta ADK \# \Delta ACF (gg) \Rightarrow AD.AF = AK.AC(2)$$

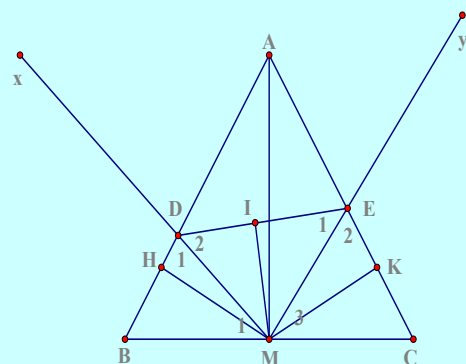
$$(1)(2) \Rightarrow AB.AE + AD.FA = AC(AH + AK) = AC^2 (AH = AK)$$

Bài 8: Cho tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm của BC . Một góc $xMy = 60^\circ$ quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E . Chứng minh:

a. $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b. DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc $\widehat{BDE}; \widehat{CED}$

c. Chu vi tam giác ADE không đổi



Lời giải

a) Ta đi chứng minh: $\Delta BDM \# \Delta CEM$

$$\text{Có: } \widehat{B} = \widehat{C}; \widehat{D_1} = 180^\circ - 60^\circ - \widehat{M_1} = 120^\circ - \widehat{M_1}, \widehat{M_3} = 180^\circ - \widehat{M_1} \Rightarrow \Delta BDM \# \Delta CEM (gg) \Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$$

$$\Rightarrow BD.CE = CM.BM = \frac{BC^2}{4}$$

b. Ta đi chứng minh $\Delta BMD \# \Delta MED$

$$\text{Do: } \Delta BDM \# \Delta CEM \Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BD}{BM} = \frac{MD}{ME} \\ \widehat{B} = \widehat{DME} = 60^\circ \end{cases}$$

$$(\text{do } BM = CM) \Rightarrow \Delta BMD \# \Delta MED (cgc) \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$$

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$

c. Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC

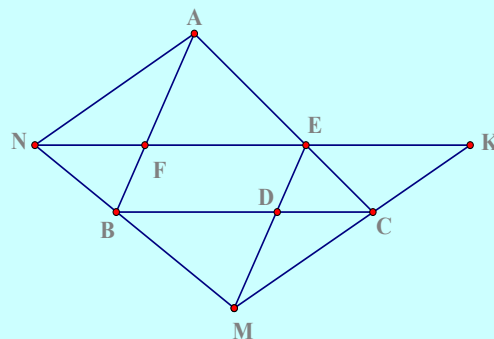
Chứng minh: $DH = DI; EI = EK$

Chu vi $\triangle ADE = AD + AE + DH + EK = AH + AK = 2AK$.

Bài 9: Cho tam giác ABC và d là đường thẳng tùy ý qua B . Qua E là điểm bất kỳ trên AC , vẽ đường thẳng song song với AB, BC , lần lượt cắt d tại M và N . Gọi D là giao điểm của ME và BC . Đường thẳng NE cắt AB và MC lần lượt tại F và K . Chứng minh

a. $\triangle AFN \sim \triangle MDC$

b. $AN \parallel MK$



Lời giải

a) Ta có $BFED$ là hình bình hành

$$\Rightarrow BF = ED, FE = BD \Rightarrow BF \cdot BD = FE \cdot ED (1)$$

$$\triangle BFN \sim \triangle MDB (gg) \Rightarrow NF \cdot DM = BD \cdot BF (2)$$

$$\triangle AEF \sim \triangle ECD (gg) \Rightarrow AF \cdot CD = EF \cdot ED (3)$$

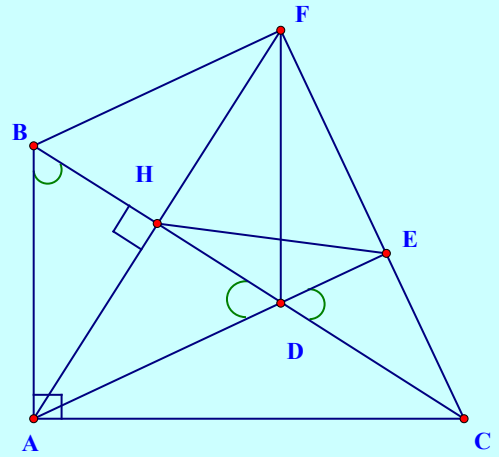
$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{CD}{MD} \Rightarrow \triangle AFN \sim \triangle MDC (cgc)$$

b. Ta chỉ ra được: $\widehat{FAN} = \widehat{EKC} \Rightarrow AN \parallel MK$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1: Cho $\triangle ABC (\hat{A} = 90^\circ, AB < AC)$. Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Lấy điểm D đối xứng với B qua H

- Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA$
- Qua C dựng đường thẳng vuông góc với tia AD cắt AD tại E . Chứng minh rằng $AH \cdot CD = CE \cdot AD$
- Chứng minh rằng $\triangle HDE \sim \triangle ADC$
- Cho $AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm}$. Tính diện tích $\triangle DEC$
- AH cắt CE tại F . Chứng minh tứ giác $ABFD$ là hình thoi.



Lời giải

- Ta có: $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (gg)
- Từ $\triangle AHD \sim \triangle CDE$ (gg) $\Rightarrow AH \cdot CD = CE \cdot AD$
- $\triangle HDE \sim \triangle ADC$ (c - g - c)
- $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24(\text{cm}^2)$
 $BC = 10\text{cm}; BH = 3,6\text{cm} \Rightarrow BD = 7,2\text{cm}; DC = 2,8\text{cm}$
 Ta có: $\triangle DEC \sim \triangle BAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{S_{DEC}}{S_{BAC}} = \left(\frac{DC}{BC}\right)^2 \Rightarrow S_{DEC} = \frac{1176}{625}$
- Theo ý d có: $\triangle DEC \sim \triangle BAC \Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{BCA}; CH \perp FA \Rightarrow \triangle ACF \Rightarrow HA = HF$
 mà $BD \perp FA = H \Rightarrow$ tứ giác là hình thoi.

Bài 2: Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ các đường cao BE và CF cắt nhau tại H

a. Chứng minh: $AE.AC = AB.FA$; $\triangle AEF \sim \triangle ABC$

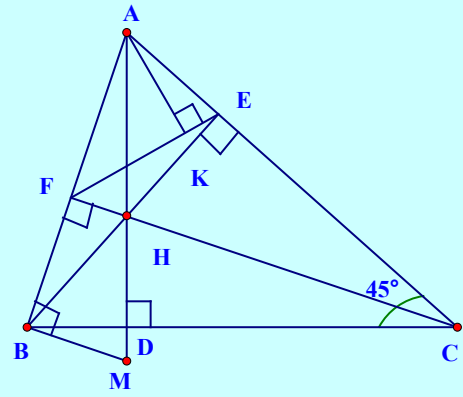
b. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với CF cắt tia AH tại M , AH cắt BC tại D . Chứng minh rằng $BD^2 = AD.DM$

c. Cho $\angle ACB = 45^\circ$ và kẻ AK vuông góc với EF tại K .

Tính tỉ số $\frac{S_{AFH}}{S_{AKE}}$

d. Chứng minh $\triangle AEB \sim \triangle HEC$; $\triangle AFC \sim \triangle HEC$

e. Chứng minh $AB.AC = BE.CF + AE.AF$.



Lời giải

a. $\triangle AEB \sim \triangle AFC (g.g) \Rightarrow AE.AC = AF.AB \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC (cg.c)$

b. $\triangle ADB \sim \triangle BDM (gg) \Rightarrow BD^2 = AD.DM$

c. $\triangle AFH \sim \triangle AKE (gg) \Rightarrow \frac{S_{AFH}}{S_{AKE}} = \left(\frac{AH}{AE} \right)^2$

Bài cho $\widehat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EAH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AEH$ vuông cân tại E

$\Rightarrow AE = HE \Rightarrow AH^2 = AE^2 + HE^2 = 2AE^2 \Rightarrow \frac{S_{AFH}}{S_{AKE}} = 2$

d. Ta có: $\triangle AEB \sim \triangle HEC (gg) \Rightarrow AE = AB \cdot \frac{HE}{HC}$; $BE = AB \cdot \frac{CE}{HC}$

Ta có: $\triangle AFC \sim \triangle HEC (gg) \Rightarrow AF = AC \cdot \frac{HE}{HC}$; $CF = AC \cdot \frac{CE}{HC}$

e. Từ đó ta có:

$AE.AF = AB.AC \cdot \frac{HE^2}{HC^2}$; $BE.CF = AB.AC \cdot \frac{CE^2}{HC^2} \Rightarrow AE.AF + BE.CF = AB.AC \cdot \left[\frac{HE^2 + CE^2}{HC^2} \right] = AB.AC (dpcm)$

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ

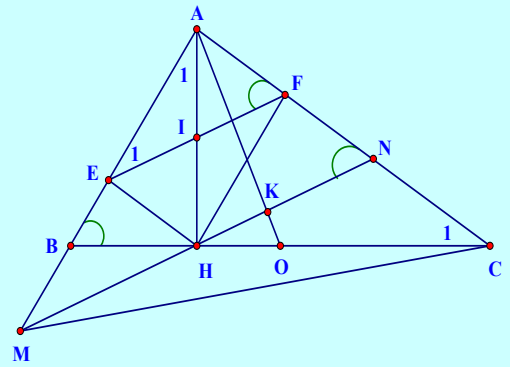
$AH \perp BC = H$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC

a. Chứng minh: $AH^2 = AE \cdot AB$

b. Chứng minh: $\triangle AFE \sim \triangle ABC$

c. Lấy M đối xứng với A qua E , tia MH cắt cạnh AC tại N . Chứng minh rằng $\widehat{ABH} = \widehat{ANH}$ và $FE \parallel HN$

d. Gọi O là trung điểm của BC ; AO giao với HN tại K . Cho biết $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Hãy tính tỉ số $\frac{S_{KAN}}{S_{HCA}}$.



Lời giải

a. Ta có: $\triangle AEH \sim \triangle AHB \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AB$

b. Gọi I là giao điểm của AH và EF . $\triangle AEI$ cân $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{EAH}$

Mà $\widehat{EAH} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB}$

c. Ta có EI là đường trung bình của $\triangle AMH$

$\Rightarrow FE \parallel HN \Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{AFE}$ (slt)

mặt khác

$\widehat{ABC} = \widehat{AFE}$ (vì: $\triangle AFE \sim \triangle ABC$) $\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ANH}$

d. Ta có $\triangle AOC$ cân $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{ACO} = 30^\circ$ (1)

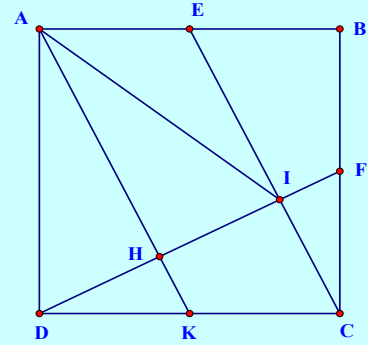
Lại có $\widehat{HAN} = 60^\circ$ và

$\widehat{ANH} = \widehat{HAN}$ ($= \widehat{AFI}$) $\Rightarrow \widehat{AKN} = 180^\circ - (\widehat{KAN} + \widehat{KNA}) = 90^\circ \Rightarrow AK \perp HN$

$\triangle AHN$ đều và N là trung điểm của $AC \Rightarrow S_{AHC} = 2S_{AHN} = AK \cdot HN \Rightarrow \frac{S_{KAN}}{S_{HCA}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{KN}{HN} = \frac{1}{4}$

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm E là trung điểm của AB . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với CE tại I cắt BC tại F

- Chứng minh $\triangle CFI \sim \triangle CBE$
- Chứng minh $IC^2 = IF \cdot ID$
- Chứng minh $\triangle ADI$ cân
- Gọi K là trung điểm của DC , AK cắt DF tại H .
Tính diện tích tứ giác $KHCI$ biết $AB = 6\text{cm}$



Lời giải

b. Từ $\widehat{IFC} = \widehat{ICD}$ (phụ. $\widehat{ICF}$); $\widehat{CIF} = \widehat{CID} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle IFC \sim \triangle ICD (gg) \Rightarrow \frac{IC}{ID} = \frac{IF}{IC} \Rightarrow IC^2 = IF \cdot ID$$

c. Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \square AECK$ là hình bình hành $\Rightarrow AK \parallel CE \Rightarrow HD = HI, AK \perp DI$

Ta có $\triangle AHD = \triangle AHI$ (cgc) $\Rightarrow AD = AI \Leftrightarrow \triangle ADI$ cân

d. Tứ giác $KHCI$ là hình thang vuông có diện tích là $S_{KHIC} = \frac{(HK + IC) \cdot IH}{2}$

- Ta có $KD = KC = 3\text{cm} \Rightarrow AK = \sqrt{DA^2 + DK^2} = 3\sqrt{5}(\text{cm})$

- Xét $\triangle DAK \sim \triangle HDK$ (gg) $\Rightarrow DK^2 = AK \cdot HK \Rightarrow HK = \frac{3\sqrt{5}}{5}(\text{cm})$

Áp dụng tính chất đường trung bình trong tam giác, ta có: $CI = 2HK = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$$HI = HD = \sqrt{DK^2 - HK^2} \Rightarrow HI = \frac{6\sqrt{5}}{5}(\text{cm}) \Rightarrow S = \frac{27}{5}(\text{cm}^2)$$

ÔN TẬP CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. Lý thuyết

1. Áp dụng các trường hợp đồng dạng của tam giác vào tam giác vuông

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:

- a) Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia
- b) Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia

2. Dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng

Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

3. Tỉ số đường cao, trung tuyến, phân giác của hai tam giác đồng dạng

- a) Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng
- b) Tỉ số hai đường trung tuyến của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng
- c) Tỉ số hai đường phân giác của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng

4. Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng

B. Bài tập

Dạng 1: Sử dụng trường hợp đồng dạng góc - góc

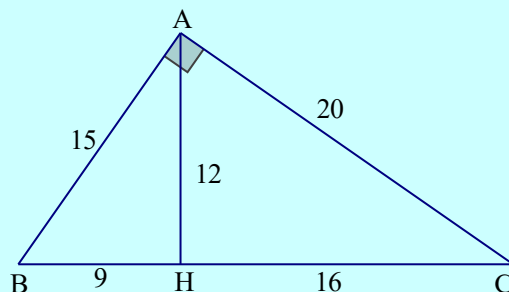
Cách giải: Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH

a. Cho $HB = 9cm, HC = 16cm$. Tính AH, AB, AC

b. Chứng minh rằng: $AH^2 = HB.HC$

$$AB^2 = BC.BH$$



Lời giải

a) Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$, có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ \\ \widehat{ABH} = \widehat{CAH} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta CHA \Rightarrow AH^2 = CH.BH \Rightarrow AH = 12(cm)$$

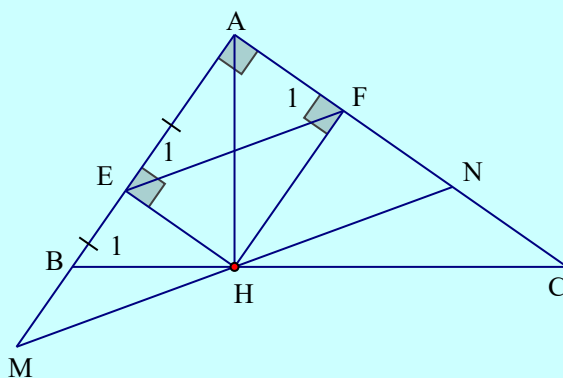
b) Ta có: $\Delta ABH \sim \Delta CBA (gg) \Rightarrow AB^2 = CB.CH$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ $AH \perp BC = H$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

a) Chứng minh: $AH^2 = AE.AB$

b) Chứng minh: $\Delta AEF \sim \Delta ACB$

c) Lấy M đối xứng với A qua E , tia MH cắt cạnh AC tại N . Chứng minh $\widehat{ABH} = \widehat{ANH}$ và $EF \parallel HN$



Lời giải

c) Ta có $\widehat{HMA} = \widehat{BAH} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ANB (gg)$

$$\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ANH}$$

Do $\widehat{AFE} = \widehat{ANH} = \widehat{ABH} \Rightarrow EF \parallel MN$.

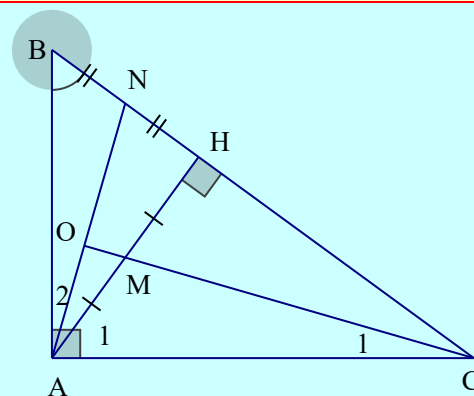
Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH . Gọi O là giao điểm của AN với CM . Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABH \sim \Delta CAH$

b) $\Delta ABN \sim \Delta CAM$

c) $AN \perp CM$

d) $AH^2 = 4CM.MO$



Lời giải

a) Ta có: $\widehat{B} = \widehat{A_1}$ (phụ $\widehat{BAH}$); $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta CAH (gg) \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{AB} = \frac{AM}{BN}$$

b) Ta có: $\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{BN}$; $\widehat{B} = \widehat{A_1} \Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle CAM$ (cgc)

c) $\triangle ABN \sim \triangle CAM \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{C_1}$

Gọi O là giao điểm của CM và AN. Xét $\triangle AOC$, có: $\widehat{OAC} + \widehat{ACO} = \widehat{OAC} + \widehat{A_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{O} = 90^\circ$

d) $\triangle AMO \sim \triangle CMH$ (gg) $\Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{MO}{MH}$

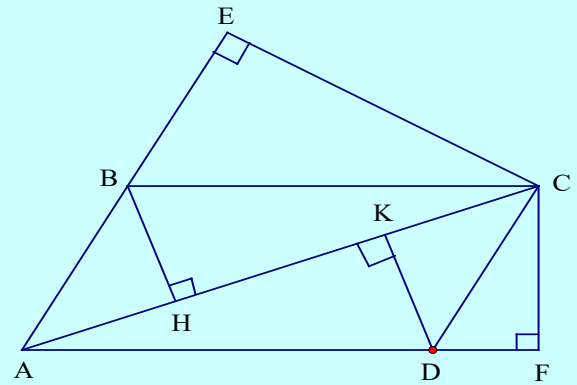
$\Rightarrow AM.MH = MC.MO \Rightarrow AM^2 = MC.MO \Rightarrow \left(\frac{AH}{2}\right)^2 = MC.MO \Rightarrow AH^2 = MC.MO$ (đpcm)

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD có $AC > BD$. Kẻ $CE \perp AB = E$; $CF \perp AD = F$ và $BH \perp AC = H$, $DK \perp AC = K$. Chứng minh:

a. $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AE}$

b. $AD.AF = AK.AC$

c. $AD.AF + AB.AE = AC^2$



Lời giải

a) Ta có: $\triangle AHB \sim \triangle AEC$ (gg) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AE}$ (1)

b) Tương tự ta có:

$\triangle AKD \sim \triangle AFC$ (gg) $\Rightarrow AD.AF = AK.AC$ (2)

c) Từ (1)(2) $\Rightarrow AB.AE = AC.AH$ (3)

Lấy (2)+(3) ta được: $AD.AF + AB.AE = AC^2$ (đpcm).

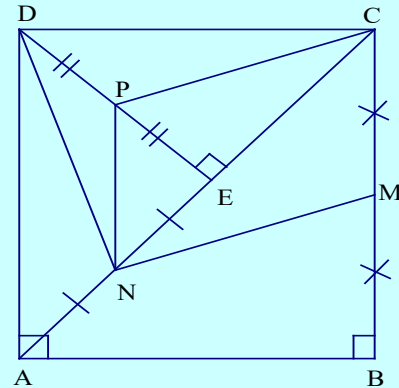
Dạng 2: Sử dụng trường hợp đồng dạng cạnh góc cạnh và cạnh huyền cạnh góc vuông

Cách giải:

- Nếu một cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng

Bài 1: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ DE vuông góc với AC tại E . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AE và DE . Chứng minh:

- a. $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{DE}$
- b. $\triangle AND \sim \triangle DPC$
- c. $ND \perp NM$



Lời giải

a) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ACD$, có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{A}: \text{chung} \\ \widehat{AED} = \widehat{ADC} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACD (gg)$

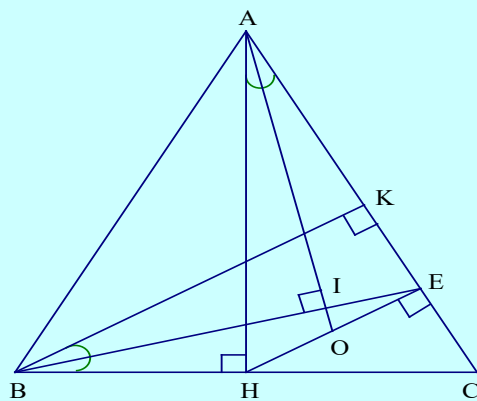
b) Ta có: $\triangle ADE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{DE}{CD} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AD}{DC} = \frac{AN}{DP}$

Chứng minh được: $\Rightarrow \triangle AND \sim \triangle DPC (cgc)$

c) P là trực tâm tam giác $CDN \Rightarrow CP \perp DN (1)$

Tứ giác $MNPC$ là hình bình hành $\Rightarrow MN \parallel PC (2) \Rightarrow MN \perp DN$

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A , gọi H là trung điểm của BC . Vẽ HE vuông góc với AC , gọi O là trung điểm của HE . Vẽ BK vuông góc với AC , BE cắt AO tại I



- Chứng minh: $\triangle AHE \cong \triangle BCK$
- Chứng minh: $AE \cdot EK = BK \cdot OE$
- Chứng minh: $OA \perp BE$

Lời giải

a) Xét $\triangle AHE$ và $\triangle BCK$, có:

$$\widehat{AEH} = \widehat{BKC} = 90^\circ; \widehat{HAE} = \widehat{CBK} \Rightarrow \triangle AHE \cong \triangle BCK (gg)$$

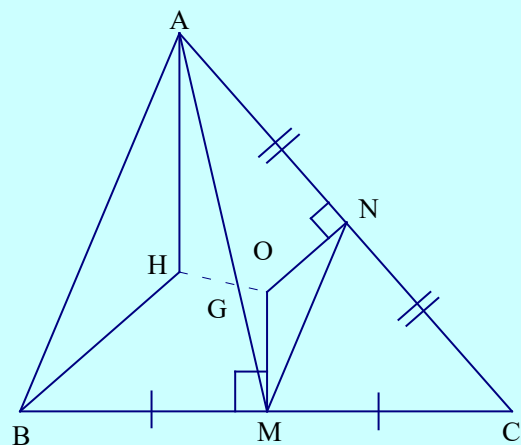
b) Ta có: $\triangle AHE \cong \triangle BCK (gg) \Rightarrow \frac{AE}{BK} = \frac{HE}{CK} = \frac{OE}{EK}$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EO} = \frac{BK}{KE} \Rightarrow \triangle AEO \cong \triangle BKE (cgc)$$

c) Theo câu b, có:

$$\triangle AEO \cong \triangle BKE (c-g-c) \Rightarrow \widehat{EBK} = \widehat{EAI}; \widehat{KBE} + \widehat{EBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KEB} + \widehat{EAI} = 90^\circ$$

Bài 3: Cho tam giác ABC , trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC . Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác, G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh



a) $\triangle OMN \cong \triangle HAB \Rightarrow AH = 2OM$

b. Chứng minh $\triangle HAG \cong \triangle OMG$

c. Ba điểm H, G, O thẳng hàng và $GH = 2GO$.

Lời giải

a. Ta có MN là đường trung bình $\triangle ABC$

$$\Rightarrow MN \parallel AB, MN = \frac{1}{2}AB$$

Chứng minh được:

$$\Delta AHB'' \Delta MON(g-g) \Rightarrow \frac{AH}{OM} = \frac{AB}{MN} = 2$$

$$\text{b. } \widehat{HAG} = \widehat{OMG}; \frac{OM}{AH} = \frac{GM}{GA} \left(= \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \Delta HAG \# \Delta OMG(cgc)$$

$$\text{c. } \Delta HAG'' \Delta OMG \Rightarrow \frac{GH}{GO} = 2; \widehat{AGH} = \widehat{OGM} \Rightarrow \widehat{OGM} + \widehat{HGM} = 180^0 \Rightarrow H, G, O \text{ thẳng hàng.}$$

Dạng 3: Tỷ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

Cách giải:

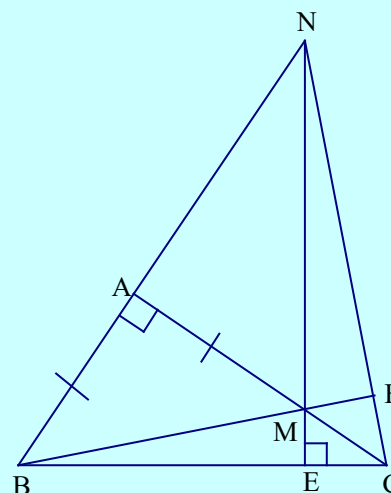
Ta có: Tỷ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỷ số đồng dạng

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Lấy điểm M trên cạnh AC sao cho $AM = AB$. Kẻ $ME \perp BC = E$.

a) Chứng minh $CM \cdot CA = CE \cdot CB$.

b) Tia BA và tia EM cắt nhau tại N , đường thẳng BM cắt CN tại F . Chứng minh $\triangle AMB \sim \triangle FMC$ và tam giác ACN vuông cân.

c) Tính tỷ số diện tích của hai tam giác BFN và tam giác MFC .



Lời giải

b) Ta có $\triangle AMB \sim \triangle FMC$ (gg), mà $\triangle AMB$ vuông cân $\Rightarrow \triangle FMC$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{FCM} = 45^\circ$
 $\triangle ANC$ vuông tại A có $\widehat{ANC} = 45^\circ \Rightarrow \triangle ANC$ vuông cân.

c) $\triangle BNF \sim \triangle FMC$ (gg) $\Rightarrow \frac{S_{BFN}}{S_{MFC}} = \left(\frac{BN}{CM}\right)^2 = 49$.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác $\angle B$ cắt AH ở D và cắt AC ở E

a. Chứng minh rằng:

$$\triangle ABE \sim \triangle HBD; \triangle AHB \sim \triangle CHA; \triangle ABC \sim \triangle HBA$$

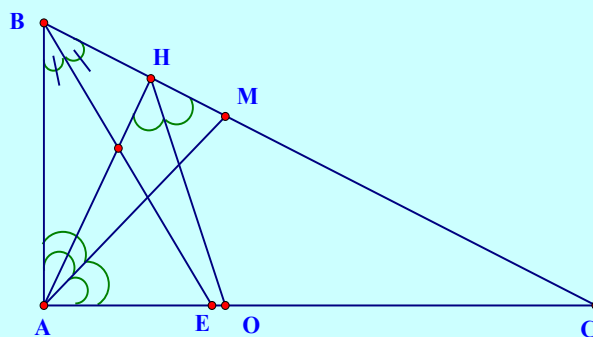
b. Kẻ phân giác AM của $\widehat{BAC}$ ($M \in BC$), cho

$AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Tính

+) BM, CM

$$+) \frac{S_{ABE}}{S_{BHD}}; \frac{S_{AHB}}{S_{CHA}}$$

c. Kẻ phân giác HO của $\widehat{AHC}$ ($O \in AC$).



Chứng minh rằng $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{AC}$

d. Biết $P_{ABC} = 24cm, P_{AHC} = 12cm, P_{AHB} = 9cm$. Tính các cạnh của ΔABC

Lời giải

$$b. \frac{S_{ABE}}{S_{BHD}} = \left(\frac{AB}{BH} \right)^2; \Delta ABC \sim \Delta HBA \Rightarrow HB = 3,6cm$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{BHD}} = \frac{25}{9}$$

$$\frac{S_{AHB}}{S_{CHA}} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$c. \Delta ABH \sim \Delta CAH \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{AB}{AC} = \frac{AO}{OC}$$

$$d. \frac{P_{AHB}}{P_{CHA}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} = k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow AB = 3k; AC = 4k \Rightarrow BC = 5k \Rightarrow 12k = 24 \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow AB, BC, AC$$

Bài 3: [Ba Đình, 2016 - 2017]

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8cm$, $AD = 6cm$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Qua D kẻ đường thẳng d vuông góc với BD , d cắt BC tại E

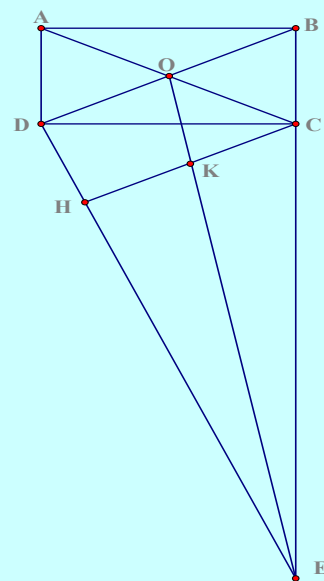
a. Chứng minh: $\Delta BDE \sim \Delta DCE$

b. Kẻ CH vuông góc với DE tại H . Chứng minh $DC^2 = CH \cdot DB$

c. Gọi K là giao điểm của OE và CH . CMR

K là trung điểm của CH và tính $\frac{S_{EHC}}{S_{EDB}}$

d. Chứng minh OE, CD, BH đồng quy



Lời giải

c. Do $BD \parallel CH$ (cùng vuông góc với DE)

$$\text{mà } O \in BD, K \in CH \Rightarrow \frac{HK}{OD} = \frac{CK}{OB} (= \frac{EK}{EO}) \Rightarrow KH = CK$$

$$\triangle CHE \sim \triangle BDE (CH \parallel BD) \Rightarrow \frac{S_{EHC}}{S_{EDB}} = \left(\frac{CH}{BD} \right)^2 = \frac{256}{625}$$

d. Giả sử CD giao với BH tại I , chứng minh được $\triangle DOI \sim \triangle CIK (c - g - c) \Rightarrow \widehat{DIO} = \widehat{CIK}$

$$\text{Mà: } \widehat{DOI} + \widehat{OCI} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{OCI} + \widehat{CIK} = 180^\circ \Rightarrow O, I, K \dots \Leftrightarrow I \in OE$$

Bài 4: [Cuối năm 2017 – 2018]

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6\text{cm}$,
 $AB = 8\text{cm}$. Hai đường chéo AC và BD cắt
 nhau tại O . Qua D kẻ đường thẳng d
 vuông góc với BD , d cắt BC tại E

a. Chứng minh rằng: $\triangle BDE \sim \triangle DCE$

b. Kẻ CH vuông góc với DE tại H .

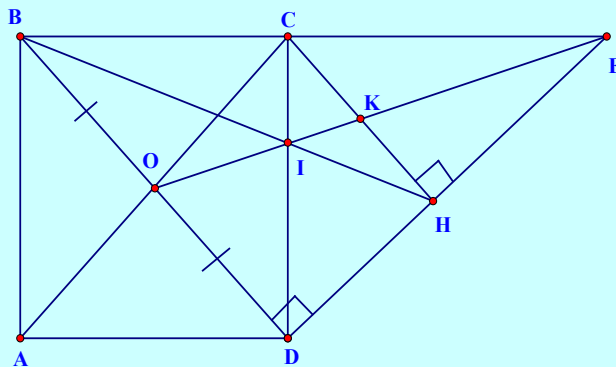
Chứng minh rằng: $DC^2 = CH \cdot DB$

c. Gọi K là giao điểm của OE và HC .

Chứng minh K là trung điểm của HC .

Tính tỉ số giữa diện tích tam giác ECH và
 diện tích tam giác EBD

d. Chứng minh ba đường thẳng
 OE, CD, BH đồng quy.



Lời giải

a. $\triangle BDE \sim \triangle DCE (gg)$

$$\text{b. } \triangle DCB \sim \triangle CHD \Rightarrow \frac{CD}{CH} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow CD^2 = CH \cdot DB$$

$$\text{c. } CH \parallel BD (\perp DE) \Rightarrow \frac{HK}{OD} = \frac{KE}{OE} = \frac{KC}{OB} \quad (\text{định lý TaLet})$$

$$\text{mà } OB = OD \text{ (do } ABCD \text{ là hình chữ nhật)} \Rightarrow HK = CK \Rightarrow dpcm$$

- Tính được $BD = 10\text{cm}, CD = 8\text{cm}$

$$\text{Từ câu b, ta có } CH = CD^2 : BD = 64 : 10 = 6,4(\text{cm})$$

$$\text{Lại có: } \triangle ECH \sim \triangle EBD (gg) \Rightarrow \frac{S_{ECH}}{S_{EBD}} = \left(\frac{CH}{BD} \right)^2 = \left(\frac{6,4}{10} \right)^2 = \frac{256}{625}$$

d. Gọi I là giao điểm của BH và CD và O' là giao điểm của EI và BD , K' là giao điểm của EI và CH . Ta sẽ chứng minh O' là trung điểm của BD

$$\text{Vì } CH \parallel BD \Rightarrow \frac{O'B}{HK'} = \frac{BI}{HI} = \frac{BD}{HC} = \frac{DE}{HE} = \frac{O'D}{HK'} \Rightarrow O'B = O'D \text{ hay } O' \text{ là trung điểm của } BD$$

$\Rightarrow EI$ đi qua O . Do vậy OE, CD, BH đồng quy.

Bài 5: [Cuối năm 2015 – 2016]

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường trung tuyến AM . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt AB tại E và cắt AC tại F . Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$, AH cắt EF tại I .

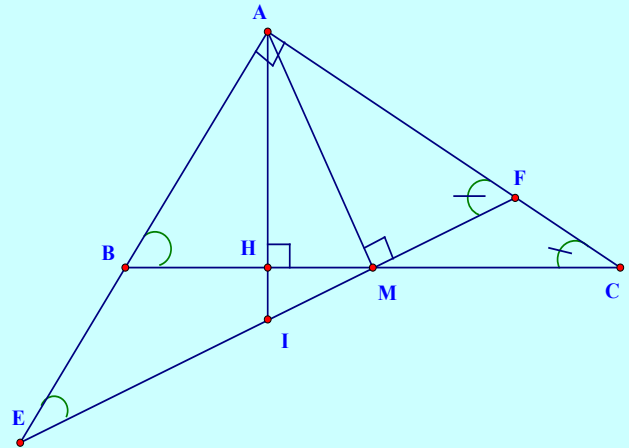
Chứng minh rằng:

a. $\widehat{BAM} = \widehat{ABM}$

b. $\widehat{ACB} = \widehat{AEF}$ từ đó suy ra $\triangle MBE \sim \triangle MFC$

c. $AB \cdot AE = AC \cdot AF$

d. $\frac{S_{ABC}}{S_{AFE}} = \left(\frac{AM}{AI} \right)^2$



Lời giải

a. $\triangle ABM$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ABM}$

b. $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 90^\circ = \widehat{AEF} + \widehat{BAM}$

$$\widehat{BAM} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AEF}$$

$$\Rightarrow \triangle MBE \sim \triangle MFC (g - g)$$

c. $\triangle ABC \sim \triangle AFE (gg) \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE}$

$$\Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AF$$

d. $\triangle AEI$ cân tại I ($\widehat{AEI} = \widehat{EAI} = \widehat{ACB}$) $\Rightarrow EI = IA \Rightarrow \triangle AIF$ cân tại I $\Rightarrow AI = \frac{1}{2} EF \Leftrightarrow EF = 2AI$

Ta lại có: $BC = 2AM$

$$\text{Do } \triangle AFE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AFE}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AI}\right)^2$$

Bài 6: [Cuối năm 2016 – 2017]

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = 5\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 6\text{cm}$. Qua D kẻ đường vuông góc với BD cắt AC tại E

a. Chứng minh rằng: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

b. Kẻ

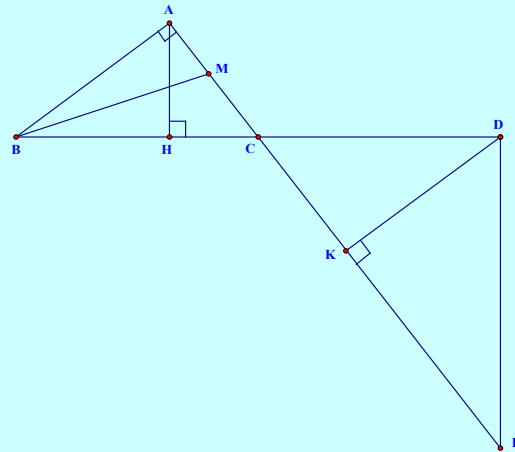
$AH \perp BC (H \in BC); DK \perp CE (K \in CE)$.

Chứng minh rằng: $CH \cdot CD = CK \cdot CA$

c. Tính độ dài CE và KD

d. Vẽ đường phân giác BM của

$$\widehat{ABC} (M \in BC). \text{CMR: } \frac{MA}{MC} = \frac{EK}{ED}$$



Lời giải

a. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (gg)

$$\text{b. } \triangle AHC \sim \triangle DKC \text{ (gg)} \Rightarrow \frac{HC}{CK} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow CH \cdot CD = CK \cdot CA$$

$$\text{c. } \triangle ABC \sim \triangle DEC \Rightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC} = 2 \Rightarrow CE = 10(\text{cm})$$

Vì tam giác DCE vuông tại D , áp dụng pitago $\Rightarrow DE = 8(\text{cm})$

$$\triangle DKE \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{KD}{CD} = \frac{DE}{CE} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow KD = 4,8(\text{cm})$$

$$\text{d. Áp dụng tính chất đường phân giác ta có: } \frac{AB}{BC} = \frac{MA}{MC} \text{ (1)}; \triangle ABC \sim \triangle KED \text{ (2)} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{EK}{ED}.$$