HH9-CHUYÊN ĐỀ 1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. Hệ thức về cạnh và đường cao

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi giải các bài toán liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ngoài việc nắm vững các kiến thức về định lý Thales, về các trường hợp đồng dạng của tam giác, cần phải nắm vững các kiến thức sau:

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, kí hiệu: $AB=c, BC=a, CA=b, AH=h, HB=c', HC=b'$. Ta có:

1) $a^2=b^2+c^2$.

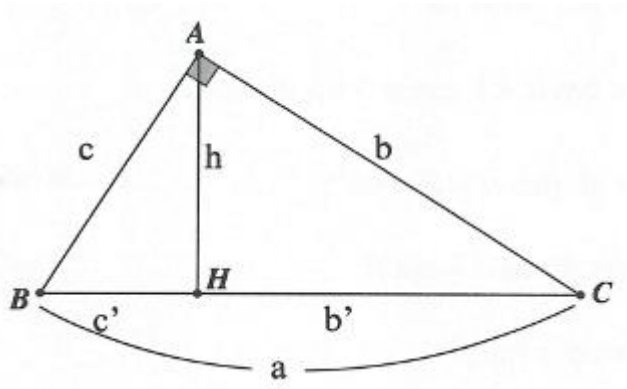
2) $b^2=a.b'; c^2=a.c'$

3) $h^2=b'.c'$

4) $a.h=b.c$.

5) $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

6) $\frac{b'}{a}=\frac{b^2}{a^2}$.



Chú ý: Diện tích tam giác vuông: $S=\frac{1}{2}.b.c$

Chứng minh:

+ Xét các tam giác vuông AHB và CHA, ta có: $BAH=HCA$ (cùng phụ với HAC) suy ra $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ (g.g) nên ta có: $\frac{AH}{HB}=\frac{CH}{HA} \Leftrightarrow AH^2=BH.CH$.

+ Xét các tam giác vuông BHA và BAC, ta có: ABC chung suy ra $\Delta BAH \backsim \Delta BAC$ (g.g) nên ta có: $\frac{BH}{BA}=\frac{BA}{BC} \Leftrightarrow BA^2=BH.BC$.

+ Tương tự ta có: $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ (g.g) nên $\frac{AC}{HC}=\frac{BC}{AC} \Leftrightarrow CA^2=CH.CB$.

+ Ta có:

$$AH.BC=AB.AC=\left(2S_{ABC}\right) \Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{BC^2}{AB^2.AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2.AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}.$$

II. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

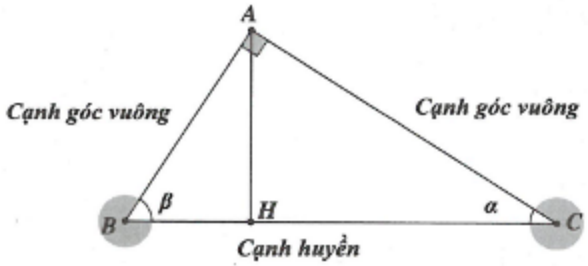
KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi đó ta có các góc B, C là góc nhọn, đặt $C=\alpha, B=\beta$ thì $\alpha+\beta=90°$.

Xét góc: α ta thấy: AB là cạnh đối của góc α, AC gọi là cạnh kề của góc α.

1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α (hình) được định nghĩa như sau:

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC};\cos\alpha=\frac{AC}{BC};\tan\alpha=\frac{AB}{AC};\cot\alpha=\frac{AC}{AB}$$



+ Nếu α là một góc nhọn thì:

$0<\sin\alpha<1;0<\cos\alpha<1;\tan\alpha>0;\cot\alpha>0$

2. Với hai góc α,β mà $\alpha+\beta=90°$,

Ta có: $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta;$

$\tan\alpha=\cot\beta;\cot\alpha=\tan\beta$

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin\alpha=\sin\beta$ hoặc $\cos\alpha=\cos\beta$ thì $\alpha=\beta$.

3. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;tg\alpha.\cot g\alpha=1$.

4. Với một số góc đặc biệt ta có: $\sin30°=\cos60°=\frac{1}{2};\sin45°=\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos30°=\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2};\cot60°=\tan30°=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan45°=\cot45°=1;\cot30°=\tan60°=\sqrt{3}$.

Việc chứng minh các hệ thức khá đơn giản:

+ Ta có: $\sin\alpha=\frac{AB}{BC},\cos\beta=\frac{AB}{BC}$ suy ra $sin\alpha=\cos\beta$. Tương tự cho các trường hợp còn lại.

+ Ta có:

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC},\cos\alpha=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\sin^2\alpha=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2,\cos^2\alpha=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2\Rightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1$$

III. Một số ví dụ tiêu biểu

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC vuông tại A, dựng đường cao AH. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác ABC trong mỗi trường hợp sau:

a, $AB=a,AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b, $BC=2a,HB=\frac{1}{4}BC$.

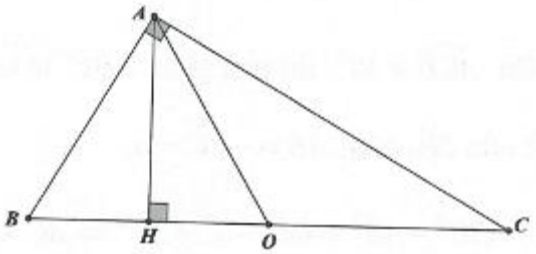
c, $AB=a,CH=\frac{3}{2}a$.

D, $CA=a\sqrt{3},AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

e, $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4},BC=5a$.

Giải:

a, Áp dụng công thức: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$



Ta có: $\frac{1}{\frac{3}{4}a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{AC^2}\Rightarrow\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{3a^2}\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$.

b, Ta có tam giác OAB cân tại O, $BC=2BO$

Mà $BC=4BH\Rightarrow BH=BO\Rightarrow\Delta OAB$ cũng cân tại B. Hay

OAB là tam giác đều. Suy ra $AB=a, AC^2=BC^2-AB^2=4a^2-a^2=3a^2$ nên $AC=a\sqrt{3}$.

c, Áp dụng công thức: $BA^2=BH.BC\Rightarrow BA^2=BH(BH+HC)$ hay $a^2=BH^2+\frac{3}{2}a.BH$

$\Leftrightarrow 2BH^2+3a.BH-2a^2=0\Leftrightarrow\left(2BH-a\right)\left(BH+2a\right)=0\Rightarrow BH=\frac{a}{2}$. Vậy $BC=2a\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$.

d, Áp dụng công thức: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$

Ta có: $\frac{1}{\frac{3}{4}a^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{3a^2}\Rightarrow\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow AB=a\Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2=4a^2$. Hay $BC=2a$.

e, Đặt $AB=3k, AC=4k$ với $k>0\Rightarrow AB^2+AC^2=(3k)^2+(4k)^2=25k^2=BC^2=25a^2$ suy ra $k=a\Rightarrow AB=3a, AC=4a$.

Ví dụ 2.

Cho tam giác vuông ABC có $A=90°, BC=2a$, gọi O là trung điểm của BC. Dựng $AH\perp BC$

a, Khi $ACB=30°$. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác.

b, Khi $ACB=30°$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính độ dài BM.

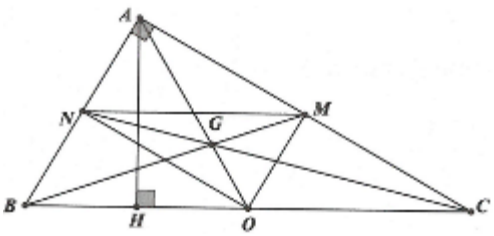
c. Khi $ACB=30°$. Các đoạn thẳng AO, BM cắt nhau ở điểm G. Tính độ dài GC.

d. Giả sử điểm A thay đổi sao cho $BAC=90°, BC=2a$. Tam giác ABC phải thoả mãn điều kiện gì để diện tích tam giác AHO lớn nhất?

e. Giả sử CG cắt AB tại điểm N. Tứ giác $AMON$ là hình gì? Tam giác ABC phải thoả mãn điều kiện gì để diện tích tứ giác $AMON$ lớn nhất?

Giải:

a, Khi $ACB=30°$ thì tam giác ABC là tam giác nửa đều nên



$AB=\frac{1}{2}BC=a$,

$AC^2=BC^2-AB^2=4a^2-a^2=3a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$.

b, Theo câu a) ta có: $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BM^2 = BA^2 + AM^2 = a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{7a^2}{4}$

$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

c. Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $CG = \frac{2}{3}CN$ (với N là trung điểm của AB).

Áp dụng định lí Pitago ta có: $CN^2 = AN^2 + AC^2 = \frac{a^2}{4} + 3a^2 = \frac{13}{4}a^2 \Rightarrow CN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. Suy ra $CG = \frac{2}{3}CN = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

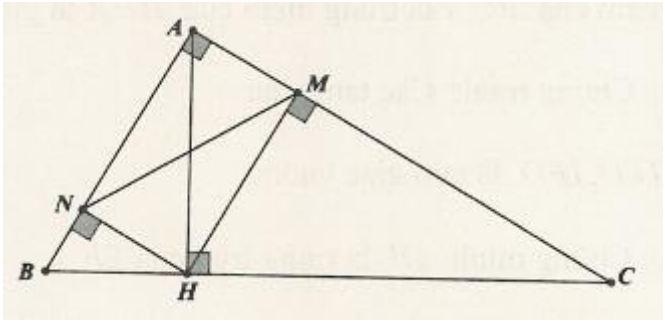
d. Ta có: $S_{AHO} = \frac{1}{2}AH.HO \le \frac{1}{2}\left(AH^2 + HO^2\right) = \frac{1}{2}AO^2 = \frac{BC^2}{4} = a^2$. Diện tích tam giác AHO lớn nhất khi và chỉ khi $AH = HO$. Tức là AHO vuông cân tại H. Suy ra $ACB = 22°30', ABC = 77°30'$

e. Tứ giác $AMON$ là hình chữ nhật nên $S_{AMON} = AM.AN$. Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$AM^2 + AN^2 \ge 2AM.AN \Leftrightarrow MN^2 \ge 2AM.AN$. Mà $MN^2 = OA^2 = a^2$ nên $AM.AN \le \frac{a^2}{2}$. Vậy $S_{AMON} \le \frac{a^2}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AM = AN \Leftrightarrow AB = AC$, hay tam giác ABC vuông cân tại A.

Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Từ H dựng HM, HN lần lượt vuông góc với AC, AB.



a, Chứng minh: $CM.CA.BN.BA = AH^4$.

b, Chứng minh: $CM.BN.BC = AH^3$.

c, Chứng minh: $AM.AN = \frac{AH^3}{BC}$.

d, Chứng minh: $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BN}{CM}$.

e, Chứng minh: $AN.NB + AM.MC = AH^2$.

f, Chứng minh: $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2}$.

Giải:

a, Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB, AHC, ABC ta có:

$BN.BA = BH^2, CM.CA = CH^2, HB.HC = AH^2$, suy ra $CM.CA.BN.BA = \left(CH.BH\right)^2 = AH^4$.

b, Chú ý rằng: $AB.AC = AH.BC = \left(2S_{ABC}\right)$

từ câu a) ta suy ra $CM.BN.AH.BC = AH^4 \Leftrightarrow CM.BN.BC = AH^3$.

c, Ta có: $AM.AC = AH^2, AN.AB = AH^2 \Rightarrow AM.AN.AB.AC = AH^4$, mặt khác

$AB.AC = AH.BC = \left(2S_{ABC}\right)$ nên $AM.AN.BC = AH^3$.

d, Ta có: $CM.CA = CH^2, BN.BA = BH^2 \Rightarrow \dfrac{BN}{CM} = \dfrac{BH^2.CA}{CH^2.AB}$ (*) ta lại có:

$BH.BC = BA^2 \Rightarrow BH^2 = \dfrac{BA^4}{BC^2}, CH.CB = CA^2 \Rightarrow CH^2 = \dfrac{CA^4}{BC^2}$ thay vào (*) ta suy ra $\dfrac{BN}{CM} = \dfrac{AB^3}{AC^3}$.

e, Ta có: $AN.NB = HN^2, AM.MC = HM^2 \Rightarrow AN.NC + AM.MC = HN^2 + HM^2$. Tứ giác $ANHM$ là hình chữ nhật nên $HM^2 + HN^2 = MN^2 = AH^2$ hay $AN.NB + AM.MC = AH^2$.

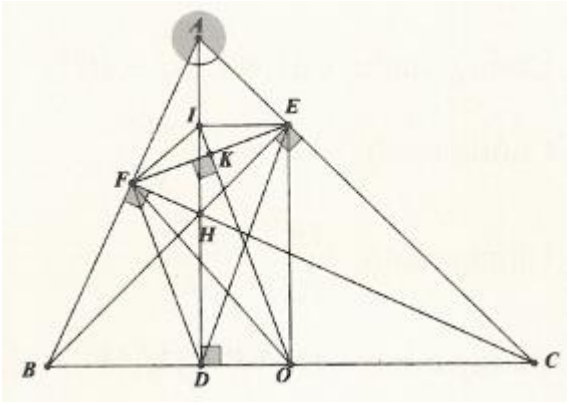
f, Ta có: $CM.CA = CH^2, BN.BA = BH^2 \Rightarrow BN^2 = \dfrac{BH^4}{AB^2}, CM^2 = \dfrac{CH^4}{CA^2}$. Lại có $BA^2 = BH.BC$ nên suy ra $\Rightarrow BH = \dfrac{BA^2}{BC} \Rightarrow BH^4 = \dfrac{BA^8}{BC^4} \Rightarrow \dfrac{BH^4}{BA^2} = \dfrac{BA^6}{BC^4}$ hay $BN^2 = \dfrac{BA^6}{BC^4}$ tương tự ta cũng có:

$CM^2 = \dfrac{CA^6}{BC^4} \Rightarrow \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2} = \sqrt[3]{\dfrac{BA^6}{BC^4}} + \sqrt[3]{\dfrac{CA^6}{BC^4}} = \dfrac{BA^2 + CA^2}{\sqrt[3]{BC^4}}$. Theo định lí Pitago ta có:

$BA^2 + CA^2 = BC^2$ suy ra $\sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2} = \dfrac{BC^2}{\sqrt[3]{BC^4}} = \sqrt[3]{BC^2}$.

Ví dụ 4.

Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, gọi O là trung điểm của BC, I là trung điểm của AH, K là giao điểm của EF, OI biết $BC = 2a$.



a, Chứng minh: Các tam giác IEO, IFO là tam giác vuông.

b, Chứng minh: OI là trung trực của EF.

c, Chứng minh: $AH^2 = 4IK.IO$.

d, Chứng minh: $\dfrac{EF}{BC} = \cos A$.

e, Chứng minh: $\dfrac{EF}{BC}.\dfrac{FD}{AC}.\dfrac{ED}{AB} = \cos A.\cos B.\cos C$.

f, Chứng minh: $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$.

g, Chứng minh: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=1-\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)$.

h, Chứng minh: $\tan B.\tan C=\frac{AD}{HD}$.

i, Giả sử $ABC=60°, ACB=45°$. Tính S_{ABC} theo a.

j, Gọi M là điểm trên AH sao cho $BMC=90°$. Chứng minh: $S_{BMC}=\sqrt{S_{ABC}.S_{BHC}}$.

Giải:

a, Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên các tam giác AEH, AFH lần lượt vuông tại E, F. Do I là trung điểm cạnh huyền AH nên tam giác AIE cân tại I suy ra $IEA=IAE$ (1), tam giác OEC cân tại O nên $OEC=OCE$ (2). Lấy (1) + (2) theo vế ta có: $IEA+OEC=IAE+OCE=90°$ hay $OEI=90°$. Tương tự ta cũng có $OFI=90°$.

b, Do $IE=IF=\frac{AH}{2}\Rightarrow I$ nằm trên trung trực của EF, $OE=OF=\frac{BC}{2}$ nên O nằm trên trung trực của EF suy ra OI là trung trực của EF,

c, Do OI là trung trực của EF nên $IO\perp EF$ tại K. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông IEO ta có: $IK.IO=IE^2-\left(\frac{AH}{2}\right)^2\Leftrightarrow 4IK.IO=AH^2$.

d, Trong tam giác vuông AEB ta có: $\cos A=\frac{AE}{AB}$, trong tam giác vuông AFC ta cũng có:

$\cos A=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$, suy ra $\Delta AEF\backsim\Delta ABC\Rightarrow\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\cos A$.

e, Tương tự như câu d) ta cũng có:

$\frac{FD}{AC}=\cos B,\frac{ED}{AB}=\cos C$ suy ra $\frac{EF}{BC}.\frac{FD}{AC}.\frac{ED}{AB}=\cos A.\cos B.\cos C$.

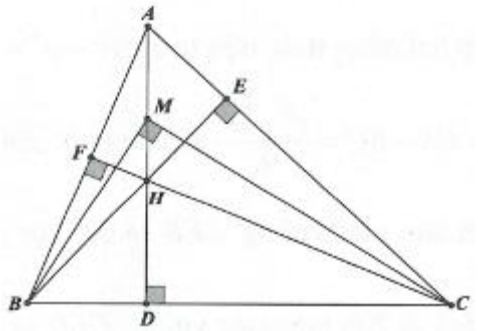
f, Theo câu d) ta có: $\Delta AEF\backsim\Delta ABC\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\cos^2 A$.

g, Ta có: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}-S_{AEF}-S_{BFD}-S_{DFE}}{S_{ABC}}=1-\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}-\frac{S_{BFD}}{S_{ABC}}-\frac{S_{DFE}}{S_{ABC}}$. Tương tự như câu f) ta cũng có:

$\frac{S_{BFD}}{S_{ABC}}=\cos^2 B,\frac{S_{DFE}}{S_{ABC}}=\cos^2 C$ suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=1-\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)$.

h, Ta có: $\tan B=\frac{AD}{BD},\tan C=\frac{AD}{DC}$ suy ra $\tan B.\tan C=\frac{AD^2}{BD.CD}$, ta cần chứng minh:

$\frac{AD^2}{BD.CD}=\frac{AD}{HD}\Leftrightarrow AD.HD=BD.CD$. Thật vậy xét tam giác *BDH* và tam giác *ADC* ta có:



$BHD=180°-DHE=ACD$ suy ra $\Delta BDH\backsim\Delta ADC$ nên

$\frac{DH}{DC}=\frac{BD}{AD}$ hay $AD.HD=BD.CD$ đpcm.

i, Để tính diện tích tam giác *ABC* ta cần tính đường cao *AD* theo *a*.

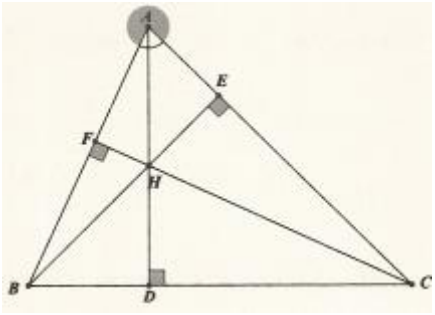
Do tam giác *ACD* vuông cân tại *D* nên $AD=DC$ (*). Do $ABC=60°$ nên:

$\tan 60°=\frac{AD}{BD}\Leftrightarrow AD=BD.\sqrt{3}$ (**). Nhân (*) với $\sqrt{3}$ rồi cộng với (**) ta có:

$$\left(\sqrt{3}+1\right)AD=\sqrt{3}\left(DC+BD\right)=\sqrt{3}BC=2\sqrt{3}a\Rightarrow AD=\frac{2\sqrt{3}a}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)a.$$

Vậy $S_{ABC}=\frac{1}{2}.\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)a.2a=\left(3-\sqrt{3}\right)a^2$.

j, Ta cần chứng minh: $S^2_{BMC}=S_{ABC}.S_{BHC}$ (***)



Áp dụng công thức tính diện tích các tam giác ta có:

$S_{BMC}=\frac{1}{2}MD.BC$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AD.BC$, $S_{BHC}=\frac{1}{2}HD.BC$

Thay (***) thì điều cần chứng minh tương đương với $MD^2=AD.HD$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *BMC* ta có: $MD^2=DB.DC$. Như vậy ta quy về chứng minh: $DB.DC=AD.HD$. Xét tam giác *BDH* và tam giác *ADC* ta có: $BHD=180°-DHE=ACD$ suy ra $\Delta BDH\backsim\Delta ADC$ nên $\frac{DH}{DC}=\frac{BD}{AD}$ hay $AD.HD=BD.CD$ đpcm.

Ví dụ 5.

Cho tam giác *ABC* có $BC=a,AC=b,AB=c$. Chứng minh rằng:

a, $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$.

b, $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$ (Công thức Heron) với $p=\frac{a+b+c}{2}$.

c, $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$

$S=\frac{1}{2}ab.\sin C=\frac{1}{2}bc.\sin A=\frac{1}{2}ac.\sin B$.

d, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Giải:

a, Dựng đường cao BE của tam giác ABC ta có:

Cách 1: Giả sử E thuộc cạnh AC.

Ta có: $AC=AE+EC$. Áp dụng định lí Pitago cho các tam giác vuông AEB, BEC ta có:

$AB^2=AE^2+EB^2, BC^2=BE^2+EC^2$

Trừ hai đẳng thức trên ta có: $c^2-a^2=EA^2-EC^2=\left(EA+EC\right)\left(EA-EC\right)=b.\left(EA-EC\right)$

$\Rightarrow EA-EC=\frac{c^2-a^2}{b}$ ta cũng có: $EA+EC=b\Rightarrow AE=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$.

Xét tam giác vuông AEB ta có: $\cos A=\frac{AE}{AB}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

Cách 2: Xét tam giác vuông CEB ta có: $BC^2=BE^2+EC^2=BE^2+\left(AC-AE\right)^2$

$=BE^2+AE^2+AC^2-2AC.AE$. Ta có: $AE=AB.\cos A$ suy ra

$BC^2=BE^2+AE^2+AC^2-2AC.AB.\cos A$ hay $BC^2=BA^2+AC^2-2AC.AB.\cos A$

$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

b, Ta giả sử góc A là góc lớn nhất của tam giác $ABC\Rightarrow B, C$ là các góc nhọn. Suy ra chân đường cao hạ từ A lên BC là điểm D thuộc cạnh BC. Ta có: $BC=BD+DC$. Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông ADB, ADC ta có: $AB^2=AD^2+DB^2, AC^2=AD^2+DC^2$. Trừ hai đẳng thức trên ta có: $c^2-b^2=DB^2-DC^2=\left(DB+DC\right)\left(DB-DC\right)=a.\left(DB-DC\right)\Rightarrow DB-DC=\frac{c^2-b^2}{a}$ ta cũng có: $DB+DC=a\Rightarrow BD=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ADB ta có:

$AD^2=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2=\left(c-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$

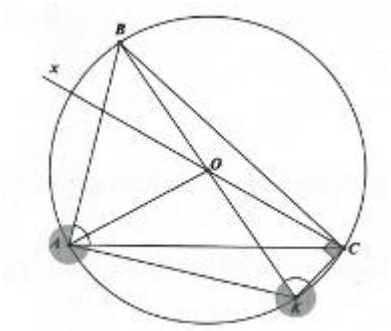
$=\left[\frac{\left(a+c\right)^2-b^2}{2a}\right].\left[\frac{b^2-\left(a-c\right)^2}{2a}\right]=\frac{\left(a+b+c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+a-c\right)\left(b+c-a\right)}{4a^2}$. Đặt $2p=a+b+c$ thì

$AD^2=\frac{16p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}{4a^2}\Rightarrow AD=2\frac{\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}}{a}$. Từ đó ta được

$S=\frac{1}{2}BC.AD=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$

c, Từ câu b) ta có: $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$(p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$. Suy ra



$S \le \sqrt{p.\frac{p^3}{27}} = \frac{p^3}{3\sqrt{3}}$.

Hay $S \le \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$. Mặt khác ta dễ chứng minh được:

$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$. Suy ra

$S \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác *ABC* đều.

d, Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC$, trong tam giác vuông *ABD* ta có: $\sin B = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD = AB.\sin B$ thay

vào ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}AB.BC.\sin B = \frac{1}{2}ac.\sin B$. Tương tự cho các công thức còn lại.

e, Dựng đường kính *BK* của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác *ABC* thì $BAK = BCK = 90°$ và

$OA = OB = OC = OK = R$.

Trong tam giác vuông *BKC* ta có: $\sin BKC = \frac{BC}{BK} = \frac{a}{2R}$.

Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác ta có:

$BOC = 2BKC, BAC = BAO + OAC = \frac{1}{2}AOK + \frac{1}{2}AOx$

Hay $BAC = \frac{1}{2}KOx = \frac{1}{2}BOC = BKC$. Từ đó suy ra:

$\sin ABC = \sin BKC = \frac{a}{2R}$ hay $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Tương tự:

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Chú ý: Việc dựng đường kính *AK* giúp ta tạo ra tam giác vuông để sử dụng tỷ số lượng giác góc nhọn, $BAC = BKC$ là một kết quả quen thuộc trong chương 2- Hình 9 (hai góc nội tiếp chắn cùng một cung).

Nếu chỉ chứng minh: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Ta làm đơn giản hơn như sau:

Vẽ $AD \perp BC, D \in BC, \Delta DAB$ có $D = 90°$ nên $\sin B = \frac{AD}{AB}; \Delta DAC$ có $D = 90°$ nên $\sin C = \frac{AD}{AC}$.

Do đó $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Chứng minh tương tự ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

Vậy $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

Ví dụ 6.

Cho tam giác *ABC* với các đỉnh A, B, C và các cạnh đối diện với các đỉnh tương ứng là: *a*, *b*, *c*. Gọi *D* là chân đường phân giác trong góc *A*. Chứng minh rằng:

a, Chứng minh: $\frac{BD}{AB}=\frac{a}{b+c}$.

b, Chứng minh: $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{b+c}$.

c, Chứng minh: $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

d, Chứng minh: $AD=\frac{2bc.\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c}$.

Giải:

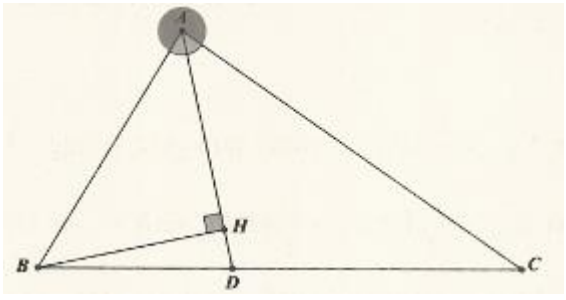
a, Áp dụng tính chất đường phân giác trong ta có: $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$ suy ra $DC=\frac{b}{c}.DB$ nên:

$DB+DC=\frac{b}{c}DB+DB=\frac{(b+c)}{c}DB\Leftrightarrow a=\frac{(b+c)}{c}DB$ hay $DB=\frac{ac}{b+c}\Leftrightarrow\frac{DB}{AB}=\frac{a}{b+c}$.

b, Dựng $BH\perp AD$ thì $\sin\frac{A}{2}=\frac{BH}{AB}\le\frac{BD}{AB}=\frac{a}{b+c}$.

c, Áp dụng kết quả các câu a, b ta có:

$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\left(\frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{c}{a+b}\right)$.



Theo bất đẳng thức $\text{AM}-\text{GM}$ ta có:

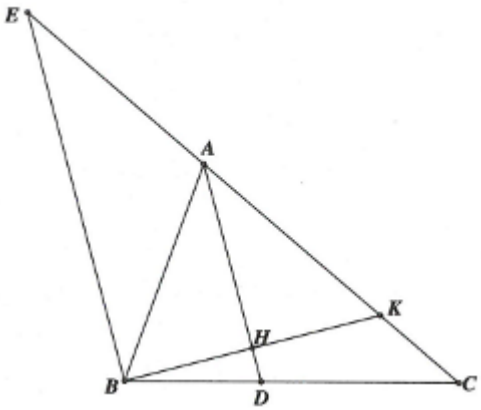
$b+c\ge2\sqrt{bc},c+a\ge2\sqrt{ac},a+b\ge2\sqrt{ab}$ nhân các BĐT (có các vế dương) cùng chiều ta có: $(b+c)(c+a)(a+b)\ge8abc$ suy ra $\left(\frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{c}{a+b}\right)\le\frac{1}{8}$

hay $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác *ABC* đều.

c, Để chứng minh bài toán ta cần kết quả sau:

+ $\sin2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$.

+ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$.



*) Thật vậy xét tam giác vuông ABC, $A=90°$, gọi O là trung điểm của BC, dựng đường cao AH.

Đặt $ACB=\alpha \Rightarrow AOB=2\alpha$.

Ta có: $\sin\alpha=\sin C=\frac{AH}{AC}=\frac{h}{b},\cos\alpha=\cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$

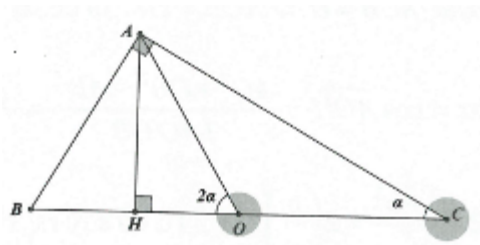
$\sin 2\alpha=\sin AMH=\frac{AH}{AM}=\frac{h}{\frac{a}{2}}=\frac{2h}{a}$. Từ đó ta suy ra:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$.

*) $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ (Xem ví dụ 5).

Trở lại bài toán:

Ta có: $S_{ABD}=\frac{1}{2}AD.AB\sin A_1=\frac{1}{2}AD.c.\sin\left(\frac{A}{2}\right)$.

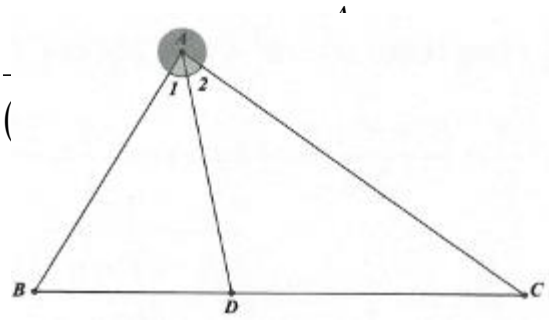


$S_{ACD}=\frac{1}{2}AD.AC\sin A_2=\frac{1}{2}AD.b.\sin\left(\frac{A}{2}\right)$. Suy ra

$S_{ABC}=S_{ACD}+S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\sin\left(\frac{A}{2}\right)\left[c+b\right]$. Mặt khác

$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\Rightarrow AD\sin\left(\frac{A}{2}\right)\left[c+b\right]=bc\sin A\Leftrightarrow AD=$ -

(



.

Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh theo cách khác:

Dựng $BH\perp AD$, BH cắt AC tại K thì tam giác ABK cân tại A nên H là trung điểm của BK.

Ta có: $\cos\frac{A}{2}=\frac{AH}{AB}\Leftrightarrow AH=c.\cos\frac{A}{2}$,

Theo tính chất phân giác ta cũng có:

$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}\Leftrightarrow\frac{AB+AC}{AC}=\frac{DB+DC}{DC}$

$\Rightarrow DC=\frac{AC.BC}{AB+AC}$ hay $DC=\frac{ab}{b+c}\Rightarrow\frac{DC}{a}=\frac{b}{b+c}$

Như vậy ta cần chứng minh: $AH.\dfrac{2DC}{a}=AD$

Dựng $BE//AD$ (E nằm trên đường thẳng AC)

Suy ra $2AH=BE$ nên ta chỉ cần chỉ ra

$BE.DC=AD.BC$, hay $\dfrac{BE}{AD}=\dfrac{BC}{DC}$ nhưng điều này luôn đúng theo định lý Thales.

Chú ý rằng: Ta chứng minh được kết quả sau: $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

Thật vậy xét tam giác vuông ABC, $A=90°$, gọi O là trung điểm của BC, dựng đường cao AH. Đặt

$ACB=\alpha\Rightarrow AOB=2\alpha$. Ta có: $\cos\alpha=\cos C=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a},\sin\alpha=\sin C=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{c}{a},$

$$\cos 2\alpha=\cos AOH=\frac{AO^2+OB^2-AB^2}{2AO.OB}=\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-c^2}{2\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}=\frac{a^2-2c^2}{a^2}=1-2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$=1-2.\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-1$. Từ đó suy ra $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

Áp dụng công thức: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}-1\right)$.

$\Rightarrow 2\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2ac}+1\Leftrightarrow\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$. Thay vào công thức đường phân giác ta có:

$$AD=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{c+b}=\frac{2bc\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}}{b+c}=\frac{\sqrt{bc}\sqrt{(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}$$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta

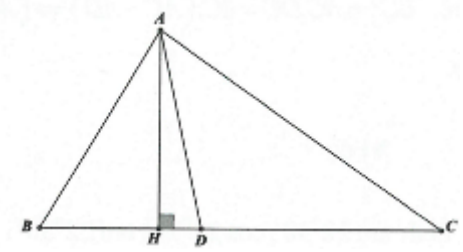
có: $\sqrt{bc}\le\dfrac{b+c}{2}\Rightarrow AD\le\dfrac{\sqrt{(b+c-a)(b+c+a)}}{2}=\sqrt{p(p-a)}$, với $2p=a+b+c$.

Áp dụng công thức: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. Ta cũng chứng minh được hệ thức rất quan trọng trong hình học phẳng (Định lí Stewart) đó là: "Cho điểm D nằm trên cạnh BC của tam giác ABC khi đó ta có: $AB^2.CD+AC^2.BD=BC\left(AB^2+BD.DC\right)$"

+ Thật vậy: Ta kẻ $AH\perp BC$ không mất tính tổng quát, ta giả sử D nằm trong đoạn HC. Khi đó ta có:

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD.BD.\cos ADB$

$=AD^2+BD^2-2DB.DH$ (1)



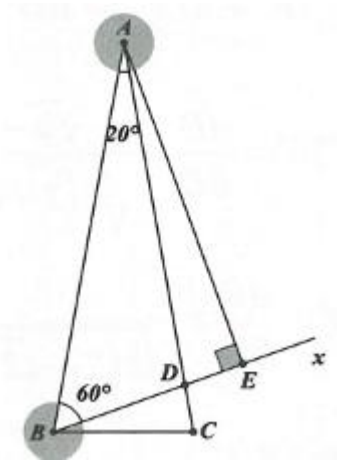
Tương tự ta có: $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2DH.DC$ (2). Nhân đẳng thức (1) với DC đẳng thức (2) với BD rồi cộng lại theo vế ta có: $AB^2.CD + AC^2.BD = BC\left(AB^2 + BD.DC\right)$.

Ví dụ 7.

Cho tam giác cân ABC, $A = 20°, AB = AC, AC = b, BC = a$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Giải:

Vẽ tia Bx sao cho $CBx = 20°$, Bx cắt cạnh AC tại D. Vẽ $AE \perp Bx, E \in Bx$. Xét ΔBDC và ΔABC có:



$CBD = BAC = 20°; BCD$ chung nên $\Delta BDC \backsim \Delta ABC$ do đó

$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$ vì $BD = BC = a$;

$DC = \frac{BD}{AB}.BC = \frac{a^2}{b}; AD = AC - DC = b - \frac{a^2}{b}$. Ta có: ΔABE vuông tại E và

$ABE = ABC - CBD = 60°$ nên ΔABE là nửa tam giác đều, suy ra

$BE = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow DE = BE - BD = \frac{b}{2} - a$. ΔABE vuông tại E, nên theo định lý Pitago ta có:

$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE^2 = AB^2 - BE^2 = \frac{3}{4}b^2$. ΔADE vuông tại E, nên theo định lý Pitago ta có:

$$AE^2 + DE^2 = AD^2 \Rightarrow \frac{3}{4}b^2 + \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab + a^2 = b^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{b^2} + ab = 3a^2 \Rightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

Chú ý: Nếu không dùng định lý Pi ta go ta cũng có thể áp dụng công thức:

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB.BD.\cos ABD = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\frac{1}{2} = c^2 + a^2 - ac$ từ đó dựa vào hệ thức: $BC^2 = AC.DC = AC.\left(AC - AD\right) \Rightarrow \left(AC.AD\right)^2 = \left(AC^2 - BC^2\right)^2$ ta cũng có được kết quả cần tìm.

Ví dụ 8.

Tính $\sin 22°30', \cos 22°30', \tan 22°30'$.

Giải:

Dựng tam giác vuông cân ABC, không mất tính tổng quát ta đặt: $AB = AC = 1, A = 90° \Rightarrow BC = \sqrt{2}$.

Gọi AD là phân giác góc B, theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{BC+AB}\Rightarrow AD=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$. Áp dụng định lý Pitago

$\Rightarrow BD^2=AB^2+AD^2\Rightarrow BD^2=1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2=4-2\sqrt{2}\Rightarrow BD=\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$

$\Rightarrow\sin 22°30'=\frac{AD}{BD}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

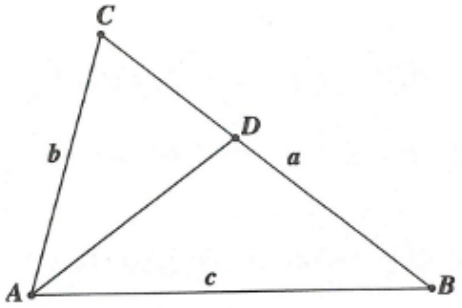
$\cos 22°30'=\frac{AB}{BD}=\frac{1}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\tan 22°30'=\frac{\sin 22°30'}{\cos 22°30'}=\sqrt{2}-1$

Ví dụ 9.

Chứng minh rằng trong tam giác ABC, $A=2B\Leftrightarrow a^2=b\left(b+c\right)$.

Giải:

Kẻ đường phân giác AD, ta có: $CAD=DAB, ADC=DAB+B=2B=A$



$\Rightarrow\Delta ABC\backsim\Delta DAC\Leftrightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{DA}{AC}\Leftrightarrow cb=aAD=aBD$.

$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}\Leftrightarrow AD=\frac{ac}{b+c}$

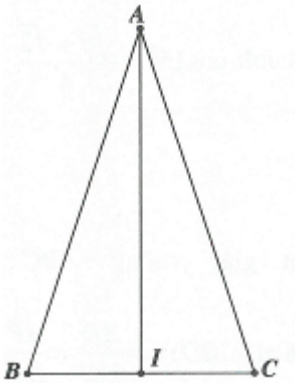
$\Leftrightarrow bc=a\frac{ac}{b+c}\Leftrightarrow a^2=b\left(b+c\right)$.

Ví dụ 10.

Chứng minh rằng $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Giải:

Dựng tam giác cân ABC $\left(AB=AC\right), A=36°\Rightarrow B=C=2A$. Áp dụng ví dụ 2 ta có:



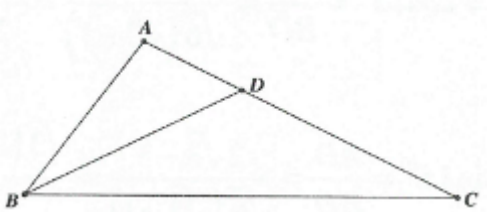
$AB^2=BC^2+AB.BC$, chia hai vế cho AB^2, ta được $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\frac{BC}{AB}-1=0$.

Gọi I là trung điểm $BC\Rightarrow AI\perp BC\Rightarrow BAI=CAI=18°$

$\Rightarrow\sin 18°=\frac{BI}{AB}=\frac{BC}{2AB}\Rightarrow 4\left(\frac{BC}{2AB}\right)^2+2.\frac{BC}{2AB}-1=0$

$\Rightarrow 4\sin^2 18°+2\sin 18°-1=0$. Giải phương trình ta tìm được $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (do $\sin 18°>0$).

Bài toán tương tự: Cho tam giác *MNP* cân tại *M* và có góc $NMP = 36°$. Tính tỷ số $\frac{NM}{NP}$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2011-2012).



Ta chứng minh bổ đề sau:

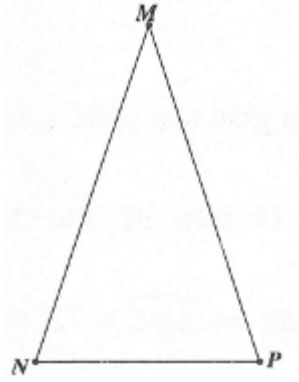
Cho tam giác *ABC* có $ABC = 2ACB$.

Chứng minh: $AC^2 = AB^2 + AB.BC$"

Thật vậy: Dựng phân giác trong *BD* của tam giác *ABC* ta có:

BDC là tam giác cân từ đó suy ra $ADB = 2DBC = ABC$ suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta ADB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AD.AC$ (1). Theo tính chất đường phân giác ta cũng có:



$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \Leftrightarrow AD = \frac{AB.AC}{AB+BC}$ thay vào (1) ta có:

$AC^2 = AB^2 + AB.BC$.

Có thể biến đổi theo cách: $\Delta ABC \backsim \Delta ADB \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{DB}$

suy ra $AB^2 = AC.AD, AB.BC = AC.DB = AC.DC$ (do $DB = DC$).

Từ đó ta có: $AB^2 + AB.BC = AC(AD + DC) = AC^2$

Trở lại bài toán: Tam giác *MNP* cân tại *M* và $NPM = 36°$ suy ra $N = P = 2M$. Áp dụng bổ đề ta có:

$AB^2 = BC^2 + AB.BC$. Chia hai vế cho AB^2 suy ra: $1 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{BC}{AB} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \frac{BC}{AB} - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

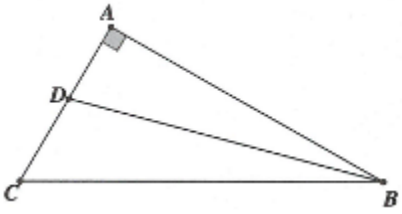
Ví dụ 11.

Chứng minh $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Giải:

Dựng tam giác vuông *ABC*: $A = 90°, B = 30°$. Giả sử $AC = 1 \Rightarrow BC = 2, AB = \sqrt{3}$

Dựng phân giác *BD*:



$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DC} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$

$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 3 + 12 + 9 - 12\sqrt{3} = 12\left(2 - \sqrt{3}\right)$

$BD = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)$

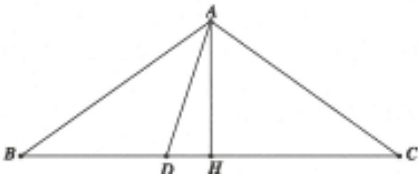
$\Rightarrow \cos 15^\circ = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin 15^\circ = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)} = \dfrac{\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{6}\left(3-1\right)} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Ví dụ 12.

Chứng minh rằng $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Giải:



Dựng tam giác cân ABC $(AB = AC)$ có $A = 108^\circ$, lấy điểm D trên BC sao cho $CD = CA$. Ta có: ΔCAD cân

$\Rightarrow ADC = 72^\circ \Rightarrow ADB = 108^\circ \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DAB$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DA}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC.DA = BC\left(BC - AB\right) \Rightarrow AB^2 = BC^2 - BC.AB$. Chia hai vế cho AB^2 được:

$\left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 - \dfrac{BC}{AB} - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos 36^\circ = \dfrac{BC}{2AB} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Ví dụ 13.

Chứng minh các hệ thức:

1. $\tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ = 10$
2. $\tan^4 36^\circ + \tan^4 72^\circ = 90$.

Giải:

$\tan^2 36^\circ = \dfrac{\sin^2 36^\circ}{\cos^2 36^\circ} = \dfrac{1-\cos^2 36^\circ}{\cos^2 36^\circ} = \dfrac{1}{\cos^2 36^\circ} - 1$. Sử dụng

$\cos^2 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 36^\circ} = \dfrac{8}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{8\left(3-\sqrt{5}\right)}{4} = 2\left(3-\sqrt{5}\right) \Rightarrow \tan^2 36^\circ = 5 - 2\sqrt{5}$.

Tương tự, $\cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$, thay $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ tính được

$\cot^2 18^\circ = 5 + 2\sqrt{5} = \tan^2 72^\circ \Rightarrow \tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ = 5 - 2\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{5} = 10$.

$\tan^4 36^\circ + \tan^4 72^\circ = \left(\tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ\right)^2 - 2\tan^2 36^\circ \tan^2 72^\circ = 90$.

Ví dụ 14.

Cho tam giác ABC, có $A = 60^\circ$ và đường phân giác AD. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{AD}$.

Giải:

Dựng tam giác *ABC*, $A=60°$, *AD* là phân giác trong $A \Rightarrow BAD=CAD=30°$.

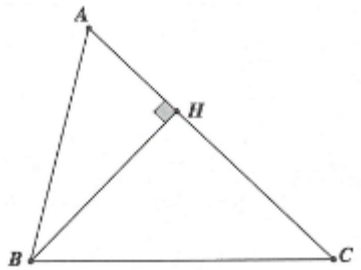
Kẻ $DH \perp AC, DK \perp AB \Rightarrow \Delta AKD=\Delta AHD \Rightarrow DH=DK=\frac{1}{2}AD$

$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC} \Rightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60°=\frac{1}{2}AB.AD\sin 30°+\frac{1}{2}AC.AD.\sin 30°$ hay

$\frac{\sqrt{3}}{2}AB.AC=\frac{1}{2}AB.AD+\frac{1}{2}AC.AD \Leftrightarrow \frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$. Cũng có thể giải nhanh bằng cách áp dụng công thức tính đường phân giác trong *AD*.

Ví dụ 15.

Chứng minh rằng trong tam giác *ABC*, $A=60°$ khi và chỉ khi $a^2=b^2+c^2-bc$; $A=120°$ khi và chỉ khi $a^2=b^2+c^2+bc$.



Giải:

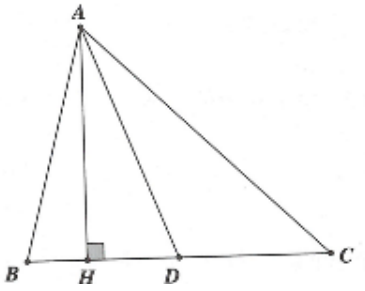
Hạ *BH* vuông góc với *AC*.

$A=60° \Leftrightarrow ABH=30° \Leftrightarrow AH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c, BH=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Trong ΔBHC ta có:

$a^2=BC^2=BH^2+HC^2 \Rightarrow \frac{3c^2}{4}+\left(b^2-\frac{c}{2}\right)^2=b^2+c^2-bc$. Trường hợp $A=120°$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 16.

Tính độ dài các đường trung tuyến của tam giác, biểu thị qua ba cạnh của tam giác ấy.



Giải:

Gọi *AD* là trung tuyến thuộc cạnh $BC \Rightarrow DB=DC$

Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AD^2=AH^2+HD^2$

$\Rightarrow AD^2=AB^2-BH^2+HD^2$ (1)

Tương tự, $AD^2=AC^2-CH^2+HD^2$ (2)

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được $2AD^2=AB^2+AC^2-BH^2-CH^2+2HD^2$

$2AD^2=AB^2+AC^2-\left(BH^2+CH^2\right)+2BH.HC+2HD^2$

$2AD^2=AB^2+AC^2-BC^2+2\left(BD-HD\right)\left(DC+HD\right)+2HD^2$

$2AD^2=AB^2+AC^2-BC^2+2\left(BD^2-HD^2\right)+2HD^2$

$2AD^2 = AB^2 + AC^2 - BC^2 + \frac{1}{2}BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 \Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right) - \frac{1}{4}a^2$.

Hoàn toàn tương tự ta tính được độ dài các đường trung tuyến còn lại (dành cho bạn đọc).

Từ các hệ thức này, ta suy ra: trong hình bình hành, độ dài các cạnh *a, b* và hai đường chéo *m, n*. Ta có:

$m^2 + n^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) - \frac{1}{4}b^2; m_c^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

Ví dụ 17.

Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng các đường trung tuyến kẻ từ *B* và *C* vuông góc với nhau khi và chỉ khi $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Giải:

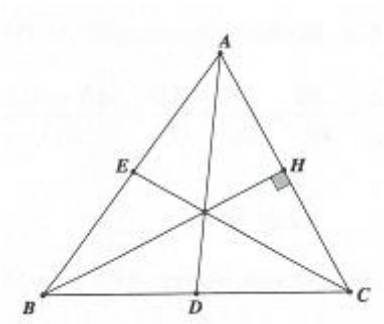
Gọi *BM, CN* là hai đường trung tuyến $\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM \Rightarrow BG^2 = \frac{4}{9}BM^2$

$\Rightarrow BG^2 = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{1}{2}a^2 + c^2\right) - \frac{1}{4}b^2\right) = \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2\right) - \frac{1}{9}b^2$. Tương tự, $CG^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2\right) - \frac{1}{9}c^2$. Khi đó.

$BM \perp CN \Leftrightarrow BG^2 + CG^2 = BC^2 \Leftrightarrow \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2\right) - \frac{1}{9}b^2 + \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2\right) - \frac{1}{9}c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$.

Ví dụ 18.

Cho tam giác *ABC* $\left(BC = a, CA = b, AB = c\right)$. Trung tuyến *AD*, đường cao *BH* và phân giác *CE* đồng quy. Chứng minh đẳng thức: $\left(a + b\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = 2ab^2$.



Giải:

Xét tam giác vuông *BHC*:

$CH^2 = BC^2 - BH^2 = BC^2 - \left(AB^2 - AH^2\right)$

$= BC^2 - AB^2 + AH^2 = BC^2 - AB^2 + \left(CA - CH\right)^2$

$\Rightarrow BC^2 + CA^2 - AB^2 = 2CA.CH$

Tương tự, $AH = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA} \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2}$ (1)

CE là phân giác của tam giác *ABC*, *AD, BH, CE* đồng quy $\Rightarrow CO$ là đường phân giác của

$\Delta ADC \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{2CA}$ (2). Từ *D* kẻ đường thẳng $DK \perp AC \Rightarrow BH // DK \Rightarrow HK = \frac{HC}{2}$

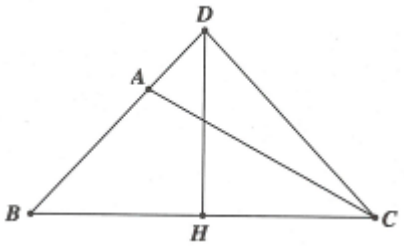
$\Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{HK}{HA} = \frac{CH}{2HA}$ (3). Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2} = \frac{BC}{CA}$

$\Rightarrow BC^2CA + CA^3 - AB^2CA = CA^2BC + AB^2BC - BC^3$

$\Rightarrow \left(BC^3+CA^3\right)+BC^2CA+CA^2BC-AB^2CA-AB^2BC=2BC.CA^2$

$\Rightarrow (BC+CA)\left(BC^2+CA^2-AB^2\right)=2BC.CA^2 \Rightarrow (a+b)\left(a^2+b^2-c^2\right)=2al$

.



Ví dụ 19.

Cho tam giác ABC thoả mãn $A=2B=4C$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

Giải:

Gọi H là trung điểm của BC, qua H dựng đường thẳng vuông góc với BC cắt AB kéo dài tại D

$\Rightarrow \Delta DBC$ là tam giác cân $\Rightarrow B=BCD$.

Theo giả thiết, $A=2B=4C \Rightarrow 7C=180°$

Đặt $\alpha=\frac{180°}{7} \Rightarrow C=\alpha, B=2\alpha, A=4\alpha$,

$DAC=B+C=3\alpha \Rightarrow ACD=\alpha \Rightarrow BDC=3\alpha$.

Do đó ΔCAD cân $\Rightarrow CA=CD=BD \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AB}{BD}$ (1).

Vì CA là phân giác của góc $BCD \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AD}{CD}$ (2). Cộng (1) với (2) từng vế được:

$\frac{AB}{AC}+\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BD}+\frac{AD}{CD}=\frac{AB+AD}{BD}=1 \Rightarrow \frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{AB} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

Ví dụ 20.

Cho tam giác vuông ABC $\left(A=90°\right)$, đường cao AH. Độ dài các cạnh của tam giác là các số nguyên thoả mãn $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AH}=1$. Xác định các cạnh của tam giác.

Giải:

Đặt $AB=a, AC=b, AH=h$, ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{h}=1$

$\Rightarrow bh+ah+ab=abh$. Tam giác ABC vuông $\Rightarrow ab=ch$ và $c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow bh+ah+ch=abh \Rightarrow a+b+c=ab \Rightarrow a+b+\sqrt{a^2+b^2}=ab$

$\Rightarrow ab-a-b=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a^2b^2-2ab(a+b)+2ab=0$

$\Rightarrow ab(ab-2a-2b+2)=0 \Rightarrow ab-2a-2b+2=0 \Rightarrow b=\frac{2a-b}{a-2}=2+\frac{2}{a-2}$.

Vì a và b là các số nguyên nên 2 chia hết cho $a-2 \Rightarrow a-2=2$ hoặc $a-2=1$.

Trường hợp: $a-2=2\Rightarrow a=4\Rightarrow b=3\Rightarrow c=5\Rightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{25}{144}\Rightarrow h=\frac{12}{5}$. Thay vào thỏa mãn $\Rightarrow AB=4, AC=3, BC=5$.

Trường hợp: $a-2=1\Rightarrow a=3\Rightarrow b=4\Rightarrow c=5$. Vậy cả hai trường hợp tam giác có các cạnh 3,4,5.

Ví dụ 21.

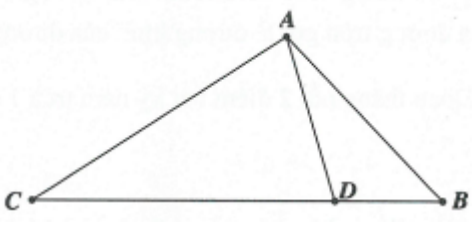
Cho tam giác, thỏa mãn $2B+3C=180°$. Chứng minh rằng $BC^2=BC.AC+AB^2$.

Giải:

Ta viết lại biểu thức cần chứng minh thành: $BC^2-BC.AC=AB^2\Leftrightarrow BC\left(BC-AC\right)=AB^2$. Trên BC lấy điểm D sao cho $CD=AC$. Khi đó biểu thức cần chứng minh trở thành: $BC.DB=AB^2$ ta nghĩ đến việc chứng minh: $\Delta CBA\backsim\Delta ABD$, thật vậy, ta có:

$$ADB=180°-ADC=180°-\frac{180°-C}{2}=180°-\frac{2B+3C-C}{2}=180°-\left(B+C\right)=A$$ đpcm.

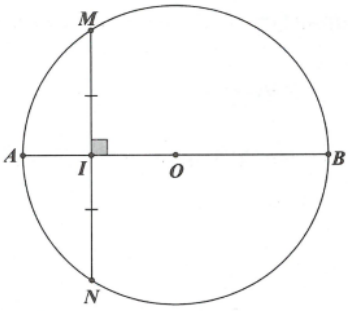
TI



CHUYÊN ĐỀ 2.ĐƯỜNG TRÒN – DÂY CUNG – TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tập hợp các điểm M cách điểm O cho trước một khoảng không đổi R là đường tròn tâm O bán kính R. Kí hiệu $(O;R)$.



2. Đường kính và dây cung

+ Đoạn thẳng nối 2 điểm nằm trên đường tròn và đi qua tâm của đường tròn gọi là đường kính của đường tròn đó.

+ Đoạn thẳng nối 2 điểm bất kỳ nằm trên 1 đường tròn gọi là 1 dây của đường tròn đó.

Các tính chất cần nhớ:

a. Nếu điểm M nằm trên (O) đường kính AB thì $AMB = 90°$, đảo lại: Nếu $AMB = 90°$ (với A, B cố định) thì điểm M nằm trên đường tròn đường kính AB.

b. Trong các dây cung của một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

c. Trong một đường tròn, đường vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

d. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

e. Trong một đường tròn: Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm; hai dây cách đều tâm thi bằng nhau.

f. Trong 2 dây của một đường tròn: Dây nào lớn hơn thì gần tâm hơn; dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

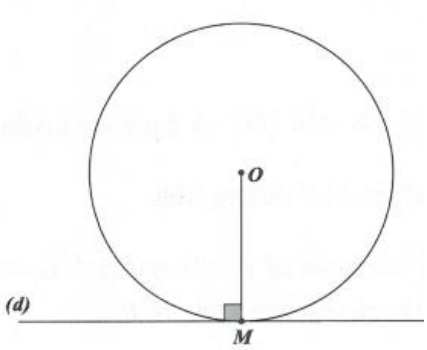
3. Tiếp tuyến của đường tròn. Đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.

Như vậy:

+ Nếu một đường thẳng và một đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.

+ Nếu khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

+ Qua một điểm ở ngoài đường tròn ta luôn kẻ được 2 tiếp tuyến đến đường tròn đó.

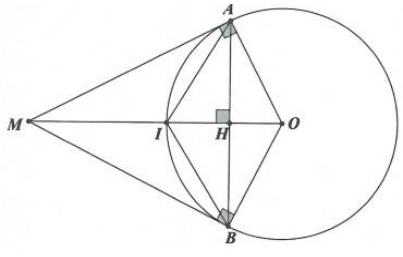


Một số tính chất cần nhờ đối với 2 tiếp tuyến cắt nhau:

Từ M nằm ngoài (O) dựng các tiếp tuyến MA , MB đến (O) (A , B là các tiếp điểm).

AB cắt MO tại H , đoạn thẳng MO cắt (O) tại điểm I. Khi đó ta có:

+ Tam giác MAB cân tại M .



+ MO là phân giác của AMB.

+ MO vuông góc với AB tại trung điểm H của AB .

+ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB .

4. Quan hệ đường thẳng và đường tròn.

Để xét qua hệ một đường thẳng (d) với đường tròn $(O;R)$ ta phải dựa vào khoảng cách từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng.

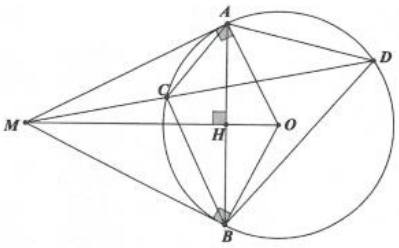
+ Nếu khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng (d) lớn hơn bán kính thì đường thẳng không cắt đường tròn.

+ Nếu khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng (d) bằng bán kính thì đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (lúc này đường thẳng (d) gọi là tiếp tuyến của đường tròn).

+ Nếu khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng (d) nhỏ hơn bán kính thì đường thẳng cắt đường tròn tại 2 điểm phân biệt .

+ Từ điểm M nằm ngoài (O) ta dựng tiếp tuyến MA, MB đến (O) và dựng cát tuyến MCD. Khi đó ta có:

$MA^2 = MB^2 = MO^2 - R^2$.



5. Quan hệ 2 đường tròn.

Để xét quan hệ (vị trí tương đối) của 2 đường tròn $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ ta dựa vào khoảng cách O_1O_2, và các bán kính R_1R_2.

+ Hai đường tròn cắt nhau khi và chỉ khi : $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$.

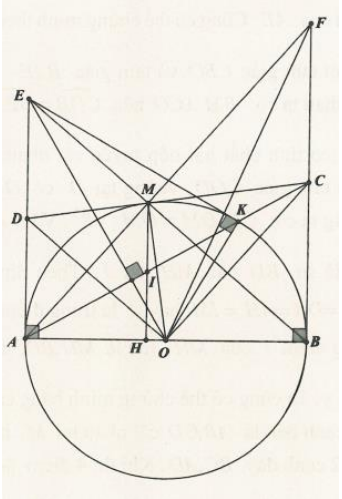
+ Hai đường tròn tiếp xúc nhau : $|R_1 - R_2| = O_1O_2$ hoặc $O_1O_2 = R_1 + R_2$.

+ Hai đường tròn không giao nhau : $O_1O_2 > R_1 + R_2$ hoặc $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$.

II. MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ TIẾP TUYẾN, CÁT TUYẾN, DÂY CUNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN.

Ví dụ 1.

Cho nửa đường tròn $(O;R)$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là AB, dựng các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Lấy một điểm M trên nửa đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại D, C tia AM, BM kéo dài cắt By, Ax lần lượt tại F, E.



a, Chứng minh: Các điểm D, M, O, A cùng nằm trên một đường tròn, các điểm C, M, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: $\triangle COD$ vuông.

c. D là trung điểm AE.

d. $\triangle CBO \backsim \triangle BAE$.

e. Chứng minh: $AD . BC = R^2$, $AD + BC = CD$.

f. Dựng MH vuông góc với AB. Chứng minh: AC, BD đi qua trung điểm I của MH.

g. Chứng minh: $EO \perp AC$.

h. Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MHO lớn nhất.

i, Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MAB lớn nhất,

j. Tìm vị trí điểm M để chu vi tam giác MAB lớn nhất.

k. Tìm vị trí điểm M để diện tích tứ giác ABCD nhỏ nhất.

l. Tìm vị trí điểm M để chu vi tứ giác ABCD nhỏ nhất.

Lời giải:

a. Vì DA, DM là các tiếp tuyến của (O) nên $DMO = DAO = 90°$, suy ra 4 điểm D, M, O, A nằm trên đường tròn đường kính DO. Hoàn toàn tương tự ta có các điểm C, M, O, B nằm trên đường tròn đường kính CO.

b. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC, OD lần lượt là phân giác của các góc MOA, MOB nên $COD = MOC + MOD = \frac{1}{2}(BOM + COM) = 90°$ hay tam giác COD vuông tại O.

c. Do điểm M nằm trên đường tròn đường kính AB nên $AMB = 90° \Rightarrow EMA = 90°$. Cũng theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DA = DM$ nên $DAM = DMA$

$\Leftrightarrow 90° - DAM = 90° - DMA \Leftrightarrow DEM = DME \Rightarrow DM = DE$. Vậy $DE = DA = DM$ hay D là trung điểm của AE. Cũng có thể chứng minh theo cách chỉ ra OD là đường trung bình của tam giác EAB.

d. Xét tam giác CBO và tam giác BAE ta có: $CBO = BAE = 90°$. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $BM \perp CO$ nên $COB = BEA$ cùng phụ với $EBA \Rightarrow \triangle CBO \backsim \triangle BAE$ $(g.g)$.

e. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $AD = DM$, $BC = CM \Rightarrow AD.BC = DM.CM$. Mặt khác tam giác COD vuông tại O có OM là đường cao nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $CM.DM = OM^2 = R^2$. Vậy $AD . BC = R^2$ và $AD + BC = CM + DM = CD$.

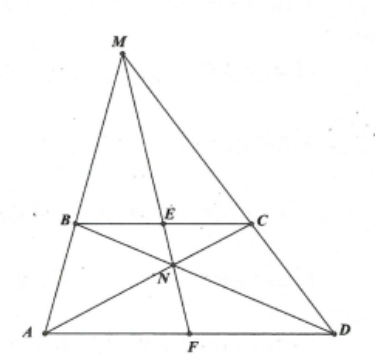
f. Giả sử BD cắt MH tại I. Theo định lý Thales ta có: $\frac{IM}{DE} = \frac{IB}{DB} = \frac{IH}{AD} \Rightarrow \frac{IM}{DE} = \frac{IH}{AD}$ mà $DE = DA \Rightarrow IH = IM$ hay I là trung điểm của HM. Chứng minh tương tự ta cũng có AC đi qua trung điểm I của MH tức là MH, BD, AC đồng quy tại I.

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh bằng cách dùng Bổ đề hình thang: "Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên là AB, CD cắt nhau tại M, hai đường chéo cắt nhau tại N. Gọi E, F là trung điểm của 2 cạnh đáy BC, AD. Khi đó 4 điểm M, E, N, F cùng nằm trên một đường thẳng"

Thật vậy: Giả sử MN cắt BC, AD tại E, F theo định lý Thales ta có:

$\frac{BE}{AF}=\frac{CE}{DF}$ (1) (cùng bằng $\frac{ME}{MF}$).

$\frac{BE}{DF}=\frac{CE}{AF}$ (2) (cùng bằng $\frac{NE}{NF}$). Nhân hai đẳng thức (1), (2)



Ta có: $\frac{BE^2}{DF.\mathrm{AF}}=\frac{CE^2}{AF.DF}$ suy ra $BE=CE$ thay (1) vào ta có:

$AF = DF$ (đpcm).

g. Theo chứng minh ở câu d) ta có:

$\triangle BAE \backsim \triangle CBO \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{BO}{BC}\Leftrightarrow \frac{AE}{2AO}=\frac{\frac{1}{2}AB}{BC}$ hay $\frac{AE}{AO}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow \triangle OAE \backsim \triangle CBA \Rightarrow OE \perp AC$.

Chú ý: Nếu AC cắt (O) tại K từ việc chứng minh: $OE \perp AC$ ta suy ra

$\triangle EAO = \triangle EKO \Rightarrow EAO = EKO = 90°$ ta cũng suy ra EK là tiếp tuyến của (O).

h. Tam giác MOH vuông tại H nên ta có: $S_{MHO}=\frac{1}{2}MH.HO\le\frac{1}{2}\frac{\left(MH^2+HO^2\right)}{2}=\frac{OM^2}{4}=\frac{R^2}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MH = HO$ nên tam giác MHO vuông cân tại H. Tức là M nằm trên nửa đường tròn sao cho OM tạo với AB một góc $45°$.

i. Ta có $S_{MAB} = \frac{1}{2}MH.AB = \frac{1}{2}MH.2R = R.MH$. Trong tam giác vuông MHO ta có:

$MH \le MO = R$ nên $S_{MAB} \le R^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv O$, $MH \perp AB$. Hay M là điểm chính giữa của cung AB.

j. Chu vi tam giác MAB kí hiệu là $2p$ thì $2p = MA + MB + AB = MA + MB + 2R$.

Để ý rằng $(MA + MB)^2 \le 2.(MA^2 + MB^2) = 2AB^2 = 8R^2$ suy ra $MA + MB \le 2\sqrt{2}R$. Suy ra $2p \le 2R + 2\sqrt{2}R = 2R(\sqrt{2} + 1)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MA = MB$, hay M là điểm chính giữa của cung AB.

k. Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC).AB = \frac{1}{2}.2R.CD = R.CD$. Do $CD \ge AB = 2R$ nên $S_{ABCD} \ge 2R^2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $CD = AB$ hay $CD // AB$ khi đó M là điểm chính giữa của cung AB.

l. Chu vi tứ giác ABCD bằng q: $q = AD + CD + BC + AB = 2CD + AB = 2CD + 2R$ mà $CD \ge 2AB = 2R$ nên chu vi tứ giác ABCD: $q = 2CD + 2R \ge 6R$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $CD = AB$ hay $CD // AB$ khi đó M là điểm chính giữa của cung AB.

Ví dụ 2.

Xét đường thẳng (d) cố định ở ngoài $(O;R)$ (khoảng cách từ O đến (d) không nhỏ hơn $R\sqrt{2}$). Từ một điểm M nằm trên đường thẳng (d) ta dựng các tiếp tuyến MA, MB đến $(O;R)$ (A, B là các tiếp điểm) và dựng các tuyến MCD (tia MC nằm giữa hai tia MO, MA và $MC < MD$). Gọi E là trung điểm của CD, H là giao điểm của AB và MO.

a. Chứng minh: 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: $MC.MD = MA^2 = MO^2 - R^2$.

c. Chứng minh: Các tiếp tuyến tại C, D của đường tròn $(O;R)$ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AB.

d. Chứng minh: Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

e. Chứng minh: Một đường thẳng đi qua O vuông góc với MO cắt các tia MA, MB lần lượt tại P, Q. Tìm GTNN của S_{MPQ}.

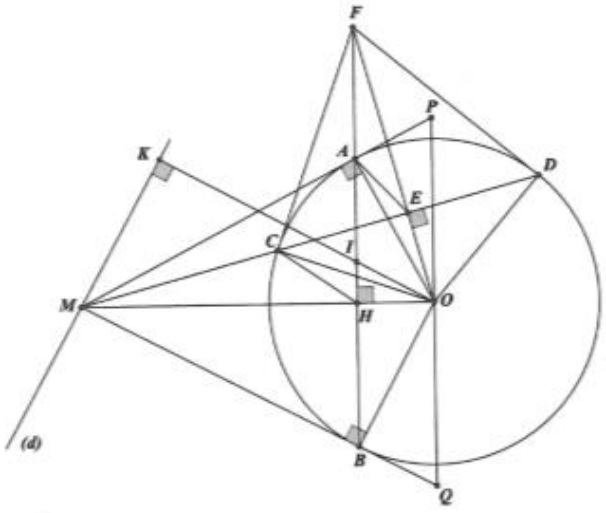
f. Tìm vị trí điểm M để AB nhỏ nhất.

Lời giải:

a. Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên

$MAO = MBO = 90°$.

E là trung điểm của CD nên $MEO = 90°$. Từ đó suy ra 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO.



b. Ta có:

$MC.MD = (ME - EC)(ME + ED)$.

Mà $ED = EC$ nên ta suy ra

$MC.MD = (ME - EC)(ME + EC)$

$= ME^2 - EC^2 = MO^2 - EO^2 - EC^2$

$= MO^2 - (EC^2 + EO^2) = MO^2 - OC^2 = MO^2 - R^2 = MO^2 - OA^2 = MA^2$ đpcm.

c. Giả sử các tiếp tuyến tại C, D của (O) cắt nhau ở F. Theo a) ta đã chứng minh 5 điểm M, A, E, O, B nằm trên đường tròn đường kính MO, suy ra 4 điểm A, E, O, B cũng nằm trên đường tròn đường kính MO. Hoàn toàn tương tự ta có: C, H, O, D cùng nằm trên đường tròn đường kính OF suy ra

$FHO = 90°$ hay $FH \perp HO$, mặt khác ta cũng có $AH \perp HO \Rightarrow$ F, A, H thẳng hàng. Nói cách khác: Các tiếp tuyến tại CD cắt nhau tại điểm F nằm trên đường thẳng AB.

d. Dựng $OK \perp (d)$ thì K là điểm cố định và OK có độ dài không đổi. Giả sử AB cắt OK tại điểm I thì $\triangle OHI \backsim \triangle OKM$ $(g-g)$ suy ra $\frac{OI}{OH} = \frac{OM}{OK} \Rightarrow OH.OM = OI.OK$. Mặt khác theo hệ thức lượng

trong tam giác vuông MAO ta có $OH.OM = OA^2 = R^2$ suy ra $OI.OK = R^2$ hay $OI = \dfrac{R^2}{OK}$ suy ra OI không đổi, I nằm trên đường thẳng OK cố định, suy ra điểm I cố định. Vậy đường thẳng AB luôn đi qua điểm I.

e. Ta có: $S_{MPQ} = 2S_{MOP} = OA \,.\, MP = R\left(MA + AP\right)$. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có: $MA + AP \geq 2\sqrt{MA \,.\, AP}$. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MOP thì $MA.AP = OA^2 = R^2$ Từ đó suy ra $S_{MPQ} \geq 2R^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MA = AP$ hay tam giác MOP vuông cân. Suy ra MAOB là hình vuông, tức là $MO = R\sqrt{2}$.

f. Ta có $AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - OH^2}$ nên AB nhỏ nhất khi và chỉ khi OH lớn nhất.

Để ý rằng: $OI = \dfrac{R^2}{OK}$ mà $OK \geq R\sqrt{2}$ và nên $OI \leq \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ nên điểm I luôn nằm trong đường tròn $(O;\, R)$.

Trong tam giác vuông OHI ta có: $OH \leq OI$ nên OH lớn nhất bằng OI khi và chỉ khi $H \equiv I$ hay $M \equiv K$.

Cũng có thể lập luận theo cách khác: $AB = 2AH = 2\dfrac{MA.OA}{MO} = 2R\dfrac{\sqrt{MO^2 - R^2}}{MO} = 2R\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{MO^2}}$ nên AB nhỏ nhất khi và chỉ khi MO nhỏ nhất. Hay M là hình chiếu vuông góc của O lên (d).

Ví dụ 3.

Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính B và điểm A trên nửa đường tròn (O) (A khác B, C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). I, K lần lượt đối xứng với H qua AB, AC. Đường thẳng IK và tia CA cắt tiếp tuyến kẻ từ B của (O) lần lượt tại M, N. Gọi E là giao điểm của IH và AB, F là giao điểm KH với AC.

a. Chứng minh: I, A, K thẳng hàng. IK là tiếp tuyến của (O).

b. Chứng minh: $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AN^2}$.

c. Chứng minh: M là trung điểm của BN và MC, AH, EF đồng quy.

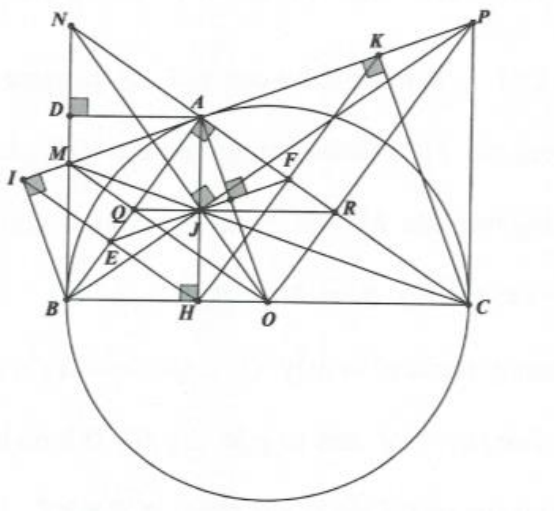
d. Xác định vị trí điểm A trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác BIKC lớn nhất.

c. Chứng minh: $BE.CF.BC = AH^2$.

f. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt IK tại P. Chứng minh: $NO \perp PB$.

g. Chứng minh: $AO \perp EF$.

h. Gọi Q, R lần lượt là giao điểm của OM, OP với AB, AC. Xác định tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác MPRO biết $ACB = 30°$.



Lời giải:

a. Vì I, K là các điểm đối xứng với H qua AB, AC nên $IAH = 2HAB$, $PAH = 2HAC$. Suy ra $IAH + PAH = 2HAB + 2HAC = 180°$ nên I, A, K thẳng hàng . Ngoài ra ta cũng có: $AH = AI = AK$ nên tam giác IHK vuông tại H. Từ tính chất đối xứng ta có: $AIB = AHB = 90°$ $AKC = AHC = 90°$ nên $BI//KC$ suy ra tứ giác BCKI là hình thang. Nên OA là đường trung bình của hình thang BCKI suy ra $OA \perp KI$, nói cách khác KI là tiếp tuyến của (O) tại A .

b. Dựng $AD \perp BN$ thì $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AB^2}$. Chú ý rằng ADBH là hình chữ nhật nên $AD = BH$. Từ đó suy ra $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AB^2}$ (Đpcm).

c. Do MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $MA = MB$ nên $MAB = MBA$, mặt khác ta có: $MNA = 90° - ABN$, $MAN = 90° - MAB$ suy ra $MNA = MAN$ hay tam giác MAN cân tại M. Suy ra $MN = MA = MB$ hay M là trung điểm của NB.

d. Ta chứng minh: MC đi qua trung điểm của AH . Thật vậy giả sử MC cắt AH tại J, theo định lý Thales ta có: $\frac{JA}{MN} = \frac{JC}{CM} = \frac{JH}{MB}$ mà M là trung điểm của NB nên $MN = MB$ suy ra $JA = JH$ hay J là trung điểm của AH. Chú ý rằng: Tứ giác AEHF là hình chữ nhật nên AH, EF cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường, nói cách khác AH, EF, MC đồng quy tại J.

c. Theo tính chất đối xứng ta có: $IH \perp AB$ tại E, $IK \perp AC$ tại F. Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AHB, AHC ta có: $BE.BA = BH^2$, $CF.CA = CH^2$ suy ra $BE.CF.AB.AC = BH^2.CH^2$. Trong tam giác vuông ABC ta cũng có: $BH.CH = AH^2$, $AB.AC = AH.BC = (2S_{ABC})$ nên suy ra $BE.CF.AH.BC = AH^4 \Leftrightarrow BE.CF.BC = AH^3$

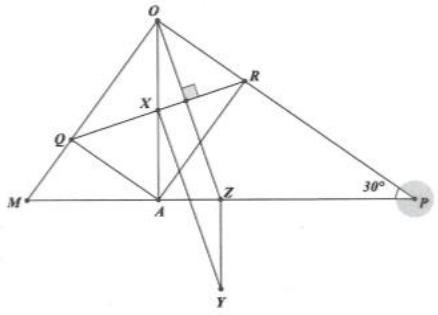
f. Ta dễ chứng minh được: $\triangle NBC \backsim \triangle OCP$ $(g.g)$ suy ra $\frac{NB}{BC} = \frac{OC}{CP} \Leftrightarrow \frac{NB}{2BO} = \frac{\frac{1}{2}CB}{CP}$ hay $\frac{NB}{BO} = \frac{CB}{CP} \Rightarrow \triangle NBO \backsim \triangle BCP$ suy ra $NO \perp BP$.

g. Do AEHF là hình chữ nhật nên $AFE = FEH = AHE = ABC$ từ đó suy ra $AFE + OAC = ABC + OCA = 90°$ hay $OA \perp EF$.

h. Gọi X là trung điểm của QR, Z là trung điểm của MP. Đường trung trực của QR cắt đường trung trực của MP tại Y thì Y chính là tâm đường tròn đi qua các điểm M, P, R, Q.

Tương tự câu g) ta thấy $OZ \perp QR$ nên $XY // OZ$

Lại có $OX // YZ$ nên tứ giác XYZO là hình bình hành suy ra $OZ = XY$, giả thiết $ACB = 30°$



$\Rightarrow MPO = CPO = ACB = 30°$, $OA = R \Rightarrow AP = R\sqrt{3}$.

$OA^2 = MA.AP$ nên $R^2 = MA.R\sqrt{3} \Rightarrow MA = \frac{R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MP = \frac{4}{3}R\sqrt{3} \Rightarrow OZ = XY = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$,

$QX = \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$. Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông QXY ta có:

$QY^2 = QX^2 + XY^2 = \frac{R^2}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right)^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{4R^2}{3} = \frac{19R^2}{12}$ suy ra $QY = \frac{\sqrt{57}R}{6}$. Vậy đường tròn đi qua các điểm M, P, R, Q có bán kính là $QY = \frac{\sqrt{57}R}{6}$.

Ví dụ 4.

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC, I là trung điểm AH. Dựng đường kính AK của (O). Gọi P là giao điểm thứ 2 của AH với (O) (P khác A).

a. Chứng minh: 4 điểm A, E, H, F nằm trên một đường tròn,

b. Chứng minh: IM là đường trung trực của EF.

c. Chứng minh: H, K, M thẳng hàng từ đó suy ra $OA \perp EF$.

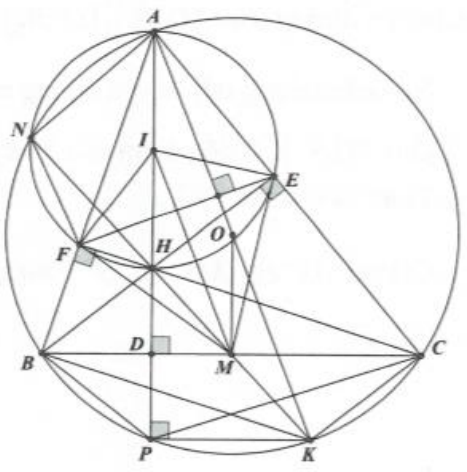
d. Chứng minh: ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF,

e. Chứng minh: P đối xứng với H qua BC. Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có cùng bán kính.

f. Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF (N khác A). Chứng minh: $MH.MN = \frac{BC^2}{4}$.

Lời giải:

a. Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $AEH = AFH = 90°$ suy ra 4 điểm A, E, H, F nằm trên đường tròn tâm I đường kính AH ta gọi là (I).



b. Do $BEC = BFC = 90°$ suy ra 4 điểm B, F, E, C cùng nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC ta gọi là (M). Vì (I), (M) cắt nhau theo dây cung EF nên theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có: IM là đường trung trực của EF.

c. Do AK là đường kính của (O) nên

$ACK = 90° \Rightarrow AC \perp KC$ mặt khác $BH \perp AC \Rightarrow BH // KC$. Tương tự $CH // BK$ nên tứ giác BHCK là hình bình hành suy ra hai đường chéo BC, HK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Nói cách khác ta có H, M, K thẳng hàng. Từ đó suy ra OM là đường trung bình của tam giác AHK nên

$OM // = \frac{1}{2}AH \Leftrightarrow BOM // = AI$ nên tứ giác AOMI là hình bình hành. Suy ra $AO // MI$, mà $MI \perp EF \Rightarrow OA \perp EF$.

d. Ta thấy rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cũng chính là đường tròn (I) ngoại tiếp tử giác AEHF. Tam giác AIE cân tại I nên $IEA = IAE\ (1)$, tam giác MEC cân tại M nên $MEC = MCE\ (2)$. Lấy $(1) + (2)$ theo vế ta có: $IEA + MEC = IAE + MCE = 90°$ hay $MEI = 90°$. Nói cách khác ME là tiếp tuyến của (I), hoàn toàn tương tự ta cũng có MF là tiếp tuyến của (I).

e. Do AK là đường kính của (O) nên $APK = 90° \Rightarrow PK // DM$ mà M là trung điểm HK nên MD là đường trung bình của tam giác HPK suy ra D là trung điểm của HP. Hay P, H đối xứng nhau qua BC. Ba điểm B, P, C nằm trên đường tròn (O) nên theo tính chất đối xứng ta có 3 điểm B, H, C cũng nằm trên đường tròn (O') đối xứng với (O) qua BC. Nên hai đường tròn này có cùng bán kính.

f. Vì N nằm trên đường tròn (I) đường kính AH nên $ANH = 90°$, N cũng nằm trên (O) đường kính AK nên $ANK = 90°$ suy ra K, H, N thẳng hàng. Mà K, M, H cũng thẳng hàng nên suy ra M, H, N thẳng hàng. Hay M, H, N là một cát tuyến của (I). Theo tính chất quen thuộc cát tuyến và tiếp tuyến ta có: $MH.MH = ME^2$ (xem câu b) Ví dụ 2). Mặt khác ta cũng có

$$ME = MF = \frac{BC}{2} \Rightarrow MH.MN = \frac{BC^2}{4}$$

Ví dụ 5.

Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$ $(R_1 \neq R_2)$ cắt nhau tại A, B.

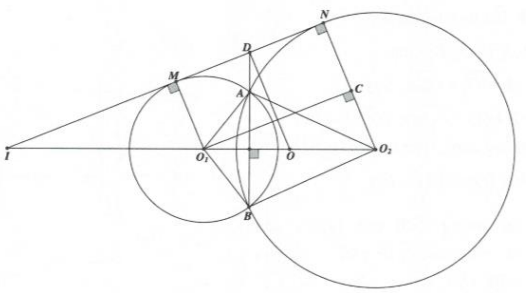
a. Nêu cách dựng tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn khi biết O_1O_2.

b. Gọi M, N là 2 tiếp điểm của 1 tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$. Tính MN theo O_1O_2, R_1R_2.

c. Giả sử AB cắt MN tại D. Chứng minh: $DM = DN$.

Lời giải:

a. Dựng $(O_1; R_1)$ và bán kính O_1M. Dựng tiếp tuyến (d) qua M của (O). Lấy điểm I trên (d) nối IO_1, trên



tia đối của O_1I lấy điểm O_2, sao cho O_1O_2 bằng độ dài đã cho. Dựng $O_2N \perp (d)$ tại N. Vẽ đường tròn $(O_2 ; O_2N)$ ta được (d) là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn và (d) tiếp xúc với $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$ lần lượt tại M, N.

b. Giả sử $R_1 < R_2$ kẻ $O_1C \perp O_2N$ tại C ta có $MNCO_1$ là hình chữ nhật nên

$MN = O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} = \sqrt{O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2}$.

c. Theo tính chất cát tuyến, tiếp tuyến ta có: $DM^2 = DA.DB = DN^2$ suy ra D là trung điểm của MN.

Ví dụ 6.

Cho 2 đường tròn $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. Dựng tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$ tại A là (d). Đường tròn tâm O đường kính O_1O_2, cắt (d) tại I. Đường tròn $(I ; IA)$ cắt $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$ lần lượt tại M, N khác A.

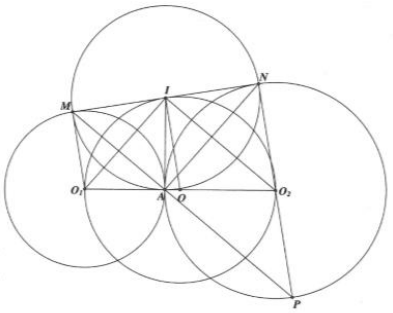
a. Chứng minh : MN là một tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$.

b. Kẻ đường kính NP của (O_2). Chứng minh: M, A, P thẳng hàng.

Lời giải:

a. Từ giả thiết ta có: $IA = IM = IN$ dẫn tới

$IMO_1 = IAO_1 = INO_2 = 90°$ (hs tự cm)



Suy ra IM, IN lần lượt là các tiếp tuyến của $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$ nên

$MIO_1 = O_1IA$ và $NIO_2 = O_2IA$.

Suy ra $MIA + NIA = 2O_1IA + 2O_2IA = 2O_1IO_2 = 180°$ hay M, I, N thẳng hàng. Tức là MN là tiếp tuyến chung của $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$.

b. Do MN là đường kính của $(I ; IA)$ nên $MAN = 90°$, ta cũng có $NAP = 90°$ suy ra

$MAN + NAP = 90° + 90° = 180°$ hay M, A, P thẳng hàng.

Ví dụ 7.

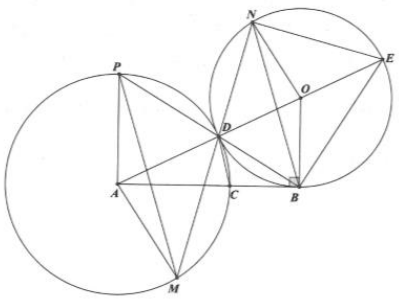
Cho đoạn thẳng AB kẻ tia $Bx \perp AB$. Trên tia Bx lấy O sao cho $BO = \frac{BA}{2}$. Tia AO cắt $(O ; OB)$ tại D và E (D nằm giữa A, O). Đường tròn $(A ; AD)$ cắt AB ở C.

a. Chứng minh: $DE^2 = AD.AE$.

b. Chứng minh: $AC^2 = CB \,.\, AB$.

c. Tia BD cắt $(A ; AD)$ tại P. Một đường thẳng qua D cắt $(A ; AD)$ tại M và cắt (O) tại N. Chứng minh: $\triangle DPM \backsim \triangle DBN$.

Lời giải:



a. Ta có: $AD\,.\,AE = (AO\,-\,OD\,)\,\left(\,AO\,+\,OE\,\right)$

$=(AO\,-\,OD\,)\,\left(\,AO\,+\,OD\,\right)$

$=\,AO^2\,-\,OD^2\,=\,AO^2-OB^2$

$=AB^2\,=\,\left(\,2OB\,\right)^2\,=\,DE^2$

b. Ta có: $CB\,.\,AB\,=\,\left(\,AB\,\text{-}\,AC\,\right).\,AB$

$=\,AB^2\,-\,AC\,.\,AB\,=\,AD\,.\,AE\,-\,AD.AB$

$=\,AD\,\left(\,AE\,\text{-}\,AB\,\right)\,=\,AD^2\,=\,\mathrm{AC}^2$

c. Xét các tam giác: $\triangle DPM$, $\triangle DBN$ ta có: $PDM\,=\,BDN$ đối đỉnh, các cặp tam giác cân ODN, ADM và ODB, ADP đồng dạng với nhau $\left(\,g.g\,\right)$ từ đó suy $\triangle DPM\,\backsim\triangle DBN\,\left(\,c\,.\,g\,.\,c\,\right)$ đpcm .

Ví dụ 8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) và AB < AC. Đường phân giác của góc BAC cắt (O) tại D khác A. Gọi M là trung điểm AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt đoạn thẳng AC tại điểm F khác A.

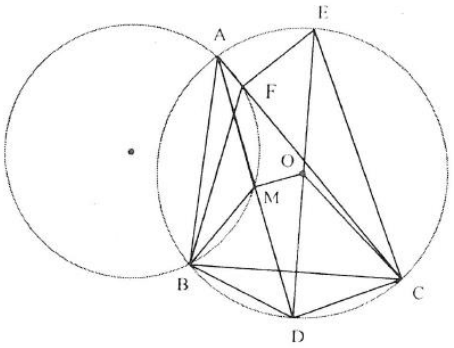
a) Chứng mình rằng tam giác BDM và tam giác BFC đồng dạng.

b) Chứng minh $EF \perp AC$.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHKHTN Hà nội, năm học 2013 - 2014)

Lời giải

a) Ta có $AFB = AMB$ $(=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\,AB$ của đường tròn ngoại tiếp ΔABM).



$\Rightarrow BMD = BFC$.

Lại có $BDM = BCF = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,AB$

$\Rightarrow \Delta BDM \backsim \Delta BCF$ (g.g).

b) b) $\Delta BDM \backsim \Delta BCF \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{DM}{CF}$.

Dễ thấy ΔBDC và ΔCOE là các tam giác cân.

Vì $DBC = OEC = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,CD \Rightarrow \Delta DBC \backsim \Delta OEC$.

$\Rightarrow \dfrac{DB}{BC} = \dfrac{OE}{CE} = \dfrac{OD}{CE}$ nên $\dfrac{DO}{CE} = \dfrac{DM}{CF}$

Mà $MDO = FCE = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,AE \Rightarrow \Delta OMD \backsim \Delta EFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow EFC = OMD = 90^o$ hay $EF \perp AC$.

Ví dụ 9. Cho đoạn thẳng AC có độ dài bằng a. Trên đoạn AC lấy điểm B sao cho AC = 4AB. Tia Cx vuông góc với AC tại điểm C, gọi D là một điểm bất kỳ thuộc tia Cx (D không trùng với C). Từ điểm B kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt hai đường thẳng AD và CD lần lượt tại K, E.

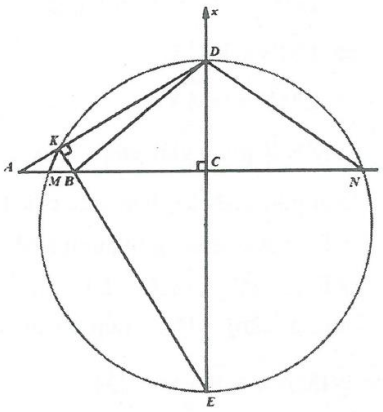
a) Tính giá trị DC, CE theo a.

b) Xác định vị trí điểm D để tam giác BDE có diện tích nhỏ nhất.

c) Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên tia Cx thì đường tròn đường kính DE luôn có một dây cung cố định.

(thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2014 – 2015)

Lời giải



a) Ta có: $EBC = ADC$

(Cùng bù với góc KBC);

$ACD = ECB = 90°$

$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta ECB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{AC}{EC} \Rightarrow DC.CE = AC.BC.$

Do $AB = \dfrac{a}{4};\ BC = \dfrac{3a}{4} \Rightarrow DC.EC = AC.BC = \dfrac{3a^2}{4}.$

b) $S_{\Delta BDE} = \dfrac{1}{2} BC.DE \Rightarrow S_{\Delta BDE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi DE nhỏ nhất.

Ta có: $DE = DC + EC \geq 2\sqrt{DC.EC} = 2\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = a\sqrt{3}$ (Theo chứng minh phần a)

Dấu $"="\Leftrightarrow DC = EC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

$\Rightarrow S_{(BDE)}$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ khi D thuộc tia Cx sao cho $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

c) Gọi giao điểm của đường tròn đường kính DE với đường thẳng AC là M, N (M nằm giữa A và B) $\Rightarrow$ M, N đối xứng qua DE.

Ta có: $\Delta AKB \backsim \Delta ACD$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AK.AD = AC.AB$ (1)

$\Delta AKM \backsim \Delta AND$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AK}{AN} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow AK.AD = AM.AN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AM.AN = AC.AB = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = \left(AC - MC\right)\left(AC + NC\right) = AC^2 - MC^2$ (Do $MC = NC$)

$\Rightarrow MC^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow MC = NC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ M, N là hai điểm cố định.

Vậy đường tròn đường kính DE luôn có dây cung MN cố định.

Ví dụ 11. Cho đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. Gọi D là một điểm trên đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung AB của đường tròn (O) tại E. (E nằm giữa C và D). Chứng minh rằng:

a) $BED = DAE$.

b) $DE^2 = DA.DB$.

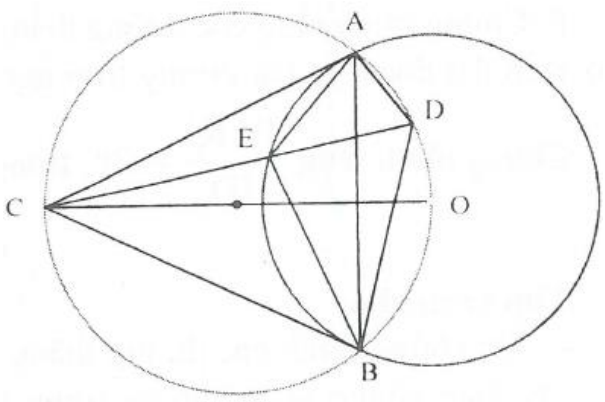
Lời giải

a) Ta có: $EBC = EAB;\ DCB = DAB$ nên $EBC + DCB = EAB + DAB$.

Mặt khác: $EBC + DCB = BED$,

$EAB + DAB = DAE$

Vậy $BED = DAE$.



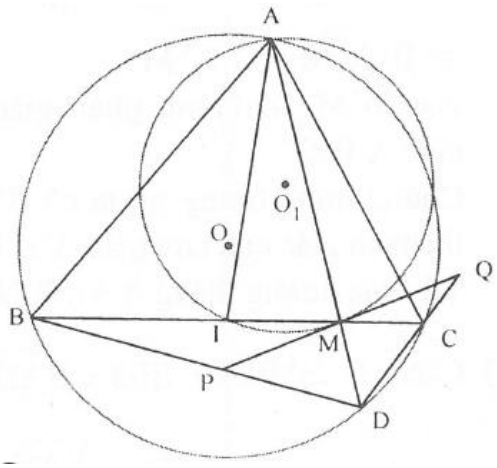
b) Ta có: $ADE = ABC = CAB = EDB$

Mà theo câu a): $BED = DAE$, suy ra:

$\Delta BED \backsim \Delta EAD \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow DE^2 = DA.DB$.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). I là trung điểm của BC, M là điểm trên đoạn CI (M khác C và I), đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm D. Tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMI tại M cắt đường thẳng BD, DC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng $DM.IA = MP.IC$ và tính tỉ số $\frac{MP}{MQ}$.

Lời giải



Vì $DMP = AMQ = AIC$ và $ADB = BCA$ nên

$\Delta MDP \backsim \Delta ICA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DM}{CI} = \dfrac{MP}{IA} \Rightarrow DM.IA = MP.IC$.

Vì $ADC = CBA;\ DMQ = 180^o - AMQ$

$= 180^o - AIM = BIA$

nên $\Delta DMQ \backsim \Delta BIA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DM}{BI} = \dfrac{MQ}{IA} \Rightarrow DM.IA = MQ.IB$ (1)

Từ $DM.IA = MP.IC \Rightarrow DM.IA = MP.IB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{MP}{MQ} = 1$.

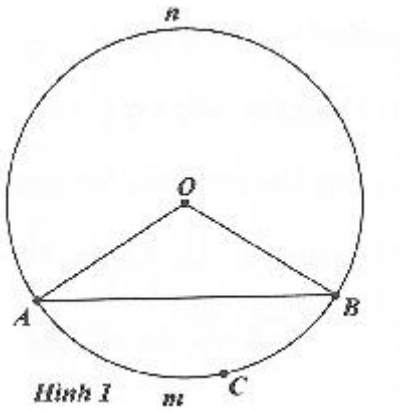
CHUYÊN ĐỀ 3. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

A.TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

I. GÓC Ở TÂM – SỐ ĐO CUNG

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Góc ở tâm: Là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.



Hình 1

1. Số đo cung:

+ Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.

+ Số đo cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn)

2. So sánh 2 cung:

+ Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

+ Trong 2 cung, cung nào có số đo lớn hơn gọi là cung lớn hơn.

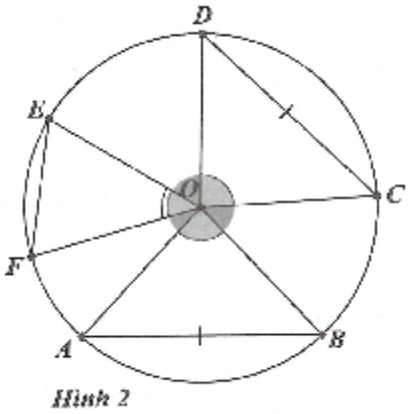
Trên hình 1: Góc AOB gọi là góc ở tâm chắn bởi cung nhỏ AB (hay AmB).

Ta có: $sđ AmB = AOB,\ sđ AnB = 360° - AOB$.

3. Điểm thuộc cung tròn:

Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ AB = sđ AC + sđ CB$.

II. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY CUNG



Hình 2

1. Với 2 cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

+ Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

+ Hai dây bằng nhau căng 2 cung bằng nhau.

2. Với 2 cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

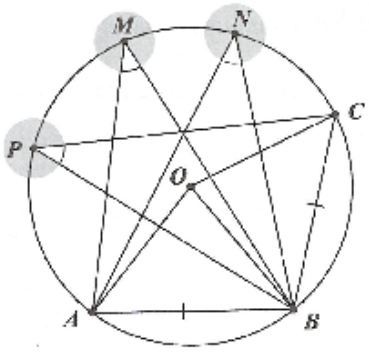
+ Cung lớn căng dây lớn hơn.

+ Dây lớn căng cung lớn hơn.

Trên hình 2: $AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

$AB > EF \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{EF}$.

III. GÓC NỘI TIẾP



Hình 3

1. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa 2 dây cung của đường tròn.

2. Trong một đường tròn, số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn.

+ Trong một đường tròn: Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

+ Các góc nội tiếp chắn cùng một cung hoặc chắn cung bằng nhau

thì bằng nhau.

+ Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo góc ở tâm chắn cùng một cung.

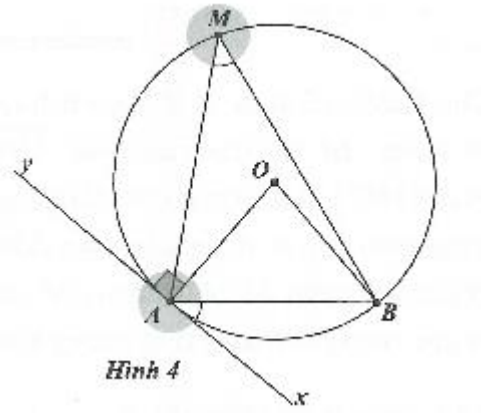
+ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Trên hình 3:

+ Các góc $AMB,\ ANB$ là góc nội tiếp cùng chắn cung $AB \Rightarrow AMB = ANB = \frac{1}{2} sđ AB = \frac{1}{2} AOB$.

+ $AB = BC \Leftrightarrow AMB = BPC$.

IV. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG



Hình 4

1. Đường thẳng xy là tiếp tuyến của (O) tại điểm A.

Tiếp điểm A là gốc chung của 2 tia đối nhau Ax, Ay,

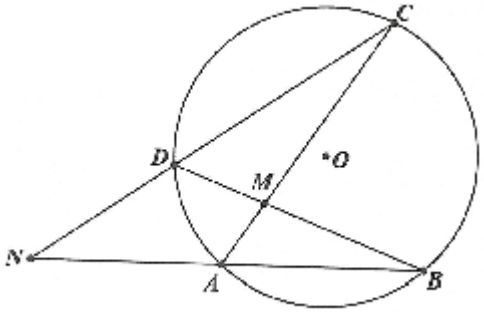
AB là một dây cung của (O). Khi đó góc xAB, yAB là các góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung AB.

2. Số đo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn.

3. Trong một đường tròn: Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn cùng một cung thì bằng nhau.

Trên hình 4: Ta có: $xAB = \frac{1}{2} sđ AB = AMB; yAM = \frac{1}{2} sđ AM = ABM$.

V. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN, GÓC CÓ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN



1. Cho hai dây cung AB, CD của (O) cắt nhau tại một điểm M nằm trong đường tròn (O). Khi BMC gọi là góc có đỉnh nằm trong đường tròn (O). Ta có định lý: Số đo góc có đỉnh nằm trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn. Tức là:

$$BMC = \frac{1}{2}\left(sđ BC + sđ AD\right)$$

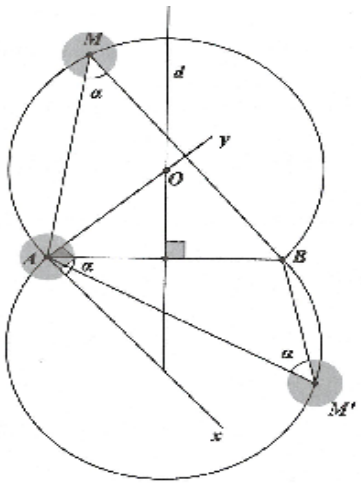
2. Hai tia CD, BA cắt nhau tại N (AB, CD là hai dây cung của (O)). Khi đó góc BNC gọi là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn (O).

Định lí: Số đo góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

Tức là: $BNC = \frac{1}{2}\left(sđ BC - sđ AD\right)$

VI. CUNG CHỨA GÓC

1. Cho 2 điểm cố định A, B . Quỹ tích những điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước một góc $AMB = \alpha$ không đổi $\left(0° < \alpha < 180°\right)$ là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB, gọi là cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB. Đặc biệt, quỹ tích các điểm M nhìn đoạn AB dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.



2. Cách dựng cung chứa góc α.

+ Dựng đường trung trực (d) của đoạn thẳng AB .

+ Dựng tia Ax tạo với AB một góc α.

+ Dựng tia $Ay \perp Ax$ cắt (d) tại điểm O.

+ Ta có O chính là tâm của đường tròn chứa cung α dựng trên đoạn thẳng AB.

MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG

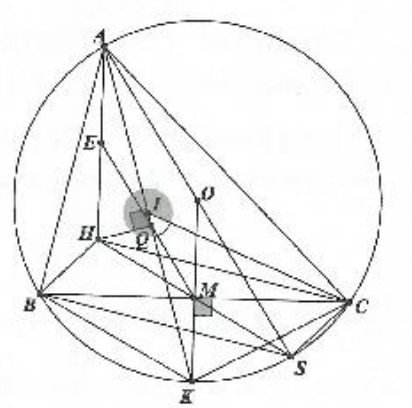
Ví dụ 1

Cho tam giác nhọn ABC(AB < AC) có 3 trực tâm là H nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ và ngoại tiếp đường tròn $\left(I\right)$. Gọi E là trung điểm của AH , M là trung điểm BC. Tia phân giác của BAC cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại K (khác A), cắt EM ở Q.

a) Chứng minh: $KB = KC = KI$

b) Chứng minh $AQH = 90°$.

c) Gọi D là giao điểm của phân giác góc A với BC. Dựng tiếp tuyến AN của $\left(K, KB\right)$. Chứng minh: $ND \perp AK$



Lời giải

a) Do AK là phân giác trong góc A nên $KB = KC \Leftrightarrow KB = KC$. Ta sẽ chứng minh tam giác KIC cân tại K.

Xét tam giác KIC ta có: $KIC = IAC + ICA = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ (1)

Ta cũng có: $KCI = KCB + ICB$. Mà $KCB = KAB = \frac{1}{2}A$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KB), $ICB = \frac{1}{2}C$ suy ra $KCI = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ (2).

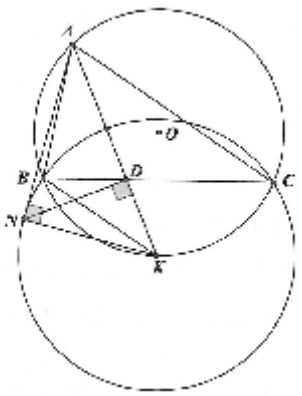
Từ (1) và (2) ta suy ra $KIC = KCI$

Hay tam giác KIC cân tại K tức là KI = KC.

Vậy KI = KC = KB.

Chú ý: Điểm K chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b) Dễ thấy O, M, K thẳng hàng. Kẻ đường kính AS của (O) thì $SC \perp AC, SB \perp AB$ lại có $BH \perp AC,\ CH \perp AB \Rightarrow$ BH // SC, CH // SB suy ra tứ giác BHCS là hình bình hành nên H, M, S thẳng hàng và M là trung điểm của HS .



Ta có $HAQ = AKO = OAK$ (cặp góc so le và tam giác AOK cân). Lại có $EQA = QAS$ (so le). Từ đó suy ra $EAQ = EQA$ suy ra $EA = EQ \Rightarrow EA = EQ = EH$. Tức là tam giác AQH vuông tại Q.

c) Vì $KBC = KAC$ (cùng chắn cung KC), mà $KAC = KAB$ suy ra $KBC = KAB$ suy ra $\Delta KBD \backsim \Delta KAB$ nên $\frac{KD}{KB} = \frac{KB}{KA} = \frac{KN}{KA}$ (do $KB = KN$).

Hay $\frac{KD}{KB} = \frac{KN}{KA}$ kết hợp với $DKN = NAK$ suy ra

$\Delta DNK \backsim \Delta NAK$ suy ra $NDK = ANK = 90°$ đpcm.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O;R)$, đường cao AD kéo dài cắt (O) tại E (E khác A). Dựng đường kính AK .

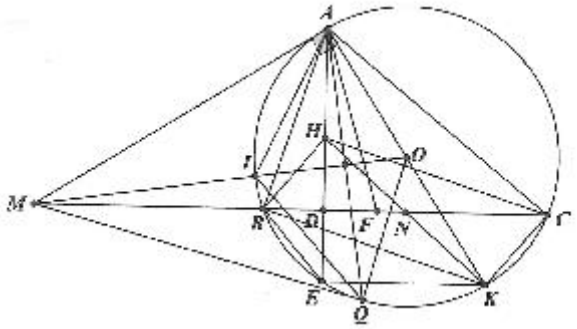
a) Chứng minh: $ABE = CAK$ từ đó suy ra BCKE là hình thang cân.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh: H đối xứng với E qua BC.

c) Chứng minh: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ với $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$.

d) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia CB tại M, phân giác trong góc A cắt BC tại F. Chứng minh: Tam giác AMF cân.

e) Đường thẳng qua A vuông góc với MO cắt (O) tại Q . Đoạn thẳng MO cắt (O) tại I. Chứng minh: I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMQ.



Lời giải

a) Do AK là đường kính của (O) nên $AKC = 90°$, ta có: $BAE = 90° - ABC$

mà $ABC = AKC$ (cùng chắn cung AC)

nên $BAE = 90° - ABC = 90° - AKC = CAK$.

Vì $BAE = CAK \Rightarrow BE = CK \Rightarrow$EK // BC hay BCKE là hình thang cân.

b) Do $BH \perp AC$ nên $EAC = HBC$ (cùng phụ với góc ACB). Mặt khác ta cũng có: $EAC = EBC$ (cùng chắn cung EC) nên suy ra $HBC = EBC \Rightarrow$ ΔHBD = ΔEBD (g.c.g) suy ra DH =DE, hay H đối xứng với E qua BC .

Ta cũng có thể chứng minh theo cách khác: $KC \perp AC, KB \perp AB$ lại có $BH \perp AC, CH \perp AB \Rightarrow$ BH // KC, CH // KB suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành nên BC cắt HK tại trung điểm N của mỗi đường. Do $AEK = 90°$ nên EK // DN mà N là trung điểm HK nên ND là đường trung bình của tam giác HEK suy ra D là trung điểm của HE hay H đối xứng với E qua BC.

c) Ta có: $ABC = AKC$ (cùng chắn cung AC). Trong tam giác vuông AKC ta có:

$\sin AKC = \frac{AC}{AK} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{2R} \Leftrightarrow \frac{b}{\sin B} = 2R$, tương tự ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$ hay

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

d) Ta có $MAF = MAB + ABF$ mà $MAB = ACB$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Suy ra $MAF = \frac{1}{2}BAC + ACB$, ta cũng có $AFM = FAC + FCA = \frac{1}{2}BAC + ACB$ suy ra $MAF = AFM$ hay tam giác AMF cân tại M .

e) Theo tính chất đối xứng ta suy ra MQ cũng là tiếp tuyến của (O), MO là trung trực của AQ nên $IA = IQ$. Ta có $MAI = AQI$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Mặt khác ta cũng có: $IAQ = AQI$ nên suy ra $MAI = IAQ$ hay AI là phân giác của góc MAE . Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta cũng có: MI là phân giác của góc AMQ. Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMQ.

Ví dụ 3

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O)bán kính R, điểm M chuyển động trên cung nhỏ BC.

a) Chứng minh: *MA = MB + MC* .

b) Tìm GTLN, GTNN của *P = MA + MB + MC*.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$

Lời giải:

a) Áp dụng định lý Ptolemy (*) cho tứ giác ABMC ta có:

$MA.BC = AB.MC + AC.MB$.

Do $AB = BC = CA$

Suy ra $MA = MB + MC$.

Cách khác: Trên AM lấy điểm E sao cho $MB = ME$ (1).

Thế thì tam giác BME cân tại M, mặt khác ta có:

$BME = BCA = 60°$ (cùng chắn cung AB) suy ra tam giác BME đều.

Xét tam giác BEA và tam giác BMC ta có:

$BE = BM$ do tam giác BME đều.

$AB = BC$ (do ABC đều).

$ABE = 60° - EBC = CBM$ suy ra $\Delta ABE = \Delta CBM \Rightarrow AE = MC$ (2).

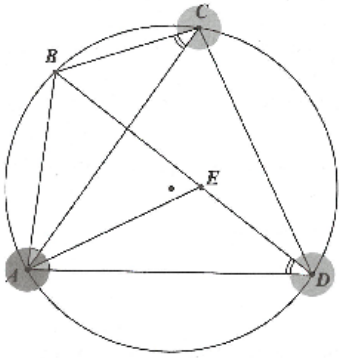
Từ (1) và (2) suy ra $MA = MB + MC$

b) Ta có $P = MA + MB + MC = 2MA$. P nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$.

P lớn nhất khi và chỉ khi MA là đường kính của (O).

c) Với mọi số thực dương x, y ta có:

$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy}.2.\sqrt{\frac{1}{xy}}$. Nên ta suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.



Áp dụng vào bài toán ta có: $\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC} \geq \frac{4}{MB+MC} = \frac{4}{MA}$

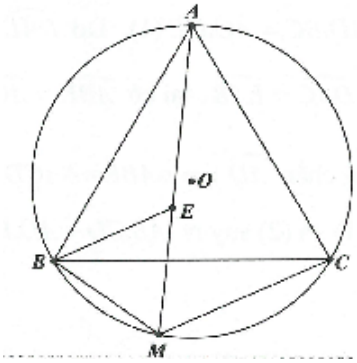
Do $MA \leq 2R$ nên ta suy ra $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB} \geq \frac{4}{2R} = 2R$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AM là đường

kính của (O). Hay M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Định lý Ptolemy (*):

Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó ta có: $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Chứng minh:



Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $DAE = BAC$.

Ta có $DAE = BAC$ và $ADE = ACB$ (cùng chắn AB) nên

$\Delta ADE \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$

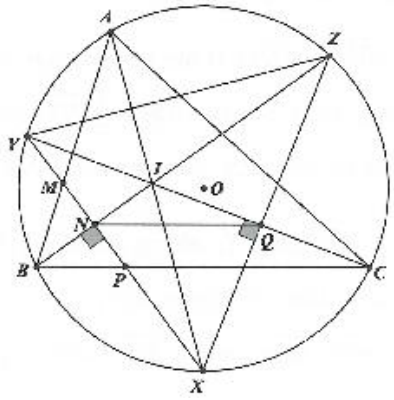
$\Rightarrow AD.BC = AC.DE$ (1).

Do $DAE = CAB$ nên $DAC = EAB$, lại có $ABE = ACD$ (cùng chắn AD) $\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}\Rightarrow AB.CD=AC.BE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD+AD.BC=AC\left(BE+DE\right)=AC.BD$.

Ví dụ 4



Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $\left(O\right)$, ngoại tiếp $\left(I\right)$, các đường thẳng AI, BI,CI cắt $\left(O\right)$tại giao điểm thứ 2 là X,Y Z. Các đường thẳng XY lần lượt cắt AB, BI, BC lần lượt ở M, N, P. XZ cắt IC tại Q.

a) Chứng minh: Tam giác BMP cân.

b) Chứng minh: I là trực tâm của tam giác XYZ.

c) Chứng minh: NQ song song với BC .

Lời giải:

a) Do AI, BI,CI là các đường phân giác góc A, B, C nên X, Y, Z là các điểm chính giữa của các cung BC, CA, AB.

Ta có: $BMP=\dfrac{1}{2}sđ\left(AY+BX\right)$

$BPM=\dfrac{1}{2}sđ\left(BY+CX\right)$ mà $AY=BY,CX=BX$

Suy ra $BMP=BPM$ hay tam giác BMP cân tại B.

b) Ta có:

$BNX=\dfrac{1}{2}sđ\left(BX+YZ\right)=\dfrac{1}{2}\left(BX+AY+AZ\right)=\dfrac{1}{4}\left(BC+AB+AC\right)=90°$ suy ra $XY\perp BZ$

Chứng minh tương tự ta cũng có $AX\perp YZ,CY\perp XZ$ suy ra I là trực tâm của tam giác XYZ.

c) Từ chứng minh ở câu b) ta suy ra $INX=IQX=90°$ nên 4 điểm I, N, X, Q nằm trên đường tròn đường kính XI. Suy ra $IQN=IXN$ (cùng chắn cung IN).

Mặt khác ta cũng có: $IXN=AXY=YCB$ (Hai góc nội tiếp chắn cung bằng nhau) từ đó suy ra $IQN=YCB\Rightarrow$ NQ // BC.

Ví dụ 5

Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm là H nội tiếp $\left(O\right)$, đường cao AD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên đường thẳng AO.

a) Chứng minh: I, D đối xứng nhau qua MN.

b) Đường thẳng IM cắt AC tại E . Chứng minh: $BE\perp AC$.

c) Chứng minh: Khi B, C cố định A di chuyển trên đường tròn (O) thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIK là một điểm cố định.

d) Chứng minh: Khi B, C cố định A di chuyển trên đường tròn (O) hãy tìm giá trị lớn nhất của $HA+HB+HC$.

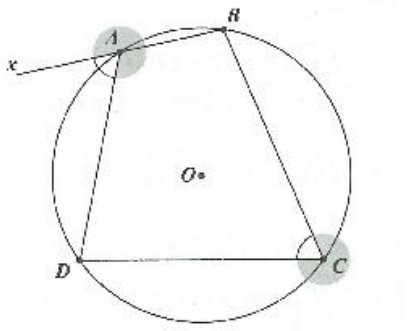
Lời giải

a) Do N là trung điểm của AB nên $ON \perp AB$. Các điểm N, I, M cùng nhìn BO một góc bằng 90° nên suy ra 5 điểm B, N, O, I, M nằm trên đường tròn đường kính BO. Ta cũng có $AIB = ADB = 90°$ nên 4 điểm A, I, D, B cùng nằm trên đường tròn tâm N đường kính AB.

Ta có: $IBD = \frac{1}{2} IND$ (Liên hệ góc nội tiếp và góc ở tâm). Mặt khác $IBD \equiv IBM = INM$ (cùng chắn cung IM). Suy ra $INM = \frac{1}{2} IND$ nói cách khác NM là phân giác góc N của tam giác cân IND suy ra $MN \perp DI$ tại trung điểm của DI. Hay MN là trung trực của ID.

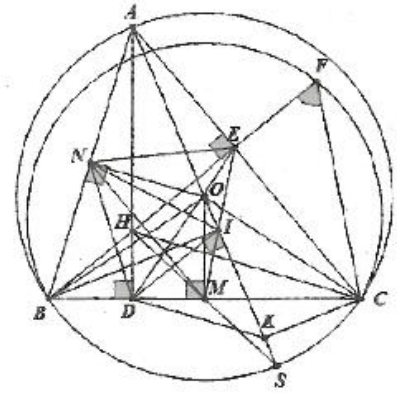
b) Dựng $BE \perp AC$. Ta chứng minh: E, I, M thẳng hàng. Ta thấy 4 điểm A, E, I, B nằm trên đường tròn tâm N đường kính AB. Suy ra $EIA = EBA$ (1) (cùng chắn cung EA).

Ta có $AIM = AIB + BIM = 90° + BNM = 90° + BAC$ (do $BIM = BNM$ cùng chắn cung BM và MN//AC) (2). Từ (1) và (2) suy ra $AIM + EIA = 90° + BAC + EBA = 180°$ hay E, I, M thẳng hàng (đpcm).



c) Gọi P là trung điểm của AC. Chứng minh tương tự a) ta có PM cũng là trung trực của DK . Từ đó suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIK chính là trung điểm M của AC.

d) Dựng đường kính AS thì S, H, M thẳng hàng (tính chất quen thuộc, xem thêm ví dụ 1) suy ra $AH = 2OM$. Do BC cố định nên OM không đổi suy ra AH không đổi. Đặt $BOC = 2\alpha$.



Trên tia đối của HB ta lấy điểm F sao cho *HF = HC* khi đó *HB + HC =BF* .

Để ý rằng: $HFC = \frac{1}{2} BHC = \frac{1}{2}\left(180° - A\right) = \frac{1}{2}\left(180° - \alpha\right)$ không đổi. Theo bài toán cung chứa góc ta suy ra điểm F thuộc cung chứa góc $\frac{1}{2}\left(180° - \alpha\right)$ dựng trên đoạn BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A. Từ đó suy ra BF lớn nhất khi và chỉ khi BF là đường kính của đường tròn chứa

cung chứa góc $\frac{1}{2}\left(180°-\alpha\right)$ dựng trên đoạn BC. Tức là $BCF=90°$, hay B,O, F thẳng hàng. Tức là tam giác ABC cân tại B khi đó giá trị lớn nhất của *HA* + *HB* + *HC* là: $2OM+2R=2\sqrt{R^2-\frac{BC^2}{4}}+2R$

VII. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Tiêu chuẩn 1:

Tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi tổng hai góc đối bằng 180°. Hệ quả: ABCD nội tiếp $\Leftrightarrow xAD=BCD$ (Tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi góc ngoài một đỉnh bằng góc trong đối diện với đỉnh đó)

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp $\left(O\right)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H . Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh: AEHF là tứ giác nội tiếp.

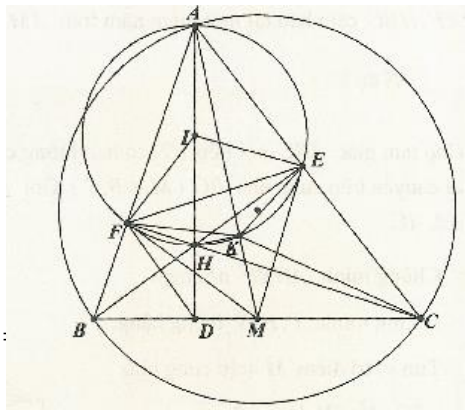
b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường thẳng AM tại K. Chứng minh: Các tứ giác EKMC, FKMB nội tiếp.

c) Chứng minh: BHKC nội tiếp.

Lời giải

a) Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $AEH=AFH-90°$, suy ra $AEH+AFH=180°$ nên tứ giác AEHF nội tiếp.

b) Do 4 điểm A, E, H, F nằm trên đường tròn $\left(I\right)$ đường kính AH nên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cũng chính là đường tròn $\left(I\right)$. Ta có $AKE=AFE$ (cùng chắn cung AE) (1). Mặt khác ta cũng có BFEC nội tiếp nên $AFE=ECB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AKE=ECM$ nên tứ giác EKMC nội tiếp.



Tương tự ta cũng chứng minh được: Tứ giác FKMB nội tiếp hoặc có thể chứng minh theo cách khác như sau:

Ta có: $FKM=360°-EKM-EKF=180°-EKM+180°-EKF=ACB+BAC$

suy ra $FKM+ABC=180°$ nên tứ giác FKMB nội tiếp.

c) Ta có: $HKC=360°-HKE-EKC=180°-HKE+180°-EKC=DAC+180°-EKC$ (3)

Mặt khác tứ giác EKMC nội tiếp nên: $EKC = EMC$ (cùng chắn cung EC). Tứ giác BFEC nội tiếp $\left(M; \frac{BC}{2}\right)$ nên $EMC = 2EBC$ (4), ngoài ra ta cũng có $EBC = DAC$ cùng phụ với BCA (5).

Từ (3), (4), (5) suy ra $HKC = 180° - EBC \Leftrightarrow HKC + HBC = 180°$ nên tứ giác BHKC nội tiếp.

Cách khác: $IEM = 180° - IEA - MEC = 180° - IAE - ECM = 90°$ suy ra ME là tiếp tuyến của (I).

Từ đó ta có $MCK = MEK = EHK$ nên suy ra tứ giác BHKC nội tiếp.

Chú ý: Thông qua ví dụ này ta cũng có thêm một tính chất: Đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF, HBC cắt nhau tại một điểm nằm trên AM.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, một điểm M di chuyển trên cung nhỏ BC (M ≠ B, C). Gọi P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M qua AB, AC.

a) Chứng minh: AHBP nội tiếp.

b) Chứng minh: P, H, N thẳng hàng.

c) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để PN lớn nhất.

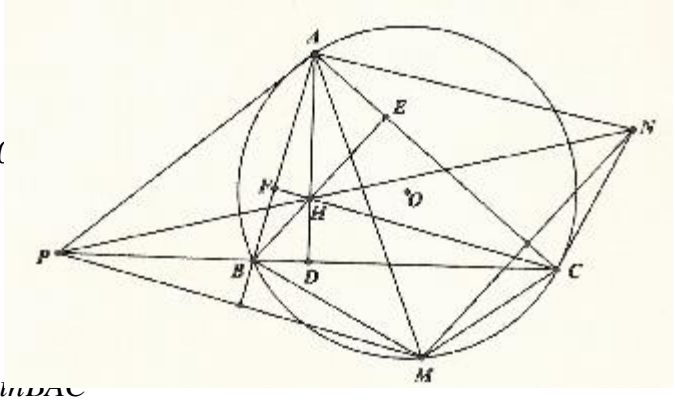
Lời giải

a) Ta có: $APB = AMB$ (tính chất đối xứng). $AMB = ACB = 180° - DHE = 180° - AHB$ hay $AMB + AHB = 180°$. Suy ra AHBP là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tương tự câu a ta thấy tứ giác AHCN nội tiếp. Theo câu a tứ giác AHBP nội tiếp nên ta có biến đổi góc sau:

$AHP = ABP = ABM = 180° - ACM = 180° - ACN = 180$

, hay $AHP + AHN = 180°$ tức là N, H, P thẳng hàng.



c) Do ba điểm M, N, P nằm trên đường tròn tâm A bán kính AM suy ra

$NP = 2AM.sinPMN = 2AM.sin\left(180° - BAC\right) = 2AM.sinBAC$

. Do đó NP lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất, lúc đó AM là đường kính của đường tròn (O).

Vậy độ dài đoạn NP lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm đối xứng của A qua O.

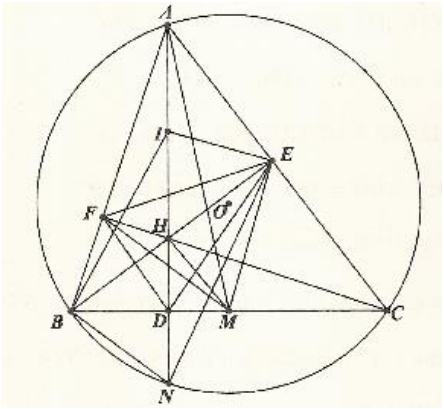
Ví dụ 3

Cho hình bình hành ABCD $(A > 90°)$ có hai đường chéo cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của BC, đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại N, gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB.

a) Chứng minh: Tứ giác ADNH nội tiếp.

b) Dựng các đường thẳng qua A lần lượt vuông góc với BC, CD, BD tại X, Y, Z. Chứng minh 4 điểm X, Y, I, Z nằm trên một đường tròn.

Lời giải



a) Để chứng minh: tứ giác ADNH nội tiếp ta chứng minh: $BHN = ADN$.

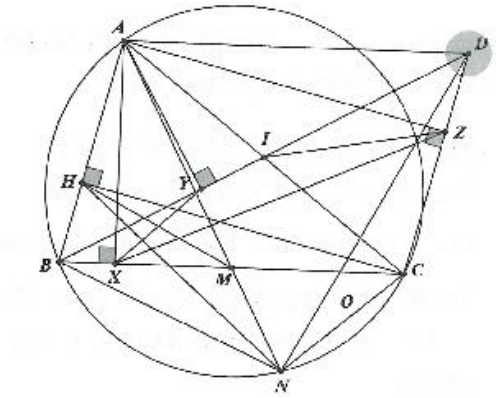
Ta có: $BHN = BHM - NHM$.

Mà $MB = MC, CH \perp BH$ nên suy ra $MB = MH = MC$ suy ra $BHM = ABC$

Vậy $BHN = ABC - NHM$.

Ta cũng có: $ADN = ADC - CDN = ABC - NDC$

Như vậy ta cần chứng minh: $NHM = NDC$. Để ý rằng: $\Delta AMB \backsim \Delta CMN$ (g.g) suy ra $\frac{MB}{MN} = \frac{AB}{CN}$ thay $AB = CD$, $MH = MB$ suy ra $\frac{MH}{MN} = \frac{CD}{CN}$ (1). Ta có:



$HMN = HMB + BMN = HMB + \frac{1}{2}\left(BN + AC\right) = 2HCB + \left(BA \quad \right.$ $\left.VC\right)$

Do $ABC = ANC$ suy ra $HMN = 180° - ABC + BAN = BAD + BAN = BCD + BCN = 1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta HMN \backsim \Delta DCN$ nên $NHM = NDC$ suy ra $BHN = ADN$ hay ADNH nội tiếp.

b) Từ các tứ giác XAZC, ABXY nội tiếp ta có biến đổi góc sau:

$IZX = AZC - AZI - XZC = BAZ - ZAC - CAX = BAX = BYX$ nên tứ giác XYIZ nội tiếp.

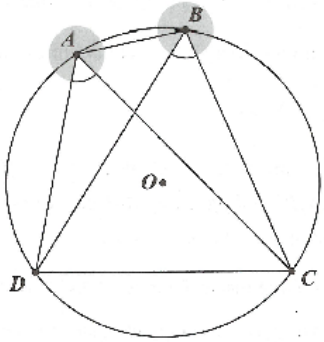
2. Tiêu chuẩn 2:

Tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh những góc bằng nhau:

$DAC = DBC \Leftrightarrow$ ABCD là tứ giác nội tiếp.

Một số ví dụ tiêu biểu

Ví dụ 1

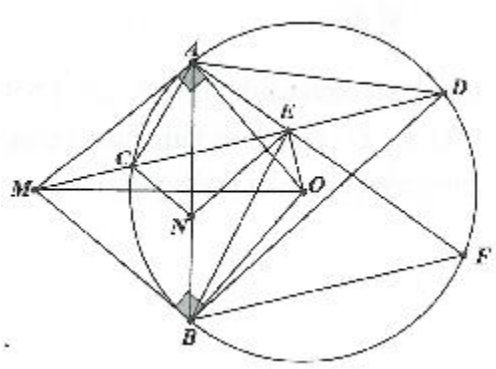


Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh: BFEC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: MEFD là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi I là trung điểm AH , đường thẳng AH kéo dài cắt đường tròn tại giao điểm thứ 2 là N (N ≠ A). Chứng minh: BNEI là tứ giác nội tiếp.



Lời giải

a) Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $BEC = BFC = 90°$ suy ra tứ giác BFEC là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp E, F cùng nhìn cạnh BC một góc bằng 90°).

b) Ta dễ dàng chứng minh được: các tứ giác BFHD, CEHD nội tiếp nên từ đó suy ra $FBH = FDH$ (1), $ECH = EDH$ (2), mặt khác theo a) ta cũng có: $FBE = FCE$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $FDE = 2EBF$ (4). Lại có tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC nên $EMF = 2EBF$ (5) (Tính chất góc ở tâm bằng 2 lần số đo góc nội tiếp chắn cùng một cung). Từ (4), (5) suy ra $EDF = EMF$ nên tứ giác EMDF nội tiếp.

Chú ý: Có thể chứng minh: 4 điểm E, M, D, F nằm trên đường tròn Ơle của tam giác.

c) Ta có: $EIN = 2EAN$ (6) (Tính chất góc ngoài tam giác cân AIE). Mặt khác ta cũng có: $EBC = CAN = CBN$ suy ra $EBN = 2EBC = 2EAN$ (7). Từ (6) và (7) suy ra $EIN = EBN$ hay tứ giác BNEI nội tiếp (Có hai đỉnh liên tiếp I, B cùng nhìn cạnh EN các góc bằng nhau).

Ví dụ 2

Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A,B là các tiếp điểm), dựng cát tuyến MCD (MC < MD) sao cho tia MD nằm giữa hai tia MO, MA . Gọi E là trung điểm của CD.

a) Chứng minh: 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng qua E song song với BD cắt AB tại N. Chứng minh: AENC là tứ giác nội tiếp.

c) Đường thẳng AE cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là F. Chứng minh: BF // CD .

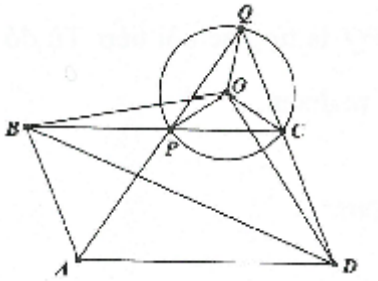
Lời giải:

a) Do E là trung điểm CD nên $OE \perp CD$.

Suy ra $MAO = MEO = 90°$ nên tứ giác MAEO nội tiếp (1). Lại có $MAO + MBO = 180°$ nên MAOB nội tiếp (2). Từ (1) và (2) ta suy ra 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO.

b) Do EN // BD nên $CEN = CDB$, lại có: $CDB = CAB$ cùng chắn cung CB nên suy ra $CEN = CAN$ hay AENC là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có: $AFB = \frac{1}{2}AOB = AOM$ (3) (Tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm + Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau). Mặt khác do AEOM nội tiếp nên $AOM = AEM$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $AEM = AFB$, mà hai góc này đồng vị nên EC // BF .



Ví dụ 3

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với AC, AB. Đường thẳng BI, CI cắt EF lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh: E, M, C, I cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh: 4 điểm B, C, N, M cùng nằm trên một đường tròn.

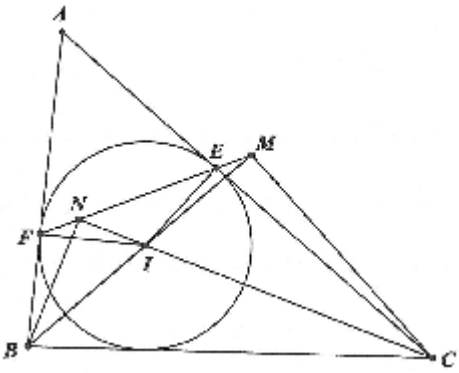
Lời giải

a) Ta có: $MIC = IBC + ICB = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$ (1) (Tính chất góc ngoài của tam giác BIC).

Ta cũng có: $MEC = AEF = \frac{180° - A}{2} = 90° - \frac{A}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $MEC = MIC$ hay MEIC là tứ giác nội tiếp.

b) MEIC là tứ giác nội tiếp nên $IEC = IMC = 90°$ (3). Chứng minh tương tự câu a) ta có BFNI là tứ giác nội tiếp nên $INB = IFB = 90°$ (4). Từ (3), (4) ta suy ra $BNC = BMC = 90°$ nên BNMC là tứ giác nội tiếp.



Ví dụ 4

Cho hình bình hành ABCD có $A > 90°$. Đường phân giác trong góc A cắt cạnh BC tại P, cắt CD tại Q. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CPQ. Chứng minh 4 điểm B, D, O, C cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải

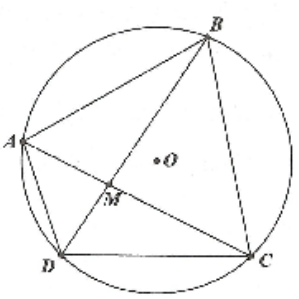
Do ABCD là hình bình hành và $BAQ = DAQ$ suy ra $APB = DQA = CPQ$ hay CPQ cân tại C suy ra ABP cân tại P hay $AB = BP = CD$ (4).

Ta cũng có: $BPO = 180° - OPC = 180° - OCP = 180° - OCQ = OCD$ (5), chú ý rằng: $OP = OC$ (6).

Từ (4), (5), (6) suy ra $\Delta BPO = \Delta DCO \Rightarrow OBC = ODC$ hay 4 điểm B, D, O, C cùng nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 5

Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O), hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại P. Q, R là hai điểm bất kỳ trên cung CD không chứa A, B. RA, RC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tại L, K khác R. PK, PL lần lượt cắt BC, AD tại M, N.

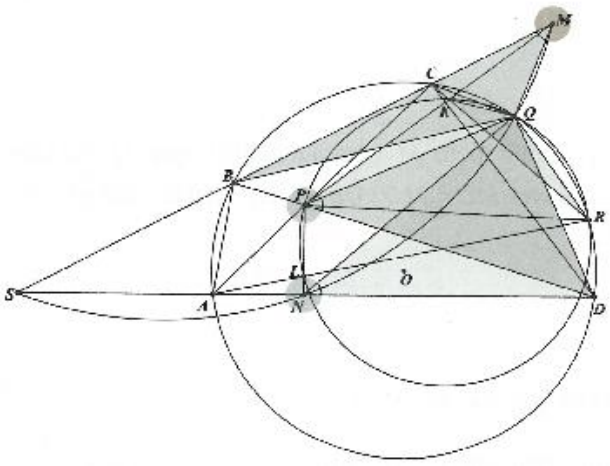


Hình 2

a) Chứng minh: P, Q, N, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh: BC, AD cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN .

Lời giải:



a) Các tứ giác PQLR, ABQR, ABQD nội tiếp nên ta có biến đổi góc sau:

$NPQ = 180° - QRL = ABQ = 180° - QDN \Leftrightarrow NPQ + QDN = 180°$ nên NPQD là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi S là giao điểm của BC, AD. Ta chứng minh tứ giác SMQN nội tiếp.

Thật vậy từ các tứ giác NPQD, BCQR và RQKP nội tiếp ta có biến đổi góc: $MBQ = QRK = QPK$

nên MBPQ là tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra $BMQ = QPD = QND$ suy ra SMQN là tứ giác nội tiếp.

Suy ra đpcm.

3. Tiêu chuẩn 3:

Cho 2 đường thẳng cắt nhau tại M

+Nếu $A, B \in (d_1); C, D \in (d_2)$ sao cho $MA.MB = MC.MD$ thì ABCD là tứ giác nội tiếp (Hình 1).

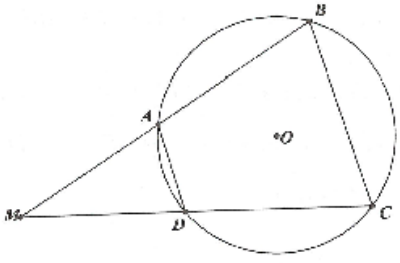
Thật vậy: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \Delta MAD \backsim \Delta MCB \Rightarrow MAD = MCB$ suy ra ABCD nội tiếp.

+ Nếu $MA.MC = MB.MD$ thì ABCD là tứ giác nội tiếp (Hình 2)

Thật vậy: $MA.MC = MB.MD \Rightarrow \Delta MAD \backsim \Delta MBC \Rightarrow DAC = DBC$

suy ra ABCD nội tiếp.

Ví dụ 1



Hình 1

Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài (O), qua M kẻ tiếp tuyến MA đến (O)và cát tuyến MCD sao cho MC < MD. Dựng $AH \perp MO$. Chứng minh: Tứ giác CHOD nội tiếp.

Lời giải

Do MA là tiếp tuyến của (O)và $AH \perp MO$

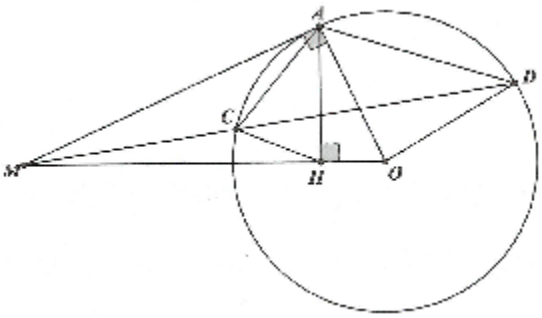
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO ta có:

$MA^2 = MH.MO$ (1)

Mặt khác ta cũng có: $MAC = MDA$ suy ra

$\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ nên $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MC.MD = MH.MO$ hay CHOD là tứ giác nội tiếp (tiêu chuẩn 3).



Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O)tại điểm thứ 2 là N khác A, AN cắt BC tại M.

a) Chứng minh: M, E, F thẳng hàng.

b) Đoạn ME cắt (O) tại X. Chứng minh: AX là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác XHD.

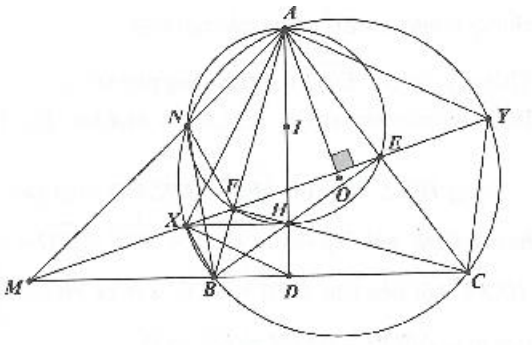
Lời giải

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF có tâm là trung điểm I của AH, ta kí hiệu là (I)

Giả sử MF cắt (I) tại E_1 thì $ANFE_1$ nội tiếp nên suy ra $MN.MA = MF.ME_1$.

Mặt khác ANBC nội tiếp nên $MN.MA = MB.MC$

Từ đó suy ra $MF.ME_1 = MB.MC$ hay BFE_1C nội tiếp. Suy ra $E \equiv E_1$ (hai đường tròn cắt nhau tối đa tại 2 điểm) hay M, E, F thẳng hàng.



b) ME cắt (O)tại giao điểm thứ 2 là Y thì $OA \perp XY$ (Tính chất quen thuộc, dành cho hs) suy ra tam giác AXY cân tại A nên $AYX = AXY$ mặt khác $AYX = ABX$ nên

$AXF = ABX \Rightarrow \Delta AXF \backsim \Delta ABX$ suy ra $AX^2 = AF.AB$. Mặt khác BDHF là tứ giác nội tiếp nên $AF.AB = AH.AD$ từ đó suy ra $AX^2 = AH.AD$ hay AX là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác XHD.

Ví dụ 3

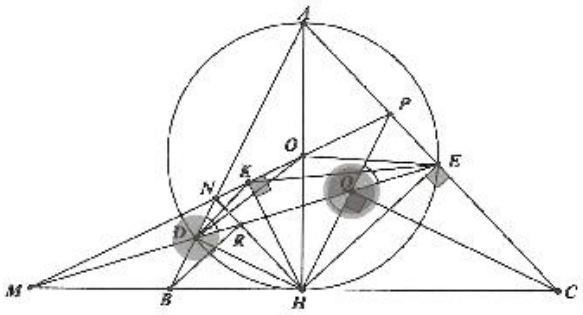
Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH. Đường tròn (O) đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Đường thẳng ED cắt BC tại điểm M. Đường thẳng MO cắt AB, AC tại N và P.

a) Chứng minh: $MH^2 = MB.MC$.

b) Chứng minh: $OP = ON$.

c) Đường thẳng DE cắt HN, HP lần lượt tại R, Q. Chứng minh: BR, CQ, AH đồng quy.

Lời giải



a) Vì 4 điểm A, D, H, E cùng nằm trên đường tròn (O)đường kính AH nên MH là tiếp tuyến của (O) suy ra $MH^2 = MD.ME$ (1)

Để chứng minh: $MH^2 = MB.MC$ ta sẽ chứng minh: BDEC là tứ giác nội tiếp.

Thật vậy: Ta có: $ECH = EHA$ cùng phụ với EHC mà $EHA = EDA \Rightarrow ECH = EDA$ hay BDEC là tứ giác nội tiếp, suy ra $MD.ME = MB.MC$ (2).

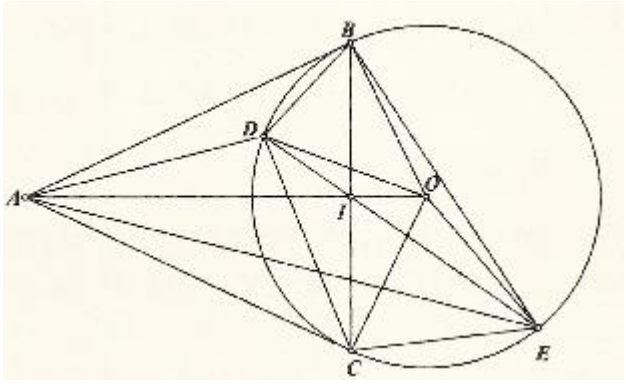
Từ (1) và (2) ta suy ra $MH^2 = MB.MC$.

b) Dựng $HK \perp MO$ thì $MH^2 = MK.MO$, mặt khác $MH^2 = MD.ME$ suy ra $MK.MO = MD.ME$ hay DKOE nội tiếp suy ra $OKE = ODE = OED = MKD$ nên suy ra $DKH = EKH$. Lại có tứ giác HKPE nội tiếp nên $HPE = HKE$, suy ra $HPE = \frac{1}{2}DKE = \frac{1}{2}DOE = DAC$ suy ra HP // AB nên tam giác $\Delta POH = \Delta NOA \Rightarrow OP = ON$.

c) Ta có $PQE = DQH = QDA = ECH$ nên QECH là tứ giác nội tiếp suy ra $CQH = CEH = 90°$ hay $CQ \perp HP \Rightarrow CQ \perp AB$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $DR \perp AC$ hay BR, CQ, AH đồng quy.

Ví dụ 4

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OA và BC. Kẻ dây cung DE của đường tròn (O) qua I.



a) Chứng minh rằng 4 điểm A, D, O, E cùng nằm trên

một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $BAD = CAE$

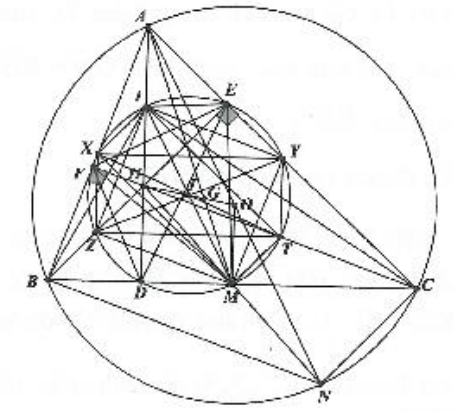
Lời giải

a) Ta thấy bốn điểm B, D, C, E cùng nằm trên đường tròn (O) nên $ID.IE = IB.IC = IB^2$ (1). Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO với BI là đường cao ta có: $IB^2 = IA.IO$ (2). Từ (1) và (2) ta thu được *ID.IE = IA.IO*. Chứng tỏ bốn điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Từ câu a ta thấy $ODE = OAE$ (cùng chắn OE); $OED = OAD$ (cùng chắn OD). Do tam giác ODE cân tại O nên $OED = ODE$. Do đó $OAE = OAD$ (3). Chú ý AO là tia phân giác của góc BAC, từ (3) suy ra $BAE = CAD$ (4). Từ (3), (4) suy ra $BAD = CAE$ (đpcm).

4. Đường tròn Ơ - le của tam giác

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi X, M, Y, I, Z, T lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC, HA, HB, HC. Khi đó 9 điểm D, E, F, X, M, Y, I, Z, T nằm trên cùng một đường tròn có tâm là trung điểm của OH (gọi là đường tròn ơle của tam giác ABC).



Chứng minh: Ta có IZ là đường trung bình của tam giác ABH $\Rightarrow IZ \,//= \frac{1}{2}AB$, YM là đường trung bình tam giác ABC nên $YM \,//= \frac{1}{2}AB$. Từ đó suy ra $IZ \,//= YM \Rightarrow$ IZMY là hình bình hành. Lại có ZM là đường trung bình của tam giác BHC nên ZM//CH mà $AB \perp CH$ suy ra $ZM \perp IZ$ vậy tứ giác IZMY là

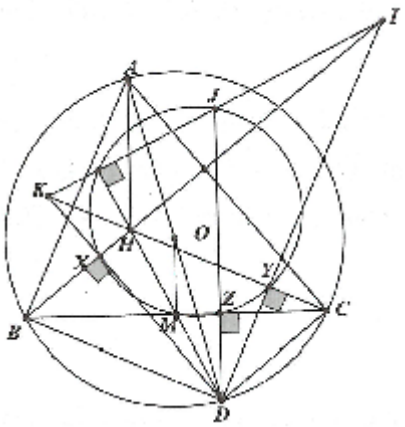
hình chữ nhật nên hai đường chéo IM, ZY cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường.

Tương tự ta cũng chứng minh được các tứ giác XITM, XYTZ là các hình chữ nhật nên suy ra các đường chéo IM, ZY, TX đồng quy tại trung điểm J của mỗi đường.

Chú ý rằng: IDM, ZEY, TFX lần lượt vuông tại D, E, F nên tâm vòng tròn ngoại tiếp chính là trung điểm J của các cạnh huyền tương ứng. Suy ra 9 điểm D, E, F, X, Y, M, I, Z, T cùng nằm trên đường tròn tâm J. Ta cũng có: $OM \,//= \frac{1}{2}AH \,//= IH$ nên tứ giác IHMO là hình bình hành, suy ra hai đường chéo IM, HO cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Nói cách khác điểm J cũng chính là trung điểm của HO . Nếu A' là điểm đối xứng với A qua J thì AHA'O là hình bình hành ta dễ dàng suy ra A' đối xứng với O qua M.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) AD là đường kính của (O). M là trung điểm của BC, H là trực tâm của tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên HB, HC, BC. Chứng minh 4 điểm X, Y, Z, M cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải

Phân tích: M là trung điểm BC $\Rightarrow$ M cũng là trung điểm của HD (Bài toán quen thuộc).

X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên HB, HC, BC kết hợp tính chất điểm M làm ta liên tưởng đến đường tròn ơle của một tam giác: Từ những cơ sở đó ta có lời giải như sau:

+ Giả sử HB cắt DY tại I, HC cắt DX tại K, J là trung điểm của IK. Ta dễ chứng minh được BHCD là hình bình hành suy ra hai đường chéo HD, BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Vì $DX \perp HI, DI \perp HC$ suy ra K là trực tâm của tam giác IHD nên $KDI = KHI = HCD$ (chú ý HI // CD) và $CHD = KID$ (cùng phụ với góc HDI).

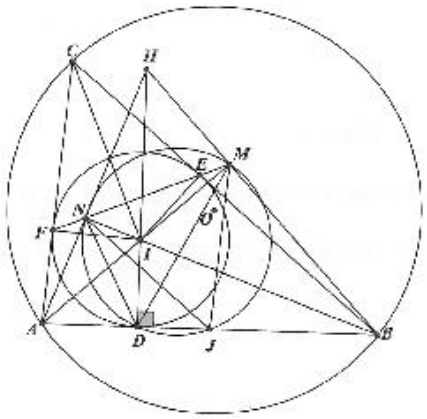
Từ đó suy ra $\Delta KID \backsim \Delta CHD$

+ Mặt khác CM, DJ là hai trung tuyến tương ứng của tam giác CHD và KID, như vậy ta có $\Delta DIJ \backsim \Delta CHM \Rightarrow JDI = HCM$. Từ đó suy ra $DJ \perp BC$ tại Z hay Z thuộc đường tròn đường kính MJ. Ta thấy rằng, đường tròn đường kính MJ là đường tròn ơle của tam giác IHD.

Từ đó ta có: X, Y, Z, M đều cùng nằm trên đường tròn đường kính MJ. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 2

Cho hai điểm A, B cố định và điểm C di động trên mặt phẳng sao cho $ACB = \alpha (0 < \alpha < 180^\circ)$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt EF lần lượt tại M, N. Chứng minh:



a) Đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua điểm cố định.(VMO-2009)

Lời giải

a) Xét tứ giác IEMB ta có:

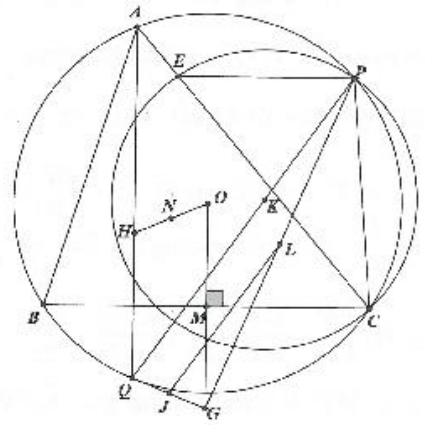
$MIB = IAB + IBA = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$ (Tính chất góc ngoài).

Ta cũng có: $MEB = CEF = \dfrac{180° - C}{2} = 90° - \dfrac{C}{2}$. Từ đó suy ra IEMB là tứ giác nội tiếp, do đó: $IMC = IEC = 90°$. Tương tự ta cũng chứng minh được 4 điểm I, N, A, F cùng nằm trên một đường tròn suy ra $INA = IFA = 90°$. Từ đó suy ra $BMA = BNA = 90°$ hay 4 điểm B, C, M, N nằm trên đường tròn tâm J đường kính AB .

Ta có: $MJN = 2MBN = 2NEI = 2ICF = ACB = \alpha$.

Ta có: $MN = 2NJ.sin\dfrac{MJN}{2} = AB.sin\dfrac{\alpha}{2}$ không đổi.

b) Giả sử AN cắt BM tại H thì I là trực tâm của tam giác AHB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN chính là đường tròn ơle của tam giác HAB . Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua trung điểm J của AB. Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua điểm cố định là J.



Ví dụ 3

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và điểm P di chuyển trên (O). Đường thẳng qua P song song với BC cắt CA tại P. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCE và L là tâm đường tròn ơle của tam giác PBC . Chứng minh: Đường thẳng qua L song song với PK luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển trên (O).

Lời giải

Gọi H, N lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ơle của tam giác ABC, M là trung điểm BC. G là điểm đối xứng với P qua L.

Theo kết quả quen thuộc về tâm đường tròn ơle thì G đối xứng với O qua BC.

Gọi Q là giao điểm của AH với (O).

Do PE // BC nên $CEP = ACB$ suy ra

$CPK = \dfrac{1}{2}\left(180° - CKP\right) = 90° - CEP = 90° - ACB = CAQ = CPQ$ nên P, K, Q thẳng hàng.

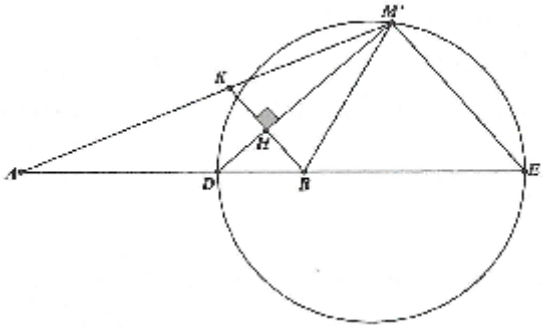
Đường thẳng qua L song song với PK cắt GQ tại J thì J là trung điểm của QG, do H đối xứng Q qua BC nên OHQG là hình thang cân và NJ là đường trung bình của hình thang. Suy ra J đối xứng với N qua BC. Suy ra đường thẳng qua L song song với PK luôn đi qua một điểm cố định là điểm J đối xứng với tâm ơle của tam giác ABC qua BC.

5. Đường tròn Apollonius

Bài toán

Bài toán: Cho đoạn thẳng AB = a, k là số cho trước $(k>0,k\neq 1)$, M là điểm chuyển động trong mặt phẳng sao cho $\frac{MA}{MB}=k$. Tìm quỹ tích điểm M.

Lời giải



Phần thuận: Giả sử (MA > MB). Dựng MD, ME lần lượt là các phân giác trong và phân giác ngoài của AMB thì $DME=90°$.

Theo tính chất phân giác ta có

$\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EB}=\frac{MA}{MB}=k\Rightarrow\frac{DA}{DA+DB}=\frac{k}{k+1}\Rightarrow DA=\frac{ak}{k+1}$, tương tự $EA=\frac{ak}{k-1}$. Suy ra các điểm E, D cố định, $DME=90°$ suy ra M thuộc đường tròn đường kính DE.

Phần đảo: Lấy điểm M' trên đường tròn đường kính DE. Ta chứng minh: M'D là phân giác của góc $AM'B$. Qua B kẻ các đường thẳng vuông góc với D'M cắt M'D và MA tại H, K

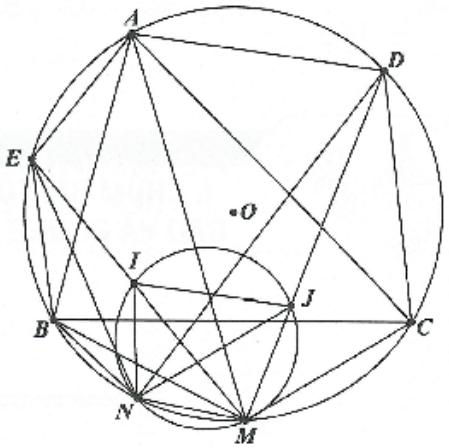
$\Rightarrow BK\ //\ M'E\Rightarrow\frac{BK}{EM'}=\frac{AB}{AE}=\frac{k-1}{k},\frac{BH}{EM'}=\frac{DB}{DE}$ $DE=AE-AD=\frac{ak}{k-1}-\frac{ak}{k+1}=\frac{2ak}{k^2-1}$.

Mặt khác ta cũng có $DB=\frac{a}{k+1}$

Suy ra $\frac{BH}{EM}=\frac{DB}{DE}=\frac{a}{k+1}.\frac{k^2-1}{2ak}=\frac{k-1}{2k}\Rightarrow\frac{2BH}{EM}=\frac{BK}{EM}\Rightarrow BK=2BH\Rightarrow HB=HK\Rightarrow\Delta MBK$ cân suy ra M'D là phân giác của góc $AM'B\Rightarrow$ M'E là phân giác ngoài của góc $AM'B$.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và điểm M thay đổi trên cung BC không chứa A . Gọi I, J là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, CAM . Chứng minh: Đường tròn ngoại tiếp tam giác MIJ luôn đi qua một điểm cố định.

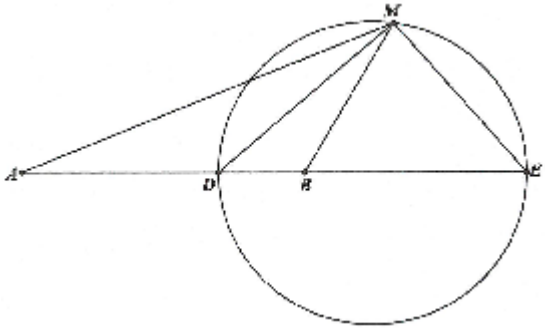


Lời giải

Gọi N là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MIJ với (O), MI cắt (O) tại E, MJ cắt (O) tại D .

Ta có EA = EB, DA = DC.

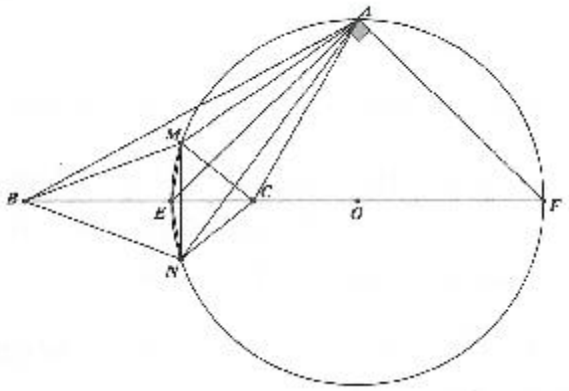
Mặt khác ta cũng có tính chất quen thuộc: EA = EB = EI và DA = DC = DJ.



Tam giác NIE và NJD có $NEI = NDJ$ (cùng chắn cung MN) và $EIN = 180° - NIM = 180° - NJM = NJD$ nên suy ra $\Delta NIE \backsim \Delta NJD$ suy ra $\frac{NE}{ND} = \frac{EI}{DJ} = \frac{AE}{AD}$ (không đổi). Suy ra N thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn ED với tỷ số $\frac{AE}{AD}$. Hay N là giao điểm của đường tròn Apollonius với đường tròn (O).

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC (AB >AC) và điểm M nằm trong tam giác sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$. Gọi N là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh: $MAB = NAC$



Lời giải

Gọi AE, AF lần lượt là các đường phân giác trong, phân giác ngoài góc A của tam giác ABC.

Theo giả thiết và tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{NB}{NC} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FC}$$

Suy ra 5 điểm M, N, A, E, F cùng nằm trên đường tròn Apollonius xác định bởi BC và tỷ số $\frac{AB}{AC}$.

Vì M, N đối xứng nhau qua BC nên M, N đối xứng nhau qua đường kính EF của đường tròn nói trên. Do đó $MAE = NAE$ (1). Mặt khác AE là phân giác của góc BAC nên $BAE = NAE$ (2). Từ (1), (2) suy ra $MAB = NAC$.

B.BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG VÀ TOÁN CHUYÊN

Bài 1. Cho hình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB. Kẻ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CBMD là tứ giác nội tiếp.

b) Khi điểm D di động trên đường tròn thì $BMD + BCD$ không đổi.

c) $DB.DC = DN.AC$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) và (O') cắt đường tròn (O') và (O) theo thứ tự tại C và D. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các dây AC và AD. Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác ABD và CBA đồng dạng.

b) $BQD = APB$.

c) Tứ giác APBQ nội tiếp.

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt AB và AC thứ tự tại D và E. Chứng minh AO vuông góc với DE.

Bài 4. Cho hai vòng tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm T. Hai vòng tròn này nằm trong vòng tròn (O_3) và tiếp xúc với (O_3) tương ứng tại M và N. Tiếp tuyến chung tại T của (O_1) và (O_2) cắt (O_3) tại P. PM cắt vòng tròn (O_1) tại điểm thứ hai A và MN cắt (O_1) tại điểm thứ hai B. PN cắt vòng tròn (O_2) tại điểm thứ hai D và MN cắt (O_2) tại điểm thứ hai C.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AB, CD và PT đồng quy.

Bài 5. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B và C). Tiếp tuyến qua M cắt AB và AC tại E và F. Đường thẳng BC cắt OE và OF ở P và Q. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác OBEQ, OCFP là các tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác PQFE là tứ giác nội tiếp.

c) Tỉ số $\frac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

Bài 6. Cho tam giác ABC, D và E là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB và AC. Chứng minh đường phân giác trong của góc B, đường trung bình của tam giác song song với cạnh AB và đường thẳng DE đồng quy.

Bài 7. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định và đường kính CD quay quanh điểm O. Các đường thẳng AC và AD cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn theo thứ tự tại E và F.

1. Chứng minh rằng tứ giác CDFE nội tiếp đường tròn.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDFE. Chứng minh rằng điểm I di động trên đường thẳng cố định khi đường kính CD quay quanh điểm O.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Trà Vinh, năm học 2009 - 2010)

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A và D là một điểm trên cạnh AC (Khác với A và C). Vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với BC tại E. Từ B kẻ tiếp tuyến thứ hai BF với đường tròn (D). Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của BF và AM. Chứng minh năm điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn và $AN = NF$.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Vĩnh Long, năm học 2009 -2010)

Bài 9. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB, vẽ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp

điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M, N khác với điểm). Đường thẳng DE cắt MN tại 1. Chứng minh rằng:

a) $MI.BE = BI.AE$.

b) Khi điểm C thay đổi thì đường DE luôn đi qua một điểm cố định.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2009 - 2010)

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với CA và CB lần lượt tại M và N. Đường thẳng MN cắt đường thẳng AI tại P. Chứng minh rằng góc IPB vuông.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Gia Lai, năm học 2009 - 2010)

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại A, $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với $(O;R)$ tại B. Hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai M.

a) Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB, chứng minh $OM//CD$ và 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N;

c) Tìm vị trí của P để tích PM.PN lớn nhất? Diện tích tam giác AMB lớn nhất.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2009 - 2010)

Bài 12. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có AD là phân giác góc BAC, tia AD cắt đường tròn tại điểm E (E khác A). Kẻ đường kính EF của đường tròn (O). Gọi P là một điểm nằm giữa A và D. Tia FP cắt đường tròn (O) tại Q khác F. Đường thẳng qua P vuông góc với AD cắt CA, AB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng các tứ giác PQBN, PQCM là tứ giác nội tiếp.

b) Giả sử QN và PC cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O). Chứng minh rằng QM và PB cũng cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O).

Bài 13. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp $(O;R)$ có $AB < AC$. Vẽ 3 đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H, AD cắt (O) tại K và cắt EF tại I.

a) Chứng minh rằng: BC là trung trực của HK và $IF.IE = IH.IA$;

b) Chứng minh rằng : Các tứ giác DHEC, BFIK nội tiếp được;

c) Chứng minh rằng: $\frac{KC}{AC} + \frac{BK}{BA} = \frac{EF}{AI}$;

d) Đường thẳng qua E song song với AD cắt BK tại M. Chứng minh rằng: 3 điểm F, D, M thẳng hàng;

Bài 14. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ có AD là đường phân giác. Đường thẳng qua C song song với AD cắt đường trung trực của AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung trực của AB tại F.

a) Chứng minh rằng tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là G.

c) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BF tại Q. Đường thẳng QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC và P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn.

Bài 15. Cho tam giác ABC có BAC là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $QAB = BCA$ và $CAP = ABC$. Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng của A qua P; Q. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(Thi vô địch Toán Quốc Tế IMO, năm 2014)

Bài 16. Cho 19 điểm nằm trong hay trên cạnh của một lục giác đều cạnh bằng 4 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 trong số 19 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

(thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hưng Yên, năm học 2013 - 2014)

Bài 17. Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và B, M là trung điểm của AB. Đường thẳng qua A vuông góc với MD cắt đường thẳng qua B vuông góc với MC tại N. Chứng minh $MN \perp CD$.

(tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán. Đại học sư phạm TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015 - 2016)

Bài 18. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có các góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm cạnh BC, E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, F là điểm đối xứng của E qua M.

a) Chứng minh rằng $EB^2 = EF.EO$;

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC. Chứng minh các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P, O, F không thẳng hàng. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua một điểm cố định.

(tuyển sinh lớp 10, trường phổ thông Năng khiếu Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015-2016)

Bài 19. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$, M là trung điểm cạnh BC, O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO. Chứng minh rằng:

a) $MX \perp BF$.

b) Hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

c) $\frac{EF}{FY} = \frac{BC}{CD}$.

(tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, Đại học sư phạm Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Bài 20. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trung điểm của BC. M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của MN.

1) Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi P là giao điểm của OI và AB. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

3) Xác định vị trí của điểm M để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

(tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, TP. Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Bài 21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh bốn điểm A, E, P, F cùng nằm trên một đường tròn .

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB. Chứng minh:

$QKL + PAB = QLK + PAC$.

(tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, ĐHKHTN, Đại học Quốc Gia Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Bài 22. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC không đi qua tâm. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ *BC*. Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm *A* và có số đo bằng α không đổi sao cho *E*, *F* khác phía với điểm *A* so với *BC*; *AF* và *AE* cắt đường thẳng *BC* lần lượt tại *M* và *N*. Lấy điểm *D* sao cho tứ giác *MNED* là hình bình hành.

a) Chứng minh *MNEF* là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MDF*. Chứng minh rằng khi góc nội tiếp EAF quay quanh điểm *A* thì *I* chuyển động trên một đường thẳng cố định.

c) Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng *OI* khi $\alpha = 60°$ và $BC = R$.

(thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2013 - 2014)

Bài 23. Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

1. Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

2. Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

3. Gọi D là trung điểm của HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

(thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2014 - 2015)

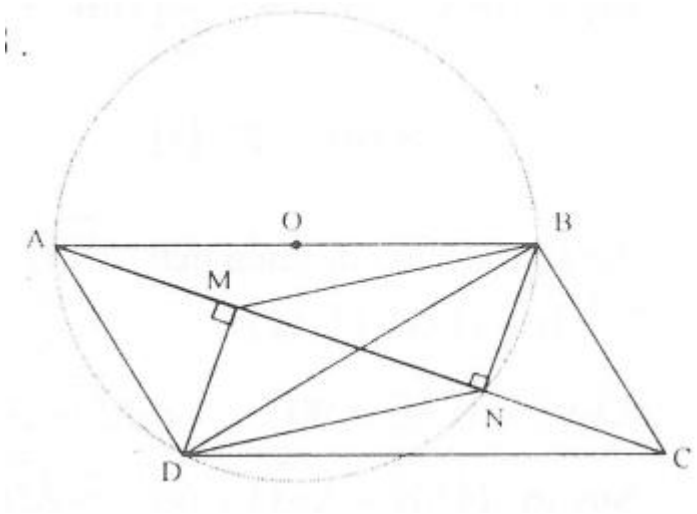
HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1.

a) AB là đường kính đường tròn $(O) \Rightarrow ADB = 90°$ mà $ADB = DBC$ (so le trong) $\Rightarrow DBC = 90°$.

Mặt khác $DMC = 90°$ suy ra: $DMC = DBC = 90°$ do đó tứ giác CBMD nội tiếp đường tròn đường kính CD.

Nhận xét. Ngoài cách giải trên, chúng ta có thể giải theo hướng sau:



• Ta có: $MDB = DBN = DAN = MCB$.

Suy ra điều phải chứng minh.

• Ta có: $DMB = DNB$; $DAB = DCB$

Mà $DAB + DNB = 180°$.

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Khi điểm D di động trên đường tròn (O) thì tứ giác CBMD luôn là tứ giác nội tiếp

Suy ra $BMD + BCD = 180°$ (điều phải chứng minh).

c) Do $ANB = 90°$ thuộc (O).

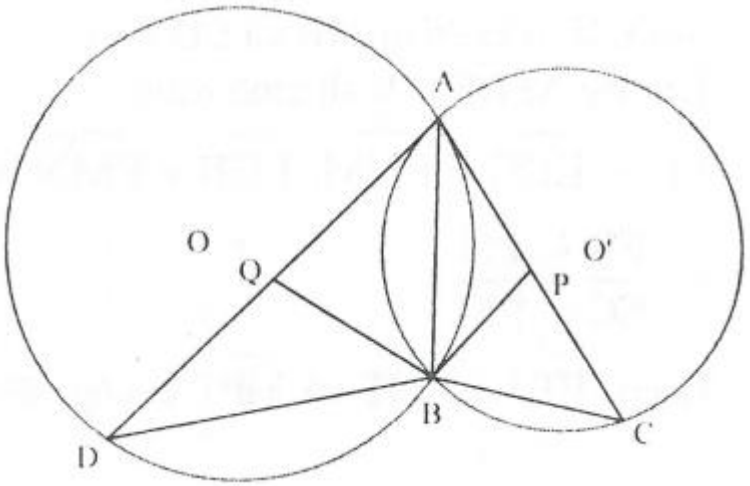
Ta có: $BDN = BAN$ (góc nội tiếp) mà $ACD = BAN$ (so le trong)

$\Rightarrow BDN = ACD$.

Mặt khác $DAC = DAN = DBN$ (cùng chắn cung DN)

Suy ra: $\Delta ACD \backsim \Delta BDN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{CD}{DN} \Rightarrow AC.DN = BD.CD$

2.



a) Áp dụng hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có:

$CAB = ADB$, $ACD = BAD$

Suy ra: $\Delta ABD \backsim \Delta CBA$ (g.g).

b) Vì $\Delta ABD \backsim \Delta CBA$, suy ra: $\frac{AD}{CA} = \frac{BD}{BA}$

Mà $DQ = \frac{AD}{2}$; $AP = \frac{AC}{2}$

$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{DQ}{AP}$

Lại có: $QDB = PAB$

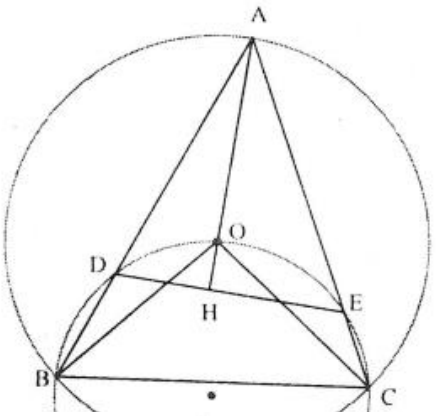
Suy ra: $\Delta BQD \backsim \Delta APB$ (c.g.c)

$\Rightarrow BQD = APB$.

c) Ta có: $AQB + BQD = 180°$, mà $BQD = APB \Rightarrow AQB + APB = 180°$

Suy ra tứ giác APBQ nội tiếp.

3. Tia AO cắt DE tại H.



Vì O là tâm đường tròn nội tiếp AABC nên $AOC = 2.B$.

Suy ra $OAC = OCA = \frac{1}{2}\left(180° - AOC\right)$

$= 90° - B \ (1)$

Tứ giác BDEC nội tiếp nên $AED = B \qquad (2)$

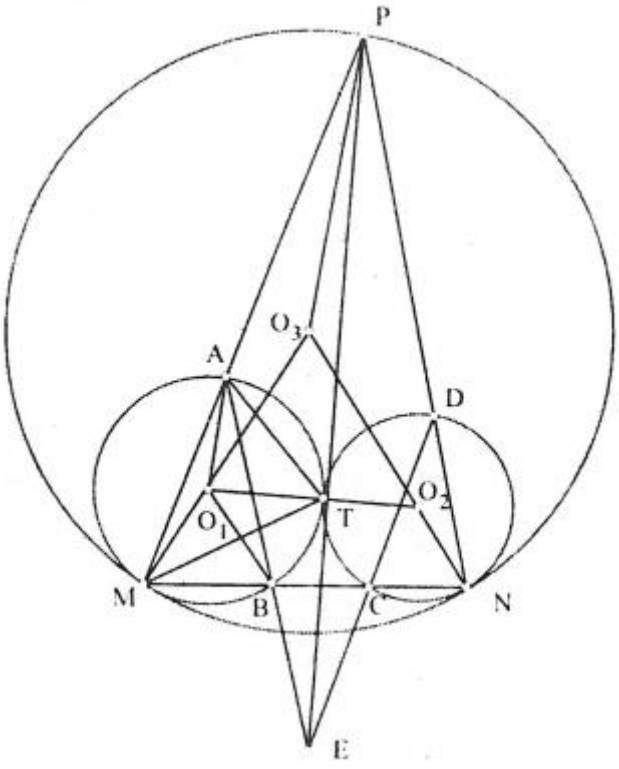
Kết hợp (1) và (2) ta có:

$OAC = HAE = 90° - B = 90° - AED$.

Suy ra: $HAE + AEH = 90° \Rightarrow AHE = 90°$

Hay AO vuông góc với BC.

4.



a) Gọi O_1; T; O_2 thẳng hàng.

Các tam giác cân O_1MB và O_3MN có chung góc M suy ra $\Delta O_1MB \backsim \Delta O_3MN$

$\Rightarrow \frac{MB}{MN} = \frac{MO_1}{MO_3}$

Tương tự suy ra $\Delta O_1MA \backsim \Delta O_3MP$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MP} = \dfrac{MO_1}{MO_3}$

Vậy $\dfrac{MB}{MN} = \dfrac{MA}{MP} \Rightarrow AB//PN$

Tương tự ta có $CD//PM$.

Gọi E là giao điểm AB và CD .

Tứ giác AEDP là hình bình hành.

Tacó: $EBC = PNM$; $ECB = PMN$ nên $\Delta EBC \backsim \Delta PNM$ (g.g) (1)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{PN}{PM}$

Ta có: $PTA = PMT$ và MPT chung, nên $\Delta PAT \backsim \Delta PTM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PT} = \dfrac{PT}{PM} \Rightarrow PA.PM = PT^2$

Tương tự, ta có: $PD.PN = PT^2$

$\Rightarrow PA.PM = PD.PN$ nên $\Delta PNM \backsim \Delta PAD$ (c.g.c) (2)

Mà APDE là hình bình hành nên $\Delta EDA = \Delta PAD$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\Delta EBC \backsim \Delta EDA \Rightarrow EBC = EDA$

Do đó tứ giác ABCD nội tiếp,

b) Gọi giao điểm của PT và AB là I. Tia IC cắt (O_2) tại D'

Ta có: $IA.IB = IT^2 = IC.ID'$ suy ra $\Delta IBC \backsim \Delta ID'A \Rightarrow IBC = ID'A$

Do đó tứ giác $ABCD'$ nội tiếp mà ABCD nội tiếp nên D trùng D'

Vậy các đường thẳng AB, CD và PT đồng quy.

5.

a) Ta có EB, EM là tiếp tuyến nên $EOM = \dfrac{1}{2}BOM$;

Ta có FC, FM là tiếp tuyến nên $FOM = \dfrac{1}{2}COM \Rightarrow EOF = \dfrac{1}{2}BOC$;

Mặt khác $EOF = \dfrac{1}{2}BOC\left(= \dfrac{1}{2}sd\,BMC\right)$

Suy ra $EBQ = EOQ$

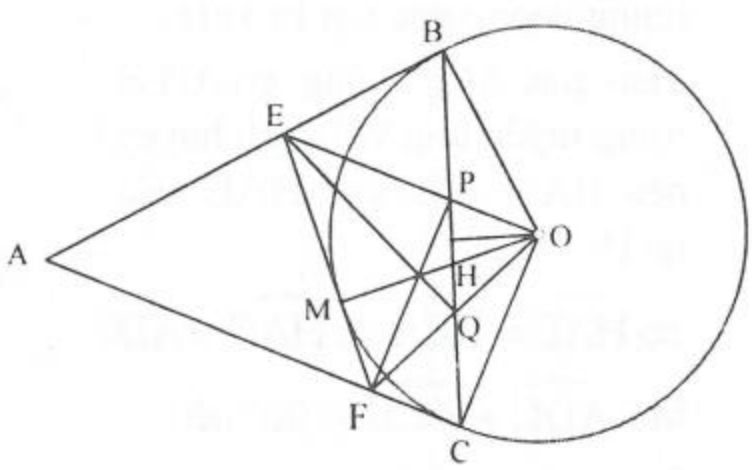
Từ đó ta có O và B là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn EQ dưới một góc bằng nhau

Vậy OBEQ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có OCFP là tứ giác nội tiếp.

b) OBEQ là tứ giác nội tiếp nên

$OBE+OQE=180°\Rightarrow OQE=90°\Rightarrow FQE=90°$



OCFP là tứ giác nội tiếp nên

$OCF+OPF=180°\Rightarrow OPF=90°\Rightarrow EPF=90°$

Suy ra $EPF=EQF=90°$.

Vậy tứ giác PQFE là tứ giác nội tiếp.

c) Kẻ OH vuông góc với BC.

Ta có: PQFE là tứ giác nội tiếp

Suy ra $OPQ=EFO$

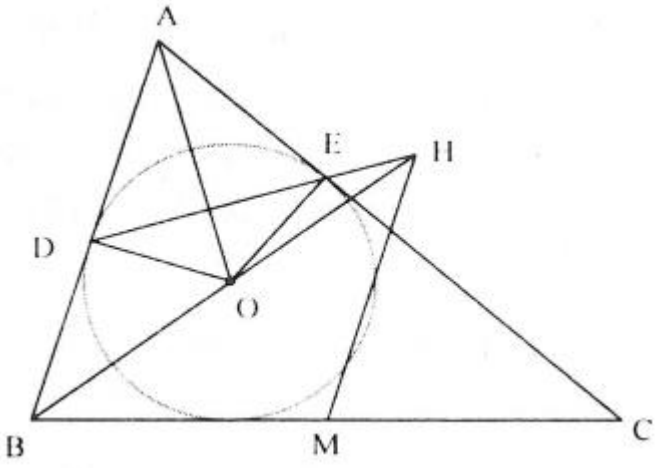
Do đó $\Delta OPQ\backsim\Delta OFE$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{PQ}{EF}=\dfrac{OH}{OM}$

Vì điểm A và (O) cố định nên OH và OM không đổi do đó tỉ số $\dfrac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

4. Tứ giác ADOE nội tiếp $\Rightarrow EAO=EDO$.

Gọi tia BO cắt tia DE tại H thì:

$BHD=180°-HDB-HBD=180°-90°-\dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2}=\dfrac{C}{2}$



Mặt khác $ACO=\dfrac{C}{2}$ nên tứ giác EOCH nội tiếp

$\Rightarrow OHC=OEC=90°$.

Hay BH vuông góc với CH.

Gọi M là trung điểm của BC

Suy ra $MB=MC=MH\Rightarrow\Delta BHM$ cân

$\Rightarrow HBM=MHB\Rightarrow ABH=MHB$

Suy ra BH song song với AB.

Suy ra điều phải chứng minh.

7.

1. Ta có: $ACD=ABD$; $ABD=AFB$ nên $ACD=AFB$.

Do đó tứ giác CDFE nội tiếp.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDFE.

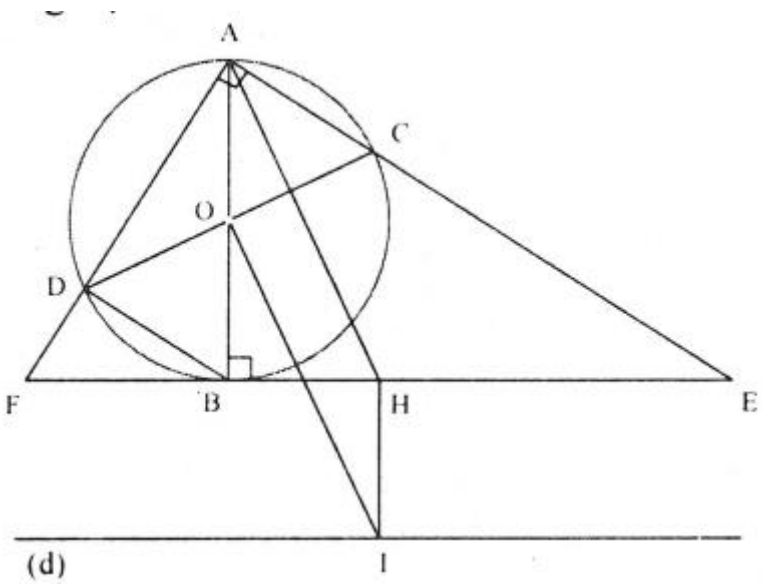
Đường tròn (I) qua CD nên I thuộc trung trực của CD.

Đường tròn (I) qua EF nên I thuộc trung trực của EF.

Gọi H là trung điểm của EF.

Do đó I là giao điểm hại đường trung trực của CD và EF

$\Rightarrow AO//HI$ hoặc trùng với HI (cùng vuông góc với EF) (1)



Tam giác AEF vuông, có AH là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $HA = HE \Rightarrow \Delta HAE$ cân tại H

$\Rightarrow HAE = HEA \Rightarrow HAE = ADC$

Mà $ADC + ACD = 90°$ nên $HAE + ACD = 90°$

Suy ra $AH \perp CD$.

Mà $OI \perp CD$ nên $AH//OI$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra tứ giác AOIH là hình bình hành. Do đó $IH = OA = R$. Suy ra I cách EF một khoảng không đổi bằng R, nên I di động trên đường thẳng d song song với EF và cách EF một khoảng bằng R.

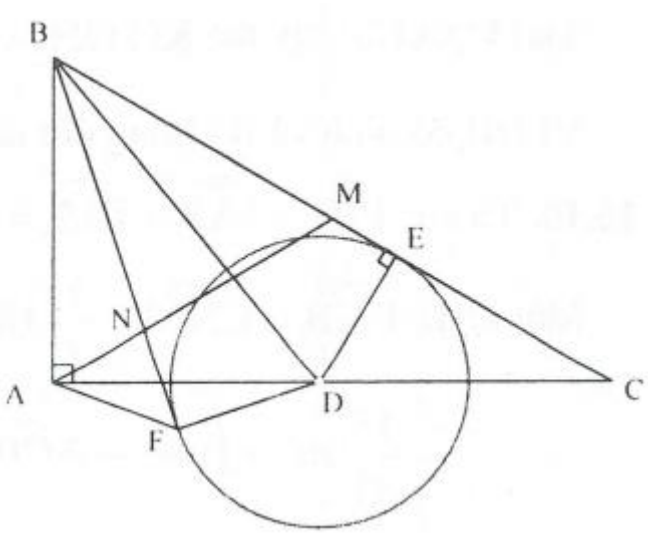
5. Ta có: $BFD = BED = BAD = 90°$.

Do đó B, E, D, A, F cùng thuộc một đường tròn đường kính BD.

Trong tam giác vuông ABC có AM lcà cạnh huyền nên $MA = MC$

$\Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M

$\Rightarrow MAC = MCA$.



Xét đường tròn đi qua năm điểm A, B, E, D, F

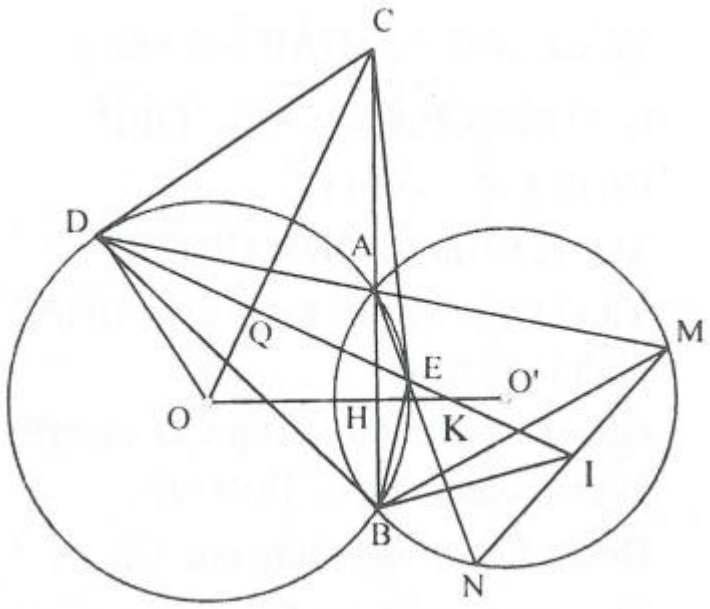
Ta có $DE = DF$ nên $DF = DE \Rightarrow DBE = DBF$

Xét:

$NAF = MAC + DAF = MCA + DBF = MCA + DBE = BDA = NFA$

$\Rightarrow \Delta NAF$ cân tại N $\Rightarrow NF = NA$.

9.



a) Ta có $BDE = BAE$ (cùng chắn cung BE của đường tròn tâm O)

$BDE = BMN$ (cùng chắn cung BN của đường tròn tâm O')

$\Rightarrow BDE = BMN$ hay $BDI = BMN \Rightarrow$ Tứ giác BDMI nội tiếp

$\Rightarrow MDI = MBI$ (cùng chắn cung MI)

Mà $MDI = ABE$ (cùng chắn cung AE của đường tròn tâm O)

$\Rightarrow ABE = MBI$

Mặt khác: $BMI = BAE$

$\Rightarrow \Delta MBI \backsim \Delta ABE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MI}{AE} = \dfrac{BI}{BE} \Rightarrow MI.BE = BI.AE$

b) Gọi Q là giao điểm của CO và DE.

Ta có $OC \perp DE$ tại Q

$\Rightarrow \Delta OCD$ vuông tại D , có đường cao là DQ nên $OQ.OC = OD^2 = R^2 \quad (1)$

Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OO' và DE, H là giao điểm của AB và OO'

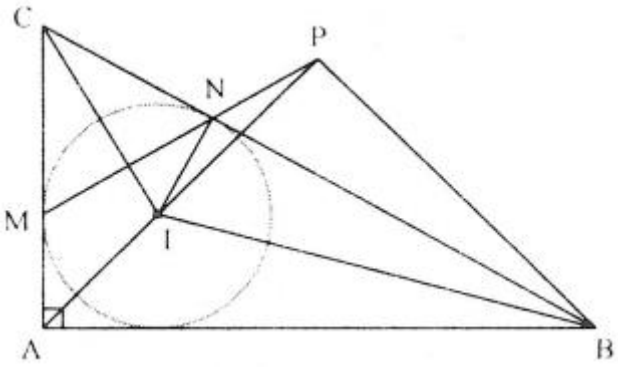
Ta có: $OO' \perp AB$ tại H. $\Delta KQO \backsim \Delta CHO$ ($Q = H = 90°$; O chung)

$\Rightarrow \dfrac{KO}{CO} = \dfrac{OQ}{OH} \Rightarrow OC.OQ = KO.OH \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $KO.OH = R^2 \Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OH}$

Vì OH cố định và R không đổi nên OK không đổi. Do đó K cố định.

10. Ta có: $PIB = IAB + IBA = 45° + IBC \quad (1)$



Mặt khác $PNB = CNM = \dfrac{1}{2}\left(180° - ACB\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left[90° + \left(90° - ACB\right)\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left(90° + ACB\right)$

$= 45° + \frac{1}{2} ABC = 45° + IBC \ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $PIB = PNB$.

Do đó 4 điểm P, N, I, B cùng nằm trên một đường tròn.

Mặt khác $INB = 90°$ nên IB là đường kính của đường tròn này $\Rightarrow IPB = 90°$

11.

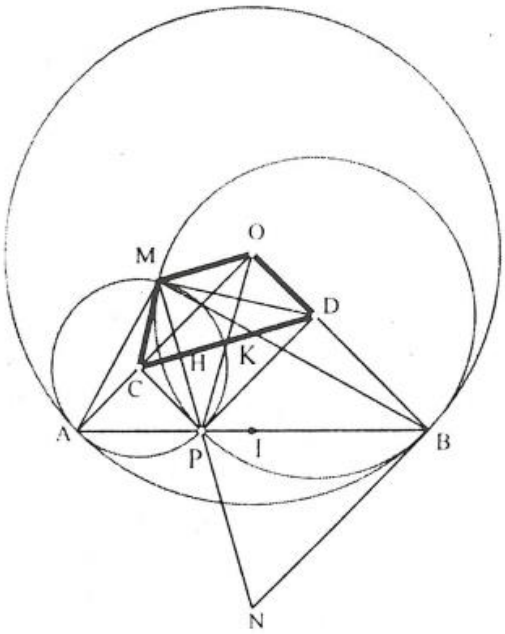
a) Nối CP, PD .

Ta có A, C, O thẳng hàng; B, D, O thẳng hàng.

Ta có: ΔACP, ΔOAB lần lượt cân tại C, O nên $CPA = CAP = OBP$.

Do đó $CP // OD \ (1)$

Tương tự, ta có $OD // CP \ (2)$.



Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ODPC là hình bình hành.

Gọi H là giao điểm của CD và MP, K là giao điểm của CD và OP.

Do đó K là trung điểm của OP.

Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau thì $CD \perp MP$

$\Rightarrow$ H là trung điểm của MP.

Do đó $HK // OM \Rightarrow CD // OM$.

Giả sử $AP < BP$.

Vì tứ giác CDOM là hình bình hành nên $OC = DP$; $DP = DM = R_2$ nên tứ giác CDOM là hình thang cân.

Do đó 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có: $OA^2 + OB^2 = 2R^2 = AB^2$. Do đó ΔAOB vuông cân tại O.

Vì 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn (Kể cả M trùng O) nên $COB = CMD \ (1)$

Ta có: $MAB = MCD$ (cùng bằng $\frac{1}{2} sd\, MP$ của đường tròn (C))

Vì $MBP = MDC$ (cùng bằng $\frac{1}{2} sd\, MP$ của đường tròn (D)).

Do đó $\Delta MAB \backsim \Delta MCD$ (g-g) $\Rightarrow AMB = AOB = 90°$ mà $CMD = COD$ (tứ giác CDOM nối tiếp).

Do AB cố định nên điểm M thuộc đường tròn tâm I đường kính AB.

Ta có: $ACP = BDP = AOB = 90° \Rightarrow AMP = \frac{1}{2} ACP = 45°$ (Góc nội tiếp và góc tâm của (C))

$\Rightarrow BMP = \frac{1}{2}BCP = 45°$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (D))

Do đó MP là tia phân giác của AMB. Mà $AMB = AOB = 90°$ nên M thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AOB. Giả sử MP cắt đường tròn (I) tại N và N là trung điểm cung AB không chứa điểm O nên N cố định.

c) Ta có: $MPA = BPN$; $AMP = PBN$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Do đó $\Delta MAP \backsim \Delta BNP$ (g - g)

$\Rightarrow \frac{PA}{PN} = \frac{PM}{PB} \Leftrightarrow PM.PN = PA.PB \le \left(\frac{PA+PB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2}$ (không đổi)

Vậy PM.PN lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi $PA = PB$ hay P là trung điểm của dây AB. Tam giác AMB vuông tại M nên:

$S_{AMB} = \frac{1}{2}AM.BM \le \frac{1}{4}\left(AM^2 + BM^2\right) = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2}$

Vậy S_{ABM} lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi $PA = PB$ hay P là trung điểm của dây AB.

12.

a) EF là đường kính nên $EAF = 90°$

Mà $AE \perp MN$ suy ra $AF // MN \Rightarrow QPN = QFA$.

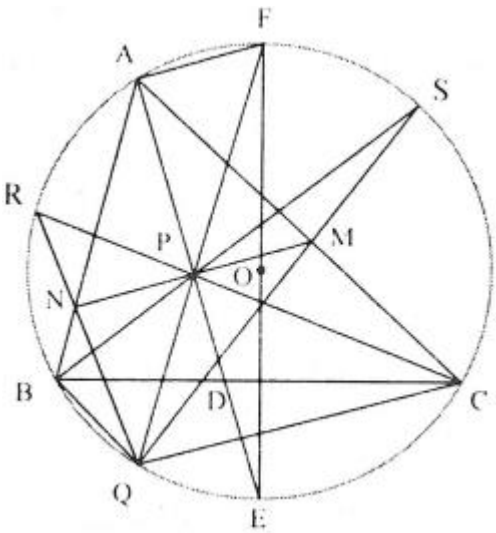
Mà AFQB nội tiếp nên $QFA + QBA = 180°$

$\Rightarrow QPN + QBN = 180°$.

Suy ra tứ giác PQBN nội tiếp.

Lại có $QCA = QFA \Rightarrow QPN = QCM$

Suy ra tứ giác PQCM nội tiếp.



b) Giả sử QN và PC cắt nhau tại R thuộc (O).

Từ tứ giác PQBN nội tiếp suy ra $NPB = NQB = BCP$.

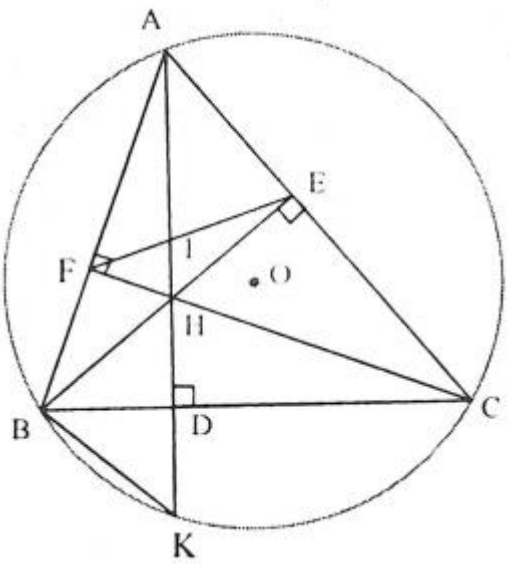
Từ tứ giác PMCQ nội tiếp ta có:

$PBC = RPB - PCB = RPN + NPB - NPB = RPN = MPC = MQC$

Từ đó nếu QM cắt BP tại điểm S thì SBQC nội tiếp hay S thuộc đường tròn (O).

13.

a) Ta có: $BKA = ACB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AB)



Mà $ACB = BHK$ (cùng phụ với góc EBC) $\Rightarrow BKA = BHK$

$\Rightarrow$ tam giác BHK cân $\Rightarrow BH = BK$

Lập luận tương tự ta có $CH = CK$

$\Rightarrow$ BC là trung trực của HK.

Ta có: $AEH = AFH = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác AFHE nội tiếp.

Xét tam giác AIE và tam giác FIH ta có:

$AIE = FIH$ (2 góc đối đỉnh),

$IAE = IFH$ (Tứ giác AFHE nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta AIE \backsim \Delta FIH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AI}{EI} = \dfrac{FI}{HI} \Rightarrow AI.HI = EI.FI$

b) Xét tứ giác DHEC ta có: $HDC = BEC = 90° \Rightarrow$ Tứ giác DHEC nội tiếp .

Xét tứ giác BFEC ta có: $BFC = BEC = 90° \Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp

$\Rightarrow AFE = ACB$ mà $ACB = AKB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AFE = AKB \Rightarrow$ Tứ giác KBFI nội tiếp .

c) Theo như trên ta đã có: $BKH = BHK$ mà $BHK = IHE$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow BKH = IHE$.

Xét tam giác HEI và tam giác KAB ta có:

$BKH = IHE$ (cmt), $IHE = BAK$ (tứ giác AFHE nội tiếp)

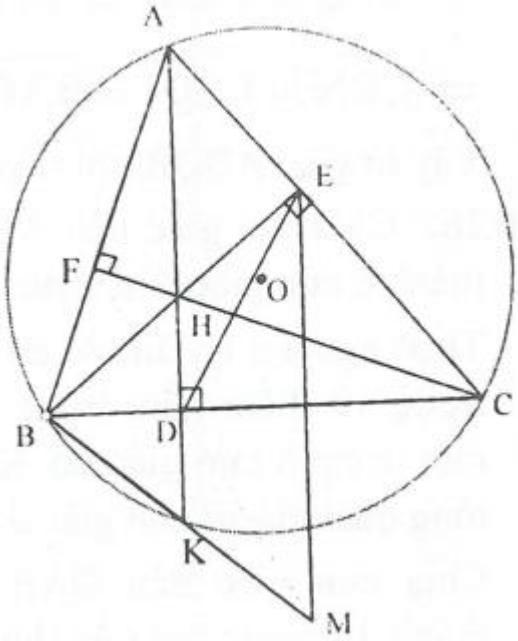
$\Rightarrow \Delta HEI \backsim \Delta KAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KB}{AB} = \dfrac{HI}{EI}$

Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{KC}{AC} = \dfrac{HI}{FI}$

Từ đó suy ra

$$\frac{KB}{AB} + \frac{KC}{AC} = IH\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{FI}\right) = IH.\frac{EI + FI}{EI.FI} = \frac{IH.EF}{AI.HI} = \frac{EF}{AI}$$

(theo chứng minh ở câu a có $IF.IE = IH.IA$).



d) Ta có: $BME = BKH$ (2 góc ở vị trí đồng vị do $HK // ME$)

Mà $BKH = BHK$; $BKH = BME$ (2 góc ở vị trí đồng vị do $HK // ME$)

$\Rightarrow BME = BEM \Rightarrow$ Tam giác BEM là tam giác cân.

Ta có: $AD \perp BC$ mà $EM // BC \Rightarrow EM \perp BC$.

Trong tam giác cân BEM có BC là đường cao của tam giác (do $BC \perp ME$)

$\Rightarrow$ BC là trung trực của ME.

Ta có D nằm trên đường trung trực của $ME \Rightarrow DM = DE$

$\Rightarrow$Tam giác DME là tam giác cân

$\Rightarrow MDC = EDC$.

Xét tứ giác ABDE ta có: $ADB = AEB = 90°$

$\Rightarrow$Tứ giác ABDE nội tiếp

$\Rightarrow EDC = BAC$.

Xét tứ giác AFDC ta có: $AFC = ADC = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác AFDC nội tiếp $\Rightarrow BAC = BDF$.

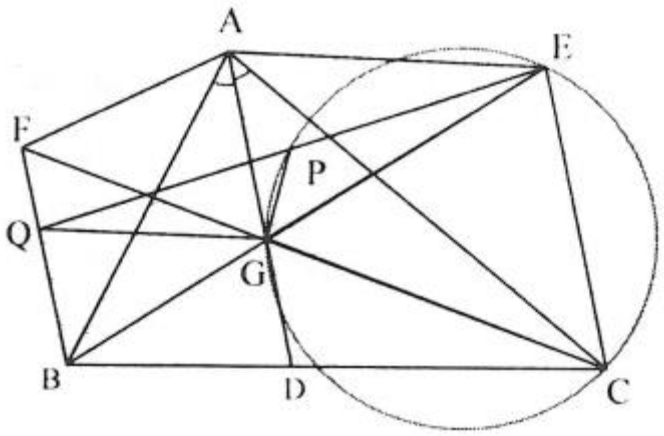
Từ đó suy ra $MDC = BDF$

Ta có: $180° = BDC = MDC + BDM = BDF + BDM = FDM$

$\Rightarrow$Ba điểm F, D, M thẳng hàng.

14.

a) Ta có ΔABF ; ΔACE là các tam giác cân tại F và E



Và $FBA = BAD = DAC = ECA \Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta ACE$.

b) Gọi G là giao điểm của BE và CF.

Ta có: $\frac{GF}{GC} = \frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$

$\Rightarrow DG // BF$

Mặt khác $DA // BF$ suy ra A, D, G thẳng hàng.

Suy ra điều phải chứng minh.

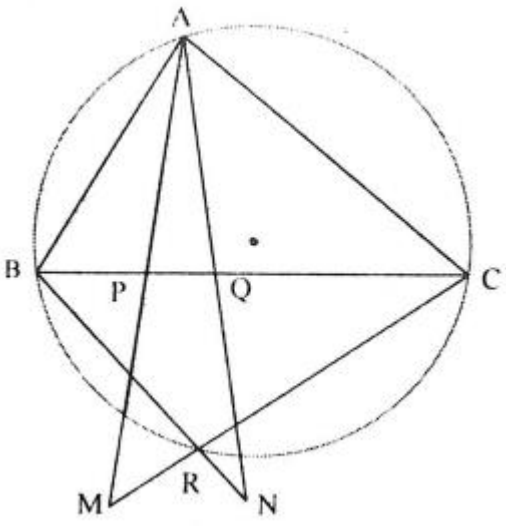
c) Ta có $BQG = QGA = GAE = GAC$

$= GAC + CAE = GAB + BAF = GAF$

Suy ra AGQF là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác $QPG = GCE = GFQ$ nên QGPF là tứ giác nội tiếp. Suy ra điều phải chứng minh.

15. Gọi R là giao điểm của BN và CM.



Ta thấy $\Delta ABC \backsim \Delta PAC \backsim \Delta QBA$

Do đó $\frac{BQ}{QA} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow \frac{QB}{QN} = \frac{PM}{PC}$.

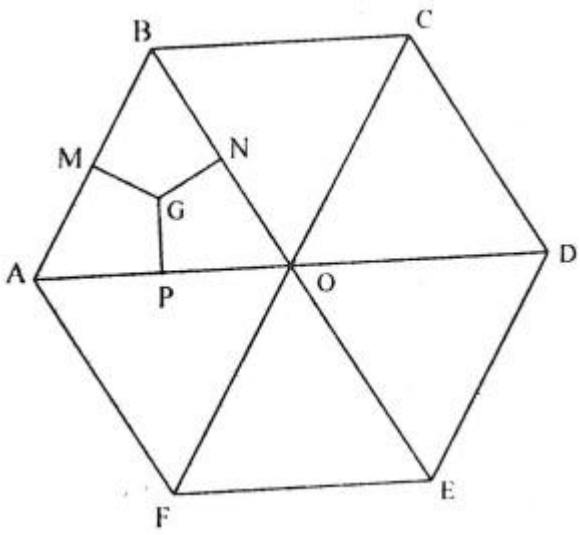
Mặt khác $MPC = NQB$ nên $\Delta MPC \backsim \Delta BQN$

$BNQ = PCM \Rightarrow$ Tứ giác QCNR nội tiếp

$\Rightarrow CRN = CQN = BAC$.

Vậy tứ giác ABQR nội tiếp, suy ra điều phải chứng minh.

16. Chia lục giác đều ABCDEF tâm O thành 6 tam giác đều cạnh 4cm (hình vẽ).



Theo nguyên lý Điriclê có ít nhất 4 điểm trong 19 điểm nằm trong hay trên cạnh một trong 6 tam giác đó. Không mất tính tổng quát giả sử tam giác đó là OAB.

Chia tam giác đều OAB trọng tâm G thành 3 tứ giác nội tiếp (hình vẽ) với $GM \perp AB$; $GN \perp OB$; $GP \perp OA$.

ΔOAB đều cạnh bằng 4 có đường cao $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow GA = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Các tứ giác GMBN, GMAP, GPON nội tiếp trong đường tròn đường kính GB, GA, GO đều bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Theo nguyên lý Điriclê có ít nhất 2 điểm trong 4 điểm đang xét nằm trong hay trên cạnh một trong 4 tứ giác nói trên, giả sử tứ giác đó là GMBN

$\Rightarrow$ khoảng cách giữa hai điểm đó không vượt quá đường kính $GB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

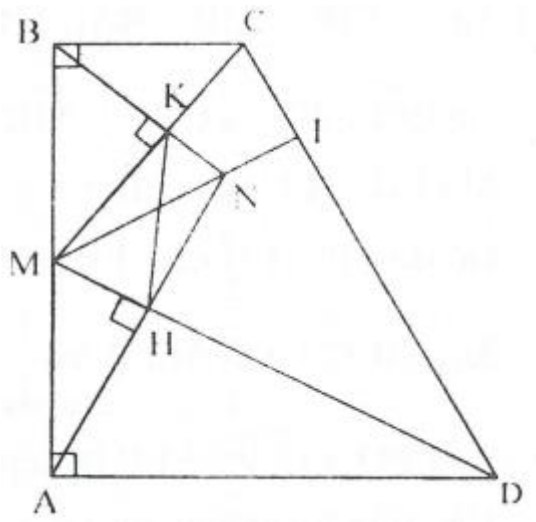
14. Gọi H là giao điểm cúa AN và MD, K là giao điểm cua BN và MC, I là giao điểm của MN và CD.

ΔAMD vuông tại A, AH là đường cao $\Rightarrow AM^2 = MH.MD$.

ΔBMC vuông tại B, BK là đường cao $\Rightarrow BM^2 = MK.MC$.

Mà $AM = BM$

Do đó $MH.MD = MK.MC \Rightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{MK}{MD}$



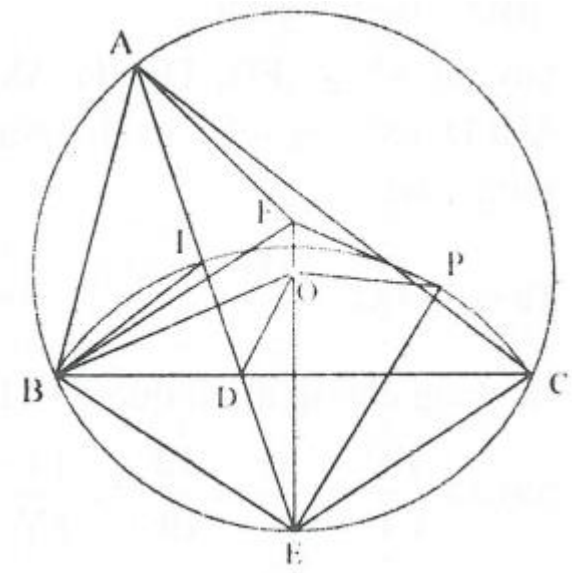
ΔMKH và ΔMDC có KMH chung, $\frac{MH}{MC} = \frac{MK}{MD}$

$\Rightarrow \Delta MKH \backsim \Delta MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow MKH = IDC$.

Tứ giác MKNH có $MKN + MHN = 90° + 90° - 180° \Rightarrow$ tứ giác MKNH nội tiếp $\Rightarrow MKH = MNH$, ta có

$MNH = IDN\left(= MKH\right) \Rightarrow$ tứ giác HNID nội tiếp $\Rightarrow MIC = NHD = 90°$. Vậy $MN \perp CD$.

18.



a) Ta có E, M, O, F thẳng hàng, $ME = MF$ (E, F đối xứng qua M) $EF \perp BC$

$\Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B $\Rightarrow BFE = FEB$.

Mặt khác $OB = OE$ suy ra ΔOBE cân tại O

$\Rightarrow OBE = OEB$.

Ta có $BFE = FEB = OBE$

$\Rightarrow \Delta BEF \backsim \Delta OBE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{OB} = \dfrac{EF}{EB} \Rightarrow EB^2 = EF.EO$

b) Không giảm tính tổng quát xét O nằm giữa M và F.

Dễ thấy $\Delta FBD \backsim \Delta EAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = ED.EA$

Ta có $ED.EA = EF.EO\left(= EB^2\right) \Rightarrow \dfrac{EO}{EA} = \dfrac{ED}{EF}$.

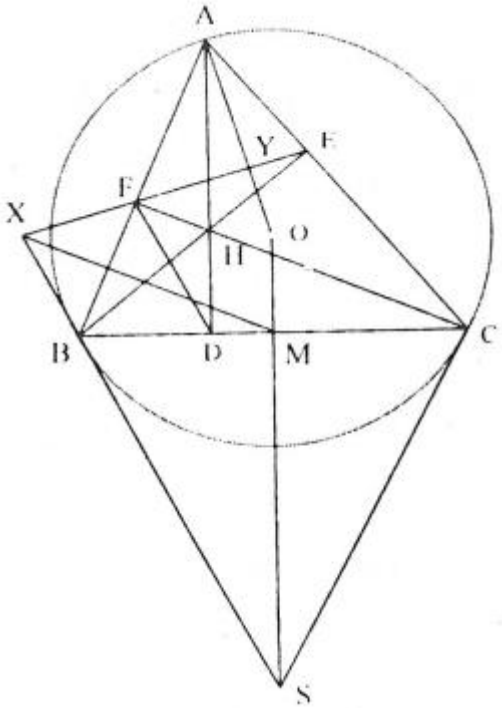
Xét ΔEOD và ΔEAF có $\dfrac{EO}{EA} = \dfrac{ED}{EF}$, OED chung $\Rightarrow \Delta EOD \backsim \Delta EAF$ (c.g.c)

$\Rightarrow EOD = EAF$, dẫn đến tứ giác DAFO nội tiếp. Vậy các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Ta có $EIB = ABI + BAI$, $ABI = IBC$, $BAI = CBE\left(EB = EC\right)$

$\Rightarrow EBI = IBC + CBE = ABI + BAI = EIB \Rightarrow \Delta EBI$ cân tại E $\Rightarrow EB = EI$

Mà $EB = EC$ nên $EB = EI = EC \Rightarrow$ E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IBC.



Do đó $EP = EB$ nên $EP^2 = EF.EO$.

Xét ΔEPO và ΔEFP có $\dfrac{EP}{EF} = \dfrac{EO}{EP}$, PEO chung

$\Delta EPO \backsim \Delta EFP$ (c.g.c)

$\Rightarrow EPO = EFP \Rightarrow$ EP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF.

Vậy tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua điểm E cố định.

19.

a) Vì $BE \perp CA$, $CF \perp AB$ nên BCEF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow XFB = ACB = XBF \Rightarrow \Delta XFB$ cân tại X.

Mà ΔMFB cân tại M, suy ra $MX \perp BF$.

b) Dễ thấy $MX \perp AB$, $HF \perp AB$ nên $MX // HF$; $MS \perp BC$, $HD \perp BC$ nên $MS // HD$.

Mặt khác, do CAFD là tứ giác nội tiếp và SB tiếp xúc với (O) tại B nên $SBD = BAC = BDF$

Suy ra $SX // FD$. Do đó $\Delta MXS \backsim \Delta HFD$ (có cặp canh tương ứng song song).

c) Ta có: $OAE = \dfrac{180° - AOC}{2} = 90° - ABC = 90° - AEF$, suy ra $OA \perp EF$.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$; $\Delta AFY \backsim \Delta ACD$.

Suy ra $\dfrac{FY}{CD} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} \Rightarrow \dfrac{EF}{FY} = \dfrac{BC}{CD}$

20.

1) H là trung điểm của BC nên $OH \perp BC$.

$\Delta BMO = \Delta CNO$ (cgc) suy ra $OM = ON$ (1)

Tam giác OMN cân tại O, I là trung điểm của MN nên $OI \perp MN$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm O, M, H, I cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

2) Chứng minh tứ giác ABON nội tiếp (vì $PAN + PON = 60° + 120° = 180°$)

Suy ra $OPN = OAN = 30°$

Chứng minh tương lự. $OPM = 30°$, suy ra $MPN = 60°$.

Kết hợp với $MP = NP$ (P thuộc đường trung trực OI cua MN)

Suy ra tam giác MNP đều.

3) Từ câu 1 suy ra $IHC = IOM - 60° = ABC$ nên $IH // AB$.

Suy ra đường thẳng IH cố định. Gọi K là trung điểm của AC suy ra H, I, K thẳng hàng.

Lấy điểm T đối xứng với A qua HI suy ra T cố định.

Ta có $AI + BI + AB = TI + IB + AB \geq BT + AB = const$.

Chu vi tam giác AIB nhỏ nhất bằng $BT + AB$, đạt được khi ba điểm B, I,T thẳng hàng.

Khi đó I là trung điểm của BT cố định (theo tính chất đường trung bình ΔBAT).

Suy ra tứ giác BMTN là hình bình hành và $TN // BC$.

Lại có $BH = KT$, $BK = MT$

Suy ra tứ giác BHTK là hình bình hành và $TK // BC$.

Từ đó $N \equiv K$, suy ra $M \equiv H$.

21.

1) Chứng minh bốn điểm A, E, P, F cùng nằm trên một đường tròn

Ta có $AEP = ADB$ (chắn cung AB của (ABD)):

Ta có $AFP = ADC$ (chắn cung AC của (ADC));

Nên $AEP + AFP = ADB + ADC$ nên AEFP nội tiếp

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại I

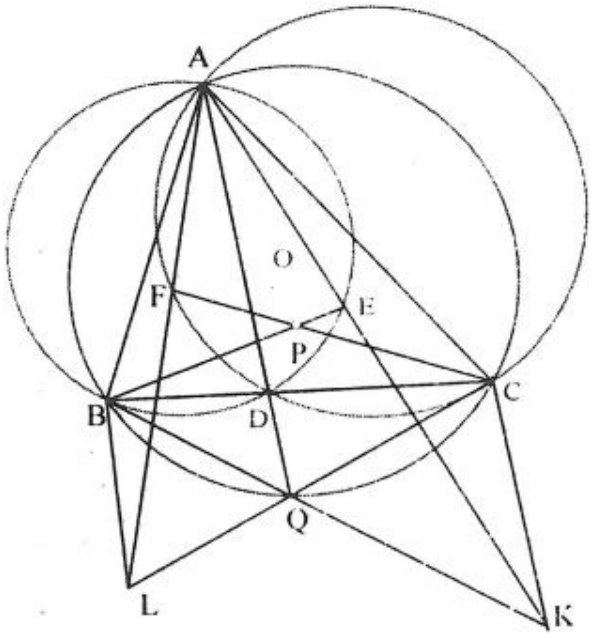
Chứng minh tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF

Xét ΔABE; ΔCLF có $AEB = CFL$ (cùng bù AFP) (1) ta lại có $BAE = BAD + DAE$;

$FCL = BCL + FCB$ mà $BAD = BCL$; $DAE = FCB$;

Nên $BAE = FCL$ (2) từ (1) và (2) suy ra $\Delta ABE \backsim \Delta CLF$ (g.g)

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB chứng minh $QKL + PAB = QLK + PAC$



Theo 2) $\Delta ABE \backsim \Delta CLF$ nên $LF.AE = BE.CF$

Ta lại có $KE.AF = BE.CF$

Suy ra $KE.AF = LF.AE$

$\Leftrightarrow \dfrac{LF}{AF} = \dfrac{KE}{AE} \Rightarrow EF // LK$

Nên $AEF = AKL$

Mà $AEF = APF \Rightarrow APF = AKL$

Nên $PAC + PCA = EKP + QKL$

Mà $PCA = EKP \Rightarrow PAC = QKL$.

Tương tự $PAB = QLK$, suy ra $QKL + PAB = QLK + PAC$.

22.

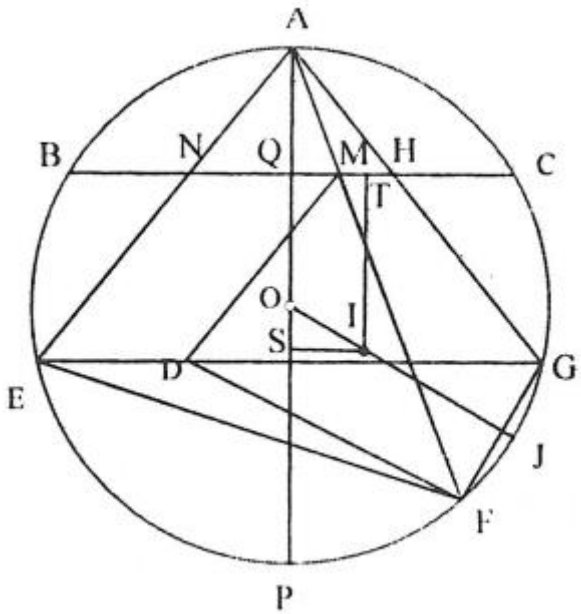
a) Ta có $MNE = \dfrac{1}{2}\left(sd\,AB + sd\,BEF\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(sd\,AC + sd\,BEF\right)$

$AFE = \dfrac{1}{2}\left(sd\,AB + sd\,BE\right)$

Suy ra: $MNE + MFE = 180°$

Vậy tứ giác MNEF nội tiếp.



b) Gọi P là giao điểm khác A của AO với đường tròn $(O;R)$.

Lấy G đối xứng với E qua $AP \Rightarrow D \in EG$, $G \in (O)$

Ta có $MDG = NEG$, $AEG = AFG \Rightarrow MDG = MFG$

Suy ra tứ giác $MDGF$ nội tiếp (1)

Gọi giao điểm của AG và BC là H.

Chứng minh tương tự a) có tứ giác MHGF nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra các điểm M, H, D, G, F nằm trên một đường tròn.

Trung trực của đoạn thẳng FG đi qua O và cắt đường tròn (O) tại J; $I \in OJ$, $sd\,JF = sd\,JG$ và $sđ\,PG = sđ\,PE$ nên $JOP = \alpha$ hay I nằm trên đường thẳng cố định. Đó là đường thẳng đi qua O và tạo với AO một góc α không đổi.

c) Hạ $IT \perp BC (T \in BC) \Rightarrow TH = TM$.

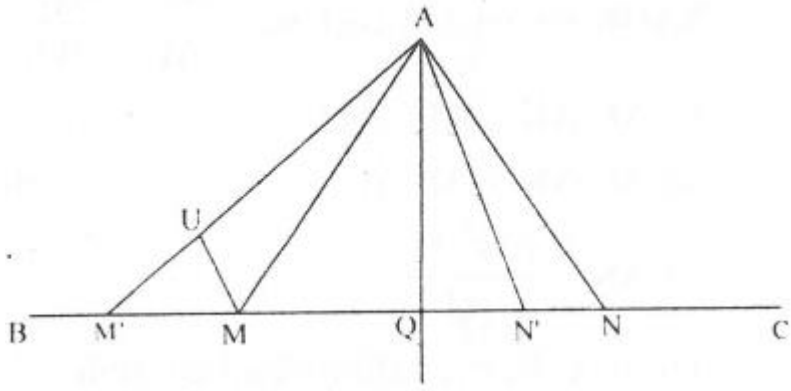
Gọi Q là giao điểm của BC và AP.

Do $QH = QN$

Suy ra $QT = QH - MH$

$$\frac{1}{2}(NM - MH) = \frac{1}{2}MN$$

Kẻ $IS \perp AP \Rightarrow IS = QT = \frac{1}{2}MN$



Tam giác vuông OSI có $IOS = \alpha$ không đổi nên OI nhỏ nhất khi và chỉ khi IS nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MN nhỏ nhất.

Ta chứng minh MN nhỏ nhất khi và chỉ khi tam giác AMN cân tại A.

Thật vậy, trên BC lấy $M'N'$ sao cho $M'AN' = \alpha$.

Không mất tính tổng quát giả sử $QM' > QN'$

Suy ra $AM' > AN'$.

Trên đoạn AM' lấy điểm U sao cho $AU = AN'$

$\Rightarrow \Delta AUM = \Delta ANN'$ (c.g.c)

$\Rightarrow S_{AM'M} > S_{ANN'} \Rightarrow MM' > NN' \Rightarrow M'N' > MN$

Với $\alpha = 60°$; $BC = R$ suy ra $AQ = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R(2-\sqrt{3})}{2}$

$$MN = \frac{R(2-\sqrt{3})}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{R(2\sqrt{3}-3)}{3} \Rightarrow OI = \frac{R(2\sqrt{3}-3)}{6}$$

23.

1. I là trung điểm của BC (Dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow OIA = 90°$

Ta có $AMO = 90°$, $ANO = 90°$

Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

2. AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) nên OA là phân giác MON mà ΔMON cân ở O nên $OA \perp MN$

$\Delta ABN \backsim \Delta ANC$ (Vì $ANB = ACN$, CAN chung)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$

ΔANO vuông tại N đường cao NH nên

$AH.AO = AN^2$

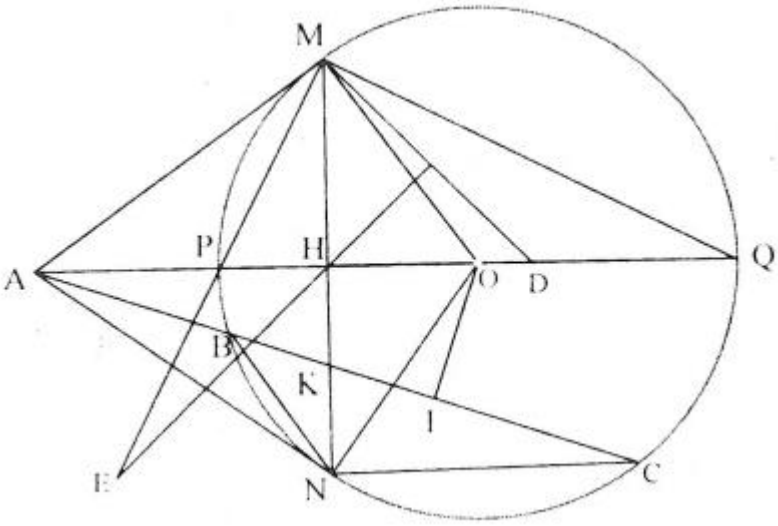
$\Rightarrow AB.AC = AH.AO$

$\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (g-g) nên $\dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AK}{AO}$

$\Rightarrow AI.AK = AH.AO$

$\Rightarrow AI.AK = AB.AC$

$\Rightarrow AK = \dfrac{AB.AC}{AI}$



Ta có A, B, C cố định nên I cố định

$\Rightarrow AK$ cố định

Mà A cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB $\Rightarrow$ K cố định

3) Ta có $PMQ = 90°$

Ta có: $\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MQ} = \dfrac{MH}{DQ}$

Ta có: $\Delta PMH \backsim \Delta MQH \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MH}{QH} = \dfrac{MH}{2DQ}$

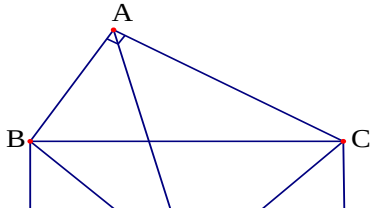
$\Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{ME}{MQ} \Rightarrow ME = 2MP \Rightarrow$ P là trung điểm ME.

C.TỰ LUYỆN

Bài 1. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc BAC.

Lời giải:

Vì O là tâm của hình vuông nên $BOC = 90^0$.



Lại có $BAC = 90^0$ suy ra bốn điểm A, B, O, C

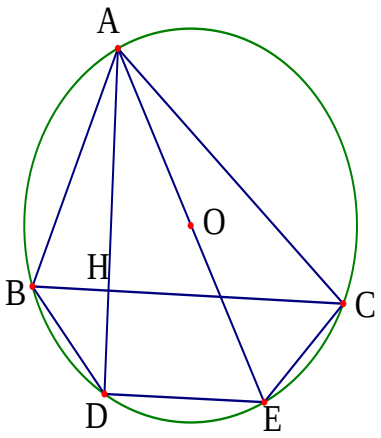
cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Đối với đường tròn này ta thấy $BAO = BCO$ (cùng chắn BO). Mà $BCO = 45^0 \Rightarrow BAO = 45^0$.

Do $BAC = 90^0$, nên $CAO = BAC - BAO = 45^0$. Vậy $BAO = CAO$, nghĩa là AO là tia phân giác của góc vuông BAC (đpcm).

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O. Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $BAH = OAC$.

Lời giải:



Kẻ đường kính AE của đường tròn O. Ta thấy $ACE = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Từ đó $OAC + AEC = 90^0$ (1).

Theo giả thiết bài ra, ta có: $BAH + ABC = 90^0$ (2). Lại vì $AEC = ABC$ (cùng chắn AC) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $BAH = OAC$ (đpcm).

Lưu ý: Cũng có thể giải bài toán theo hướng sau: Gọi D là giao điểm của tia AH với đường tròn O, chứng tỏ tứ giác $BDEC$ là hình thang cân. Từ đó suy ra $\text{sđ}BD = \text{sđ}CE$, dẫn đến $BAD = CAE$, hay $BAH = OAC$.

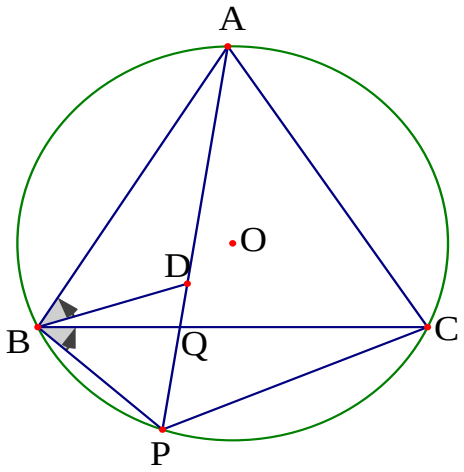
Bài 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O. Trên cung BC không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Lời giải:



a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P. Mặt khác, $BPD = BPA = BCA = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AB của đường tròn O). Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có $PB = PD$, vậy để chứng minh $PA = PB + PC$ ta sẽ chứng minh $DA = PC$. Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA có: $BA = BC$ (giả thiết), $BD = BP$ (do tam giác BPD đều). Lại vì $ABD + DBC = 60^0$, $PBC + DBC = 60^0$ nên $ABD = PBC$. Từ đó $\Delta BPC = \Delta BDA$ (c.g.c), dẫn đến $DA = PC$ (đpcm).

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $BPQ = 60^0$, $APC = ABC = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) suy ra $BPQ = APC, PBQ = PBC = PAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn PC). Từ đó $\Delta PBQ \sim \Delta PAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PQ}{PB} = \frac{PC}{PA}$, hay $PQ.PA = PB.PC$. Theo kết quả câu

b, ta có $PA = PB + PC$ nên $PQ\ PB + PC\ = PB.PC$. Hệ thức này tương đương với $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$ (đpcm).

Ghi chú:

- Tứ giác $ABCD$ có tính chất $AB.CD = BC.AD$ (*) nói ở ví dụ trên được gọi là tứ giác điều hòa. Loại tứ giác đặc biệt này có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học phẳng khác.

- Nếu hệ thức (*) dưới dạng $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$ và nhớ lại tính chất đường phân giác trong tam giác ta có thể nêu thêm một tính chất của tứ giác điều hòa.

- Tứ giác $ABCD$ là một tứ giác điều hòa khi và chỉ khi các đường phân giác của góc BAD và BCD cắt nhau tại một điểm trên đường chéo BD.

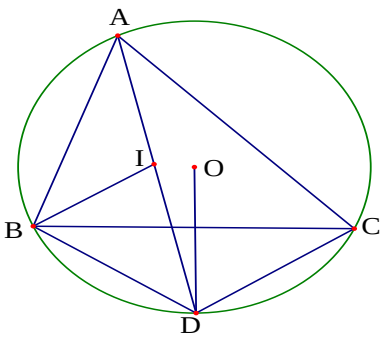
- Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi đường phân giác của góc ABC và ADC cắt nhau trên đường chéo AC.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB = DC = DI$

Lời giải:

Ta luôn có $DB = DC$ do AD là phân giác trong góc A. Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D.

Thật vậy ta có: $IBD = IBC + CBD$.



Mặt khác $CBD = CAD$
(Góc nội tiếp chắn cung CD) mà

$BAD = CAD$, $IBC = IBA$
(Tính chất phân giác) suy ra

$IBD = ABI + BAI$. Nhưng

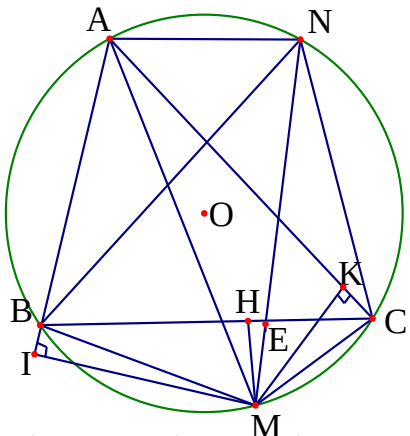
$BID = ABI + BAI$ (Tính chất góc ngoài). Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB = DI = DC$

<u>Nhận xét:</u> Thông qua bài toán này ta có thêm tính chất: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC là giao điểm của phân giác trong góc A với (O)

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Lấy điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A. Vẽ MH, MK, MI lần lượt vuông góc với $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$

Lời giải:

Trong bài toán có các tỷ số độ dài ta nghỉ đến các tam giác đồng dạng và định lý Thales.



Cách 1: Dựng đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại N. Gọi E là giao điểm của BC và MN

Ta có: $AB = NC$.

Ta có $BME \equiv BMN = \frac{1}{2}sđ\left(AB + AN\right) = \frac{1}{2}sđ\left(NC + AN\right) = AMC$,

$MBC = MAC \Rightarrow \Delta BME \sim \Delta AMC$ và MH, MK là hai đường cao tương ứng nên: $\frac{AC}{MK} = \frac{BE}{MH}$, chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{AB}{MI} = \frac{CE}{MH}$. Cộng hai đẳng thức trên ta có: $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$

Cách 2: Ta thấy MH, MI là các đường cao của tam giác MBC, MAB nhưng hai tam giác này không đồng dạng với nhau. Điều này giúp ta nghỉ đến việc lấy một điểm E trên cạnh BC sao cho $BMA = DMC$ để tạo ra tam giác đồng dạng nhưng vẫn giữ được hai đường cao tương ứng. (Phần lời giải xin dành cho bạn đọc).

Bài 6. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn O. Các tiếp tuyến của đường tròn O. Các tiếp tuyến của đường tròn O tại A và B cắt nhau tại điểm M. Từ A kẻ đường thẳng song song với MB

cắt đường tròn O tại C. MC cắt đường tròn O tại E. Các tia AE và MB cắt nhau tại K.

Chứng minh rằng $MK^2 = AK.EK$ và $MK = KB$.

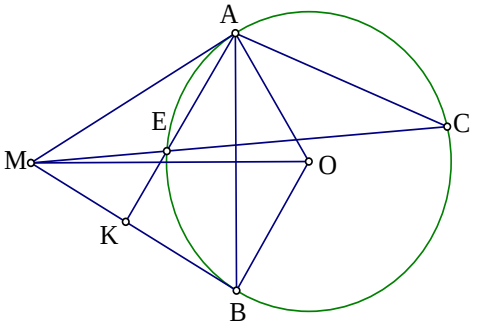
Lời giải:

Do $MB//AC$ nên

$BMC = ACM$ (1), ta lại có

$ACM = ACE = MAE$

(cùng chắn AE) (2). Từ (1) và (2)



suy ra $\Delta KME \sim \Delta KAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MK}{AK} = \dfrac{EK}{MK}$ hay $MK^2 = AK.EK$ (3). Ta thấy $EAB = EBK$ (cùng chắn BE). Từ đó $\Delta EBK \sim \Delta BAK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{EK}{BK}$ hay $BK^2 = AK.EK$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $MK^2 = KB^2$ nghĩa là $MK = MB$ (đpcm).

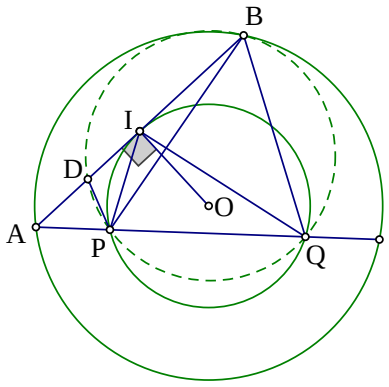
Bài 7. Cho đường tròn C tâm O, AB là một dây cung của C không đi qua O và I là trung điểm của AB. Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt đường tròn C_1 tâm O bán kính OI tại P và Q. Chứng minh rằng tích $AP.AQ$ không đổi và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ luôn đi qua một điểm cố định khác B.

Lời giải:

Ta có $PQI = PIA$ (cùng chắn PI), nên $\Delta API \sim \Delta AIQ$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AI}{AQ} \Rightarrow AP.AQ = AI^2$ (không đổi). Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ cắt AB tại D $D \neq B$.

Khi đó $\Delta ADP \sim \Delta AQB$, suy ra

$\dfrac{AD}{AQ} = \dfrac{AP}{AB}$ hay $AD.AB = AP.AQ = AI^2$ (không đổi). Do đó điểm D là điểm cố định (đpcm).



Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $BAC = 60^0$. Gọi M, N, P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.

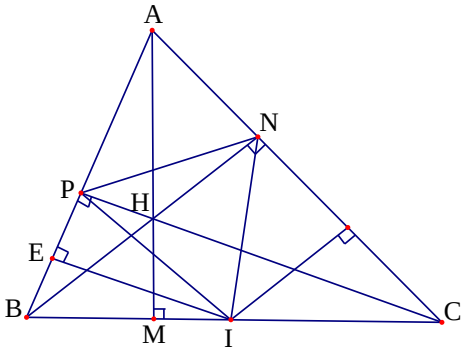
a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.

b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử IA là phân giác của NIP. Tìm số đo BCP.

Lời giải:

a). Từ giả thiết ta có



$IN = IP = \frac{1}{2}BC$ nên tam giác INP cân tại I. Lại vì B, P, N, C nằm trên đường tròn tâm I, đường kính BC nên theo mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung, ta thấy $PIN = 2PBN = 60^0$. Vậy tam giác INP đều.

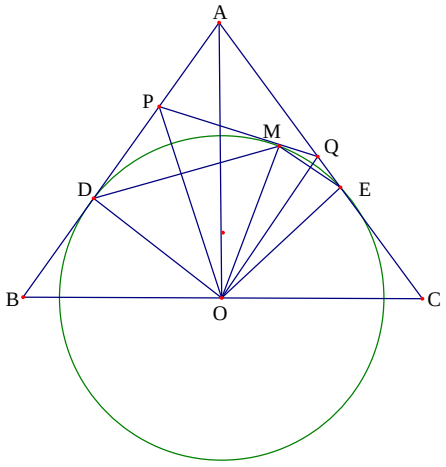
b) Rõ ràng bốn điểm I, M, E và K cùng nằm trên đường tròn đường kính AI.

c) Từ điều kiện của bài toán ta thấy AI là tia phân giác của $BAC = 60^0$, mà I là trung điểm của BC nên tam giác ABC đều. Từ đó suy ra $BCP = 30^0$.

Bài 9. Cho tam giác cân $ABC, (AB = AC)$. Gọi O là trung điểm của BC. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại D, E. M là điểm chuyển động trên cung nhỏ DE tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M cắt AB, AC tại P, Q. Chứng minh $BC^2 = 4BP.CQ$ và tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác APQ lớn nhất.

Lời giải:

Ta thấy $S_{\Delta ABC}$ không đổi nên $S_{\Delta APQ}$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{BPQC} nhỏ nhất, đây là cơ sở để ta làm



xuất hiện các biểu thức có liên quan đến BP, CQ. Ta có AB, PQ, AC

lần lượt là các tiếp tuyến tại các điểm

D, M, E của (O) nên ta có: $AB \perp OD, PQ \perp OM, AC \perp OE, BD = CE$. Từ đó ta tính được:

$$S_{BPQC} = \frac{1}{2} R\ BP + PQ + CQ\ = \frac{1}{2} R\ BD + 2DP + 2EQ + CE$$

$$= R.\ BD + DP + EQ\ = R\ BP + CQ - BD\ .$$

Mặt khác ta cũng có: $POQ = \frac{1}{2} DOE = \frac{1}{2}\ 180^0 - A\ = B = C$ nên suy ra

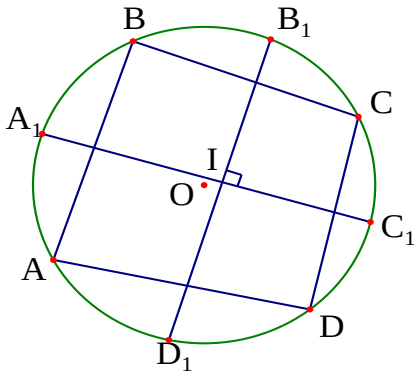
$$BOP = 180^0 - POQ - QOC = 180^0 - QCO - QOC = CQO \Leftrightarrow \Delta BPO \sim \Delta COQ$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{CO} = \frac{BO}{CQ} \Leftrightarrow BP.CQ = BO.CO = \frac{BC^2}{4}.$$ Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$BP + CQ \geq 2\sqrt{BP.CQ} = BC \Rightarrow S_{BPQC} \geq R.\ BC - BD\ .$$ Vậy S_{BPQC} nhỏ nhất khi $BP = CQ \Leftrightarrow M$ là trung điểm của cung DE.

Bài 10. Trên đường tròn O cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CD và DA. Chứng minh các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 vuông góc với nhau

Lời giải:



Gọi I là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ theo thứ tự là số đo của các cung AB, BC, CD, DA. Khi đó $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$. Xét góc A_1IB_1 là góc có đỉnh nằm trong đường tròn O. Ta có $A_1IB_1 = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}A_1BB_1 + \text{sđ}C_1DD_1\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}A_1B + \text{sđ}BB_1 + \text{sđ}C_1D + \text{sđ}DD_1\right)\ = \frac{1}{4}\ \alpha + \beta + \gamma + \delta\ = 90^0.$$

Nghĩa là $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (đpcm).

Bài 11. Cho bốn điểm A,D,C,B theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ (C và D nằm về cùng một phía so với AB). Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A,B trên đường thẳng CD. Tia AD cắt tia BC tại I. Biết rằng $AE+BF=R\sqrt{3}$.

a) Tính số đo AIB.

b) Trên cung nhỏ CD lấy điểm K. Gọi giao điểm của KA,KB với DC lần lượt là M và N. Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD.

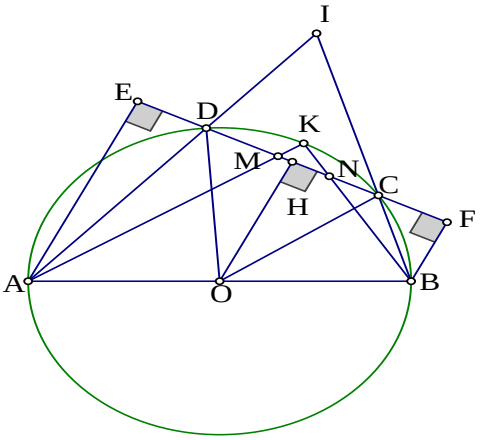
Lời giải:

a). Kẻ $OH\perp CD$ $H\in CD$,

ta thấy OH là đường trung bình của hình thang $ABFE$,

suy ra $OH=\dfrac{1}{2}\ AE+BF\ =\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó tam giác OCD đều,



suy ra $\text{sđ}COD=\text{sđ}KCD=60^0$.Ta thấy AIB có đỉnh nằm ngoài đường tròn O nên

$$\text{sđ}AIB=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}AmB-\text{sđ}KCD\right)=\frac{1}{2}\ 180^0-60^0\ =60^0.$$ b)

Ta thấy $\Delta AEM\sim\Delta NFB$ suy ra $EM.NF=AE.BF$ (không đổi) do đó MN lớn nhất khi và chỉ khi $EM+NF$ nhỏ nhất. Theo trên, $EM.NF$ không đổi nên $EM+NF$ nhỏ nhất khi $EM=FN=\sqrt{AE.BF}$. Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng $EF-2\sqrt{AE.BF}$.

Bài 12. Trong tam giác ABC, đường phân giác của BAC cắt cạnh BC tại D. Giả sử T là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A. Gọi M là giao điểm thứ hai của T và AC, P là giao điểm thứ hai của T và BM, E là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh rằng $EAB=MBC$.

b) Chứng minh hệ thức $BE^2=EP.EA$.

Lời giải:

a). Gọi N là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn T .

Do AD là phân giác của BAC

nên $\text{sđ}DM = \text{sđ}DN$. Ta có

$MBC = MBD = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DM - \text{sđ}DP\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DN - \text{sđ}DP\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}NP = NAP = EAB$ (đpcm).

b) Từ kết quả câu a, ta thấy $EBP = EAB$. Từ đó $\Delta EBP \sim \Delta EAB$ (g.g), suy ra $\frac{BE}{EP} = \frac{EA}{BE}$ hay

$BE^2 = EP.EA$ (đpcm).

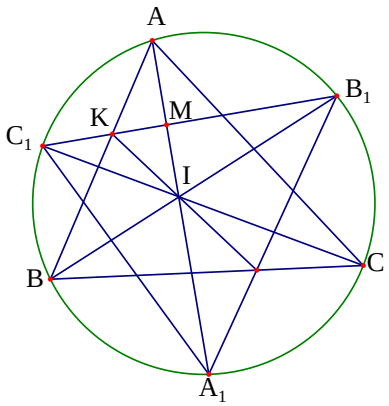
Bài 13. Trên đường tròn O ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

a) Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của $\Delta A_1B_1C_1$.

b) CHứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là đường phân giác trong của tam giác $\Delta A_1B_1C_1$.

c) Giả sử T_1 và T_2 là hai tam giác nội tiếp đường tròn O, đồng thời các đỉnh của tam giác T_2 là các điểm chính giữa của các cung đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác T_1. Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác T_1 và T_2 các đường chéo nối các đỉnh đối nhau song song với các cạnh của tam giác T_1 và đồng quy tại một điểm.

Lời giải:



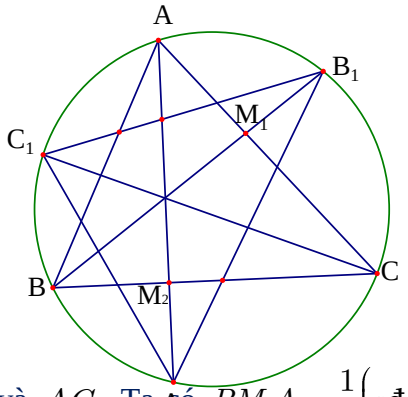
a) Ta chứng minh $AA_1 \perp B_1C_1$. Thật vậy, gọi M là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, khi đó:

$AMB_1 = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AB_1 + \text{sđ}A_1BC_1\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AB_1 + \text{sđ}A_1B + \text{sđ}BC_1\right)$

$= ABB_1 + A_1AB + BCC_1 = \frac{1}{2}\left(ABC + CAB + BCA\right) = 90^0$ (đpcm).

Chứng minh tương tự ta cũng có $BB_1 \perp A_1C_1; CC_1 \perp A_1B_1$.

b)



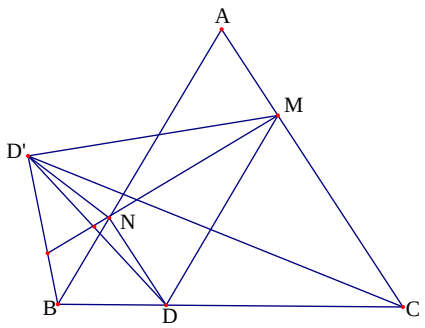
Gọi M_1 là giao điểm của BB_1 và AC. Ta có $BM_1A = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AC_1B + \text{sđ}A_1C\right) = BCA + A_1C_1C$ (1) Lại có $BM_2A = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AC_1B + B_1C\right) = BCA + B_1C_1C$ (2). Vì $BM_1A = BM_2A = 90^0$, nên từ (1) và (2) suy ra $A_1C_1A = B_1C_1C$. Tức là CC_1 chứa đường phân giác của $A_1C_1B_1$. Chứng minh tương tự, ta cũng thu được AA_1 chứa đường phân giác của $B_1A_1C_1$, BB_1 chứa đường phân giác của $A_1B_1C_1$.

c) Kí hiệu các đỉnh của tam giác T_1 là A, B và C; A_1, B_1 và C_1 là điểm chính giữa các cung BC, CA và AB tương ứng. Khi đó T_2 là tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường AA_1, BB_1, CC_1 chứa các đường phân giác của tam giác T_1 nên chúng đồng quy tại điểm I. Giả sử K là giao điểm của AB và B_1C_1. Ta chỉ cần chứng minh rằng $IK // AC$.

Thật vậy, ta thấy tam giác AB_1I cân tại B_1 nên tam giác AKI cân tại K. Từ đó $KIA = KAI = IAC$, dẫn đến $IK // AC$ (đpcm).

Bài 14. Cho tam giác cân ABC $AB = AC$ và D là một điểm trên cạnh BC. Kẻ $DM // AB$ ($M \in AC$), $DN // AC$ $N \in AB$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua MN. Tìm quỹ tích điểm D' khi điểm D di động trên cạnh BC.

Lời giải:



Phần thuận: Từ giả thiết đề ra ta thấy $NB = ND = ND'$,(1) do đó ba điểm B, D, D' nằm trên đường tròn tâm N. Từ đó $BD'D = \frac{1}{2} DMC$ (2). Lại có $BND = DMC = BAC$, nên từ (1) và (2) suy ra $BD'C = BAC$ (không đổi). Vì BC cố định, D' nhìn BC dưới một góc BAC không đổi, D' khác phía với D (tức là cùng phía với A so với MN) nên D' nằm trên cung chứa góc BAC vẽ trên đoạn BC (một phần của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Phần đảo: Bạn đọc tự giải.

Kết luận: Quỹ tích của điểm D' là cung chứa góc BAC trên đoạn BC. Đó chính là cung BAC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lưu ý: Quy trình để giải một bài toán quỹ tích như sau:

Để tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn một tính chất T nào đó ta tiến hành các bước

***Phần thuận:** Chỉ ra mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.

***Phần đảo:** Chứng tỏ rằng mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

***Kết luận:** Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H.

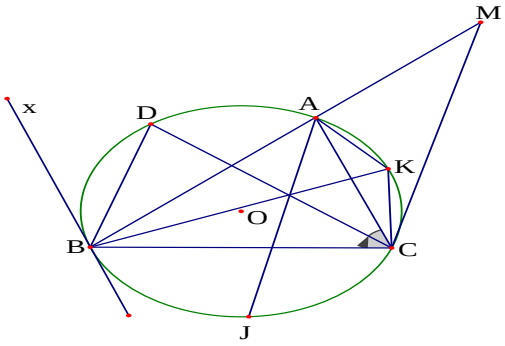
Chú ý rằng trong một số bài toán, sau phần thuận, trước phần đảo ta có thể thêm phần giới hạn quỹ tích.

Bài 15. Cho đường tròn O và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn O (A khác B, A khác C). Tia phân giác của ACB cắt đường tròn O tại điểm D khác điểm C. Lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho $DI = DB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn O tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh rằng tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định.

c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Tìm quỹ tích các điểm M khi A di động trên cung lớn BC của đường tròn O.



Lời giải:

a). Ta có

$$DBK=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}DA+\text{sđ}AK\right);\ \ \text{sđ}DIB=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}BD+\text{sđ}KC\right)$$

Vì $\text{sđ}BD+\text{sđ}DA$ và ΔDBI cân tại D nên $\text{sđ}KC+\text{sđ}AK$. Suy ra $AK=CK$

hay ΔKAC cân tại K (đpcm).

b) Từ kết quả câu a, ta thấy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên đường thẳng AI luôn đi qua điểm J (điểm chính giữa của cung BC không chứa A). Rõ ràng J là điểm cố định.

c) Phần thuận: Do ΔAMC cân tại A, nên $BMC=\frac{1}{2}BAC$. Giả sử số đo BAC là 2α (không đổi) thì khi A di động trên cung lớn BC thì M thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn BC về phía điểm O.

Phần đảo: Tiếp tuyến Bx với đường tròn O cắt cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC tại điểm X.

Lấy điểm M bất kỳ trên Cx (một phần của cung chứa góc α và vẽ trên đoạn BC $M\neq X;M\neq C$. Nếu MB cắt đường tròn O tại A thì rõ ràng A thuộc cung lớn BC của đường tròn O. Vì $BAC=2\alpha;AMC=\alpha$ suy ra ΔAMC cân tại A hay $AC=AM$.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M là cung Cx, một phần của cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC về phía O trừ hai điểm C và

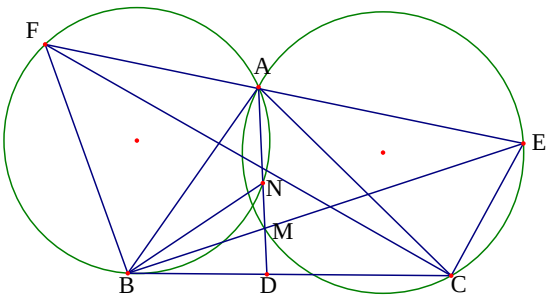
Bài 16. Giả sử AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC ($D\in BC$). Trên AD lấy hai điểm M và N sao cho $ABN=CBM$. BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm A,E,F thẳng hàng.

c) Chứng minh $BCF=ACM$, từ đó suy ra $ACN=BCM$.

Lời giải:



a) Ta có $BFC = BAN$ (cùng chắn cung BN); $BEC = CAN$ (cùng chắn CM), mà $BAN = CAN$, suy ra $BFC = BEC$.

Từ đó bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

b) Từ kết quả trên, ta có $CFE = NFA$. Do đó hai tia FA và FE trùng nhau nghĩa là ba điểm A, E, F thẳng hàng (đpcm).

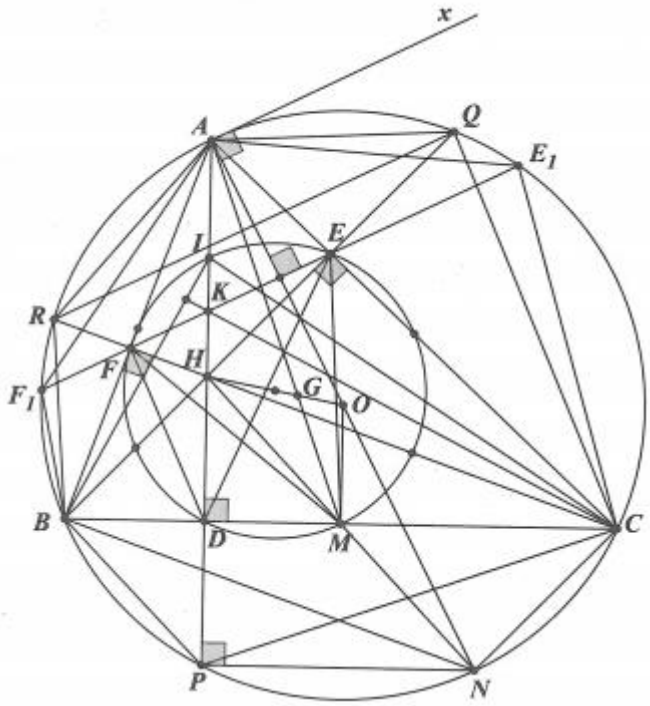
c) Vì $BCF = BEF$ và do $ACM = BEF$ nên $BEF = ACM$. Từ đó suy ra $ACM = BCF$, dẫn đến $ACN = BCM$ (đpcm).

----------Toán Học Sơ Đồ----------

HH9-CHUYÊN ĐỀ 4. CHÙM BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐIỂM, ĐƯỜNG ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC, TIẾP TUYẾN CÁT TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. CHÙM BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG CAO VÀ ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, các đường thẳng BH, CH kéo dài cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là P, Q, R (P khác B, Q khác C, R khác A). Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH, đường thẳng EF cắt AH tại K.



1. Các tứ giác $BFHD$, $CEHD$, $BFEC$ nội tiếp.

Chứng minh: Do AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $HDB = BFD = 90^0$

$\Rightarrow HDB + BFD = 180^0$ suy ra tứ giác $BFHD$ nội tiếp (tổng hai góc đối nhau bằng 180^0). Tương tự ta cũng có tứ giác $CEHD$ nội tiếp.

Ta có: $BFC = BEC$ nên $BFEC$ là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp F, E cùng nhìn cạnh BC một góc bằng nhau).

2. Các đường thẳng AD, BE, CF chứa các đường phân giác của góc EDF, DEF, EFD từ đó suy ra trực tâm H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Chứng minh: Vì $BFHD$ nội tiếp nên: $FBH = FDH$ (cùng chắn FH) (1), $CEHD$ nội tiếp nên $HDE = HCE$ (cùng chắn EH) (2), tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $FBE = FCE$ (cùng chắn EF) (3). Từ (1), (2), (3) ta suy ra $FDH = EDH$ hay AD là phân giác của góc EDF. Chứng minh tương tự ta cũng

có BE, CF chứa các đường phân giác của góc DEF, EFD từ đó suy ra trực tâm H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

3. Dựng đường kính của (O). Khi đó tứ giác $BHCN$ là hình bình hành. Suy ra H, M, N thẳng hàng. H, G, O thẳng hàng và $HO = 3GO$.

Chứng minh: Vì AN là đường kính của (O) nên $NC \perp AC$, do $BH \perp AC \Rightarrow BH \,//\, NC$. Chứng minh tương tự ta cũng có $CH \,//\, NB$ nên tứ giác $BHCN$ là hình bình hành, suy ra 2 đường chéo NH, BC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, mà M là trung điểm của BC nên N, H, M thẳng hàng.

Ta có MO là đường trung bình của tam giác AHN nên $MO // = \frac{1}{2} AH$. Gọi G là giao điểm của AM và HO, do $MO // AH$ (cùng vuông góc với BC). Theo định lý Thales ta có: $\frac{AG}{GM} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC và H, G, O thẳng hàng. Do $\frac{GO}{GH} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow HO = 3GO$. (Đường thẳng qua H, G, O gọi là đường thẳng Ơle của tam giác ABC).

4. Các đường thẳng AH, BH, CH kéo dài cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là P, Q, R khi đó:

P, Q, R là các điểm đối xứng với H qua BC, CA, AB.

Chứng minh: Vì AN là đường kính của (O) nên $APN = 90^0 \Rightarrow PN // DM$. Lại có M là trung điểm HN (chứng minh ở 3). Suy ra DM là đường trung bình của tam giác HPN suy ra D là trung điểm của HP. Nói cách khác P là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh tương tự ta cũng có: Q, R là các điểm đối xứng với H lần lượt qua CA, AB.

5. $OA \perp EF$, tam giác ARQ cân.

Chứng minh: Dựng tiếp tuyến Ax của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có $Ax \perp OA$ (4). Ta cũng có $xAC = ABC$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Mặt khác tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $AEF = ABC$ từ đó suy ra $xAC = AEF$ hay $EF // Ax$ (5). Từ (4) và (5) suy ra $EF \perp OA$. Chú ý rằng EF là đường trung bình của tam giác HQR nên $QR // EF \Rightarrow QR \perp OA$ suy ra OA vuông góc với QR tại trung điểm của QR nên tam giác AQR cân tại A.

6. Đường thẳng EF kéo dài cắt đường tròn (O) lần lượt tại E_1, F_1 (E nằm giữa E_1 và F). Khi đó: AE_1, AF_1, lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp các tam giác CEE_1, BFF_1.

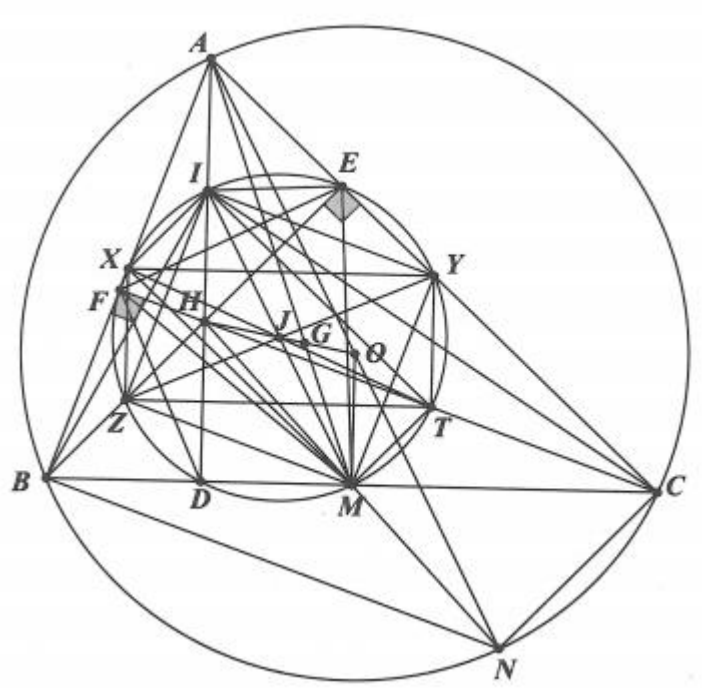
Chứng minh:

Theo chứng minh ở câu 5 ta có $EF // QR \Rightarrow E_1F_1 // QR$ suy ra tam giác AF_1E_1 cân tại A nên $AF_1E_1 = AE_1F_1$. Mặt khác $AE_1F_1 = AB_1E_1 \Rightarrow AF_1E_1 = ABF_1$. Suy ra AF_1 là tiếp tuyến của đường tròn

ngoại tiếp tam giác BFF_1. Chứng minh tương tự ta cũng có: AE_1 là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEE_1.

Chú ý rằng: Từ chứng minh trên ta cũng có các hệ thức đẹp: $AF_1^2 = AF.AB = AH.AD.$

$AE_1^2 = AE.AC = AH.AD.$



7. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của $AB, AC, HC, HB.$ Khi đó 9 điểm $D, E, F, X, Y, M, I, Z, T$ cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của OH (gọi là đường tròn Ơle của tam giác ABC).

Chứng minh: Ta có IZ là đường trung bình của tam giác $ABH \Rightarrow IZ // = \frac{1}{2} AB,$ YM là đường trung bình tam giác ABC nên $YM // = \frac{1}{2} AB.$ Từ đó suy ra $IZ // = YM \Rightarrow IZMY$ là hình bình hành. Lại có ZM là đường trung bình của tam giác BHC nên $ZM // CH$ mà $AB \perp CH$ suy ra $ZM \perp IZ$ vậy tứ giác $IZMY$ là hình chữ nhật nên hai đường chéo IM, ZY cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường. Tương tự ta cũng chứng minh được các tứ giác $XITM, XYTZ$ là các hình chữ nhật nên suy ra các đường chéo IM, ZY, TX đồng quy tại trung điểm J của mỗi đường.

Chú ý rằng: IDM, ZEY, TFX lần lượt vuông tại D, E, F nên tâm vòng tròn ngoại tiếp chính là trung điểm J của các cạnh huyền tương ứng. Suy ra 9 điểm $D, E, F, X, Y, M, I, Z, T$ cùng nằm trên đường tròn tâm J.

Ta cũng có: $OM // = \frac{1}{2} AH // = IH$ nên tứ giác $IHMO$ là hình bình hành, suy ra hai đường chéo IM, HO cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Nói cách khác điểm J cũng chính là trung điểm của $HO.$

Chú ý rằng: Nếu chứng minh mỗi bộ 4 điểm trong số 9 điểm nêu trên nằm trên một đường tròn thì ta có thể làm đơn giản hơn như sau:

Ví dụ: Chứng minh tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

Ta có: M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ nên $EMF = 2EBF$ (tính chất góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung). Mặt khác theo 2) ta đã chỉ ra $EDF = 2HDF = 2EBF$ suy ra $EMF = EDF$ hay tứ giác $DMEF$ nội tiếp (các đỉnh liên tiếp D, M cùng nhìn cạnh EF một góc bằng nhau).

8. K là trực tâm của tam giác IBC.

Chứng minh: Để chứng minh K là trực tâm của tam giác IBC ta chứng minh: $CK \perp IB$.

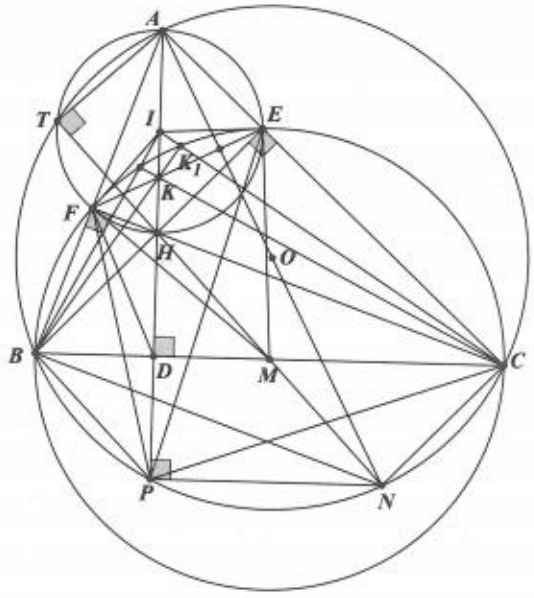
Ta sẽ chứng minh: $IBC + KCB = 90^0$.

Ta có: $IBC = IBE + EBC = IBE + 90^0 - ACB$ (5)

Để ý rằng: 4 điểm A, E, F, H nằm trên đường tròn tâm I là trung điểm của AH nên $EIH = 2EAH = 2PBC = PBE$ (do H đối xứng với P qua D). Suy ra tứ giác $EIBP$ nội tiếp nên $IBE = IPE$ (6). Ta cũng có: $AEF = ABC = APC$ nên tứ giác $EKPC$ nội tiếp suy ra $IPE = KPE = KCE = ACB - KCB$ (7). Từ (6) và (7) suy ra $IBE = ACB - KCB$ thay vào (5) ta có: $IBC = 90^0 - KCB$. Từ đó suy ra $IBC + KCB = 90^0$ vậy $KC \perp IB$ kết hợp với $IK \perp BC$ suy ra K là trực tâm tam giác IBC.

Ngoài ra ta cũng có thể làm theo cách sau:

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ cắt IC tại K_1 theo tính chất



Quen thuộc về tiếp tuyến cát tuyến ta có:

$IK_1.IC = IE^2$ (1') mặt khác ta cũng có 5 điểm I, F, D, M, E nằm trên cùng một đường tròn nên $IEF = IDF = IDE$ suy ra $\Delta IEK \backsim \Delta IDE \Rightarrow IE^2 = IK.ID$ (2').

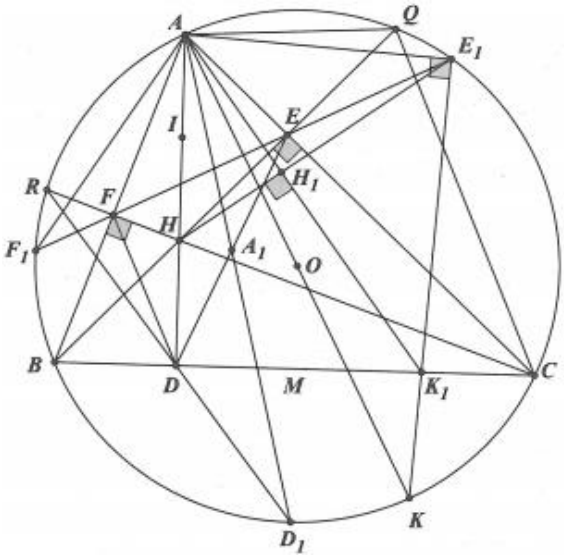
Từ (1'), (2') suy ra $IK_1.IC = IK.ID$ suy ra tứ giác DKK_1C nội tiếp. Nên $KK_1C = 90^0$.

Lại có $BK_1C = 90^0$ (Do K_1 nằm trên đường tròn đường kính BC), từ đó suy ra B, K, K_1 thẳng hàng hay $KB \perp IC$ kết hợp với $IK \perp BC \Rightarrow$ đpcm.

9. ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Chứng minh: Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF có tâm là trung điểm I của AH. Ta có $IAE = IEA$ (8), tam giác MEC cân tại M nên $MEC = MCE$ (9), $IAE + MCE = 90^0$ (10).

Từ (8), (9), (10) suy ra $IEA+MEC=90^0$ hay $IEM=90^0$ tức là ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh tương tự ta cũng có MF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.



10. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại T (T khác A) thì M,H,T thẳng hàng

Chứng minh: Ta thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cũng là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ chính là (I) đường kính AH.

Vì đường tròn (O) cắt (I) tại giao điểm thứ 2 là T nên $HTA=90^0$ và $NTA=90^0\Rightarrow N,H,T$ thẳng hàng.

Mặt khác theo 3) ta đã chứng minh: N,M,H thẳng hàng. Từ đó suy ra M,H,T thẳng hàng.

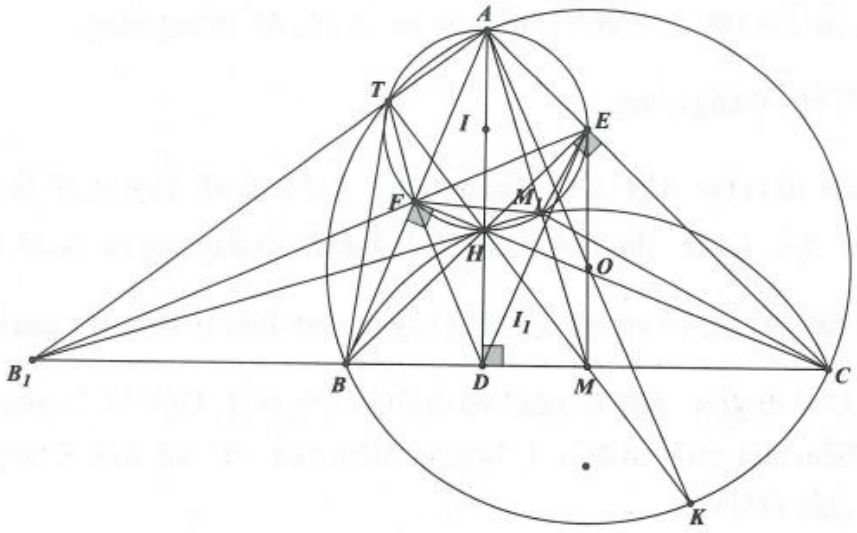
11. Đường thẳng RD kéo dài cắt đường tròn (O) tại D_1 thì AD_1 đi qua trung điểm của DE.

Chứng minh: Xét tam giác FHD và tam giác AED ta có: $DFH=DAE,\ FDH=ADE$ nên $\Delta FDH\backsim\Delta AED$ suy ra $\frac{FH}{HD}=\frac{AE}{ED}$, gọi A_1 là trung điểm của AD_1 thì $\frac{FH}{HD}=\frac{AE}{ED}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}RH}{HD}=\frac{AE}{2EA_1}$

$\Leftrightarrow\frac{RH}{HD}=\frac{AE}{EA_1}\Rightarrow\Delta RHD\backsim\Delta AEA_1$ nên $DRH=A_1AE,$ mặt khác $DRH=D_1AC$ suy ra $D_1AC=A_1AE$ hay $AA_1\equiv AD_1$ tức là A,A_1,D_1 thẳng hàng.

12. Đường thẳng KE_1 cắt BC tại K_1 thì $AK_1\perp HE_1$.

Chứng minh: Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AK_1 tại giao điểm thứ 2 là H_1 suy ra $AH_1H=90^0$ nên HH_1K_1D là tứ giác nội tiếp. Theo 6) cũng chứng minh được: $AH_1.AK_1=AH.AD=AE.AC=AE_1^2$. Tam giác AE_1K_1 vuông tại E_1 có $AE_1^2=AH_1.AK_1$ nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta suy ra $E_1H_1\perp AK_1$ (đpcm).



13. Đường thẳng AT cắt BC tại B_1 thì E,F,B_1 thẳng hàng.

Chứng minh:

Cách 1: Ta có tứ giác $ATBC$ nội tiếp nên $B_1T.B_1A=B_1B.B_1C$, giả sử B_1F cắt (I) tại E' thì tứ giác $ATFA'$ nội tiếp nên $B_1T.B_1A=B_1F.B_1E'$ từ đó suy ra $B_1B.B_1C=B_1F.B_1E'$ hay tứ giác $BFE'C$ nội tiếp, suy ra $E'\equiv E$. Suy ra E,F,B_1 thẳng hàng.

Cách 2: Ta có $TFB=360^0-TFE-EFB=180^0-TFE+180^0-EFB=TAC+ACB=180^0-AB_1B$ nên $TFB+AB_1B=180^0$ nên tứ giác $BFTB_1$ nội tiếp.

Ta có: $TFB_1+TFE=TBB_1+TFE=TAE+TFE=180^0$ suy ra E,F,B_1 thẳng hàng.

14. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF,HBC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AM.

Chứng minh: Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cắt đường thẳng AM tại M_1. Dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cũng chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ nên ta có: $HM_1A=HM_1M=90^0\Rightarrow HDMM_1$ là tứ giác nội tiếp. Ta có biến đổi góc sau: $EM_1M=360^0-EM_1H-HM_1M=180^0-EM_1H+180^0-HM_1M=HAE+HDC=180^0-ECM$ nên tứ giác EM_1MC nội tiếp.

Ta có: $HM_1C=360^0-HM_1E-EM_1C=180^0+180^0-HM_1E-EMC=180^0+HAC-EMC$

$=180^0+HAC-2HBC=180^0-HBC$ suy ra HM_1CB nội tiếp. Tức là: Đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF,HBC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AM.

Cách 2: Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và HEF cắt nhau tại M_1. Làm tương tự như trên ta chứng minh được các tứ giác EM_1MC,FM_1MB nội tiếp. Từ đó ta có:

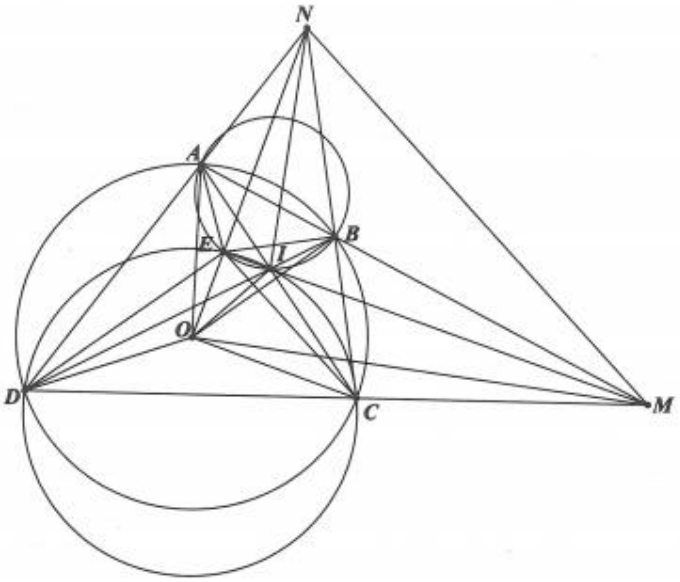
$AM_1E+EM_1M=AFE+180^0-ACB=180^0$ suy ra A,M_1,M thẳng hàng.

15. Ba điểm B_1,H,M_1 thẳng hàng.

Chứng minh: Theo 10 ta có: $MH \perp AB_1$, ta cũng có $AH \perp B_1M$ suy ra H là trực tâm của tam giác AB_1M suy ra $B_1H \perp AM$ theo 14 ta có $HM_1 \perp AM$ từ đây suy ra B_1, H, M_1 thẳng hàng.

Chú ý: Các tính chất 13, 14, 15 có thể dễ dàng suy ra nhờ định lý Brocard sau đây:

Định lý Brocad: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là giao điểm của AB và CD; N là giao điểm của AD và BC; I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác OMN.



Chứng minh:

Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI và CDI.

Trước tiên ta chứng minh: E, I, M thẳng hàng:

Thật vậy giả sử MI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB tại E' thì $MI.ME' = MB.MA = MC.MD$ suy ra 4 điểm D, E', I, C nằm trên một đường tròn suy ra $E' \equiv E$ suy ra M, I, E thẳng hàng.

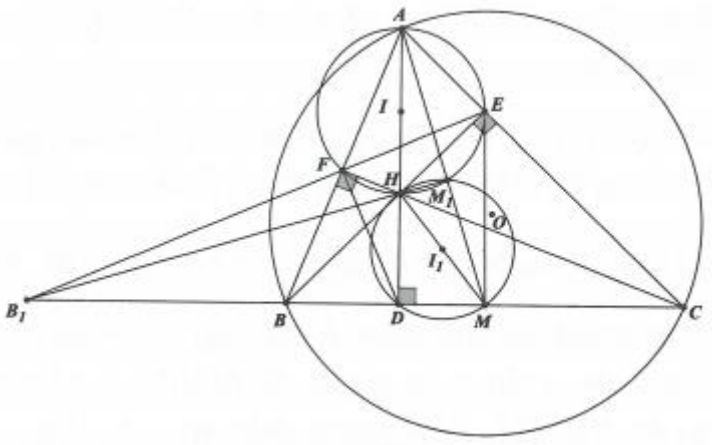
Ta có: $AED = 360^0 - DEI - AEI = 180^0 - DEI + 180^0 - AEI = ABD + ACD = AOD$ nên tứ giác $AEOD$ nội tiếp.

Ta cũng có: $BEC = BEI + IEC = BAC + BDC = BOC$ nên tứ giác $BEOC$ nội tiếp. Từ đó ta cũng suy ra N, E, O thẳng hàng.

Ta có: $OEM = OEC + CEM = OBC + BDC = \dfrac{180^0 - BOC}{2} + BDC = 90^0$ suy ra $ME \perp ON$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $NI \perp OM$ suy ra I là trực tâm của tam giác OMN.

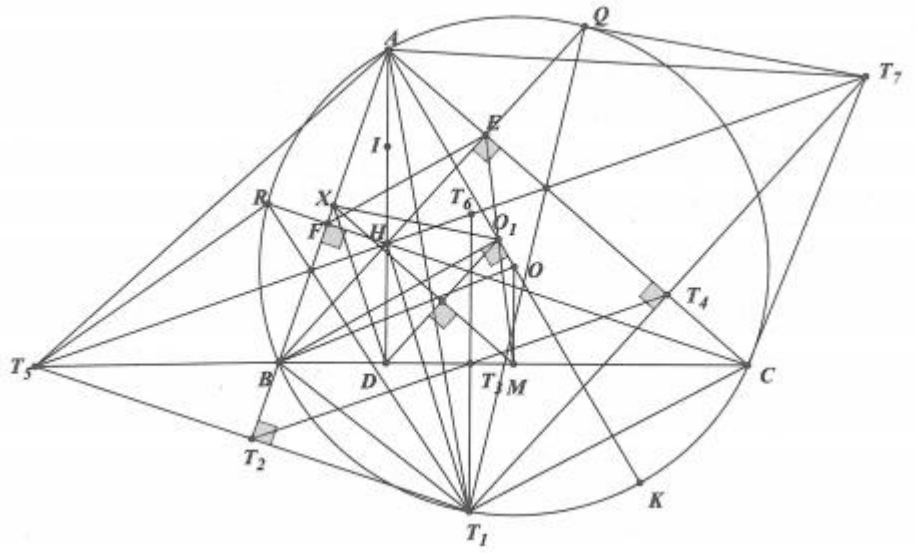
Trở lại bài toán: Ta thấy tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC, có giao điểm là hai đường chéo là H nên suy ra H là trực tâm tam giác AMB_1.

Cũng có thể chứng minh: $B_1H \perp AM$ mà không dùng đến định lý Brocard như sau: Gọi I_1 là trung điểm HM thì I_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM, các điểm E, F nằm trên đường tròn tâm I đường kính AH. Ta có: Tứ giác $DEFM$ nội tiếp trong đường tròn Ơle của tam giác ABC nên $B_1F.B_1E = B_1B.B_1M$ từ đó suy ra B_1H là trục đẳng phương của hai



đường tròn $\left(I;\frac{AH}{2}\right),\left(I_1;\frac{HM}{2}\right)$ suy ra $B_1H\perp II_1$, mà II_1 là đường trung bình của tam giác HAM suy ra $B_1H\perp AM$

16. Gọi T_1 là một điểm nằm trên (O), T_2,T_3,T_4 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm T_1 lên các cạnh AB,BC,CA. Khi đó các điểm T_2,T_3,T_4 nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Simson của điểm T_1 đối với đường tròn (O). Từ đó suy ra các điểm đối xứng với T_1 qua AB,BC,CA nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Steiner của điểm T_1 đối với tam giác ABC. Hãy chứng minh: Đường thẳng Steiner của điểm T_1 thì đi qua trực tâm H của tam giác ABC.



Chứng minh:

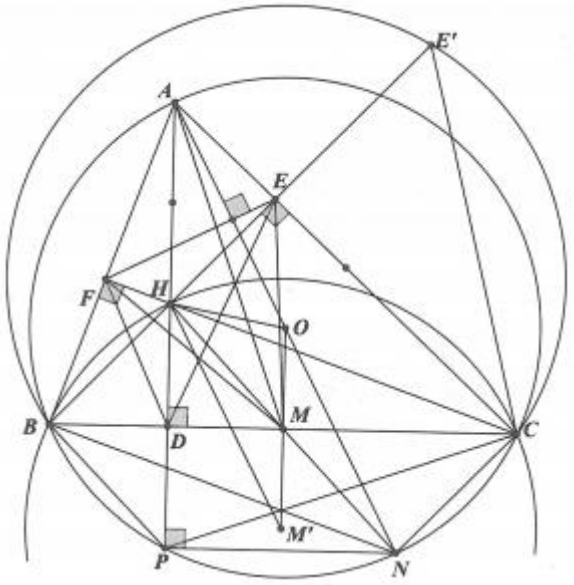
+ Tứ giác $T_1T_2BT_3$ có $BT_2T_1+BT_3T_1=90^0+90^0=180^0$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow T_2BT_1=T_2T_3T_1$ (cùng chắn cung T_2T_1), mà tứ giác ABT_1C nội tiếp nên $T_2BT_1=ACT_1$, do đó $T_2T_3T_1=ACT_1$.

Mặt khác tứ giác $T_1T_3T_4C$ nội tiếp nên $T_1T_3T_4+T_4CT_1=180^0\Rightarrow T_2T_3T_1+T_1T_3T_4=180^0$. Vậy T_2,T_3,T_4 thẳng hàng.

+ Ta có T_2,T_3,T_4 thẳng hàng. Dễ thấy T_2T_3 là đường trung bình của tam giác $T_1T_5T_6$ nên $T_2T_3//T_5T_6$. Tương tự $T_3T_4//T_6T_7$. Theo tiên đề Ơ-clit và do T_2,T_3,T_4 thẳng hàng nên suy ra T_5,T_6,T_7 thẳng hàng.

+ Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Theo 4) ta chứng minh được R đối xứng với H qua AB, Q đối xứng với H qua AC nên HRT_5T_1 là hình thang cân và các tứ giác $T_1T_2BT_3,T_1T_3T_4C$ nội tiếp nên ta có: $HT_5T_1=HRT_1=T_3BT_1=T_3T_2T_1$ do đó $HT_5//T_2T_3$. Tương tự ta cũng có: $HT_7//T_3T_4$ mà T_2,T_3,T_4 thẳng hàng nên T_5,H,T_7 thẳng hàng. Nói cách khác: Đường thẳng Steiner của điểm T_1 đi qua trực tâm của tam giác ABC.



17. Giả sử BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Chứng minh: Trực tâm H của tam giác ABC thuộc một đường tròn cố định.

Chứng minh: Do B,C cố định nên độ dài BC không đổi. Gọi M' là điểm đối xứng với O qua BC theo 3) ta suy ra $OM'//=AH$ nên tứ giác $AHM'O$ là hình bình hành và M' là điểm cố định và $M'H=OA=OB=OC=M'B=M'C=R$ (Do BC là trung trực của MM'). Như vậy M' chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Hay điểm H thuộc đường tròn cố định $(M';R)$.

18. Giả sử BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm vị trí điểm A để $HA+HB+HC$ lớn nhất.

Chứng minh:

Theo 17) ta có H thuộc đường tròn cố định $(M';R)$ mà BC là dây cung cố định của $(M';R)$ nên BHC không đổi suy ra $EHC=180^0-BHC=\varphi$ không đổi. Theo 3) ta cũng có: $AH=2OM$ suy ra HA có độ dài không đổi.

Như vậy để tìm GTLN của $HA+HB+HC$ ta quy về tìm GTLN của $HB+HC$.

Trên tia đối của tia HB ta lấy một điểm E' sao cho $HE'=HC\Rightarrow\Delta HE'C$ cân tại H $\Rightarrow HE'C=180^0-2CHE'=180^0-2\varphi$ không đổi. Suy ra E' chuyển động trên cung chứa góc $180^0-2\varphi$ dựng trên đoạn BC.

Ta có: $HB+HC=BE'$ nên $HB+HC$ lớn nhất khi và chỉ khi BE' là đường kính của đường tròn chứa cung chứa góc $180^0-2\varphi$ dựng trên đoạn BC tức là $BC\perp E'C$. Từ đó suy ra cách dựng điểm A như sau:

Dựng cung chứa góc $180^0-2\varphi$ trên đoạn BC, dựng tia $Cx\perp BC$ cắt cung chứa góc tại E'. Dựng đường thẳng qua B vuông góc với BE' cắt (O) tại A là vị trí cần tìm.

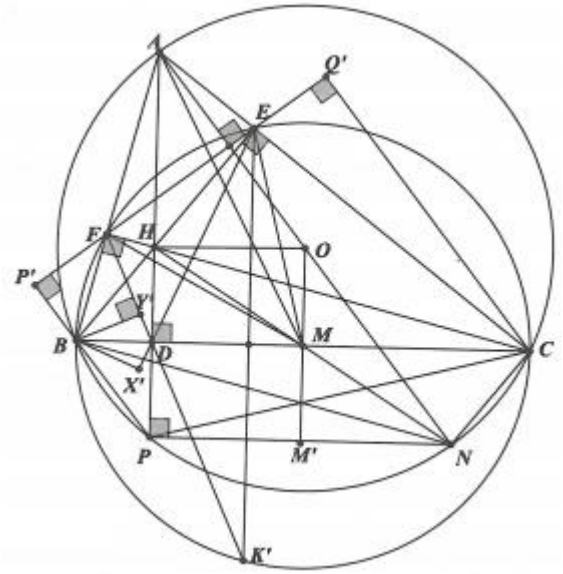
19. Giả sử BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm vị trí điểm A để $EF+FD+DE$ lớn nhất.

Chứng minh: Chứng minh: $OA \perp EF$ suy ra $S_{AEOF} = \frac{1}{2}OA.EF$, tương tự ta có: $S_{BDOF} = \frac{1}{2}OB.DF$, $S_{CDOE} = \frac{1}{2}OC.DE$ từ đó suy ra $2S_{ABC} = R(EF + FD + DE)$. Do R không đổi nên $EF + FD + DE$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ điểm A đến BC lớn nhất. Ta có $AH \le AM \le AO + OM = R + OM$ nên AH lớn nhất khi và chỉ khi A, O, M thẳng hàng. Hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác:

Ta thấy các điểm B, F, E, C nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC.

Do BC không đổi nên BAC không đổi.



Ta có ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ nên $MFE = BAC$ không đổi. Ta có $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \cos BAC$ không đổi suy ra độ dài EF không đổi.

Gọi K' là điểm đối xứng với E qua BC thì $EDC = K'DC$.

Ta lại có $EDC = EHC = FHB = FDB$. Suy ra $EDB = KDM$ nên F, D, K' thẳng hàng.

Ta có chu vi ΔDEF lớn nhất khi và chỉ khi $DE + DF$ lớn nhất. Từ các chứng minh trên ta có: $DE + DF = FK' \le 2R' = BC$. Suy ra $DE + DF$ lớn nhất khi và chỉ khi $D \equiv M$ hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Cũng có thể tiếp cận bài toán theo hướng khác: Gọi P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên EF. Ta có các tính chất quen thuộc FH, DH lần lượt là phân giác trong các góc EFD, FDE suy ra FB, FD lần lượt là các đường phân giác ngoài của EFD, FDE. Hạ BX', BY' lần lượt vuông góc với DE, DF thì suy ra $FP' = FY', DX' = DY', EP = EX'$ (tính chất một điểm nằm trên phân giác cách đều 2 cạnh). Ta có: Chu vi tam giác DEF là $2p = DF + EF + DE = Y'F + DX' + EF + DE = FP' + EF + EX' = EP' + EX' = 2EP'$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $2p = 2FQ'$. Suy ra $4p = 2(EP' + FQ') = 2(P'Q' + 2EF) \Rightarrow 2p = P'Q' + 2EF$ suy ra $DE + DF = P'Q'$. Mặt khác $P'Q' \le BC$ nên chu vi tam giác DEF lớn nhất bằng $EF + BC$ khi và chỉ khi $P'Q' // BC$ hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

20. Giả sử BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm vị trí điểm A để $DH.DA$ lớn nhất.

Chứng minh: Ta dễ chứng minh được: $\Delta BHD \backsim \Delta ACD \Rightarrow \frac{BD}{HD} = \frac{AD}{CD} \Leftrightarrow DH.DA = BD.CD$.

Theo bất đẳng thức Côsi ta cũng có $BD+CD\ge 2\sqrt{BD.CD}\Leftrightarrow BC\ge 2\sqrt{BD.CD}$ suy ra $BD.CD\le \frac{BC^2}{4}$.

Vậy $DH.DA\le \frac{BC^2}{4}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $BD=CD\Leftrightarrow D$ là trung điểm của BC, suy ra A là điểm chính giữa cung lớn BC.

21. Chứng minh: $HA.HB.HC\ge 8HD.HE.HF$ và $3R\ge HA+HB+HC$.

Để giải quyết câu hỏi này ta cần kiến thức bổ trợ là bài toán nổi tiếng sau:

Bất đẳng thức Erdoss-Mordell.

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Gọi R_a,R_b,R_c theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A,B,C. Còn d_a,d_b,d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC,CA,AB. Khi đó ta có bất đẳng thức:

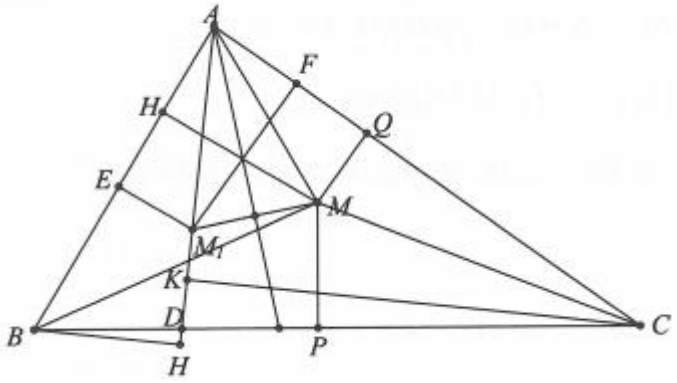
a, $R_a+R_b+R_c\ge 2\left(d_a+d_b+d_c\right)$.

b, $R_a.R_b.R_c\ge 8d_ad_bd_c$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là tâm của tam giác.

Hướng dẫn giải:

Đặt $BC=a,CA=b,AB=c$.



a, Lấy điểm M_1 đối xứng với điểm M qua đường phân giác trong của BAC. Dựng $BH\perp AM_1$ và $CK\perp AM_1$.

Giả sử AM_1 cắt BC tại D. Khi đó $BD\ge BH,DC\ge CK$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AD\perp BC$ hay $AM_1\perp BC$. Từ đó ta có: $a\ge BH+CK\Leftrightarrow aR_a\ge 2S_{ABM_1}+2S_{ACM_1}$ (chú ý rằng $AM_1=AM=R_a$) hay $aR_a\ge cd_b+bd_c$. Từ đó $R_a\ge \frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c$ (1). Tương tự ta có $R_b\ge \frac{a}{b}d_c+\frac{c}{b}d_a$ (2); $R_c\ge \frac{a}{c}d_b+\frac{b}{c}d_a$ (3). Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta thu được: $R_a+R_b+R_c\ge d_a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+d_b\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+d_c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 2\left(d_a+d_b+d_c\right)$.

(Sử dụng bất đẳng thức $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ cho các biểu thức trong ngoặc). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ đồng thời M_1 là trực tâm của tam giác ABC. Nói cách khác, M_1 (và do đó cả M) là tâm của tam giác đều ABC.

b, Từ cách chứng minh bất đẳng thức Erdos – Mordell ở câu a) ta có:

$R_a \ge \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ (1); $R_b \ge \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$ (2); $R_c \ge \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (3). Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được: $R_a.R_b.R_c \ge \left(\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c\right)\left(\frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a\right)\left(\frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a\right)$. Áp dụng bất đẳng thức: $x + y \ge 2\sqrt{xy}$ ta có: $\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}d_b.\frac{b}{a}d_c}.2\sqrt{\frac{a}{b}d_c.\frac{c}{b}d_a}.2\sqrt{\frac{a}{c}d_b.\frac{b}{c}d_a} = 8d_a d_b d_c$ (đpcm).

Trở lại bài toán:

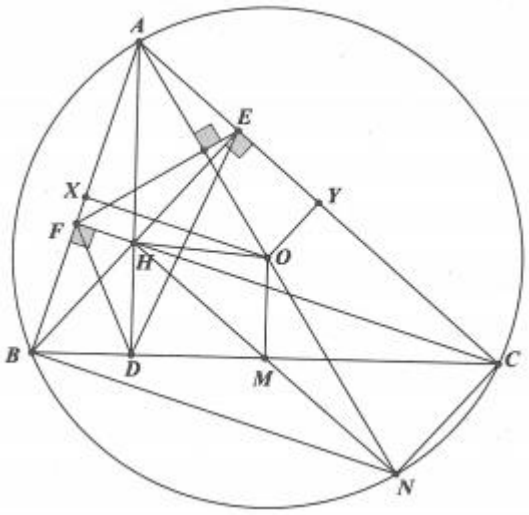
+ Áp dụng bất đẳng thức Erdor- Mordell dạng tích cho trực tâm H của tam giác ABC ta có ngay:

$HA + HB + HC \ge 8HD.HE.HF$.

+ Áp dụng bất đẳng thức Erdor- Mordell dạng tổng cho tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có: $OA + OB + OC \ge 2(OM + OX + OY)$.

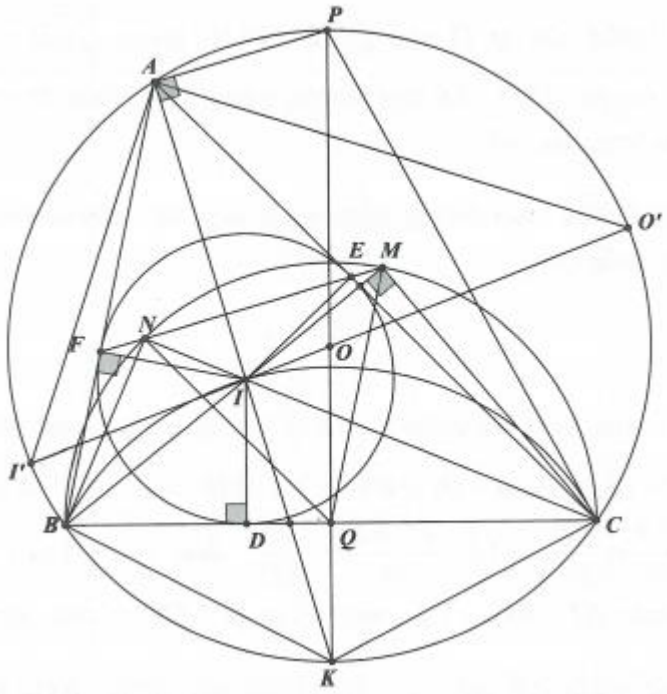
Theo 3) ta có $HA = 2OM$, tương tự $HB = 2OY, HC = 2OX$.

Suy ra $3R \ge HA + HB + HC$.



II. CHÙM BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

1. Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và nội tiếp (O), gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng AI kéo dài cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ 2 là K (K khác A). Ta có các tính chất, bài toán sau:



a, $KB = KC = KI$ (K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC).

Chứng minh:

Vì AI là đường phân giác trong của góc A nên K là điểm chính giữa của cung BC suy ra $KB = KC.$

Bây giờ ta chứng minh: Tam giác KBI cân tại I:

Ta có $BIK = IBA + ABI = IBC + IAC = IBC + CBK = IBK$ nên tam giác KBI cân tại K. Từ đó suy ra $KB = KI = KC.$

b, Đường thẳng BI, CI cắt EF lần lượt tại M, N. Khi đó 4 điểm I, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn, 4 điểm I, N, F, B cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh:

Xét tứ giác $IEMC$ ta có: $MIC = IBC + ICB = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$ (Tính chất góc ngoài).

Ta cũng có: $MEC = AEF = \frac{180^0 - A}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}.$ Từ đó suy ra $IEMC$ là tứ giác nội tiếp, do đó: $IMC = IEC = 90^0.$ Tương tự ta cũng chứng minh được: 4 điểm I, N, B, F cùng nằm trên một đường tròn suy ra $INB = IFB = 90^0.$

Từ đó suy ra $BMC = BNC = 90^0$ hay 4 điểm B, C, M, N nằm trên đường tròn tâm Q đường kính $BC.$

Chú ý rằng: Tam giác QBM cân tại Q nên $QMB = QBM,$ lại có $QBM = IBA$ (Tính chất phân giác) nên $QMB = IBA$ suy ra $QM // AB$ hay đường thẳng QM chứa đường trung bình song song với cạnh AB của tam giác $ABC.$

c, Kí hiệu R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác $ABC.$ Khi đó ta có: $R^2 - 2R.r = OI^2$ (công thức Ơle).

Chứng minh:

Dựng đường kính PK của (O) và đường kính $I'O'$ qua O, I của (O) (I' thuộc cung nhỏ AB). Ta có: $II'.IO' = IA.IK \Leftrightarrow (R - OI)(R + OI) = IA.IK \Leftrightarrow R^2 - OI^2 = IA.IK$ (*). Để ý rằng: $\Delta IFA \backsim \Delta KCP$ nên $\frac{IA}{IF} = \frac{KP}{KC} \Rightarrow IA = \frac{IF.KP}{KC} = \frac{r.2R}{KC}$ thay vào (*) ta có: $R^2 - OI^2 = \frac{r.2R}{KC}.IK$ theo 1) ta đã chứng minh: $KI = KC = KB$ nên suy ra $R^2 - OI^2 = 2R.r$ (đpcm).

Chú ý: Do $OI^2 \geq 0 \Rightarrow R^2 - 2Rr \geq 0 \Rightarrow R \geq 2r.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $O \equiv I$ hay tam giác ABC đều.

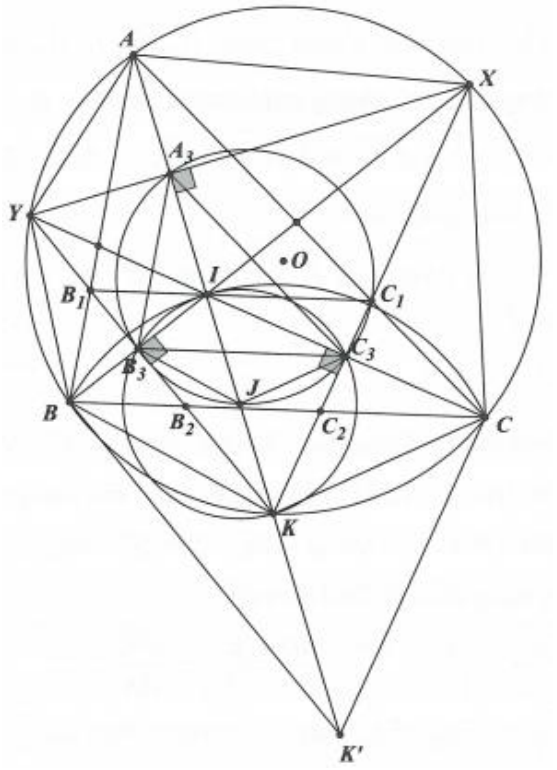
d, Xét đường tròn tâm K' là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc A (Đường tròn tiếp xúc với BC và tiếp xúc với phần kéo dài các cạnh AB, AC). Khi đó ta có $KK' = KI = KB = KC.$

Chứng minh:

K' là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên K' nằm trên phân giác tròn góc $A,$ mặt khác (K') tiếp xúc với BC và phần kéo dài của cạnh AB nên K' nằm trên phân giác ngoài góc $B,$ suy ra $K'B \perp IB$ hay

tam giác IBK' vuông tại B. Mặt khác theo 1) ta đã chứng minh: $KI=KB=KC$ nên suy ra K là trung điểm của IK' hay $KK'=KI=KB=KC$.

2. Các đường thẳng BI,CI kéo dài cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là X,Y (X khác A, Y khác B). Đường thẳng KY cắt AB,BC,BI lần lượt tại B_1,B_2,B_3.



Đường thẳng KX cắt AC,BC,CI lần lượt tại C_1,C_2,C_3.

Khi đó ta có:

+ BB_1B_2, CC_1C_2 là các tam giác cân

+ B_1,I,C_1 thẳng hàng.

+ $\dfrac{KI}{KA}=\dfrac{BC}{AB+AC}$.

+ $B_3C_3//BC$.

+ I là trực tâm tam giác KXY.

+ Gọi J là trung điểm IK thì 4 điểm A,B_3,C_3,J cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh:

+ Ta có: $KC_1C=\dfrac{1}{2}sđ\left(AX+KC\right), CC_2X=\dfrac{1}{2}sđ\left(CX+BK\right)$ Mà $AX=XC, KC=BK$

$\Rightarrow KC_1C=CC_2X$ hay tam giác CC_1C_2 cân tại C. Chứng minh tương tự cho trường hợp tam giác BB_1B_2.

+ Ta có: $IAC_1=IXC_1=\dfrac{1}{2}sđBC$ suy ra tứ giác $IAXC_1$ nội tiếp. Suy ra $XIC_1=XAC=XBC$

$\Rightarrow IC_1//BC$, chứng minh tương tự ta cũng có: $IB_1//BC\Rightarrow B_1,I,C_1$ thẳng hàng và $B_1C_1//BC$.

+ Theo 1) ta có: $KI=KB=KC$.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: $ABKC$ ta có: $AB.KC+AC.BK=AK.BC$ suy ra $KI\left(AB+AC\right)=KA.BC\Leftrightarrow\dfrac{KI}{KA}=\dfrac{BC}{AB+AC}$.

+ Theo tính chất đường tròn nội tiếp tam giác ta có:

$$BIC+B_3KC_3=BIC+FDE=180^0-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}+B_3KC_3=90^0+\frac{1}{2}BAC+\frac{1}{2}BKC=90^0+90^0=180^0.$$

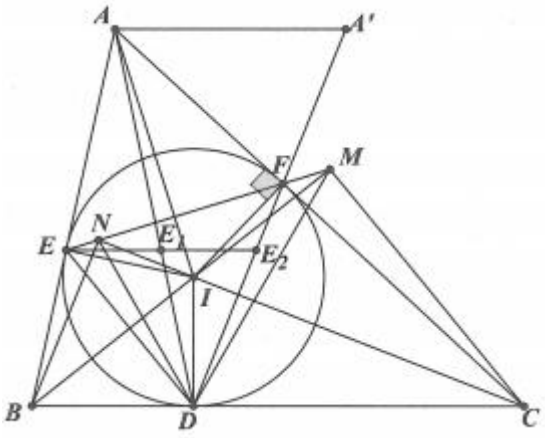
Suy ra tứ giác KB_3IC_3 nội tiếp. Suy ra $IB_3C_3=IKC_3=ABX=XBC\Rightarrow B_3C_3//BC$.

+ Ta có: $KC_3C=\dfrac{1}{2}sđ\left(KC+XY\right)=\dfrac{1}{4}sđKC+\dfrac{1}{2}sđ\left(AX+AY\right)=\dfrac{1}{2}sđ\left(AB+BC+CA\right)=90^0$ nên $KX\perp CY$, chứng minh tương tự ta cũng có: $KY\perp BX$ suy ra I là trực tâm tam giác KXY.

+ Theo trên ta đã chứng minh: $IC_3K = IB_3K$, nên 4 điểm I, B_3, K, C_3 nằm trên đường tròn tâm J đường kính IK, chứng minh tương tự phần $B_3C_3 // BC$ ta suy ra $A_3B_3 // AB, A_3C_3 // AC$. Từ đó ta có: $B_3A_3C_3 + B_3JC_3 = BAC + 2B_3KC_3 = BAC + BKC = 180^0$ suy ra 4 điểm B_3, A_3, C_3, J cùng nằm trên một đường tròn.

3. Đường thẳng qua E song song với BC cắt AD, DF lần lượt tại E_1, E_2 thì E_1 là trung điểm của EE_2.

Chứng minh:



Dựng đường thẳng qua A song song với BC cắt DF tại A'. Ta dễ chứng minh được các tam giác AEF, AFA' cân tại A nên $AE = AF = AA'$.

Áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{E_1E_2}{AA'} = \frac{DE_1}{DA} = \frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BA} = \frac{EE_1}{EA} = \frac{EE_1}{AA'}.$$

Suy ra $E_1E_2 = EE_1$ hay E_1 là trung điểm của EE_2.

4. DI là phân giác của góc MDN.

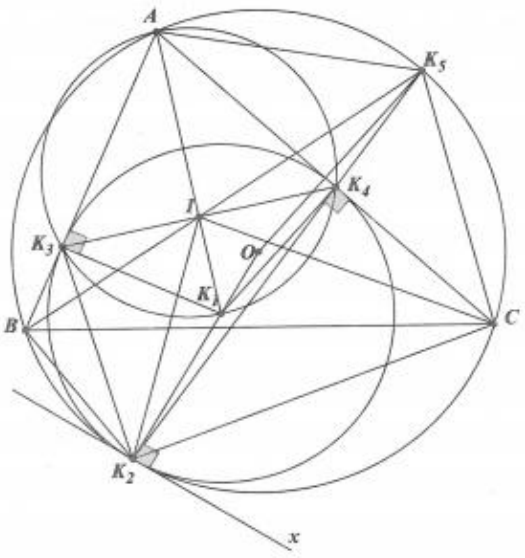
Chứng minh:

Theo 1) ta đã chứng minh: $BENI, CMFI, BMNC$ là các tứ giác nội tiếp nên $BNI = CMI = 90^0$ suy ra các tứ giác $CMID, BNID$ nội tiếp nên $IDN = IBN = ICM = IDM$ hay ID là phân giác của góc MDN.

5. Đường tròn tâm K_1 tiếp xúc trong với (O) tại K_2 và tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại K_3, K_4. Khi đó tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là trung điểm của K_3, K_4

(Đường tròn (K_1) gọi là đường tròn Mixtilinear ứng với góc A của tam giác ABC).

Chứng minh:



Ta có O, K_1, K_2 thẳng hàng, dựng tiếp tuyến chung K_2x của (O) và (K_1). Giả sử K_2K_4 cắt (O) tại K_5. Các tam giác $K_1K_2K_4, OK_2K_5$ cân tại K_1, O nên $K_1K_4 // OK_5$, mà $K_1K_4 \perp AC \Rightarrow OK_5 \perp AC$ suy ra K_5 là điểm chính giữa của cung AC suy ra B, I, K_5 thẳng hàng.

Giả sử BK_5 cắt K_3K_4 tại I. Ta chứng minh: CI là phân giác của góc ACB.

Ta có: $K_5BK_2 = K_4K_3K_2 = K_5K_2x$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Suy ra tứ giác IK_3BK_2 nội tiếp. Ta cũng có: $IK_2C = BK_2C - BK_2I = 180^0 - BAC - AK_3K_4 = 180^0 - \left(180^0 - 2AK_4K_3\right)$ $-AK_4K_3 = AK_4K_3$ nên tứ giác IK_4CK_2 nội tiếp. Từ đó ta tính được:

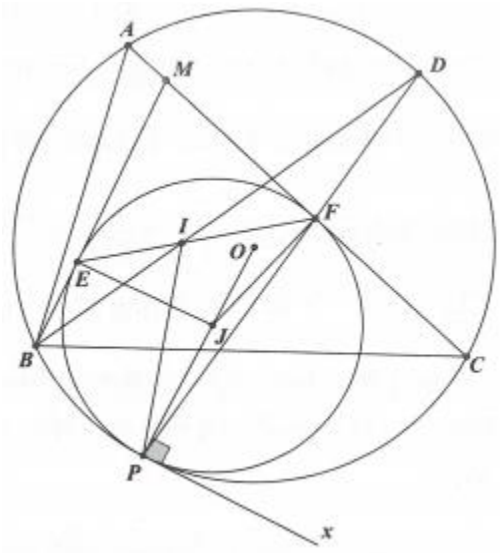
$ACI = IK_2K_4 = BK_2C - BK_2I - K_5K_2C = 180^0 - BAC - AK_3K_4 - ABK_5$

$= 180^0 - BAC - \dfrac{180^0 - BAC}{2} - \dfrac{ABC}{2} = 90^0 - \dfrac{ABC}{2} - \dfrac{BAC}{2} = \dfrac{ACB}{2}$. Điều đó chứng tỏ CI là phân giác của góc ACB. Hay tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là trung điểm của K_3K_4.

6. Tam giác ABC nội tiếp (O) điểm M trên cạnh BC. Đường tròn (J) tiếp xúc với MA, MC lần lượt tại E, F đồng thời tiếp xúc với (O) tại P. Khi đó tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF. (Bổ đề Sawayama- Thebault)

Chứng minh:

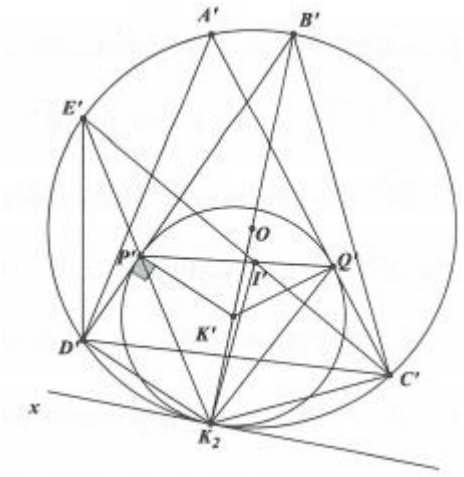
Đường thẳng PF cắt (O) tại D. Đường tròn (J) tiếp xúc với (O) tại P suy ra P, J, O thẳng hàng.



Tam giác PJF, POD là tam giác cân nên $ODP = JFP$ suy ra $OD // JF$, $JF \perp BC \Rightarrow OD \perp BC \Rightarrow DC = DB$ hay AD là phân giác của góc BAC. Gọi I là giao điểm của AD với EF thì $IAP = FPx$, $FEP = FPx \Rightarrow IEP = IAP$ nên tứ giác $IEAP$ nội tiếp. Suy ra $AEP = AIP, EFP = AEP \Rightarrow AIP = EFP$ suy ra $DIP = DFI \Rightarrow \Delta DIF \backsim \Delta DIP$ suy ra $DI^2 = DP.DF$. Vì $DC = DB \Rightarrow \Delta CDF \backsim \Delta PDC \Rightarrow DC^2 = DF.DP \Rightarrow DI = DC.$

Theo chứng minh: 1) ta suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Áp dụng bổ đề ta có bài toán sau:



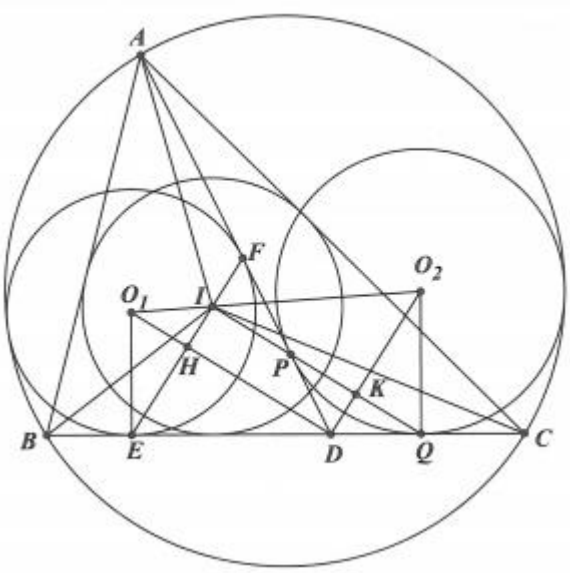
Đường tròn tâm K' tiếp xúc trong với (O) tại K_2. Xét hai điểm P', Q' nằm trên đường tròn (K'), qua P' kẻ tiếp tuyến với (K') cắt (O) tại B', D', qua Q' kẻ tiếp tuyến với (K') cắt (O) tại A', C'.

Khi đó tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $AC'D'$ và $B'C'D'$ nằm trên $P'Q'$.

7. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp đường tròn (I),

D là điểm bất kỳ trên cạnh BC, gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với AB, BC và (O), (O_2) là đường tròn tiếp xúc với AD, BC và (O). Khi đó I, O_1, O_2 thẳng hàng.

Chứng minh:



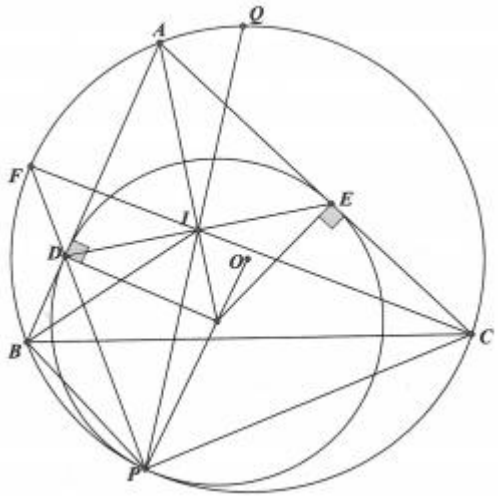
Gọi E, F lần lượt là các tiếp điểm của (O_1) với BC, AD, P, Q là tiếp điểm của (O_2) với AD, BC. Theo 6) ta có $EF \cap PQ = I$ là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của DO_1 với EF, K là giao điểm của DO_2 với PQ thì $DO_1 \perp EF, DO_2 \perp DO_1 \Rightarrow DO_2 // EF$, tương tự ta có $DO_1 // PQ$ suy ra $IHDK$ là hình chữ nhật.

Theo định lý Thales $\frac{IH}{O_2D} = \frac{KD}{O_2D} = \frac{O_1H}{O_1D} \Rightarrow O_1, I, O_2$ thẳng hàng.

Chú ý: Khi D là chân đường phân giác trong góc A thì $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc nhau tại I.

8. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (K) tiếp xúc với (O) tại P và tiếp xúc với AB, AC tại D, E. Khi đó PI đi qua điểm chính giữa cung BAC.

Chứng minh: Gọi F là giao điểm của CI với (O), Q là giao điểm PI với (O) theo câu 5) ta có I là trung điểm của DE. Ta cũng có:



$FPB = DPB = \frac{1}{2} ACB; DIB = BIA - 90^0$

$= 180^0 - \frac{1}{2}(ABC + BAC) - 90^0 = \frac{1}{2} ACB$ nên $DPB = DIB$. Suy ra tứ giác $DBPI$ nội tiếp suy ra $BPQ = ADE$. Tương tự tứ giác $IPCE$ nội tiếp nên $IPC = AED \Rightarrow BPQ = CPQ$ suy ra Q là điểm chính giữa cung BAC.

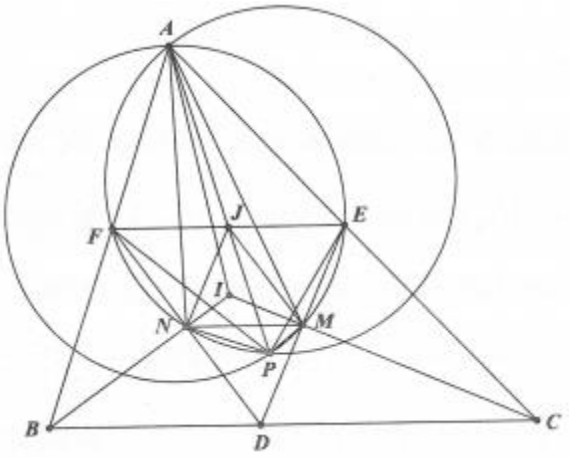
9. Tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). AI cắt BC tại D. Gọi E, F là điểm đối xứng của D qua CI, BI. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác A. Khi đó AP chia đôi BC.

Chứng minh:

Theo tính chất đối xứng của phân giác

Ta có E, F lần lượt thuộc AC, AB. Ta có:

$\frac{BF}{BA}=\frac{BD}{BA}=\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CA}\Rightarrow EF//BC$. Gọi J là trung điểm của EF ta có:



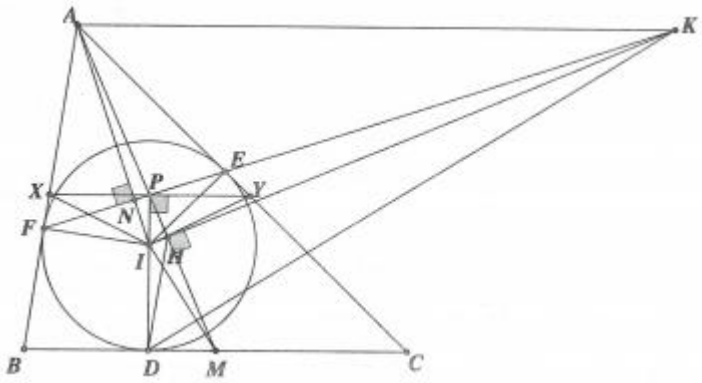
$MPN=MPA+NPA=MEC+NFP$

$=MDC+NDB=180^0-MDN=180^0-MJN$. Suy ra $MJPN$ nội tiếp. Từ đó ta có:

$MPJ=MNJ=MEJ=EDC=DEC=MPA$ suy ra A,J,P thẳng hàng, hay AP chia đôi EF, suy ra AP chia đôi BC.

10. Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại K, gọi M là trung điểm BC.

Chứng minh: $MI\perp DK$.



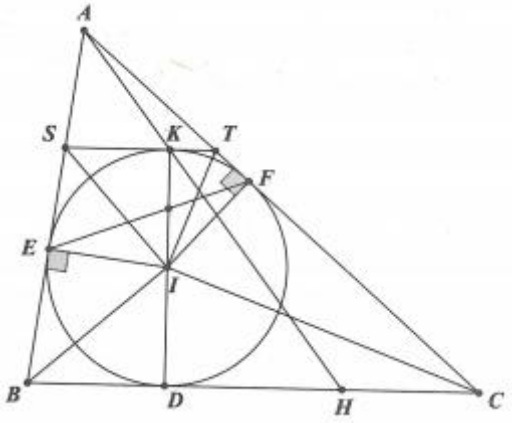
Gọi P là giao điểm của ID và EF

Vì AE,AF là các tiếp tuyến của (I) tại E,F nên $IA\perp EF$. Vì $IP\perp BC$ suy ra $IP\perp AK$. Từ đó suy ra P là trực tâm của tam giác $AIK\Rightarrow AP\perp IK$ tại H suy ra tứ giác $ANHK$ nội tiếp.

Kẻ đường thẳng qua P song song với BC cắt AB,AC tại X,Y từ các tứ giác $IPXF,IPEY$ nội tiếp ta suy ra $PXI=PFI=PEI=PYI$ dẫn tới tam giác IXY cân tại I nên P là trung điểm XY. Theo định lý thales ta dễ suy ra A,P,M thẳng hàng. Lại có: $IH.IK=IN.IA=IF^2=ID^2\Rightarrow\frac{IH}{ID}=\frac{ID}{IK}$ suy ra $\Delta IHD\backsim\Delta IDK$ (c.g.c). Tứ giác $IDMH$ nội tiếp suy ra $IDH=IMH$, $\Delta IHD\backsim\Delta IDK\Rightarrow IDH=IKD$ $\Rightarrow IMH=IKD$ mà IMH phụ với MIH nên IKD phụ với $MIH\Rightarrow IM\perp DK$.

11. Dựng đường kính DK của đường tròn (I), đường thẳng AK cắt BC tại H. Chứng minh: $BD=HC$.

Chứng minh



Dựng đường thẳng qua K song song với BC cắt AB,AC lần lượt tại S,T suy ra ST là tiếp tuyến của (I), theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$SK=SE$, $BD=BE$, lại có: $SIE+BIE=\frac{1}{2}\left(KIE+DIE\right)=90^0$ nên tam giác SIB vuông tại I, suy ra

$SK.BD = SE.EB = IE^2 = r^2$. Tương tự ta cũng có: $KT.CD = IF^2 = r^2$ suy ra $KT.CD = SK.BD$ $\Leftrightarrow \dfrac{SK}{CD} = \dfrac{TK}{DB}$ áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta suy ra: $\dfrac{SK}{DC} = \dfrac{TK}{DB} = \dfrac{SK+TK}{CD+BD} = \dfrac{ST}{BC}$, mặt khác theo định lý Thales ta cũng có: $\dfrac{SK}{BH} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{ST}{BC}$ từ đó suy ra $\dfrac{SK}{DC} = \dfrac{SK}{BH} \Leftrightarrow DC = BH$ đpcm.

III. CHÙM BÀI TOÁN CÁT TUYẾN, TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$. Gọi E là trung điểm của CD, đoạn thẳng MO cắt (O) và AB lần lượt tại I, H. Khi đó các tính chất hình học sau có liên quan đến nhau:

1. 5 điểm M, A, O, E, B nằm trên một đường tròn.

2. ME là tia phân giác của góc AEB.

3. $MA^2 = MC.MD$.

4. $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$.

5. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

6. Tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

7. AB chứa đường phân giác của góc CHD.

8. $CAD = BHD$.

9. OE kéo dài cắt AB tại K thì KC, KD là tiếp tuyến của (O).

10. AE cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là F. (F khác với A). Khi đó $BF // CD$.

11. Tia CH cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ 2 là P (khác C) thì $DP // AB$.

12. Đường thẳng qua E song song với BD cắt AB tại N. Khi đó $CN \perp OB$.

13. Vẽ đường kính AQ, các đường thẳng QC, QD cắt đường thẳng MO lần lượt tại X, Y thì O là trung điểm của XY.

14. Đường thẳng qua trung điểm E của CD song song với AD cắt AB tại F, DF cắt AM tại N_1 thì N_1 là trung điểm AM.

15. Qua M dựng cát tuyến thứ 2 của (O) là MC_1D_1. Chứng minh: CD_1, C_1D cắt nhau tại 1 điểm nằm trên AB.

16. Giả sử MC cắt AB tại K. Gọi L là trung điểm MK ta có các hệ thức sau tương đương nhau:

+ $\frac{KC}{KD}=\frac{MC}{MD}$ (*); $LM^2=LK^2=LC.LD$ (Hệ thức Niu tơn) (**); $ME.MK=MC.MD$ (Hệ thức Maclaurin) (***)

17. Kẻ đường kính CC' của (O) đường thẳng đi qua trung điểm của BD song song với BC' cắt $C'D$ tại J' thì J' nằm trên một đường tròn có bán kính không đổi.

18. Giả sử M cố định, chứng minh: Khi cát tuyến MCD thay đổi, trọng tâm G của tam giác BCD thuộc một đường tròn cố định.

19. Giả sử M cố định, chứng minh: Tia BO cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là L (L khác B).

Đường thẳng ML cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là T (khác L). Chứng minh rằng: đường tròn ngoại tiếp tam giác ATM luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định.

20. Giả sử M thuộc đường thẳng cố định (d). MO cắt AB tại H. Chứng minh: H thuộc đường tròn cố định.

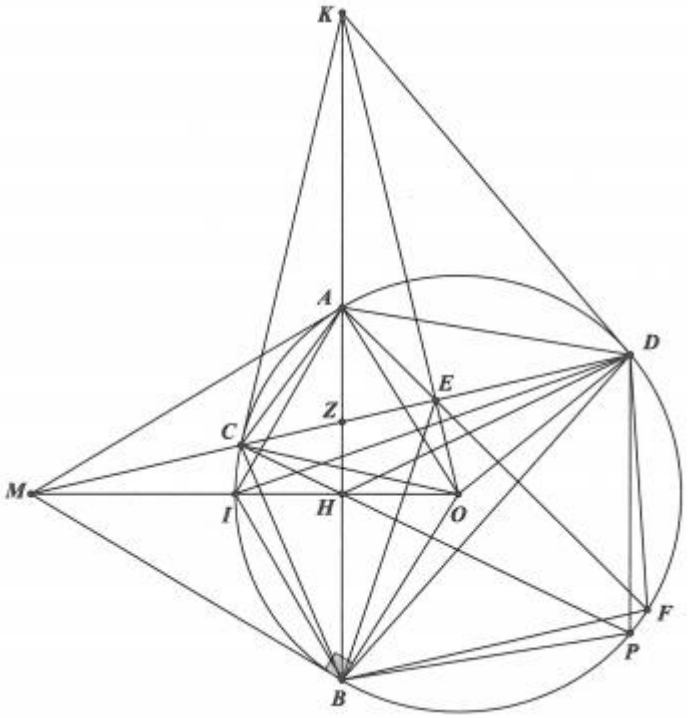
21. Giả sử M cố định nằm ngoài (O) cát tuyến MCD thay đổi quanh điểm M. Đường thẳng BE cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ 2 là B_1 (khác B). Tìm vị trí cát tuyến MCD để diện tích tam giác MB_1D lớn nhất.

22. Giả sử M thay đổi ở ngoài (O). Đường thẳng qua O vuông góc với MO cắt các tia MA, MB tại S, W. Khi nào thì diện tích tam giác MSW nhỏ nhất.

23. Giả sử $MO=2R$, cát tuyến MCD thay đổi quanh M. Tìm vị trí của cát tuyến để $EA+EB+EM$ lớn nhất.

24. Giả sử $MO=2R$, cát tuyến MCD thay đổi quanh M. Tìm vị trí của cát tuyến để $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}$ nhỏ nhất.

CHỨNG MINH CÁC BÀI TOÁN



1. Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $MAO = MBO = 90^0$, E là trung điểm của CD nên $EO \perp CD \Rightarrow MEO = 90^0$ (Tính chất đường kính đi qua trung điểm một dây cung). Từ đó suy ra 5 điểm M, A, O, E, B nằm trên đường tròn đường kính MO.

2. Vì tứ giác $MAEB$ nội tiếp và $MA = MB \Rightarrow MA = MB \Rightarrow AEM = BEM$ (Góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau thì có số bằng nhau). Từ đó suy ra ME là phân giác của góc AEB.

3. Vì MA là tiếp tuyến của (O) nên $MAC = ADC$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Xét hai tam giác MAC và MDA ta có: $MAC = ADC$, AMD chung nên $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) suy ra $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$.

4. Từ chứng minh $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) suy ra $\frac{CA}{AD} = \frac{MC}{MA}$ (1), chứng minh tương tự ta cũng có: $\Delta MCB \backsim \Delta MBD \Rightarrow \frac{CB}{BD} = \frac{MC}{MB}$ (2), từ (1) và (2) chú ý rằng $MA = MB \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MC}{MB} \Leftrightarrow \frac{CA}{AD} = \frac{CB}{BD}$.

5. Do I nằm trên MO nên MI là phân giác trong của góc AMB (3). Lại có MO là trung trực của AB và I nằm trên MO nên $IA = IB$ suy ra $IAB = IBA$. Mặt khác ta cũng có $MAI = ABI$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) từ đó suy ra $MAI = IAB$ hay chính là phân giác của góc MAB (4). Từ (3) và (4) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

6. Theo chứng minh ở câu 3) ta có $MA^2 = MC.MD$ (5), áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $MAO, AH \perp MO$ ta có $MA^2 = MH.MO$ (6). Từ (5) và (6) suy ra $MH.MO = MC.MD$ hay $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$. Xét tam giác MCH, MOD ta có: $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$ và OMD chung nên $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$

(g.g) suy ra $MHC = MDO \Rightarrow$ tứ giác $CHOD$ nội tiếp (góc ngoài đỉnh H bằng góc trong đối diện đỉnh H).

7. Từ 6) ta có $MHC = MDO$ (7) mà $MDO = OCD$ (8) (do tam giác COD cân tại O). Mặt khác ta có $OCD = OHD$ (9) (góc nội tiếp cùng chắn OD). Từ (7), (8), (9) suy ra $MHC = OHD$. Các góc CHA, DHA phụ với các góc MHC, OHD tương ứng nên suy ra $CHA = DHA$ hay AH là phân giác của góc CHD.

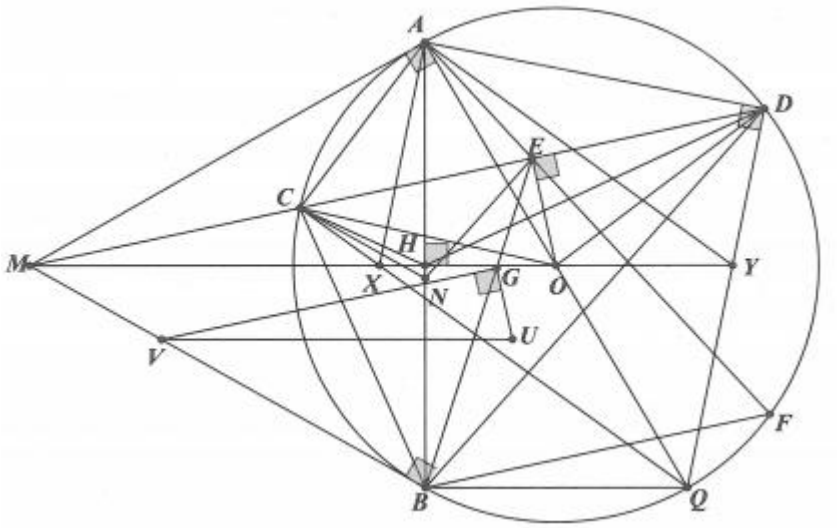
Chú ý: Từ việc chứng minh: AH là phân giác của CHD nếu gọi ta có Z là giao điểm của AH và CD ta có: $\frac{HC}{HD} = \frac{ZC}{ZD}$, do $MH \perp ZH$ nên MH là phân giác ngoài của góc CHD từ đó ta cũng có: $\frac{HC}{HD} = \frac{MC}{MD}$ suy ra $\frac{MC}{MD} = \frac{ZC}{ZD} \Leftrightarrow \frac{MC}{MD}.\frac{ZD}{ZC} = 1$ (đây là hệ thức rất hay gặp trong các đề thi TS vào 10 chuyên).

8. Ta có $BHD = 180^0 - DHA = 180^0 - \frac{1}{2}CHD = 180^0 - \frac{1}{2}COD$ (10) (Do AH là phân giác của góc CHD và tứ giác $CHOD$ nội tiếp đã chứng minh ở trên). Mà $\frac{1}{2}COD = CBD$ (11) (tính chất góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm chắn cùng một cung) và $CBD = 180^0 - CAD$ (12). Từ (10), (11), (12) suy ra $BHD = CAD$.

Chú ý rằng: ΔACD và ΔHBD có $BHD = CAD$ và $ACD = HBD$ cùng chắn cung AD nên $\Delta ACD \backsim \Delta HBD$ (g.g) suy ra $ADC = HDB$. Từ đó ta cũng suy ra $ADH = CDB$...

9. Giả sử tiếp tuyến tại C, D cắt nhau ở K thì $KCO = KDO = 90^0$ nên tứ giác $KCOD$ nội tiếp. Mặt khác theo 6) ta có tứ giác $CHOD$ nội tiếp. Từ đó suy ra 5 điểm K, C, H, O, D cùng nằm trên đường tròn đường kính KO suy ra $KHO = 90^0$, mặt khác ta cũng có $AHO = 90^0 \Rightarrow K, A, H$ thẳng hàng, hay K nằm trên đường thẳng AB.

10. Theo chứng minh ở 1) thì 4 điểm A, E, O, M nằm trên đường tròn đường kính MO nên ta có $AEM = AOM = \frac{1}{2}AOB = AFB$ (Tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm). Mà hai góc AEM, AFB đồng vị nên suy ra $EM // BF$.



11. Theo chứng minh ở 6) ta có tứ giác $CHOD$ nội tiếp kết hợp với 7) AH chứa đường phân giác của góc CHD nên $CHA=\frac{1}{2}CHD=\frac{1}{2}COD=CPD$ mà hai góc CHA,CPD đồng vị nên $HA//DP.$

12. Để chứng minh: $CN\perp OB$ ta chứng minh $CN//MB.$

Thật vậy theo cách dựng điểm N ta có: $CEN=CDB$ (đồng vị). Mặt khác $CDB=CAB$ cùng chắn cung BC suy ra $CEN=CAB=CAN\Rightarrow$ tứ giác $CEAN$ nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp A,E cùng nhìn cạnh CN một góc bằng nhau). Từ đó suy ra $ECN=EAN=EAB$ (13) mặt khác tứ giác $EAMB$ nội tiếp (chứng minh ở 1) nên $EAB=EMB$ (14). Từ (13), (14) suy ra $ECN=EMB$ suy ra $CN//MB$ mà $MB\perp OB\Rightarrow CN\perp OB.$

13. Do AQ là đường kính của (O) nên $ADQ=90^0\Leftrightarrow ADYH$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $AYD=AHD.$

Mặt khác theo 6, 7) ta có $CHOD$ nội tiếp và AH là phân giác của góc CHD suy ra $AHD=\frac{1}{2}CHD=\frac{1}{2}COD=CQD\Rightarrow AYD=CQD$ suy ra $AY//CQ.$ Xét hai tam giác AOY,QOX ta có: $OA=OQ,\ AOY=QOX,\ YAO=XQO$ nên $\Delta AOY=\Delta QOX$ (g.c.g) suy ra $OX=OY.$

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh theo cách khác như sau: Tứ giác $AEOM$ nội tiếp nên:

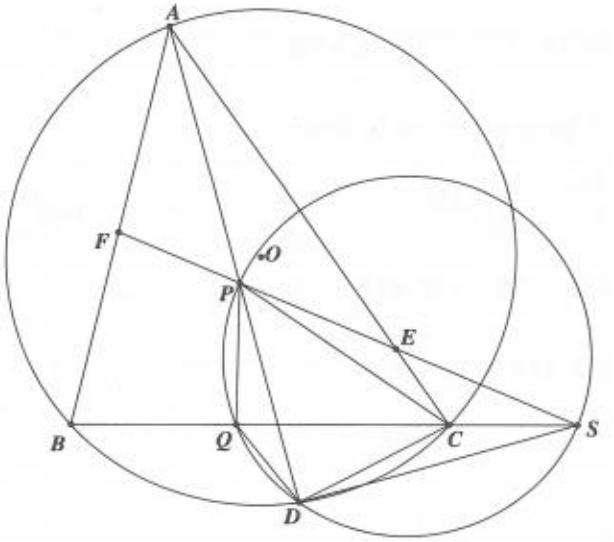
$AEC\equiv AEM=AOM=QOY,\quad YQO\equiv DQO=DCA\equiv ECA$ nên $\Delta OYQ\backsim\Delta EAC\Rightarrow\frac{QY}{QO}=\frac{CA}{CE}$ hay

$\frac{QY}{\frac{1}{2}QA}=\frac{CA}{\frac{1}{2}CD}\Leftrightarrow\frac{QY}{QA}=\frac{CA}{CD}\Rightarrow\Delta QYA\backsim\Delta CAD$ (c.g.c) nên $YAQ=ADC=ECA=AQC$

$\Rightarrow AY//QX$ nên tứ giác $AXQY$ là hình bình hành suy ra $OX=OY.$

Tính chất này là 1 trường hợp đặc biệt của bài toán:

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) và điểm P nằm trong tam giác, đường thẳng AP cắt BC, (O) lần lượt tại Q,D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQD cắt S, SO cắt AC,AB lần lượt tại E,F. Khi đó ta có: $\frac{PE}{PF}=\frac{QE}{QF}$.



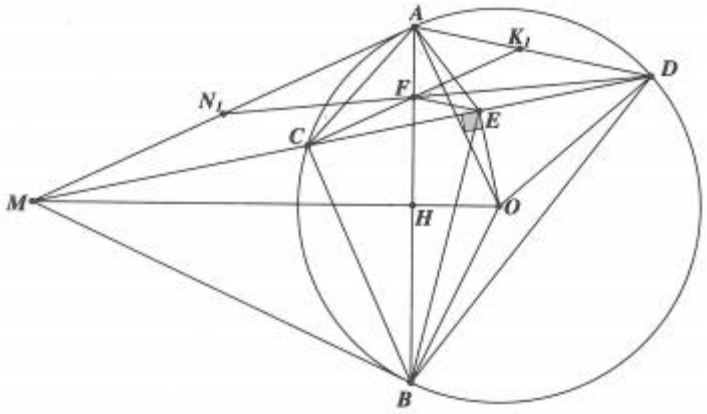
Ta có thể chứng minh bài toán này như sau:

Ta có: $DQC=DPS=APF$ và $PAF=QCD$ nên $\Delta QCD\backsim\Delta PAF$

Tương tự ta cũng có: $\Delta QBD\backsim\Delta PAE$

Nên $\frac{PE}{PF}=\frac{PE}{AP}.\frac{AP}{PF}=\frac{QD}{QB}.\frac{QC}{QD}=\frac{QC}{QB}$ đpcm. Khi $P\equiv O$ ta có bài toán ở trên.

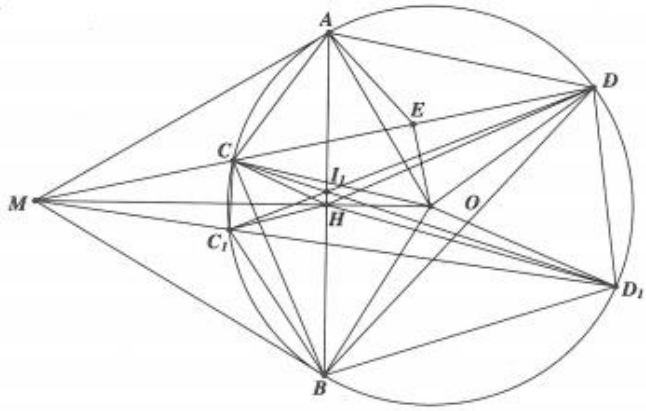
14. Đường thẳng qua trung điểm E của CD song song với AD cắt AB tại F, DF cắt AM tại N_1 thì N_1 là trung điểm AM.



Ta có biến đổi góc: $FEC=ADC=ABC$

Suy ra $EFCB$ nội tiếp. Giả sử CF cắt AD tại K_1 thì EF là đường trung bình của tam giác CDK_1 hay F là trung điểm của CK_1. Theo bổ đề hình thang ta suy ra N_1 là trung điểm của AM.

15. Ta có $CHOD$ là tứ giác nội tiếp, và AH là phân giác của góc CHD.



Tương tự ta cũng có: C_1HOD_1 cũng là tứ giác nội tiếp và HB là phân giác của góc C_1HD_1.

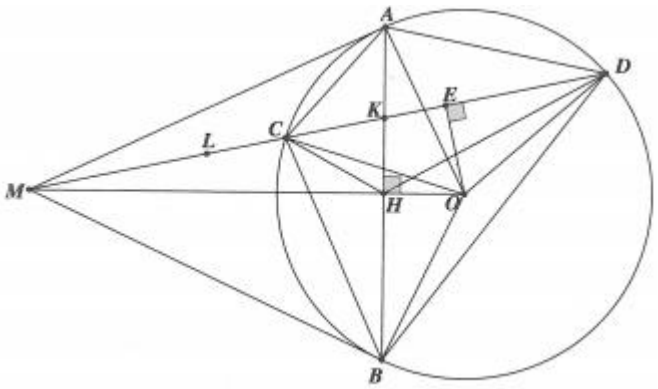
Ta có:

$$CI_1C_1=\frac{1}{2}sđ\left(CC_1+DD_1\right)CHC_1=CHM+MHC_1=ODC+OD_1C_1$$

$$=\frac{1}{2}\left(180^0-COD+180^0-C_1OD_1\right)=\frac{1}{2}\left(360^0-sđCD-sđC_1D_1\right)=\frac{1}{2}sđ\left(CC_1+DD_1\right)$$

hay $CI_1C_1=CHC_1$ tức là tứ giác CI_1HC_1 nội tiếp, tương tự ta cũng có DD_1HI_1 nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc $CHI_1=CC_1D=CD_1D=CC_1D=DHI_1$ hay I_1H cũng là phân giác của CHD. Suy ra A,I_1,H thẳng hàng.

16. Chứng minh các hệ thức:



+ $\frac{KC}{KD}=\frac{MC}{MD}$ (*)

+ $LM^2=LK^2=LC.LD$

+ $ME.MK=MC.MD$

Giải:

+ Trước tiên ta chứng minh các hệ thức trên tương đương với nhau:

Thật vậy ta có: $LM^2=LC.LD\Leftrightarrow LM^2=(MC-ML)(MD-ML)\Leftrightarrow$

$LM^2=MC.MD-ML(MC+MD)+ML^2\Leftrightarrow MC.MD=ML(MC+MD)$

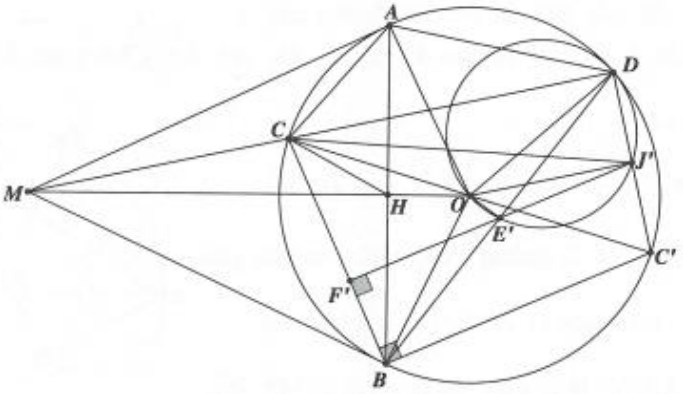
$\Leftrightarrow MC.MD=\frac{MK}{2}(MC+MD)=\frac{MK}{2}.2ME=MK.ME$ như vậy (**) và (***) tương đương nhau.

+ Ta cũng có:

$\frac{KC}{KD}=\frac{MC}{MD}\Leftrightarrow MD.KC=MC.KD\Leftrightarrow MD(MK-MC)=MC(MD-MK)\Leftrightarrow 2MC.MD=MK(MC+MD)$

$2MC.MD=MK.2ME\Leftrightarrow MC.MD=MK.ME$ vậy (*) và (***) tương đương nhau.

Bây giờ ta chứng minh (***). Gọi H là giao điểm của AB,MO thì $CHOD$ và $KHOE$ là các tứ giác nội tiếp nên $MC.MD=MH.MO=MK.ME$ (đpcm)



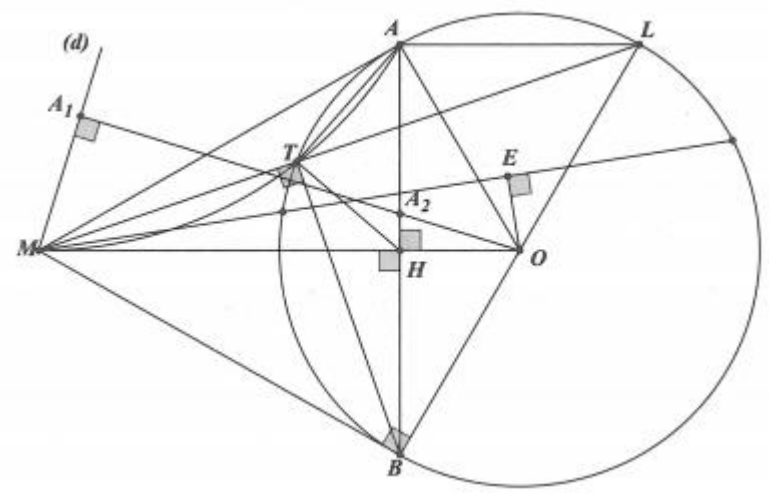
17. Gọi E' là trung điểm của BD.

Do $E'J'$ song song với BC' nên $E'J'$ là đường trung bình của DBC' dẫn tới J' là trung điểm của $C'D$ suy ra $OJ'D=90^0$ nên 4 điểm $OE'J'D$ nằm trên đường tròn đường kính $OD=R$.

18. Qua G kẻ các đường thẳng song song với EO,MD cắt OB,MB lần lượt tại U,V.

Ta có các điểm B,O,M cố định và $\frac{BG}{BE}=\frac{BU}{BO}=\frac{BV}{BM}=\frac{UV}{MO}=\frac{2}{3}$, suy ra U,V cố định và $UGV=90^0$. Suy ra G thuộc đường tròn đường kính $PQ=\frac{2}{3}MO$.

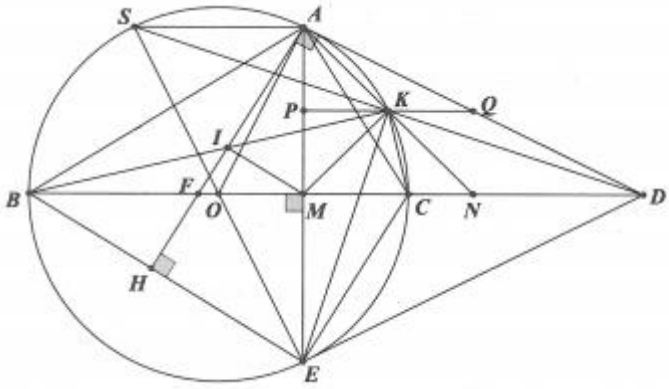
19. Do $MTB=MHB=90^0$ nên tứ giác $MTHB$ nội tiếp nên $TBH=TMH$ mặt khác $TBH\equiv TBA=TAM$ suy ra $TMH=TAM$ hay HM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ATM. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ATM luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định MO.



Một bài toán tương tự của tính chất này.

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. Một điểm A di chuyển trên (O) sao cho $AB > AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC, AE cắt BC tại M. Kẻ đường cao AH của ΔABE. Gọi I là trung điểm của AH, BI cắt (O) tại K. Gọi N là giao điểm của AK với BD. Chứng minh: N trung điểm của MD.

Hướng dẫn:

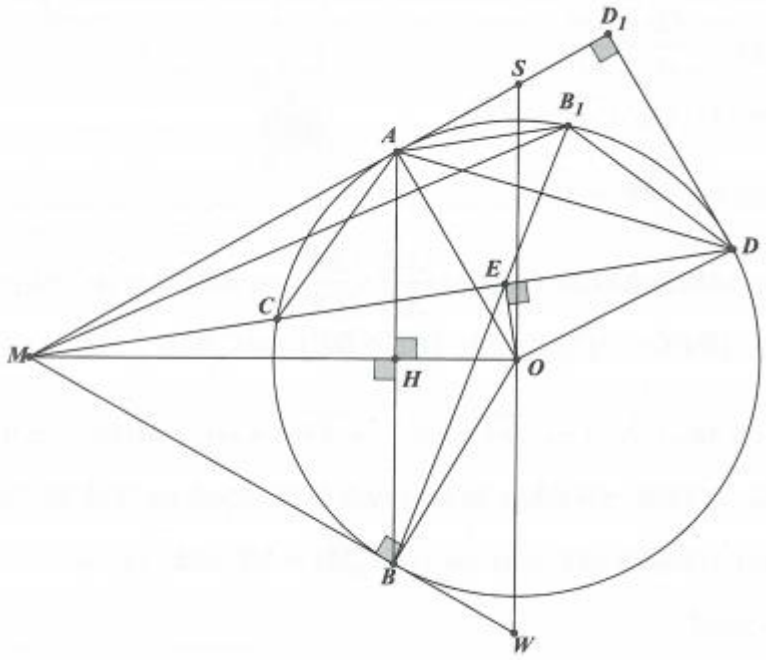


Ta có M là trung điểm của AE nên IM là đường trung bình của tam giác AHE suy ra $IF//HE$, kết hợp với $BAKC$ là tứ giác nội tiếp. Ta có biến đổi góc: $AMI = AEB = ACB = AKI$ suy ra tứ giác $AIFK$ nội tiếp. Chú ý rằng: $IM \perp AH$ (do $AH \perp BE$) nên tứ giác $AIMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM. Gọi S là giao điểm của DK với (O). Ta có $KMD = KAE$ (cùng phụ với KMA) mà $KAE = KED \Rightarrow KMD = KED$ hay $KMED$ nội tiếp. Dẫn đến $KDM = KEM = KEA = KSA$ suy ra $AS//BD$. Ta có: $KDN = KSA = KAD$. Suy ra $\Delta KND \backsim \Delta DNA \Rightarrow NK.NA = ND^2$. Trong tam giác vuông NMA ta có: $MN^2 = NK.NA$ từ đó suy ra $MN = ND$.

20. Dựng $OA_1 \perp (d)$, do $(d), O$ cố định nên OA_1 không đổi, giả sử OA_1 cắt AB tại A_2.

Ta có: $\Delta MA_1O \backsim \Delta A_2HO \Rightarrow \dfrac{OA_1}{OH} = \dfrac{OM}{OA_2} \Leftrightarrow OA_1.OA_2 = OH.OM$.

Trong tam giác vuông MOA ta cũng có: $OH.OM = OA^2 = R^2$ suy ra $OA_1.OA_2 = R^2 \Rightarrow OA_2 = \dfrac{R^2}{OA_1}$ không đổi, suy ra A_2 là điểm cố định. Mặt khác $A_2HO = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính OA_2.



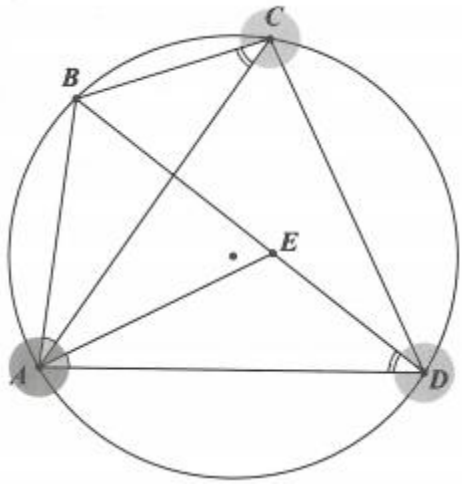
21. Theo tính chất ở 10) ta có $AB_1 // CD$ nên $S_{MB_1D} = S_{MAD}$. Dựng $DD_1 \perp AM$ thì $S_{MAD} = \frac{1}{2} DD_1.MA \le \frac{1}{2} DA.MA \le \frac{1}{2} 2R.MA = R.MA.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $D_1 \equiv A, DA = 2R.$ Hay D là điểm đối xứng với A qua O. Từ đó ta xác định được vị trí cát tuyến MCD như sau: Dựng đường kính AD, nối MD được cát tuyến MCD cần tìm.

22. Ta có: $S_{\Delta MWS} = 2S_{MOS} = OA.MS = OA(MA + AS)$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi dạng $x + y \ge 2\sqrt{xy}$ ta có: $MA + AS \ge 2\sqrt{MA.AS}$. Mặt khác theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MOS ta có $MA.AS = OA^2 = R^2$ suy ra $MA + AS \ge 2R.$ Do đó $S_{\Delta MWS} \ge 2R^2.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AM = AS \Leftrightarrow \Delta MOS$ vuông cân tại O hay $MO = R\sqrt{2}.$

Để giải các câu hỏi 19, 20 ta cần biết bài toán nổi tiếng sau:

Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó ta có: $AB.CD + AD.BC = AC.BD.$

Chứng minh:

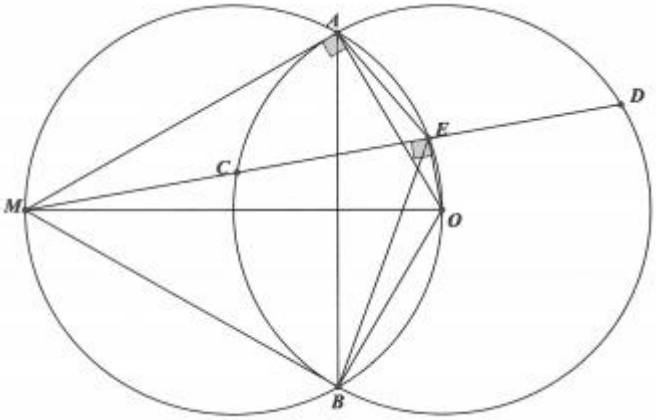


Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $DAE = BAC.$ Ta có $DAE = BAC$ và $ADE = ACB$ (cùng chắn AB) nên $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DE$ (1). Do $DAE = CAB$ nên $DAC = EAB,$ lại có $ABE = ACD$ (cùng chắn AD) $\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$ $\Rightarrow AB.CD = AC.BE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC(BE + DE) = AC.BD.$

23. Khi $MO = 2R \Leftrightarrow MO = 2OA \Leftrightarrow AMO = 30^0 \Rightarrow AMB = 60^0, \Delta MAB$ đều nên $MA = MB = AB.$

Mặt khác tứ giác $MEOB$ nội tiếp (chứng minh ở 1). Áp dụng định lý Potolemy cho tứ giác $MEOB$ ta có: $EA.MB + EB.MA = EM.AB.$ Mà $MA = MB = AB$ suy ra $EA + EB = EM.$ Do đó $EA + EB + EM = 2EM.$



Vì vậy tổng $EA + EB + EM$ lớn nhất khi và chỉ khi EM lớn nhất, mặt khác $EM \le MO = 2R.$ Vậy EM lớn nhất $\Leftrightarrow EM = MO = 2R \Leftrightarrow E \equiv O.$ Nói cách khác cát tuyến MCD đi qua tâm $O.$

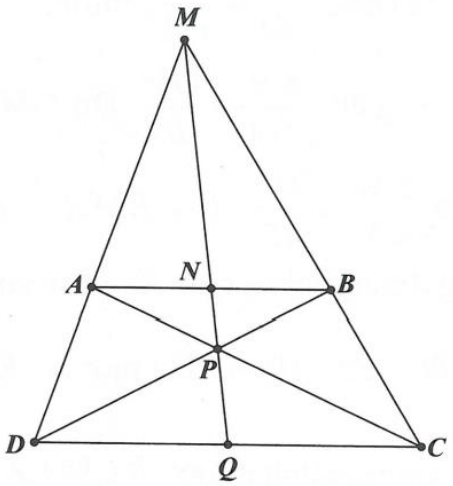
24. Với mọi số thực dương x, y ta có: $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \ge 2\sqrt{xy}.2\sqrt{\frac{1}{xy}} = 4.$ Nên ta suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}.$ Áp dụng vào bài toán ta có: $\frac{1}{EB}+\frac{1}{EC} \ge \frac{4}{EB+EC} = \frac{4}{EM}.$ Do $EM \le MO = 2R$ nên ta suy ra $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB} \ge \frac{4}{2R} = 2R.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $E \equiv O$ nói cách khác cát tuyến MCD đi qua tâm $O.$

CHUYÊN ĐỀ 5. THẲNG HÀNG, ĐỒNG QUY, ĐIỂM CỐ ĐỊNH, ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

I.THẲNG HÀNG, ĐỒNG QUY:Những điểm thẳng hàng đặc biệt :

1. Bổ đề hình thang

Cho hình thnag *ABCD* có hai đáy là *AB, CD* khi đó trung điểm các cạnh đáy, giao điểm 2 đường chéo và giao điểm của 2 cạnh bên nằm trên một đường thẳng.



Chứng minh:

Giả sử các đường thẳng *AD, BC* cắt nhau tại *M,*

AC, BD cắt nhau tại *P*, đường thẳng *MP* cắt *AB, CD*

lần lượt tại *N, Q* .Ta chứng minh: *N,Q* lần lượt là trung điểm

của *AB, CD.*

Thật vậy: Do $AB//CD,$ theo định lý Thales ta có:

$\frac{AN}{QD}=\frac{NB}{QC}(1),\frac{AN}{QC}=\frac{BN}{QD}(2)$. Lấy (1) nhân với (2) ta có:

$\frac{AN^2}{QC.QD}=\frac{NB^2}{QC.QD}\Rightarrow AN=NB$ thay vào (1) ta có $QD=QC$. Hay *N, Q* lần lượt là trung điểm của *AB, CD.*

Ví dụ 1.

Cho tam giác nhọn *ABC* đường cao *AH*, phân giác trong góc BAC cắt *BC* tại *O*, qua *O* dựng các đường thẳng *OM* vuông góc với *AB, ON* vuông góc với *AC.*

a. Chứng minh: 5 điểm *A, M, H, O, N* cùng nằm trên một đường tròn.

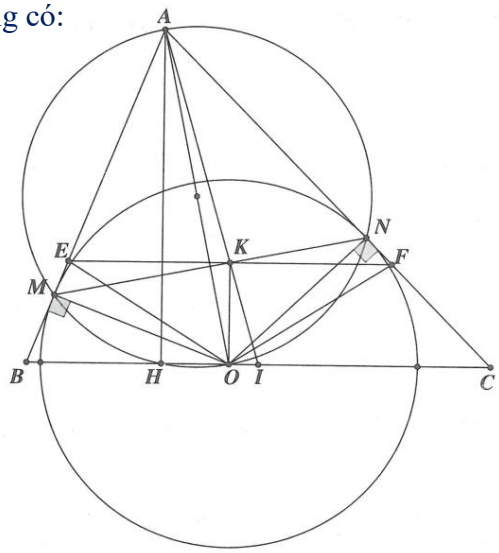
b. Chứng minh: *AH* là phân giác của MHN .

c. Đường thẳng qua *O* vuông góc với *BC* cắt *MN* tại *K*. Chứng minh: $KN.AC=KM.AB$.

d. Gọi *I* là trung điểm *BC*. Chứng minh: *A, K, I* thẳng hàng .

Giải:

Do $AO\perp MN$ nên ta có: $ONK=NAO$ (cùng phụ với NOA), ta cũng có:



$NOK=90°-NOC=OCA$.

Từ đó suy ra $\Delta OKN\backsim\Delta COA$

(g.g) dẫn đến $\frac{KN}{OA}=\frac{ON}{CA}$, tương

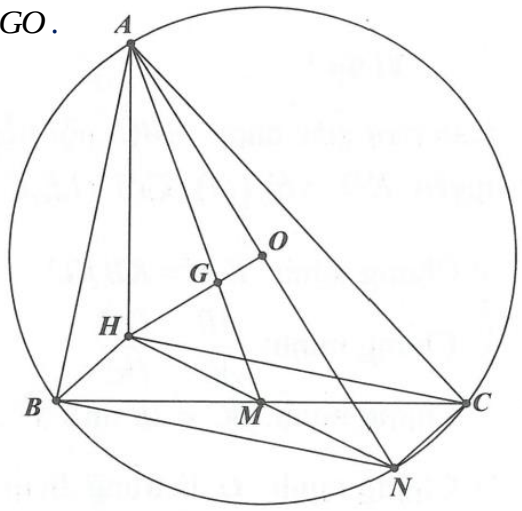
tự ta cũng có: $\frac{KM}{OA}=\frac{OM}{BA}$ Do $OM=ON$

suy ra $\frac{KM}{KN}=\frac{AC}{AB}$ hay $KM.AB=KN.AC$.

Dựng đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F, ta dễ chứng minh được: $KEMO$, $KNFO$ nội tiếp, kết hợp với $OMK = ONK$ ta có biến đổi góc: $OEK = OMK = ONK = OFK$ suy ra tam giác OEF cân tại O, dẫn tới $KE = KF$, theo bổ đề hình thang ta có A, K, I thẳng hàng.

2. Đường thẳng Ơle:

Trong một tam giác: Trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp O nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Ơle của tam giác. Đồng thời ta có: $HO = 3GO$.



Chứng minh :

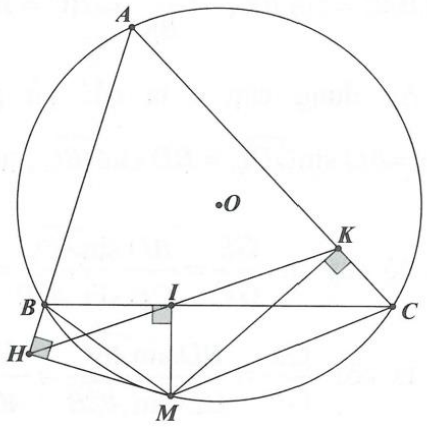
Dựng đường kính AN của (O) .Vì AN là đường kính của (O) nên $NC \perp AC$, do $BH \perp AC \Rightarrow BH // NC$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $CH // NB$ nên tứ giác $BHCN$ là hình bình hành, suy ra 2 đường chéo NH, BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên N, H, M thẳng hàng.

Ta có MO là đường trung bình của tam giác AHN nên $MO // = \frac{1}{2} AH$. Gọi G là giao điểm của AM và HO, do $MO // AH$ (cùng vuông góc với BC). Theo định lý Thales ta có: $\frac{AG}{GM} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABC và H, G, O thẳng hàng. Do $\frac{GO}{GH} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow HO = 3GO$. (Đường thẳng qua H, G, O gọi là đường thẳng Ơle của tam giác ABC).

3. Đường thẳng Simson , đường thẳng Steiner.

Đường thẳng Simson: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) M là một điểm bất kỳ trên đường tròn. Kẻ MH, MI , MK lần lượt vuông góc với AB, BC, AC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, K thẳng hàng.



Chứng minh :

Tứ giác $MIBH$ có $BHM + BIM = 90° + 90° = 180°$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MIH = MBH$ (cùng chắn cung HM), mà tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $MBH = KCM$, do đó $MIH = KCM$.

Mặt khác tứ giác $KCMI$ nội tiếp (vì $MIC = MKC = 90°$) nên $KCM + MIK = 180° \Rightarrow MIH + MIK = 180° \Rightarrow HIK = 180°$. Vậy H, I, K thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua H, I, K được gọi là đường thẳng Simson của điểm M.

Chú ý: Ta có bài toán đảo về bài toán Simson như sau: Cho tam giác ABC và một điểm M nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của M lên ba cạnh của tam giác ABC là ba điểm thẳng hàng thì M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ví dụ 1.

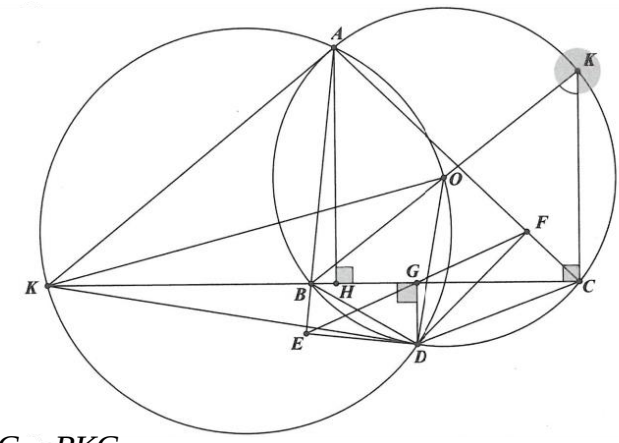
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), tiếp tuyến tại A của (O) cắt CB tại K, kẻ tiếp tuyến KD với (O). Gọi G,E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB, BC, CA.

a. Chứng minh: $KA^2 = KB.KC$.

b. Chứng minh: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$

c. Chứng minh: $BC = 2R\sin BAC$.

d. Chứng minh: G là trung điểm của EF.



Giải:

a. Học sinh tự chứng minh

b. Từ chứng minh câu a ta suy ra:

$\Delta KBA \backsim \Delta KAC$ suy ra $\dfrac{KA}{KC} = \dfrac{AB}{AC}$,

tương tự $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{BD}{BC}$ mà $KA = KB$ suy ra $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{BC}$.

c. Kẻ đường kính BK của (O) ta có: $BCK = 90°$, lại có $BAC = BKC$, suy ra

$\sin BAC = \sin BKC = \dfrac{BC}{BK} \Leftrightarrow BC = BK.\sin BAC$, hay BC=2RsinA.

d. Áp dụng câu c ta có: Tứ giác $BGDE$ nội tiếp đường tròn đường kính BD nên

$GE = BD.\sin GDE = BD.\sin ABC$, tương tự ta cũng có: $GF = CD.\sin FCG = CD.\sin ACB$

Từ đó suy ra $\dfrac{GE}{GF} = \dfrac{BD.\sin ABC}{CD.\sin ACB} = \dfrac{AB.\sin ABC}{AC.\sin ACB}$, dựng đường cao AH của tam giác ABC thì ta có:

$\dfrac{GE}{GF} = \dfrac{BD.\sin ABC}{CD.\sin ACB} = \dfrac{AB.\sin ABC}{AC.\sin ACB} = \dfrac{AH}{AH} = 1$ suy ra $GE = GF$. Mặt khác từ các tứ giác $BGDE$, $CFGD$, $ABCD$ nội tiếp ta có biến đổi góc: $EGD = EBD = ACD = 180° - DGF$

$\Rightarrow EGD + DGF = 180°$ hay E, G, F thẳng hàng. Nói cách khác G là trung điểm của EF.

(Đường thẳng qua E, G, F chính là đường thẳng Simson của D với tam giác ABC)

Đường thẳng Steiner

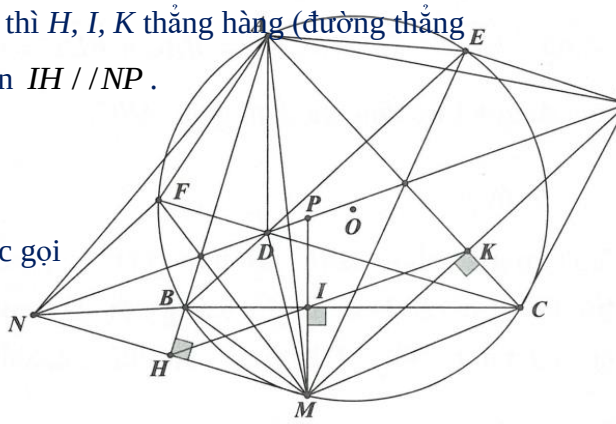
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn. Gọi N, P, Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, BC, CA. Chứng minh rằng N, P, Q thẳng hàng.

Chứng minh:

Gọi *H, I, K* theo thứ tự là hình chiếu của *M* lên *AB, BC, AC*; thế thì *H, I, K* thẳng hàng (đường thẳng Simson). Dễ thấy *IH* là đường trung bình của tam giác *MNP* nên $IH//NP$.

Tương tự $IK//PQ$.

Theo tiên đề Ơ-clit và do *H, I, K* thẳng hàng nên suy ra *N, P, Q* thẳng hàng. Đường thẳng đi qua *N, P, Q* được gọi là đường thẳng Steiner của điểm *M*.



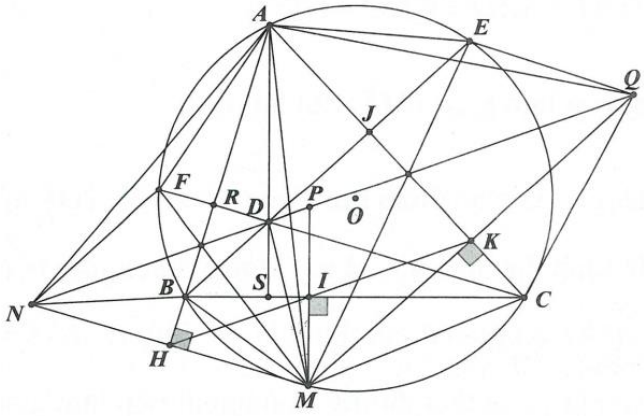
Chú ý :

a) Ta có thể chứng minh ba điểm *N, P, Q* thẳng hàng bằng cách dùng phép vị tự: Các điểm *N, P, Q* lần lượt là ảnh của *H, I, K* trong phép vị tự tâm *M* tỉ số 2, mà *H, I, K* thẳng hàng nên *N, P,Q* cũng thẳng hàng. Như vậy đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson trong phép vị tự tâm *M* tỉ số 2.

Ngoài ra liên quan đến đường thẳng Simson, Steiner ta cũng có kết quả sau:

" Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác *ABC*".

Thật vậy, gọi *D* là trực tâm của tam giác *ABC*; *BD, CD* cắt *(O)* lần lượt ở *E, F*. Dễ dàng chứng minh được *E* đối xứng với *D* qua *AC*, *F* đối xứng với *D* qua *AB*. Ta có *FDMN* là hình thang cân và các tứ giác *IBHM* , *MBFC* nội tiếp nên ta có: $DFM = DNM = MBC = IHM$ do đó $ND//IH$. Tương tự ta cũng có: $DQ//IK$ mà *H, I, K* thẳng hàng nên *N, P, Q* thẳng hàng. Nói cách khác: Đường thẳng Steiner của điểm *M* đi qua trực tâm của tam giác *ABC*.



Cách khác:

Gọi *AS, BJ, CR* là các đường cao của tam giác *ABC*, *D* là trực tâm. Ta có $ANB = AMB$ (tính chất đối xứng). Lại có $AMB = ADJ$ (cùng bù với SDJ).

Suy ra $ANB = ADJ$ nên *ADBN* là tứ giác nội tiếp, do đó $NAB = NDB$. Mà $NAB = MAB \Rightarrow NDB = MAB$.

Chứng minh tương tự $CDQ = CAM$. Ta có $NDB + CDQ = MAB + CAM = BAC$

$\Rightarrow NDQ = NDB + BDC + CDQ = BAC + BDC = 180°$. Vậy *N, D, Q* thẳng hàng hay đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác *ABC*.

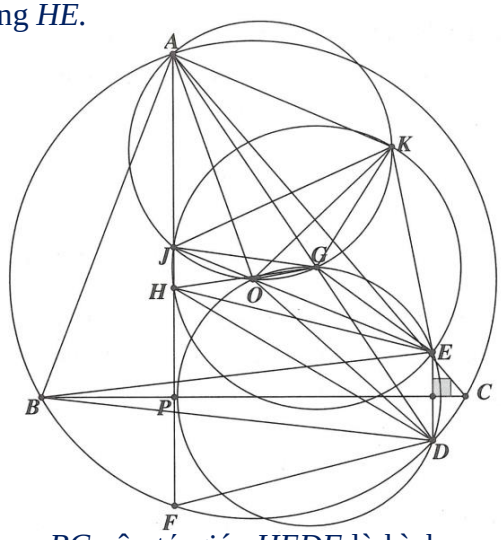
Ví dụ 1.

Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp *(O)* có trực tâm là điểm *H*. Một điểm *D* nằm trên cung nhỏ *BC*, gọi *E* là điểm đối xứng với *D* qua *BC*, đường tròn ngoại tiếp tam giác *ODE* cắt *AD* tại *G*. Gọi *J* là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác *AGO* với *AH*.

Chứng minh: *J, O, E* thẳng hàng.

a. Chứng minh: *G* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *JHE*.

b. Chứng minh: Trực tâm tam giác *AGO* nằm trên đường thẳng *HE*.



Giải:

a, Ta có: $GOE = GDE = GAJ = 180° - GOJ$

Suy ra $GOE + GOJ = 180°$ hay *J, O, E* thẳng hàng.

b, Từ các tứ giác *AJOG, ODEG* nội tiếp

Ta có biến đổi góc:

$GJO = GAO = GDO = GEO$

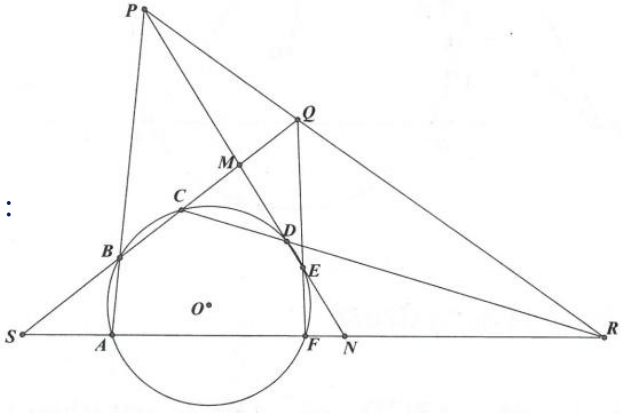
suy ra tam giác *GJE* cân tại *G*.

Gọi *F* là giao điểm thứ 2 của *AH* với *(O)* thì *F* đối xứng với *H* qua *BC* nên tứ giác *HEDF* là hình thang cân. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác *JHE* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *AGO* tại giao điểm thứ 2 là *K*. Suy ra $JGE = AOD = 2ABD = 2AFD = 2\left(180° - JHE\right) = 2JKE$ suy ra *G* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *JHE*.

c, Ta có: $GOE = GDE = GAJ = GKJ = GJK = GOK$ lại có $GKO = GJO = GEO$ suy ra $\Delta GOK = \Delta GOE$ hay *OG* là trung trực của *KE* hay *E* là điểm đối xứng với *K* qua *OG*. Do $GK = GJ$ và tứ giác *AJGK* nội tiếp nên *AG* là phân giác của HAK mà $GKA = GJH = GHJ$ suy ra *H, K* đối xứng nhau qua *AG*. Suy ra *HE* là đường thẳng Steiner của *K* trong tam giác *AGO*. Theo tính chất vừa chứng minh thì *HK* đi qua trực tâm của tam giác *AGO*.

4. Đường thẳng Pascal

Cho 6 điểm *A, B, C, D, E, F* cùng thuộc một đường tròn (Có thể hoán đổi thứ tự). Gọi *P, Q , R* lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB, DE), (BC, EF), (CD, FA)$. Khi đó 3 điểm *P, Q, R* cùng nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Pascal.



Chứng minh:

Giả sử *DE* cắt *BC* tại *M* cắt *AF*

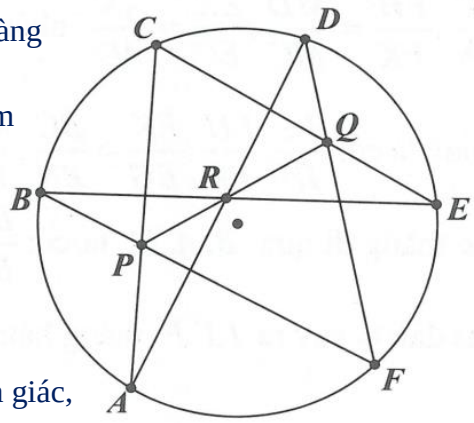
tại *N*, *BC* cắt *AF* tại *S*.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến: *ABP* ta có :

$\frac{PM}{PN}.\frac{AN}{AS}.\frac{BS}{BM} = 1$ hay $\frac{PM}{PN} = \frac{AS}{AN}.\frac{BM}{BS}(1)$.

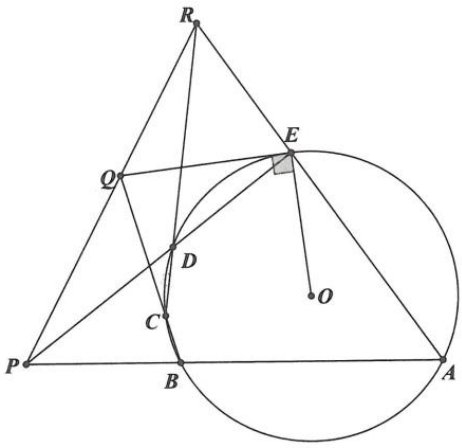
Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến : CDR ta có: $\frac{RN}{RS}.\frac{CS}{CM}.\frac{DM}{DN}=1$ suy ra $\frac{RN}{RS}=\frac{CM}{CS}.\frac{DN}{DM}(2)$. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến: QEF ta có: $\frac{QM}{QS}.\frac{FS}{FN}.\frac{EN}{EM}=1$ suy ra $\frac{QS}{QM}=\frac{FS}{FN}.\frac{EN}{EM}(3)$.

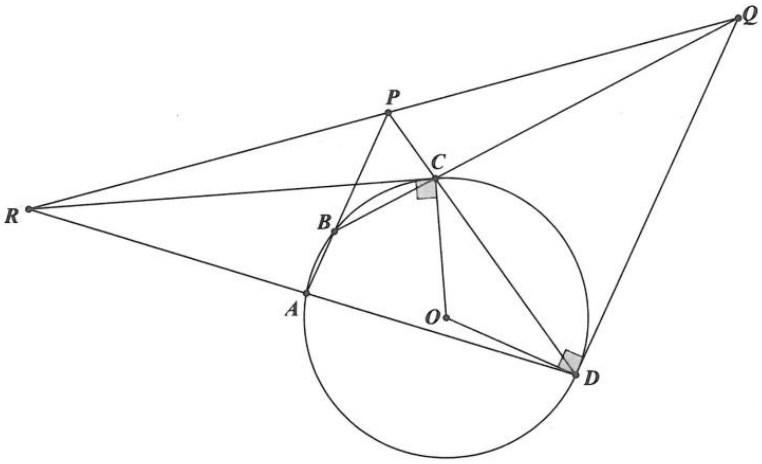
Mặt khác các tứ giác $ABCF$, $BCDE$, $AFED$ nội tiếp nên: $SB.SC=SA.SF; MC.MB=MD.ME, NF.NA=ND.NE(4)$. Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta suy ra $\frac{PM}{PN}.\frac{RN}{RS}.\frac{QS}{QM}=1$ .Theo định lý đảo Menelaus ta suy ra P, Q, R thẳng hàng



Đường thẳng PRQ ở trên được gọi là đường thẳng Pascal ứng với bộ điểm A,B,C,D,E,F. Bằng cách hoán vị các điểm A,B,C,D,E,F ta thu được rất nhiều các đường thẳng Pascal khác nhau, cụ thể ta có tới 60 đường thẳng Pascal. Chẳng hạn vẽ hình bên minh họa trường hợp các điểm $ACEBFD$.

Ngoài ra khi cho các điểm trùng nhau (khi đó lục giác suy biến thành tam giác, tứ giác, ngũ giác), ví dụ $E\equiv F$ thì cạnh EF trở thành tiếp tuyến của đường tại E, ta còn thu thêm được rất nhiều các đường thẳng Pascal khác nữa. Hình vẽ dưới đây minh họa trường hợp các điểm $ABCDEE$, $ABCCDD$.



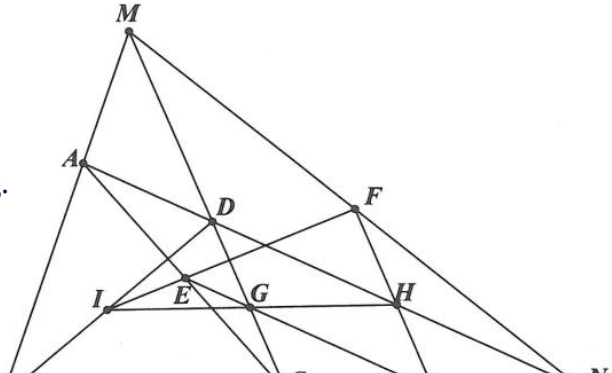


5. Đường thẳng Gauss

Cho tứ giác $ABCD$ có AB, CD cắt nhau tại M, AD, BC cắt nhau tại N. Khi đó trung điểm các đoạn thẳng AC, BD, MN nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Gauss của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh:

Gọi I, E, F lần lượt là trung điểm của BD, AC ,MN và K, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CN, CD, DN. Dễ thấy các điểm F, H, K thẳng hàng.



E, G, K thẳng hàng. *I, G, H* thẳng hàng.

Ta có: $FK//MC, IH//BC, EK//DN$ nên

$\frac{IG}{IH}=\frac{BC}{BN}, \frac{FH}{FK}=\frac{MD}{MC}, \frac{EK}{EG}=\frac{AN}{AD}$ nhân 3 đẳng thức ta có:

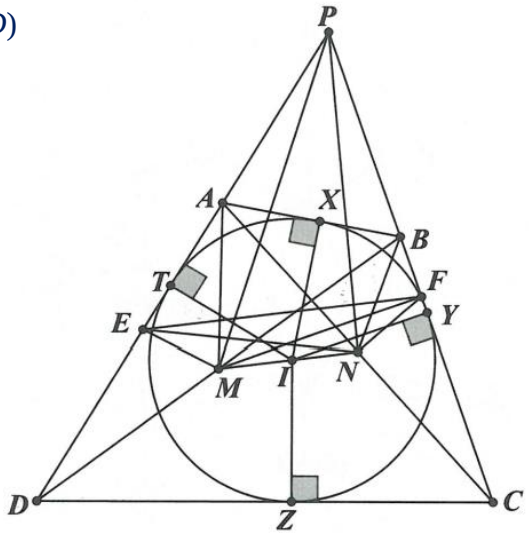
$\frac{IG}{IH}.\frac{FH}{FK}.\frac{EK}{EG}=\frac{BC}{BN}.\frac{MD}{MC}.\frac{AN}{AD}$. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác *CDN* và đường thẳng đi qua *B, A, M* ta có: $\frac{BC}{BN}.\frac{MD}{MC}.\frac{AN}{AD}=1$, suy ra $\frac{IG}{IH}.\frac{FH}{FK}.\frac{EK}{EG}=1$. Theo định lý Menelaus đảo ta suy ra *I, E, F* thẳng hàng.

6. Đường thẳng Niutơn

Cho tứ giác *ABCD* ngoại tiếp *(I)*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *BD, AC* . Khi đó 3 điểm *I, M, N* thẳng hàng. Đường thẳng đi qua *I, M, N* gọi là đường thẳng Niutơn của tứ giác *ABCD*.

Chứng minh: (Ta chỉ xét trường hợp *AB* không song song với *CD*)

Gọi các tiếp điểm của *(I)* với *AB, BC, CD, DA* lần lượt là *X, Y, Z, T* thì $IX=IY=IZ=IT=r$.



Giả sử *AD, BC* cắt nhau tại *P*, trên *PD* lấy *E* sao cho $PE=AD$, trên *PC* lấy *F* sao cho $PF=BC$ thế thì:

$S_{MAD}+S_{MBC}=\frac{1}{2}S_{DAB}+\frac{1}{2}S_{DBC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

$S_{NAD}+S_{NBC}=\frac{1}{2}S_{CAD}+\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Từ đó suy ra :

$S_{MAD}+S_{MBC}=S_{NAD}+S_{NBC}$. Theo cách xác định *E, F* ta có: $S_{MAD}=S_{MPE}, S_{MBC}=S_{MPF}, S_{NAD}=S_{NPE}, S_{NBC}=S_{NPF}$

suy ra: $S_{MPE}+S_{MPF}=S_{NPE}+S_{NPF}$ hay $S_{MEPF}=S_{NEPE}\ (1)$.

Lại có: $S_{IAD}=S_{IPE}, S_{IBC}=S_{IPF}\Rightarrow S_{IAD}+S_{IBC}=S_{IPE}+S_{IPF}=S_{IEPF}$

nhưng $S_{IAD}+S_{IBC}=\frac{1}{2}S_{AXYT}+\frac{1}{2}S_{DZYT}+\frac{1}{2}S_{IZCY}+\frac{1}{2}S_{XIYB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

suy ra $S_{MEPF}=S_{IEPF}\ (2)$. Từ (1), (2) ta suy ra

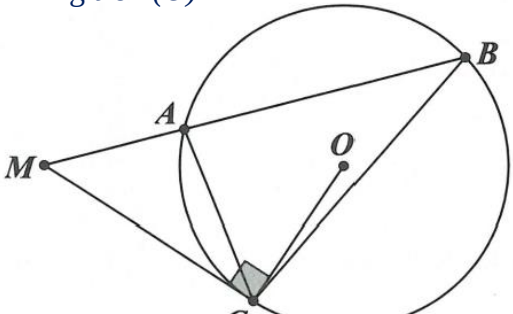
$S_{MEPF}=S_{NEPF}=S_{IEPF}$ hay $S_{MEF}=S_{NEF}=S_{IEF}\Leftrightarrow MN//EF, MI//EF$ suy ra M,N,I thẳng hàng.

7. Trục đẳng phương của hai đường tròn

a. Cho đường tròn *(O;R)* và một điểm *M*, đường thẳng thay đổi qua *M* cắt *(O)* tại *A, B*.

Khi đó đại lượng: $P_{M/(O)}=MA.MB$ gọi là phương tích của điểm *M* với đường tròn *(O)*

+ Nếu *M* nằm ngoài *(O)* thì $P_{M/(O)}=MA.MB=MO^2-R^2$.



+ Nếu *M* nằm trong *(O)* thì $P_{M/(O)} = MA.MB = R^2 - MO^2$.

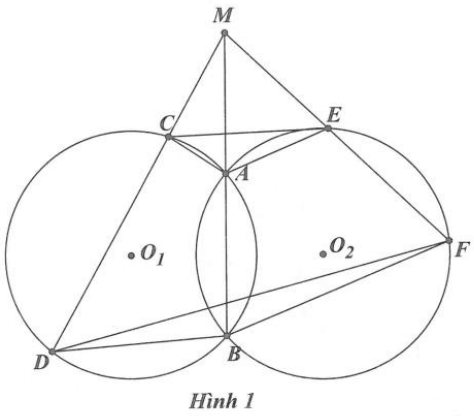
+ Nếu *M* nằm trên *(O)* thì $P_{M/(O)} = 0$.

Từ đó ta cũng có kết quả: Khi *M* nằm ngoài *(O)* và *MC* là tiếp tuyến của *(O)* tại *C* thì $P_{M/(O)} = MA.MB = MC^2$.

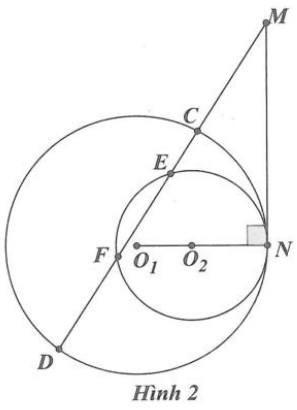
(Đây là những kết quả quen thuộc đã được chứng minh trong phần cát tuyến, tiếp tuyến).

b. Các điểm có cùng phương tích với 2 đường tròn phân biệt $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ nằm trên một đường thẳng gọi là trục đẳng thức của 2 đường tròn đó.

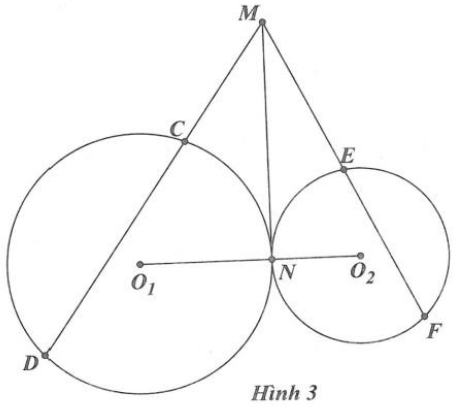
Trong phạm vi THCS ta cần chú ý đến các trường hợp là:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

+ Nếu $(O_1),(O_2)$ cắt nhau theo dây *AB*, lấy điểm *M* trên đường thẳng *AB* (*M* nằm ngoài 2 đường tròn) cát tuyến qua M cắt (O_1) tại *C, D* , cát tuyến qua M cắt (O_2) tại *E, F* thì $MC.MD = ME.MF = MA.MB$ (Hình 1).

+ Nếu $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc nhau tại *N* thì trục đẳng phương là đường thẳng qua *N* vuông góc với O_1O_2 (Hình 2,3)

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CHỨNG MINH THẲNG HÀNG , ĐỒNG QUY

1. Một số tiêu chuẩn để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

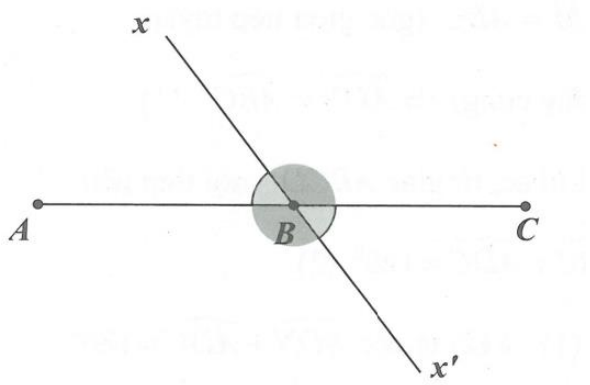
Để chứng minh 3 điểm *A, B, C* thẳng hàng theo thứ tự, thực chất của các phương pháp cơ bản là chứng minh hai đường thẳng *AB* và *AC* trùng nhau.

Trong phần này chúng ta đưa ra một số tiêu chuẩn để chứng minh 3 điểm *A, B, C* thẳng hàng.

Tiêu chuẩn 1. Ba điểm phân biệt *A, B, C* theo thứ tự nằm trên một đường thẳng khi và chỉ khi $ABC = 180°$.

Xét một đường thẳng $x'x$ qua *B*

Để chứng minh *A, B, C* thẳng hàng ta quy về chứng minh:

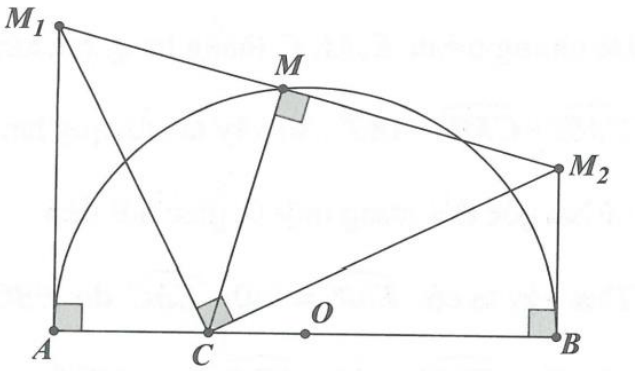


+ $ABx + xBC = 180°$ hoặc $ABx = x'BC$

Ví dụ 1.

Cho nửa đường tròn đường kính *AB*. Lấy điểm *C* thuộc *AB* sao cho $CA < CB$ và điểm *M* thuộc nửa đường tròn đó. Đường thẳng qua *M* vuông góc với *MC* cắt tiếp tuyến qua *A* tại M_1. Đường thẳng *C* vuông góc với M_1C cắt tiếp tuyến qua *M* tại M_2. Chứng minh M, M_1, M_2 thẳng hàng.

Giải:



Ta có: $CAM = CM_1M$ (Tứ giác $ACMM_1$ nội tiếp).

$CAM = MBM_2$ (góc giữa hai tiếp tuyến và dây cung).

$CM_1M = MCM_2$ (cùng phụ MCM_1)

$\Rightarrow MCM_2 = MBM_2$

$\Rightarrow$tứ giác $BCMM_2$ nội tiếp

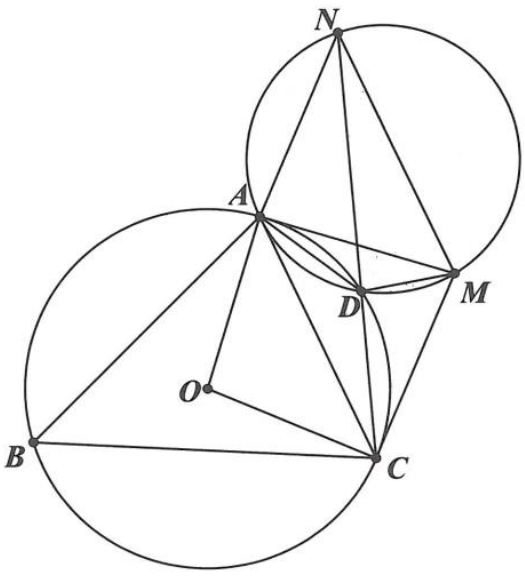
$\Rightarrow CMM_2 = 90°$.

đó ta có: $M_1MM_2 = M_1MC + M_2MC = 180°$ (đpcm).

Ví dụ 2.

Cho tam giác *ABC* nội tiếp trong đường tròn *(O)*. Các tiếp tuyến qua *A*, *C* cắt nhau ở *M*. Vẽ hình bình hành *ACMN*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN* cắt *(O)* ở *D*. Chứng minh *N*, *C*, *D* thẳng hàng.

Giải:



$AMN = ADN$ (tứ giác ADMN nội tiếp) .

$AMN = CAM$ (so le trong)

$CAM = ABC$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

$\Rightarrow ADN = ABC(1)$.

Mặt khác, tứ giác ABCD nội tiếp nên

$ABC + ADC = 180°(2)$.

Từ (1) và (2) ta có : $ADN + ADC = 180°$

suy ra (đpcm).

Ví dụ 3.

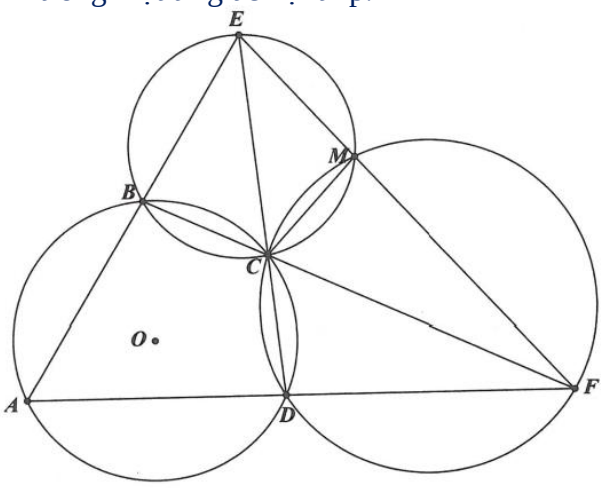
Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn *(O)* các tia *AB* , *CD* cắt nhau tại *E* .*AD* cắt *BC* tại *F*. Gọi *M* là giao điểm thứ hai khác *C* của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác *BCE*, *CDF*. Chứng minh *E*, *M*, *F* thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10 -Trường chuyên Lê Quý Đôn -Đà Nẵng năm 2012)

Giải:

Để chứng minh *E, M, F* thẳng hàng ta chứng minh:

$CME+CMF=180°$. Vì vậy ta cần quy hai góc này về hai góc đối trong một tứ giác nội tiếp.



Thật vậy ta có: $EMC=180-EBC$ do *EBCM* nội tiếp. $FMC=180-CDF$ do *FMCD* nội tiếp. Từ đó ta có:

$EMC+FMC=360°-CDF-EBC$.

Để ý rằng: *ABCD* là tứ giác nội tiếp nên:

$CDF=ABC, EBC=CDA$ mà $ABC+CDA=180°$

nên $CME+CMF=180°$. Do đó 3 điểm *E, M, F* thẳng hàng.

Ví dụ 4.

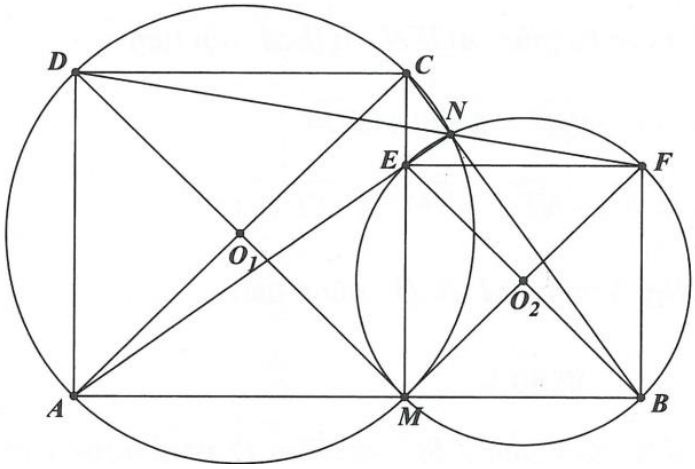
Cho 3 điểm thẳng hàng theo thứ tự *A, M, B* về cùng một phía của đường thẳng *AB* vẽ hai hình vuông *AMCD* và *BMEF*. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoại tiếp hai hình vuông đó cắt nhau tại *M* và *N*. Chứng minh rằng:

a. *B, C, N* thẳng hàng.

b. *A, E, N* thẳng hàng.

Giải:

a. Ta có:



$ANC=90°$ (góc chắn nửa đường tròn)

$MNE=MEF=45°$ (góc nội tiếp).

$MNB=MEB=45°$ (góc nội tiếp).

$\Rightarrow ANB=90°$.

Vậy $CNA+ANB=CNB=180°\Rightarrow$ (đpcm).

b. Từ kết quả câu trên, ta có : $\Delta MBC=\Delta MEA$ $(c.g.c)\Rightarrow MBC=MEA.$

Mặt khác tứ giác *BMEN* nội tiếp được nên

$MBN+MEN=180°\Rightarrow MEN+MEA=180°\Rightarrow$ (đpcm).

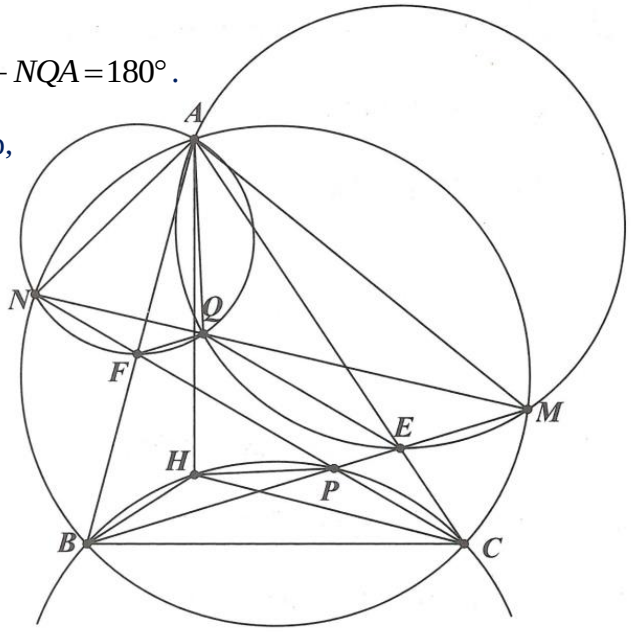
Ví dụ 5.

Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn *(O)* có trực tâm *H*. Gọi *P* là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC(P\neq B,C,H)$ và nằm trong tam giác *ABC*. *PB* cắt đường tròn *(O)* tại *M* khác *B*. *PC* cắt *(O)* tại *N* khác *C*. *BM* cắt *AC* tại *E*, *CN* cắt *AB* tại *F*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác

AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác *ANF* cắt nhau tại *Q* khác *A*. Chứng minh *M, N, Q* thẳng hàng.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên – Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội - năm 2013)

Giải:



Để chứng minh: *M, N, Q* thẳng hàng ta chứng minh: $MQA+NQA=180°$.

Ta có $BPC=BHC=180°-BAC$ nên tứ giác *AEPF* nội tiếp,

suy ra $BFC=BEA$ suy ra $BFC+BEC=180°$

Từ các tứ giác *AQFN, AQEM* nội tiếp

ta có $MQN=MQA+NQA$

$=MEA+NFA=BFC+BEC=180°$.

Vậy 3 điểm *M, N, Q* thẳng hàng.

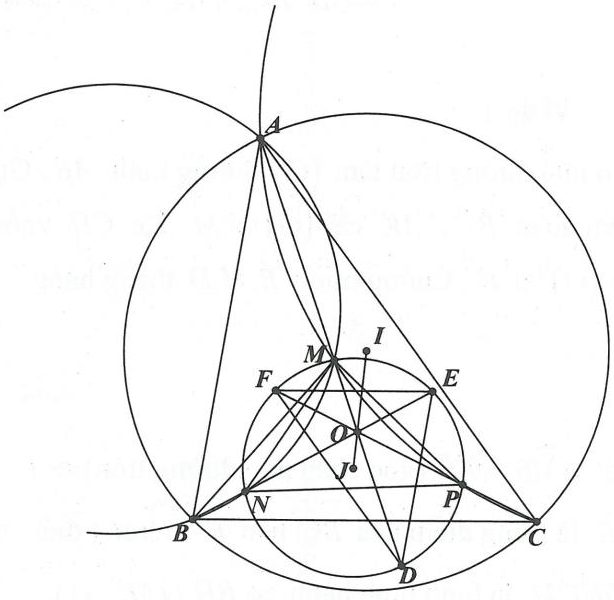
Ví dụ 6.

Cho tam giác *ABC* và điểm *O* nằm trong tam giác đó (*O* không nằm trên các cạnh tam giác). Điểm *M* nằm trên tia *OA* (*M* khác *O, A*) sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABM* cắt tia *OB* tại giao điểm thứ hai là *N*, đường tròn ngoại tiếp tam giác *ACM* cắt tia *OC* tại giao điểm thứ hai là *P*. Gọi *I, J* lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ABC, MNP*. Chứng minh: *O, I, J* thẳng hàng.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 – Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu – Năm 2012).

Phân tích định hướng giải

Giả sử đường tròn *(J)* cắt *OA, OB, OC* lần lượt tại *D, E, F*. Để chứng minh *O, I, J* thẳng hàng ta chứng minh:



$AOJ+DOJ=180°$. Điều này cũng tương đương với $AOI=DOJ$. Ta cần tìm liên hệ của các góc này với các góc của tứ giác nội tiếp. Thật vậy ta có:

$JDO=JDE-ODE, IAO=IAB-OAB$

lại có: $JDE=\dfrac{180°-EJD}{2}, EIB=\dfrac{180°-AIB}{2}$,

mặt khác $EJD=2DFE, AIB=2ACB$.

Bây giờ ta quan tâm đến hai tam giác $\Delta ABC, \Delta DEF$.

Nếu hai tam giác này đồng dạng với nhau thì bài toán sẽ được giải quyết.

Từ định hướng trên ta có thể giải bài toán như sau:

+ Để ý rằng do các tứ giác *AMNB, AMPC* là tứ giác nội tiếp nên ta dễ chứng minh được:

$OM.OA = ON.OB = OP.OC$ suy ra tam giác $\Delta OBC \backsim \Delta OPN$

mà $OPN = OEF, \Delta OBC \backsim \Delta OEF \Rightarrow \dfrac{BC}{BF} = \dfrac{OB}{OE} = \dfrac{OC}{OF}$. Hoàn toàn tương tự ta có : $\Delta OAB \backsim \Delta ODE$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OB}{OE}, \Delta OAC \backsim \Delta ODF \Rightarrow \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OC}{OF}$.

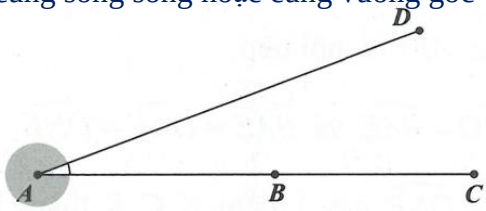
Từ đó suy ra $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ do đó $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ suy ra $DEF = ACB$ dẫn đến:

$AIB = EJD \Rightarrow JDE = EIB$ mặt khác $ODE = OAB$ nên $JDO = IAO$.

+ Tam giác *IAB* cân tại *I* , ΔJDE cân tại *J* mà $AIB = EJD$ nên hai tam giác này đồng dạng với nhau, dẫn đến $\dfrac{IA}{JD} = \dfrac{AB}{DE}$ nhưng $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{OA}{OD}$ suy ra $\dfrac{IA}{JD} = \dfrac{OA}{OD}$ từ đó ta có: $\Delta AOI \backsim \Delta DOJ$ suy ra

$AOI = DOJ$.

Tiêu chuẩn 2. *A, B, C* thẳng hàng $\Leftrightarrow$ đường thẳng *AB* và *AC* cùng song song hoặc cùng vuông góc với một đường thẳng.



Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh

theo hướng: $DAB = DAC$ thì *A, B, C* thẳng hàng.

Ví dụ 1.

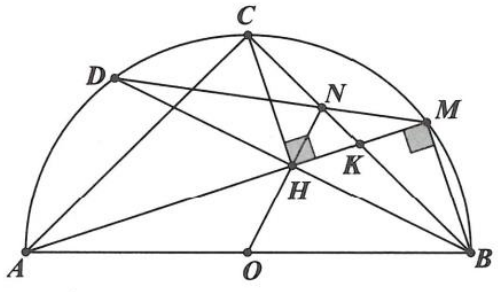
Cho nửa đường tròn tâm *(O)* đường kính *AB*. Gọi *C* là trung điểm cung AB, K là trung điểm đoạn *BC, AK* cắt *(O)* tại *M* . Kẻ *CH* vuông góc với *AM*; *OH* cắt *BC* tại *N*, *MN* cắt *(O)* tại *D*. Chứng minh *B, H, D* thẳng hàng.

Giải:

Ta có: $AMB = 90°$ (góc chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow HC // BM$ (cùng vuông góc với AM).

Mà *K* là trung điểm của *BC* nên *K* là trung điểm của $HM \Rightarrow BM = HC$

$\Rightarrow BHCM$ là hình bình hành $\Rightarrow BH // MC (1)$.



Mặt khác, $AMC = 45°$ (góc chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta HCM$ vuông cân tại $H \Rightarrow HC = HM$.

Lại có $OC = OM$ (bán kính đường tròn *(O)*)

$\Rightarrow OH$ là phân giác của $COM \Rightarrow NC = NM$

$\Rightarrow \Delta NCM$ cân tại $N \Rightarrow NCM = NMC$ mà $CMD = CBD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung *CD*), do đó

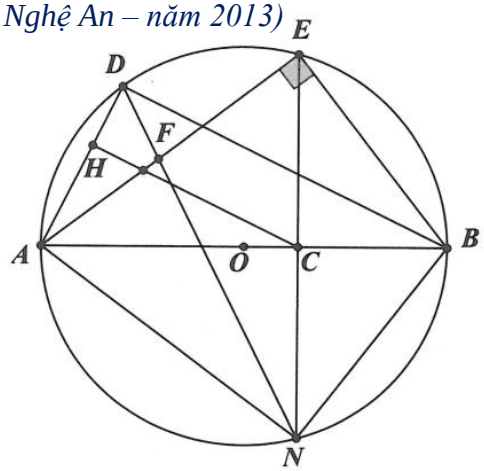
$BCM = CBD \Rightarrow BD // MC (2)$.Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Ví dụ 2.

Cho đường tròn tâm *O* đường kính *AB*. Trên đường tròn lấy điểm *D* khác *A* sao cho $DAB > 60°$. Trên đường kính *AB* lấy điểm *C* khác *A, B* và dựng $CH \perp AD$ tại *H*. Phân giác trong góc DAB cắt đường tròn tại *E* và cắt *CH* tại *F*. Đường thẳng *DF* cắt đường tròn tại giao điểm thứ 2 là *N*. Chứng minh: Tứ giác *AFCN* nội tiếp và *N, C, E* thẳng hàng.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 – Trường chuyên Phan Bội Châu Nghệ An – năm 2013)

Giải:



Ta có: $ACH = ABD$ (đồng vị). $ABD = AND$ (cùng chắn cung *AD*) suy ra $ACH = ANF$

Hay tứ giác *AFCN* nội tiếp.

Ta có: $CND = BAE$ và $BAE = DAE = DNE$

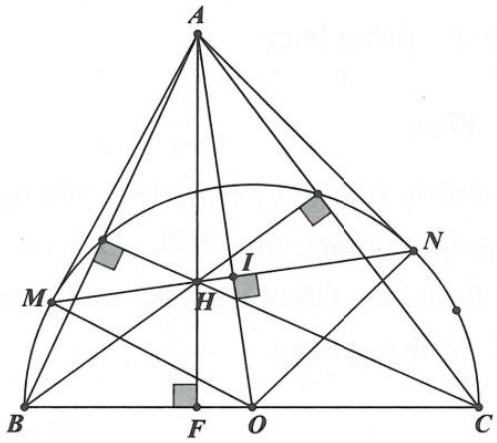
vậy $CND = DNE$ hay 3 điểm *N, C, E* thẳng hàng

Ví dụ 3.

Cho đường tròn *(O)* đường kính $BC = 2R$. Từ điểm *A* nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến *AM, AN* đến đường tròn *(O)* (*M, N* là hai tiếp điểm). Gọi *H* là trực tâm tam giác *ABC*, *F* là giao điểm của *BC* và *AH*. Chứng minh *M, H, N* thẳng hàng.

(*Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 – Trường chuyên Bắc Ninh năm 2014)*

Giải:



Để chứng minh *M, H, N* thẳng hàng ta chứng minh:

$ANH = ANM$.

Ta có: $ANM = AFM = AFN$ (Do 5 điểm *A, M, N, O, F* cùng nằm trên một đường tròn và $AM = AN$).

Như vậy ta cần chứng minh:

$AFN = ANH$.

Xét tam giác $\Delta ANH, \Delta AFN$.

Ta có: NAH chung, $AH.AF = AI.AO = AN^2$ (Tính chất quen thuộc của tiếp tuyến, cát tuyến)

suy ra $\frac{AH}{AN} = \frac{AN}{AF}$ hay $\Delta ANH \backsim \Delta AFN$ suy ra $AFN = ANH$.

Ví dụ 4.

Cho tam giác *ABC* nội tiếp trong đường tròn *(O* . Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cung BC, CA, AB của *(O)* và *I* là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác *ABC* . A_1C_1 cắt *AB* ở *M*; A_1B_1 cắt *AC* ở *N*. Chứng minh *M, I, N* thẳng hàng.

Giải:

+ Vì A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cung BC, CA, AB nên AA_1, BB_1, CC_1 là các tia phân giác trong của tam giác *ABC* do đó chúng đồng qui tại *I*.

Ta có: $IBA_1 = \frac{1}{2} A_1CB_1$,

$A_1IB = \frac{1}{2}\text{sd}\left(AB_1 + BA_1\right) = \frac{1}{2} sd\, A_1CB_1$

$\Rightarrow A_1BI = A_1IB \Rightarrow \Delta A_1BI$ cân tại A_1

+ Tương tự ta có : ΔA_1CI cân tại A_1

Xét tứ giác A_1BMI có:

$A_1B = A_1I$ và $MA_1B = MA_1I$ (góc nội tiếp)

$\Rightarrow A_1M \perp BI \Rightarrow MB = MI \Rightarrow MBI = MIB$.

Mặt khác, BB_1 là phân giác góc ABC

nên $IBM = IBC \Rightarrow MIB = IBC\left(\text{so le trong}\right) \Rightarrow MI // BC$. Tương tự $NI // BC$

$\Rightarrow M, N, I$ thẳng hàng.

Ví dụ 5.

Hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại *A* .Vẽ hai đường kính AA_1, AA_2 và tiếp tuyến chung ngoài tương ứng B_1B_2. Gọi *(d)* là đường thẳng B_2 và vuông góc với A_1B_2. Gọi (d') là đường thẳng qua A_2 vuông góc với AA_2, d và d' giao nhau tại *M*. Chứng minh B_1, A, M thẳng hang.

Phân tích định hướng giải

Vì $AB_1 \perp A_1B_1$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), để chứng minh B_1, A, M thẳng hàng ta sẽ chứng minh $MB_1 \perp A_1B_1$ nghĩa là chứng minh tứ giác $A_1B_1B_2M$ nội tiếp được. Do

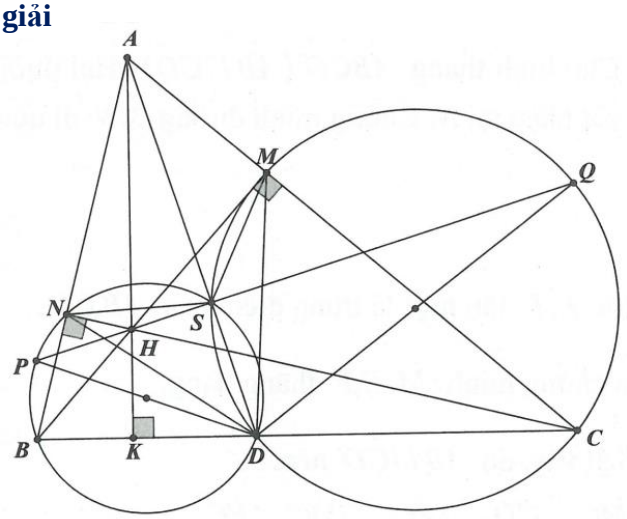
$O_1B_1 // O_2B_2$ nên $AO_1B_1 = AO_2B_2$ (2 góc đồng vị) $\Rightarrow B_1AO_1 = B_2A_2O_2 \Rightarrow B_1A // B_2A_2$. Tương tự, $A_1B_1 // AB_2, A_1B_1$ cắt A_2B_2 tại *N* thì AB_1NB_2 là hình chữ nhật $\Rightarrow NB_1B_2 = B_1B_2A$. Mặt khác,

$B_1B_2A = B_2A_2A$(góc giữa tiếp tuyến và dây cung)$\Rightarrow NB_1B_2 = B_2A_2A_1 \Rightarrow$tứ giác $A_1B_1B_2A_2$ nội tiếp được. Ta có $A_1B_2A_2M$ nội tiếp được trong đường tròn đường kính A_1M. Vậy tứ giác $A_1B_1B_2M$ nội tiếp được. Từ đó ta có đpcm.

Ví dụ 6.

Cho tam giác nhọn *ABC* có trực tâm là điểm *H*. Gọi *M, N* là chân các đường cao hạ từ *B, C* của tam giác *A, B, C*. Gọi *D* là điểm trên cạnh *BC*. Gọi (w_1) là đường tròn đi qua các điểm *B, N, D* gọi (w_2) là đường tròn đi qua các điểm *C, D, M*. Dựng *DP, DQ* lần lượt là đường kính của $(w_1),(w_2)$.Chứng minh *P, Q, H* thẳng hàng. $(IMO-2013)$

Phân tích định hướng giải



Gọi *S* là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn $(w_1),(w_2)$.

Ta dễ chứng minh được *ANSM* là tứ giác nội tiếp (Đây là bài toán rất quen thuộc) từ đó suy ra 5 điểm *A, N, S, H, M* cùng nằm trên một đường tròn.

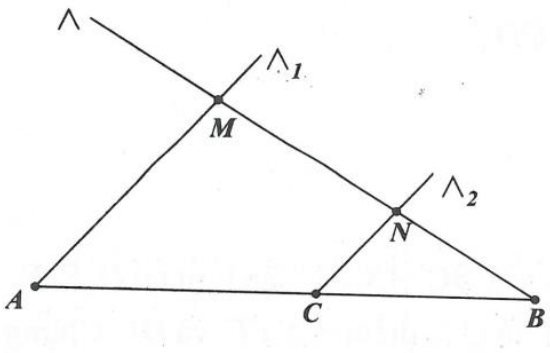
+ Trước hết ta chứng minh:

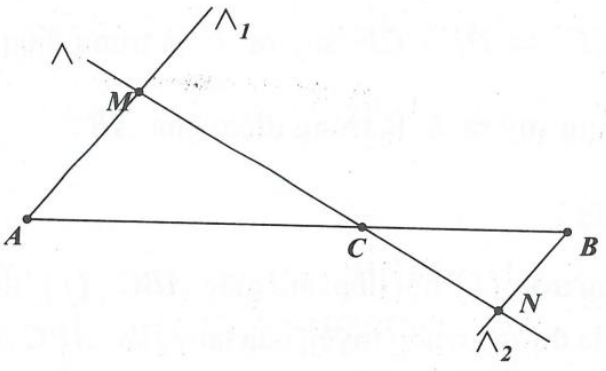
A, S, D thẳng hàng: Ta có: $ASN = AHN$ cùng chắn cung $AN, NSD = 180° - NBD = NHK$ do các tứ giác *NSDB, NHKB* nội tiếp. Suy ra $ASN + NSD = AHN + NHK = 180°$ do đó *A, S, D* thẳng hàng.

+ Vì 5 điểm *A, N, S, H, M* cùng nằm trên một đường tròn nên:

$ASH = 90°$. Vì *DP* là đường kính của (w_1) suy ra $PSD = 90°, DQ$ là đường kính của (w_2) nên $DSQ = 90°$ điều đó chứng tỏ các tia *PS, HS, QS* trùng nhau. Hay *P, S, Q* thẳng hàng

Tiêu chuẩn 3: Xét đường thẳng (Δ) đi qua *B* và hai đường thẳng $(\Delta_1),(\Delta_2)$ song song tương ứng qua *A, C* tạo thành hai tam giác *BMA* và *BNC* như một trong hai hình vẽ dưới đây:





Khi đó nếu $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB}$ thì *A, B, C* thẳng hàng.

Ta chứng minh tiêu chuẩn này như sau:

Vì $\Delta_1 // \Delta_2$ nên ta có: $AMB = CNB$ do đó $\Delta AMB \backsim \Delta CNB$

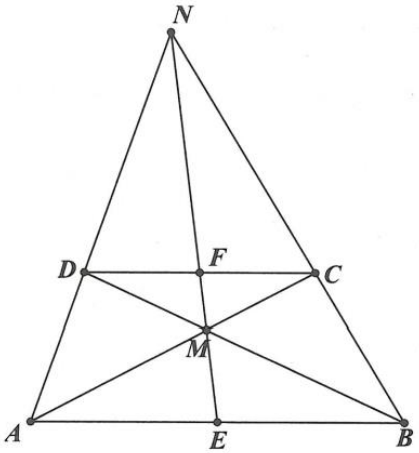
suy ra $MBA = NBC$ hay *A, B, C* thẳng hàng.

Ta còn gọi đây là phương pháp: ***"Chứng minh 2 tia trùng nhau"***

Ví dụ 1.

Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$. Hai đường chéo cắt nhau tại *M* , kéo dài hai cạnh bên cắt nhau tại *N*. Chứng minh đường *MN* đi qua trung điểm của 2 cạnh đáy. (Bổ đề hình thang)

Giải:



Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *AB, CD*.

Ta chứng minh *M, E, F* thẳng hàng.

Thật vậy, do $AB//CD$ nên:

$$\frac{MC}{MA}=\frac{CD}{AB}=\frac{2FC}{2EA}\Rightarrow\frac{MC}{MA}=\frac{FC}{EA}$$

$\Rightarrow M,E,F$ thẳng hàng.

Ta còn phải chứng minh *M, E, F* thẳng hàng.

Xét ΔNAB có $CD//AB$ nên $\frac{CD}{AB}=\frac{ND}{NA}\Rightarrow\frac{ND}{NA}=\frac{DF}{AE}\Rightarrow N,E,F$ thẳng hàng. Từ đó ta có đpcm.

Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh theo cách khác:

Áp dụng định lý Thales với $AB//CD$ ta có: $\frac{DF}{AE}=\frac{CF}{BE}$(cùng bằng $\frac{NF}{NE}$). Ta cũng có: $\frac{DF}{EB}=\frac{CF}{AE}$(cùng bằng $\frac{MF}{ME}$) . Nhân hai đẳng thức trên ta có: $\frac{DF}{AE}.\frac{DF}{EB}=\frac{CF}{BE}.\frac{CF}{AE}$

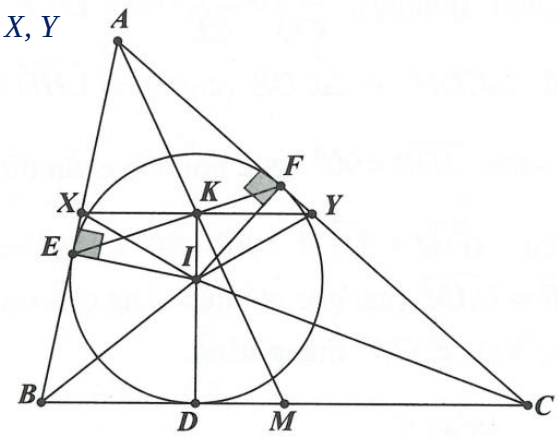
$\Leftrightarrow DF^2=CF^2\Leftrightarrow DF=CF$ suy ra *F* là trung điểm của CD.

Từ đó ta cũng suy ra *E* là trung điểm của *AB*.

Ví dụ 2.

Cho đường tròn *(I)* nội tiếp tam giác *ABC*, *(I)* tiếp xúc với *BC, AB, AC* lần lượt tại *D, E, F*. Vẽ *AM* là đường trung tuyến của tam giác *ABC*. Gọi *K* là giao điểm của *EF* và *DI*. Chứng minh *A, K, M* thẳng hàng.

Giải:



Qua K vẽ đường thẳng song song với *BC* cắt *AB, AC* lần lượt ở *X, Y*

$DI\perp BC, XY//BC\Rightarrow DI\perp XY$

Ta có $XEI=XKI=90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác *EXKI* nội tiếp.

$\Rightarrow IEK=IXK$.

Tương tự tứ giác *IKFY* nội tiếp $\Rightarrow IFK=IYK$.

Mà $IE=IF(=r)\Rightarrow\Delta IEF$ cân tại $I\Rightarrow IEK=IFK$

nên $IXK = YIK, \Delta IXY$ cân tại *I*. Mà *IK* là đường cao $(ID \perp XY)$.

Do đó *IK* là đường trung tuyến $\Rightarrow XK = KY = \frac{XY}{2}$. Do đó $\frac{XK}{BM} = \frac{2XK}{2BM} = \frac{XY}{BC}, \Delta ABC$ có $XY // BC \Rightarrow \frac{AX}{AB} = \frac{XY}{BC}$. Xét ΔAXK và ΔABM có $AXK = ABM$ (đồng vị và $XY // BC$)

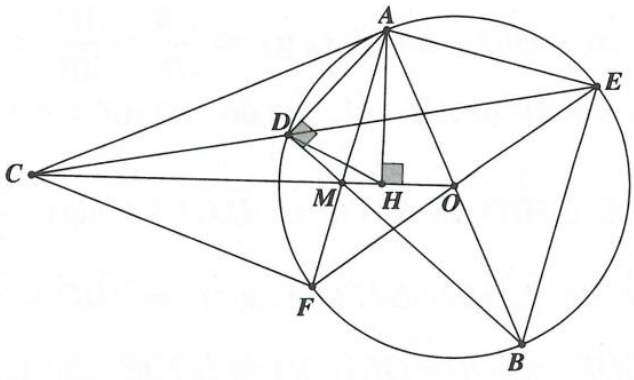
$\frac{AX}{AB} = \frac{XK}{BM}\left(= \frac{XY}{BC}\right)$. Do đó $\Delta AXK \backsim \Delta ABM\,(g.g) \Rightarrow XAK = BAM \Rightarrow$ Hai tia *AK*, *AM* trùng nhau.

Vậy ba điểm *A*, *K*, *M* thẳng hàng.

Ví dụ 3.

Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB*. Trên tiếp tuyến tại *A* của đường tròn *(O)* lấy điểm *C*. Vẽ cát tuyến *CDE* (tia *CD* nằm giữa hai tia *CA*, *CO*; *D*, *E* thuộc đường tròn *(O)*, *D* nằm giữa *C* và *E*). Gọi *M* là giao điểm của *CO* và *BD*. Gọi *F* là giao điểm của *AM* và đường tròn (*O*) (*F* khác *A*). Chứng minh rằng ba điểm *E*, *O*, *F* thẳng hàng.

Giải:



Vẽ $AH \perp OC$ tại *H*. Xét ΔCAD và ΔCEA

có $ACD\,(chung), CAD = CEA$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó $\Delta CAD \backsim \Delta CEA\,(g.g)$

$\Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow CA^2 = CD.CE$,

+ ΔACO vuông tại *A*, *AH* là đường cao $\Rightarrow CA^2 = CH.CO$. Do đó $CD.CE = CH.CO\left(= CA^2\right)$.

Xét ΔCDH và ΔCOE

có $DCH\,(chung), \frac{CD}{CO} = \frac{DH}{CE}$ (vì $CD.CE = CH.CO$).

Do đó $\Delta CDH \backsim \Delta COE\,(c.g.c) \Rightarrow CHD = CEO.$

Mặt khác $ADB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

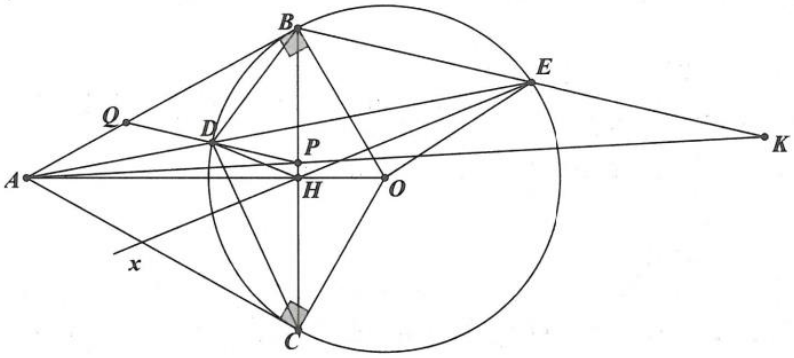
Ta có $ADM + AHM = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ tứ giác *ADMH* nội tiếp $\Rightarrow DAM = CHD$. Mà $CEF = DAM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung *DF*). Do đó $CEF = CEO \Rightarrow$ hai tia *EF*, *EO* trùng nhau. Vậy *E*, *O*, *F* thẳng hàng.

Ví dụ 4.

Từ điểm *A* nằm ngoài đường tròn *(O)* vẽ hai tiếp tuyến *AB*, *AC* (*B*, *C* là hai tiếp điểm) và một cát tuyến *ADE* đến *(O)* sao cho *ADE* nằm giữa hai tia *AO*, *AB*. Đường thẳng qua D song song với *BE*

cắt *BC, AB* lần lượt ở *P, Q*. Gọi K là điểm đối xứng của *B* qua *E*. Chứng minh rằng ba điểm *A, P, K* thẳng hàng.

Giải:



+ Gọi *H, I* lần lượt là giao điểm của *BC* với *OA, DE*. Ta có *AB, AC* là các tiếp tuyến của đường tròn *(O)* $\Rightarrow AB = AC, AO$ là tia phân giác của BAC, ABC cân tại $O \Rightarrow AO$ là đường cao của tam giác *ABC*.

+ Xét ΔABD và ΔAEB có: $BAD(chung), ABD = AEB$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AEB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE, \Delta ABO$ vuông tại *B*, *BH* là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH.AO$. Do đó $AD.AE = AH.AO\left(= AB^2\right)$

+ Xét ΔAHD và ΔAEO có $HAD(chung), \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AD}{AO}$ (vì $AD.AE = AH.AO$).

Do đó $\Delta AHD \backsim \Delta AEO(c.g.c) \Rightarrow AHD = AEO \Rightarrow$ tứ giác OEDH nội tiếp $\Rightarrow OHE = ODE, \Delta ODE$ có $OD = OE\left(= R\right) \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại $O \Rightarrow ODE = OED$. Do đó: $OHE = AHD$. Ta có $OHE + EHI = AHD + IHD\left(= 90^\circ\right)$ nên $EHI = IHD \Rightarrow HI$ là tia phân giác DHE.

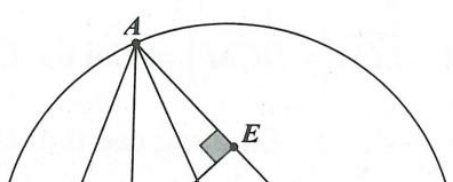
+ Gọi *Hx* là tia đối của tia HE, $xHA = AHD\left(= OHE\right) \Rightarrow HA$ là đường phân giác ngoài của góc HED nên $\dfrac{ID}{DE} = \dfrac{AD}{AE}$. ΔABE có $DQ//BE \Rightarrow \dfrac{DQ}{BE} = \dfrac{AD}{AE}, \Delta IBE$ có $BE//PD \Rightarrow DQ = DP$. ΔABE có $QD//BE \Rightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{QD}{BE}$. Do đó $\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{2QD}{2BE} = \dfrac{PQ}{BK}$

+ Xét ΔAPQ và ΔAKB có $AQP = ABK$ (đồng vị và $PQ//BE$), $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{PQ}{BK}$ do đó $\Delta APQ \backsim \Delta AKB(c.g.c) \Rightarrow QAP = BAK \Rightarrow$ hai tia *AP, AK* trùng nhau hay *A, P, K* thẳng hàng.

Ví dụ 5.

Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn *(O)* các đường cao *AD, BE, CF* cắt nhau tại *H*. Vẽ *CI* vuông góc với *OA* tại *I*. Gọi *M* là trung điểm *BC*. Chứng minh rằng ba điểm *M, I, F* thẳng hàng.

Giải:



+ $OB = OC\left(= R\right) \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O,

OM là đường trung tuyến $\Rightarrow OM$ là đường

cao, đường phân giác nên $BAC = MOC = \left(\frac{1}{2}BOC\right)$.

Ta có: $BAC + ACF = MOC + OCM = 90°$ nên

$ACF = OCM$. Tứ giác $OMIC$ có: $OMC = OIC = 90°$

nên nội tiếp $\Rightarrow AIF = ACF$ do vậy $AIF = OIM$

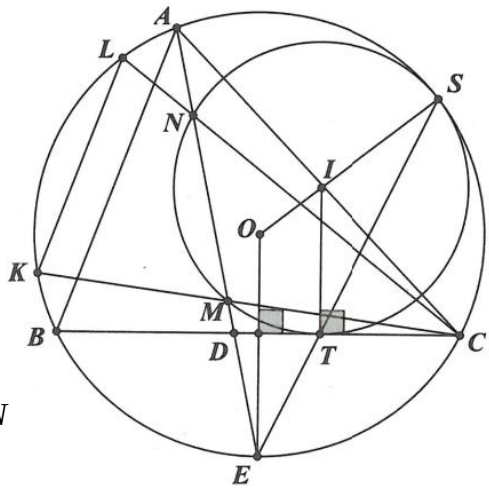
$\Rightarrow$hai tia IM, IF trùng nhau. Vậy ba điểm M, I, F thẳng hàng.

Ví dụ 6.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác AD của tam giác cắt cung BC ở E. Đường tròn (I) tiếp xúc trong với (O) tại S và tiếp xúc với BC tại T cắt AD ở M, N (N nằm giữa A và M), CM cắt đường tròn (O) ở K. Vẽ dây KL song song với AB. Chứng minh rằng C, N, L thẳng hàng.

Giải:

Vì $OE//IT$ (cùng vuông góc với BC) và $IST = OSE = OES$ do các tam giác IST, OSE cân suy ra S, T, E thẳng hàng.



+ Xét ΔECT và ΔECS có $CET\left(chung\right)$,

$ECT = ESC$ do đó $\Delta ECT \backsim \Delta ESC\left(g.g\right)$.

suy ra $\frac{EC}{ES} = \frac{ET}{EC} \Rightarrow ET.ES = EC^2$

+ Xét ΔEMT và ΔESA có $MET\left(chung\right), EMT = ESA$.

Do đó $\Delta EMT \backsim \Delta ESN\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{EM}{ES} = \frac{ET}{EN} \Rightarrow ET.ES = EM.EN$

nên $EC^2 = EM.EN\left(= ET.ES\right) \Rightarrow \frac{EC}{EN} = \frac{EM}{EC}.\Delta ECM \backsim \Delta ENC\left(c.g.c\right) \Rightarrow ECM = ENC$

$\Rightarrow ECD + DCM = NAC + NCA$.

Mà $ECD = NAC$ nên $DCM = NCA$ do $KL//AB \Rightarrow BK = AL \Rightarrow DCM = LCA$. Ta có

$NCA = LCA\left(= DCM\right) \Rightarrow$ Hai tia CN, CL trùng nhau. Vậy C, N, L thẳng hàng.

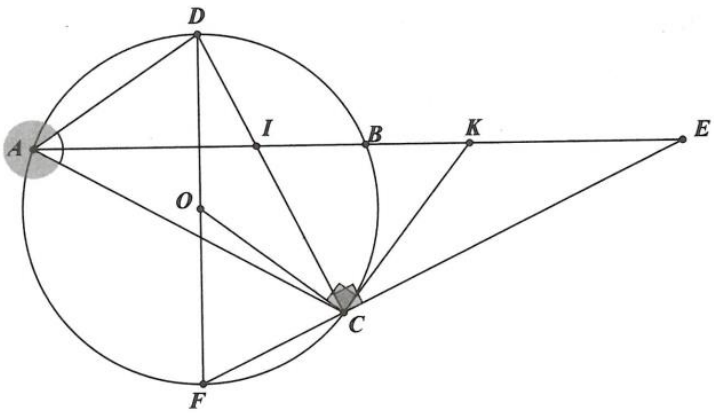
Tiêu chuẩn 4: Sử dụng các tính chất của đường tròn để chứng minh A, B, C thẳng hàng. Ví dụ: B là tâm của đường tròn đường kính AC hoặc các đường tròn tâm A và tâm C tiếp xúc tại B, hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm của hai đường tròn vuông góc dây cung chung của hai đường tròn đó …

Ví dụ 1.

Cho đường tròn *(O)* và dây cung *AB*. Lấy *I* thuộc đoạn *AB* sao cho $IA > IB$. Gọi *D* là trung điểm cung nhỏ *AB*. *DI* cắt *(O)* tại giao điểm thứ hai *C*. Tiếp tuyến với *(O)* tại *C* cắt *AB* tại *K*, *EC* cắt *(O)* tại giao điểm thứ hai *F*. Chứng minh *D*, *O*, *F* thẳng hàng.

Giải:

Ta có: $CAD = KCD$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung).



$$CIK = \frac{1}{2}\left(sd\,AD + sd\,BC\right) = \frac{1}{2}sd\,CBD = CAD$$

$\Rightarrow CIK = ICK \Rightarrow KI = KC$.

Do *K* là trung điểm của *IE* nên ΔCIE có

$$CK = \frac{1}{2}IE$$

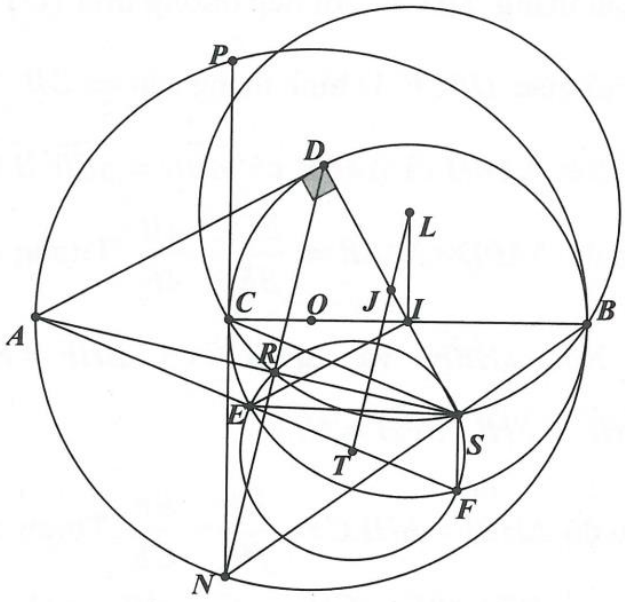
$\Rightarrow \Delta CIE$ vuông tại $C \Rightarrow DCF = 90° \Rightarrow O$ là trung điểm đường kính *DF*.

Ví dụ 2.

Cho đường tròn *(O;R)* đường kính *AB* và *C* nằm giữa *O* và *A*. Vẽ đường tròn *(I)* đường kính *BC* . Vẽ *AD* là tiếp tuyến *ACF* là cát tuyến của đường tròn $(I)(AE < AF)$ sao cho tia *AO* nằm giữa hai tia *AD*, *AE*. Đường thẳng vuông góc với *AB* vẽ từ C cắt đường tròn *(O)* ở *N*, *P* (*D*, *P* cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ *AB*). *DI* cắt *NB* ở *S*. Gọi *J* là trung điểm của *SD*; *L*, *T* lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác *SBC*, *SEF*. Chứng minh rằng ba điểm *J*, *L*, *T* thẳng hàng.

Giải:

Xét ΔADC và ΔABD có DAC (chung), $ADC = ABD$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung). Do đó $\Delta ADC \backsim \Delta ABD(g.g)$



$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB.AC,$$

$ANB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔNAB vuông tại *N*, *NC* là đường cao

$\Rightarrow AN^2 = AB.AC$. Do đó $AD^2 = AN^2 (= AB.AC)$

$\Rightarrow AD = AN$. Gọi R là giao điểm của *DN* và *AS*.

Xét $\Delta DAS\left(ADS = 90°\right)$ và $\Delta DAS\left(ANS = 90°\right)$

có AS chung, $AD = AN$. Do đó $\Delta DAS = \Delta NAS$

(cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow DAS = NAS, \Delta AND$ cân tại $A(AD = AN)$ AR là đường phân giác $(DAS = NAS)$ cũng là đường cao, ΔADS vuông tại D, DR là đường cao $\Rightarrow AD^2 = AR.AS$ nên $AR.AS = AB.AC(= AD^2)$

+ Xét ΔACR và ΔASB có $CAR(chung), \frac{AC}{AS} = \frac{AR}{AB}$ (vì $AR.AS = AB.AC$) do đó $\Delta ACR \backsim \Delta ASB(c.g.c) \Rightarrow ACR = ASB \Rightarrow$ Tứ giác $CBSR$ nội tiếp $\Rightarrow L$ thuộc đường trung trực của RS (1)

Chứng minh tương tự có tứ giác $RSFE$ nội tiếp $\Rightarrow T$ thuộc đường trung trực của RS (2).

Mặt khác ΔRDS vuông tại R, RJ là đường trung tuyến

$\Rightarrow RJ = SJ = DJ \Rightarrow J$ thuộc đường trung trực của RS (3).

Từ (1),(2) và (3) có J, L, T thẳng hàng.

Ví dụ 3.

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC của đường tròn $(O), (B, C \in (O))$, vẽ cát tuyến ADE của đường tròn $(O)(D, E \in (O))$ và $AD < AE$ tia AD nằm giữa hai tia AO, AB). Gọi F là điểm đối xứng của D qua AO, H là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng A, O, H thẳng hàng.

Giải:

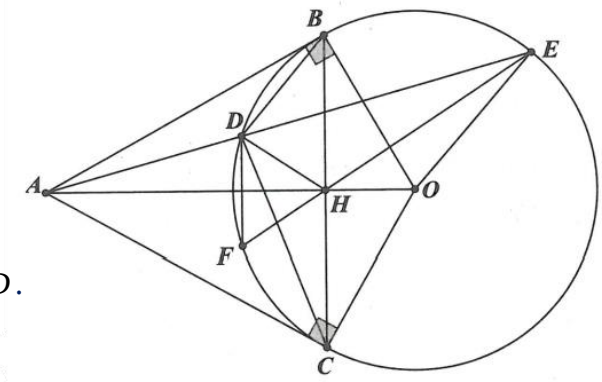
Vì tiếp tuyến AB, AC của đường tròn $(O) \Rightarrow AB = AC$ và AO là tia phân giác của BAC. Do D,F đối xứng với AO

$\Rightarrow OF = OD = R; DF \perp OA$

Ta có $DF // BC \Rightarrow$ Tứ giác $DBCF$ là hình thang.

Hình thang $DBCF$ nội tiếp đường tròn (O)

$\Rightarrow$tứ giác $DBCF$ là hình thang cân $\Rightarrow DB = CF, BF = CD$.



+ Xét ΔABD và ΔAEB có $ABD = AEB, BAD(chung)$

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AEB \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE}$. Tương tự $\Delta ACD \backsim \Delta AEC \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{CE}$

+ Xét ΔHBF và ΔHEC có $BHF = EHC, BFH = HCE$. Do đó ΔHBF và ΔHEC có $BHF = EHC, BFH = HEC$.

Do đó $\Delta HBF \backsim \Delta HEC \Rightarrow \frac{HB}{HE} = \frac{BF}{CE}$. Tương tự $\Delta HFC \backsim \Delta HBE \Rightarrow \frac{CF}{BE} = \frac{HC}{HE}$.

Ta có: $\frac{HB}{HE} = \frac{BF}{CE} = \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE} = \frac{CF}{BE} = \frac{HC}{HE} \Rightarrow HB = HC$

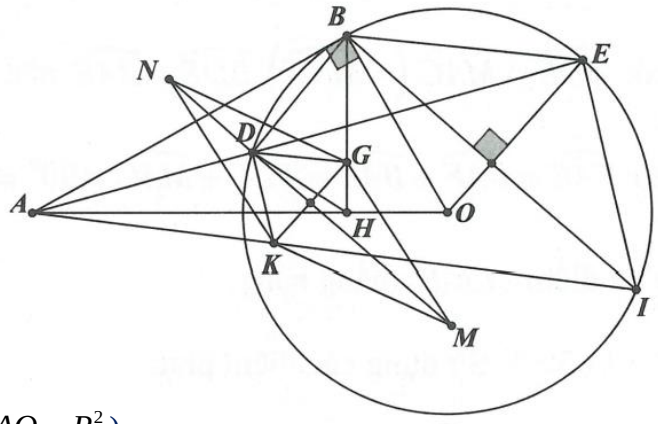
$HB = HC, AB = AC, OB = OC \Rightarrow H, A, O$ cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Vậy *A, O, H* thẳng hàng.

Ví dụ 4.

Từ *A* ở ngoài đường tròn *(O)* vẽ tiếp tuyến *AB* vẽ *BH* vuông góc với *OA* tại *H*, vẽ cát tuyến *ADE*. Đường thẳng qua *B* vuông góc với *OE* cắt đường tròn *(O)* ở *I*. Đường thẳng qua *D* song song với *BE* cắt *BH* ở *G* đường thẳng qua *D* song song với *EI* cắt *AI* ở *K*. Vẽ hình thoi $KMGN\left(DKG<MKG\right)$ chứng minh rằng ba điểm *M, N, D* thẳng hàng.

Giải:



Xét ΔABD và ΔAEB có $BAD\left(chung\right)$,

$ABD=AEB$. Do đó $\Delta ABD\backsim\Delta AEB\left(g.g\right)$

$\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow AB^2=AD.AE$. ΔABO

vuông tại *B*, *BH* là đường cao

$\Rightarrow AB^2=AH.AO$. Xét ΔADH và ΔAOE

có $DAH\left(chung\right),\frac{AD}{AO}=\frac{AH}{AE}$ (vì $AD.AE=AH.AO=R^2$).

Do đó $\Delta ADH\backsim\Delta AOE\left(c.g.c\right)\Rightarrow AHD=AOE\Rightarrow$tứ giác *DHOE* nội tiếp do đó $ODE=OHE$ mà $ODE=OED$(vì $OD=OE$) nên $AHD=OHE$. Gọi *S* là giao điểm của *BH* và *AE* ; *HS, HA* là các đường phân giác trong và ngoài của tam giác $HDE\Rightarrow\frac{AD}{AE}=\frac{SD}{SE}$. ΔSBE có

$DG//BE\Rightarrow\frac{SD}{SE}=\frac{DG}{BE},\Delta AEI$ có

$DK//IE\Rightarrow\frac{AD}{AE}=\frac{DK}{IE}OE\perp BI\Rightarrow BE=IE\Rightarrow BE=IE$. Do đó $DK=DG$.

Mà $MK=MG,NK=NG$ (tứ giác KMGN là hình thoi). Ta có *D, M, N* cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng *KG*. Vậy *M, N, D* thẳng hàng.

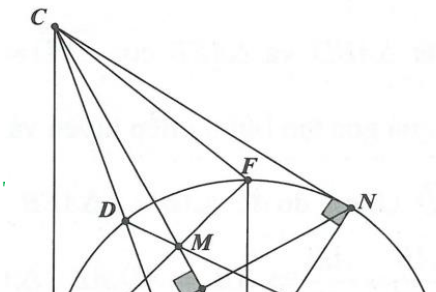
Ví dụ 5.

Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB*. Trên tiếp tuyến tại *A* của đường tròn *(O)* lấy điểm *C*. Vẽ cát tuyến *CDE* (tia *CD* nằm giữa hai tia *CA, CO* ; *D, E* thuộc đường tròn *(O)*, *D* nằm giữa *C* và *E*). Gọi *M* là giao điểm của *CO* và *BD*. Gọi *F* là giao điểm của *AM* và đường tròn *(O)* (*F* khác *A*). Chứng minh rằng *E, O, F* thẳng hàng.

Giải:

Vẽ *CN* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)* (*N* khác *A*).

Ta có $CA=CN,CO$ là tia phân giác góc CAN



$\Rightarrow MAC = MNC$ (tính chất trục đối xứng) mà $ANB = 90°$
(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: $CO \perp AN, BN \perp AN \Rightarrow CO // BN \Rightarrow CMD = NBD.$

Mà $NBD = CND$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Do đó $CMD = CND\left(= NBD\right)$

$\Rightarrow$ tứ giác *CMND* nội tiếp $\Rightarrow BDE = MNC$.

Ta có: $BDE = MAC\left(= MNC\right), BDE = BAE$ nên $MAC = BAE$.

Ta có $FAE = BAF + BAE = BAF + MAC = 90° \Rightarrow EF$ là đường kính của đường tròn *(O)*
Vậy ba điểm *A, E, F* thẳng hang.

Tiêu chuẩn 5: Sử dụng các điểm phụ:

+ Để chứng minh 3 điểm *A, B, C* thẳng hàng, nếu ta xác định được điểm *D* khác *A, B, C* mà 2 trong 3 bộ ba điểm *A, B, D* hoặc *A, C, D* hoặc *B, C , D* thẳng hàng thì suy ra *A, B, C, D* thẳng hàng, dẫn đến *A, B, C* thẳng hàng.

+ Một cách khác ta cũng thường xuyên dùng đó là: Giả sử điểm *C* thuộc hình *(H)*. Giả sử *AB* cắt hình *(H)* tại C'. Chứng minh C' có các tính chất như điểm *C* từ đó suy ra $C \equiv C'$ dẫn đến *A, B, C* thẳng hàng.

Ví dụ 1.

Cho điểm *A* nằm ngoài đường tròn *(O;R)*. Vẽ các tiếp tuyến *AB, AC* của đường tròn $(O),(B,C \in (O))$, vẽ cát tuyến *ADE* của đường tròn $(O)(D,E \in (O))$ và $AD < AE$ tia *AD* nằm giữa hai tia *AO, AB*). Gọi *F* là điểm đối xứng của *D* qua *AO*, *H* là giao điểm của *EF* và *BC*. Chứng minh rằng *A, O, H* thẳng hàng.

Giải:

+ Gọi H' là giao điểm của *AO* và *BC*, *D, F* đối xứng qua $OA \Rightarrow OF = OD = R \Rightarrow F$ thuộc đường tròn *(O)* và có $AH'D = AH'F$ và *AB, AC* là các tiếp tuyến của *(O)* nên $AO \perp BC$.

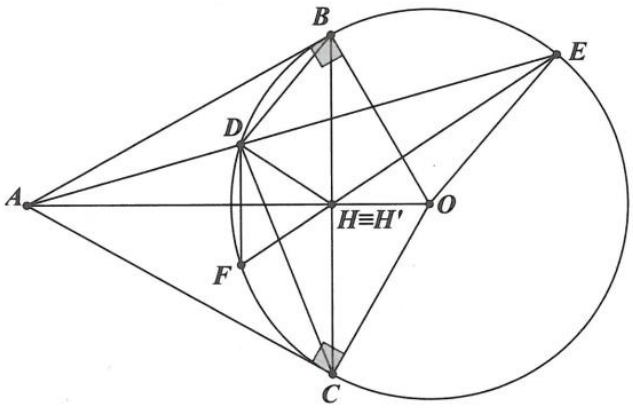
+ Xét ΔABD và ΔAEB có: $ABD = AEB$
(hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung),

BAD chung do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AEB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE, \Delta ABO$ vuông

tại B, BH' là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH'.AO$

do đó $AD.AE = AH'.AO\left(= AB^2\right)$.



+ Xét $\Delta ADH'$ và ΔAOE có $DAH'(chung), \frac{AD}{AO}=\frac{AH'}{AE}$ (vì $AD.AE=AH.AO$)

do đó $\Delta ADH' \backsim \Delta AOE(c.g.c) \Rightarrow ADH'=AOE \Rightarrow$ tứ giác $DH'OE$ nội tiếp

$\Rightarrow AH'D=OED, OH'E=ODE$. Mà $OD=OE=R \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại $O \Rightarrow OED=ODE$ do đó $AH'D=OH'E$ vì vậy $AH'F=OH'E$. Ta có $EH'F=AH'F+AH'E=OH'E=AH'E=180°$

$\Rightarrow E, H', F$ thẳng hàng. Vậy $H' \equiv H$. Do đó *A, H, O* thẳng hàng.

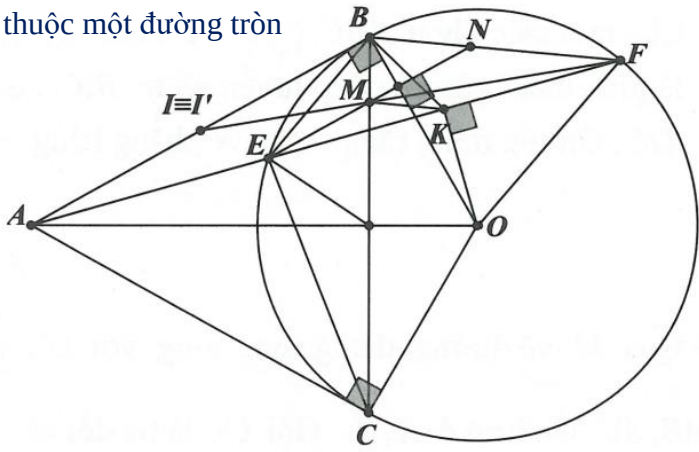
Ví dụ 2.

Cho điểm *A* nằm ngoài đường tròn *(O;R)*. Vẽ các tiếp tuyến *AB, AC* của đường tròn $(O),(B,C \in (O))$, vẽ cát tuyến *AEF* của đường tròn $(O)(E,F \in (O))$ và $AE<AF$ tia *AE* nằm giữa hai tia *AO, AB*). Vẽ đường thẳng qua *E* vuông góc với *OB* cắt *BC, BF* lần lượt tại *M, N*. Gọi *I* là trung điểm của *AB*. Chứng minh rằng ba điểm *F, M, I* thẳng hàng.

Giải:

+ Vẽ $OK \perp EF$ tại $K \Rightarrow K$ là trung điểm

của $EF, ABO=AKO=ACO=90° \Rightarrow A,B,K,O,C$ cùng thuộc một đường tròn



$\Rightarrow BAK=MCK$. Mà $AB \perp OB, EN \perp OB$

$\Rightarrow AB//EN \Rightarrow BAK=MEK.$

+ Ta có $MCK=MEK(=BAK) \Rightarrow$ tứ giác

EMKC nội tiếp $\Rightarrow ECM=EKM$ mà

$ECM=EFB$ nên $EKM=EFB \Rightarrow MK//BN,$

ΔEFN có $KM//NF, EK=KF \Rightarrow EM=MN.$

Gọi I' là giao điểm của FM và $AB, \frac{EM}{AI'}=\frac{MN}{I'B}\left(=\frac{FM}{FI'}\right) \Rightarrow AI'=I'B.$

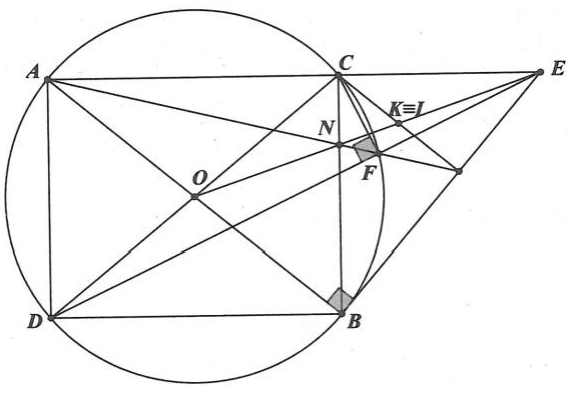
Vậy $I \equiv I'$ do đó *F,M,I* thẳng hàng.

Ví dụ 3.

Cho đường tròn *(O)* có *AB* và *CD* là các đường kính. Tiếp tuyến của đường tròn *(O)* tại *B* cắt *AC* ở *E*. *DE* cắt đường tròn *(O)* ở *F* (*F* khác *D*). Gọi *M* là giao điểm của *AF* và *BE*, *N* là giao điểm của *AM* và *BC*. Chứng minh rằng ba điểm *E, N, O* thẳng hàng.

Giải:

Ta có: $CFD=90°, AFB=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



$\Rightarrow CFE=90°, BMF=ABF$ mà

$ECF=ABF$ (tứ giác *ABFC* nội tiếp)

nên $BMF = ECF \left(= ABF\right)$

$\Rightarrow$Tứ giác $CEMF$ nội tiếp $\Rightarrow CME = CFE = 90°.$

Ta có: $CME = ABE = 90° \Rightarrow CM // AB.$

+ Gọi I là giao điểm của ON và CM,

K là giao điểm của OE và CM. Do $CM // AB$. Áp dụng hệ quả của định lý Talet.

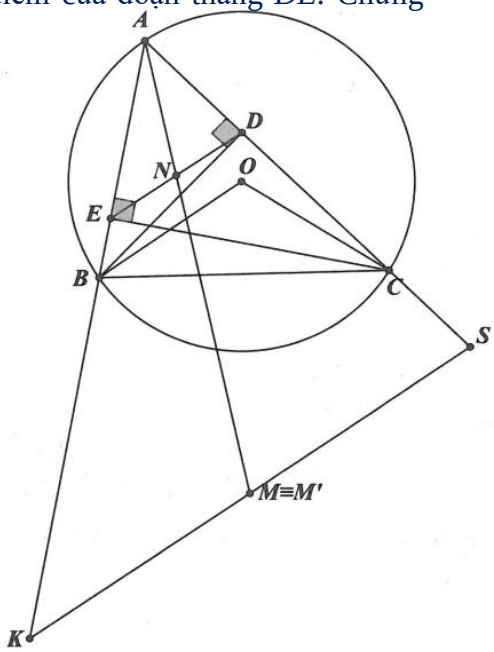
Ta có $\frac{CI}{OB} = \frac{NI}{NO} = \frac{IM}{OA} \Rightarrow CI = CM$ và $\frac{CK}{OA} = \frac{EK}{EO} = \frac{KM}{OB} \Rightarrow CK = KM$. Do vậy $I \equiv K.$

Vậy ba điểm E, N, O thẳng hàng.

Chú ý rằng: *Bài toán này thực chất là bổ đề hình thang.*

Ví dụ 4.

Cho tam giác nhọn ABC (AB, AC) nội tiếp đường tròn (O) các đường cao BD, CE. Gọi M là giao điểm của các tiếp tuyến vẽ từ B, C của đường tròn, N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.



Giải:

+ Qua M vẽ đường thẳng song song với DE cắt

AB, AC lần lượt ở K, S. Gọi Cx là tia đối của tia CM.

+ Ta có $BEC = BDC = 90° \Rightarrow$Tứ giác $BEDC$ nội tiếp

$\Rightarrow ADE = ABC, AED = ACB$. Mà $ADE = MSC,$

$AED = BKM$ (đồng vị $DE // KS$). Ta có $ACx = ABC$

(hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$ACx = MCS$ (đối đỉnh) do đó $MCS = MSC \Rightarrow \Delta MCS$

cân tại $M \Rightarrow MC = MS$. Tương tự $MB = MK$ mà

$MB = MC$ do đó $MK = MS$. Gọi M' là giao điểm của

AN và KS, $\Delta AKM'$ có $EN // KM' \Rightarrow \frac{EN}{KM'} = \frac{AN}{AM'},$

$\Delta AM'S$ có $ND // M'S \Rightarrow \frac{ND}{SM'} = \frac{AN}{AM'}$ nên $\frac{EN}{KM'} = \frac{ND}{SM'}\left(= \frac{AN}{AM'}\right)$. Mà $EN = ND.$

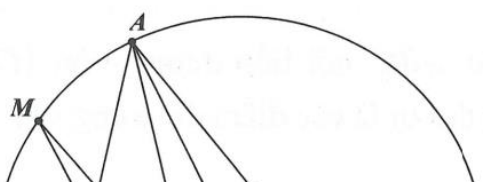
Do đó $KM' = SM'$ .Ta có $M' \equiv M$ .Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 3.

Cho tam giác $ABC\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn (O) ,I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng AO, AI cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E, DI cắt đường tròn (O) ở M. Vẽ IK vuông góc với BC tại K. Chứng minh rằng M, K, E thẳng hàng.

Giải:



Giả sử: ED cắt BC ở N , ME cắt BC

ở T, $EIB = BAI + ABI = CBE + IBC = EBI$

$\Rightarrow \Delta EBI$ cân tại $E \Rightarrow EB = EI$

$\Delta EBT \backsim \Delta EMB$(BET chung, $EBT = EMB$)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EM} = \dfrac{ET}{EB}; \dfrac{EI}{EM} = \dfrac{ET}{EI}$

$\Delta EIT \backsim \Delta EMI \Rightarrow EIT = EMI$

$ENT = \dfrac{sdEB - sdCD}{2} = \dfrac{sdEC - sdCD}{2} = \dfrac{sdED}{2}$

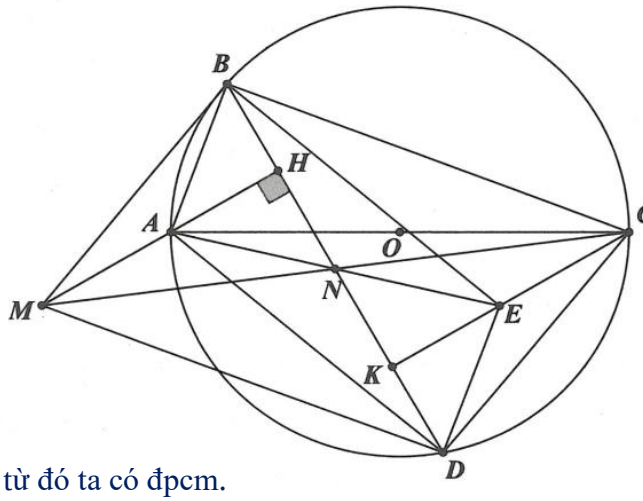
$= EMI = EIT \Rightarrow EITN$ nội tiếp $\Rightarrow ITN = IEN = 90° \Rightarrow IT \perp BC$, do đó $T \equiv K$. Vậy M, K, E thẳng hàng.

Tiêu chuẩn 6. Sử dụng tính chất của các phép biến hình như đối xứng trục, đối xứng tâm , quay, vị tự… biến một đường thẳng thành một đường thẳng. Từ đó nếu tìm được một trong các phép biến hình đó biến ba điểm thẳng hàng A_1, B_1, C_1 thành ba điểm A, B, C thì ta có ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 1.

Tứ giác $ABCD$ có $B = D = 90°$. Kẻ $AH \perp BD$. Lấy K thuộc BD sao cho $BH = DK$. Dựng hình bình hành $ABED$. Chứng minh rằng E, K, C cùng nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này vuông góc với BD.

Giải:

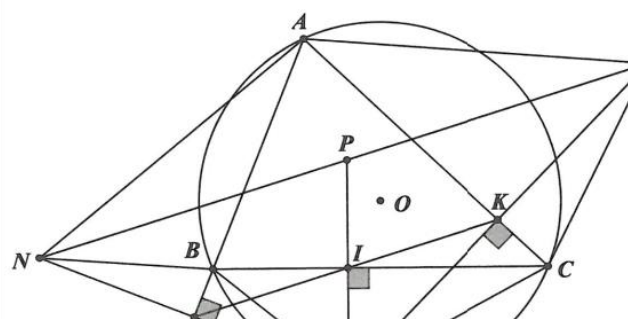


Gọi M là trực tâm ΔABD. Dễ thấy tứ giác $BMDC$ là hình bình hành (vì các cặp cạnh đối tương ứng song song với nhau). Gọi N là giao điểm của BD, MC suy ra N là trung điểm của BD, MC. Ta thấy phép đối xứng tâm N biến A thành E, M thành C và H thành K (theo giả thiết). Mặt khác A, M, H cùng nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này vuông góc với BD, từ đó ta có đpcm.

Ví dụ 2.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn. Gọi N, P, Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, BC, CA. Chứng minh rằng N, P, Q thẳng hàng.

Giải:



Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB, BC, CA thế thì H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Ta thấy rằng: Phép vị tự tâm *M* tỷ số bằng

2 biến các điểm *H, I, K* thành *N, P, Q*. Mà

H, I, K thẳng hàng nên suy ra *N, P, Q* thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua *N, P, Q* được gọi là đường thẳng Steiner của điểm M.

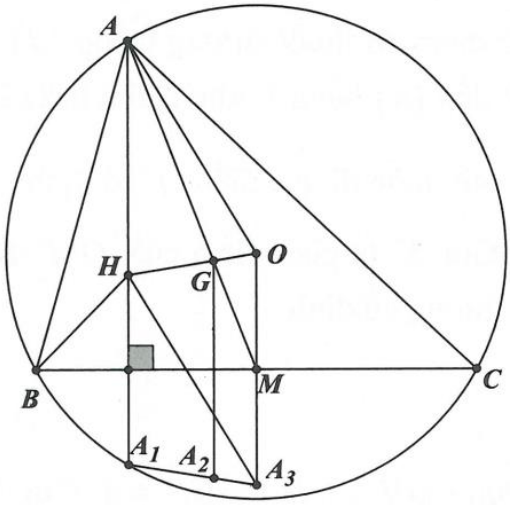
Ví dụ 3.

Cho tam giác *ABC* có *H, G ,O* lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, *AH* cắt đường tròn *(O)* tại A_1. Lấy A_2 là điểm đối xứng của *G* qua *BC*. Vẽ hình bình hành AHA_3O. Chứng minh A_1, A_2, A_3 thẳng hàng.

Giải:

Ta có các kết quả quen thuộc

(Xem thêm phần các định lý hình học nổi tiếng), A_1 đối xứng với *H* qua *BC* và $AH = 2OM$ (*M* là trung điểm *BC).*



Theo giả thiết AHA_3O là hình bình hành

nên A_3 đối xứng với *O* qua đường thẳng *BC*.

Vậy phép đối xứng trục *BC* biến *H* thành $A_1; G$

thành $A_2; O$ thành A_3.

Mặt khác do tính chất của đường thẳng Ơ-le thì *H, G, O* thẳng hàng. Từ đó ta có A_1, A_2, A_3 thẳng hàng.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG, ĐIỂM CỐ ĐỊNH

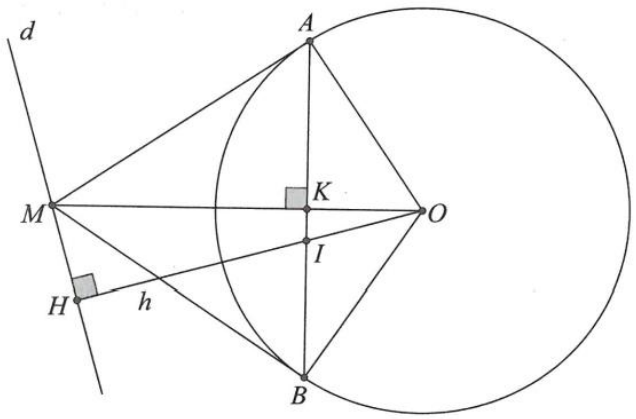
Bài 1.

Từ điểm *M* thuộc đường thẳng *(d)* ở ngoài đường tròn *(O;R)* sao cho khoảng cách từ điểm *O* đến *(d)* bằng *h* không đổi ta kẻ 2 tiếp tuyến *MA, MB* đến *(O)* (Với *A, B* là các tiếp điểm).

a, *AB* luôn đi qua điểm *I* cố định

b, Gọi *K* là giao điểm của *OM, AB*. Chứng minh khi *M* di chuyển trên *(d)* thì *K* thuộc đường cố định.

Giải



a, Dựng $OH \perp (d)$ thì $OH = h$. Gọi *I* là giao điểm của *OH* và *AB* thì ta có:

$$\Delta OKI \backsim \Delta OHM \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Rightarrow OI = \frac{OK.OM}{OH}.$$

Lại có $OK.OM = OA^2 = R^2$

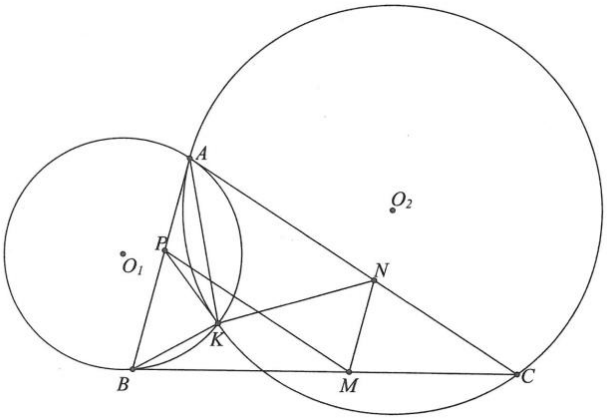
Suy ra $OI = \dfrac{R^2}{h}$. Như vậy điểm *I* luôn cố định.

b, Theo câu a) thì *OI* cố định, mặt khác $IKO = 90°$ suy ra điểm *K* thuộc đường tròn đường kính *OI*.

Bài 2.

Cho tam giác *ABC* và điểm *M* chuyển động trong đoạn *BC*. Lấy hai điểm *N, P* trên *AC, AB* để *ANMP* là hình bình hành. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN* luôn đi qua điểm cố định.

Giải



Dựng (O_1) qua *B* tiếp xúc với *AC* tại *A* .

Dựng (O_2) qua *B* tiếp xúc với *AB* tại *A*.

Giả sử (O_1) cắt nhau tại giao điểm thứ hai là *K* thì điểm *K* là điểm cố định.

Ta có: $KAB = KCA, KCA = KBA(1)$ suy ra

$\Delta KAB \backsim \Delta KCA \Rightarrow \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{AB}{AC}(2)$ vì *ANMP* là hình bình hành nên theo định lý Thales ta có:

$\dfrac{BP}{PA} = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{AN}{NC} \Rightarrow \dfrac{BP}{PA} = \dfrac{AN}{NC} \Rightarrow \dfrac{BC}{PA+BP} = \dfrac{AN}{AN+NC} \Leftrightarrow \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{BP}{AN} = \dfrac{AB}{AC}(3).$ Từ (1),(2),(3) suy ra $\Delta KBP \backsim \Delta KAB \Rightarrow BPK = ANK \Rightarrow ANPK$ nội tiếp suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN* luôn đi qua điểm cố định *K*.

Bài 3.

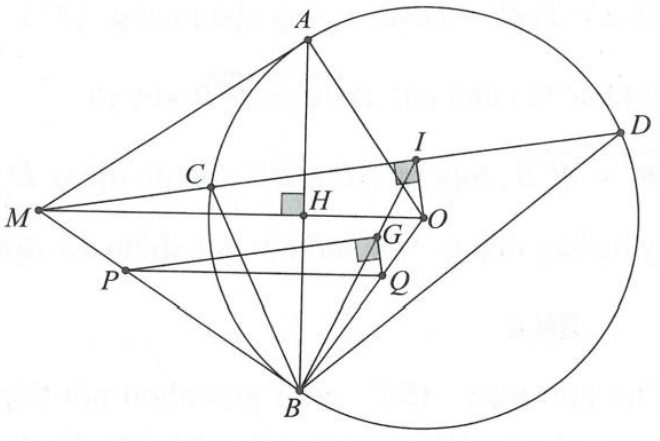
Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn *(O;R)* ta kẻ 2 tiếp tuyến *MA, MB* đến *(O)* (Với *A,B* là các tiếp điểm) và cát tuyến *MCD* đến *(O)* sao cho $MC < MD$ và tia *MC* nằm giữa hai tia *MO, MA*. Giả sử *M* cố định, khi cát tuyến *MCD* thay đổi thì trọng tâm *G* của tam giác *BCD* luôn nằm trên đường tròn cố định.

Giải

Gọi *I* là trung điểm của *CD*, ta có $\dfrac{BG}{BI} = \dfrac{2}{3}$

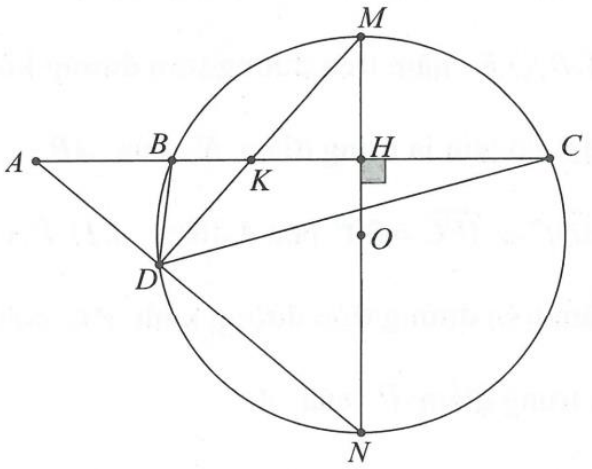
Qua *G* kẻ các đường thẳng song song với *IO, MD* cắt *OB, MB* lần lượt tại *Q, R*

Ta có các điểm *B, O, M* cố định, suy ra *P, Q* cố định và $PGQ = 90°$. Suy ra *G* thuộc đường tròn đường kính $PQ = \dfrac{2}{3}MO$.



Bài 4.

Cho 3 điểm *A, B, C* thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường tròn *(O)* thay đổi luôn đi qua *B, C*. Vẽ đường kính *MN* vuông góc với *BC* tại *H*. Tia *AN* cắt *(O)* tại giao điểm thứ 2 là *D*. Khi đó *MD* luôn đi qua một điểm cố định nằm trên *BC*.



Giải

Ta có: $\Delta ADK \backsim \Delta AHN \Rightarrow AK.AH = AD.AN$.

Mặt khác ta cũng dễ chứng minh được:

$AB.AC = AD.AN$. Từ đó suy ra $AB.AC = AK.AH$

Hay $AK = \dfrac{AB.AC}{AH}$ không đổi. Suy ra điểm *K* cố định.

Hay *MD* đi qua điểm cố định *K*.

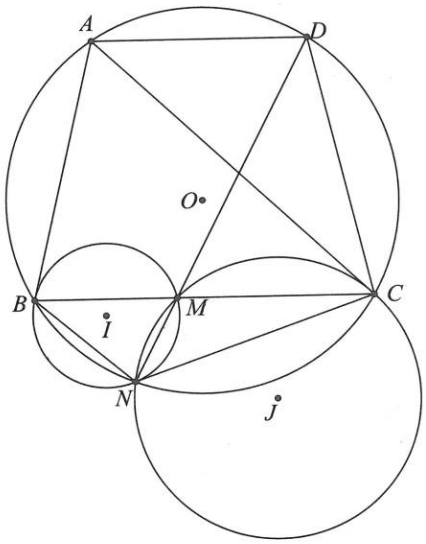
Bài 5.

Cho tam giác *ABC* nội tiếp *(O)*. Trên cạnh *BC* lấy điểm *M*. Dựng (O_1) qua *M* tiếp xúc với *AB* tại *A*. Dựng (O_2) qua *M* tiếp xúc với *AC* tại *A*. Hai đường tròn này cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là *N*. Khi đó:

a. Điểm *N* nằm trên *(O)*.

b. Đường thẳng *MN* luôn đi qua một điểm cố định khi *M* di chuyển trên cạnh *BC*.

Giải



a, Ta có: $NBM = ABC, MNC = ACB$. Tứ giác *ABNC* có

$BAC + BNC = BAC + ABC + ACB = 180°$.

Suy ra tứ giác *ABNC* nội tiếp. Nói cách khác điểm *N* thuộc đường tròn *(O)* cố định.

b, Ta có: $DAC = DNC$ (cùng chắn cung *DC*).

Mặt khác ta cũng có: $DNC = ACB$ suy ra

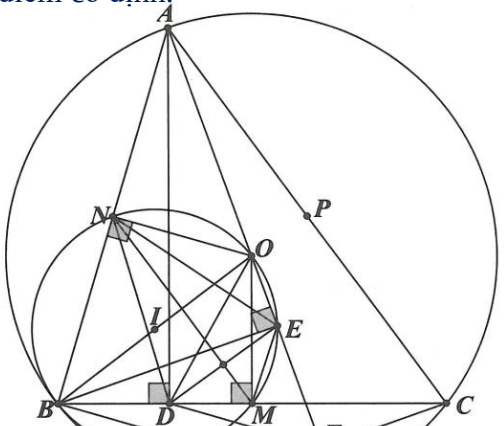
$DAC = ACB$. Suy ra $AD // BC$, do đó điểm *D* là điểm cố định.

Vậy đường thẳng *MN* luôn đi qua điểm cố định là *D*.

Bài 6.

Cho tam giác *ABC* có 3 góc nhọn nội tiếp *(O;R)*. Dựng đường cao *AD* của tam giác và đường kính *AK* của *(O)*. Hạ *BE, CF* lần lượt vuông góc với *AK*. Cho *BC* cố định, điểm *A* di chuyển trên cung lớn *BC*. Chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *DEF* là một điểm cố định.

Giải



Vì $ABD = AEB = 90°$ suy ra 4 điểm *A, B, D, E* nằm trên đường tròn đường kính *AB* có tâm là trung điểm *N* của *AB*.

$ADC = AFC = 90°$ nên 4 điểm *A, D, F, C* nằm trên đường tròn

đường kính AC có tâm là trung điểm P của AC.

Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của BO thì

$ON \perp AB, OM \perp BC$ suy ra 5 điểm N, O, E, M, B nằm trên đường tròn

đường kính BO.

Ta có: $MNE = MBE = DBE = DAE = \frac{1}{2}DNE$ suy ra MN là phân giác của góc DNE.Tam giác DNE cân tại N suy ra MN cũng là trung trực của DE, tương tự ta cũng có MP là trung trực của DF. Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm M cố định.

Bài 7.

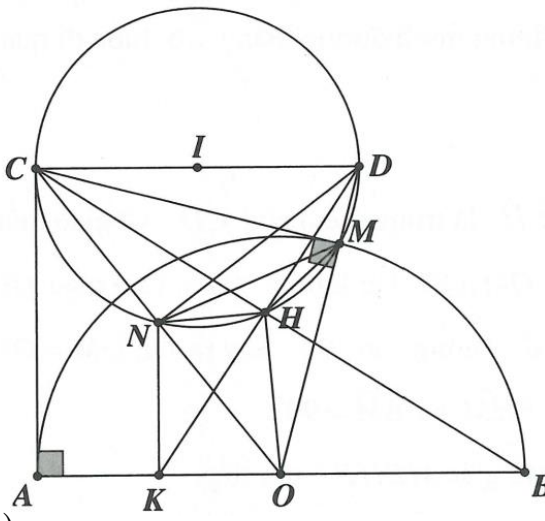
Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định, M là một điểm thuộc (O) (M khác A, B). Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau ở C. Đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. CD là đường kính của (I).

a, Chứng minh: O, M, D thẳng hàng.

b, Chứng minh: Tam giác COD cân

c, Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O).

Phân tích, định hướng giải



a. Ta có MC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow MC \perp MO(1)$

Xét đường tròn (I): Ta có $CMD = 90°$

$\Rightarrow MC \perp MD(2)$. Từ (1) và (2)

$\Rightarrow MO // MD \Rightarrow MO$ và MD trùng nhau

$\Rightarrow O, M, D$ thẳng hàng.

b. CA là tiếp tuyếm của đường tròn (O)

$\Rightarrow CA \perp AB(3)$. Đường tròn (I) tiếp xúc với AC tại $C \Rightarrow CA \perp CD(4)$.

Từ (3) và $(4) \Rightarrow CD // AB \Rightarrow DCO = COA(*)$

(hai góc so le trong)

CA, CM là hai tiếp tuyến cắt nhau của $(O) \Rightarrow COA = COD(**)$.

Từ (*) và $(**) \Rightarrow DOC = DCO \Rightarrow \Delta COD$ cân tại D.

**Thực nghiệm hình vẽ cho thấy đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua trung điểm K của AO. Ta chứng minh điều này như sau:

c. Gọi chân đường vuông góc hạ từ D tới BC là H, N là giao điểm của CO và (I). Ta có $CHD = 90° \Rightarrow H \in (I)$ (bài toán quỹ tích) $DH \cap AB = K \Rightarrow CND = 90°$ và ΔCOD cân tại $D, NC = NO$. Ta có tứ giác $NHOK$ nội tiếp.

+ Vì $H_2 = O_1 = DCO$ (cùng bù với DHN) $\Rightarrow NHO + NKO = 180° (5)$. Ta có $NDH = NCH$ (cùng chắn cung NH của đường tròn (I)) $(g.g) \Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{OB}{OC}$. Tương tự ta có: $\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OC}; \frac{OA}{OC} = \frac{CN}{CD} = \frac{ON}{CD} \Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{ON}{CD}$. Mà $ONH = CDH \Rightarrow \Delta NHO \backsim \Delta DHC (c.g.c)$

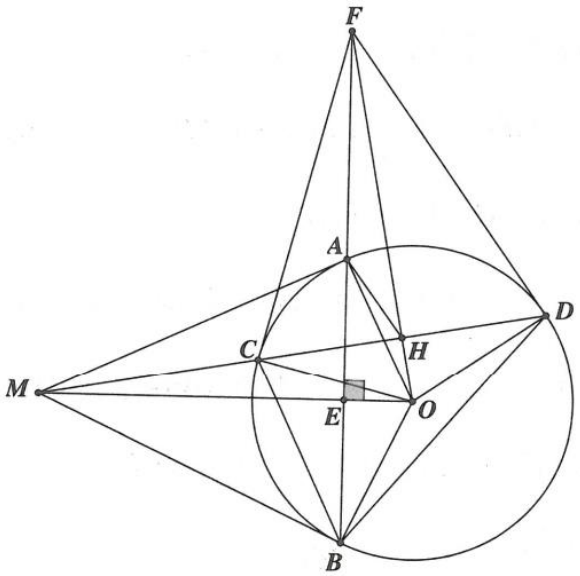
$\Rightarrow NHO = 90°$ mà $NHO + NKO = 180° (5) \Rightarrow NKO = 90° \Rightarrow NK \perp AB \Rightarrow NK // AC$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của OA cố định $\Rightarrow$đpcm.

Bài 8.

Cho đường tròn $(O;R)$ và một đường thẳng d cắt (O) tại C,D. Một điểm M di động trên tia đối của tia DC. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Gọi H là trung điểm của CD và giao điểm của AB với OM, OH lần lượt là E, F .Tam giác OBM vuông tại B, đường cao BE. Suy ra $OE.OM = OB^2 = R^2 (1)$.

Do $FHM = FEM = 90°$

nên tứ giác $MEHF$ nội tiếp.

Từ hai tam giác vuông OMH, OEF đồng dạng, suy ra $\frac{OH}{OE} = \frac{OM}{OF} \Rightarrow OF = \frac{OE.OM}{OH} (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $OF = \frac{R^2}{OH}$. Do đường tròn (O), đường thẳng d cho trước nên OH không đổi. Suy ra OF không đổi, điểm F cố định. Do đó đường thẳng AB đi qua điểm F cố định.

Bài 9.

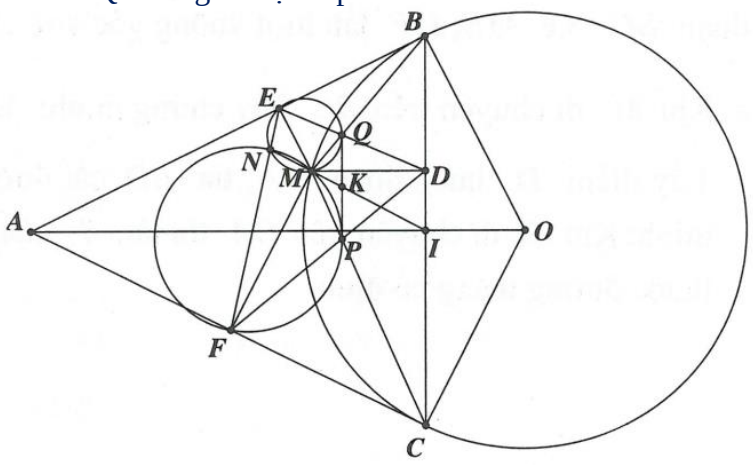
Cho đường tròn tâm (O). Từ điểm A cố định ở ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C là tiếp điểm). Lấy điểm M trên cung nhỏ BC. Gọi D, E, F thứ tự là hình chiếu từ M đến BC, AC, AB. Gọi MB cắt DF tại P, MC cắt DE tại Q. Chứng minh đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác *MPF* và *MQE* cắt nhau tại *M, N*. Đường thẳng *MN* cắt *PQ, BC* theo thứ tự tại *K* và *I*. Ta có các tứ giác *MDCE, MDBF* nội tiếp nên

$MCE = MDE = MBC; MBF = MDF = MCB$. Suy ra $PMQ + PDQ = PMQ + PDM + QDM$

$= PMQ + MCB + MBC = 180°$. Do đó tứ giác *MPDQ* là tứ giác nội tiếp.



Suy ra $MQP = MCB = MEQ,$

suy ra *KQ* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMQE. Tương tự *KP* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *MFP*. Ta có $KM.KN = KQ^2,$

$KM.KN = KP^2$. Suy ra $KP = KQ$. Xét tam giác $MBC, PQ // BC, KP = KQ$.

Theo định lý Thales suy ra *I* là trung điểm *BC*. Vậy *MN* đi qua điểm cố định *I* là trung điểm *BC*

Bài 10.

Cho đường tròn *(O)* và dây cung *AB*. Lấy điểm *E* trên dây cung *AB* (*E* khác *A* và *B*). Qua *E* vẽ dây cung *CD* của *(O)*. Trên hai tia *DA, DB* lấy hai điểm *P, Q* đối xứng qua *E*. Chứng minh rằng đường tròn *(I)* đi qua *C* tiếp xúc với *PQ* tại *E* luôn đi qua một điểm cố định khi *E* di động trên dây cung *AB*

Giải

Gọi *M* là giao điểm của *AB* và đường tròn *(I)*

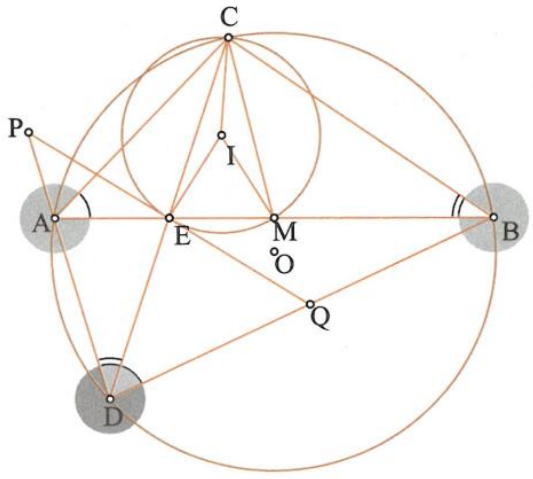
EP là tiếp tuyến của *(I)* nên $CMA = PEC = QED$.

Mặt khác $BAC = BDC$. Suy ra $\Delta CMA \backsim \Delta QED(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{DE}{QE}(1)$. Tương tự $DEP = BMC; ADC = ABC$

nên $\Delta BMC \backsim \Delta DEP(g.g) \Rightarrow \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{DE}{PE} = \dfrac{DE}{QE}(2).$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{BM}{CM} \Rightarrow AM = BM$.



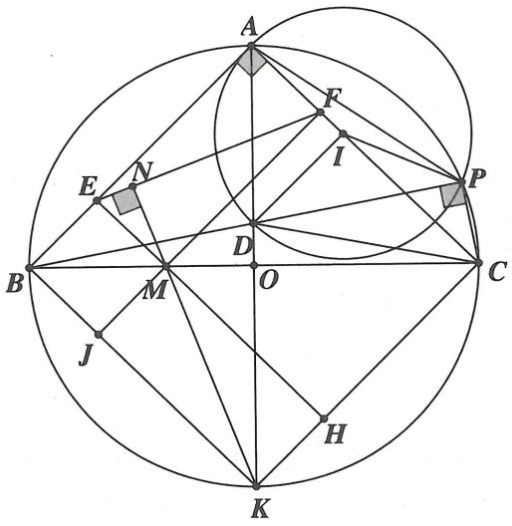
Do đó đường tròn *(I)* luôn đi qua trung điểm *M* của *AB* là điểm cố định.

Bài 11.

Cho đường tròn *(O)* đường kính *BC*. Gọi *A* là điểm chính giữa cung *BC*, điểm *M* thuộc đoạn *BC*. Kẻ *ME, MF* lần lượt vuông góc với *AB, AC, MN* vuông góc với *EF* tại *N*.

a. Khi *M* di chuyển trên *BC*, hãy chứng minh: *MN* luôn đi qua một điểm cố định.

b. Lấy điểm D thuộc đoạn OA, tia BD cắt đường tròn tại giao điểm thứ 2 là P. Chứng minh: Khi D di chuyển trên OA thì tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác APD luôn thuộc đường thẳng cố định.



Giải

a, Dựng đường kính AK của (O). Ta chứng minh MN đi qua K. Giả sử FM cắt BK tại J, EM cắt KC tại H. Do $ABKC$ là hình vuông nên $BEMJ$ là hình vuông. Suy ra $\Delta EMF = \Delta KHM$,

giả sử KM cắt EF tại N' thì $JMK = N'MF$ lại có:

$MFE = HMK$ suy ra $N'MF + MFE = JMK + HMK = 90°$

hay $KM \perp EF$ tại N' suy ra $N \equiv N'$ tức là:

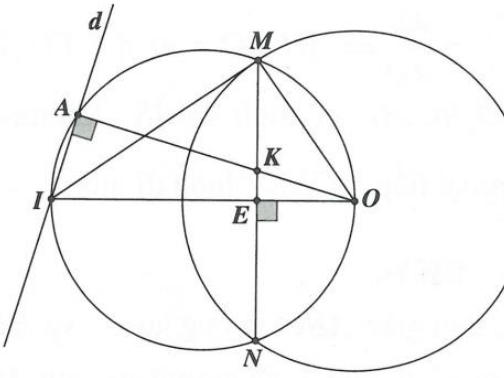
N,M,K thẳng hàng. Suy ra MN luôn đi qua điểm K cố định.

b, Ta có $APB = ACB = 45°$, mà $APB = \frac{1}{2} AID$ suy ra $AID = 90°$, hơn nữa ta có $DAI = ADI = 45°$

nên suy ra I nằm trên BC cố định.

Bài 12.

Cho đường tròn $(O;R)$ và một đường thẳng d nằm ngoài đường tròn. I là một điểm di động trên d. Đường tròn đường kính IO cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm M,N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.



Giải:

Đường tròn đường kính IO, cắt đường tròn $(O;R)$ tại $M,N \Rightarrow IMO = INO = 90° \Rightarrow IM, IN$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$. Gọi E là giao điểm của IO và MN thì IE cũng là đường cao của tam giác cân $MIN \Rightarrow IE \perp MN$. Xét ΔOMI ta có $OMI = 90°; ME \perp OI$ nên $OM^2 = OE.OI$.

Kẻ $OA \perp d$ tại A, gọi K là giao điểm của OA và MN thì $\Delta OEK \backsim \Delta OAI (g.g)$

$\Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OK}{OI} \Rightarrow OA.OK = OE.OI (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $OK.OA = OM^2 = R^2$. Từ đó suy ra $OK = \frac{R^2}{OA}$ mà OA không đổi, do đó K là điểm cố định phải tìm.

Bài 13.

Cho ba điểm cố định A,B,C thẳng hàng theo tứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi luôn qua B và C.

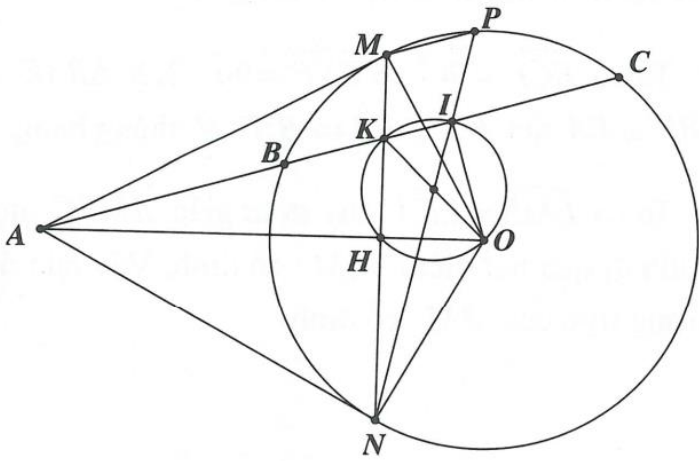
Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn. Đường thẳng MN cắt AO và AC lần lượt tại H và K

a, Chứng minh M, N di động trên một đường tròn cố định.

b, Gọi I là trung điểm của BC. NI cắt đường tròn (O) tại P. Chứng minh $MP//BC$

c, Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK luôn đi qua hai điểm cố định.

Giải:



a, Vì AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $ANB = BCN$ mà CAN chung nên $\Delta ANB \backsim \Delta ACN\left(g.g\right)$ suy ra $\frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AN}$

$\Rightarrow AN^2 = AB.AC$ mà $AM = AN$ (tính chất tiếp tuyến). Suy ra M, N nằm trên đường tròn tâm A bán kính $\sqrt{AB.AC}$ cố định.

b, $ANO = 90°; AIO = 90°$ nên tứ giác AOIN nội tiếp đường tròn đường kính AO, suy ra $AON = AIN$. Mặt khác , $AON = \frac{1}{2}MON; MPN = \frac{1}{2}MON$ nên $AIN = MPN$ suy ra $MP//BC$.

c, Theo câu a), ta có $AN^2 = AB.AC\left(1\right)$. Mặt khác ΔANO vuông tại N có $NH \perp AO$ nên $AN^2 = AH.AO\left(2\right)$. $\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (vì OAI chung, $AHK = AIO = 90°$)

$\Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AH.AO = AI.AK\left(3\right)$. Từ (1),(2),(3) suy ra $AB.AC = AI.AK \Rightarrow AK = \frac{AB.AC}{AI}$ mà AB, AC, AI cố định $\Rightarrow AK$ không đổi $\Rightarrow K$ cố định. Tứ giác $OIKH$ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp ΔOHK luôn đi qua I và K cố định.

Bài 14.

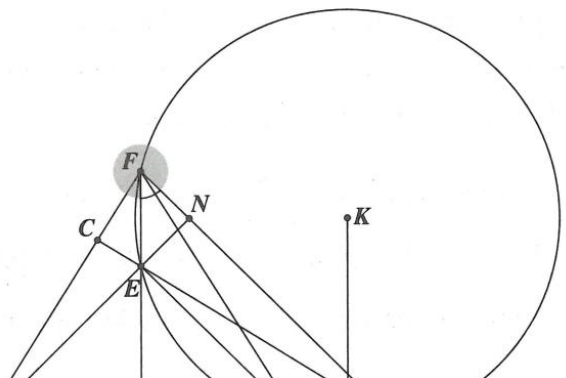
Cho tam giác ABC vuông tại C và $BC < CA$. Gọi I là điểm trên AB và $IB < IA$. Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB. Gọi giao điểm của d với AC, BC lần lượt là F và E. Gọi M là điểm đối xứng với B qua I.

a, Chứng minh rằng ΔIME đồng dạng với ΔIFA và $IE.IF = IA.IB$.

b, Đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF cắt AE tại N. Chứng minh rằng E, N, B thẳng hàng.

c, Cho AB cố định, C thay đổi sao cho $BCA = 90°$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn đi qua hai điểm cố định và tâm đường tròn này trên đường thẳng cố định.

Giải:



a, Ta có IE là đường trung trực của BM

$\Rightarrow \Delta EBM$ cân tại $M \Rightarrow EBM = EMB$.

Mà $EBM = EFA$ (cùng phụ với FAB)

$\Rightarrow \Delta IME \backsim \Delta IFA(g.g) \Rightarrow \dfrac{IM}{IF} = \dfrac{IE}{IA}$

$\Rightarrow IE.IF = IA.IM \Rightarrow IE.IF = IA.IB$.

b, Ta có $ECF = 90° \Rightarrow ENF = 90°$. Xét ΔBAE có EI, AC là các đường cao cắt nhau tại F nên $BF \perp EA$ mà $FN \perp EA \Rightarrow B, F, N$ thẳng hàng.

c, Ta có $EMB = EFA$ suy ra tứ giác $AMFE$ nội tiếp. Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn đi qua hai điểm A, M cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn nằm trên đường trung trực của AM cố định.

Bài 15.

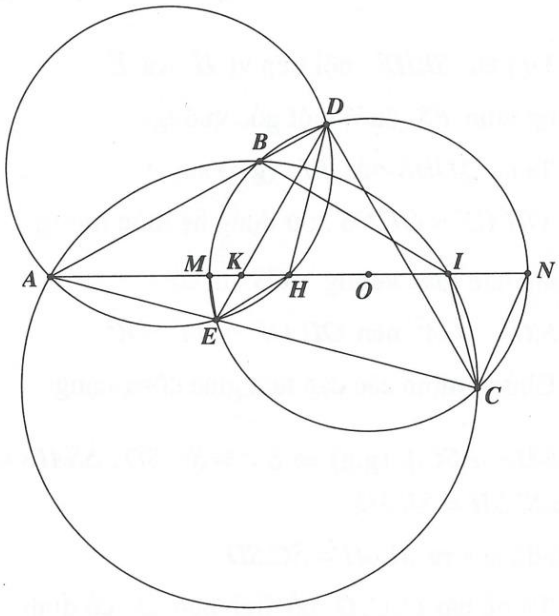
Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định với $OA = 2R$. Một đường kính BC quay quanh O sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Đường thẳng AB, AC cắt đường tròn (O;R) lần lượt tại D và E. Nối DE cắt đường thẳng OA tại K.

a, Chứng minh rằng $OI.OA = OB.OC$ và $AK.AI = AE.AC$.

b, Tính độ dài đoạn thẳng OI và AK theo R.

c, Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A khi BC quay quanh O.

Giải:



a, $\Delta OIC \backsim \Delta OBA(g.g) \Rightarrow \dfrac{OI}{OB} = \dfrac{OC}{OA}$

$\Rightarrow OB.OC = OI.OA$. Xét các góc nội tiếp

ta có: $ICB = IAB; BCE = EDB$

$\Rightarrow ICB + BCE = IAB + EDB \Rightarrow ICE = EKA$

$\Rightarrow \Delta AKE \backsim \Delta ACI(g.g) \Rightarrow AK.AI = AE.AC(1)$.

b, Từ $OB.OC = OI.OA \Rightarrow R.R = OI.2R$

$\Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}R$. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng AO với đường tròn (O) (M nằm giữa A và $N \Rightarrow AME = ACN \Rightarrow \Delta AME \backsim \Delta ACN(g.g) \Rightarrow AM.AN = AE.AC(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $AK.AI = AM.AN \Rightarrow AK.\dfrac{5R}{2} = R.3R \Rightarrow AK = \dfrac{6R}{5}$.

c, Gọi H là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp ΔADE với AO. Ta có:

$\Delta KHE \backsim \Delta KDA(g.g) \Rightarrow KH.KA = KD.KE, \Delta KDN \backsim \Delta^\circ KME(g.g) \Rightarrow KN.KM = KD.KE$

$\Rightarrow KH.KA = KM.KN \Rightarrow KH.\dfrac{6R}{5} = \left(\dfrac{6R}{5} - R\right).\left(3R - \dfrac{6R}{5}\right) \Rightarrow KH = \dfrac{3R}{10} \Rightarrow H$ cố định

$\Rightarrow$điều phải chứng minh.

Bài 16.

Cho đường tròn *(O;R)*, một dây cung *CD* có trung điểm *H*. Trên tia đối của tia *DC* lấy một điểm *S* và qua *S* kẻ các tiếp tuyến *SA*, *SB* với đường tròn. Đường thẳng *AB* cắt đường thẳng *SO*, *OH* lần lượt tại *E*, *F*. Gọi *I* là giao điểm của *AB* và *CD*.

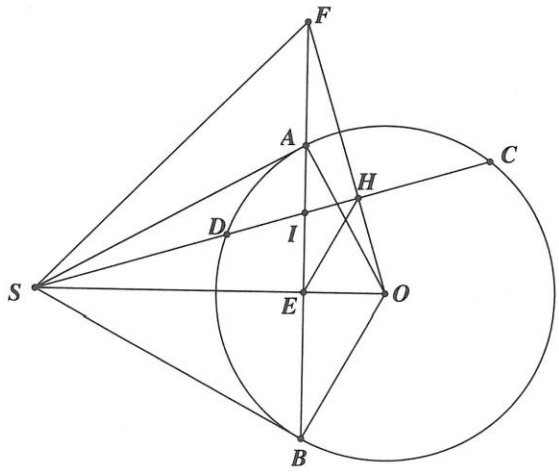
a, Chứng minh tứ giác *SEHF* nội tiếp được.

b, Chứng minh $OH.OF = R^2$

c, Chứng minh $SI.SH = SC.SD$.

d, Khi *S* di động trên tia đối của tia *DC*, chứng minh đường thẳng *AB* luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



a, Tứ giác *SEHF* nội tiếp vì *H* và *E* cùng nhìn *FS* dưới một góc vuông.

b, Ta có $\Delta OHS \backsim \Delta OEF(g.g)$ suy ra $OH.OF = OE.OS$. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *AOS* ta có:

$OE.OS = OA^2$ nên $OH.OF = OA^2 = R^2$.

c, Chứng minh các cặp tam giác đồng dạng:

$\Delta SAD \backsim \Delta SCA(g.g) \Rightarrow SA^2 = SC.SD, \Delta SAE \backsim \Delta SOA(g.g) \Rightarrow SA^2 = SE.SO, \Delta SEI \backsim \Delta^\circ SHO(g.g)$

$\Rightarrow SI.SH = SE.SO$.

Từ đó suy ra $SI.SH = SC.SD$

d, Từ đề bài *O*, *C*, *D* cố định nên *H* cố định.

Từ câu b) suy ra $OF = \dfrac{R^2}{OH}$ không đổi. Vậy đường thẳng *AB* luôn đi qua điểm cố định là *F*.

Bài 17.

Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính $AB = 2R$. Gọi *C* là trung điểm của đoạn thẳng *AO*. Đường thẳng *Cx* vuông góc với đường thẳng *AB*, *Cx* cắt nửa đường tròn trên tại *I*. Gọi *K* là điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng *CI* (*K* khác *C* và *I*), tia *AK* cắt nửa đường tròn tâm *O* tại điểm *M*, tiếp tuyến tại *M* của *(O)* cắt *Cx* tại *N*. Gọi *D* là giao điểm của *BM* cắt *Cx*.

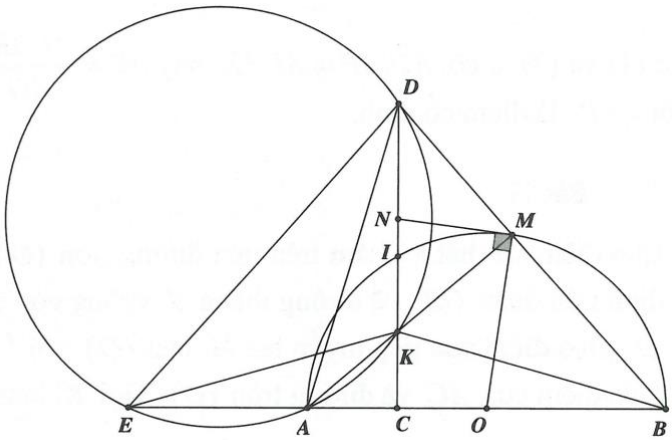
a. Chứng minh rằng 4 điểm A, *C*, *M*, *D* cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh tam giác *MNK* cân.

c. Tính diện tích ΔABD khi *K* là trung điểm của đoạn thẳng *CI*.

d. Chứng minh rằng khi K di động trên đoạn thẳng CI thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD đi qua một điểm cố định khác A.

Giải:



a. $ACD = 90°; AMD = 90° \Rightarrow A, C, M, D$ cùng thuộc đường tròn đường kính AD.

MN là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow NMK = ABM$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung). Ta lại có $NKM = MBA$ (cùng phụ MAB) suy ra $NKM = NMK \Rightarrow \Delta MNK$ cân tại N.

b. Ta có ΔCOI vuông tại $C \Rightarrow IC^2 + CO^2 = OI^2 \Rightarrow IC^2 = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow IC = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CK = \dfrac{R\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $\Delta CAK \backsim \Delta CDB$. Vì $ACD = BCD = 90°; KAC = CDB$ (cùng phụ DBA)

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CK}{CB} \Rightarrow CD.CK = CA.CB \Rightarrow CD.\dfrac{R\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{3}$. Do đó diện tích ΔABD là:

$S = \dfrac{1}{2} AB.CD = \dfrac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$.

c. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD cắt BA tại E. Suy ra $AKDE$ nội tiếp nên ta có:

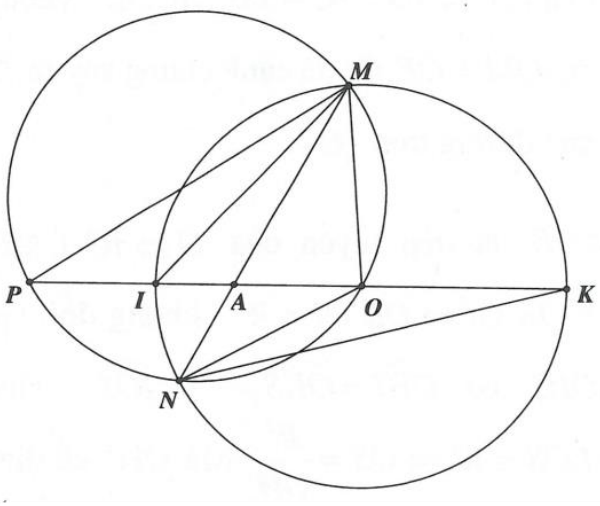
$AEK = ADK = KBA$ nên tam giác KEB cân tại K suy ra $CE = CB$. Như vậy E là điểm cố định.

Hay đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD luôn đi qua điểm cố định E.

Bài 18.

Cho đường tròn (O) và điểm A khác O nằm trong đường tròn. Một đường thẳng thay đổi đi qua A nhưng không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm M, N. Chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khác O.

Giải:



Gọi giao điểm của đường thẳng OA với đường tròn (O) là $I, K \Rightarrow I, K$ cố định.

Gọi giao điểm của đường thẳng OA với đường tròn ngoại tiếp ΔOMN là P.

Từ $\Delta AMI \backsim \Delta AKN\,(g.g)$

suy ra $AM.AN = AK.AI\,(1). \Delta AON \backsim \Delta AMP\,(g.g)$

suy ra $AO.AP = AM.AN\,(2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $AO.AP = AI.AK$ hay $AP = \dfrac{AI.AK}{AO}$ mà AI, AK, AO cố định $\Rightarrow AP$ không đổi $\Rightarrow P$ là điểm cố định.

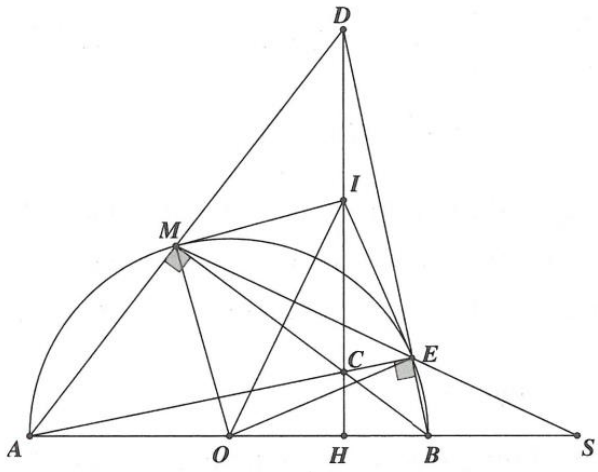
Bài 19.

Cho điểm M bất kỳ nằm trên nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R,$ qua điểm H cố định trên đoạn OB, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB. Gọi giao điểm của MA và (d) là D, giao điểm của tiếp tuyến tại M của (O) với (d) là I và (d) cắt MB tại C. Gọi E là giao điểm của AC và đường tròn (O). Gọi K là giao điểm OI và ME.

a. Chứng minh rằng IE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b. Cho M di chuyển trên đường tròn (M không trùng với $A;B$). Chứng minh rằng tích OI.Ok không đổi và ME luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:



a. Xét ΔABD có $BM \perp AD; DH \perp AB$

$\Rightarrow C$ là trực tâm $\Rightarrow AC \perp DB$ mà $AE \perp BE$

$\left(AEB = 90°\right) \Rightarrow B, E, D$ thẳng hàng.

Tứ giác $AMCH$ có $AMC = AHC = 90° \Rightarrow$

$AMCH$ nội tiếp đường tròn đường kính

$AC \Rightarrow MAH = MCI$ (cùng bù với ABM)

mà MI là tiếp tuyến $\Rightarrow IMC = MAH \Rightarrow IMC = MCI \Rightarrow \Delta MCI$ cân tại $I \Rightarrow IM = IC(1)$ Ta có

$MDI + DCM = 90°$ mà $DCM = IMC \Rightarrow DMI = MDI \Rightarrow \Delta IMD$ cân tại $I \Rightarrow IM = ID(2)$. Từ (1) và

$(2) \Rightarrow ID = IC = IM$. ΔCDE vuông tại E có $IC = ID \Rightarrow IC = ID = IE$. Từ đó ta có

$IM = IE; OM = OE, OI$ là cạnh chung suy ra $\Delta OEI = \Delta OMI\left(c.c.c\right) \Rightarrow OEI = OMI \Rightarrow IE$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

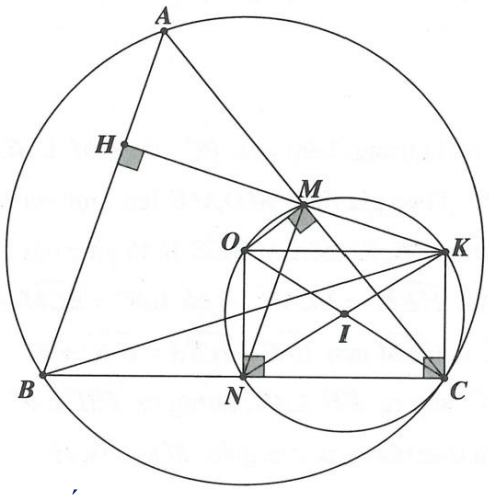
b. IM, IE là tiếp tuyến của $O \Rightarrow IO \perp ME$ tại K. ΔOMI có $OMI = 90°; MK \perp OI$ nên $OM^2 = OK.OI \Rightarrow OK.OI = R^2$ không đổi. Gọi S là giao điểm của ME và AB. Xét ΔOKS và ΔOHI có $OHI = OKS = 90°; IOS$ chung $\Rightarrow \Delta OKS \backsim \Delta OHI\left(g.g\right) \Rightarrow OK.OI = OH.OS$

$\Rightarrow OH.OS = R^2 \Rightarrow OS = \dfrac{R^2}{OH}$ mà OH cố định $\Rightarrow OS$ không đổi $\Rightarrow S$ cố định hay ME luôn đi qua điểm S cố định.

Bài 20.

Cho đường tròn *(O;R)* và dây *BC* cố định, *A* là điểm chuyển động trên cung lớn *BC* của $(O)(A \neq B,C)$, gọi *M* là trung điểm của *AC*, *H* là hình chiếu vuông góc của *M* trên *AB*. Chứng minh khi điểm *A* thay đổi trên cung lớn *BC* thì *H* nằm trên một đường tròn cố định.

Giải:

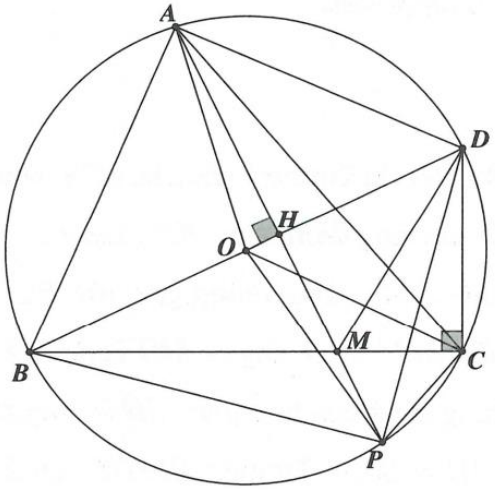


Ta có $OM \perp AC$ nên *M* nằm trên đường tròn đường kính *OC*. Gọi *I* là trung điểm của *OC* thì *I* cố định. Giả sử *(I)* cắt *CB* tại *N* thì $ONC = 90°$ nên suy ra *N* là trung điểm của *BC*. Suy ra *MN* là đường trung bình của tam giác *ABC* kết hợp giả thiết $MH \perp AB$ suy ra $NH \perp HM$, gọi *K* là giao điểm của *(I)* với *HM* thì $NMK = 90°$ nên *NK* là đường kính của *(I)*, mà *N, I* cố định suy ra *K* cố định, *NK* là đường kính của *(O)* nên $KCN = 90°$ hay $KCB = 90°$, tứ giác *BCKH* nội tiếp nên *H* nằm trên đường tròn đường kính *KB* cố định.

Bài 21.

Cho 3 điểm *B, M, C* cố định theo thứ tự nằm trên một đường thẳng. Dựng *(O;R)* qua *B, C* $(BC < 2R)$, qua *M* kẻ cát tuyến vuông góc với *OB* cắt *(O)* tại *A, P*. Chứng minh: *A,P* thuộc một đường tròn cố định.

Giải:

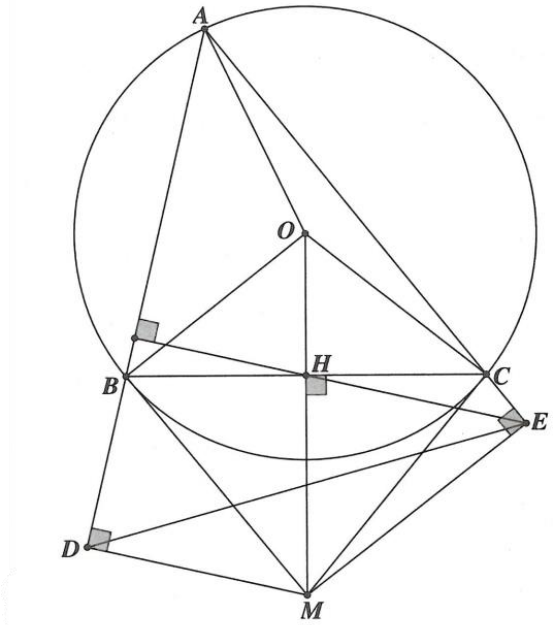


Gọi *H* là giao điểm của *AP* với *OB* thì *H* là trung điểm của *AP*, kẻ đường kính *BD* của *(O)* thì $DA = DP$. Trong tam giác vuông *BAD* ta có: $BA^2 = BH.BD$, lại có tứ giác *MHDC* nội tiếp nên $BH.BD = BM.BC$ (hệ thức quen thuộc, hs tự chứng minh) Từ đó suy ra $BM.BC = BA^2 \Leftrightarrow BA = \sqrt{BM.BC}$ mà điểm *B,M,C* cố định nên *BM.BC* không đổi và $BA = BP$ suy ra *A, P* nằm trên đường tròn tâm *B* bán kính bằng $\sqrt{BM.BC}$.

Bài 22.

Cho đường tròn *(O)* và dây $BC = 2a$ không đổi $a < R, A$ là điểm chuyển động trên cung lớn *BC* của $(O)(A \neq B,C)$, các tiếp tuyến của *(O)* tại *B, C* cắt nhau ở *M*, gọi *D, E* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *M* trên *AB, AC*. Chứng minh rằng: Khi điểm *A* thay đổi trên cung lớn *BC* của *(O)* thì trực tâm của tam giác *ADE* luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Giải:

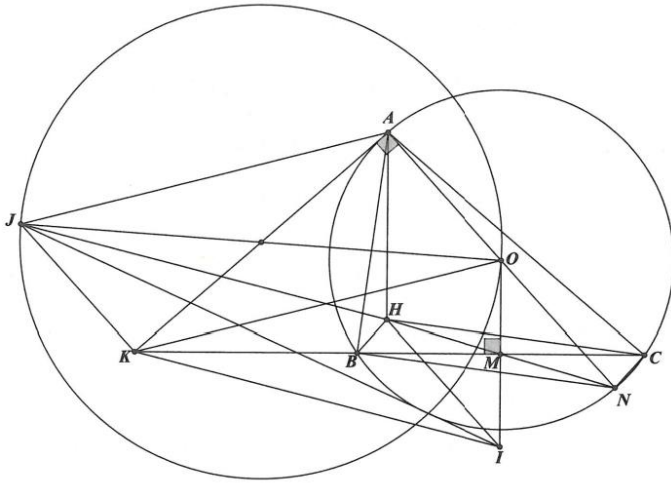


Gọi H là trung điểm của BC thì $OM \perp BC$ tại H. Theo giả thiết MD, ME lần lượt vuông góc với AB, AC nên $MHCE$ là tứ giác nội tiếp dẫn tới $HEM = HCM$, lại có $BAC = BCM$ suy ra $BAC = HEM$ nên $BAC + HEA = BAC + 90° - HEM = 90°$ suy ra $EH \perp AB$, tương tự $DH \perp AC$ suy ra H là trực tâm của tam giác ADC. Ta có $OH = \sqrt{OA^2 - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{R^2 - a^2}$ không đổi, O cố định suy ra điểm H nằm trên đường tròn $\left(O;\sqrt{R^2 - a^2}\right)$.

Bài 23.

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định nằm trên đường tròn. Trên tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A lấy một điểm K cố định, một đường thẳng (d) thay đổi đi qua K và không đi qua O cắt (O) B,C (B nằm giữa K và C). Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ đường kính AN của (O). Đường thẳng qua A vuông góc với CB cắt MN tại H. Khi đường thẳng (d) thay đổi quanh K và thỏa mãn điều kiện đề bài thì điểm H di động trên đường nào.

Giải:



Do AN là đường kính của (O) nên O là trung điểm của AN. Lại có AH, OM cùng vuông góc với BC nên $AH // MO$ suy ra MO là đường trung bình của tam giác AHN suy ra $AH = 2OM$. Tứ giác $BHMC$ có 2 đường chéo BC, HM cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên $BHMC$ là hình bình hành. Dẫn tới $BH // NC$, mà $NC \perp AC$ (do AN là đường kính của (O) suy ra $BH \perp AC$, kết hợp với giả thiết $AH \perp BC$ ta suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi I là điểm đối xứng với O qua M, từ chứng minh ở câu c) ta suy ra $AHIO$ là hình bình hành nên $HI // AO$ và $HI = AO$, ta cũng có tam giác KOI cân tại K suy ra $KI = KO$ không đổi. Dựng hình bình hành $HIKJ$ thì $IK // HI$ và $IK = HI$, kết hợp với $HI // AO$ và $HI = AO$ thì $KJ // AO$ ta suy ra $AOKJ$ là hình bình hành mà A, O, K cố định ta suy ra điểm J cố định. Do $JH = KI = KO$ không đổi suy ra điểm H nằm trên đường tròn tâm J bán kính KO.

HH9-CHUYÊN ĐỀ 6.CỰC TRỊ HÌNH VÀ ĐẲNG THỨC

Bài toán 1. Sử dụng định lí pythagore để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

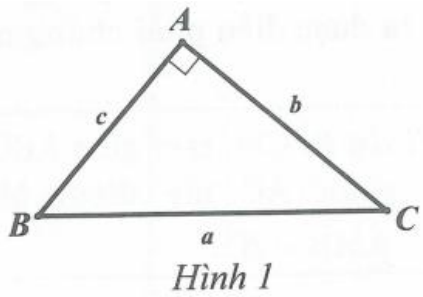
Định lý Pythagore là một định lý rất đẹp của hình học sơ cấp thể hiện mối quan hệ về độ dài giữa các cạnh của một tam giác vuông. Ta có thể ứng dụng định lý Pythagore vào việc chứng minh các quan hệ hình học, đặc biệt là chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức hình học.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý Pythagore. *Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.*

ΔABC vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Chú ý: Nếu đặt $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ thì ta có $a^2 = b^2 + c^2$.



Hình 1

2. Định lý Pythagore đảo

Nếu tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì tam giác ABC vuông tại đỉnh A.

3. Chú ý

Để vận dụng có hiệu quả định lý Pythagore, chúng ta cần trang bị một số kiến thức cơ bản sau:

a) Các đẳng thức được học trong đại số:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

b) Tính chất hình học: Hai đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song thì chúng bằng nhau.

c) Tính chất hình học: Nếu ΔABC vuông tại A và $B = 60°$ thì $BC = 2AC$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của AB. Kẻ MH vuông góc với BC $(H \in BC)$. Chứng minh $CH^2 - BH^2 = AC^2$.

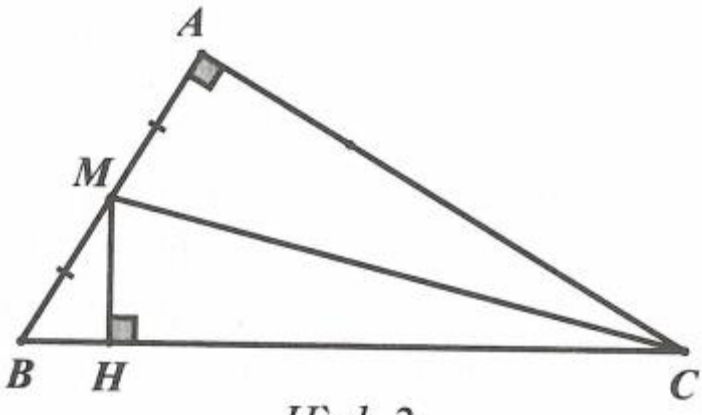
HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông MCH và MBH ta được:

$CH^2 = CM^2 - MH^2 \quad (1)$

$BH^2 = BM^2 - MH^2 \quad (2)$

Trừ (1) cho (2):



Hình 2

$CH^2 - BH^2 = CM^2 - BM^2$

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ACM và chú ý $AM = BM$ ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12cm$; $AC = 18cm$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = 5cm$. Chứng minh rằng: $AMB = 2C$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng định lý Pythagore vào ta

$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 12^2 + 5^2 = 169$.

$\Rightarrow BM = 13cm$

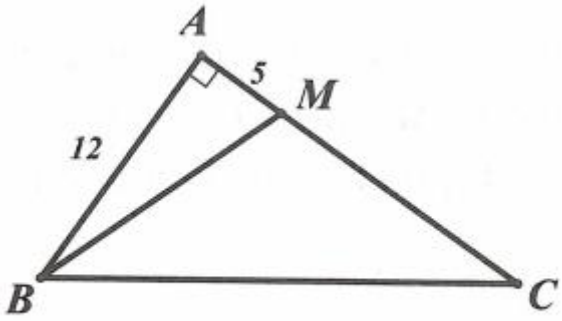
Mặt khác $AC = 18cm$; $AM = 5cm$ nên $MC = 13cm$.

Vậy tam giác BMC cân tại M.

Từ đó $MBC = C$.

Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có

$AMB = MBC + C = 2C$



Hình 3

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, D là điểm bất kì trong trong tam giác. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của D lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $BH^2 + CI^2 + AK^2 = CH^2 + AI^2 + BK^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nối DA, DB, DC. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông BDH và CDH ta được:

$DH^2 = BD^2 - BH^2 = CD^2 - CH^2$.

Suy ra: $BH^2 - CH^2 = BD^2 - CD^2$ (1).

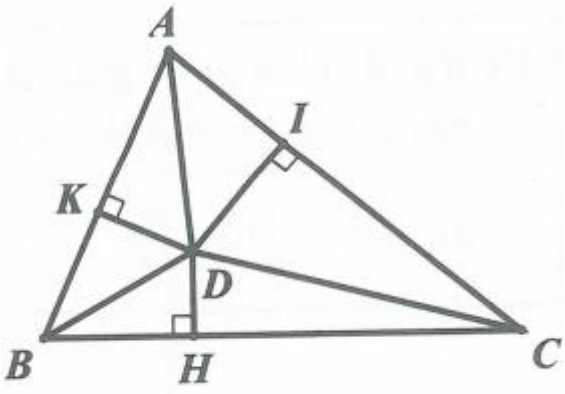
Tương tự ta có: $CI^2 - AI^2 = CD^2 - AD^2$ (2);

$AK^2 - BK^2 = AD^2 - BD^2$ (3).

Cộng các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$BH^2 - CH^2 + CI^2 - AI^2 + AK^2 - BK^2 = 0$. Từ đó:

$BH^2 + CI^2 + AK^2 = CH^2 + AI^2 + BK^2$.



Hình 4

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}. \ (*)$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$.

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABH, ACH và AHM ta được:

$AB^2 = BH^2 + AH^2 \quad (1)$

$AC^2 = CH^2 + AH^2 \quad (2)$

Cộng các vế của đẳng thức (1) và (2):

$AB^2 + AC^2 = BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = (BM - HM)^2 + (BM + HM)^2 + 2AH^2$

$= 2HM^2 + 2AH^2 + \dfrac{BC^2}{2} = 2AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

Từ đó: $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$

Chú ý: 1) Hệ thức $(*)$ cho phép tính độ dài đường trung tuyến của một tam giác thông qua độ dài các cạnh của tam giác đó. Người ta gọi $(*)$ là *công thức trung tuyến.*

2) Nếu tam giác ABC vuông tại A, khi đó AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC. Để ý rằng $AB^2 + AC^2 = BC^2$, thay vào hệ thức $(*)$ ta được: $AM^2 = \dfrac{BC^2}{4}$. Từ đó $AM = \dfrac{1}{2}BC$.

Ta có tính chất quen thuộc: *Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền dài bằng nửa cạnh huyền.*

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân a tại A, có $AB = AC = b$ và $BC = a$. Kẻ hai đường cao AH và BK. Chứng minh:

a) $AH = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$; b) $BK = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^4}{4b^2}}$

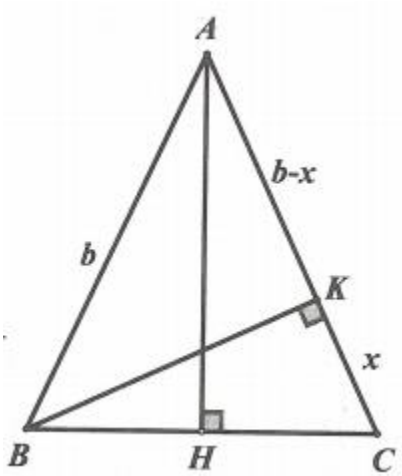
HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Theo tính chất tam giác cân: $BH = CH = \dfrac{a}{4}$;

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ABH vuông tại H:

$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = b^2 - \dfrac{a^2}{4}$

Vậy $AH = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$



b) Đặt $KC = x \Rightarrow AK = b - x$. Áp dụng định lý Pythagore cho hai tam giác AKB và tam giác CKB ta có:

$BA^2 - AK^2 = BC^2 - KC^2 \left(= BK^2\right)$

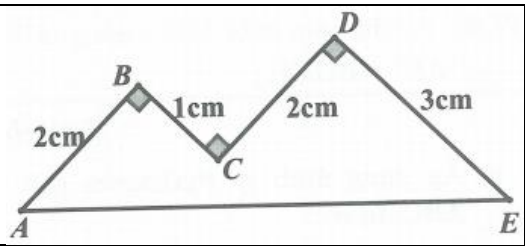
$\Rightarrow b^2-(b-x)^2=a^2-x^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{a^2}{2b}$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác BCK vuông tại K, ta có

$BC^2=BK^2+KC^2 \Rightarrow BK^2=BC^2-CK^2=a^2-\dfrac{a^4}{4b^2}$

Vậy $BK=\sqrt{a^2-\dfrac{a^4}{4b^2}}$

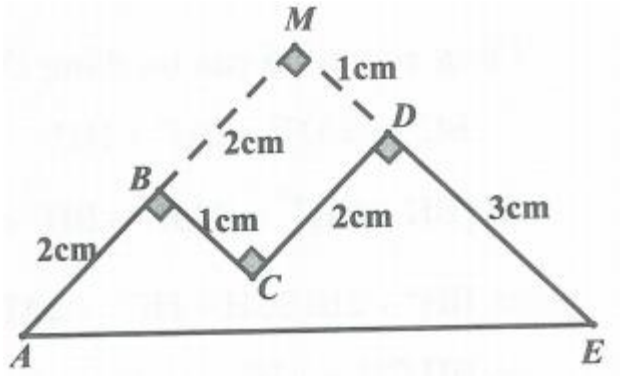
Ví dụ 6. Chi hình vẽ có $AB=CD=2cm$, $DE=3cm$, $BC=1cm$. Chứng minh rằng $AE=\sqrt{32}cm$.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ B kẻ đường thẳng song song với CD, từ D kẻ đường thẳng song song với BC, chúng cắt nhau tại M.

Áp dụng tính chất về hai đoạn thẳng song song bị chắn bởi các đường thẳng song song



Ta có: $BM=CD=2cm$

$MD=BC=1cm$

Suy ra: $AM=EM=4cm$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác AME vuông tại M, ta có

$AM^2+BM^2=AE^2 \Rightarrow AE^2=4^2+4^2=32$.

Vậy $AE=\sqrt{32}cm$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nhọn có ba cạnh AB, BC, CA lần lượt là 3 số tự nhiên liên tiếp. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh $HC-HB=4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo đề bài ta có $AC=BC+1=AB+2$.

Suy ra $AB+AC=2BC$.

Áp dụng định lý Pythagore vào hai tam giác vuông ABH và ACH ta có

$HC^2-HB^2=AC^2-AB^2\left(=AH^2\right)$

$\Rightarrow (HC-HB)(HC+HB)=(AC-AB)(AC+AB)$

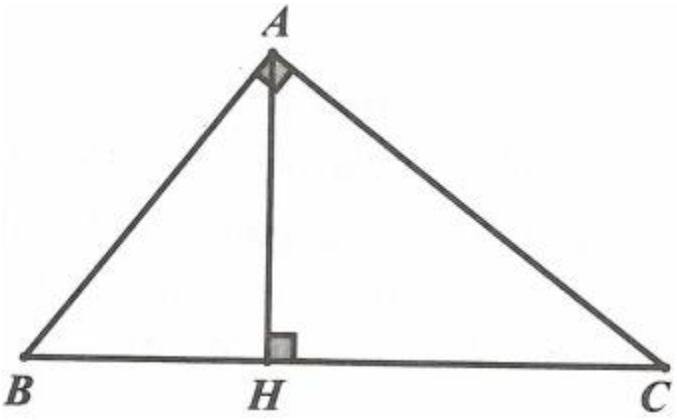
$\Rightarrow (HC-HB)BC=2.2BC$

$\Rightarrow HC-HB=4$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh:

a) $AH^2 = BH.CH$; b) $AB^2 = BH.BC$

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Áp dụng định lý Pythagore cho ba tam giác vuông ABH, AHC và ABC, ta có:

$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1)$

$AC^2 = AH^2 + HC^2 \quad (2)$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (3)$

Cộng vế với vế của ba đẳng thức trên:

$BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + HC^2$

$\Rightarrow (BH + CH)^2 = 2AH^2 + BH^2 + HC^2$

$\Rightarrow BH^2 + 2BH.CH + HC^2 = 2AH^2 + BH^2 + HC^2$

$\Rightarrow BH.CH = AH^2 \quad (4)$

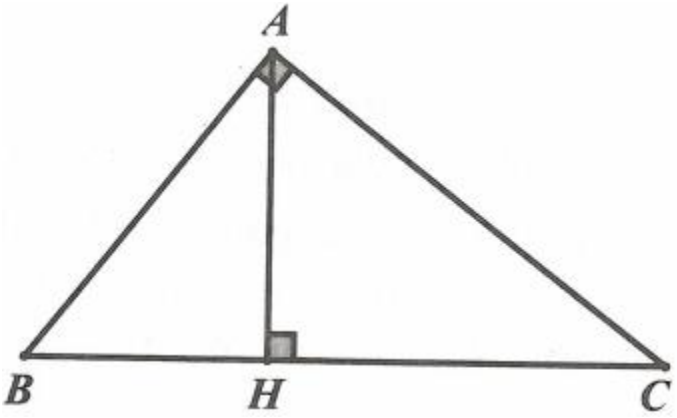
b) Kết hợp đẳng thức (4) và đẳng thức (1) ta được

$AB^2 = BH.CH + HB^2 = BH.(CH + HB) = BH.BC$.

Ví dụ 9. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh

$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Sử dụng kết quả ví dụ 8, ta có:

$AB^2 = BH.BC$

$AC^2 = CH.BC$

Khi đó:

$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{BH.BC} + \frac{1}{CH.BC} = \frac{CH + BH}{BC.BH.CH}$

$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{BC}{BC.BH.CH} = \frac{1}{BH.CH} = \frac{1}{AH^2}$

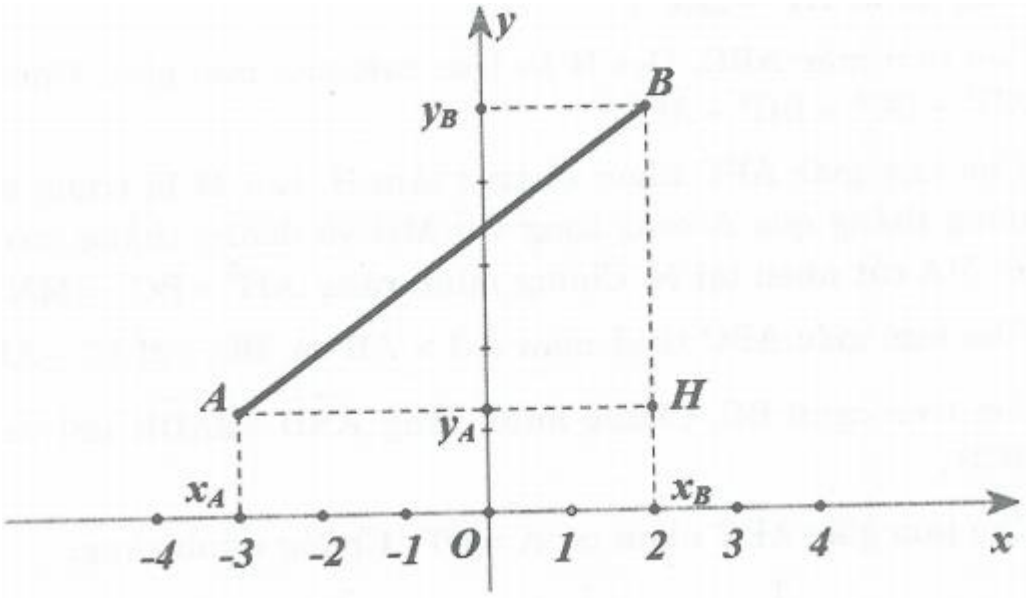
III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH $(H \in BC)$. Chứng minh rằng

$2AH^2 + BH^2 + CH^2 = BC^2$.

Bài 2. Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ trong mặt phẳng tọa độ. Chứng minh:

$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$.



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, đường cao AH, trung tuyến AM. Biết rằng $AH=40cm; AM=41cm$. Chứng minh rằng $5AB=4AC$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, $C=30°$. Chứng minh rằng $BC=2AB$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $A=135°$. Biết $BC=2$; $AB=\sqrt{2}$. Chứng minh rằng $C=2B$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Một đường thẳng bất kỳ cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng $BC^2-CD^2=BE^2-DE^2$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $A=60°$. Chứng minh rằng $BC^2=AB^2+AC^2-AB.AC$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ AH vuông góc với BC $(H\in BC)$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $BDE=90°$. Đường thẳng qua E song song với BC cắt AH tại F. Chứng minh $AF=HD$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, các đường trung tuyến BM và CN. Chứng minh rằng:

$BM^2+CN^2=\dfrac{5BC^2}{4}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $5BC^2=AB^2+AC^2$.

Bài 11*. Cho tam giác ABC vuông tại A. I là giao điểm của các đường phân giác trong. E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A xuống BI và CI. Chứng minh $AI^2=2EF^2$.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2$.

Bài 13*. Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A song song với MH và đường thẳng qua H song song với MA cắt nhau tại N. Chứng minh rằng $AH^2 + BC^2 = MN^2$.

Bài 14*. Cho tam giác ABC thoả mãn $AC > AB$ và $BC = 2(AC - AB)$. D là một điểm trên cạnh BC. Chứng minh rằng $ABD = 2ADB$ khi và chỉ khi $BD = 3CD$.

Bài 15*. Cho tam giác ABC nhọn có $A = 60°$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BC + AC} + \frac{1}{BC + AB} = \frac{3}{AB + BC + CA}$$

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, gọi M là điểm nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Bài 17. Cho tam giác ABC, từ điểm M nằm trong tam giác, ta hạ các đường vuông góc $MD \perp BC$, $ME \perp AB$, $MF \perp AC$. Chứng minh rằng

$AE^2 + BD^2 + CF^2 = AF^2 + BE^2 + CD^2$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông AHB và AHC ta được:

$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1)$;

$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad (2)$.

Cộng các đẳng thức (1) và (2) và chú ý $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ta được điều phải chứng minh.

Bài 2. Thấy rằng tam giác ABH vuông tại H và

$HA = |y_A - y_B|; HB = |x_A - x_B|$.

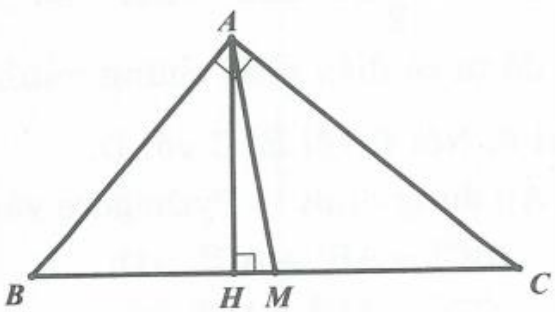
Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABH cho ta điều phải chứng minh.

Bài 3. Vì AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ABC nên theo nhận xét ở ví dụ 3 ta có $MA = MB = MC = 41cm$. Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AHM ta tính được $HM = 9cm$.

Từ đó tính được $HB = 32cm$; $HC = 50cm$.

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABH và ACH ta có:

$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 40^2 + 32^2 = 2624$;



Hình 7

$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 40^2 + 50^2 = 4100$

Suy ra $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{2624}{4100} = \frac{16}{25}$

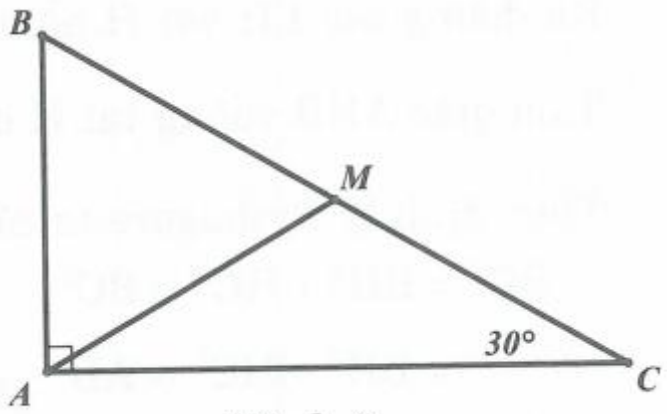
Vậy $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$ hay $5AB = 4AC$

Bài 4. Vì tam giác ABC vuông tại A, $C = 30°$ nên $B = 60°$.

Lại có AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ABC nên $MA = MB = MC$.

Từ đó tam giác MAB đều.

Vậy $AB = MB = \frac{1}{2}BC$ hay $BC = 2AB$.



Hình 8

Chú ý: Có thể chứng minh được rằng: *Một tam giác vuông có một cạnh góc vuông dài bằng một nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30°.*

Bài 5. Vẽ đường cao CH của tam giác ABC.

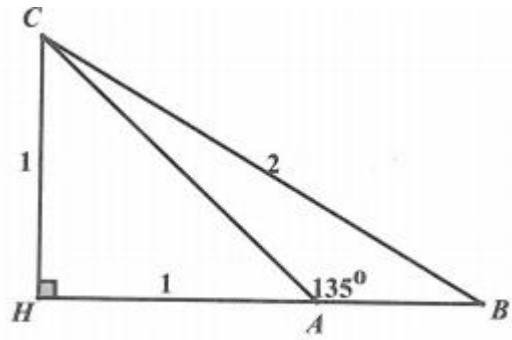
Ta có: $CHA = 180° - 135° = 45°$.

ΔACH có: $H = 90°$; $CAH = 45°$.

Vậy ΔACH vuông cân tại đỉnh H.

Áp dụng định lý Pythagore cho ΔACH ta có: $HC = HA = 1$.

Tam giác CHB vuông tại H ta có $HC = \frac{1}{2}BC$ nên $CBH = 30°$ từ đó ta có điều phải chứng minh.



Hình 9

Bài 6. Nối B với E; C với D.

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABC và ADC ta có:

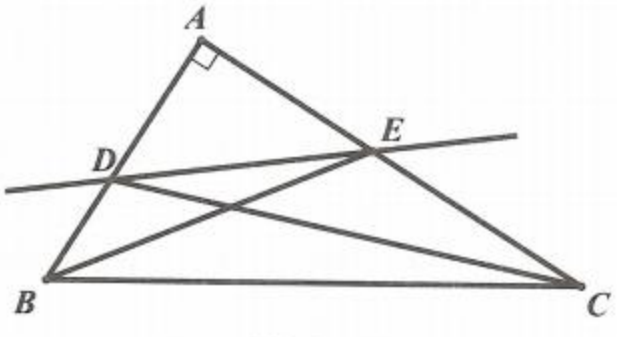
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (1);

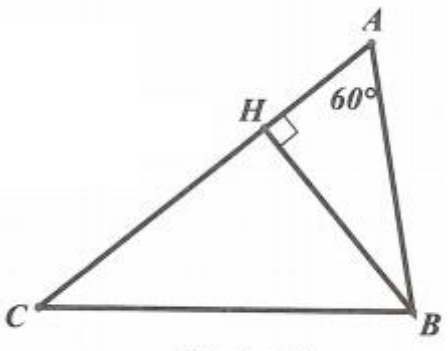
$CD^2 = AD^2 + AC^2$ (2).

Trừ (1) cho (2) ta được $BC^2 - CD^2 = AB^2 - AD^2$

Tương tự áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ADE và ABE ta được

$BE^2 - DE^2 = AB^2 - AD^2$. Vậy $BC^2 - CD^2 = BE^2 - DE^2$.





Hình 11

Bài 7. Không mất tính tổng quát giả sử $B>C$.

Kẻ đường cao BH với H nằm trên cạnh AC.

Tam giác AHB vuông tại H có $ABH=30^\circ$ nên $AH=\frac{1}{2}AB$.

Theo định lý Pythagore ta có:

$BC^2=BH^2+HC^2=BC^2$

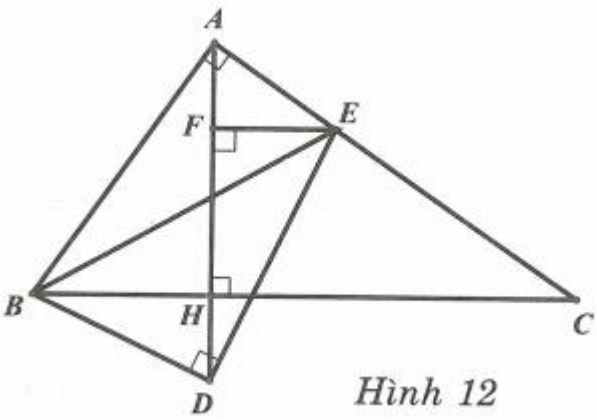
$=BH^2+HC^2=AB^2-AH^2+(AC-AH)^2$

$=AB^2+AC^2-2AC.AH=AB^2+AC^2-AB.AC$.

Bài 8. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABE, ABH, AEF, BDE, BHD, BHA, BAE, EAF ta được

$BE^2=AB^2+AE^2$

$=(BH^2+AH^2)+(AF^2+EF^2)$ (1)



Hình 12

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác BDE, BDH, DFE ta được

$BE^2=BD^2+DE^2=(BH^2+HD^2)+(DF^2+EF^2)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH^2+AF^2=DF^2+HD^2$ (3)

* Nếu $AF>HD$ thì $AH>DF$, khi đó $AH^2+AF^2>DF^2+HD^2$.

* Nếu $AF<HD$ thì $AH<DF$, khi đó $AH^2+AF^2<DF^2+HD^2$.

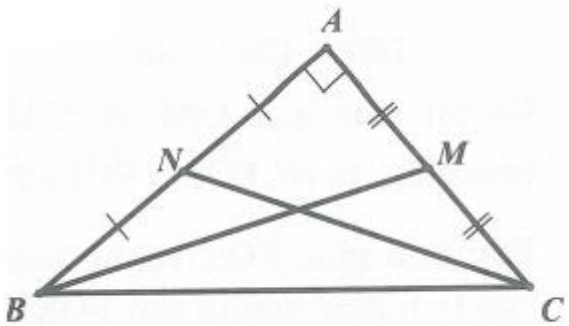
Vậy đẳng thức (3) chỉ xảy ra khi $AF=HD$, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 9. *Cách 1*: Sử dụng công thức trung tuyến.

Cách 2: Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác ABM và CAN ta được:

$BM^2=AB^2+\frac{AC^2}{4}$; $CN^2=AC^2+\frac{AB^2}{4}$

Cộng các đẳng thức trên lại và để ý rằng $AB^2+AC^2=BC^2$, ta có điều phải chứng minh.



Hình 13

Bài 10. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi G là giao điểm của BM và CN, khi đó G là trọng tâm của tam giác. Áp dụng công thức trung tuyến ta được:

$BM^2=\frac{AB^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}$; $CN^2=\frac{AC^2+BC^2}{2}-\frac{AB^2}{4}$.

Lại có $BM=\frac{3}{2}BG$; $CN=\frac{3}{2}CG$, thay vào công thức trên ta được:

$$\frac{9}{4}BG^2=\frac{AB^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4} \quad (1)$$

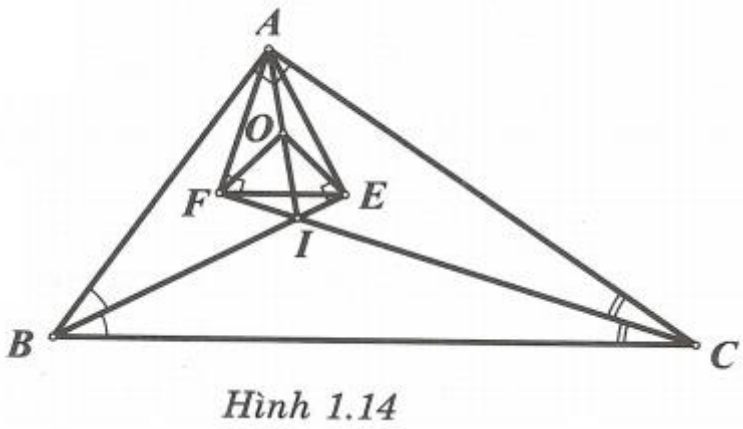
$$\frac{9}{4}CG^2=\frac{AC^2+BC^2}{2}-\frac{AB^2}{4} \quad (2)$$

Cộng các đẳng thức (1), (2) và chú ý tam giác BGC vuông tại G, ta có điều phải chứng minh.

Bài 11. Nối AI. Gọi O là trung điểm của AI.

Các tam giác vuông AFI và AEI có FO và EO lần lượt là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AI nên ta có $OF=OE=\frac{AI}{2}$.

Vậy tam giác FOE cân tại O.



Hình 1.14

Lại có $BIC=180°-\frac{B+C}{2}=135°$

Hay $FIA+EIA=135°$

Do đó: $FAI+EAI$

$=\left(90°-FIA\right)+\left(90°-EIA\right)$

$=180°-\left(FIA+EIA\right)$

$=180°-135°=45°$.

Có các tam giác OAF và OAE cân tại O, theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có

$FOE=FOI+EOI=2\left(FAI+EAI\right)=90°$.

Vậy tam giác FOE vuông cân tại O. Từ đó áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông cân FOE ta được:

$AI^2=\left(2.OE\right)^2=4.OE^2=2\left(OE^2+OF^2\right)=2EF^2$.

Bài 12. Gọi I là giao điểm của CH và AB. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông AHI, BHI, ACI, BCI ta suy ra:

$$AH^2-AI^2=BH^2-BI^2 \quad (1)$$

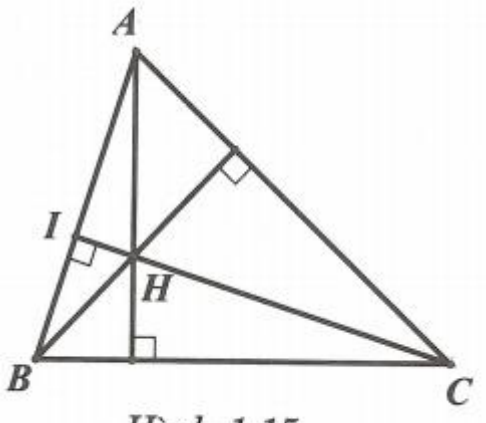
$$AC^2-AI^2=BC^2-BI^2 \quad (2)$$

Trừ (2) cho (1) ta được

$AC^2-AH^2=BC^2-BH^2$

Từ đó: $AH^2+BC^2=BH^2+AC^2$.

Chú ý:



Hình 1.15

+ Chứng minh trên vẫn đúng trong trường hợp tam giác ABC là tam giác tù. Trong trường hợp tam giác ABC vuông thì một số điểm trùng nhau nhưng kết quả vẫn đúng.

+ Bằng cách chứng minh tương tự có thể suy ra:

$AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$

Bài 13. Lấy D là điểm đối xứng với H qua M.

Dễ dàng chứng minh được $BH // DC$, $BH = DC$ từ đó suy ra $DC \perp AC$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ADC vuông tại C, ta được:

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + BH^2$ (vì $BH = CD$).

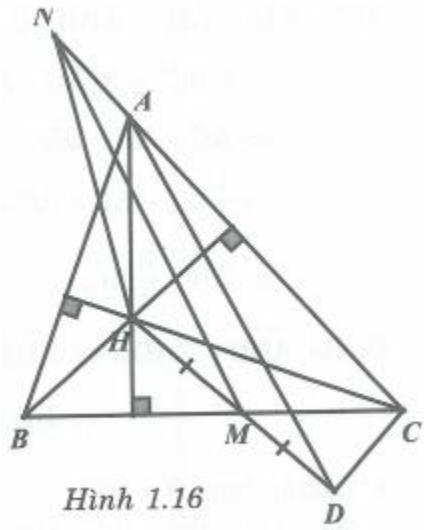
Theo kết quả bài tập 12 ta có:

$AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2$.

Như vậy: $AD^2 = AH^2 + BC^2$.

Cuối cùng, dễ dàng chứng minh được $MN = AD$.

Do đó $AH^2 + BC^2 = MN^2$.



Hình 1.16

Bài 14. Ta xét ba trường hợp:

+ Trường hợp $B < 90°$ (Hình 1.17a)

Hạ $AH \perp BC$. Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng CH sao cho $AE = AB$.

Theo định lý Pythagore ta có:

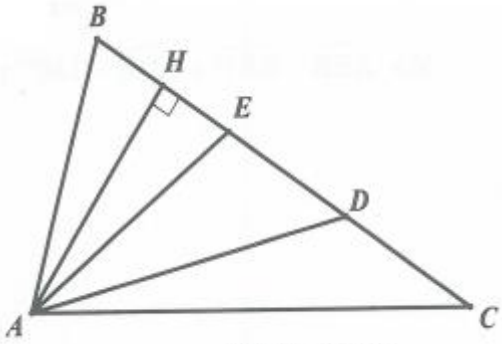
$AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2 = (CH + BH)(CH - BH)$

$= CE.BC = CE.2(AC - AB)$

Do vậy $(AC - AB)(AC + AB) = 2CE(AC - AB)$.

Suy ra $AC + AB = 2CE$.

Theo bài ra $BC = 2(AC - AB) \Leftrightarrow 2AB + \frac{1}{2}BC = 2CE.$ (1)



Hình 1.17a

Vì vậy $ABD = 2ADB \Leftrightarrow AEB = 2ADB$

$\Leftrightarrow$ Tam giác AED cân tại E

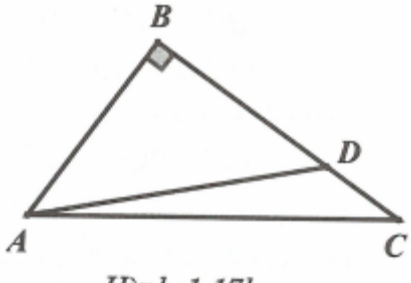
$\Leftrightarrow AB = AE = DE$

$\Leftrightarrow 2DE + \frac{1}{2}BC = 2CE$. (theo (1))

$\Leftrightarrow BC = 4(CE - DE) = 4CD$

$\Leftrightarrow BD = 3CD$.

+ Trường hợp $B = 90°$



Hình 1.17b

Theo định lý Pythagore ta được:

$AC^2 - AB^2 = (AC - AB)(AC + AB)$

$= BC^2 = 2(AC - AB).BC$

$\Leftrightarrow AC + AB = 2BC$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}BC + AB + AB = 2BC$

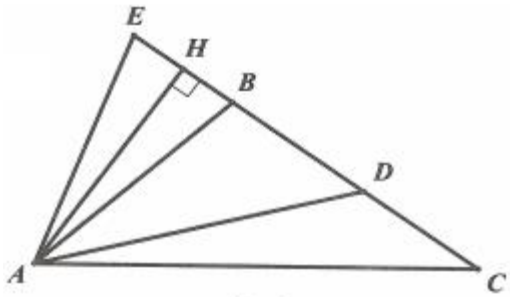
$\Leftrightarrow AB = \frac{3}{4}BC$.

Do đó $ABD = 2ADB \Leftrightarrow ADB = 45° = BAD \Leftrightarrow AB = BD$

$\Leftrightarrow BD = \frac{3}{4}BC \Leftrightarrow BD = 3BC$.

+ Trường hợp $B > 90°$.

Hạ $AH \perp BC$. Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng CH sao cho $AE = AB$.



Hình 1.17c

Theo định lý Pythagore ta có:

$AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2$

$= (CH + BH)(CH - BH)$

$= CE.BC = CE.2.(AC - AB)$

Do vậy $(AC - AB)(AC + AB) = 2CE(AC - AB)$.

Suy ra $AC + AB = 2CE$.

Theo bài ra $BC = 2(AC - AB) \Leftrightarrow 2AB + \frac{1}{2}BC = 2CE$.

Vì vậy: $ABD = 2ADB \Leftrightarrow 180° - ABE = 2ADB$

$AEB + 2ADB = ABE + 2ADB = 180°$ (2)

Mà $AEB + EAD + ADE = 180°$ nên $(2) \Leftrightarrow EAD = ADE$

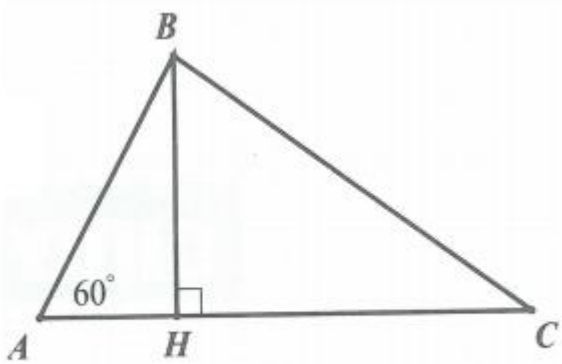
$\Leftrightarrow$ Tam giác AED cân tại E

$\Leftrightarrow AB = AE = DE$

$\Leftrightarrow 2DE + \frac{1}{2}BC = 2CE$

$\Leftrightarrow BC = 4(CE - DE) = 4CD$

$\Leftrightarrow BD = 3CD$.



Hình 1.18

Bài 15. Đặt $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

Kẻ BH vuông góc với AC (H thuộc AC)

Theo bài ra ta có $A=60°$ nên $ABH=30°$.

Theo bài 1.4 ta có $AH=\frac{1}{2}AB$.

Đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1}{BC+AC}+\frac{1}{BC+AB}+\frac{3}{AB+BC+CA}$$

trở thành $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{3}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+c)+(a+b+c)(a+b)=3(a+b)(a+c) \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức (1).

Thật vậy: Theo định lý Pythagore ta có:

$BC^2=BH^2+HC^2$; $BH^2=AB^2-AH^2$ và $HC^2=(AC-AH)^2$.

Do đó: $BC^2=AB^2+AC^2-2AH.AC=AB^2+AC^2-AB.AC$.

Hay $a^2=b^2+c^2-bc$. Ta có:

$a^2=b^2+c^2-bc$

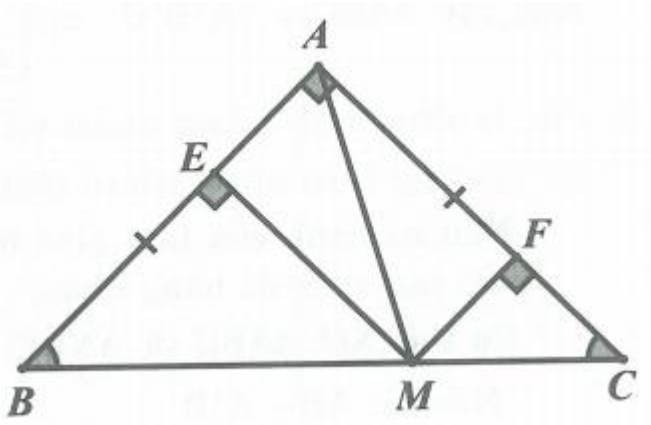
$\Leftrightarrow 3a^2-2a^2+3ab-3ab+3ac-3ac=b^2+c^2-3bc+2bc$

$\Leftrightarrow 3(a^2+ab+ac+bc)=2a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc$

$\Leftrightarrow 3(a+b)(a+c)=(a+b+c)(a+c)+(a+b+c)(a+b)$

.

Bài 16. Gọi điểm E và điểm F lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AB và AC.



Do tam giác ABC vuông cân tại A nên các tam giác BEM và tam giác CFM lần lượt cân tại E và F.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác BME vuông tại E:

$MB^2=EB^2+EM^2=2EM^2$ (1)

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác CMF vuông tại F.

$MC^2=FM^2+FC^2=2FM^2$ (2)

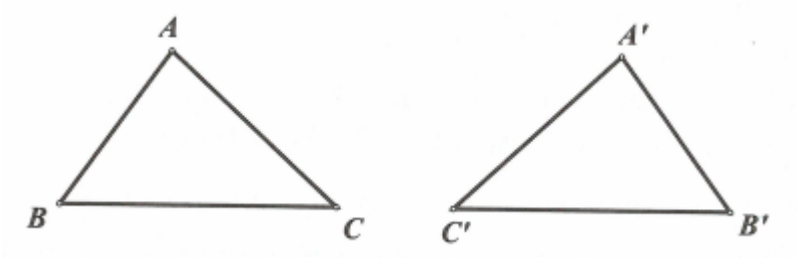
Từ (1) và (2) suy ra: $MB^2+MC^2=2(EM^2+FM^2)$

Vậy $MB^2+MC^2=2MA^2$.

Bài toán 2.sử dụng tam giác bằng nhau để chứng minh đẳng thức hình học

I. *KIẾN THỨC CẦN NHỚ*

1. Định nghĩa: *Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.*



Như vậy: $\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C' \\ A = A', B = B', C = C' \end{cases}$

2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác

a) Trường hợp bằng nhau thứ nhất cạnh – cạnh – cạnh (c.c.c)

** Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.*

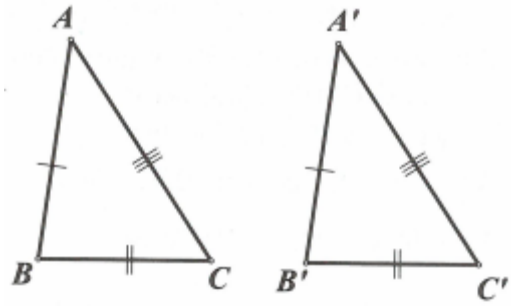
** Cụ thể: Xét* ΔABC *và* $\Delta A'B'C'$

Nếu có: $AB = A'B'$

$CA = C'A'$

$BC = B'C'$

Thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C' (\text{c.c.c})$.



b) Trường hợp bằng nhau thứ hai cạnh – góc – cạnh (c.g.c)

** Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.*

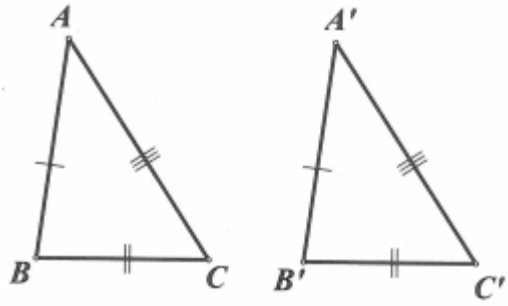
** Cụ thể: Xét* ΔABC *và* $\Delta A'B'C'$

Nếu có: $AB = A'B'$

$B = B'$

$BC = B'C'$

Thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C' (\text{c.g.c})$.

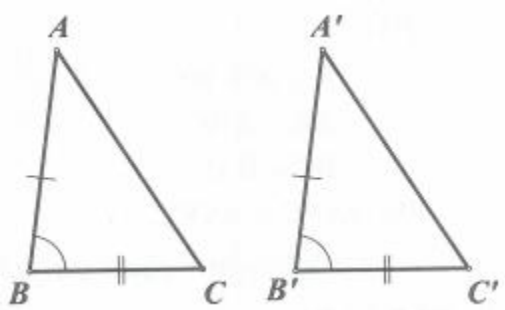


**** Chú ý:*** *Từ trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh nói trên ta suy ra: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*

c) Trường hợp bằng nhau thứ ba góc – cạnh – góc (g.c.g)

** Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.*

** Cụ thể: Xét* ΔABC *và* $\Delta A'B'C'$



Nếu có: $B = B'$

$BC = B'C'$

$C = C'$

Thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C' (\text{c.c.c})$.

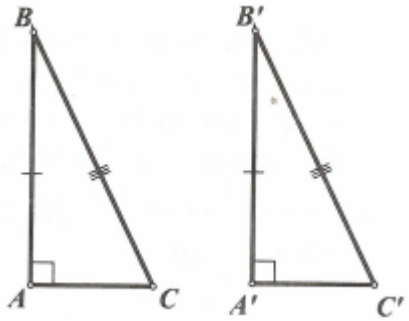
**** Chú ý:** Từ trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc nói trên ta suy ra:*

- Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

- Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

d) Trường hợp đặc biệt của tam giác vuông

** Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



** Cụ thể: Xét* ΔABC *và* $\Delta A'B'C'$

Nếu có: $A = A' = 90°$

$AB = A'B'$

$BC = B'C'$

Thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ *(cạnh huyền – cạnh góc vuông)*

II. CÁC VÍ DỤ

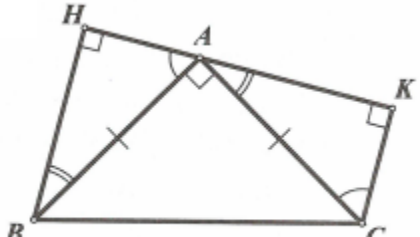
Ví dụ 1. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Qua *A* kẻ đường thẳng *d* bất kỳ sao cho *d* không cắt đoạn thẳng *BC*. Từ *B* và *C* kẻ *BH* và *CK* vuông góc với $d\,(H, K \in d)$. Chứng minh rằng

$BH + CK = HK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $HAB + KAC = 90°$; $KCA + KAC = 90°$.

Từ đó $HAB = KCA$.



Hình 1

Hai tam giác vuông *BHA* và *AKC* có $AB = AC$ (vì tam giác *ABC* cân tại *A*); $HAB = KCA$ (chứng minh trên) nên bằng nhau (cạnh huyền – góc nhọn).

Suy ra $BH = AK;\ CK = AH$ (các cặp cạnh tương ứng).

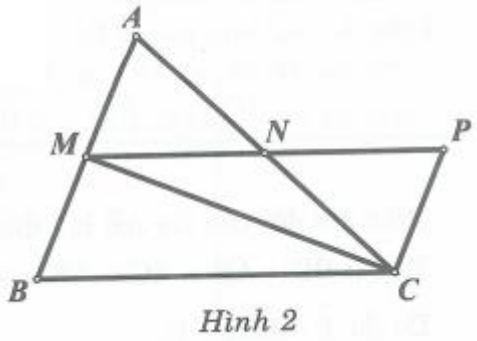
Từ đó $BH + CK = AK + AH = HK$.■

Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*. Chứng minh rằng $MN = \frac{1}{2}BC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trên tia *MN* lấy *P* sao cho *N* là trung điểm của *MP*.

Ta có $\Delta ANM = \Delta CNP(\text{c.g.c})$. Suy ra: $PC = MA;\ AMN = CPN$.



Hình 2

Vì hai góc AMN và CPN ở vị trí so le trong nên $AB//CP$.

Từ đó $BMC = PCM$.

Hai tam giác *MPC* và *CBM* có $MB = PC(= MA)$; *MC* chung;

$BMC = PCM$ nên bằng nhau (c.g.c),

Từ đó $MP = BC$. Vậy $MN = \frac{1}{2}BC$.■

Chú ý:

Theo **HƯỚNG DẪN GIẢI** của ví dụ trên, vì $\Delta MPC = \Delta CBM$ nên $BCM = PMC$.

Từ đó $MN//BC$. Người ta gọi đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác là *đường trung bình* của tam giác đó, ta có tính chất: *Đường trung bình của một tam giác song song với cạnh còn lại và dài bằng nửa cạnh ấy.*

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* có $A < 90°$, vẽ về phía ngoài tam giác *ABC* các tam giác *ABD* và *ACE* vuông cân tại *A*.

a) Chứng minh $BE = CD$.

b) Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh $AM = \frac{1}{2}DE$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Ta có $DAC = BAE = \left(90° + BAC\right)$.

Hai tam giác *DAC* và *BAE* có $AD = AB$; $AC = AE$; $DAC = BAE$ nên bằng nhau (c.g.c), suy ra $BE = CD$.

b) Trên tia *AM* lấy điểm *N* sao cho *M* là trung điểm của *AN*.

Thấy rằng, $DAE = 180° - BAC = ABC + BAC$.

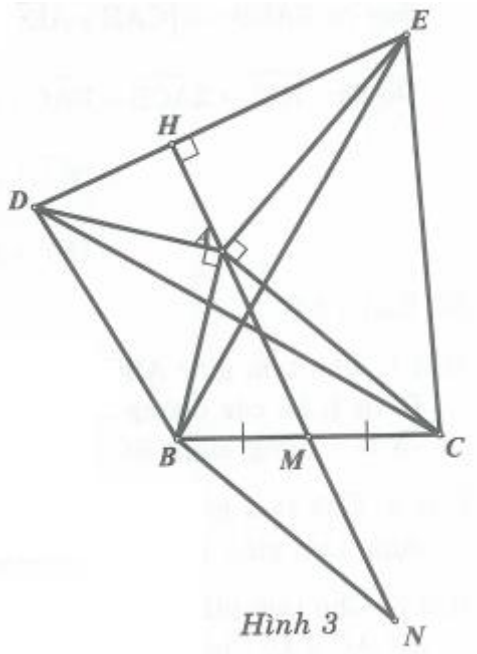
Mặt khác $\Delta CAM = \Delta BNM\left(\text{c.g.c}\right)$

Nên $ACB = CBN$, $BN = AC$.

Ta có $ABN = ABC + CBN = ABC + ACB = DAE$

Vậy $\Delta DAE = \Delta ABN\left(\text{c.g.c}\right)$.

Từ đó suy ra, $DE = AN = 2AM$ hay $AM = \frac{1}{2}DE$.■



Hình 3

Ví dụ 4. Cho tam giác *ABC*, đường phân giác *AD*. Đường thẳng vuông góc với *AD* tại *A* cắt *BC* tại *E*. Biết *C* nằm giữa *B*, *E* và $BE = AB + AC$. Chứng minh rằng: $BAC + 3ACB = 360°$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *F* sao cho $AF = AC$.

Ta có: $BE = AB + AC = AB + AF = BF$ nên ΔBEF cân tại *B*.

Do đó $F = BEF$ (1).

Lại có $AE \perp AD$, mà *AD* là đường phân giác trong đỉnh *A* của ΔABC nên *AE* là đường phân giác ngoài đỉnh *A* của ΔABC.

Hay $CAE = FAE$.

Do vậy, $\Delta CAE = \Delta FAE\left(\text{c.g.c}\right)$.

Từ đó suy ra $ACE = F$, $AEC = AEF$ (2).

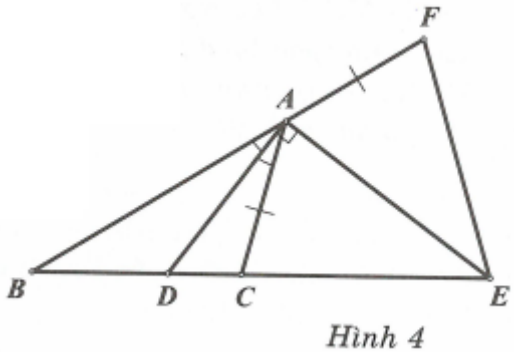
Từ (1) và (2) suy ra $ACE = F = CEF = 2AEC$.

Ta có $ACB = 180° - ACE = CAE + AEC$.

Suy ra $3ACB = 3\left(CAE + AEC\right)$.

Do đó: $BAC + 3ACB = BAC + 3\left(CAE + AEC\right)$

$= \left(BAC + CAF\right) + \left(AEC + ACE + CAE\right)$



Hình 4

$=180°+180°=360°$. ■

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác *ABC*, trên cạnh *AB* lấy *D* và *E* sao cho $AD=BE$. Qua *D* và *E* kẻ các đường thẳng song song với *BC* cắt *AC* theo thứ tự tại *M* và *N*. Chứng minh $BC=DM+EN$.

Bài 2. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $A=30°$. Bên ngoài tam giác *ABC*, dựng tam giác đều *BDC*. Chứng minh rằng $AD^2=AB^2+AC^2$.

Bài 3. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $A=100°$. Tia phân giác trong góc *B* cắt *AC* ở *D*. Chứng minh $BC=BD+AD$.

Bài 4. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $A=80°$. Lấy điểm *M* ở miền trong của tam giác và điểm *N* trên cạnh *AC* sao cho $BMC=150°, MBC=10°, BMN=160°$. Chứng minh rằng $BM=MN+NA$.

Bài 5. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* chứa điểm *B*, lấy điểm *D* sao cho *CD* vuông góc với *AC* và $CD=AC$. *M* là điểm trên đoạn thẳng *CD* sao cho $MD=2MC$. *N* là trung điểm của đoạn thẳng *BD*. Chứng minh $AMC=AMN$.

Bài 6. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có $AC=3AB$. Trên cạnh *AC* lấy hai điểm *D* và *E* sao cho $AD=DE=EC$ (*D* nằm giữa *A* và *E*). Chứng minh $AEB+ACB=45°$.

Bài 7. Cho tam giác *ABC*. Vẽ đường phân giác trong *AD* của tam giác. Trên *AD* lấy hai điểm *E* và *F* sao cho $ABE=CBF$. Chứng minh $ACE=BCF$.

Bài 8. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. *E* là một điểm nằm trên cạnh *BC* sao cho $EC=2EB$. Chứng minh rằng $AC^2=3\left(EC^2-EA^2\right)$.

Bài 9. Cho tam giác *ABC*, đường trung tuyến *AM*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* chứa đỉnh *C* vẽ đoạn thẳng *AE* vuông góc với *AB* và $AE=AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* chứa đỉnh *B* vẽ đoạn thẳng *AF* vuông góc với *AC* và $AF=AC$. Chứng minh rằng $EF=2AM$.

Bài 10. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Gọi *E* là trung điểm của *AC*. Qua *A* kẻ đường thẳng vuông góc với *BE* cắt *BC* tại *D*. Chứng minh $AD=2ED$.

Bài 11. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. *M* là điểm nằm trong tam giác sao cho $ABM=15°$; $BAM=30°$. Chứng minh rằng: $BC=2AM$.

Bài 12. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Lấy các điểm *D* và *E* lần lượt thuộc các cạnh *AB* và *AC* sao cho $AD=AE$. Đường thẳng đi qua *D* và vuông góc với *BE* cắt *CA* ở *K*. Chứng minh rằng $AK=AC$.

Bài 13. Cho tam giác *ABC*. Các tia phân giác trong của góc *B* và *C* cắt nhau tại *I*. Qua *I* kẻ một đường thẳng song song với *BC*, đường thẳng này cắt *AB*, *AC* theo thứ tự ở *D* và *E*. Chứng minh rằng $DE = BD + CE$.

Bài 14. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Kẻ đường phân giác trong *CD*. Qua *D* kẻ đường thẳng vuông góc với *CD* cắt *BC* tại *F*. Đường thẳng kẻ qua *D* song song với *BC* cắt *AC* tại *E*. Tia phân giác góc *BAC* cắt *DE* tại *M*. Chứng minh rằng:

a) $CF = 2BD$ b) $CF = 4MD$

Bài 15. Gọi *I* là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác *ABC*. Chứng minh rằng $AB + BI = AC$ khi và chỉ khi $ABC = 2.ACB$.

Bài 16. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $A = 20°$. Trên cạnh *AB* lấy điểm *D* sao cho $BDC = 30°$. Chứng minh rằng $AD = BC$.

Bài 17. Cho tam giác *ABC* có $A = 60°, B = 70°$. Lấy điểm *D* trên cạnh *AB* sao cho $ACD = 20°$. Chứng minh rằng $AC + AD = BD + BC$.

Bài 18. Cho tam giác *ABC* nhọn, gọi *H* là trực tâm của tam giác. Gọi *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*, *I* là giao điểm các đường phân giác của các góc ABH và ACH. Đường thẳng *MI* cắt *AH* tại *N*. Chứng minh rằng $NA = NH$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Qua *N* kẻ $NF // AB (F \in BC)$. Nối EF.

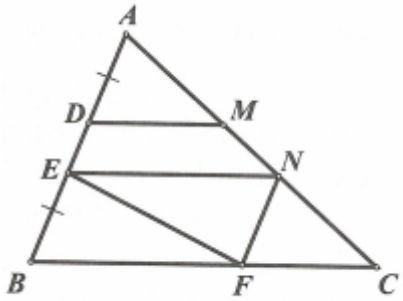
Ta có $\Delta BEF = \Delta NEF$ (g.c.g) nên $BE = AD = NF; EN = BF$.

Lại có $NFC = ABC = ADM$ (đồng vị); $NCF = AMD$ (đồng vị).

Do vậy $DAM = FNC$.

Ta có $\Delta ADM = \Delta NFC$ (g.c.g) nên $DM = FC$.

Từ đó suy ra $BC = BF + FC = DM + EN$. ■



Hình 5

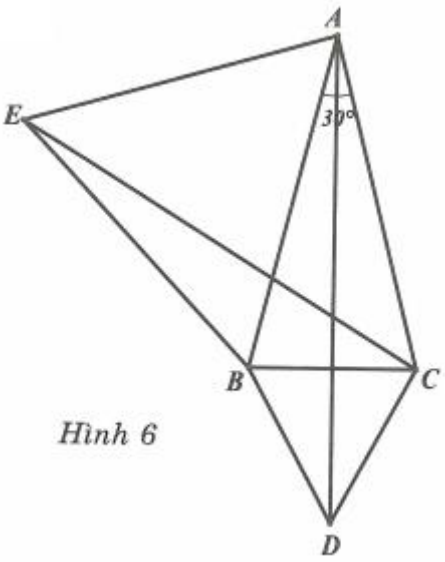
Bài 2.

Dựng ở phía ngoài tam giác *ABC* tam giác *AEB* đều, nối *EC*.

Ta có: $EAC = 90°, EBC = ACD$.

Hai tam giác *EBC* và *ACD* bằng nhau (c.g.c), suy ra $EC = AD$.

Lại có tam giác *EAC* vuông tại *A* nên theo định lý Pythagore, ta có: $EC^2 = EA^2 + AC^2$.



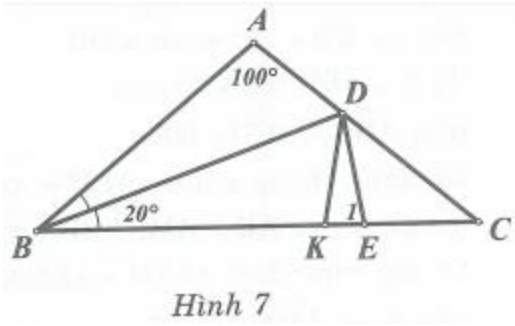
Hình 6

Để ý rằng, $EA = AC, EC = BD$ nên $AD^2 = AB^2 + AC^2$.■

Bài 3.

Trên cạnh *BC* lấy hai điểm *D* và *E* sao cho $BDE = 80°$,

$BDK = 60°$.



Hình 7

Ta có $\Delta BAD = \Delta BKD(\text{g.c.g})$ nên $AD = DK$.

Lại có $KDE = 20°$, $DKE = A = 100°$

suy ra: $E_1 = 80°$, $DEC = 100°$, $EDC = C = 40°$.

Vậy ΔDEC cân tại *E*, từ đó $DE = EC$.

Dễ dàng chứng minh ΔBDE cân tại *B*, ΔKDE cân tại *D* nên $BD = BE$, $DE = DK = AD$.

Cuối cùng, $BC = BE + EC = BD + AD$.■

Bài 4.

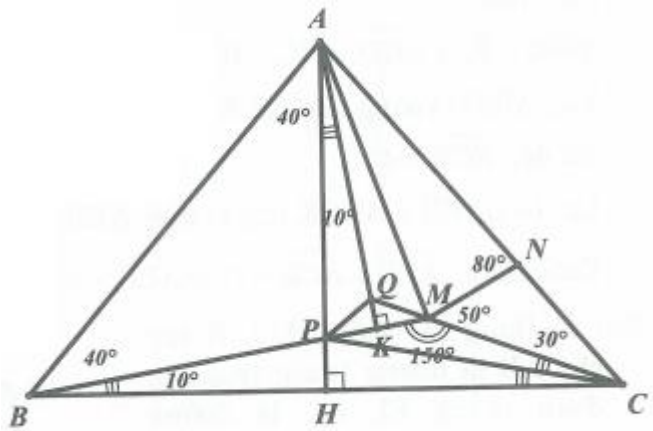
Nối *AM*. Đường cao *AH* của ΔABC cắt *BM* tại *P*. Kẻ $AK \perp PM$. *CM* cắt *AK* tại *Q*.

Ta có: $PAK = PBH = 10°$ và các tam giác *APB* và *BPC* cân tại *P*.

Tính được số đo các góc:

$MCB = 20°$, $PCB = 10°$, $MPC = 20°$, $QAC = 30°$,

$ANM = APM = 80°$, $APC = 100°$.



Hình 8

Dễ dàng chứng minh ΔPAC cân tại *P*, ΔQAC cân tại *Q* nên *PQ* là đường trung trực của *AC* và do đó tia *PQ* là tia phân giác của góc *APC*.

Như vậy, $QPC = \dfrac{APC}{2} = 50°$

và $QPM = QPC - MPC = 30°$.

Mặt khác, $QMP = 30°$ nên ΔQPM cân tại *Q*.

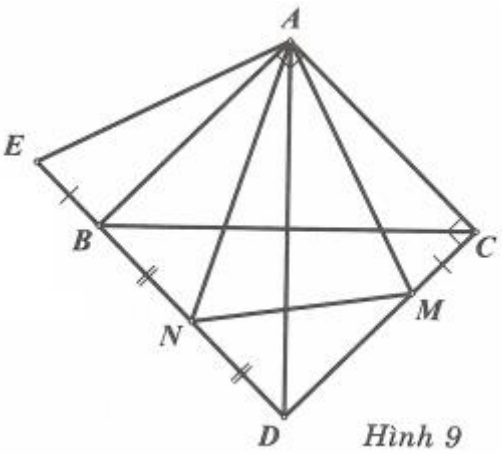
Từ đó, ΔAPM cân tại *A*.

Vậy $AMP = APM = 80°$, $AMN = PMN - AMP = 80°$.

Chứng minh được hai tam giác cân *APM* và *AMN* bằng nhau nên $AP = AN$, $PM = MN$.

Cuối cùng, $BM = BP + PM = AP + PM = MN + AN$.■

Bài 5.



Hình 9

Trên tia đối tia *BD* lấy điểm *E* sao cho $BE = MC$.

Ta có $BA//CD$ (cùng vuông góc với *AC*) nên $ACB = DBC$ (hai góc so le trong). Mặt khác $AB = CD\left(= AC\right)$.

Vậy $\Delta ABC = \Delta DCB\left(\text{c.g.c}\right)$

Suy ra, $BD = AC = AB = DC$.

Ta có $\Delta ABD = \Delta ACD\left(\text{c.c.c}\right)$ nên $ABD = ACD = 90°$.

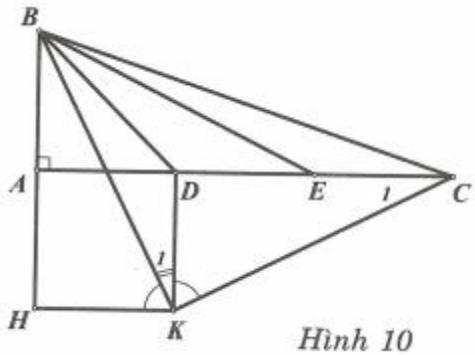
Dễ dàng chứng minh $\Delta ABE = \Delta ACM\left(\text{c.c.c}\right)$, suy ra

$AE = AM$, $AEB = AMC$.

Chứng minh được $\Delta AEN = \Delta AMN\left(\text{c.g.c}\right)$ nên ta có $AMN = AEN$.

Vậy $AMN = AMC$.■

Bài 6.



Hình 10

Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa *B* vẽ hình vuông *ADKH*.

Ta có $\Delta BHK = \Delta CDK\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $BK = CK$, $BKH = CKD$.

Tam giác *BKC* có $BK = KC$ nên ΔBKC cân tại *K*.

Hơn nữa, $BKC + K_1 + CKD = K_1 + BKH = 90°$.

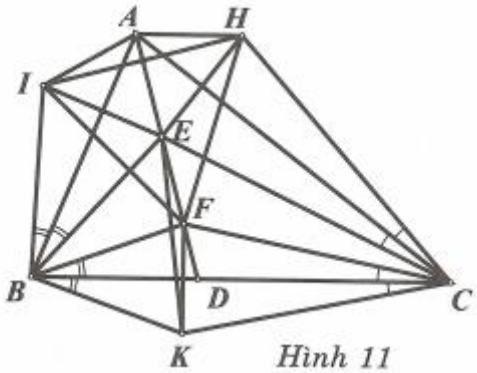
Vậy ΔBKC vuông cân tại *K*.

Từ đó, $KCB = 45°$.

Lại có $\Delta AEB = \Delta DCK\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $AEB = C_1$.

Cuối cùng, $AEB + ACB = C_1 + ACB = KCB = 45°$.■

Bài 7.



Hình 11

Dựng các điểm *H*, *I*, *K* sao cho *AB* là đường trung trực của đoạn thẳng *EI*, *AC* là trung trực của đoạn thẳng *EH*, *BC* là đường trung trực của đoạn thẳng *FK*.

Theo tính chất của điểm nằm trên đường trung trực ta có

$AI = AE = AH$. Vậy ΔIAH cân tại *H*.

Mặt khác dễ dàng chứng minh được *AD* là tia phân giác của góc *IAH*. Như vậy, *AD* là đường trung trực của đoạn thẳng *IH*. Do *F* nằm trên *AD* nên ta có $FI = FH\ \left(1\right)$.

Lại có $\Delta FIB = \Delta KEB(\text{c.g.c})$ nên $FI = KE\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $FH = KE$.

Xét ΔFHC và ΔKEC có $FH = KE,\ FC = KC,\ HC = EC$.

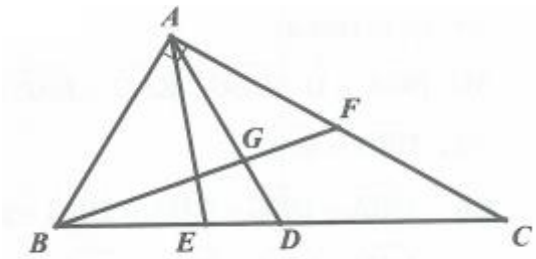
Từ đó $\Delta FHC = \Delta KEC(\text{c.c.c})$.

Vậy $HCF = ECK$. Suy ra $HCE = KCF$.

Cuối cùng, vì $BCF = \dfrac{KCF}{2};\ ACE = \dfrac{HCE}{2}$ nên $ACE = BCF$.■

Bài 8.

Gọi *G* là giao điểm của hai đường trung tuyến *AD* và *BF* của tam giác *ABC*.



Hình 12

Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông, suy ra $DA = DB = DC = \dfrac{BC}{2}$.

Vì *G* là trọng tâm của tam giác *ABC* nên $\dfrac{DG}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác, do *D* là trung điểm của *BC* nên theo đề bài ra ta có $\dfrac{DE}{BD} = \dfrac{1}{3}$.

Như vậy $\dfrac{DG}{AD} = \dfrac{DE}{BD}\left(= \dfrac{1}{3}\right)$.

Kết hợp với $AD = BD$ ta được $DG = DE$.

Vì $\Delta DGB = \Delta DEA(\text{c.g.c})$ nên $AE = BG$.

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác *ABF* và *ABC* ta được:

$BF^2 = AB^2 + AF^2 = \left(BC^2 - AC^2\right) + AF^2\ (*)$.

Thay $BF = \dfrac{3}{2}BG,\ BC = \dfrac{3}{2}EC,\ AF = \dfrac{1}{2}AC$ vào hệ thức (*) ta được:

$$\left(\frac{3}{2}BG\right)^2 = \left(\frac{3}{2}EC\right)^2 - AC^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2$$

Thu gọn hệ thức này ta được điều phải chứng minh.■

Bài 9.

Trường hợp $BAC = 90°$, kết quả là hiển nhiên.

Ta chứng minh bài toán cho trường hợp $BAC < 90°$ (trường hợp $BAC > 90°$ chứng minh tương tự).

Trên tia đối của tia *MA* lấy điểm *D* sao cho $MA = MD$. Đường thẳng vuông góc với *AB* tại *B* cắt *AD* tại *G*. ta có

$\Delta AMC = \Delta DMB (\text{c.g.c})$ suy ra $D = CAM$, $AC = BD$.

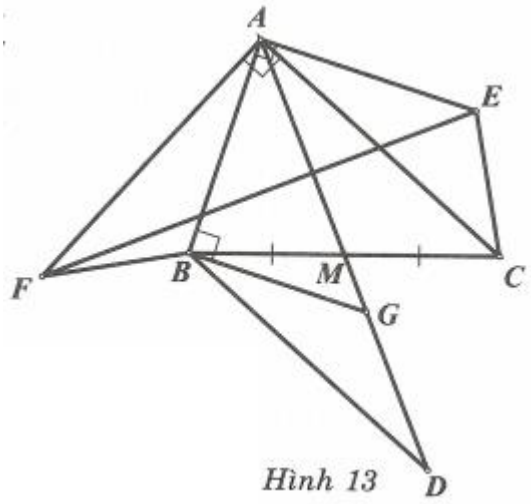
Lại có $BG // AE$ (cùng vuông góc với *AB*) nên $BGA = EAG$ (Hai góc so le trong).

Mà $BGA = D + DBG$, $EAG = EAC + CAG = EAC + D$.

Vậy $DBG = EAC$.

Có $DBA = DBG + GBA = DBG + 90°$,

$FAE = EAC + FAC = EAC + 90°$.



Hình 13

Vậy $DBA = FAE$. Hai tam giác *DBA* và *FAE* có $AE = AB$, $AF = BD (= AC)$, $DBA = FAE$ nên bằng nhau (c.g.c)

Do đó $FE = AD$. Mà $AD = 2AM$ nên $FE = 2AM$. ■

Bài 10.

Qua *C* vẽ đường thẳng vuông góc với *AC*, cắt *AD* tại *F*.

Do $ABE = CAF$ (cùng phụ với AEB) nên $\Delta BAE = \Delta ACF (\text{g.c.g})$.

Từ đó suy ra $CF = AE = EC$.

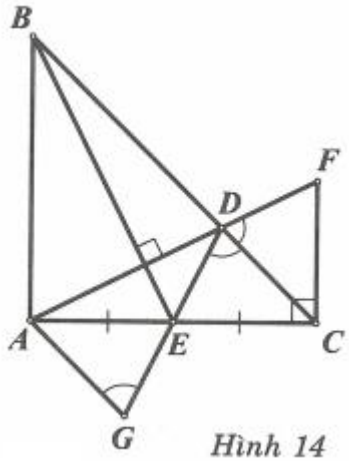
Vậy $\Delta CDE = \Delta CDF (\text{c.g.c})$ suy ra $CDE = CDF$.

Trên tia *DE* lấy điểm *G* sao cho $ED = EG$.

Ta có $\Delta AEG = \Delta CED (\text{c.g.c})$ nên $CDE = AGE$ và $AG // DC$.

Vì $DAG = FDC$ (hai góc đồng vị) suy ra $DAG = DGA$.

Vậy ΔDAG cân tại *D*, từ đó $DA = DG = 2DE$. ■



Hình 14

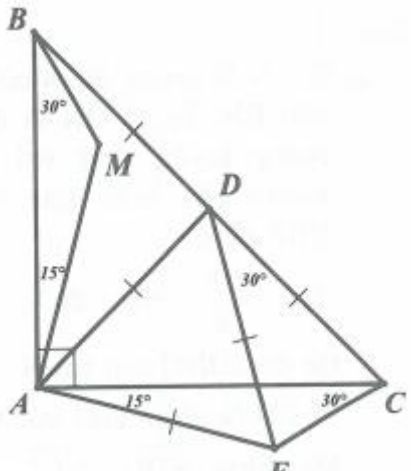
Bài 11.

Kẻ đường trung tuyến *AD* của ΔABC.

Khi đó *AD* đồng thời là đường cao và đường phân giác của ΔABC.

Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa *D*, lấy điểm *E* sao cho ΔADE đều.

Dễ dàng tính được số đo các góc: $ACE = 30°$; $CAE = 15°$.

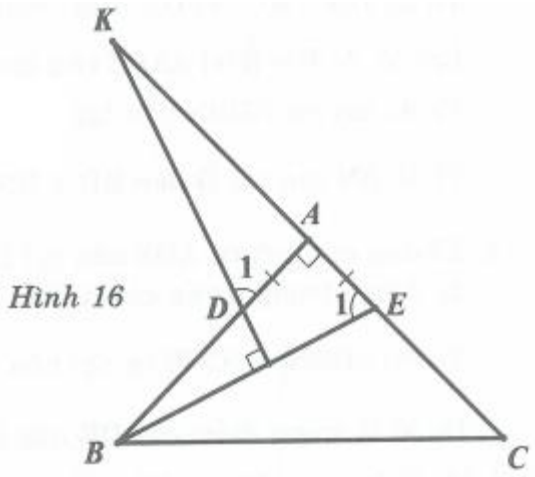


Hình 15

Như vậy: $\Delta AEC = \Delta AMB(\text{g.c.g})$.

Từ đó suy ra: $AM = AE = AD = \dfrac{BC}{2}$.■

Bài 12.



Hình 16

Ta có $D_1 = E_1$ (cùng phụ với góc K).

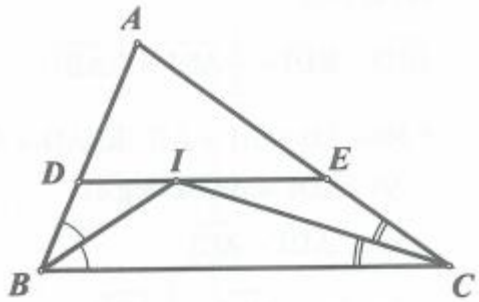
Do đó $\Delta KAD = \Delta BAE(\text{g.c.g})$.

Từ đó suy ra $AB = AK$.

Mà $AB = AC$ (ΔABC vuông cân tại A).

Nên $AK = AC$.■

Bài 13.



Hình 17

Vì $DE//BC$ nên $DIB = IBC,\ EIC = ICB$.

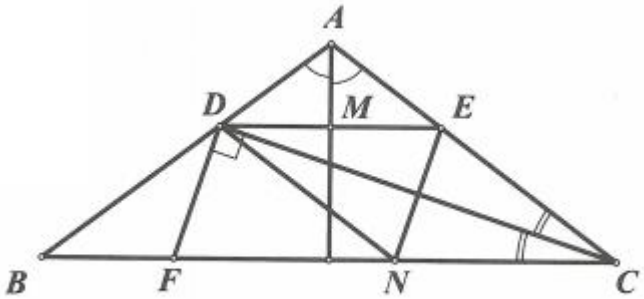
Mặt khác BI và CI lần lượt là tia phân giác góc B và góc C của tam giác ABC nên $IBC = IBD,\ ICB = ICE$.

Do đó $DIB = IBD,\ EIC = ICE$.

Từ đó suy ra các tam giác BDI và CEI là các tam giác cân lần lượt tại các đỉnh D và E.

Vậy $DE = DI + IE = DB + EC$.■

Bài 14.



Hình 18

a) Gọi N là trung điểm của CF. Nối EN. Ta có DN là đường trung tuyến ứng với cánh huyền của tam giác vuông CDF nên: $ND = \dfrac{CF}{2} = NF = NC$.

Do đó ΔDNC cân tại N.

Vì CD là phân giác góc C của ΔABC nên $ECD = NCD$.

Mặt khác $NDC = NCD$ (vì ΔDNC cân tại N) nên $NDC = ECD$.

Từ đó $DN//AC$. Vì $DN//AC$ nên $ACB = DNB$ (hai góc đồng vị),

Lại có $ACB = B$ (vì ΔABC cân tại A) nên $B = DNB$.

Từ đó suy ra: ΔDBN cân tại D.

Vì ΔDBN cân tại D nên $BD = DN = \frac{CF}{2}$ hay $CF = 2BD$.

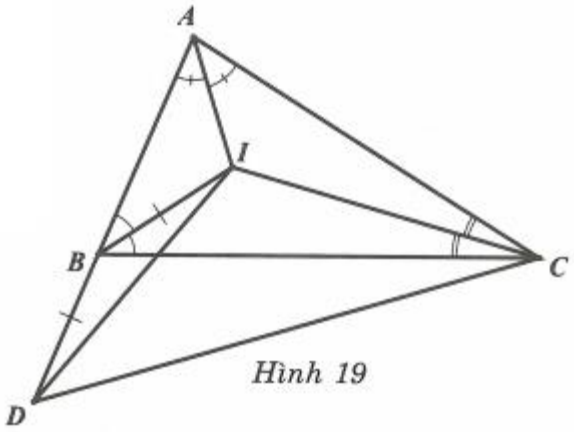
b) Chứng minh được ADE cân tại D và AM vừa là đường phân giác vừa là đường trung tuyến của ΔADE.

Ta có: $\Delta DEN = \Delta CNE\left(\text{g.c.g}\right)$ nên $DE = CN = \frac{CF}{2}$ hay $CF = 2DE$.

Do đó M là trung điểm của DE nên $CF = 4MD$.■

Bài 15.

Trên tia AB lấy điểm D sao cho $BD = BI$. Vì ΔBDI cân tại B nên $BID = BDI = \frac{1}{2}ABI = \frac{1}{4}ABC$.



Hình 19

* Nếu $AB + BI = AB$ thì $AD = AC$.

Vì $\Delta ADI = \Delta ACI\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $ADI = ACI$.

Do đó $\frac{1}{4}ABC = \frac{1}{2}ACB$ hay $ABC = 2.ACB$.

* Nếu $ABC = 2.ACB$ thì $\frac{1}{4}ABC = \frac{1}{2}ACB$, suy ra

$ADI = ACI$.

Do đó $\Delta ADI = \Delta ACI\left(\text{g.c.g}\right)$. Nên $AD = AC$.

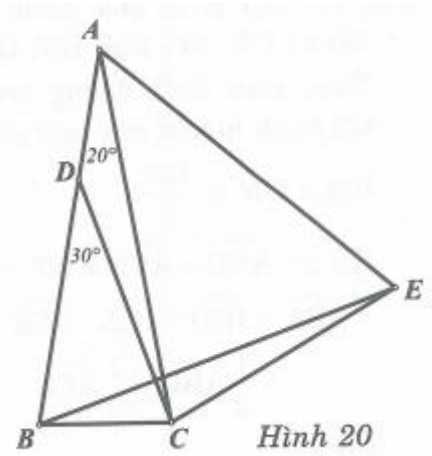
Mặt khác $AD = AB + BD = AB + BI$. Do vậy $AC = AB + BI$.■

Bài 16.

Vì ΔABC cân tại A và $BAC = 20°$ nên ta có $ABC = ACB = 80°$.

Lại có $BDC = 30°$ nên $ACD = 10°$.

Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng tam giác đều ABE. Theo đó ta có $CAE = 40°$; $AB = BE = AE$. Do ΔACE cân tại A nên:



Hình 20

$ACE = AEC = 70°$.

$BEC = AEC - AEB = 70° - 60° = 10°$.

$EBC = ABC - ABE = 80° - 60° = 20°$.

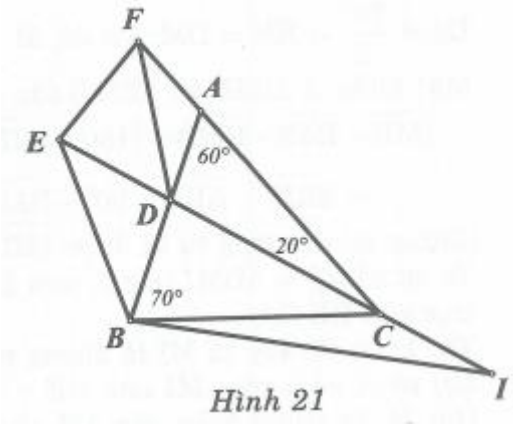
Ta có $\Delta ADC = \Delta BCE\left(\text{g.c.g}\right)$ nên $AD = BC$.■

Nhận xét: Ta có thể đưa ra bài toán ngược lại như sau: Cho tam giác *ABC* có $B=80^\circ$. Trên cạnh *AB* lấy điểm *D*. Biết rằng $BDC=30^\circ$. Chứng minh rằng $AB=AC$.

Bài 17.

Trên tia đối của tia *DC* lấy điểm *E*, trên tia đối của tia *CD* lấy điểm *I*, trên tia *CA* lấy điểm *F* sao cho:

$DE=DB,\ DI=CE,\ CE=CF$.



Hình 21

Ta tính được: $ACB=50^\circ,\ DCB=30^\circ,\ CDB=80^\circ$.

Lai có ΔCEF cân tại *C* có $C=20^\circ$ nên $CFE=CEF=80^\circ$.

Theo phần nhận xét bài 15, ta có ΔIDB với $IDB=80^\circ$, *C* là điểm trên cạnh *ID* thỏa mãn $DCB=30^\circ$ nên $IB=ID$. Hơn nữa ta có ΔBID cân tại *I* với $\hat{I}=20^\circ$.

Ta có $\Delta CEF=\Delta IDB(\text{c.g.c})$ nên $EF=BD=ED$.

Do đó ΔEFD cân tại *E*. Ta tính được

$EFD=EDF=50^\circ, ADF=30^\circ, AFD=30^\circ$

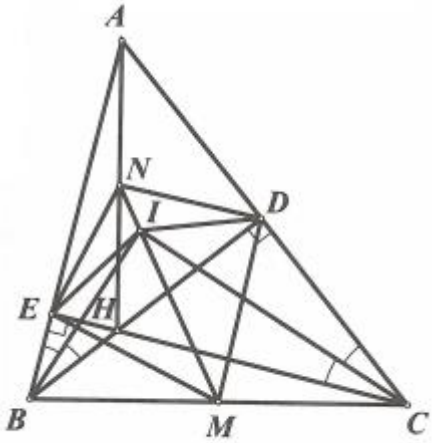
Ta có ΔAFD cân tại *A* nên $AF=AD$.

Cuối cùng, $AC+AD=AC+AF=CF=CE=CD+DE=CD+DB$.■

Bài 18.

Gọi *H* là giao điểm các đường cao *BD* và *CE*. Nối *EM*, *EN*, *DM*, *DN*.

Theo tính chất đường trung tuyến ứng với canh huyền của tam giác vuông, ta có $EM=DM=\dfrac{BC}{2}$.



Hình 22

Lại có $ABD=ACE=90^\circ-BAC$ nên

$IBA=IBD=ICA=ICE$

$=\dfrac{1}{2}ABD=\dfrac{1}{2}ACE=45^\circ-\dfrac{1}{2}BAC$.

Do vậy

$$IBC+ICB=\left(ABC-ABI\right)+\left(ACB-ACI\right)=\left(ABC+ACB\right)-\left(ABI+ACI\right)$$
$$=\left(180^\circ-BAC\right)-2\left(45^\circ-\frac{1}{2}BAC\right)=90^\circ.$$

Từ đó ΔBIC vuông tại *I*.

Ta có *IM* là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của ΔBIC nên $IM = \frac{BC}{2} = EM = DM$. Từ đó, *M* nằm trên đường trung trực của *DE* (1).

Mặt khác vì ΔIMB và ΔEMB cân tại *M* nên

$$IME = IMB - EMB = \left(180° - 2IBC\right) - \left(180° - 2EBC\right) = 2\left(EBC - IBC\right)$$

$$= 2EBI = ABD = 90° - BAC.$$

Chứng minh tương tự ta được $IMD = 90° - BAC$. Do vậy $IME = IMD$.

Ta có $\Delta EMI = \Delta DMI\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $ID = IE$. Từ đó *I* nằm trên đường trung trực của *DE* (2).

Từ (1) và (2) suy ra *MI* là đường trung trực của *DE*.

Lại có *N* nằm trên *MI* nên $NE = ND$.

Gọi N' là trung điểm của *AH*, theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta cũng có $N'D = N'E$.

Do vậy N' cũng nằm trên đường trung trực của *DE*.

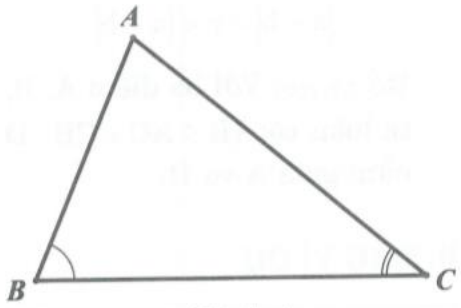
Từ đó *N* và N' trùng nhau suy ra *N* là trung điểm của *AH* hay $NA = NH$.

Bài toán 3.sử dụng quan hệ góc và cạnh đối diện, quan hệ đường vuông góc và đường xiên, quan hệ đường xiên và hình chiếu, bất đẳng thức tam giác

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện:

Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn. Cho tam giác ABC, ta có:



Hình 1

$B < C \Leftrightarrow AC < AB$

$B > C \Leftrightarrow AC > AB$

Chú ý:

** Nếu* $B = C$ *thì* $AC = AB$ *và ngược lại.*

** Trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh có độ dài lớn nhất.*

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu:

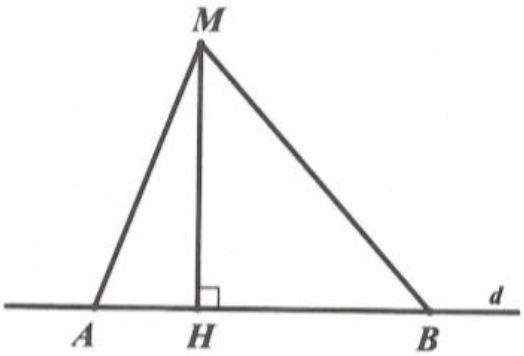
Xét tất cả các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng tới đường thẳng đó, ta có các kết luận sau:

** Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.*

** Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.*

** Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hình chiếu bằng nhau. Ngược lại, nếu hai đường chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.*

Cho một điểm M nằm ngoài đường thẳng d. Qua M kẻ đường vuông góc MH và các đường xiên MA, MB xuống đường thẳng d.



Hình 2

Khi đó ta có:

$MH < MA; MH < MB$

$MB \geq MA \Leftrightarrow HB \geq HA$

3. Bất đẳng thức tam giác

Trong một tam giác, độ dài một cạnh luôn lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại.

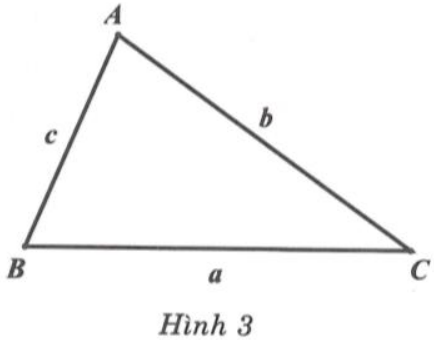
Cho tam giác ABC, đặt $BC = a; CA = b; AB = c$

Khi đó

$|b - c| < a < |b + c|$

$|a - c| < b < |a + c|$

$|a - b| < c < |a + b|$



Hình 3

Bổ sung: Với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta luôn có: $AB \leq AC + CB$ *. Dấu bằng xảy ra* $\Leftrightarrow$ *A, B, C thẳng hàng và C nằm giữa A và B.*

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC không cân, M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $AB+AC>2AM$

b) Biết $AC>AB$, chứng minh $MAB>MAC$

c) Kẻ AH vuông góc với BC (H ∈ BC). Tia phân giác góc A cắt BC ở D. Chứng minh $MH>MD$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $MA=ME$. Ta có ΔAMB = ΔEMC (c.g.c) nên suy ra

$AB=CE, MAB=E$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ΔACE ta được $AC+CE>AE$

Mà $AB=CE, AE=2AM$ nên $AB+AC>2AM$

b) Xét ΔACE có $CE=AB<AC$ suy ra $EAC<E$ hay $MAC<E$

Mà $MAB=E$ nên ta có $MAB>MAC$

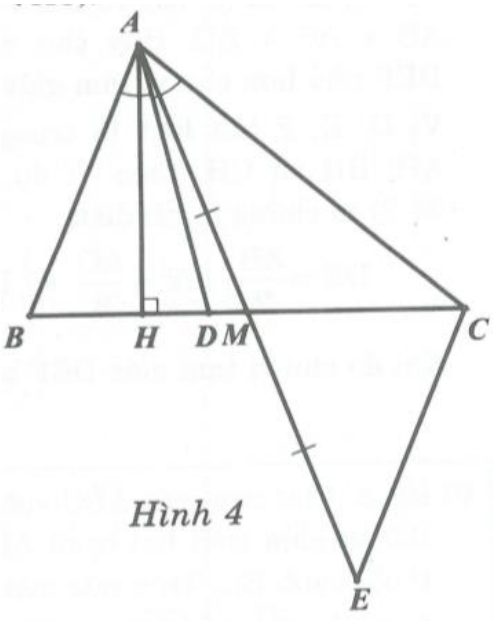
c) Không mất tính tổng quát giả sử $(AB<AC)$

(Trường hợp $AB>AC$, đổi vai trò của B và C rồi chứng minh tương tự).

Thấy rằng nếu H nằm ngoài đoạn thẳng BC. Khi ấy B nằm giữa H và C. Mà D và M nằm trên đoạn thẳng BC nên hiển nhiên

$MH>MD$

Xét trường hợp H nằm trên đoạn thẳng BC.



Hình 4

Vì $AB<AC$ nên ta có $C<B$

Lại có $BAH=90°-B; CAH=90°-C$

Từ đó suy ra $BAH<CAH$

Theo chứng minh câu a, vì $AB<AC$ nên $BAM>CAM$

Do vậy $BAH<BAD<BAM$

Mặt khác H, D, M nằm trên đoạn thẳng BC nên $BH<BD<BM$ hay $MH>MD$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc đoạn thẳng BC). D là điểm nằm giữa A và H, E là điểm nằm giữa B và H, F là điểm nằm giữa C và H. Chứng minh rằng chu vi tam giác DEF nhỏ hơn chu vi tam giác ABC. Tìm một vị trí của các điểm D, E, F để chu vi tam giác

DEF bằng $\frac{1}{2}$ chu vi tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nối CD. Vì F nằm giữa C và H nên $HF < HC$. Theo quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu, vì $HF < HC$ nên $DF < DC$.

Lại có D nằm giữa A và H nên $HD < HA$. Áp dụng quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu, ta được $CD < CA$

Từ đó $DF < DC < CA(1)$

Chứng minh tương tự, ta được $DE < DB < AB(2)$

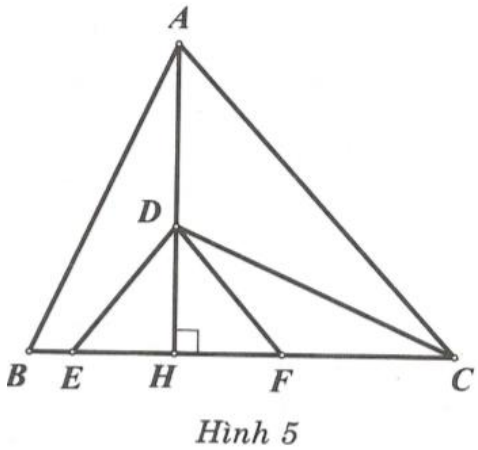
Ta có $EF = HE + HF < HB + HC = BC(3)$

Từ(1) (2) và (3) suy ra $DE + EF + FC < AB + AC + BC$. Hay chu vi tam giác DEF nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

Vì D, E, F lần lượt là trung điểm của AH, BH và CH, theo Ví dụ 2 (Chuyên đề 2) ta chứng minh được

$DE = \frac{AB}{2}; \text{DF} = \frac{AC}{2}; EF = \frac{BC}{2}$

Khi đó chu vi tam giác DEF bằng $\frac{1}{2}$ chu vi tam giác ABC.



Hình 5

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi D và E là hai điểm theo thứ tự nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $AD = AE$. Gọi K là điểm thuộc cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ điểm I sao cho $EAI = DAK$ và $AI = AK$. Chứng minh rằng $KE + KD \geq AB$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $AD = AE; AK = AI, EAI = DAK$ nên ΔADK = ΔAEI (c.g.c).

Từ đó suy ra $DK = EI$

Ta có $KE + KD = KE + KI \geq KI(1)$

Lại có $EAI = DAK$ nên $KAI = BAC = 90°$

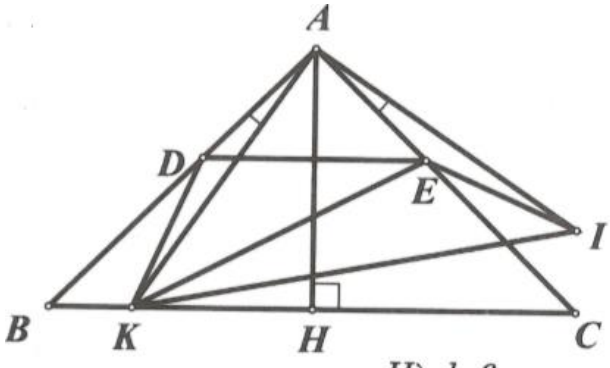
Như vậy ΔKAI vuông cân tại A.

Theo định lý Pythagore ta được

$KI^2 = AK^2 + AI^2 = 2AK^2$

Từ đó suy ra $KI = \sqrt{2}.AK \geq \sqrt{2}.AH(2)$

Lại có ΔAHB vuông cân tại H nên $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$, suy ra $AB = \sqrt{2}AH(3)$

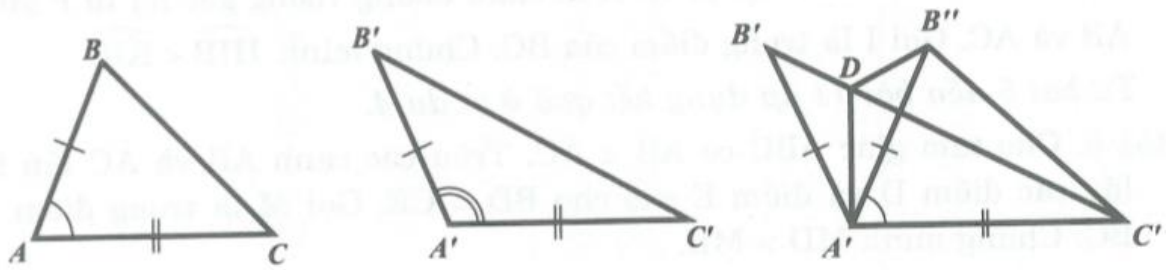


Hình 6

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $KE + KD \geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi K trùng với H.

Ví dụ 4. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB = A'B'; AC = A'C'$. Chứng minh $A < A' \Leftrightarrow BC < B'C'$.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Hình 7

Giả sử tam giác ABC và tam giác A'B'C' có $AB = A'B'; AC = A'C'; A < A'$. Dựng tam giác A'B"C' bằng tam giác ABC (hình vẽ). Tia phân giác của góc B'A'B" cắt B'C' ở D. Ta có ΔB'A'D = ΔB"A'D (c.g.c) nên $DB' = DB''$. Trong tam giác DB"C' ta có $DB'' + DC' > B''C' \Rightarrow B'C' > B''C' = BC$.

Ngược lại, nếu tam giác ABC và tam giác A'B'C' có: $AB = A'B'; AC = A'C'; BC < B'C'$.

Ta sẽ chứng minh $A < A'$. Thật vậy:

* Nếu $A = A'$ thì ΔABC = ΔA'B'C' $\Rightarrow BC = B'C'$ (loại)

* Nếu $A > A'$, áp dụng phần thuận ta suy ra $BC > B'C'$ (loại)

Vậy $A < A'$.

Chú ý: Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện chỉ đúng trong một tam giác hoặc hai tam giác bằng nhau, còn đối với hai tam giác không bằng nhau thì không áp dụng được. Tuy vậy, qua ví dụ trên ta thấy với hai tam giác có thêm điều kiện hai cặp cạnh bằng nhau, ta có một kết quả đáng chú ý trong việc chứng bất đẳng thức hình học.

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC đều. Gọi M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, tia DM cắt AC tại E. Chứng minh rằng $MD < ME$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$. Chứng minh rằng $BAD = EAC < DAE$.

Bài 3*. Cho tam giác ABC nhọn, $B > C$. Kẻ hai đường cao BD và CE. Chứng minh rằng: $AC - AB > CE - BD$

Bài 4*. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $PBA = PCA$. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ P xuống AB và AC. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $HIB < KIC$.

Từ bài 5 đến bài 11 áp dụng kết quả ở ví dụ 4.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và điểm E sao cho

$BD = CE$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $MD > ME$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Trên đoạn thẳng AM lấy điểm O bất kỳ $(O \neq M)$. Chứng minh rằng $OB < OC$.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $BE = CF$. EF cắt BC tại điểm D. Chứng minh $BD > DC$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB < MC$. Trên đoạn thẳng AM lấy điểm O. Chứng minh rằng $BOA > COA$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB < AC; A \neq 90°$. Vẽ về phía ngoài tam giác này các tam giác vuông cân ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $MD < ME$.

Bài 10. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của đoạn thẳng AC. Biết $AB > BC$, chứng minh $CD > DA$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác. Chứng minh $BD < CE$.

Bài 12. Cho tam giác ABC thỏa mãn có $AB > AC$, tia phân giác góc A cắt BC ở D. Gọi M là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AD (M khác A). Chứng minh rằng $AB - AC > MB - MC$.

Bài 13. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng:

$a) MB + MC < AB + AC$

$b) MA + MB + MC$ lớn hơn nửa chu vi và nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

Bài 14. Chứng minh rằng tổng độ dài ba đường trung tuyến lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi tam giác đó.

Bài 15. Cho tam giác ABC có $B > 90°; AB = \frac{1}{2} AC$. Chứng minh rằng $C > \frac{A}{2}$.

Bài 16. Cho tam giác ABC có $C = 90°$, đường cao CH. Chứng minh rằng $AC + BC < AB + CH$.

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông tại B, đường phân giác AD. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AD tại E. Chứng minh chu vi tam giác ECD lớn hơn chu vi tam giác ABD.

Bài 18. Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Trên các cạnh AC và AB lấy tương ứng các điểm M và N sao cho $AM = AN$. Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng $OB > OC$.

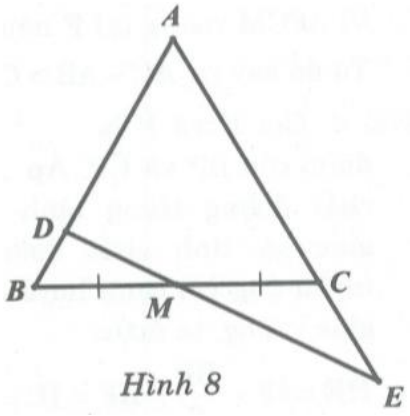
Bài 19. Cho tam giác ABC có $BAC \geq 60°$. Chứng minh rằng $AB + AC \leq 2BC$

Bài 20. Cho tam giác ABC nhọn, gọi H là trực tâm của tam giác đó. Chứng minh

$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.



Hình 8

Vì tam giác ABC đều nên $B = ACB = A = 60°$

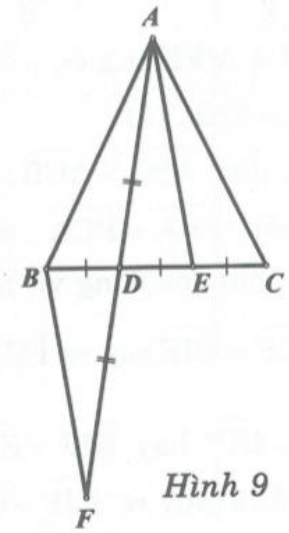
Theo tính chất góc ngoài $BDM = A + E > 60°$

Áp dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác BDM ta được $DM < BM = CM\ (1)$

Tam giác MCE có $MCE = 120°$ và là góc lớn nhất của tam giác MCE nên $MC < ME\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MD < ME$.

Bài 2.



Hình 9

Ta có ΔABD = ΔACE (c.g.c) nên $BAD = CAE\ (1)$

Trên tia đối của tia DA lấy điểm F sao cho $DA = DF$.

Vì ΔAED = ΔFBD (c.g.c) nên $DAE = F$; AE = BF.

Vì $AEC > ABC = ACB$ nên trong tam giác AEC ta có $AE < AC$

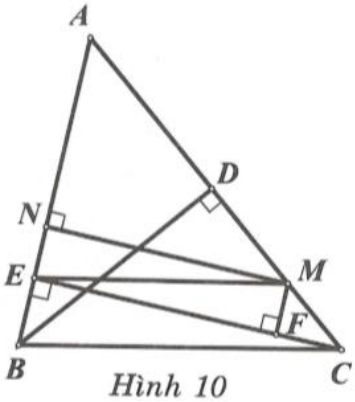
Từ đó suy ra $BF < AB$ (vì $AE = BF; AB = AC$)

Trong tam giác ABF có $BF < AB$ nên $BAD < F$

Mà $DAE = F$ nên $BAD < DAE\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BAD = EAC < DAE$.

Bài 3.



Hình 10

Trong ΔABC, vì $ABC > ACB$ nên $AC > AB$.

Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$.

Gọi N và F lần lượt là hình chiếu của M trên AB và CE.

Ta có ΔABD = ΔAMN (cạnh huyền - góc nhọn) nên $MN = BD$.

Mặt khác vì ΔMNE = ΔEFM (cạnh huyền- góc nhọn) nên MN = EF.

Do vậy $MN = BD = EF$.

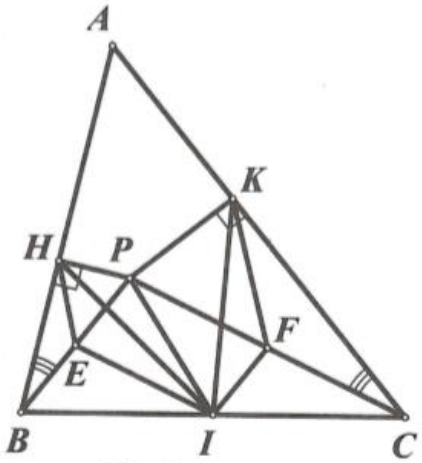
Vì ΔFCM vuông tại F nên $CM > CF$ hay $AC - AM > CE - EF$.

Từ đó suy ra $AC - AB > CE - BD$.

Bài 4.

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BP và CP. Áp dụng tính chất đường trung bình của tam giác và tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta được:

$HE = IF = \frac{BP}{2}; KF = IE = \frac{CP}{2}; HEI = IFK$



Hình 11

Từ đó ΔHEI = ΔIFK (c.g.c), suy ra $EIH = FKI\,(1)$

Vì $AB < AC$ nên $ABC > ACB$

Kết hợp với $PBA = PCA$ suy ra $PBC > PCB$, mà $PBC = CIF$ và

$PCB = BIE$ (hai góc đồng vị) nên $CIF > BIE\,(2)$

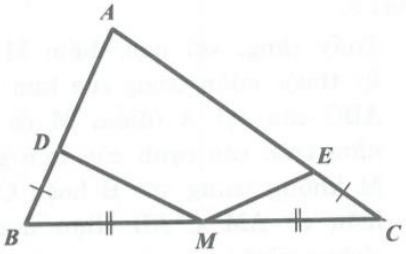
Từ $CIF > ICF = BIE$ suy ra $FC > FI$. Mà $FC = FK\left(= \frac{PC}{2}\right)$ nên

$IF < FK$

Từ đó $KIF > IKF$ hay $KIF > EIH\,(3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $KIF + CIF > BIE + EIH$ hay $HIB < KIC$

Bài 5.



Hình 12

Xét tam giác ABC. Vì $AC > AB$ nên $ABC > ACB$ hay $DBM > ECM$

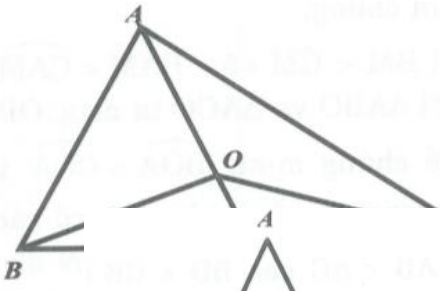
Với hai tam giác BDM và CEM có $CE = BD; CM = BM$

Vì $DBM > ECM$ nên theo kết quả ở ví dụ 4 ta có $MD > ME$.

Bài 6.

Xét hai tam giác AMB và AMC có $MB = MC$; MA chung, mà $AB < AC$ nên theo kết quả ở ví dụ 4, ta có

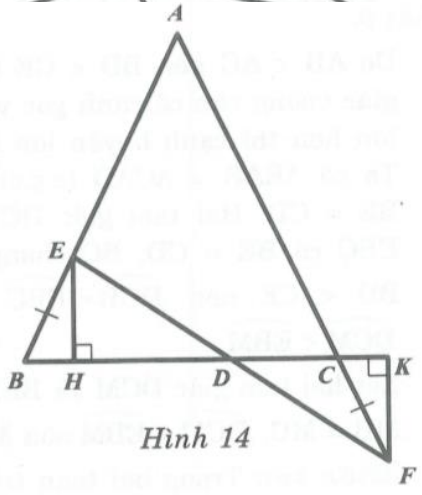
$AMB < AMC$ hay $OMB < OMC$



Bây giờ ta xét hai tam giác OMB và OMC có $MB = MC$, OM chung, $OMB < OMC$. Theo kết quả ở ví dụ 4 ta được $OB < OC$

Bài 7.

Trước hết ta sẽ chứng minh D là trung điểm của EF. Thật vậy, Kẻ EH và FK vuông góc với đường thẳng BC (H, K ∈ BC).



Hình 14

Ta có ΔBEH = ΔCFK (cạnh huyền- góc nhọn) nên $EH = FK$

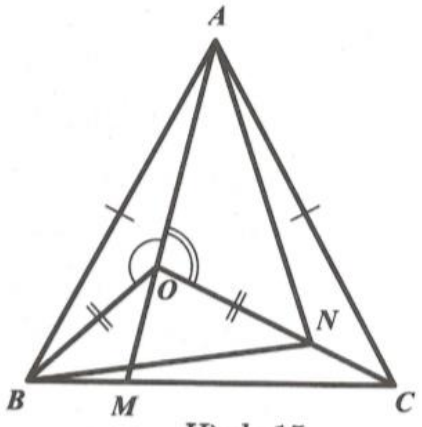
Xét hai tam giác EHD và FKD có $EHD = FKD = 90°; EH = FK; DEH = DFK$ (hai góc so le trong)

Suy ra: ΔDEH = ΔDFK (g.c.g) $\Rightarrow DE = DF$

Cuối cùng với hai tam giác BED và FCD ta thấy $DE = DF; BE = CF$ mà $BED > CFD$ (góc BED là góc ngoài của tam giác AFE) nên $BD > CD$ (theo kết quả ở ví dụ 4).

Bài 8.

Thấy rằng, với một điểm M bất kỳ thuộc miền trong của tam giác ABC cân tại A (điểm M có thể nằm trên các cạnh của tam giác, M không trùng với B hoặc C) ta luôn có $AM < AB$ (Bạn đọc tự chứng minh).



Hình 15

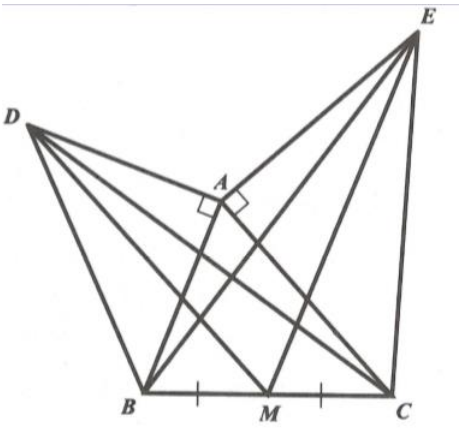
Quay lại bài toán.

Xét ΔBAM và ΔCAM có $AB = AC$, AM chung.

Vì $BM < CM$ nên $BAM < CAM$. Áp dụng kết quả ở ví dụ 4 một lần nữa với ΔABO và ΔACO ta được $OB < OC$

Để chứng minh $BOA > COA$ ta sẽ dựng hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau và có các góc xen giữa là BOA và COA như sau: Trên cạnh OC lấy điểm N sao cho $OB = ON$. Rõ ràng N nằm ở miền trong tam giác cân ABC nên $AN < AB$. Hai tam giác AOB và AON có $OB = ON$, OA chung, $AB < AN$ nên $BOA > COA$.

Bài 9. Do $AB < AC$ nên $BD < CE$ (Tam giác vuông cân có cạnh góc vuông lớn hơn thì cạnh huyền lớn hơn). Ta có ΔEAB = ΔCAD (c.g.c) nên $BE = CD$. Hai tam giác DCB và EBC có $BE = CD$, BC chung. Vì $BD < CE$ nên $DCB < EBC$ hay $DCM < EBM$.



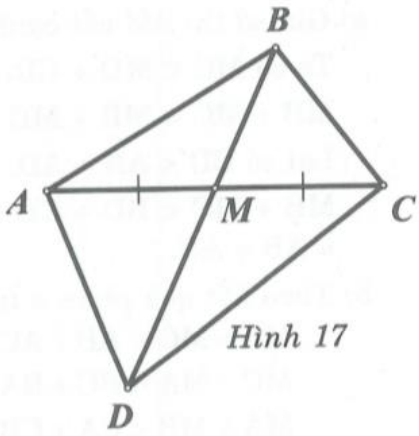
Hình 16

Xét hai tam giác DCM và BEM có $BE = CD; MB = MC, DCM < EBM$ nên $MD < ME$.

Nhận xét: Trong bài toán trên, ta vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A. Nếu vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều thì sao? Chúng ta có bài toán tương tự như sau: Cho tam giác ABC có $AB < AC, A \neq 120°$. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $MD < ME$.

Bài 10.

Gọi M là trung điểm của AC.



Hình 17

Ta có $AB > BC$, theo kết quả của ví dụ 1 áp dụng vào tam giác ABC, đường trung tuyến BM ta được $ABM < CBM\,(1)$

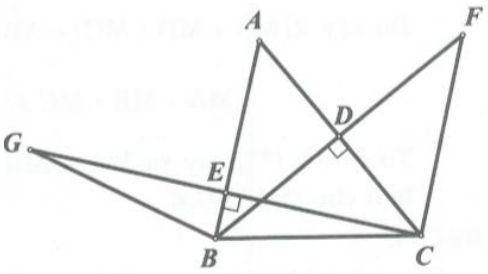
Cũng từ $AB > BC$ nên $BAM < BCM\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $ABM + BAM < CBM + BCM$ hay $AMD < CMD$. Hai tam giác AMD và CMD có $MA = MC$; cạnh chung MD; $AMD < CMD$ nên theo kết quả ở ví dụ 4, ta được $AD < CD$.

Bài 11.

Vì $AB < AC$ nên ta có $ABC > ACB\, hay\, EBC > DCB$

Trên tia đối của tia DB lấy điểm F sao cho $DF = DB$; trên tia đối của tia EC lấy điểm G sao cho $EG = EC$. Ta có ΔEGB = ΔECB (c.g.c) và ΔDFC = ΔDBC (c.g.c) nên $GB = BC = CF$.



Hình 18

Mặt khác $GBC = 2EBC > 2DCB = FCB$.

Áp dụng kết quả ở ví dụ 4 với hai tam giác GBC và FCB ta suy ra $BF < CG$. Từ đó $BD < CE$.

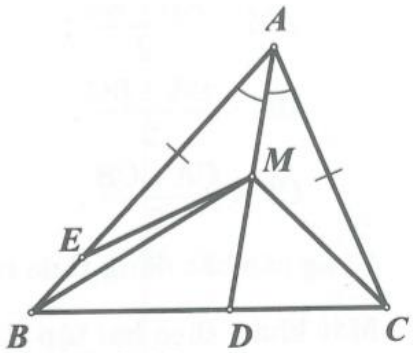
Nhận xét: Từ kết quả của bài toán ta có: Trong một tam giác đường cao ứng với cạnh lớn hơn thì nhỏ hơn.

Bài 12.

Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Ta có ΔAME = ΔAMC (c.g.c) nên $ME = MC$.

Ta có $AB - AC = AB - AE = BE > MB - ME$ (Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ΔEMB).

Từ đó $AB - AC > MB - MC$.



Hình 19

Bài 13.

a) Giả sử tia BM cắt cạnh AC tại D.

Ta có $MC < MD + CD$ từ đó $MB + MC < MB + MD + CD = BD + CD$.

Lại có $BD < AB + AD$. Từ đó

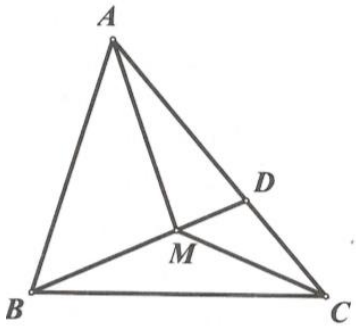
$MB + MC < BD + CD < AB + AD + CD = AB + AC$

b) Theo kết quả phần a ta có:

$MB + MC < AB + AC\,(1)$

$MC + MA < BC + BA\,(2)$

$MA + MB < CA + CB\,(3)$



Hình 20

Cộng (1), (2) và (3) ta được $2(MA + MB + MC) < 2(AB + BC + CA)$. Từ đó ta có

$MA+MB+MC<AB+BC+CA(*)$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức tam giác vào các tam giác MAB, MAC, MBC ta được

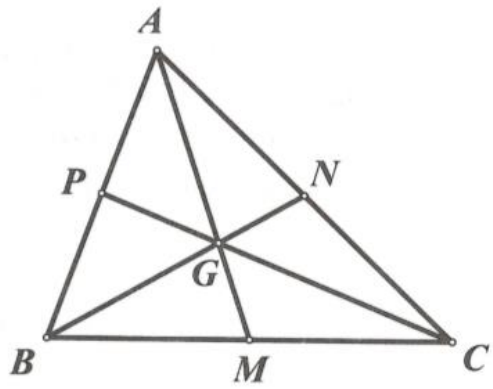
$MA+MB>AB; MB+MC>BC; MC+MA>CA$

Do vậy $2(MA+MB+MC)<AB+BC+CA$ hay $MA+MB+MC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)(**)$

Từ (*) và (**) suy ra $MA+MB+MC$ lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi ΔABC.

Bài 14.

Giả sử ΔABC có các đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại trọng tâm G. Theo ví dụ 1, ta có



Hình 21

$AM<\frac{AB+AC}{2}$

$BN<\frac{BA+BC}{2}$

$CP<\frac{CA+CB}{2}$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được

$AM+BN+CP<AB+BC+CA(1)$

Mặt khác, theo bài tập 13 ta có $GA+GB+GC>\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$

hay $\frac{2}{3}(AM+BN+CP)>\frac{1}{2}(AB+AC+BC).$

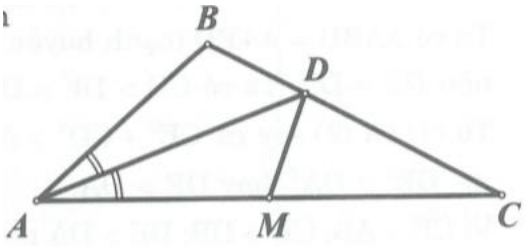
Từ đó $AM+BN+CP>\frac{3}{4}(AB+AC+BC)(2)$

Từ (1) và (2) suy ra tổng độ dài ba đường trung tuyến của một tam giác lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của tam giác đó.

Bài 15.

Gọi M là trung điểm của AC, phân giác góc A cắt cạnh BC tại D.

Ta có ΔABD = ΔAMD (c.g.c) nên $ABD=AMD$.



Hình 22

Lại có $ABD>90°$ nên $AMD>90°$.

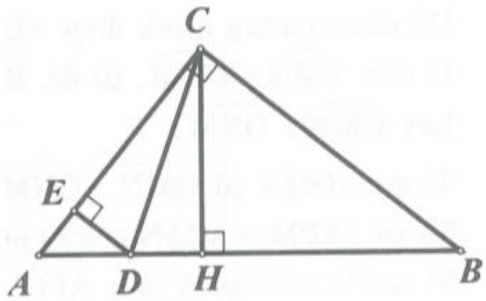
Từ đó $AMD>CMD$

Hai tam giác AMD và CMD có MD là cạnh chung; $MA=MC; AMD>CMD$ nên $AD>DC$.

Xét trong ΔADC có $AD>DC$ nên $C>DAC$ hay $C>\frac{BAC}{2}$.

Bài 16.

Vì ΔABC vuông tại C và ΔCBH vuông tại H nên $AB > CB > BH$. Tồn tại điểm D thuộc đoạn thẳng AH sao cho $BC = BD$. Gọi E là hình chiếu của D trên AC.



Hình 23

Mặt khác vì ΔCBD cân tại B nên $BCD = BDC$.

Lại có $BCD + ECD = 90°; BDC + HCD = 90°$ .Từ đó

$ECD = HCD$

Vì ΔCED = ΔCHD (cạnh huyền-góc nhọn) nên

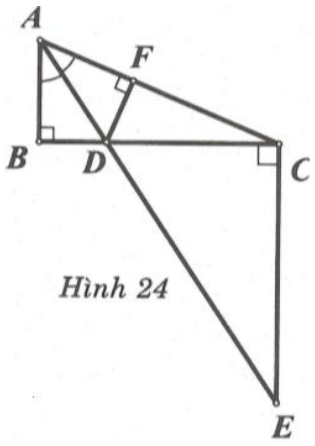
$CE = CH; DE = DH$.

Ta có $AB + CH = BD + DA + CH > AE + BC + CE = CA + CB$.

Nhận xét: Từ kết quả của bài toán ta có: Trong một tam giác vuông, tổng hai cạnh góc vuông nhỏ hơn tổng của cạnh huyền và đường cao ứng với cạnh huyền ấy.

Bài 17.

Ta có AB // CE (vì cùng vuông góc với BC) nên $ABD = E$ (hai góc so le trong).



Hình 24

Mặt khác do AD là phân giác của góc BAC nên suy ra $E = CAD$

Từ đó ΔCAE cân tại C.

Ta có $CE = CA > AB$ nên $CE^2 > AB^2 (1)$.

Gọi F là hình chiếu của D trên AC.

Ta có ΔABD = ΔAFD (cạnh huyền - góc nhọn) nên $DB = DF$. Ta có

$CD > DF = DB$ nên $CD^2 > BD^2 (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $CE^2 + CD^2 > AB^2 + DB^2 \Rightarrow DE^2 > DA^2 \; hay \; DE > DA$.

Vì $CE > AB; CD > DB; DE > DA$ nên chu vi ΔECD lớn hơn chu vi ΔABD.

Bài 18.

Vì $AB > AC$ nên có điểm P trên cạnh AB sao cho $AP = AC$. Gọi D là giao điểm của CN và PM.

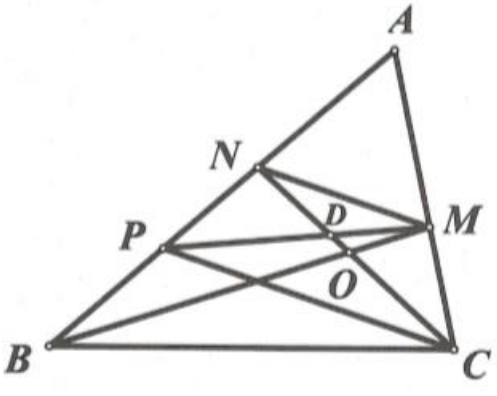
Vì $AN = AM < AC = AP$ nên P nằm giữa N và B.

Từ đó $BMN > PMN$

Dễ dàng chứng minh được ΔDMN cân tại D nên $PMN = CNM$;

từ đó $BMN > CNM \; hay \; OMN > ONM$.

Trong ΔOMN có $OMN > ONM$ nên $ON > OM (1)$.



Hình 25

Ta có ΔAPM = ΔCAN (c.g.c) nên $PM = CN$.

Vì ΔAPC cân tại A nên $APC < 90°$

Từ đó $APM < 90° \, hay \, BPM > 90°$.

Trong ΔPBM có $BPM > 90°$ là góc lớn nhất nên $BM > PM = CN (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BM - OM > CN - ON \, hay \, OB > OC$.

Bài 19.

Ta xét hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: ΔABC có $A = 60°$.

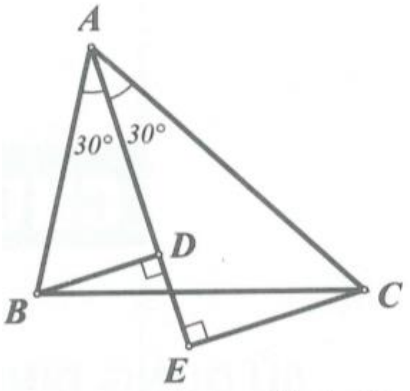
Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B và C lên phân giác góc A của ΔABC.

Các tam giác vuông ABD và AEC lần lượt có các góc nhọn

$BAD = 30°; CAE = 30°$ nên $BD = \frac{1}{2} AB; CE = \frac{1}{2} AC$.

Từ đó $AB + AC = 2(BD + CE) \le 2BC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.



Hình 26a

+ Trường hợp 2: ΔABC có $A = 60°$.

Trên cạnh BC lấy điểm B' sao cho $CAB' = 60°$.

Theo kết quả ở trường hợp 1 ta có $AB' + AC \le 2B'C (1)$

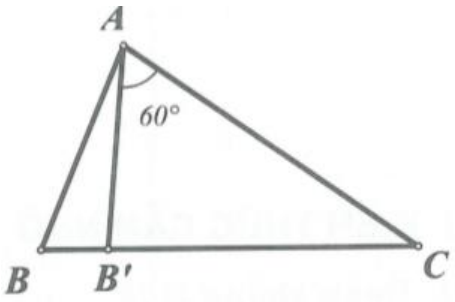
Trong ΔABB' ta có $AB - AB' < BB' < 2BB' (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC < 2BC$.

Trường hợp này không xảy ra dấu "=".

Tóm lại, ta luôn có $AB + AC \le 2BC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.



Hình 26b

Bài 20.

Qua H kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB lần lượt tại D và E.

Ta có ΔADH = ΔHEA (g.c.g) nên $AE = DH; AD = EH$.

Xét ΔAHD có $AH < AD + DH$, suy ra $AH < AD + AE (1)$

Lại có $EH // AC$ mà $AC \perp BH$ nên $EH \perp BH$.

Từ đó ΔEBH vuông tại H, suy ra $BH < BE (2)$. Chứng minh tương tự ta được $CH < CD (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AH + BH + CH < AB + AC (4)$

Chứng minh tương tự ta được:

$AH + BH + CH < AB + BC (5)$

$AH + BH + CH < AC + BC (6)$

Từ (4), (5) và (6) suy ra $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$.

Bài toán 4. Sử dụng định lí thales (ta-lét) và tính chất đường phân giác của tam giác để chứng minh đẳng thức

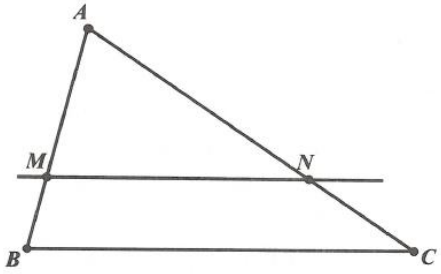
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB *và* CD *gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng* $A'B'$ *và* $C'D'$ *nếu có tỉ lệ thức:*

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}$$

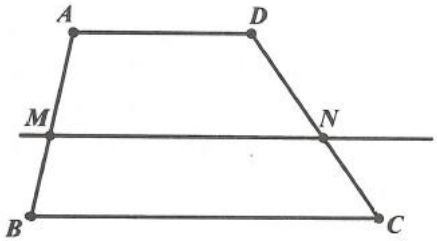
2. Định lý Thales trong tam giác



Nếu $MN//BC$ *thì:*

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC};\ \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}.$$

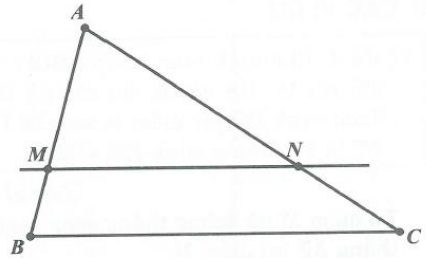
**** Mở rộng định lý Thales:***



Cho $ABCD$ *là hình thang (*$AB//CD$*) nếu* $MN//AB$ *thì:*

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC};\ \frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}.$$

3. Định lý Thales đảo



Nếu M, N *là hai điểm lần lượt trên hai cạnh* AB, AC *sao cho*

$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ *thì* $MN//BC$.

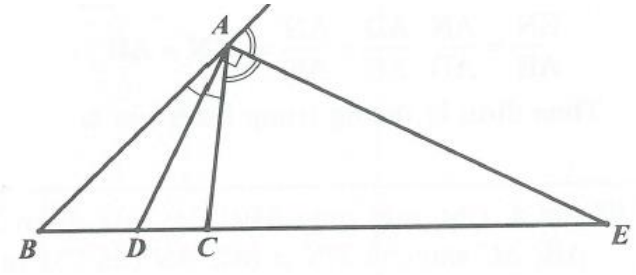
4. Hệ quả định lý Thales

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với một cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của một tam giác đã cho.

(Chú ý: Hệ quả này vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng đã cho cắt phần kéo dài của hai cạnh kia).

5. Tính chất đường phân giác của tam giác

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.



Chú ý: *Tính chất vẫn đúng với tia phân giác góc ngoài của tam giác. Cho* ΔABC, AD *và* AE *lần lượt là các đường phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh* A *của tam giác.*

Khi đó: $\frac{DB}{DC}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}$.

Bổ sung: Một số tính chất của tỉ lệ thức

Với a,b,c,d *khác* 0. *Nếu* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *thì ta có các hệ thức sau:*

$ad=bc$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$, $\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$

(Giả sử các tỉ số đều có nghĩa)

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ điểm C kẻ đường thẳng cắt tia đối của tia DA và tia đối của tia BA lần lượt tại điểm E và điểm F. Trên cạnh DC lấy điểm K sao cho $DK=BF$. Gọi giao điểm của AK và EF là M. Chứng minh $EM=MF$.

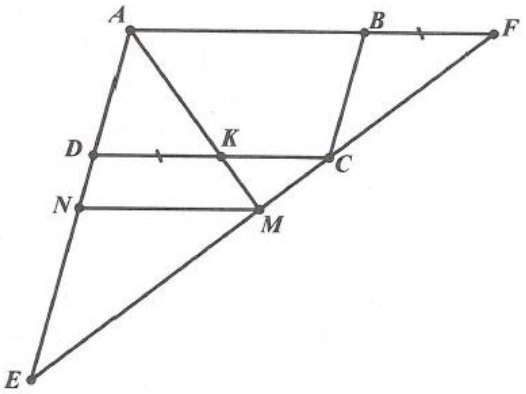
HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ điểm M kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AF và cắt đường thẳng AE tại điểm N.

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{EN}{AE}=\frac{NM}{AF}=\frac{NM}{DK}.\frac{DK}{AF}$ (1)

mà $\frac{NM}{DK}=\frac{AN}{AD}$ (2) do $DK//MN$

và $\frac{DK}{AF}=\frac{BF}{AF}=\frac{BC}{AE}=\frac{AD}{AE}$ (3)



Từ (1), (2) và (3) ta có:

$\frac{EN}{AE}=\frac{AN}{AD}.\frac{AD}{AE}=\frac{AN}{AE}\Rightarrow EN=AN$.

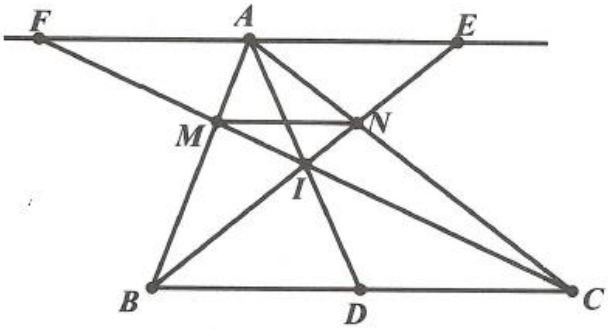
Theo định lý đường trung bình của tam giác thì

$EM=MF$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, lấy các điểm M,N lần lượt trên hai cạnh AB,AC sao cho $MN//BC$, BN cắt CM tại điểm I, AI cắt BC tại điểm D. Chứng minh $BD=DC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ điểm A, kẻ đường thẳng d song song với BC cắt tia BI và tia CI lần lượt tại điểm E và điểm F (hình vẽ).



Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{AF}{BC}=\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{AE}{BC}\Rightarrow AF=AE$ (1)

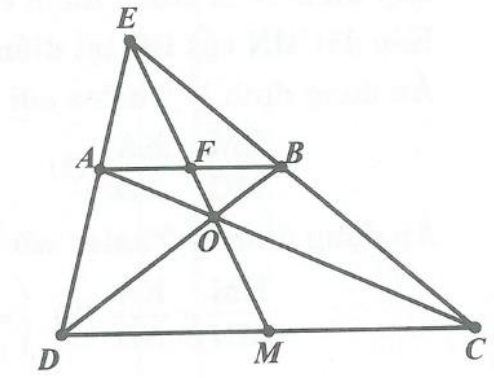
Vì $EF//BC$, theo định lý Thales ta có: $\frac{AF}{DC}=\frac{AI}{ID}=\frac{AE}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD=DC$.

Ví dụ 3. (Bổ đề hình thang) Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Hai cạnh bên AD và BC cắt nhau ở điểm E. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại điểm O. Gọi F là giao điểm của AB và EO. Chứng minh $AF=BF$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kéo dài tia EO cắt cạnh DC tại điểm M.



Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có: $\frac{AF}{DM}=\frac{BF}{CM}\left(=\frac{EF}{EM}\right)$ (1)

$\frac{AF}{CM}=\frac{BF}{DM}\left(=\frac{FO}{OM}\right)$ (2)

Nhân vế với vế của đẳng thức (1) và (2) ta được:

$\frac{AF^2}{DM.CM}=\frac{BF^2}{DM.CM}\Rightarrow AF=BF$.

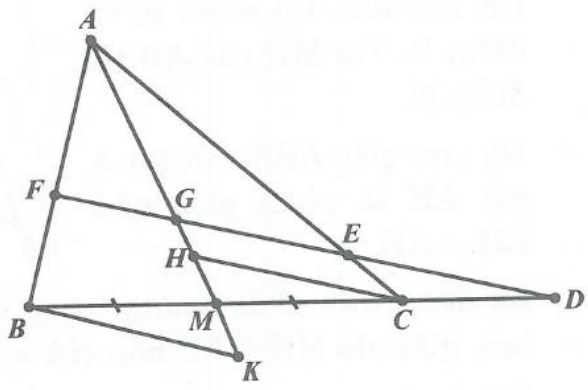
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm là G, từ G kẻ đường thẳng cắt tia đối tia CB tại điểm D và cắt hai cạnh AC, AB lần lượt tại điểm E và điểm F. Chứng minh $\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}=\frac{1}{GF}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ trung tuyến AM đi qua G. Từ điểm B, điểm C kẻ các đường thẳng song song với DF cắt tia AM lần lượt tại điểm K và điểm H.

Do $\Delta BMK=\Delta CMH$ (g.c.g) nên $BK=HC$ và $HM=MK$.

Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác và định lý Thales ta có:



$\frac{GA}{GD}=2.\frac{GM}{GD}=2.\frac{HM}{HC}=\frac{HK}{BK}$ (1)

Do $GE//HC$ nên $\frac{GA}{GE}=\frac{AH}{HC}=\frac{AH}{BK}$ (2)

Do $GF//BK$ nên $\frac{GA}{GF}=\frac{AK}{BK}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$\frac{GA}{GF}=\frac{GA}{GD}+\frac{GA}{GE}\Rightarrow\frac{1}{GF}=\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}$.

Ví dụ 5. Cho hình thang vuông $ABCD$ $(AB//CD)$ và $A=90°$. Gọi M là trung điểm của AB, tia

CM cắt AD tại K sao cho $DBK = 90°$. Chứng minh $CB = CD$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Lấy điểm N là trung điểm của đoạn BD.

Kéo dài MN cắt BK tại điểm H.

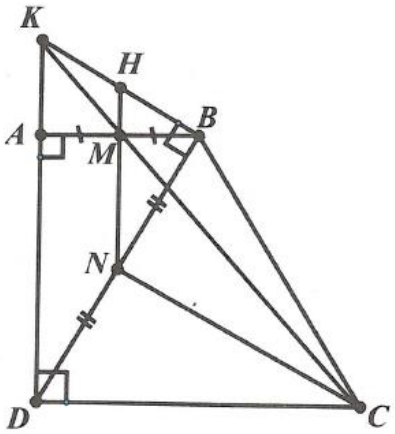
Áp dụng định lý Thales với $AB//CD$

$\frac{KM}{MC} = \frac{KA}{AD}$ (1)

Áp dụng định lý Thales với $HN//KD$

$\frac{HM}{MN} = \frac{KA}{AD}$ (2) $\left(= \frac{BM}{BA}\right)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KM}{MC} = \frac{HM}{MN} \Rightarrow KH//CN$ (định lý Thales đảo).



Do đó $CN \perp BD \Rightarrow \Delta CBD$ cân tại $C \Rightarrow CB = CD$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng BE cắt AD và AM lần lượt tại điểm H và điểm F, đường thẳng HM cắt DF tại điểm I. Chứng minh $DI = IF$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD, BE lần lượt tại điểm K và điểm P. Tia MH cắt AB tại điểm N.

Do tam giác ABE cân tại A mà AH là phân giác nên $BH = HE$

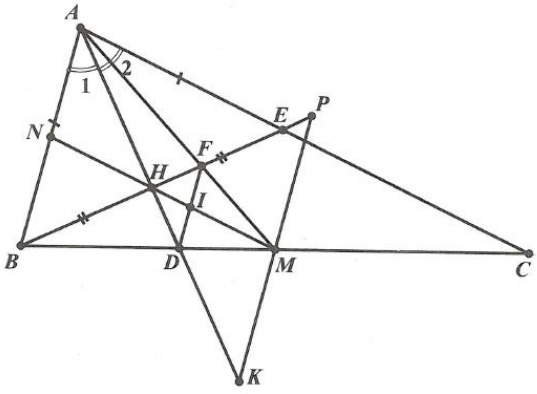
Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác: do $MH//EC$ nên $NA = NB$.

Xét hình thang $ABKP$ ($AB//KP$).

Ta thấy $NA = NB$ nên $MK = MP$ (theo bổ đề hình thang).

Do $PK//AB$, sử dụng hệ quả của định lý Thales ta có:

$\frac{MD}{DB} = \frac{MK}{AB}$ và $\frac{MP}{AB} = \frac{MF}{FA}$ mà $MK = MP \Rightarrow \frac{MD}{DB} = \frac{MF}{FA}$.



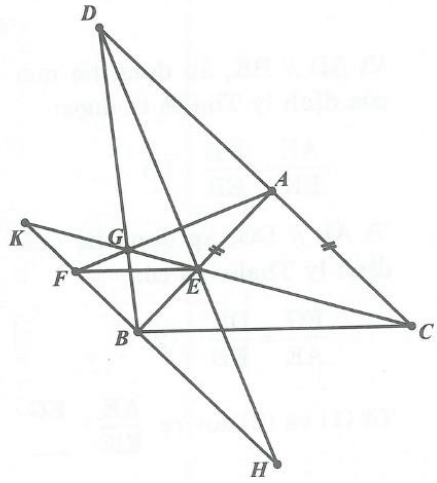
Áp dụng định lý Thales đảo suy ra $AB//DF$.

Xét hình thang $ABDF$ ($AB//DF$) ta có N là trung điểm của AB nên I là trung điểm của DF. Vậy $DI = IF$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm E. Tia CE cắt đường thẳng vuông góc với AB tại B ở K. Từ E kẻ đường thẳng song song với BC cắt BK tại điểm F. Đường thẳng AF cắt đường thẳng CK tại điểm G, đường thẳng BG cắt AC tại điểm D.

Gọi DE cắt BK tại điểm H. Chứng minh $AC = BH$.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Vì $BK//AC$, theo hệ quả định lý Thales ta có: $\frac{AD}{AC} = \frac{FK}{FB}$.

Vì $DC//KH$, theo hệ quả định lý Thales ta có: $\frac{AD}{AC} = \frac{KB}{BH}$.

Từ đó suy ra $\frac{FK}{FB} = \frac{KB}{BH}$. (1)

Do $EF//BC$ nên ta có $\frac{KF}{FB} = \frac{KE}{EC} = \frac{KB}{AC}$ (2)

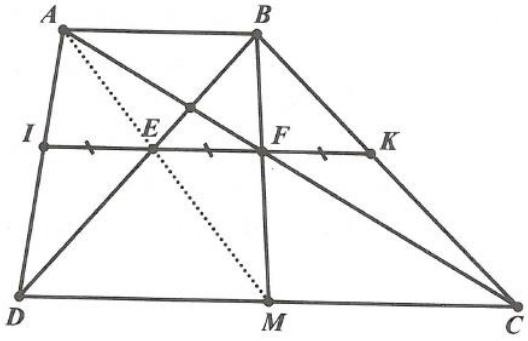
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KB}{BH} = \frac{KB}{AC} \Rightarrow AC = BH$.

Ví dụ 8. Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AB cắt các cạnh AD, BD, AC, BC lần lượt tại các điểm I, E, F, K sao cho $IE = EF = FK$. Giả sử đường thẳng BF cắt đáy DC tại điểm M. Chứng minh rằng $DM = MC$ và ba điểm A, E, M thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng hệ quả định lý Thales khi $EK//DC$:

$\frac{EF}{DM} = \frac{FK}{MC}\left(= \frac{BF}{BM}\right)$



Do $EF = FK$ nên $DM = MC$ hay M là trung điểm của DC.

Giả sử AE cắt DC tại M' tương tự ta chứng minh được M' là trung điểm của DC.

Suy ra $M \equiv M'$.

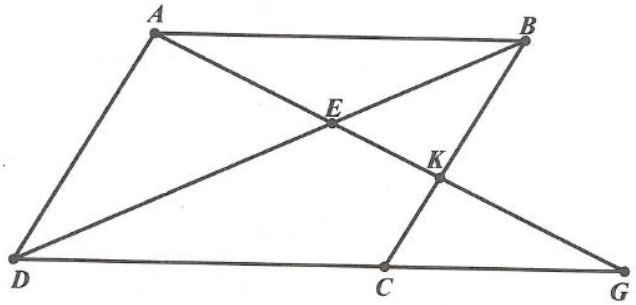
Vậy, ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Ví dụ 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K là điểm thuộc cạnh BC. Đường thẳng AK cắt đường chéo BD, cắt đường thẳng DC tại G. Chứng minh $AE^2 = EK.EG$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vì $AD//BK$, áp dụng hệ quả của định lý Thales ta được:

$\frac{AE}{EK} = \frac{DE}{EB}$ (1)



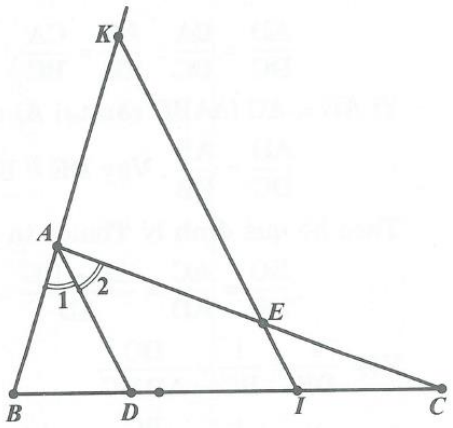
Vì $AB//DG$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{EG}{AE} = \frac{DE}{EB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AE}{EK}=\frac{EG}{AE}\Rightarrow AE^2=EK.EG$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có $AB<AC$, đường phân giác AD. Lấy điểm I thuộc cạnh BC sao cho $BI=2IC$. Từ điểm I kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB, AC lần lượt tại điểm K và điểm E. Chứng minh $BK=2CE$.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác ta có: $\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BD}$ (1)

Vì $EI//AD$, áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{AC}{CD}=\frac{CE}{CI}$ (2)

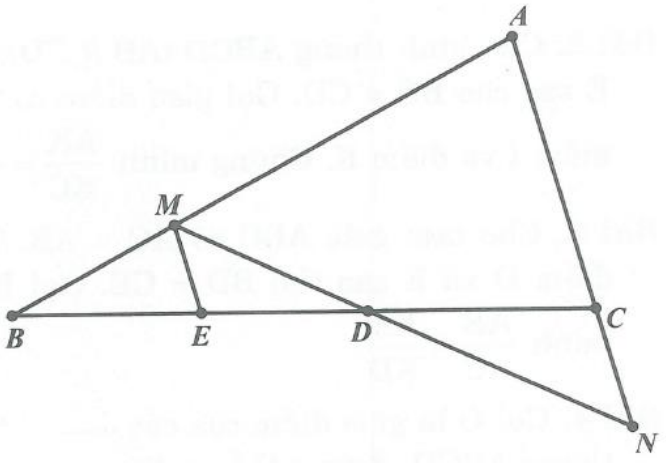
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{BD}=\frac{CE}{CI}$ (3)

Vì $AD//KI$, theo định lý Thales ta có: $\frac{AB}{BD}=\frac{BK}{BI}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{CE}{CI}=\frac{BK}{BI}$ mà $BI=2IC$ nên $BK=2CE$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM=CN$. Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm D. Chứng minh $\frac{AB}{AC}=\frac{DN}{DM}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Vì $ME//AC$, áp dụng hệ quả định lý Thales, ta có:

$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{ME}$ (1)

Do $ME//CN$, áp dụng hệ quả của định lý Thales ta có:

$\frac{DN}{DM}=\frac{CN}{ME}$ (2)

Mà từ giả thiết ta có $BM=CN$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{AB}{AC}=\frac{DN}{DM}$.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ các đường phân giác BD và CE. Chứng minh rằng $\frac{1}{DE}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}$.

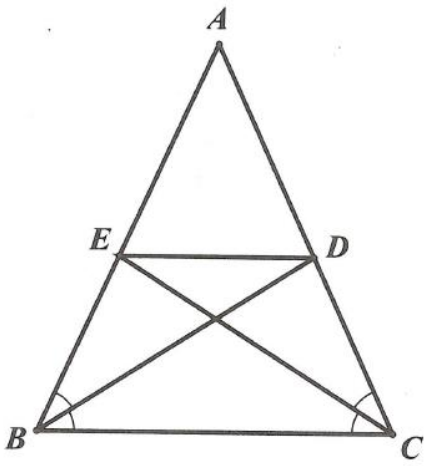
HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

$\frac{AD}{DC}=\frac{BA}{BC};\frac{AE}{EB}=\frac{CA}{BC}$.

Vì $AB=AC$ (ΔABC cân tại A) nên

$\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EB}$. Vậy $DE//BC$



Theo hệ quả định lý Thalès ta có:

$\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AD}=\frac{AD+DC}{AD}=1+\frac{DC}{AD}$

Vậy $\frac{1}{DE}=\frac{1}{BC}+\frac{DC}{AD.BC}$

$=\frac{1}{BC}+\frac{BC}{AB.BC}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AB}$.

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh là a. Một đường thẳng qua điểm C cắt AB, AD lần lượt tại điểm E và điểm F. Chứng minh $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{1}{a}$

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE=CD$. Gọi giao điểm của AC với BD và DE theo thứ tự là điểm I và điểm K. Chứng minh $\frac{AK}{KC}=\frac{AC}{CI}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AC>AB$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $BD=CE$. Gọi K là giao điểm DE và BC. Chứng minh $\frac{AB}{AC}=\frac{KE}{KD}$.

Bài 4. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên của hình thang $ABCD$, đường thẳng đi qua O song song với đáy AB cắt AC, BD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh $OM=ON$.

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Một đường thẳng d song song với hai đáy cắt hai cạnh bên AD và BC theo thứ tự ở các điểm M, N và cắt hai đường chéo BD và AC ở điểm H và điểm K. Chứng minh $MH=KN$.

Bài 6. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kì trên cạnh BC. Đường thẳng đi qua I và song song với AC cắt AB tại điểm K. Đường thẳng đi qua I và song song với AB cắt AM, AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng $DE=BK$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ ra ngoài tam giác đó tam giác ABD vuông cân tại B, tam giác ACF vuông cân tại C. Gọi H là giao điểm của AB và CD. Gọi K là giao điểm của AC và BE. Chứng minh $AH=AK$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Kẻ một đường thẳng cắt các cạnh BC, AC theo thứ tự ở điểm D, điểm E và cắt đường thẳng BA ở điểm F. Vẽ hình bình hành $BDEH$. Đường thẳng đi qua điểm F song song với BC cắt tia AH tại điểm I. Chứng minh $FI = DC$.

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M là điểm thuộc cạnh BC, N là điểm thuộc tia đối của tia BC sao cho $BN = CM$. Các đường thẳng DN và DM cắt đường thẳng AB lần lượt tại điểm E và điểm F. Chứng minh $AE^2 = EB.\mathrm{E}\,F$.

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. K là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng IK cắt AB và CD theo thứ tự ở N và M.

a) Chứng minh $NA = NB$, $MC = MD$.

b) Đường thẳng qua I song song với hai đáy của hình thang $ABCD$ cắt AD và BC theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng $\dfrac{2}{EF} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD}$

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ các đường phân giác BD và CE. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{DE} = \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AC}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Gọi M và N theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên AD. Chứng minh rằng $2AD \le BM + CN$.

Bài 13. Cho tam giác ABC $(AB \ne AC)$. Gọi D là trung điểm của BC. AE và AF lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Chứng minh rằng $EF.DH = AB.AC$

Bài 15. Cho hai điểm A và B nằm cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên đường thẳng xy. Gọi giao điểm của AK và BH là O, gọi I là hình chiếu của điểm O trên đường thẳng xy. Chứng minh rằng $OI(AH + BK) = AH.BK$.

Bài 16. Cho ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba đường thẳng chứa ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho chúng không có điểm nào hoặc có đúng hai điểm nằm trên hai cạnh của tam giác. Khi đó A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{A'B}{A'C}.\dfrac{B'C}{B'A}.\dfrac{C'A}{C'B} = 1$ (*Định lý Melelaus*)

Bài 17. Cho ba điểm A', B', C' thuộc ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Khi đó AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$\dfrac{A'B}{A'C}.\dfrac{B'C}{B'A}.\dfrac{C'A}{C'B} = 1$ (*Định lý Ceva*)

Bài 18. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $\frac{CD}{DA}=\frac{AE}{EB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Các đường thẳng BD và CE cắt nhau tại O. Trên đoạn thẳng BD và CE lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho MN song song với AC. Chứng minh $BN>2OM$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Do $DC//AE$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{DC}{AE}=\frac{CF}{EF}$ (1)

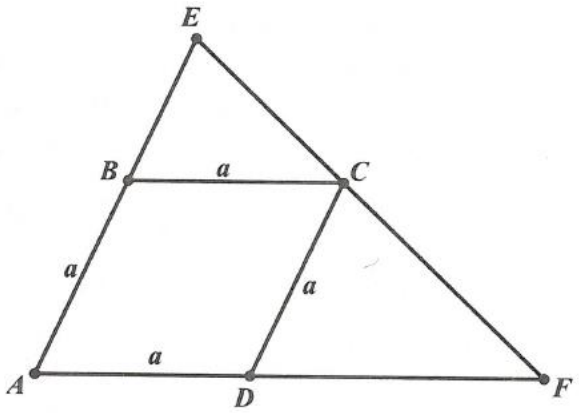
Do $BC//AF$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{BC}{AF}=\frac{CE}{EF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{DC}{AE}+\frac{BC}{AF}=\frac{a}{AE}+\frac{a}{AF}=\frac{CF}{EF}+\frac{CE}{EF}=1\Rightarrow\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{1}{a}$

.



Bài 2.

Áp dụng hệ quả định lý Thales:

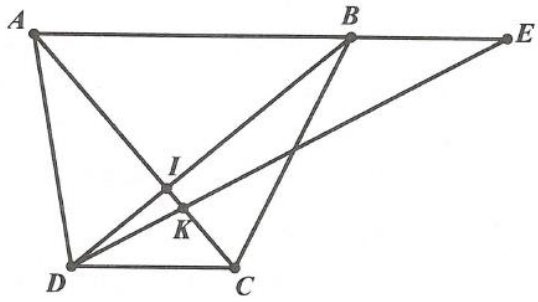
$\frac{AK}{KC}=\frac{AE}{DC}$ (1)

Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{AI}{CI}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{AC}{CI}=\frac{AI+CI}{CI}=\frac{AB+DC}{DC}$

$=\frac{AB+BE}{DC}=\frac{AE}{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KC}=\frac{AC}{CI}$.



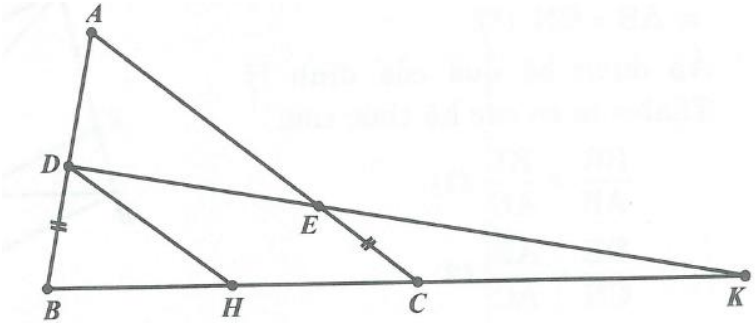
Bài 3.

Từ điểm D kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng BC tại điểm H. Ta có $DH//AC$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DH}=\frac{EC}{DH}$ (1)

Do $EC//DH$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{KE}{KD}=\frac{EC}{DH}$ (2)

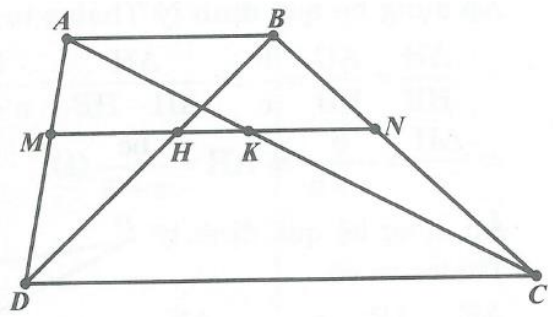


Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{AC}=\frac{KE}{KD}$.

Bài 4.

Áp dụng hệ quả định lý Thales với $(OM//DC)$ ta có: $\frac{OM}{DC}=\frac{OA}{AD}$ (1)

Áp dụng hệ quả định lý Thales với $(ON//DC)$ ta có:



$\frac{ON}{DC}=\frac{OB}{BC}$ (2)

Áp dụng định lý Thales cho ODC $(AB//DC)$ ta có:

$\frac{OA}{AD}=\frac{OB}{BC}$ (3)

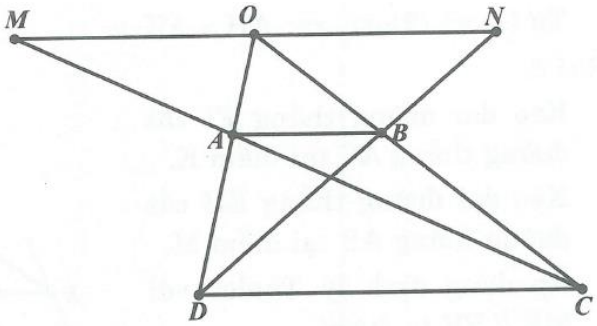
Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{OM}{DC}=\frac{ON}{DC}\Rightarrow OM=ON$.

Bài 5.

Sử dụng hệ quả của định lý Thales ta có:

$\frac{MH}{AB}=\frac{MD}{AD}$ (1)

$\frac{KN}{AB}=\frac{NC}{BC}$ (2)



Áp dụng định lý Thales mở rộng cho hình thang ABCD

ta được: $\frac{MD}{AD}=\frac{NC}{CB}$ (3)

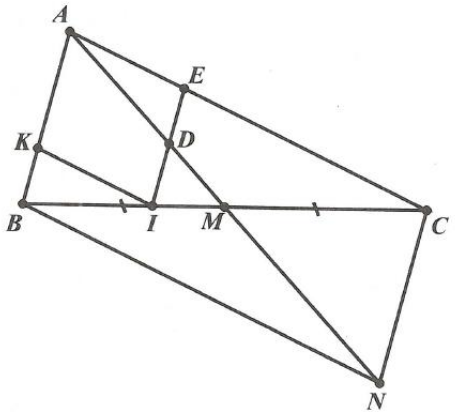
Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{MH}{AB}=\frac{KN}{AB}\Rightarrow MH=KN$.

Bài 6.

Lấy điểm N trên tia đối của tia MA sao cho $MA=MN$. Suy ra $ABNC$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AB=CN$ (*).

Áp dụng hệ quả của định lý Thales ta có các hệ thức sau:



$\frac{BK}{AB}=\frac{KI}{AC}$ (1)

$\frac{DE}{CN}=\frac{AE}{AC}$ (2)

mà $KI=AE$, kết hợp với (1) và (2) suy ra $\frac{BK}{AB}=\frac{DE}{CN}$

Từ (*) ta có $AB=CN$ nên $BK=DE$.

Bài 7.

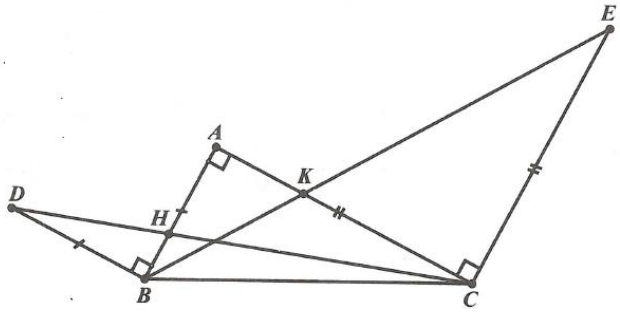
Đặt $AB=BD=c$

$AC = CE = b$

Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có

$\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{AH + HB} = \frac{b}{c + b}$

$\Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{c + b} \Rightarrow AH = \frac{bc}{c + b}$ (1)



Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có

$\frac{AK}{CK} = \frac{AB}{CE} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{AK + CK} = \frac{c}{c + b}$

$\Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{c + b} \Rightarrow AK = \frac{bc}{c + b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = AK$.

Bài 8.

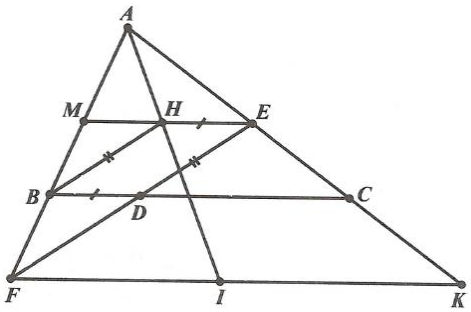
Kéo dài đường thẳng FI cắt đường thẳng AC tại điểm K. Kéo dài đường thẳng EH cắt đường thẳng AB tại điểm M. Áp dụng định lý Thales với $ME // FK$ ta được:

$\frac{FI}{FK} = \frac{MH}{ME}$ (1)

mà $BH // EF$ nên $\frac{MH}{ME} = \frac{BH}{EF} = \frac{ED}{EF}$ (2)

Do $DC // FK$, áp dụng định lý Thales ta được: $\frac{ED}{EF} = \frac{DC}{FK}$ (3)

Kết hợp (1), (2) và (3) ta được: $\frac{FI}{FK} = \frac{DC}{FK} \Rightarrow FI = DC$.



Bài 9.

Nối điểm A với điểm N.

Ta có $AD // MN$ và $AD = MN$ nên tứ giác $ADMN$ là hình bình hành.

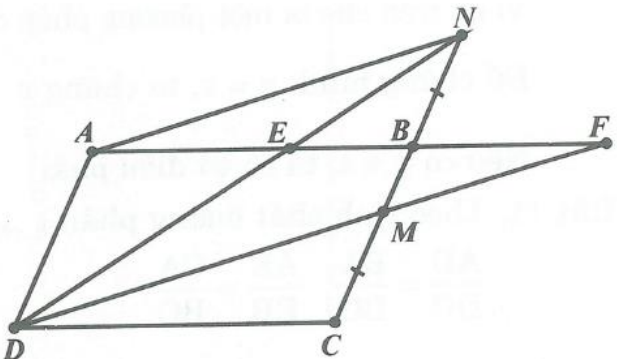
Do $AN // DM$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{AE}{EF} = \frac{EN}{ED}$ (1)

Do $AD // BN$, áp dụng hệ quả của định lý Thales ta có:

$\frac{EN}{ED} = \frac{EB}{AE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AE}{EF} = \frac{EB}{AE} \Rightarrow AE^2 = EB.EF$.



Bài 10.

a) Vì $AN // DM, NB // DM, AN // MC, NB // MC$ nên theo hệ quả định lý Thalès ta có:

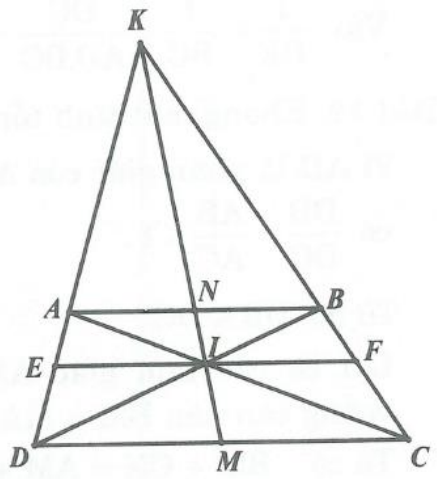
$\frac{AN}{DM}=\frac{KN}{KM}=\frac{BN}{CM}$ (1)

$\frac{AN}{CM}=\frac{IN}{IM}=\frac{BN}{DM}$ (2)

Do đó $\frac{AN}{DM}.\frac{AN}{CM}=\frac{BN}{DM}.\frac{BN}{CM}$

hay $AN^2=BN^2$

Vậy $AN=BN$. Kết hợp với (1) ta có $DM=CM$.



b) Vì $EI//DC, IF//DC, AB//CD$ nên theo hệ quả định lý Thalès

ta có:

$\frac{EI}{DC}=\frac{AI}{AC}=\frac{BI}{BD}=\frac{IF}{DC}$ (*). Vậy $IE=EF$

Lại có $EI//AB$ nên $\frac{EI}{AB}=\frac{DI}{DB}$. Kết hợp với (*) ta được:

$\frac{EI}{AB}+\frac{EI}{CD}=\frac{BI}{BD}+\frac{CI}{BD}=\frac{BD}{BD}=1$. Hay $\frac{1}{EI}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$

Để ý rằng vì $IE=IF, IE+IF=EF$ nên $\frac{1}{EI}=\frac{2}{EF}$

Từ đó $\frac{2}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$

Ví dụ trên cho ta một phương pháp chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau.

Để chứng minh $x=z$, ta chứng minh tỉ lệ thức $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$.

Nếu có $y=t$, ta sẽ có điều phải chứng minh.

Bài 11.

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

$\frac{AD}{DC}=\frac{BA}{BC};\frac{AE}{EB}=\frac{CA}{BC}$.

Vì $AB=AC$ (ΔABC cân tại A) nên $\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EB}$. Vậy $DE//BC$.

Theo hệ quả định lý Thalès ta có:

$\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AD}=\frac{AD+DC}{AD}=1+\frac{DC}{AD}$.

Vậy $\frac{1}{DE}=\frac{1}{BC}+\frac{DC}{AD.BC}=\frac{1}{BC}+\frac{BC}{AB.BC}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AB}$.

Bài 12.

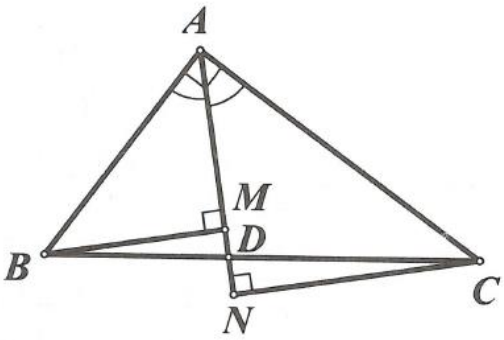
Không mất tính tổng quát, giả sử $AB\le AC$.

Vì AD là tia phân giác của ΔABC nên ta có $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\le 1$

Từ đó $DB\le DC$.

Lại có các tam giác AMB và ANC vuông cân nên

$BM=MA;CN=NA$.



Ta có $BM+CN=AM+AN$

$=2AD+\left(DN-DM\right)$ (1)

Vì $BM//CN$ (cùng vuông góc với AD) nên theo định lý Thales

ta có $\frac{DM}{DN}=\frac{DB}{DC}\le 1$, từ đó suy ra $DM\le DN$ hay $DN-DM\ge 0$

(2).

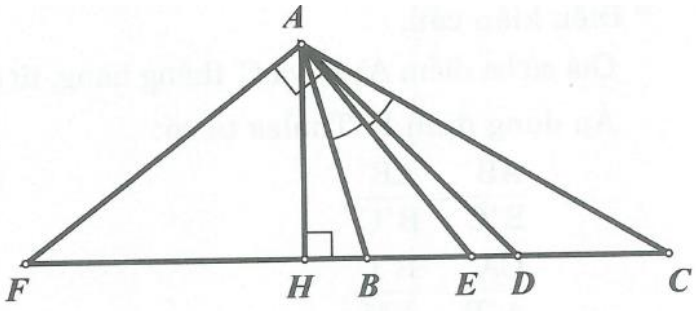
Từ (1) và (2) suy ra $BM+CN\ge 2AD$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A.

Bài 13.

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB<AC$. Vì AE và AF lần lượt là phân giác trong và ngoài của tam giác ABC nên ta có:

$\frac{EB}{EC}=\frac{FB}{FC}=\frac{AB}{AC}$.



Suy ra $\frac{EB}{EB+EC}=\frac{AB}{AB+AC}$

hay $\frac{EB}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}$.

Từ đó $EB=\frac{AB.BC}{AB+AC}$.

Mặt khác $\frac{FB}{FC-FB}=\frac{AB}{AC-AB}$ suy ra

$\frac{FB}{BC}=\frac{AB}{AC-AB}\Rightarrow FB=\frac{AB.BC}{AC-AB}$

Ta có $EF=EB+FB=\frac{AB.BC}{AB+AC}+\frac{AB.BC}{AC-AB}=\frac{2AB.BC.AC}{AC^2-AB^2}$ (1)

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABH và ACH ta được

$AC^2=AH^2+CH^2=AH^2+\left(\frac{BC}{2}+DH\right)^2$

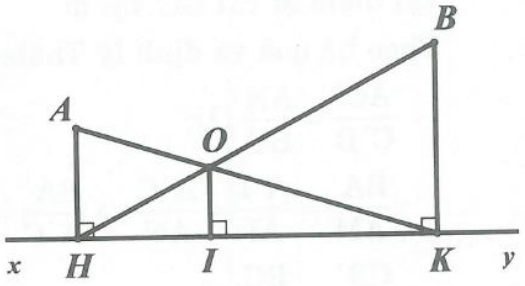
$AB^2=AH^2+BH^2=AH^2+\left(\frac{BC}{2}-DH\right)^2$

Từ đó $AC^2 - AB^2 = 2BC.DH$ hay $DH = \dfrac{AC^2 - AB^2}{2BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EF.DH = \dfrac{2AB.BC.AC}{AC^2 - AB^2}.\dfrac{AC^2 - AB^2}{2BC} = AB.AC$.

Bài 15.

Ta có $AH//OI//BK$ (vì cùng vuông góc với xy). Theo hệ hệ quả định lý Thalès ta có



$\dfrac{OI}{AH} = \dfrac{IK}{KH}; \dfrac{OI}{BK} = \dfrac{HI}{KH}$.

Vậy $\dfrac{OI}{AH} + \dfrac{OI}{BK} = \dfrac{IK}{KH} + \dfrac{HI}{KH} = \dfrac{KH}{KH} = 1$

Hay $OI.\left(\dfrac{1}{AH} + \dfrac{1}{BK}\right) = 1$

Từ đó suy ra $OI\left(AH + BK\right) = AH.BK$.

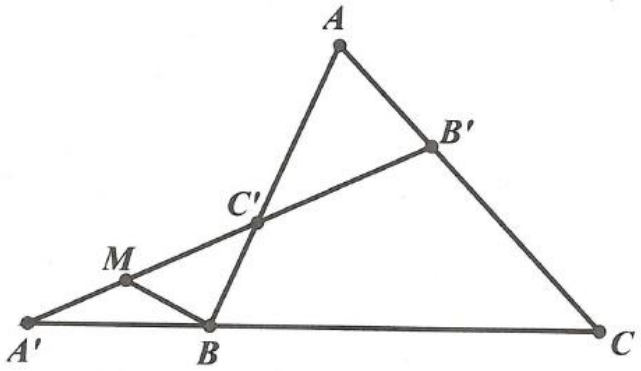
Bài 16.

Hình vẽ cho 1 điểm nằm trên phần kéo dài, trường hợp còn lại làm tương tự.

* Điều kiện cần:

Giả sử ba điểm $A'; B'$ và C' thẳng hàng, từ điểm B kẻ $BM//AC$ ($M \in A'B'$).

Áp dụng định lý Thales ta có:



$\dfrac{AB'}{B'C} = \dfrac{AB'}{B'C'}$,

$\dfrac{CA'}{A'B} = \dfrac{B'C}{BM}$,

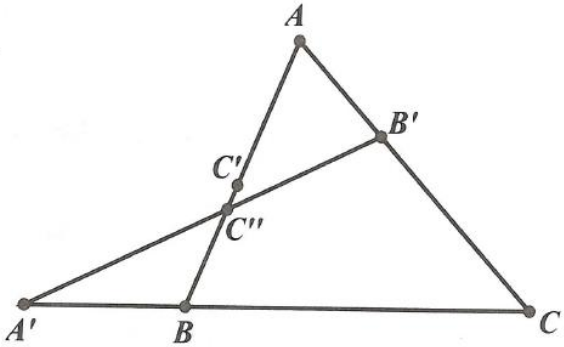
$\dfrac{BC'}{C'A} = \dfrac{BM}{AB'}$.

$\Rightarrow \dfrac{AB'}{B'C}.\dfrac{CA'}{A'B}.\dfrac{BC'}{C'A} = \dfrac{AB'}{B'C}.\dfrac{B'C}{BM}.\dfrac{BM}{AB'} = 1$

* Điều kiện đủ:

Giả sử: $\dfrac{AB'}{B'C}.\dfrac{CA'}{A'B}.\dfrac{BC'}{C'A} = 1$ (1)

và $A'B' \cap AB = \{C''\}$



Ta có: $\dfrac{AB'}{B'C}.\dfrac{CA'}{A'B}.\dfrac{BC''}{C''A} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\dfrac{BC'}{C'A} = \dfrac{BC''}{C''A}$

$\Rightarrow C' \equiv C'' \Rightarrow A', B', C'$ là ba điểm thẳng hàng.

Bài 17.

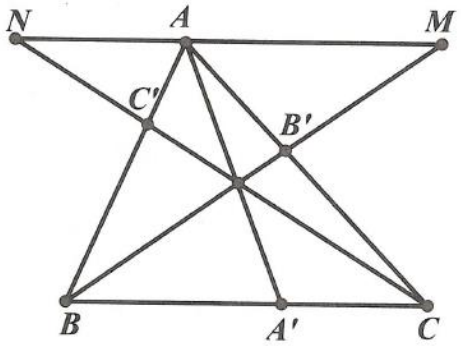
* Điều kiện cần: Kẻ qua điểm A đường thẳng song song với BC cắt BB' tại điểm M cắt CC' tại điểm N.

Theo hệ quả và định lý Thales:

$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AN}{BC}$ (1);

$\frac{BA'}{AM} = \frac{A'I}{AI} = \frac{A'C}{AN} \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{AM}{AN}$ (2);

$\frac{CB'}{B'A} = \frac{BC}{AM}$ (3)



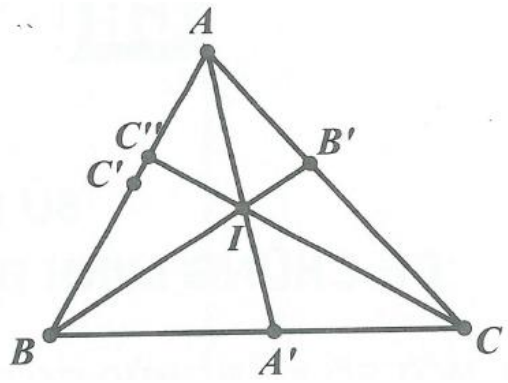
Từ (1), (2), (3) ta có:

$\frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A} = \frac{AN}{BC}.\frac{AM}{AN}.\frac{BC}{AM} = 1$

* Điều kiện đủ:

Giả sử 3 điểm $A'; B'$ và C' được lấy lần lượt trên ba cạnh BC, CA, AB như hình thỏa mãn $\frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A} = 1$ (1)

và $AA' \cap BB' = \{I\}$. Kẻ CI cắt AB tại C''.



Khi đó $\frac{AC''}{C''B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC''}{C''B} \Rightarrow C' \equiv C''$.

Vậy ba đường thẳng $AA'; BB'$ và CC' đồng quy.

Bài 18.

Áp dụng định lý Menalaus với ΔABD và ba điểm thẳng hàng E, O, C ta được:

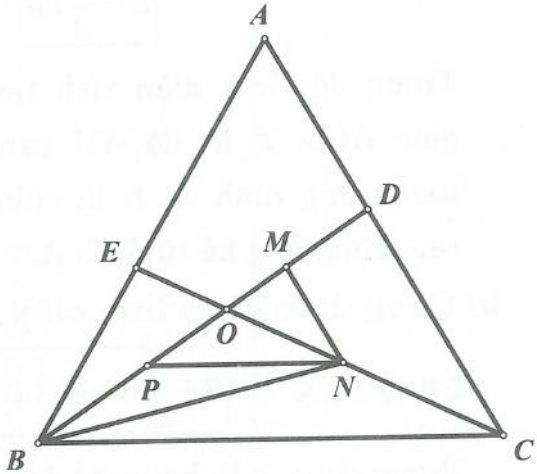
$\frac{EA}{EB}.\frac{OB}{OD}.\frac{CD}{CA} = 1$ (*)

Theo bài ra $\frac{CD}{DA} = \frac{EA}{EB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$.

Thay các kết quả trên vào hệ thức (*) ta được

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.\frac{OB}{OD}.\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = 1$



Hình 24

$\Rightarrow \frac{OB}{OB}=1$ hay $OB=OD$ (1)

Từ N kẻ đường thẳng song song với BC, cắt BD tại P.

Vì $MN//BC$ nên ta có $\frac{OP}{OB}=\frac{ON}{OC}=\frac{OM}{OD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OM=OP$.

Ta có $PMN=PDC>60°; PNM=BCA=60°$ nên $PMN>PNM$.

Từ đó $PN>PM=2OM$.

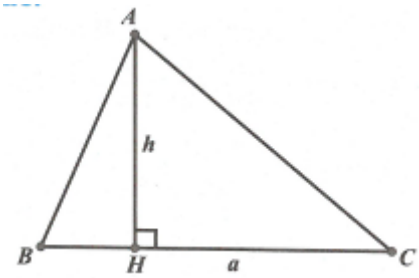
Mặt khác $BPN=180°-MPN=180°-DBC>180°-ABC=120°$ nên $BN>PN>2OM$.

Bài toán 5.sử dụng phương pháp diện tích để chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

a) Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2}ha$$

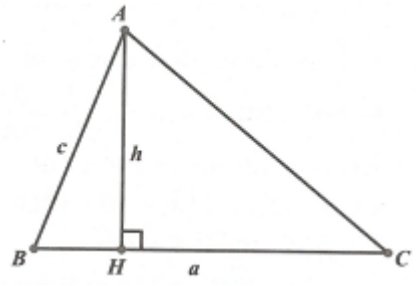


Trong đó S là diện tích tam giác ABC, a là độ dài cạnh tương ứng đỉnh A, h là chiều cao tương ứng kẻ từ đỉnh A.

b) Công thức khác tính diện tích tam giác:

***Công thức 1**:*

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B \ (1)$$

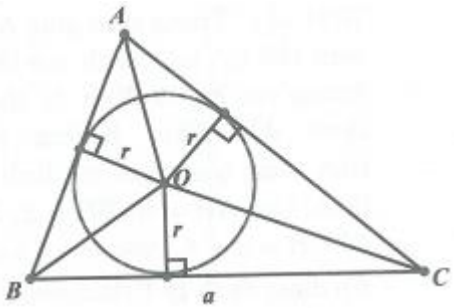


Trong đó: a, c là hai cạnh kề của góc B.

Thật vậy: Ta có: $h = c.\sin B$ *thay vào công thức* $S = \frac{1}{2}ha$

Ta được $S = \frac{1}{2}ac\sin B$.

Công thức 2: $S = pr \ (2)$



Trong đó p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Thật vậy:

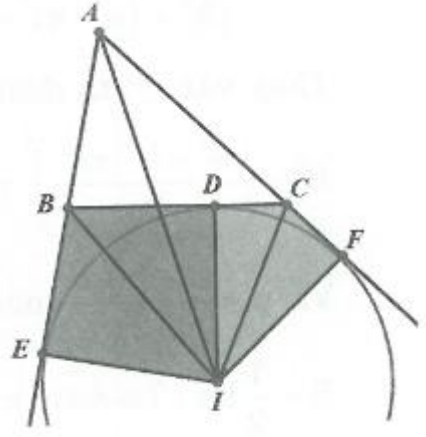
$$S = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}$$

$$= \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc$$

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) = pr.$$

***Công thức 3**:*

$$S = (p-a)r_a \ (3)$$



Trong đó p là nửa chu vi tam giác ABC, r_a *là bán kính đường tròn bàng tiếp đỉnh A của tam giác ABC.*

Thật vậy,

$$S = S_{AEIF} - S_{BDIE} - S_{DCFI}$$

$$S=\frac{1}{2}r_a\left(c+BE+b+CF\right)-\frac{1}{2}r_a\left(2BE+2CF\right)$$

$$S=\left(\frac{b+c-a}{2}\right)r_a=\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)r_a$$

$$=\left(p-a\right)r_a$$

***Công thức 4**:*

$$\boxed{S=\frac{abc}{4R}\ (4)}$$

Trong đó a, b, c là ba cạnh của tam giác, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Thật vậy, Áp dụng định lý hàm sin ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow \sin B=\frac{b}{2R}$$

Thay vào công thức tính diện tích tam giác $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ *ta được:*

$$S=\frac{1}{2}ac.\frac{b}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

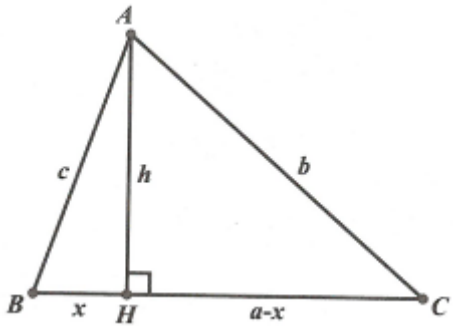
Công thức 5:

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ (5)}$$

(công thức Hê-rông)

Trong đó a, b, c là ba cạnh của tam giác, p là nửa chu vi tam giác ABC.

Thật vậy: Trong tam giác ABC luôn tồn tại một đỉnh mà chân đường cao hạ từ đỉnh đó thuộc cạnh đối diện. Không mất tính tổng quát, giả sử đỉnh đó là A. Gọi $AH=h$, $BH=x$, *khi đó* $CH=a-x$. *(với* $0\le x\le a$*). Áp dụng định lý Pythagore cho hai tam giác vuông:*



$$\begin{cases}h^2+x^2=c^2(*)\\ h^2+\left(a-x\right)^2=b^2\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}.$$

Thay vào (*) ta được:

$$h^2+\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2=c^2\Rightarrow h^2=\frac{\left(a+b+c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+a-c\right)\left(b-a+c\right)}{4a^2}.$$

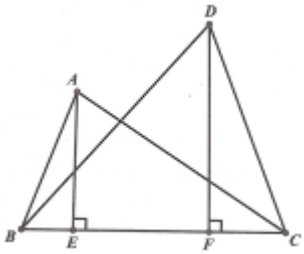
Vì $p=\frac{a+b+c}{2}$ *nên* $h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$ *thay vào công thức* $S=\frac{1}{2}ha$. *Ta được z.*

c) Tính chất cơ bản về diện tích của tam giác.

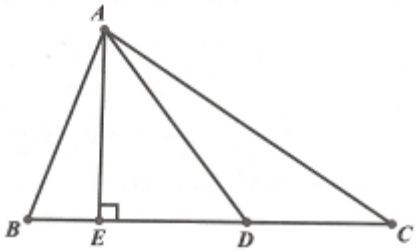
***Tính chất 1:** Nếu hai tam giác có cùng đáy thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao.*

Chứng minh:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}}=\frac{\frac{1}{2}AE.BC}{\frac{1}{2}DF.BC}=\frac{AE}{DF}.$$



Tính chất 2: *Nếu hai tam giác có cùng đường cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.*

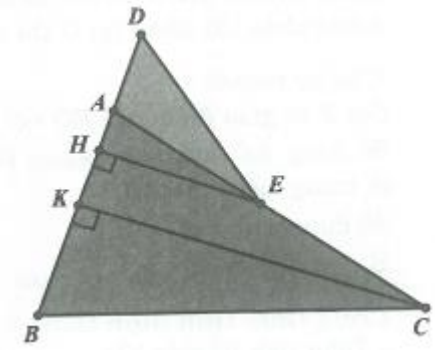


Chứng minh:

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}}=\frac{\frac{1}{2}AE.DC}{\frac{1}{2}AE.BD}=\frac{DC}{BD}.$$

Hệ quả: *Đường trung tuyến của tam giác chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.*

Tính chất 3: *Cho tam giác ABC, gọi điểm D và điểm E là các điểm thuộc đường thẳng AB và AC.*



Khi đó $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{AD}{AB}.\frac{AE}{AC}.$

Chứng minh:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{\frac{1}{2}AD.EH}{\frac{1}{2}AB.CK} \text{ mà } \frac{EH}{CK}=\frac{AE}{AC}$$

(định lý Thales)

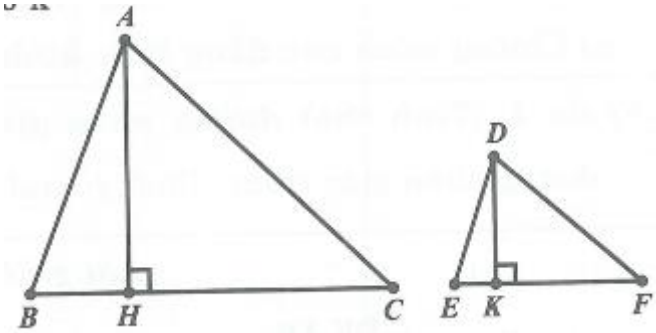
Vì thế $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{AD}{AB}.\frac{AE}{AC}$

Tính chất 4: *Tỉ số diện tích hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.*

Chứng minh:

Giả sử $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ *theo tỉ số k*

Nghĩa là $\frac{BC}{EF}=k$ *và* $\frac{AH}{DK}=k$



Ta có:

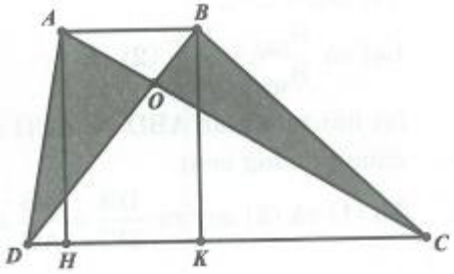
$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\frac{\frac{1}{2}AH.BC}{\frac{1}{2}DK.EF}=k^2$$

Tính chất 5: *Cho tứ giác ABCD và điểm O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Khi đó,*

$$AB//CD \Leftrightarrow S_{ADO}=S_{BCO}$$

Chứng minh:

• *Nếu* $AB//CD$, *vẽ* $AH \perp DC; BK \perp DC$



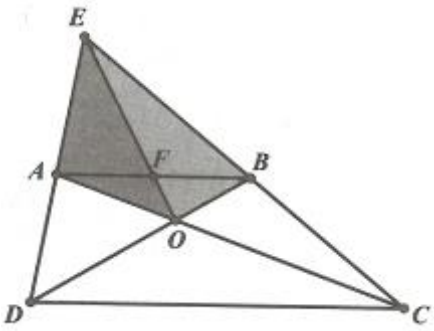
Thì $AH = BK \Rightarrow S_{ADC} = S_{BDC}$

$\Rightarrow S_{ADO} + S_{DOC} = S_{BCO} + S_{DOC}$

$\Rightarrow S_{ADO} = S_{BCO}$.

• *Nếu* $S_{ADO} = S_{BCO} \Rightarrow \frac{1}{2} AH.DC = \frac{1}{2} BK.DC \Rightarrow AH = BK$ *mà* $AH//BK$ *nên ABHK là hình bình hành. Vậy* $AB//CD$.

Tính chất 6: *Nếu hai cạnh bên của hình thang ABCD (*$AB//CD$*) cắt nhau tại E, hai đường chéo cắt nhau tại O thì* $S_{AOE} = S_{BOE}$.



Chứng minh:

Gọi F là giao điểm của EO với AB. Sử dụng ***bổ đề hình thang*** *thì F là trung điểm của AB.*

Sử dụng tính chất 2 thì: $S_{AEF} = S_{BEF}; S_{AOF} = S_{BOF} \Rightarrow S_{AEO} = S_{BOE}$

Công thức tính diện tích của tứ giác.

- Diện tích tứ giác bằng nửa tích hai đường chéo nhân với góc tạo bởi hai đường chéo.

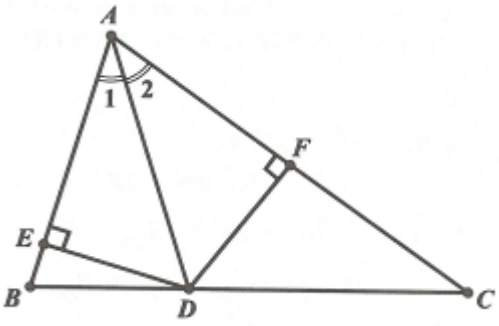
- Nếu tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì diện tích tứ giác bằng nửa tích hai đường chéo.

1. Ứng dụng của diện tích trong việc giải toán

a) Chứng minh các đẳng thức hình học

Ví dụ 1. (Tính chất đường phân giác). Cho tam giác ABC, AD là đường phân giác trong. Chứng minh rằng $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} DE.AB}{\frac{1}{2} DF.AC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

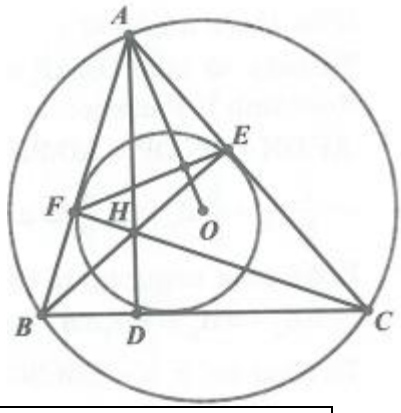
(vì $DE = DF$).

Lại có $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{DB}{DC}$ (2)

(vì hai tam giác ABD và ACD có chung đường cao).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.■

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng



minh rằng $\frac{P_{DEF}}{P_{ABC}}=\frac{r}{R}$, trong đó r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta chứng minh được $OA\perp EF$, $OB\perp DF$, $OC\perp DE$.

Vì tam giác ABC nhọn nên O nằm bên trong tam giác, từ đó ta có:

$$S_{ABC}=S_{OEAF}+S_{ODBF}+S_{ODCE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}r.P_{ABC}=\frac{1}{2}DE.OA+\frac{1}{2}DF.OB+\frac{1}{2}CE.OC$$

$$\Leftrightarrow r.P_{ABC}=R.P_{DEF}\Leftrightarrow \frac{P_{DEF}}{P_{ABC}}=\frac{r}{R}.\blacksquare$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác AM, BM và CM cắt các cạnh BC, AC và AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng $\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $\frac{MD}{AD}=\frac{AH}{MI}$.

Áp dụng tính chất về tỉ số diện tích ta có:

$$\frac{MD}{AD}=\frac{S_{BMD}}{S_{BAD}}=\frac{S_{CMD}}{S_{CAD}}=\frac{S_{BMD}+S_{CMD}}{S_{BAD}+S_{CAD}}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} \quad (1)$$

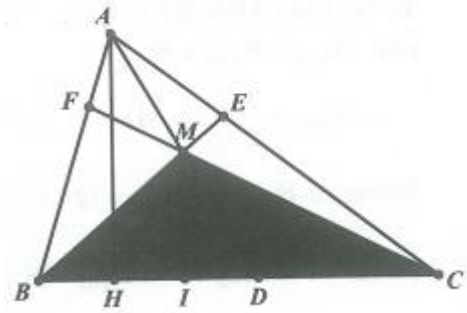
Chứng minh tương tự ta cũng có

$\frac{ME}{BE}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}$ (2), $\frac{MF}{CF}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ (3).

Cộng (1), (2) và (3) ta có điều cần chứng minh.■

Ví dụ 4. (Định lý Carnot) Cho tam giác ABC nhọn có d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến các cạnh BC, CA, AB. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Khi đó ta có hệ thức: $d_a+d_b+d_c=R+r$

HƯỚNG DẪN GIẢI



(Phụ thuộc hình vẽ)

Ta thấy tứ giác ONAP nội tiếp trong đường tròn đường kính AO nên theo định lí Ptoleme:

$$AP.ON+AN.OP=AO.PN$$

$$\Rightarrow \frac{c}{2}d_b+\frac{b}{2}d_c=R.\frac{a}{2}\Rightarrow cd_b+bd_c=R.a.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$b.d_a+a.d_b=R.c, a.d_c+c.d_a=R.b$$

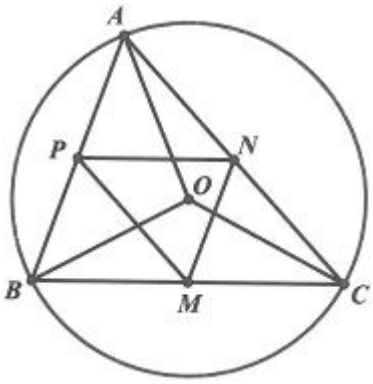
Ta cũng có: $d_a.a=OM.BC=2S_{OBC}$.

Tương tự: $d_b.b=S_{OCA}, d_c.c=S_{OAB}$.

Cộng tất cả các đẳng thức trên lại, ta có:

$$(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)=R(a+b+c)+(S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA})$$

$$\Rightarrow 2p(d_a+d_b+d_c)=R.2p+2S\Rightarrow d_a+d_b+d_c=R+r.$$

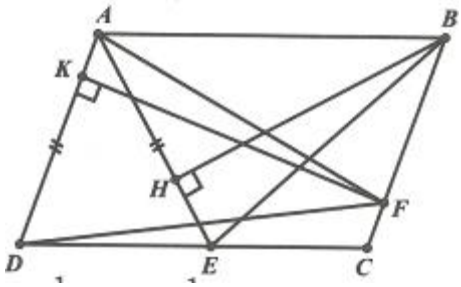


Ví dụ 5. Cho hình bình hành ABCD, trên DC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Gọi F là điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B và F trên AE và AD. Chứng minh rằng $BH = FK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vì $DC//AB$ nên đường cao kẻ từ E đến AB bằng đường cao kẻ từ A và B đến DC.

Ta lại thấy $AB = DE + CE$



nên $S_{ABE} = S_{ADE} + S_{BCE}$

$\Rightarrow S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (1)

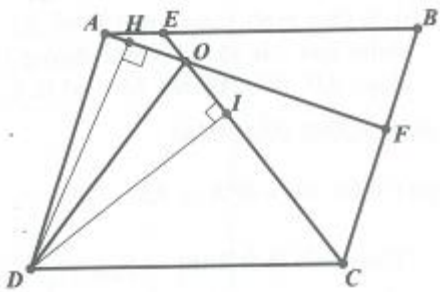
Tương tự $S_{ADF} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow S_{ABE} = S_{ADF} \Rightarrow \frac{1}{2} AE.BH = \frac{1}{2} AD.FK \Rightarrow BH = FK$.■

Ví dụ 6. Cho hình bình hành ABCD, trên cạnh AB và CB lần lượt lấy điểm E và điểm F sao cho $AF = CE$. Gọi điểm O là giao điểm CE và AF. Chứng minh $AOD = COD$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $DH \perp AF$ và $DI \perp CE$



Theo ví dụ 5 thì:

$S_{ADF} = S_{DCE} \Rightarrow \frac{1}{2} DH.AF = \frac{1}{2} DI.CE$

Theo giả thiết thì $AF = CE$

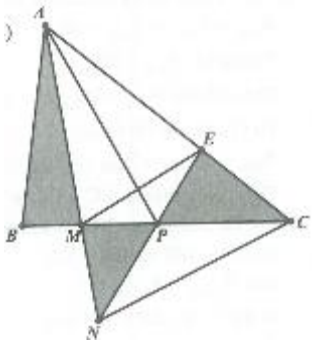
$\Rightarrow DH = DI \Rightarrow OD$ là phân giác AOC

Vậy, $AOD = COD$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC, M là một điểm nằm trên đoạn BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm N, trên đoạn AC lấy điểm E. Đường thẳng NE cắt BC tại P sao cho $S_{ABM} = S_{MNP} = S_{CPE}$. Chứng minh rằng: $PB = PC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Do $S_{MNP} = S_{CPE} \Rightarrow ME//NC$ (tính chất 5)



Áp dụng tính chất 6 ta có:

$S_{AMP} = S_{AEP}$. Mà theo giả thiết

$S_{ABM} = S_{MNP} = S_{CPE} \Rightarrow S_{ABP} = S_{ACP}$

Từ tính chất 2 suy ra: $PB = PC$.■

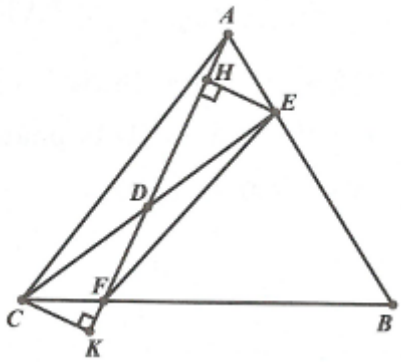
II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = 3AE$. Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = 4FC$. Gọi D là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng $CD = DE$.

Bài 2. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho A là trung điểm của DC, trên tia đối của BA lấy điểm E sao cho B là trung điểm của AE, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $S_{DEF} = 7S_{ABC}$. Chứng minh rằng $CB = CF$.

Bài 3. Cho hình thang ABCD có đáy lớn AB, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Một đường thẳng song song với hai đáy cắt các đoạn AD, BC, MN lần lượt tại E, I, F. Chứng minh $EI = FI$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI



Bài 1. Do $BE = 3EA \Rightarrow AE = \frac{1}{4}AB$.

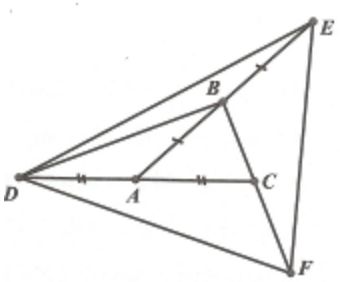
Theo tính chất 2 thì $\Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{4}S_{ABF}$ (1).

Do $CF = \frac{1}{4}BF \Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{4}S_{ABF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{AEF} = S_{ACF}$.

Kẻ hai đường cao EH và CK của hai tam giác AEF và tam giác ACF.

Suy ra $EH = CK \Rightarrow \Delta EHD = \Delta CKD$ (g.c.g) $\Rightarrow CD = DE$.■



Bài 2. Vì A là trung điểm của DC, theo tính chất 2 thì:

$S_{ABD} = S_{ABC} \Rightarrow S_{ADE} = 2S_{ABC}$ (1)

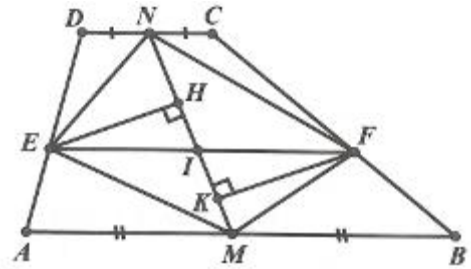
Tương tự: $S_{DCF} = 2S_{ABC}$ (2)

Theo đề bài $S_{DEF} = 7S_{ABC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$S_{BEF} = 2S_{ABC} \Rightarrow S_{BEF} = 2S_{BCE} \Rightarrow S_{BCE} = S_{DEF}$.

Theo tính chất 2: $BC = CF$.■



Bài 3. Kẻ đường cao EH và FK của hai tam giác EMN và FMN.

Vì $AM = BM$ và $DN = CN$

nên $S_{AMND} = S_{BMNC}$ (1)

Vì $EF // AB, EF // DC$ nên

$S_{AME} = S_{BMF}$ (2) và $S_{DNE} = S_{CNF}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$S_{EMN} = S_{FMN} \Rightarrow EH = FK$

$\Rightarrow \Delta EHI = \Delta FKI \Rightarrow EI = FI$.■

Bài toán 6.Sử dụng phương pháp về hình bình hành

Để chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

2. Tính chất:

* Cạnh: Các cạnh đối song song và bằng nhau.
* Góc: Các góc đối bằng nhau.
* Đường chéo: Các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

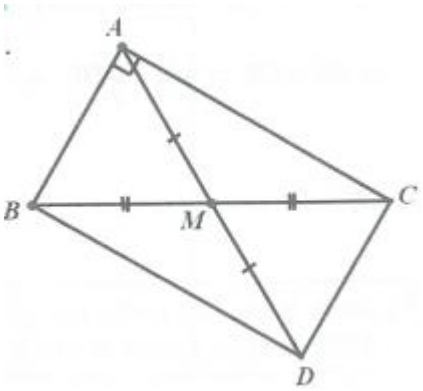
HƯỚNG DẪN GIẢI

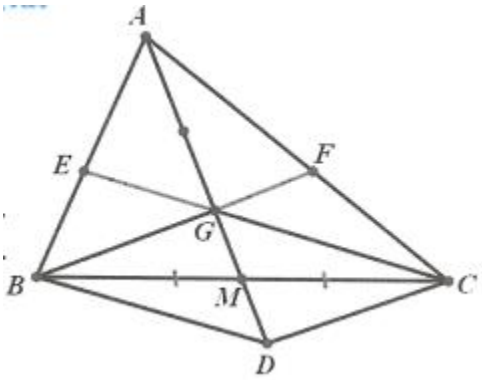
Lấy D sao cho D đối xứng với A qua M. Suy ra ABDC là hình bình hành.

Lại có $BAC = 90°$.

Nên ABDC là hình chữ nhật.

Vậy nên: $AM = \frac{1}{2}BC$.■





Ví dụ 2. Chứng minh rằng: Trong một tam giác, ba đường trung tuyến đồng quy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét tam giác ABC, trung tuyến AM. Lấy G trên AM sao cho $AG = 2GM$.

Vẽ hình bình hành BGCD.

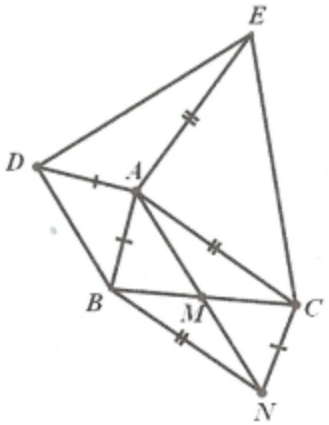
Tia CG cắt AB tại E.

Vì $GE//BD$ và G là trung điểm AD. Nên GE là đường trung bình ΔABD.

Suy ra E là trung điểm AB.

Tương tự BG kéo dài cắt AC ở F thì F là trung điểm AC.

Vậy ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy.■



Ví dụ 3. Vẽ ra ngoài tam giác ABC hai tam giác vuông cân tại A là: $\Delta ABD, \Delta ACE$. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng: $AM = \frac{1}{2}DE$.

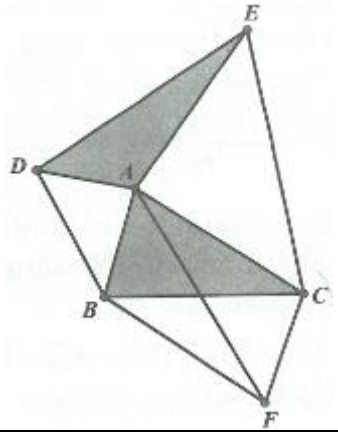
HƯỚNG DẪN GIẢI

Vẽ hình bình hành ABNC

Khi đó $DAE = ACN = \left(180° - A\right)$.

Do đó, $\Delta DAE = \Delta NCA$ (c.g.c)

$\Rightarrow AN = DE \Rightarrow AM = \frac{1}{2}DE$.■



Ví dụ 4. Dựng bên ngoài tam giác ABC hai tam giác vuông cân tại A là: ABD và ACE. Chứng minh: $S_{ABC} = S_{ADE}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dựng hình bình hành ABFC

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{ABF}\left(= \frac{1}{2}S_{ABFC}\right)$ (1)

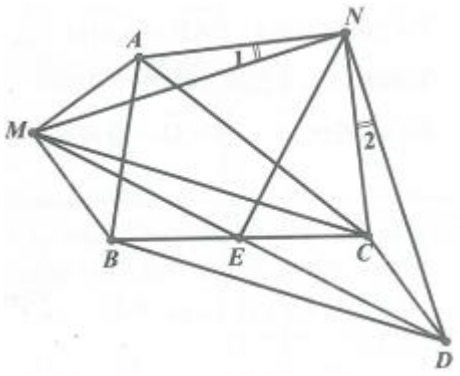
Lại có: $\Delta ADE = \Delta ABF \Rightarrow S_{ADE} = S_{ABF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{ABC} = S_{ADE}$. ■

Ví dụ 5. Bên ngoài tam giác ABC vẽ hai tam giác cân tại A lần lượt là: ΔABH và ΔACE sao cho $H = 120°$ và $E = 60°$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $HME = 90°$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vẽ hình bình hành BNCH.



$\Rightarrow HA = CN$ và $HAE = NCE \left(= 90° + A \right)$

Vì vậy $\Delta HAE = \Delta NCE$ (c.g.c) $\Rightarrow HE = NE$ (1)

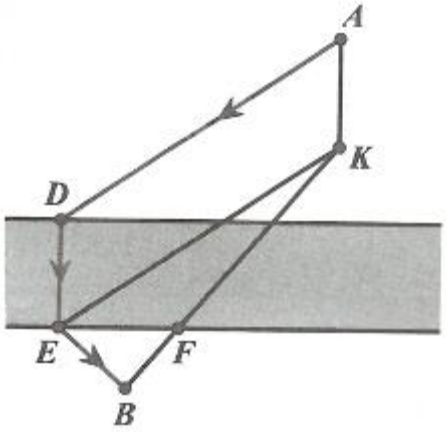
mà $E_1 = E_2 \Rightarrow HEN = 60°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔHNE đều $\Rightarrow HME = 90°$.■

Ví dụ 6. Vẽ bên ngoài tam giác ABC hai tam giác vuông cân tại M và N là ΔABM và ΔACN . Gọi E là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ΔMNE vuông cân.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dựng hình bình hành CMBD



$\Rightarrow MA = CD$ và $MAN = DCN \left(= 90° + A \right)$

$\Rightarrow \Delta MAN = \Delta DCN$ (c.g.c) $\Rightarrow N_1 = N_2$

$\Rightarrow \Delta MND$ vuông cân tại N

Mà E là trung điểm của MD nên ΔMNE vuông cân. ■

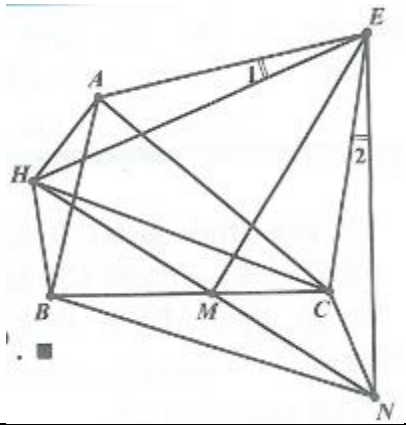
Ví dụ 7. Hai ngôi làng A, B nằm hai bên sông, cần xây cầu DE như thế nào để đường đi ADEB ngắn nhất (biết 2 bờ sông song song với nhau, cầu vuông góc với bờ).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dựng hình bình hành ADEK, F là giao điểm của bờ sông với BK (như hình vẽ) khi đó:

$AD + ED + EB = AK + KE + BE \geq AK + BK$

Do DE không đổi nên AK không đổi



$\Rightarrow K$ cố định $\Rightarrow F$ cố định.

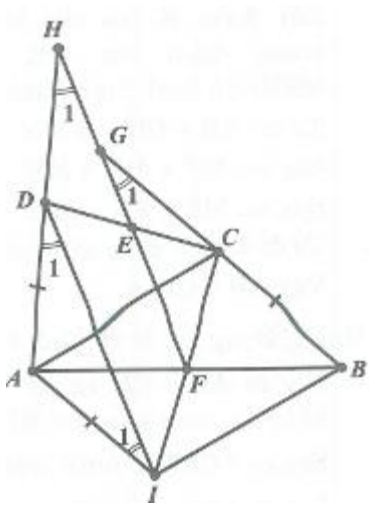
$\Rightarrow AD + ED + EB \geq AK + BK$ (không đổi)

Vậy đoạn thẳng ngắn nhất khi $E \equiv F$ ■

Ví dụ 8. Cho lục giác ABCDEF có các cạnh thỏa mãn điều kiện $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$ và cạnh đối diện song song với nhau. Chứng minh lục giác ABCDEF có các góc bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vẽ các hình bình hành APEF, CDEN. Kẻ AP cắt CN tại M. Suy ra tứ giác ABCM là hình bình hành.



Theo bài ra ta có:

$BC-EF=ED-AB=AF-CD>0$.

Thế nên, tam giác PMN đều

Ta thấy: $B=AMC=120°; F=APE=120°; D=CNE=120°$.

Ta cũng thấy: $BAF=AMN+EPM=60°+60°=120°$.

Tương tự: $FED=DCB=120°$

Kết luận: $A=B=C=D=E=F=120°$. ■

Ví dụ 9. Cho tứ giác lồi ABCD với $AD=BC$, gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD và AB. Gọi giao điểm của AD và FE là H và giao điểm của BC và FE là G. Chứng minh rằng: $AHF=BGF$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Lấy điểm I sao cho F là trung điểm của CI.

Lúc ấy, ACBI là hình bình hành.

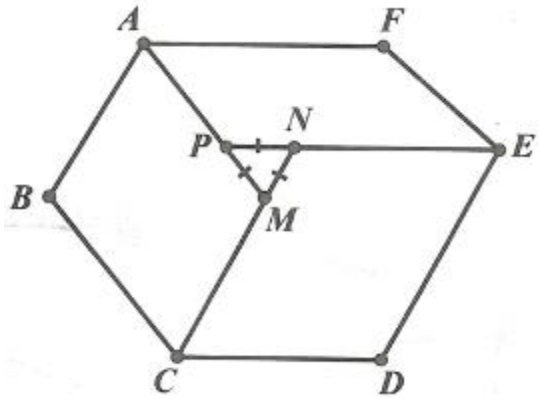
Vì thế EF là đường trung bình của tam giác CDI.

$\Rightarrow G_1=I_1$ (1) (góc tạo bởi hai cạnh tương ứng song song).

$\Rightarrow D_1=H_1$ (2) (hai góc đồng vị và $DI//HF$).

Do $AD=AI$ nên tam giác ADI là tam giác cân tại A $\Rightarrow D_1=I_1$ (3)

Từ (1) (2) và (3) ta suy ra: $AHF=BGF$. ■



III. BÀI TẬP

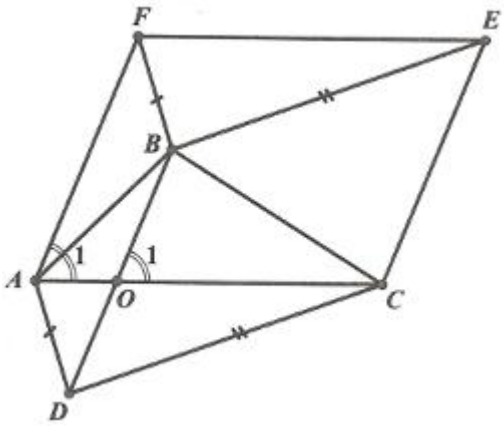
Bài 1. Cho tứ giác ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng, nếu $AB+CD=2MN$ thì $AB//CD$.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo $AC=x, BD=y$ (không đổi). Góc tạo bởi AC và BD là a (không đổi). Xác định hình dạng của tứ giác ABCD để chu vi ABCD nhỏ nhất?

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn, có $B=2C$. Kẻ đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE=BH$. Chứng minh $EA=HC$.

Bài 4. Chứng minh rằng độ dài đường trung tuyến luôn nhỏ hơn nửa tổng hai cạnh bên.

Bài 5. Chứng minh rằng độ dài ba đường trung tuyến của tam giác luôn nhỏ hơn chu vi và lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi của tam giác.



Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, gọi K là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia KA lấy điểm D sao cho $KD = 2KA$. Gọi M là trung điểm của AK. Chứng minh rằng: $BM \perp BD$

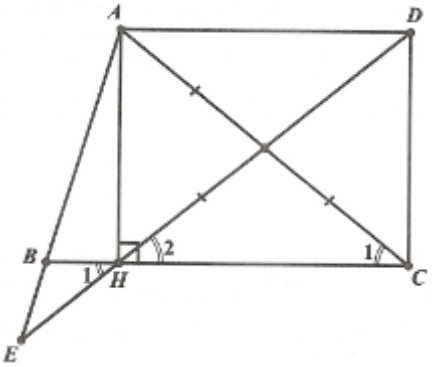
IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Vẽ hai hình bình hành CDME và ABFM (như hình vẽ bên)

Từ đó suy ra: CEBF là hình bình hành vì có một cặp cạnh đối vừa song song và bằng nhau.

Suy ra, E, N, F thẳng hàng.

Lấy điểm K sao cho N là trung điểm của MK thì MFKE là hình bình hành.



Ta có: $AB + CD = 2MN = MK$.

Suy ra: $MF + ME = MK$

Suy ra: $MF + FK = MK$.

Từ đó E và F cùng nằm trên MK. Vậy $AB // CD$. ■

Bài 2. Dựng hai hình bình hành là ADBF và BDCE.

Suy ra $AF // CE$ và $AF = CE$ (do cùng bằng và song song với BD).

Suy ra ACEF là hình bình hành

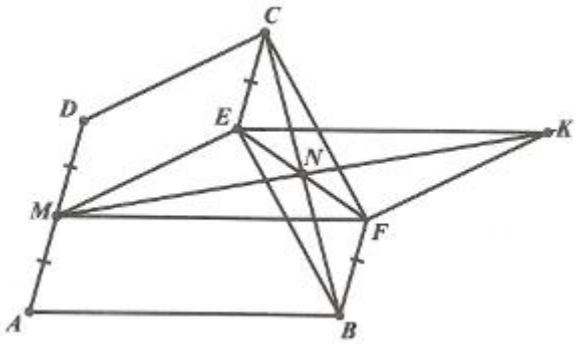
Lại có $AF = y$ và $EF = x$, $FAC = \alpha$ (không đổi)

Do đó $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$

$P_{ABCD} = (AB + BE) + (BC + BF)$

$P_{ABCD} \geq AE + CF$ (không đổi)

Nên chu vi của ABCD nhỏ nhất khi A, B, E và C, B, F thẳng hàng.



Vậy lúc đó ABCD là hình bình hành.■

Bài 3. Dựng hình bình hành AHCD mà $H = 90°$ nên AHCD là hình chữ nhật.

$\Rightarrow C_1 = H_1 = D_1$ (1)

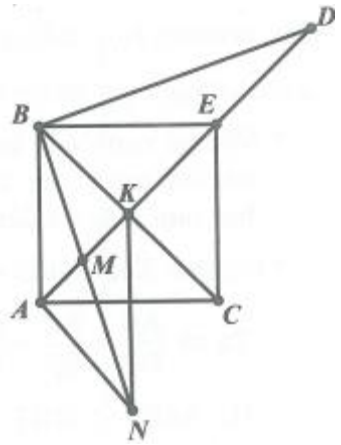
Vì $\Rightarrow \begin{cases} B = 2H_1 \\ B = 2C_1 \end{cases} \Rightarrow H_1 = C_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow H_1 = H_2$ suy ra E, H, D thẳng hàng.

Từ đó suy ra $E = D_1$

$\Rightarrow \Delta AED$ cân tại A $\Rightarrow AE = AD$

$\Rightarrow AE = HC$. ■



Bài 4. Vẽ hình bình hành ABDC (như hình bên)

Khi đó $\Rightarrow AM = \dfrac{AD}{2}$ (tính chất hình bình hành)

Mà $AD < AC + AB$ (bất đẳng thức tam giác)

Từ đó: $\Rightarrow AM < \dfrac{AB + AC}{2}$. ■

Bài 5. Gọi 3 đường trung tuyến của tam giác lần lượt là AM, BN, CE.

Theo kết quả của bài 12 thì:

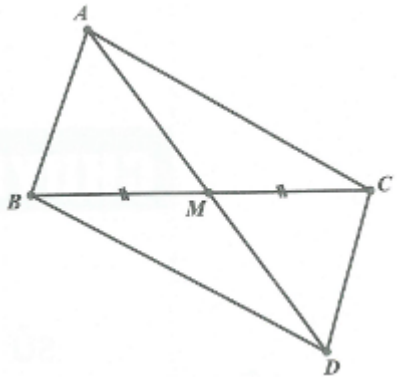
$$AM < \frac{AB + AC}{2}; BN < \frac{AB + BC}{2}; CE < \frac{BC + AC}{2}$$

Cộng hai vế của các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$AM + BN + CE < AB + BC + CA \qquad (1)$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có

$$GA + GB > AB \Rightarrow \frac{2}{3}(AM + BN) > AB$$



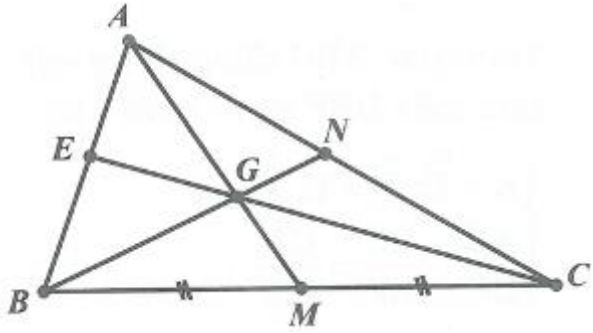
Tương tự ta có:

$$\frac{2}{3}(CE + BN) > BC; \frac{2}{3}(CE + AM)AC$$

Từ đó suy ra: $AM + BN + CE > \dfrac{3}{4}(AB + BC + CA)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 6. Lấy E là trung điểm của DK, vẽ hình bình hành ABKN như hình vẽ bên.

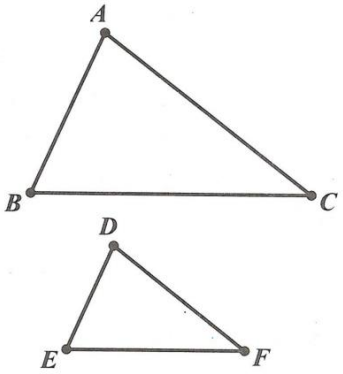


Khi đó: $\Delta ABN = \Delta EBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow ABN = EBD$

mà $\Rightarrow ABE = 90° \Rightarrow NBD = 90°$

Vậy $BM \perp BD$.■

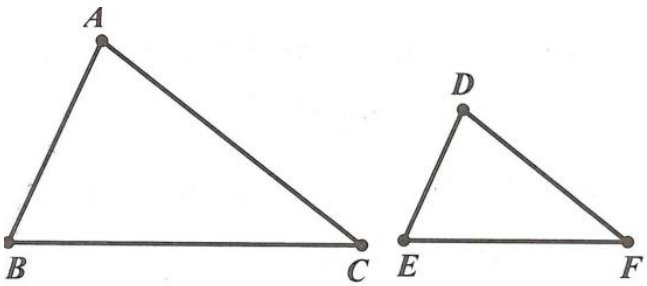


Bài toán 7.sử dụng tam giác đồng dạng để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF khi và chỉ khi



$$\begin{cases} A = D; B = E; C = F \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} \end{cases}$$

Kí hiệu: $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$.

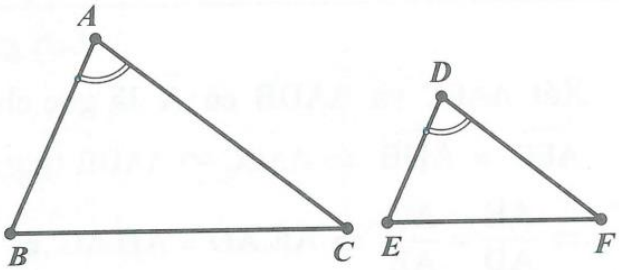
2. Các trường hợp đồng dạng của tam giác

a) Trường hợp đồng dạng cạnh - cạnh - cạnh:

** Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh. của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*

** Cụ thể: Xét* ΔABC *và* ΔDEF

Ta có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$



Thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ *(c.c.c)*

b) Trường hợp đồng dạng cạnh - góc - cạnh

** Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.*

** Cụ thể: Xét* ΔABC *và* ΔDEF

Ta có:

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{FD}$

$A = D$

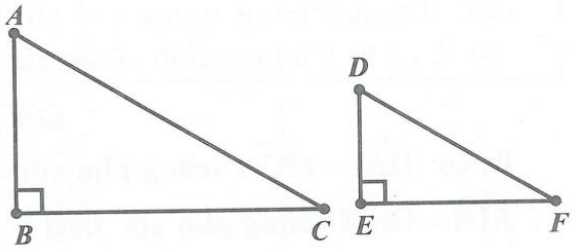
Thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ *(c.g.c)*

** Chú ý: Hai góc đang xét phải là hai góc xen giữa các cặp cạnh tỉ lệ đang xét.*

c) Trường hợp đồng dạng góc - góc

** Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*

** Cụ thể: Xét ΔABC và ΔDEF*



Ta có $A = D$

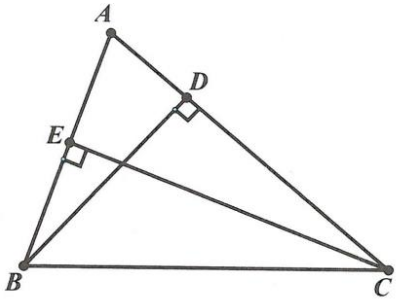
$B = E$ *Thì* $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ *(g.g)*

**** Chú ý:** Nếu một góc nhọn của tam giác vuông này bằng một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.*

d) Trường hợp đồng dạng cạnh huyền - cạnh góc vuông:

** Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.*

** Cụ thể: Xét ΔABC và ΔDEF*



Ta có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$

$B = E = 90^o$

thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ *(cạnh huyền, cạnh góc vuông)*

***Chú ý**: Trường hợp này đặc biệt ở chỗ hai góc bằng nhau không phải là hai góc xen giữa của hai cặp cạnh* tỉ lệ đang xét.

II. CÁC VÍ DỤ

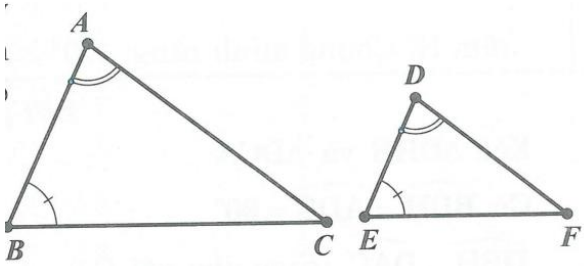
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE. Chứng minh rằng: $AE.AB = AD.AC$.

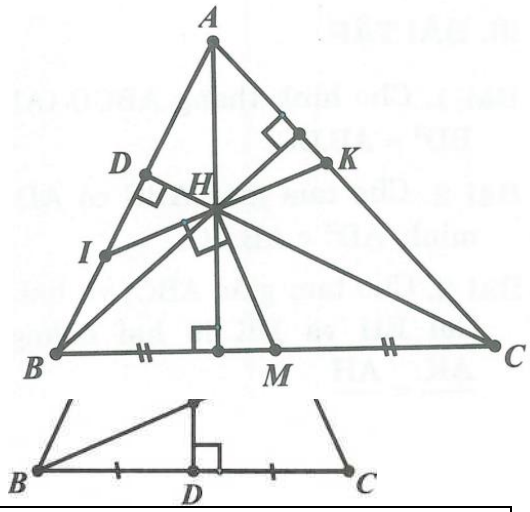
HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét ΔAEC và ΔADB có A là góc chung

$AEC = ADB \Rightarrow \Delta AEC \backsim \Delta ADB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AE.AD = AD.AC.$





Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, $\left(A=90^o\right)$ có đường cao *AD*, trực tâm *H*. Chứng minh rằng:

$CD^2 = DH.DA$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét *ΔDHB* và *ΔDCA*

Có $BDH = ADC = 90^o$

$DBH = DAC$ (cùng phụ với C)

Suy ra $\Delta DHB \backsim \Delta DCA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DH.DA = DC.DB$$

$$\Rightarrow CD^2 = DH.DA.$$

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* nhọn, trực tâm *H*. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Đường thẳng vuông góc với *MH* tại *H* cắt *AB* và *AC* theo thứ tự tại *I* và *K*. Chứng minh rằng: *HI = HK*.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có: $HAI = MCH$ (cùng phụ với ABC)

$AHI = CHM$ (cùng phụ với DHI)

Từ đó suy ra: $\Delta AIH \backsim \Delta CHM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IH}{HM} = \frac{AH}{CM} \text{ (1)}$$

Ta có: $HAK = MBH$ (cùng phụ với C)

$AHK = BMH$ (sử dụng tính chất góc ngoài của tam giác)

Từ đó suy ra: $\Delta AHK \backsim \Delta BMH$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{HK}{MH} = \frac{AH}{BM}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{IH}{HM}=\frac{HK}{HM}\Rightarrow IH=HK.$

Ví dụ 4. Cho hình bình hành *ABCD*. Một đường thẳng đi qua điểm *A* cắt đoạn *BC* tại điểm *F*, cắt đường thẳng *DC* tại điểm *G*. Chứng minh rằng: $BF.DG=AB.AD$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi giao điểm của *AF* và *BD* là điểm *E*.

Do $\Delta DEG\backsim\Delta BEA$ (g.g)

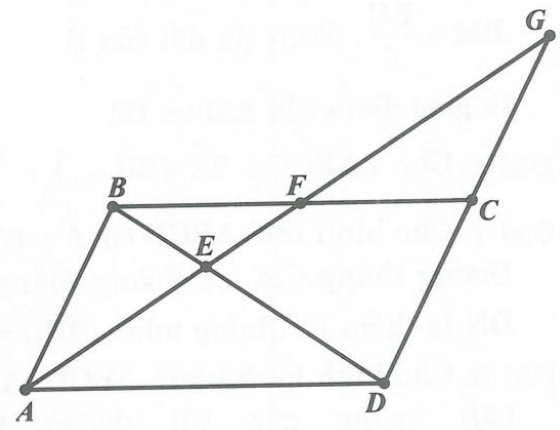
nên $\frac{DG}{AB}=\frac{ED}{EB}$ (1)

Do $\Delta AED\backsim\Delta FEB$ (g.g)

Nên $\frac{AD}{BF}=\frac{ED}{EB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\frac{AD}{BF}=\frac{DG}{AB}\Rightarrow BF.DG=AD.AB$

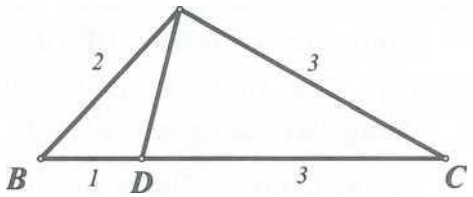


Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $AB=2;\ AC=3;\ BC=4$. Chứng minh rằng $BAC=ABC+2ACB$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $BD=1$.

Ta có $CD=BC-BD=3.$



Vì ΔACD cân tại C nên ta suy ra $ADC=DAC$ (1)

Lại có $\Delta ABD\backsim\Delta CBA$ (c.g.c) nên ta có $BAD=C$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BAC=BAD+DAC=ACB+ADC$

$=ACB+ABC+BAD=BAC=ABC+2ACB$

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thang *ABCD (AB//CD)* sao cho $BAD=DBC$. Chứng minh $BD^2=AB.DC$.

Bài 2. Cho tam giác *ABC* có *AD* là phân giác của tam giác *ABC*. Chứng minh $AD^2<AB.AC$.

Bài 3. Cho tam giác *ABC*, vẽ hai đường cao *BD* và *CE* của tam giác *ABC*. Gọi *EH* và *DK* là hai đường cao của tam giác *ADE*. Chứng minh $\frac{AK}{AB}=\frac{AH}{AC}$.

Bài 4. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, vẽ hai đường cao *BD* và *CE* cắt nhau tại điểm *H*. Chứng minh $BH.BD+CH.CE=BC^2$.

Bài 5. Cho hình vuông *ABCD*, trên cạnh *BC* lấy điểm *M* sao cho $BM=\frac{BC}{3}$. Trên tia đối của tia *CD* lấy điểm *N* sao cho $CN=\frac{BC}{2}$. Gọi *I* là giao điểm của *AM* và *BN*. Chứng minh $CIM=90^o$.

Bài 6. Cho AABC có $3A+2B=180°$. Chứng minh $BC^2=AB.\left(AB-AC\right).$

Bài 7. Cho hình thoi *ABCD* có $A=60°$. Gọi *M* là một điểm thuộc cạnh *AD*. Đường thẳng *CM* cắt đường thẳng *AB* tại *N*. Gọi giao điểm của *BM* và *DN* là điểm *P*. Chứng minh $BPD=60^o$.

Bài 8. Cho hình bình hành *ABCD (AB > AD)*. Từ điểm C kẻ CE và CF lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng $AD\left(E\in AB,\ F\in AD\right).$ Chứng minh $\mathrm{AB.AE+AD}.AF=AC^2$.

Bài 9. Cho tam giác *ABC* nhọn, kẻ các đường cao *BD* và *CE* của tam giác *ABC*. Chứng minh $AED=ACB$.

Bài 10. Cho tam giác *ABC*, vẽ phân giác *AD* của tam giác *ABC*. Chứng minh $AD^2=AB.AC-DB.DC.$

Bài 11. Cho hình vuông *ABCD*. Trên cạnh *AB* lấy điểm *M*. Kẻ đường thẳng *BH* vuông góc với $CM\ \left(H\in CM\right)$. Vẽ *HN* vuông góc với *DH* cắt *BC* tại điểm *N*. Chứng minh rằng $AM.NB=NC.MB$.

Bài 12. Cho hình vuông *ABCD*, trên cạnh *AB, BC* lần lượt lấy hai điểm *E* và điểm *F* sao cho *BE = BF*. Gọi *H* là hình chiếu của *B* trên *CE*. Chứng minh $DHF=90^o.$

Bài 13. Cho tam giác *ABC* nhọn, ba đường cao của tam giác là *AD, BE, CF* cắt nhau tại điểm *H*. Chứng minh $DEH=FEH$.

Bài 14. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường phân giác *BD* cắt đường cao *AH* tại điểm *I*. Chứng minh $AD.BD=BI.DC$.

Bài 15. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, trên cạnh *AC* lấy điểm *D*. Gọi điểm *E* là hình chiếu của điểm *C* trên *BD*. Chứng minh $AB.CE+AE.BC=AC.BE.$

Bài 16. Cho tam giác *ABC* đều, gọi *O* là trọng tâm của tam giác. Lấy *M* là một điểm bất kì thuộc cạnh *BC*, (*M* không trùng với trung điểm của cạnh *BC*). Kẻ *MP* và *MQ* lần lượt vuông góc với *AB* và *AC* sau đó cắt *OB*, OC thứ tự tại *I* và *K*. Gọi *D* là giao điểm của *PQ* và *OM*. Chứng minh $PD=QD$.

Bài 17. Cho tứ giác *ABCD* có *M, N* lần lượt là trung điểm của hai đường chéo *BD* và *AC* sao cho điểm *M* không trùng với điểm *N*. Đường thẳng *MN* cắt hai cạnh bên *AD* và *BC* lần lượt tại điểm *P* và *Q*. Chứng minh $\frac{PA}{PD}=\frac{QC}{QB}.$

Bài 18. Cho tam giác *ABC* có $AB = c,\ AC = b,\ BC = a$ thỏa mãn $A = 2B$. Chứng minh $a^2 = b^2 + bc$.

Bài 19. Cho tam giác *ABC*. Các đường phân giác góc ngoài tại các đỉnh *B* và *C* của tam giác cắt nhau ở *K*. Đường thẳng vuông góc với *AK* tại *K* cắt các đường thẳng *AB, AC* theo thứ tự ở *D* và *E*. Chứng minh $DE^2 = 4BD.CE$.

Bài 20. Cho tam giác *ABC* nhọn. Các đường cao *AD, BE, CF* cắt nhau tại điểm *H*. Chứng minh rằng:

a) $AB.AF = AC.AE$

b) $BH.BE + CH.CF = BC^2$.

Bài 21. Cho tam giác *ABC* cân tại *C* có $C = 15^o$. Vẽ điểm *D* nằm ở miền trong của tam giác sao cho $ADB = 105^o$ và $AD = 2BD$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{5}AD.BC = 2CD.AB$.

Bài 22. Cho tam giác *ABD*, đường phân giác *AD*. Chứng minh rằng $AD^2 < AB.AC$

Bài 23. Cho tứ giác *ABCD* có $BAC = DAC$ và $ABC = ACD$, các đường thẳng *AD* và *BC* cắt nhau ở *E*, các đường thẳng *AB* và *CD* cắt nhau ở *F*. Chứng minh rằng $AB.DE = BC.CE$ và $2AC^2 < AD.AF + AB.AE$.

Bài 24. Cho tam giác cân $ABC\left(AB = AC\right)$, *I* là trung điểm của *BC*. Trên các cạnh *AB, AC* lấy lần lượt các điểm *K, H* sao cho $BK.CH = BI^2$. Chứng minh $IH.KB + HC.IK > HK.BI$.

Bài 25. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Lấy các điểm *M* và *N* lần lượt nằm trên các cạnh *AB* và *AC*; các điểm *P* và *Q* nằm trên cạnh *BC* sao cho *MNPQ* là hình vuông. Chứng minh rằng $BC \geq 3PQ$.

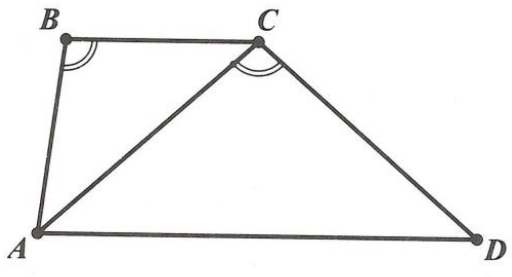
Bài 26. Cho tứ giác *ABCD*. Chứng minh rằng $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$.

Bài 27. Cho lục giác lồi *ABCDEF* có $AB = BC,\ CD = DE,\ EF = FA$ .Chứng minh rằng

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.



Xét ΔABD và ΔBDC

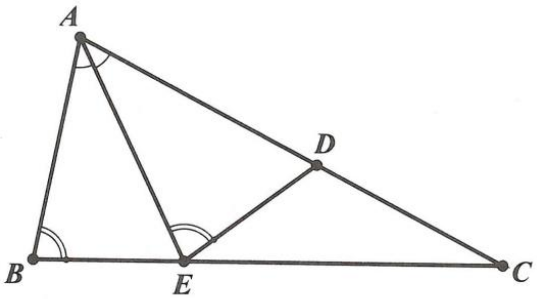
Có : $BAD = DBC$ (gt)

$ADB = BDC$ (so le trong)

Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta BDC$ (g.g)

$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BD^2 = AB.DC.$ ■

Bài 2.



Giả sử *AB* < *AC*, trên đoạn *AC* lấy điểm *M* sao cho

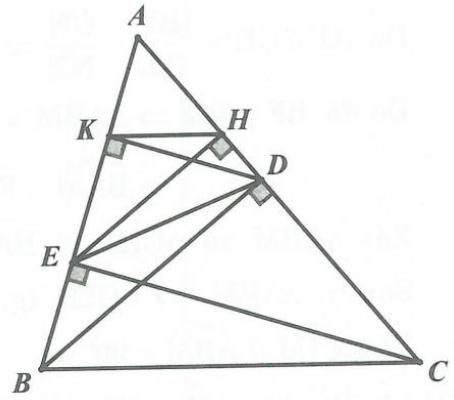
$ADM = ABD$

Xét ΔABD và ΔADM có $ABD = ADM$

Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta ADM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AM} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AM.AB \Rightarrow AD^2 < AB.AC.$ ■

Bài 3. Xét trường hợp tam giác ABC nhọn, các trường hợp khác tương tự.



Do $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ (1)

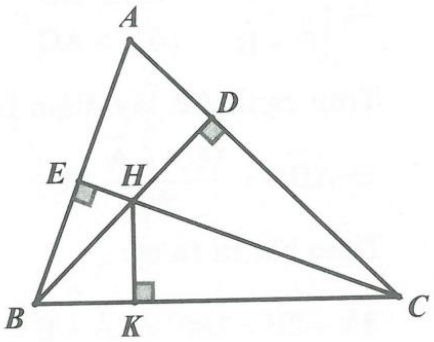
Do $\Delta AHE \backsim \Delta AKD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AK}{AH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AK}{AH} \Rightarrow \dfrac{AK}{AB} = \dfrac{AH}{AC}$

Bài 4. Kẻ *HK* vuông góc với *BC* $(K \in BC)$



Xét ΔBHK và ΔBCD có B chung $K = D = 90^o$.

Suy ra $\Delta BHK \backsim \Delta BCD$ (g.g)

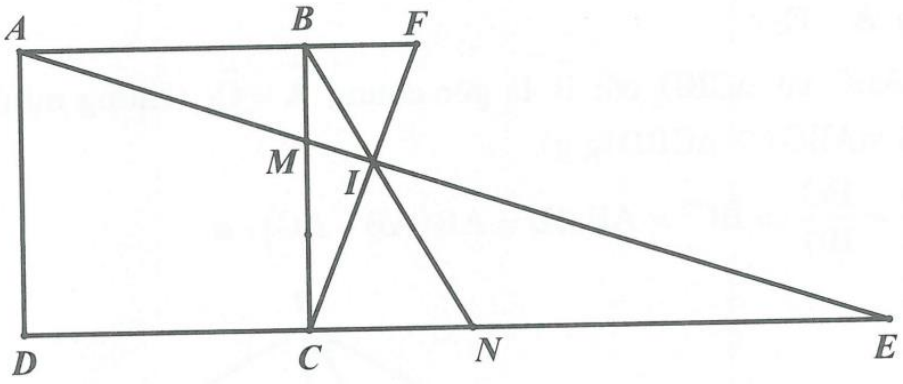
nên $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BK}{BD} \Rightarrow BH.BD = BC.BK$ (1)

Tương tự $\Delta CKH \backsim \Delta CEB$ (g.g)

$\Rightarrow CH.CE = CK.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$BH.BD + C$



Bài 5.

Gọi *E* là giao điểm của *AI* và *DC*.

Gọi *F* là giao điểm của *CI* và *AB* .

Đặt cạnh của hình vuông *ABCD* là *a*

Do $\Delta ABM \backsim \Delta EMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CE}{AB} = \dfrac{CM}{BM} = 2 \Rightarrow CE = 2a.$

Mà $CN = \dfrac{a}{2} \Rightarrow NE = 2a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{2}.$

Do $AF // CE \Rightarrow \dfrac{BF}{AB} = \dfrac{CN}{NE} \Rightarrow \dfrac{BF}{a} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{3a}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow BF = \dfrac{a}{3}.$

Do đó $BF = BM \Rightarrow \Delta ABM = \Delta CBF$ (c.g.c)

$\Rightarrow BAM = FCB \Rightarrow BAM = ICM$

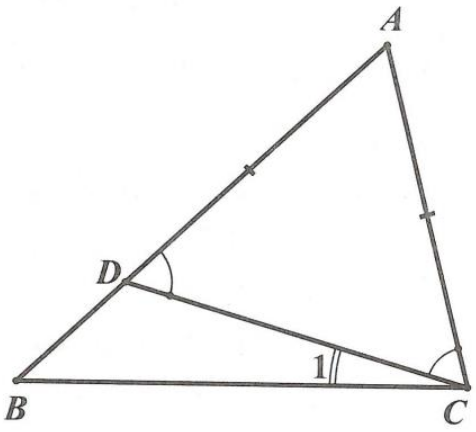
Xét ΔABM và ΔCIM có $BAM = ICM$ (cmt), $AMB = CMI$ (đối đỉnh)

Suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta CIM$ (g.g).

Vậy $CIM = ABM = 90^o$.■

Bài 6. Do $3A + 2B = 180^o$ nên $3A + 2B = A + B + C \Rightarrow 2A + B$

$\Rightarrow \begin{cases} C > A \\ C > B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB > BC \\ AB > AC \end{cases}$.



Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

$\Rightarrow ADC = \dfrac{180^o - A}{2}$ (1)

Theo bài ra ta có:

$3A + 2B = 180^o \Rightarrow A + B = \dfrac{180^o - A}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow ADC = A + B$.

Mà $ADC = C_1 + B$ (tính chất góc ngoài của tam giác).

Suy ra $A = C_1$.

Xét ΔABC và ΔCBD có: B là góc chung $A = C_1$ (chứng minh trên).

Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BC^2 = AB.BD = AB\left(AB - AC\right)$

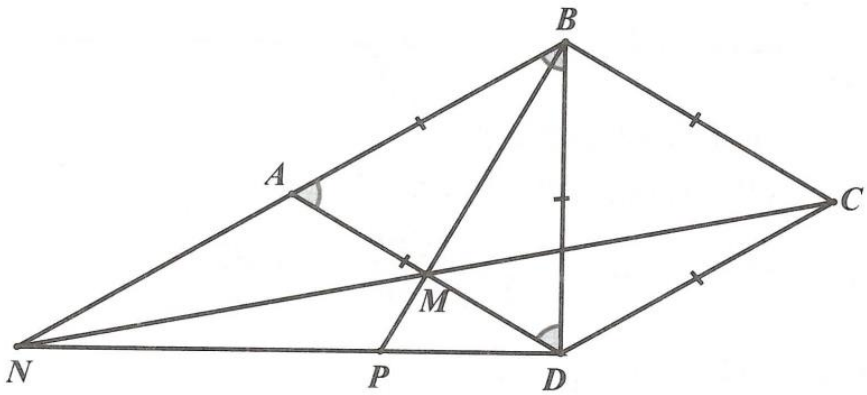
Bài 7.

Do $\Delta NAM \backsim \Delta NBC \Rightarrow \dfrac{NA}{NB}$

Do $\Delta NAM \backsim \Delta CDM \Rightarrow \dfrac{NA}{AM}$

Từ (1) và (2) suy ra:

$\dfrac{NB}{BD} = \dfrac{BD}{DM}$



Xét ΔBND và ΔBDM có

$DMN = MDB = 60^o$ (gt)

$\dfrac{NB}{BD} = \dfrac{BD}{DM}$

(chứng minh trên)

Suy ra $\Delta BND \backsim \Delta DBM (c.g.c) \Rightarrow BND = DBM$

Mà $BPD = BND + NBP$ (tính chất góc ngoài)

$\Rightarrow BPD = DBM + NBP = DBN = 60^o$

Bài 8.

Gọi các điểm *M* và điểm *N* lần lượt là hình chiếu của điểm *D* và điểm *B* trên đường thẳng *AC*.

Do $\Delta ANB \backsim \Delta AEC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AN}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AN$ (1)

Do $\Delta AMD \backsim \Delta AFC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AM}{AF} \Rightarrow AD.AF = AC.AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB.AE + AD. = AC\left(AN + AM\right) = AC^2$.

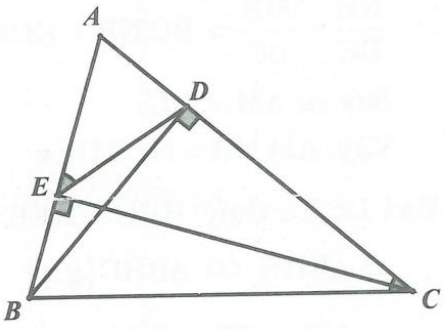
Bài 9. Do $\Delta ADB \backsim \Delta AEC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

Xét ΔAED và ΔACB có A là góc chung

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AED \backsim \Delta ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow AED = ACB$.



Bài 10. Theo tính chất tam giác ngoài của tam giác, ta có $ADC = ABE$

$ADC > ABC$. Trên tia đối của ta DA lấy điểm E sao cho

$$\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta ABE \ (g.g) \Rightarrow \begin{cases} C = E \quad (*) \\ \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AE} \end{cases}$$

$\Rightarrow AD.AE = AB.AC \Rightarrow AD\left(AD + DE\right) = AB.AC$

$\Rightarrow AD^2 = AB.AC - AD.DE$ (1)

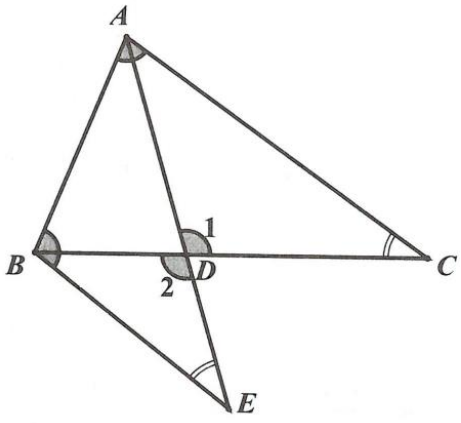
Xét ΔADC và ΔABE có $D_1 = D_2$ (đối đỉnh)

$C = E$ (chứng minh ở (*))

Suy ra $\Delta ADC \backsim \Delta ABE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{DC}{DE} \Rightarrow AD.DE = BD.DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

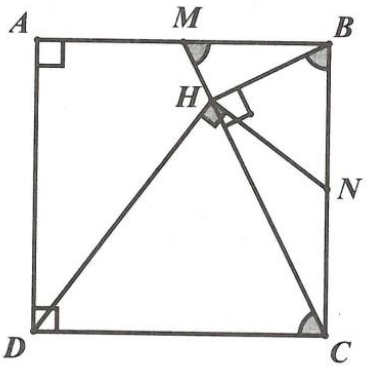


Bài 11. Xét ΔDHC và ΔNHB có $DCH = NBH$ (cùng phụ BCH)

$DHC = NHB$ (cùng phụ CHN)

$\Rightarrow \Delta DHC \backsim \Delta NHB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{DC} = \dfrac{HB}{HC}$ (1)



Do $\Delta MBH \backsim \Delta BCH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{HC} = \dfrac{MB}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\dfrac{NB}{DC} = \dfrac{MB}{DC} \Rightarrow BC.NB = DC.MB \Rightarrow NB = MB$ (do $BC = DC$).

Suy ra $AM = NC$.

Vậy $AM.NB = NC.MB$

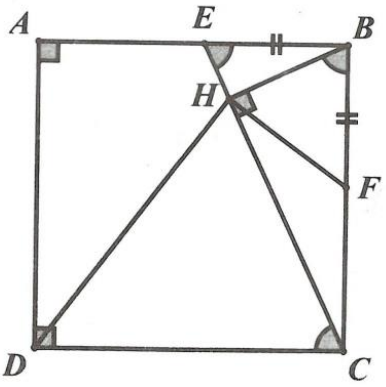
Bài 12. Tha thấy $HBC = HEB = HCD$

$\Rightarrow \Delta EHB \backsim \Delta BHC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BF}{CD}$ (do $BE = BF; BC = CD$)

Xét ΔHBF và ΔHCD có $HBF = HCD$ (chứng minh trên)

và $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{BF}{CD}$ (chứng minh trên)



Suy ra $\Delta HBF \backsim \Delta HCD$ (c.g.c) $\Rightarrow BHF = CHD \Rightarrow DHF = 90^o$.

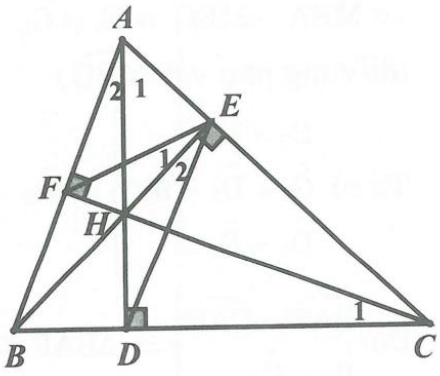
Bài 13. $\Delta BHF \backsim \Delta CHE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{HF} = \dfrac{CH}{HE}$

Xét ΔBHC và ΔFHE

Có $BHC = FHE$ (đối đỉnh)

$\dfrac{BH}{HF} = \dfrac{CH}{HE}$ (chứng minh trên)



$\Rightarrow \Delta BHC \backsim \Delta FHE$ (c.g.c)

$\Rightarrow C_1 = E_1$ (1)

Tương tự, chứng minh được

$\Delta AHB \backsim \Delta EHD$ (c.g.c) $\Rightarrow A_2 = E_2$ (2)

Mà $\Rightarrow C_1 = A_2$ (3) (cùng phụ với A_1)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $E_1 = E_2$. Vậy $DEH = FEH$.

Bài 14. Ta có $\Delta ABH \backsim \Delta CBA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BA}=\dfrac{BA}{BC}$ mà $\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$

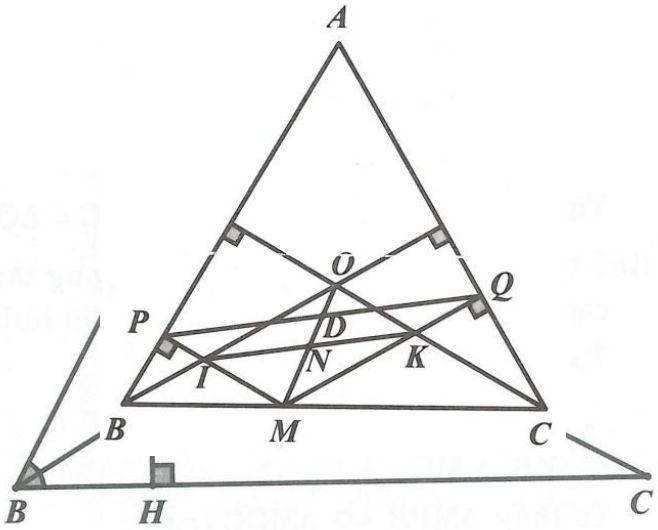
(tính chất đường phân giác)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BA}=\dfrac{AD}{DC}$ (1)

Do $\Delta BHI \backsim \Delta BAD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BA}=\dfrac{BI}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BI}{BD}\Rightarrow AD.BD=DC.BI.$



Bài 15. Giả sửa *AB* và *CE* cắt nhau tại điểm *M*. Trên *BE* lấy điểm *F* sao cho $BAF=EAC\Rightarrow EAF=90^o$

Do $\Delta MEB \backsim \Delta MAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MA}=\dfrac{MB}{MC}\Rightarrow \dfrac{MA}{MC}=\dfrac{ME}{MB}$.

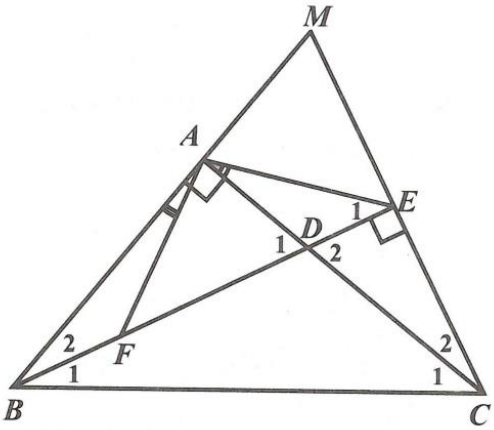
Xét ΔMAE và ΔMCB có M là góc chung

$\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{ME}{MB}$ (chứng minh trên)

$\Delta MAE \backsim \Delta MCB$ (c.g.c)

$\Rightarrow MEA=MBC\Rightarrow E_1=C_1$

(do cùng phụ với MBC)



Ta có $\left.\begin{array}{l} B_2=D_1 \\ C_2=D_2=90^o \\ D_1=D_2 \end{array}\right\}\Rightarrow B_2=C_2$

Do $\left.\begin{array}{l} BAF=CAE \\ B_2=C_2 \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta BAF \backsim \Delta CAE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BF}{CE}\Rightarrow AB.CE=AC.\text{BF}$ (1)

Do $\left.\begin{array}{l} \text{EAF}=\text{CAB}=90^0 \\ E_1=C_1 \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta EAF \backsim \Delta CAB$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EF}{BC}\Rightarrow AE.BC=AC.EF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CE+AE.BC=AC\left(BF+EF\right)=AC.BE.$

Bài 16. Do tam giác *ABC* đều nên trọng tâm *O* là giao điểm của các đường cao của tam giác ấy. Suy ra *IMKO* là hình bình hành.

Ta thấy $\Delta MIB \backsim \Delta MKC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MI}{MK}=\frac{MB}{MC}$ (1)

Ta thấy $\Delta MPB \backsim \Delta MQC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MB}{MC}=\frac{MP}{MQ}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MI}{MK}=\frac{MP}{MQ}\Rightarrow \frac{MI}{MP}=\frac{MK}{MQ}\Rightarrow IK//PQ.$

Vì *IMKO* là hình hình hành nên $NI=NK$ mà $IK//PQ$.

Vậy $PD=QD$ (định lý Thales).

Bài 17.

Từ điểm *A* và điểm *C* kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng *BD* cắt đường thẳng *MN* lần lượt tại điểm *E* và điểm *F*.

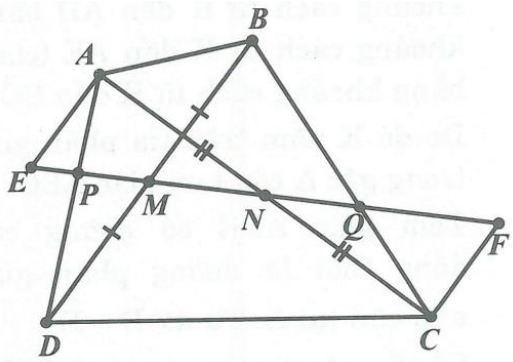
$\Rightarrow \Delta ANE=CNF$ (g.c.g) $\Rightarrow AE=CF$

Vì $\Rightarrow \Delta APE \backsim \Delta DPM$

$\Rightarrow \frac{PA}{PD}=\frac{AE}{DM}$ (1)

Vì $\Delta CQF \backsim \Delta BQM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{CQ}{QB}=\frac{CF}{BM}$ (2)



Mà $\frac{AE}{DM}=\frac{CF}{BM}$ (3) do $AE=CF; DM=BM.$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{PA}{PD}=\frac{QC}{QB}.$

Bài 18. Vẽ phân giác AD của ΔABC. Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

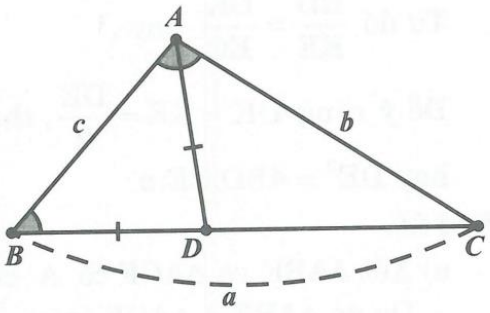
$\frac{c}{b}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow \frac{c+b}{b}=\frac{BD+DC}{DC}\Rightarrow DC=\frac{ab}{c+d}.$

Xét ΔABC và ΔDAC có: C chung và

$ABC=DAC\left(=\frac{1}{2}A\right).$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DAC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}\Rightarrow AC^2=BC.DC\Rightarrow b^2=a.\frac{ab}{b+c}\Leftrightarrow b(b+c)=$



Vậy $a^2=b^2+bc$

Chú ý: Mở rộng bài toán.

Nếu giả thiết bài toán trở thành $A+2B=4C$ thì khi đó $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$

Thật vậy, áp dụng bài 18 ta có:

Do $\left.\begin{array}{l} A=2B\Rightarrow a^2=b^2+bc \\ B=2C\Rightarrow b^2=c^2+ac \end{array}\right\}\Rightarrow a^2=c^2+ac+bc=c\left(a+b+c\right).$

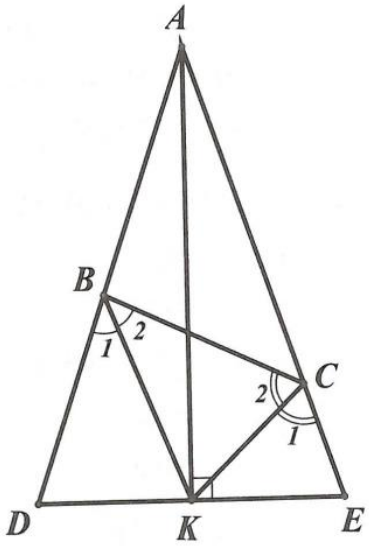
$\Rightarrow \dfrac{1}{c}=\dfrac{a+b+c}{a^2}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{b+c}{a^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{b+c}{b\left(b+c\right)}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}.$

Bài 19.

Theo tính chất điểm nằm trên tia phân giác của góc, khoảng cách từ *K* đến *AD* bằng khoảng cách từ *K* đến *AE* (cùng bằng khoảng cách từ *K* đến *BC*).

Do đó *K* nằm trên tia phân giác trong góc *A* của tam giác *ABC*.

Tam giác *ADE* có đường cao đồng thời là đường phân giác nên cân tại *A*. Từ đó $D=E$.



Có tổng 4 góc của tứ giác *BCED* bằng 360^o.

Mà $B_1=B_2;C_1=C_2;D=E$ nên $B_1+C_1+E=\dfrac{360^o}{2}=180^o$

Cũng có $CKE=C_1+E=180^o$ nên $CKE=B_1$

Hai tam giác BDK và KEC có $CKE=B_1, D=E$ nên chúng đồng dạng (g.g).

Từ đó $\dfrac{BD}{KE}=\dfrac{DK}{EC}$ hay $BD.EC=DK.KE$ (*).

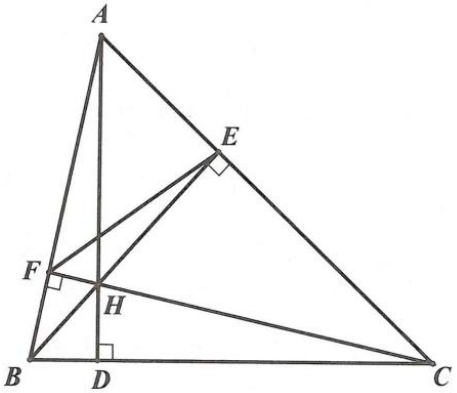
Để ý rằng $DK=KE=\dfrac{DE}{2}$, thay vào (*) ta được $BD.CE=\dfrac{DE^2}{4}$ hay $DE^2=4BD.CE$

Bài 20.

a) Xét ΔABE và ΔACF có A , $AEB=AFC=90^o$

Do đó $\Delta ABE\ \Delta\ \Delta ACF$ (g.g)

Từ đó suy ra $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AE}{AF}$ hay $AB.AF=AC.AE.$



b) Dễ dàng chứng minh được:

+ $\Delta BHD\ \Delta\ \Delta BCE$ (g.g) suy ra $\dfrac{BH}{BD}=\dfrac{BC}{BE}$

Hay $BH.BE=BD.BC$ (1)

+ $\Delta CHD\ \Delta\ \Delta CBF$ (g.g) suy ra $\dfrac{CH}{BC}=\dfrac{CD}{CF}$

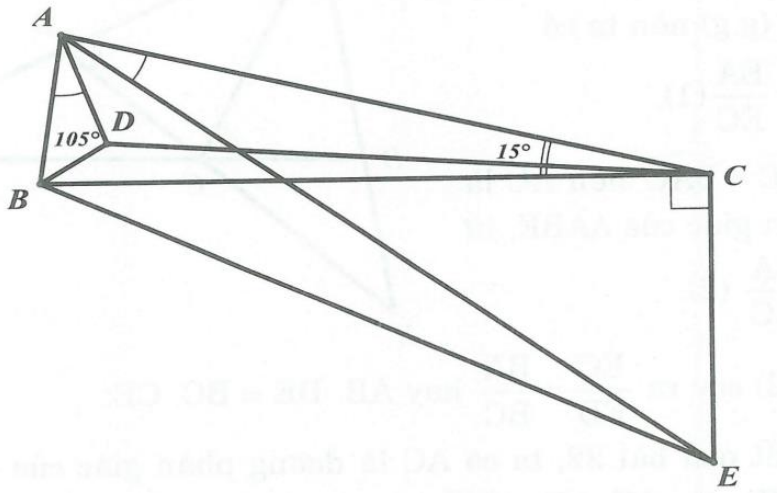
Hay $CH.CF=CD.BC$ (2)

Cộng (1) và (2) ta được:

$BH.BE+CH.CF=BD.BC+CD.BC=BC\left(BD.CD\right)=BC^2.$

Chú ý: Qua bài tập trên, để chứng mình được hệ thức dạng $x.y=s.t=r^2$, ta có thể chứng minh hai hệ thức $x.y=r.a;s.t=r.b$ với $a+b=r$. Cộng hai hệ thức này cho ta điều phải chứng minh.

Bài 21.



Trên nửa mặt phẳng bờ *BC* không chứa *A* vẽ tia *Cx* vuông góc với *BC*. Lấy điểm *E* trên tia *Cx* sao cho *BC = 2CE*.

Thấy rằng: $ACE=105^\circ;\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CE}=2$ (vì $CA=CB;CB=2CE$).

Nên ΔADB và ΔACE đồng dạng (c.g.c). Từ đó: $CAE=DAB;\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE}.$

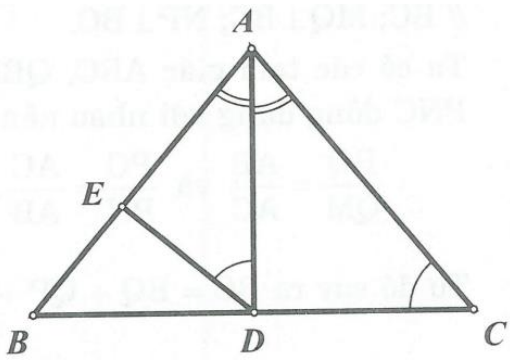
Hai tam giác DAC và BAE đồng dạng (c.g.c) nên $\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{BE}$ hay $AD.BE=CD.AB\left(*\right)$

Mặt khác tam giác *BCE* vuông tại *C*. Nếu đặt $CE=x$ thì $BC=2x$.

Theo định lý Pythagore: $BE^2=BC^2+CE^2=x^2+\left(2x\right)^2=5x^2\Rightarrow BE=x\sqrt{5}..$

Từ đó $BE=\frac{\sqrt{5}}{2}BC$. Thay vào hệ thức (*) ta được $\sqrt{5}AD.BC=2CD.AB.$

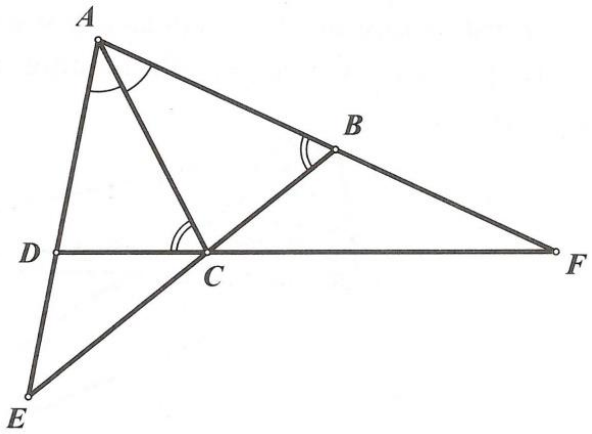
Bài 22. Ta có $C=ADB$. Trong góc ADB vẽ tia DE (E thuộc AB) sao cho $ADE=C$, khi đó điểm E nằm trên đoạn thẳng AB. Từ đó suy ra $AE<AB$



Mặt khác $\Delta AED\backsim\Delta ADC$(g.g) nên

$\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AC}$ hay $AE.AC=AD^2$.

Từ đó $AD^2=AE.AC<AB.AC$



Bài 23. Ta có $DAC = BAC, ABC = ACD$ nên

$ACB = ADC$

Từ đó $ACE = EDC$

Hai tam giác *ACE* và *CDE* đồng dạng (g.g) nên ta có

$\frac{EC}{ED} = \frac{EA}{EC}$ (1)

Lại có $DAC = BAC$ nên AC là đường phân giác

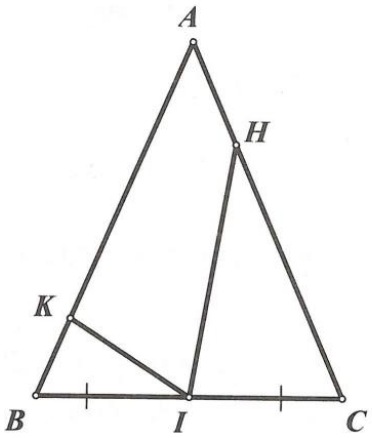
của ΔABE, từ đó $\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EC}{ED} = \frac{BA}{BC}$ hay $AB.DE = BC.CE.$

Áp dụng kết quả bài 22, ta có *AC* là đường phân giác của tam giác *ABE* và *ACF* nên

$AE.AB > AC^2$ và $AD.AF > AC^2$.

Từ đó $2AC^2 < AB.AE + AD.AF$.



Bài 24. Ta có $BK.CH = BI^2 \Rightarrow \frac{BK}{BI} = \frac{BI}{CH} = \frac{CI}{CH}$ (vì $BI = CI$)

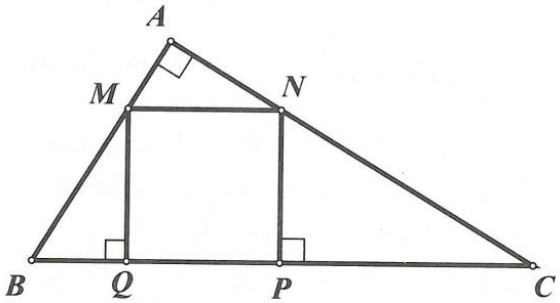
Từ đó $\Delta BKI \backsim \Delta CIH$ (c.g.c)

Suy ra $\frac{BK}{CI} = \frac{BI}{CH} = \frac{KI}{IH}$

$\Rightarrow IH.KB = IK.CI = IK.BI; HC.IK = BI.IH.$

Như vậy $IH.KB + IK.HC = IK.BI + IH.BI$

$= BI\left(IH.IK\right) > BI.HK$



Bài 25

Vì MNPQ là hình vuông nên

$MN // BC; MQ \perp BC; NP \perp BC$

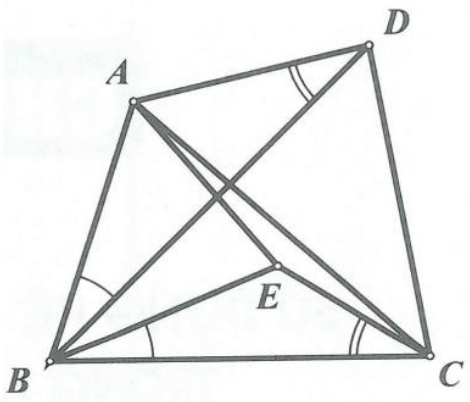
Ta có tam giác ABC, QBM, PNC đồng dạng với nhau nên

$\frac{BQ}{QM} = \frac{AB}{AC}$ và $\frac{PC}{PN} = \frac{AC}{AB}$.

Từ đó suy ra $BC = BQ + QP + PC = QP\left(\frac{BQ}{QP} + 1 + \frac{PC}{QP}\right)$

$= QP\left(\frac{BQ}{QM} + 1 + \frac{PC}{PN}\right) = QP\left(1 + \frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right) \geq 3QP.$

Dầu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$.



Chú ý: Bài toàn trên sử dụng bất đẳng thức đại số đơn giản sau:

Với hau số dương *a* và *b*, ta luôn có $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$

Bài 26. Trong góc ABC lấy điểm E sao cho

$ABD=EBC;ADB=ECB$

Khi đó ta có $\Delta ABD\backsim \Delta EBC$ (g.g)

Suy ra $\frac{AB}{BE}=\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{EC}.$

Từ đó $AD.BC=BD.EC$ (1)

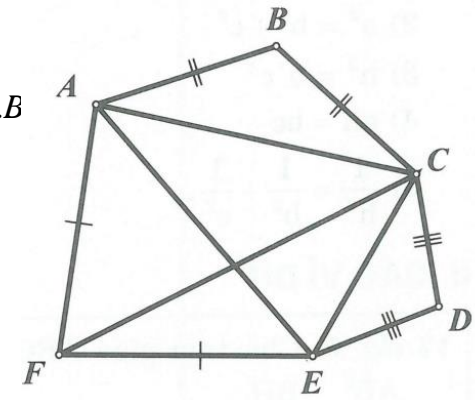
Xét ΔABE và ΔDBC có $\frac{AB}{BE}=\frac{BD}{BC};\text{ABE}=\text{DBC}$

Do vậy $\Delta ABE\backsim \Delta DBC$ (c.g.c),

Suy ra $\frac{AB}{DB}=\frac{AE}{DC}$ hay $AB.DC=AE.DB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$AB.CD+AD.BC=AE.DB+EC.DB=DB\left(AE+EC\right)\geq AC.B$



Chú ý: Kết quả của bài tập 18 là nội dung *định lý Ptolemy*. Dấu "=" ở bất đẳng thức Ptolemy xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD nội tiếp (trong trường hợp này có đẳng thức Ptolemy).

Bài 27. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy (bài 15) vào tứ giác ACEF

ta được $AC.EF+AF.CE\geq AE.FC.$

Theo bài ra $AF=FE$ nên ta có

$AC.AF+AF.CE\geq AE.\text{FC}$

$\Rightarrow \text{AF}\left(AC+CE\right)\geq AE.FC$

$\Rightarrow \frac{FA}{FC}\geq \frac{AE}{AC+CE}.$

Tương tự ta có $\frac{DE}{DA}\geq \frac{AC}{AE+AC}$ và $\frac{BC}{BE}\geq \frac{AC}{EC+AE}.$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được

$\frac{FA}{FC}+\frac{DE}{DA}+\frac{BC}{BE}\geq \frac{AE}{AC+CE}+\frac{CE}{AE+AC}+\frac{AC}{CE+AE}\geq \frac{3}{2}.$

Chú ý: Bài toán trên sử dụng bất đẳng thức đại số quen thuộc sau: Với ba số a,b và c dương, ta có

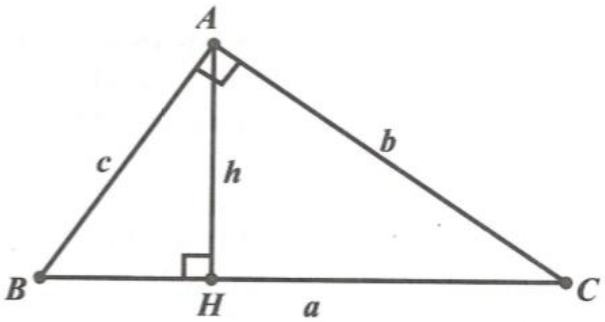
$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{3}{2}.$

Bài toán 8. Sử dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông để chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho tam giác ABC vuông tại A (hình bên). Gọi $BC=a; AC=b; AB=c; AH=h; BH=c'; HC=b'$

Khi đó ta có các hệ thức:



1) $b^2=ab'; c^2=ac'$

2) $a^2=b^2+c^2$

3) $h^2=b'c'$

4) $ah=bc$

5) $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BH}{BC}$

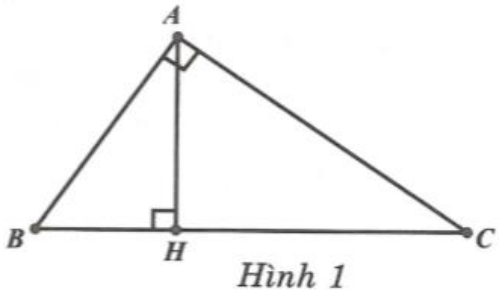
HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng hệ thức trong tam giác ABC vuông ta có:

$AB^2=BH.BC(1)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác ABC vuông ta có:

$AC^2=CH.BC(2)$



Hình 1

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BH.BC}{CH.BC}=\frac{BH}{CH}$

Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức ta có: $\frac{AB^2}{AB^2+BC^2}=\frac{BH}{BH+CH}\Rightarrow\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BH}{BC}$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH, gọi D và E là điểm đối xứng của H qua AB và AC. Chứng minh $HD^2+HE^2=4BH.HC$

HƯỚNG DẪN GIẢI

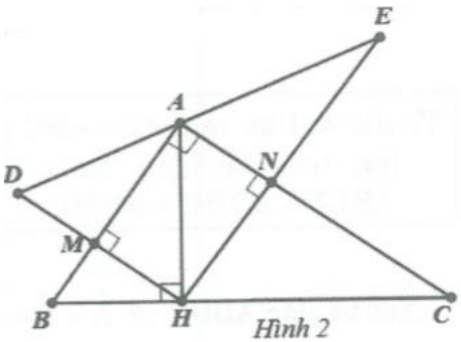
Do D đối xứng với H qua AB nên: $DAH=2.BAH(1)$

Do E đối xứng với H qua AC nên: $EAH=2.CAH(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $DAH+EAH=180^\circ\Rightarrow$ D, A, E thẳng hàng.

Vì tứ giác AMHN có $A=M=N=90^\circ\Rightarrow DHE=90^\circ$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại A:



Hình 2

$AH^2 = BH.CH \Rightarrow (2AH)^2 = 4BH.CH$

Do D và H đối xứng qua AB, E và H đối xứng với nhau qua AC nên $2.AH = DE$

Vì thế: $DE^2 = 4.BH.CH$

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác DHE vuông tại H, ta có: $DE^2 = HD^2 + HE^2$

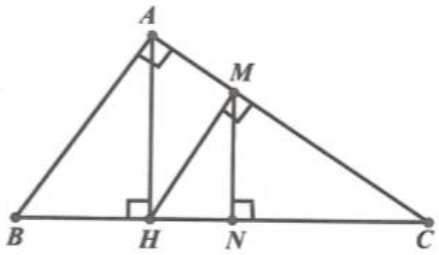
Từ đó: $HD^2 + HE^2 = 4BH.HC$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Từ H kẻ $HM \perp AC (M \in AC)$, gọi N là hình chiếu của M trên BC. Chứng minh $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{1}{MN^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác HMC vuông tại M:

$\frac{1}{MN^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{MC^2} (1)$



Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác AHC vuông tại H:

$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2} (2)$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác ABC vuông tại A:

$\frac{1}{HA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} (3)$

Từ (1) (2) và (3) ta suy ra: $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{1}{MN^2}$

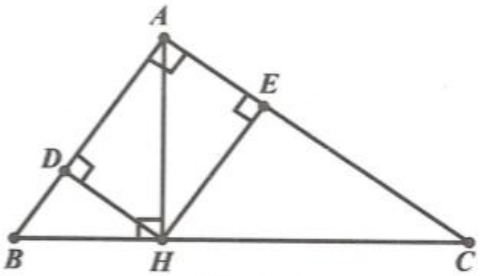
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh $AE.CE + AD.BD = BH.HC$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét tứ giác ADHE có $A = D = E = 90°$ nên ADHE là hình chữ nhật.

Suy ra: $DE = AH \Rightarrow DE^2 = AH^2 \Rightarrow HE^2 + HD^2 = AH^2 (*)$

(áp dụng định lý Pythagore cho tam giác DHE vuông tại H).



Hình 4

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHC vuông tại H:

$HE^2 = AE.CE (1)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHC vuông:

$HD^2 = AD.BD (2)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông: $AH^2 = BH.HC (3)$

Lấy (1), (2) và (3) thay vào (*) ta được: $AE.CE + AD.BD = BH.HC$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, gọi E và K lần lượt là hình chiếu của H

trên AB và AC. Chứng minh $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{HB^2}$

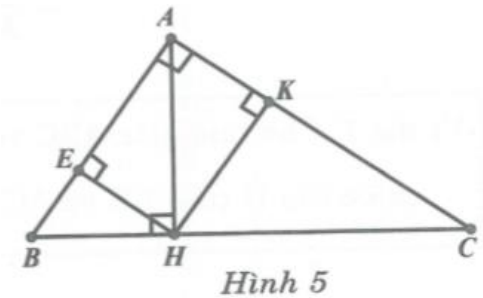
HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHB vuông ta có:

$\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{HB^2}+\frac{1}{AH^2}(1)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác ABC vuông ta có:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}(2)$



Hình 5

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{HB^2}$

Tứ giác AEHK là hình chữ nhật do có 3 góc vuông nên $AK=HE$.

Vậy $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{HB^2}$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi E, K lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC còn I là hình chiếu của A trên EK. Chứng minh $\frac{2}{AB^2}+\frac{2}{AC^2}=\frac{1}{AI^2}-\frac{1}{HB^2}-\frac{1}{HC^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta thấy tứ giác AEHK là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông nên $HK=AE;HE=AK$

Áp dụng hệ thức trong tam giác AKE vuông: $\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AK^2}$

Suy ra $\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{HE^2}(1)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHC vuông: $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{HC^2}(2)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHB vuông: $\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{HB^2}(3)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác ABC vuông: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}(4)$

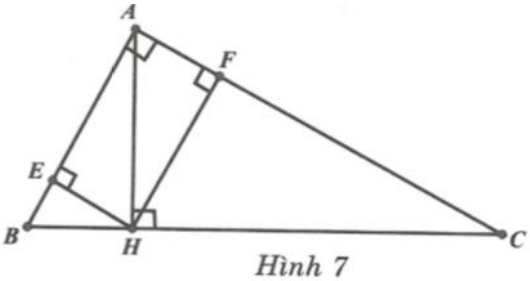
Từ (1) (2) (3) và (4) ta

có: $\frac{1}{AI^2}=2\left(\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}\right)+\frac{1}{HA^2}+\frac{1}{HB^2}\Rightarrow\frac{2}{AB^2}+\frac{2}{AC^2}=\frac{1}{AI^2}-\frac{1}{HB^2}-\frac{1}{HC^2}$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Gọi E, F là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng: $\frac{AB^3}{AC^3}=\frac{BE}{CF}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông:



Hình 7

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BH.BC}{CH.BC}=\frac{BH}{CH}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^4}{AC^4}=\frac{BH^2}{CH^2}=\frac{BE.AB}{CF.AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^3}{AC^3}=\frac{BE}{CF}$$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB, kẻ HF vuông góc với AC $(E\in AB; F\in AC)$ Gọi M, N lần lượt là hình chiếu E, F trên BC. Chứng minh:

$$\frac{AB^4}{AC^4}=\frac{BM}{CN}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Sử dụng kết quả của ví dụ 7 ta được: $\frac{AB^3}{AC^3}=\frac{BE}{CF}\Rightarrow\frac{AB^6}{AC^6}=\frac{BE^2}{CF^2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $\frac{AB^6}{AC^6}=\frac{BE^2}{CF^2}=\frac{BM.BH}{CN.CH}(1)$

Mà ta có: $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BH.BC}{CH.BC}=\frac{BH}{CH}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{AB^6}{AC^6}=\frac{BM.AB^2}{CN.AC^2}\Rightarrow\frac{AB^4}{AC^4}=\frac{BM}{CN}$

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DIL là một tam giác cân.

b) Tổng $\frac{1}{DI^2}+\frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC>AB)$. Trên cạnh AC lấy điểm B' sao cho $AB'=AB$.

Từ B' kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD tại điểm E. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BC^2}$$

Bài 3. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB=k.AD$ (k > 0, k không đổi). Qua điểm A kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại M cắt DC tại điểm I. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{(k.AI)^2}$ không đổi.

Bài 4. Cho hình vuông ABCD cạnh a không đổi. Trên đoạn AD lấy điểm F sao cho $AD = k.\text{FD}$ (k > 0, k không đổi). Từ điểm F kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại điểm M, cắt DC tại điểm I. Chứng minh $\frac{1}{FM^2} + \frac{1}{(k.\text{FI})^2}$ không đổi khi đường thẳng qua F thay đổi.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD cạnh a không đổi, lấy E và F lần lượt trên DC và AD sao cho $EC = \frac{a}{m}; FD = \frac{a}{n}$ (m, n > 0, m và n không đổi). Từ F kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại M, cắt DC tại I. Từ E kẻ đường thẳng bất kì cắt AB tại N cắt BC tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{FM^2} + \frac{1}{(n.FI)^2} = \frac{1}{EC^2} + \frac{1}{(m.EK)^2}$$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD cạnh a lấy E, F lần lượt trên cạnh DC và DA sao cho $EC = \frac{a}{m}; FD = \frac{a}{n}(m, n > 0)$. Từ F kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại M, cắt DC tại I. Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với FI cắt AB tại N, cắt BC tại K. Chứng minh: $\frac{EK}{FI} = \frac{m}{n}$

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Gọi I là giao điểm của AH và EF. Chứng minh rằng: $BH.CH = 4.IE.IF$

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên đoạn HC và HB lần lượt lấy M và N sao cho $AMB = ANC = 90°$. Chứng minh $AM = AN$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền BC không đổi. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Xác định hình dạng của tam giác ABC để diện tích ADHE đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của AC. Đường thẳng qua A vuông góc với BM cắt BC tại D. Tính $\frac{DC}{DB}$

Bài 11. Cho ABCD là hình thang có AB // CD sao cho tồn tại điểm O cách đều bốn cạnh của hình thang. Một đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt AB và CD lần lượt tai E và F. Chứng minh $\frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF}$

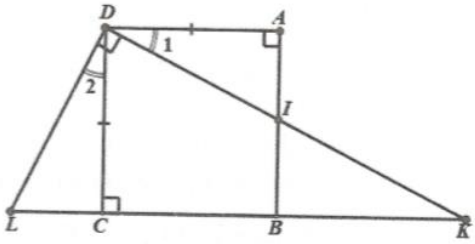
Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ HD vuông góc với AB, HE vuông góc với AC (D ∈ AB; E ∈ AC). Chứng minh rằng: $AD.AB = AE.\text{AC} = \text{HB.HC}$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) ΔADI = ΔCDL(g.c.g)

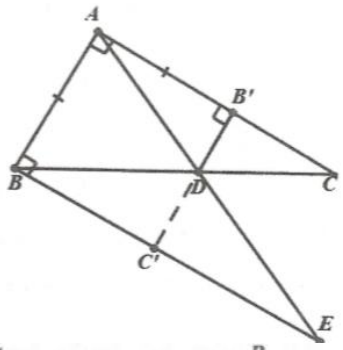
$\Rightarrow DI = DL \Rightarrow$ ΔDIL cân.



b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác DLK vuông tại D:

$\frac{1}{DL^2}+\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{DC^2}\Rightarrow\frac{1}{DI^2}+\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{DC^2}$ không đổi

Bài 2.



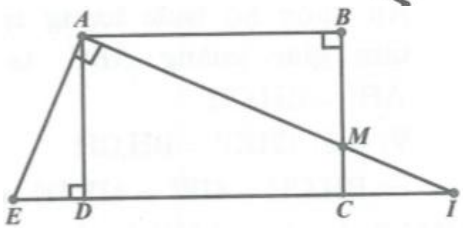
Gọi C' là giao điểm của B'D với BE như hình vẽ:

$\Rightarrow$ ABC'B' là hình vuông cạnh a.

Theo bài trên thì: $\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{a^2}$ và $\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{a^2}$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 3.

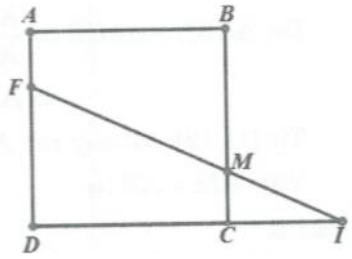


Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt cắt DC tại E. Ta thấy:

$\Delta ABM\sim\Delta ADE(g.g)\Rightarrow\frac{AM}{AE}=\frac{AB}{AD}=k\Rightarrow AM=k.AE$

Vậy $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{(k.AI)^2}=\frac{1}{(k.AE)^2}+\frac{1}{(k.AI)^2}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AI^2}\right)=\frac{1}{k^2AD^2}$ không đổi

Bài 4.



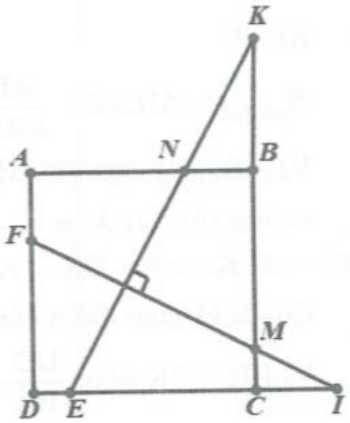
Theo bài 3 thì $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(k.FI)^2}=\frac{1}{k^2}.\frac{1}{FD^2}$

Cơ mà $FD=\frac{a}{k}$ nên $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(k.FI)^2}=\frac{1}{a^2}$ không đổi

Bài 5.

Theo bài 4 thì: $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{a^2}$ và $\frac{1}{EN^2}+\frac{1}{(m.EK)^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow$ đpcm

Bài 6.

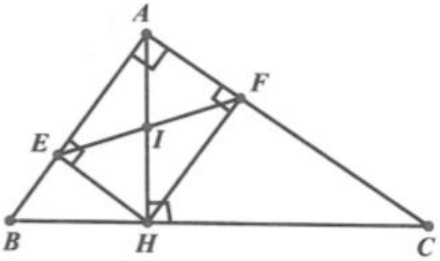


Theo bài 4 thì: $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{EN^2}+\frac{1}{(m.EK)^2}$

Vì $EN\perp FM\Rightarrow EN=FM\Rightarrow\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{(m.EK)^2}$

$\Rightarrow\frac{EK}{FI}=\frac{n}{m}$ (đpcm).

Bài 7.



Ta thấy ΔEHF là hình chữ nhật nên: $2IE=2IF=AH$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có

$AH^2=BH.CH$

Vì thế $(2IE)^2=BH.CH\Rightarrow BH.CH=4IE^2=4IE.IF$

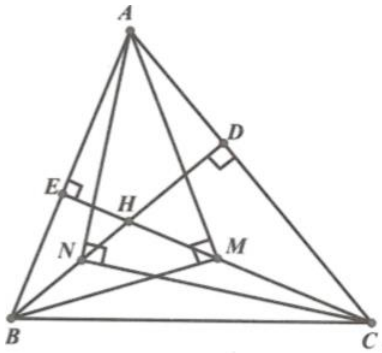
Bài 8.

Áp dụng hệ thức cho tam giác ABM vuông tại M

$AM^2 = AE.AB(1)$

Áp dụng hệ thức cho tam giác ACN vuông tại N

$AN^2 = AD.AC(2)$



Do $\Delta ABD \sim \Delta ACE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD.AC = AE.AB(3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $AM^2 = AN^2$

Vậy $AM = AN$

Bài 9.

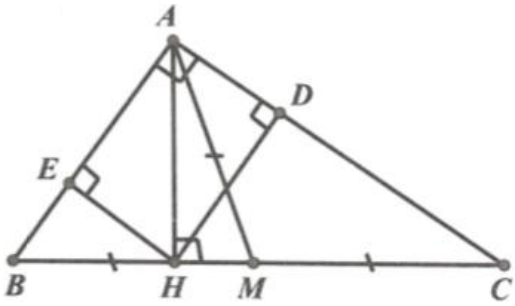
Gọi AM là đường trung tuyến của tam giác ABC $\Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$ không đổi

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHB

$AE.AB = AH^2 \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHC

$AD.AC = AH^2 \Rightarrow AD = \frac{AH^2}{AC}$



Khi đó $S_{ADHE} = AD.AE = \frac{AH^4}{AB.AC} = \frac{AH^4}{AH.BC} = \frac{AH^3}{BC} \le \frac{AM^3}{BC} = \frac{BC^2}{8}$ (không đổi)

Vậy S_{ADHE} đạt giá trị lớn nhất khi H trùng với M hay ABC là tam giác vuông cân tại A

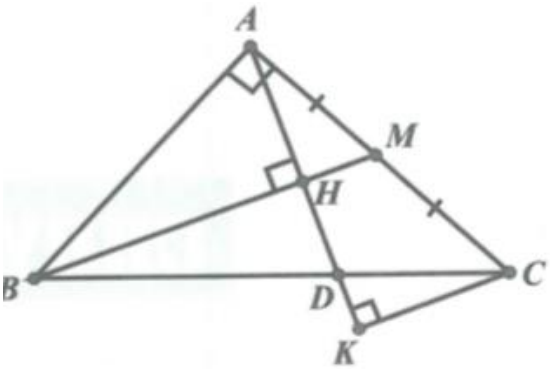
Bài 10.

Kẻ thêm $CK \perp AD; K \in AD$

Gọi H là giao điểm của AD với BM.

Vì BH // CK nên: $\frac{DC}{DB} = \frac{CK}{BH}(1)$

Mà $CK = 2HM$ nên $\frac{DC}{DB} = \frac{2HM}{BH}(2)$



Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác ta có:

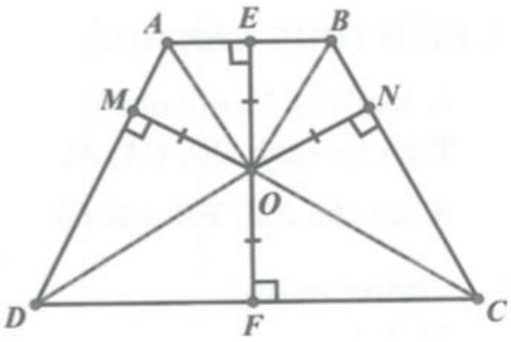
$\frac{AM^2}{AB^2} = \frac{HM.BM}{BH.BM} \Rightarrow \frac{HM}{BH} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Thay vào (2) ta được: $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$

Bài 11.

Do AB // CD nên $A + D = 180°$

$\Rightarrow A+ADO=90^\circ \Rightarrow$ ΔAOD vuông tại O.



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông. Ta có

$$\left.\begin{array}{l} OM^2 = AM.DM \\ ON^2 = BN.CN \end{array}\right\} \Rightarrow AM.DM = BN.CN$$

Vì theo tính chất tam giác bằng nhau nên:

$AM = AE; DM = DF; BN = BE; CN = CF$

Từ đó suy ra: $AE.\mathrm{DF} = \mathrm{BE}.\mathrm{CF} \Rightarrow \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{DF}{CF}$

Bài 12.

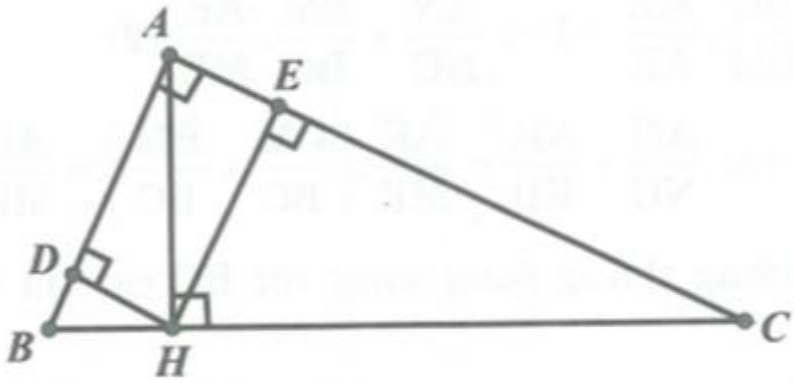
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$AD.AB = AH^2$

$AE.AC = AH^2$

$BH.CH = AH^2$

Từ đó suy ra: $AD.AB = AE.AC = HB.HC$



BÀI TOÁN 9.

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ VAN AUBEL ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

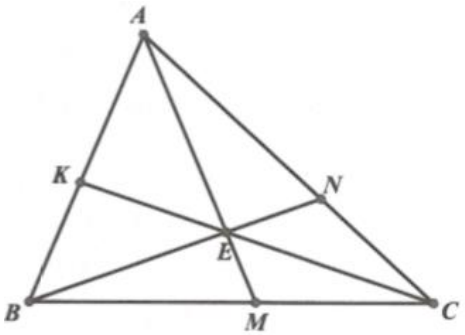
1. Định lý Van Aubel:

Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm M, N, K sao cho AM, BN, CK đồng quy tại E. Khi đó: $\dfrac{AE}{EM} = \dfrac{AK}{KB} + \dfrac{AN}{NC}$

Chứng minh:

Cách 1:

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABM đối với ba điểm K, E, C thẳng hàng, ta có:



Hình 1

$\frac{AK}{KB}.\frac{BC}{CM}.\frac{ME}{AE}=1\Rightarrow\frac{AK}{KB}=\frac{CM}{BC}.\frac{AE}{ME}(1)$

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACM đối với ba điểm B, E, N thẳng hàng, ta có:

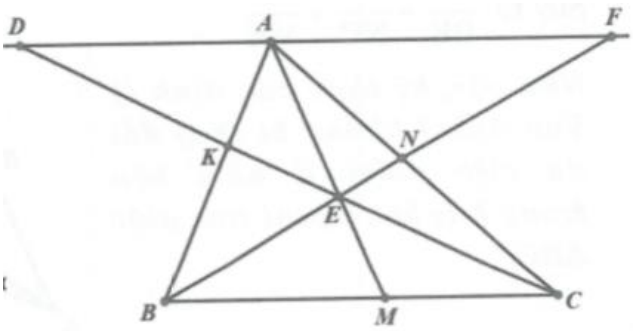
$\frac{AN}{NC}.\frac{BC}{BM}.\frac{ME}{AE}=1\Rightarrow\frac{AN}{NC}=\frac{BM}{BC}.\frac{AE}{ME}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AN}{NC}+\frac{AK}{KB}=\frac{AE}{ME}.\left(\frac{CM}{BC}+\frac{BM}{BC}\right)=\frac{AE}{ME}$

Cách 2: Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia CK, tia BN lần lượt tại D và F.

Áp dụng hệ quả định lý Thales, ta có:

$\frac{AE}{EM}=\frac{AD}{CM}=\frac{AF}{BM}$



Hình 1

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được

$\frac{AE}{EM}=\frac{AD+AF}{CM+BM}=\frac{AD+AF}{BC}=\frac{AD}{BC}+\frac{AF}{BC}(1)$

Áp dụng hệ quả định lý Thales, ta có:

$\frac{AD}{BC}=\frac{AK}{KB}(2)$

Và $\frac{AF}{BC}=\frac{AN}{NC}(3)$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được $\frac{AE}{EM}=\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}$

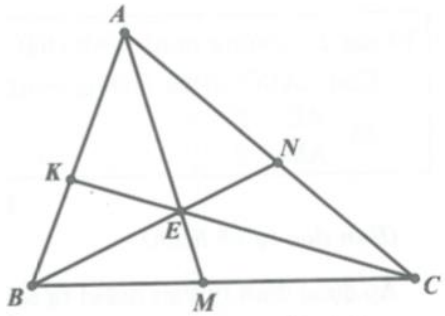
Cách 3.

Ta có

$\frac{AK}{KB}=\frac{S_{AKE}}{S_{BKE}}=\frac{S_{AEC}}{S_{BEC}}$

$\frac{AN}{NC}=\frac{S_{ANE}}{S_{CEN}}=\frac{S_{AEB}}{S_{BEC}}$

Suy ra $\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}=\frac{S_{AEC}+S_{AEB}}{S_{BEC}}(1)$



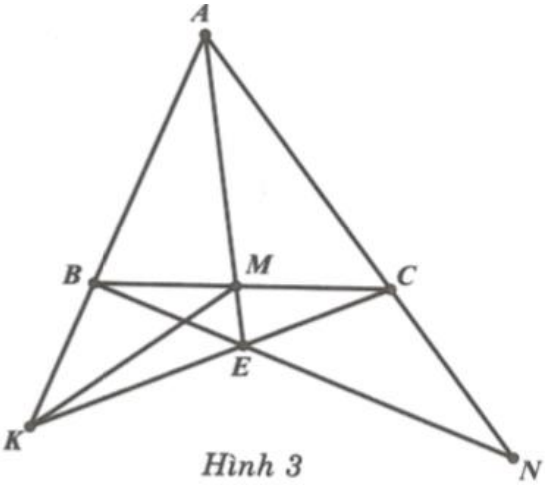
Hình 2

Lại có $\frac{AE}{ME}=\frac{S_{AEB}}{S_{BEM}}=\frac{S_{AEC}}{S_{CEM}}=\frac{S_{AEB}+S_{ABC}}{S_{BEM}+S_{CEM}}=\frac{S_{AEB}+S_{AEC}}{S_{BEC}}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}=\frac{AE}{ME}$

2. Nhận xét:

* Trường hợp: Điểm E nằm ngoài tam giác ABC, điểm M nằm trên cạnh BC còn điểm K, N là hai điểm nằm trên tia AB, tia AC, (hình 4) khi đó:



Hình 3

Ta có $\frac{AE}{EM}=\frac{S_{ABE}}{S_{BEM}}=\frac{S_{ACE}}{S_{CEM}}=\frac{S_{ABE}+S_{ACE}}{S_{BEM}+S_{CEM}}=\frac{S_{ABEC}}{S_{BEC}}$

Ta có $\frac{AK}{BK}=\frac{S_{AKC}}{S_{BKC}}=\frac{S_{AKE}}{S_{BKE}}=\frac{S_{AKC}-S_{AKE}}{S_{BKC}-S_{BKE}}=\frac{S_{AEC}}{S_{BEC}}$

Tương tự $\frac{AN}{NC}=\frac{S_{AEB}}{S_{BEC}}$

Suy ra $\frac{AK}{BK}+\frac{AN}{NC}=\frac{S_{AEC}}{S_{BEC}}+\frac{S_{AEB}}{S_{BEC}}=\frac{S_{ABEC}}{S_{BEC}}$

Suy ra $\frac{AK}{BK}+\frac{AN}{NC}=\frac{AE}{ME}$

Như vậy, hệ thức của định lý Van Auhel không bị thay đổi do việc điểm E nằm bên trong hay bên ngoài tam giác ABC.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Chứng minh tính chất trọng tâm của tam giác)

Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CK cắt nhau tại E. Khi đó $\frac{AE}{AM}=\frac{2}{3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

(Bạn đọc tự vẽ hình)

Áp dụng định lý Van Aubel ta có: $\frac{AE}{AM}=\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}=1+1=2\Rightarrow AE=2EM$

Vậy $\frac{AE}{AM}=\frac{2}{3}$

Nhận xét: Bài này có thể chứng minh bằng sử dụng đường trung bình của tam giác.

Ví dụ 2. Cho ΔABC có $BC=a;AC=b;AB=c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tia AI cắt BC tại A'. Chứng minh $\frac{AI}{IA'}=\frac{c+b}{a}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi tia CI cắt AB tại C', tia BI cắt AC tại B'

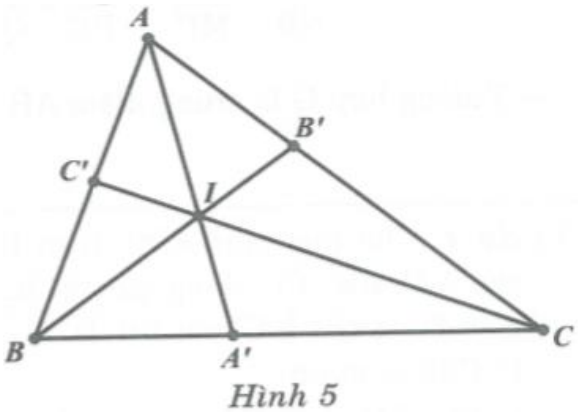
Áp dụng định lý Van Aubel cho ΔABC ta có:

$\frac{AI}{IA'}=\frac{AB'}{B'C}+\frac{AC'}{C'B}$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác thì:

$\frac{AB'}{B'C}=\frac{c}{a};\frac{AC'}{C'B}=\frac{b}{a}$

Từ đó $\frac{AI}{IA'}=\frac{c+b}{a}$



Hình 5

Ví dụ 3. Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy 3 điểm H, M, N sao cho AH, BM, CN đồng quy tại G. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN với BM và HM với CN. Tia AP, AQ cắt cạnh BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=3.\left(\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}\right)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng định lý Van Aubel cho tam giác ABH với AE, BG, HN đồng quy:

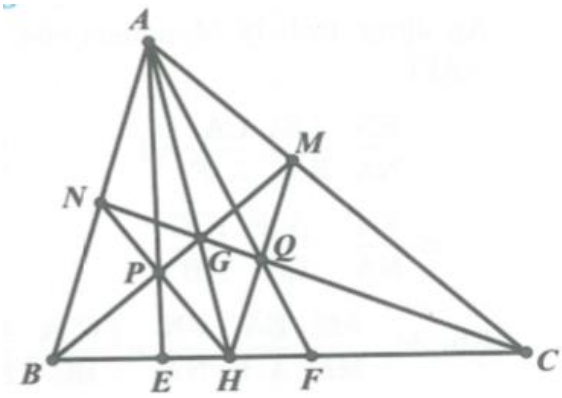
$$\frac{AP}{PE}=\frac{AN}{NB}+\frac{AG}{GH}(1)$$

Áp dụng định lý Van Aubel cho tam giác AHC với AF, CG, HM đồng quy:

$$\frac{AQ}{QF}=\frac{AM}{MC}+\frac{AG}{GH}(2)$$

Áp dụng định lý Van Aubel cho tam giác ABC với AH, CN, BM đồng quy

$$\frac{AG}{GH}=\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}(3)$$



Hình 6

Từ (1) (2) (3) suy ra: $\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=3.\left(\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}\right)$

Nhận xét:

- Trường hợp H là trung điểm BC thì MN // BC hay $\frac{AN}{NB}=\frac{AM}{MC}\Rightarrow\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=6.\frac{AN}{NB}$

- Trường hợp G là trung điểm AH thì $\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}=1\Rightarrow\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=3$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, trên BC, CA, AB lần lượt lấy A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại K. Gọi giao điểm của A'B' với CC' là N, giao điểm của A'C' với BB' là M. Tia AM, AN lần lượt cắt BC tại E và F. Chứng minh:

a) *EN, FM, AA'* đồng quy tại I.

$b) AI.KA'=3.IA'.AK$

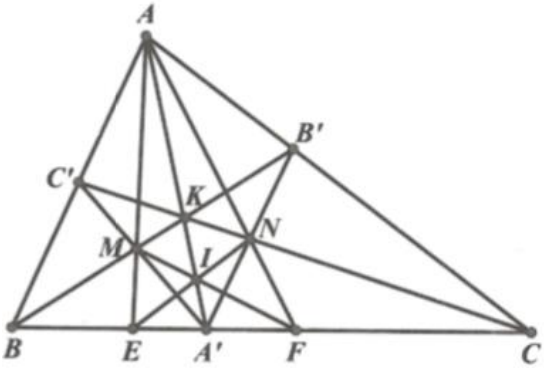
HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABE

$$\frac{AM}{ME}.\frac{EA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A}=1$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{ME}=\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{EA'}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔAFC



Hình 7

$\frac{FN}{NA}.\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'F}=1$

$\Rightarrow \frac{FN}{NA}=\frac{A'F}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}$

Khi đó $\frac{AM}{ME}.\frac{EA'}{A'F}.\frac{FN}{NA}=\left(\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{EA'}\right).\frac{EA'}{A'F}.\left(\frac{A'F}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}\right)$

$=\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}=1$ (do AA',BB',CC' đồng quy tại K)

Vì $\frac{AM}{ME}.\frac{EA'}{A'F'}.\frac{FN}{NA}=1$ theo định lý Ceva thì AA', EN và FM đồng quy tại điểm I.

b) Áp dụng định lý Van Aubel cho ΔABA', ΔACA', ΔAEF ta được:

$\frac{AM}{ME}=\frac{AK}{KA'}+\frac{AC'}{C'B}(1);\frac{AN}{NF}=\frac{AK}{KA'}+\frac{AB'}{B'C}(2);\frac{AM}{ME}+\frac{AN}{NF}=\frac{AI}{IA'}(3)$

Thay (1), (2) vào (3) ta được: $2.\frac{AK}{KA'}+\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}=\frac{AI}{IA'}(4)$

Áp dụng tiếp định lý Van Aubel cho tam giác ABC: $\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}=\frac{AK}{KA'}$

Thay vào (4) ta được $3.\frac{AK}{KA'}=\frac{AI}{IA'}$

$\Rightarrow 3.AK.IA'=KA'.AI$

Ví dụ 5. Cho K là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D là giao điểm của AK với BC, E là giao điểm của BK với AC còn F là giao điểm của CK với AB. Chứng minh rằng $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}\geq 6$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng định lý Van Aubel cho tam giác ABC:

$\frac{AK}{KD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB};\frac{BK}{KE}=\frac{FB}{AF}+\frac{BD}{DC};\frac{KC}{FK}=\frac{EC}{AE}+\frac{DC}{BD}$

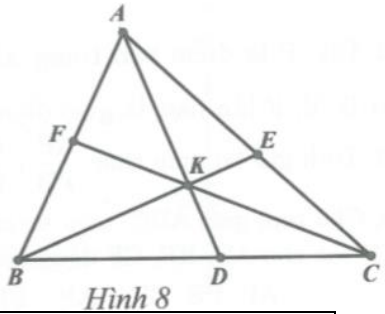
Cộng hai vế của các đẳng thức ta được:

$\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{KC}{FK}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}+\frac{FB}{AF}+\frac{BD}{DC}+\frac{EC}{AE}+\frac{DC}{BD}=\left(\frac{AE}{EC}+\frac{EC}{AE}\right)+\left(\frac{AF}{FB}+\frac{FB}{AF}\right)+\left(\frac{BD}{DC}+\frac{DC}{BD}\right)\geq 6$

(theo bất đẳng thức AM - GM)

Dấu "=" xảy ra khi K là trọng tâm của tam giác ABC.

Nhận xét: **HƯỚNG DẪN GIẢI** sử dụng định lý Van Aubel rất tự nhiên và đơn giản hơn phương pháp sử dụng diện tích để chứng minh bài này!!



Hình 8

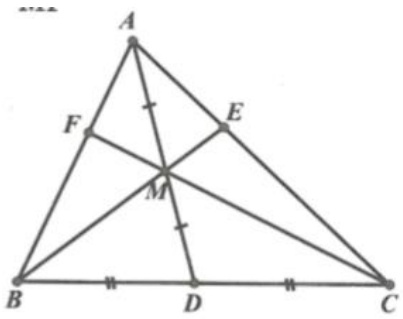
Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD, gọi M là trung điểm AD, giao điểm của BM

với AC là E, giao điểm của CM với AB là F. Chứng minh rằng: $\frac{MF}{CM-MF}+\frac{ME}{BM-ME}=1$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng định lý Van Aubel và do D là trung điểm của BC nên:

$$\frac{BM}{ME}=\frac{BF}{AF}+\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{BF}{AF}=\frac{BM}{ME}-1=\frac{BM-ME}{ME}(1)$$
$$\frac{CM}{MF}=\frac{CE}{AE}+\frac{CD}{BD}\Rightarrow\frac{EC}{AE}=\frac{CM}{MF}-1=\frac{CM-MF}{MF}(2)$$



Hình 9

Áp dụng định lý Van Aubel và do M là trung điểm của AD nên:

$$\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{AM}{MD}\Rightarrow\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{BF}=1(3)$$

Từ (1) (2) và (3) ta có: $\frac{MF}{CM-MF}+\frac{ME}{BM-ME}=1$

III. MỘT SỐ BÀI TẬP ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VAN AUBEL

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), các đường thẳng AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đặt $\frac{BD}{DC}=x;\frac{CE}{EA}=y;\frac{AF}{FB}=z$. Chứng minh rằng

$$\frac{h_a}{xz+z+1}+\frac{h_b}{yx+x+1}+\frac{h_c}{zy+y+1}=R+r$$

Bài 2. Cho P là điểm bên trong ΔABC có thỏa mãn $\frac{S_{PBC}}{a}=\frac{S_{PAC}}{b}=\frac{S_{PBA}}{c}$ Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AP với BC, BP với AC và CP với AB. Tính giá trị biểu thức $\frac{AP}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{CP}{PF}$ theo a, b, c

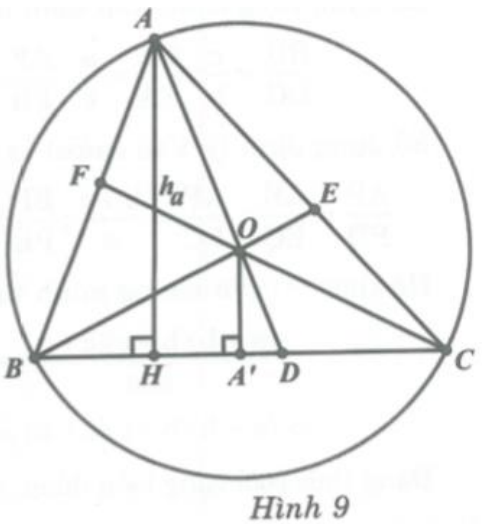
Bài 3. Cho tam giác ABC, trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy 3 điểm D, E, F sao cho AD, BE, CF đồng quy tại P. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PD}.\frac{PB}{PE}.\frac{CP}{PF}=\frac{AP}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{CP}{PF}+2(*)$

Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB=c;BC=a;CA=b$, và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, AC, AB tại A' , B' , C' . Chứng minh rằng

$$\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'}\le\frac{8}{27}$$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Sử dụng định lý Ceva: $\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}.\frac{AF}{BF}=1\Rightarrow xyz=1$



Hình 9

Sử dụng định lý Van Aubel:

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AO}{OD}=z+xz$$
$$\Rightarrow xz+z+1=\frac{AD}{OD}\Rightarrow\frac{h_a}{xz+z+1}=\frac{OD}{AD}.h_a$$

Gọi A' là trung điểm BC, sử dụng Thales:

$$\frac{OA'}{h_a}=\frac{OD}{AD}\Rightarrow\frac{h_a}{xz+z+1}=OA'$$

Tương tự gọi B' và C' lần lượt là trung điểm AC và AB ta có:

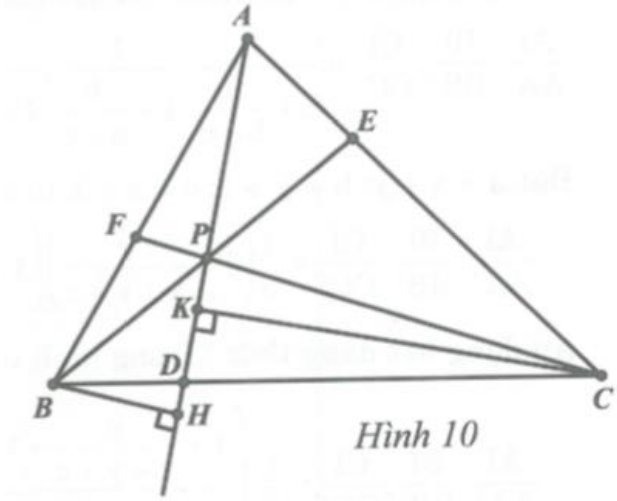
$$\frac{h_a}{xz+z+1}+\frac{h_b}{yx+x+1}+\frac{h_c}{zy+y+1}=OA'+OB'+OC'$$

Sử dụng hệ thức Carnot thì: $OA'+OB'+OC'=R+r$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2. Sử dụng công thức tính diện tích tam giác:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}}=\frac{BH}{CK}=\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$$



Hình 10

Tương tự $\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c};\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a}$

Áp dụng định lý Van Aubel:

$$\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{c+a}{a}$$
$$\frac{PB}{PE}=\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{DC}=\frac{a+c}{b}$$
$$\frac{CP}{PF}=\frac{CE}{AE}+\frac{CD}{DB}=\frac{a+b}{c}$$

Từ đó sẽ tính được giá trị của biểu thức $\frac{AP}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{CP}{PF}$

Bài 3. Kí hiệu $S_{PBC}=a;S_{APC}=b;S_{BPA}=c$

Sử dụng công thức tính diện tích tam giác ta có:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b};\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c};\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a}$$

Sử dụng định lý Van Aubel ta có:

$$\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FC}=\frac{b+c}{a};\frac{BP}{PE}=\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{DC}=\frac{a+c}{b};\frac{CP}{PF}=\frac{CD}{DB}+\frac{CE}{EA}=\frac{a+b}{c}$$

Hệ thức (*) cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+2$$
$$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$$

Đẳng thức cuối cùng luôn đúng, vậy nên đẳng thức (*) đã được chứng minh.

Bài 4.

Ta có $\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'}=\frac{1}{1+\frac{IA'}{AI}}.\frac{1}{1+\frac{IB'}{BI}}.\frac{1}{1+\frac{IC'}{CI}}$

Sử dụng định lý Van Aubel có kết quả ở ví dụ 2 ta được:

$$\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'}=\frac{1}{1+\frac{a}{b+c}}.\frac{1}{1+\frac{b}{a+c}}.\frac{1}{1+\frac{c}{a+b}}=\frac{b+c}{a+b+c}.\frac{a+c}{a+b+c}.\frac{a+b}{a+b+c}$$

Đặt $a=x+y;b=y+z;c=z+x$ ta có

$$\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{y}{x+y+z}\right)\left(1+\frac{z}{x+y+z}\right)\left(1+\frac{x}{x+y+z}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức "Trung bình cộng - Trung bình nhân" ta có:

$$\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1+\frac{y}{x+y+z}+1+\frac{z}{x+y+z}+1+\frac{x}{x+y+z}}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

Dấu = xảy ra khi ABC là tam giác đều.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRÍCH TRONG CÁC ĐỀ THI CHUYÊN VÀ HSG

Bài 1. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A, kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB.

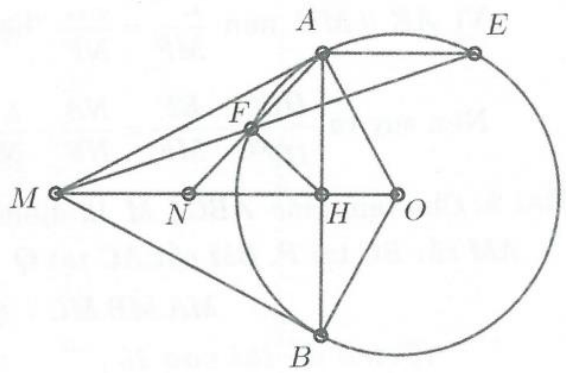
1) Chứng minh: Tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$ và $MN = NH$.

3) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$

(Trích đề thi vào 10, Hải Dương, Năm học 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) $MAO = MBO = 90^\circ \Rightarrow MAO + MBO = 180^\circ$

Mà hai góc đối nhau nên tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

2) Chỉ ra $\Delta MNF \backsim \Delta ANM$ (g.g)

suy ra $MN^2 = NF.NA$

Chỉ ra $\Delta NFH \backsim \Delta AFH$ (g.g)

suy ra $NH^2 = NF.NA$

Vậy $MN^2 = NH^2$ suy ra $MN = NH$.

Có $MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB = R$.

Suy ra MO là đường trung trực của AB, nên $AH \perp MO$ và $HA = HB$.

Xét hai tam giác ΔMAF và ΔMEA có:

AME chung, $MAF = AEF$

nên $\Delta MAF \backsim \Delta MEA$ (g.g), suy ra $\dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MF}{MA} \Rightarrow MA^2 = MF.ME$

Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông MAO, có: $MA^2 = MH.MO$

Do đó: $ME.MF = MH.MO$ hay $\dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MO}{MF}$

Suy ra $\Delta MFH \backsim \Delta MOE$, do đó $MHF = MEO$.

Vì BAE là góc vuông nội tiếp (O) nên E, O, B thẳng hàng.

Suy ra $FEB = FAB \left(= \dfrac{1}{2} sdEB \right) \Rightarrow MHF = FAB$

Nên $ANH + NHF = ANH + FAB = 90^\circ \Rightarrow HF \perp NA$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông NHA, có:

$NH^2 = NF.NA \Rightarrow NM^2 = NH^2 \Rightarrow NM = NH$

3) Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông *NHA*, có:

$HA^2 = FA.NA$ và $HF^2 = FA.FN$

Mà $HA = HB$ nên $\frac{HB^2}{HF^2} = \frac{HA^2}{HF^2} = \frac{FA.NA}{FA.FN} = \frac{NA}{NF}$,

suy ra $HB^2 = AF.AN$ (vì $HA = HB$)

Vì $AE//MN$ nên $\frac{EF}{MF} = \frac{FA}{NF}$ (hệ quả của định lí Thales)

Nên suy ra $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = \frac{NA}{NF} - \frac{FA}{NF} = \frac{NF}{NF} = 1$ (đpcm)

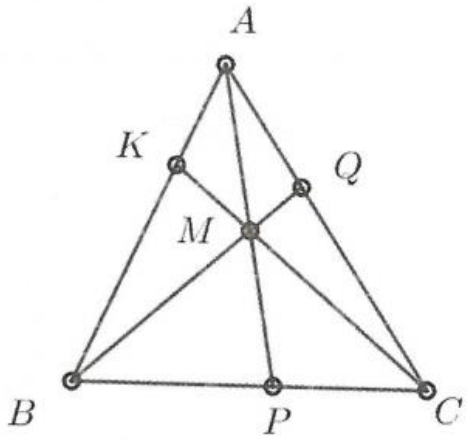
Bài 2. Cho tam giác *ABC*, *M* là điểm bất kì nằm trong tam giác. Kéo dài *AM* cắt *BC* tại *P*, *BM* cắt *AC* tại *Q*, *CM* cắt *AB* tại *K*. Chứng minh rằng

$MA.MB.MC \geq 8MP.MQ.MK$

(Trích đề thi vào 10 , Tỉnh Thái Bình, Năm học 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đặt $a = S_{\Delta MBC}; b = S_{\Delta MAC}; c = S_{\Delta MAB}$. Ta có:



$\frac{MA}{MP} = \frac{b+c}{a} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{a}, \frac{MB}{MQ} = \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{c},$

$\frac{MC}{MK} = \frac{a+c}{b} \geq \frac{2\sqrt{ac}}{b}.$

Suy ra $\frac{MA}{MP}.\frac{MB}{MQ}.\frac{MC}{MK} \geq 8$

$\Rightarrow MA.MB.MC \geq 8MP.MQ.MK$

Dấu "=" xảy ra khi *M* là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 3. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn $O;R$. Gọi *I* là giao điểm *AC* và *BD*. Kẻ *IH* vuông góc với *AB*; *IK* vuông góc với *AD* ($H \in AB; K \in AD$).

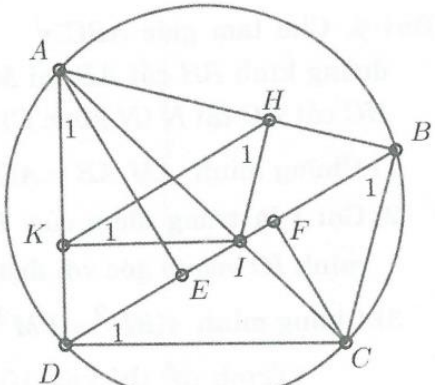
1) Chứng minh tứ giác *AHIK* nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh rằng $IA.IC = IB.ID$.

3) Chứng minh rằng tam giác *HIK* và tam giác *BCD* đồng dạng.

4) Gọi *S* là diện tích tam giác *ABD*, *S'* là diện tích tam giác *HIK*. Chứng minh rằng:

$\frac{S'}{S} \leq \frac{HK^2}{4.AI^2}$



(Trích đề thi vào 10, Tỉnh Phú Thọ, năm học 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Tứ giác *AHIK* có: $AHI = 90^\circ$ $IH \perp AB$,

$AKI = 90^\circ$ $IK \perp AD$

$\Rightarrow AHI + AKI = 180^\circ$

Do đó tứ giác *AHIK* nội tiếp.

2) Xét ΔIAD và ΔIBC có:

$A_1 = B_1$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DC của O)

$AID = BIC$ (2 góc đối đỉnh),

suy ra $\Delta IAD \backsim \Delta IBC$ (g.g)

do đó $\frac{IA}{IB} = \frac{ID}{IC} \Rightarrow IA.IC = IB.ID$

3) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AHIK* có $A_1 = H_1$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IK)

Mà $A_1 = B_1 \Rightarrow H_1 = B_1$

Chứng minh tương tự, ta được $K_1 = D_1$

Xét ΔHIK và ΔBCD có: $H_1 = B_1; K_1 = D_1$ nên $\Delta HIK \backsim \Delta BCD$ (g.g)

4) Gọi S_1 là diện tích của ΔBCD. Vì $\Delta HIK \backsim \Delta BCD$ nên:

$$\frac{S'}{S_1} = \frac{HK^2}{BD^2} = \frac{HK^2}{IB + ID^2} \le \frac{HK^2}{4IB.ID} = \frac{HK^2}{4IA.IC} \quad (1)$$

Vẽ $AE \perp BD, CF \perp BD \Rightarrow AE // CF \Rightarrow \frac{CF}{AE} = \frac{IC}{IA}$

ΔABD và ΔBCD có chung cạnh đáy *BD* nên:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{CF}{AE} \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{IC}{IA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{S'}{S_1}.\frac{S_1}{S} \le \frac{HK^2}{4IA.IC}.\frac{IC}{IA} \Leftrightarrow \frac{S'}{S} \le \frac{HK^2}{4IA^2} \text{ (đpcm).}$$

Bài 4. Cho tam giác *ABC* vuông tai *A* đường cao *AH* đường tròn tâm *E* đường kính *BH* cắt *AB* tại *M* (*M* khác *B*), đường tròn tâm *F* đường kính *HC* cắt *AC* tại *N* (*N* khác *C*)

1) Chứng minh $AM.AB = AN.AC$ và $AN.AC = MN^2$.

2) Gọi *I* là trung điểm của *EF*, *O* là giao điểm của *AH* và *MN*. Chứng minh *IO* vuông góc với đường thẳng *MN*.

3) Chứng minh $4\ EN^2 + FM^2 = BC^2 + 6AH^2$.

(Trích đề thi vào 10, Tỉnh Nam Định, Năm học 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Ta có $BMH = HNC = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $HM \perp AB, HN \perp AC$.

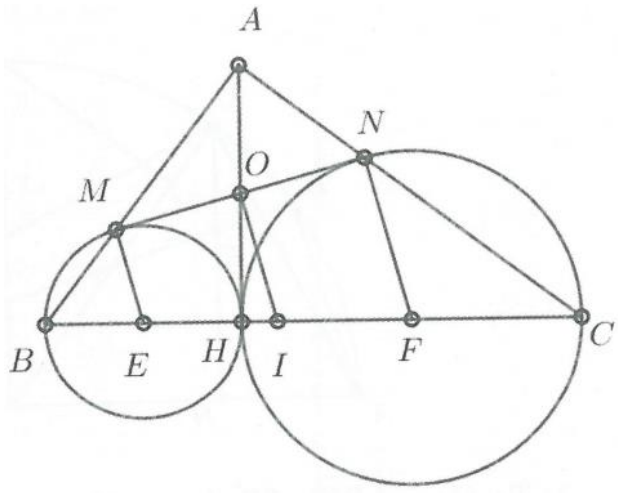
Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông *AHB* và *AHC*, có

$AH^2 = AM.AB$ và $AH^2 = AN.AC \Rightarrow AM.AB = AN.AC$

Mặt khác, tứ giác *AMHN* có ba góc vuông nên là hình chữ nhật khi đó

$AH = MN \Rightarrow AN.AC = MN^2$

2) Tứ giác AMHN là hình chữ nhật, có O là giao điểm của AH và MN. Suy ra O là trung điểm của AH và MN. Khi đó



$\Delta EMO = \Delta EHO$ (c.c.c)

$\Rightarrow EMO = EHO = 90^\circ$

$\Rightarrow EM \perp MN$

Chứng minh tương tự ta có

$FN \perp MN$.

Suy ra $ME // NF \Rightarrow MEFN$ là hình thang vuông.

Mà *OI* là đường trung bình của hình thang vuông *MEFN* nên

$OI \perp MN$.

3) Đặt $MN = AH = h, x, y$ lần lượt là bán kính của đường tròn E và F.

Ta có $4\ EN^2 + FM^2 = 4\left[\ ME^2 + MN^2\ +\ ME^2 + MN^2\ \right]$

$= 4\ x^2 + y^2 + 2h^2$

$BC^2 + 6AH^2 = \ HB + HC\ ^2 + 6h^2 = HB^2 + HC^2 + 2HB.HC + 6h^2$

$= 4x^2 + 4y^2 + 2h^2 + 6h^2 = 4\ x^2 + y^2 + 2h^2$

Vậy $4\ EN^2 + FM^2 = BC^2 + 6AH^2$

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB* và *C* là một điểm trên nửa đường tròn (*C* khác *A* và *B*). Trên cung *AC* lấy điểm *D* (*D* khác *A* và *C*). Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *C* trên *AB* và *E* là giao điểm của *BD* và *CH*.

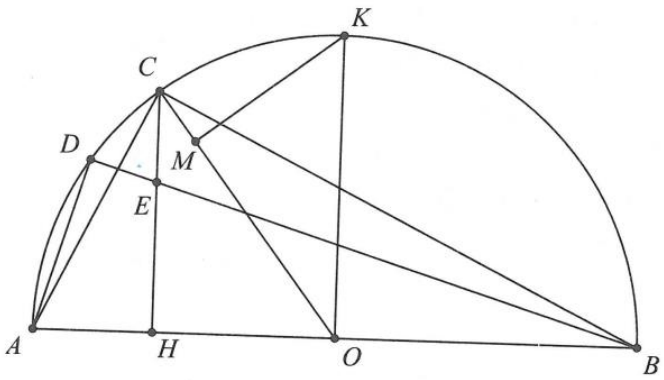
1) Chứng minh *ADEH* là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $ACO = HCB$ và $AB.AC = AC.AH + CB.CH$

3) Trên đoạn OC lấy điểm M sao cho $OM = CH$. Chứng minh rằng khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho thì M chạy trên một đường cố định.

(Trích đề thi vào 10 TP Đà Nẵng, năm học 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Ta có: $ADE = 90^\circ$ (góc nội ti

và $AHE = 90^\circ$ (do $CH \perp AB$)

Suy ra $ADE + AHE = 180^\circ$ suy ra, tứ giác $ADEH$ nội tiếp.

2) Ta có: $ACO = CAO$ (ΔOAC cân tại O).

$ACO = HCB$ (cùng phụ CBH).

Suy ra: $ACO = HCB$.

Xét ΔACB và ΔCHB có: $ACB = CHB = 90^\circ$, ABC chung.

Suy ra $\Delta ACB \backsim \Delta CHB \Rightarrow \dfrac{AC}{CH} = \dfrac{BC}{BH} \Rightarrow AC.BH = CB.CH$ (*)

Mà $BH = AB - AH$ thay vào (*) ta được:

$AC.AB = AC.AH + CB.CH$ (đpcm).

3) Gọi K là điểm chính giữa cung AB (chứa điểm C).

Suy ra $OK \perp AB \Rightarrow OK // HC$.

Xét ΔOMK và ΔCHO có:

$MOK = HCO$ (so le trong), $OM = CH$ (giả thiết), $OK = CO$ (cùng bằng bán kính). Suy ra $\Delta OMK = \Delta CHO$ (c.g.c).

Suy ra $OMK = CHO$ (hai góc tương ứng bằng nhau)

Mà $CHO = 90^\circ \Rightarrow OMK = 90^\circ$

Vậy M chạy trên đường tròn đường kính OK cố định. (đpcm).

Bài 6. Cho hình vuông *ABCD* nội tiếp đường tròn O . Điểm *M* thuộc cung nhỏ *CD* của O , *M* khác *C* và *D*. *MA* cắt *DB*, *DC* theo thứ tự *X*, *Z*; *MB* cắt *CA*, *CD* tại *Y*, *T*; *CX* cắt *DY* tại *K*.

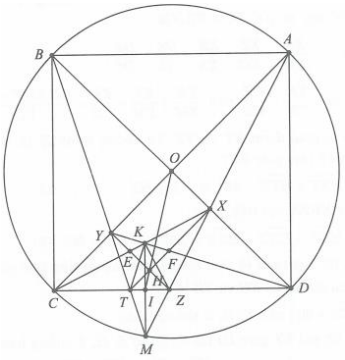
1) Chứng minh rằng: $MXT = TXC, MYZ = ZYD$ và $CKD = 135^\circ$.

2) Chứng minh rằng: $\frac{KX}{MX} + \frac{KY}{MY} + \frac{ZT}{CD} = 1$.

3) Gọi *I* là giao điểm của *MK* và *CD*. Chứng minh rằng *XT*, *YZ*, *OI* cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *KZT*.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, ĐHSP HN, năm học 2012 - 2013)

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Ta có $DXM = \frac{1}{2}\ sd\,DM + sd\,AB\ = DTM$ nen tư giac $DXTM$ nọi tiếp.

Mà $DMT = 90^\circ \Rightarrow DXT = 90^\circ$

Suy ra $TX \perp BD$, mà $AC \perp BD \Rightarrow TX // AC$

Do đó $MXT = ZAC = XCA = TXC$

Tương tự, tứ giác *MCYZ* nội tiếp

Suy ra $ZY // BD$ nên $MYZ = MBD = BDY = ZYD$

Ta có tứ giác *ADZY* nội tiếp nên $YDC = YAZ = MDC$

Tương tự tứ giác *BCTX* nội tiếp nên $XCD = XBM = MCD$

Nên $\Delta DMC = \Delta DKC\ \ g.c.g\ \Rightarrow DKC = DMC = 135^\circ$

Ta có $XKD = 180^\circ - DKC = 45^\circ = DMX$ nên tứ giác *DXKM* nội tiếp.

Mà *DXTM* nội tiếp nên 5 điểm *D*, *X*, *K*, *T*, *M* cùng nằm trên một đường tròn tâm *E* đường kính *DT*.

Tương tự 5 điểm *Y*, *K*, *Z*, *M*, *C* nằm trên đường tròn tâm *F* đường kính *ZC* suy ra

$XK.XC = XZ.XM$

Suy ra $\frac{XK}{XM} = \frac{XZ}{XC} = \frac{XZ}{XA} = \frac{DZ}{BA} = \frac{DZ}{DC}$

Tương tự $\frac{YK}{YM} = \frac{CT}{CD}$ nên $\frac{XK}{XM} + \frac{KY}{YM} + \frac{ZT}{CD} = \frac{DZ + CT + ZT}{CD} = 1$

c) Gọi H là giao điểm XT và YZ. Ta chứng minh H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

Ta có $HZT = HTZ = 45^\circ \Rightarrow HT = HZ$ (1)

Tứ giác $KHZX$ nội tiếp, nên:

$HKZ = HXZ = HXK = HZH \Rightarrow HK = HZ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

Gọi giao điểm của XC và YZ là F.

Do $FKZ = 90^\circ$ nên F, H, Z thẳng hàng.

Tương tự, gọi XT giao ID tại E. Ta có E, H, T thẳng hàng

$\Delta HEF \backsim \Delta COD$ suy ra $\frac{HF}{OC} = \frac{EF}{CD} = \frac{HT}{OC} = \frac{FT}{CB}$

Vì $FT // BC$ nên $\frac{FT}{BC} = \frac{IT}{IC} \Rightarrow \frac{HT}{OC} = \frac{IT}{IC}$, mà $HTI = OCI = 45^\circ$

Nên suy ra $\Delta ITH \backsim \Delta IOC$ do đó $HTI = OCT$, hay O, I, H thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, nội tiếp trong đường tròn O. Trên cung BC không chứa A, lấy điểm M tuỳ ý (M khác C). P là điểm trên cạnh BC sao cho $BAM = PAC$. Trên các tia AB, AC lấy lần lượt các điểm E, F sao cho $BE = CF = BC$.

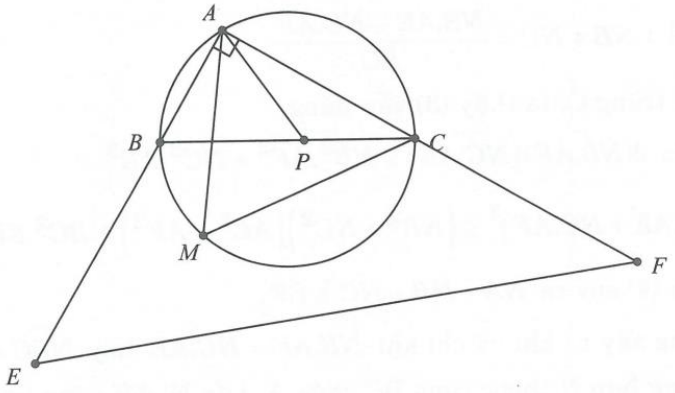
1) Chứng minh: $\Delta ABP \backsim \Delta AMC$ và $MC.AB + MB.AC = MA.BC$.

2) Chứng minh $MA + MB + MC = \frac{MB.AE + MC.AF}{BC}$

3) Xác định vị tri điểm N trên đường tròn O để tổng $NA + NB + NC$ lớn nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Quảng Bình, năm học 2012 - 2013)

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: $ABP = AMC$ (cùng chắn cung AC)

$BAM = PAC \Rightarrow BAP = MAC$

Nên: $\Delta ABP \backsim \Delta AMC$

Suy ra: $\frac{AB}{MA}=\frac{BP}{MC}\Rightarrow MC.AB=MA.BP$ (1)

Mặt khác: $BMA=BCA, BAM=PAC\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta APC$

$\Rightarrow \frac{MB}{PC}=\frac{MA}{AC}\Rightarrow MB.AC=MA.PC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MC.AB+MB.AC=MA.BC$

Từ kết quả câu a) ta có: $MA=MB.\frac{AC}{BC}+MC.\frac{AB}{BC}$

Do đó: $MA+MB+MC=MB.\left(\frac{AC}{BC}+1\right)+MC\left(\frac{AB}{BC}+1\right)$

$=MB.\left(\frac{AC+BC}{BC}\right)+MC.\left(\frac{AB+BC}{BC}\right)$

$=MB.\left(\frac{AC+CE}{BC}\right)+MC.\left(\frac{AB+BF}{BC}\right)$

$=\frac{MB.AE+MC.AF}{BC}$

Xét trường hợp *N* thuộc cung *BC* không chứa *A*.

- Nếu *N* khác *C* theo kết quả câu b) ta có

$NA+NB+NC=\frac{NB.AE+NC.AF}{BC}$ (3)

- Nếu *N* trùng *C*, ta thấy (3) vẫn đúng.

Mặt khác $2\ NB.AF\quad NC.AE\ \le NB^2.AF^2+NC^2.AE^2$

$\Leftrightarrow\ NB.AE+NB.AF\ ^2\le\ NB^2+NC^2\quad AE^2+AF^2\ =BC^2.EF^2$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $NA+NB+NC\le EF$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $NB.AF=NC.AE$ hay $NBC=AEF$.

Xét trường hợp N thuộc cung BC chứa A. Lấy N' đối xứng N qua BC, khi đó N' thuộc cung BC không chứa A, $N'A<NA, N'B=NB, N'C=NC$.

Áp dụng trường hợp trên ta có:

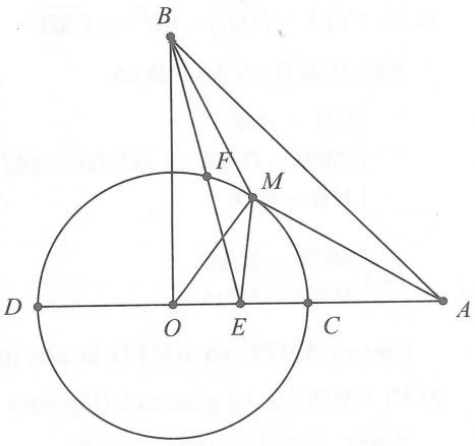
$NA+NB+NC<N'A+N'B+N'C\le EF$

Vậy trong mọi trường hợp thì $NA+NB+NC$ có giá trị lớn nhất là EF, đạt được khi $NBC=AEF$

Bài 8. Cho tam giác *OAB* vuông cân tại *O* với $OA=OB=2a$. Gọi O là đường tròn tâm *O* bán kính *a*. Tìm điểm *M* thuộc O sao cho $MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, TP HCM, năm học 2010 - 2011)

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đường thẳng OA cắt O tại C và D, B với C là trung điểm của OA. Gọi E là trung điểm của OC.

* Trường hợp M không trùng với C và D.

Hai tam giác OEM và OMA đồng dạng

(do $MOE = AOM, \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{OE}{OM}$)

Suy ra $\frac{ME}{AM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2.EM$

* Trường hợp M trùng với C: $MA = CA = 2.EC = 2.EM$

* Trường hợp M trùng với D: $MA = DA = 2.ED = 2.EM$

Vậy ta luôn có $MA = 2.EM$. Do đó

$MA + 2.MB = 2\ (EM + MB) \geq 2.EB$

Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn O.

Vậy $MA + 2.MB$ nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn O.

Bài 9. Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

1) Chứng minh AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp.

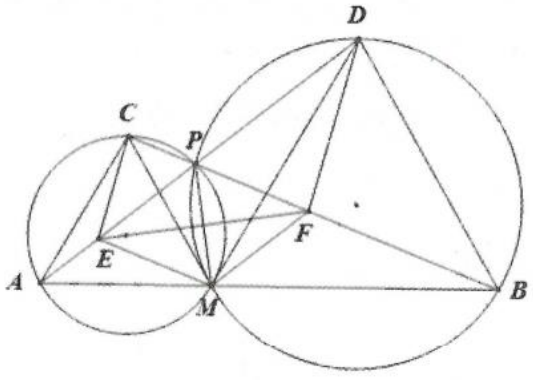
2) Chứng minh $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = AB$.

3) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AMPC và BMPD cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh CDFE là hình thang.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 1), ĐHSP Hà Nội, năm học 2016-2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Vì $CMA = DMB = 60^\circ \Rightarrow CMB = DMA = 120^\circ$



- Xét ΔCMB và ΔAMD có

$$\begin{cases} CM = AM \\ CMB = DMA \Rightarrow \Delta CMB = \Delta AMD \ (\text{c.g.c}) \\ MB = MD \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MCB = MAD \\ MBC = MDA \end{cases}$$

Suy ra AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp.

2) Vì AMPC là tứ giác nội tiếp nên

$CPM = 180^\circ - CAM = 120^\circ = CMB$

$\Rightarrow \Delta CPM \backsim \Delta CMB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CP}{CM} = \dfrac{CM}{CB}$

$\Rightarrow CP.CB = CM^2 \Rightarrow \sqrt{CP.CB} = CM$

Tương tự $\sqrt{DP.DA} = DM$

Vậy $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = CM + DM = AM + BM = AB$

3) Ta có EF là đường trung trực của PM

$\Rightarrow EB = EM$, suy ra ΔEPM cân tại E

Mặt khác $EPM = ACM = 60^\circ$ (do AMPC là tứ giác nội tiếp)

nên ΔEPM đều, nên $PM = PE$.

Tương tự $PF = PM$.

Ta có $CM // DB$ nên $PCM = PBD$

Mà BMPD là tứ giác nội tiếp nên $PBD = PMD$.

Suy ra $PCM = PMD$

Ta lại có $CPM = DPM = 120^\circ$

$\Rightarrow \Delta CPM \backsim \Delta MPD$(g.g) $\Rightarrow \dfrac{CP}{MP} = \dfrac{PM}{PD} \Rightarrow \dfrac{CP}{PF} = \dfrac{PE}{PD}$

Theo định lý Thales đảo ta có $CE // DF$, suy ra CDFE là hình thang.

Bài 10. Cho tam giác *ABC*. Trên các cạnh *BC*, *CA*, *AB* lần lượt lấy các điểm *D*, *E*, *F*. Gọi d_1 là đường thẳng qua *D* và vuông góc với *BC*, d_2 là đường thẳng qua *E* và vuông góc với *CA*, d_3 là đường thẳng qua *F* và vuông góc với *AB*. Chứng minh rằng d_1, d_2 và d_3 đồng quy khi và chỉ khi có đẳng thức sau: $DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán THTH, ĐHSP TP HCM năm học 2014 - 2015)

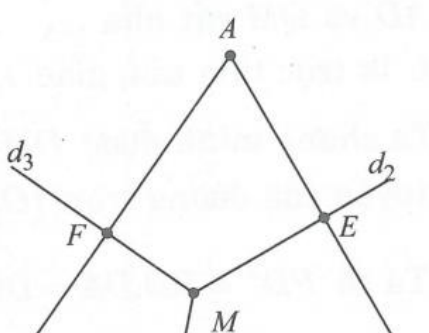
HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi M là giao điểm của d_1 và d_2 và F' là hình chiếu của *M* lên *AB*.

Ta có

$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$

$\Leftrightarrow BM^2 - MD^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$



$\Leftrightarrow BM^2 - MC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$

$\Leftrightarrow BM^2 - ME^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$

$\Leftrightarrow BM^2 - MA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$

$\Leftrightarrow F'B^2 - F'A^2 + FA^2 - FB^2 = 0$

$\Leftrightarrow F'B - F'A + FA - FB = 0$ (1)

Mà $\Leftrightarrow F'A + F'B = FA + FB = AB$

nên $1 \Leftrightarrow F'B = FB \Leftrightarrow F' \equiv F \Leftrightarrow d_1, d_2, d_3$ đồng quy.

Bài 11. Cho hai đường tròn $O_1;R_1$ và $O_2;R_2$ với $R_1 > R_2$ tiếp xúc trong với nhau tại *A*. Đường thẳng cắt $O_1;R_1$ và $O_2;R_2$ lần lượt tại *B* và *C* khác *A* . Đường thẳng đi qua trung điểm *D* của *BC* vuông góc với *BC* cắt $O_1;R_1$ tại *P* và *Q*.

1) Chứng minh *C* là trực tâm tam giác *APQ*.

2) Chứng minh $DP^2 = R_1^2 - R_2^2$.

3) Giả sử $D_1;D_2;D_3;D_4$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của *D* xuống các đường thẳng $BP;PA;AQ;QB$. Chứng minh:

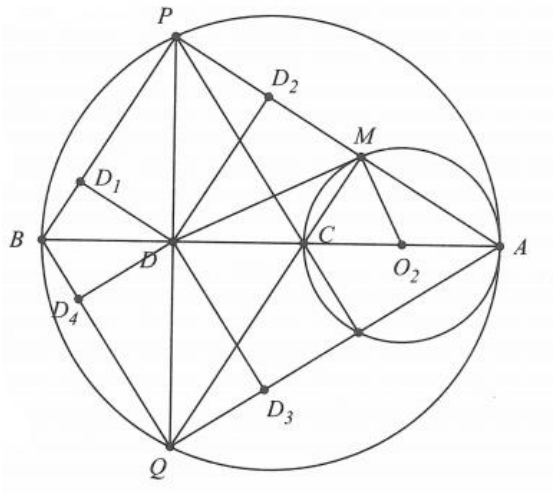
$DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \le \frac{1}{2}\ BP + PA + AQ + QB$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 1) Lê Hồng Phong, Nam Định, năm 2014 - 2015)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Gọi *M* là giao điểm của *AP* với đường tròn O_2 .

Ta có *PBQC* là hình thoi, nên $QC//BP$, mà $CM//BP$ (cùng vuông góc với *AP*) nên ta có *Q*, *C*, *M* thẳng hàng. Tam giác *APQ* có hai đường cao *AD* và *QM* cắt nhau tại *C* nên *C* là trực tâm tam giác *APQ*.



2) Ta chứng minh được *DM* là tiếp tuyến của đường tròn O_2 .

Ta có

$PD^2 = BD.DA = DC.DA = DM^2 = O_2D^2 - R_2^2$

Mặt khác

$O_2D = O_2C + CD = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2} = R_1$

Nên ta có $PD^2 = R_1^2 - R_2^2$

3) Ta Chứng minh được $DD_1 = DD_4, DD_2 = DD_3, BP = BQ, PA = PB$

nên $DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \le \frac{1}{2}\ BP + PA + AQ + QB$

$\Leftrightarrow 2\ DD_1 + DD_2\ \le PA + PB$

Ta có $PB^2 = BD^2 + DP^2 \ge 2DB.DP \Rightarrow PB \ge \frac{2DB.DP}{PB} = 2DD_1$.

Tương tự: $AP \ge \frac{2DA.DP}{PA} = 2DD_2$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $DA = DB = DP$.

Bài 12. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn O. Đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác *ABC* cắt nhau tại *H*. Đường thẳng AA_1 cắt O tại $K \ne A$.

1) Chứng minh rằng: A_1 là trung điểm *HK*.

2) Tính $\frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1}$.

3) Gọi *M* là hình chiếu vuông góc của *O* lên *BC*. Đường thẳng BB_1 cắt O tại giao điểm thứ hai là *E*, đường thẳng MB_1 cắt *AE* tại *N*.

Chứng minh rằng: $\frac{AN}{NE} = \left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2$.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 2) Lê Hồng Phong, Nam Định, năm 2014 - 2015)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1)Ta có $A_1 = C_2 = C_1$ nên ΔCHK cân tại *C*.

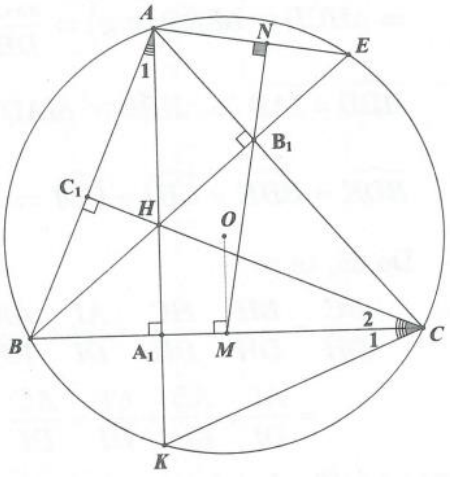
Mà CA_1 là đường cao nên CA_1 là đường trung trực, suy ra A_1 là trung điểm của *HK*.

2) Ta có:

$\frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1}$

$= \left(1 - \frac{HA_1}{AA_1}\right) + \left(1 - \frac{HB_1}{BB_1}\right) + \left(1 - \frac{HC_1}{CC_1}\right)$

$= 3 - \left(\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1}\right)$



$= 3 - \left(\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HBA}}{S_{ABC}} \right) = 3 - 1 = 2$

3) Từ giả thiết ta có *M* là trung điểm *BC*, suy ra ΔB_1MC cân tại *M*, do đó

$MB_1C = MCB_1 = AB_1N \Rightarrow \Delta CBB_1 \backsim \Delta B_1AN \ (\text{g.g}) \Rightarrow \text{B}_1 N \perp AE$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

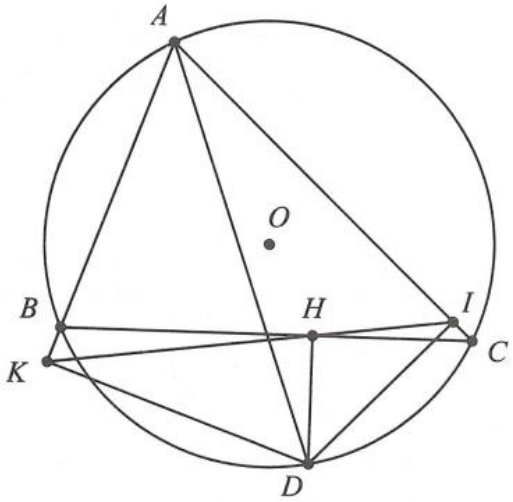
$\left(\frac{AB_1}{EB_1} \right)^2 = \frac{AN.AE}{EN.EA} = \frac{AN}{EN}$ (đpcm).

Bài 13. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn O . Lấy điểm *D* trên cung *BC* không chứa điểm *A* (*D* khác *B*, *C*). Gọi *H*, *I*, *K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *D* trên các đường thẳng *BC*, *CA* và *AB*. Chứng minh: $\frac{BC}{DH} = \frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK}$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Nguyễn Du, Đăk Lắk, năm học 2014 - 2015)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có các tứ giác *BHDK*, *DHIC*, *ABDC* nội tiếp $\Rightarrow KHD = KBD = ACD$



Mà $DHI + ACD = 180^\circ$

$\Rightarrow DHI + KHD = 180^\circ \Rightarrow KHI = 180^\circ$

$\Rightarrow K, H, I$ thẳng hàng.

Mặt khác $HCD = KAD$

$\Rightarrow \Delta HCD \backsim \Delta KAD \ (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{HC}{DH} = \frac{KA}{DK}$

$HBD = IAD \Rightarrow \Delta HBD \backsim \Delta IAD \Rightarrow \frac{HB}{DH} = \frac{IA}{AD}$

$BDK = BHK = CHI = CDI \Rightarrow \Delta BDK \backsim \Delta CDI \Rightarrow \frac{BK}{KD} = \frac{IC}{DI}$

Do đó, ta có:

$\frac{BC}{DH} = \frac{BH}{DH} + \frac{HC}{DH} = \frac{AI}{DI} + \frac{AK}{KD} = \frac{AI}{DI} + \frac{AB}{KD} + \frac{BK}{KD}$

$= \frac{AI}{DI} + \frac{AB}{KD} + \frac{CI}{DI} = \frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK}.$

Bài 14. Cho hai đường tròn O , O' cắt nhau tại *A* và *B*. Từ điểm *C* thuộc tia đối của tia *AB* kẻ hai tiếp tuyến đến O tại *D* và *E*, *E* nằm trong O' . Các đường thẳng *AD*, *AE* cắt O' tại điểm thứ hai tương ứng là *M*, *N*. Gọi *I* là giao điểm của *DE* và *MN*.

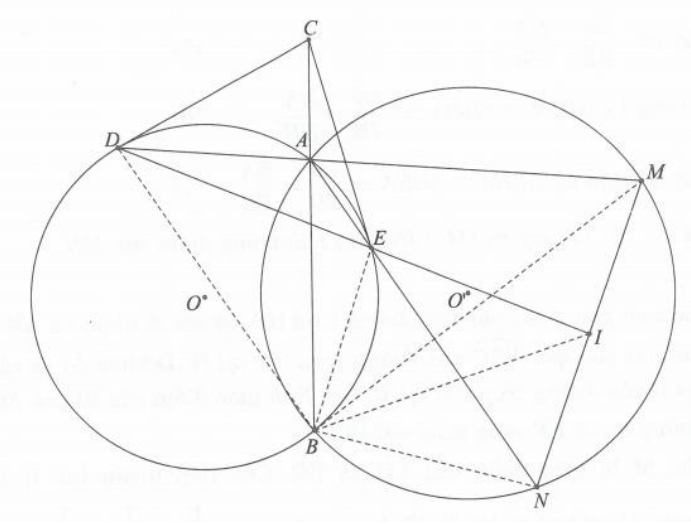
1) Chứng minh rằng tứ giác *BEIN* nội tiếp và $\Delta BIN \backsim \Delta BDA$.

2) Chứng minh rằng $\frac{CA}{CB}=\left(\frac{CD}{CB}\right)^2=\left(\frac{DA}{DB}\right)^2$.

3) Chứng minh rằng I là trung điểm của MN.

(Trích đề thi vào Chuyên Toán (Vòng 2), ĐHV, năm học 2015-2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Vì tứ giác $ABNM$ nội tiếp nên $BNI=BAD$. (1)

Vì tứ giác $DAEB$ nội tiếp nên $BAD=BED$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BEIN$ nội tiếp.

Theo chứng minh trên, $BNI=BAD$.

Ta lại có $BIN=BEN=BDA$ (do các tứ giác $BEIN$, $AEBD$ nội tiếp).

Suy ra $\Delta BIN\backsim\Delta BDA$ (g.g).

2) Vì CD là tiếp tuyến của O nên $CA.CB=CD^2$. Từ đó suy ra

$$\frac{CA}{CB}=\frac{CA.CB}{CB^2}=\frac{CD^2}{CB^2}=\left(\frac{CD}{CB}\right)^2 \quad (3)$$

Lại có, từ $\Delta CAD\backsim\Delta CDB$ $g.g$ $\Rightarrow\frac{CD}{CB}=\frac{DA}{DB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{CA}{CB}=\left(\frac{CD}{CB}\right)^2=\left(\frac{DA}{DB}\right)^2$.

3) Tương tự câu b) ta có $\frac{CA}{CB}=\left(\frac{CE}{CB}\right)^2=\left(\frac{EA}{EB}\right)^2$

Suy ra $\frac{EA}{EB}=\frac{DA}{DB}$ (5)

Từ câu 1), $\Delta BIN\backsim\Delta BDA\Rightarrow\frac{IN}{IB}=\frac{DA}{DB}$ (6)

Tương tự ta có $\Delta BIM \backsim \Delta BEA \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{EA}{EB}$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra $IM = IN$, hay *I* là trung điểm của *MN*.

Bài 15.

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O, có góc A nhọn và $AB > AC$. Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn O tại D (D khác A) và cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn O tại E. Gọi F là giao điểm của BD và AC

a) Chứng minh EF song song với BC.

b) Gọi M là giao điểm của AD và BC. Các tiếp tuyến tại B, D của đường tròn O cắt nhau tại N.

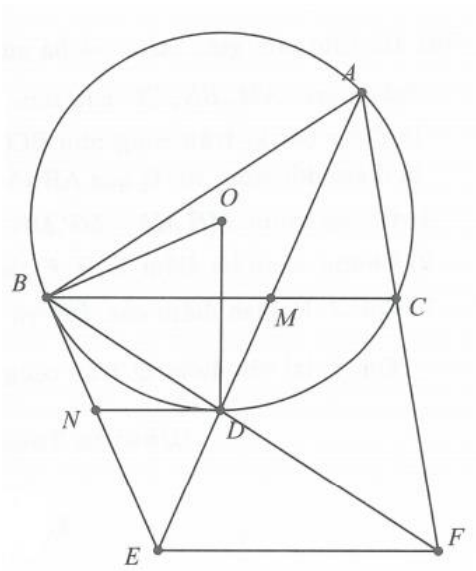
Chứng minh rằng: $\frac{1}{BN} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{BM}$

2) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O, đường cao AH. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} \geq 2\frac{AB}{AC}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Hưng Yên, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) a) Do $EBF = BAD = EAF$ nên BEAF nội tiếp được.



Suy ra $BEF + BAF = 180°$

Mà $BAF = CBE$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Nên $BEF + BCE = 180°$, mà đây là hai góc trong cùng phía nên $BC // EF$.

b) $NDB = BAD = CAD = CBD$,

suy ra $ND // BC$.

Theo Thales: $\frac{NB}{BE} = 1 - \frac{NE}{BE}$

$= 1 - \frac{ND}{BM}$

$\Rightarrow \frac{NB}{BE} + \frac{ND}{BM} = 1$

Mà $ND = NB$. Do đó $\frac{NB}{BE} + \frac{NB}{BM} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{BN} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{BM}$

2) Kẻ đường kính AP



Dễ dàng chứng minh được:

$\Delta AHB \backsim \Delta ACP$ nên: $\frac{HB}{PC}=\frac{AH}{AC}$

Tương tự: $\frac{HC}{PB}=\frac{AH}{AB}$

Suy ra: $\frac{HB}{HC}.\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$,

Suy ra: $\frac{HB}{HC}=\frac{PC}{PB}.\frac{AB}{AC}$

Lại có: $\Delta AMC \backsim \Delta BMP$ nên: $\frac{MC}{AC}=\frac{MP}{PB}$

Tương tự: $\frac{MB}{AB}=\frac{MP}{PC}$

Suy ra: $\frac{MB}{MC}.\frac{AC}{AB}=\frac{PB}{PC}$ nên: $\frac{MB}{MC}=\frac{PB}{PC}.\frac{AB}{AC}$

Cộng lại, ta có: $\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}=\left(\frac{PB}{PC}+\frac{PC}{PB}\right).\frac{AB}{AC}\geq 2.\frac{AB}{AC}$

Bài 16. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn O . Các đường cao *AM*, *BN*, *CP* của tam giác *ABC* cùng đi qua điểm *H*. Gọi *Q* là điểm bất kì trên cung nhỏ *BC* (*Q* khác *B* và *C*). Gọi *E*, *F* theo thứ tự là điểm đối xứng với *Q* qua *AB* và *AC*.

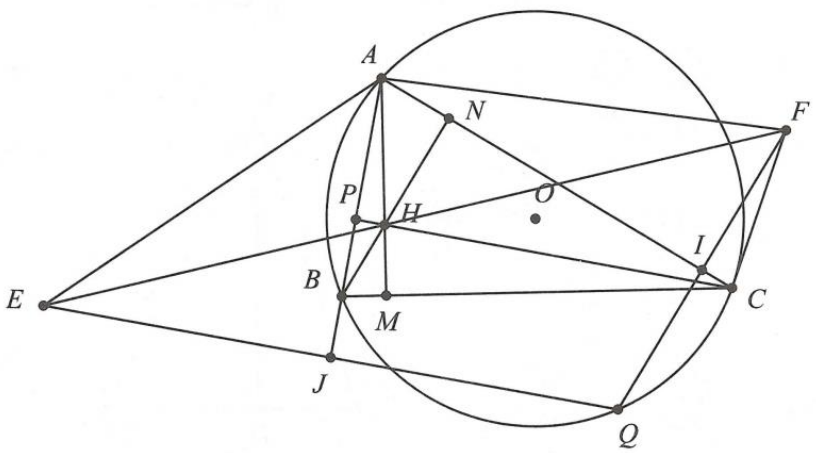
1) Chứng minh $MH.MA=MP.MN$.

2) Chứng minh ba điểm *E*, *H* ,*F* thẳng hàng.

3) Gọi *J* là giao điểm của *QE* và *AB*, *I* là giao điểm của *QF* và *AC*. Tìm vị trí của điểm *Q* trên cung nhỏ *BC* để $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

(Chuyên Toán TP Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Dễ dàng thấy rằng các tứ giác CNHM, BMHP nội tiếp. Cho nên $NCH = NMH$ và $NMP = HBP$, kết hợp với $ACH = ABH$ (cùng phụ với BAC) ta suy ra $NMH = HMP$ (1)

Mặt khác tứ giác ANMB nội tiếp nên $MNH = MAB$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

$\Delta HMN \backsim \Delta PMA$ dẫn đến $\frac{HM}{MP} = \frac{MN}{MA}$

$\Rightarrow MH.MA = MN.MP$

2) Trước hết dễ thấy $\Delta ACQ = \Delta ACF$ (c.c.c)

nên $AFC = AQC = ABC = CHM$ dẫn đến tứ giác AFCH nội tiếp và $ACH = AFH = 90^\circ - BAC$ (3)

Mặt khác do tính chất đối xứng ta có $AF = AQ = AE$.

hay tam giác AEF cân tại A để có

$$AFE = AEF = 90^\circ - \frac{1}{2}EAF = 90^\circ - \frac{1}{2}\ FAQ + EAQ$$

$$= 90^\circ - \ CAQ + BAQ\ = 90^\circ - BAC$$

Do đó ta được $AFH = AFE$ hay ba điểm E, H, F thẳng hàng.

3) Trước hết thấy rằng $AB.QJ = 2S_{ABQ}, AC.QI = 2S_{AQC}$

Và đặt $P = \frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$

Khi đó áp dụng BĐT Cauchy-Shwarz ta có:

$$P = \frac{AB^2}{AB.QJ} + \frac{AC^2}{AC.QI} = \frac{AB^2}{2S_{ABQ}} + \frac{AC^2}{2S_{ACQ}}$$

$$\geq \frac{AB + AC\ ^2}{2\ S_{ABQ} + S_{ACQ}} = \frac{AB + AC\ ^2}{2\ S_{ABC} + S_{QBC}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $QI = QJ$.

Mặt khác nếu gọi G là điểm chính giữa của cung nhỏ BC thì luôn có

$S_{QBC} \leq S_{GBC}$, do đó $P \geq \frac{AB + AC\ ^2}{2\ S_{ABC} + S_{GBC}}$

Vậy $P = \left(\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi Q là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Bài 17. Cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H và nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F tương ứng là các chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C. Gọi M là giao điểm của tia AO và cạnh BC. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh CA, AB.

1) Chứng minh: $HE.MN = HF.MP$.

2) Chứng minh tứ giác FENP nội tiếp.

3) Chứng minh rằng: $\frac{BD.BM}{CD.CM} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Vĩnh Phúc, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI

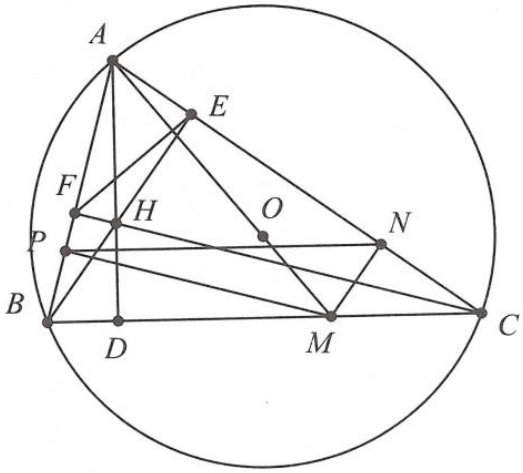
1) Ta có $FHE = PMN = 180° - A$,

$FEH = FAH = MAN = NPM$

(do tứ giác HFAE, PMNA nội tiếp).

Do đó $\Delta PMN \backsim \Delta EHF$

$\Rightarrow HE.MN = HF.MP$



2) Từ phần 1) thì

$FEN = FEH + 90°$

$= NPM + 90° = BPN$

Nên tứ giác FENP nội tiếp.

3) Ta có $BAD = CAM \Rightarrow BAM = DAC$

Suy ra $\frac{S_{BAD}}{S_{CAM}} = \frac{BD}{CM} = \frac{\sin\angle BAD.AB.AD}{\sin\angle CAM.AC.AM} = \frac{AB.AD}{AC.AM}$

$\frac{S_{BMA}}{S_{CAD}} = \frac{BM}{CD} = \frac{\sin\angle BAM.AB.AM}{\sin\angle CAD.AC.AD} = \frac{AB.AM}{AC.AD}$

Do đó $\frac{BD.BM}{CD.CM} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

Bài 18. Cho đường tròn $O;R$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn O (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

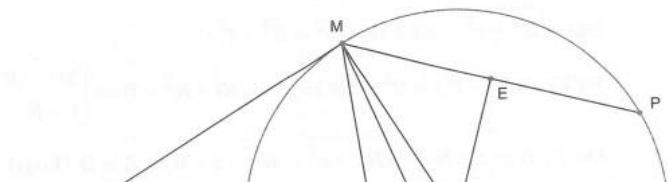
1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN.

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt O tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

(Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Theo giả thiết $AMO = ANO = AIO = 90^\circ$

$\Rightarrow$ 5 điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow AIN = AMN, AIM = ANM$ (Góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại $A \Rightarrow AMN = ANM$

$\Rightarrow AIN = AIM \Rightarrow$ (đpcm)

2) $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \Leftrightarrow 2AB.AC = AK\ \ AB + AC$

$\Leftrightarrow AB.AC = AK.AI$ (Do $AB + AC = 2AI$)

ΔABN đồng dạng với $\Delta ANC \Rightarrow AB.AC = AN^2$

ΔAHK đồng dạng với $\Delta AIO \Rightarrow AK.AI = AH.AO$

Tam giác ΔAMO vuông tại M có đường cao $MH \Rightarrow AH.AO = AM^2$

$\Rightarrow AK.AI = AM^2$. Do $AN = AM \Rightarrow AB.AC = AK.AI$

3) Ta có $AN \perp NO, MP \perp NO, M \notin AN \Rightarrow AN // MP$

Do đó AMPN là hình bình hành $\Leftrightarrow AN = MP = 2x$

Tam giác ANO đồng dạng với $\Delta NEM \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{NO}{EM} \Rightarrow NE = \frac{2x^2}{R}$

TH1. $NE = NO - OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R - \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 - R\sqrt{R^2 - x^2}$

Đặt $\sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2$

PTTT 2 $R^2 - t^2 = R^2 - Rt \Leftrightarrow 2t^2 - Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = -R \\ t = R \end{array}\right.$

Do $t \geq 0 \Rightarrow t = R \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A \equiv B$ (Loại)

TH2. $NE = NO + OE \Rightarrow \dfrac{2x^2}{R} = R + \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 + R\sqrt{R^2 - x^2}$

Đặt $\sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2$

PTTT 2 $R^2 - t^2 = R^2 + Rt \Leftrightarrow 2t^2 + Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = R \\ t = -R \end{array}\right.$

Do $t \geq 0 \Rightarrow 2t = R \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = 2R$

Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hình bình hành.

Bài 19. Cho đường tròn tâm O đường kính BC, A là điểm di chuyển trên đường tròn O (A khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC tại H. M là điểm đối xứng của điểm A qua điểm B.

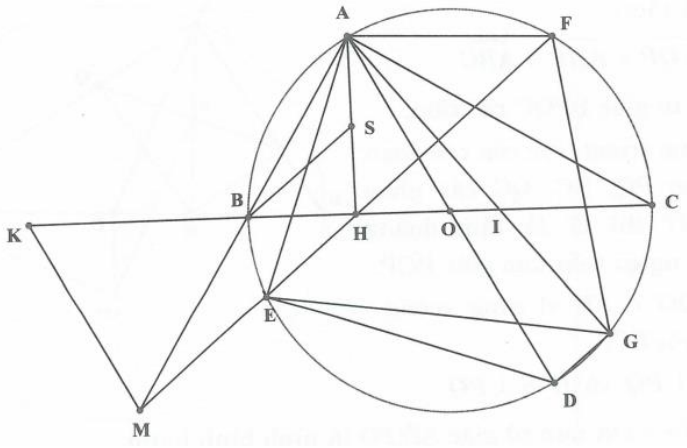
1) Chứng minh điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

2) Đường thẳng MH cắt O tại E và F (E nằm giữa M và F). Gọi I là trung điểm của HC, đường thẳng AI cắt O tại G (G khác A). Chứng minh: $AF^2 + FG^2 + GE^2 + EA^2 = 2BC^2$.

3) Gọi P là hình chiếu vuông góc của H lên AB. Tìm vị trí của điểm A sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2016-2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Lấy K là điểm đối xứng của O qua B, vì B và O cố định nên K cố định. Tứ giác OAKM là hình bình hành nên $KM = OA$.

Do $OA = \dfrac{BC}{2}$ không đổi.

$\Rightarrow$ M nằm trên đường tròn tâm K, bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

2) Xét ΔAHB và ΔCHA có

$BHC = BHA = 90°, BAH = ACB$ (cùng phụ với ABC)

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CHA$.

Gọi S là trung điểm của AH, I là trung điểm của HC nên

$\Rightarrow \Delta ABS \backsim \Delta CAI \Rightarrow ABS = CAI$

Ta lại có BS là đường trung bình của ΔAMH

$BS // MH \Rightarrow ABS = AMH \Rightarrow AMH = CAI$

Mà $CAI + MAI = 90° \Rightarrow AMH + MAI = 90° \Rightarrow AI \perp MF$

Xét tứ giác AEGF nội tiếp O, có $AG \perp EF$

Kẻ đường kính AD, do $GD \perp AG$ và $EF \perp AG$ nên $EF // GD$, do đó tứ giác nội tiếp EFGD là hình thang cân

$\Rightarrow FG = ED \Rightarrow AE^2 + FG^2 = AE^2 + ED^2 = AD^2 = BC^2$

Tương tự ta chứng minh được: $AF^2 + EG^2 = BC^2$

Vậy $AE^2 + FG^2 + AF^2 + EG^2 = 2BC^2$.

3) Gọi Q là hình chiếu của H trên $AC \Rightarrow$ Tứ giác APHQ là hình chữ nhật (S là tâm)

$\Rightarrow AQP = AHP = ABC$

nên tứ giác BPQC nội tiếp.

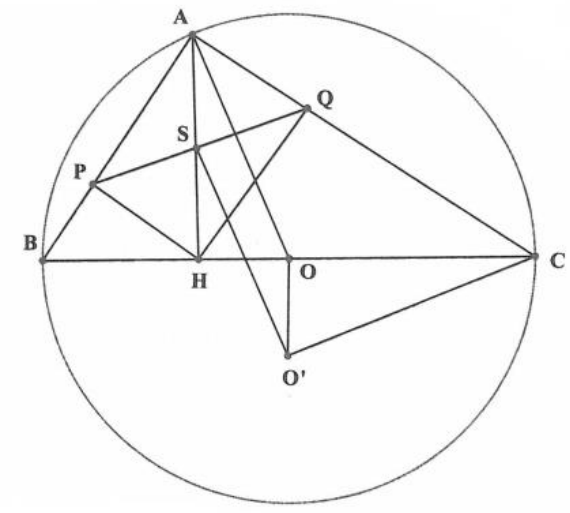
Đường trung trực của các đoạn thẳng PQ, BC, QC cắt nhau tại O' thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP.

Có OO' // AH vì cùng vuông góc với BC.

$OA \perp PQ$ và $O'S \perp PQ$

$\Rightarrow O'S // OA$ nên tứ giác ASO'O là hình hình hành

$\Rightarrow OO' = AS = \dfrac{AH}{2}$



Trong trường hợp A nằm chính giữa cung BC thì ta vẫn có:

$OO' = AS = \dfrac{AH}{2}$

Tam giác OO'C vuông tại O nên

$O'C = \sqrt{OC^2 + \dfrac{AH^2}{4}}$

Do OC không đổi nên O'C lớn nhất khi AH lớn nhất

$\Leftrightarrow$ A chính giữa cung BC.

Bài 20. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MO cắt

đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB.

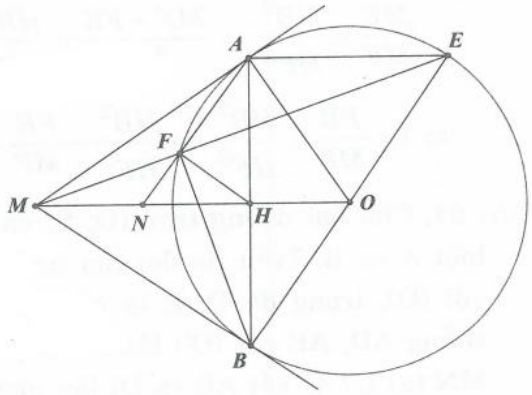
1) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$ và $MN = NH$.

3) Chứng minh: $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$.

(Trích đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương (Vòng 1), năm học 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Ta có $MAO = 90°, MBO = 90°$

(theo tính chất của tiếp tuyến và bán kính)

Suy ra: $MAO + MBO = 180°$

Vậy tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2) Ta có $AE // MO \Rightarrow AEM = EMN$,

mà $AEM = MAF$, suy ra $EMN = MAF$

ΔNMF và ΔNAM có

MNA chung; $EMN = MAF$ nên ΔNMF đồng dạng với ΔNAM

$\Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{NA}{NM} \Rightarrow NM^2 = NF.NA$ (1)

Mặt khác có: $ABF = AEF \Rightarrow ABF = EMN$ hay $HBF = FMH$

$\Rightarrow$ MFHB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow FHM = FBM = FAB$ hay $FHN = NAH$.

Xét ΔNHF và ΔNAH có:

ANH chung; $NHF = NAH \Rightarrow \Delta NHF$ đồng dạng ΔNAH

$\Rightarrow \frac{NH}{NF} = \frac{NA}{NH} \Rightarrow NH^2 = NF.NA$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $NH = HM$.

3) Xét ΔMAF và ΔMEA có: AME chung, $MAF = MEA$

suy ra ΔMAF đồng dạng với ΔMEA

$\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MA}{MF} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{AE^2}{AF^2}$ (3)

Vì MFHB là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MFB = MHB = 90° \Rightarrow BFE = 90°$

Và $AFH = AHN = 90° \Rightarrow AFE = BFH$.

ΔAEF và ΔHBF có: $EFA = BFH; FEA = FBA$

suy ra ΔAEF đồng dạng với ΔHBF

$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{HB}{HF} \Rightarrow \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{HB^2}{HF^2}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có:

$\frac{ME}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2} \Leftrightarrow \frac{MF + FE}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2}$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{FE}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2} \Leftrightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{FE}{MF} = 1$

Bài 21. Cho hai đường tròn $O;R$ và $O';R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C, kẻ tiếp tuyến CD, CE với O, trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong O'. Đường thẳng AD, AE cắt O' lần lượt tại M và N (M, N khác A). Tia DE cắt MN tại I, OO' cắt AB và DI lần lượt tại H và F.

1) Chứng minh: $FE.HD = FD.HE$.

2) Chứng minh: $MB.EB.DI = IB.AN.BD$.

3) Chứng minh: $O'I$ vuông góc với MN.

(Trích đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi (vòng 2), Hải Dương 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) O cắt O' tại A, B

$\Rightarrow OO' \perp AB \Rightarrow CHO = 90^\circ$ (1)

CD, CE là tiếp tuyến của O tại D, E

$\Rightarrow CDO = CEO = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C, D, O, H, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính $CO \Rightarrow \begin{cases} CHE = CDE \\ CHD = CED \end{cases}$

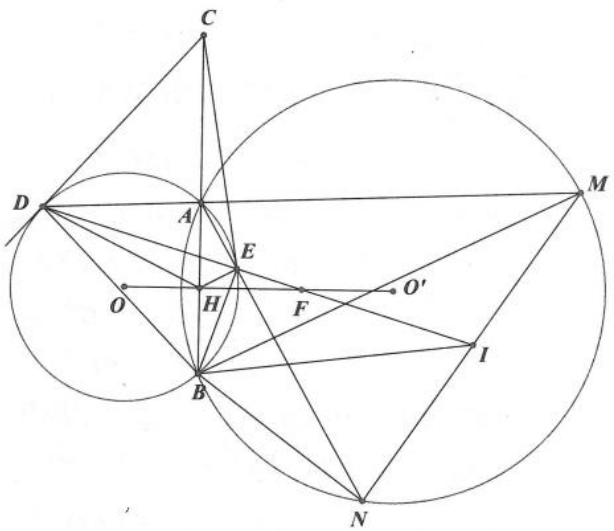
Mà $CD = CE \Rightarrow CDE = CED \Rightarrow CHE = CHD$

$\Rightarrow HC$ là đường phân giác của DHE.

Mặt khác $OO' \perp AB$ tại H hay $FH \perp HC$ tại H

$\Rightarrow HF$ là phân giác ngoài tại H của ΔDHE

$\Rightarrow \frac{FE}{FD} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow FE.HD = FD.HE$



2) Trong O có: $BMN = BAN$

Trong O' có: $BAN = BDE \Rightarrow BMN = BDE$

$\Rightarrow$ BDMI là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MBI = MDI = ABE$

Xét ΔMIB và ΔAEB có: $MBI = ABE; BMI = BAE$

$\Rightarrow \Delta MIB \backsim \Delta AEB \Rightarrow \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{IB}{EB}$ (3)

Xét ΔABN và ΔDBI có: $BAN = BDI; BNA = BID$

$\Rightarrow \Delta ABN \backsim \Delta DBI \Rightarrow \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AN}{DI}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{MB}{AB}.\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{IB}{EB}.\dfrac{AN}{DI} \Rightarrow MB.EB.DI = IB.AN.DB$

3) Xét ΔIBN và ΔDBA có:

$IBN = DBA$ (vì $= DEA = IEN$), $BIN = BDA$ (vì BDMI nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta IBN \backsim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{IN}{IB} = \dfrac{DA}{DB}$ (5)

Xét ΔCDA và ΔCBD có: DCB chung; $CDA = CBD$

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CBD \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CD}{CB}$

Mà $CD = CE \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CE}{CB}$ (6)

Xét ΔCEA và ΔCBE có: BCE chung; $CEA = CBE$

$\Rightarrow \Delta CEA \backsim \Delta CBE \Rightarrow \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{EA}{EB}$ (7)

Mặt khác $\Delta MIB \backsim \Delta AEB$ (theo phần b)

$\Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{IM}{IB}$ (8)

Từ (5), (6), (7), (8) $\Rightarrow \dfrac{IN}{IB} = \dfrac{IM}{IB} \Rightarrow IN = IM \Rightarrow O'I \perp MN$

Bài 22. Cho tứ giác ABCD có $BAD = 60°, BCD = 90°$. Đường phân giác trong của BAD cắt BD tại E. Đường phân giác trong của BCD cắt BD tại F. Chứng minh: $\dfrac{\sqrt{3}}{AE} + \dfrac{\sqrt{2}}{CF} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CD} + \dfrac{1}{DA}$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Long An, năm học 2016 - 2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi K là hình chiếu vuông góc của E lên AB.



Diện tích tam giác ABE là:

$\frac{KE.AB}{2}=\frac{AE.\sin 30^\circ.AB}{2}=\frac{AE.AB}{4}$

Diện tích tam giác ADE là: $\frac{AE.AD}{4}$

Diện tích tam giác ABD là: $\frac{AB.\sin 60^\circ.AD}{2}=\frac{\sqrt{3}AB.AD}{4}$

Ta có: Diện tích tam giác ABE + Diện tích tam giác ADE

= Diện tích tam giác ABD.

Suy ra: $\frac{\sqrt{3}}{AE}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$ (1)

Tương tự như trên ta tìm được $\frac{\sqrt{3}}{CF}=\frac{1}{CB}+\frac{1}{CD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{\sqrt{3}}{AE}+\frac{\sqrt{2}}{CF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{CD}+\frac{1}{DA}$

Bài 23. Cho đường tròn $O;R$ và điểm A cố định trên $O;R$. Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn $O;R$ và $A;R$; H là điểm thay đổi trên cung nhỏ MN của đường tròn $A;R$. Đường thẳng qua H và vuông góc với AH cắt $O;R$ tại B, C. Kẻ $HI\perp AB$ $I\in AB$, $HK\perp AC$ $K\in AC$.

1) Chứng minh rằng IK luôn vuông góc với một đường thẳng cố định và $AB.AC=2R^2$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của điện tích ΔAIK khi H thay đổi.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Phú Thọ, năm học 2016 - 2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Ta có $AIH=90^\circ;AKH=90^\circ$

Vì $AIH+AKH=180^\circ$

nên tứ giác AJHK nội tiếp.

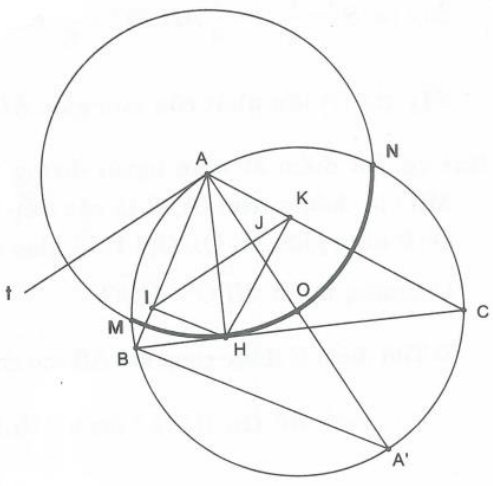
Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn

$O;R$ tại A.

Ta có: $\begin{cases}ACB+HAC=90^\circ\\AHK+HAC=90\end{cases}$

$\Rightarrow ACB=AHK$ (1)

Ta lại có: $AHK=AIK$



(do tứ giác AIHK nội tiếp) (2)

và $BAt = ACB$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ AB) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: . $BAt = AIK \Rightarrow At // IK$

Mặt khác $OA \perp At \Rightarrow IK \perp OA$. Vậy IK luôn vuông góc với đường thẳng cố định OA.

Gọi J là giao điểm của AO và IK; A' là điểm đối xứng với A qua O.

Ta có $\Delta ACH \backsim \Delta AA'B$ $AHC = ABA' = 90°; ACH = AA'B$.

$\Rightarrow \frac{AC}{AA'} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB.AC = 2R.AH = 2R^2$

2) Ta có $\Delta AKH \sim \Delta AHC \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AK.AC = AH^2$.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích các tam giác ABC và AIK.

Ta có $\Delta AIK \backsim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{IK}{BC} = \frac{AJ}{AH}$, suy ra:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2}AJ.IK}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{AJ}{AH}.\frac{IK}{BC} = \left(\frac{AK}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AK.AC}{AB.AC}\right)^2$$

$$= \frac{AH^4}{AH.2R^2} = \frac{AH^2}{4R^2} = \frac{1}{4}$$

Suy ra $S' = \frac{1}{4}.S = \frac{1}{8}AH.BC = \frac{R}{8}.BC \le \frac{R}{8}.2R = \frac{R^2}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của tam giác AJK bằng $\frac{R^2}{4}$, đạt khi $H \equiv O$.

Bài 24. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O .Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

1) Chứng minh $HPO = HQO$.

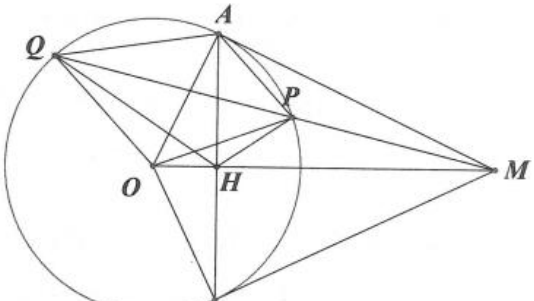
2) Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Nghệ an, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) ΔMPA đồng dạng ΔMAQ (g.g),

suy ra $MA^2 = MP.MQ$ (1)



ΔMAO vuông tại A, có đường cao

AH nên $MA^2 = MH.MO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$P.MQ = MH.MO$ hay $\frac{MP}{MH} = \frac{MO}{MQ}$ (*)

ΔMPH và ΔMOQ có góc M chung, kết hợp (*) ta suy ra ΔMPH đồng dạng ΔMOQ (c.g.c).

Suy ra $MHP = MQO$

Do đó tứ giác PQOH là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow HPO = HQO = \frac{1}{2} sdOH$ (đpcm)

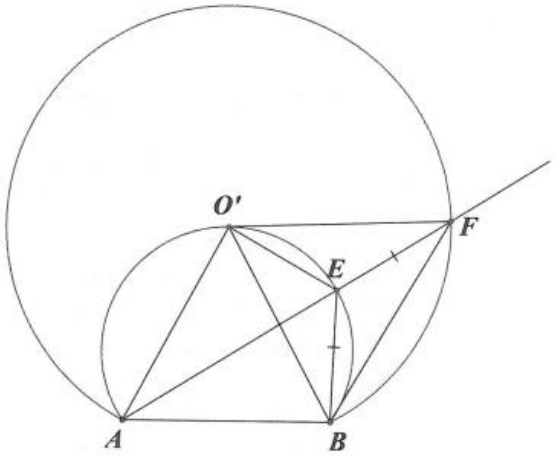
2) Trên tia đối của tia EA lấy điểm F

sao cho $EB = EF$ hay ΔEBF

cân tại E, suy ra $BFA = \frac{1}{2} BEA$

Đặt $AEB = \alpha$ khi đó $AFB = \frac{\alpha}{2}$

nên F di chuyển trên cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên BC.



Ta có: $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \geq \frac{4}{EA + EB}$.

Như vậy $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ nhỏ nhất khi $EA + EB$ lớn nhất

hay $EA + EF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AF$ lớn nhất (**)

Gọi O' là điểm chính giữa của cung lớn AB

suy ra $\Delta O'AB$ cân tại O' suy ra $O'A = O'B$ (3)

$\Delta O'EB$ và $\Delta O'EF$ có EB = EF, O'E chung

Và $FEO' = BEO'$ (cùng bù với BAO')

$\Rightarrow \Delta O'EB = \Delta O'EF$ (c.g.c) suy ra $O'B = O'F$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra O' là tâm cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC (cung đó và cung lớn AB cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB).

Do đó AF lớn nhất khi nó là đường kính của O' khi $E \equiv O'$ (***).

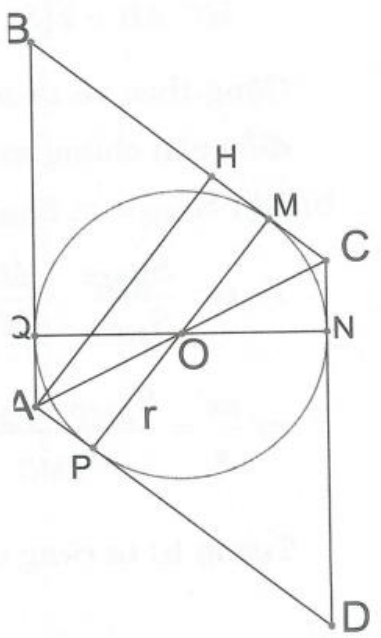
Từ (**) và (***) suy ra E là điểm chính giữa cung lớn AB thì $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ giá trị nhỏ nhất.

Bài 25. Trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn $O;r$, hãy tìm hình bình hành có diện tích nhỏ nhất.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Hải Dương, năm học 2011 - 2012)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo bài ta suy ra các cạnh của hình hành là tiếp tuyến của đường tròn $O;r$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với các cạnh như hình vẽ.



$\Rightarrow CM = CN; AP = AQ, BM = BQ; PD = DN$

$\Rightarrow CM + BM + AP + PD = CN + DN + AQ + BQ$

$\Rightarrow 2BC = 2AB \Rightarrow BC = AB$

Kẻ $AH \perp BC$. Ta có $AB \geq AH$, dấu "=" xảy ra khi $ABC = 90^\circ$

Ta có: $OM \perp BC, OP \perp AD, AD // BC$

$\Rightarrow$ P, O, M thẳng hàng, do đó $AH = PM = 2r$.

$S_{ABCD} = AH.BC = 2r.AB \geq 2r.2r$

$\Rightarrow S_{ABCD} \geq 4r^2$, dấu "=" xảy ra khi $ABC = 90^\circ$.

Vậy trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn $O;r$ thì hình vuông có diện tích nhỏ nhất và bằng $4r^2$.

Bài 26. Cho tam giác ABC, điểm M ở trong tam giác, các đường thẳng AM, BM, CM, lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại P, R, Q. Kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.

1) Chứng minh rằng: $MA.BC + MB.CA + MC.AB \geq 4S_{ABC}$

2) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác PQR lớn nhất.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Bình Định, năm học 2010 - 2011)

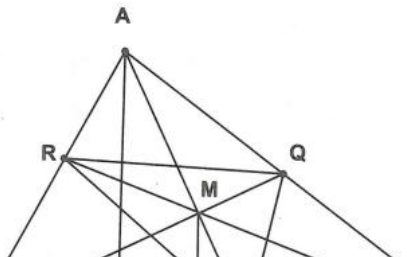
HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Ta có: $\frac{PM}{PA} = \frac{MI}{AH} = \frac{S_{BMC}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow \frac{S_{BMC}}{S_{ABC} - S_{BMC}} = \frac{PM}{MA} \geq \frac{MI}{MA} = \frac{MI.BC}{MA.BC} = \frac{2S_{BMC}}{MA.BC}$

$\Rightarrow MA.BC \geq 2\ S_{ABC} - S_{BMC}$

Tương tự ta cũng có:



$MB.AC \geq 2\ S_{ABC} - S_{AMC}$;

$MC.AB \geq 2\ S_{ABC} - S_{AMB}$

Cộng theo vế ta sẽ được điều cần chứng minh.

b) Đặt $S_{PMQ} = x; S_{QMR} = y; S_{RMP} = z \Rightarrow S_{PQR} = x + y + z$

Ta có $\frac{S_{RMP}}{S_{MCP}} = \frac{MR}{MC}; \frac{S_{PMQ}}{S_{PMB}} = \frac{MQ}{MB} \Rightarrow \frac{z.x}{S_{MCP}S_{PMB}} = \frac{MR.MQ}{MC.MB} = \frac{y}{S_{BMC}}$

$\Rightarrow \frac{zx}{y} = \frac{S_{BMP}.S_{PMC}}{S_{BMC}} \leq \frac{S_{BMC}^2}{4S_{BMC}} = \frac{S_{BMC}}{4}$ (1)

Tương tự ta cũng có: $\frac{xy}{z} \leq \frac{S_{CMA}}{4}$ (2); $\frac{yz}{x} \leq \frac{S_{AMB}}{4}$ (3)

Cộng theo vế các BĐT (1), (2) và (3) ta được: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \leq \frac{S_{ABC}}{4}$ (4)

Mặt khác dùng BĐT Cô-si ta sẽ chứng minh được

$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$ nên từ (4) suy ra:

$x + y + z \leq \frac{S_{ABC}}{4} \Rightarrow S_{PQR} \leq \frac{S_{ABC}}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi:

$\begin{cases} S_{PMB} = S_{PMC}; S_{CMQ} = S_{QMA}; S_{AMR} = S_{RMB} \\ x = y = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy khi M là trọng tâm của tam giác ABC thì max $S_{PQR} = \frac{S_{ABC}}{4}$

Bài 27. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

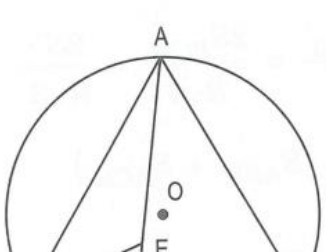
1) Chứng minh $MB + MC = MA$

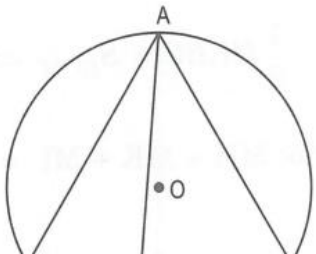
2) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}\ S + 2S'}{3R}$$

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Bình Định, năm học 2016 - 2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI





a) Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$.

Ta có: ΔBEM là tam giác đều $\Rightarrow BE = BM = EM$

$\Delta BMA = \Delta BEC \Rightarrow MA = EC$

Do đó: $MB + MC = MA$

Cách 2: Trên AM lấy điểm E sao cho $ME = MB$

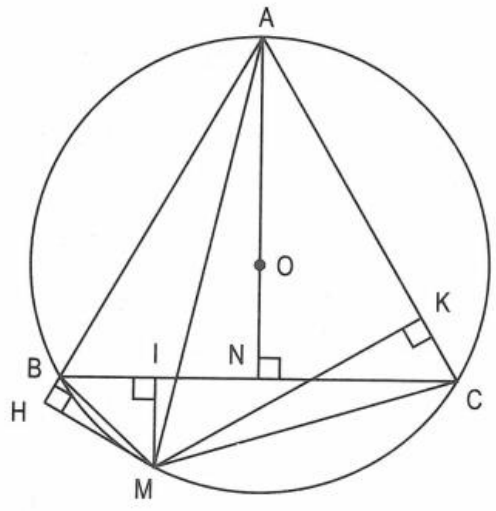
Ta có: ΔBEM là tam giác đều $\Rightarrow BE = BM = EM$

$\Delta MBC = \Delta EBA(\text{c.g.c}) \Rightarrow \text{MC} = \text{AE}$. Do đó: $MB + MC = MA$

b) Kẻ AN vuông góc với BC tại N

Vì ΔABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác

$\Rightarrow A, O, N$ thẳng hàng $\Rightarrow AN = \frac{3}{2}R$



Ta có: $AN = AB.\sin ABN$

$\Rightarrow AB = \frac{AN}{\sin ABN} = \frac{3}{2}R : \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Ta có: $\frac{1}{2}MH.AB = S_{ABM}$

$\Leftrightarrow MH = \frac{2S_{ABM}}{AB} = \frac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}MK.AC = S_{ACM} \Leftrightarrow MK = \frac{2S_{ACM}}{AC} = \frac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}MI.BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \frac{2S_{BCM}}{BC} = \frac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \frac{2S'}{R\sqrt{3}}$

Do đó: $MH + MK + MI = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}\ S_{ABM} + S_{ACM}$

$= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}.S_{ABMC}$

$= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}.\ S + S' = \frac{2\sqrt{3}\ S + 2S'}{3R}$

Bài 28. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là r. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Biết rằng:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{r}$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Thái Bình, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi đường cao tương ứng với cạnh BC là AH. Gọi S là diện tích tam giác ABC.

Ta dễ thấy: $\frac{S}{AM} \le \frac{S}{AH} = \frac{BC}{2}$

Tương tự ta có: $\frac{S}{BN} \le \frac{AC}{2}, \frac{S}{CP} \le \frac{AB}{2}$

Cộng vế theo vế ta được:

$\frac{S}{AM} + \frac{S}{BN} + \frac{S}{CP} \le p$, trong đó p là nửa chu vi.

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \le \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Bài 29. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Chứng minh rằng:

a. $MB + MC < AB + AC \frac{1}{2}(AB + BC + CA) < MA + MB + MC < AB + BC + CA$

b. $BM + MN + NC < AB + AC$ trong đó điểm N nằm trong tam giác sao cho MN cắt hai cạnh AB, AC

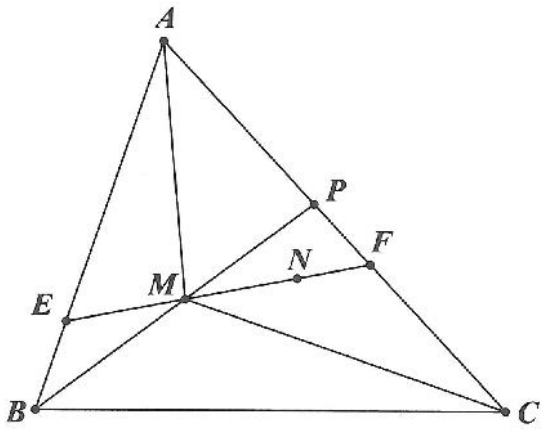
HƯỚNG DẪN GIẢI:

a. Đường thẳng BM cắt AC ở P

Áp dụng BĐT (1) ta có:

$MB + MC < MB + MP + PC$

$= BP + PC < AB + AP + PC = AB + AC$



b. Theo trên ta có:

$BC < MB + MC < AB + AC; CA < MC + MA < AB + BC;$
$AB < MA + MB < AC + BC.$ Cộng theo từng vế các BĐT trên ta có điều phải chứng minh.

c. Áp dụng câu 1) ta có:

$BM + MN + NC < BE + EM + MN + NF + FC$

$= BE + EF + FC < BE + EA + AF + FC = AB + AC.$

Bài 30. Cho tam giác ABC và 3 trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng:

a. $\frac{AB + AC - BC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$

b. $\frac{3(AB + BC + CA)}{4} < AM + BN + CP < AB + BC + CA$

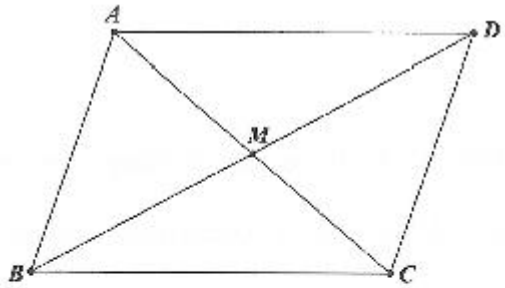
c. Giả sử $AB \geq AC$. Gọi AD, AM theo thứ tự là đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\frac{AB + AC - BC}{2} < AD \leq AM < \frac{AB + AC}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

+ Xét các tam giác MAB, MAC ta có:

$AM > AB - BM, AM > AC - MC.$ Suy ra

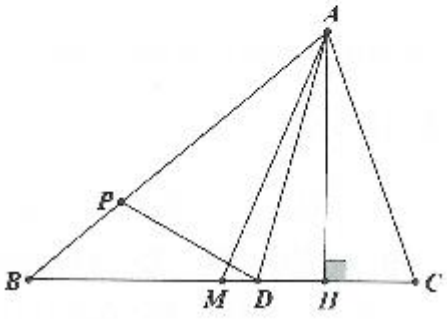
$2AM > AB + AC - (MC + MC) \Leftrightarrow 2AM > AB + AC - BC$



+ Gọi D là điểm đối xứng với A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AD = 2AM$. Trong tam giác ACD ta có:

$AD < AC + CD \Leftrightarrow 2AM < AB + AC$

Như vậy: $\frac{AB + AC - BC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}.$



b, Áp dụng bất đẳng thức ở câu a)

Cho 3 đường trung tuyến AM, BN, CP

ta có: $\frac{AB + AC - BC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2},$

$\frac{BC + AB - AC}{2} < BN < \frac{AC + BC}{2}; \frac{BC + AC - AB}{2} < CP < \frac{AC + BC}{2}.$ Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta có: $\frac{3(AB + BC + CA)}{4} < AM + BN + CP < AB + BC + CA$

c, Trong tam giác ABD, ADC có $AB < AD + BD; AC < AD + DC.$ Cộng theo từng vế hai BĐT trên được: $AB + AC < 2AD + BC \Rightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} < AD.$ Kết quả này vẫn đúng với D là điểm bất kỳ nằm bên trong đoạn BC.

Dựng $AH \perp BC$. Với $AB = AC$ thì $AM = AD$. Với $AB > AC$ thì $BH > CH \Rightarrow BM < BH \Rightarrow M$ thuộc đoạn BH. Hơn nữa $ADB > ADC \Rightarrow ADB$ tù. Do đó D thuộc đoạn BH. Lấy điểm P trên AB sao cho $AP = AC \Rightarrow \Delta ADP = \Delta ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow DP = DC, APD = ACD.$

+ Nếu $ACB \leq 90°$ (hình) thì $APD = ACB \leq 90° \Rightarrow BPD \geq 90° > ACB > PBD \Rightarrow BD > PD = CD$

$\Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD$

+ Nếu $ACB > 90°$ (hình) thì $BPD = ACH > ADC > ABC$

$\Rightarrow BD > PD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD.$

Bài 31. Cho tam giác nhọn *ABC* có trực tâm là điểm *H*. Chứng minh rằng:

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA)$$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

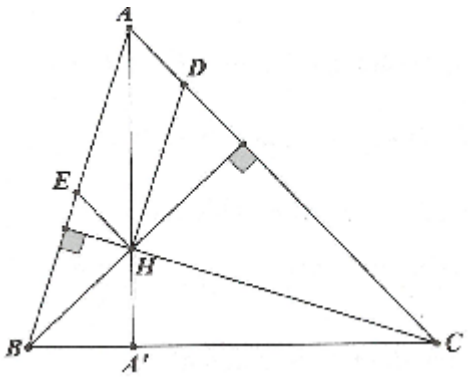
Dựng đường thẳng qua *H* song song với *AB* cắt *AC* tại *D*.

Dựng đường thẳng qua *H* song song *AC* cắt *AB* tại *E*.

Tứ giác *AEHD* là hình bình hành nên $AD = HE, AE = HD$

Xét tam giác *AHD* ta có: $HA < HD + AD \Leftrightarrow HA < AE + AD$

(1). Vì $HE // AC$ mà $AC \perp BH \Rightarrow HE \perp BH$. Trong tam giác vuông *HBE* ta có: $HB < BE$ (2)



Tương tự ta có: $HC < DC$ (3). Cộng các bất đẳng thức cùng chiều (1), (2), (3) ta suy ra $HA + HB + HC < (AE + EB) + (AD + DC) = AB + AC.$ Tương tự ta cũng có:

$$HA + HB + HC < AC + BC, HA + HB + HC < AB + BC \Rightarrow HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA)$$

Bài 32. Cho tam giác đều *ABC* nội tiếp đường tròn *(O)*, *H* là trung điểm của *BC*. *M* là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng $BH\ (M \neq B)$. Lấy điểm *N* thuộc đoạn thẳng *CA* sao cho $CN = BM$. Gọi *I* là trung điểm của *MN*.

a, Chứng minh 4 điểm *O, M, H, I* cùng thuộc một đường tròn.

b, Gọi *P* là giao điểm của *OI* và *AB*. Chứng minh tam giác *MNP* là tam giác đều.

c, Xác định vị trí của điểm *M* để tam giác *IAB* có chu vi nhỏ nhất.

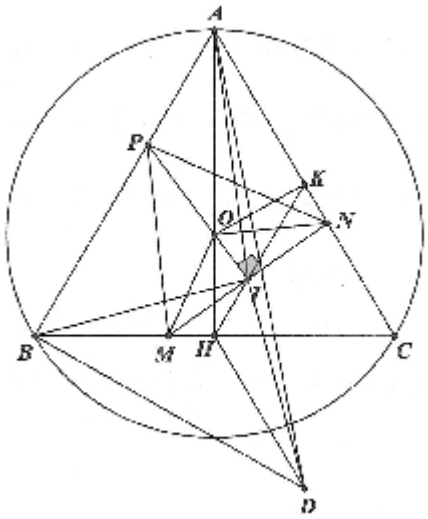
HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Xét tam giác *BOM* và tam giác *CON* ta có:

$BM = CN$ giả thiết, $OB = OC = R$, $OBM = OCN = 30°$

(do tam giác *ABC* đều). Suy ra $\Delta BOM = \Delta CON$ (c.g.c)

Suy ra $OM = ON$ hay tam giác *OMN* cân tại *O*, do *I* là trung điểm của *MN* suy ra $OI \perp MN \Rightarrow OIM = OHM = 90°$ nên tứ giác *OMHI* nội tiếp (Có hai đỉnh liên tiếp *I, H* cùng nhìn *OM* góc bằng $90°$)

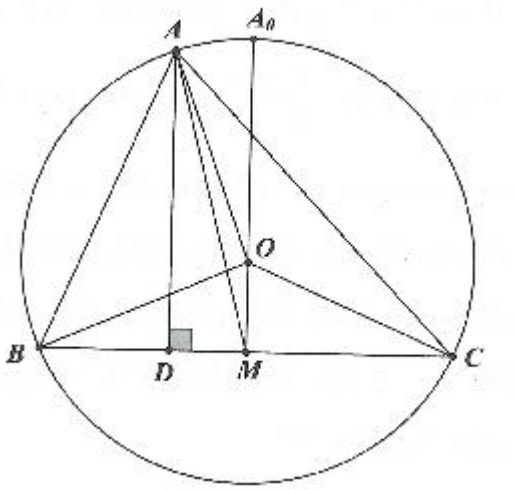


b, Do điểm *P* nằm trên trung trực cạnh *MN* nên

$PM = PN$ (1). Ta có $180° = OMB + OMC = OMB + ONC$ suy ra tứ giác *OMN*C nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$) nên $MON = 180° - NCM = 120°$ $POM = PON = 120°$ suy ra $POM + PBM = 180° \Rightarrow$ tứ giác *PBMO* nội tiếp nên $OPM = OBM = 30°.$ Chứng minh tương tự ta cũng có: $OPN = OAN = 30° \Rightarrow$ $MPN = 60°$ (2). Từ (1) và (2) suy ra tam giác *PMN* là tam giác đều.

c, Từ chứng minh ở câu *a, b* suy ra $OMN = OHI = OCN = 30°.$ Suy ra $HI // AB,$ gọi *K* là trung điểm của *AC* thì *H, I, K* thẳng hàng.

Tam giác *IAB* có *AB* không đổi nên chu vi tam giác nhỏ nhất khi $IA + IB$ nhỏ nhất. Đường thẳng *HI* cố định. Gọi *D* là điểm đối xứng với *B* qua *HI* thì điểm *D* cố định, suy ra độ dài *AD* không đổi. Ta có $IB = ID \Rightarrow IA + IB = IA + ID \geq AD.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *A, D, I* thẳng hàng. Tức điểm *I* chính là giao điểm của *AD* và *HK*. Mặt khác ta dễ chứng minh được *AHDK* là hình bình hành. Nên dấu bằng xảy ra khi *I* là trung điểm của *HK*, khi đó điểm $M \equiv H.$



2. Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

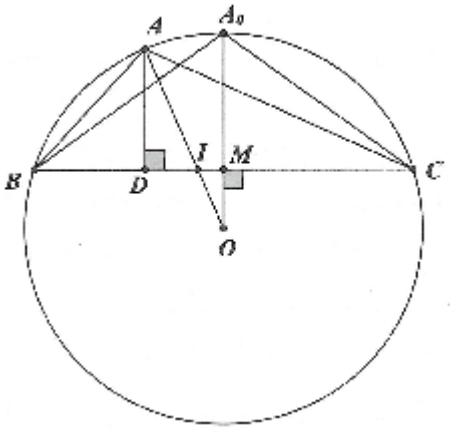
3. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung *BC* cố định. Điểm *A* di chuyển trên cung *BC* khi đó diện tích tam giác *ABC* lớn nhất khi và chỉ khi *A* là điểm chính giữa cung *BC*.

Chứng minh:

Trường hợp 1: Điểm *A* thuộc cung lớn *BC*

Ta dựng đường cao *AD* của tam giác *ABC* thì

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$ Do *BC* không đổi nên S_{ABC} lớn nhất khi và chỉ khi *AD* lớn nhất. Gọi *M* là trung điểm của *BC* thì



$$AD \leq AM \leq AO + OM = R + \sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}}$$

Suy ra $S_{ABC} \leq \frac{1}{2} BC.\left(R + \sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}} \right).$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $D \equiv M$ và *O, M, A* thẳng hàng. Hay $A \equiv A_0$ là điểm chính giữa cung lớn *BC*.

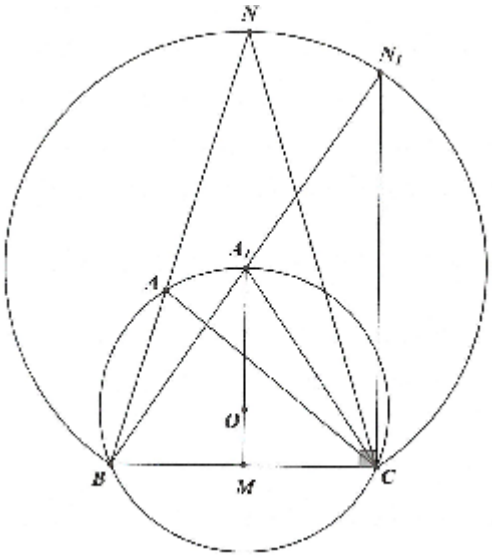
Trường hợp 2: Điểm *A* thuộc cung nhỏ *BC*.

Gọi *I* là giao điểm *AO* với dây cung *BC*.

Ta có: $AD + OM \leq AI + IO = R \Rightarrow AD \leq R - OM$

Vậy $S_{ABC} \le \frac{1}{2}BC.\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}} \right)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $D \equiv I \equiv M$. Hay $A \equiv A_1$ là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

4. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định. Điểm A di chuyển trên cung BC khi đó chu vi tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm chính giữa cung BC.



Trường hợp 1: Điểm A thuộc cung lớn BC.

Ta có chu vi tam giác ABC bằng: $AB + AC + BC$.

Do BC không đổi nên chu vi tam giác lớn nhất khi và chỉ khi $AB + AC$ lớn nhất. Để tạo ra $AB + AC$ ta làm như sau: Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = AC$ khi đó ta có: Tam giác NAC cân tại A và $ANC = \frac{1}{2}BAC$ không đổi. Suy ra điểm N thuộc cung chứa góc $\frac{1}{2}BAC$ dựng trên đoạn BC (phần nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A). Ta có: $AB + AC = AB + AN = BN$. Nên $AB + AC$ lớn nhất khi và chỉ khi BN lớn nhất, tức là BN là đường kính của đường tròn chứa cung chứa góc $\frac{1}{2}BAC$ dựng trên đoạn BC (phần nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A) hay $BCN = 90° \Leftrightarrow N \equiv N_1$. Do $A_1N_1 = A_1C$, tam giác BCN_1 vuông tại C suy ra $A_1N_1 = A_1C = A_1B$ hay $A_1 \equiv A$ là điểm chính giữa cung lớn BC.

Trường hợp A thuộc cung nhỏ BC ta cũng làm tương tự.

Bài 33. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, điểm M nằm trên nửa đường tròn sao cho $AM = R$, N là điểm nằm trên cung MB (N khác M, B). Gọi I là giao điểm của AN, MB, H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

a, Chứng minh: Tứ giác $HINB$ nội tiếp.

b, Chứng minh: IH là phân giác của góc MHN

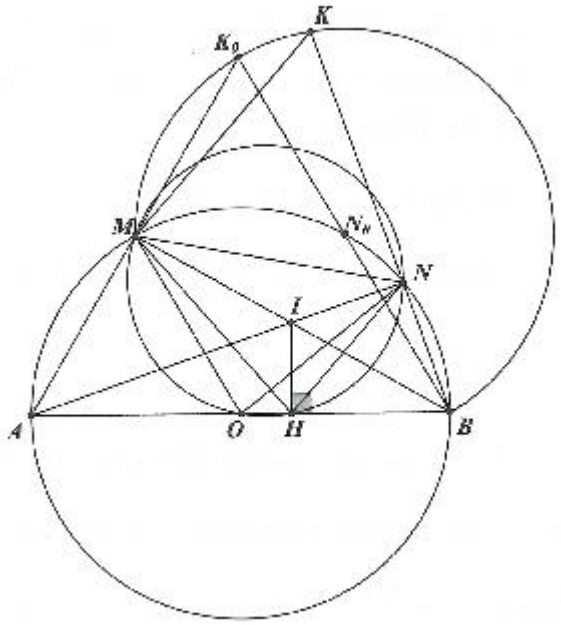
c, Khi N di chuyển trên cung MB. Chứng minh rằng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác MHN luôn đi qua 2 điểm cố định.

d, Tìm vị trí điểm N trên cung MB để chu vi tứ giác $AMNB$ lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Điểm N nằm trên (O) nên $ANB = 90°$.

Xét tứ giác *IHBN* có $IHB+INB=180°$ nên tứ giác *HINB* nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180°).



Suy ra $IHN=IBN$ (1) (cùng chắn cung *IN*).

b, Chứng minh tương tự câu a) ta cũng có:

AMIH nội tiếp suy ra $IHM=IAM$ (cùng chắn cung *IM*) (2). Mặt khác tứ giác *AMNB* nội tiếp nên:

$MAN=MBN$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $IHM=IHN$ hay *IH* là tia phân giác của góc *MHN*.

c, Vì $AM=R\Rightarrow AM=OM=OA$ nên tam giác *AMO* đều suy ra điểm *M* là điểm cố định. Từ chứng minh ở câu b ta suy ra $MHN=2MAN,$ mặt khác ta cũng có:

$MON=2MAN,$ (tính chất góc ở tâm). Suy ra

$MHN=MON,$ hay tứ giác *MOHN* nội tiếp (2 đỉnh liên tiếp *O, H* cùng nhìn cạnh *MN* những góc bằng nhau). Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác *MHN* luôn đi qua 2 điểm cố định *O, M*.

d) Vì $MAB=60°\Rightarrow MNB=120°, MB=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{4R^2-R^2}=\sqrt{3}R.$ Do *MB* không đổi, $MNB=120°,$ trên tia đối của *NB* lấy điểm *K* sao cho $NK=NM$ thế thì tam giác *MNK* cân tại *N*, $MNK=180°-MNB=60°$ nên tam giác *MNK* đều suy ra $MKB=60°.$ Suy ra điểm *K* nằm trên cung chứa góc $60°$ dựng trên đoạn *MB* (phần nửa mặt phẳng bờ *MB* không chứa *A*). Tia *AM* cắt cung chứa góc tại K_0 thì $MK_0B=90°.$ Ta tính được: $K_0B=\dfrac{MB}{\sin 60°}=\dfrac{R\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2R.$ Chu vi tứ giác AMNB bằng $AM+MN+NB+BA=3R+NM+NB.$ Suy ra chu vi tứ giác *AMNB* lớn nhất khi và chỉ khi $NM+NB$ lớn nhất. Theo cách dựng trên ta có: $NM+MB=KB\le K_0B=2R\Rightarrow$ chu vi tứ giác $3R+NM+NB\le 5R,$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $K\equiv K_0.$ Khi đó điểm *N* chính là giao điểm của K_0B với (O) hay $N\equiv N_0$ là điểm chính giữa cung nhỏ *MB*.

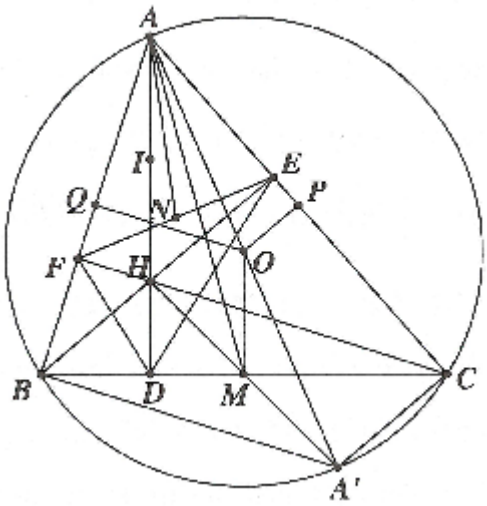
Bài 34. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $BC(BC\ne 2R)$ cố định. Điểm *A* di động trên cung lớn *BC* sao cho tam giác *ABC* nhọn. Các đường cao *AD, BE, CF* cắt nhau tại điểm *H*. Gọi *N* là trung điểm của *EF*.

a, Chứng minh: $R.AN=AM.OM$ với *M* là trung điểm của *BC*.

b, Chứng minh: $R(EF+FD+DE)=2S_{ABC}.$ Tìm vị trí điểm *A* để $EF+FD+DE$ lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF thì R' cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$



Suy ra $R'=\frac{AH}{2}=OM$ (học sinh tự chứng minh tính chất quen thuộc này).

Ta có $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ nên $\frac{AN}{AM}=\frac{R'}{R}$ hay $R.AN=AM.R'$

chú ý rằng $R'=OM \Rightarrow R.AN=AM.OM$.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AB. Ta có:

$2S_{ABC}=2\left(S_{OBC}+S_{OCA}+S_{OAB}\right)=OM.BC+OP.AC+OQ.AB.$

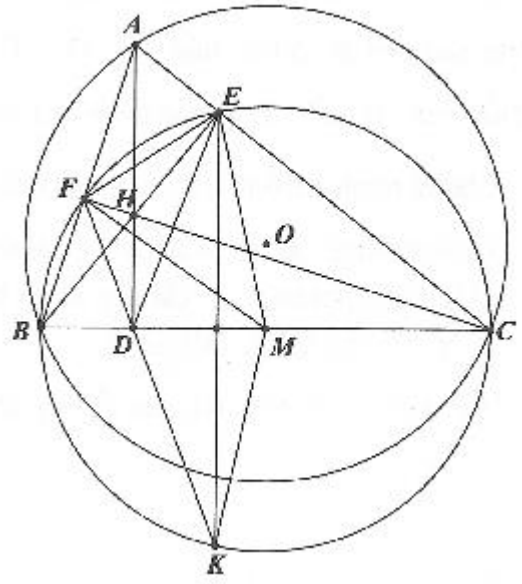
Từ câu a ta có:

$R.AN=AM.OM \Leftrightarrow OM=R.\frac{AN}{AM}=R.\frac{EF}{BC}$, tương tự ta cũng có: $OP=R.\frac{DF}{AC}, OQ=R.\frac{DE}{AB}$.

Thay vào ta có: $2S_{ABC}=R\left(EF+FD+DE\right)$. Do R không đổi nên $EF+FD+DE$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất. Hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Có thể lập luận theo cách khác:

Chứng minh: $OA \perp EF$ suy ra $S_{AEOF}=\frac{1}{2}OA.EF$, tương tự ta có: $S_{BDOF}=\frac{1}{2}OB.DF$, $S_{CDOE}=\frac{1}{2}OC.DE$ từ đó suy ra



$2S_{ABC}=R\left(EF+FD+DE\right)$. Do R không đổi nên $EF+FD+DE$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ điểm A đến BC lớn nhất. Hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác:

Ta thấy các điểm B, F, E, C nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC.

Do BC không đổi nên BAC không đổi.

Ta có ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ nên $MFE=BAC$ không đổi. Suy ra $EMF=90°-\frac{BAC}{2}$ không đổi

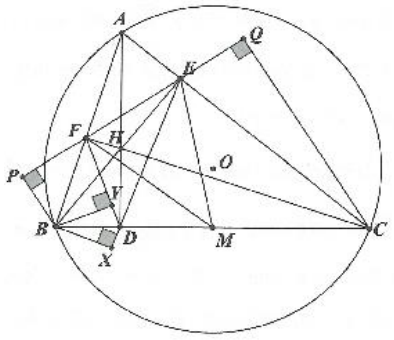
suy ra độ dài EF không đổi.

Gọi K là điểm đối xứng với E qua BC thì $EDC=KDC$. Ta lại có $EDC=EHC=FHB=FDB$. Suy ra $EDB=KDM$ nên F, D, K thẳng hàng.

Ta có chu vi ΔDEF lớn nhất khi và chỉ khi $DE+DF$ lớn nhất. Từ các chứng minh trên ta có: $DE+DF=FK\le 2R'=BC.$ Suy ra $DE+DF$ lớn nhất khi và chỉ khi $D\equiv I$ hay *A* là điểm chính giữa cung lớn *BC*.

Cũng có thể tiếp cận bài toán theo hướng khác:

Gọi *P, Q* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *B, C* trên *EF*. Ta có các tính chất quen thuộc *FH, DH* lần lượt là phân giác trong các góc $EFD,\ FDE$ suy ra *FB, FD* lần lượt là các đường phân giác ngoài của $EFD,\ FDE$. Hạ *BX, BY* lần lượt vuông góc với *DE, DF* thì suy ra $FP=FY,\ DX=DY,\ EP=EX$ (tính chất một điểm nằm trên phân giác cách đều 2 cạnh).



Ta có: Chu vi tam giác *DEF* là

$2p=DF+EF+DE=YF+DX+EF+DE=FP+EF+EX=EP+EX=2EP.$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $2p=2FQ.$

Suy ra $4p=2(EP+FQ)=2(PQ+2EF)\Rightarrow 2p=PQ+2EF$ suy ra $DE+DF=PQ.$

Mặt khác $PQ\le BC$ nên chu vi tam giác *DEF* lớn nhất bằng $EF+BC$ khi và chỉ khi $PQ//BC$ hay *A* là điểm chính giữa cung lớn *BC*.

Bài 35. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R.$ *EF* là dây cung di động trên nửa đường tròn sao cho *E* thuộc cung *AF* và $EF=\dfrac{AB}{2}.$ Gọi *H* là giao điểm của $AF,\ BE,\ C$ là giao điểm của *AE, BF, I* là giao điểm của *CH, AB*.

a, Chứng minh 4 điểm *A, C, F, I* cùng nằm trên một đường tròn.

b, Chứng minh: $AE.AC+BF.BC$ có giá trị không đổi khi *EF* di chuyển trên nửa đường tròn (O).

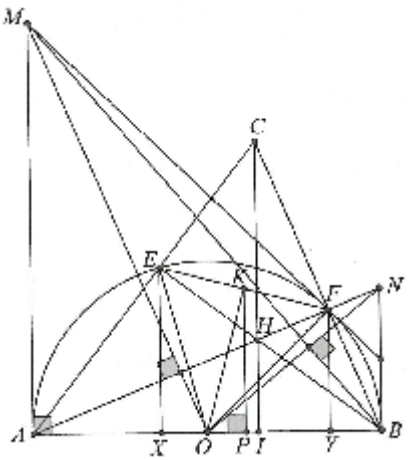
Đường thẳng *AF* cắt tiếp tuyến tại *B* ở *N*, các tiếp tuyến tại *A, F* của (O) cắt nhau ở *M*. Chứng minh: $ON\perp MB.$

c, Xác định vị trí *EF* trên nửa đường tròn để tứ giác *ABEF* có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Vì các điểm *E, F* nằm trên nửa đường tròn đường kính *AB* tiếp nên $AEB=AFB=90°$ (Góc nội chắn nửa đường tròn).

Do *C* là giao điểm của *AE, BF* suy ra $BE\perp AC, AF\perp BC$ suy ra *BE, AF* cắt nhau tại điểm *H* là trực tâm tam giác *CAB* suy ra $CI\perp AB.$



Tứ giác *ACFI* có $AFC = AIC = 90°$ suy ra tứ giác *ACFI* là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp *F, I* cùng nhìn *AC* góc $90°$).

b, Xét tam giác vuông *ACI* và tam giác vuông *ABE* ta có $AIC = AEB = 90°$, CAB chung. Suy ra $\Delta ACI \backsim \Delta ABE$ do đó: $\frac{AC}{AI} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AC.AE = AI.AB$

Tương tự ta cũng có: $BC.BF = BI.AB.$ Cộng hai đẳng thức ta có:

$AE.AC + BF.BC = AB\left(AI + BI\right) = AB^2 = 4R^2.$

c, Xét tam giác *MAO* và tam giác *ABN*. Ta có: $OAM = NBA = 90°, OMA = BAN$ (cùng phụ với NAM).

Từ đó suy ra $\Delta MAO \backsim \Delta ABN$ (g.g) suy ra $\frac{MA}{AO} = \frac{AB}{BN} \Leftrightarrow \frac{MA}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2OB}{BN}$ hay $\frac{MA}{AB} = \frac{OB}{BN}$

$\Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta OBN$ (c.g.c), suy ra $NOB + MBA = BMA + MBA = 90°$ hay $ON \perp MB.$

c, Dễ thấy: Tam giác *OMN* là tam giác đều có cạnh $MN = R.$ Gọi *K* là trung điểm của *EF* thì $OK \perp EF.$ Từ đó ta tính được: $OK^2 = OE^2 - KE^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{3}R}{2}.$ Tam giác *OMN* có diện tích là: $S_1 = \frac{1}{2}OK.EF = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}.$ Dựng EX, FY lần lượt vuông góc với *AB* tại *E, F* thì tứ giác *EFYX* là hình thang vuông, dựng $KP \perp AB$ suy ra *P* là trung điểm *XY* nên *KP* là đường trung bình hình thang *EFYX*. Kí hiệu S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác *AOE, BOF* thì $S_1 = \frac{1}{2}OA.EX = \frac{1}{2}R.EX;\ S_2 = \frac{1}{2}OB.FY = \frac{1}{2}R.FY.$ Ta có: $S_{AEFB} = S_1 + S_2 + S_3$ mà S_1 không đổi nên S_{AEFB} lớn nhất khi và chỉ khi $S_2 + S_3$ lớn nhất. Ta có: $S_2 + S_3 = \frac{1}{2}R\left(EX + FY\right) = \frac{1}{2}R.2KP = R.KP.$

Trong tam giác vuông *OKP* ta có: $KP \le KO = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$ Suy ra $S_2 + S_3 \le \frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv O \Leftrightarrow PK \perp EF \Leftrightarrow EF // AB.$ Vậy GTLN của S_{AEFB} là $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ khi và chỉ khi $EF // AB.$

Bài 36. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ có đường kính *AB, C* là trung điểm của *OA* và dây $MN \perp OA$ tại *C*. Gọi *K* là điểm tùy ý trên cung nhỏ *BM, H* là giao điểm của *AK, MN*.

a, Chứng minh: *BCHK* là tứ giác nội tiếp.

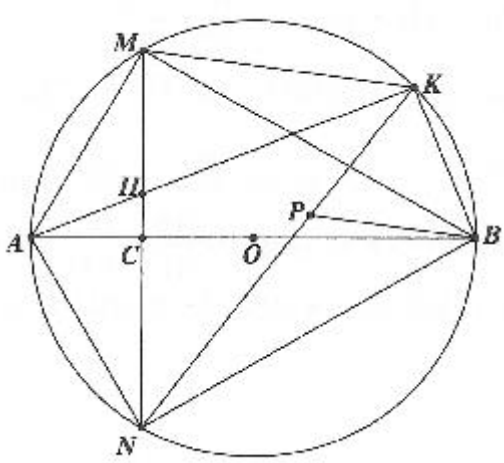
b, Tính $AH.AK$ theo *R*.

Xác định vị trí *K* để $KM + KN + KB$ lớn nhất. Tính GTLN đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Do K nằm trên $\left(O;\frac{AB}{2}\right)\Rightarrow AKB=90°$

Lại có $HCB=90°$ (giả thiết) suy ra $AKB+HCB=180°$ nên tứ giác $BCHK$ nội tiếp. (Tổng hai góc đối bằng 180°).



b, Ta có $\Delta ACH\backsim\Delta AKB$ (g.g)

nên $\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{AK}\Rightarrow AH.AK=AC.AB=\frac{R}{2}.2R=R^2.$

c, Đây là một câu hỏi khá hay. Nếu biết định lý Ptolemy hoặc định lý Shooten thì bài toán được giải quyết.

Cách tiếp cận thứ nhất:

Nhận thấy tam giác BMN cân tại B và tam giác AMO đều (do AMO cân tại O và tại M) suy ra tam giác BMN đều nên $NKB=\frac{1}{2}\text{sđ}NB=60°.$ Trên dây KN lấy điểm P sao cho $KP=KB$ thì tam giác KPB đều. Xét tam giác MKB và NPB ta có:

$KB=BP,MB=NB,\ MKB=NPB=120°$ suy ra $\Delta MKB=\Delta NPB$ (c.g.c)

$\Rightarrow KM=PN\Rightarrow KM+KB=KN.$ Vậy $KM+KN+KB=2KN$

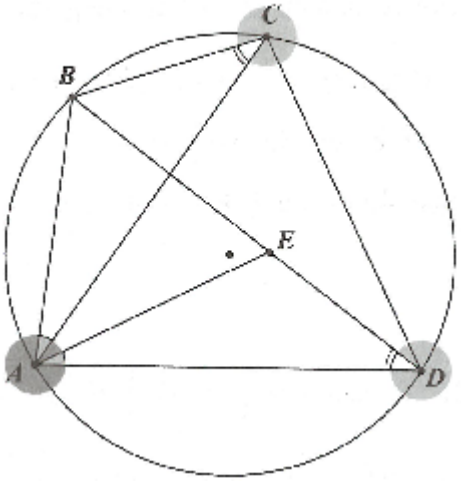
Dễ thấy $KN\le 2R$ nên $KM+KN+KB\le 4R,$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi K, O, N thẳng hàng.

Từ đó suy ra điểm K là giao điểm của NO với (O) (K khác N).

Cách 2. Dùng định lý Ptolemy.

5. Dùng các định lý hình học, kết hợp với bất đẳng thức cổ điển AM-GM, Cauchy-Schwarz.

Để giải quyết tốt các bài toán dạng này người giải cần nắm chắc các kết quả.



a, Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó ta có:

$AB.CD+AD.BC=AC.BD.$

Chứng minh:

Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $DAE=BAC.$ Ta có $DAE=BAC$ và $ADE=ACB$ (cùng chắn AB) nên

$\Delta ADE\backsim\Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow AD.BC=AC.DE$ (1). Do $DAE=CAB$ nên $DAC=EAB,$

lại có $ABE=ACD$ (cùng chắn AD)

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC\left(BE + DE\right) = AC.BD.$

Bài 37. Cho tam giác *ABC* đều nội tiếp đường tròn (O) bán kính *R*, điểm *M* chuyển động trên cung nhỏ *BC*.

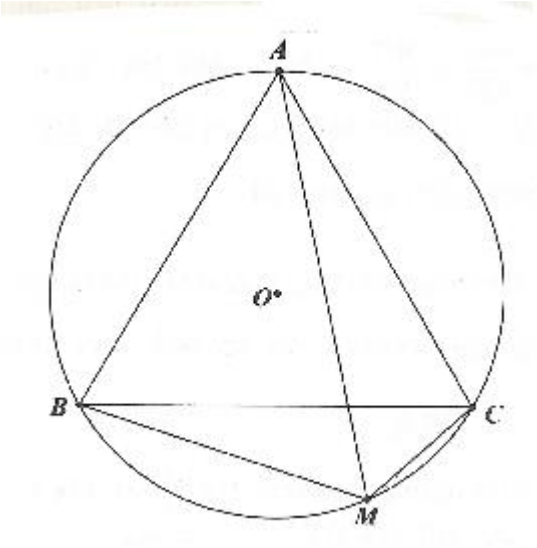
a, Chứng minh: $MA = MB + MC.$

b, Tìm GTLN, GTNN của $P = MA + MB + MC.$

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường chuyên Đại học Vinh 2006).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:



a, Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác *ABMC* ta có:

$MA.BC = AB.MC + AC.MB.$

Do $AB = BC = CA.$ Suy ra $MA = MB + MC.$

b, Ta có $P = MA + MB + MC = 2MA.$

P nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C.$

P lớn nhất khi và chỉ khi *MA* là đường kính của (O)

b, Với mọi số thực dương *x*, *y* ta có:

$\left(x+y\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{\dfrac{1}{xy}} = 4.$ Nên ta suy ra

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}.$ Áp dụng vào bài toán ta có:

$\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{MC} \geq \dfrac{4}{MB+MC} = \dfrac{4}{MA}.$ Do $MA \leq 2R$ nên ta suy ra $\dfrac{1}{MA}+\dfrac{1}{MB} \geq \dfrac{4}{2R} = 2R.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *AM* là đường kính của $(O).$ Hay *M* là điểm chính giữa cung nhỏ *BC*.

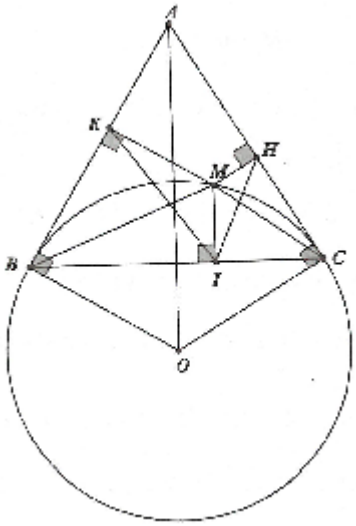
Bài 38. Cho đường tròn tâm *O* và điểm *A* nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến *AB, AC* với *(O)* với *B, C* là các tiếp điểm. Trên cung nhỏ *BC* lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc *MI, MH, MK* xuống *BC, CA, AB*. Gọi *P, Q* lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng *BM* và *IK, CM* và *IH*. Chứng minh: $MI^2 = MH.MK.$

a, Tìm vị trí điểm *M* để $MI.MH.MK$ đạt GTLN.

Tìm vị trí điểm *M* để $\dfrac{1}{MH}+\dfrac{1}{MK}$ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Từ giả thiết ta có: $BKM = BIM = 90°$ suy ra tứ giác BKMI nội tiếp. Tương tự cho tứ giác *CIMH, AKMH.*



Vì tứ giác *BKMI* nội tiếp nên: $MKI = MBI$ (cùng chắn cung *MI*).

Mặt khác ta có: $MBI = MCH$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Nhưng $MCH = MIH$ (cùng chắn cung MH của tứ giác nội tiếp *MHCI*). Suy ra $MKI = MIH$

Hoàn toàn tương tự ta có: $MIK = MHI$ nên $\Delta MIK \backsim \Delta MHI$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MI}{MK} = \dfrac{MH}{MI} \Leftrightarrow MI^2 = MH.MK.$ Từ đó ta có

$MI^3 = MI.MH.MK.$ Suy ra $MI.MH.MK$ lớn nhất khi và chỉ khi *MI* lớn nhất. Hay *M* là điểm chính giữa cung nhỏ *BC*.

b, Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\dfrac{1}{MH} + \dfrac{1}{MK} \geq \dfrac{2}{\sqrt{MH.MK}} = \dfrac{2}{MI}.$ Nên $\dfrac{1}{MH} + \dfrac{1}{MK}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI lớn nhất. Hay *M* là điểm chính giữa cung nhỏ *BC*.

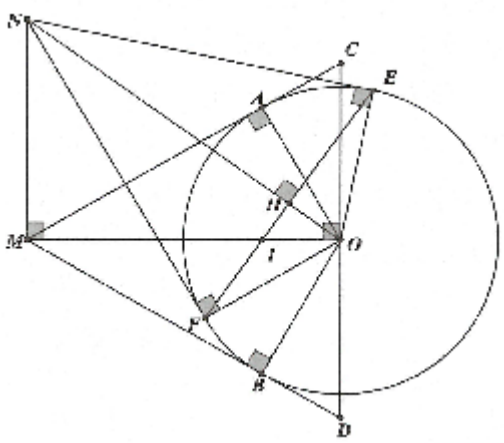
Bài 39. Cho đường tròn tâm $(O;R)$ và một điểm *M* nằm ngoài *(O)*. Qua *M* kẻ các tiếp tuyến *MA, MB* đến *(O)*, (*A, B* la các tiếp điểm).

a, Đường thẳng qua O song song với *AB* cắt tia *MA, MB* lần lượt tại *C, D*. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác *MCD*.

b, Giả sử $OM = 2R$ va điểm M cố định. Trên đường thẳng *(d)* qua *M* vuông góc với *MO* ta lấy một điểm *P* rồi kẻ 2 tiếp tuyến *PE, PF* đến *(O)*, (*A, B* là các tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng *EF* luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí điểm P trên đường thẳng *(d)* để độ dài *EF* nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Ta có: $S_{MCD} = 2\,S_{MOC} = OA.MC = OA(MA + AC).$ Theo bất đẳng thức Cosi ta có:



$MA + AC \geq \sqrt{MA.AC}.$ Mặt khác áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *MOC* ta có: $AM.AC = OA^2 = R^2.$ Suy ra $S_{MCD} \geq 2R^2.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AM = AC \Leftrightarrow \Delta MOC$ vuông cân tại *O*. Hay $MO = R\sqrt{2}.$

b, Gọi *I* là giao điểm của *EF* và *MO*, *H* là giao điểm của *EF* và *NO* thì *MIHN* là tứ giác nội tiếp nên $OH.ON = OI.OM.$ Mặt khác trong tam giác vuông *NEO* ta có: $OH.ON = OE^2 = R^2$ suy ra $OI.2R = R^2 \Rightarrow OI = \dfrac{R}{2}.$ Điểm *I* nằm trên OM, $OI = \dfrac{R}{2}$ không đổi.

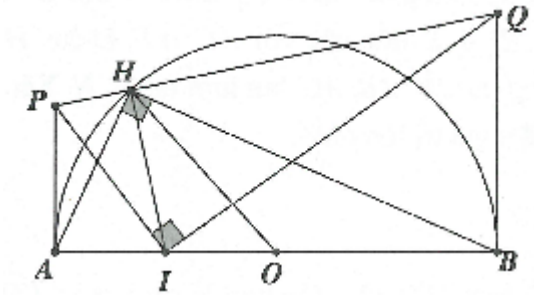
Suy ra I là điểm cố định, nên đường thẳng EF luôn đi qua I cố định nằm trong đường tròn (O). Ta thấy: $EF = 2HE = 2\sqrt{R^2 - OH^2}$ nên EF nhỏ nhất khi OH lớn nhất. Mặt khác $OH \le OI = \frac{R}{2}$ nên EF lớn nhất bằng $EF = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $H \equiv I \Leftrightarrow N \equiv M$.

Cũng có thể lý luận theo cách khác: Ta có $EF = 2HF = \frac{2OE.EN}{ON} = \frac{2R\sqrt{ON^2 - R^2}}{ON} = 2\sqrt{1 - \frac{R^2}{ON^2}}$ suy ra EF nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{R^2}{ON^2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow ON$ nhỏ nhất. Mà $ON \ge OM = 2R$. Suy ra $EF \ge R\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv N$.

Bài 40. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Các đường thẳng a, b lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại A, B. Gọi I là trung điểm của OA. Lấy hai điểm P, Q nằm trên a, b sao cho P, Q ở cùng một phía so với AB và $PIQ = 90°$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên PQ chứng minh H nằm trên (O) và tìm vị trí P, Q trên a, b sao cho diện tích tam giác IPQ lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Học sinh tự chứng minh $AHB = 90°$ để suy ra H nằm trên (O). Chú ý rằng: $OH = R$, OH không vuông góc với PQ nên PQ cắt (O).



Ta có $S_{IPQ} = S_{ABQP} - S_{AIP} - S_{BIQ} = \frac{R(3AP + BQ)}{2}$. Mặt khác ta cũng dễ chứng minh được:

$\Delta IAP \backsim \Delta QBI \Rightarrow \frac{IA}{AP} = \frac{QB}{BI} \Rightarrow AP.QB = IA.IB = \frac{3}{4}R^2$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$3AP + BQ \ge 2\sqrt{3AP.BQ} = 3R^2$ suy ra $S_{IPQ} \ge \frac{3}{2}R^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

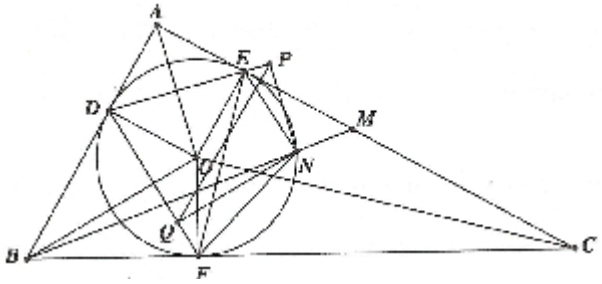
$AP = \frac{R}{2}, \text{AQ} = \frac{3R}{2}$

Bài 41. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC; M là điểm di chuyển trên đoạn CE. Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta có tứ giác *PNQD, EDFN* nội tiếp

$\Rightarrow QPN = QDN = FEN.$



Tương tự có ta có:

$NQP = NDP = NFE. \Rightarrow \Delta \text{NEF} \backsim \Delta NPQ$

Suy ra $\frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF}$. Trong tam giác vuông *NQF* ta có:

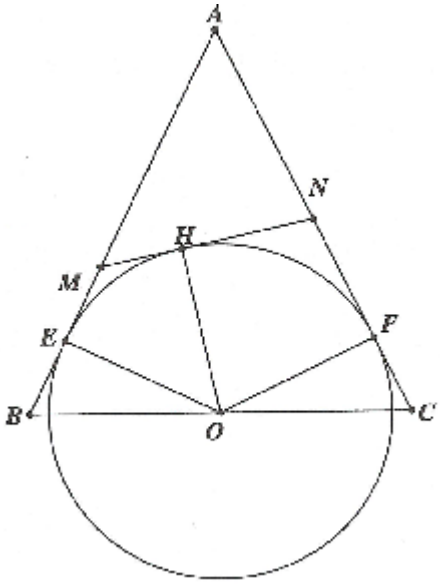
$NQ \le NF$ do đó $\frac{PQ}{EF} \le 1$. Như vậy *PQ* lớn nhất bằng *EF* khi và chỉ khi $Q \equiv F$ khi đó $P \equiv E,$ do *P* và *Q* lần lượt là hình chiếu của *N* trên các đường thẳng *DE, DF* nên khi $Q \equiv F,\ P \equiv E$ thì *DN* là đường kính của (O). Từ đó suy ra cách xác định *M* như sau: Dựng đường kính *DN* của *(O)*, *M* là giao điểm của *BN* và *AC*

Bài 42. Cho tam giác *ABC* cân đỉnh *A*. Gọi *O* là trung điểm của *BC*. Đường tròn *(O)* tiếp xúc với *AB* ở *E* tiếp xúc với *AC* ở *F*. Điểm *H* chạy trên cung nhỏ EF tiếp tuyến của đường tròn tại *H* cắt *AB, AC* lần lượt tại *M, N*. Xác định vị trí của điểm *H* để diện tích tam giác *AMN* đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Dễ thấy *OM, ON* lần lượt là phân giác EOM, FOH

Từ đó ta có: $MON = \frac{180^0 - BAC}{2} = ABC \Rightarrow \Delta MBO \backsim \Delta OCN$ (g.g)



$\Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM.CN = OB.OC = \frac{BC^2}{4} = const$ (1)

Ta lại có $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$ nên S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{BMNC} đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi *R* là bán kính của đường tròn $(O),$ ta có:

$S_{BMNC} = S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC} = \frac{1}{2}R(BM + MN + NC)$

$= \frac{1}{2}R\left[BE + CF + 2(EM + FN)\right]$

Vì $(MN = EM + FN) = R(BE + EM + FN)$ vì $(BE = CF)$

$= R(BE + BM + CN - 2BE) = R(BM + CN - BE)$ (2).

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, từ (1) và (2) suy ra $S_{BMNC} \ge R\left(\sqrt{BM.CN} - BE\right) = R(BC - BE).$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BM = CN \Leftrightarrow MN // BC$ khi và chỉ khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn (O). Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi H là giao của đường trung trực của BC với đường tròn (O)

Bài 43. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm ngoài (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm).

a, Chứng minh: $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

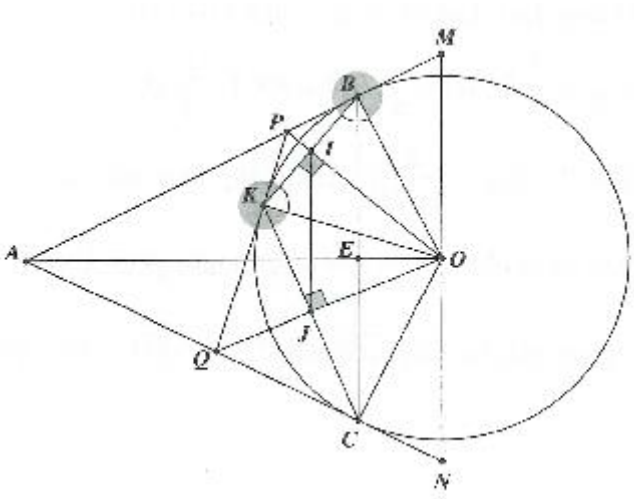
b, Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh: $BE \perp OA$ và $OE.OA = R^2$.

c, Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm K bất kỳ (K khác B, C). Tiếp tuyến tại K của (O) cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh: Chu vi tam giác APQ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.

d, Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh: $PM + QN \geq MN$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $ABO = ACO = 90°$. Tứ giác $ABOC$ có $ABO + ACO = 180°$ nên $ABOC$ là tứ giác nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180°).



b, Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có $BC \perp AO$ tại E. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có: $OE.OA = OB^2 = R^2$.

c. Vì điểm A cố định nằm ngoài (O) nên AB, AC cố định suy ra $AB + AC$ không đổi.

Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có: $PK = PB,\ QK = QC$ suy ra chu vi tam giác APQ là:

$AP + AQ + PQ = AP + AQ + PB + QC = AB + AC$ không đổi.

d. Giả sử BK cắt PO tại I, CK cắt OQ tại J thì $KIO = KJO = 90°$ nên tứ giác $KIOJ$ nội tiếp nên

$KOJ = KIJ = QKC = KBC \Rightarrow IJ // BC$ hay $IJ \perp AO$. Từ đó ta có:

$BPO = BKO = IJO = 90° - JAO = QON$.

Xét ΔMOP và ΔNQO có: $PMO = ONQ$ và $MPO = QON$ suy ra $\Delta MOP \backsim \Delta NQO$ (g.g)

$$\frac{PM}{OM} = \frac{ON}{QN} \Rightarrow PM.QN = OM.ON = \frac{MN^2}{4}.$$

Ta cũng có: $PM.QN \leq \frac{(PM+QN)^2}{4} \Rightarrow \frac{(PM+QN)^2}{4} \geq \frac{MN^2}{4} \Leftrightarrow PM + QN \geq MN.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $PM = QN \Leftrightarrow PQ//MN$ hay K là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Bài 44. Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng (d) không cắt (O), điểm M nằm trên đường thẳng (d), qua M dựng các tiếp tuyến MA, MB đến (O,R) (A, B là các tiếp điểm. Gọi H là hình chiếu vuông góc của (O) lên (d). Các đường thẳng cắt AB lần lượt tại I, K. Tìm vị trí điểm M trên (d) để diện tích tam giác OIK lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

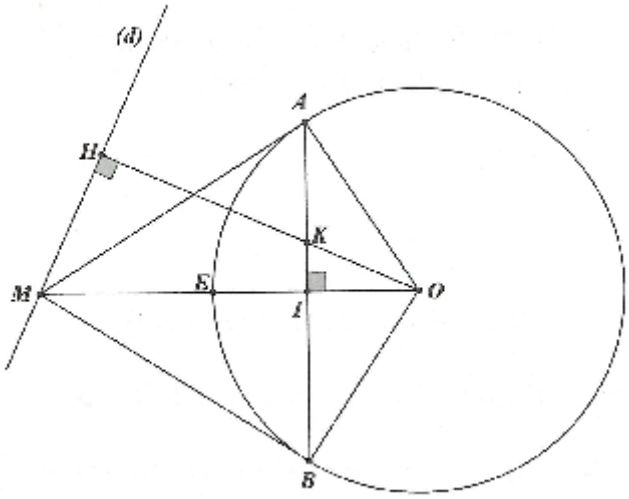
Ta có: $OA^2 = OI.OM = OK.OH$

suy ra $OK = \dfrac{OA^2}{OH} = \dfrac{R^2}{OH}$ không đổi (do OH không đổi). Diện tích tam giác OIK là:

$$S_{OIK} = \frac{1}{2}IK.IO \le \frac{1}{4}\left(IK^2 + IO^2\right) = \frac{1}{4}OK^2$$

Tức là: $S_{OIK} \le \dfrac{R^4}{4OH^2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $IK = KO$ suy ra tam giác KIO vuông cân. Suy ra $KOI = 45° \Rightarrow OMH = 45°$.

Tức là điểm M cách H 1 đoạn bằng OH.



Bài 45. Cho đường tròn tâm O bán kính R, hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M bất kỳ thuộc đoạn OA $(M \ne O, A)$. Tia DM cắt đường tròn (O) tại N.

a, Chứng minh: Tứ giác $OMNC$ nội tiếp.

b, Chứng minh: $DM.DN = DO.DC = 2R^2$.

c, Tiếp tuyến tại C của (O) cắt tia DM tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cắt BC tại F.

Chứng minh: $DF//AN$.

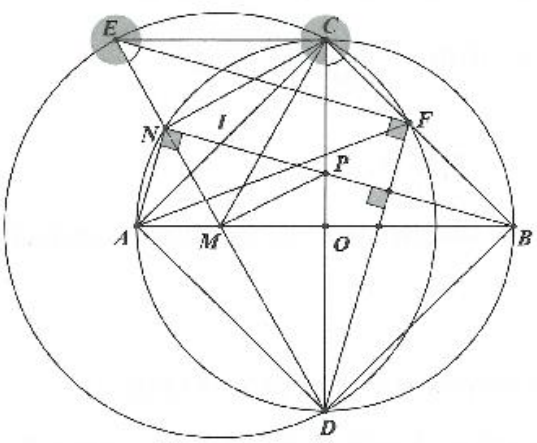
d, Nối B với N cắt OC tại P.

Tìm vị trí điểm M để $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{OP}{CP}$ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Tứ giác $OMNC$ có $MNC = COM = 90°$ nên

$MNC + COM = 180°$ suy ra $OMNC$ là tứ giác nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng $180°$).



b, Xét tam giác vuông *DOM* và tam giác vuông *DNC* ta có: $DOM = DNC = 90°$, NDC chung. Suy ra $\Delta DNC \backsim \Delta DOM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DN}{DO} = \dfrac{DC}{DM} \Leftrightarrow DM.DN = DO.DC = R.2R = 2R^2.$

c, Tam giác *ECD* vuông tại C, $MO // EC$, O là trung điểm *CD* nên *MO* là đường trung bình của tam giác *ECD* suy ra *M* là trung điểm của *ED*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *CDE* chính là đường tròn tâm *M* bán kính *MC*.

Tứ giác *DFCE* nội tiếp nên $DEF = DCF$ (cùng chắn cung *DF*), tứ giác *DNCB* nội tiếp nên $DNB = DCB$(cùng chắn cung *BD*). Từ đó suy ra $DNB = DEF \Rightarrow NB // EF$. Mà $NB \perp AN$, $EF \perp DF \Rightarrow AN // DF$ (từ vuông góc đến song song).

d, Ta có: $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{OP}{CP} = \dfrac{OA - AM}{AM} + \dfrac{OC - CP}{CP} = \dfrac{OA}{AM} + \dfrac{OC}{CP} - 2$

Ta có $BPD = \dfrac{1}{2} sđ\left(NC + BD\right) = \dfrac{1}{2} sđ\left(NC + BC\right) = MDB$, $PDB = MBD = 45°$,

Suy ra $\Delta MDB \backsim \Delta BPD \Rightarrow \dfrac{MB}{BD} = \dfrac{DB}{DP} \Rightarrow MB.DP = BD^2 = 2R^2.$

Ta có:

$AM = AB - MB, CP = CD - PC \Rightarrow AM.CP = \left(2R - MB\right)\left(2R - DP\right) = 4R^2 + MB.PD - 2R\left(MB + PD\right)$

$= 6R^2 - 2R\left(MB + PD\right)$. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có: $MB + DP \ge 2\sqrt{MB.DP} = 2\sqrt{2}R$ suy ra $AM.CP \le 6R^2 - 4\sqrt{2}R^2 = 2R^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 R^2.$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

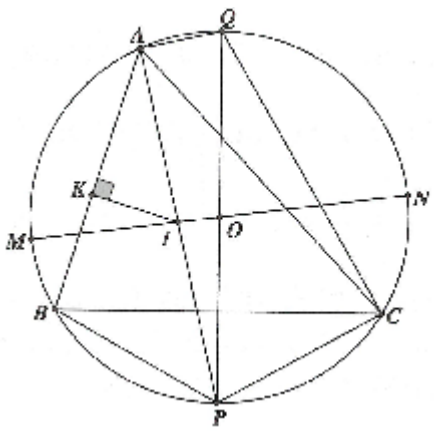
$$\frac{OA}{AM} + \frac{OC}{CP} \ge 2\sqrt{\frac{OA.OC}{AM.CP}} = \frac{2R}{\sqrt{AM.CP}} \ge \frac{2R}{\sqrt{2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2} - 1\right)} = 2 + \sqrt{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{OA}{AM} = \dfrac{OC}{CP} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow AM = \dfrac{2OA}{2 + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2} + 1} = \left(2 - \sqrt{2}\right)R$

Suy ra điểm *M* nằm trên đoạn *OA* sao cho $AM = \left(2 - \sqrt{2}\right)R.$

Vậy GTNN của $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{OP}{CP}$ là $\sqrt{2}$

Bài 46. Cho tam giác *ABC* nội tiếp $\left(O;R\right)$ và ngoại tiếp $\left(I;r\right)$.



Chứng minh rằng: $\dfrac{R}{r} \ge 2$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Ta cần tìm mối liên hệ giữa hai bán kính *R, r*.

Giả sử *AI* kéo dài cắt *(O)* tại *P*. *OI* cắt *(O)* tại *M, N*.

Hạ $IK \perp AB,$ dựng đường kính *PQ* của *(O)*.

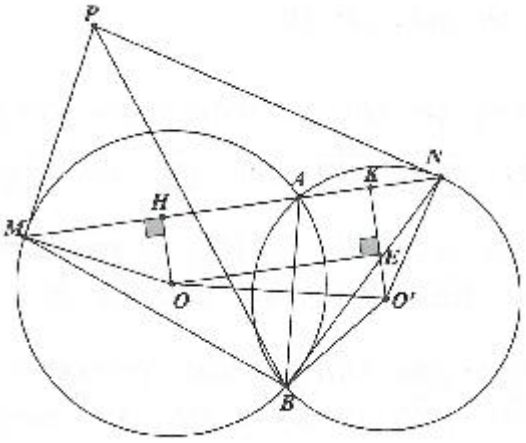
Ta có *I* nằm trong *(O)* và $IP.IA = IM.IN = (R-OI)(R+OI) = R^2 - OI^2.$

Mặt khác ta cũng có $\Delta AKI \backsim \Delta QCP$ nên $\frac{IK}{IA} = \frac{PC}{PQ} \Leftrightarrow IA.PC = 2r.R.$ Nhưng ta dễ chứng minh được: $PC = PI$ suy ra $IA.IP = 2R.r$ hay $2R.r = R^2 - OI^2 \Leftrightarrow R^2 - 2R.r = OI^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{R}{r} \geq 2.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $O \equiv I$ hay tam giác *ABC* đều.

Bài 47. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại *A, B*. Một cát tuyến qua *A* cắt $(O),(O')$ lần lượt tại *M, N (M* nằm ngoài $(O'),$ *N* nằm ngoài $(O)).$ Các tiếp tuyến của $(O),(O')$ tại *M, N* cắt nhau ở *P*. Tìm vị trí của cát tuyến *MAN* để bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *MNP* lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Do *MP, NP* lần lượt là các tiếp tuyến của (O) và (O') nên ta có:



$PMN + PNM = MBA + NBA$

Hay $180° - MPN = MBN \Rightarrow MBN + MPN = 180°$

Suy ra *PMBN* là tứ giác nội tiếp.

Từ đó ta có:

$MPN + NPB = MNB + NMB = \frac{1}{2}AOB + \frac{1}{2}AO'B$ không đổi.

Suy ra MPN không đổi. Gọi *R* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *MNP* ta có:

$MN = 2R.\sin MPN.$ Suy ra *R* lớn nhất khi *MN* lớn nhất. Gọi *H, K* lần lượt là trung điểm của *AM, AN* ta suy ra $MN = 2HK.$ Dựng $OE \perp O'K$ thì $OE = HK.$

Ta có: $MN = 2HK = 2OE \leq 2OO'.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $E \equiv O'$ hay $MN \perp AB.$

Bài 48. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O).$ Các đường cao *AM, BN, CP* của tam giác *ABC* cùng đi qua điểm *H*. Gọi *Q* là điểm bất kì trên cung nhỏ *BC* (*Q* khác *B*, *Q* khác *C*). Gọi *E, F* theo thứ tự là điểm đối xứng của *Q* qua các đường thẳng *AB* và *AC*.

a, Chứng minh $MH.MA = MP.MN.$

b, Chứng minh ba điểm *E, H, F* thẳng hàng.

b, Gọi J là giao điểm của QE và AB, I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của điểm Q trên cung nhỏ BC để $\left(\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất

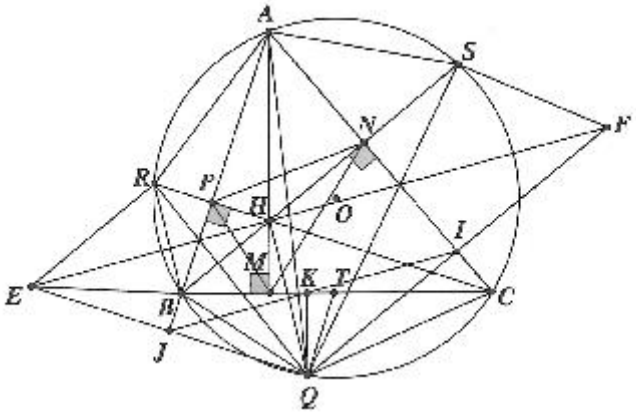
(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Xét tam giác MHP và tam giác MNA, ta có: $APMC$, $MHCN$ nội tiếp nên

$AMP=ACP=NMH$, $MPH=HAN$ nên $\Delta MHP\backsim\Delta MNA\Rightarrow\frac{MH}{MN}=\frac{MP}{MA}$ hay $MH.MA=MN.MP$.

b, Dựng $QK\perp BC$ ta có các tứ giác $JBKQ$, $QKIC$, $ABQC$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc sau: $JKQ=JBQ=ACQ=180°-QKI$ hay $JKQ+QKI=180°$ nên J, K, I thẳng hàng.



Giả sử tia CH, BH cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là R, S thì $RAB=RCB=HAB$, tương tự $RBA=HBA$ nên suy ra H đối xứng với R qua AB, tương tự H đối xứng với S qua AC.

Ta có tứ giác $ERHQ$ là hình thang cân và tứ giác $CRBQ$, $KBJQ$ nội tiếp nên $HEQ=HRQ=CBQ=KJQ$ nên suy ra $HE//KJ$, chứng minh tương tự ta có: $HF//KI$ mà I, K, J thẳng hàng nên suy ra E, H, F thẳng hàng.

c, Trên BC lấy điểm T sao cho $QCT=QBA$ suy ra $\Delta QBA\backsim\Delta QCT$, QJ, QK là các đường cao tương ứng nên suy ra $\frac{AB}{QJ}=\frac{TC}{QK}$ (1) tương tự $\Delta BQT\backsim\Delta AQC\Rightarrow\frac{AC}{QI}=\frac{TB}{QK}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}=\frac{TC}{QK}+\frac{TB}{QK}=\frac{BC}{QK}$ suy ra $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{BC}{QK}$ nhỏ nhất, hay QK lớn nhất suy ra Q là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Bất đẳng thức Erdos – Mordell

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức:

a, $R_a+R_b+R_c\ge 2\left(d_a+d_b+d_c\right)$.

b, $R_a.R_b.R_c\ge 8d_a.d_b.d_c$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là tâm của tam giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

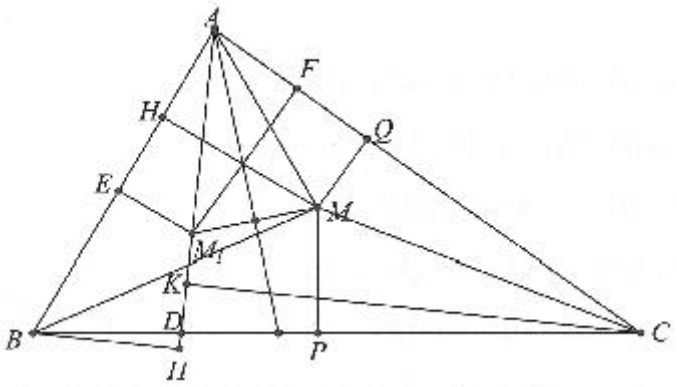
a, Đặt $BC=a,\ CA=b, AB=c.$ Lấy điểm M_1 đối xứng với điểm *M* qua đường phân giác trong của $BAC.$ Dựng $BH\perp AM_1,$ và $CK\perp AM_1$

Giả sử AM_1 cắt *BC* tại *D*.

Khi đó $BD\ge BH,\ DC\ge CK.$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AD\perp BC$ hay $AM_1\perp BC.$

Từ đó ta có:

$a\ge BH+CK\Leftrightarrow aR_a\ge 2S_{ABM_1}+2S_{ACM_1}$ (chú ý rằng $AM_1=AM=R_a$) hay $aR_a\ge cd_b+bd_c.$



Từ đó $R_a\ge\frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c$ (1). Tương tự ta có

$R_b\ge\frac{a}{b}d_c+\frac{c}{d}d_a$ (2); $R_c\ge\frac{a}{c}d_b+\frac{b}{c}d_a$ (3).

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta thu được:

$R_a+R_b+R_c\ge d_a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+d_b\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+d_c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 2\left(d_a+d_b+d_c\right).$(Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ cho các biểu thức trong ngoặc). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ đồng thời M_1 là trực tâm của tam giác *ABC*. Nói cách khác, M_1 (và do đó cả *M*) là tâm của tam giác đều *ABC*.

b, Từ cách chứng minh bất đẳng thức Erdos-Mordell ở câu a) ta có:

$R_a\ge\frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c$ (1); $R_b\ge\frac{a}{b}d_c+\frac{c}{b}d_a$ (2); $R_c\ge\frac{a}{c}d_b+\frac{b}{c}d_a$ (3).

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được: $R_a.R_b.R_c\ge\left(\frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c\right)\left(\frac{a}{b}d_c+\frac{c}{b}d_a\right)\left(\frac{a}{c}d_b+\frac{b}{c}d_a\right)$

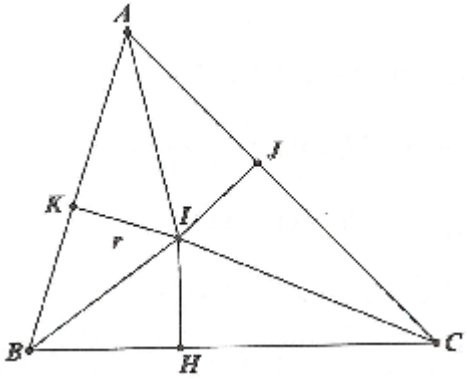
Áp dụng bất đẳng thức: $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ ta có: $\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}d_b.\frac{b}{a}d_c}.2.\sqrt{\frac{a}{b}d_c.\frac{c}{b}d_a}.2.\sqrt{\frac{a}{c}d_b.\frac{b}{c}d_a}=8d_ad_bd_c$

(đpcm).

Bài 49. Gọi *I* là tâm, *r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác *ABC* đều và $IA+IB+IC=6r.$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Kẻ *IH, IJ, IK* theo thứ tự vuông góc với các cạnh *BC, CA, AB*. Ta có $IH=IJ=IK=r.$ Áp dụng bất đẳng thức Erdos-Mordell cho điểm *I* trong tam giác *ABC*, ta thấy



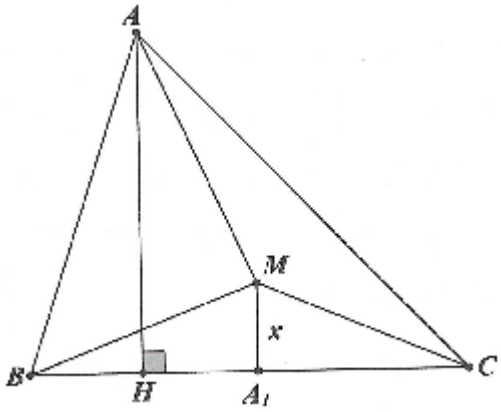
$IA+IB+IC\ge 2\left(IH+IJ+IK\right)=6r.$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác *ABC* đều. Nói cách khác, điều kiện cần và đủ để tam giác *ABC* đều là $IA+IB+IC=6r$ (đpcm)

Bài 50. Giả sử *M* là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác *ABC*. Gọi *r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $MA+MB+MC\ge 6r.$ Đẳng thức xảy ra khi nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi *x, y, z* lần lượt là khoảng cách từ *M* đến các cạnh *BC, CA, AB*.

Kẻ *AH* vuông góc với *BC*, MA_1 vuông góc với *BC*. Khi đó ta có $AM+MA_1\ge AH.$ Từ đó $AM\ge \frac{2S_{ABC}}{BC}-\text{x}.$ Tương tự,



$BM\ge \frac{2S_{ABC}}{CA}-y;\ CM\ge \frac{2S_{ABC}}{AB}-z.$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức này ta được:

$$MA+MB+MC\ge 2S_{ABC}\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right)-\left(x+y+z\right)$$

$$=r\left(BC+CA+AB\right)\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right)-\left(x+y+z\right)\quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $\left(BC+CA+AB\right)\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right)\ge 9$ (2).

Áp dụng bất đẳng thức Erdos-Mordell cho điểm *M* đối với tam giác *ABC* ta có:

$MA+MB+MC\ge 2\left(x+y+z\right)$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $MA+MB+MC\ge 9r-\left(\frac{MA+MB+MC}{2}\right)$ hay $MA+MB+MC\ge 6r$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác *ABC* đều (đpcm).

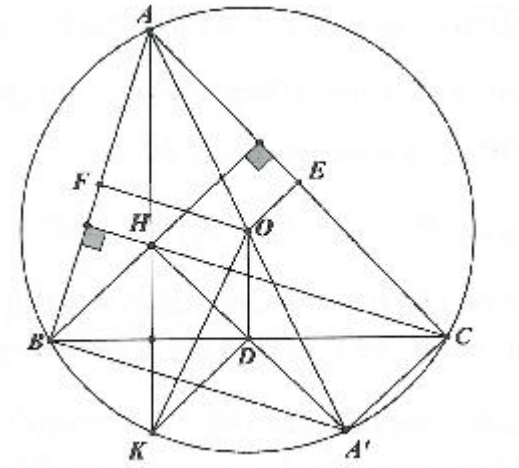
Bài 51. Giả sử *H* là trực tâm của tam giác nhọn *ABC*. Gọi *D, E, F* lần lượt là trung điểm của *BC, CA, AB*; *R* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Chứng minh bất đẳng thức

$$HD+HE+HF\ge \frac{3}{2}R.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*, *K* là điểm đối xứng với *H* qua *BC* suy ra *K* nằm trên $\left(O\right)$ và $HD=DK.$

Áp dụng bất đẳng thức cho 3 điểm bất kỳ ta có:



$HD+OD=DK+OD\geq OK=R.$ Suy ra

$HD+HE+HF=3R-(OD+OE+OF)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Erdos-Mordell cho điểm

O nằm trong tam giác ABC ta có:

$OD+OE+OF\leq\dfrac{OA+OB+OC}{2}=\dfrac{3R}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $HD+HE+HF\geq\dfrac{3}{2}R$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 52. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ các đường cao AA_1,BB_1,CC_1 cắt nhau tại H.

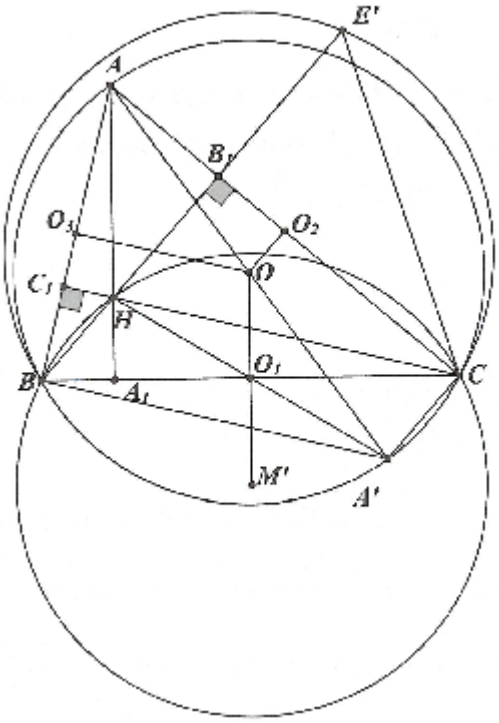
a, Giả sử BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm vị trí điểm A để $HA+HB+HC$ lớn nhất.

b, Kẻ OO_1 vuông góc với BC, OO_2 vuông góc với AC, OO_3 vuông góc với AB. Chứng minh rằng:

$$HA_1+HB_1+HC_1\leq OO_1+OO_2+OO_3\leq\frac{3R}{2}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Ta có tính chất H thuộc đường tròn cố định $(M';R)$ (M' là điểm đối xứng với O qua BC) mà BC là dây cung cố định của $(M';R)$ nên BHC không đổi suy ra $EHC=180°-BHC=\varphi$ không đổi. Ta cũng có: $AH=2OM$ suy ra HA có độ dài không đổi.



Như vậy để tìm GTLN của $HA+HB+HC$ ta quy về tìm GTLN của $HB+HC$.

Trên tia đối của tia HB ta lấy một điểm E' sao cho $HE'=HC\Rightarrow\Delta HE'C$ cân tại $H\Rightarrow$

$HE'C=180°-2CHE'=180°-2\varphi$ không đổi.

Suy ra E' chuyển động trên cung chứa góc $180°-2\varphi$ dựng trên đoạn BC.

Ta có: $HB+HC=BE'$ nên $HB+HC$ lớn nhất khi và chỉ khi BE' là đường kính của đường tròn chứa cung chứa góc $180°-2\varphi$ dựng trên đoạn BC tức là $BC\perp E'C.$ Từ đó suy ra cách dựng điểm A như sau:

Dựng cung chứa góc $180°-2\varphi$ trên đoạn *BC*, dựng tia $Cx\perp BC$ cắt cung chứa góc tại E'. Dựng đường thẳng qua *B* vuông góc với BE' cắt (O) tại điểm *A* nằm chính giữa cung *BC* là vị trí cần tìm.

b, Ta có tính chất quen thuộc: $HA=2OO_1, HB=2OO_2; HC=2OO_3$.

Áp dụng đẳng thức Erdos- Mordell cho điểm *H* trong tam giác *ABC*, ta có:

$HA_1+HB_1+HC_1\le\dfrac{HA+HB+HC}{2}=OO_1+OO_2+OO_3$. Áp dụng bất đẳng thức Erdos- Mordell cho điểm *O* trong tam giác *ABC* ta có: $OO_1+OO_2+OO_3\le\dfrac{OA+OB+OC}{2}=\dfrac{3R}{2}$ (đpcm)

Câu b) thực chất là dạng tổng quát của câu a).

Bài 53. Cho đường tròn (O) đường kính *AB* cố định. Lấy điểm *I* nằm giữa *A* và *O* sao cho $AI=\dfrac{2}{3}AO$. Kẻ dây *MN* vuông góc với *AB* tại *I*, gọi *C* là điểm tùy ý thuộc cung lớn *MN* sao cho *C* không trùng với *M, N* và *B*. Nối *AC* cắt đoạn thẳng *MN* tại *E*.

a, Chứng minh rằng tứ giác *IECB* nội tiếp.

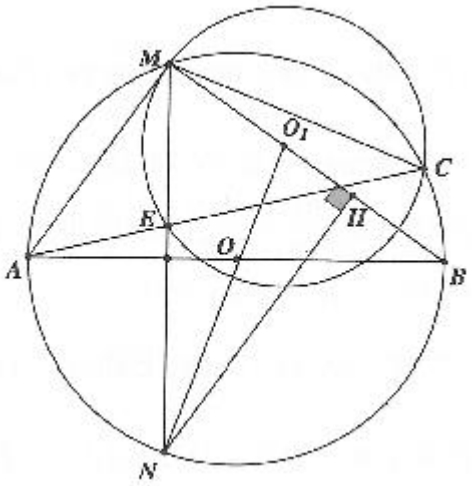
b, Chứng minh rằng $AM^2=AE.AC$.

c, Xác định vị trí điểm *C* sao cho khoảng cách từ *N* đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *CME* là nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a, Ta có $EIB=90°;\ ECB=90°\Rightarrow$ tứ giác *IECB* nội tiếp đường tròn đường kính *BE*.

b, Ta có $AB\perp MN\Rightarrow AM=AN$ nên $AMN=ACM$. Lại có CAM chung nên $\Delta AME\backsim\Delta ACM$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AE}{AM}\Rightarrow AM^2=AE.AC$



c, Trên nửa mặt phẳng bờ *ME* có chứa điểm *A*, ta vẽ tiếp tuyến Mx của đường tròn ngoại tiếp ΔMCE

$\Rightarrow EMx=ECM$ mà $EMA=ECM$ (chứng minh câu b)

$\Rightarrow EMx=EMA\Rightarrow MA$ và tia *Mx* trùng nhau $\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMCE. Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $MCE\Rightarrow O_1M\perp MA$. Mặt khác ta có $BM\perp MA\Rightarrow M,O_1,B$ thẳng hàng $\Rightarrow NO_1$ nhỏ nhất khi $NO_1\perp BM$. Khi đó ta xác định được điểm *C* như sau: Kẻ $NO_1\perp MB$ tại O_1. Vẽ đường tròn tâm O_1 bán kính O_1M cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là *C*.

Bài 54. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai đường kính MN, PQ vuông góc với nhau. Lấy điểm *A* trên cung nhỏ *PN*, *PA* cắt *MN* tại *B*, *AQ* cắt *MN* tại *E*.

a, Chứng minh: *OABQ* là tứ giác nội tiếp.

b, Nối *AM* cắt *PQ* và *PN* lần lượt tại *C*, *I*. Chứng minh: Tích $MC.MA$ không đổi khi *A* di chuyển trên cung nhỏ *PN*.

c, Chứng minh: $IN = \sqrt{2}EN$.

d, Tìm vị trí điểm *A* để diện tích tam giác *ACE* lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

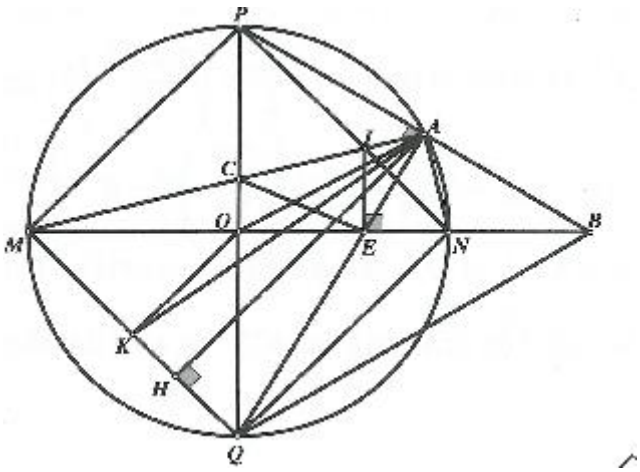
a, Vì điểm *A* nằm trên đường tròn đường kính *PQ* nên $PAQ = 90°$ suy ra $QAB = 90°$.

Ta có $QOB = 90°$ (giả thiết $PQ \perp MN$).

Từ đó suy ra $QAB = QOB = 90° \Rightarrow OABQ$ là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp trên 1 cạnh *OA* cùng nhìn cạnh *BQ* một góc $90°$).

b, Vì điểm *A* nằm trên đường tròn đường kính *MN* nên $MAN = 90°$.

Xét các tam giác *MAN* và *MOC* có: AMN chung $MAN = MOC = 90°$ suy ra $\Delta MAN \backsim \Delta MOC$ (g.g) suy ra $\frac{MA}{MO} = \frac{MN}{MC}$ (tỷ số đồng dạng) hay $MA.MC = MO.MN$ mà $MO = R, MN = 2R$ nên $MA.MC = 2R^2$ (không đổi).



c, Vì *PQ*, *MN* là 2 đường kính của (O) và $PQ \perp MN$ nên *PMQN* là hình vuông.

Xét tứ giác *IANE:* Ta có

$IAE = MAQ = \frac{1}{2}MOQ = 45°$ (quan hệ góc nội tiếp với góc ở tâm chắn cùng 1 cung) $INE = PNO = 45°$ suy ra $IAE = INE$ do đó *IANE* là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp trên cùng một cạnh *AN* cùng nhình cạnh *IE* góc bằng nhau). Suy ra

$IAN + IEN = 180° \Rightarrow IEN = 180° - IAN = 180° - 90° = 90°$. Tam giác *IEN* vuông tại *E* và có $INE = 45° \Rightarrow IEN$ là tam giác vuông cân, dẫn đến $IN = \sqrt{2}EN$.

d, Ta có $S_{ACE} = S_{AMQ} - S_{MCEQ}$.

Xét tam giác *MQE* và tam giác *QCQ* ta có: $MQC = QME = 45°$,

$MCQ=\frac{1}{2}sđ\left(PA+MQ\right)=\frac{1}{2}sđ\left(PA+MP\right)=\frac{1}{2}sđ\ MA=MQE$ suy ra $\Delta MQE\backsim\Delta QCM$ (g.g) suy ra $\frac{MQ}{QC}=\frac{ME}{MQ}\Leftrightarrow QC.ME=MQ^2=2R^2$ suy ra $S_{MCEQ}=\frac{1}{2}QC.ME=R^2$

Như vậy ta có: $S_{ACE}=S_{AMQ}-R^2$ nên S_{ACE} lớn nhất khi và chỉ khi S_{AMQ} lớn nhất.

Kẻ $AH\perp MQ,$ gọi K là trung điểm MQ thì ta có $OK\perp MQ$ và

$$OK^2=OM^2-KM^2=R^2-\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{R^2}{2}\Rightarrow OK=\frac{\sqrt{2}R}{2}$$

Ta có: $S_{AMQ}=\frac{1}{2}AH.MQ=\frac{1}{2}R\sqrt{2}.AH,$ trong tam giác AHK ta có: $AH\le AK,$ mặt khác ta cũng có

$$AK\le AO+OK=R+\frac{R\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)R,\text{ suy ra }S_{AMQ}\le\frac{1}{2}R\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)R=\frac{1+\sqrt{2}}{2}R^2$$

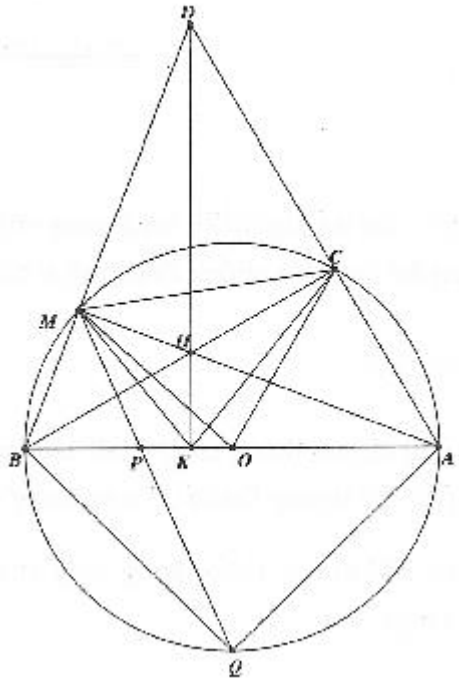
Vậy $S_{ACE}=S_{AMQ}-R^2\le\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)R^2-R^2=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)R^2.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv K$ và A, O, K thẳng hàng. Suy ra điểm A là điểm chính giữa cung nhỏ PN.

Vậy để diện tích tam giác ACE lớn nhất thì điểm A phải là điểm chính giữa cung nhỏ PN.

Bài 55. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C nằm trên $(O),$ lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B, C). Các đường thẳng AC, BM cắt nhau tại D. Phân giác trong góc BAM cắt AB tại P. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{MA+MB}{MP}$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Kéo dài MP cắt (O) tại Q.



Ta có: $MPB=AQB$ đối đỉnh.

$BMP=QAP$ cùng chắn cung BQ của (O)

Suy ra $\Delta MBP\backsim\Delta AQP\Rightarrow\frac{MB}{AQ}=\frac{MP}{AP}\Leftrightarrow MB=\frac{MP.AQ}{AP}$

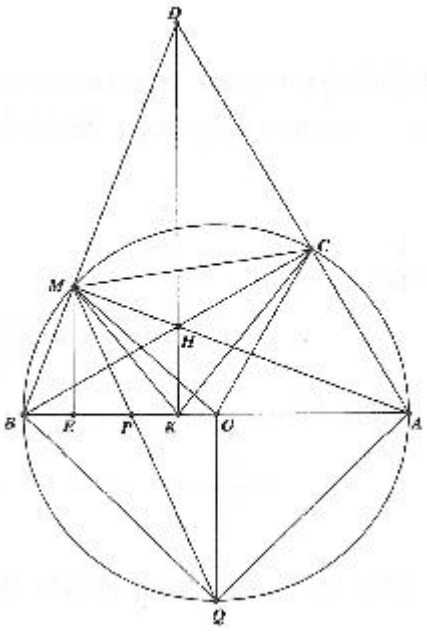
Tương tự ta có: $MA=\frac{MP.BQ}{BP}$

Suy ra $MA+MB=\frac{MP.BQ}{BP}+\frac{MP.AQ}{AP}\ge2\sqrt{\frac{BQ.AQ}{BP.AP}}.\text{MP}$

Lại có $BP.AP\le\frac{\left(BP+AP\right)^2}{4}=\frac{AB^2}{4}=R^2, BQ=AQ=R\sqrt{2}$

Suy ra $MA+MB\ge 2\sqrt{2}.MP$ hay $\frac{MA+MB}{MP}\ge 2\sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MB=MA, BP=PA$ hay M là điểm chính giữa cung BC.



Cách khác:

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $MBQA$ ta có:

$MB.QA+MA.QB=MQ.BA$ do Q là điểm chính giữa cung BC nên tam giác ABQ vuông cân tại Q suy ra $QB=QA=R\sqrt{2}$,

$AB=2R$ dẫn đến $MA+MB=\sqrt{2}MQ.$

Ta suy ra $\frac{MP}{MA+MB}=\frac{MP}{\sqrt{2}MQ}$, dựng $ME\perp BC$ thì

$\frac{MQ}{MP}=1+\frac{PQ}{MP}=1+\frac{OQ}{ME}\ge 2$ suy ra $\frac{MA+MB}{MP}\ge 2\sqrt{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ME=OQ$ hay M là điểm chính giữa cung BC

Bài 46. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn O. Điểm M thuộc cung nhỏ CD của O, M khác C và D. MA cắt DB, DC theo thứ tự X, Z; MB cắt CA, CD tại Y, T; CX cắt DY tại K.

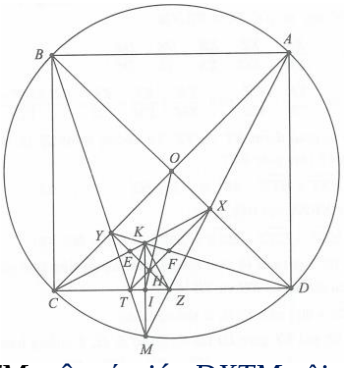
1) Chứng minh rằng: $MXT=TXC, MYZ=ZYD$ và $CKD=135^\circ$.

2) Chứng minh rằng: $\frac{KX}{MX}+\frac{KY}{MY}+\frac{ZT}{CD}=1$.

3) Gọi I là giao điểm của MK và CD. Chứng minh rằng XT, YZ, OI cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, ĐHSP HN, năm học 2012 - 2013)

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Ta có $DXM=\frac{1}{2}sdDM+sdAB=DTM$ nên tứ giác $DXTM$ nội tiếp.

Mà $DMT=90^\circ\Rightarrow DXT=90^\circ$

Suy ra $TX\perp BD$, mà $AC\perp BD\Rightarrow TX//AC$

Do đó $MXT = ZAC = XCA = TXC$

Tương tự, tứ giác $MCYZ$ nội tiếp

Suy ra $ZY//BD$ nên $MYZ = MBD = BDY = ZYD$

Ta có tứ giác $ADZY$ nội tiếp nên $YDC = YAZ = MDC$

Tương tự tứ giác $BCTX$ nội tiếp nên $XCD = XBM = MCD$

Nên $\Delta DMC = \Delta DKC$ $g.c.g$ $\Rightarrow DKC = DMC = 135^\circ$

Ta có $XKD = 180^\circ - DKC = 45^\circ = DMX$ nên tứ giác $DXKM$ nội tiếp.

Mà $DXTM$ nội tiếp nên 5 điểm D, X, K, T, M cùng nằm trên một đường tròn tâm E đường kính DT.

Tương tự 5 điểm Y, K, Z, M, C nằm trên đường tròn tâm F đường kính ZC suy ra

$XK.XC = XZ.XM$

Suy ra $\frac{XK}{XM} = \frac{XZ}{XC} = \frac{XZ}{XA} = \frac{DZ}{BA} = \frac{DZ}{DC}$

Tương tự $\frac{YK}{YM} = \frac{CT}{CD}$ nên $\frac{XK}{XM} + \frac{KY}{YM} + \frac{ZT}{CD} = \frac{DZ + CT + ZT}{CD} = 1$

c) Gọi H là giao điểm XT và YZ. Ta chứng minh H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

Ta có $HZT = HTZ = 45^\circ \Rightarrow HT = HZ$ (1)

Tứ giác $KHZX$ nội tiếp, nên:

$HKZ = HXZ = HXK = HZH \Rightarrow HK = HZ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KZT.

Gọi giao điểm của XC và YZ là F.

Do $FKZ = 90^\circ$ nên F, H, Z thẳng hàng.

Tương tự, gọi XT giao ID tại E. Ta có E, H, T thẳng hàng

$\Delta HEF \backsim \Delta COD$ suy ra $\frac{HF}{OC} = \frac{EF}{CD} = \frac{HT}{OC} = \frac{FT}{CB}$

Vì $FT//BC$ nên $\frac{FT}{BC} = \frac{IT}{IC} \Rightarrow \frac{HT}{OC} = \frac{IT}{IC}$, mà $HTI = OCI = 45^\circ$

Nên suy ra $\Delta ITH \backsim \Delta IOC$ do đó $HTI = OCT$, hay O, I, H thẳng hàng.

Bài 47. Cho tam giác ABC vuông tại A, nội tiếp trong đường tròn O. Trên cung BC không chứa A, lấy điểm M tuỳ ý (M khác C). P là điểm trên cạnh BC sao cho $BAM = PAC$. Trên các tia AB, AC lấy lần lượt các điểm E, F sao cho $BE = CF = BC$.

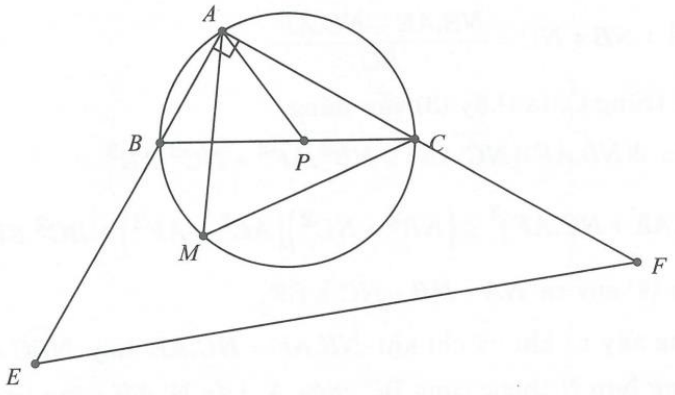
1) Chứng minh: $\Delta ABP \backsim \Delta AMC$ và $MC.AB + MB.AC = MA.BC$.

2) Chứng minh $MA + MB + MC = \frac{MB.AE + MC.AF}{BC}$

3) Xác định vị tri điểm N trên đường tròn O để tổng $NA+NB+NC$ lớn nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Quảng Bình, năm học 2012 - 2013)

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: $ABP=AMC$ (cùng chắn cung AC)

$BAM=PAC\Rightarrow BAP=MAC$

Nên: $\Delta ABP\backsim\Delta AMC$

Suy ra: $\frac{AB}{MA}=\frac{BP}{MC}\Rightarrow MC.AB=MA.BP$ (1)

Mặt khác: $BMA=BCA, BAM=PAC\Rightarrow\Delta ABM\backsim\Delta APC$

$\Rightarrow\frac{MB}{PC}=\frac{MA}{AC}\Rightarrow MB.AC=MA.PC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MC.AB+MB.AC=MA.BC$

Từ kết quả câu a) ta có: $MA=MB.\frac{AC}{BC}+MC.\frac{AB}{BC}$

Do đó: $MA+MB+MC=MB.\left(\frac{AC}{BC}+1\right)+MC\left(\frac{AB}{BC}+1\right)$

$=MB.\left(\frac{AC+BC}{BC}\right)+MC.\left(\frac{AB+BC}{BC}\right)$

$=MB.\left(\frac{AC+CE}{BC}\right)+MC.\left(\frac{AB+BF}{BC}\right)$

$=\frac{MB.AE+MC.AF}{BC}$

Xét trường hợp N thuộc cung BC không chứa A.

- Nếu N khác C theo kết quả câu b) ta có

$NA+NB+NC=\frac{NB.AE+NC.AF}{BC}$ (3)

- Nếu N trùng C, ta thấy (3) vẫn đúng.

Mặt khác $2\ NB.AF\ \ NC.AE\ \le NB^2.AF^2+NC^2.AE^2$

$\Leftrightarrow\ NB.AE+NB.AF\ ^2\le\ NB^2+NC^2\ \ AE^2+AF^2\ \ =BC^2.EF^2$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $NA+NB+NC\le EF$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $NB.AF=NC.AE$ hay $NBC=AEF$.

Xét trường hợp N thuộc cung BC chứa A. Lấy N' đối xứng N qua BC, khi đó N' thuộc cung BC không chứa A, $N'A<NA,N'B=NB,N'C=NC$.

Áp dụng trường hợp trên ta có:

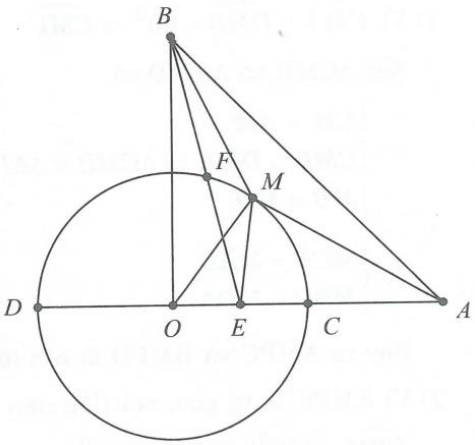
$NA+NB+NC<N'A+N'B+N'C\le EF$

Vậy trong mọi trường hợp thì $NA+NB+NC$ có giá trị lớn nhất là EF, đạt được khi $NBC=AEF$

Bài 48. Cho tam giác *OAB* vuông cân tại *O* với $OA=OB=2a$. Gọi O là đường tròn tâm *O* bán kính *a*. Tìm điểm *M* thuộc O sao cho $MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, TP HCM, năm học 2010 - 2011)

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đường thẳng OA cắt O tại C và D, B với C là trung điểm của OA. Gọi E là trung điểm của OC.

* Trường hợp M không trùng với C và D.

Hai tam giác OEM và OMA đồng dạng

(do $MOE=AOM,\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{OE}{OM}$)

Suy ra $\dfrac{ME}{AM}=\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MA=2.EM$

* Trường hợp M trùng với C: $MA=CA=2.EC=2.EM$

* Trường hợp M trùng với D: $MA=DA=2.ED=2.EM$

Vậy ta luôn có $MA=2.EM$. Do đó

$MA+2.MB=2\ \ EM+MB\ \ \ge 2.EB$

Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn O.

Vậy $MA+2.MB$ nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn O.

Bài 49. Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

1) Chứng minh AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp.

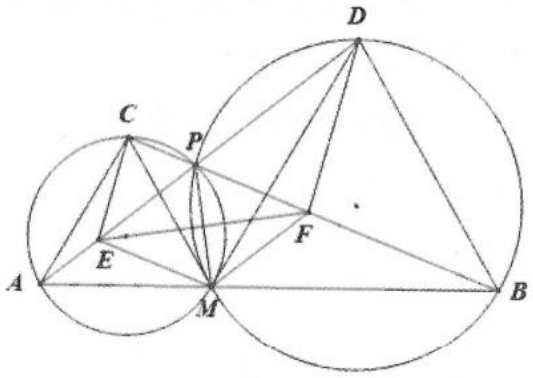
2) Chứng minh $\sqrt{CP.CB}+\sqrt{DP.DA}=AB$.

3) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AMPC và BMPD cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh CDFE là hình thang.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 1), ĐHSP Hà Nội, năm học 2016-2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Vì $CMA=DMB=60^\circ \Rightarrow CMB=DMA=120^\circ$



- Xét ΔCMB và ΔAMD có

$$\begin{cases} CM=AM \\ CMB=DMA \Rightarrow \Delta CMB=\Delta AMD \ (\text{c.g.c}) \\ MB=MD \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MCB=MAD \\ MBC=MDA \end{cases}$$

Suy ra AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp.

2) Vì AMPC là tứ giác nội tiếp nên

$CPM=180^\circ-CAM=120^\circ=CMB$

$\Rightarrow \Delta CPM \backsim \Delta CMB \ (\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{CP}{CM}=\dfrac{CM}{CB}$

$\Rightarrow CP.CB=CM^2 \Rightarrow \sqrt{CP.CB}=CM$

Tương tự $\sqrt{DP.DA}=DM$

Vậy $\sqrt{CP.CB}+\sqrt{DP.DA}=CM+DM=AM+BM=AB$

3) Ta có EF là đường trung trực của PM

$\Rightarrow EB=EM$, suy ra ΔEPM cân tại E

Mặt khác $EPM=ACM=60^\circ$ (do AMPC là tứ giác nội tiếp)

nên ΔEPM đều, nên $PM=PE$.

Tương tự $PF=PM$.

Ta có $CM//DB$ nên $PCM=PBD$

Mà BMPD là tứ giác nội tiếp nên $PBD=PMD$.

Suy ra $PCM=PMD$

Ta lại có $CPM=DPM=120^\circ$

$\Rightarrow \Delta CPM \backsim \Delta MPD(\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{CP}{MP}=\dfrac{PM}{PD} \Rightarrow \dfrac{CP}{PF}=\dfrac{PE}{PD}$

Theo định lý Thales đảo ta có $CE//DF$, suy ra CDFE là hình thang.

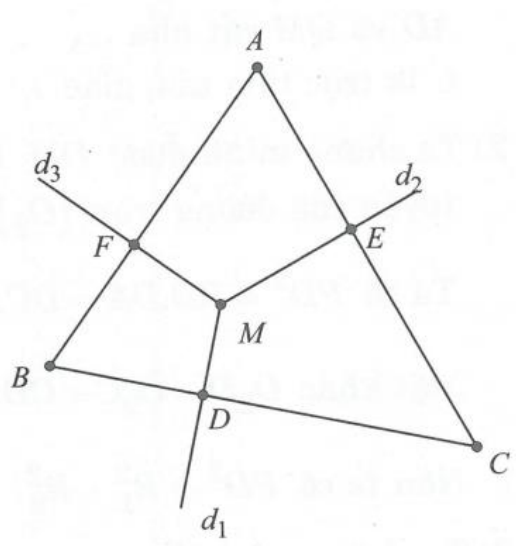
Bài 50. Cho tam giác *ABC*. Trên các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt lấy các điểm *D, E, F*. Gọi d_1 là đường thẳng qua *D* và vuông góc với *BC*, d_2 là đường thẳng qua *E* và vuông góc với *CA*, d_3 là đường thẳng qua *F* và vuông góc với *AB*. Chứng minh rằng d_1 , d_2 và d_3 đồng quy khi và chỉ khi có đẳng thức sau: $DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán THTH, ĐHSP TP HCM năm học 2014 - 2015)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi M là giao điểm của d_1 và d_2 và F' là hình chiếu của *M* lên *AB*.

Ta có



$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow BM^2 - MD^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow BM^2 - MC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow BM^2 - ME^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow BM^2 - MA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F'B^2 - F'A^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F'B - F'A + FA - FB = 0 \qquad (1)$$

Mà $\Leftrightarrow F'A + F'B = FA + FB = AB$

nên $1 \Leftrightarrow F'B = FB \Leftrightarrow F' \equiv F \Leftrightarrow d_1, d_2, d_3$ đồng quy.

Bài 51. Cho hai đường tròn $O_1; R_1$ và $O_2; R_2$ với $R_1 > R_2$ tiếp xúc trong với nhau tại *A*. Đường thẳng cắt $O_1; R_1$ và $O_2; R_2$ lần lượt tại *B* và *C* khác *A* . Đường thẳng đi qua trung điểm *D* của *BC* vuông góc với *BC* cắt $O_1; R_1$ tại *P* và *Q*.

1) Chứng minh *C* là trực tâm tam giác *APQ*.

2) Chứng minh $DP^2 = R_1^2 - R_2^2$.

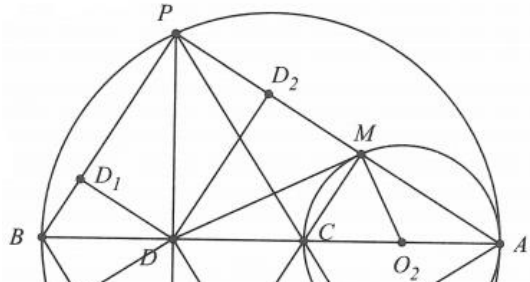
3) Giả sử $D_1; D_2; D_3; D_4$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của *D* xuống các đường thẳng $BP; PA; AQ; QB$. Chứng minh:

$$DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \le \frac{1}{2}\ BP + PA + AQ + QB$$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 1) Lê Hồng Phong, Nam Định, năm 2014 - 2015)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Gọi *M* là giao điểm của *AP* với đường tròn O_2 .



Ta có *PBQC* là hình thoi, nên $QC//BP$, mà $CM//BP$ (cùng vuông góc với *AP*) nên ta có *Q*, *C*, *M* thẳng hàng. Tam giác *APQ* có hai đường cao *AD* và *QM* cắt nhau tại *C* nên *C* là trực tâm tam giác *APQ*.

2) Ta chứng minh được *DM* là tiếp tuyến của đường tròn O_2.

Ta có

$$PD^2 = BD.DA = DC.DA = DM^2 = O_2D^2 - R_2^2$$

Mặt khác

$$O_2D = O_2C + CD = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2} = R_1$$

Nên ta có $PD^2 = R_1^2 - R_2^2$

3) Ta Chứng minh được $DD_1 = DD_4, DD_2 = DD_3, BP = BQ, PA = PB$

nên $DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \le \frac{1}{2}\ BP + PA + AQ + QB$

$\Leftrightarrow 2\ DD_1 + DD_2\ \le PA + PB$

Ta có $PB^2 = BD^2 + DP^2 \ge 2DB.DP \Rightarrow PB \ge \frac{2DB.DP}{PB} = 2DD_1$.

Tương tự: $AP \ge \frac{2DA.DP}{PA} = 2DD_2$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $DA = DB = DP$.

Bài 52. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn O. Đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác *ABC* cắt nhau tại *H*. Đường thẳng AA_1 cắt O tại $K \ne A$.

1) Chứng minh rằng: A_1 là trung điểm *HK*.

2) Tính $\frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1}$.

3) Gọi *M* là hình chiếu vuông góc của *O* lên *BC*. Đường thẳng BB_1 cắt O tại giao điểm thứ hai là *E*, đường thẳng MB_1 cắt *AE* tại *N*.

Chứng minh rằng: $\frac{AN}{NE} = \left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2$.

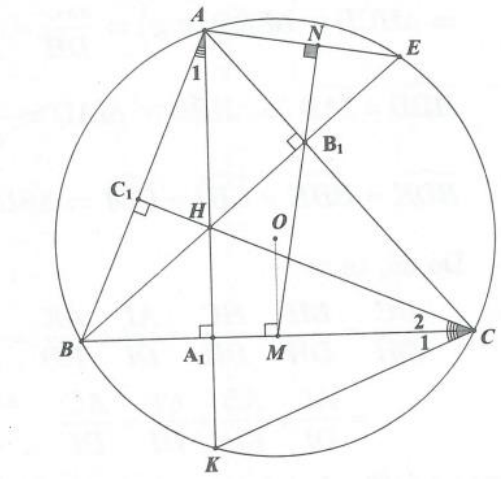
(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 2) Lê Hồng Phong, Nam Định, năm 2014 - 2015)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1)Ta có $A_1 = C_2 = C_1$ nên ΔCHK cân tại C.

Mà CA_1 là đường cao nên CA_1 là đường trung trực, suy ra A_1 là trung điểm của HK.

2) Ta có:



$$\frac{HA}{AA_1}+\frac{HB}{BB_1}+\frac{HC}{CC_1}$$

$$=\left(1-\frac{HA_1}{AA_1}\right)+\left(1-\frac{HB_1}{BB_1}\right)+\left(1-\frac{HC_1}{CC_1}\right)$$

$$=3-\left(\frac{HA_1}{AA_1}+\frac{HB_1}{BB_1}+\frac{HC_1}{CC_1}\right)$$

$$=3-\left(\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HBA}}{S_{ABC}}\right)=3-1=2$$

3) Từ giả thiết ta có M là trung điểm BC, suy ra ΔB_1MC cân tại M, do đó

$$MB_1C = MCB_1 = AB_1N \Rightarrow \Delta CBB_1 \backsim \Delta B_1AN \ (\text{g.g}) \Rightarrow \text{B}_1N \perp AE$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

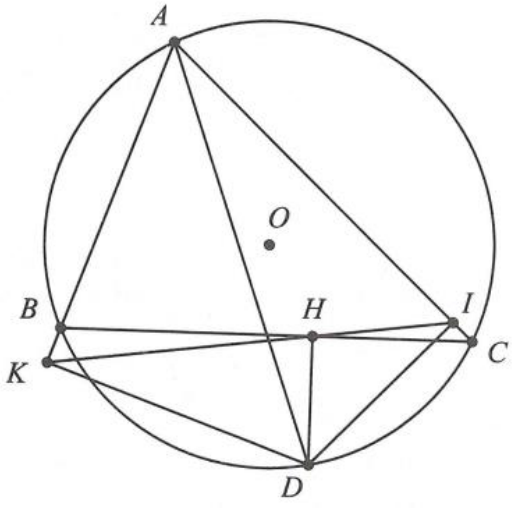
$$\left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2=\frac{AN.AE}{EN.EA}=\frac{AN}{EN}\ (\text{đpcm}).$$

Bài 52. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O . Lấy điểm D trên cung BC không chứa điểm A (D khác B, C). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh: $\frac{BC}{DH}=\frac{AC}{DI}+\frac{AB}{DK}$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Nguyễn Du, Đăk Lắk, năm học 2014 - 2015)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có các tứ giác $BHDK$, $DHIC$, $ABDC$ nội tiếp $\Rightarrow KHD = KBD = ACD$



Mà $DHI + ACD = 180°$

$\Rightarrow DHI + KHD = 180° \Rightarrow KHI = 180°$

$\Rightarrow K, H, I$ thẳng hàng.

Mặt khác $HCD = KAD$

$$\Rightarrow \Delta HCD \backsim \Delta KAD \ (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{HC}{DH}=\frac{KA}{DK}$$

$$HBD = IAD \Rightarrow \Delta HBD \backsim \Delta IAD \Rightarrow \frac{HB}{DH}=\frac{IA}{AD}$$

$$BDK = BHK = CHI = CDI \Rightarrow \Delta BDK \backsim \Delta CDI \Rightarrow \frac{BK}{KD}=\frac{IC}{DI}$$

Do đó, ta có:

$$\frac{BC}{DH}=\frac{BH}{DH}+\frac{HC}{DH}=\frac{AI}{DI}+\frac{AK}{KD}=\frac{AI}{DI}+\frac{AB}{KD}+\frac{BK}{KD}$$

$$=\frac{AI}{DI}+\frac{AB}{KD}+\frac{CI}{DI}=\frac{AC}{DI}+\frac{AB}{DK}.$$

Bài 54. Cho hai đường tròn O , O' cắt nhau tại *A* và *B*. Từ điểm *C* thuộc tia đối của tia *AB* kẻ hai tiếp tuyến đến O tại *D* và *E*, *E* nằm trong O' . Các đường thẳng *AD*, *AE* cắt O' tại điểm thứ hai tương ứng là *M*, *N*. Gọi *I* là giao điểm của *DE* và *MN*.

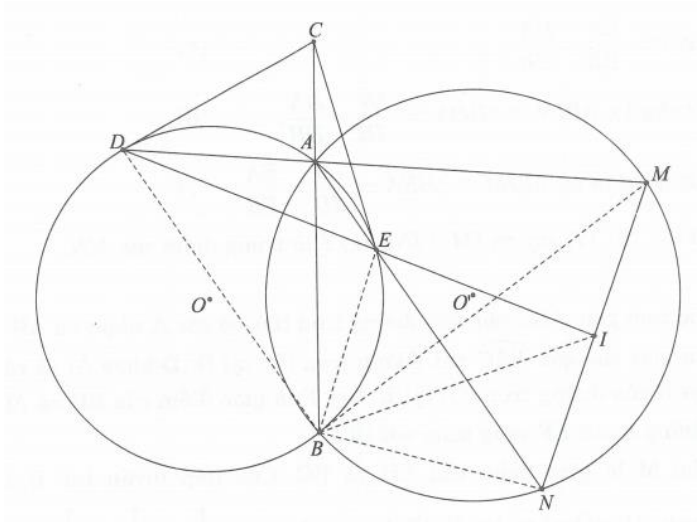
1) Chứng minh rằng tứ giác *BEIN* nội tiếp và $\Delta BIN \backsim \Delta BDA$.

2) Chứng minh rằng $\frac{CA}{CB}=\left(\frac{CD}{CB}\right)^2=\left(\frac{DA}{DB}\right)^2$.

3) Chứng minh rằng *I* là trung điểm của *MN*.

(Trích đề thi vào Chuyên Toán (Vòng 2), ĐHV, năm học 2015-2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Vì tứ giác *ABNM* nội tiếp nên $BNI = BAD$. (1)

Vì tứ giác *DAEB* nội tiếp nên $BAD = BED$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác *BEIN* nội tiếp.

Theo chứng minh trên, $BNI = BAD$.

Ta lại có $BIN = BEN = BDA$ (do các tứ giác *BEIN*, *AEBD* nội tiếp).

Suy ra $\Delta BIN \backsim \Delta BDA$ (g.g).

2) Vì *CD* là tiếp tuyến của O nên $CA.CB = CD^2$. Từ đó suy ra

$$\frac{CA}{CB}=\frac{CA.CB}{CB^2}=\frac{CD^2}{CB^2}=\left(\frac{CD}{CB}\right)^2 \qquad (3)$$

Lại có, từ $\Delta CAD \backsim \Delta CDB \quad g.g \Rightarrow \dfrac{CD}{CB}=\dfrac{DA}{DB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{CA}{CB}=\left(\dfrac{CD}{CB}\right)^2=\left(\dfrac{DA}{DB}\right)^2$.

3) Tương tự câu b) ta có $\dfrac{CA}{CB}=\left(\dfrac{CE}{CB}\right)^2=\left(\dfrac{EA}{EB}\right)^2$

Suy ra $\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{DA}{DB}$ (5)

Từ câu 1), $\Delta BIN \backsim \Delta BDA \Rightarrow \dfrac{IN}{IB}=\dfrac{DA}{DB}$ (6)

Tương tự ta có $\Delta BIM \backsim \Delta BEA \Rightarrow \dfrac{IM}{IB}=\dfrac{EA}{EB}$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra $IM=IN$, hay I là trung điểm của MN.

Bài 55.

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O, có góc A nhọn và $AB>AC$. Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn O tại D (D khác A) và cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn O tại E. Gọi F là giao điểm của BD và AC

a) Chứng minh EF song song với BC.

b) Gọi M là giao điểm của AD và BC. Các tiếp tuyến tại B, D của đường tròn O cắt nhau tại N.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{BN}=\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{BM}$

2) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O, đường cao AH. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh $\dfrac{HB}{HC}+\dfrac{MB}{MC}\geq 2\dfrac{AB}{AC}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Hưng Yên, năm học 2015 - 2016)

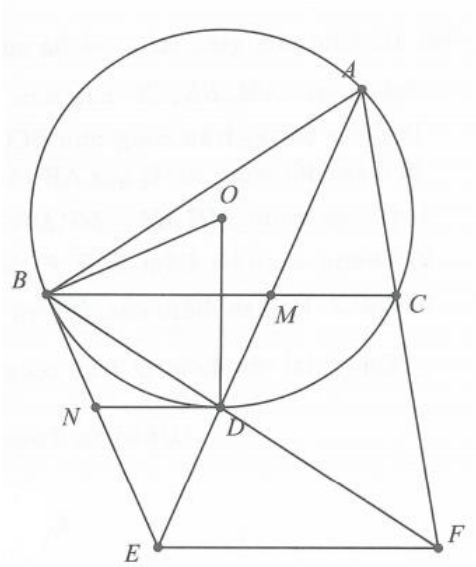
HƯỚNG DẪN GIẢI

1) a) Do $EBF=BAD=EAF$ nên BEAF nội tiếp được.

Suy ra $BEF+BAF=180^\circ$

Mà $BAF=CBE$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Nên $BEF+BCE=180^\circ$, mà đây là hai góc trong cùng phía nên $BC//EF$.



b) $NDB=BAD=CAD=CBD$,

suy ra $ND//BC$.

Theo Thales: $\frac{NB}{BE}=1-\frac{NE}{BE}$

$=1-\frac{ND}{BM}$

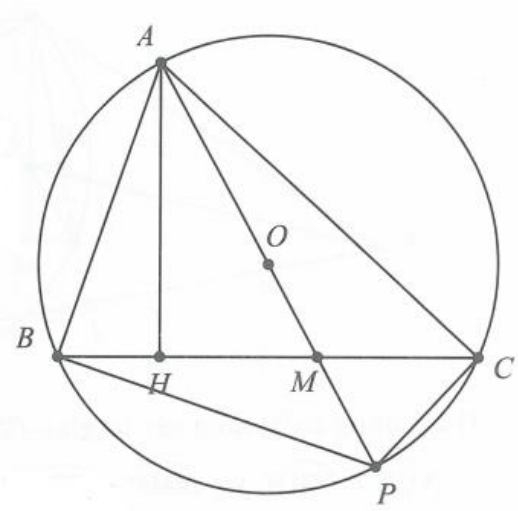
$\Rightarrow \frac{NB}{BE}+\frac{ND}{BM}=1$

Mà $ND=NB$. Do đó $\frac{NB}{BE}+\frac{NB}{BM}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{BN}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{BM}$

2) Kẻ đường kính AP

Dễ dàng chứng minh được:



$\Delta AHB \backsim \Delta ACP$ nên: $\frac{HB}{PC}=\frac{AH}{AC}$

Tương tự: $\frac{HC}{PB}=\frac{AH}{AB}$

Suy ra: $\frac{HB}{HC}.\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$,

Suy ra: $\frac{HB}{HC}=\frac{PC}{PB}.\frac{AB}{AC}$

Lại có: $\Delta AMC \backsim \Delta BMP$ nên: $\frac{MC}{AC}=\frac{MP}{PB}$

Tương tự: $\frac{MB}{AB}=\frac{MP}{PC}$

Suy ra: $\frac{MB}{MC}.\frac{AC}{AB}=\frac{PB}{PC}$ nên: $\frac{MB}{MC}=\frac{PB}{PC}.\frac{AB}{AC}$

Cộng lại, ta có: $\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}=\left(\frac{PB}{PC}+\frac{PC}{PB}\right).\frac{AB}{AC}\geq 2.\frac{AB}{AC}$

Bài 56. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn O . Các đường cao *AM, BN, CP* của tam giác *ABC* cùng đi qua điểm *H*. Gọi *Q* là điểm bất kì trên cung nhỏ *BC* (*Q* khác *B* và *C*). Gọi *E, F* theo thứ tự là điểm đối xứng với *Q* qua *AB* và *AC*.

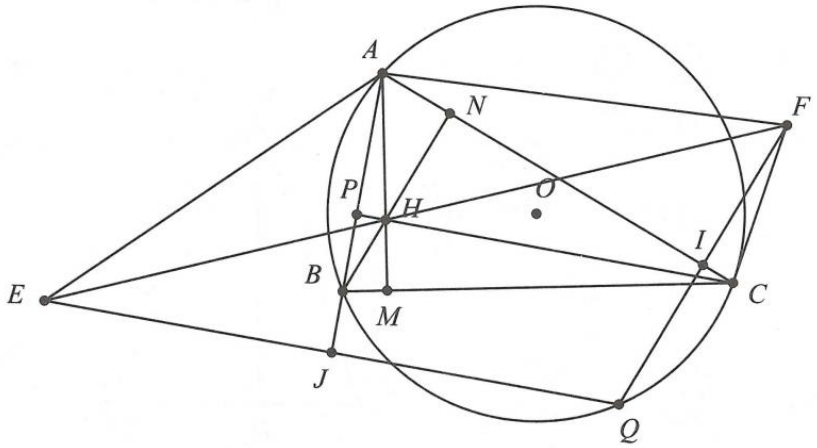
1) Chứng minh $MH.MA=MP.MN$.

2) Chứng minh ba điểm *E, H ,F* thẳng hàng.

3) Gọi *J* là giao điểm của *QE* và *AB, I* là giao điểm của *QF* và *AC*. Tìm vị trí của điểm *Q* trên cung nhỏ *BC* để $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

(Chuyên Toán TP Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Dễ dàng thấy rằng các tứ giác CNHM, BMHP nội tiếp. Cho nên $NCH = NMH$ và

$NMP = HBP$, kết hợp với $ACH = ABH$ (cùng phụ với BAC) ta suy ra $NMH = HMP$ (1)

Mặt khác tứ giác ANMB nội tiếp nên $MNH = MAB$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

$\Delta HMN \backsim \Delta PMA$ dẫn đến $\frac{HM}{MP} = \frac{MN}{MA}$

$\Rightarrow MH.MA = MN.MP$

2) Trước hết dễ thấy $\Delta ACQ = \Delta ACF$ (c.c.c)

nên $AFC = AQC = ABC = CHM$ dẫn đến tứ giác AFCH nội tiếp và $ACH = AFH = 90° - BAC$ (3)

Mặt khác do tính chất đối xứng ta có $AF = AQ = AE$.

hay tam giác AEF cân tại A để có

$$AFE = AEF = 90° - \frac{1}{2}EAF = 90° - \frac{1}{2}\ FAQ + EAQ$$

$$= 90° - \ CAQ + BAQ\ = 90° - BAC$$

Do đó ta được $AFH = AFE$ hay ba điểm E, H, F thẳng hàng.

3) Trước hết thấy rằng $AB.QJ = 2S_{ABQ}, AC.QI = 2S_{AQC}$

Và đặt $P = \frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$

Khi đó áp dụng BĐT Cauchy-Shwarz ta có:

$$P = \frac{AB^2}{AB.QJ} + \frac{AC^2}{AC.QI} = \frac{AB^2}{2S_{ABQ}} + \frac{AC^2}{2S_{ACQ}}$$

$$\geq \frac{AB+AC}{2\ S_{ABQ}+S_{ACQ}}^{2} = \frac{AB+AC}{2\ S_{ABC}+S_{QBC}}^{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $QI = QJ$.

Mặt khác nếu gọi G là điểm chính giữa của cung nhỏ BC thì luôn có

$S_{QBC} \leq S_{GBC}$, do đó $P \geq \frac{AB+AC}{2\ S_{ABC}+S_{GBC}}^{2}$

Vậy $P = \left(\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi Q là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Bài 57. Cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H và nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F tương ứng là các chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C. Gọi M là giao điểm của tia AO và cạnh BC. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh CA, AB.

1) Chứng minh: $HE.MN = HF.MP$.

2) Chứng minh tứ giác FENP nội tiếp.

3) Chứng minh rằng: $\frac{BD.BM}{CD.CM} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Vĩnh Phúc, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI

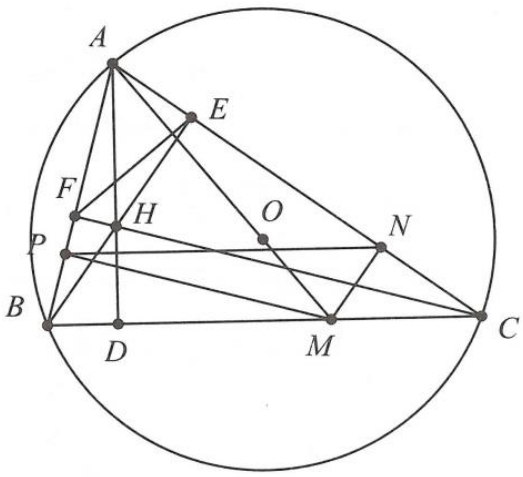
1) Ta có $FHE = PMN = 180° - A$,

$FEH = FAH = MAN = NPM$

(do tứ giác HFAE, PMNA nội tiếp).

Do đó $\Delta PMN \backsim \Delta EHF$

$\Rightarrow HE.MN = HF.MP$



2) Từ phần 1) thì

$FEN = FEH + 90°$

$= NPM + 90° = BPN$

Nên tứ giác FENP nội tiếp.

3) Ta có $BAD = CAM \Rightarrow BAM = DAC$

Suy ra $\frac{S_{BAD}}{S_{CAM}} = \frac{BD}{CM} = \frac{\sin\angle BAD.AB.AD}{\sin\angle CAM.AC.AM} = \frac{AB.AD}{AC.AM}$

$\frac{S_{BMA}}{S_{CAD}} = \frac{BM}{CD} = \frac{\sin\angle BAM.AB.AM}{\sin\angle CAD.AC.AD} = \frac{AB.AM}{AC.AD}$

Do đó $\frac{BD.BM}{CD.CM} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

Bài 58. Cho đường tròn $O;R$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn O (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

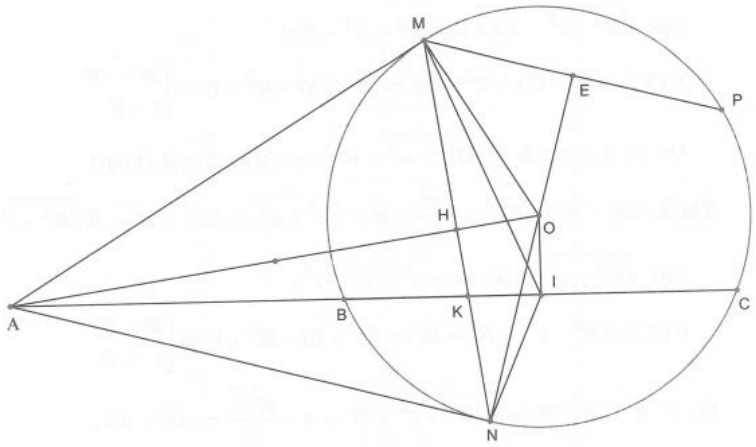
1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN.

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt O tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

(Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Theo giả thiết $AMO=ANO=AIO=90^\circ$

$\Rightarrow$ 5 điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow AIN=AMN, AIM=ANM$ (Góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$AM=AN\Rightarrow\Delta AMN$ cân tại $A\Rightarrow AMN=ANM$

$\Rightarrow AIN=AIM\Rightarrow$ (đpcm)

2) $\frac{2}{AK}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\Leftrightarrow 2AB.AC=AK\ \ AB+AC$

$\Leftrightarrow AB.AC=AK.AI$ (Do $AB+AC=2AI$)

ΔABN đồng dạng với $\Delta ANC\Rightarrow AB.AC=AN^2$

ΔAHK đồng dạng với $\Delta AIO\Rightarrow AK.AI=AH.AO$

Tam giác ΔAMO vuông tại M có đường cao $MH\Rightarrow AH.AO=AM^2$

$\Rightarrow AK.AI=AM^2$. Do $AN=AM\Rightarrow AB.AC=AK.AI$

3) Ta có $AN\perp NO, MP\perp NO, M\notin AN\Rightarrow AN//MP$

Do đó AMPN là hình bình hành $\Leftrightarrow AN=MP=2x$

Tam giác ANO đồng dạng với $\Delta NEM \Rightarrow \frac{AN}{NE}=\frac{NO}{EM} \Rightarrow NE=\frac{2x^2}{R}$

TH1. $NE=NO-OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R}=R-\sqrt{R^2-x^2} \Leftrightarrow 2x^2=R^2-R\sqrt{R^2-x^2}$

Đặt $\sqrt{R^2-x^2}=t, t\geq 0 \Rightarrow x^2=R^2-t^2$

PTTT $2\ R^2-t^2\ =R^2-Rt \Leftrightarrow 2t^2-Rt-R^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=-R\\t=R\end{array}\right.$

Do $t\geq 0 \Rightarrow t=R \Leftrightarrow \sqrt{R^2-x^2}=R \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow A\equiv B$ (Loại)

TH2. $NE=NO+OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R}=R+\sqrt{R^2-x^2} \Leftrightarrow 2x^2=R^2+R\sqrt{R^2-x^2}$

Đặt $\sqrt{R^2-x^2}=t, t\geq 0 \Rightarrow x^2=R^2-t^2$

PTTT $2\ R^2-t^2\ =R^2+Rt \Leftrightarrow 2t^2+Rt-R^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=R\\t=-R\end{array}\right.$

Do $t\geq 0 \Rightarrow 2t=R \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2-x^2}=R \Leftrightarrow x=\frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO=2R$

Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hình bình hành.

Bài 59. Cho đường tròn tâm O đường kính BC, A là điểm di chuyển trên đường tròn O (A khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC tại H. M là điểm đối xứng của điểm A qua điểm B.

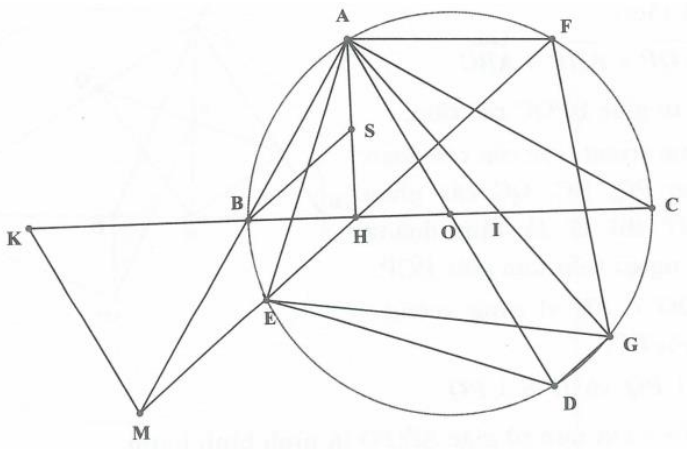
1) Chứng minh điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

2) Đường thẳng MH cắt O tại E và F (E nằm giữa M và F). Gọi I là trung điểm của HC, đường thẳng AI cắt O tại G (G khác A). Chứng minh: $AF^2+FG^2+GE^2+EA^2=2BC^2$.

3) Gọi P là hình chiếu vuông góc của H lên AB. Tìm vị trí của điểm A sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2016-2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Lấy K là điểm đối xứng của O qua B, vì B và O cố định nên K cố định. Tứ giác OAKM là hình bình hành nên $KM = OA$.

Do $OA = \dfrac{BC}{2}$ không đổi.

$\Rightarrow$ M nằm trên đường tròn tâm K, bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

2) Xét ΔAHB và ΔCHA có

$BHC = BHA = 90°, BAH = ACB$ (cùng phụ với ABC)

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CHA$.

Gọi S là trung điểm của AH, I là trung điểm của HC nên

$\Rightarrow \Delta ABS \backsim \Delta CAI \Rightarrow ABS = CAI$

Ta lại có BS là đường trung bình của ΔAMH

$BS // MH \Rightarrow ABS = AMH \Rightarrow AMH = CAI$

Mà $CAI + MAI = 90° \Rightarrow AMH + MAI = 90° \Rightarrow AI \perp MF$

Xét tứ giác AEGF nội tiếp O, có $AG \perp EF$

Kẻ đường kính AD, do $GD \perp AG$ và $EF \perp AG$ nên $EF // GD$, do đó tứ giác nội tiếp EFGD là hình thang cân

$\Rightarrow FG = ED \Rightarrow AE^2 + FG^2 = AE^2 + ED^2 = AD^2 = BC^2$

Tương tự ta chứng minh được: $AF^2 + EG^2 = BC^2$

Vậy $AE^2 + FG^2 + AF^2 + EG^2 = 2BC^2$.

3) Gọi Q là hình chiếu của H trên $AC \Rightarrow$ Tứ giác APHQ là hình chữ nhật (S là tâm)

$\Rightarrow AQP = AHP = ABC$

nên tứ giác BPQC nội tiếp.

Đường trung trực của các đoạn thẳng PQ, BC, QC cắt nhau tại O' thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP.

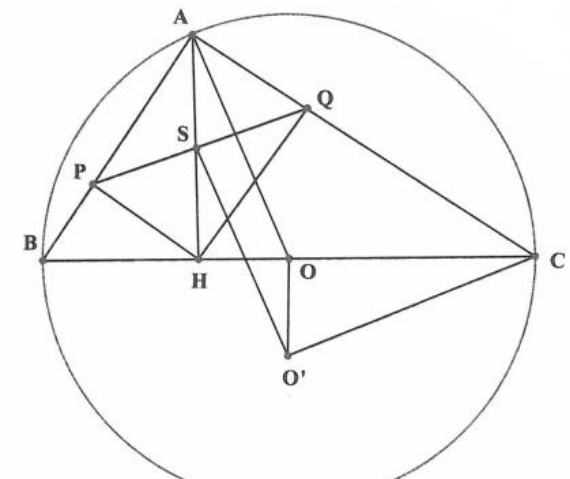
Có OO' // AH vì cùng vuông góc với BC.

$OA \perp PQ$ và $O'S \perp PQ$

$\Rightarrow O'S // OA$ nên tứ giác ASO'O là hình hình hành

$\Rightarrow OO' = AS = \dfrac{AH}{2}$

Trong trường hợp A nằm chính giữa cung BC thì ta vẫn có:



$OO' = AS = \dfrac{AH}{2}$

Tam giác OO'C vuông tại O nên

$O'C = \sqrt{OC^2 + \dfrac{AH^2}{4}}$

Do OC không đổi nên O'C lớn nhất khi AH lớn nhất

$\Leftrightarrow$ A chính giữa cung BC.

Bài 60. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB.

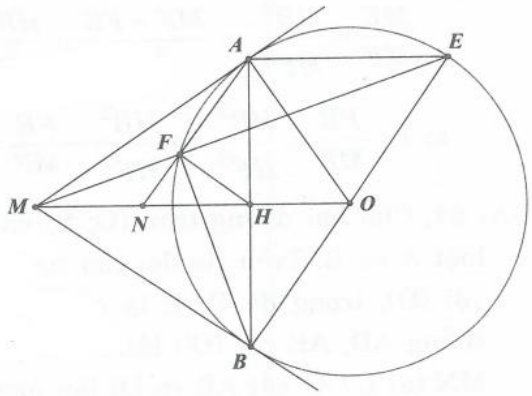
1) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$ và $MN = NH$.

3) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$.

(Trích đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương (Vòng 1), năm học 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI



1) Ta có $MAO = 90°, MBO = 90°$

(theo tính chất của tiếp tuyến và bán kính)

Suy ra: $MAO + MBO = 180°$

Vậy tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2) Ta có $AE // MO \Rightarrow AEM = EMN$,

mà $AEM = MAF$, suy ra $EMN = MAF$

ΔNMF và ΔNAM có

MNA chung; $EMN = MAF$ nên ΔNMF đồng dạng với ΔNAM

$\Rightarrow \dfrac{NM}{NF} = \dfrac{NA}{NM} \Rightarrow NM^2 = NF.NA$ (1)

Mặt khác có: $ABF = AEF \Rightarrow ABF = EMN$ hay $HBF = FMH$

$\Rightarrow$ MFHB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow FHM = FBM = FAB$ hay $FHN = NAH$.

Xét ΔNHF và ΔNAH có:

ANH chung; $NHF = NAH \Rightarrow \Delta NHF$ đồng dạng ΔNAH

$\Rightarrow \dfrac{NH}{NF} = \dfrac{NA}{NH} \Rightarrow NH^2 = NF.NA$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $NH = HM$.

3) Xét ΔMAF và ΔMEA có: AME chung, $MAF = MEA$

suy ra ΔMAF đồng dạng với ΔMEA

$$\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MA}{MF} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{AE^2}{AF^2} \quad (3)$$

Vì MFHB là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MFB = MHB = 90^\circ \Rightarrow BFE = 90^\circ$

Và $AFH = AHN = 90^\circ \Rightarrow AFE = BFH$.

ΔAEF và ΔHBF có: $EFA = BFH; FEA = FBA$

suy ra ΔAEF đồng dạng với ΔHBF

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{HB}{HF} \Rightarrow \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{HB^2}{HF^2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$\frac{ME}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2} \Leftrightarrow \frac{MF + FE}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{FE}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2} \Leftrightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{FE}{MF} = 1$$

Bài 61. Cho hai đường tròn $O;R$ và $O';R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C, kẻ tiếp tuyến CD, CE với O, trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong O'. Đường thẳng AD, AE cắt O' lần lượt tại M và N (M, N khác A). Tia DE cắt MN tại I, OO' cắt AB và DI lần lượt tại H và F.

1) Chứng minh: $FE.HD = FD.HE$.

2) Chứng minh: $MB.EB.DI = IB.AN.BD$.

3) Chứng minh: $O'I$ vuông góc với MN.

(Trích đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi (vòng 2), Hải Dương 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) O cắt O' tại A, B

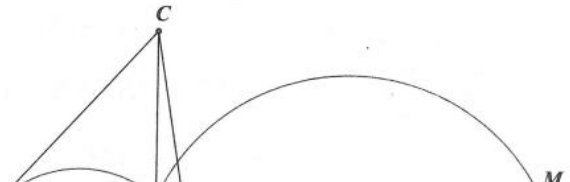
$\Rightarrow OO' \perp AB \Rightarrow CHO = 90^\circ$ (1)

CD, CE là tiếp tuyến của O tại D, E

$\Rightarrow CDO = CEO = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C, D, O, H, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính $CO \Rightarrow \begin{cases} CHE = CDE \\ CHD = CED \end{cases}$

Mà $CD = CE \Rightarrow CDE = CED \Rightarrow CHE = CHD$



$\Rightarrow HC$ là đường phân giác của DHE.

Mặt khác $OO' \perp AB$ tại H hay $FH \perp HC$ tại H

$\Rightarrow HF$ là phân giác ngoài tại H của ΔDHE

$\Rightarrow \dfrac{FE}{FD} = \dfrac{HE}{HD} \Rightarrow FE.HD = FD.HE$

2) Trong O có: $BMN = BAN$

Trong O' có: $BAN = BDE \Rightarrow BMN = BDE$

$\Rightarrow$ BDMI là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MBI = MDI = ABE$

Xét ΔMIB và ΔAEB có: $MBI = ABE; BMI = BAE$

$\Rightarrow \Delta MIB \backsim \Delta AEB \Rightarrow \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{IB}{EB}$ (3)

Xét ΔABN và ΔDBI có: $BAN = BDI; BNA = BID$

$\Rightarrow \Delta ABN \backsim \Delta DBI \Rightarrow \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AN}{DI}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{MB}{AB}.\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{IB}{EB}.\dfrac{AN}{DI} \Rightarrow MB.EB.DI = IB.AN.DB$

3) Xét ΔIBN và ΔDBA có:

$IBN = DBA$ (vì $= DEA = IEN$), $BIN = BDA$ (vì BDMI nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta IBN \backsim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{IN}{IB} = \dfrac{DA}{DB}$ (5)

Xét ΔCDA và ΔCBD có: DCB chung; $CDA = CBD$

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CBD \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CD}{CB}$

Mà $CD = CE \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CE}{CB}$ (6)

Xét ΔCEA và ΔCBE có: BCE chung; $CEA = CBE$

$\Rightarrow \Delta CEA \backsim \Delta CBE \Rightarrow \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{EA}{EB}$ (7)

Mặt khác $\Delta MIB \backsim \Delta AEB$ (theo phần b)

$\Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{IM}{IB}$ (8)

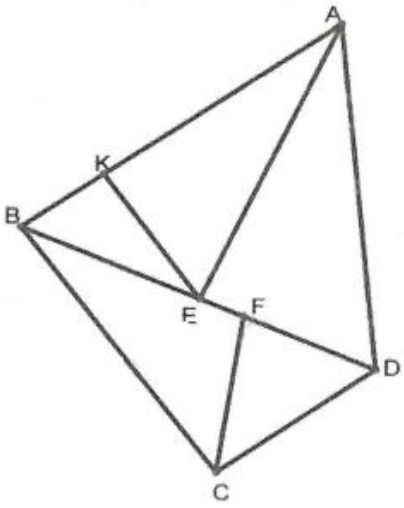
Từ (5), (6), (7), (8) $\Rightarrow \dfrac{IN}{IB} = \dfrac{IM}{IB} \Rightarrow IN = IM \Rightarrow O'I \perp MN$

Bài 62. Cho tứ giác ABCD có $BAD = 60°, BCD = 90°$. Đường phân giác trong của BAD cắt BD tại E. Đường phân giác trong của BCD cắt BD tại F. Chứng minh: $\frac{\sqrt{3}}{AE} + \frac{\sqrt{2}}{CF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{DA}$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Long An, năm học 2016 - 2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi K là hình chiếu vuông góc của E lên AB.



Diện tích tam giác ABE là:

$\frac{KE.AB}{2} = \frac{AE.\sin 30°.AB}{2} = \frac{AE.AB}{4}$

Diện tích tam giác ADE là: $\frac{AE.AD}{4}$

Diện tích tam giác ABD là: $\frac{AB.\sin 60°.AD}{2} = \frac{\sqrt{3}AB.AD}{4}$

Ta có: Diện tích tam giác ABE + Diện tích tam giác ADE

= Diện tích tam giác ABD.

Suy ra: $\frac{\sqrt{3}}{AE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$ (1)

Tương tự như trên ta tìm được $\frac{\sqrt{3}}{CF} = \frac{1}{CB} + \frac{1}{CD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{\sqrt{3}}{AE} + \frac{\sqrt{2}}{CF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{DA}$

Bài 63. Cho đường tròn $O;R$ và điểm A cố định trên $O;R$. Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn $O;R$ và $A;R$; H là điểm thay đổi trên cung nhỏ MN của đường tròn $A;R$. Đường thẳng qua H và vuông góc với AH cắt $O;R$ tại B, C. Kẻ $HI \perp AB$ $I \in AB$, $HK \perp AC$ $K \in AC$.

1) Chứng minh rằng IK luôn vuông góc với một đường thẳng cố định và $AB.AC = 2R^2$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của điện tích ΔAIK khi H thay đổi.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Phú Thọ, năm học 2016 - 2017)

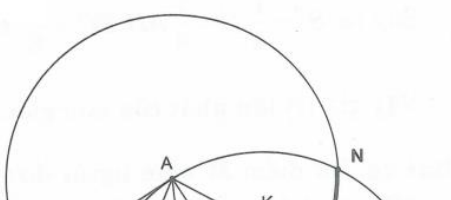
HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Ta có $AIH = 90°; AKH = 90°$

Vì $AIH + AKH = 180°$

nên tứ giác AJHK nội tiếp.

Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn



$O;R$ tại A.

Ta có: $\begin{cases} ACB + HAC = 90^\circ \\ AHK + HAC = 90 \end{cases}$

$\Rightarrow ACB = AHK$ (1)

Ta lại có: $AHK = AIK$

(do tứ giác AIHK nội tiếp) (2)

và $BAt = ACB$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ AB) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: . $BAt = AIK \Rightarrow At // IK$

Mặt khác $OA \perp At \Rightarrow IK \perp OA$. Vậy IK luôn vuông góc với đường thẳng cố định OA.

Gọi J là giao điểm của AO và IK; A' là điểm đối xứng với A qua O.

Ta có $\Delta ACH \backsim \Delta AA'B$ $AHC = ABA' = 90^\circ; ACH = AA'B$.

$\Rightarrow \frac{AC}{AA'} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB.AC = 2R.AH = 2R^2$

2) Ta có $\Delta AKH \sim \Delta AHC \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AK.AC = AH^2$.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích các tam giác ABC và AIK.

Ta có $\Delta AIK \backsim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{IK}{BC} = \frac{AJ}{AH}$, suy ra:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2}AJ.IK}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{AJ}{AH}.\frac{IK}{BC} = \left(\frac{AK}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AK.AC}{AB.AC}\right)^2$$

$$= \frac{AH^4}{AH.2R^2} = \frac{AH^2}{4R^2} = \frac{1}{4}$$

Suy ra $S' = \frac{1}{4}.S = \frac{1}{8}AH.BC = \frac{R}{8}.BC \le \frac{R}{8}.2R = \frac{R^2}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của tam giác AJK bằng $\frac{R^2}{4}$, đạt khi $H \equiv O$.

Bài 64. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O .Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

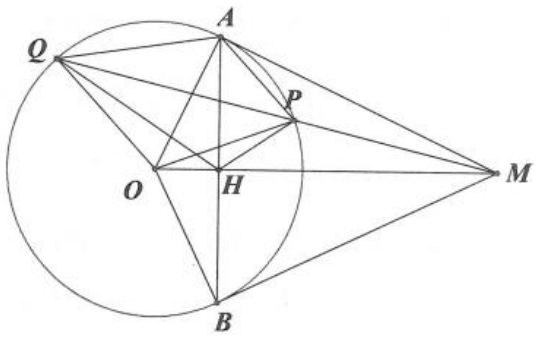
1) Chứng minh $HPO = HQO$.

2) Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Nghệ an, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI

1) ΔMPA đồng dạng ΔMAQ (g.g),



suy ra $MA^2 = MP.MQ$ (1)

ΔMAO vuông tại A, có đường cao

AH nên $MA^2 = MH.MO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

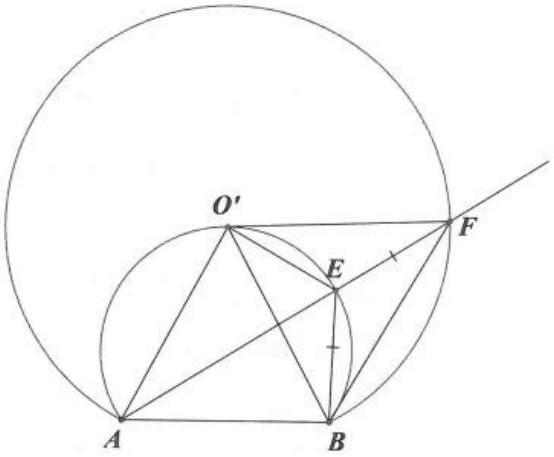
$P.MQ = MH.MO$ hay $\frac{MP}{MH}=\frac{MO}{MQ}$ (*)

ΔMPH và ΔMOQ có góc M chung, kết hợp (*) ta suy ra ΔMPH đồng dạng ΔMOQ (c.g.c). Suy ra $MHP = MQO$

Do đó tứ giác PQOH là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow HPO = HQO = \frac{1}{2}sdOH$ (đpcm)

2) Trên tia đối của tia EA lấy điểm F



sao cho $EB = EF$ hay ΔEBF

cân tại E, suy ra $BFA = \frac{1}{2}BEA$

Đặt $AEB = \alpha$ khi đó $AFB = \frac{\alpha}{2}$

nên F di chuyển trên cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên BC.

Ta có: $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}\geq\frac{4}{EA+EB}$.

Như vậy $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}$ nhỏ nhất khi $EA+EB$ lớn nhất

hay $EA+EF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AF$ lớn nhất (**)

Gọi O' là điểm chính giữa của cung lớn AB

suy ra $\Delta O'AB$ cân tại O' suy ra $O'A = O'B$ (3)

$\Delta O'EB$ và $\Delta O'EF$ có EB = EF, O'E chung

Và $FEO' = BEO'$ (cùng bù với BAO')

$\Rightarrow \Delta O'EB = \Delta O'EF$ (c.g.c) suy ra $O'B = O'F$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra O' là tâm cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC (cung đó và cung lớn AB cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB).

Do đó AF lớn nhất khi nó là đường kính của O' khi $E \equiv O'$ (***).

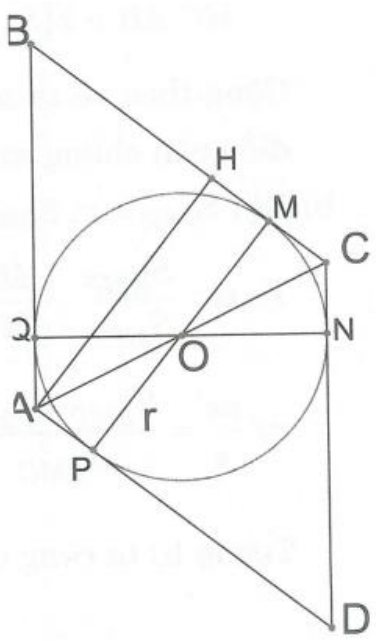
Từ (**) và (***) suy ra E là điểm chính giữa cung lớn AB thì $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}$ giá trị nhỏ nhất.

Bài 65. Trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn $O;r$, hãy tìm hình bình hành có diện tích nhỏ nhất.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Hải Dương, năm học 2011 - 2012)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo bài ta suy ra các cạnh của hình hành là tiếp tuyến của đường tròn $O;r$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với các cạnh như hình vẽ.



$\Rightarrow CM = CN; AP = AQ, BM = BQ; PD = DN$

$\Rightarrow CM + BM + AP + PD = CN + DN + AQ + BQ$

$\Rightarrow 2BC = 2AB \Rightarrow BC = AB$

Kẻ $AH \perp BC$. Ta có $AB \geq AH$, dấu "=" xảy ra khi $ABC = 90^\circ$

Ta có: $OM \perp BC, OP \perp AD, AD // BC$

$\Rightarrow$ P, O, M thẳng hàng, do đó $AH = PM = 2r$.

$S_{ABCD} = AH.BC = 2r.AB \geq 2r.2r$

$\Rightarrow S_{ABCD} \geq 4r^2$, dấu "=" xảy ra khi $ABC = 90^\circ$.

Vậy trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn $O;r$ thì hình vuông có diện tích nhỏ nhất và bằng $4r^2$.

Bài 66. Cho tam giác ABC, điểm M ở trong tam giác, các đường thẳng AM, BM, CM, lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại P, R, Q. Kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.

1) Chứng minh rằng: $MA.BC + MB.CA + MC.AB \geq 4S_{ABC}$

2) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác PQR lớn nhất.

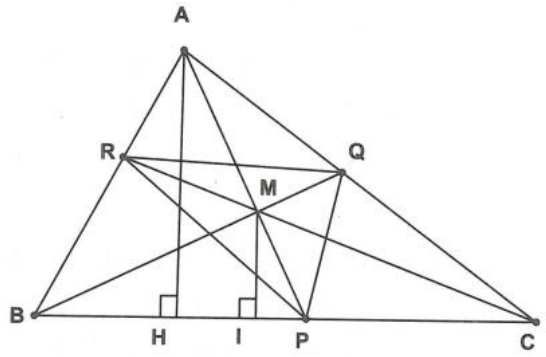
(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Bình Định, năm học 2010 - 2011)

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Ta có: $\frac{PM}{PA}=\frac{MI}{AH}=\frac{S_{BMC}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow \frac{S_{BMC}}{S_{ABC}-S_{BMC}}=\frac{PM}{MA}\geq\frac{MI}{MA}=\frac{MI.BC}{MA.BC}=\frac{2S_{BMC}}{MA.BC}$

$\Rightarrow MA.BC\geq 2\ S_{ABC}-S_{BMC}$



Tương tự ta cũng có:

$MB.AC\geq 2\ S_{ABC}-S_{AMC}$;

$MC.AB\geq 2\ S_{ABC}-S_{AMB}$

Cộng theo vế ta sẽ được điều cần chứng minh.

b) Đặt $S_{PMQ}=x;S_{QMR}=y;S_{RMP}=z\Rightarrow S_{PQR}=x+y+z$

Ta có $\frac{S_{RMP}}{S_{MCP}}=\frac{MR}{MC};\frac{S_{PMQ}}{S_{PMB}}=\frac{MQ}{MB}\Rightarrow\frac{z.x}{S_{MCP}S_{PMB}}=\frac{MR.MQ}{MC.MB}=\frac{y}{S_{BMC}}$

$\Rightarrow\frac{zx}{y}=\frac{S_{BMP}.S_{PMC}}{S_{BMC}}\leq\frac{S_{BMC}^2}{4S_{BMC}}=\frac{S_{BMC}}{4}$ (1)

Tương tự ta cũng có: $\frac{xy}{z}\leq\frac{S_{CMA}}{4}$ (2); $\frac{yz}{x}\leq\frac{S_{AMB}}{4}$ (3)

Cộng theo vế các BĐT (1), (2) và (3) ta được: $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\leq\frac{S_{ABC}}{4}$ (4)

Mặt khác dùng BĐT Cô-si ta sẽ chứng minh được

$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z$ nên từ (4) suy ra:

$x+y+z\leq\frac{S_{ABC}}{4}\Rightarrow S_{PQR}\leq\frac{S_{ABC}}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi:

$\begin{cases}S_{PMB}=S_{PMC};S_{CMQ}=S_{QMA};S_{AMR}=S_{RMB}\\x=y=z\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy khi M là trọng tâm của tam giác ABC thì $\max S_{PQR}=\frac{S_{ABC}}{4}$

Bài 67. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

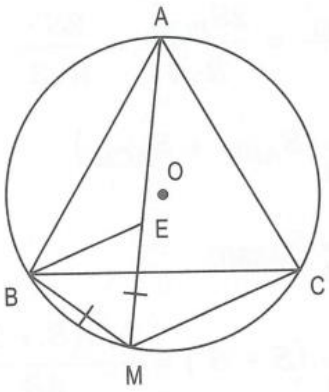
1) Chứng minh $MB+MC=MA$

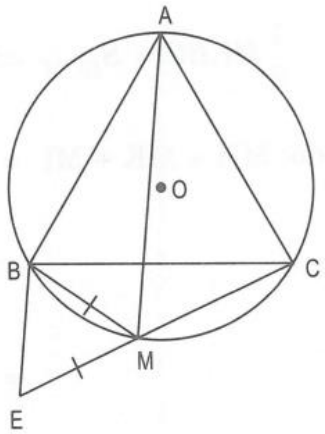
2) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức:

$$MH+MI+MK=\frac{2\sqrt{3}\ S+2S'}{3R}$$

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Bình Định, năm học 2016 - 2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI





a) Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME=MB$.

Ta có: ΔBEM là tam giác đều $\Rightarrow BE=BM=EM$

$\Delta BMA=\Delta BEC\Rightarrow MA=EC$

Do đó: $MB+MC=MA$

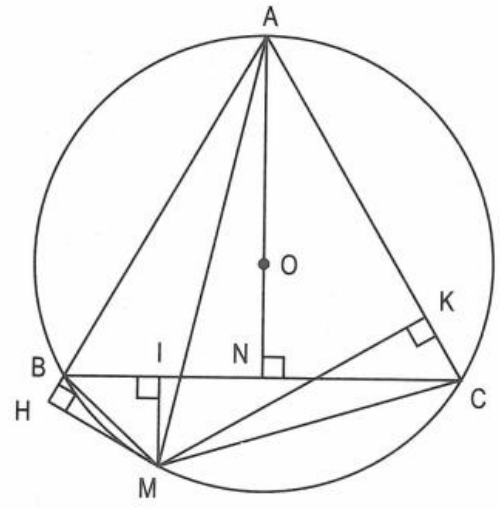
Cách 2: Trên AM lấy điểm E sao cho $ME=MB$

Ta có: ΔBEM là tam giác đều $\Rightarrow BE=BM=EM$

$\Delta MBC=\Delta EBA(\text{c.g.c})\Rightarrow \text{MC}=\text{AE}$. Do đó: $MB+MC=MA$

b) Kẻ AN vuông góc với BC tại N

Vì ΔABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác



$\Rightarrow A,O,N$ thẳng hàng $\Rightarrow AN=\frac{3}{2}R$

Ta có: $AN=AB.\sin ABN$

$$\Rightarrow AB=\frac{AN}{\sin ABN}=\frac{3}{2}R:\frac{\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}$$

Ta có: $\frac{1}{2}MH.AB=S_{ABM}$

$$\Leftrightarrow MH=\frac{2S_{ABM}}{AB}=\frac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2}MK.AC=S_{ACM}\Leftrightarrow MK=\frac{2S_{ACM}}{AC}=\frac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$$

$\frac{1}{2}MI.BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \frac{2S_{BCM}}{BC} = \frac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \frac{2S'}{R\sqrt{3}}$

Do đó: $MH + MK + MI = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}\ S_{ABM} + S_{ACM}$

$= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}.S_{ABMC}$

$= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}.\ S + S'\ = \frac{2\sqrt{3}\ S + 2S'}{3R}$

Bài 68. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là r. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Biết rằng:

$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{r}$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Thái Bình, năm học 2015 - 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi đường cao tương ứng với cạnh BC là AH. Gọi S là diện tích tam giác ABC.

Ta dễ thấy: $\frac{S}{AM} \le \frac{S}{AH} = \frac{BC}{2}$

Tương tự ta có: $\frac{S}{BN} \le \frac{AC}{2}, \frac{S}{CP} \le \frac{AB}{2}$

Cộng vế theo vế ta được:

$\frac{S}{AM} + \frac{S}{BN} + \frac{S}{CP} \le p$, trong đó p là nửa chu vi.

$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \le \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

CHUYÊN ĐỀ 7.NHỮNG ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC NỔI TIẾNG

I. ĐỊNH LÝ THALES

1. Định lý Thales thuận:

Nếu có một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

2. Định lý Thales đảo:

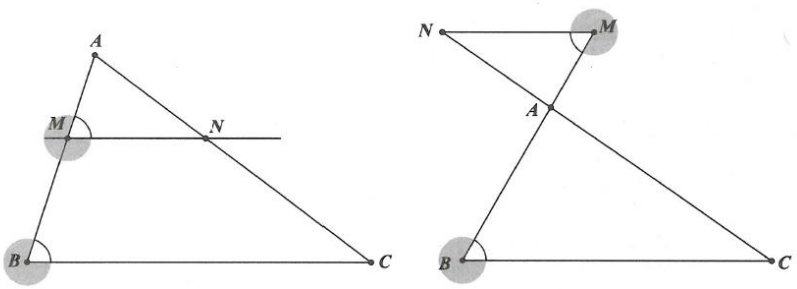
Nếu một đường thẳng cắt 2 cạnh của tam giác và định ra trên 2 cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song sng song với cạnh còn lại của tam giác.

(Chú ý nếu đường thẳng song song với một cạnh cắt hai cạnh còn lại ở phần kéo dài thì định lý vẫn đúng)

3. Hệ quả:

Nếu một đường thẳng cắt 2 cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ 3 thì nó tạo thành một tam giác mới có 3 cạnh tương ứng tỷ lệ với ba cạnh tam giác đã cho.

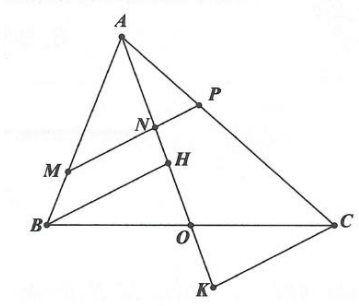
- $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$
- $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$



Chú ý: Định lý Thales cũng đúng cho hình thang: $AB//EF//CD$ thì $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC},\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ với $E\in AD,F\in BC.$

4. Một số kết quả, định lý quan trọng:

a, Cho tam giác ABC có O là trung điểm BC. Một đường thẳng bất kỳ cắt cạnh AB,AO,AC tại M,N,P khi đó ta có: $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AP}=\frac{2AO}{AN}.$



Chứng minh:

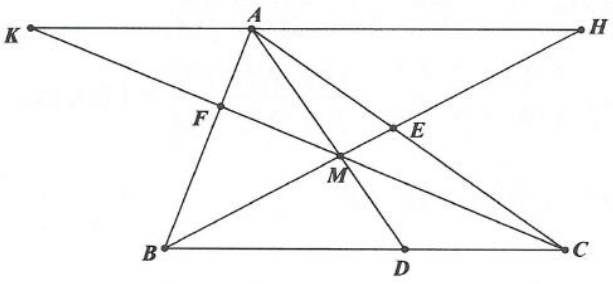
Dựng các đường thẳng qua B,C song song với MP cắt AO lần lượt tại $H,K.$

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{AB}{AM}=\frac{AH}{AN},\frac{AC}{AP}=\frac{AK}{AN}$ cộng hai đẳng thức ta có:

$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AH+AK}{AN}$. Để ý rằng: $\frac{AH}{AN}=\frac{AO-OH}{AN},\frac{AK}{AN}=\frac{AO+OK}{AN}$. Mặt khác $\Delta BOH=\Delta COK$ (g.c.g) suy ra $OH=OK$ nên $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AH+AK}{AN}=\frac{AO-OK+AO+OK}{AN}=\frac{2AO}{AN}$ đpcm.

b, Định lý: **Van-Aubel:**

Điểm M nằm trong tam giác ABC, các đường thẳng AM,BM,CM cắt cạnh đối diện tại D,E,F thì $\frac{AM}{MD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}.$



Giải:

Dựng đường thẳng qua A song song với BC cắt BE,CF lần lượt tại H,K. Áp dụng định lý Thales ta có:

$\frac{AF}{FB}=\frac{AK}{BC},\frac{AE}{EC}=\frac{AH}{BC}$ cộng hai đẳng thức ta có: $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{KH}{BC}=\frac{MK}{MC}=\frac{MA}{MD}$ đpcm.

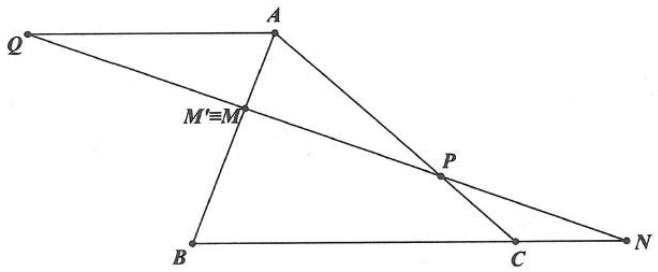
II. ĐỊNH LÝ MENELAUS

1. Định lý thuận

Cho tam giác ABC và 3 điểm M,N,P nằm trên đường thẳng chứa 3 cạnh AB,BC,CA. Khi đó M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi: $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1.$

Chứng minh

Dựng đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng chứa M,N,P tại Q. Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{MA}{MB}=\frac{QA}{BN},\frac{PC}{PA}=\frac{NC}{QA}$



Suy ra $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=\frac{QA}{NB}.\frac{NB}{NC}.\frac{NC}{QA}=1$

đpcm.

2. Định lý Menelaus đảo

Nếu 3 điểm M,N,P nằm trên đường thẳng chứa 3 cạnh AB,BC,CA và $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ thì M,N,P thẳng hàng.

Chứng minh:

Giả sử đường thẳng NP cắt AB tại M'. Theo định lý Thales thuận ta có: $\frac{M'A}{M'B}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1.$

Kết hợp với $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ ta suy ra $\frac{M'A}{M'B}=\frac{MA}{MB}$ suy ra $M\equiv M'$ hay M,N,P thẳng hàng.

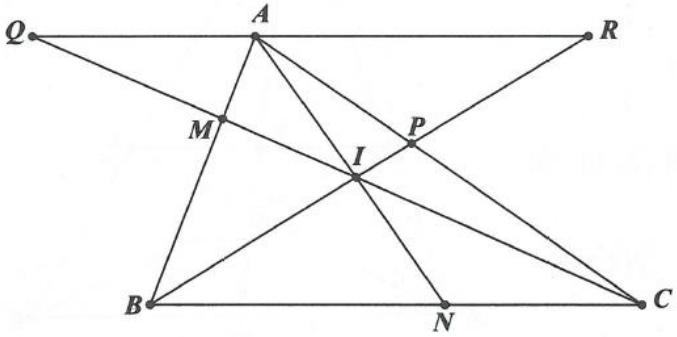
3. Định lý Ceva:

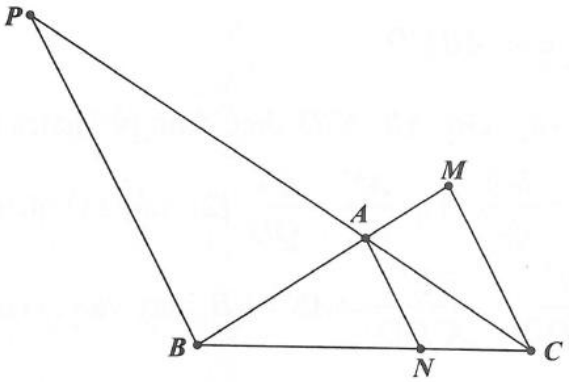
a, Định lý Ceva thuận:

Ba đường thẳng đi qua 3 đỉnh của tam giác ABC đồng quy hoặc cùng song song với nhau và cắt các cạnh AB,BC,CA (hay đường kéo dài) lần lượt tại M,N,P thì ta luôn có: $\frac{AM}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1.$

b, Định lý Ceva đảo:

Nếu M,N,P lần lượt nằm trên các cạnh AB,BC,CA (hay đường kéo dài) và thỏa mãn: $\frac{AM}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ thì các đường thẳng AN,BP,CM đồng quy hoặc song song với nhau.





Chứng minh: Định lý Ceva:

Giả sử đường thẳng qua A song song với BC cắt CM,BP lần lượt tại Q,R. Theo định lý Thales ta có:

$\frac{MA}{MB}=\frac{QA}{BC},\frac{PC}{PA}=\frac{CB}{AR}$. Suy ra $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=\frac{QA}{BC}.\frac{NB}{NC}.\frac{CB}{AR}=\frac{QA}{NC}.\frac{NB}{AR}$ mặt khác ta cũng có:

$\frac{QA}{NC}=\frac{IA}{IN}=\frac{AR}{BN}$ nên $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=\frac{AR}{BN}.\frac{NB}{AR}=1$ đpcm.

Trường hợp: $AN//BP//CN$.

Ta có: $\frac{MA}{MB}=\frac{CN}{BC},\frac{PC}{PA}=\frac{BC}{BN}$ nên: $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=\frac{CN}{BC}.\frac{NB}{NC}.\frac{BC}{BN}=1$ đpcm.

Chứng minh: Định lý Ceva đảo:

Giả sử BP cắt AN tại I,CI cắt AB tại M'. Theo định lý Ceva thuận: $\frac{M'A}{M'B}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ kết hợp với giả thiết: $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ ta suy ra $\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}$ suy ra $M\equiv M'$.

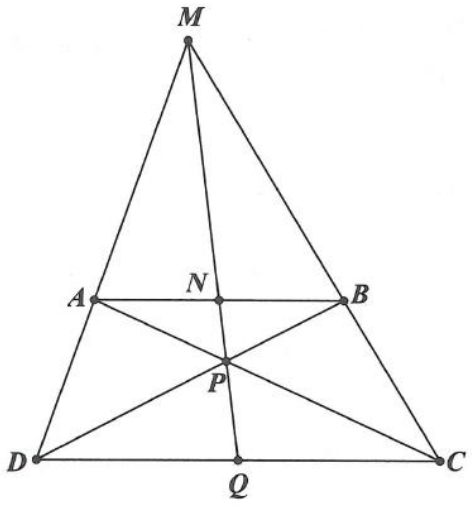
Trường hợp: $AN//BP$ ta dễ dàng có được kết quả $AN//BP//CN$.

4. Bổ đề hình thang

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB,CD khi đó trung điểm các cạnh đáy, giao điểm 2 đường chéo và giao điểm của 2 cạnh bên nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh:

Giả sử các đường thẳng AD,BC cắt nhau tại M, AC,BD cắt nhau tại P, đường thẳng MP cắt AB,CD lần lượt tại N,Q. Ta chứng minh: N,Q lần lượt là trung điểm của AB,CD.



Thật vậy: Do $AB//CD$ theo định lý Thales ta có:

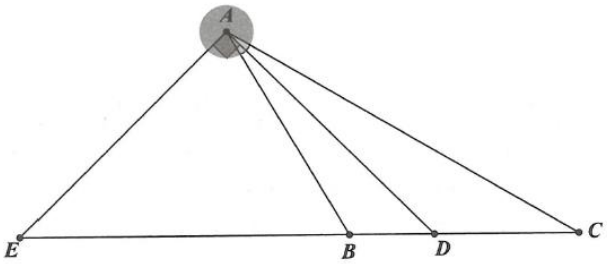
$\frac{AN}{QD}=\frac{NB}{QC}$ (1), $\frac{AN}{QC}=\frac{BN}{QD}$ (2). Lấy (1) nhân với (2) ta có: $\frac{AN^2}{QC.QD}=\frac{NB^2}{QC.QD}\Rightarrow AN=NB$

thay vào (1) ta có $QD=QC$. Hay N,Q lần lượt là trung điểm của AB,CD.

5. Tính chất phân giác:

Cho tam giác ABC có đường phân giác trong góc A là AD và phân giác ngoài góc A là AE. Khi đó ta có:

$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{EB}{EC}$.



MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, điểm N nằm trên cạnh AB sao cho $AN=\frac{1}{3}AB$, điểm Q nằm trên cạnh AC sao cho $AQ=\frac{2}{3}AC$, đường thẳng QN cắt đường thẳng AM và BC lần lượt tại điểm P,R.

a, Tính $\frac{RB}{RC},\frac{PA}{PM}$.

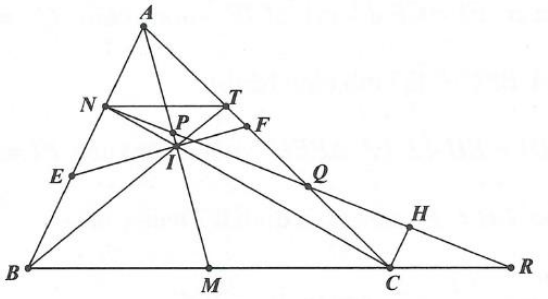
b, Một đường thẳng thay đổi cắt các cạnh AB,AC tại E,F sao cho $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=4$. Chứng minh đường thẳng này luôn đi qua điểm cố định.

c, Đường thẳng qua N song song với BC cắt AC tại T. Chứng minh: CN,BT cắt nhau tại trung điểm của đoạn thẳng AM.

Giải:

a, Để tính tỷ số ta dựng đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng NQ tại H. Áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{RC}{RB}=\frac{HC}{NB}=\frac{HC}{2NA}=\frac{1}{2}\frac{HC}{NA}=\frac{1}{2}\frac{QC}{QA}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$



Cách khác: Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC và cát tuyến NQR ta có:

$$\frac{NA}{NB}.\frac{RB}{RC}.\frac{QC}{QA}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{RB}{RC}.\frac{1}{2}=1\Rightarrow\frac{RC}{RB}=\frac{1}{4}.$$

b, Giả sử đường thẳng EF cắt đoạn AM ở I. Áp dụng kết quả ở 4a) ta có: $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=\frac{2AM}{AI}$. Từ đó suy ra $\frac{2AM}{AI}=4\Leftrightarrow AM=2AI$, hay I là trung điểm của AM. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định là trung điểm I của AM.

c, Theo định lý Thales ta có: $\frac{AN}{AB}=\frac{AT}{AC}=\frac{1}{2}$. Giả sử CN,BT cắt nhau tại điểm I' và AI' cắt BC tại M'. Theo định lý Van-Aubel ta có: $\frac{AI'}{I'M'}=\frac{AN}{NB}+\frac{AT}{TB}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\Rightarrow I'$ là trung điểm của AM'. Áp dụng định lý Ceva cho 3 đường thẳng đồng quy AM',CN,BT ta có:

$$\frac{AN}{NB}.\frac{M'B}{M'C}.\frac{TC}{TA}=1\Rightarrow\frac{1}{2}.\frac{M'B}{M'C}.2=1\Rightarrow\frac{M'B}{M'C}=1\Leftrightarrow M'$$ là trung điểm của BC. Như vậy ta có: $M'\equiv M,I'\equiv I$. Hay BT,CN,AM đồng quy tại I.

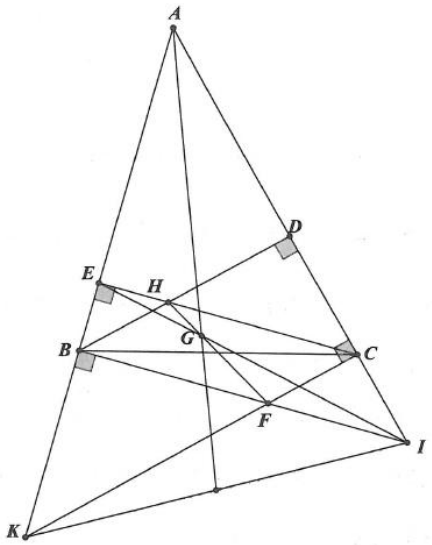
Ví dụ 2.

Cho tam giác nhọn ABC có $A=45°$, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Đường vuông góc với AB tại B, cắt AC ở I. Đường vuông góc với AC tại C, cắt AB ở K.

Gọi F là giao của BI và CK, G là giao điểm của FH và EI. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác AIK.

Giải:

Tam giác vuông ACK có $A=45°$ nên là tam giác vuông cân, CE là đường cao nên $AE=EK, IE$ là đường trung tuyến của ΔAIK. Ta sẽ chứng minh $IG=2GE$ (bằng cách chứng minh $FI=2EH$).



Ta có $FI=CF\sqrt{2}$ (vì ΔCIF vuông cân), $CF=BH$ (vì $BFCH$ là hình bình hành),

$BH=EH\sqrt{2}$ (vì ΔBEH vuông cân) nên $FI=2EH$.

Do $EH//FI$ nên theo định lí Thales, ta có

$\frac{IG}{GE}=\frac{FI}{EH}=2$, suy ra $IG=2GE.$

Vậy G là trọng tâm tam giác AIK.

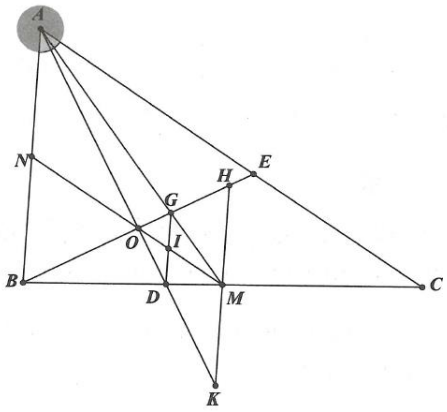
Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC $\left(AB<AC\right)$, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE=AB$. Gọi O,G theo thứ tự là giao điểm của BE với AD,AM.

a, Chứng minh rằng $DG//AB.$

b, Gọi I là giao điểm của MO và DG. Chứng minh rằng $DI=IG.$

Giải:



a, Tam giác ABE cân tại A, AO là đường phân giác nên $BO=OE$. Tam giác BEC có OM là đường trung bình nên $OM//EC.$

Tam giác ABC có $BM=MC$ và $OM//EC$ nên MO đi qua trung điểm N của $AB.$

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB, cắt BO và AO theo thứ tự ở H và K.

Ta có $HK//AB$ và $AN=NB$ nên $MK=MH$ (theo bổ đề hình thang).

Do $HK//AB$, theo định lý Thales ta có $\frac{MD}{DB}=\frac{MK}{AB}=\frac{MH}{AB}$ (vì $MK=MH$) $=\frac{MG}{GA}$ Từ đó ta có

$\frac{MD}{DB}=\frac{MG}{GA}\Rightarrow DG//AB$ (định lí Thales đảo).

b, Ta có $DG//AB$ và $AN=NB$ nên $DI=IG$ (theo bổ đề hình thang).

Ví dụ 4.

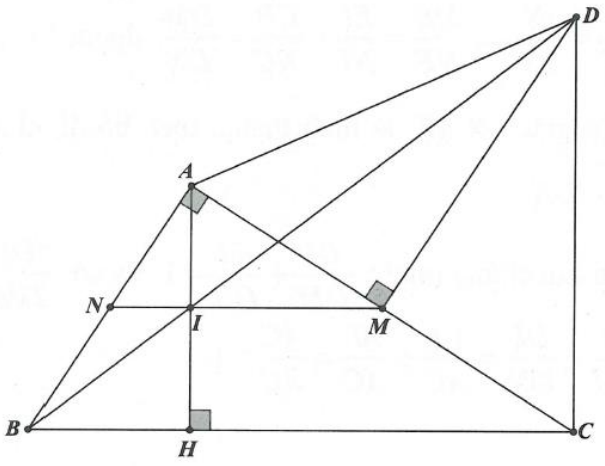
Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AH. Đường vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng BI tại D. Chứng minh rằng $DA = DC$.

Giải:

Gọi M là trung điểm của AC, N là giao điểm của MI và AB.

Tam giác AHC có MI là đường trung bình nên $MI // HC$, tức là $MN // BC$.

Theo định lí Thales:



Do $AH // CD$ nên $\frac{IB}{ID} = \frac{HB}{HC}$. (1)

Do $MN // BC$ nên

$\frac{IN}{HB} = \frac{AI}{AH} = \frac{IM}{HC}$,

tức là $\frac{IN}{IM} = \frac{HB}{HC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IB}{ID} = \frac{IN}{IM}$,

do đó $BN // DM$ (định lí Thales đảo).

Ta lại có $BN \perp AC$ nên $DM \perp AC$. Vậy DM là đường trung trực của AC, suy ra $DA = DC$.

Ví dụ 5.

Cho hình bình hành $ABCD$ giao 2 đường chéo là O, một đường thẳng đi qua đỉnh D cắt cạnh AB tại M, cắt BC ở N và cắt đường chéo AC tại I, đường thẳng NO cắt CD tại F. Dựng $BE // AC$, đường thẳng AE cắt BC tại P.

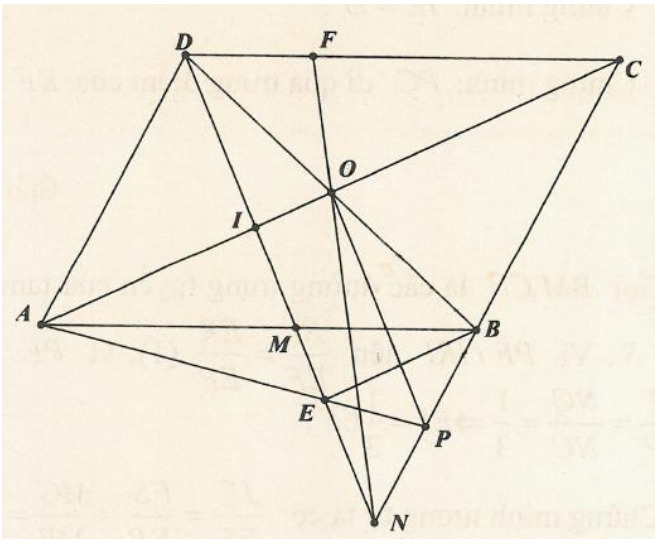
a, Chứng minh: $AM.CN$ không đổi.

b, Chứng minh: $ID^2 = IM.IN$.

c, Chứng minh: $\frac{EM}{EN} = \frac{DM}{DN}$.

d, Chứng minh: $OP // DN$.

e, Chứng minh: $\frac{1}{DI} = \frac{1}{DM} + \frac{1}{DN}$.



Giải:

a, Do $AM // CD$ nên ta có:

$\frac{AM}{CD}=\frac{AI}{IC}=\frac{AD}{CN}\Rightarrow AM.CN=AD.CD.$

b, Do $AM//CD$ nên: $\frac{IM}{ID}=\frac{IA}{IC}=\frac{ID}{IN}\Rightarrow ID^2=IM.IN.$

c, Do $BE//AC$ nên $\frac{MI}{ME}=\frac{MA}{MB}\Rightarrow\frac{MI+ME}{ME}=\frac{MA+MB}{MB}\Leftrightarrow\frac{EI}{ME}=\frac{AB}{MB}=\frac{CD}{MB}=\frac{CN}{BN}=\frac{IN}{EN}$, hay

$\frac{EI}{ME}=\frac{IN}{EN}\Leftrightarrow\frac{ME}{NE}=\frac{EI}{NI}=\frac{CB}{NC}=\frac{DM}{DN}$ đpcm.

d, Tứ giác $ACBE$ là hình thang, theo bổ đề hình thang OP đi qua trung điểm của EB nên $OP//DN$.

e, Ta cần chứng minh: $\frac{DI}{DM}+\frac{DI}{DN}=1.$ Ta có: $\frac{DI}{DM}=\frac{CI}{CA},\frac{DI}{DN}=\frac{AI}{AC}$ suy ra

$\frac{DI}{DM}+\frac{DI}{DN}=\frac{CI}{AC}+\frac{AI}{AC}=\frac{AC}{AC}=1.$

Ví dụ 6.

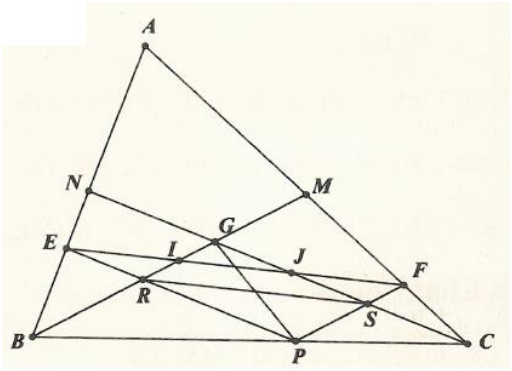
Cho tam giác ABC có trọng tâm là điểm G. Gọi P là điểm nằm trên cạnh BC. Các đường thẳng qua P song song với CG,BG cắt AB,AC tại E,F.

Giả sử EF cắt BG,CG tại I,J.

a, Chứng minh: $EI=\frac{1}{3}EF.$

b, Chứng minh: $IE=IJ.$

c, Chứng minh: PG đi qua trung điểm của EF.



Giải:

a, Gọi BM,CN là các đường trung tuyến của tam giác ABC, BG cắt EP tại R, CG cắt FP tại S. Vì $PF//RI$ nên $\frac{EI}{EF}=\frac{ER}{EP}$ (1), vì $PE//NC$ nên $\frac{ER}{EP}=\frac{NG}{NC}$ (2). Từ (1) (2) ta suy ra

$\frac{EI}{EF}=\frac{NG}{NC}=\frac{1}{3}\Rightarrow EI=\frac{1}{3}EF.$

b, Chứng minh tương tự ta có: $\frac{JF}{EF}=\frac{FS}{FP}=\frac{MG}{MB}=\frac{1}{3}\Rightarrow JF=\frac{1}{3}EF$ từ đó suy ra: $EI=IJ=JF.$

c, Từ chứng minh trên ta có: $\frac{ER}{EP}=\frac{FS}{FP}\Rightarrow EF//RS$. Vì $RGSP$ là hình bình hành nên GP đi qua trung điểm của RS nên GP cũng đi qua trung điểm của IJ.

Chú ý: Sử dụng bổ đề hình thang ta cũng suy ra GP đi qua trung điểm của IJ.

Ví dụ 7.

Cho tam giác nhọn ABC và một điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC, lấy một điểm E thuộc đoạn thẳng AD, F thuộc đoạn thẳng DE. Một đường thẳng qua F song song với cạnh BC cắt AB, EB, EC, AC theo thứ tự tại M, P, Q, N, đường thẳng MD, EB cắt nhau tại R, ND và EC cắt nhau tại S, DP và AB cắt nhau tại G, DQ cắt AC tại H.

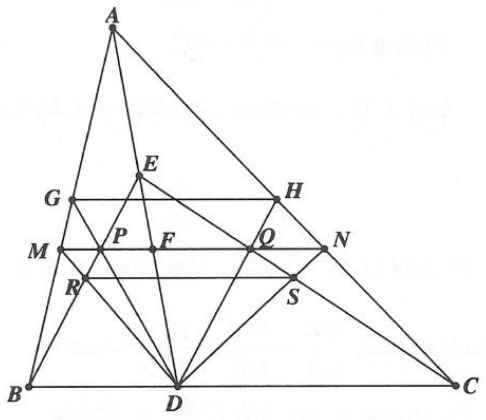
a, Chứng minh: $\frac{MP}{BD}=\frac{NQ}{DC}$.

b, Chứng minh: $RS//BC$.

c, Chứng minh: $GH//RS$.

Gọi K là chân đường cao hạ từ A lên cạnh BC, I là một điểm nằm trên AK, các đường thẳng BI, CI cắt AC, AB lần lượt tại X, Y. Đường thẳng qua $I//BC$ cắt KX, KY tại Z, T. Chứng minh: ΔKZT cân.

Giải:



a, Do $MF//BD$ theo định lý Thales

ta có: $\frac{MF}{BD}=\frac{AF}{FD}, NF//CD\Rightarrow\frac{NF}{CD}=\frac{AF}{FD}$,

suy ra $\frac{MF}{BD}=\frac{NF}{CD}$ (1), do $PF//BD\Rightarrow\frac{PF}{BD}=\frac{EF}{CD}$,

Do $FQ//CD\Rightarrow\frac{QF}{CD}=\frac{EF}{FD}$ suy ra $\frac{PF}{BD}=\frac{QF}{CD}$ (2)

Từ (1), (2) ta có:

$$\frac{MF}{BD}-\frac{PF}{BD}=\frac{NF}{CD}-\frac{QF}{CD}\Leftrightarrow\frac{MP}{BD}=\frac{NQ}{CD}.$$

b, Ta có $MP//BD\Rightarrow\frac{MP}{BD}=\frac{MR}{RD}, NQ//CD\Rightarrow\frac{NQ}{CD}=\frac{NS}{SD}\Rightarrow\frac{MR}{RD}=\frac{NS}{SD}\Rightarrow RS//MN$.

Do $MN//BC\Rightarrow RS//BC$.

c, Do $MP//BD\Rightarrow\frac{MP}{BD}=\frac{GP}{GD}, FQ//CD\Rightarrow\frac{QN}{CD}=\frac{HQ}{HD}$ theo câu a thì $\frac{MP}{BD}=\frac{NQ}{CD}$ nên

$$\frac{GP}{GD}=\frac{HQ}{HD}\Rightarrow\frac{DP}{DG}=\frac{DQ}{DH}\Rightarrow GH//PQ \text{ hay } GH//BC//RS.$$

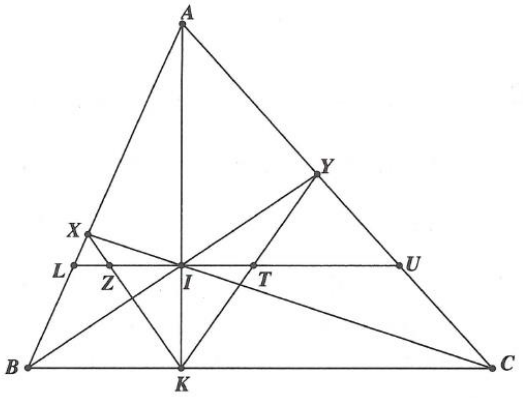
d, Giả sử đường thẳng qua I song song với BC cắt AB, AC tại L, U.

Do $IZ//KC$ nên $\frac{IZ}{KC}=\frac{XZ}{XK}, IL//BC$ nên

$\frac{IL}{BC}=\frac{XZ}{XK}$ suy ra $\frac{IZ}{KC}=\frac{IL}{BC}\Leftrightarrow\frac{IZ}{IL}=\frac{KC}{BC}$ (1)

Hay $IZ=\frac{KC}{BC}.IL$, tương tự ta có:

$IT=\frac{BK}{BC}.IU$ (2). Từ (1),(2) ta có:



$\frac{IZ}{IT}=\frac{KC}{BK}.\frac{IL}{IU}$ nhưng $\frac{KC}{IU}=\frac{KB}{IL}$ nên $\frac{IZ}{IT}=\frac{KC}{BK}.\frac{IL}{IU}=1$ hay $IZ=IT$. Tam giác KZT có đường cao IK đồng thời cũng là đường trung tuyến nên KZT cân tại K.

Chú ý rằng: Với điểm K tùy ý trên BC ta luôn có: $IZ=IT$.

Ví dụ 8.

Cho tam giác vuông tại ABC. Kẻ đường phân giác AD, $D\in BC$ hạ $DH\perp AB, DK\perp AC, BK$ cắt DH tại M ,CH cắt DK tại N.

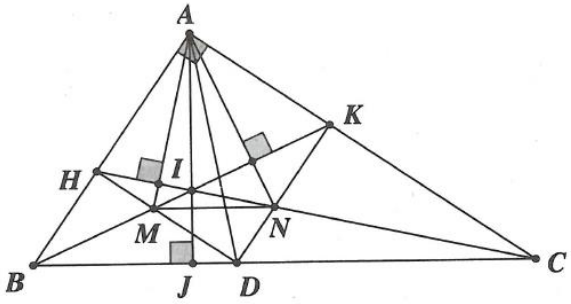
a, Chứng minh: $\frac{HM}{MD}=\frac{BH}{HA}$.

b, Chứng minh: $MN//BC$.

c, Gọi I là giao điểm của BK và CH. Chứng minh: $\Delta ABK\backsim\Delta KAN$ và $AI\perp BC$.

Giải:

a, Vì $MH//AC$ và $BH//DK$ theo định lý Thales ta có: $\frac{BH}{HA}=\frac{BM}{MK}=\frac{MH}{MD}$ (đpcm).



b, Để chứng minh: $MN//BC$ ta chứng minh: $\frac{MH}{MD}=\frac{NH}{NC}$. Ta dễ chứng minh được tứ giác $AHDK$ là hình vuông nên $HD=AK=HA=DK$. Do $HM//AK, DN//BH$. Theo định lý Thales ta có:

$$\frac{HM}{HD}=\frac{MH}{AK}=\frac{BM}{BK}=\frac{BD}{BC}=\frac{HN}{HC}\Leftrightarrow\frac{MH}{HD}=\frac{HN}{HC}\Rightarrow MN//BC.$$

c, Xét tam giác vuông AKN, ABK ta có: $\frac{KN}{KA}=\frac{KN}{AH}=\frac{NC}{CH}=\frac{CD}{CB}=\frac{DK}{AB}=\frac{AK}{AB}\Leftrightarrow\frac{KN}{KA}=\frac{AK}{AB}$ hay $\Delta ABK\backsim\Delta KAN$ (c.g.c) suy ra $ABK=KAN$ nên $AKB+KAN=AKB+ABK=90°$ hay $AN\perp BK$. Chứng minh tương tự ta có: $AM\perp CH$ suy ra BK, CH chứa các đường cao xuất phát từ M, N của

tam giác AMN nên CH cắt BK tại I thì I là trực tâm của tam giác AMN suy ra $AI \perp MN \Rightarrow AI \perp BC$.

Ví dụ 9.

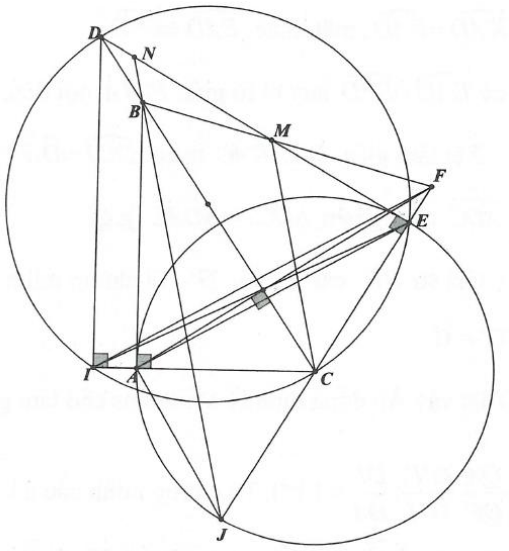
Cho tam giác ABC vuông tại A. D là điểm trên tia đối của tia BC, kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn tâm C bán kính CA (A,E ở khác phía nhau so với BC). Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường thẳng CE tại F, đường thẳng BF cắt DE tại M, qua B kẻ đường thẳng song song với CM cắt DE tại N. Gọi J là giao điểm thứ 2 của đường tròn $(C;CA)$ với EC.

a, Đường tròn đường kính DC cắt AC tại I. Chứng minh: $AIFE$ nội tiếp.

b, Tam giác CIF cân tại C.

c, Chứng minh: M là trung điểm của NE.

Giải:



a, Đường tròn đường kính DC cắt AC tại I nên $DIC = 90° \Rightarrow DECI$ nội tiếp. Suy ra

$EIC = EDC = 90° - ECD = CFA \Leftrightarrow AIE = AFE$

Hay tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

b, Do $CA = CE$ mà

$CEA = CIF, CAE = CFI \Rightarrow AIF = AFI$ suy ra tam giác CIF cân tại C và $AE//IF$.

c, Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác BFC với cát tuyến DME ta có:

$\frac{MB}{MF}.\frac{EF}{EC}.\frac{DC}{DB} = 1$ (*)

Mặt khác do $AE//IF$ nên ta có $\frac{EF}{EC} = \frac{AI}{AC}$, do $AB//DI$ nên $\frac{DC}{DB} = \frac{IC}{IA}$ thay vào (*)

ta có: $\frac{MB}{MF}.\frac{AI}{AC}.\frac{IC}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{AC}{IC} = \frac{CJ}{CF} \Rightarrow BJ//CM$ hay M là trung điểm của NE.

Ví dụ 10.

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D,E là điểm trên cung BDC, điểm F trên cạnh BC thỏa mãn

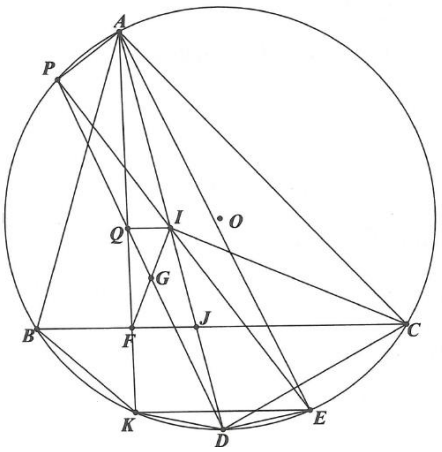
$BAF = CAE < \frac{1}{2}BAC$. Gọi G là trung điểm của IF. Đường thẳng EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại P, đường thẳng AI cắt BC tại J, AF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K cắt DP tại Q.

a, Chứng minh: $APQI$ là tứ giác nội tiếp.

b, Chứng minh: $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$.

c, Chứng minh: DG, EI cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải:



a, Do AD là phân giác trong góc A nên $BAD = CAD$, vì $BAK = CDE \Rightarrow KAD = EAD$, mặt khác $EAD = EPD \Leftrightarrow EAD = EPD$ suy ra tứ giác $PQIA$ nội tiếp.

b, Xét tam giác DCJ, DAC ta có: $DCJ = DAC$, ADC chung nên $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$ (g.g)

c, Giả sử PD cắt FI tại G'. Ta chứng minh $G' \equiv G$.

Thật vậy Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AIF và cát tuyến $QG'D$ ta có

$\frac{QA}{QF}.\frac{G'F}{G'I}.\frac{DI}{DA} = 1$ (*). Từ chứng minh câu a ta có: $AQI = API = AKE$ suy ra $KE//QI$. Mặt khác cũng do $BAK = CDE$ suy ra $BK = CE, KAD = EAD \Rightarrow DK = DE, BKEC$ là hình thang cân và $EK//BC$. Như vậy $QI//BC//KE$

Theo định lý Thales ta có: $\frac{QA}{QF} = \frac{IA}{IJ}$, mặt khác I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên theo tính chất phân giác trong ta cũng có: $\frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ}$, do $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$ nên $\frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DC}$ mà $DI = DC = DB$ (Tính chất quen thuộc). Suy ra $\frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DI}$ như vậy: $\frac{QA}{QF} = \frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DC} = \frac{DA}{DI}$

suy ra $\frac{QA}{QF}.\frac{DI}{DA} = 1$ thay vào (*) ta có: $\frac{G'F}{G'I} = 1 \Rightarrow G'$ là trung điểm của IF hay $G \equiv G'$.

Ví dụ 11.

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường tròn tâm B bán kính BA và đường tròn tâm C bán kính CA cắt nhau tại D khác A, BC cắt (B) tại E, F (F nằm trong (C)) và cắt (C) tại M, N (M

nằm trong (B)). Đường thẳng DM cắt AE tại P, DF cắt AN tại Q. Kéo dài DM cắt (B) tại I, DF cắt (C) tại H.

a, Chứng minh: $IB \perp EF$.

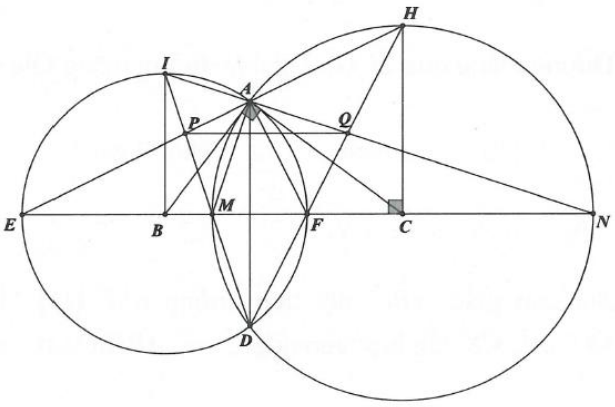
b, Chứng minh: Tứ giác $APDQ$ nội tiếp và $PQ//EN$.

c, Chứng minh: $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ}=\frac{AB}{AC}$.

Giải:

a, Ta có:

$$AEN+ANE=\frac{1}{2}\left(ABF+ACM\right)=45°.$$



Lại có: $AEF=ADF, ANM=ADM$

Suy ra $IDH=MDA+FDA=45°$,

$$IBF=IBA+ABF=2\left(ADF+ADM\right)=90°$$

Do đó $IB \perp EF$.

b, Từ a suy ra tam giác IBF vuông cân tại B suy ra $IAE=45°$ suy ra I, A, N thẳng hàng.

Tương tự ta cũng có: E, A, H thẳng hàng suy ra $EAN=135° \Rightarrow$ tứ giác $APDQ$ nội tiếp suy ra $APQ=ADQ=AEF$ nên $PQ//EF$.

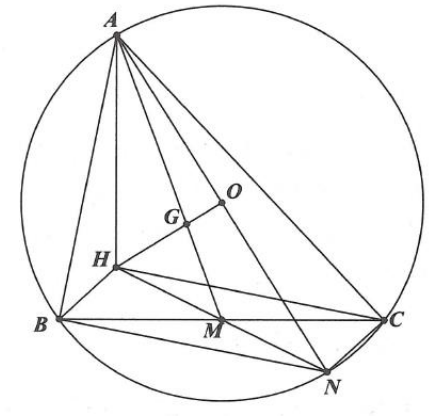
Áp dụng định lý Menelaus với tam giác PEM và cát tuyến IAN ta có: $\frac{IP}{IM}.\frac{NM}{NE}.\frac{AE}{AP}=1$, tương tự với tam giác QFN và cát tuyến HAE ta cũng có: $\frac{HF}{HQ}.\frac{AQ}{AN}.\frac{EN}{EF}=1$. Nhân hai đẳng thức với chú ý:

$\frac{AP}{AQ}=\frac{AE}{AN}$ suy ra: $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ}=\frac{EF}{MN}$.

6. Đường thẳng Ơle

Trong một tam giác: Trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp O nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Ơle của tam giác. Đồng thời ta có: $HO=3GO$.

Chứng minh:



Dựng đường kính AN của (O). Vì AN là đường kính của (O) nên $NC \perp AC$, do $BH \perp AC \Rightarrow BH//NC$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $CH//NB$ nên tứ giác $BHCN$ là hình bình hành, suy ra 2 đường chéo NH, BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên N, H, M thẳng hàng.

Ta có MO là đường trung bình của tam giác AHN nên $MO// = \frac{1}{2}AH$. Gọi G là giao điểm của AM và HO, do $MO//AH$ (cùng vuông góc với BC). Theo định lý Thales ta có: $\frac{AG}{GM} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC và H, G, O thẳng hàng. Do $\frac{GO}{GH} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow HO = 3GO.$

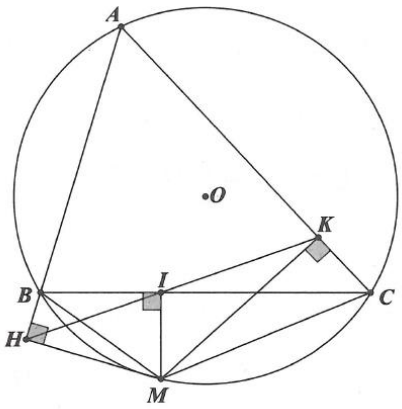
(Đường thẳng qua H, G, O gọi là đường thẳng Ơle của tam giác ABC).

7. Đường thẳng Simson – Đường thẳng Steiner

a, Đường thẳng Simson:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) M là một điểm bất kỳ trên đường tròn. Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với AB, BC, AC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Chứng minh:



Tứ giác $MIBH$ có $BHM + BIM = 90° + 90° = 180°$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MIH = MBH$ (cùng chắn cung HM), mà tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $MBH = KCM$, do đó $MIH = KCM$.

Mặt khác tứ giác $KCMI$ nội tiếp

(vì $MIC = MKC = 90°$) nên $KCM + MIK = 180°$

$\Rightarrow MIH + MIK = 180° \Rightarrow HIK = 180°$. Vậy H, I, K thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua H, I, K được gọi là đường thẳng Simson của điểm M.

Chú ý: Ta có bài toán đảo về bài toán Simson như sau: Cho tam giác ABC và một điểm M nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của M lên ba cạnh của tam giác ABC là bao điểm thẳng hàng thì M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). H là trực tâm ΔABC, M là một điểm nằm trên cung nhỏ AC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, BC.

a) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của MH.

b) Xác định vị trí của M để EF lớn nhất.

2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Một cát tuyến thay đổi qua A cắt (O) và (O') tương ứng tại C và D. Gọi E và F thứ tự là hình chiếu vuông góc của B lên tiếp tuyến của (O) tại C và tiếp tuyến của (O') tại D. Chứng minh rằng EF tiếp xúc một đường tròn cố định.

3. Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp một đường tròn. Gọi M, N, P, Q, R, S, T và U lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, MN, NP, PQ và QM. Chứng minh R, S, T, U thẳng hàng.

4. Cho đường tròn (O) và một điểm A cố định nằm ngoài (O). M là một điểm thay đổi trên đường thẳng qua A vuông góc với AO. Gọi MB, MC là các tiếp tuyến của (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ $AE \perp MB, AF \perp MC\ (E \in MB;\ F \in MC)$. Chứng minh rằng EF đi qua một điểm cố định.

5. Cho xOy, lấy điểm A cố định thuộc tia phân giác của xOy. Vẽ đường tròn (I) qua O và A cắt Ox, Oy lần lượt tại B và C và vẽ hình bình hành OBMC. Chứng minh rằng M thuộc một đường thẳng cố định.

6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H. D là điểm trên cung nhỏ BC. Lấy điểm E sao cho ADCE là hình bình hành và K là trực tâm của tam giác ACE. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của HK.

7. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thay đổi trên cung nhỏ BC. Kẻ $ME \perp AB, MF \perp AC\ (E \in AB, F \in AC)$

a) Xác định vị trí của M để trung điểm của EF nằm trên đoạn thẳng BC

b) Kẻ $AP \perp MB, AQ \perp MC\ (P \in MB, Q \in MC)$. Chứng minh rằng PQ đi qua một điểm cố định.

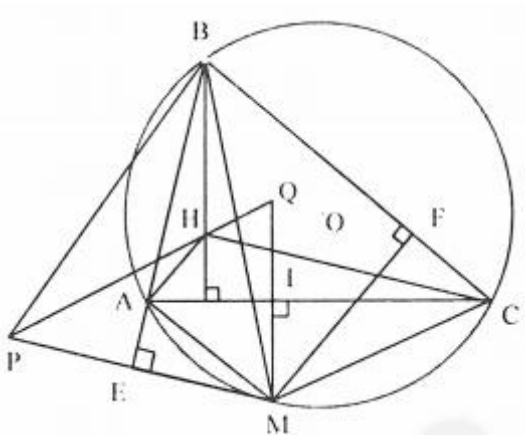
8. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi H, K thứ tự là hình chiếu vuông góc của B trên AC, CD. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AD, HK. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác vuông.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1.

a) Xét trường hợp $BAM \geq BCM$ (các trường hợp khác chứng minh tương tự)

Khi đó E thuộc tia đối của tia AB và F nằm trên cạnh BC



Hạ $MI \perp AC\ (I \in AC)$

Ta được EF là đường thẳng Simson ứng với điểm M của ΔABC

Hơn nữa, I nằm giữa E và F.

Gọi P, Q theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC

Vì $APB = AMB = ACB = 180° - AHB$ nên tứ giác AHBP nội tiếp

$\Rightarrow AHP = ABP = ABMT$. Tương tự $CHQ = CBM$

Suy ra $AHP + AHC + CHQ = ABM + AHC + CBM = 180°$

Do đó P, H, Q thẳng hàng.

Mà IE là đường trung bình của ΔMPQ nên IE đi qua trung điểm của MH hay EF đi qua trung điểm của MH (đpcm).

Nhận xét. Có thể dùng đường thẳng Steiner để chứng minh.

b) Vì $MEI = MAI$ và $MFI = MCI$ nên $\Delta MEF \sim \Delta MAC\ (g.g)$

Suy ra $\frac{EF}{AC} = \frac{EM}{AM} \leq 1$

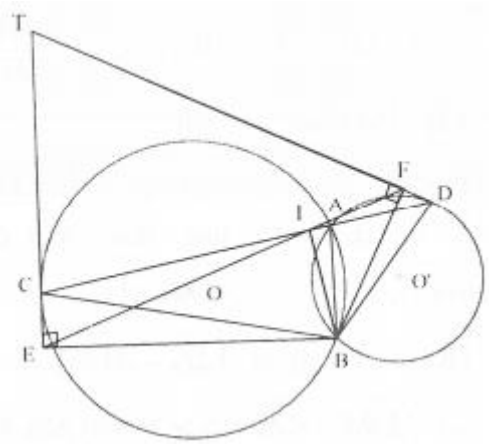
Do đó EF lớn nhất bằng AC và xảy ra khi và chỉ khi BM là đường kính của (O)

2.

Đặt $T = CE \cap DF$

Giả sử $TCB \geq TDB$

Hạ $BI \perp CD\ (I \in CD)$



Vì $CBD = CBA + DBA = TCD + TDC$ nên $CBD + CTD = 180°$

Do đó tứ giác TCBD nội tiếp.

Suy ra EF là đường thẳng Simson ứng với điểm B của ΔTCD

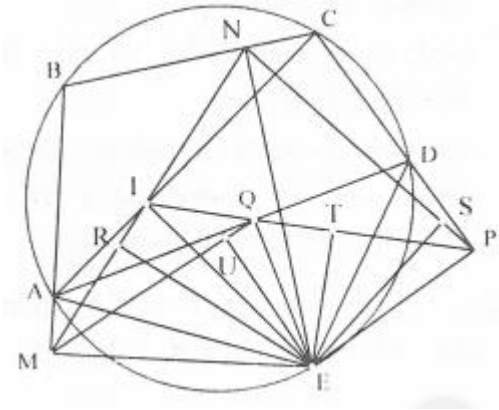
Do đó I, E, F thẳng hàng và I thuộc đường tròn đường kính AB.

Mà tứ giác BICE nội tiếp nên $BIE = BCE = BAE$

Vậy EF tiếp xúc với đường tròn đường kính AB cố định (đpcm).

3.

Hạ $EI \perp AC\ (I \in AC)$



Đường thẳng Simson ứng với điểm E với tam giác ABC cho ta ba điểm M, N, I thẳng hàng.

Đường thẳng Simson ứng với điểm E với tam giác ACD cho ta các ba điểm P, Q, I thẳng hàng.

Ta có A, I, Q, E, M cùng thuộc đường tròn đường kính AE, nên vận dụng đường thẳng Simson ứng với điểm E với tam giác IMQ cho ta các cặp điểm R, U, T thẳng hàng.

Tương tự R, S, T thẳng hàng, ta có đpcm.

4

Ta có $MAO = MBO = MCO = 90°$

Suy ra năm điểm M, A, C, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

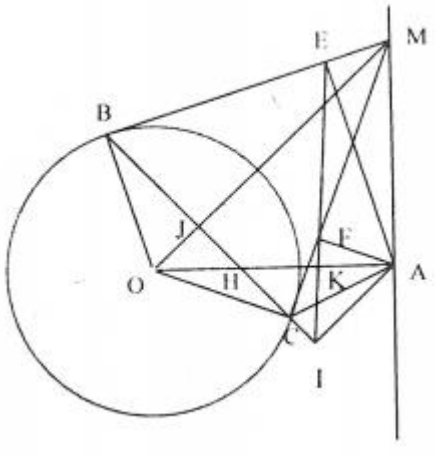
Kẻ $AI \perp BC$. Xét đường tròn đường kính MO, ta có:

$AE \perp MB,\ AF \perp MC,\ AI \perp BC$

Suy ra E, F, I thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Gọi H, J là giao điểm của BC với AO và OM, K là giao điểm của EI và AO.

Ta có: $\Delta OJH \sim \Delta OAM\ (g.g)$ suy ra: $OJ.OM = OH.OA$



TH

Ta có: $\Delta OJB \sim \Delta OBM$ $(g.g)$ suy ra: $OJ.OM = OB^2$

Do đó : $OH.OA = OB^2 \Rightarrow OH = \dfrac{OB^2}{OA}$ không đổi

Vậy H là điểm cố định.

Tứ giác AICF nội tiếp nên $KIA = FCA$ (1)

A, M, B, O, C cùng thuộc một đường tròn nên $ACM = AOM$ (2)

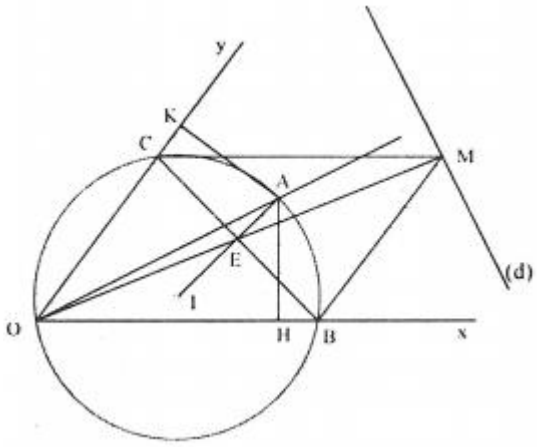
Từ (1), (2) suy ra : $KIA = AOM$

Mà $AOM = KAI$ (so le trong) nên $KIA = KAI \Rightarrow KA = KI$

ΔAIH vuông có $KA = KI$ dễ dàng suy ra $AK = KH$

Suy ra K là điểm cố định.

5.



Vì A thuộc tia phân giác của xOy nên $AC = AB$. Suy ra $IA \perp BC$

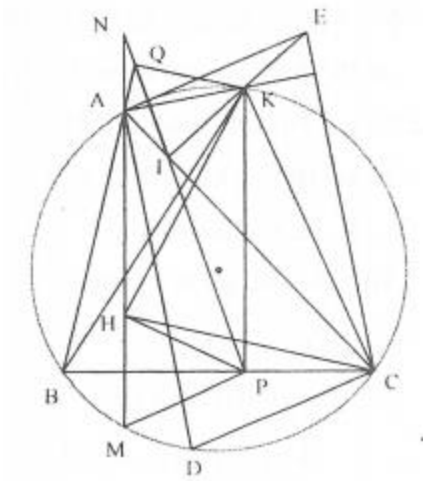
Kẻ $AH \perp Ox, AK \perp Oy$ thì K, H cố định và K, E, H thẳng hàng nên điểm E thuộc HK cố định.

Mà hình bình hành OBMC có $OM = 2OE$ nên M cố định.

Suy ra M thuộc đường thẳng d cố định song song với đường thẳng HK và cách HK một khoảng không đổi.

6.

Theo giả thiết ta có ADCE là hình bình hành nên $ADC = AEC$ mà K là trực tâm của ΔAEC nên $EK \perp AC$



Mặt khác $AKC + AEC = 180°$ nên $AKC + ADC = 180°$

Suy ra tứ giác ADCK nội tiếp, từ đó $K \in (O)$

EK cắt AC tại I

Do đó P, Q, I thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại M và cắt PQ tại N thì $MN \,//\, KP, KQ \perp AB, KP \perp BC$

Suy ra BQKP là tứ giác nội tiếp nên $QPK = QBK = AMK$

Do đó MPKN là tứ giác nội tiếp.

Do đó MPKN là hình thang cân nên $PMN = KNM$

Mặt khác $PH = PM \Rightarrow PMN = PHM$ nên $PHM = KNM$

$\Rightarrow PH \,//\, KN$, lại có $NH \,//\, KP$, suy ra HPKN là hình bình hành.

Do đó NP cắt HK tại trung điểm của mỗi đường.

Do đó PQ đi qua trung điểm của HK.

7.

a) Kẻ $MD \perp BC$ suy ra E, D, F thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Từ các tứ giác nội tiếp MDBE, MDFC ta có:

$MED = MBD;\ MFD = MCD$

$\Rightarrow \Delta MEF \sim \Delta MBC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{MF}{MC}$

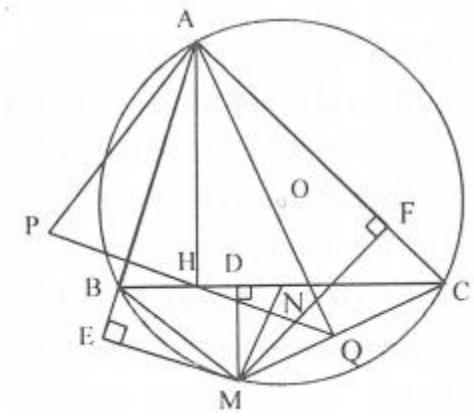
$ED = DF \Leftrightarrow \dfrac{DF}{NC} = \dfrac{MF}{MC}$

$\Leftrightarrow \Delta MDF \sim \Delta MNC\ (g.c.g)$

$\Leftrightarrow MDF = MNC \Leftrightarrow DCF = NMC$

$\Rightarrow$ M thuộc cung chứa góc BAC dựng trên đoạn NC

$\Rightarrow$ M thuộc giao điểm của cung chứa góc BAC dựng trên đoạn NC và cung nhỏ BC.



Nhận xét. Ngoài ta có thể dựa vào ví dụ 3, để giải.

b) Kẻ $AH \perp BC$, suy ra P, H, Q thẳng hàng (đường thẳng Simson)

$\Rightarrow$ PQ luôn đi qua điểm H cố định.

8.

Kẻ $BE \perp AD\ (E \in AD)$

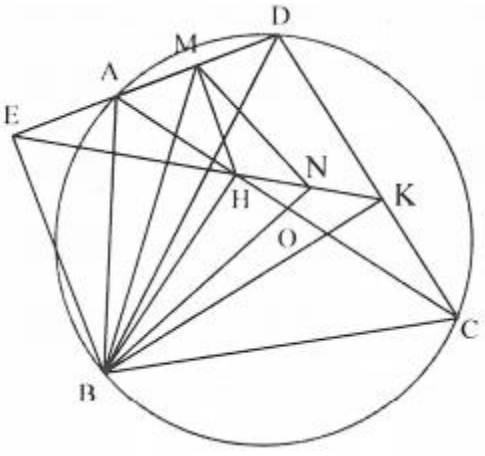
Ta có $BH \perp AC, BK \perp CD \Rightarrow$ E, H, K thẳng hàng.

Tứ giác BEDK nội tiếp $\Rightarrow EDB = EKB$

Tứ giác BHKC nội tiếp $\Rightarrow BHK + BCD = 180°$

Mặt khác $BAD + BCD = 180°$

$\Rightarrow BAD = BHK \Leftrightarrow \Delta BHK \sim \Delta BAD\ (g.g)$



Mà $MA = MD,\ NH = NK \Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta HNB$

$\Rightarrow AMB = BNH = BNE$

Do đó tứ giác BEMN nội tiếp.

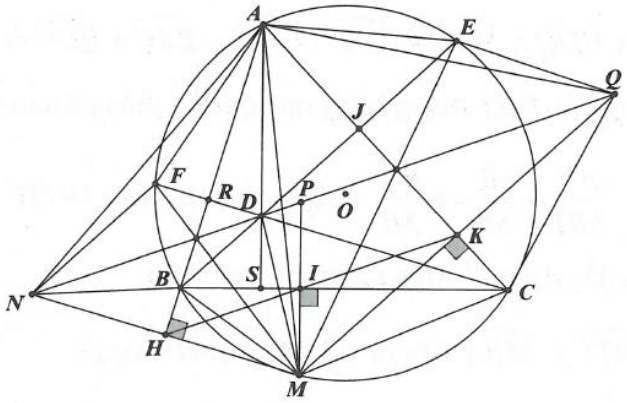
Mà $MEB = 90° \Rightarrow BNM = 90° \Rightarrow BN \perp MN$

b, Đường thẳng Steiner

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn. Gọi N,P,Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB,BC,CA. Chứng minh rằng N,P,Q thẳng hàng.

Chứng minh:

Gọi H,I,K theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB,BC,AC; thế thì H,I,K thẳng hàng (đường thẳng Simson). Dễ thấy IH là đường trung bình của tam giác MNP nên $IH//NP$.



Tương tự $IK//PQ$. Theo tiên đề Ơ-clit và do H,I,K thẳng hàng nên suy ra N,P,Q thẳng hàng. Đường thẳng H,I,K đi qua N,P,Q được

gọi là đường thẳng Steiner của điểm M.

Chú ý:

a, Ta có thể chứng minh ba điểm N,P,Q thẳng hàng bằng cách dùng phép vị tự: Các điểm N,P,Q lần lượt là ảnh của M trong phép vị tự tâm M tỉ số 2, mà H,I,K thẳng hàng nên N,P,Q cũng thẳng hàng. Như vậy đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson trong phép vị tự tâm M tỉ số 2.

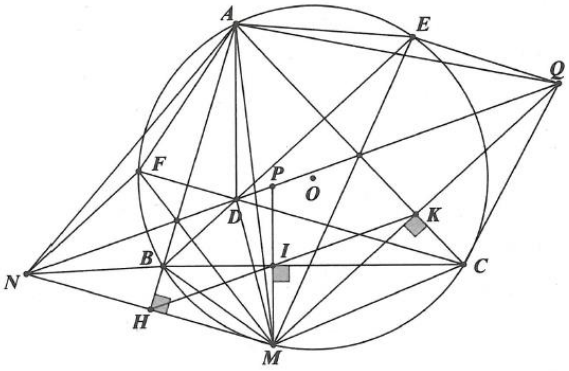
Ngoài ra liên quan đến đường thẳng Simson, Steiner ta cũng có các kết quả đẹp sau:

1. Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC. (Olympic Nhật Bản 1997)

Thật vậy, gọi D là trực tâm của tam giác $ABC; BD, CD$ cắt (O) lần lượt ở E,F. Dễ dàng chứng minh được E đối xứng với D qua AC, F đối xứng với D qua AB. Ta có $FDMN$ là hình thang cân và các tứ giác $IBHM$ $MBFC$ nội tiếp nên ta có: $DFM = DNM = MBC = IHM$ do đó $ND//IH$. Tương tự ta cũng có:

$DQ//IK$ mà H,I,K thẳng hàng nên N,P,Q thẳng hàng. Nói cách khác: Đường thẳng Steiner của điểm M đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Cách khác:



Gọi AS,BJ,CR là các đường cao của tam giác ABC, D là trực tâm.

Ta có $ANB = AMB$ (tính chất đối xứng).

Lại có $AMB = ADJ$ (cùng bù với SDJ).

Suy ra $ANB = ADJ$ nên $ADBN$ là tứ giác nội tiếp, do đó $NAB = NDB$.

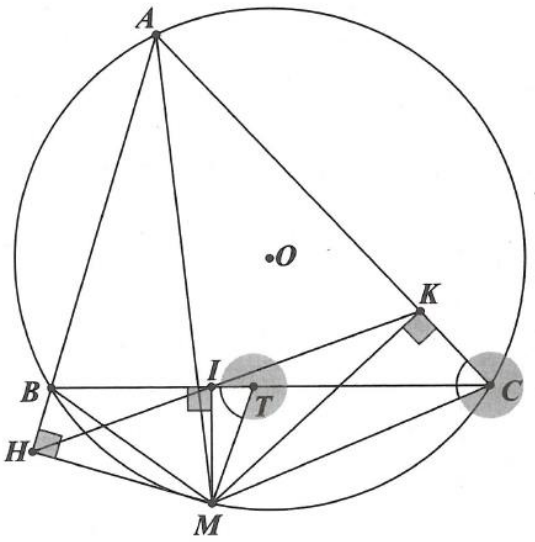
Mà $NAB = MAB \Rightarrow NDB = MAB.$

Chứng minh tương tự $CDQ = CAM$. Ta có $NDB + CDQ = MAB + CAM = BAC$

$\Rightarrow NDQ = NDB + BDC + CDQ = BAC + BDC = 180°.$

Vậy N,D,Q thẳng hàng hay đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.

2. $\dfrac{AB}{MH} + \dfrac{AC}{MK} = \dfrac{BC}{MI}$ (Olympic Toán Mỹ 1979)



Ta lấy điểm T trên cạnh BC sao cho $MTC = MBA$ suy ra $\Delta MBA \backsim \Delta MTC$ (g.g)

Do MH,MI là các đường cao tương ứng nên

Ta có: $\dfrac{AB}{MH} = \dfrac{TC}{MI}$. Từ cách dựng điểm T ta cũng

suy ra $\Delta MCA \backsim \Delta MTB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{MK} = \dfrac{TB}{MI}$

Cộng hai đẳng thức ta có: $\dfrac{AB}{MH} + \dfrac{AC}{MK} = \dfrac{BC}{MI}.$

Ta xét một số ví dụ:

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, nội tiếp (O). Các đường cao AN,BM,CP của tam giác cùng đi qua điểm H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC (Q khác B,C). Gọi E,F là điểm đối xứng với Q qua AB,AC.

a, Chứng minh: $MH.MA = MP.MN.$

b, Chứng minh: E,H,F thẳng hàng.

c, Gọi J là giao điểm của QE và AB, J là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí điểm Q để $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2015-2016).

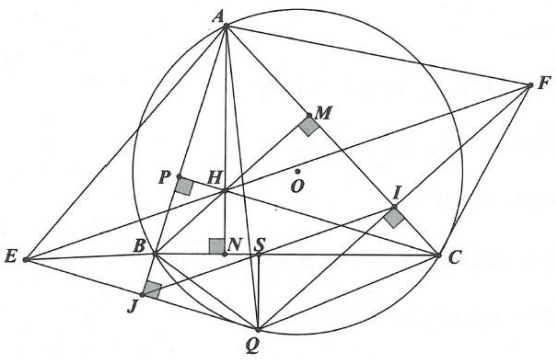
Giải:

Câu a) Dành cho bạn đọc.

Gọi S là chân đường vuông góc hạ từ Q lên BC. Ta có I,J,S thẳng hàng (Đường thẳng Simson của điểm Q).

Ta cũng có: E,H,F thẳng hàng.

(Tính chất đường thẳng Steiner đi qua trực tâm tam giác).



Ta cũng có: $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}=\frac{BC}{QS}$ nên $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{BC}{QS}$ nhỏ nhất. Tức là QS lớn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi Q là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Bài tập tương tự: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) các đường cao AE,CF cắt nhau tại điểm H. Gọi P là điểm thuộc cung nhỏ BC (P khác B,C), M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AB,AC.

a, Chứng minh: $OB\perp EF,\frac{BH}{BO}=\frac{2EF}{AC}$.

b, Đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn HP.

(Đề thi vào lớp 10 Trường THPT chuyên Phan Bội Châu- Nghệ An 2015).

Ví dụ 2.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O), gọi E là điểm trên cung nhỏ AB. Gọi H,K,P,Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC,CD,AE,DE. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,HK.

a, Chứng minh: AD,PQ,HK đồng quy.

b, Chứng minh: $MN\perp NB$.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán- ĐHSP TP Hồ Chí Minh năm 2015).

Lời giải:

Dựng $BT\perp AD$ thì T,H,K thẳng hàng (Đường thẳng Simson của điểm B).

Tương tự các điểm T,Q,P thẳng hàng.

Suy ra AD, PQ, HK đồng quy tại T.

Ta có:

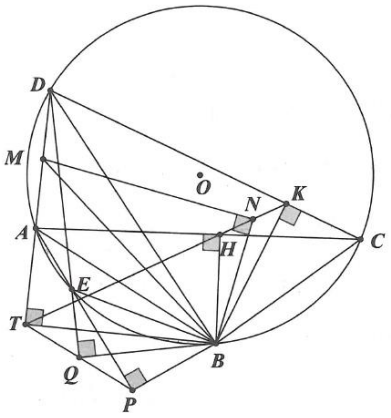
$ADB = HKB$ do $TDKB$ nội tiếp.

$HBK = HCK = ABD$ suy ra

$\Delta BAD \backsim \Delta BHK$

Suy ra $\Delta BAM \backsim \Delta BHN \Rightarrow BMA = BNH \Rightarrow$

$TMNB$ nội tiếp $\Rightarrow MNB = 90°$.



Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC nội tiếp $(O;R)$ có trực tâm là điểm H, D là điểm trên cung nhỏ BC, lấy E sao cho $CE//=AD$, gọi K là trực tâm tam giác ACE. Gọi P, Q là hình chiếu vuông góc của K trên BC, AB. Chứng minh: PQ đi qua trung điểm của HK.

(Trích đề thi HSG Quốc gia 2004)

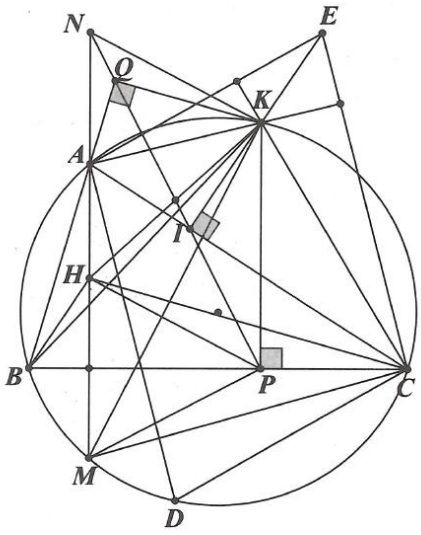
Giải:

Do K là trực tâm tam giác EAC và $ADCE$ là hình bình hành nên

$AKC = 180° - AEC = 180° - ADC$ suy ra tứ giác $ADCK$ nội tiếp. Nói cách khác K nằm trên (O).

Đường thẳng EK cắt AC tại I thì P, I, Q thẳng hàng (Đường thẳng Simson).

Do $KP//AH$ nên ta nghĩ đến tính chất hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



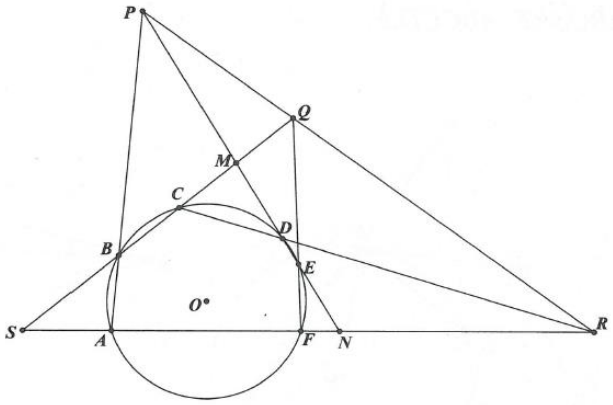
Giả sử HA cắt $(O), PQ$ lần lượt tại M, N do $KQBP$, $ABMK$ nội tiếp nên ta có:

$KPQ = KBQ = KMN$ suy ra $KPMN$ nội tiếp, suy ra $KPMN$ là hình thang cân. Mặt khác ta cũng có tính chất quen thuộc là H, M đối xứng nhau qua BC nên $MHP = PMH = KNH \Rightarrow KN//HP$ suy ra $HPKN$ là hình bình hành. Suy ra: PQ đi qua trung điểm của HK.

8. Đường thẳng Pascal

Cho 6 điểm A,B,C,D,E,F cùng thuộc một đường tròn (Có thể hoán đổi thứ tự). Gọi P,Q,R lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB,DE),(BC,EF),(CD,FA)$. Khi đó 3 điểm P,Q,R cùng nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Pascal.

Chứng minh:



Giả sử DE cắt BC tại M cắt AF tại N, BC cắt AF tại S.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến: ABP ta có:

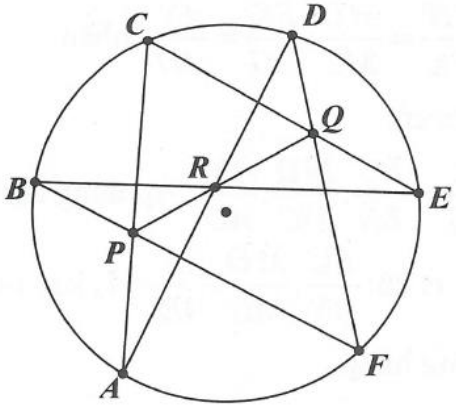
$\frac{PM}{PN}.\frac{AN}{AS}.\frac{BS}{BM}=1$ hay $\frac{PM}{PN}=\frac{AS}{AN}.\frac{BM}{BS}$ (1).

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến: CDR ta có: $\frac{RN}{RS}.\frac{CS}{CM}.\frac{DM}{DN}=1$ suy ra $\frac{RN}{RS}=\frac{CM}{CS}.\frac{DN}{DM}$ (2).

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến QEF ta có: $\frac{QM}{QS}.\frac{FS}{FN}.\frac{EN}{EM}=1$ suy ra $\frac{QS}{QM}=\frac{FS}{FN}.\frac{EN}{EM}$ (3).

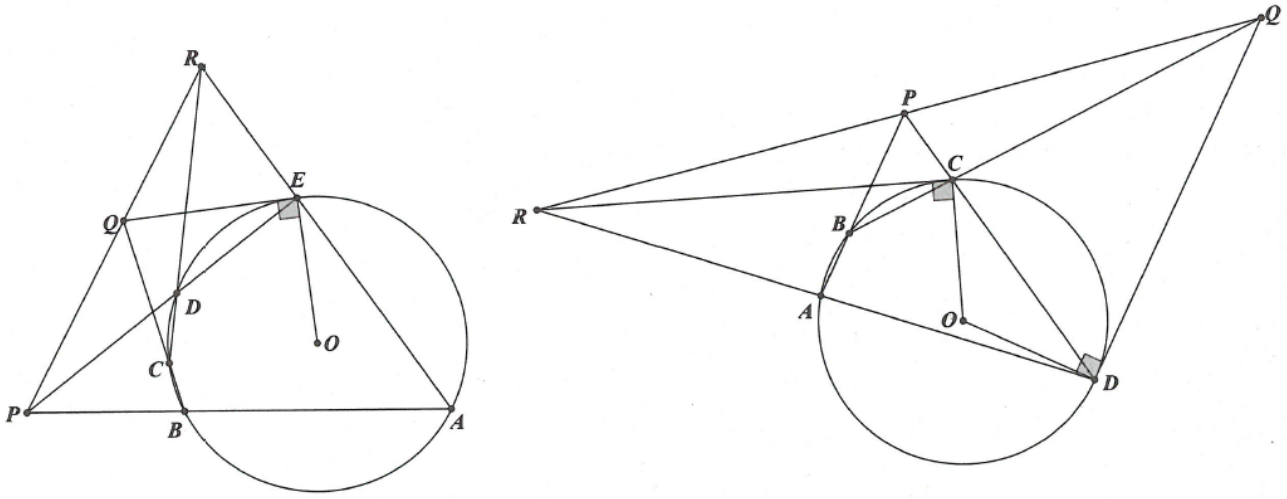
Mặt khác các tứ giác $ABCF,BCDE,AFED$ nội tiếp nên: $SB.SC=SA.SF$; $MC.MB=MD.ME$, $NF.NA=ND.NE$ (4). Từ (1),(2),(3),(4) ta suy ra $\frac{PM}{PN}.\frac{RN}{RS}.\frac{QS}{QM}=1$. Theo định lý đảo Menelaus ta suy ra P,Q,R thẳng hàng.

Đường thẳng PRQ ở trên được gọi là đường thẳng Pascal ứng với bộ điểm A,B,C,D,E,F. Bằng cách hoán vị các điểm A,B,C,D,E,F ta thu được rất nhiều các đường thẳng Pascal khác nhau, cụ thể ta có tới 60 đường thẳng Pascal. Chẳng hạn vẽ hình bên minh họa trường hợp các điểm $ACEBFD$.



Ngoài ta khi cho các điểm trùng nhau (khi đó lục giác suy biến thành tam giác, tứ giác, ngũ giác), ví dụ $E\equiv F$ thì cạnh EF trở thành tiếp tuyến của đường tròn tại E, ta còn thu thêm được rất nhiều

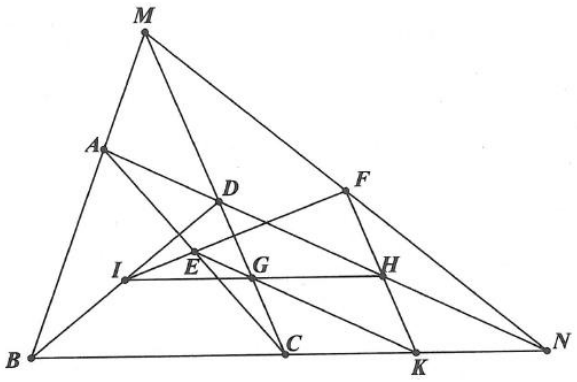
các đường thẳng Pascal khác nữa. Hình vẽ dưới đây minh họa trường hợp các điểm $ABCDEE, ABCCDD$.



9. Đường thẳng Gauss

Cho tứ giác $ABCD$ có AB, CD cắt nhau tại M, AD, BC cắt nhau tại N. Khi đó trung điểm các đoạn thẳng AC, BD, MN nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Gauss của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh:



Gọi I, E, F lần lượt là trung điểm của BD, AC, MN và K, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CN, CD, DN. Dễ thấy các điểm F, H, K thẳng hàng. E, G, K thẳng hàng. I, G, H thẳng hàng.

Ta có $FK \parallel MC, IH \parallel BC, EK \parallel DN$ nên $\frac{IG}{IH}=\frac{BC}{BN}, \frac{FH}{FK}=\frac{MD}{MC}, \frac{EK}{EG}=\frac{AN}{AD}$ nhân 3 đẳng thức ta có:

$\frac{IG}{IH}.\frac{FH}{FK}.\frac{EK}{EG}=\frac{BC}{BN}.\frac{MD}{MC}.\frac{AN}{AD}$. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CDN và đường thẳng đi qua B, A, M ta có: $\frac{BC}{BN}.\frac{MD}{MC}.\frac{AN}{AD}=1$, suy ra $\frac{IG}{IH}.\frac{FH}{FK}.\frac{EK}{EG}=1.$ Theo định lý Menelaus đảo ta suy ra I, E, F thẳng hàng.

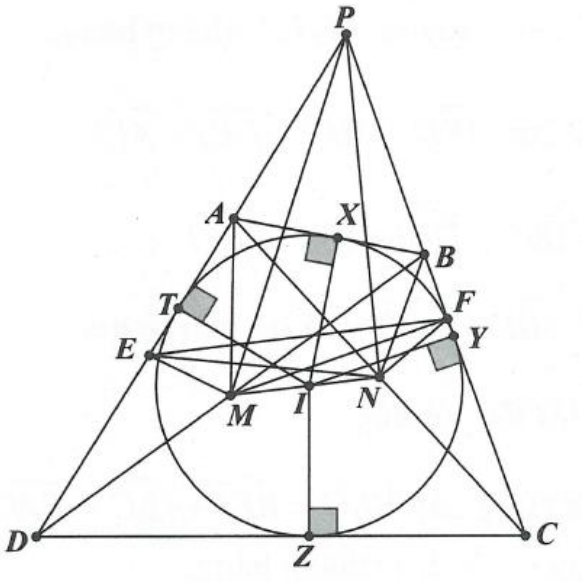
10. Đường thẳng Niutơn

Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (I), gọi M,N lần lượt là trung điểm của BD,AC. Khi đó 3 điểm I,M,N thẳng hàng. Đường thẳng đi qua I,M,N gọi là đường thẳng Niutơn của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh: (Ta chỉ xét trường hợp AB không song song với CD)

Gọi các tiếp điểm của (I) với AB,BC,CD,DA lần lượt là X,Y,Z,T thì $IX=IY=IZ=IT=r$.

Giả sử AD,BC cắt nhau tại P, trên PD lấy E sao cho $PE=AD$, trên PC lấy F sao cho $PF=BC$ thế thì:



$S_{MAD}+S_{MBC}=\frac{1}{2}S_{DAB}+\frac{1}{2}S_{DBC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

$S_{NAD}+S_{NBC}=\frac{1}{2}S_{CAD}+\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Từ đó suy ra:

$S_{MAD}+S_{MBC}=S_{NAD}+S_{NBC}$. Theo cách xác định E,F ta có: $S_{MAD}=S_{MPE},S_{MBC}=S_{MPF},S_{NAD}=S_{NPE},$ $S_{NBC}=S_{NPF}$

suy ra: $S_{MPE}+S_{MPF}=S_{NPE}+S_{NPF}$ hay $S_{MEPF}=S_{NEPF}$ (1).

Lại có: $S_{IAD}=S_{IPE},S_{IBC}=S_{IPF}\Rightarrow S_{IAD}+S_{IBC}=S_{IPE}+S_{IPF}=S_{IEPF}$ nhưng

$S_{IAD}+S_{IBC}=\frac{1}{2}S_{AXYT}+\frac{1}{2}S_{DZYT}+\frac{1}{2}S_{IZCY}+\frac{1}{2}S_{XIYB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ suy ra $S_{MEPF}=S_{IEPF}$ (2). Từ (1), (2) ta suy ra

$S_{MEPF}=S_{NEPF}=S_{IEPF}$ hay $S_{MEF}=S_{NEF}=S_{IEF}\Leftrightarrow MN//EF,MI//EF$ suy ra M,N,I thẳng hàng.

11. Định lý Brocad

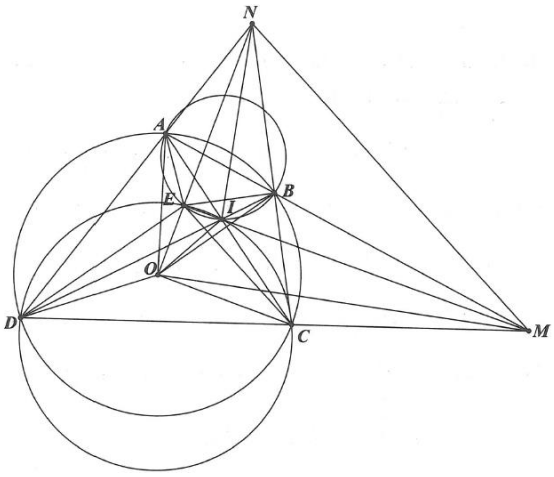
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là giao điểm của AB và CD; N là giao điểm của AD và BC; I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác OMN.

Chứng minh:

Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI và CDI.

Trước tiên ta chứng minh:

E,I,M thẳng hàng:



Thật vậy giả sử MI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB tại E' thì $MI.ME' = MB.MA = MC.MD$ suy ra 4 điểm D, E', I, C nằm trên một đường tròn suy ra $E' \equiv E$ suy ra M, I, E thẳng hàng.

Ta có: $AED = 360° - DEI - AEI$

$= 180° - DEI + 180° - AEI$

$= ABD + ACD = AOD$ nên tứ giác $AEOD$ nội tiếp.

Ta cũng có: $BEC = BEI + IEC = BAC + BDC = BOC$ nên tứ giác $BEOC$ nội tiếp. Từ đó ta cũng suy ra N, E, O thẳng hàng.

Ta có: $OEM = OEC + CEM = OBC + BDC = \dfrac{180° - BOC}{2} + BDC = 90°$ suy ra $ME \perp ON$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $NI \perp OM$ suy ra I là trực tâm của tam giác OMN.

Định lý Brocard là một công cụ hình học khá mạnh để chứng minh các quan hệ vuông góc và được sử dụng rất nhiều trong các kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên cũng như kỳ thi học sinh giỏi tỉnh thành, quốc gia.

Có rất nhiều cách để chứng minh, nhưng cách giải trên là thuần túy và phù hợp nhất với bậc THCS. Sau đây ta sẽ xét một số ứng dụng của định lý này:

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC không cân có 3 góc nhọn, nội tiếp (O), các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại điểm H, các đường thẳng A_1C_1, AC cắt nhau tại D, gọi X là giao điểm của BD với (O).

a, Chứng minh: $DX.DB = DC_1.DA_1$.

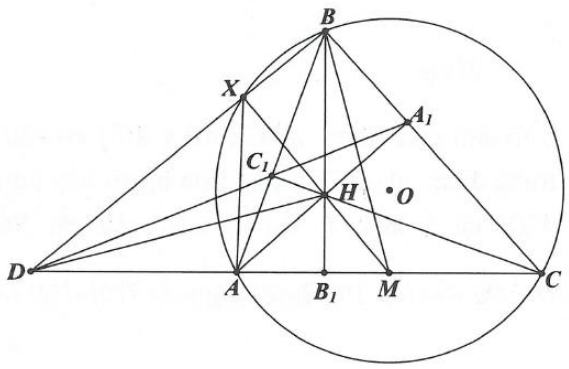
b, Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh: $DH \perp BM$.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên ĐHSP – Năm học 2013-2014)

Giải:

a, Các tứ giác $BXAC, ACA_1C_1$ nội tiếp nên ta có: $DX.DB = DA.DC = DC_1.DA_1$.

b, Xét tứ giác AC_1A_1C nội tiếp đường tròn tâm M đường kính AC, hai đường chéo AA_1, CC_1 cắt nhau tại H. Theo định lý Brocard ta có H là trực tâm tam giác BMD suy ra $DH \perp BM$.



Ví dụ 2.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại E, các tia AD, BC cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF tại M. Chứng minh rằng:

a, Ba điểm E, M, F thẳng hàng và bốn điểm A, D, M, E nằm trên một đường tròn.

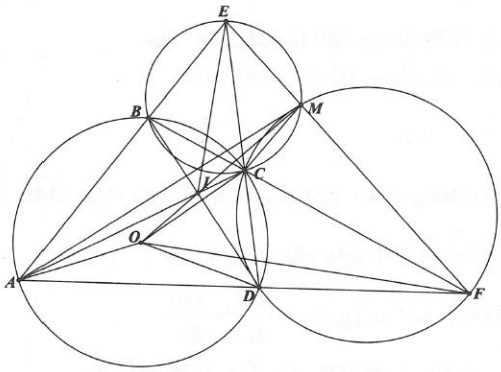
b, $OM \perp EF$.

c, Chứng minh đường thẳng OM đi qua giao điểm I của hai đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD$.

(Đề thi học sinh giỏi toán TP HCM- 2013)

Phân tích định hướng giải:

a, Để chứng minh E, M, F thẳng hàng ta chứng minh: $EMC + CMF = 180°$. Ta tìm cách quy về hai góc đối nhau trong tứ giác nội tiếp.



Ta có $EMC + CMF = ABC + CDA = 180°$.

Ta có $DMF = DCF = DAB$ suy ra 4 điểm A, D, M, E cùng nằm trên một đường tròn.

b, Từ đó ta dễ chứng minh được các tứ giác $ABMF, BDFE$ nội tiếp. Xét tứ giác $OAMC$ ta có: $CMA = 180° - CMF - AME = 180° - ADC - ADC = 180° - 2ADC = 180° - AOC$ suy ra tứ giác $OACM$ nội tiếp. Ta có $OMF = OMA + AMB = OMA + ABF = OMC + CME = OME$ suy ra $OME = OMF = 90°$.

Theo định lý Brocard ta có: $OI \perp EF$ suy ra O, I, M thẳng hàng.

Ví dụ 3.

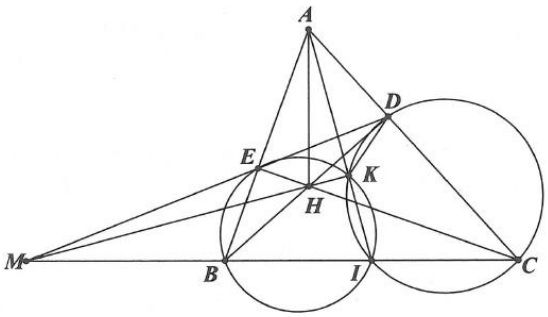
Cho tam giác nhọn ABC $\left(AB<AC\right)$ có các đường cao BD,CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDI tại K khác I. Đường thẳng DE cắt BC tại M. Chứng minh: M,H,K thẳng hàng.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Nguyễn Trãi- Hải Dương năm 2008).

Lời giải:

Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác $BEDC$ ta có H là trực tâm của tam giác AMI nên $MH\perp AI$.(1)

Mặt khác ta cũng dễ chứng minh được: A,K,I thẳng hàng (Xem ví dụ 1)



Và $EKD=360°-EKI-DKI=ABC+ACB=180°-BAC$ suy ra $AEKD$ nội tiếp, suy ra $AKH=90°$. Kết hợp với (1) ta suy ra M,H,K thẳng hàng.

12. Định lý Ptolemy.

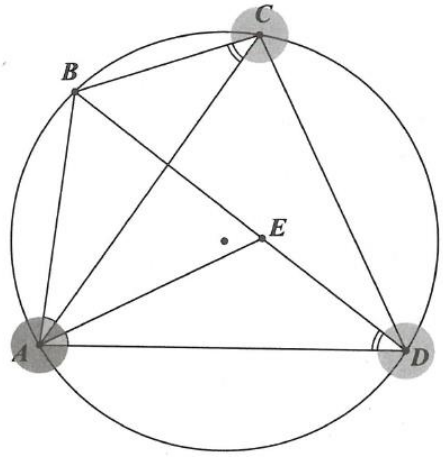
Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $\left(O\right)$. Khi đó ta có: $AB.CD+AD.BC=AC.BD.$

Chứng minh:

Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $DAE=BAC$. Ta có $DAE=BAC$ và $ADE=ACB$ (cùng chắn AB) nên $\Delta ADE\backsim\Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$

$\Rightarrow AD.BC=AC.DE$ (1). Do $DAE=CAB$ nên $DAC=EAB$, lại có $ABE=ACD$ (cùng chắn AD) $\Rightarrow\Delta ABE\backsim\Delta ACD$ (g.g)

$\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}\Rightarrow AB.CD=AC.BE$ (2).

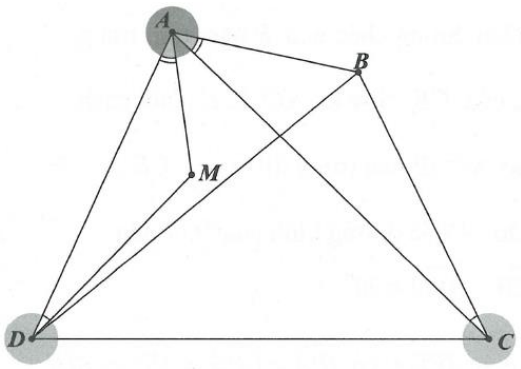


Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD+AD.BC=AC\left(BE+DE\right)=AC.BD.$

13. Định lý Ptolemy cho tứ giác bất kỳ

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $AB.CD+AD.BC\geq AC.BD.$

Chứng minh:



Bên trong tứ giác $ABCD$ lấy điểm M sao cho

$MAD = CAB$ và $MDA = ACB$

Ta có: $\Delta ADM \backsim \Delta ACB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DM}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DM$ (1)

Do $MAD = CAB$ nên $DAC = MAB.$

Xét tam giác ADC và MAB, có: $DAC = MAB$ (chứng minh trên)

$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$ (do $\Delta AMD \backsim \Delta ACB$) nên $\Delta ADC \backsim \Delta AMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \dfrac{DC}{MB} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB.CD = AC.MB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC\left(BM + DM\right) \geq AC.BD.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi khi M nằm trên đường chéo BD, lúc đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Bây giờ ta sẽ xét một số ví dụ tiêu biểu vận dụng định lý Ptolemy

Ví dụ 1.

Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm I nằm trên đoạn thẳng AO, I khác điểm A, O. Đường thẳng qua I vuông góc với AB cắt $\left(O\right)$ tại C, D. Gọi E là điểm nằm trên $\left(O\right)$ sao cho D là điểm chính giữa cung AE. Gọi K là giao điểm của $AE, CD.$

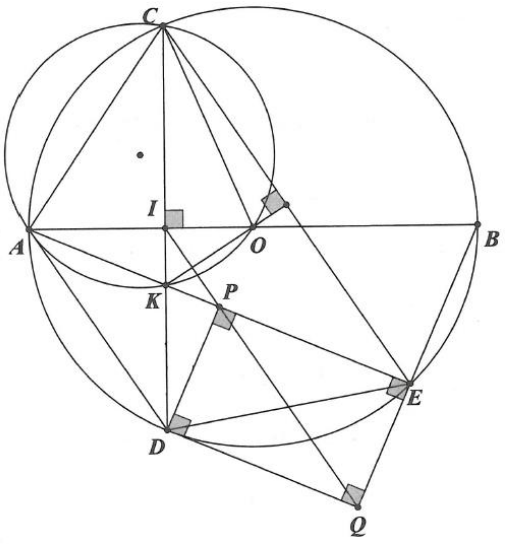
a, Chứng minh: OK đi qua trung điểm của $CE.$

b, Đường thẳng I song song với CE cắt AE, BE lần lượt tại P, Q. Chứng minh: $DPEQ$ là hình chữ nhật.

c, Tìm vị trí điểm I trên đoạn thẳng AO sao cho $KC = KA + KO.$

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán- Tin Tp Hà Nội năm 2015).

Giải:



a, Từ giả thiết ta suy ra $AC = AD = DC$

Suy ra tứ giác $CADE$ là hình thang cân có hai đáy là AD, CE. K là giao điểm của hai đường chéo nên K nằm trên trung trực của CE. Suy ra $KO \perp CE$. Nói cách khác KO đi qua trung điểm của CE.

b, Do AB là đường kính của (O) nên $AEB = AEQ = 90°$

Tứ giác $IPDA$ có $IPA = EPQ = AEC = ADI$ nên $IPDA$ là tứ giác nội tiếp suy ra $APD = 90°$ từ đó dễ dàng suy ra O, P, D thẳng hàng, $IPDA$ là hình thang cân và $PD // CE$. Tứ giác $DPEQ$ có $DEQ = PDE = PDA = DPQ$ nên $DPEQ$ là tứ giác nội tiếp, kết hợp $DPE = AEQ = 90°$ suy ra $DPEQ$ là hình chữ nhật.

c, Xét tứ giác $COKA$ ta có: $COA = sđ\ AC = \frac{1}{2}\left(sđ\ AC + DE\right) = CKA$. Từ đó suy ra $COKA$ là tứ giác nội tiếp. Áp dụng định lý Ptolemy ta có: $KA.OC + AK.KO = CK.AO$ hay $KA + \frac{AC}{AO}.KO = CK$

như vậy để $KC = KA + KO$ thì điều kiện là $\frac{AC}{AO} = 1 \Leftrightarrow AC = AO$ hay ACO là tam giác đều suy ra I phải là trung điểm của AO.

Ví dụ 2.

Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, điểm M chuyển động trên cung nhỏ BC.

a, Chứng minh: $MA = MB + MC$.

b, Tìm GTLN, GTNN của $P = MA + MB + MC$.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường chuyên Đại học Vinh 2006).

c, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng năm 2009)

Lời giải:

a, Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABMC$ ta có:

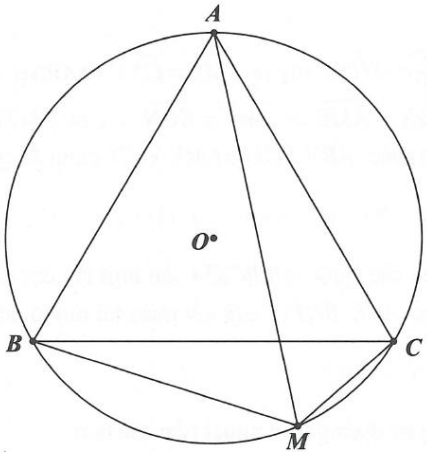
$MA.BC = AB.MC + AC.MB.$

Do $AB = BC = CA.$ Suy ra $MA = MB + MC.$

b, Ta có: $P = MA + MB + MC = 2MA.$

P nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C.$

P lớn nhất khi và chỉ khi MA là đường kính của $(O).$



c, Với mọi số thực dương x, y ta có: $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{\frac{1}{xy}} = 4.$ Nên ta suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$ Áp dụng vào bài toán ta có: $\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC} \geq \frac{4}{MB+MC} = \frac{4}{MA}.$ Do $MA \leq 2R$ nên ta suy ra $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB} \geq \frac{4}{2R} = 2R.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AM là đường kính của $(O).$ Hay M là điểm chính giữa cung nhỏ $BC.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Chứng minh rằng nếu điểm *P* nằm trên cung nhỏ AB của đường tròn ngoại tiếp hình vuông *ABCD* thì

$$\frac{PA+PC}{PB+PD} = \frac{PD}{PC}$$

2. Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh liên tiếp bằng *a, b, c, d* và các đường chéo bằng *p, q.* Chứng minh rằng: $pq \leq \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}.$

3. Cho tam giác *ABC* không đều. Gọi *I* và *O* lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng $AIO \leq 90°$ khi và chỉ khi $AB + AC \geq 2BC$

4. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn *(O).*

Chứng minh rằng: $\frac{AC}{BD} = \frac{BC.CD + AB.BD}{BC.BA + DC.DA}$

5. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt *A* và *B* (O_1 và O_2 nằm về hai phía của *AB*). Một cát tuyến *d* qua *A* cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại các điểm *C, D* khác *A (A* thuộc đoạn *CD).* Tiếp tuyến tại *C* của (O_1) cắt tiếp tuyến tại *D* của (O_2) ở *M.* Tìm vị trí của *d* sao cho $\frac{MC}{R_1}+\frac{MD}{R_2}$ đạt giá trị

lớn nhất.

6. Cho tam giác *ABC* có *I* là tâm đường tròn nội tiếp, *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm *G*. Giả sử rằng $OIA = 90°$. Chứng minh rằng *IG* song song với *BC*.

7. Cho tam giác *ABC* với $BC > CA > AB$ nội tiếp trong đường tròn *(O)*. Trên cạnh *BC* lấy điểm *D* và trên tia *BA* lấy điểm *E* sao cho $BD = BE = CA$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *BDE* cắt cạnh *AC* tại điểm *P* đường thẳng *BP* cắt đường tròn *(O)* tại điểm thứ hai *Q*.

a) Chứng minh rằng tam giác *AQC* đồng dạng với tam giác *EPD*.

b) Chứng minh rằng $BP = AQ + CQ$.

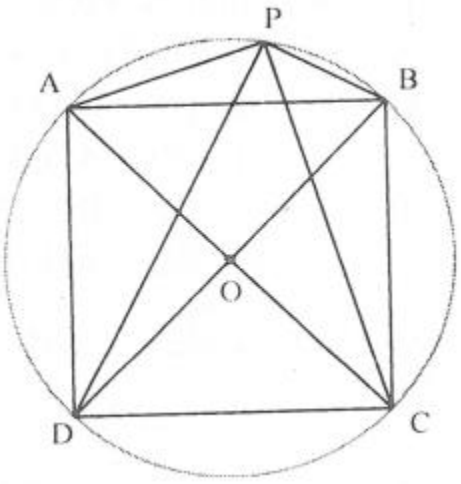
(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2011-2012)

8. Cho hình bình hành *ABCD*. Một đường tròn đi qua *A* cắt các đoạn thẳng *AB, AC, AD* lần lượt tại điểm *P, Q, R* khác *A*. Chứng minh rằng: $AB.AP + AD.AR = AQ.AC$.

9. Giả sử *M, N* là các điểm nằm trong tam giác *ABC* sao cho $MAB = NAC$ và $MBA = NBC$. Chứng minh rằng: $\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI-ĐÁP SỐ

1. Đặt độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ là a thì $AC = BD = a\sqrt{2}.$



Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác $PADC$, ta có:

$PD.AC = PA.CD + PC.AD$

$\Rightarrow PD.a\sqrt{2} = a(PA + PC)\ (1).$

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác $PBCD$, ta có:

$PC.BD = PB.CD + PD.BC$

$\Rightarrow PC.a\sqrt{2} = a(PB + PD)\ (2).$

Từ (1) và (2), suy ra: $\dfrac{PA + PC}{PB + PD} = \dfrac{PD}{PC}$

2. Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp thì ta có: $ac + bd = pq.$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

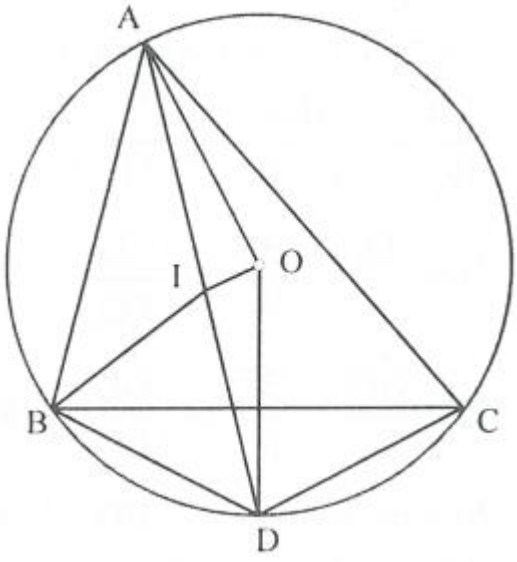
$(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \Rightarrow p^2q^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

Suy ra: $pq \le \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$. Dấu bằng xảy ra khi: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

3. Kéo dài AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $D.$

Ta có: $BAD = DAC \Rightarrow DB = DC.$

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên:



$BID = IBA + BAI = \dfrac{1}{2}(B + A)$

$IBD = IBC + CBD = \dfrac{1}{2}(B + A)$

Suy ra ΔDIB cân tại D nên $DI = DB.$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác $ABDC$ nội tiếp:

$AD.BC = AB.CD + AC.BD$

$= BD(AB + AC) = DI.(AB + AC).$

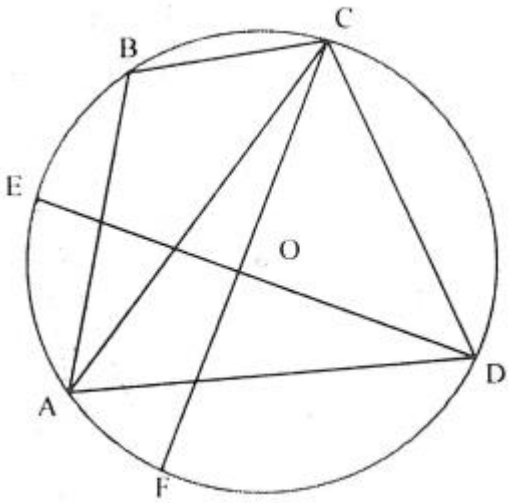
Suy ra: $\dfrac{AD}{ID} = \dfrac{AB + AC}{BC}$

Do ΔAOD cân tại O nên $AIO \le 90°$

$\Leftrightarrow AI \ge ID \Leftrightarrow AI + ID > 2.ID \Leftrightarrow AD \ge 2.ID \Leftrightarrow 2 \le \dfrac{AD}{ID} = \dfrac{AB+AC}{BC}$

$\Leftrightarrow AB + AC \ge 2BC$.

4. Lấy *E, F* thuộc đường tròn sao cho $CDB = ADE,\ ADB = DCF.$



Khi đó $AE = BC,\ FD = AB,\ EC = AB,\ BF = AD.$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho hai tứ giác nội tiếp *AECD* và *BCDF* ta có:

$$AC.ED = AE.CD + AD.EC$$
$$= BC.CD + AD.AB \quad (1)$$
$$BD.CF = BC.DF + BF.CD$$
$$= BC.AB + AD.CD \quad (2)$$

Mặt khác: $CDE = CDB + BDE$

$= ADE + BDE = ADB = FCD$

Do đó: $FDC = FDE + CDE = FCE + FCD = ECD$ suy ra $ED = FC.$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\dfrac{BC.CD + AB.BD}{BC.BA + DC.DA} = \dfrac{AC.ED}{BD.CF} = \dfrac{AC}{BD}$

5. Hạ *BH* vuông góc với *MD.*

Ta có: $MCA = CBA;\ MDA = DBA \Rightarrow MCA + MDB = CBD;$

$\Rightarrow CMD + CBD = CMD + MCA + MDB = 180°$

Suy ra *BCMD* là tứ giác nội tiếp.

Áp dụng định lý Ptôlêmê ta có: $MC.BD + MD.BC = MB.CD \quad (1)$

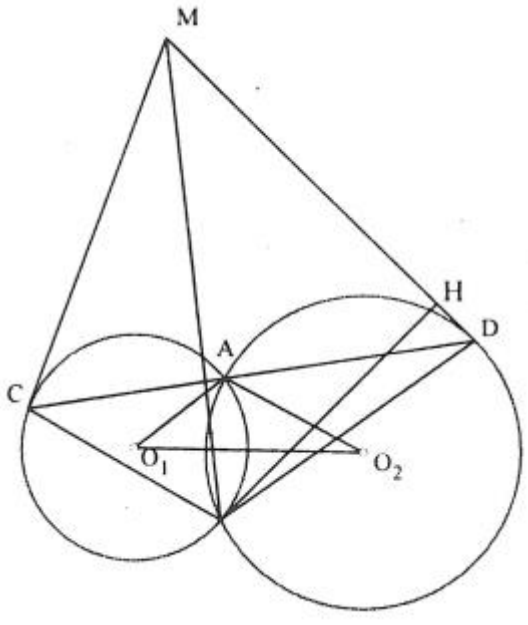
Do $\Delta CBD \backsim \Delta O_1AO_2$ nên:

$$\frac{BC}{O_1A} = \frac{BD}{O_2A} = \frac{CD}{O_1O_2}$$

Hay $\dfrac{BC}{R_1} = \dfrac{BD}{R_2} = \dfrac{CD}{O_1O_2}$

Đặt $\dfrac{BC}{R_1} = \dfrac{BD}{R_2} = \dfrac{CD}{O_1O_2} = k$

Suy ra: $BC = k.R_1,\ BD = k.R_2,\ CD = kO_1O_2$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra:

$MC.R_2 + MD.R_1 = MB.O_1O_2$ hay $\frac{MC}{R_1} + \frac{MD}{R_2} = \frac{MB.O_1O_2}{R_1R_2}$

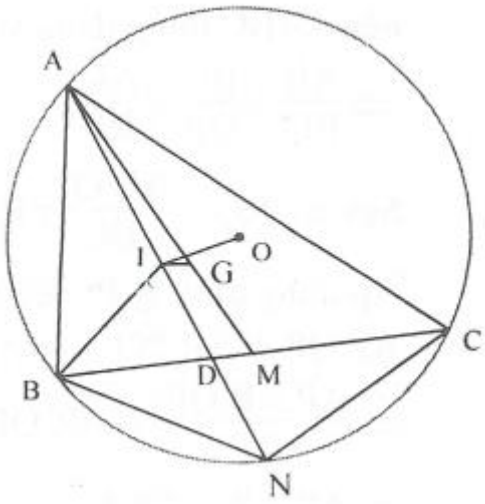
Do đó $\frac{MC}{R_1} + \frac{MD}{R_2}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi *MB* lớn nhất

Tam giác *BMH* luôn tự đồng dạng với chính nó khi *d* thay đổi, nên *BM* lớn nhất khi và chỉ khi *BH* lớn nhất, mà $BH \le BD \le 2.R_2$.

Dấu bằng xảy ra khi *B* và *D* đối xứng qua O_2, khi đó $d // O_1O_2$

6. Kéo dài *AI* cắt *BC* và *(O)* tại *D; N.*

Khi đó *N* là điểm chính giữa cung *BC* (không chứa *A*).



Ta có: $BN = NC(1)$.

Lại có: $IBN = BIN \Rightarrow BN = IN$ (2)

Do $OI \perp AN$ suy ra $IA = IN = \frac{1}{2}AN$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow BN = NC = IN = IA$ (4)

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp *ABNC* ta có:

$BN.AC + AB.NC = BC.AN$

Từ (4) $\Rightarrow BN(AC + AB) = 2BN.BC \Rightarrow AC + AB = 2BC$ (5)

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác *ABD, ACD* và (5) ta có:

$\frac{AB}{BD} = \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB + AC}{BD + CD} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2$

Vậy $\frac{IA}{ID} = 2$ (6).

Mặt khác *G* là trọng tâm của tam giác suy ra $\frac{AG}{GM} = 2$ (7).

Từ (6),(7) $\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{AG}{GM} = 2$

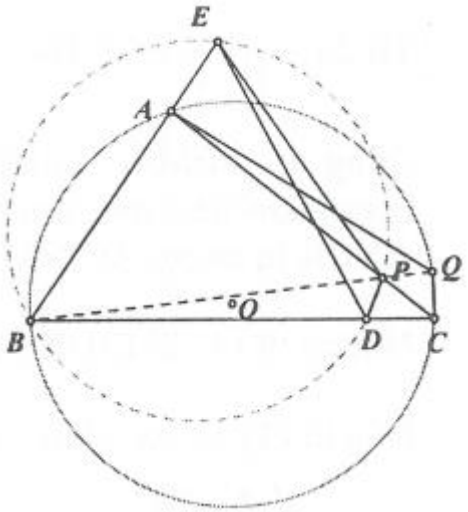
Suy *IG* song song với *BC* (định lý Ta-Lét đảo).

7.

a) Do các tứ giác *BEPD, ABCQ* nội tiếp, nên $EDP = EBP = ABQ = ACQ$ (1) và

$EPD = 180° - EBD$

$= 180° - ABC = AQC$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra ΔAQC œ ΔEPD.

Điều phải chứng minh.

b) Theo kết quả phần a, ta có $\frac{QA}{PE} = \frac{QC}{PD} = \frac{CA}{DE} = \frac{QA+QC}{PE+PD}$

Suy ra $(QA+QC).DE = (PE+PD).AC = (PE+PD).BD$ (3)

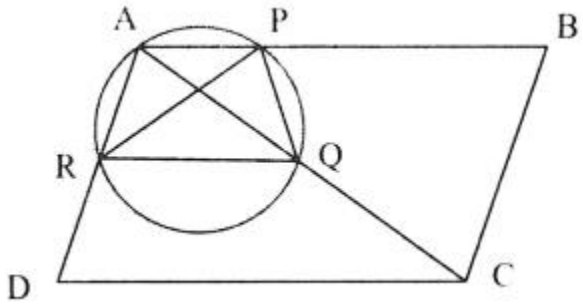
Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác *BEPD* nội tiếp, ta được

$BP.ED = BE.PD + EP.BD = (PD+PE).BD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(QA+QC).ED = BP.ED$ hay $QA+QC = BP$ (điều phải chứng minh).

8. Vì $ACB = CAD = RPQ$ và $BAC = PRQ$ nên ΔABC đồng dạng với ΔRQP (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{AC}{RP}$



Suy ra; $RQ = \frac{AB.QP}{BC}; RP = \frac{AC.PQ}{BC}$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác *APQR* ta được:

$AP.QR + AR.PQ = AQ.PR$

$\Rightarrow \frac{AP.AB.QP}{BC} + AR.QP = AQ.\frac{AC.QP}{BC}$

$\Rightarrow AP.AB + AR.QP = AQ.AC$

$\Rightarrow AP.AB + AR.AD = AQ.AC$ (vì $BC = AD$)

9

Lấy điểm *K* trên đường thẳng *BN* sao cho $BCK = BMA$

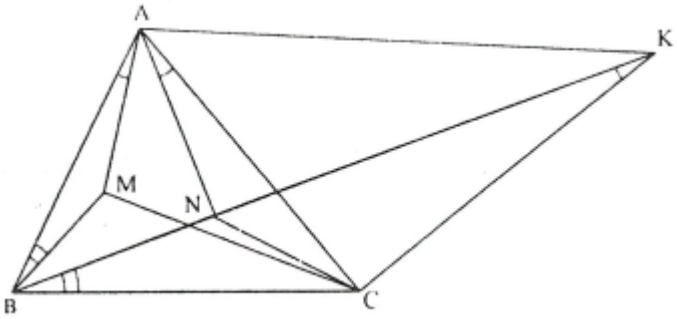
Khi đó $\Delta BMA \backsim \Delta BCK$

Suy ra $\frac{AB}{BK} = \frac{BM}{BC} = \frac{AM}{CK}(1)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{MB}=\dfrac{BK}{BC}$

Mặt khác, dễ thấy $ABK=MBC$

Từ đó $\Delta ABK\backsim\Delta MBC,$ dẫn đến $\dfrac{AB}{MB}=\dfrac{BK}{BC}=\dfrac{AK}{CM}(2)$



Cũng từ $\Delta BMA\backsim\Delta BCK$ ta có $CKN=MAB=NAC,$ suy ra *A, N, C, K* cùng nằm trên một đường tròn. Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp *ANCK* ta được: $AC.NK=AN.CK+CN.AK\ (3)$

Nhưng từ (1) và (2) thì: $CK=\dfrac{AM.BC}{BM};AK=\dfrac{AB.CM}{BM};BK=\dfrac{AB.BC}{BM}$

Nên từ (3) $\Leftrightarrow AC.\left(BK-BN\right)=AN.CK+CN.AK$

$\Leftrightarrow AC.\left(\dfrac{AB.BC}{BM}-BN\right)=\dfrac{AN.AM.BC}{BM}+\dfrac{CN.AB.CM}{BM}$

$\Leftrightarrow AB.AC.BC=AN.AM.BC+CN.AB.CM+BN.BM.AC$

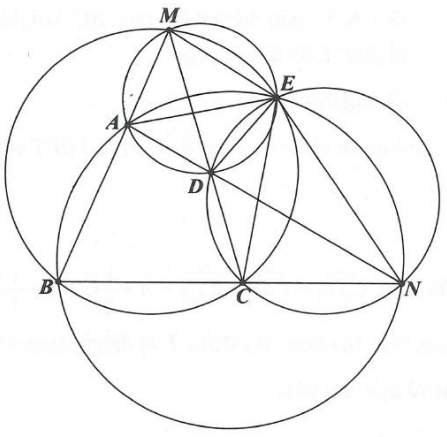
$\Leftrightarrow \dfrac{AM.AN}{AB.AC}+\dfrac{BM.BN}{BA.BC}\dfrac{CM.CN}{CA.CB}=1$

14. Điểm Miquel- Định lý Miquel

a, Điểm Miquel của tứ giác toàn phần:

Cho tứ giác $ABCD$ có cạnh AB,CD cắt nhau tại M, cạnh AD,BC cắt nhau tại N. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN,BCM,MAD,NCD cùng đi qua một điểm E (Gọi là điểm Miquel của tứ giác $ABCD$).

Chứng minh:



Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác MAD,NCD cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là E (khác D). Ta chứng minh E thuộc đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBC,NAB

Tức là chứng minh các tứ giác $MBCE$,$NBAE$ nội tiếp. Thật vậy tứ giác $DCNE$ nội tiếp nên: $MDE=CNE.$ Tứ giác $ADEM$ nội tiếp nên:

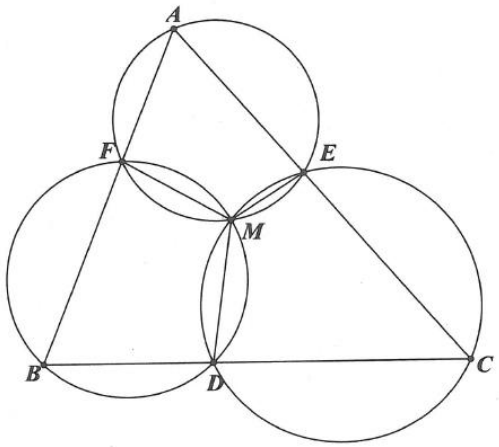
$MAE = MDE$ suy ra $MAE = CNE \Rightarrow ABNE$ nội tiếp. Mặt khác ta cũng có: $ECN = EDN$ và $EDN = AME \Rightarrow AME = ECN$ suy ra $BMEC$ nội tiếp. Như vậy các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN, BCM, MAD, NCD cùng đi qua một điểm E.

b, Định lý Miquel đối với tam giác:

Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm F, D, E. Khi đó ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFE, BDF, CED cắt nhau tại một điểm M (Gọi là điểm Miquel trong tam giác ABC).

Chứng minh:

Giả sử đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF và BDF cắt nhau tại M.



Ta có: $EMD = 360° - EMF - DMF$

$= 180° - FAE + 180° - EMF = A + B = 180° - C.$

Vậy $EMDC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFE, BDF, CED cắt nhau tại một điểm M.

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC có B, C là góc nhọn và $BAC = 60°$. Các đường phân giác trong AA_1, BB_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I.

a, Chứng minh: AB_1IC_1 là tứ giác nội tiếp.

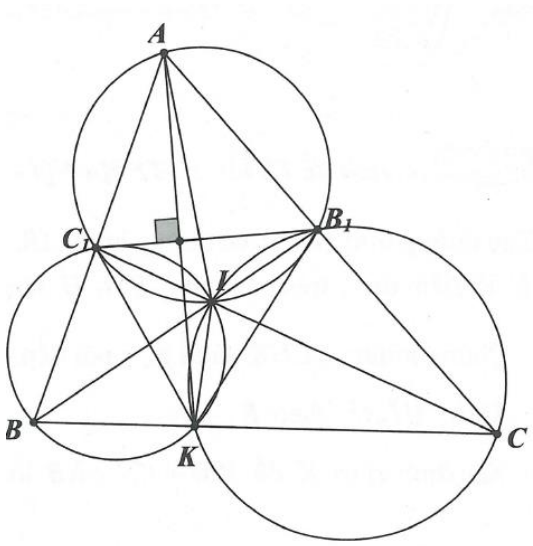
b, Gọi K là giao điểm thứ 2 của BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I. Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

c, Chứng minh: $AK \perp B_1C_1$.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10- Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Giải:

Ta thấy $C_1IB_1 = C_1IA + B_1IA = A + \frac{1}{2}C + A + \frac{1}{2}B = 120° + \frac{1}{2}\left(B + C\right) = 180°$. Nên AB_1IC_1 là tứ giác nội tiếp. Ta cũng thấy điểm I là điểm Miquel của tam giác ABC nên suy ra tứ giác $CKIB_1$ là tứ giác nội tiếp.



Ta có: $AB_1K = AB_1I + IB_1K = BC_1I + ICB$

$= 180° - B$ nên tứ giác $ABKB_1$ là tứ giác nội tiếp.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $BC_1B_1C, ACKC_1$ là các tứ giác nội tiếp.

Ta có:

$$AC_1B_1 + C_1AK = AIB_1 + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\left(A + B + C\right) = 90°.$$

Suy ra $AK \perp C_1B_1$.

Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh theo cách:

Chỉ ra tam giác AB_1K cân tại B_1 có B_1C_1 là đường phân giác nên cũng là đường cao.

Chuyên đề 8.ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ-ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

CHỦ ĐỀ 1.ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ

A. Kiến thức cần nhớ

Ptôlêmê là nhà khoa học cổ Hy Lạp, sống vào thế kỷ 2. Từ năm 127 đến năm 151 sau công nguyên, ông sống tại Alechxanđri (Ai Cập), nghiên cứu toán học, thiên văn học và địa lý. Ông là tác giả của thuyết hệ vũ trụ địa tâm; là mô hình cấu trúc vũ trụ đầu tiên, khẳng định một cách sai lầm rằng, các thiên thể chuyển động trên những vòng tròn có tâm là tâm trái đất nằm yên, là cơ sở cho thiên văn học trong một thời gian dài cho đến thế kỷ 17, trước khi thuyết hệ nhật tâm của Kôpecnich ra đời.

Công trình toán học của ông khá phong phú, sau đây là một định lý mang tên ông.

Định lý. *Trong một tứ giác nội tiếp thì tích hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối diện.*

Giải

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O).

Ta cần chứng minh: $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Giả sử $DBC \geq ABD$

Lấy điểm M trên đoạn AC *sao cho* $MBC = ABD$

Suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta DBC$

Suy ra $\frac{AB}{BD} = \frac{AM}{CD}$

$\Rightarrow AB.CD = BD.AM$

$\Delta CBM \backsim \Delta DBA$

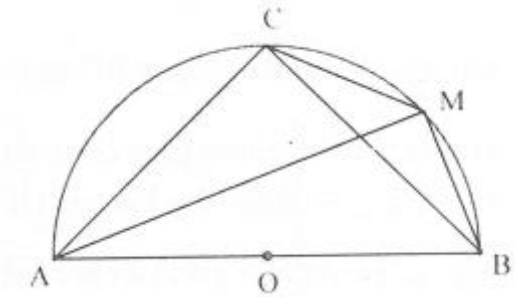
Suy ra $\frac{BC}{BD} = \frac{CM}{AD}$

$\Rightarrow AD.BC = BD.CM$

Do đó $AB.CD + AD.BC = BD(AM + CM) = AC.BD.$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính *AB* có *C* là điểm chính giữa. Gọi *M* là điểm bất kì thuộc cung *BC*. Chứng minh rằng: $AM - BM = CM.\sqrt{2}.$



Giải

Tìm cách giải. Với $CA = CB$ ta suy ra $CA = CB$ và biểu diễn được qua bán kính *R*. Vì *M* là điểm bất kì thuộc cung

BC, kết luận liên quan tới *MA, MB, MC* nên ta liên tưởng tới định lý Ptôlêmê.

Trình bày lời giải

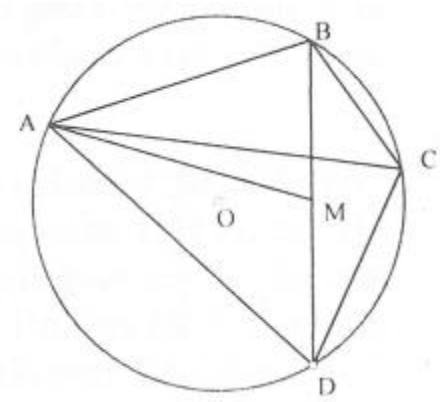
Ta có $AC = BC,\ ACB = 90°$ nên ΔABC vuông cân tại C

$$\Rightarrow AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác *ABMC* ta được:

$$AC.BM + AB.CM = AM.BC$$
$$\Rightarrow R\sqrt{2}.BM + 2R.CM = R\sqrt{2}.AM \Rightarrow AM - BM = CM.\sqrt{2}$$

Ví dụ 2. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp và $AB.CD = AD.BC.$ Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh rằng: $MAB = CAD.$



Giải

Tìm cách giải. $MAB = CAD \Leftrightarrow \Delta ABM \backsim \Delta ACD$ (vì đã có $ABM = ACD$)

Do vậy cần chứng tỏ cặp cạnh kề góc ấy tỉ lệ tức là $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{DC}$

Dựa vào giả thiết, tất yếu ta nghĩ tới vận dụng định lý Ptôlêmê.

Trình bày lời giải

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác *ABCD* ta được:

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

Mà $AB.CD = AD.BC$ nên:

$$2.AB.CD = 2AC.BM \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{DC}$$

Mặt khác $ABM = ACD$ suy ra: $\Delta ABM \backsim \Delta ACD$ (c.g.c)

Vậy $MAB = CAD.$

Ví dụ 3. Cho đường tròn *(O)* và dây cung *BC* khác đường kính. Tìm điểm *A* thuộc cung lớn *BC* của đường tròn sao cho $21.AB + 10.AC$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Tìm cách giải. Nếu có điểm *E* trên cung nhỏ *BC* thì ta có: $AB.CE + AC.BE = BC.AE.$ Do vậy để xuất hiện $21.AB + 10.AC$ thì ta cần xác định điểm *E* sao cho $21.BE = 10.CE.$ tức là $BE = \frac{10}{21}.CE.$ Với tỉ lệ

như vậy chúng ta lại nghĩ tới đường phân giác góc *BEC*. Do vậy bản chất của bài là dựng được điểm *E*.

Trình bày lời giải

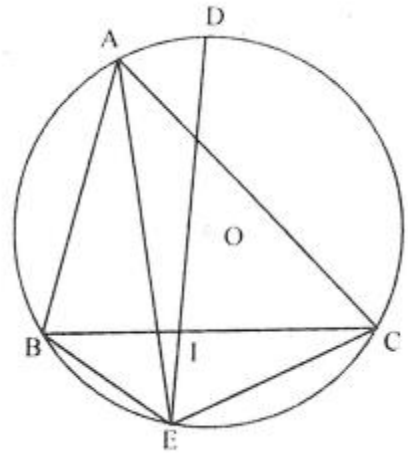
Gọi *I* là điểm thuộc cạnh *BC* sao cho $\frac{IB}{IC}=\frac{10}{21}$

Gọi *D* là điểm chính giữa cung lớn *BC* của đường tròn *(O)*.

Gọi *E* là giao điểm thứ hai của *DI* với *(O)*.

Khi đó *EI* là phân giác của góc BEC

Suy ra $\frac{EB}{EC}=\frac{IB}{IC}=\frac{10}{21}\Rightarrow EB=\frac{10}{21}.EC.$



Áp dụng định lý Ptoleme cho tứ giác nội tiếp *ABEC*, ta có:

$AB.CE+AC.BE=BC.AE$

Suy ra: $AB.CE+AC.\frac{10}{21}.EC=BC.AE$

$\Rightarrow 21AB+10AC=\frac{21BC}{CE}.AE.$

Do đó $21AB+10AC$ đạt giá trị lớn nhất khi *AE* lớn nhất $\Leftrightarrow AE$ là đường kính của *(O)*.

Ví dụ 4. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn *(O)* có $AC=2.AB.$ Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn *(O)* tại *A, C* cắt nhau ở *P*. Chứng minh rằng *BP* đi qua điểm chính giữa của cung *BAC*.

Giải

Tìm cách giải. Để chứng minh $BD=CD,$ ta cần chứng minh $BD=CD.$ Như vậy dựa vào kết luận và giả thiết đều liên quan tới cạnh và tứ giác *ABCD* nên ta nghĩ tới việc vận dụng định lý Ptoleme. Tuy nhiên trong bài, tứ giác này có hai tiếp tuyến ở hai đỉnh đối diện (*A* và *C*) và đường chéo đồng quy thì luôn có $CD.BA=BC.AD$ (bạn nên nhớ tính chất này để sử dụng).

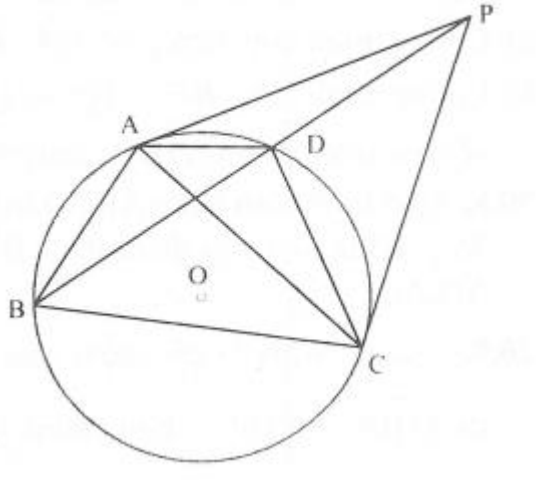
Trình bày lời giải

Ta có: $\Delta PCD\backsim\Delta PBC$ nên $\frac{CD}{BC}=\frac{PC}{PB}$

và $\Delta PAD\backsim\Delta PBA$ nên $\frac{DA}{BA}=\frac{PA}{PB}$.

Mặt khác $PC=PA$ nên $\frac{CD}{BC}=\frac{DA}{BA}$

Suy ra $CD.BA=BC.AD$ (1)



Áp dụng định lý Ptôlêmê ta có:

$CD.BA + AD.BC = AC.BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2.CD.AB = AC.BD$

Mặt khác: $2.AB = AC$ nên $CD = BD.$

Vậy *D* là điểm chính giữa của cung *BAC.*

C. Bài tập vận dụng

1. Chứng minh rằng nếu điểm *P* nằm trên cung nhỏ AB của đường tròn ngoại tiếp hình vuông *ABCD* thì

$$\frac{PA+PC}{PB+PD}=\frac{PD}{PC}$$

2. Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh liên tiếp bằng *a, b, c, d* và các đường chéo bằng *p, q.* Chứng minh rằng: $pq \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}.$

3. Cho tam giác *ABC* không đều. Gọi *I* và *O* lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng $AIO \le 90°$ khi và chỉ khi $AB + AC \ge 2BC$

4. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn *(O).*

Chứng minh rằng: $\frac{AC}{BD}=\frac{BC.CD+AB.BD}{BC.BA+DC.DA}$

5. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt *A* và *B* (O_1 và O_2 nằm về hai phía của *AB*). Một cát tuyến *d* qua *A* cắt $(O_1),(O_2)$ lần lượt tại các điểm *C, D* khác *A (A* thuộc đoạn *CD).* Tiếp tuyến tại *C* của (O_1) cắt tiếp tuyến tại *D* của (O_2) ở *M*. Tìm vị trí của *d* sao cho $\frac{MC}{R_1}+\frac{MD}{R_2}$ đạt giá trị

lớn nhất.

6. Cho tam giác *ABC* có *I* là tâm đường tròn nội tiếp, *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm *G*. Giả sử rằng $OIA = 90°.$ Chứng minh rằng *IG* song song với *BC.*

7. Cho tam giác *ABC* với $BC > CA > AB$ nội tiếp trong đường tròn *(O).* Trên cạnh *BC* lấy điểm *D* và trên tia *BA* lấy điểm *E* sao cho $BD = BE = CA.$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác *BDE* cắt cạnh *AC* tại điểm *P* đường thẳng *BP* cắt đường tròn *(O)* tại điểm thứ hai *Q.*

a) Chứng minh rằng tam giác *AQC* đồng dạng với tam giác *EPD.*

b) Chứng minh rằng $BP = AQ + CQ.$

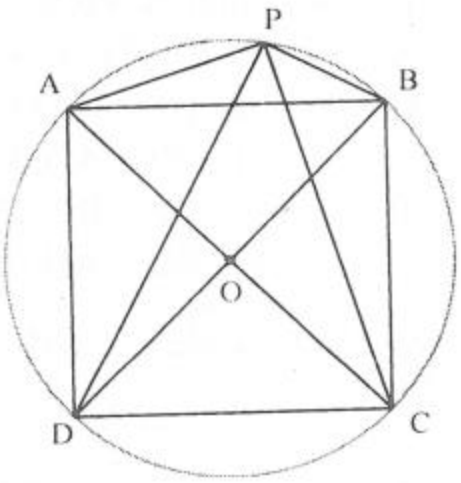
(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2011-2012)

8. Cho hình bình hành *ABCD*. Một đường tròn đi qua *A* cắt các đoạn thẳng *AB, AC, AD* lần lượt tại điểm *P, Q, R* khác *A*. Chứng minh rằng: $AB.AP + AD.AR = AQ.AC$.

9. Giả sử *M, N* là các điểm nằm trong tam giác *ABC* sao cho $MAB = NAC$ và $MBA = NBC$. Chứng minh rằng: $\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI-ĐÁP SỐ

1. Đặt độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ là a thì $AC = BD = a\sqrt{2}.$



Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác $PADC$, ta có:

$$PD.AC = PA.CD + PC.AD$$
$$\Rightarrow PD.a\sqrt{2} = a\left(PA + PC\right) \ (1).$$

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác $PBCD$, ta có:

$$PC.BD = PB.CD + PD.BC$$
$$\Rightarrow PC.a\sqrt{2} = a\left(PB + PD\right) \ (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\dfrac{PA+PC}{PB+PD} = \dfrac{PD}{PC}$

2. Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp thì ta có: $ac + bd = pq.$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

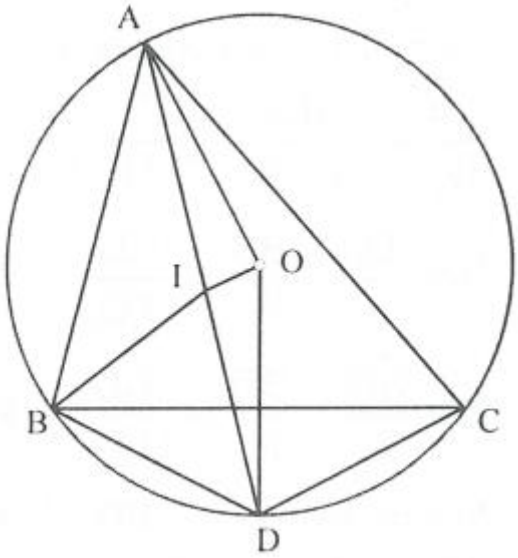
$$\left(ac+bd\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \Rightarrow p^2q^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

Suy ra: $pq \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}.$ Dấu bằng xảy ra khi: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

3. Kéo dài AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $D.$

Ta có: $BAD = DAC \Rightarrow DB = DC.$

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên:



$$BID = IBA + BAI = \frac{1}{2}\left(B + A\right)$$
$$IBD = IBC + CBD = \frac{1}{2}\left(B + A\right)$$

Suy ra ΔDIB cân tại D nên $DI = DB.$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác $ABDC$ nội tiếp:

$$AD.BC = AB.CD + AC.BD$$
$$= BD\left(AB + AC\right) = DI.\left(AB + AC\right).$$

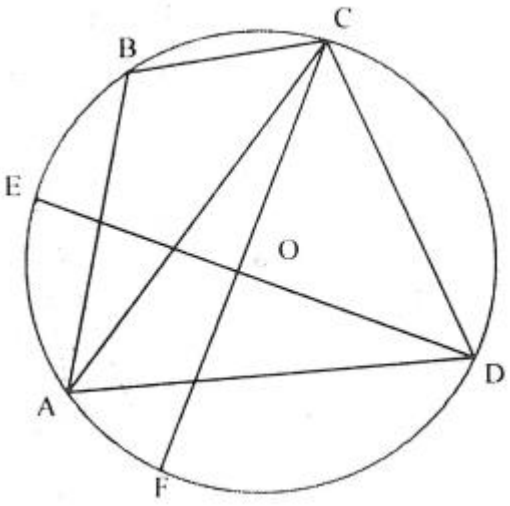
Suy ra: $\dfrac{AD}{ID} = \dfrac{AB+AC}{BC}$

Do ΔAOD cân tại O nên $AIO \le 90°$

$\Leftrightarrow AI \geq ID \Leftrightarrow AI + ID > 2.ID \Leftrightarrow AD \geq 2.ID \Leftrightarrow 2 \leq \dfrac{AD}{ID} = \dfrac{AB + AC}{BC}$

$\Leftrightarrow AB + AC \geq 2BC$.

4. Lấy *E, F* thuộc đường tròn sao cho $CDB = ADE,\ ADB = DCF$.



Khi đó $AE = BC,\ FD = AB,\ EC = AB,\ BF = AD.$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho hai tứ giác nội tiếp *AECD* và *BCDF* ta có:

$$AC.ED = AE.CD + AD.EC$$
$$= BC.CD + AD.AB \quad (1)$$
$$BD.CF = BC.DF + BF.CD$$
$$= BC.AB + AD.CD \quad (2)$$

Mặt khác: $CDE = CDB + BDE$

$= ADE + BDE = ADB = FCD$

Do đó: $FDC = FDE + CDE = FCE + FCD = ECD$ suy ra $ED = FC.$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\dfrac{BC.CD + AB.BD}{BC.BA + DC.DA} = \dfrac{AC.ED}{BD.CF} = \dfrac{AC}{BD}$

5. Hạ *BH* vuông góc với *MD*.

Ta có: $MCA = CBA;\ MDA = DBA \Rightarrow MCA + MDB = CBD;$

$\Rightarrow CMD + CBD = CMD + MCA + MDB = 180°$

Suy ra *BCMD* là tứ giác nội tiếp.

Áp dụng định lý Ptôlêmê ta có: $MC.BD + MD.BC = MB.CD \quad (1)$

Do $\Delta CBD \backsim \Delta O_1AO_2$ nên:

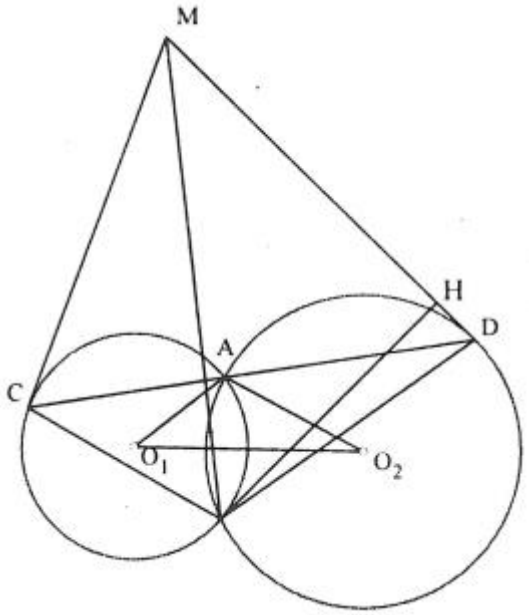
$$\frac{BC}{O_1A} = \frac{BD}{O_2A} = \frac{CD}{O_1O_2}$$

Hay $\dfrac{BC}{R_1} = \dfrac{BD}{R_2} = \dfrac{CD}{O_1O_2}$

Đặt $\dfrac{BC}{R_1} = \dfrac{BD}{R_2} = \dfrac{CD}{O_1O_2} = k$

Suy ra: $BC = k.R_1,\ BD = k.R_2,\ CD = kO_1O_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:



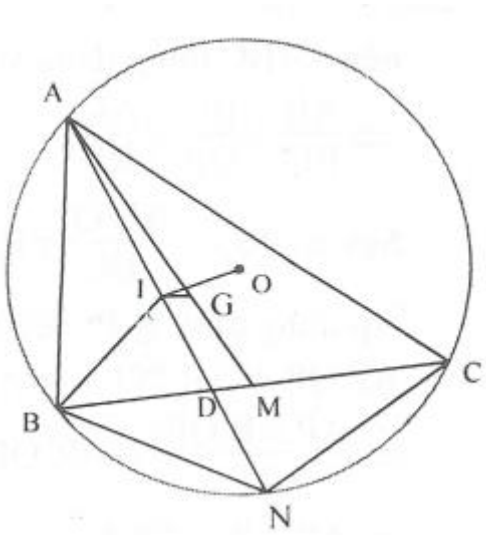
$MC.R_2 + MD.R_1 = MB.O_1O_2$ hay $\frac{MC}{R_1} + \frac{MD}{R_2} = \frac{MB.O_1O_2}{R_1R_2}$

Do đó $\frac{MC}{R_1} + \frac{MD}{R_2}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MB lớn nhất

Tam giác BMH luôn tự đồng dạng với chính nó khi d thay đổi, nên BM lớn nhất khi và chỉ khi BH lớn nhất, mà $BH \le BD \le 2.R_2$.

Dấu bằng xảy ra khi B và D đối xứng qua O_2, khi đó $d // O_1O_2$

6. Kéo dài AI cắt BC và (O) tại D; N.



Khi đó N là điểm chính giữa cung BC (không chứa A).

Ta có: $BN = NC(1)$.

Lại có: $IBN = BIN \Rightarrow BN = IN \ (2)$

Do $OI \perp AN$ suy ra $IA = IN = \frac{1}{2}AN \ (3)$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow BN = NC = IN = IA \ (4)$

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $ABNC$ ta có:

$BN.AC + AB.NC = BC.AN$

Từ (4) $\Rightarrow BN(AC + AB) = 2BN.BC \Rightarrow AC + AB = 2BC \ (5)$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ACD và (5) ta có:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB + AC}{BD + CD} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2$$

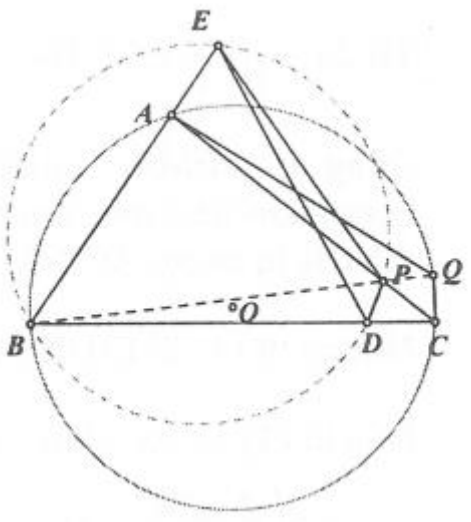
Vậy $\frac{IA}{ID} = 2$ (6).

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác suy ra $\frac{AG}{GM} = 2$ (7).

Từ (6),(7) $\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{AG}{GM} = 2$

Suy IG song song với BC (định lý Ta-Lét đảo).

7.



a) Do các tứ giác $BEPD$, $ABCQ$ nội tiếp, nên $EDP = EBP = ABQ = ACQ$ (1) và

$$EPD = 180° - EBD$$
$$= 180° - ABC = AQC \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ΔAQC œ ΔEPD.

Điều phải chứng minh.

b) Theo kết quả phần a, ta có $\frac{QA}{PE}=\frac{QC}{PD}=\frac{CA}{DE}=\frac{QA+QC}{PE+PD}$

Suy ra $(QA+QC).DE=(PE+PD).AC=(PE+PD).BD$ (3)

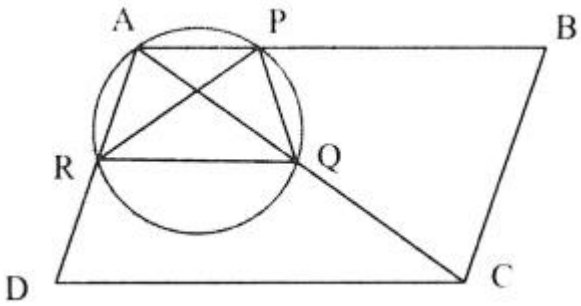
Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác $BEPD$ nội tiếp, ta được

$BP.ED=BE.PD+EP.BD=(PD+PE).BD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(QA+QC).ED=BP.ED$ hay $QA+QC=BP$ (điều phải chứng minh).

8. Vì $ACB=CAD=RPQ$ và $BAC=PRQ$ nên ΔABC đồng dạng với ΔRQP (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{AC}{RP}$



Suy ra; $RQ=\frac{AB.QP}{BC};RP=\frac{AC.PQ}{BC}$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác $APQR$ ta được:

$AP.QR+AR.PQ=AQ.PR$

$\Rightarrow \frac{AP.AB.QP}{BC}+AR.QP=AQ.\frac{AC.QP}{BC}$

$\Rightarrow AP.AB+AR.QP=AQ.AC$

$\Rightarrow AP.AB+AR.AD=AQ.AC$ (vì $BC=AD$)

9

Lấy điểm K trên đường thẳng BN sao cho $BCK=BMA$

Khi đó $\Delta BMA\backsim\Delta BCK$

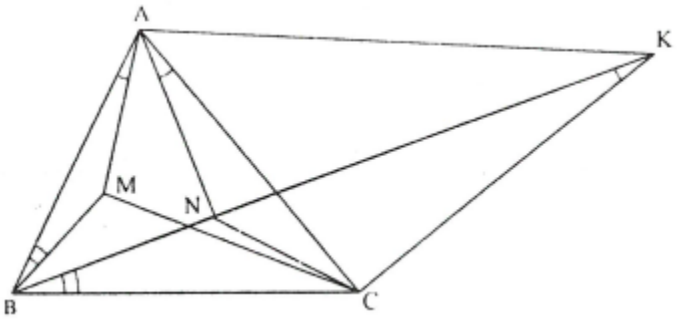
Suy ra $\frac{AB}{BK}=\frac{BM}{BC}=\frac{AM}{CK}(1)$

$\Rightarrow \frac{AB}{MB}=\frac{BK}{BC}$

Mặt khác, dễ thấy $ABK=MBC$

Từ đó $\Delta ABK\backsim\Delta MBC$, dẫn đến

$\frac{AB}{MB}=\frac{BK}{BC}=\frac{AK}{CM}(2)$



Cũng từ $\Delta BMA \backsim \Delta BCK$ ta có $CKN = MAB = NAC,$ suy ra *A, N, C, K* cùng nằm trên một đường tròn. Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp *ANCK* ta được: $AC.NK = AN.CK + CN.AK \quad (3)$

Nhưng từ (1) và (2) thì: $CK = \frac{AM.BC}{BM}; AK = \frac{AB.CM}{BM}; BK = \frac{AB.BC}{BM}$

Nên từ (3) $\Leftrightarrow AC.(BK - BN) = AN.CK + CN.AK$

$$\Leftrightarrow AC.\left(\frac{AB.BC}{BM} - BN\right) = \frac{AN.AM.BC}{BM} + \frac{CN.AB.CM}{BM}$$

$$\Leftrightarrow AB.AC.BC = AN.AM.BC + CN.AB.CM + BN.BM.AC$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC}\frac{CM.CN}{CA.CB} = 1$$

CHỦ ĐỀ 2. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

A.Kiến thức cần nhớ

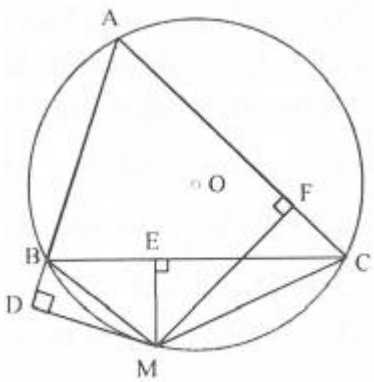
Robert Simson là một nhà toán học người Scotland, giáo sư toán học của đại học Glasgow. Ông sinh ngày 14 tháng 10 năm 1687 tại West Kibride và mất ngày 1 tháng 10 năm 1768 tại Glasgow.

Robert Simson vốn là một thầy thuốc nhưng lại ưa thích hình học. Ông say mê toán học thời cổ đại Hy Lạp chứ ít thích tự tìm những kết quả mới. Sau đây là một định lý mang tên ông.

Định lý 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là các điểm bất kỳ trên (O). Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, BC, CA. Chứng minh D, E, F thẳng hàng. Đường thẳng đi qua D, E, F có tên là đường thẳng Simson ứng với điểm M của ΔABC*

Giải

Chứng minh. Xét trường hợp ΔABC nhọn và $MBA \geq MCA$ (Các trường hợp khác chứng minh tương tự)



Khi đó D thuộc tia đối của tia BA, E và F tương ứng nằm trên cạnh BC, CA.

Vì các tứ giác MDBE, ABMC và MCFE nội tiếp nên

$MED = MBD = ACM = 180° - MEF$

$\Rightarrow MED + MEF = 180° \Leftrightarrow DEF = 180°$

Do đó D, E, F thẳng hàng (dpcm)

Định lý 2. *Cho ΔABC và một điểm M. Gọi D, E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, CA, AB. Biết rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng. Chứng minh rằng M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC*

Giải

Không mất tính tổng quát, ta xét trường hợp điểm M nằm trong góc BAC

Các tứ giác BEMD, CMEF là tứ giác nội tiếp nên:

$BMD = BED;\ CMF = CEF$

Ta lại có: $BED = CEF$ *(đối đỉnh)*

$\Rightarrow BMD = CMF$

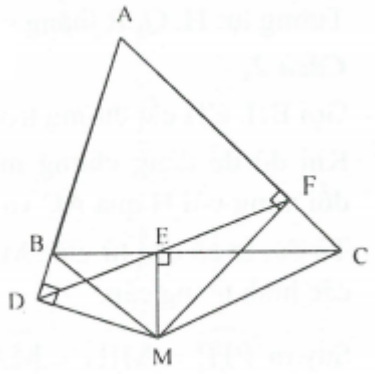
Tứ giác ADMF nội tiếp nên $A + DMF = 180°$

$\Rightarrow A + DMB + BDF = 180° \Rightarrow A + CMF + BDF = 180°$

Do đó tứ giác ABMC nội tiếp.

Suy ra M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Bây giờ ta vận dụng định lí trên để giải một số ví dụ sau.



B.Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kỳ trên (O), H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng H và các điểm đối xứng của M qua AB, BC, CA thẳng hàng.

Giải

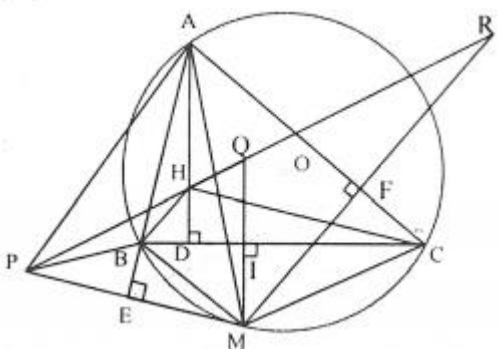
Tìm các giải. Nếu gọi E, I, F là hình chiếu của M trên đường thẳng AB, BC, CA và P, Q, R là các điểm đối. xứng của M qua AB, BC, CA thì E, I, F thẳng hàng (đường thẳng Simson). Từ đó suy ra P, Q, R thẳng hàng. Do vậy chỉ cần chứng minh P, H, Q thẳng hàng.

Trình bày lời giải

Cách 1. Xét điểm M thuộc cung nhỏ BC.

Gọi E, I, F lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng AB, BC, CA.

Gọi P, Q, R lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, BC, CA.



Ta có: $APB = AMB = ACB = BHD$

$\Rightarrow$ APBH là tứ giác nội tiếp $BHP = BAP$

$\Rightarrow BHP = BAM$ (1)

Chứng minh tương tự ta có :

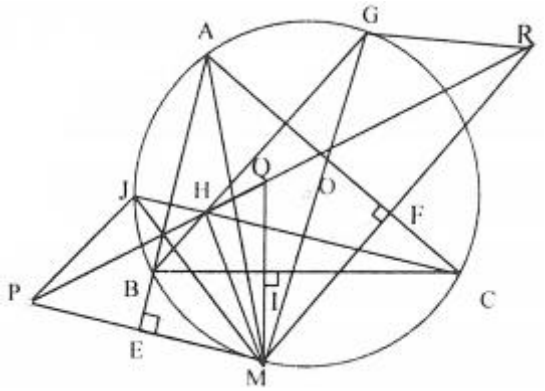
$CHQ = CAM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$PHB + BHC + CHQ = BAM + BHC + CAM = 180° \Rightarrow$ P, H, Q thẳng hàng.

Tương tự : H, Q, R thẳng hàng $\Rightarrow$ H, P, Q, R thẳng hàng.

Cách 2.



Gọi BH, CH cắt đường tròn (O) tại điểm G, J.

Khi đó dễ dàng chứng minh được : G, J đối xứng với H qua AC và AB.

Từ đó, ta có các tứ giác MPJH, MRGH là các hình thang cân.

Suy ra $PHJ = MJH = MAC;\ RHG = MGH = MAB$

Do đó : $PHJ + JHG + RHG = MAC + JHG + MAB = 180°$

Vậy ba điểm P, H, R thẳng hàng (1)

Mà E, I, F thẳng hàng (đường thẳng Simson)

Từ đó suy ra P, Q, R thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) suy ra P, H, Q, R thẳng hàng.

Nhận xét.

- Đường thẳng PR này có tên là *đường thẳng Steiner.*
- Dựa vào bài toán trên, bạn có thể giải được bài toán sau:

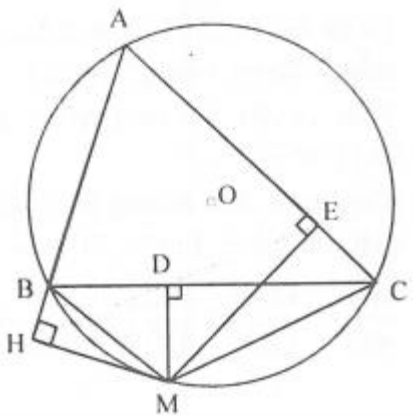
- Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kì trên (O). Gọi P, Q, R là điểm đối xứng với M qua đường thẳng AB, BC, CA. Chứng minh rằng P, Q, R thẳng hàng và xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để PR đạt giá trị lớn nhất.
- Cho ΔABC, M là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi K, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các điểm P, K, Q nằm trên một đường thẳng và đường thẳng đó luôn đi qua một điểm cố định không phụ thuộc vào vị trí của điểm M thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC *(Olympc Toán Nhật Bản, năm 1996).*

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, M là điểm thuộc cung BC không chứa đỉnh A. Gọi D, E, F là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{MD} = \frac{CA}{ME} + \frac{AB}{MH}$$

(Thi Vô Địch Mỹ, năm 1979)

Giải



Tìm cách giải. Hình vẽ có dạng đường thẳng Simson, do đó H, D, E thẳng hàng. Do yêu cầu của kết luận, nên ta cần tìm cặp tam giác

đồng dạng để suy ra được: $\frac{CA}{ME}=\frac{x}{MD};\frac{AB}{MH}=\frac{y}{MD}$. Từ các góc của các tứ giác nội tiếp, ta tìm được hướng chứng minh.

Trình bày lời giải

Theo bài toán Simson thì H, D, E thẳng hàng, các tứ giác MHBD, MDEC nội tiếp nên $MEH=MCB, MBC=MHE$

$\Delta AMH\sim\Delta CMD$ suy ra: $\frac{AH}{MH}=\frac{CD}{MD}$

$\Delta AME\sim\Delta BMD$ suy ra: $\frac{AE}{ME}=\frac{BD}{MD}$

Do đó: $\frac{AH}{MH}+\frac{AE}{ME}=\frac{CD}{MD}+\frac{BD}{MD}=\frac{BC}{MD}\Rightarrow\frac{AB}{MH}+\frac{BH}{MH}+\frac{AC}{ME}-\frac{CE}{ME}=\frac{BC}{MD}$

Mặt khác $\Delta BHM\sim\Delta CEM$ suy ra: $\frac{BH}{MH}=\frac{CE}{ME}$ từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Dựa vào bài toán trên, bạn có thể giải được bài toán sau:

- Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, M là điểm thuộc cung BC không chứa đỉnh A. Gọi D, E, F là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\frac{1}{MD}=\frac{1}{ME}+\frac{1}{MH}$
- Cho tam giác ABC ($AB<BC<CA$) nội tiếp đường tròn $(O;R)$, M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn $(O;R)$. Gọi D, E, F là hình chiếu của M lần lượt trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí điểm M để $\frac{BC}{MD}+\frac{CA}{ME}+\frac{AB}{MH}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

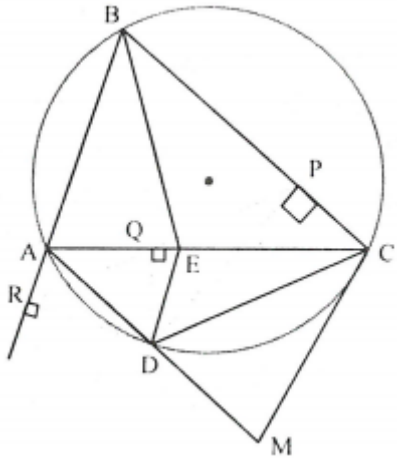
Ví dụ 3. Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q và R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh rằng $PQ=QR$ khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc ABC và ADC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AC.

(Thi Toán Quốc tế IMO lần thứ 44, tại Nhật Bản, thi ngày 17/7/2003)

Giải

Tìm cách giải. Khi vẽ hình bài toán, chúng ta nhận thấy rằng có bóng dáng của bài toán đường thẳng Simson, do vậy chúng ta cần sử dụng P, Q, R thẳng hàng. Mặt khác, chúng ta thấy rằng $PQ=QR$ thì $RQ=\frac{1}{2}PR$. Vậy phải chăng các đường phân giác của các góc ABC và ADC cắt nhau tại một điểm E nằm trên đường thẳng AC sẽ tạo ra tính chất tỉ lệ đoạn thẳng? Từ đó ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải



Từ đề bài ta có P, Q, R thuộc một đường thẳng *(đường thẳng Simson).*

Trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho $DM = DA$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có E thuộc AC khi và chỉ khi $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC}\left(= \frac{AE}{EC}\right) \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DM}{DC}$

Mặt khác $ABC = MDC$ (cùng bù với ADC) nên $\Delta ABC \sim \Delta MDC$

$\Leftrightarrow ACB = MCD, CAB = CMD;$

Mà tứ giác AQDR nội tiếp nên $DQR = DAR$ và $RDQ = CMD(= CAB)$

$\Leftrightarrow \Delta DQR \sim \Delta MAC(g.g) \Leftrightarrow \frac{RQ}{AC} = \frac{DR}{MA} = \frac{DR}{2AD}$ (4)

Dễ thấy $\Delta ADC \sim \Delta RDP(g.g)$ nên $\frac{RP}{AC} = \frac{RD}{AD}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $RQ = \frac{1}{2}RP \Leftrightarrow RQ = QP$

Nhận xét. Ngoài ra chúng ta có thể giải trực tiếp như sau:

Ta có: P, Q, R thẳng hàng.

Từ các tứ giác nội tiếp CDQP, AQDR

Suy ra: $\Delta DCA \sim \Delta DPR(g.g)$

Tương tự, ta có: $\Delta DAB \sim \Delta DQP(g.g), \Delta DBC \sim \Delta DRQ(g.g)$

Do đó : $\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}.\frac{PQ}{QR}$

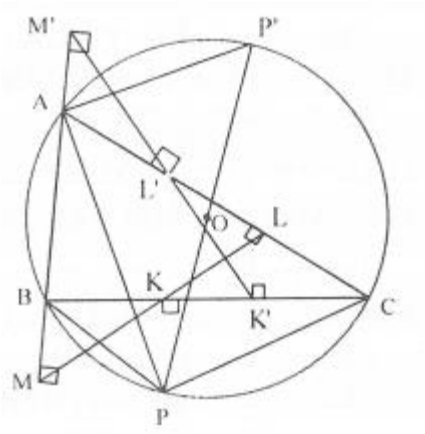
Suy ra $PQ = QR \Leftrightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}$

Điều đó tương đương với chân đường phân giác của các góc ABC và ADC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AC.

Ví dụ 4. Từ điểm P trên cung BC của đường tròn ngoại tiếp ΔABC kẻ PM, PL, PK lần lượt vuông góc với AB, AC, AC. Gọi P′ là điểm đối xứng với P qua O. Kẻ P′M′, P′L′, P′K′ lần lượt vuông góc với AB, AC, AC. Chứng minh rằng : $ML \perp M'L'$

Giải

Vận dụng tính chất đường thẳng Simson ta có : M, K, L thẳng hàng và M′, K′, L′ thẳng hàng.



Tứ giác AM′P′L′ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AM'L' = AP'L'$ (1)

PP′ là đường kính

$\Rightarrow PAC = AP'L' \ (= 90° - CAP')$ (2)

Mặt khác $PAC = PBC$ (3)

Tứ giác PMBK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow PMK = PBC$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra : $PMK = AM'L'$

Mà $PMK + AML = 90° \Rightarrow M'ML + MM'L = 90°$

Suy ra : $ML \perp M'L'$

C.Bài tập vận dụng

1. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). H là trực tâm ΔABC, M là một điểm nằm trên cung nhỏ AC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, BC.

a) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của MH.

b) Xác định vị trí của M để EF lớn nhất.

2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Một cát tuyến thay đổi qua A cắt (O) và (O') tương ứng tại C và D. Gọi E và F thứ tự là hình chiếu vuông góc của B lên tiếp tuyến của (O) tại C và tiếp tuyến của (O') tại D. Chứng minh rằng EF tiếp xúc một đường tròn cố định.

3. Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp một đường tròn. Gọi M, N, P, Q, R, S, T và U lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, MN, NP, PQ và QM. Chứng minh R, S, T, U thẳng hàng.

4. Cho đường tròn (O) và một điểm A cố định nằm ngoài (O). M là một điểm thay đổi trên đường thẳng qua A vuông góc với AO. Gọi MB, MC là các tiếp tuyến của (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ $AE \perp MB, AF \perp MC \ (E \in MB; F \in MC)$. Chứng minh rằng EF đi qua một điểm cố định.

5. Cho xOy, lấy điểm A cố định thuộc tia phân giác của xOy. Vẽ đường tròn (I) qua O và A cắt Ox, Oy lần lượt tại B và C và vẽ hình bình hành OBMC. Chứng minh rằng M thuộc một đường thẳng cố định.

6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H. D là điểm trên cung nhỏ BC. Lấy điểm E sao cho ADCE là hình bình hành và K là trực tâm của tam giác ACE. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của HK.

7. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thay đổi trên cung nhỏ BC. Kẻ $ME \perp AB, MF \perp AC\ (E \in AB, F \in AC)$

a) Xác định vị trí của M để trung điểm của EF nằm trên đoạn thẳng BC

b) Kẻ $AP \perp MB, AQ \perp MC\ (P \in MB, Q \in MC)$. Chứng minh rằng PQ đi qua một điểm cố định.

8. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi H, K thứ tự là hình chiếu vuông góc của B trên AC, CD. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AD, HK. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác vuông.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1.

a) Xét trường hợp $BAM \geq BCM$ (các trường hợp khác chứng minh tương tự)

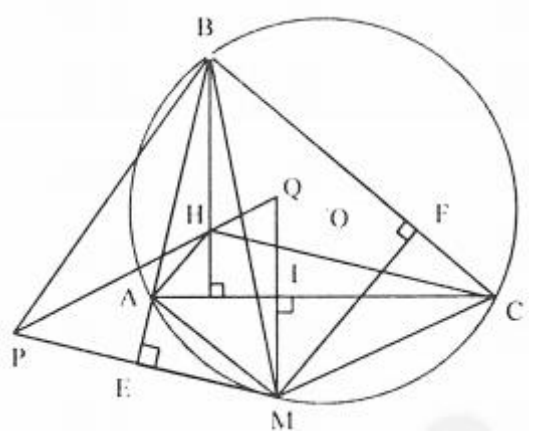
Khi đó E thuộc tia đối của tia AB và F nằm trên cạnh BC

Hạ $MI \perp AC\ (I \in AC)$

Ta được EF là đường thẳng Simson ứng với điểm M của ΔABC

Hơn nữa, I nằm giữa E và F.

Gọi P, Q theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC



Vì $APB = AMB = ACB = 180° - AHB$ nên tứ giác AHBP nội tiếp

$\Rightarrow AHP = ABP = ABMT$. Tương tự $CHQ = CBM$

Suy ra $AHP + AHC + CHQ = ABM + AHC + CBM = 180°$

Do đó P, H, Q thẳng hàng.

Mà IE là đường trung bình của ΔMPQ nên IE đi qua trung điểm của MH hay EF đi qua trung điểm của MH (đpcm).

Nhận xét. Có thể dùng đường thẳng Steiner để chứng minh.

b) Vì $MEI = MAI$ và $MFI = MCI$ nên $\Delta MEF \sim \Delta MAC\ (g.g)$

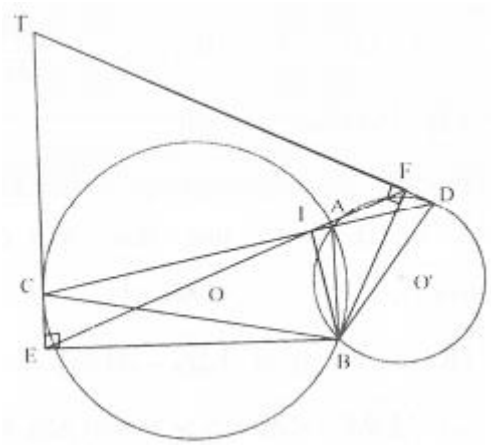
Suy ra $\frac{EF}{AC}=\frac{EM}{AM}\le 1$

Do đó EF lớn nhất bằng AC và xảy ra khi và chỉ khi BM là đường kính của (O)

2.

Đặt $T=CE\cap DF$

Giả sử $TCB\ge TDB$



Hạ $BI\perp CD\ (I\in CD)$

Vì $CBD=CBA+DBA=TCD+TDC$ nên $CBD+CTD=180°$

Do đó tứ giác TCBD nội tiếp.

Suy ra EF là đường thẳng Simson ứng với điểm B của ΔTCD

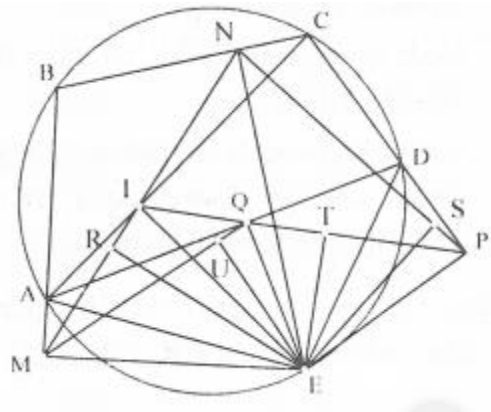
Do đó I, E, F thẳng hàng và I thuộc đường tròn đường kính AB.

Mà tứ giác BICE nội tiếp nên $BIE=BCE=BAE$

Vậy EF tiếp xúc với đường tròn đường kính AB cố định (đpcm).

3.

Hạ $EI\perp AC\ (I\in AC)$



Đường thẳng Simson ứng với điểm E với tam giác ABC cho ta ba điểm M, N, I thẳng hàng.

Đường thẳng Simson ứng với điểm E với tam giác ACD cho ta các ba điểm P, Q, I thẳng hàng.

Ta có A, I, Q, E, M cùng thuộc đường tròn đường kính AE, nên vận dụng đường thẳng Simson ứng với điểm E với tam giác IMQ cho ta các cặp điểm R, U, T thẳng hàng.

Tương tự R, S, T thẳng hàng, ta có đpcm.

4

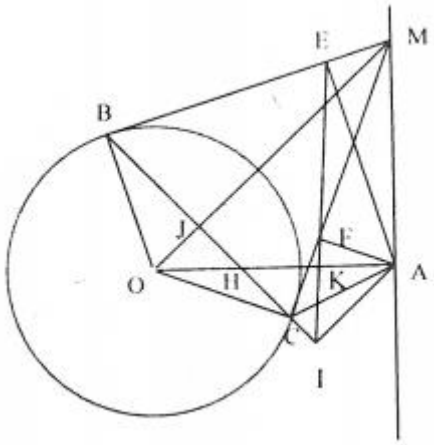
Ta có $MAO=MBO=MCO=90°$

Suy ra năm điểm M, A, C, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

Kẻ $AI\perp BC$. Xét đường tròn đường kính MO, ta có:

$AE\perp MB, AF\perp MC, AI\perp BC$

Suy ra E, F, I thẳng hàng (đường thẳng Simson).



Gọi H, J là giao điểm của BC với AO và OM, K là giao điểm của EI và AO.

Ta có: $\Delta OJH \sim \Delta OAM$ $(g.g)$ suy ra: $OJ.OM = OH.OA$

Ta có: $\Delta OJB \sim \Delta OBM$ $(g.g)$ suy ra: $OJ.OM = OB^2$

Do đó : $OH.OA = OB^2 \Rightarrow OH = \dfrac{OB^2}{OA}$ không đổi

Vậy H là điểm cố định.

Tứ giác AICF nội tiếp nên $KIA = FCA$ (1)

A, M, B, O, C cùng thuộc một đường tròn nên $ACM = AOM$ (2)

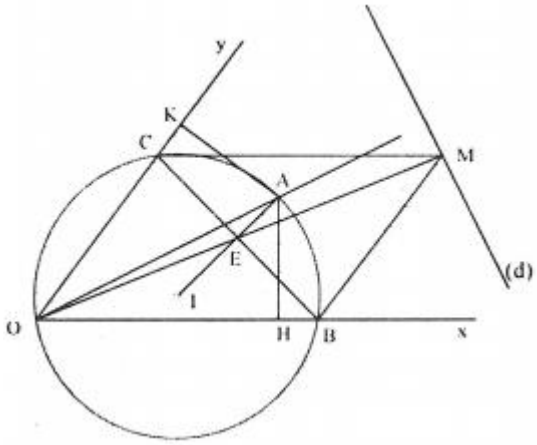
Từ (1), (2) suy ra : $KIA = AOM$

Mà $AOM = KAI$ (so le trong) nên $KIA = KAI \Rightarrow KA = KI$

ΔAIH vuông có $KA = KI$ dễ dàng suy ra $AK = KH$

Suy ra K là điểm cố định.

5.



Vì A thuộc tia phân giác của xOy nên $AC = AB$. Suy ra $IA \perp BC$

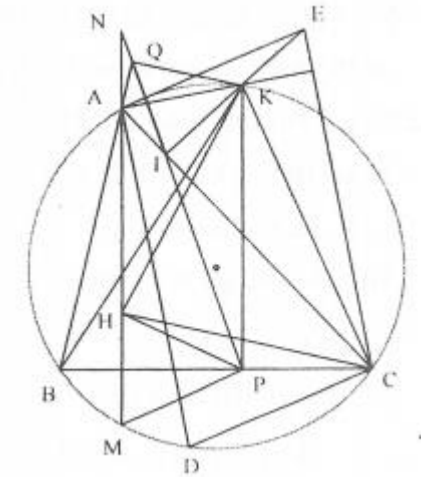
Kẻ $AH \perp Ox, AK \perp Oy$ thì K, H cố định và K, E, H thẳng hàng nên điểm E thuộc HK cố định.

Mà hình bình hành OBMC có $OM = 2OE$ nên M cố định.

Suy ra M thuộc đường thẳng d cố định song song với đường thẳng HK và cách HK một khoảng không đổi.

6.

Theo giả thiết ta có ADCE là hình bình hành nên $ADC = AEC$ mà K là trực tâm của ΔAEC nên $EK \perp AC$



Mặt khác $AKC + AEC = 180°$ nên $AKC + ADC = 180°$

Suy ra tứ giác ADCK nội tiếp, từ đó $K \in (O)$

EK cắt AC tại I

Do đó P, Q, I thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại M và cắt PQ tại N thì $MN \parallel KP, KQ \perp AB, KP \perp BC$

Suy ra BQKP là tứ giác nội tiếp nên $QPK = QBK = AMK$

Do đó MPKN là tứ giác nội tiếp.

Do đó MPKN là hình thang cân nên $PMN = KNM$

Mặt khác $PH = PM \Rightarrow PMN = PHM$ nên $PHM = KNM$

$\Rightarrow PH \parallel KN$, lại có $NH \parallel KP$, suy ra HPKN là hình bình hành.

Do đó NP cắt HK tại trung điểm của mỗi đường.

Do đó PQ đi qua trung điểm của HK.

7.

a) Kẻ $MD \perp BC$ suy ra E, D, F thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Từ các tứ giác nội tiếp MDBE, MDFC ta có:

$MED = MBD;\ MFD = MCD$

$\Rightarrow \Delta MEF \sim \Delta MBC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{MF}{MC}$

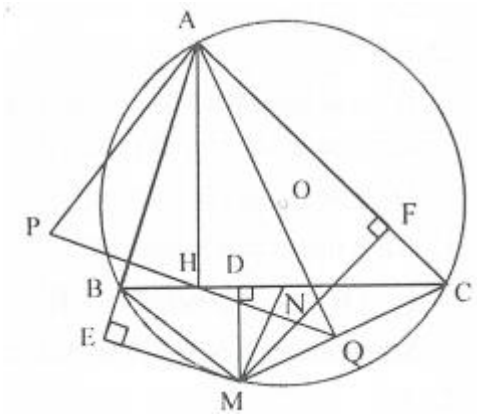
$ED = DF \Leftrightarrow \dfrac{DF}{NC} = \dfrac{MF}{MC}$

$\Leftrightarrow \Delta MDF \sim \Delta MNC\ (g.c.g)$

$\Leftrightarrow MDF = MNC \Leftrightarrow DCF = NMC$

$\Rightarrow$ M thuộc cung chứa góc BAC dựng trên đoạn NC

$\Rightarrow$ M thuộc giao điểm của cung chứa góc BAC dựng trên đoạn NC và cung nhỏ BC.



Nhận xét. Ngoài ta có thể dựa vào ví dụ 3, để giải.

b) Kẻ $AH \perp BC$, suy ra P, H, Q thẳng hàng (đường thẳng Simson)

$\Rightarrow$ PQ luôn đi qua điểm H cố định.

8.

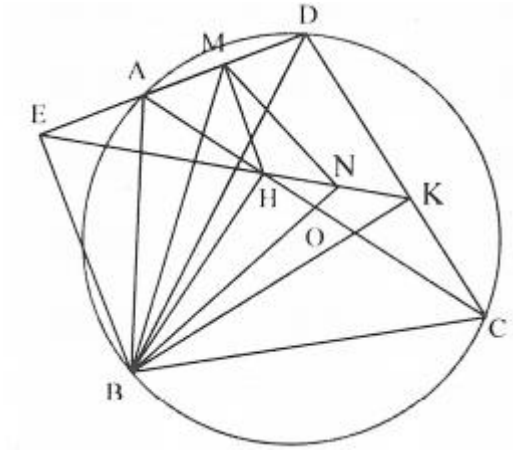
Kẻ $BE \perp AD\ (E \in AD)$

Ta có $BH \perp AC, BK \perp CD \Rightarrow$ E, H, K thẳng hàng.

Tứ giác BEDK nội tiếp $\Rightarrow EDB = EKB$

Tứ giác BHKC nội tiếp $\Rightarrow BHK + BCD = 180°$

Mặt khác $BAD + BCD = 180°$



$\Rightarrow BAD = BHK \Leftrightarrow \Delta BHK \sim \Delta BAD\ (g.g)$

Mà $MA = MD,\ NH = NK \Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta HNB$

$\Rightarrow AMB = BNH = BNE$

Do đó tứ giác BEMN nội tiếp.

Mà $MEB = 90° \Rightarrow BNM = 90° \Rightarrow BN \perp MN$

CHUYÊN ĐỀ 9. QUỸ TÍCH (TÌM TẬP HỢP ĐIỂM)

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Các quỹ tích cơ bản*

Để tìm quỹ tích trong mặt phẳng, người ta thường dựa vào các quỹ tích cơ bản. Một số quỹ tích sau đây thường được mọi người thừa nhận là quỹ tích cơ bản:

Quỹ tích 1: *Quỹ tích những điểm cách đều hai điểm A và B cố định là đường trung trực của đoạn thẳng AB.*

Quỹ tích 2: *Quỹ tích những điểm cách đều hai cạnh của một góc là đường phân giác của góc đó.*

Quỹ tích 3: *Quỹ tích những điểm cách đều đường thẳng xy cố định một khoảng a cho trước là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng a cho trước.*

Quỹ tích 4: *Quỹ tích những điểm cách đều điểm O cố định một khoảng R cho trước là đường tròn có tâm là O và bán kính bằng R.*

Quỹ tích 5: *Quỹ tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc* α *không đổi (*$0^\circ < \alpha < 180^\circ$*) là hai cung chứa góc* α *dựng trên đoạn thẳng AB.*

Đặc biệt, nếu $\alpha = 90^\circ$ *thì ta nhận được.*

Quỹ tích 5a: *Quỹ tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.*

2. Các bước giải một bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất τ *là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:*

- *Phần thuận: Mọi điểm có tính chất* τ *đều thuộc hình H.*
- *Giới hạn. Xem điểm M chỉ thuộc một phần* H_1 *của hình H hay cả hình H.*
- *Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H hoặc thuộc phần* H_1 *(nếu có giới hạn) đều có tính chất* τ*.*
- *Kết luận: Quỹ tích (tập hợp) các điểm M có tính chất* τ *là hình H (hoặc thuộc phần* H_1*).*

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn đường kính *BC*. Một điểm *A* di động sao cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn và trọng tâm *G* của tam giác nằm trên nửa đường tròn đó. Tìm quỹ tích điểm *A*.

Giải

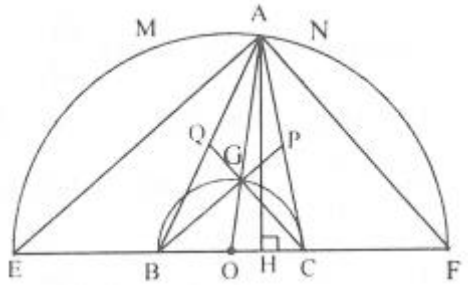
Tìm cách giải

- Nếu gọi *BP, CQ* là đường trung tuyến, ta luôn có $AP = PC$ và $AQ = QB$. Nếu lấy *E* đối xứng với *C* qua *B* thì *BP* luôn song song với *AE, F* đối xứng với *B* qua *C* thì *CQ* luôn song song với *AF*, mà *E, F* cố định. Khi *G* di động thì $EAF = 90^\circ$ không đổi nên ta tìm được điểm *A* di chuyển trên nửa đường tròn đường kính *EF*.
- Vì *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, nếu gọi *O* là trung điểm *BC* thì *A, G, O* thẳng hàng. Mặt khác *G* là trọng tâm nên $OA = 3.OG$ không đổi. Từ đó suy ra *A* di chuyển trên đường tròn $(O;3R)$.

Trình bày lời giải

Phần thuận.

Cách 1. Trên đường thẳng BC lấy hai điểm E, F sao cho B là trung điểm CE, C là trung điểm BF.



Ta có: $EF = 3BC$ cố định (1)

Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của BG và AC; CG và AB

CQ là đường trung bình của ΔABF nên $CQ // AF$.

BP là đường trung bình của ΔACE nên $BP // AE$

Mà $CQ \perp BP$ nên $AF \perp AE \Rightarrow EAF = 90°$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra A di động trên đường tròn đường kính EF.

Cách 2. Gọi O là trung điểm $BC \Rightarrow O$ cố định và A, G, O thẳng hàng.

G là trọng tâm ΔABC nên $OA = OG = \frac{3}{2}BG$. Suy ra A di động trên đường tròn tâm O bán kính $\frac{3}{2}BG$.

Giới hạn. Do ΔABC nhọn nên A di động trên cung nhỏ MN (trừ hai điểm M, N).

Phần đảo.

Lấy điểm A biết bất kì thuộc cung nhỏ MN, gọi G là giao điểm của OA với nửa đường tròn đường kính BC $\Rightarrow AO$ là đường trung tuyến của ΔABC.

Ta có $OG = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{3}OA \Rightarrow G$ là trọng tâm ΔABC.

Kết luận. Vậy tập hợp điểm A là cung nhỏ MN (trừ hai điểm M, N).

Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định, BC là dây cung bất kì. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = BC$. Gọi P là giao điểm của AC và DO. Tìm quỹ tích điểm P.

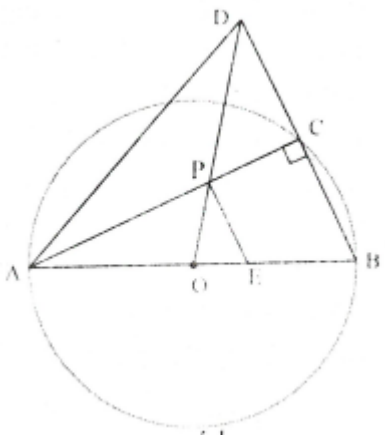
Giải

Tìm cách giải. Ta nghiên cứu tính chất của điểm P.

Ta có AC và PO là hai trung tuyến của ΔABD, do đó $\frac{CP}{AC} = \frac{1}{3}$; lại có $ACB = 90°$ nên nếu dựng $PE // CB$ (với $E \in AB$) thì $APE = 90°$ và $\frac{BE}{AB} = \frac{1}{3}$, như vậy E cũng là một điểm cố định và $APE = 90°$ không đổi.

Như vậy quỹ tích của điểm P là xác định được.

Trình bày lời giải.



Phần thuận. Nối AD, vì AC và DO là hai trung tuyến của ΔABD nên P là trọng tâm tam giác, suy ra $\frac{CP}{AC} = \frac{1}{3}$.

Trên đoạn thẳng AB xác định điểm E sao cho $\frac{BE}{AB} = \frac{1}{3}$ thì điểm E là điểm cố định.

Ta có $\frac{CP}{AC} = \frac{BE}{AB}\left(= \frac{1}{3}\right)$ nên $PE // CB$ (định lý Ta-lét đảo).

$\Rightarrow APE = ACB \Rightarrow APE = 90°$.

Mà *A; E* là hai điểm cố định nên tập hợp điểm *P* là đường tròn có đường kính *AE*.

Phần đảo. Lấy điểm *P* bất kì thuộc đường kính *AE*. Gọi *C* là giao điểm thứ hai của tia *AP* với đường tròn (O). Gọi *D* là giao điểm của hai tia *BC* và *OP*.

Ta có $ACB = 90°; APE = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $BC // EP \Rightarrow \dfrac{DP}{DO} = \dfrac{BE}{BO}$.

Mà $\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BE}{2.BO} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BE}{BO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{DP}{DO} = \dfrac{2}{3}$.

ΔABD có *DO* là đường trung tuyến; $\dfrac{DP}{DO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow P$ là trọng tâm $\Delta ABD \Rightarrow AC$ là đường trung tuyến

$\Rightarrow CD = CB$.

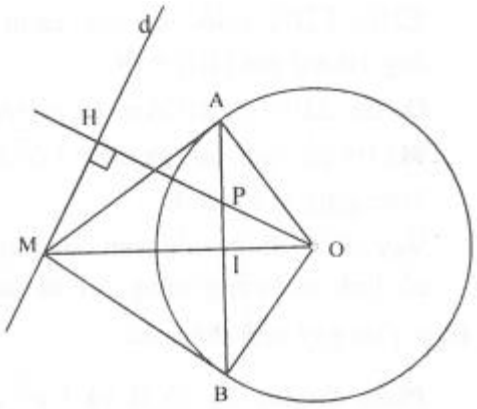
Kết luận. Vậy quỹ tích điểm *P* là đường tròn đường kính *AE*.

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O;\mathrm{R})$ và điểm *P* cố định nằm trong đường tròn). Dây cung *AB* thay đổi luôn đi qua *P*. Tiếp tuyến tại *A* và *B* với đường tròn cắt nhau tại *M*. Tìm quỹ tích điểm *M*.

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy *I* là giao điểm của *AB* và *MO* thì *I* thuộc đường tròn đường kính *OP* và $MI.MO = R^2$. Do vậy, khai thác yếu tố không đổi này, ta có thể nhận thấy nếu *H* là hình chiếu của *M* trên đường thẳng *OP* thì $OP.OH = R^2$ không đổi, suy ra *H* cố định. Từ đó ta có lời giải.

Trình bày lời giải.



Phần thuận. Gọi *H* là hình chiếu của *M* trên đường thẳng *OP*.

Gọi *I* là giao điểm của *AB* và *MO*.

Suy ra $AB \perp MO$ từ đó ta có $\Delta OHM \sim \Delta OIP$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OH}{OI} \Rightarrow OM.OI = OH.\mathrm{OP}$ (1)

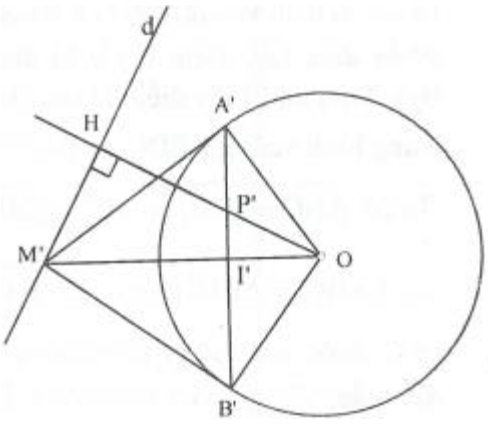
Mặt khác ΔOAM vuông tại *A* có:

$AI \perp MO$ nên $OA^2 = OM.OI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OH.OP = OA^2$

$\Rightarrow OH = \dfrac{R^2}{OP}$ không đổi

$\Rightarrow M$ thuộc đường thẳng *d* vuông góc với *OP* tại điểm *H* và cách *O* một khoảng cách $OH = \dfrac{R^2}{OP}$.



Phần đảo. Trên đường thẳng *d* lấy điểm M' bất kì. Từ M' kẻ tiếp tuyến $M'A', M'B'$. Đường thẳng $A'B'$ cắt $M'O$ tại I'.

Giả sử *OH* cắt $A'B'$ tại P'

Ta có $OP'.OH = OI'.OM' = R^2$

$\Rightarrow OP' = \dfrac{R^2}{OH} \Rightarrow P' \equiv P$.

Kết luận. Quỹ tích của điểm M là đường thẳng d vuông góc với OP tại điểm H thỏa mãn $OH = \dfrac{R^2}{OP}$.

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn đường kính AB cố định. C là một điểm bất kì thuộc nửa đường tròn. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các hình vuông $BCDE$ và $ACFG$. Gọi Ax, By là các tiếp tuyến của nửa đường tròn.

a) Chứng minh rằng khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho thì đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định và đường thẳng FG luôn đi qua điểm cố định khác.

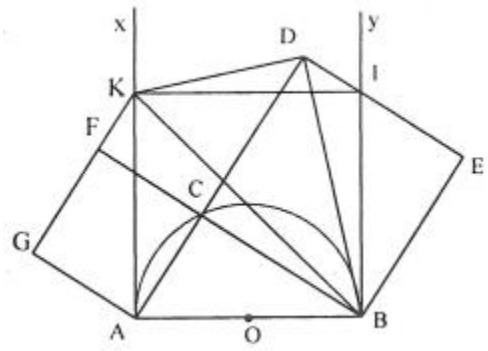
b) Tìm quỹ tích các điểm E và G khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho.

c) Tìm quỹ tích của các điểm D và F khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 2004 – 2005)

Giải

a) Gọi K là giao điểm của Ax và GF, I là giao điểm của By và ED.



Ta có: $BEI = BCA = 90°$

$EBI = CBA$ (góc có các cạnh tương ứng vuông góc) $BE = BC$.

Do đó: $\Delta BEI = \Delta BCA \Rightarrow BI = BA$

Mà By cố định, suy ra điểm I cố định.

Tương tự, K cố định.

Vậy khi C di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì đường thẳng ED đi qua điểm I cố định và đường thẳng GF đi qua điểm K cố định.

b) ***• Tìm quỹ tích điểm E.***

Phần thuận. Ta có B và I cố định (chứng minh câu a) mà $BEI = 90°$ (vì $BCDE$ là hình vuông) suy ra E thuộc nửa đường tròn đường kính BI (bên phải By).

Phần đảo. Lấy điểm E bất kì thuộc nửa đường tròn đường kính BI (bên phải By). Trên tia EI lấy điểm D sao cho $ED = BE$.

Dựng hình vuông $BEDC \Rightarrow BC = BE$.

Ta có $ABC = EBD\left(= 90° - CBI\right); BA = BI$ (chứng minh câu a)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta IBE$ (c.g.c) $\Rightarrow ACB = IEB = 90°$

$\Rightarrow C$ thuộc nửa đường tròn đường kính AB.

Kết luận. Vậy quỹ tích các điểm E là nửa đường tròn đường kính BI (bên phải By).

• Tìm quỹ tích điểm G.

Phần thuận. Ta có A và K cố định (chứng minh câu a) mà $AGK = 90°$ (vì $ACFG$ là hình vuông) suy ra G thuộc nửa đường tròn đường kính AK (bên trái Ax).

Phần đảo. Lấy điểm G bất kì thuộc nửa đường tròn đường kính AK (bên trái Ax). Trên tia GK lấy điểm F sao cho $GA = GF$.

Dựng hình vuông $AGFC \Rightarrow AC = AG$.

Ta có $BAC = KAG\left(= 90° - CAK\right); BA = KA$ (chứng minh câu a)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta AKG$ (c.g.c) $\Rightarrow ACB = AGK = 90°$

$\Rightarrow C$ thuộc nửa đường tròn đường kính AB.

Kết luận. Vậy quỹ tích các điểm G là nửa đường tròn đường kính AK (bên trái Ax).

c) ***• Tìm quỹ tích điểm D.***

Phần thuận. Ta có $ADI = 90°$ mà A, I cố định nên điểm D thuộc nửa đường tròn đường kính AI (bên trái AI).

Phần đảo. Lấy điểm D bất kì thuộc nửa đường tròn đường kính AI (bên trái AI). Dựng hình vuông $BCDE$ (thứ tự đỉnh theo chiều kim đồng hồ).

Suy ra D, I, E thẳng hàng (vì DI, DE cùng vuông góc với AD).

Ta có $ABC = EBD\left(= 90° - CBI\right); BA = BI$ (chứng minh câu a)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta IBE$ (c.g.c) $\Rightarrow ACB = IEB = 90°$

$\Rightarrow C$ thuộc nửa đường tròn đường kính AB.

Kết luận. Vậy quỹ tích các điểm D là nửa đường tròn đường kính AI (bên trái AI).

• Tìm quỹ tích điểm F.

Phần thuận. Ta có $BFK = 90°$ mà B, K cố định nên điểm F thuộc nửa đường tròn đường kính BK (bên phải BK).

Phần đảo. Lấy điểm F bất kì thuộc nửa đường tròn đường kính BK (bên phải BK). Dựng hình vuông $AGFC$ (thứ tự đỉnh theo chiều kim đồng hồ).

Suy ra G, F, K thẳng hàng (vì GK, FK cùng vuông góc với BK).

Ta có $BAC = KAG\left(= 90° - CAK\right); BA = KA$ (chứng minh câu a)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta AKG$ (c.g.c) $\Rightarrow ACB = AGK = 90°$

$\Rightarrow C$ thuộc nửa đường tròn đường kính AB.

Kết luận. Vậy quỹ tích các điểm F là nửa đường tròn đường kính BK (bên trái BK).

C. Bài tập vận dụng

1. Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A và B, gọi DE là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với d. CD và CE cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Khi đường tròn (O) thay đổi thì hai điểm M và N di động trên đường cố định nào?

2. Cho đường tròn $(O;R)$ và đoạn thẳng AB cố định nằm bên ngoài đường tròn (O). Gọi C là một điểm chuyển động trên đường tròn. Tìm tập hợp các trọng tâm G của tam giác ABC.

3. Cho đường tròn (O) nội tiếp hình vuông *PQRS*. *OA* và *OB* là hai bán kính thay đổi vuông góc với nhau. Qua *A* kẻ đường thẳng *Ax* song song với đunòg thẳng *PQ*, qua *B* kẻ đường thẳng *By* song song với đường thẳng *SP*. Tìm quỹ tích giao điểm *M* của *Ax* và *By*.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên tỉnh Phú Yên, năm học 2009 – 2010)

4. Cho đường tròn (O) và dây *BC* cố định không qua tâm *O*, điểm *A* di chuyển trên cung lớn *BC*. Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *D* sao cho $AD = AC$. Gọi *M* là trung điểm của *CD*. Hỏi *M* di chuyển trên đường nào? Nêu cách dựng đường này và giới hạn của nó.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 2007 – 2008)

5. Cho đường tròn tâm *O* đường kính *AB*. Điểm *M* chuyển động trên đường tròn đó. Gọi *H* là hình chiếu của điểm *M* trên *AB*. Tìm quỹ tích tâm *I* của đường tròn nội tiếp tam giác *OMH*.

6. Cho góc vuông *xOy* và điểm *A* cố định trên tia *Ox*, điểm *B* chuyển động trên tia *Oy*. Dựng hình vuông *ABCD* nằm trong góc *xOy*. Tìm tập hợp giao điểm *I* hai đường chéo của hình vuông này.

7. Cho ba điểm *A, B, C* theo thứ tự đó trên đường thẳng *d*. Vẽ các nửa đường tròn đường kính *AB, AC* thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng *d*. Một điểm *H* chuyển động trên đoạn *AB*. Đường thẳng vuông góc với *d* ở *H* cắt cả hai nửa đường tròn nói trên lần lượt ở *D* và *E*. Gọi *M* là giao điểm hai đường thẳng *DB* và *EC*. Tìm quỹ tích điểm *M*.

8. Cho đường tròn $(O;R)$ và tam giác cân *ABC* có $AB = AC$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Kẻ đường kính *AI*. Gọi *M* là một điểm bất kì trên cung nhỏ *AC*. Gọi *Mx* là tia đối của tia *MC*. Trên tia đối của tia *MB* lấy điểm *D* sao cho $MD = MC$.

a) Chứng minh rằng *MA* là tia phân giác của góc *BMx*.

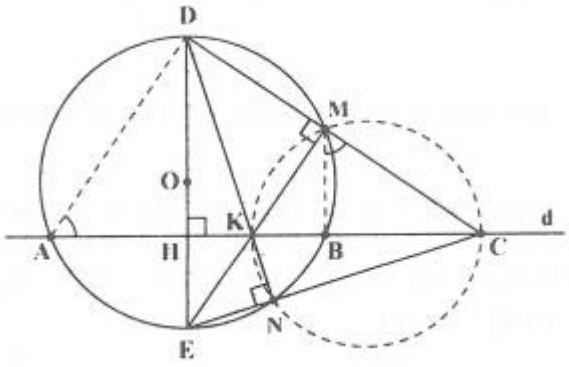
b) Gọi *K* là giao thứ hai của đường thẳng *DC* với đường tròn (O). Tứ giác *MIKD* là hình gì? Vì sao?

c) Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *MDK*. Chứng minh rằng khi *M* di động trên cung nhỏ *AC* thì *G* luôn nằm trên một đường tròn cố định.

9. Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB*. Gọi *C* là điểm chính giữa của nửa đường tròn. *M* là điểm chuyển động trên cung *BC*. Gọi *N* là giao điểm của *AM* và *OC*. Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *CMB*. Tìm tập hợp điểm *I*.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. Gọi *H, K* lần lượt là giao điểm của *CA* với *DE* và *EM*. Do *A, B, C* cố định nên *H* cố định.



- ΔCMK và ΔCHD có: $M = H = 90°$

DCH là góc chung.

Vậy: $\Delta CMK \sim \Delta CHD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CK}{CD} = \dfrac{CM}{CH}$

$\Rightarrow CK.CH = CM.CD$ (1)

• ΔCMB và ΔCAD có: $CMB = CAD$ (do tứ giác $ABMD$ nội tiếp); ACD là góc chung.

Vậy: $\Delta CMB \sim \Delta CAD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CB}{CD} \Rightarrow CM.CD = CA.CB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CK.CH = CA.CB \Rightarrow CK = \dfrac{CA.CB}{CH}$ (không đổi)

$\Rightarrow K$ là điểm cố định.

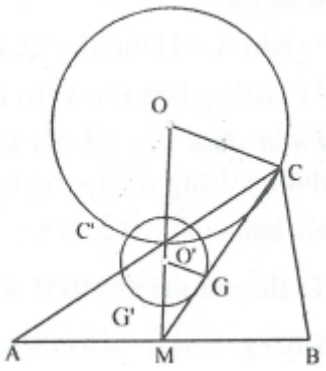
• Tam giác CDE có K là trực tâm nên DN cũng đi qua điểm K cố định.

Mà $DME = DNE = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow KMC = KNC = 90°$.

Vậy: Khi đường tròn (O) thay đổi thì hai điểm M và N di động trên đường tròn cố định đường kính CK, với $CK = \dfrac{CA.CB}{CH}$.

2. *Phần thuận.* Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M$ cố định.



Kẻ $GO' // OC$. $O' \in OM$.

Ta có G là trọng tâm nên $\dfrac{MG}{MC} = \dfrac{1}{3}$.

Ta có $GO' // OC$.

Suy ra $\dfrac{O'G}{OG} = \dfrac{MO'}{MO} = \dfrac{MG}{MC}$ nên $\dfrac{O'G}{OC} = \dfrac{MO'}{MO} = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow MO' = \dfrac{1}{3}MO \Rightarrow O'$ là điểm cố định.

$\Rightarrow O'G = \dfrac{1}{3}OC \Rightarrow O'G = \dfrac{1}{3}R$.

Vậy điểm G thuộc đường tròn tâm O' bán kính $\dfrac{1}{3}R$.

Phần đảo. Lấy G' thuộc đường tròn tâm O' bán kính $\dfrac{1}{3}R$ qua O kẻ đường thẳng song song với $O'G'$ cắt đường thẳng MG' tại C'. Ta có: $\dfrac{O'G}{OC'} = \dfrac{MO'}{MO} \Rightarrow \dfrac{O'G}{OC'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OC' = 3.O'G = R \Rightarrow C' \in (O)$.

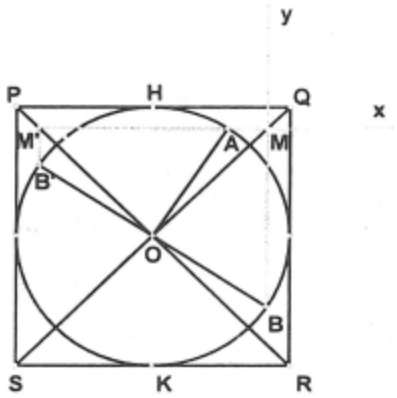
Kết luận. Vậy tập hợp các trọng tâm G của tam giác ABC là đường tròn tâm O' bán kính $\dfrac{1}{3}R$.

3. Kí hiệu như hình vẽ.

Phần thuận. Ta có $AOB = AMB = 90°$ (giả thiết)

$\Rightarrow$ tứ giác *AOBM* luôn nội tiếp

$\Rightarrow AMO = ABO = 45°$ (vì ΔAOB vuông cân tại *O*)



Suy ra *M* luôn nằm trên đường thẳng đi qua *O* và tạo với đường *PQ* một góc $45°$.

Trường hợp *B* ở vị trí B' thì M' nằm trên đường thẳng đi qua *O* và tạo với *PS* một góc $45°$.

Giới hạn.

*) Khi $A \equiv H$ thì $M \equiv Q$, khi $A \equiv K$ thì $M \equiv S$

*) Trường hợp *B* ở vị trí B': khi $A \equiv H$ thì $M' \equiv P$, khi $A \equiv K$ thì $M' \equiv R$.

Phần đảo. Lấy *M* bất kì trên đường chéo *SQ* (hoặc M' trên *PR*), qua *M* kẻ đường thẳng song song với đường thẳng *PQ* cắt (O) tại *A*.

Kẻ bán kính $OB \perp OA$.

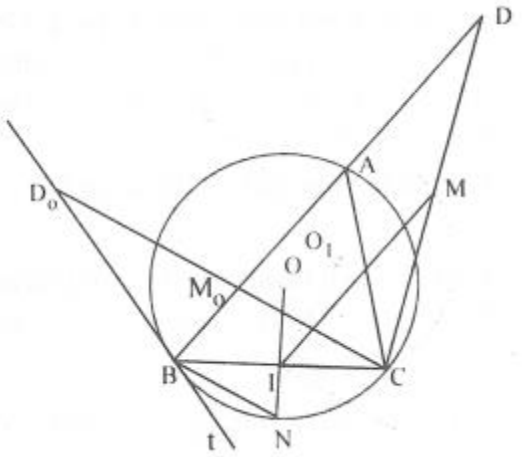
Ta thấy tứ giác *AOBM* nội tiếp (vì $AMO = ABO = 45°$).

Suy ra: $AMB = AOB = 90°$.

Mà $AM // PQ, PQ \perp PS \Rightarrow MB // PS$.

Kết luận. Quỹ tích giao điểm *M* là 2 đường chéo của hình vuông *PQRS*.

4. Tam giác *ACD* cân tại *A* nên $BAC = 2ADC$ (Góc *BAC* là góc ngoài của tam giác *ACD*)



Gọi *I* là trung điểm của *BC*, ta có $MI // BD$ (đường trung bình của tam giác *BCD*); nên

$$IMC = BDC = \frac{1}{2}BAC = \frac{1}{4}BOC = \frac{\alpha}{4} \quad (\alpha = BOC \text{ không đổi}).$$

Do đó *M* chạy trên cung tròn nhìn *IC* dưới góc $\frac{\alpha}{4}$ cùng phía với điểm *A* đối với đường thẳng *BC* không đổi.

Cách dựng. Gọi *I* là trung điểm của *BC*. Dựng tia *OI* cắt đường tròn (O) tại *N*, ta có:

$$NBC = \frac{1}{2}BAC = BDC = IMC$$

Dựng tia $IN' // BN$, dựng đường thẳng qua *I* và vuông góc với IN' cắt trung trực đoạn *IC* tại O_1

Đường tròn tâm O_1 và đi qua *C* là đường cần dựng. Khi *A* chạy trên cung lớn *BC* tới trùng với *B* thì *D* trùng với D_0 trên tiếp tuyến *Bt* của (O) và $BD_0 = BC$. Khi đó *M* trùng với M_0 là trung điểm của CD_0.

Vậy *M* chỉ di chuyển trên cung lớn CM_0 của đường tròn (O_1).

5. ***Phần thuận.*** Xét với *M* thuộc đường tròn sao cho $AM < MB$.

Ta có $HMO + HOM = 90°$ (vì ΔHMO vuông tại *H*) mà *I* là tâm đường tròn nội tiếp ΔHMO.

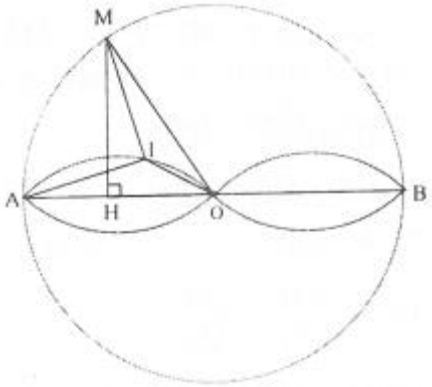
Suy ra $IMO + IOM = \frac{1}{2}HMO + \frac{1}{2}HOM = \frac{1}{2}.90° = 45°$

$\Rightarrow MIO = 135°$.

ΔOIM và ΔOIA có $OM = OA;\ MOI = AOI; OI$ chung

$\Rightarrow \Delta OIM = \Delta OIA$ (c.g.c)

$\Rightarrow MOI = AIO = 135°$ mà OA cố định; $AIO = 135° \Rightarrow I$ nằm trên cung chứa góc $135°$ dựng trên đoạn OA.



Tương tự với M thuộc đường tròn sao cho $AM > MB$.

Phần đảo. bạn đọc tự chứng minh.

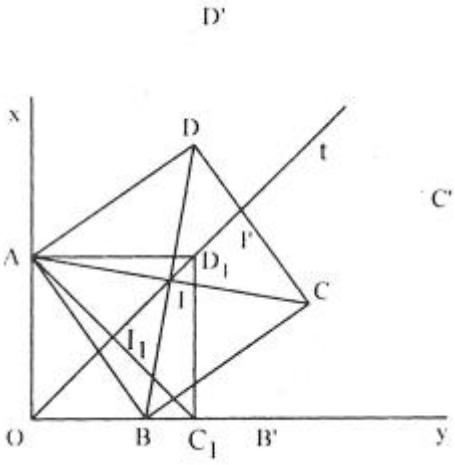
Kết luận. Vậy quỹ tích điểm I là bốn cung chứa góc $135°$ dựng trên đoạn $OA; OB$.

6. *Phần thuận.* Tứ gíc $AIBO$ là tứ giác nội tiếp vì có $AIB + AOB = 180°$

Suy ra $IOB = IAB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IB)

Do đó $IOA = 45°$ nên OI là tia phân giác của góc AOB.

Vậy điểm I chạy trên tia phân giác của góc xOy.



Giới hạn. Vẽ hình vuông AOC_1D_1 nằm trong góc xOy.

Vì điểm B chỉ chạy trên tia phân Ox nên khi B trùng với O thì C trùng với C_1, khi đó I trùng với I_1 là giao điểm của OD_1 với AC_1.

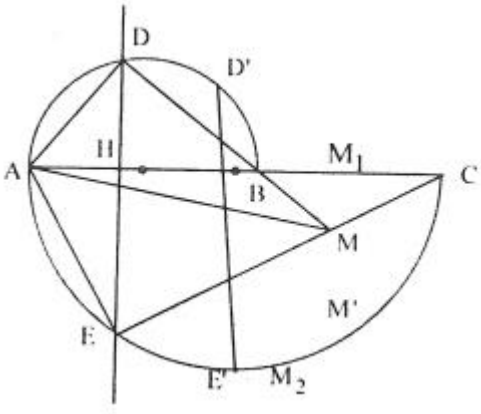
Phần đảo. Lấy điểm I' thuộc tia I_1t. Nối AI'.

Trên nửa mặt phẳng bờ AI' chứa điểm O, vẽ tia AB' (B' thuộc Ox) sao cho $I'AB' = 45°$.

Gọi C', D' lần lượt là các điểm đối xứng của A và B' qua I'. Chỉ cần chứng minh rằng I' là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $AB'C'D'$.

Kết luận. Tập hợp các điểm I là tia I_1t thuộc tia phân giác Ot của góc xOy.

7. *Phần thuận.* Đặt $AB = 2R, AC = 2R'$ thì R. R' là các độ dài không đổi.



Trong tam giác vuông ADB và AEC, ta có:

$AD^2 = AB.AH = 2R.AH; AE^2 = AC.AH = 2R'.AH$

Từ đó suy ra $AD.AE = 2AH.\sqrt{RR'}$.

Tứ giác $ADME$ nội tiếp đường tròn vì $ADM + AEM = 180°$.

Suy ra $AMD = AED$.

Từ đó $\Delta DAM \sim \Delta HAE$ (g.g).

Ta có: $\frac{AD}{AH}=\frac{AM}{AE}$.

Suy ra $AM.AH=AD.AE=2AH\sqrt{RR'}$

$\Rightarrow AM=2\sqrt{RR'}$ không đổi.

Từ đó điểm *M* chạy trên đường tròn tâm *A* bán kính $\sqrt{RR'}$.

Giới hạn. Vì *H* chuyển động trên đoạn *AB* nên:

- Khi *H* trùng với *A* thì *D* trùng với *A*, khi đó *M* trùng với M_1 như hình vẽ.

Khi *H* trùng với *B* thì *M* trùng với M_2 như hình vẽ.

Vậy nên *H* chạy trên cung M_1M_2.

Phần đảo. Lấy điểm M' thuộc cung M_1M_2. Các tia $M'B$ và *CM*; cắt các nửa đường tròn đường kính *AB*, *AC* lần lượt ở D',E'. Các bạn có thể tự chứng minh $D'E'$ vuông góc với *AB*.

Kết luận. Quỹ tích *M* là cung M_1M_2 thuộc đường tròn tâm *A* bán kính $\sqrt{RR'}$.

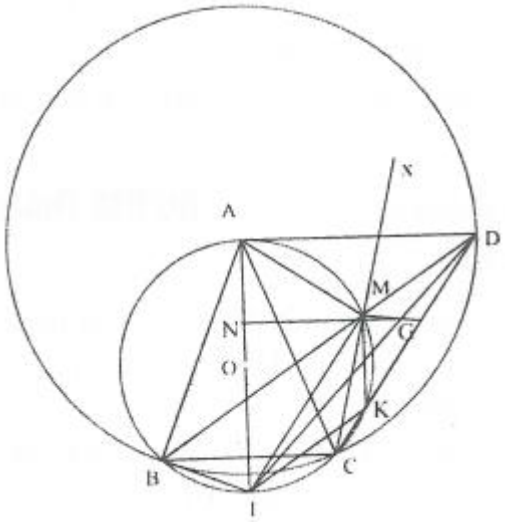
8.

a) $AMB=\frac{sđ\,AB}{2}$ (góc nội tiếp (O) chắn *AB*).

$$AMx=180°-AMC=180°-\frac{sđ\,ABC}{2}=\frac{sđ\,AC}{2}=\frac{sđ\,AB}{2}$$

Vậy: $AMB=AMx$ hay *MA* là tia phân giác của BMx.

b) Tam giác *MCD* cân $\Rightarrow MCD=MDC=\frac{BMC}{2}$ (góc ngoài của tam giác)



Lại có tam giác *ABC* cân

$\Rightarrow$ *I* là điểm chính giữa của cung *BC*

$\Rightarrow IMC=IMB=\frac{BMC}{2}$.

Vậy $MCD=IMC$

$\Rightarrow IM$ song song với *CD*

$MCD=MDC=BMI\Rightarrow BI=MK$

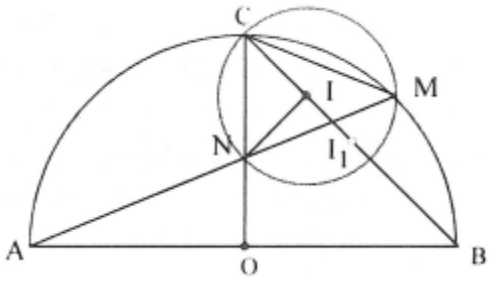
$\Rightarrow MIK=IMB\Rightarrow IK//MD$.

Vậy *MIKD* là hình bình hành.

c) *D* thuộc đường tròn $(A;AC)$.

Gọi *N* là điểm trên *AI* sao cho $NA=\frac{1}{3}AI\Rightarrow NG=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}AC$ (hằng số)

$\Rightarrow G$ thuộc đường tròn $(N;\frac{2}{3}AC)$.



9. *Phần thuận.* Ta có $CMN=\frac{sđAC}{2}=45°$

$\Rightarrow CIN=2.CMN=90°$ (góc ở tâm đường tròn (I)).

ΔICN có $IC=IN;CIN=90°$

$\Rightarrow \Delta ICN$ vuông cân tại $I\Rightarrow NCI=45°$.

Mà $NCI=45°$ (vì ΔOBC cân)

Suy ra *C, I, B* thẳng hàng.

Do đó *I* thuộc đường thẳng *BC*.

Giới hạn. Khi *M* tiến tới *B* thì *I* tiến tới I_1 (I_1 là trung điểm đoạn thẳng *BC*)

Khi *M* tiến tới *C* thì *I* tiến tới *C*.

Vậy *I* chuyển động trên đoạn thẳng I_1C thuộc đoạn thẳng *BC*.

Phần đảo. Lấy điểm I bất kì thuộc đoạn thẳng I_1C. Vẽ đường tròn $(I;IC)$ cắt *OC* tại *N*. Gọi M là giao điểm thứ hai của đoạn thẳng *AN* với (I).

Ta có $IC=IN\Rightarrow\Delta ICN$ cân mà $NCI=45°\Rightarrow CNI=45°\Rightarrow CIN=90°$

Do đó $CMN=\frac{1}{2}CIN=45°$

Ta có $CMN=CBA(=45°)\Rightarrow ACMB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow M$ thuộc nửa đường tròn (O).

Kết luận. Tập hợp các điểm *I* là đoạn thẳng CI_1 (với I_1 là trung điểm đoạn thẳng *BC*).

D.BÀI TOÁN LUYỆN THÊM (Nếu cần)

Câu 1. Cho đường tròn O , A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn O . OBC là đường kính quay quanh O. Tìm tập hợp tâm I đường ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn:

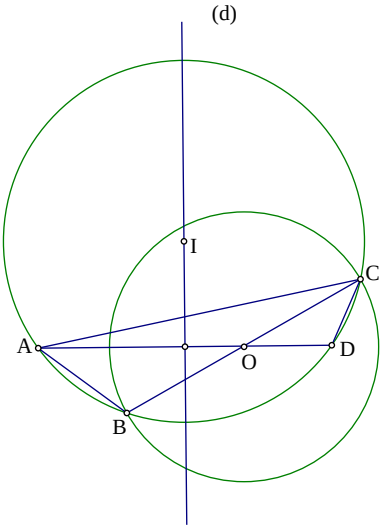
a) Phần thuận:

Gọi D là giao điểm của AO

với đường tròn I $A\neq D$.

Xét ΔOAB và ΔOCD có:

$OAB=OCD$ (cùng chắn BD)



của I); $AOB = COD$ (đối đỉnh). Do đó

$\Delta OAB \sim \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OA.OD = OB.OC \Rightarrow OA.OD = R^2 \Rightarrow OD = \frac{R^2}{OA} \Rightarrow OD = \frac{R^2}{OA}$,

$\frac{R^2}{OA}$ không đổi $\Rightarrow D$ cố định. Vậy I thuộc đường thẳng d cố định là trung trực của đoạn thẳng AD.

b) Giới hạn:

Khi BOC qua A thì $I \to I_1$ (I_1 là trung điểm của AD).

Khi BOC không qua A thì I chạy xa vô tận trên đường thẳng d .

Vậy I chuyển động trên đường thẳng d (trừ điểm I_1 là trung điểm AD là đường trung trực của đoạn thẳng AD.

c) Phần đáo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đường thẳng d $I \neq I_1$. Vẽ đường tròn $I;IA$ cắt đường tròn O tại B. BO cắt $I;IA$ tại C. Ta có: $IA = ID \Rightarrow D$ thuộc đường tròn tâm I bán kính

IA $\Delta OAB \sim \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OC = \frac{OA.OD}{OB} = \frac{OA.\frac{R^2}{OA}}{R} = R \Rightarrow C$ thuộc đường tròn O .

d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường trung trực của đoạn thẳng AD (với D thuộc tia đối của tia OA và $OD = \frac{R^2}{OA}$)trừ điểm I_1 (I_1 là trung điểm của đoạn thẳng AD).

Câu 2. Cho đường tròn $O;R$ đường kính AB. Vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại I $I \in AB$. Gọi M là điểm chuyển động trên đường tròn $O;R$. MAvà MB lần lượt cắt d tại C và D. Tìm tập hợp các tâm J của đường tròn qua ba điểm A,D,C.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi E là điểm đối xứng của B qua d $\Rightarrow E$ cố định.

$EDC = BDC; AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$CAI = BDC$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

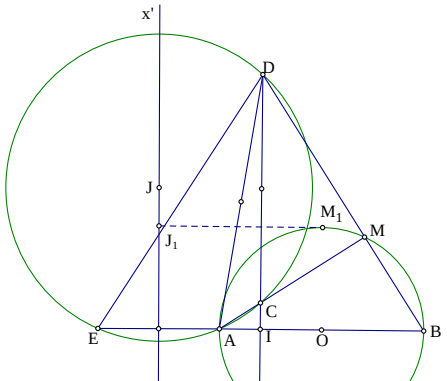
Suy ra $EDC = CAI \Rightarrow$ tứ giác $EDCA$ nội tiếp $\Rightarrow$

đường tròn qua ba điểm A,D,C

đi qua hai điểm cố định A,E.

Vậy tâm I của đường tròn

qua ba điểm A,D,C thuộc



đường thẳng cố định là đường

trung trực xy của đoạn thẳng AE.

b) Giới hạn:

+ Khi $M \equiv M_1$ thì $J \equiv J_1$ (M_1 là trung điểm AB; $J_1M_1 \perp OM_1, J_1 \in d$

+ Khi $M \equiv M_2$ thì $J \equiv J_2$ (M_2 là trung điểm AB; $J_2M_2 \perp OM_2, J_2 \in d$

Do đó J chuyển động trên hai tia J_1x, J_2y của đường trung trực của đoạn thẳng AE.

c)Phần đảo: Lấy điểm J bất kỳ trên tia J_1x (hoặc J_2y). Vẽ đường tròn $J;JA$ cắt d tại C,D.

AC cắt BD tại M.

Ta có: $JE = JA$ (J thuộc trung trực của AE) $\Rightarrow E \in J,JA$.

$ACI = DEA$ ($EDCA$ nội tiếp J); $DBE = DEA$ (B,E đối xứng qua d).

Suy ra $ACI = DBE \Rightarrow$ tứ giác $ICMB$ nội tiếp đường tròn.

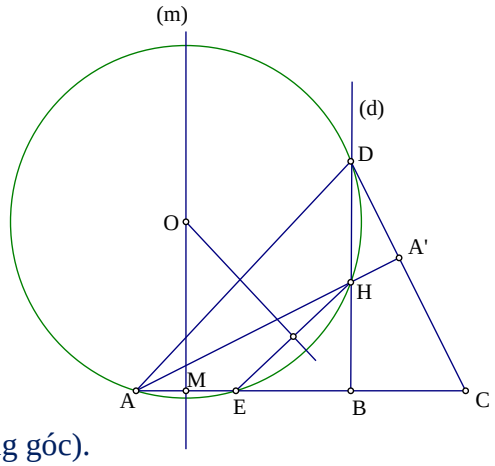
Mà $CIB = 90^0 \Rightarrow CMB = 90^0 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn O.

d)Kết luận: Tập hợp các tâm J đường tròn qua ba điểm A,D,C là hai tia J_1y của đường trung trực của đoạn thẳng AE.

Câu 3. Cho ba điểm cố định A,B,C thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên đường thẳng d vuông góc AB tại B lấy điểm bất kỳ D. Gọi H là trực tâm của tam giác DAC. Tìm tập hợp các tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác DAH.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: AC cắt O tại A,E.



Xét ΔBAH và ΔBDC có:

$ABH = DBC = 90^0$;

$BAH = BDC$

(hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

Do đó $\Delta BAH \sim \Delta BDC \Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC}$. Suy ra: $BD.BH = AB.BC$ (không đổi) (1)

Xét ΔBAD và ΔBHE có: B chung, $BAD = BHE$ (tứ giác $ADHE$ nội tiếp). Do đó:

$\Delta BAD \sim \Delta BHE \Rightarrow \dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BA.BE = BD.BE \Rightarrow BC = BE$ (2) Từ (1) và (2) ta có:

$BD.BH = AB.BC = BA.BE \Rightarrow BC = BE$. E thuộc đường thẳng cố định AB suy ra E cố định.

$OA = OE$ (O là tâm đường tròn DAH) $\Rightarrow O$ thuộc đường thẳng cố định , m là đường trung trực của đoạn thẳng AE.

b) Giới hạn: D chuyển động trên cả đường thẳng d nên O chuyển động trên cả đường thẳng m (loại trừ điểm m là giao điểm của AC và m).

c) Phần đảo: Lấy O bất kỳ trên đường thẳng m . Vẽ đường tròn $O;OA$ cắt đường thẳng d lần lượt tại H, D.

$OA = OE$ nên $E \in O;OA$. Xét ΔBAD và ΔBHE có: B chung; $BAD = BHE$ (tứ giác $ADHE$ nội tiếp). Suy ra: $\Delta BAD \sim \Delta BHE \Rightarrow \dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BA.BE = BD.BH$. Mà $BE = BC$ do đó:

$BD.BH = AB.BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC}$. Xét ΔBAH và ΔBDC có: $ABH = DBC = 90^0$; $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC}$. Do đó $\Delta BAH \sim \Delta BDC \Rightarrow BAH = BDC$.

Mà $DBC + BCD = 90^0$ nên $BAH + BCD = 90^0 \Rightarrow AA'C = 90^0 \Rightarrow AH \perp DC$.

ΔADC có $DB \perp AC, AH \perp DC \Rightarrow H$ là trực tâm của ΔDAC.

d) Kết luận: Tập hợp các tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác DAH là đường trung trực m của đoạn thẳng AE (trừ điểm M là giao điểm của AC với m (với E là điểm đối xứng của C qua B).

Câu 3. Cho tam giác cân ABC nội tiếp trong đường tròn $O;R$ có $AB = AC = R\sqrt{2}$. M là điểm chuyển động trên cung nhỏ AC

đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại D. Tìm tập hợp các điểm I

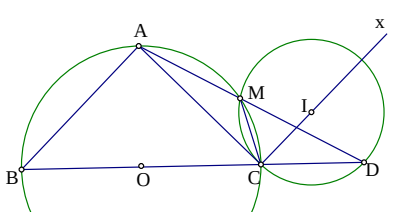
là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: $AB = AC = R\sqrt{2}$ (gt); AB, AC là dây cung của $O;R$ nên AB, AC là các cạnh của hình vuông nội tiếp $O;R$ suy ra ΔABC vuông cân tại A, suy ra BC là đường kính của $O;R$,

$CID = 2CMD = 90^0$

Ta có: $CMD = 45^0 \Rightarrow CMD$ nhọn,



do đó $CMD = \frac{1}{2}CID \Rightarrow CID = 90^0$.

ΔICD có $IC = ID = R \Rightarrow \Delta ICD$

cân tại I mà $CID = 90^0$ nên ΔICD vuông cân tại I, suy ra $ICD = IDC = 45^0$. Ngoài ra $ACB = 45^0$ do đó $ACI = 90^0$.

$ACI = 90^0$ và AC cố định Cx vuông góc với AC tại C.

b) Giới hạn:

Khi $M \equiv C$ thì $I \equiv C$.

Khi $M \equiv A$ thì I chạy xa vô tận trên tia Cx.

Vậy I chuyển động trên tia Cx vuông góc với AC tại C.

c) Phần đảo: Lấy I bất kỳ thuộc tia Cx. Vẽ đường tròn $I;IC$, đường tròn này cắt BC tại B, cắt O tại M $M \neq C; D \neq C$. Tứ giác $BAMC$ nội tiếp $\Rightarrow ABC + AMC = 180^0 \Rightarrow AMC = 135^0$.

ΔICD có $IC = ID = r \Rightarrow IDC = 45^0 \Rightarrow CID = 90^0$

$CMD = \frac{1}{2}CID \Rightarrow CID = 45^0$ $AMC + CMD = 135^0 + 45^0 = 180^0 \Rightarrow A, M, D$ thẳng hàng.

d) Kết luận: Tập hợp các tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔMCD là tia Cx vuông góc với AC tại C.

Câu 4. Cho đường tròn $O;R$ và điểm A cố định. Đường tròn tâm I di động qua A cắt O tại B,C. Gọi M là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại A của đường tròn I. Tìm tập hợp các điểm M.

Hướng dẫn:

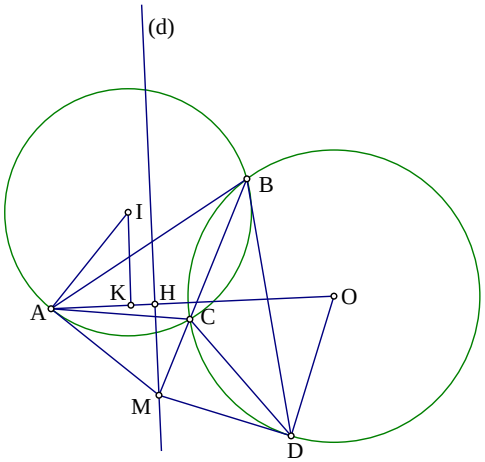
a) Phần thuận: Vẽ tiếp tuyến MD với O $D \in O$.

Xét ΔMAC và ΔMBA có M chung,

$MAC = MBA$,(góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AC)của I.

Do đó $\Delta MAC \sim \Delta MBA$.

$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$.



Tương tự $MD^2 = MB.MC$. Mặt khác,

ΔMOD có $D = 90^0$ nên theo định lý Pitago, ta có: $MD^2 = MO^2 - OD^2 = MO^2 - R^2$. Do đó $MA^2 = MO^2 - R^2$, suy ra $MO^2 - MA^2 = R^2$.

ΔHMA $MHA = 90^0 \Rightarrow MA^2 = MH^2 + AH^2$ ΔHMO $MHO = 90^0 \Rightarrow MO^2 = MH^2 + HO^2$. Do đó:

$MH^2 + OH^2 - MH^2 + AH^2 = R^2 \Rightarrow OH^2 - AH^2 = R^2$;

Do đó $OH + AH$ $OH - AH = R^2 \Rightarrow \begin{cases} OH - AH = \dfrac{R^2}{OA} \\ OH + AH = OA \end{cases} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R^2}{OA} + OA\right)$ (không đổi) $\Rightarrow H$ cố định. H cố định, OA cố định, $MH \perp AO$ tại H. Vậy M thuộc đường thẳng d vuông góc với OA tại H.

b) Giới hạn: O chuyển động trên cả đường thẳng d.

c) Phần đảo: Lấy M bất kỳ thuộc đường thẳng d. Vẽ cát tuyến MBC với O $B,C \in O$, vẽ đường tròn I qua A,B,C vẽ tiếp tuyến MD với O $D \in O$.

Xét ΔMCD và ΔMDB có M (chung), $MDC = MBD$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung CD của O).

Do đó $\Delta MCD \sim \Delta MDB \Rightarrow \dfrac{MC}{MD} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MD^2 = MB.MC$

ΔMDO có $D = 90^0 \Rightarrow MD^2 = MO^2 - OD^2 = MO^2 - R^2$.

Suy ra $MB.MC = MO^2 = R^2$; mà $HO^2 - AH^2 = R^2$, do đó

$MB.MC = MO^2 - HO^2 - AH^2 = MO^2 - HO^2 + AH^2 = MH^2 + AH^2 = MA^2$. Xét ΔMAC và

ΔMBA có AMC (chung); $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MA}$ (vì $MB, MC = MA^2$). Do đó

$\Delta MAC \sim \Delta MBA \Rightarrow MAC = MBA$. Vẽ $IK \perp AC$ ta có $AIK = ABC\left(= \dfrac{1}{2}\text{sđ}AC\right)$ suy ra:

$MAC = AIK$. Mặt khác ΔAKI có $K = 90^0 \Rightarrow AIK + IAK = 90^0$ nên

$MAC + IAK = 90^0 \Rightarrow IAM = 90^0$, do đó MA là tiếp tuyến của I.

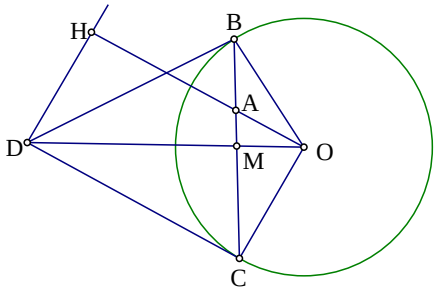
d) Kết luận: Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với OA tại H (với $OH = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R^2}{OA} + OA\right)$)

Câu 5. Cho đường tròn $O;R$ và điểm A cố định trong đường tròn $A \neq 0$ BC là dây cung di động

quay quanh A. Các tiếp tuyến tại B và C với đường tròn O cắt nhau tại D. Tìm tập hợp các điểm D.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi M là giao điểm của OD và BC.



Vẽ $DH \perp OA$ $H \in OA$, $DB = DC$ (định lý tiếp tuyến), $OB = OC = R$

suy ra DO là trung trực của $BC \Rightarrow DO \perp BC$.

Xét ΔOMA và ΔOHD có O chung, $OMA = OHD = 90^0$. Do đó

$\Delta OMA \sim \Delta OHD \Rightarrow \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OM}{OH} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$, ΔOBD có $B = 90^0; BM \perp OD$ nên $OM.OD = OB^2 = R^2$. Suy ra $OA.OH = R^2 \Rightarrow OH = \dfrac{R^2}{OA}$ (không đổi) $\Rightarrow H$ cố định. Vậy D thuộc đường thẳng cố định d vuông góc với đường thẳng OA tại H.

b) Giới hạn: BC quay quanh A nên D chuyển động trên đường thẳng d .

c) Phần đảo: Lấy D bất kỳ trên đường thẳng d . Vẽ dây BC qua A và vuông góc với OD tại M $M \in OD$. Xét $\Delta OMA \sim \Delta OHD \Rightarrow \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OM}{OH} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$. Mà $OA.OH = R^2$ nên $OM.OD = R^2 = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OB}{OD}$ do đó $\Delta OMB \sim \Delta OBD$,

suy ra $OMB = OBD$ có MOB (chung); $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OB}{OD}$ do đó $\Delta OMB \sim \Delta OBD$,

suy ra $OMB = OBD$; mà $OMB = 90^0$ nên $OBD = 90^0 \Rightarrow DB$ là tiếp tuyến của O .

Tương tự DC là tiếp tuyến của O .

d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là đường thẳng d vuông góc với OA tại H (với $OH = \dfrac{R^2}{OA}$).

Câu 6. Cho đường tròn $O;R$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Cát tuyến m qua A cắt đường tròn O tại B và C. Tiếp tuyến tại B và C với đường tròn O cắt nhau tại D. Tìm tập hợp các điểm D.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi M là giao điểm của OD và BC. Vẽ đường thẳng d qua D vuông góc với OA tại H $H \in OA$.

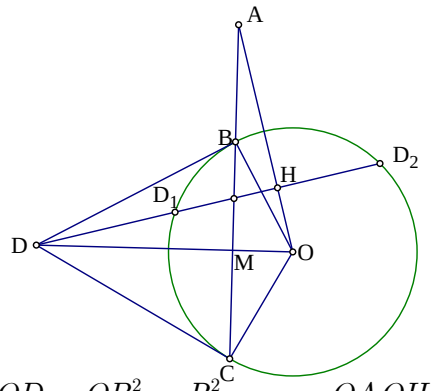
$DB = DC$ (định lý tiếp tuyến); $OB = OC = R$. Suy ra DO là trung trực của $BC \Rightarrow DO \perp BC$.

Xét ΔOMA và ΔOHD

có MOA chung; $OMA = OHD = 90^0$

do đó $\Delta OMA \sim \Delta OHD \Rightarrow$

$\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OM}{OH} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$



ΔOBD có $B = 90^0$, $BM \perp OD$ nên $OM.OD = OB^2 = R^2$, suy ra $OA.OH = R^2$ hay $OH = \dfrac{R^2}{OA}$ không đổi $\Rightarrow H$ cố định. Vậy D thuộc đường thẳng d cố định vuông góc với đường thẳng OA tại H.

b) GIới hạn: D nằm ngoài đường tròn $O;R$, do đó D chuyển động trên đường thẳng d trừ đoạn thẳng D_1D_2 (với D_1, D_2 là giao điểm của d và đường tròn $O;R$.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kỳ trên đường thẳng d trừ đoạn thẳng D_1D_2. Vẽ đường thẳng m qua A vuông góc với OD cắt đường tròn $O;R$ tại B,C cắt OD tại M.

Xét ΔOMA và ΔOHD có MOA chung; $OMA = OHA = 90^0$,

do đó $\Delta OMA \sim \Delta OHD \Rightarrow \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OM}{OH} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$.

Mà $OA.OH = R^2$ nên $OM.OD = R^2$, suy ra $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OB}{OD}$.

Xét ΔOMB và ΔOBD có O chung; $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OB}{OD}$, do đó $\Delta OMB \sim \Delta OBD$, suy ra $OMB = OBD$ mà $OMB = 90^0$ nên $OBD = 90^0 \Rightarrow DB$ là tiếp tuyến của O .

Tương tự DC là tiếp tuyến của O .

d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là đường thẳng d (trừ đoạn thẳng D_1D_2) vuông góc với OA tại H (với $OH = \dfrac{R^2}{OA}$).

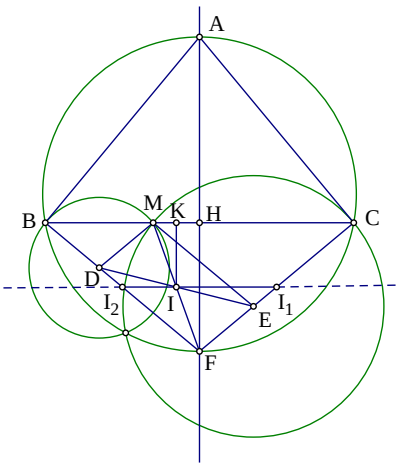
Câu 7. Tam giác ABC cân tại A cố định nội tiếp trong đường tròn $O;R$. Điểm M di động trên cạnh BC. Gọi D là tâm đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AB tại B. Gọi E là tâm đường tròn đi qua M

và tiếp xúc với AC tại C. Tìm tập hợp các điểm I là trung điểm của DE.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận:

Vẽ đường kính AF của đường tròn O;



$ABF = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$ABD = 90^0$ (AB tiếp xúc với D tại B).

Suy ra B, D, F thẳng hàng.

Tương tự C, E, F thẳng hàng.

ΔABC cân tại $A \Rightarrow AF \perp BC; \Rightarrow BF = CF; \Rightarrow B_1 = C_1$.

$BD = DM \Rightarrow B_1 = DMB; EM = EC \Rightarrow C_1 = EMC$.

Suy ra $B_1 = DMB = EMC = C_1$.

$B_1 = EMC \Rightarrow BF // ME; C_1 = DMB \Rightarrow MD // CF$.

$\begin{cases} BF // ME \\ MD // CF \end{cases} \Rightarrow DMEF$ là hình bình hành mà I là trung điểm của $DE \Rightarrow I$ là trung điểm của MF.

Vẽ $IK \perp BC$.

ΔFMH có $IK // FH$ $IK \perp BC, FH \perp BC$; I là trung điểm của $MF \Rightarrow IK$ là đường trung bình của $\Delta FMH \Rightarrow IK = \frac{1}{2} FH$ (không đổi).

Vậy I thuộc đường thẳng d song song với BC cách BC một khoảng bằng $\frac{1}{2} FH$.

b) Giới hạn:

Khi $M \equiv B$ thì $I = I_1$ (I_1 là trung điểm của BF);

Khi $M \equiv C$ thì $I = I_2$ (I_2 là trung điểm của CF).

Do đó I chuyển động trên đoạn thẳng $I_1 I_2$.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng $I_1 I_2$, FI cắt BC tại M.

Vẽ $MD//CF$ $D\in BF$, $ME//BF$ $E\in CF$ $\Rightarrow DMEF$ là hình bình hành mà I là trung điểm của MF $\Rightarrow I$ là trung điểm của DE.

Dễ dàng chứng minh được $DB=DM$ và $EM=EC$.

Do đó AB tiếp xúc với D ; AC tiếp xúc với E .

d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường trung bình của tam giác FBC (với F là trung điểm của BC).

Câu 8. Cho đường tròn $O;R$ đường kính cố định AB và đường kính CD di động. AC và AD cắt tiếp tuyến a với O tại B lần lượt tại M và N. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

Hướng dẫn:

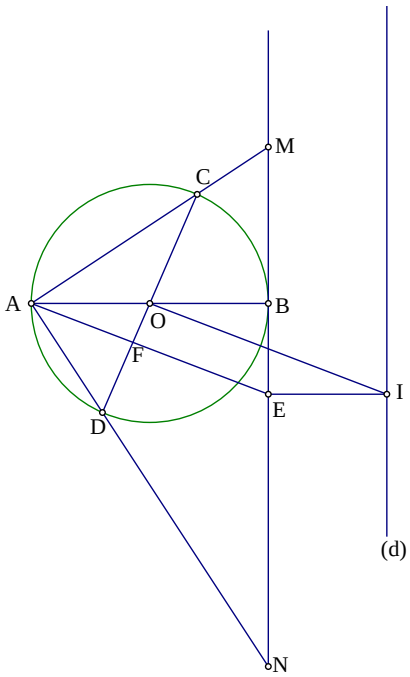
a). Phần thuận: $\text{sđ}ACD=\frac{1}{2}\text{sđ}AD;\text{sđ}DNM=\frac{1}{2}\text{ sđ}AB-\text{sđ}BD$.

$=\frac{1}{2}\ 180^0-\text{sđ}BD\ =\frac{1}{2}\text{sđ}AD$

Suy ra $ACD=DNM\Rightarrow$

tứ giác $DCMN$ nội tiếp trong

đường tròn I .



$DAC=90^0$ (góc nội tiếp

chắn nửa đường tròn).

ΔAMN có $A=90^0$, AE là trung tuyến suy ra $EA=EM\Rightarrow EAM=AME$.

Do đó $ACF+FAC=ANM+AMN$.

Mà $ANM+AMN=90^0\Rightarrow ACF+FAC=90^0$ hay $AE\perp DC$.

I là tâm đường tròn qua $D,C,M,N\Rightarrow OI\perp DC, AE\perp DC\Rightarrow AE//OI$.

$AO\perp a, EI\perp a\Rightarrow AO//EI$

Suy ra $AOIE$ là hình bình hành $\Rightarrow EI=AO=R$.

Đường thẳng a cố định.

Vậy I thuộc đường thẳng cố định d song song với đường thẳng a và cách a một khoảng bằng R.

b) Giới hạn: CD quay quanh O nên E chuyển động trên cả đường thẳng a do đó I chuyển động trên cả đường thẳng $d, d//a, d$ cách a một khoảng bằng R. d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A.

c) Phần đảo: Lấy điểm I tùy ý trên đường thẳng d. Vẽ $IE \perp a$ $E \in a$. Vẽ $DC \perp OI$ tại O.

AC, AD lần lượt cắt a tại M, N.

$AO \perp a, EI \perp a \Rightarrow AO//EI$ mà $AO = EI = R$ do đó $AOIE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE//OI$. Mà $OI//DC$ nên $AE \perp DC$.

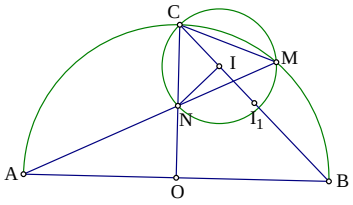
Tương tự như trên, ta chứng minh được tứ giác $DCMN$ nội tiếp. Suy ra ΔEAM cân tại $E \Rightarrow EA = EM$. Suy ra ΔEAN cân tại $E \Rightarrow EA = EN$. Do đó $EM = EN$.

Vậy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường thẳng d, song song với a, d cách a một khoảng bằng R, d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A.

Câu 9. Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O bán kính R. C là trung điểm cung AB. M là điểm chuyển động trên cung BC, AM cắt CO tại N. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN. Tìm tập hợp các điểm I.

Hướng dẫn:



a). Phần thuận: $CMN = \frac{1}{2}$ sđ$AC = 45^0$;

CMN nhọn suy ra $CMN = \frac{1}{2}CIN \Rightarrow$

$CIN = 90^0$. ΔICN cân $IC = IN = r$

có $CIN = 90^0 \Rightarrow \Delta ICN$ vuông cân tại $I \Rightarrow NCI = 45^0$.

Mà $NCB = 45^0$ (ΔOBC cân tại O) suy ra C, I, B thẳng hàng.

Do đó I thuộc đường thẳng BC.

b) Giới hạn:

Khi $M \equiv B$ thì $I \equiv I_1$ (I_1 là trung điểm của BC.

Khi $M \equiv C$ thì $I \equiv C$.

Vậy I chuyển động trên đoạn I_1C thuộc đoạn thẳng BC.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng I_1C. Vẽ đường tròn $I;IC$ cắt OC tại N, AN cắt I tại M $M \neq N$.

Ta có $IC = IN \Rightarrow \Delta ICN$ cân mà $NCI = 45^0 \Rightarrow CNI = 45^0 \Rightarrow CIN = 90^0$. Do đó $CMN = \frac{1}{2}CIN = 45^0$; $CMN = CBA = 45^0 \Rightarrow$ tứ giác $ACMB$ nội tiếp được $\Rightarrow M$ thuộc nửa đường tròn O.

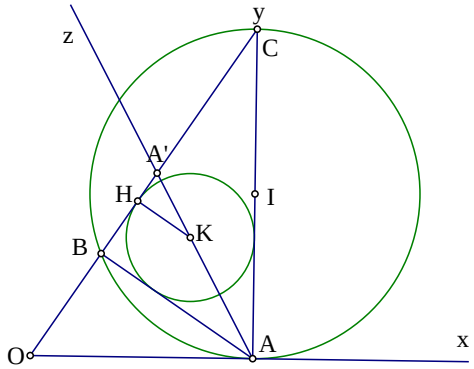
d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đoạn thẳng CI_1 (I_1 là trung điểm của đoạn thẳng BC).

Câu 10. Cho góc nhọn xOy. A là điểm cố định trên tia Ox. Đường tròn I di động tiếp xúc tia Ox tại A và cắt tia Oy tại B và C. Tìm tập hợp tâm K của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: $BAK = \frac{1}{2}BAC$ (tính chất tiếp tuyến).

$OAB = OCA\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}AB\right)$.



Do đó $OAK = OAB + BAK$

$= \frac{1}{2}\ OAB + OCA\ + \frac{1}{2}BAC$

$= \frac{1}{2}OCA + \frac{1}{2}OAC$

$= \frac{1}{2}OCA + \frac{1}{2}\ OAB + BAC\ = 90^0 - \frac{1}{2}AOC = 90^0 - \frac{1}{2}xOy.$

Ta có OAK không đổi, OA cố định, do đó K thuộc tia Az sao cho $OAz = 90^0 - \frac{1}{2}xOy$.

b) Giới hạn: K nằm trong xOy. Do đó K thuộc đoạn thẳng AA' (A' là giao điểm của tia Az và tia Oy).

c) Phần đảo: Lấy điểm K bất kỳ trên tia Az. Vẽ $KH \perp Oy$ $H \in Oy$, vẽ đường tròn $K;KH$. Từ A vẽ các tiếp tuyến với K lần lượt cắt Oy tại B và C. Cần chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với tia Ox.

Ta có $BAK = \frac{1}{2}BAC$ (tính chất tiếp tuyến);

$OAK = OAz = 90^0 - \frac{1}{2}xOy = 90^0 - \frac{1}{2}AOC = \frac{1}{2}OCA + \frac{1}{2}OAC = \frac{1}{2}OCA + \frac{1}{2}\ OAB + BAC$.

$OAK = \frac{1}{2}\ OCA + OAB\ + \frac{1}{2}BAC$ (1). Mà $OAK = OAB + BAK = OAB + \frac{1}{2}BAC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $OAB = OCA$. (*)

Vẽ tia Am là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABC (tia Ax nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa tia OA). Ta có: $mAB = OCA\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}AB\right)$ (**) Từ (*) và (**) có $OAB = mAB$ suy ra hai tia AO và Am trùng nhau.

Vậy AO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm K là đoạn thẳng AA' (A' là giao điểm của hai tia Az và Oy và $OAz = 90^0 - \frac{1}{2}xOy$.

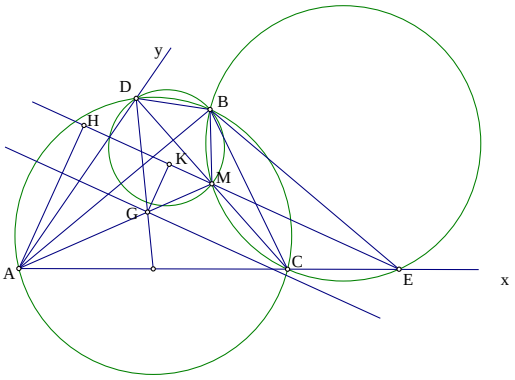
Câu 11. Cho $xAy = \alpha$ không đổi , điểm B cố định nằm trong xAy. Đường tròn O di động qua A và B cắt Ax, Ay lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ADC thuộc một đường cố định.

Hướng dẫn:

Ta có: $xAB = CDB$,

$BAy = BCDDAC + DBC = 180^0$

Các góc xAB, BAy, DAC không đổi.



Do đó các góc CDB, BCD, DBC không đổi. Gọi M là trung điểm của đoạn CD, ta có các góc BMC, BMD không đổi.

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC cắt Ax tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD cắt Ay tại F.

Ta có $BEC + BMC = 180^0 \Rightarrow AEB = 180^0 - BMC$ không đổi $\Rightarrow E$ cố định.

$BME = BCE\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}BE\right)$, $BDF = BCE$ (tứ giác $ADBC$ nội tiếp), $BDF + BMF = 180^0$ (tứ giác $DBMF$ nội tiếp).

Do đó $BME + BMF = 180^0 \Rightarrow E, M, F$ thẳng hàng.

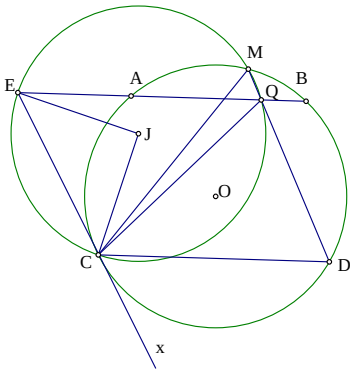
Vẽ $AH \perp EF$ $H \in EF$, $GK \perp EF$ $K \in EF$ ta có AH không đổi; đặt $AH = h, AH // GK$. ΔAHM có $GK // AH$ suy ra $\frac{GM}{AM} = \frac{GK}{AH}$.

G là trọng tâm ΔADC, AM là trung tuyến của ΔADC nên $\frac{GM}{AM}=\frac{1}{3}$.Do đó $\frac{GK}{AH}=\frac{1}{3}$, suy ra $GK=\frac{1}{3}h$ không đổi, EF cố định. Vậy G thuộc đường thẳng song song với EF là cách EF một khoảng bằng $\frac{1}{3}h$.

Câu 12. Cho đường tròn $O;R$ và hai dây cung AB và CD song song với nhau. M là điểm di động trên đường tròn O. Đường thẳng MD cắt đường thẳng AB tại Q. Tìm tập hợp tâm J đường tròn ngoại tiếp tam giác MCQ.

Hướng dẫn:

1) Xét M nằm trên cung lớn CD.



Tiếp tuyến của O tại C cắt AB ở E, ta có E cố định.Gọi Cx là tia đối của tia CE. $QEC=DCx$ (vì $AB//DC$), $QMC=DCx\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}DC\right)$.

Do đó $QEC=QMC\Rightarrow$ tứ giác $MECQ$ nội tiếp.

Ta có $JE=JC$; E,C cố định. Do đó J thuộc đường cố định là đường trung trực của đoạn thẳng EC.

2) Xét M nằm trên cung CD. Tương tự trường hợp 1) ta cũng có: $QEC=DCx$. $QMC+DCx=180^0$.

Do đó $QEC+QMC=180^0\Rightarrow$ tứ giác $MCEQ$ nội tiếp được. Ta có $JE=JC$; E,C cố định.

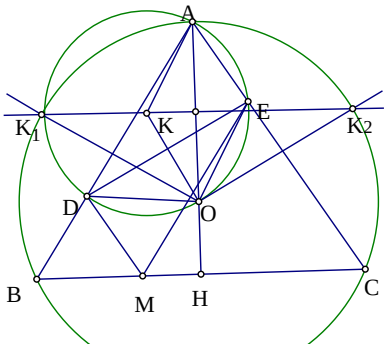
Do đó J thuộc đường trung trực của đoạn thẳng EC.

Câu 13. Cho tam giác ABC cân tại A. M là điểm di động trên cạnh BC. Vẽ MD song song AC $D\in AB$ vẽ ME song song AB $E\in AC$. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Tìm tập hợp điểm K.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi O là giao điểm của đường tròn ADE và đường cao AH của tam giác ABC.

Tứ giác $MDAE$ là hình bình hành (vì $MD//EA$ và $DA//ME$), suy ra $DM=AE$.



Ta có: $DMB = ACB$ $DM//AC$;

$DBM = ACB$ (ΔABC cân tại A).

Suy ra $DMB = DBM$.

Vậy ΔDBM cân tại D, suy ra $DM = DB$.Do đó $AE = DB = DM$

$DAO = OAE \Rightarrow OD = OE \Rightarrow OD = OE$.

Xét ΔOAE và ΔOBD có $OE = OD, AEO = ODB$ (tứ giác $AEOD$ nội tiếp), $AE = DB$.

Do đó $\Delta OAE = \Delta OBD$ (c.g.c) $\Rightarrow OA = OB \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB.

Vậy O là điểm cố định (O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Ta có $KA = KO$, OA cố định, suy ra K nằm trên đường trung trực d của đoạn thẳng OA.

b) Giới hạn:

Khi $M \equiv B$ thì $D \equiv B, K \equiv K_1$ (K_1 là giao điểm của d và đường trung trực của AB).

Khi $M \equiv C$ thì $E \equiv C, K \equiv K_2$ (K_2 là giao điểm của d và đường trung trực của AC).

Vậy K di động trên đoạn thẳng K_1K_2.

c) Phần đảo: Lấy điểm K bất kỳ thuộc đoạn thẳng K_1K_2. Vẽ đường tròn $K;KA$ cắt AB, AC lần lượt ở D và E. Vẽ $DM//AC$ $M \in AC$. Cần chứng minh rằng $ME//AB$.

Ta có: $KA = KO \Rightarrow O \in K$.

Xét ΔOAE và ΔOBD có: $OAE = OBD = OAD$; $AEO = ODB$ (tứ giác $AEOD$ nội tiếp)

Do đó $\Delta OAE \sim \Delta OBD \Rightarrow \dfrac{AE}{BD} = \dfrac{OA}{OB} = 1 \Rightarrow AE = BD$.

$DBM = ACB$(ΔABC cân tại A), $DMB = ACB$ $DM//AC$. Do đó $DBM = DMB \Rightarrow \Delta DBM$ cân tại $D \Rightarrow DM = BD$.

Ta có $AE = DM$ mà $AE//DM$ nên tứ giác $MDAE$ là hình bình hành, suy ra $ME//AB$.

d) Kết luận: Tập hợp điểm K là đoạn thẳng K_1K_2 thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AO.

Câu 14. Cho tam giác ABC, H là trực tâm. Hai đương thẳng song song d và d' lần lượt đi qua A và H. Các điểm M, N lần lượt là hình chiếu của B và C trên d ; các điểm Q, P lần lượt là hình chiếu của

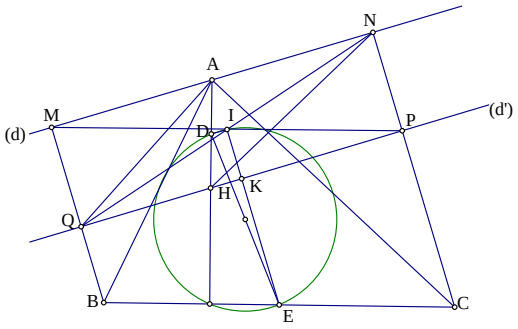
B,C trên d' . MP cắt NQ tại I . Tìm tập các điểm I khi d và d' di động.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận:

$$\begin{cases} BM \perp d \\ CN \perp d \ (gt) \end{cases} \Rightarrow BM // CN$$

$$\begin{cases} BM // CN \\ MN // QP (gt) \end{cases} \Rightarrow MNPQ$$



là hình bình hành.

Mà $QMN = 90^0$ (gt) nên $MNPQ$

là hình chữ nhật $\Rightarrow I$ là trung điểm của các đoạn thẳng MP và NQ.

Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AH và BC, ta có D,E cố định.

$ANHQ$ là hình thang, DI là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo, suy ra $DI // MN$.

$MPCB$ là hình thang, IE là đường trung bình hình thang, suy ra $IE // NC$.

$DI // MN, IE // NC$ mà $MNC = 90^0$ nên $DIE = 90^0$.

$DIE = 90^0, DE$ cố định. Vậy I thuộc đường tròn đường kính DE .

b) Giới hạn: d quay quanh A nên điểm I chuyển động trên đường tròn đường kính DE .

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đường tròn đường kính DE . Nối DI . Qua A,H kẻ các đường thẳng d , d' song song với DI . Gọi M,Q lần lượt là hình chiếu của B trên d , d' . MI cắt d' tại P ; QI cắt d tại N ; PQ cắt IE tại K .

$MN // DI // QP, DA = DH \Rightarrow IM = IP, IN = IQ$

$IM = IP, IN = IQ \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mà $M = 90^0$ nên $MNPQ$ là hình chữ nhật.

ΔPMB có $IM = IP, IK // MB \Rightarrow KB = KP$;

ΔBPC có $KB = KP, EB = EC \Rightarrow EK // CP$

$DIE = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $DI // MN \Rightarrow EI \perp MN, EI \perp MN, PN \perp MN$

$\Rightarrow C,P,N$ thẳng hàng.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường tròn đường kính DE.

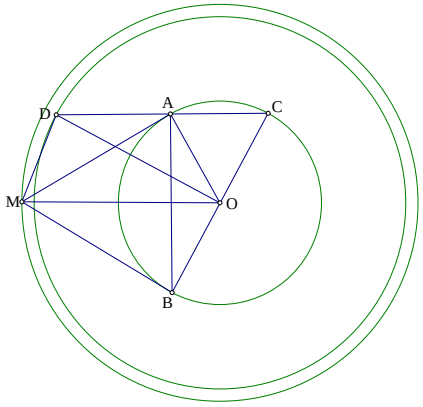
Câu 15. Cho đường tròn $O;R$, M là điểm ở ngoài O , vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến O (A, B là tiếp điểm). đường trung trực của đường kính BC cắt CA tại D.

1) Tìm tập hợp các điểm M sao cho ΔMAB đều.

2) Tìm tập hợp các điểm D sao cho ΔMAB đều.

Hướng dẫn:

1) a) Phần thuận:



ΔMAB đều $\Rightarrow AMB = 60^0$;

$OMA = \frac{1}{2} AMB = 30^0$

(MA, MB là tiếp tuyến của O)

ΔOMA có $OAM = 90^0, OAM = 30^0$ suy ra ΔOMA là nửa tam giác đều, do đó

$OA = \frac{1}{2} OM \Rightarrow OM = 2OA = 2R$

$OM = 2R$, O cố định, suy ra M thuộc đường tròn cố định $O;2R$.

b) Giới hạn: M là điểm tùy ý trên $O;2R$ đều vẽ được ΔMAB đều. Vậy M chuyển động trên $O;2R$.

c) Phần đảo: Lấy M bất kỳ thuộc $O;2R$ vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến $O;R$ (A, B là tiếp điểm)
$\Rightarrow MA = MB \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M.

Tam giác OMA có $A = 90^0; OA = \frac{1}{2} OM = R$, suy ra ΔOMA là nửa tam giác đều nên $OMA = 30^0$, suy ra $AMB = 2.OMA = 60^0$.

ΔMAB cân có $AMB = 60^0 \Rightarrow \Delta MAB$ đều.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm M là đường tròn $O;2R$.

2) a) Phần thuận: ΔMAB đều $\Rightarrow AMB = 60^0$. Mà $AMB + AOB = 180^0$ nên $AOB = 120^0$;

$ACB = \frac{1}{2} AOB = 60^0$.

ΔDOC có $O = 90^0, DCO = 60^0$ suy ra ΔDOC là nửa tam giác đều và ta có $DO = OC\sqrt{3} = R\sqrt{3}$.

$DO = R\sqrt{3}$, O cố định nên D thuộc đường tròn $O;R\sqrt{3}$.

b) Giới hạn: D là điểm tùy ý trên $O;R\sqrt{3}$.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kỳ thuộc $O;R\sqrt{3}$. Vẽ đường kính BC vuông góc OD, DC cắt O tại A. M là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B của O .

ΔDOC có $O = 90^0; DO = OC\sqrt{3} = R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta DOC$ là nửa tam giác đều

$\Rightarrow DCO = 60^0 \Rightarrow MAB = 60^0$.

ΔMAB cân $MA = MB$ có $MAB = 60^0 \Rightarrow \Delta MAB$ đều.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là đường tròn $O;R\sqrt{3}$.

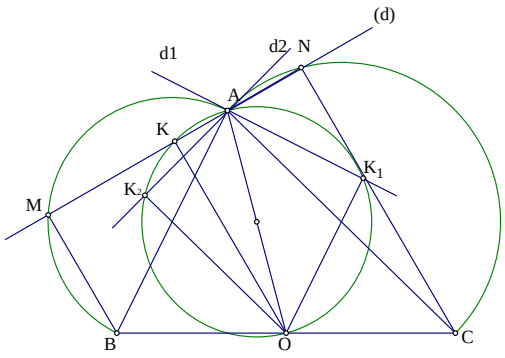
Câu 16. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. ở bên ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn có đường kính AB, AC. Một đường thẳng d quay quanh A cắt hai nửa đường tròn trên theo thứ tự tại M, N (khác A). Tìm tập hợp các trung điểm của MN.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $ANC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $BCNM$ là hình thang vuông.

Gọi O là trung điểm của BC ta có O cố định; gọi K là trung điểm của MN. OK là đường trung bình của hình thang $BCNM$ suy ra $OK // BM$

$$\begin{cases} OK // BM \\ AMB = 90^0 \end{cases} \Rightarrow AKO = 90^0$$



$AKO = 90^0$, OA cố định,

do đó K thuộc đường tròn

đường kính OA.

b) GIới hạn:

Khi $d \equiv d_1$ (d_1 là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB)thì $K \equiv K_1$ (K_1 là hình chiếu của O trên d_1).

Khi $d \equiv d_2$ (d_2 là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AC)thì $K_1 \equiv K_2$ (K_2 là hình chiếu của O trên d_2).

Vậy K chuyển động trên cung K_1K_2 của đường tròn đường kính OA.

c) Phần đảo: Lấy điểm K bất kỳ thuộc cung $K_1K_2 \Rightarrow OKA = 90^0$.

AK cắt các đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại M, N.

$AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$ANC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $BCNM$ là hình thang vuông.

$OK \perp MN$ do đó $OK // BM \Rightarrow KM = KN$.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm K là cung K_1K_2 của đường tròn đường kính OA.

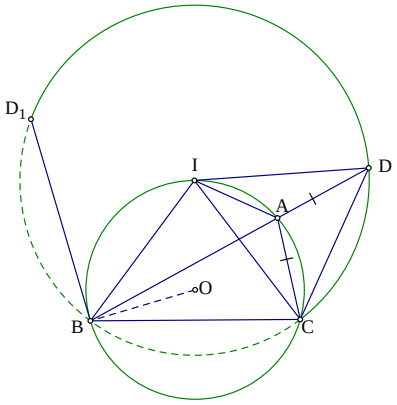
Câu 17. Cho đường tròn $O;R$ cố định BC là dây cung cố định, A là điểm chuyển động trên cung lớn BC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Tìm tập hợp các điểm D.

Hướng dẫn:

a). Phần thuận: Gọi J là trung điểm của cung lớn BC,

ta có I cố định.

xét điểm A thuộc cung IC.



$IAC + IBC = 180^0$

(tứ giác $BIAC$ nội tiếp);

$IAD + IAB = 180^0$ (hai góc kề bù),

$IBC = IAB$ $IC = ID$. Suy ra $IAC = IAD$.

Xét ΔIAC và ΔIAD có IA (cạnh chung), $IAC = IAD, AC = AD$.

Do đó $\Delta IAC = \Delta IAD$ (c.g.c), suy ra $IC = ID$.

I, C cố định $\Rightarrow IC$ không đổi. Vậy D chuyển động trên đường tròn $I;IC$.

b) GIới hạn:

Khi $A \equiv B$ thì $D \equiv D_1$ (D_1 là giao điểm của $I;IC$ với tiếp tuyến của O tại B).

Khi $A \equiv C$ thì $D \equiv C$.

Vậy D chuyển động trên cung D_1C của đường tròn $I;IC$.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kỳ trên cung $D_1C \Rightarrow IC = ID$.

BD cắt O tại A $A \neq B$.

$AIC = ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của O ; $ABC = \frac{1}{2}DIC$.

Suy ra $AIC = \frac{1}{2}DIC$, do đó $AIC = DIA$.

Xét ΔIAC và ΔIAD có $IC = ID, AIC = DIA, IA$ là cạnh chung.

Do đó $\Delta IAC = \Delta IAD$ (c.g.c), suy ra $AC = AD$.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là cung D_1C của đường tròn I,IC (với D_1 là giao điểm của đường tròn I,IC với tiếp tuyến của đường tròn O tại B, I là trung điểm cung lớn BC của O).

Câu 18. Cho AB là dây cung cố định của đường tròn $O;R$. C là điểm chuyển động trên cung lớn AB. Trên tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CB$. Tìm tập hợp các điểm D.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi I là trung điểm của AB.

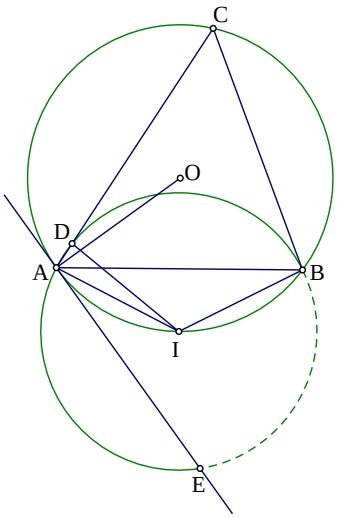
Xét ΔDCI và ΔBCI có $CD = CB, DCI = BCI$ $AI = IB$,

CI (cạnh chung).

Do đó (c.g.c), suy ra $ID = IB$

(không đổi); I cố định. vậy D

thuộc đường tròn cố định $I;IB$.



b) Giới hạn:

Khi $C \equiv A$ thì $D \equiv E$

(E là giao điểm của tiếp tuyến

tại A với O và $I;IB$).

Khi $C \equiv B$ thì $D \equiv B$. Vậy D chuyển động trên cung BAE của $I;IB$.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kỳ trên BAE của $I;IB$, ta có $ID=IB$. Vẽ phân giác của DIB cắt O tại C.

Xét ΔDCI và ΔBCI (c.g.c), suy ra $DCI=BCI, CD=CB$.

Mà $BCI=\frac{1}{2}$sđBI nên $DCB=\frac{1}{2}$sđAB và $ACB=\frac{1}{2}$sđAB. Do đó A,D,C thẳng hàng.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là BAE của $I;IB$ (I là trung điểm của AB.

Chú ý:

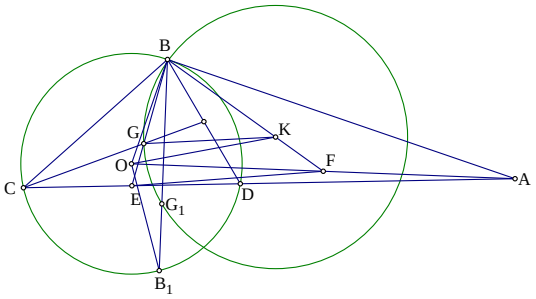
1) Xét bài toán tương tự khi C chuyển động trên AB.

2) Nhận xét gì về các bài toán

Câu 19. Cho đường tròn $O;R$, A là điểm cố định ở ngoài O . Kẻ tiếp tuyến AB với O . Đường thẳng d quay quanh A cắt O tại hai điểm C,D. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác BCD.

Hướng dẫn:

a). Phần thuận: Gọi E,F là trung điểm của CD,OA ta có F cố định (vì OA cố định); K là điểm trên BF sao cho $\frac{BK}{BF}=\frac{2}{3}$, suy ra K cố định (vì BF cố định).



ΔBEF có: $\frac{BG}{BE}=\frac{BK}{BF}=\frac{2}{3}$. Suy ra $GK//EF\Rightarrow\frac{GK}{EF}=\frac{2}{3}\Rightarrow GK=\frac{2}{3}EF$ mà $EF=\frac{1}{2}OA$, do đó $GK=\frac{1}{3}OA$ (không đổi) K cố định. Vậy G thuộc đường tròn cố định K bán kính $\frac{1}{3}OA$.

b) Giới hạn:

Khi d tiến dần đến tiếp tuyến AB thì $G\to B$.

Khi d tiến dần đến tiếp tuyến AB_1 thì $G\to G_1$ (với G_1 là giao điểm của đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ với BB_1).

Vậy G chuyển đọng trên BG_1 của đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ (trừ hai điểm B và G_1).

c) Phần đảo: Lấy điểm G bất kỳ trên BG_1 (trừ B và G_1 của $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$), suy ra $GK=\frac{1}{3}OA$. Trên tia BG lấy điểm E sao cho $\frac{BG}{BE}=\frac{2}{3}$.

AE cắt O tại D,C. ΔBEF có: $\frac{BG}{BE}=\frac{BK}{BF}=\frac{2}{3}\Rightarrow GK//EF\Rightarrow\frac{GK}{EF}=\frac{2}{3}GK=\frac{3}{2}.\frac{1}{3}OA=\frac{1}{2}OA$

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính $OA\Rightarrow OAE=90^0$.

$OE\perp CD\Rightarrow E$ là trung điểm của CD. ΔBCD có BE là trung tuyến và $\frac{BG}{BE}=\frac{2}{3}$ nên G là trọng tâm của ΔBCD.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm G là BG_1 của đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ (với K thuộc đoạn $BF, BK=\frac{2}{3}BF$, G_1 là giao điểm của BB_1 và $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ (trừ B và G_1)).

Câu 21. Cho điểm A chuyển động trên cung lớn BC cố định của đường tròn $O;R$. Tìm tập hợp các tâm I đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC.

Hướng dẫn:

Cách 1.a) Phần thuận:

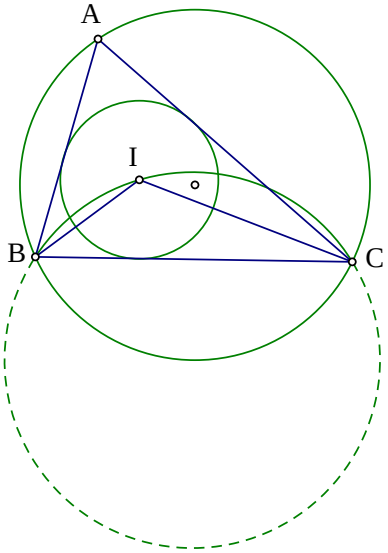
Cung BC cố định,

đặt $sđBC=\alpha$ (không đổi)

$sđBAC=\frac{1}{2}sđBC=\frac{1}{2}\alpha$

$IBC=\frac{1}{2}ABC$ (BI là phân giác của ABC); $ICB=\frac{1}{2}ACB$

(CI là phân giác của ACB);



$BIC = 180^0 - \ IBC + ICB \ = 180^0 - \frac{1}{2} \ ABC + ACB \ = 90^0 + \frac{1}{2} BAC = 90^0 + \frac{1}{2}\alpha$, BC cố định. Do đó I thuộc cung chứa góc $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC.

b) Giới hạn:

Khi $A \equiv B$ thì $I \equiv B$. Khi $A \equiv C$ thì $I \equiv C$. Vậy I chuyển động trên cung chứa góc $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm O.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc cung BC của cung chứa góc $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC.

Vẽ điểm A trên cung lớn BC của đường tròn $O;R$ sao cho BI là phân giác của ABC.

$BIC = 90^0 + \frac{1}{2}\alpha; IBC = \frac{1}{2} ABC$

$ICB = 180^0 - \ BIC + IBC \ = 90^0 - \frac{1}{2} \ BAC + ABC \ = \frac{1}{2} ACB \Rightarrow CI$ là phân giác của ACB.

ΔABC có BI và CI là phân giác $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

d) Kết luận: Tập hợp các tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là cung chứa góc $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm O.

Cách 2.

a) Phần thuận: AI cắt O tại D, ta có $BAD = DAC$ suy ra $DB = DC \Rightarrow DB = DC$ (không đổi).

$BID = ABI + BAI$ (BID là góc ngoài của ΔABI).

$IBD = IBC + CBD; BAI = CBD \left(DB = DC \right)$

$ABI = IBC$ (I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC)

Suy ra $IBD = BID \Rightarrow DB = DI$

$DI = DB$ không đổi. D cố định.

Vậy I thuộc đường tròn D, DB .

b) Giới hạn:

Khi $A \equiv B$ thì $I \equiv B$, Khi $A \equiv C$ thì $I \equiv C$.

Vậy I chuyển động trên BC của đường tròn D, DB .

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc BC của đường tròn D,DB , ta có $DI = DB = DC$.

$DB = DI \Rightarrow IBD = BID$, DI cắt đường tròn tại A $A \neq D$ $\Rightarrow BAI = DAC$, $CBD = DAC$. Do đó $BAI = CBD$

$BID = ABI + BAI; IBD = IBC + CBD$. Suy ra $ABI = IBC$.

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

c) Kết luận: Tập hợp các điểm I là BC của đường tròn D,DB nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm O.

HH9-CHUYÊN ĐỀ 10. CÁC BÀI TOÁN HÌNH CHỌN LỌC THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG VÀ CHUYÊN TOÁN

Bài 1. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2006)***

Cho đường tròn *(O;R)* có đường kính *AB, C* là trung điểm của *OA* và dây $MN \perp OA$ tại *C*. Gọi *K* là điểm tùy ý trên cung nhỏ *BM, H* là giao điểm của *AK, MN*.

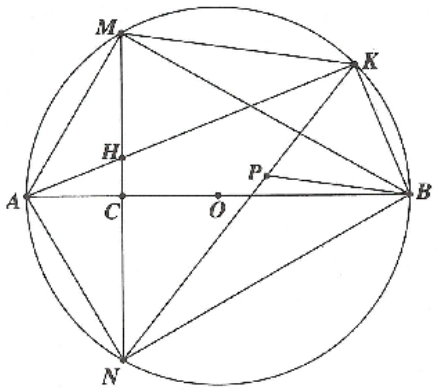
a. Chứng minh: *BCHK* là tứ giác nội tiếp.

b. Tính *AH.AK* theo *R*.

c. Xác định vị trí *K* để *KM + KN + KB* lớn nhất. Tính GTLN đó.

Giải

a. Do *K* nằm trên $\left(O;\frac{AB}{2}\right) \Rightarrow AKB = 90^o$



Lại có $HCB = 90^o$ (giả thiết) suy ra $AKB + HCB = 180^o$ nên tứ giác *BCHK* nội tiếp.

(Tổng hai góc đối bằng 180^o).

b. Ta có $\Delta ACH \sim \Delta AKB(g.g)$ nên

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow AH.AK = AC.AB = \frac{R}{2}2R = R^2$$

c. Đây là một câu hỏi khá hay. Nếu bạn nào biết định lý Ptolemy hoặc định lý Shooten thì bài toán được giải quyết.

Cách tiếp cận thứ nhất:

Nhận thấy tam giác *BMN* cân tại *B* và tam giác *AMO* đều (do *AMO* cân tại *O* và tại *M)* suy ra tam giác *BMN* đều nên $NKB = \frac{1}{2}\text{sđ } NB = 60^0$. Trên dây *KN* lấy điểm *P* sao cho *KP = KB* thì tam giác *KPB* đều. Xét tam giác *MKB* và *NPB* ta có: $KB = BP, MB = NB, MKB = NPB = 120^0$ suy ra $\Delta MKB = \Delta NPB(c.g.c) \Rightarrow KM = PN \Rightarrow KM + KB = KN$. Vậy $KM + KN + KB = 2KN$.

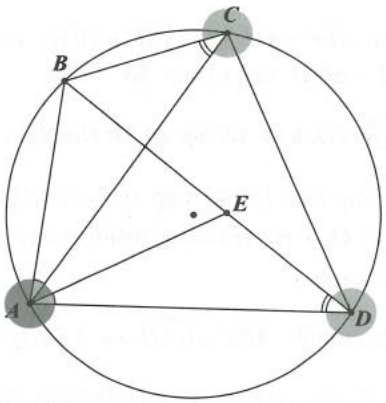
Dễ thấy $KN \le 2R$ nên $KM + KN + KB \le 4R$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *K, O, N* thẳng hàng.

Từ đó suy ra điểm *K* là giao điểm của *NO* với *(O)* (*K* khác *N)*.

Cách 2: Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp *KMNB* ta có: $KM.BN + KB.MN = KN.MB$ chú ý rằng: $BM = BN = MN$ suy ra $KM + KB = KN$. Phần còn lại ta làm như trên.

1.1. Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn *(O)*. Khi đó ta có: $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Chứng minh:



Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho

$DAE = BAC$. Ta có $DAE = BAC$ và $ADE = ACB$ (cùng chắn AB) nên $\Delta ADE \backsim \Delta ACB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

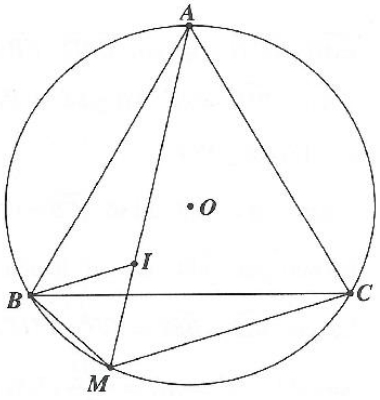
$\Rightarrow AD.BC = AC.DE$ (1). Do $DAE = CAB$ nên $DAC = EAB$, lại

có $ABE = ACD$ (cùng chắn AD)

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC(BE + DE) = AC.BD$

1.2. Định lý Shooten



Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng với mỗi điểm M bất kỳ nằm trên đường tròn (O) thì một trong ba đoạn MA, MB, MC có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn kia.

Chứng minh

Xét điểm M nằm trên cung nhỏ BC.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$, ta có $MA.BC = MB.AC + MC.AB$

Vì $AB = AC = BC$ nên $MA = MB + MC$

Tương tự nếu điểm M nằm trên cung nhỏ AC và AB thì ta lần lượt có $MB = MC + MA$ và $MC = MA + MB$

Suy ra đpcm.

Cách khác để chứng minh:

$MA = MB + MC$ (trường hợp điểm M nằm trên các cung AB, AC tương tự).

Trên MA lấy điểm I sao cho $MI = MB$ ta cần chứng minh $MC = AI$. Thật vậy, ta có $BMI = ACB = 60^o$ mà $MB = MI$ nên tam giác BIM đều, do đó $BI = BM$ và $IBM = 60^o$

Ta lại có $ABC = 60^o$ nên $ABC = IBM$, suy ra $CBM = ABI$. Dễ dàng chứng minh được $\Delta BCM = \Delta BAI(c.g.c)$ nên $MC = AI$.

Bài 2. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2007)***

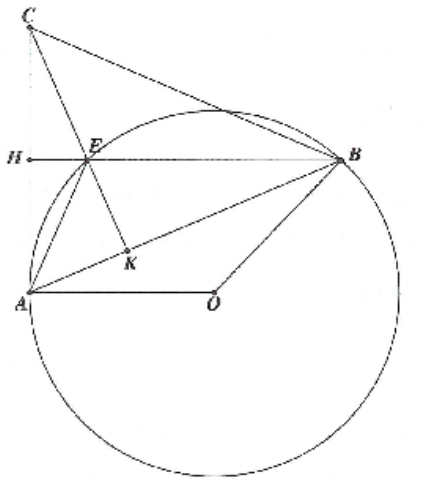
Cho đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với (d) tại A. Trên (d) lấy điểm H không trùng với A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với (d), đường thẳng này cắt (O) tại B, E (E nằm giữa B và H).

a. Chứng minh: $ABE = EAH$ và $\Delta ABH \backsim \Delta EAH$

b. Lấy C trên (d) sao cho H là trung điểm của AC, CE cắt AB tại K. Chứng minh: $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

c. Tìm vị trí của H để $AB = R\sqrt{3}$

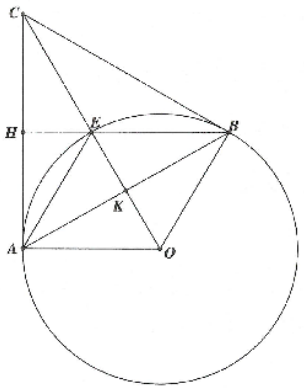
Giải



a. Do AH là tiếp tuyến của (O) tại A nên $ABE = EAH = \frac{1}{2}$sđ AE.

Xét tam giác $\Delta ABH, \Delta EAH$ ta có: AHB chung và $ABE = EAH$ $\Delta ABH \backsim \Delta EAH\,(g.g)$.

b. Vì E nằm trên trung trực của AC nên $EAH = ECH$ lại có: $EAH = EBA$ suy ra $ECH = EBA$. Suy ra $\Delta ABH \backsim \Delta ACK\,(g.g)$ suy ra $CKA = BHA = 90^o$. Tứ giác $AHKE$ có $AHE + EKA = 180^o$ suy ra $AHKE$ nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180^o)



c. Khi $AB = R\sqrt{3}$ thì sđ $AEB = 120^o$

Do tam giác ABC cân tại B nên $AB = BC = R\sqrt{3}$

lại có $AEB = BEC = 120^o \Rightarrow HEA = 60^o \Rightarrow HAE = 30^o$

$\Rightarrow HBA = 30^o \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Vậy điểm H nằm trên (d) sao cho $AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ để $AB = R\sqrt{3}$

Bài 3. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2008).***

Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB và điểm E bất kỳ nằm trên đường tròn (E khác A, B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn AB tại F và cắt (O) tại điểm thứ 2 là K

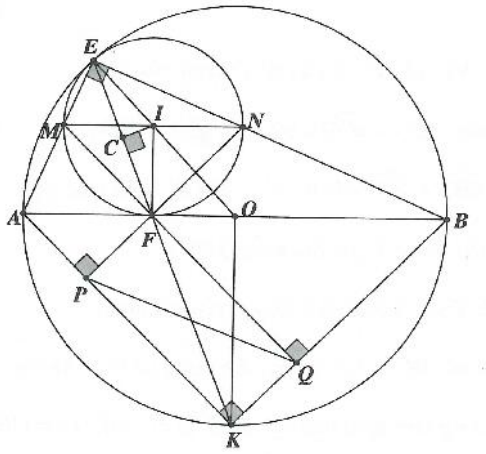
a. Chứng minh: $\Delta KAF \backsim \Delta KEA$

b. Gọi I là giao điểm của OE với trung trực của EF. Chứng minh (I) bán kính IE tiếp xúc với (O) tại E và tiếp xúc với AB tại F.

c. Chứng minh: MN // AB, trong đó M, N lần lượt là giao điểm thứ 2 của AE, BE với (I).

d. Tìm GTNN của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên (O), với P là giao điểm của NF và AK, Q là giao điểm của MF, BK.

Giải



a.Vì EK là phân giác của góc AEB nên $AK = KB \Rightarrow AEK = KAB$

Xét tam giác $\Delta KAF, \Delta KEA$ ta có:

$AEK = KAB$ va AKE chung.

Suy ra $\Delta KAF \backsim \Delta KEA\ (g.g)$

b. Vì $I \in OE,\ E \in (O)$ nên $(I;IE)$ tiếp xúc với $(O;\ OE)$ tại E. Vì I nằm trên trung trực của EF nên $IE = IF$ hay $F \in (I;IE)$.

Ta có: $IEF = IFE, OEK = OKE$ suy ra $IFE = OKE \Rightarrow IF\ //\ OK$, mà $OK \perp AB$ (do K là điểm chính giữa cung AB) từ đó suy ra $IF \perp AB$ (1) hay (I) bán kính IE tiếp xúc AB tại F.

c. Do $MEN = 90^o \Rightarrow MN$ là đường kính của (I), hay $M,\ I,\ N$ thẳng hàng. Lại có $FIN = 2FEN = 90^o$ nên $FI \perp MN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $MN\ //\ AB$.

d. Từ chứng minh ở câu b ta suy ra $MFN = 90^o \Rightarrow PFN = 90^o$. Ta có $EAB = EKB$ (cùng chắn cung EB), $EAB = EMN$ (đồng vị), $EMN = EFN$ (cùng chắn cung EN) suy ra $EFN = EKB \Rightarrow FN\ //\ BK$, mặt khác $AK \perp KB \Rightarrow AK \perp NF$ tại P suy ra $PFQK$ là hình chữ nhật và tam giác APF vuông cân tại P nên $KQ = PF = AP$.

Ta kí hiệu chu vi tam giác KPQ là c thì $c = KP + KQ + PQ = KP + PA + KF = KA + KF$. Ta có $KA = R\sqrt{2},\ KF \geq KO = R$ nên $c \geq R\left(1 + \sqrt{2}\right)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $F \equiv O$. Hay E là điểm chính giữa cung AB.

Bài 4. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2009)***

Cho đường tròn $(O;\ R)$ và điểm A nằm ngoài (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm).

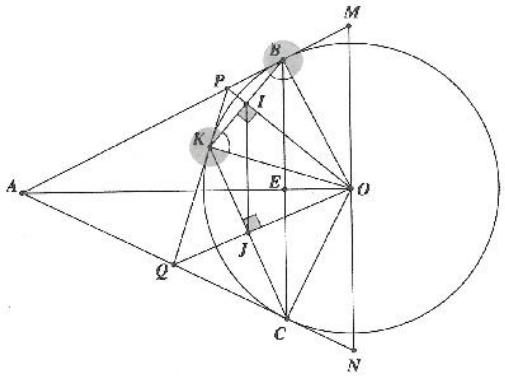
a. Chứng minh: $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh: $BE \perp OA$ và $OE.OA = R^2$

c. Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm K bất kỳ (K khác B, C). Tiếp tuyến tại K của (O) cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh: Chu vi tam giác APQ không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.

d. Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh: $PM + QN \geq MN$.

Giải



a. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $ABO = ACO = 90^o$.

Tứ giác $ABOC$ có $ABO + ACO = 180^o$ nên $ABOC$ là tứ giác nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^o).

b. Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có $BC \perp AO$ tại E. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có: $OE.OA = OB^2 = R^2$.

c. Vì điểm A cố định nằm ngoài (O)nên AB, AC cố định suy ra $AB + AC$ không đổi.

Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có: $PK = PB, QK = QC$ suy ra chu vi tam giác APQ là:

$AP + AQ + PQ = AP + AQ + PB + QC = AB + AC$ không đổi.

d. Giả sử BK cắt PO tại I, CK cắt OQ tại J thì $KIO = KJO = 90^o$ nên tứ giác $KIOJ$ nội tiếp nên $KOJ = KIJ = QKC = KBC \Rightarrow IJ // BC$ hay $IJ \perp AO$.

Từ đó ta có: $BPO = BKO = IJO = 90^o - JAO = QON$. Xét ΔMOP và ΔNQO có: $PMO = ONQ$

và $MPO = QON$ suy ra $\Delta MOP \backsim \Delta NQO(g.g) \Rightarrow \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{ON}{QN} \Rightarrow PM.QN = OM.ON = \dfrac{MN^2}{4}$.

Ta cũng có: $PM.QN \le \dfrac{(PM+QN)^2}{4} \Rightarrow \dfrac{(PM+QN)^2}{4} \ge \dfrac{MN^2}{4} \Leftrightarrow PM + QN \ge MN$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $PM = QN \Leftrightarrow PQ // MN$ hay K là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Nhận xét: Đây là bài toán khá hay trong đề tuyển sinh vào lớp 10 của TP Hà Nội.

Một số bài toán ôn tập thêm:

1. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) với B, C là các tiếp điểm. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống BC, CA, AB. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BM và IK, CM và IH.

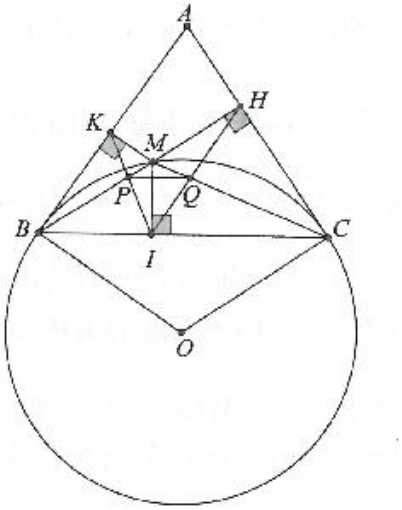
a. Chứng minh: các tứ giác $BIMK$, $CIMH$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $MI^2 = MH.MK$

c. Chứng minh: $IPMQ$ nội tiếp rồi suy ra $PQ \perp MI$. Tìm vị trí điểm M để $MI.MH.MK$ đạt GTLN.

Giải

a. Từ giả thiết: $BKM = BIM = 90^o$ suy ra tứ giác *BKMI* nội tiếp. Tương tự cho tứ giác *CIMH, AKMH*



b. Vì tứ giác *BKMI* nội tiếp nên: $MKI = MBI$ (cùng chắn cung *MI*). Mặt khác ta có: $MBI = MCH$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Nhưng $MCH = MIH$ (cùng chắn cung *MH* của tứ giác nội tiếp *MHCI).* Suy ra $MKI = MIH$

Hoàn toàn tương tự ta có: $MIK = MHI$ nên $\Delta MIK \backsim \Delta MHI$ (g.g).

Suy ra $\frac{MI}{MK} = \frac{MH}{MI} \Leftrightarrow MI^2 = MH.MK$

c. Ta có: $PMQ + PIQ = BMC + PIM + QIM = BMC + MBA + MCA = BMC + MCB + MBC = 180^o$

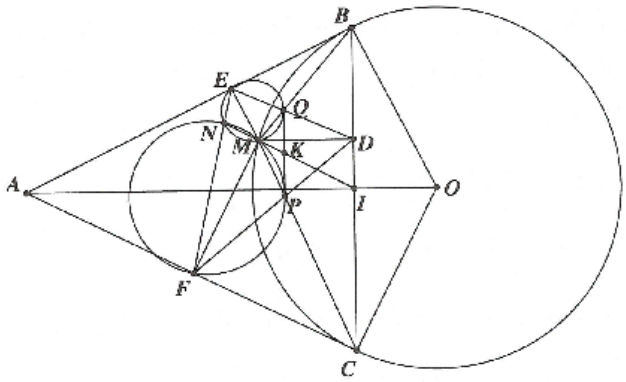
Do đó tứ giác *PIQM* nội tiếp (Tổng hai góc đối nhau bằng 180^O). Vì *PIQM* nội tiếp suy ra $MPQ = MIQ = MKI = MBI$ suy ra $PQ//BC$ hay $MI \perp PQ$.

d. Từ chứng minh ở câu b) ta có $MI^2 = MH.MK \Rightarrow MI^3 = MI.MH.MK$. Suy ra $MI.MH.MK$ lớn nhất khi và chỉ khi *MI* lớn nhất. Hay *M* là điểm chính giữa cung nhỏ *BC* không chứa *A.*

2. Cho đường tròn tâm *(O).* Từ điểm *A* cố định ở ngoài *(O)* kẻ tiếp tuyến *AB, AC* tới *(O)* (*B, C* là tiếp điểm). Lấy điểm *M* trên cung nhỏ *BC.* Gọi *D, E, F* thứ tự là hình chiếu từ *M* đến *BC, AC, AB.* Gọi *MB* cắt *DF* tại *P, MC* cắt *DE* tại *Q.* Chứng minh đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác *MPF* và *MQE* luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác *MPF* và *MQE* cắt nhau tại *M, N.* Đường thẳng *MN* cắt *PQ, BC* theo thứ tự tại *K* và *I.*



Ta có các tứ giác *MDCE, MDBF* nội tiếp nên

$MCE = MDE = MBC$;

$MBF = MDF = MCB$. Suy ra

$PMQ + PDQ = PMQ + PDM + QDM$

$= PMQ + MCB + MBC = 180^o$

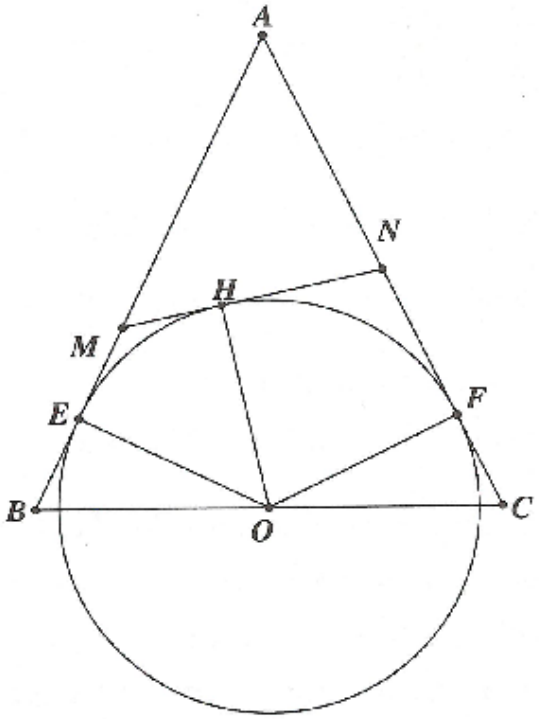
Do đó tứ giác *MPDQ* là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $MQP = MCB = MEQ,$ suy ra *KQ* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMQE. Tương tự *KP* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *MFP.* Ta có $KM.KN = KQ^2, KM.KN = KP^2$. Suy ra $KP = KQ$.

Xét tam giác *MBC, PQ // BC, KP = KQ*. Theo định lý Thales suy ra *I* là trung điểm *BC*. Vậy *MN* đi qua điểm cố định *I* là trung điểm *BC*.

3. Cho tam giác *ABC* cân đỉnh *A*. Gọi *O* là trung điểm của *BC*. Đường tròn *(O)* tiếp xúc với *AB* ở *E* tiếp xúc với *AC* ở *F*. Điểm *H* chạy trên cung nhỏ *EF* tiếp tuyến của đường tròn tại *H* cắt tại *AB, AC* lần lượt tại *M, N*. Xác định vị trí của điểm *H* để diện tích tam giác *AMN* đạt giá trị lớn nhất.

Giải



Dễ thấy *OM, ON* lần lượt là phân giác EOM, FOH

Từ đó ta có:

$$MON = \frac{180^o - BAC}{2} = ABC \Rightarrow \Delta MBO \backsim \Delta OCN\left(g.g\right)$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM.CN = OB.OC = \frac{BC^2}{4} = const \quad (1)$$

Ta lại có $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$ nên S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{BMNC} đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi *R* là bán kính của đường tròn *(O)*, ta có:

$$S_{BMNC} = S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC} = \frac{1}{2}R(BM + MN + NC)$$

$$= \frac{1}{2}R\left[BE + CF + 2\left(EM + FN\right)\right] \text{ vì } (MN = EM + FN)$$

$$= R\left(BE + EM + FN\right) \text{vì } (BE = CF).$$

$$= R(BE + BM + CN - 2BE) = R(BM + CN - BE) \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, từ (1) và (2) suy ra $S_{BMNC} \geq R\left(\sqrt{BM.CN} - BE\right) = R\left(\frac{BC}{2} - BE\right)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BM = CN \Leftrightarrow MN // BC$ khi và chỉ khi *H* là giao điểm của đường trung trực của *BC* với đường tròn *(O)*. Vậy diện tích tam giác *AMN* đạt giá trị lớn nhất khi *H* là giao của đường trung trực của *BC* với đường tròn *(O)*.

Bài 5. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2010)***

Cho đường tròn *(O;R)*, đường kính *AB = 2R* và điểm *C* thuộc đường tròn đó $(C \neq A, B)$. *D* thuộc dây *BC* $(D \neq B, C)$. Tia *AD* cắt cung nhỏ *BC* tại *E*, tia *AC* cắt *BE* tại *F*.

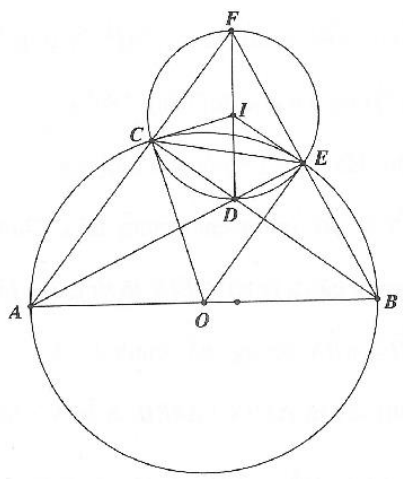
a. Chứng minh tứ giác *FCDE* nội tiếp.

b. Chứng minh $DA.DE = DB.DC$

c. Chứng minh $CFD = OCB$. Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *FCDE*, chứng minh *IC* là tiếp tuyến của *(O)*.

d. Cho biết $DF = R$, chứng minh $\tan AFB = 2$.

Giải



a. Do *C*, *E* nằm trên đường tròn đường kính *AB* nên

$ACB = AEB = 90^o \Rightarrow FCD = FED = 90^o$.

Tứ giác *FCDE* có $FCD + FED = 180^o$ nên *FCDE* là tứ giác nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^o).

b. Tứ giác *ACED* nội tiếp *(O)* nên $ACB = AEB$ (cùng chắn cung *AB)*. Ta có $CDA = EDB$ (đối đỉnh) nên

$\Delta ACD \backsim \Delta BED(g.g) \Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DB}{DE}$ hay $DA.DE = DB.DC$.

c. Tứ giác *FCDE* nội tiếp nên $CFD = CED$ (cùng chắn cung *CD*). Tứ giác *ACEB* nội tiếp nên $CEA = CBA$ (cùng chắn cung *AC)*. Mà $CBA = OCB$ suy ra $CFD = OCB$ đpcm. Do *AE*, *BC* là hai đường cao của tam giác *AFB* nên *D* là trực tâm của tam giác *AFB*. Để ý rằng 4 điểm *F*, *C*, *D*, *E* nằm trên đường tròn đường kính *DF* nên *I* là trung điểm của *DF* suy ra $IE = IF = \dfrac{1}{2}DF \Rightarrow IEF = IFE$ (1). Ta cũng có $OEB = OBE$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra

$IEF + OEB = IFE + OBE = 90^o \Rightarrow IEO = 90^o$ hay *IE* là tiếp tuyến của *(O).*

d. Ta có $\Delta ACB \backsim \Delta DCF \Rightarrow \dfrac{CB}{CF} = \dfrac{BA}{FD} = 2$. Trong tam giác vuông *CFB* ta có:

$\tan CFB = \dfrac{CB}{CF} = 2$ đpcm.

Bài 6. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2011)***

Cho đường tròn tâm *O*, đường kính *AB = 2R*. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn *(O)* tại hai điểm *A* và *B*. Gọi *I* là trung điểm của *OA* và *E* là điểm thuộc đường tròn *(O) (E* không trùng với *A* và *B)*. Đường thẳng *d* đi qua *E* và vuông góc với *EI* cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại *M, N*.

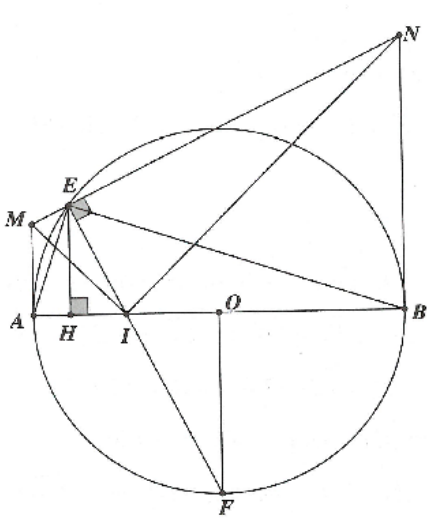
a. Chứng minh *AMEI* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh $ENI = EBI$ và $MIN = 90^o$.

c. Chứng minh *AM.BN = AI.BI*

d. Gọi *F* là điểm chính giữa của cung *AB* không chứa *E* của đường tròn *(O)*. Hãy tính diện tích của tam giác *MIN* theo *R* khi ba điểm *E, I, F* thẳng hàng.

Giải



a. Do $MAI = MEI = 90^o$ suy ra $MAI + MEI = 180^o$ hay $MAIE$ là tứ giác nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180^o).

b. Do $MAIE$ là tứ giác nội tiếp nên $EMI = EBI$ (cùng chắn cung EI). Chứng minh tương tự câu a ta có $NEIB$ là tứ giác nội tiếp nên $ENI = EBN$ (cùng chắn cung NB).

Từ đó suy ra $\Delta MIN \backsim \Delta AEB \Rightarrow MIN = 90^o$

c. Xét tam giác vuông MAI và IBN ta có:

$MIA = 180^o - MIN - NIB = 90^o - NIB = INB$

Suy ra $\Delta MAI \backsim \Delta IBN(g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{AI} = \dfrac{IB}{BN} \Leftrightarrow AM.BN = IA.IB$

d. Dựng $EH \perp AB$. Khi F là điểm chính giữa cung AB thì EF là phân giác của góc AEB suy ra:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{IA}{IB} = \frac{1}{3} \Rightarrow EA^2 + EB^2 = EA^2 + 9EA^2 = AB^2 = 4R^2 \Rightarrow EA^2 = \frac{2}{5}R^2 \Rightarrow EA = \frac{\sqrt{10}}{5}R.$$

$EB = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}R$. Ta cũng có: $\Delta MIN \backsim \Delta AEB \Rightarrow \dfrac{S_{MIN}}{S_{AEB}} = \left(\dfrac{EI}{EH}\right)^2 = \left(\dfrac{IF}{OF}\right)^2 = \dfrac{OI^2 + OF^2}{OF^2} = \dfrac{5}{4}$ suy ra

$$S_{MIN} = \frac{5}{4}S_{AEB} = \frac{5}{4}.\frac{1}{2}EA.EB = \frac{5}{4}.\frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{5}R.\frac{3\sqrt{10}}{5}R = \frac{3}{4}R^2$$

Bài 7*: (Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2012)*

Cho đường tròn *(O; R)* đường kính *AB*. Bán kính *CO* vuông góc với *AB*, *M* là điểm bất kỳ trên cung nhỏ *AC* $(M \neq AC)$, *BM* cắt *AC* tại *H*. Gọi *K* là hình chiếu của *H* trên *AB*.

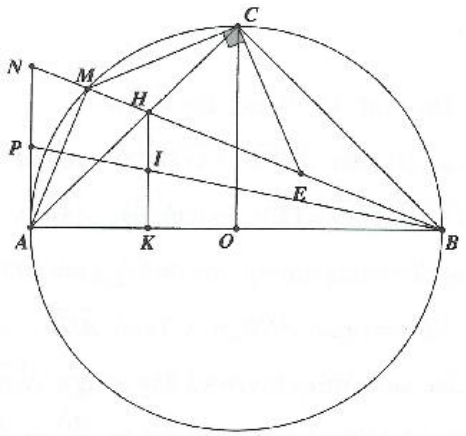
a. Chứng minh tứ giác *CBKH* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh $ACM = ACK$

c. Trên đoạn thẳng *BM* lấy điểm *E* sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác *ECM* là tam giác vuông cân tại *C*.

d. Gọi *d* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)* tại điểm *A*. Cho *P* là một điểm nằm trên *d* sao cho hai điểm *P*, *C* nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng *PB* đi qua trung điểm của đoạn thẳng *HK*.

Giải



a. Vì C nằm trên đường tròn $\left(O;\frac{AB}{2}\right)$ nên $ACB=90^o$, ta có $HKB=90^o$

$\Rightarrow ACB+HKB=180^o$ nên $CHKB$ là tứ giác nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^o)

b. Tứ giác $AMCB$ nội tiếp nên $ACM=ABM$ (cùng chắn cung AM) (1). Tứ giác $CHKB$ nội tiếp nên $HCK=HBK$ (cùng chắn cung HK) (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $ACM=ACK$

c. Do C là điểm chính giữa cung AB nên ACB là tam giác vuông cân tại C, suy ra $AC = CB$, ta cũng có: $MAC=EBC$ (cùng chắn cung MC), $AM = BE$ (gt) suy ra $\Delta AMC=\Delta BEC(c.g.c)$ suy ra $CM = CE$. Lại có $MCE=MCA+ACE=ECB+ACE=90^o$ nên MCE là tam giác vuông cân tại C.

d. Giả sử MB kéo dài cắt tiếp tuyến tại A ở N. Ta dễ chứng minh được: $\Delta NAB\backsim\Delta AMB$ suy ra $\frac{MB}{MA}=\frac{AB}{NA}=\frac{2R}{NA}\Rightarrow R=\frac{NA.MB}{2MA}$ kết hợp với điều kiện: $\frac{AP.MB}{MA}=R$ suy ra $\frac{AP.MB}{MA}=\frac{NA.MB}{2MA}$ hay $NA=2AP\Leftrightarrow P$ là trung điểm AN. Giả sử BP cắt HK tại I. Do HK // NA theo định lý Thales ta có: $\frac{HI}{NP}=\frac{IK}{PI}=\frac{BI}{BP}$ mà $NP=PI$ suy ra $HI=IK$ hay là trung điểm của HK.

Bài 8. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2013)***

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C $(AB<AC, d$ không đi qua tâm $O)$.

a. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

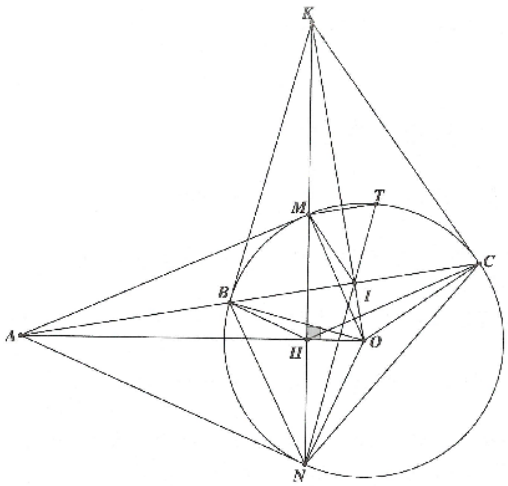
b. Chứng minh $AN^2=AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB=4cm, AN=6cm$.

c. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T.

Chứng minh MT // AC.

d. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Giải



a. Do *AM, AN* là các tiếp tuyến của *(O)* nên $AMO = ANO = 90^o$ suy ra $AMO + ANO = 180^o$ hay tứ giác *AMON* nội tiếp trong đường tròn đường kính *AO*.

b. Xét tam giác *ANB, ACN*.

Ta có $ANB = ACN$ (Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung), NAC chung.

Nên $\Delta ANB \backsim \Delta ACN(g.g)$ suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AN}$

$\Leftrightarrow AN^2 = AB.AC$

c. Do *I* là trung điểm của *BC* nên $BI \perp BC \Leftrightarrow AIO = 90^o$ kết hợp với câu a ta suy ra 5 điểm *A, M, I, O, N* cùng nằm trên đường tròn đường kính *AO* suy ra $AIN = AMN$ (cùng chắn cung *AN*). Mặt khác ta cũng có: $AMN = MTN$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Từ đó suy ra $AIN = MTN$, hai góc này đồng vị suy ra *MT // AI* (đpcm).

d. Giả sử *MN* cắt *AO* tại *H*. Trong tam giác vuông *ANO* ta có $AN^2 = AH.AO$ kết hợp với câu b ta suy ra $AH.AO = AB.AC$ nên $\Delta ABH \backsim \Delta AOC(g.g)$ suy ra $AHB = ACO \Rightarrow BHOC$ nội tiếp (Góc ngoài một đỉnh bằng góc trong đỉnh đối diện). Giả sử tiếp tuyến tại *B, C* cắt nhau tại điểm *K*, chứng minh như câu a ta có *KBOC* nội tiếp, kết hợp với *BHOC* nội tiếp suy ra 5 điểm *K, B, H, O, C* cùng nằm trên đường tròn đường kính *KO* suy ra $KHO = 90^o$. Mặt khác $MHO = 90^o$ suy ra *K, M, H* thẳng hàng. Hay điểm *K* nằm trên đường thẳng cố định *MN*.

Bài 9. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2014)***

Cho đường tròn *(O;R)* có đường kính *AB* cố định. Vẽ đường kính *MN* của đường tròn *(O; R)* $(M \neq A, M \neq B)$. Tiếp tuyến của đường tròn *(O; R)* tại *B* cắt các đường thẳng *AM, AN* lần lượt tại các điểm *Q, P*.

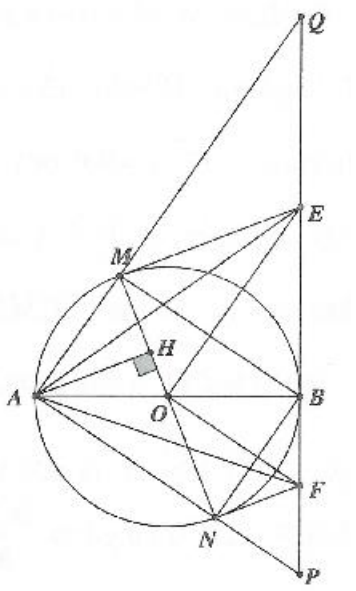
a. Chứng minh tứ giác *AMBN* là hình chữ nhật.

b. Chứng minh bốn điểm *M, N, P, Q* cùng thuộc một đường tròn.

c. Gọi *E* là trung điểm của *BQ*. Đường thẳng vuông góc với *OE* tại *O* cắt *PQ* tại điểm *F*. Chứng minh *F* là trung điểm của *BP* và *ME // NF*.

d. Khi đường kính *MN* quay quanh tâm *O* và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính *MN* để tứ giác *MNPQ* có diện tích nhỏ nhất.

Giải



a. Vì *AB, MN* là các đường kính của *(O)* nên *AMBN* là hình bình hành. Mặt khác $MAN = 90^o$ nên *AMBN* là hình chữ nhật. (cũng có thể lập luận: Tứ giác *AMBN* có 4 góc vuông nên *AMBN* là hình chữ nhật).

b. Xét tứ giác *QMNP* ta có $MNA = MBA$ (cùng chắn cung *MA* của tứ giác nội tiếp *AMBN)*. Mà $MBA = MQB$ (cùng phụ với góc MBQ). Từ đó suy ra $MNA = MQP$ nên tứ giác *QMNP* nội tiếp (góc ngoài đỉnh *N* bằng góc trong đối diện với đỉnh *N).*

c. Do tam giác *QMB* vuông tại *M* và *E* là trung điểm của $BQ \Rightarrow ME = EQ = EB$ (tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông). Từ đó suy ra $\Delta OME = OBE(c.c.c)$ nên $OME = OBE = 90^o$ hay *ME* là tiếp tuyến của *(O)*. Vì *ME* là các tiếp tuyến của *(O)* nên $OE \perp MB$, do $MB//AN \Rightarrow OE \perp AN$, mặt khác $AB \perp PQ$ suy ra *O* là trực tâm tam giác $AEP \Rightarrow OE \perp AP$ mà $OF \perp OE \Rightarrow OF//AP$ nên *OF* là đường trung bình của tam giác *ABP* hay *F* là trung điểm của *BP*.

d. Dựng $AH \perp MN$ thì: Ta có

$$S_{MNPQ} = S_{APQ} - S_{MAN} = \frac{1}{2}AB.PQ - \frac{1}{2}MN.AH = R(PQ - AH) = R(BP + PQ - AH) \geq R\left(2\sqrt{BP.PQ} - AO\right)$$

$$= R\left(2\sqrt{AB^2} - AO\right) = 3R^2 \text{ (Vì } BP.PQ = AB^2\text{)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BP = PQ, AH = AO \Leftrightarrow MN//PQ$ hay $MN \perp AB$

Bài 10. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2015)***

Cho nửa đường tròn *(O;R)* có đường kính *AB*. Lấy điểm *C* trên đoạn thẳng *OA* (*C* khác *A, O*). Đường thẳng qua *C* vuông góc với *AB* cắt nửa *(O)* tại *K*. Gọi *M* là điểm trên cung *KB* (*M* khác *K, B)*. Đường thẳng *CK* cắt *AM, BM* lần lượt tại *H, D*. Đường thẳng *BH* cắt nửa đường tròn tại điểm thứ 2 là *N*.

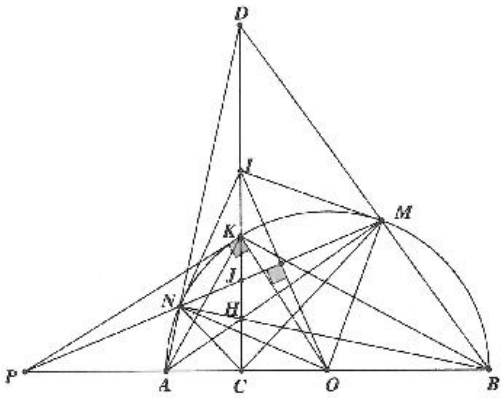
a. Chứng minh: *ACMD* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: *CA.CB = CH.CD.*

c. Chứng minh: *A, N, D* thẳng hàng và tiếp tuyến tại *N* của đường tròn đi qua trung điểm của *DH.*

d. Khi *M* di động trên cung *KB*, chứng minh: Đường thẳng *MN* luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



a. Do điểm M nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $AMB = 90^o \Rightarrow AMD = 90^o$

Ta cũng có $DCA = 90^o$ nên $AMD = DCA = 90^o$

Suy ra 4 điểm D, M, C, A nằm trên đường tròn đường kính AD hay $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.

b. Do AM, CD là các đường cao của tam giác ADB nên H là trực tâm của tam giác suy ra $CDB = HAC$ (cùng phụ với DBA). Suy ra $\Delta DCB \backsim \Delta ACH(g.g) \Rightarrow \dfrac{DC}{CB} = \dfrac{AC}{CH} \Leftrightarrow CD.CH = AC.BC$ (đpcm).

c. Do BH cắt nửa đường tròn tại N nên $ANB = 90^o$, ta cũng có $BH \perp AD$ suy ra $N \in AD$ (qua A chỉ kẻ được 1 đường thẳng vuông góc với BH). Hay A, N, D thẳng hàng. Gọi I là trung điểm của DH. Ta sẽ chứng minh: IN là tiếp tuyến của (O). Thật vậy ta có: $ID = IN = IH = \dfrac{1}{2}HD \Rightarrow IND = IDN(1)$. Tương tự ta cũng có: $ONA = OAN(2)$. Từ (1), (2) suy ra $IND + ONA = IDN + OAN = 90^o$ suy ra $INO = 90^o$ hay IN là tiếp tuyến của (O) (đpcm).

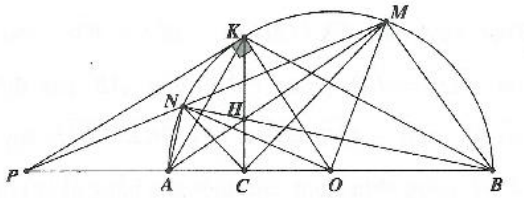
d. Giả sử MN cắt BC tại P. Ta chứng minh P là điểm cố định. Thật vậy do $AMNB$ nội tiếp nên $PNA = PBM$ suy ra $\Delta PMA \backsim \Delta PBM(g.g) \Rightarrow \dfrac{PN}{PA} = \dfrac{PB}{PM} \Leftrightarrow PM.PN = PA.PB(3)$. Theo câu c) ta có IN là tiếp tuyến của (O) hoàn toàn tương tự ta cũng có: IM là tiếp tuyến của (O) nên suy ra $INO = ICO = IMO = 90^o$ hay 5 điểm I, N, C, O, M cùng nằm trên một đường tròn đường kính IO suy ra tứ giác $MNCO$ nội tiếp nên ta cũng suy ra $PM.PN = PC.PO(4)$. Từ (3) và (4) ta suy ra $PA.PB = PC.PO$. Từ P ta kẻ tiếp tuyến PK' với (O) thì $PA.PB = PK'^2 = PC.PO$ từ đó suy ra $\Delta PCK' \backsim \Delta PK'O(c.g.c)$ nên $K'CP = 90^o \Rightarrow K' \equiv K$. Hay P là giao điểm của tiếp tuyến tại K với AB. Vậy P là điểm cố định.

Chú ý: Ý tưởng tạo câu d) trong bài này và câu d) trong đề TS năm 2013 là giống nhau nên việc phát hiện P là giao điểm của tiếp tuyến tại K với AB là hoàn toàn tự nhiên.

Ngoài ra ta cũng có thể phát biểu câu d) theo một cách khác:

"Qua điểm P ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến PK cát tuyến PAB đi qua tâm O, cát tuyến KMN bất kỳ. Gọi H là giao điểm của AM, BN, C là hình chiếu của H trên AB. Khi đó C, H, K thẳng hàng".

Chứng minh:



Từ các tứ giác *ANHC, CHMB, MNAB* nội tiếp ta có các biến đổi góc sau:

$ANC = AHC = ABM = PNA$ suy ra

$PNC = 2PBM = POM$

(theo tính chất góc ngoài tam giác cân *BOM)* suy ra tứ giác *NCOM* nội tiếp.

Ta cũng có: $PK^2 = PM.PN = PC.PO \Rightarrow \dfrac{PC}{PK} = \dfrac{PK}{PO} \Rightarrow \Delta PCK \backsim \Delta PKO \Rightarrow PCK = 90^o$. Vì *KC, HC* cùng vuông góc với *AB* nên *K, H, C* thẳng hàng.

Bài 11. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2016)***

Cho đường tròn *(O)* và điểm *A* nằm bên ngoài *(O)*. Kẻ tiếp tuyến *AB* với *(O)* (*B* là tiếp điểm) và đường kính *BC*. Trên đoạn *CO* lấy điểm *I* (*I* khác *C, O*). Đường thẳng *AI* cắt *(O)* tại hai điểm *D, E (D* nằm giữa *A* và *E)*. Gọi *H* là trung điểm *DE*.

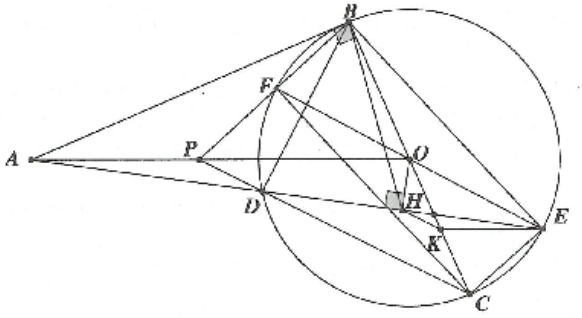
a. Chứng minh: 4 điểm *A, B, O, H* cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$

c. Đường thẳng *(d)* qua *E* song song với *AO, (d)* cắt *BC* tại *K*. Chứng minh: *HK // DC.*

d. Tia *CD* cắt *AO* tại *P*, tia *EO* cắt *BP* tại *F*. Chứng minh: *BECF* là hình chữ nhật.

Giải



a. Vì *H* là trung điểm của *DE* nên $OH \perp DE$ (liên hệ đường kính và dây cung).

Suy ra $AHO = ABO = 90^o$ nên 4 điểm *A, B, O, H* cùng nằm trên đường tròn đường kính *AO*.

b. Vì *AB* là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow ABD = BEA$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta AEB(g.g) \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{EB}$ (đpcm).

c. Để chứng minh: *HK // DC* ta chứng minh: $EHK = EDC$. Ta lại có $EDC = EBC$ nên ta quy về chứng minh: $EKH = EBC \Leftrightarrow$ Chứng minh: *BHKE* nội tiếp.

Thật vậy: do $EK//AO \Rightarrow BKE = AOK$ (so le trong). Ta cũng có $AOK = 180^o - AOB$ mà $AOB = AHB$ (cùng chắn cung *AB* của đường tròn ngoại tiếp tứ giác *ABOH)*. Suy ra $AOK = 180^o - AHB = BHE$ hay $BKE = BHE$ suy ra tứ giác *BHKE* nội tiếp (có hai đỉnh liên tiếp *K, H* cùng nhìn cạnh *BE* một góc bằng nhau) đpcm.

d. Để chứng minh: *BECF* là hình chữ nhật ta sẽ chứng minh: Điểm *F* nằm trên *(O)* tức là chứng minh: $BEP = 90^o$ hay $EBC + CBP = 90^o$. Thật vậy:

Xét tam giác *EHB* và tam giác *COP* ta có: $EHB = COP, BED = BCD$

suy ra $\Delta EHB \backsim \Delta COP(g.g) \Rightarrow \frac{EB}{CP} = \frac{EH}{CO} = \frac{ED}{CB} \Rightarrow \Delta EDB \backsim \Delta CBP(c.g.c) \Rightarrow EDB = CBP$ mà EDB phụ với góc CDE mà $CDE = EBC$ suy ra $EBP = EBC + CBP = EBD + CDE = 90^o$ hay *BECF* là hình chữ nhật.

Cách tiếp cận khác

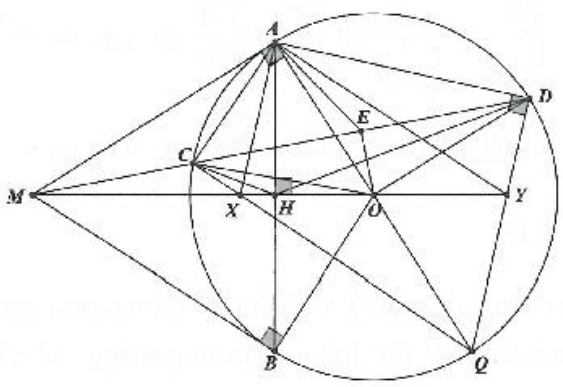
Ta thấy 3 bài toán trong các năm 2013, 2015, 2016 đều là các tính chất cát tuyến, tiếp tuyến của đường tròn mà trực tiếp là liên quan đến bài toán sau:

Bài toán: Cho đường tròn *(O)* và một điểm *M* nằm ngoài đường tròn *(O)*, qua *M* kẻ các tiếp tuyến *MA, MB* đến đường tròn *(O)* (*A, B* là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến *MCD* sao cho *MC < MD*. Gọi *E* là trung điểm của *CD, H* là trung điểm của *AB*.

1. Tứ giác *CHOD* nội tiếp.

2. *AB* chứa đường phân giác của góc CHD.

3. Vẽ đường kính *AQ*, các đường thẳng *QC, QD* cắt đường thẳng *MO* lần lượt tại *X, Y* thì *O* là trung điểm của *XY*.



Giải

1. Vì *MA* là tiếp tuyến của *(O)* nên $MAC = ADC$

(Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Xét hai tam giác *MAC* và *MDA* ta có:

$MAC = ADC, AMD$ chung nên $\Delta MAC \backsim \Delta MDA(g.g)$ suy ra $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$ (1). Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *MAO*, $AH \perp MO$ ta có $MA^2 = MH.MO$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $MH.MO = MC.MD$ hay $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$. Xét tam giác *MCH, MOD* ta có: $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$ và OMD chung nên $\Delta MCH \backsim \Delta MOD(g.g)$ suy ra $MHC = MDO \Rightarrow$ tứ giác *CHOD* nội tiếp (góc ngoài đỉnh *H* bằng góc trong đối diện đỉnh *H*) (3).

2. Từ 3) ta có $MHC = MDO$ (4) mà $MDO = OCD$ (5) (do tam giác *COD* cân tại *O*). Mặt khác ta có $OCD = OHD$ (6) (góc nội tiếp cùng chắn OD). Từ (4), (5), (6) suy ra $MHC = OHD$. Các góc

CHA, DHA phụ với các góc MHC, OHD tương ứng nên suy ra $CHA = DHA$ hay AH là phân giác của góc CHD.

3. Do AQ là đường kính của (O) nên $ADQ = 90^o \Rightarrow ADYH$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $AYD = AHD$.

Mặt khác theo 1, 2) ta có $CHOD$ nội tiếp và AH là phân giác của góc CHD suy ra

$AHD = \frac{1}{2}CHD = \frac{1}{2}COD = CQD \Rightarrow AYD = CQD$ suy ra AY // CQ. Xét hai tam giác AOY, QOX ta có: $OA = OQ$, $AOY = QOX$, $YAO = XQO$ nên $\Delta AOY = \Delta QOX(g.c.g)$ suy ra $OX = OY$.

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh theo cách khác như sau: Tứ giác $AEOM$ nội tiếp nên

$AEC \equiv AEM = AOM = QOY, YQO \equiv DQA = DCA \equiv ECA$ nên $\Delta OYQ \backsim \Delta EAC \Rightarrow \frac{QY}{QO} = \frac{CA}{CE}$

Hay $\frac{QY}{\frac{1}{2}QA} = \frac{CA}{\frac{1}{2}CD} \Leftrightarrow \frac{QY}{QA} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow \Delta QYA \backsim \Delta CAD(c.g.c)$

Nên $YAQ = ADC = ECA = AQC \Rightarrow AY // QX$ nên tứ giác $AXQY$ là hình bình hành suy ra $OX = OY$.

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O), qua A kẻ tiếp tuyến AB, dựng đường kính BC. Trên đoạn CO lấy điểm I, đường thẳng AI cắt (O) tại D, E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm DE. Tia CD cắt AO tại P, tia EO cắt BP tại F. Chứng minh: $BECF$ là hình chữ nhật (***Trích câu d)*** đề tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội 2016).

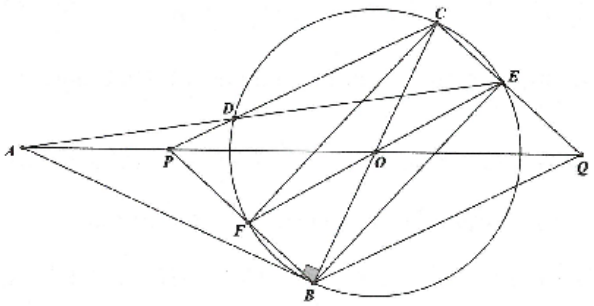
Giải

Kéo dài CE cắt AO tại Q theo 3 ta có:

$OP = OQ$ nên $CPBQ$ là hình bình hành.

Suy ra $CEBF$ cũng là hình bình hành.

Hơn nữa $CEB = 90^o$ nên $CEBF$ là hình chữ nhật.



Bài toán tương tự:

Cho tam giác ABC đường cao AH, đường tròn (O) đường kính AH cắt AB, AC tại D, E.

a. Chứng minh: $BDEC$ nội tiếp.

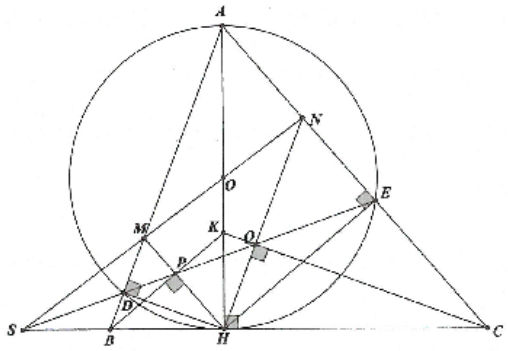
b. Đường thẳng ED cắt BC tại S. Chứng minh: $SH^2 = SB.SC$.

c. SO cắt AB, AC lần lượt tại M, N. HM, HN cắt DE lần lượt tại P, Q. Chứng minh: BP, CQ, AH đồng quy. ***(Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán – ĐHSP Hà Nội 2016)***.

Giải

Do $AED = AHD = ABC$ suy ra $BDEC$ là tứ giác nội tiếp suy ra $SB.SC = SD.SE$.

Mặt khác SH là tiếp tuyến của (O) tại H nên $SH^2 = SD.SE$ suy ra $SH^2 = SB.SC$.



Theo tính chất 3 ta có:

$OM = ON$ nên $AMHN$ là hình bình hành.

Suy ra $AM // HN$, $AN // HM$ lại có $MHB = ACB = ADE$ nên $BDPH$ nội tiếp suy ra $BP \perp MH$, tương tự $CQ \perp NH$ suy ra $CQ \perp AB$, $BP \perp AC$ nên các đường thẳng BP, CQ, AH đồng quy tại trực tâm K nằm trên đường cao AH.

Bài 12. ***(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm 2011 – TP Hà Nội).***

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định $(BC < 2R)$. Điểm A di động trên đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi AD là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.

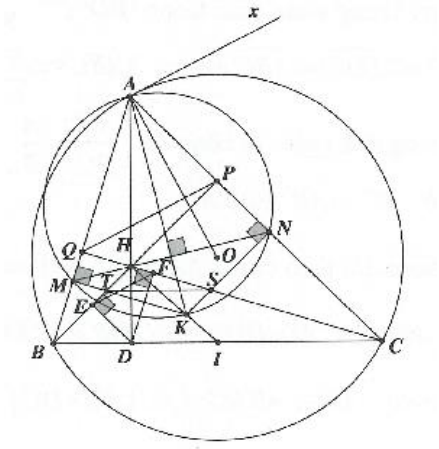
a. Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M, N. Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân.

b. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BH, CH. Chứng minh $OA \perp EF$

c. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K. Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

a. Từ giả thiết ta suy ra HM là phân giác của góc BHQ, HN là phân giác của góc PHC. Ta có: $AMN = HMB + MHB$, $ANM = NHC + NCH$ mà $QHB = PHC, MBH = NCH$ suy ra $AMN = ANM$.



b. Dựng các đường cao BP, CQ của ΔABC. Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) thì: $xAC = ABC$, mà $BQPC$ nội tiếp nên $ABC = APQ$ suy ra $xAC = APQ \Rightarrow Ax // PQ \Leftrightarrow PQ \perp OA$. Ta chứng minh: $EF // PQ$

Thật vậy do $HEDF$, $BQPC$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc $HFE = HDE = HBD = HQP$ hay $HFE = HQP \Leftrightarrow EF // QP$ đpcm.

c. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt phân giác trong góc A tại K thì AK chính là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN (ta kí hiệu là (AMN)). Giả sử KN cắt HB tại T, KN cắt SC tại S. Dễ thấy $HTKS$ là hình bình hành nên TS cắt HK tại trung điểm của mỗi đường. Ta chứng minh: $TS // BC$ để từ đó suy ra HK đi qua trung điểm I của BC.

Do $TM // QH, SN // PH, HM$ là phân giác của góc QHB, HN là phân giác của góc PHC nên ta có biến đổi sau: $\frac{TH}{TB}=\frac{MQ}{MB}=\frac{HQ}{HB}=\frac{HP}{HC}=\frac{NP}{NC}=\frac{SH}{SC}\Rightarrow\frac{TH}{TB}=\frac{SH}{SC}\Rightarrow TS//BC$. Theo bổ đề hình thang thì HK đi qua trung điểm I của BC.

Bài 13

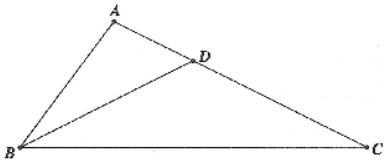
a. Cho tam giác MNP cân tại M và có góc $NMP=36^o$. Tính tỷ số $\frac{NM}{NP}$. Cho đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác ABC. Hai đường cao AE, BF cắt nhau tại trực tâm H. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b. Chứng minh rằng MF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

c. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng EF, CM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác (CEF) tại điểm K. Hãy so sánh số đo các góc BCN và BAK.

Giải

a. Ta chứng minh bổ đề sau:

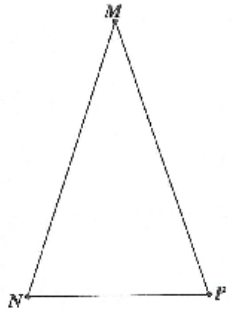


"Cho tam giác ABC có $ABC=2ACB$.

Chứng minh $AC^2=AB^2+AB.BC$".

Thật vậy: Dựng phân giác trong BD của tam giác ABC ta có: BDC là tam giác cân từ đó suy ra $ADB=2DBC=ABC$ suy ra $\Delta ABC\backsim\Delta ADB(g.g)\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}\Leftrightarrow AB^2=AD.AC$ (1). Theo tính chất đường phân giác ta cũng có: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\Leftrightarrow\frac{AD}{AD+DC}=\frac{AB}{AB+BC}\Leftrightarrow AD=\frac{AB.AC}{AB+BC}$ thay vào (1) ta có: $AC^2=AB^2+AB.BC$

Có thể biến đổi theo cách: $\Delta ABC\backsim\Delta ADB\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{DB}$ suy ra $AB^2=AC.AD, AB.BC=AC.DB=AC.DC$ (do $DB = DC$).



Từ đó ta có: $AB^2+AB.BC=AC(AD+DC)=AC^2$

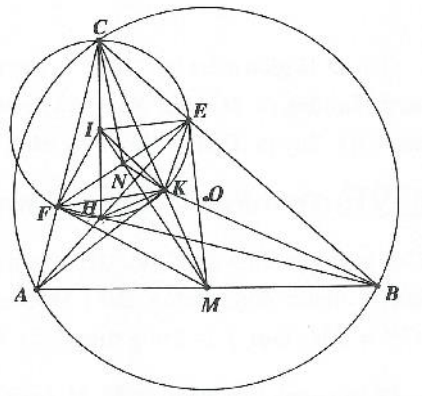
Trở lại bài toán: Tam giác MNP cân tại M và $NPM=36^o$ suy ra $N+P=2M$. Áp dụng bổ đề ta có: $AB^2=BC^2+AB.BC$.

Chia hai vế cho AB^2 suy ra: $1=\frac{BC^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}\Rightarrow\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\frac{BC}{AB}-1=0\Rightarrow\frac{BC}{AB}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

b. Tứ giác $CEHF$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính CH.

Suy ra $IE = IC = \frac{1}{2}CH \Rightarrow IEC = ICE$ (1). Ta cũng có $MEB = MBE$ (2). Từ (1), (2) ta suy ra $IEF + OEB = IFE + OBE = 90^o \Rightarrow IEM = 90^o$ hay *ME* là tiếp tuyến của *(I)*, tương tự *MF* cũng là tiếp tuyến của *(I)*.

c. Để ý rằng: $MK.MC = ME^2 = MN.MI$ nên *ICKN* là tứ giác nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc như sau:



$MNK = ICK = INC$ hay *NE* là phân giác của góc *CNK*. Từ đó ta có: $CNE = \frac{1}{2}CNK = \frac{1}{2}CIK = CFK$ từ đó suy ra $\Delta CNE \backsim \Delta CFK(g.g)$ suy ra $NCB = FCK = KFM$ (3). Ta cũng có: $CKF = CEF = CBA = CAB$ suy ra *KFAM* nội tiếp. Từ đó suy ra $KFM = KAB$ (4). Từ (3), (4) suy ra $BCN = BAK$

Bài 14. ***(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm 2013 – TP Hà Nội)***

Cho tam giác *ABC* không cân. Đường tròn *(O)* tiếp xúc với *BC, AC, AB* lần lượt tại *M, N, P*. Đường thẳng *NP* cắt *BO, CO* lần lượt tại *E, F*,

a. Chứng minh rằng OEN và OCA bằng nhau hoặc bù nhau.

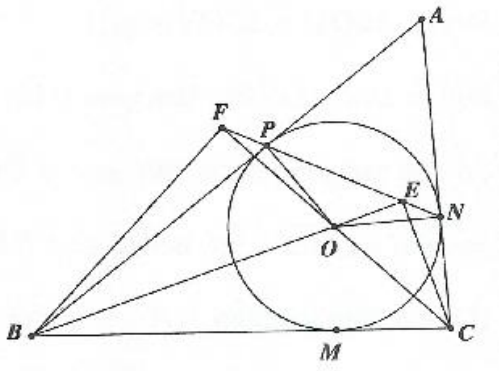
b. Chứng minh rằng 4 điểm *B, C, E, F* cùng thuộc một đường tròn.

c. Gọi *K* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *OEF*. Chứng minh *O, M, K* thẳng hàng.

Giải

a. Trường hợp 1: *E* nằm trong đoạn *PN*

Ta cũng có:



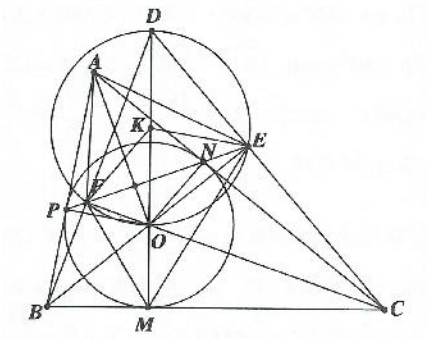
$$EOC = OBC + OCB = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^o - \frac{A}{2} = ANP$$

Nên *OENC* là tứ giác nội tiếp, suy ra $OEN + OCA = 180^o$

Trường hợp 2: *E* nằm ngoài đoạn *PN*. Ta có:

$ENC = ANP = \frac{180^o - A}{2} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = EOC$ nên *ONEC* là tứ giác nội tiếp suy ra $OEN = OCA$

b. Ta xét trường hợp E nằm ngoài đoạn PN.



Chứng minh tương tự câu a) ta suy ra $BPFO$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó ta suy ra $OEC = ONC = 90^o, OFC = OPB = 90^o$ nên $BFC = BEC = 90^o$. Hay 4 điểm B, F, E, C nằm trên đường tròn đường kính BC.

c. Gọi D là giao điểm của BF, CE suy ra O là trực tâm của tam giác DBC nên D, O, M thẳng hàng. Ta cũng có D, E, O, F nằm trên đường tròn đường kính DO nên điểm K chính là trung điểm của DO. Suy ra D, K, O, M thẳng hàng.

Bài 15. ***(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán – Tin TP Hà Nội 2014)***

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, H là trung điểm của BC. M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của MN.

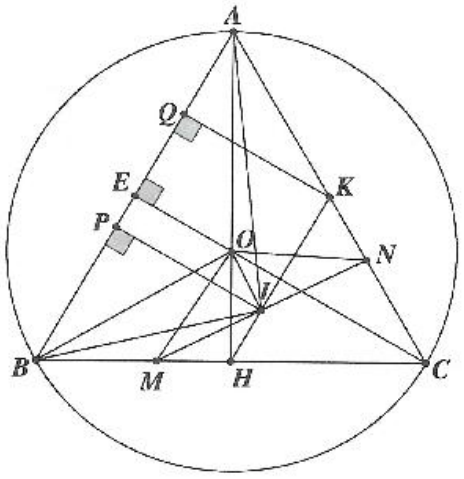
a. Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b. Xác định vị trí của điểm M để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

c. Khi điểm M thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài, chứng minh diện tích tam giác IAB không đổi.

Giải

a. Xét tam giác BOM và tam giác CON ta có: $BM = CN$ giả thiết, $OB = OC = R$, $OBM = OCN = 30^o$ (do tam giác ABC đều).



Suy ra $\Delta BOM = \Delta CON (c.g.c)$

Suy ra $OM = ON$ hay tam giác OMN cân tại O, do I là trung điểm của MN suy ra $OI \perp MN \Rightarrow OIM = OHM = 90^o$ nên tứ giác $OMHI$ nội tiếp (có hai đỉnh liên tiếp I, H cùng nhìn OM góc bằng 90^o)

b. Ta có $180^o = OMB + OMC = OMB + ONC$ suy ra tứ giác $OMNC$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^o) nên $MON = 180^o - NCM = 120^o$, $OMN = OBM = 30^o$. Trong tam giác vuông OMI và OMH ta có: $IM = \dfrac{2OM}{\sqrt{3}} \geq \dfrac{2OH}{\sqrt{3}} = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ suy ra $MN \geq \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H$.

c. Từ chứng minh ở câu a, b suy ra $OMN = OHI = OCN = 30^o$. Suy ra $HI // AB$, gọi K là trung điểm của AC thì H, I, K thẳng hàng. Kẻ IP, CE, KQ lần lượt vuông góc với AB thì $S_{IAB} = \frac{1}{2}IP.AB = \frac{1}{2}KQ.AB = \frac{1}{4}CE.AB = \frac{\sqrt{3}}{8}AB^2$ không đổi. Suy ra đpcm.

Bài 16. ***(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm 2014 – TP Hà Nội)***

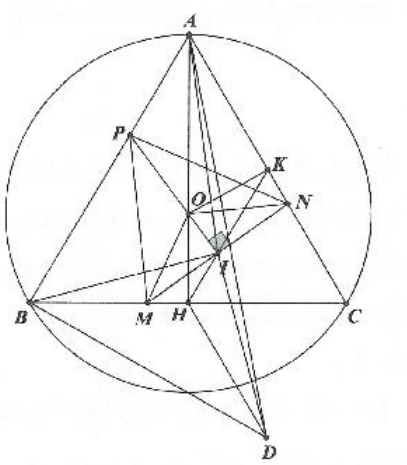
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trung điểm của BC. M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của MN.

a. Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi P là giao điểm của OI và AB. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

c. Xác định vị trí của điểm M để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

Giải



a. Xét tam giác BOM và tam giác CON ta có: $BM = CN$ giả thiết, $OB = OC = R$, $OBM = OCN = 30^o$ (do tam giác ABC đều). Suy ra $\Delta BOM = \Delta CON (c.g.c)$ suy ra $OM = ON$ hay tam giác OMN cân tại O, do I là trung điểm của MN suy ra $OI \perp MN \Rightarrow OIM = OHM = 90^o$ nên tứ giác $OMHI$ nội tiếp (có hai đỉnh liên tiếp I, H cùng nhìn OM góc bằng 90^o).

b. Do điểm P nằm trên trung trực cạnh MN nên $PM = PN$ (1).

Ta có $180^o = OMB + OMC = OMB + ONC$ suy ra tứ giác $OMNC$ nội tiếp

(tổng hai góc đối bằng 180^o) nên $MON = 180^o - NCM = 120^o$, $POM = PON = 120^o$ suy ra $POM + PBM = 180^o \Rightarrow$ tứ giác $PBMO$ nội tiếp nên $OPM = OBM = 30^o$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $OPN = OAN = 30^o \Rightarrow MPN = 60^o$ (2). Từ (1) và (2) suy ra tam giác PMN là tam giác đều.

c. Từ chứng minh ở câu a, b suy ra $OMN = OHI = OCN = 30^o$. Suy ra $HI // AB$, gọi K là trung điểm của AC thì H, I, K thẳng hàng.

Tam giác IAB có AB không đổi nên chu vi tam giác nhỏ nhất khi $IA + AB$ nhỏ nhất. Đường thẳng HI cố định. Gọi D là điểm đối xứng với B qua HI thì điểm D cố định, suy ra độ dài AD không đổi. Ta có $IB = ID \Rightarrow IA + IB = IA + ID \geq AD$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, D, I thẳng hàng. Tức điểm I chính là giao điểm của AD và HK. Mặt khác ta dễ chứng minh được $AHDK$ là hình bình hành. Nên dấu bằng xảy ra khi I là trung điểm của HK, khi đó điểm $M \equiv H$.

Bài 17. ***(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán – Tin TP Hà Nội 2015)***

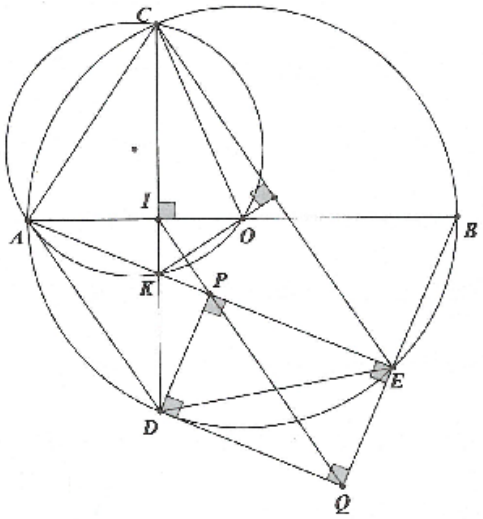
Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB*. Gọi *I* là điểm bất kì trên đoạn thẳng *AO* (*I* khác *A*, *I* khác *O*). Đường thẳng đi qua *I* và vuông góc với *AB* cắt đường tròn *(O)* tại các điểm *C* và *D*. Gọi *E* là điểm trên đường tròn *(O)* sao cho *D* là điểm chính giữa của cung *AE*. Gọi *K* là giao điểm của *AE* và *CD*.

a. Chứng minh: *OK* đi qua trung điểm của *CE*.

b. Đường thẳng qua *I* song song với *CE* cắt *AE, BE* lần lượt tại *P, Q*. Chứng minh: *DPEQ* là hình chữ nhật.

c. Tìm vị trí điểm *I* trên đoạn thẳng *AO* sao cho *KC = KA + KO*.

Giải



a. Từ giả thiết ta suy ra *AC = AD = DC* suy ra tứ giác *CADE* là hình thang cân có hai đáy là *AD, CE*. *K* là giao điểm của hai đường chéo nên *K* nằm trên trung trực của *CE* suy ra $KO \perp CE$. Nói cách khác *KO* đi qua trung điểm của *CE*.

b. Do *AB* là đường kính của *(O)* nên $AEB = AEQ = 90^o$. Tứ giác *IPDA* có $IPA = EPQ = AEC = ADI$ nên *IPDA* là tứ giác nội tiếp suy ra $APD = 90^o$ từ đó dễ dàng suy ra *O, P, D* thẳng hàng, *IPDA* là hình thang cân và *PD // CE*. Tứ giác *DPEQ* có $DEQ = PDE = PDA = DPQ$ nên *DPEQ* là tứ giác nội tiếp,

kết hợp $DPE = AEQ = 90^o$ suy ra *DPEQ* là hình chữ nhật.

c. Xét tứ giác *COKA* ta có: $COA = sd\,AC = \frac{1}{2}(sd\,AC + DE) = CKA$. Từ đó suy ra *COKA* là tức giác nội tiếp. Áp dụng định lý Ptolemy ta có: $KA.OC + AC.KO = CK.AO$ hay $KA + \frac{AC}{AO}.KO = CK$ như vậy để $KC = KA + KO$ thì điều kiện là $\frac{AC}{AO} = 1 \Leftrightarrow AC = AO$ hay *ACO* là tam giác đều suy ra *I* phải là trung điểm của *AO*.

Bài 18.*(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội 2015).*

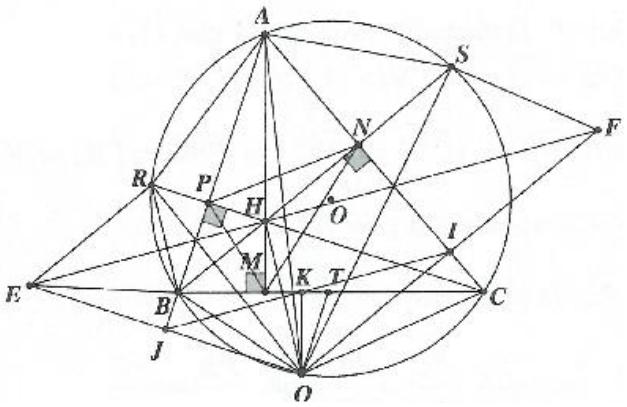
Cho tam giác đều *ABC* có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn *(O)*. Các đường cao *AM, BN, CP* của tam giác *ABC* cùng đi qua điểm *H*. Gọi *Q* là điểm bất kì trên cung nhỏ *BC* (*Q* khác *B*, *Q* khác *C*). Gọi *E, F* theo thứ tự là điểm đối xứng của *Q* qua các đường thẳng *AB* và *AC*.

a. Chứng minh *MH.MA = MP.MN*

b. Chứng minh ba điểm *E, H, F* thẳng hàng.

c. Gọi J là giao điểm của QE và AB, I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của điểm Q trên cung nhỏ BC để $\left(\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất.

Giải



a. Xét tam giác MHP và tam giác MNA, ta có: $APMC$, $MHCN$ nội tiếp nên

$AMP = ACP = NMH, MPH = HAN$ nên

$\Delta MHP \backsim \Delta MNA \Rightarrow \frac{MH}{MN} = \frac{MP}{MA}$ hay

$MH.MA = MN.MP$

b. Dựng $QK \perp BC$ ta có các tứ giác $JBKQ$, $QKIC$, $ABQC$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc sau:

$JKQ = JBQ = ACQ = 180^O - QKI$ hay $JKQ + QKI = 180^o$ nên J, K, I thẳng hàng.

Giả sử tia CH, BH cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là R, S thì $RAB = RCB = HAB$, tương tự $RBA = HBA$ nên suy ra H đối xứng với R qua AB, tương tự H đối xứng với S qua AC.

Ta có tứ giác $ERHQ$ là hình thang cân và tứ giác $CRBQ$, $KBJQ$ nội tiếp nên $HEQ = HRQ = CBQ = KJQ$ nên suy ra HE // KJ, chứng minh tương tự ta có: HF // KI mà I, K, J thẳng hàng nên suy ra E, H, F thẳng hàng.

c. Trên BC lấy điểm T sao cho $QCT = QBA$ suy ra $\Delta QBA \backsim \Delta QCT$, QJ, QK là các đường cao tương ứng nên suy ra $\frac{AB}{QJ} = \frac{TC}{QK}$ (1), tương tự $\Delta BQT \backsim \Delta AQC \Rightarrow \frac{AC}{QI} = \frac{TB}{QK}$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI} = \frac{TC}{QK}+\frac{TB}{QK} = \frac{BC}{QK}$ suy ra $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{BC}{QK}$ nhỏ nhất, hay QK lớn nhất suy ra Q là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Bài 19. ***(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán – Tin TP Hà Nội 2016).***

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp (O) các đường cao BB', CC' cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC tia MH cắt (O) tại điểm P.

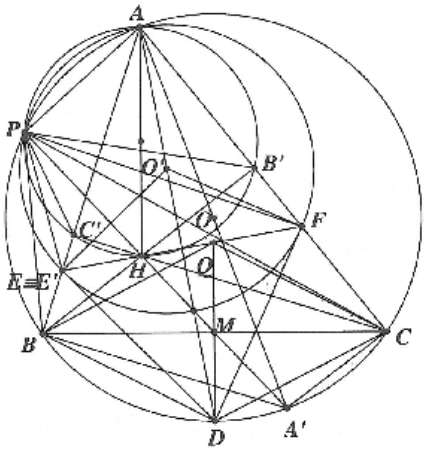
a. Chứng minh: Các tam giác BPC', CPB' đồng dạng.

b. Các đường phân giác của BPC', CPB' lần lượt cắt AB, AC tại E, F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, K là giao điểm của HM và AO'.

+ Chứng minh: $PEKF$ nội tiếp.

+ Chứng minh các tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên (O).

Giải



a. Gọi *A'* là điểm đối xứng của *A* qua *O*, khi đó *BHCL* là hình bình hành $\Rightarrow P,H,A',M$ thẳng hàng. Suy ra $APH=90^o$. Vậy *A, P, C', H, B'* cùng thuộc đường tròn đường kính *AH*.

b. + Chứng minh tứ giác *PEKF* nội tiếp. Vì *PE* là phân giác của $BPC' \Rightarrow \frac{EB}{EC'}=\frac{PB}{PC'}$

Tương tự ta có: $\frac{FC}{FB'}=\frac{PC}{PB'}$ mà $\frac{PB}{PC'}=\frac{PC}{PB'}$ (theo (1)).

Từ đó suy ra $\frac{EB}{EC'}=\frac{FC}{FB'}$ (2)

Mặt khác, $\Delta BHC' \backsim \Delta CHB'$ (3)

Từ (2) và (3) ta có, *E, H, F* thẳng hàng và theo (1) ta có: $\frac{PE}{PF}=\frac{BC'}{CB'}=\frac{HE}{HF}\Rightarrow PH$ là phân giác của EPF

Vậy *PH* đi qua điểm chính giữa của cung *EF* không chứa *A*. Lại có ΔAEF cân tại *A* suy ra phân giác *AO'* đi qua điểm chính giữa của cung *EF* không chứa *A*. Như vậy giao điểm *K* của *AO'* và *PH* thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Vậy *PEKF* là tứ giác nội tiếp.

+ Gọi *D* là điểm chính giữa cung *BC* không chứa *A* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. *Q* là điểm đối xứng của *D* qua *BC* nên *BHQC* là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $HBQ=HCQ$. Gọi *E'* là giao điểm của *HQ* và *AB*, khi đó $BHE'=QCB$. Ta lại có:

$QHC=QBC, QHC=E'HC', QBC=QCB\Rightarrow BHE'=C'HE'\Rightarrow HE'$ là phân giác của $BHC'\Rightarrow E'\equiv E$ vậy $Q\in EF$. Ta có *DQ* là phân giác của BDC nên $QDB=\frac{180^o-A}{2}=AEF$ suy ra tứ giác *BDQE* nội tiếp. Ta có $BED=BQD=\frac{180^o-A}{2}=90^o=\frac{A}{2}\Rightarrow AEO'+BED=90^o\Rightarrow O'E\perp DE$ hay *DE* là tiếp tuyến của *(O')*. Chứng minh tương tự. *DF* là tiếp tuyến của *(O')*. Tức là các tiếp tuyến của *(O')* tại *E* và *F* cắt nhau tại *D* nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Nhận xét: Đây là bài toán khó nhất trong các kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán từ trước đến nay. Bài toán này là bài tương tự của đề thi VMO2016, một bài toán khác cũng từng xuất hiện trên báo THTT.

Bài toán: Cho tam giác *ABC* có 3 đường cao là *AX, BY, CZ* cắt nhau tại điểm *H*, *M* là trung điểm của *BC*, *P* là một điểm thuộc đường thẳng *HM*. Đường tròn *(K)* đường kính *AP* cắt *CA, AB* lần lượt tại *E, F* khác *A*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AYZ* cắt *(K)* tại điểm *G* khác *A*.

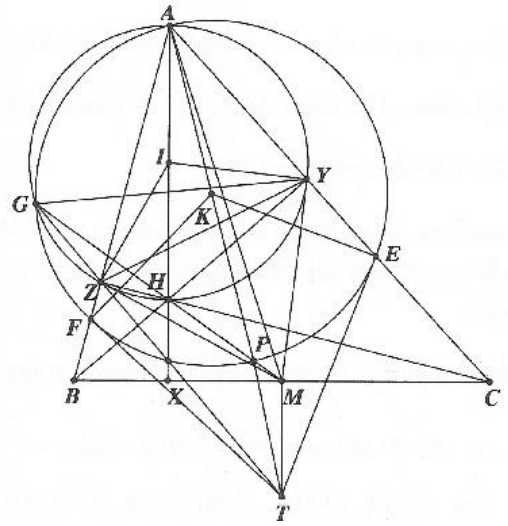
a. Chứng minh: *P, H, G* thẳng hàng.

b. Chứng minh tiếp tuyến tại *E, F* của *(K)* cắt nhau trên đường trung trực của *BC*.

Phân tích định hướng giải:

Dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY có đường kính là AH nên $HG \perp GA$, mặt khác $PG \perp GA$ nên P, G, H thẳng hàng. Xét tam giác GYE và tam giác GZF ta có: $YEG = ZFG$ (cùng chắn cung GA). $GYE = GZF$ (cùng bù với $AYG = AZG$). Do đó $\Delta GYE \backsim \Delta GZF$. Xét tam giác GYZ và tam giác GEF ta có:

$GYZ = GAZ \equiv GAF = GEF$, $ZGY = ZAY \equiv FAE = FGE$ suy ra $\Delta GYZ \backsim \Delta GEF$.



Do $MYB = MBY = YAH, MZH = MCZ = ZAH$ suy ra M là giao điểm của các tiếp tuyến tại Y,Z của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ. Tương tự ta cũng có T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Ta có:

$GFT = GFE + EFT = 180^o - GAY + FAE$

$= 180^o - (GAY - FAE) = 180^o - GAZ$

và $GZM = GZH + HZM = 180^o - GAH + HAZ = 180^o - GAZ$ nên $GFT = GZM$ mặt khác cũng từ $\Delta MYZ \backsim \Delta TFE$ và $\Delta GYZ \backsim \Delta GEF$ ta suy ra $\frac{TF}{ZM} = \frac{EF}{ZY} = \frac{GF}{GZ}$ hay $\Delta GFT \backsim \Delta GZM$ suy ra $\Delta GZF \backsim \Delta GMT$ suy ra $GMT = GZF = 180^o - GZA = 180^o - GHA = AHP$ hay $TM // AH \perp BC$.

Bài 20. Từ điểm M cố định ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn $MC < MD$, tia MC nằm giữa tia MA, MO. Gọi I là trung điểm của CD.

a. Giả sử CD cắt AB tại N. Chứng minh: $BMD = IAB$ và $\frac{NA.IB}{IA.NB} = 1$.

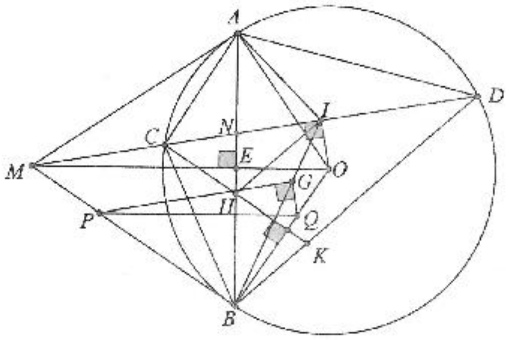
b. Đường thẳng qua C song song với MB cắt AB, BD lần lượt tại H, K. Chứng minh: H là trung điểm của CK.

c. Giả sử M cố định, (O) không đổi và cát tuyến MCD thay đổi. Chứng minh: Trọng tâm G của tam giác BCD nằm trên một đường tròn cố định.

Giải

a. Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên

$MAO = MBO = 90^o$ nên các điểm M, A, O, B nằm trên đường tròn đường kính MO.



Do I là trung điểm của CD nên $OI \perp CD$. Suy ra điểm I nằm trên đường tròn đường kính MO. Như vậy 5 điểm M, A, O, I, B nằm trên đường tròn đường kính MO do đó $BMD = IAB$ (Góc nội tiếp chắn cung

IB).

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $MA = MB \Leftrightarrow MA = MB.$ Suy ra $AIM = BIM$ (Tính chất các góc nội tiếp một đường tròn chắn cung bằng nhau). Từ đó suy ra *MI* là phân giác của góc AIB.

Xét tam giác *IAB* ta có: *IN* là phân giác trong của góc AIB suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{NA}{NB} \Leftrightarrow \frac{IA}{IB}.\frac{NB}{NA} = 1$

b. Vì *CH // MB* nên $BMI = HCI$ (đồng vị). Mặt khác $BMI = HAI$ (cùng chắn cung *BI* của tứ giác nội tiếp *MAIB)*. Từ đó suy ra $HAI = HCI$ suy ra tứ giác *ACHI* nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp *A, C* cùng nhìn cạnh *HI* góc bằng nhau). Từ đó suy ra $CAH = CIH$ (cùng chắn cung *CH*). Mà $CAH = CDB \Rightarrow CIH = CDB$ hay *HI* // *BD* mà *I* là trung điểm của *CD* suy ra *H* là trung điểm của *CK*.

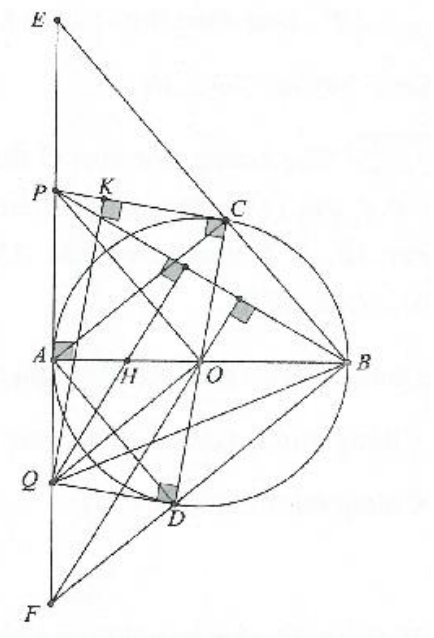
c. Qua *G* kẻ các đường thẳng song song với *IO, MD* cắt *OB, MB* lần lượt tại *Q, R*.

Ta có các điểm *B, O, M* cố định và $\frac{BQ}{BO} = \frac{BG}{BI} = \frac{BP}{BM} = \frac{PQ}{MO} = \frac{2}{3}$, suy ra *P, Q* cố định và $PGQ = 90^o.$ Suy ra *G* thuộc đường tròn đường kính $PQ = \frac{2}{3}MO.$

Bài 21. Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB* cố định và đường kính *CD* thay đổi không trùng với *AB*. Tiếp tuyến tại *A* của đường tròn *(O)* cắt các đường thẳng *BC* và *BD* lần lượt tại *E* và *F*. Gọi *P* và *Q* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *AE* và *AF*.

1. Chứng minh *ACBD* là hình chữ nhật.
2. Chứng minh: *CP, DQ* là các tiếp tuyến của *(O)* và $\Delta ABE \backsim \Delta AFB$.
3. Chứng minh: Tứ giác *ECDF* là tứ giác nội tiếp.
4. Gọi *H* là trực tâm của tam giác *BPQ*. Chứng minh *H* là trung điểm của *OA*.
5. Tìm vị trí điểm *C* trên *(O)* để diện tích tam giác *BPQ* lớn nhất.

Giải



1. Vì *AB, CD* là các đường kính của *(O)* nên *ACBD* là hình bình hành. Mặt khác $ACB = 90^o$. Suy ra *ACBD* là hình chữ nhật. (cũng có thể lập luận: Tứ giác *ACBD* có 4 góc vuông nên *ACBD* là hình chữ nhật).

2. Do tam giác *ECA* vuông tại *C* và *P* là trung điểm của $EA \Rightarrow PA = PE = PC.$ (tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông).

Từ đó suy ra $\Delta PAO = \Delta PCO(c.c.c)$ nên $PCO = PAO = 90^o$ hay *PC* là tiếp tuyến của *(O)*.

Tương tự ta có *QD* là tiếp tuyến của *(O)*.

Xét $\Delta ABE, \Delta AFB$ ta có: $AEB = ABF$ (cùng phụ với góc EBA) suy ra $\Delta ABE \backsim \Delta AFB(g.g)$

3. Xét tứ giác *ECDF* ta có $BCD = BAD$ (cùng chắn cung *AD* của tứ giác nội tiếp *ACBD*)

Mà $BAD = DFE$ (cùng phụ với góc DAF). Từ đó suy ra $BCD = DFE$ nên tứ giác *ECDF* nội tiếp (góc ngoài đỉnh *C* bằng góc trong đối diện với đỉnh *C*).

4. Vì *PC, PA* là các tiếp tuyến của *(O)* nên $PO \perp AC,$ do $AC//BD \Rightarrow PO \perp BD,$ mặt khác $BO \perp PF$ suy ra *O* là trực tâm tam giác $PBF \Rightarrow FO \perp PB.$ Do *H* là trực tâm của tam giác $PBQ \Rightarrow QH \perp PB$ từ đó suy ra $QH//FO \Rightarrow H$ là trung điểm của *AO*.

Ta cũng có thể chứng minh bằng cách khác: Gọi *H* là trung điểm *OA*, ta chứng minh *H* là trực tâm của tam giác *PBQ*.

Dễ chứng minh được: $\Delta ABE \backsim \Delta AFB \backsim \Delta AQO$ suy ra

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AQ}{AO} \Leftrightarrow \frac{AB}{2AP} = \frac{AQ}{2AH} \Leftrightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AQ}{AH} \Leftrightarrow \Delta ABP \backsim \Delta AQH \Rightarrow QH \perp PB,$$ hay *H* là trực tâm của tam giác *PBQ*.

5. Ta có $S_{PBQ} = \frac{1}{2}BA.PQ = R.PQ$ suy ra S_{PBQ} nhỏ nhất khi và chỉ khi *PQ* nhỏ nhất. Dựng $QK \perp CP \Rightarrow QKCD$ là hình chữ nhật nên *QK = CD = 2R.* Trong tam giác vuông *PKQ* thì $PQ \geq QK = 2R \Rightarrow S_{PBQ} = \frac{1}{2}BA.PQ = R.PQ \geq 2R^2.$ Vậy diện tích tam giác *PBQ* nhỏ nhất bằng $2R^2$ khi và chỉ khi $P \equiv K \Leftrightarrow CD//PQ \Leftrightarrow CD \perp AB.$

Cũng có thể lập luận bằng cách khác: $S_{PBQ} = \frac{1}{2}BA.PQ = \frac{1}{2}R.2PQ = \frac{1}{2}R.EF = \frac{1}{2}R.(AE + AF).$ Chú ý rằng: $AE.AF = BA^2 = 4R^2.$ Theo bất đẳng thức Cô-si ta có: $AE + AF \geq 2\sqrt{AE.AF} = 4R.$ Suy ra

$S_{PBQ} \ge 2R^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AE = AF = 2R \Leftrightarrow AP = AQ = R \Leftrightarrow APCO$ là hình vuông. Suy ra $CD \perp AB$.

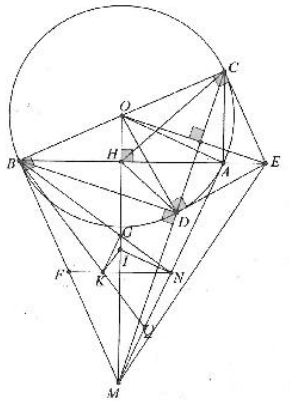
Bài 22. Cho đường tròn tâm *O* đường kính *BC*, điểm *A* nằm trên $O(A \ne B,C)$. Các tiếp tuyến tại *B*, *A* của *(O)* cắt nhau tại điểm *M*, *MC* cắt *(O)* tại giao điểm thứ 2 là *D*. Gọi *H* là trung điểm *AB*, *N* là trung điểm của *AM*. *I*, *K* lần lượt là tâm vòng tròn ngoại tiếp, trọng tâm các tam giác *MAB*, *MNB*.

a. Chứng minh: *BHDM* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: *OHDE* là tứ giác nội tiếp.

c. Chứng minh: $IK \perp BN$.

Giải



a. Vì điểm *D* nằm trên đường tròn đường kính *BC* nên $BDC = 90^o \Rightarrow BDM = 90^o$, $BHM = 90^o$ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau). Suy ra $BDM = BHM = 90^o$. Vậy tứ giác *BHDM* nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp *H*, *D* cùng nhìn *BM* một góc vuông).

b. Xét tam giác *OBM* và tam giác *BCE*.

Ta có: $OBM = BCE = 90^o, OMB = CBE$ (cùng phụ với ABM). Từ đó suy ra $\Delta OBM \backsim \Delta BCE(g.g)$

suy ra $\frac{OB}{BM} = \frac{CE}{CB} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}CB}{BM} = \frac{CE}{2CO}$ hay $\frac{CB}{BM} = \frac{CE}{CO} \Rightarrow \Delta CBM \backsim \Delta OCE(c.g.c)$,

suy ra $OCD + COE = OCD + CMB = 90^o$ hay $OE \perp CM$ tại trung điểm của *CD* do đó

$\Delta OCE \backsim \Delta ODE(c.c.c) \Rightarrow OCE = ODE = 90^o$. Vậy *ED* là tiếp tuyến của *(O)*.

Vì $OCE = ODE = OHE = 90^o$ nên 5 điểm *O*, *C*, *E*, *D*, *H* nằm trên đường tròn đường kính *OE*. Hay *OHDE* là tứ giác nội tiếp.

c. Vì *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân *ABM* nên *I* nằm trên đường cao *AH* của tam giác *MAB* và $IN \perp AM$. Gọi *Q*, *F* lần lượt là trung điểm *MN*, *MB*, *G* là trọng tâm tam giác *MAB* thì $\frac{BG}{BN} = \frac{BK}{BQ} = \frac{2}{3}$ theo định lý Thales đảo ta suy ra $GK // AM \Rightarrow IN \perp GK$. Mặt khác tam giác *MAB* cân tại *M* nên $GI \perp NF \Leftrightarrow GI \perp NK$. Từ đó suy ra *I* là trực tâm của tam giác *GKN* do đó $IK \perp BN$.

Bài 23. Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính $AB = 2R$. EF là dây cung di động trên nửa đường tròn sao cho *E* thuộc cung *AF* và $EF = \frac{AB}{2}$. Gọi *H* là giao điểm của *AF*, *BE*, *C* là giao điểm của *AE*, *BF*, *I* là giao điểm của *CH*, *AB*.

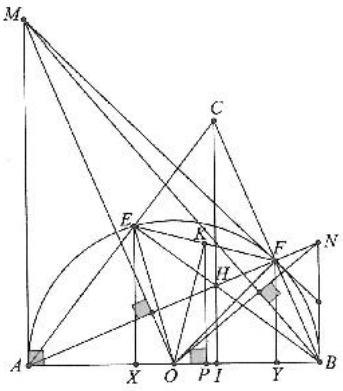
a. Chứng minh 4 điểm *A*, *C*, *F*, *I* cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: $AE.AC + BF.BC$ có giá trị không đổi khi *EF* di chuyển trên nửa đường tròn *(O)*.

c. Đường thẳng AF cắt tiếp tuyến tại B ở N, các tiếp tuyến tại A, F của (O) cắt nhau ở M. Chứng minh: $ON \perp MB$.

d. Xác định vị trí EF trên nửa đường tròn để tứ giác $ABEF$ có diện tích lớn nhất.

Giải



a. Vì các điểm E, F nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $AEB = AFB = 90^o$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Do C là giao điểm của AE, BF suy ra $BE \perp AC, AF \perp BC$ suy ra BE, AF cắt nhau tại điểm H là trực tâm tam giác CAB suy ra $CI \perp AB$.

Tứ giác $ACFI$ có $AFC = AIC = 90^o$ suy ra tứ giác $ACFI$ là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp F, I cùng nhìn AC góc 90^o).

b. Xét tam giác vuông ACI và tam giác vuông ABE ta có $AIC = ABE = 90^o, CAB$ chung.

Suy ra $\Delta ACI \backsim \Delta ABE$ do đó: $\frac{AC}{AI} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AC.AE = AI.AB$

Tương tự ta cũng có: $BC.BF = BI.AB$. Cộng hai đẳng thức ta có:

$AE.AC + BF.BC = AB(AI + BI) = AB^2 = 4R^2$.

c. Xét tam giác MAO và tam giác ABN. Ta có: $OAM = NBA = 90^o, OMA = BAN$ (cùng phụ với NAM).

Từ đó suy ra $\Delta MAO \backsim \Delta ABN$ (g.g) suy ra $\frac{MA}{AO} = \frac{AB}{BN} \Leftrightarrow \frac{MA}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2OB}{BN}$ hay

$\frac{MA}{AB} = \frac{OB}{BN} \Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta OBN$

(c.g.c), suy ra $NOB + MBA = BMA + MBA = 90^o$ hay $ON \perp MB$.

d. Dễ thấy: Tam giác OMN là tam giác đều có cạnh $MN = R$. Gọi K là trung điểm của EF thì $OK \perp EF$. Từ đó ta tính được $OK^2 = OE^2 - KE^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{3}R}{2}$. Tam giác OMN có diện tích là $S_1 = \frac{1}{2}OK.EF = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$. Dựng EX, FY lần lượt vuông góc với AB tại E, F thì tứ giác $EFYX$ là hình thang vuông, dựng $KP \perp AB$ suy ra P là trung điểm XY nên KP là đường trung bình hình thang $EFYX$.

Ký hiệu S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác AOE, BOF thì

$S_1=\frac{1}{2}OA.EX=\frac{1}{2}R.EX; S_2=\frac{1}{2}OB.FY=\frac{1}{2}R.FY$. Ta có $S_{AEFB}=S_1+S_2+S_3$ mà S_1 không đổi nên S_{AEFB} lớn nhất khi và chỉ khi S_2+S_3 lớn nhất.

Ta có $S_2+S_3=\frac{1}{2}R\left(EX+FY\right)=\frac{1}{2}R.2KP=R.KP$. Trong tam giác vuông OKP ta có: $KP\le KO=\frac{\sqrt{3}}{2}R.$ suy ra $S_2+S_3\le\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $P\equiv O\Leftrightarrow PK\perp EF\Leftrightarrow EF//AB$. Vậy GTLN của S_{AEFB} là $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ khi và chỉ khi $EF//AB$.

Bài 24. Cho đường tròn tâm *O* và điểm *A* nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến *AB, AC* với *(O)* với *B, C* là các tiếp điểm. Trên cung nhỏ *BC* lấy một điểm *M* rồi kẻ các đường vuông góc *MI, MH, MK* xuống *BC, CA, AB*. Gọi *P, Q* lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng *BM* và *IK, CM* và *IH*.

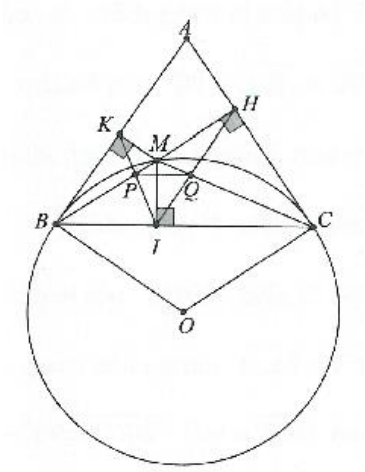
a. Chứng minh: Các tứ giác *BIMK, CIMH* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $MI^2=MH.MK$

c. Chứng minh: *IPMQ* nội tiếp rồi suy ra $PQ\perp MI$.

d. Tìm vị trí điểm *M* để *MI. MH. MK* đạt GTLN.

Giải



a. Từ giả thiết ta có: $BKM=BIM=90^0$ suy ra tứ giác *BKMI* nội tiếp. Tương tự cho tứ giác *CIMH, AKMH*.

b. Vì tứ giác *BKMI* nội tiếp nên: $MKI=MBI$ (cùng chắn cung *MI*). Mặt khác ta có: $MBI=MCH$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Nhưng $MCH=MIH$ (cùng chắn cung *MH* của tứ giác nội tiếp *MHCI*). Suy ra $MKI=MIH$. Hoàn toàn tương tự ta có: $MIK=MHI$ nên $\Delta MIK\backsim\Delta MHI(g.g)$

Suy ra $\frac{MI}{MK}=\frac{MH}{MI}\Leftrightarrow MI^2=MH.MK$.

c. Ta có: $PMQ+PIQ=BMC+PIM+QIM=BMC+MBA+MCA=BMC+MCB+MBC=180^0$.

Do đó tứ giác *PIQM* nội tiếp (Tổng hai góc đối nhau bằng 180^0).

Vì *PIQM* nội tiếp suy ra $MPQ=MIQ=MKI=MBI$ suy ra $PQ//BC$ hay $MI\perp PQ$.

d. Từ chứng minh ở câu b) ta có $MI^2=MH.MK\Rightarrow MI^3=MI.MH.MK$. Suy ra $MI.MH.MK$ lớn nhất khi và chỉ khi *MI* lớn nhất. Hay *M* là điểm chính giữa cung nhỏ *BC* không chứa *A*.

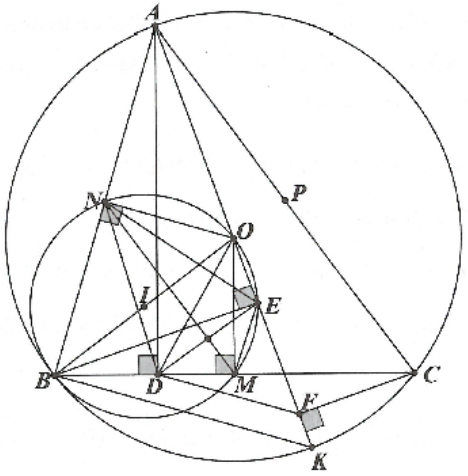
Bài 25. Cho tam *ABC* có 3 góc nhọn nội tiếp *(O;R)*. Dựng đường cao *AD* của tam giác và đường kính *AK* của *(O)*. Hạ *BE, CF* lần lượt vuông góc với *AK*.

a. Chứng minh: *ABDE, ACFD* là các tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ và $DF \perp AB$

c. Cho *BC* cố định, điểm *A* di chuyển trên cung lớn *BC*. Chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *DEF* là một điểm cố định.

Giải



a. Vì $ABD = AEB = 90^0$ suy ra 4 điểm *A, B, D, E* nằm trên đường tròn đường kính *AB* có tâm là trung điểm *N* của *AB*.

$ADC = AFC = 90^0$ nên 4 điểm *A, D, F, C* nằm trên đường tròn đường kính *AC* có tâm là trung điểm *P* của *AC*.

b. Do tứ giác *ADFC* nội tiếp nên: $DFA = DCA$ cùng chắn cung *AD*.

Ta có $DEF = 90^0 - BED = 90^0 - BAD = ABD$. Từ đó suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta DEF\left(g.g\right)$.

Ta có: $DFA = DCA = BKA \Rightarrow BK // DF$

mà $BK \perp AB \Rightarrow DF \perp AB$

c. Gọi *M* là trung điểm của *BC, I* là trung điểm của *BO* thì $ON \perp AB, OM \perp BC$ suy ra 5 điểm *N, O, E, M, B* nằm trên đường tròn đường kính *BO*. Ta có: $MNE = MBE \equiv DBE = DAE = \frac{1}{2}DNE$ suy ra *MN* là phân giác của góc DNE. Tam giác *DNE* cân tại *N* suy ra *MN* cũng là trung trực của *DE*, tương tự ta cũng có *MP* là trung trực của *DF*. Suy ra *M* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *DEF*. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *DEF* là điểm *M* cố định.

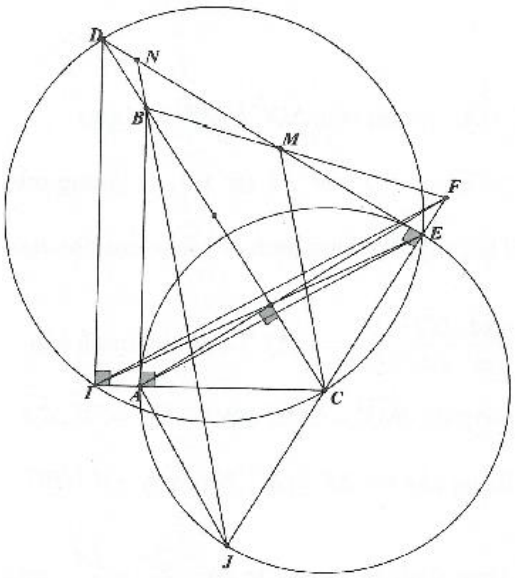
Bài 26. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A, D* là điểm trên tia đối của tia *BC*, kẻ tiếp tuyến *DE* với đường tròn tâm *C* bán kính *CA* (*A, E* ở khác phía so với *BC*). Đường thẳng qua *A* vuông góc với *BC* cắt đường thẳng *CE* tại *F*, đường thẳng *BF* cắt *DE* tại *M*, qua *B* kẻ đường thẳng song song với *CM* cắt *DE* tại *N*. Gọi *J* là giao điểm thứ 2 của đường tròn *(C; CA)* với *EC*.

a. Đường tròn đường kính *DC* cắt *AC* tại *I*. Chứng minh: *AIFE* nội tiếp.

b. Tam giác *CIF* cân tại *C*.

c. Chứng minh: *M* là trung điểm của *NE*.

Giải



a. Đường tròn đường kính DC cắt AC tại I nên $DIC = 90^0 \Rightarrow DECI$ nội tiếp. Suy ra

$EIC = EDC = 90^0 - ECD = CFA \Leftrightarrow AIE = AFE$

Hay tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

b. Do $CA = CE$

mà $CEA = CIF, CAE = CFI \Rightarrow AIF = AFI$ suy ra tam giác CIF cân tại C và $AE // IF$.

c. Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác BFC với cát tuyến DME ta có: $\frac{MB}{MF}.\frac{EF}{EC}.\frac{DC}{DB} = 1(*)$.

Mặt khác, do $AE // IF$ nên ta có: $\frac{EF}{EC} = \frac{AI}{AC}$, do $AB // DI$ nên $\frac{DC}{DB} = \frac{IC}{IA}$ thay vào (*) ta có:

$\frac{MB}{MF}.\frac{AI}{AC}.\frac{IC}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{AC}{IC} = \frac{CJ}{CF} \Rightarrow BJ // CM$

hay M là trung điểm của NE.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm M cố định.

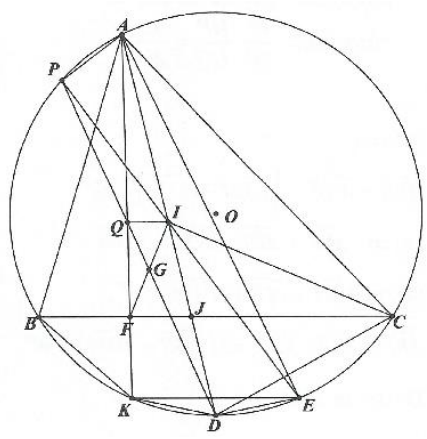
Bài 27. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D, E là điểm trên cung BDC, điểm F trên cạnh BC thỏa mãn $BAF = CAE < \frac{1}{2}BAC$. Gọi G là trung điểm của IF. Đường thẳng EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại P, đường thẳng AI cắt BC tại J, AF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K cắt DP tại Q.

a. Chứng minh: $APQI$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$.

c. Chứng minh: DG, EI cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải



a. Do AD là phân giác trong góc A nên $BAD = CAD,$ vì $BAK = CDE \Rightarrow KAD = EAD,$ mặt khác $EAD = EPD \Leftrightarrow EAD = EPD$ suy ra tứ giác $PQIA$ nội tiếp.

b. Xét tam giác DCJ, DAC ta có: $DCJ = DAC$, ADC chung nên $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC(g.g)$

c. Giả sử PD cắt FI tại G'. Ta chứng minh $G' \equiv G.$

Thật vậy, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AIF và cát tuyến $QG'D$ ta có $\frac{QA}{QF}.\frac{G'F}{G'I}.\frac{DI}{DA} = 1(*)$. Từ chứng minh câu a ta có:

$AQI = API = AKE$ suy ra $KE//QI$. Mặt khác cũng do $BAK = CDE$ suy ra $BK = CE, KAD = EAD \Rightarrow DK = DE, BKEC$ là hình thang cân $EK//BC$. Như vậy $QI//BC//KE$.

Theo định lý Thales ta có: $\frac{QA}{QF} = \frac{IA}{IJ},$ mặt khác I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên theo tính chất phân giác trong ta cũng có: $\frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ},$ do $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$ nên $\frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DC}$ mà $DI = DC = DB$ (Tính chất quen thuộc). Suy ra $\frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DI}$ như vậy: $\frac{QA}{QF} = \frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DC} = \frac{DA}{DI}$ suy ra $\frac{QA}{QF}.\frac{DI}{DA} = 1$ thay vào (*) ta có: $\frac{G'F}{G'I} = 1 \Rightarrow G'$ là trung điểm của IF hay $G \equiv G'$.

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường tròn tâm B bán kính BA và đường tròn tâm C bán kính CA cắt nhau tại D khác A, BC cắt (B) tại E, F (F nằm trong (C)) và cắt (C) tại M, N (M nằm trong (B)). Đường thẳng DM cắt AE tại P, DF cắt AN tại Q. Kéo dài DM cắt (B) tại I, DF cắt (C) tại H.

a. Chứng minh: $IB \perp EF$.

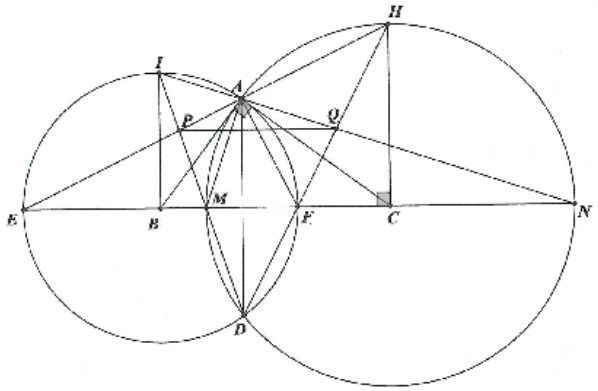
b. Chứng minh: Tứ giác $APDQ$ nội tiếp và $PQ//EN$.

c. Chứng minh: $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ} = \frac{AB}{AC}.$

Giải

a. Ta có:

$AEN + ANE = \frac{1}{2}\left(ABF + ACM \right) = 45^0$



Lại có: $AEF = ADF, ANM = ADM$

Suy ra $IDH = MDA + FDA = 45^0$,

$IBF = IBA + ABF = 2\left(ADF + ADM \right) = 90^0$

Do đó $IB \perp EF$.

b. Từ a suy ra tam giác *IBF* vuông cân tại *B* suy ra $IAE = 45^0$ suy ra *I, A, N* thẳng hàng.

Tương tự, ta cũng có: *E, A, H* thẳng hàng suy ra $EAN = 135^0 \Rightarrow$ tứ giác *APDQ* nội tiếp suy ra $APQ = ADQ = AEF$ nên $PQ//EF$.

c. Áp dụng định lý Menelaus với tam giác *PEM* và cát tuyến *IAN* ta có: $\frac{IP}{IM}.\frac{NM}{NE}.\frac{AE}{AP} = 1$, tương tự với tam giác *QFN* và cát tuyến *HAE* ta cũng có: $\frac{HF}{HQ}.\frac{AQ}{AN}.\frac{EN}{EF} = 1.$ Nhân hai đẳng thức với chú ý: $\frac{AP}{AQ}.\frac{AE}{AN}$ suy ra: $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ} = \frac{EF}{MN}.$

Bài 29. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp (O) có $AB < AC$. Gọi *I* là trung điểm của cung *BC* không chứa *A*. Trên *AC* lấy điểm *K* khác *C* sao cho $IK = IC$. Đường thẳng *BK* cắt (O) tại $D(D \neq B)$. Trên *DI* lấy điểm *M* sao cho $CM//AD$. Đường thẳng *KM* cắt *BC* tại điểm *N*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *BKN* cắt (O) tại $P(P \neq B)$.

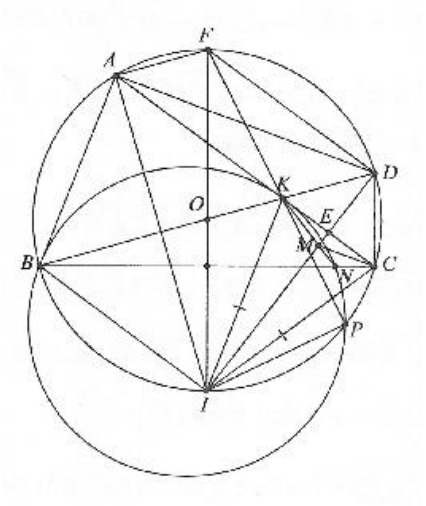
a. Chứng minh: *K* đối xứng với *B* qua *AI*.

b. Chứng minh: *AC* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *BKN*.

c. Gọi *E* là giao điểm của *DI* và *AC*. Chứng minh: Tứ giác *EPIK* nội tiếp.

d. Gọi *F* là giao điểm của *PK* và (O). Chứng minh: *KF* đi qua trung điểm của *AD*.

Giải



a. Ta có: $AKI = 180^0 - IKC = 180^0 - ACI = ABI$

Từ đó suy ra $\Rightarrow BIA = KIA \Rightarrow \Delta ABI = \Delta AKI\left(c.g.c\right)$

Do đó $AB = AK$ hay K đối xứng với B qua AI.

b. Ta có: $DKI = 180^0 - BKI = 180^0 - DBI = DCI$.

Kết hợp với $BDI = CDI \Rightarrow KID = CID \Rightarrow \Delta IKD = \Delta ICD$

Suy ra $DK = DC$ nên DI là đường trung trực của KC

Do đó $MK = MC$.

Ta có: $CKN = KCM = DFP = KBP$ nên KC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN.

c. Ta có $EKP = KBP = DIP \equiv EIP$ suy ra tứ giác $EPIK$ nội tiếp.

d. Từ câu c) ta có: $KPI = KEI = 90^0$ mà PK cắt $\left(O\right)$ tại F suy ra IF là đường kính của $\left(O\right)$.

Suy ra $AF \perp AI$, mặt khác $BD \perp AI$ suy ra $DB//AF \Leftrightarrow AF//KD$. Mặt khác FD, EK cùng vuông góc với AC nên $FD//KE$ suy ra tứ giác $AFDK$ là hình bình hành. Vậy FK đi qua trung điểm của AD.

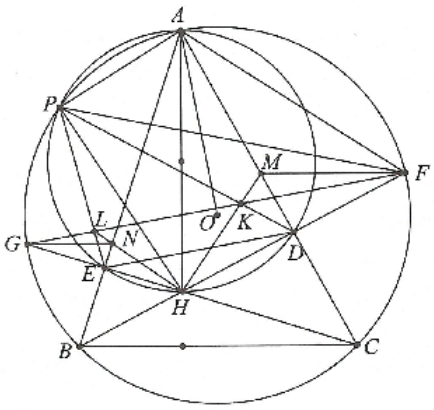
Bài 30. Cho tam giác ABC nội tiếp $\left(O\right)$ có trực tâm là H. Các đường cao BD, CE cắt $\left(O\right)$ tại giao điểm thứ 2 là: F, G. Dựng $FM//GN//BC\left(M \in AC, N \in AB\right)$. Các đường thẳng HM, HN theo thứ tự cắt FG tại K, L. Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AED với $\left(O\right)$ P khác điểm A.

a. Chứng minh: Tứ giác $HLPF$ nội tiếp.

b. Chứng minh: Các điểm P, L, E thẳng hàng.

c. Chứng minh: DK, EL cắt nhau tại một điểm nằm trên $\left(O\right)$.

Giải



a. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AED có đường kính AH, ta cũng có các tính chất quen thuộc là G, F lần lượt đối xứng với H qua AB, AC. (Học sinh tự chứng minh điều này).

Theo tính chất góc ngoài ta có:

$FLH = LGH + LHG = FBC + NGH$. Do $GN//BC$ nên

$NGH = GCB = HCB$ suy ra

$FLH = HBC + HCB = 180^0 - BHC = BAC$

$= 90^0 - ABF = APH - APF = HPF$

Suy ra tứ giác $HLPF$ nội tiếp.

b. Ta có: $LPH = LFH = GCB = BAH = EAH = EPH$ suy ra hai tia *LP*, *EP* trùng nhau. Hay *E*, *L*, *P* thẳng hàng.

c. Ta có $GKH = KFH + KHF = GCB + MFH = HCB + HBC = BAC$

$GPH = GPA - HPA = GPA - 90^0 = 180^0 - GBA - 90^0 = 90^0 - GBA = 90^0 - HBA = BAC$. Suy ra tứ giác *PKHG* nội tiếp. Từ đó dễ chứng minh được: *P*, *K*, *D* thẳng hàng. Suy ra *DK*, *EL* cắt nhau tại điểm *P* nằm trên (O).

Bài 31. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O) có các đường cao *BK*, *CL* cắt nhau tại *H*. Các đường *AH*, *BH*, *CH* cắt (O) tại giao điểm thứ hai là *D*, *E*, *F*. Lấy điểm *M* sao cho tam giác *MFH* và tam giác *HBC* đồng dạng (*M*, *A* nằm cùng phía so với *KL*). *ML* cắt (O) tại *N* (*M*, *A*, *N* nằm cùng phía so với *KL*). Kẻ $DP//KL\left(P \in (O)\right)$.

a. Chứng minh: $HM \perp AF$.

b. Chứng minh: Tứ giác *ANLK* nội tiếp.

c. Giả sử *NH* cắt *BC* tại *Q*. Chứng minh: *Q* là trung điểm của *BC* và *QK*, *QL* là tiếp tuyến của (AKL).

d. Gọi *R* là trung điểm của *KL*. Chứng minh: *N*, *R*, *P* thẳng hàng.

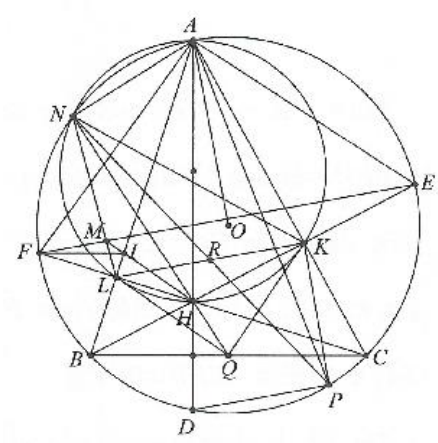
Giải

a. Ta có các tính chất quen thuộc, *F* đối xứng với *H* qua *AB*, $EF//LK$ và $\Delta HBC \backsim \Delta HLK$.

Vì $\Delta HBC \backsim \Delta MFH \Rightarrow MFH = HBC = HLK = LFE$. Suy ra $M \in EF$. Ta có

$AFH + FHM = AHL + HCB = AHL + HAB = 90^0$,

hay $HM \perp AF$.



b. Do 4 điểm *A*, *L*, *H*, *K* nằm trên đường tròn đường kính *AH*. Giả sử *MH* cắt *AB* tại *I* thì suy ra $FI//BC$. Gọi N' là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính *AH* thì

$HME = MFH + MFH$

$= HBC + HCB = 180^0 - BHC = BAC = 90^0 - ABK = HN'A - AN'E = HN'E$ suy ra tứ giác $HLN'E$ nội tiếp. Ta có: $MN'H = MEH = FCB = BAH = EAH = LN'H$ suy ra hai tia LN', MN' trùng nhau. Hay L, M, N' thẳng hàng suy ra $N \equiv N'$. Suy ra *N* nằm trên đường tròn đường kính *AH* tức là tứ giác *ANLK* nội tiếp.

c. Q là trung điểm của BC. Đây là tính chất quen thuộc (Kẻ đường kính AA'). Ngoài ra ta cũng có $OA \perp KL \Rightarrow OA \perp DP$ suy ra $AD = AP, QK, QL$ là các tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

d. Ta có: $ANR = ANK + KNR = ALK + LNH = ACB + BAD = ACD = ANP$ suy ra N, R, P thẳng hàng. Suy ra đpcm.

Bài 32. Cho tam giác ABC có đường phân giác trong là BE. Đường tròn qua A, B tiếp xúc với AC cắt BC tại D khác B. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADC, EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L. Giả sử AK cắt BC tại F.

a. Chứng minh: Tứ giác $AEFB$ nội tiếp.

b. Giả sử CL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại M khác L. Chứng minh:

$\Delta CEM \backsim \Delta CLA, \Delta CBM \backsim \Delta CLF$ và LC là phân giác của góc BLE.

c. Chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC là điểm chính giữa cung BC chứa điểm A.

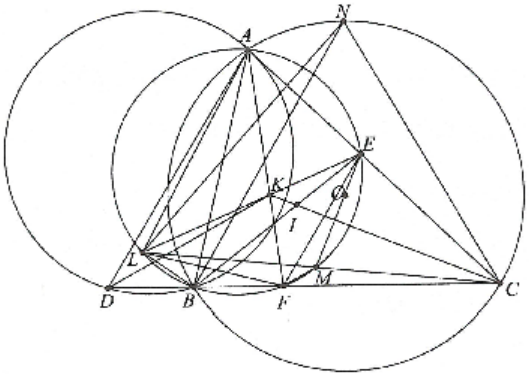
Giải

a. Ta có $FAC = \frac{1}{2} DAC$ mặt khác do CA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD nên

$CA^2 = CB.CD \Rightarrow \Delta CAD \backsim \Delta CBA (c.g.c)$ suy ra

$DAC = ABC = 2ABE$ nên $FAE = ABE$

Suy ra tứ giác $AEFB$ nội tiếp.



b. Do BE là phân giác của góc ABC nên E là điểm chính giữa cung AF của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFB$. Suy ra LE là phân giác của góc $ALF \Rightarrow \frac{LA}{LF} = \frac{KA}{KF} = \frac{CA}{CF}$. Ta có: $\Delta CEM \backsim \Delta CLA (g.g)$, $\Delta CBM \backsim \Delta CLF (g.g)$ suy ra $\frac{ME}{MC} = \frac{LA}{CA} = \frac{LF}{CF} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow ME = MB$ hay LC là phân giác của góc BLE.

c. Gọi N là điểm chính giữa cung BC chứa A của (ABC) thì $NB = NC, BNC = BAC = 2BLC$ suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BLC.

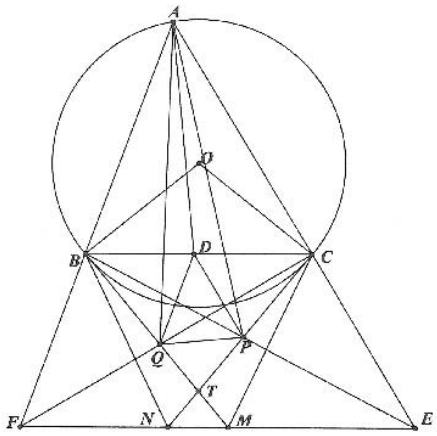
Bài 33. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB lần lượt E, F, BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Dựng đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

a. Chứng minh: $FBM = ACB$.

b. Chứng minh: $QD // BF$.

c. Chứng minh: $DP = DQ$ và $AP = AQ$.

Giải



a. Tam giác *BTC, TMN* cân tại *T*, suy ra $MN//BC$. Xét tam giác *ABC* và tam giác *MFB* ta có: $ABC = BFM$ (đồng vị),

$BAC = MBC = BMF \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta MFB(g.g)$

Suy ra $FBM = ACB$.

b. Do $FM//BC$ ta có: $\frac{QC}{QF} = \frac{BC}{FM} = \frac{BM}{FM} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$

$\Rightarrow QD//BF$, tương tự ta có $PD//CE$

c. Theo định lý Thales và tính chất phân giác ta có:

$\frac{DQ}{DP} = \frac{DQ}{BF}.\frac{BE}{CE}.\frac{CE}{DP} = \frac{CD}{BC}.\frac{AB}{AC}.\frac{BC}{BD} = 1 \Rightarrow DP = DQ$.

Ta lại có: $ADQ = ADB + BDQ = \frac{1}{2}BAC + ACB + ABC$, tương tự ta cũng có:

$ADP = \frac{1}{2}BAC + ACB + ABC$ suy ra $\Delta ADQ = \Delta ADP \Rightarrow AP = AQ$.

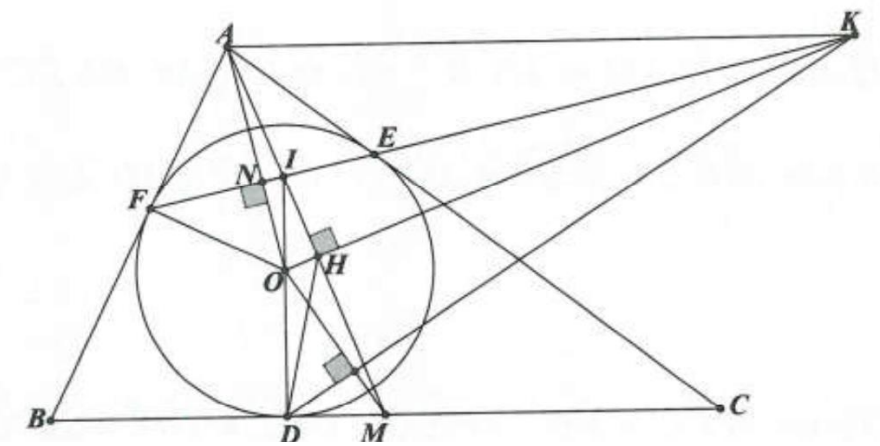
Bài 34. Cho đường tròn tâm *O* nội tiếp tam giác *ABC* tiếp xúc với *BC, CA, AB* lần lượt tại *D, E, F*. Đường thẳng qua *A* song song với *BC* cắt *EF* tại *K*. Gọi *I* là giao điểm của *OD, EF*. Gọi *N* là giao điểm của *OA* và *EF*.

a. Giả sử *AI* cắt *OK* tại *H*, chứng minh: Bốn điểm *A, N, H, K* cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: $\Delta OHD \backsim \Delta ODK$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *DHK* nằm trên một đường thẳng cố định.

c. Gọi *M* là giao điểm của *AI, BC*. Chứng minh: $OM \perp DK$.

Giải:



a. Vì *AE, AF* là các tiếp tuyến của (O) tại *E, F* nên $AO \perp EF$. Vì $OI \perp BC$ suy ra $OI \perp AK$. Từ đó suy ra *I* là trực tâm của tam giác $AOK \Rightarrow AI \perp OK$ tại *H*. Suy ra tứ giác *ANHK* nội tiếp.

b. Vì tứ giác *ANHK* nội tiếp nên $OH.OK = ON.OA = OF^2 = OD^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OD} = \dfrac{OD}{OK}$ suy ra $\Delta OHD \backsim \Delta ODK (c.g.c)$. Từ đó suy ra $ODH = OKD$ nên *OD* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *HDK*. Mà $OD \perp BC$ suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *HDK* nằm trên đường thẳng cố định *BC*.

c. Tứ giác *ODMH* nội tiếp suy ra $ODH = OMH, \Delta OHD \backsim \Delta ODK \Rightarrow ODH = OKD \Rightarrow OMH = OKD$ mà OMH phụ với MOH nên OKD phụ với $MOH \Rightarrow OM \perp DK$.

Bài 35. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O) các đường cao *BD, CE* cắt nhau ở *H*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *BC, DE* . Gọi *K* là giao điểm thứ 2 của *AM* với đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác *AEF*. Gọi *I* là giao điểm thứ 2 của *AN* với (O).

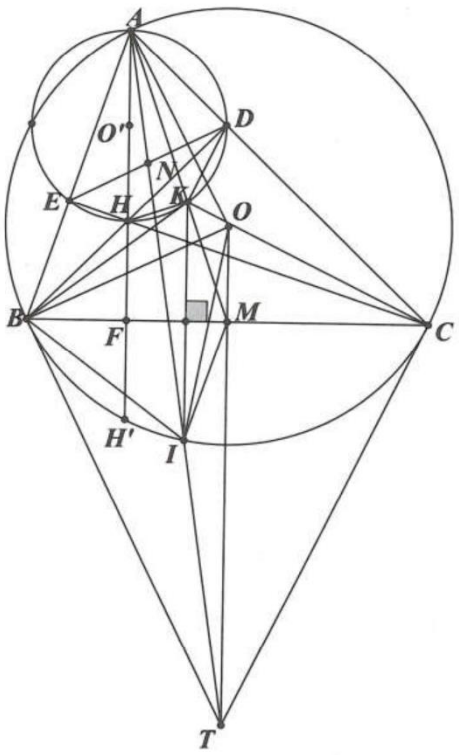
a. Chứng minh: $NAE = MAC$.

b. Chứng minh: $\Delta MCK \sim \Delta MAC$.

c. Chứng minh: Tứ giác BHKC nội tiếp và *K* đối xứng với *I* qua *BC*.

d. Các tiếp tuyến tại *B, C* của (O) cắt nhau ở *T*. Chứng minh: *A, I, T* thẳng hàng.

Giải:



a. Do tứ giác *BEDC* nội tiếp nên: $ADE = ABC$

Ta có: $\Delta ADE \backsim \Delta ABC (g.g), AN, AM$ là các trung tuyến tương ứng nên $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ suy ra $NAE = MAC$.

b. Đường tròn (O') có đường kính *AH* nên $AKH = 90^0$, gọi *F* là giao điểm của *AH* với *BC*.

Do các tứ giác *HFMK, HFCD* nội tiếp nên suy ra $AH.AF = AK.AM = AD.AC$ suy ra tứ giác *MKDC* nội tiếp nên $MKC = MDC = MCD$

do đó $\Delta MCK \backsim \Delta MAC (g.g)$.

c. Ta có $HKC = 360^0 - HKD - DKC$

$= 180^0 + HAC - DMC = 180^0 + DBC - 2DBC = 180^0 - DBC$

suy ra *BHKC* nội tiếp.

Từ chứng minh ở câu b, a ta có $KBC = MAC = NAB = ICB$. Tương tự ta cũng có: $KBC = IBC$ suy ra *K, I* đối xứng nhau qua *BC*.

d. Giả sử *AT* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là I' (khác *A*). Ta chứng minh: $BAI' = MAC$.

Thật vậy ta có: $TI'.TA = TB^2 = TM.TO$ suy ra $AOMI'$ là tứ giác nội tiếp suy ra $I'MT = OAI' = OI'A = OMA$ nên MB là phân giác của góc AMI'. Ta có:

$AMC = 180^0 - AMB = 180^0 - \frac{1}{2}AMI' = 180^0 - \frac{1}{2}AOI' = 180^0 - ACI' = ABI'$ suy ra

$\Delta ABI' \backsim \Delta AMC$. Do đó: $MAC = BAI'$, điều đó chứng tỏ I', A, N thẳng hàng. Suy ra $I \equiv I'$.

Bài 36. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt DE, DF lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh: M, N, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: MF, NE cắt nhau tại một điểm K nằm trên (I).

c. Gọi AK cắt (I) tại điểm L khác K. Chứng minh: L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.

Giải:

a. Ta có $MNF = FDB = DEF$

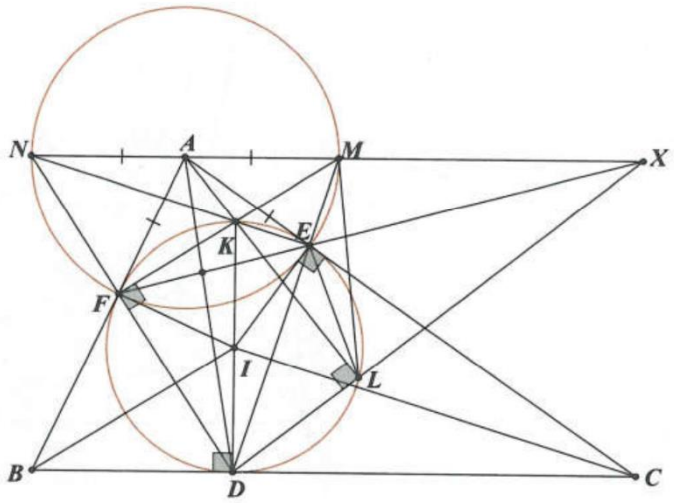
Suy ra tứ giác $MNFE$ nội tiếp.

Do $ANF - FDB = BFD = NFA$

Nên tam giác ANF cân tại A, suy ra $AN = AF$ Tương tự $AM = AE$ mà $AE = AF$

suy ra $AM = AN = AE = AF$

Nói cách khác 4 điểm M, N, E, F nằm trên đường tròn tâm A.



b. Suy ra $NEM = NFM = 90^0$ suy ra tứ giác $FKED$ nội tiếp.

c. Giả sử đường tròn (I) cắt đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác DMN tại điểm L, ta chứng minh: X, A, L thẳng hàng. Thật vậy kẻ đường kính DX của (J). Ta dễ chứng minh được tứ giác $KMXN$ là hình bình hành suy ra X, A, K thẳng hàng (1)

Ta cũng có $KLD = XLD = 90^0 \Rightarrow X, K, L$ thẳng hàng (2).

Từ (1), (2) ta suy ra A, K, L thẳng hàng (đpcm).

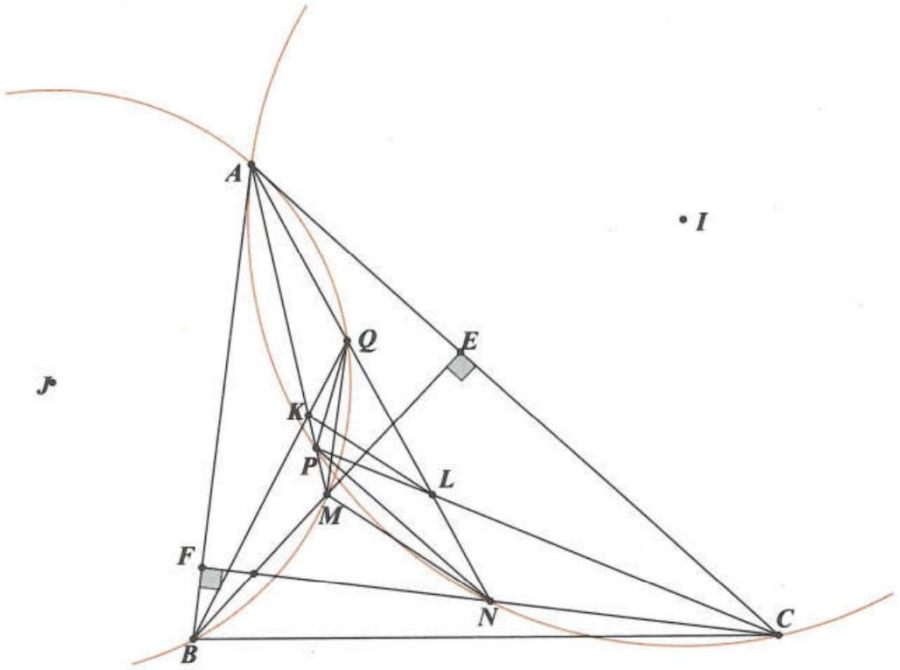
Bài 37. Cho tam giác ABC nhọn, không cân có hai đường cao là BE, CF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BE, CF.

a. Chứng minh: $MAB = NAC$.

b. Gọi *AM* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ANC* tại điểm P khác *A*. Gọi *AN* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMB* tại điểm *Q* khác *A*. Chứng minh rằng 4 điểm *M, N, P, Q* nằm trên một đường tròn.

c. Gọi *BQ* cắt *AM* tại *K*, *CP* cắt *AN* tại *L*. Chứng minh: $KL//MN$.

Giải:



a. Ta có: $\Delta ABE \backsim \Delta ACF \Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CF} \Leftrightarrow \frac{AB}{2BM}=\frac{AC}{2CN} \Leftrightarrow \frac{AB}{BM}=\frac{AC}{CN}$ suy ra

$\Delta ABM \backsim \Delta ACN \Leftarrow MAB = NAC$.

b. Ta có: $APC = ANC = AMB = AQB, BAQ = CAP$ suy ra $\Delta APC \backsim \Delta AQB \Rightarrow ACP = ABQ$.

Lại có: $ABQ = AMQ = ACP = ANP$ suy ra tứ giác *MNQP* nội tiếp.

c. Từ chứng minh trên ta có:

$ALP = LAC + LCA = KAB + KBA = AKB$ suy ra $\Delta APL \backsim \Delta AQK \Rightarrow \frac{AP}{AQ}=\frac{AL}{AK}(1)$. Mặt khác do *PQNM* nội tiếp nên ta có: $AP.AM = AQ.AN \Rightarrow \frac{AP}{AQ}=\frac{AN}{AM}$ (2). Từ (1) và (2) ta có:

$\frac{AK}{AM}=\frac{AL}{AN} \Leftrightarrow KL//MN$.

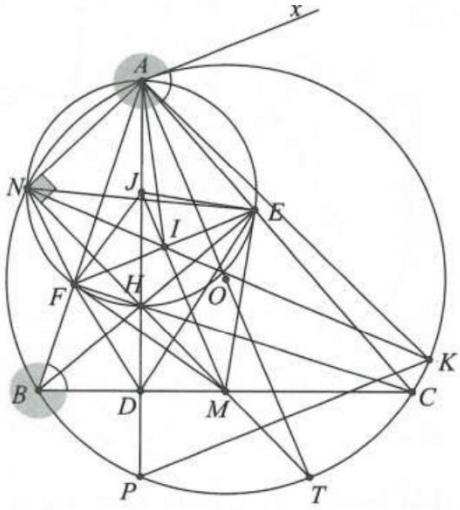
Bài 38. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp (O), các đường cao *BE, CF* cắt nhau tại *H*, đường thẳng *AD* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là $P(P \neq A)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là $N(N \neq A)$. Gọi *I, M* lần lượt là trung điểm của *EF, BC*. Đường thẳng qua *P* song song với *EF* cắt (O) tại điểm $K(K \neq D)$.

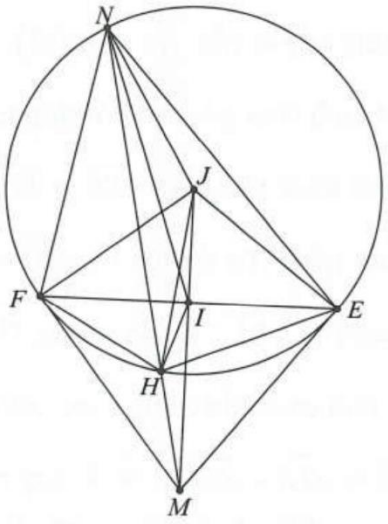
a. Chứng minh: $OA \perp EF$.

b. Chứng minh: M, H, N thẳng hàng và $NIE = NFH$.

c. Chứng minh: K, I, N thẳng hàng.

Giải:





a. Dựng tiếp tuyến Ax của (O). Ta có $xAC = ABC$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Mặt khác ta lại có $ABC = AFE$ (Do $BCEF$ nội tiếp). Từ đó suy ra $xAC = AEF \Rightarrow EF // Ax \Leftrightarrow EF \perp OA$.

b. Để chứng minh bài toán ta chứng minh bổ đề: Cho tam giác NEF nội tiếp đường tròn (J), các tiếp tuyến tại E, F của (J) cắt nhau ở M, MN cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là H. Gọi I là trung điểm của EF. Khi đó ta có: $NIF = NEH$.

Thật vậy: Theo tính chất tiếp tuyến và cát tuyến ta có: $ME^2 = MH.MN$, mặt khác, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông EJM ta có $ME^2 = MI.MJ$ suy ra $MI.MJ = MH.MN \Rightarrow \Delta MHI \backsim \Delta MJN$ $\Rightarrow MHI = MJN$ suy ra $HIJN$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó ta có: $HIM = HNJ = NIJ$ nên IE là phân giác của góc NIH, $NIE = 180^0 - \frac{1}{2} NIH = 180^0 - \frac{1}{2} NJH$

$= 180^0 - NEH = NFH$.

c. Từ chứng minh ở câu b) ta suy ra $\Delta NIE \backsim \Delta NFH \Rightarrow ENI = HNF$. Ta có:

$ANI = ANE + ENI = AFE + HNF = ACB + BAD = ACB + BCP = ACP = AKP = ANP$ suy ra N, I, K thẳng hàng. Suy ra đpcm.

Bài 39. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp (O), các đường cao *AD, BE, CF* cắt nhau tại *H*. Đường thẳng *EF* cắt (O) tại *T, S* (*S* thuộc cung nhỏ *AC*). Dựng đường kính *AI* của (O), *SI* cắt *BC* tại *K*.

a. Chứng minh: Tam giác *AST* cân.

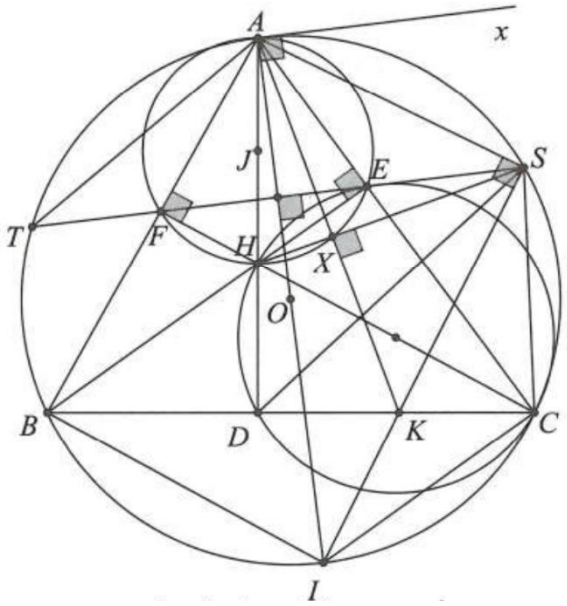
b. Chứng minh: $AS^2 = AE.AC$.

c. Chứng minh: $AK \perp SH$.

Giải:

a. Ta chứng minh được tính chất quen thuộc:

$OA \perp EF$. Dựng tiếp tuyến *Ax* của (O). Ta có $xAC = ABC$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Mặt khác ta lại có $ABC = AFE$ (Do *BCEF* nội tiếp). Từ đó suy ra $xAC = AEF$ $\Rightarrow EF // Ax \Leftrightarrow EF \perp OA.$ Từ đó suy ra *OA* là trung trực của *ST*. Nói cách khác tam giác *AST* cân tại *A*.



b. Ta có $AST = ATS = ABS = ACS$ suy ra *AS* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ESC*.

Suy ra $\Delta ASE \backsim \Delta ACS\,(g.g) \Rightarrow AS^2 = AE.AC$.

c. Gọi *X* là giao điểm của đường tròn (J) đường kính *AH* (đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF*) với đường thẳng *AK*. Suy ra $AH.AD = AX.AK = AE.AC = AS^2 \Leftrightarrow AS^2 = AX.AK$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông *ASK* ta suy ra $SX \perp AK$, do đó *H, S, X* thẳng hàng. Hay $SH \perp AK$.

Bài 40. Từ một điểm *A* nằm ngoài đường tròn (O) ta kẻ các tiếp tuyến *AB, AC* đến đường tròn (*A, B* là các tiếp điểm). Gọi *H* là giao điểm của *AO* và *BC*. Trên đoạn thẳng *BH* lấy một điểm *M* bất kỳ, đường thẳng qua *M* vuông góc với *MO* cắt *AC, AB* lần lượt tại *P, Q*.

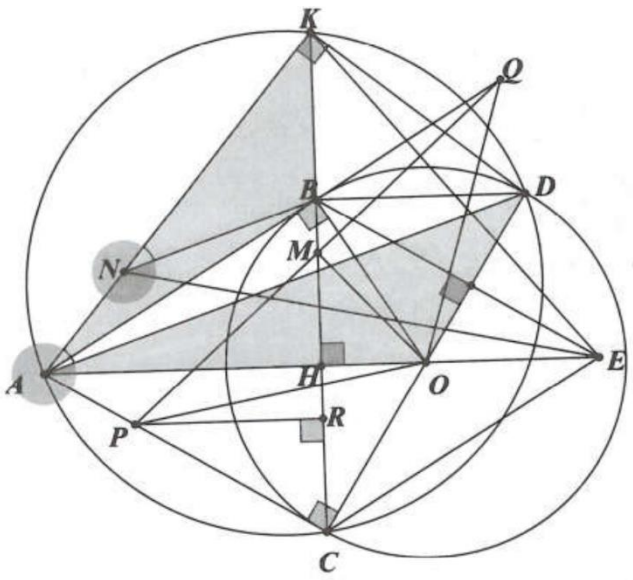
a. Chứng minh: *OPQ* là tam giác cân.

b. Lấy điểm *R* thuộc *CH* sao cho $PR // OA$. Chứng minh: $CR = HM$.

c. Kẻ đường kính *CD* của (O). Gọi *K* là điểm đối xứng với *H* qua *B*, đường thẳng qua *B* song song với *AD* cắt *AK* tại điểm *N*. Chứng minh: Tứ giác *ACDK* nội tiếp.

d. Đường thẳng qua *B* vuông góc với *OC* cắt *AH* tại *E*. Chứng minh: *NB* là phân giác trong của góc *KNE*

Giải:



a. Tứ giác *MBQO* có $OMQ = OBQ = 90^0$

Suy ra *MBQO* là tứ giác nội tiếp, do đó $MQO = MBO$ (cùng chắn cung *MO*).

Tương tự ta cũng có tứ giác *MPCO* nội tiếp nên $MPO = MCO$ mà

$MCO = MBO \Rightarrow MPO = MQO$ hay tam giác *OPQ* cân tại *O*.

b. Ta có: $\Delta PCR \backsim \Delta COH \Rightarrow \dfrac{PC}{RC} = \dfrac{CO}{OH}$

$\Rightarrow RC = \dfrac{PC.OH}{OC}, \Delta MOH \backsim \Delta POC$

$\Rightarrow \dfrac{MH}{HO} = \dfrac{PC}{OC} \Rightarrow MH = \dfrac{OH.PC}{OC}$

Từ đó ta có: $RC = MH$.

c. Dễ chứng minh được: $\Delta AHB \backsim \Delta ACO \Rightarrow \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{AO}{CO} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AO}{OD} \Rightarrow \Delta ABK \backsim \Delta AOD(c.g.c)$

suy ra $AKB = ADO$ nên tứ giác *ACDK* nội tiếp.

d. Ta dễ chứng minh được: *ABEC* là hình thoi, theo tính chất đối xứng ta có: $KAB = KEB$

Ta cũng có $KMB = KAD = BAE = BEA$ suy ra tứ giác *BMAE* nội tiếp nên $KAB = MEB = KEB$ hay *EB* là phân giác của góc KEM suy ra *MB* là phân giác của góc KME.

Bài 41. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O), đường phân giác trong *AD* cắt đường tròn (O) tại *E*, dựng đường kính *EF*, lấy điểm *P* trên đoạn thẳng *AD* (*P* khác *A*, *D*) . Đường thẳng *FP* cắt đường tròn (O) tại *Q* khác *F* . Dựng đường thẳng qua *P* vuông góc với *AD* cắt *AC*, *AB* tại *M*, *N*.

a. Chứng minh các tứ giác *PQBN*, *PQCM* nội tiếp.

b. Giả sử *QN*, *CP* cắt nhau trên (O). Chứng minh *QM* và *PB* cũng cắt nhau trên (O).

Phân tích định hướng giải:

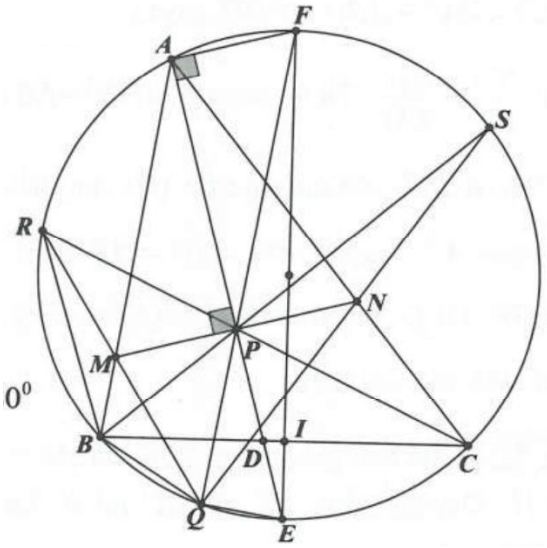
a. Từ giả thiết ta suy ra $AF \perp AE$, $AF // MN$ đây là định hướng để chứng minh các tứ giác nội tiếp.

+ Xét tứ giác $PQBN$: Ta có các biến đổi góc sau:

$NPQ = FPM = PFA = ACQ$ mà tứ giác $ACQB$ nội tiếp nên $ACQ + ABQ = 180^0 \Rightarrow NPQ + NBQ = 180^0$.

+ Xét tứ giác $PQCM$ ta có: $FQC = CAF = AMP$ suy ra $PQCM$ nội tiếp.

b. Nếu QN, CP cắt nhau tại điểm R nằm trên đường tròn (O)



Ta suy ra tứ giác $BRCQ$ nội tiếp, giả sử BP, QM cắt nhau tại điểm S. Ta cần chứng minh: $BQCS$ nội tiếp. Thật vậy ta có: $SQC = MPC = RPN = RPB - NPB = PBC + PCB - NPB$ nhưng $PCB = RQB = NPB$ từ đó ta suy ra $SQC = PBC \equiv SBC$ hay $BQCS$ nội tiếp.

Bài 42. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Đường thẳng CH cắt (O) tại điểm G khác C. GD cắt (O) tại điểm K khác G.

a. Chứng minh: AK đi qua trung điểm M của DE.

b. Gọi N là trung điểm của DF, AN cắt (O) tại điểm L khác A. Chứng minh 4 điểm M, L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

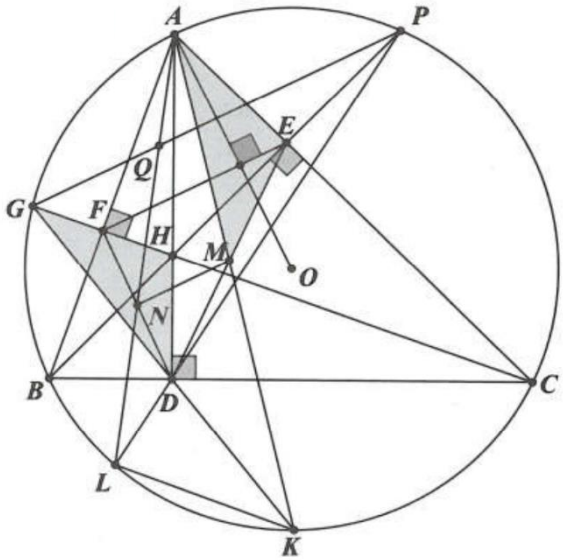
Phân tích định hướng giải:

a. Việc chứng minh trực tiếp AK đi qua trung điểm của DE là tương đối khó. Để ý đến chi tiết CH cắt đường tròn (O) tại điểm G ta sẽ thấy G, H đối xứng nhau qua AB, hay F là trung điểm GH.

Như vậy ta cần tìm mối quan hệ giữa điểm F và điểm M thông qua các tam giác đồng dạng.

Xét tam giác DFH và tam giác DAE: Ta thấy $DFH = DBH = DAE$.

Ta cũng có $AED = 180^0 - ABD = FHD$ suy ra



$$\Delta DFH \backsim \Delta DAE \Rightarrow \frac{HF}{EA} = \frac{HD}{ED} \Leftrightarrow \frac{2HF}{EA} = \frac{2HD}{ED} \Leftrightarrow \frac{HG}{EA} = \frac{2HD}{ED} \text{ hay } \frac{HG}{EA} = \frac{HD}{EM}.$$

Từ đó suy ra $\Delta HGD \backsim \Delta EAM \Rightarrow EAM = HGD = CAK \Leftrightarrow AM \equiv AK.$

b. Giả sử BH cắt đường tròn (O) tại điểm P khác B. Tương tự câu a ta có: P đối xứng với H qua AC. Suy ra $AG = AH = AP$ do đó $GP \perp OA \perp EF$ suy ra $EF // MN // GP$, giả sử AL cắt GP tại Q. Ta có: $MNA = AQP = AGQ + QAG = APG + QAG = AKG + GKL = AKL$ suy ra tứ giác $MKNL$ nội tiếp.

Bài 43. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC, BAC = 45^0$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt BC tại P. Gọi I là trung điểm của BC, đường thẳng IF cắt PH tại điểm Q.

a. Chứng minh $DFEI$ là tứ giác nội tiếp và $IQH = AIE$.

b. Gọi K là trực tâm của tam giác AEF và (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD. Đường thẳng CK cắt đường tròn (J) tại điểm G. Đường thẳng IG cắt đường tròn (J) tại M. Đường thẳng JC cắt đường tròn đường kính BC tại N. Chứng minh: $\Delta IMC \backsim \Delta ICG$.

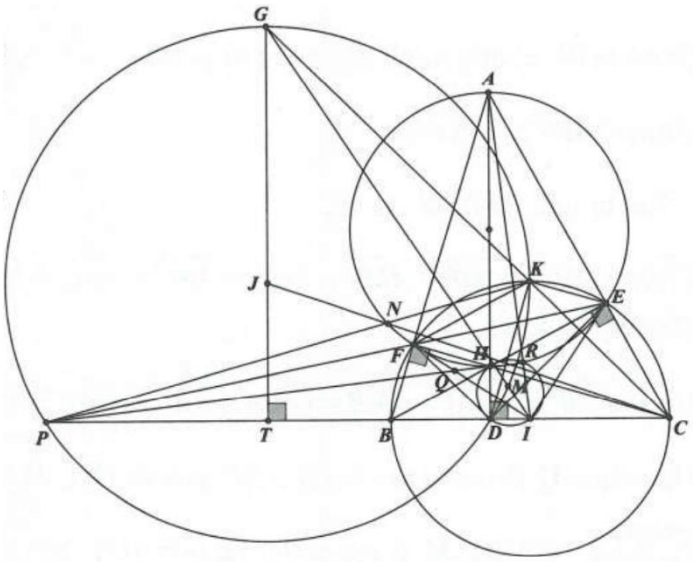
Giải:

a. Từ các tứ giác $HFBD, HDCE$ nội tiếp ta suy ra $FHD = HDE \Rightarrow FDE = ABE + ACF$.

Mặt khác ta cũng có:

$$FBE + FCE = \frac{1}{2}FIE + \frac{1}{2}FIE = FIE$$

suy ra $FDE = FIE$. Do đó tứ giác $FDIE$ nội tiếp.



+ Ta cũng có:

$$FDE = ABE + ACF = 180^0 - 2A = 90^0$$

$$\Rightarrow ABE = ACF = 45^0.$$

Gọi R là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn $(HDI), (AFHE)$ ta thấy ngay R nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn, nên P, H, R thẳng hàng, và $PR \perp UV$ (với U là trung điểm AH, V là trung điểm của HI) suy ra $PR \perp AI$.

Ta có $IQH = 90^0 - AIF = AIE$.

b. Ta có $FKE = 180^0 - A = 135^0.$

$$FCE = 45^0 \Rightarrow FKE + FCE = 180^0.$$

Hay tứ giác $CEKF$ nội tiếp. Tức là điểm K thuộc đường tròn đường kính BC.

+ Ta có: $FPD = EFD - FDP = EFD - EDC = EFD - EFI = IFD$ suy ra $\Delta IDF \backsim \Delta IFP$

$\Rightarrow \frac{ID}{IF}=\frac{IF}{IP} \Leftrightarrow IF^2=ID.IP$ mà $IF=IC \Rightarrow IC^2=ID.IP$. Mặt khác ta cũng có: Tứ giác *GMDP* nội tiếp nên $ID.IP=IM.IG \Leftrightarrow IM.IG=IC^2$ suy ra $\Delta IMC \backsim \Delta ICG$.

Bài 44. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn (O). Các tia *AB, DC* cắt nhau tại *E*, các tia *AD, BC* cắt nhau tại *F*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *BCE* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *CDF* tại *M*. Chứng minh rằng:

a. Ba điểm *E, M, F* thẳng hàng và bốn điểm *A, D, M, E* nằm trên một đường tròn.

b. $OM \perp EF$.

c. Chứng minh đường thẳng *OM* đi qua giao điểm của hai đường chéo *AC, BD* của tứ giác *ABCD*.

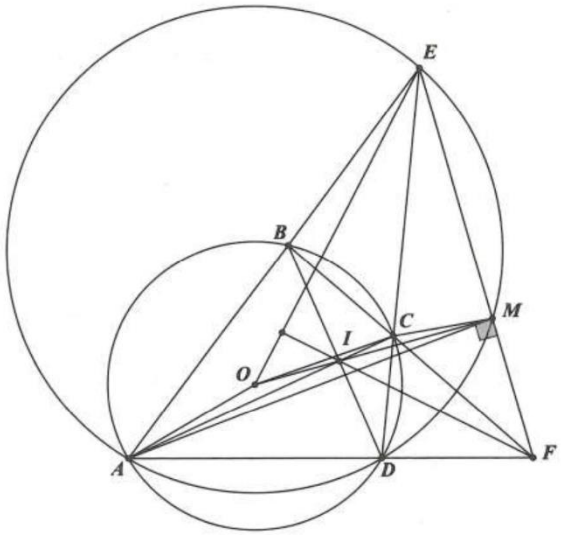
Phân tích định hướng giải:

a. Bài toán thực chất là sự kết hợp giữa hai định lý hình học: Định lý Miquel và Định lý Brocard. Để chứng minh *E, M, F* thẳng hàng ta chứng minh: $EMC+CMF=180^0$.

Ta tìm cách quy về hai góc đối nhau trong tứ giác nội tiếp.

Ta có $EMC+CMF=ABC+CDA=180^0$. Ta có $DMF=DCF=DAB$ suy ra 4 điểm *A, D, M, E* cùng nằm trên một đường tròn.

Từ đó ta dễ chứng minh được các tứ giác *ABMF, BDFE* nội tiếp.



b. Xét tứ giác *OACM* ta có:

$CMA=180^0-CME-AMF=180^0-ABC-ABC=180^0-2ABC=180^0-AOC$ suy ra tứ giác *OACM* nội tiếp.

Ta có $OMF=OMA+AMB=OMA+ABF=OMC+CME=OME$ suy ra $OME=OMF=90^0$.

Theo định lý Brocard ta có: $OI \perp EF$ suy ra *O, I, M* thẳng hàng.

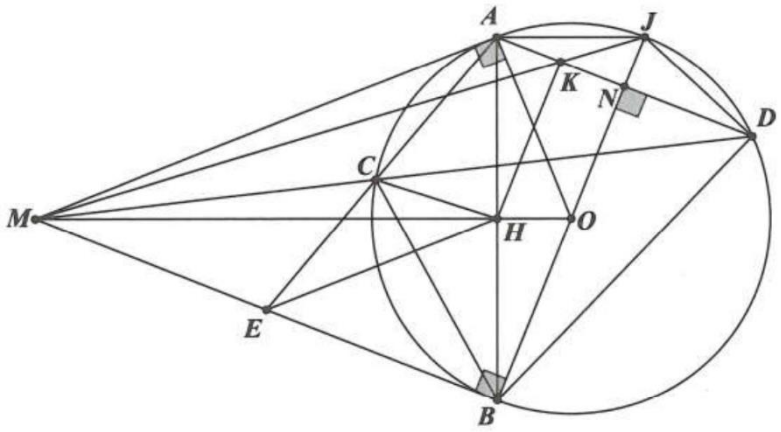
Bài 45. Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến *MA, MB* đến đường tròn (O). Gọi *E* là trung điểm của *MB, C* là giao điểm của *AE* và (O), *H* là giao điểm của *AB, MO, D* là giao điểm của *MC* và (O).

a. Chứng minh *HCEB* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh tam giác *ABD* cân.

c. Gọi *J* là giao điểm thứ hai của *BO* và (O). *K* là giao điểm của *AD, MJ*. Tính tỷ số $\frac{KA}{KD}$.

Phân tích định hướng giải:



a. Chú ý rằng: Tam giác *EHB* cân tại *E* nên $EHB = EBH = ADB$. Mặt khác tứ giác *ACBD* nội tiếp nên $ECB = ADB$. Từ đó suy ra $ECB = EHB$ hay tứ giác *CEBH* nội tiếp.

b. Để chứng minh tam giác *ABD* cân ta chứng minh: $BAD = BDA$. Nếu điều này xảy ra thì $AD//MB$

Vì vậy ta sẽ chứng minh: $AD//MB$. Thật vậy ta có: $BAD = CAD - CAB = 180^0 - CBD - CAB$.

Mặt khác từ tính chất cát tuyến và tiếp tuyến ta chứng minh được: $CBD = \frac{1}{2}COD = \frac{1}{2}CHD = CHA$.

Suy ra $BAD = 180^0 - CHA - CAB = ACH = ABE$. Suy ra $AD//MB$ (đpcm).

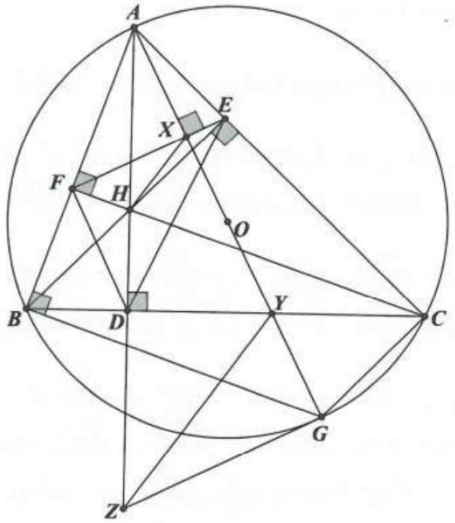
c. Gọi *N* là giao điểm của *BJ*, *AD*. Ta dễ chứng minh được:

$\Delta AJN \backsim \Delta MOB \Rightarrow \frac{JN}{OB} = \frac{AN}{MB} \Rightarrow \frac{JN}{2OB} = \frac{AN}{2MB} \Leftrightarrow \frac{JN}{JB} = \frac{AN}{2MB}$. Để ý rằng: $\frac{NK}{NB} = \frac{JN}{JB}$ suy ra $\frac{NK}{NB} = \frac{AN}{2MB} \Rightarrow NK = \frac{1}{2}AN$ hay *K* là trung điểm của *AN*. Từ đó tính được: $\frac{KA}{KD} = \frac{1}{3}$.

Bài 46. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp (O) đường cao *AD, BE, CF* cắt nhau tại điểm *H*. Dựng đường kính *AG* của (O). *AG* cắt *EF, BC* tại *X, Y*.

a. Chứng minh: *H, G, X, D* cùng nằm trên một đường tròn.

b. Gọi *Z* là giao điểm của *AD* và tiếp tuyến tại *G* của (O). Chứng minh: $HX//YZ$.



Giải:

a. Ta có tính chất quen thuộc $OA \perp EF$

Chú ý rằng các tứ giác *BFXG*, *BFHD* nội tiếp nên:

$AF.AB = AH.AD = AX.AG$ nên 4 điểm *H*, *G*, *X*, *D* cùng nằm trên một đường tròn,

b. Chú ý tứ giác *DZGY* và *HZGD* nội tiếp nên:

$ZYG = ZDG = HXG \Rightarrow HX // YZ$.

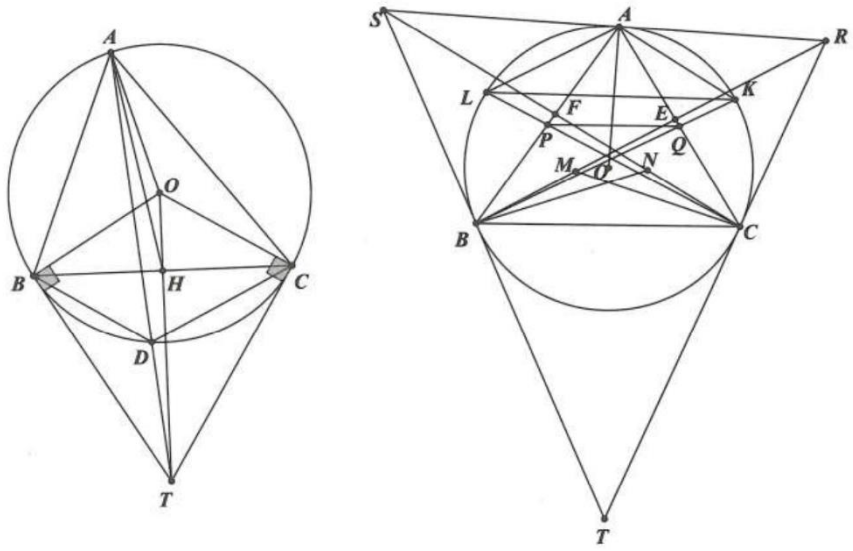
Bài 47. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại *A* của (O) cắt tiếp tuyến tại *B*, *C* của (O) lần lượt tại *S*, *T*. *BT* cắt *AC* tại *E*, *CS* cắt *AB* tại *F*. Gọi *M*, *N*, *P*, *Q* lần lượt là trung điểm của *BE*, *CF*, *AB*, *AC*. Đường thẳng *BQ*, *CP* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *K*, *L*.

a. Chứng minh: $\Delta ABK \sim \Delta EBC$.

b. Chứng minh tứ giác *PQKL* nội tiếp.

c. Chứng minh: $BCM = CBN$.

Phân tích định hướng giải:



a. Ta dễ chứng minh được tính chất sau: Xem thêm phần tính chất cát tuyến, tiếp tuyến.

Tam giác *ABC* nội tiếp (O), các tiếp tuyến tại *B* và *C* cắt nhau tại *T*, *AT* cắt (O) tại *D*, *OT* cắt *BC* tại *H*. Khi đó $AHC = ABD$ và $BAT = HAC$.

Trở lại bài toán:

+ Áp dụng kết quả bài toán ta có: $\Delta ABK \backsim \Delta EBC$.

b. Từ kết quả $\Delta ABK \backsim \Delta EBC$ chú ý rằng: *KP*, *CM* lần lượt là trung tuyến của các tam giác ΔABK, ΔEBC nên suy ra $BCM = BKP$ (1), tương tự $CBN = CLQ$ (2).

c. Ta có $PLK = QBC = PQB$ (do *KLBC* nội tiếp và $PQ // BC$). Từ đó suy ra tứ giác *PQKL* nội tiếp nên ta có: $BKP = CLQ$ (3). Từ (1), (2), (3) ta có: $BCM = CBN$.

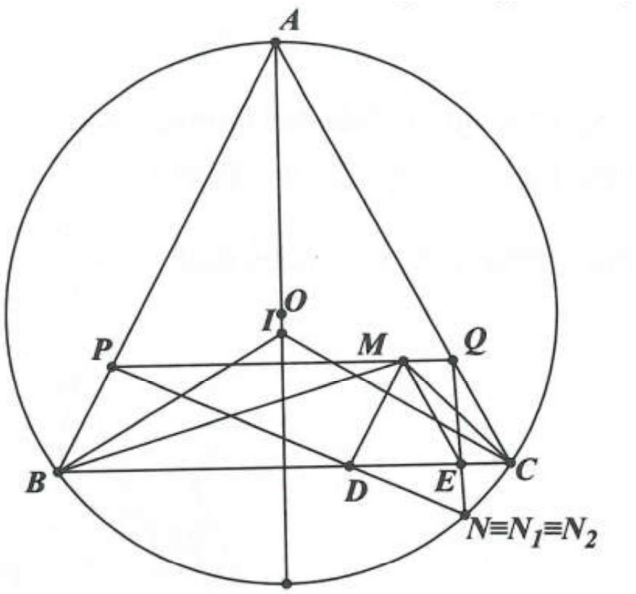
Bài 48. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, *M* là điểm trong tam giác *ABC* sao cho $BMC = BIC$. Đường thẳng qua *M* song song với *BC* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *P*, *Q*. Các đường thẳng qua *M* song song với *AB*, *AC* cắt *BC* tại *D*, *E*.

a. Chứng minh tứ giác *MQCD* nội tiếp.

b. Gọi *N* là giao điểm của *PD*, *QE*. Chứng minh khi *M* thay đổi thi *N* luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Phân tích định hướng giải:

a. Ta có *BPMD* là hình bình hành suy ra $PMD = ABC$. Tam giác *ABC* cân tại *A* nên $ABC = BCA$ suy ra $PMD = QCD$ nên tứ giác *MQCD* nội tiếp.



b. Gọi N_1 là giao điểm của *PD* với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MQCD \Rightarrow PN_1M = DCM$ và $PN_1M = DCM$.

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* cân tại *A* nên: $BIC = 180^0 - B$.

Suy ra

$BMC = 180^0 - PBD \Rightarrow PMB + QMC = PBD$.

Mà $PMB = MBD$ (so le) nên $QMC = PBM$. Mặt khác $MBE = MCQ$. Tương tự ta có *PMEB* nội tiếp nên gọi N_2 là giao điểm của *QE* với đường tròn ngoại tiếp *PMEB* suy ra $MN_2Q = MBE$ suy ra $MN_2Q = MCQ$ và $MN_1Q = MN_2Q$, ta có $PN_2M = PBM \Rightarrow PN_2M = DCM \Rightarrow PN_2M = PN_1M$ nên $N \equiv N_1 \equiv N_2$. Khi đó ta có:

$BNM = 180^0 - BPM = ABC, MNC = 180^0 - MQC = ACB$

Suy ra $BNC = 180^0 - BAC$ hay *N* thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Bài 49. Cho tam giác *ABC* không cân. Đường tròn tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC* tiếp xúc với các cạnh *BC*, *CA*, *AB* tại *D*, *E*, *F*. Đường thẳng đi qua *E* vuông góc với *BI* cắt (I) tại điểm thứ hai là $K(K \neq E)$, đường thẳng qua *F* vuông góc với *CI* cắt (I) tại giao điểm thứ hai là $L(L \neq F)$. Gọi *J* là trung điểm của *KL*. Gọi *T* là trung điểm của *BC*, *G* là giao điểm của *AI* với *BC*, *U* là điểm đối xứng với *T* qua *G* , *X*, *Y* là giao điểm của *EF* với *BI*, *CI*

a. Chứng minh: Bốn điểm *C*, *I*, *E*, *X* và *B*, *C*, *X*, *Y* cùng nằm trên một đường tròn.

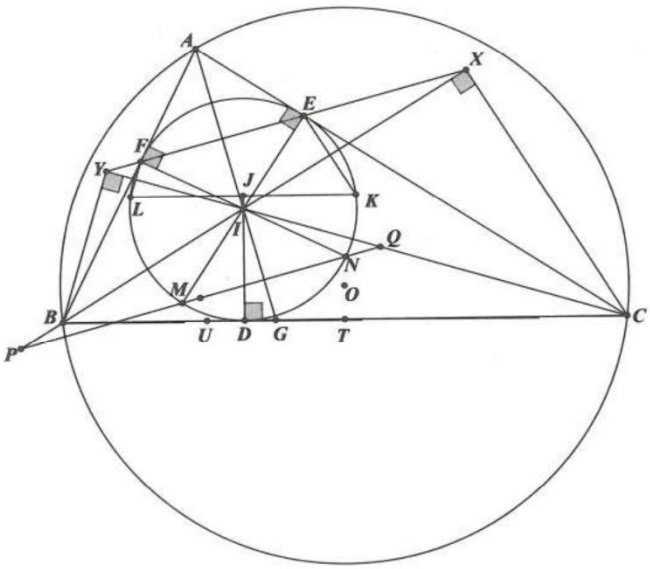
b. Gọi *M, N* lần lượt là giao điểm của *IE, IF* với (I). MN cắt *IB, IC* tại *P* ,*Q*. Chứng minh rằng đường trung trực của *PQ* luôn đi qua điểm *U* .

Phân tích định hướng giải:

a. Trước tiên ta dễ chứng minh được *D, I, J* thẳng hàng. Ta có

$XEC = AEF = 90^0 - \frac{A}{2}$,

$XIC = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90^0 - \frac{A}{2}$ (Tính chất góc ngoài). Từ đó suy ra *IEXC* nội tiếp nên $IXC = 90^0$.



Hoàn toàn tương tự ta có: *IFYB* là tứ giác nội tiếp nên $BYI = 90^0$. Từ đó suy ra tứ giác *XYBC* nội tiếp.

b. Suy ra điểm *T* nằm trên đường trung trực của *XY*.

Các cặp điểm *M* và *E*, *N* và *F* đối xứng nhau qua *I* nên $EF // MN$ suy ra $EF // PQ$. Tương tự *X*, *P* đối xứng nhau qua *I* và *Y*, *Q* đối xứng nhau qua *I*. Nên hai đường trung trực của *XY* và *PQ* đối xứng nhau qua *IA* suy ra đường trung trực của *PQ* đi qua điểm *U*.

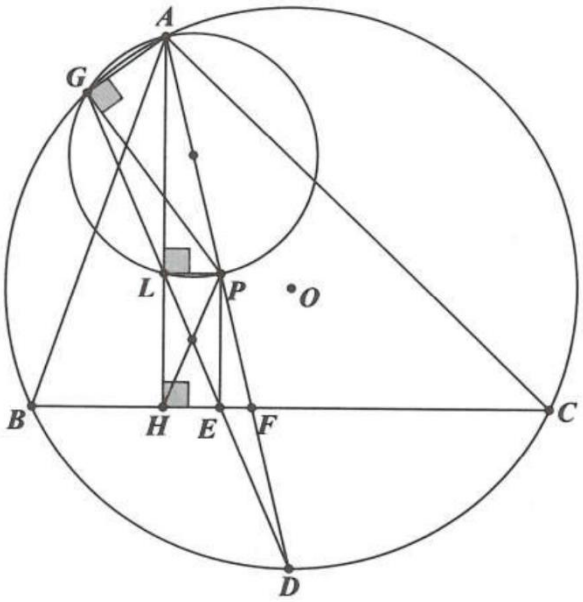
Chú ý rằng: Điểm *T* là cố định và $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Suy ra điểm *U* là cố định.

Bài 50. Cho tam giác *ABC* không cân có đường cao là *AH* nội tiếp đường tròn (O). Một điểm *P* nằm trong tam giác sao cho *AP* là đường phân giác trong của góc BAC. Gọi *L* là hình chiếu vuông góc của *P* lên *AH*. Đường tròn đường kính *AP* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *G* (khác *A*).

a. Chứng minh *AP*, *GL* cắt nhau tại một điểm nằm trên (O).

b. Giả sử *GL* chia đôi đoạn thẳng *HP*. Chứng minh: *P* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*

Phân tích định hướng giải:



a. Gọi *F, D* lần lượt là giao điểm của *AP* với *BC* và (O). Ta sẽ chứng minh *G, L,* D thẳng hàng.

Thật vậy ta có: $AGL = LPD = BFD = \frac{1}{2}sđ\left(CD + AB\right) = \frac{1}{2}sđ\left(BD + AB\right) = AGD$. Suy ra *G, L, D* thẳng hàng.

Cũng có thể biến đổi góc theo cách khác như sau:

$$AGL = LPD = BFD = FCD + FDC = FBD + AGC = DGC + AGC = AGD.$$

Từ đó suy ra *G, L, D* thẳng hàng.

b. Để chứng minh: *P* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* ta sẽ chứng minh:

BP là phân giác trong của góc ABC.

Gọi *E* là giao điểm của *GL* và *BC*.

Từ giả thiết *GL* chia đôi *HP* suy ra *PLHE* là hình chữ nhật nên $PE//LH$.

Theo định lý Thales ta có: $\frac{DP}{DA} = \frac{PE}{AL} = \frac{LH}{AL} = \frac{PF}{AP} \Rightarrow \frac{DA}{AP} = \frac{DP}{DF} \Leftrightarrow \frac{DA}{DA - AP} = \frac{DP}{DP - PF}$ hay

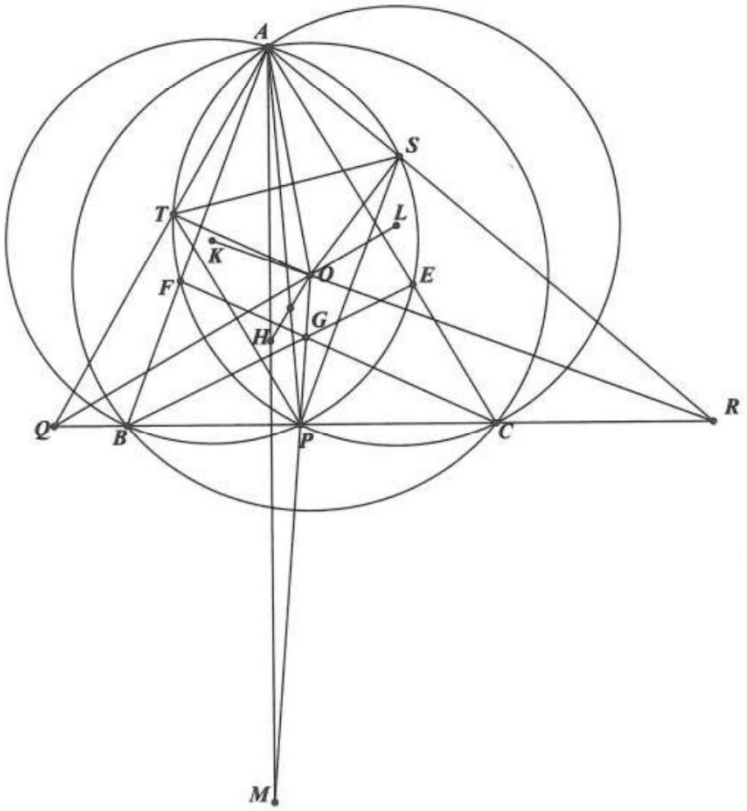
$\frac{DA}{DP} = \frac{DP}{DF} \Leftrightarrow DP^2 = DF.DA$.

Lại có $DBF = DAC = DAB$ nên $\Delta DBF \backsim \Delta DAB$. Suy ra $BD^2 = DF.DA = DP^2$.

Từ đó suy ra $PBC = PBD - CBD = BPD - CAD = BPD - DAB = PBA$.

Vậy *BP* là phân giác của góc ABC. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 51. Cho tam giác *ABC* nhọn, cố định nội tiếp trong (O). *P* là một điểm chuyển động trên cạnh *BC*. Gọi $(K),(L)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PAC. Lấy điểm *S* thuộc đường tròn (K) sao cho $PS//AB$. Lấy điểm *T* thuộc đường tròn (L) sao cho $PT//AC$.



a. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác *AST* đi qua *O*.

b. Gọi *E* là giao điểm của (K) và *AC*, *F* là giao điểm của (L) và *AB*. *BE* cắt *CF* tại điểm *G*. Chứng minh đường thẳng *PG* đi qua *O* khi và chỉ khi *AP* đi qua trung điểm của *OH*, với *H* là trực tâm của tam giác *ABC*.

Phân tích định hướng giải:

a. Gọi *AT*, *AS* cắt *BC* tại *Q*, *R*. Dễ thấy các tứ giác *ABPS*, *ACPT* là hình thang cân, do đó các tam giác *ABR*, *ACQ* cân tại *R*, *Q*. Mặt khác ta có *OK*, *OL* là các đường trung trực của *AB*, *AC* do đó *OK* đi qua *R*, *OL* đi qua *Q*.

Suy ra trong tam giác *AQR* thì *O* la tâm đường tròn nội tiếp hay *AO* là đường phân giác của góc SAT (1). Ta lại có tứ giác *ACPT* la hình thang cân nên *OQ* cũng là đường trung trực của *PT*.

Do đó $OT = OP$ tương tự ta có: $OS = OP$ do đó $OT = OS$ (2).

Từ (1), (2) ta suy ra *O* thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác *AST*.

b. Ta dễ chứng minh được tứ giác *AEGF* nội tiếp. Từ đó suy ra $EGC = EAF = EPG$ suy ra *CEGP* nội tiếp kéo theo *BFGP* cũng nội tiếp. Từ đó suy ra nếu *M* đối xứng với *A* qua *BC* thì $BPM = APB = AEB = GPC$ do đó *PG* đi qua *M* . Nên đường thẳng *PG* và *AP* đối xứng nhau qua *BC*. Nên *PG* đi qua tâm *O* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* khi và chỉ khi *AP* đi qua điểm đối xứng của *O* qua *BC*. Hay *AP* đi qua tâm đường tròn Ơle của tam giác *ABC*.

Bài 52. Cho tam giác *ABC* có 3 đường cao là *AX, BY, CZ* cắt nhau tại điểm *H*, *M* là trung điểm của *BC*, *P* là một điểm thuộc đường thẳng *HM*. Đường tròn (K) đường kính *AP* cắt *CA, AB* lượt tại *E, F* khác *A*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AYZ* cắt (K) tại điểm *G* khác *A*.

a. Chứng minh: *P, H, G* thẳng hàng.

b. Chứng minh tiếp tuyến tại *E, F* của (K) cắt nhau trên đường trung trực của *BC*.

Phân tích định hướng giải:

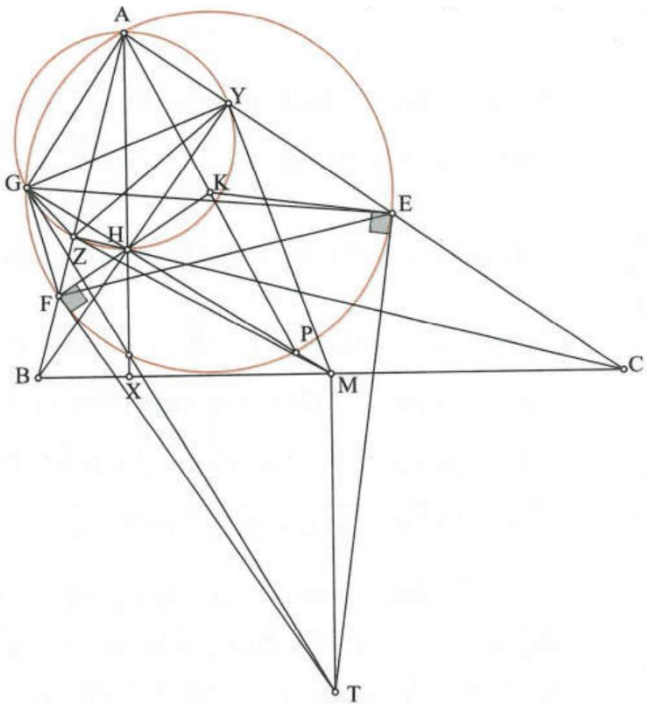
a. Dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác *AXY* có đường kính là *AH* nên $HG \perp GA$, mặt khác $PG \perp GA$ nên *P, G, H* thẳng hàng.

b. Xét tam giác *GYE* và tam giác *GZF* ta có: $YEG = ZFG$ (cùng chắn cung GA). $GYE = GZF$ (cùng bù với $AYG = AZG$). Do đó $\Delta GYE \backsim \Delta GZF$. Xét tam giác *GYZ* và tam giác *GEF* ta có:

$GYZ = GAZ \equiv GAF = GEF$,

$ZGY = ZAY \equiv FAE = FGE$

suy ra $\Delta GYZ \backsim \Delta GEF$.



Do $MYB = MBY = YAH, MZH = MCZ = ZAH$ suy ra *M* là giao điểm của các tiếp tuyến tại *Y, Z* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *AYZ*.

Tương tự ta cũng có *T* là giao điểm của hai tiếp tuyến tại *E, F* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF*.

Ta có $GFT = GFE + EFT = 180^0 - GAY + FAE = 180^0 - \left(GAY - FAE\right) = 180^0 - GAZ$ và

$GZM = GZH + HZM = 180^0 - GAH + HAZ = 180^0 - GAZ$ nên $GFT = GZM$ mặt khác cũng từ $\Delta MYZ \backsim \Delta TFE$ và $\Delta GYZ \backsim \Delta GEF$ ta suy ra $\frac{TF}{ZM} = \frac{EF}{ZY} = \frac{GF}{GZ}$ hay $\Delta GFT \backsim \Delta GZM$ suy ra $\Delta GZF \backsim \Delta GMT$ suy ra $GMT = GZF = 180^0 - GZA = 180^0 - GHA = AHP$ hay $TM // AH \perp BC$.

Bài 53. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I), các đường thẳng *AI, BI, CI* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại giao điểm thứ hai là: *D, E, F*. *DE* cắt *AC, BC* lần lượt tại *M, N*, *DF* cắt *AB, BC* tại *P, Q*.

a. Chứng minh: Tam giác *CMN* là tam giác cân.

b. Chứng minh: $PM//BC$ từ đó suy ra P, I, M thẳng hàng.

c. Chứng minh: $\frac{DI}{DA}=\frac{BC}{AB+AC}$.

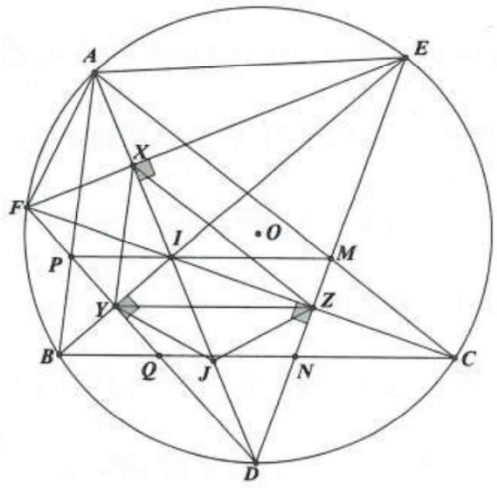
d. Giả sử EF, FD, DE lần lượt cắt AI, BI, CI tại X, Y, Z. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DYZ. Chứng minh: 4 điểm X, Y, Z, J nằm trên một đường tròn.

Giải:

a. Ta có:

$DMC=\frac{1}{2}sđ\left(AE+DC\right),\ CNE=\frac{1}{2}sđ\ \left(CE+DB\right)$

Mà $AE=CE, BD=DC\ \Rightarrow DMC=CNE$ hay tam giác CMN cân tại C.



b. Ta có $IAM=IEM$ suy ra tứ giác $AIME$ nội tiếp.

Suy ra $EIM=EAM=EBC\Rightarrow IM//BC$, chứng minh tương tự ta cũng có: $IP//BC\Rightarrow M,I,P$ thẳng hàng và $MP//BC$.

c. Trước hết ta cần chứng minh: $DI=DB=DC$.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: $ABDC$ ta có: $AB.CD+AC.BD=AD.BC$ suy ra

$DI\left(AB+AC\right)=DA.BC\Leftrightarrow\frac{DI}{DA}=\frac{BC}{AB+AC}$.

d. Theo tính chất vòng tròn nội tiếp tam giác ta có:

$YIZ+YDZ=BIC+FDE=90^0+\frac{1}{2}BAC+FDA+ADE=90^0+\frac{1}{2}BAC+FCA+EBC=180^0$. Suy ra tứ giác $XYDZ$ nội tiếp. Suy ra $IYZ=IDZ=EBC\Rightarrow YZ//BC$. Tương tự ta cũng có: $XY//AB, XZ//AC$. Suy ra $YXZ=BAC$. Do J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DYZ nên

$YJZ=2YDZ=ABC+ACB=180^0-BAC=180^0-YXZ$ suy ra tứ giác $XYJZ$ nội tiếp.

Bài 54. Cho tam giác ABC vuông tại A, dựng đường tròn tâm O đường kính AB. Một đường thẳng qua C cắt nửa đường tròn tại $\left(O\right)$ nằm trong nửa mặt phẳng chứa điểm C có bờ là AB) tại D, E, (D nằm giữa C và E) sao cho $ECA<90^0$. Qua D dựng đường thẳng vuông góc với CE cắt AC tại F. Hạ $CK\perp EF$, $EH\perp AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EDK cắt AD tại điểm I khác D. Hai đường thẳng AC, KI cắt nhau tại M.

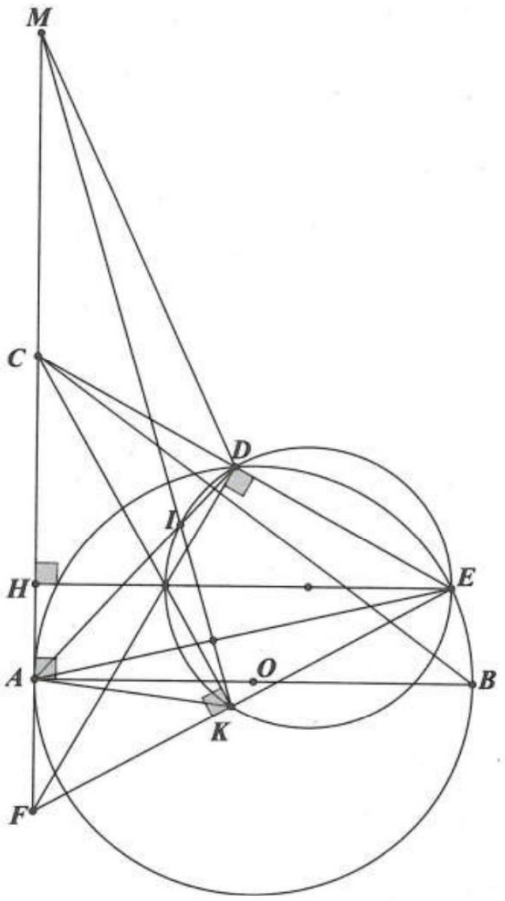
a. Chứng minh: A, K, E, M cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: $CA^2=CF.CH$.

c. Chứng minh: $FM.FA=FC.FH$.

d. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác *EDM* luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định.

Giải:



a.Tứ giác *EDIK* nội tiếp nên $IDE = IKF$ (cùng bù với góc *IKE*) hay $ADE = IKF$ (1).

Xét đường tròn (O) ta có: $ADE = EAF$ (góc nội tiếp chắn cung lớn *AE* và góc tạo bởi dây cung *AE* và tiếp tuyến *AF*) (2). Từ (1) và (2) suy ra

$$IKF = EAF \Rightarrow 180^0 - IKF = 180^0 - EAF \Rightarrow EKM = EAM$$

suy ra *AEKM* là tứ giác nội tiếp.

b. Do *CA* là tiếp tuyến của (O) nên $CA^2 = CD.CE$ (*). Mặt khác tứ giác *FHDE* nội tiếp nên $CD.CE = CH.CF$ suy ra $CA^2 = CF.CH$ (1)

c. Do tứ giác *AKEM* nội tiếp nên $FK.FE = FA.FM$. Mặt khác tứ giác *CHKE* nội tiếp nên $FK.FE = FH.FC$ suy ra $FA.FM = FH.FC$ (2)

d. Ta chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác *MDE* luôn tiếp xúc với đường thẳng *AC* cố định.

Từ (1) và (2) suy ra $CA^2 + FA.FM = CF.CH + CF.FH = CF^2 \Rightarrow FM.FA = CF^2 - CA^2$

Lại có: $CF^2 - CA^2 = (CF - CA)(CF + CA) = FA.(CF + CA)$

Hay $FM = CF + CA \Leftrightarrow CA = CM$. Kết hợp với (*) suy ra $CM^2 = CD.CE$ tức là đường tròn ngoại tiếp tam giác *EDM* tiếp xúc đường thẳng *AC* tại *M*.

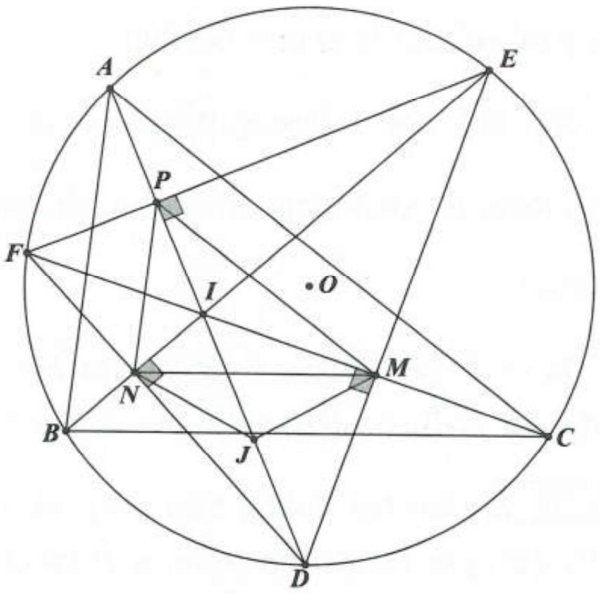
Bài 55. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Các đường thẳng *AI, BI, CI* cắt (O) lần lượt tại *D, E, F, DE* cắt *CF* tại *M, DF* cắt *BE* tại *N, AD* cắt *EF* tại *P*. Gọi *J* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *DMN*.

a. Chứng minh: *INDM* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $MN // BC$ và *I* là trực tâm ΔDEF .

c. Chứng minh: *P, M, J, N* cùng nằm trên một đường tròn.

Giải:



a. Ta có $NIM = 180^0 - \frac{1}{2}\left(ABC + ACB\right)$

$= 180^0 - \left(NDI + MDI\right) = 180^0 - NDM$ suy ra $INDM$ là tứ giác nội tiếp.

b. Suy ra $INM = IDM = ABE = IBC \Rightarrow MN // BC$.

Ta có:

$$FNE = \frac{1}{2}sđ\left(EF + BD\right) = \frac{1}{2}sđ\left(AF + AE + BD\right) = 90^0$$

$\Rightarrow DF \perp BE$. Chứng minh tương tự ta có $DA \perp EF$ suy ra I là trực tâm tam giác DEF.

c. Vì J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IMDN$ nên $MJN = 2MDN = 2MDA + 2NDA$

$= ABC + ACB = 180^0 - BAC$.

Mặt khác chứng minh tương tự ta cũng có: $NP // AB, MP // AC \Rightarrow BAC = MPN$ từ đó suy ra $MJN = 180^0 - MPN$ nên tứ giác $PNJM$ nội tiếp.

Bài 56. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Một đường thẳng (d) thay đổi qua A cắt (O), (O') lần lượt tại C, D (A nằm giữa C, D). Tiếp tuyến tại C của (O) và tiếp tuyến tại D của (O') cắt nhau ở M. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B xuống hai tiếp tuyến trên.

a. Chứng minh: Tứ giác $MCBD$ nội tiếp.

b. Hạ $BH \perp CD$, chứng minh: P, H, Q thẳng hàng.

c. Chứng minh: PQ tiếp xúc với đường tròn cố định.

Giải:

a. Ta có:

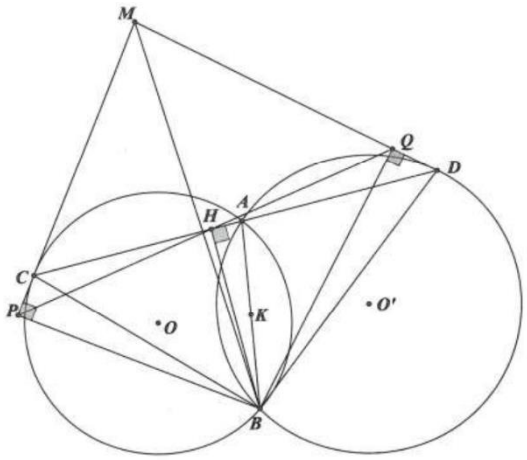
$CBD = CBA + ABD = MCA + MDA = 180^0 - CMD$

Suy ra $MCBD$ là tứ giác nội tiếp.

b. Đây thực chất là đường thẳng Simson của điểm B với đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD.

c. Ta có $PHB = PCB = CAB$ suy ra PQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH.

Mà AB cố định $AHB = 90^0$ nên suy ra PQ luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính AB.



Bài 57. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B và một tiếp tuyến chung PQ $(P \in (O), Q \in (O'))$. Tiếp tuyến tại P và Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt nhau ở E.

Gọi D là điểm đối xứng với B qua PQ. Giả sử AB cắt PQ tại điểm M .

a. Chứng minh: $APDQ$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $\Delta PBM \backsim \Delta APM$.

c. Chứng minh: A, D, E thẳng hàng.

Giải:

a. Theo tính chất đối xứng ta có:

$PDQ = PBQ = PBA + QBA = APQ + AQP$

$= 180^0 - PAQ$ suy ra $APDQ$ là tứ giác nội tiếp.

Vì AB cắt PQ tại M nên

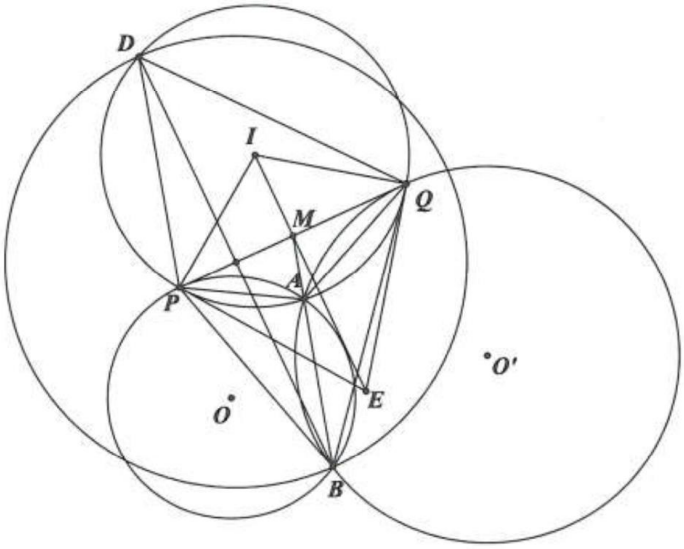
$MP^2 = MA.MB = MQ^2$

Suy ra M là trung điểm của PQ. Tam giác

$\Delta PBM \backsim \Delta APM (g.g)$ suy ra $\dfrac{BP}{AP} = \dfrac{MB}{MP}$,

tương tự ta cũng có:

$\dfrac{BQ}{AQ} = \dfrac{MB}{MQ} \Rightarrow \dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{AP}{AQ}$



Theo giả thiết ta có: $PB = PQ, QB = QD$ suy ra $\dfrac{DP}{DQ} = \dfrac{AP}{AQ}$.

Theo tính chất quen thuộc 2 tiếp tuyến tại P, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt nhau ở E ta suy ra E, D, A thẳng hàng.

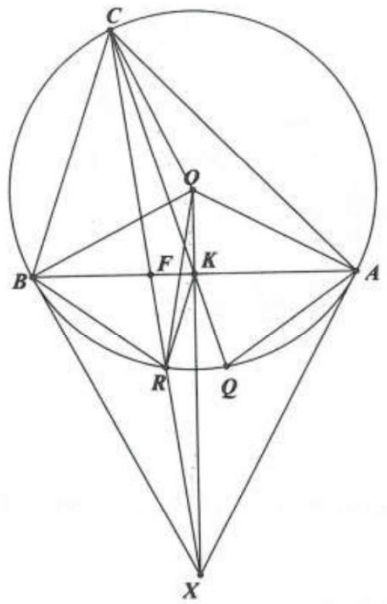
Bài 58. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O) với *B*, *C* cố định, các tiếp tuyến của (O) tại *A*, *B* cắt nhau ở *X*, các tiếp tuyến của (O) tại *A*, *C* cắt nhau ở *Y*. *CX*, *BY* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *F*, *E*. Gọi *M*, *N* là trung điểm của *BE*, *CF*. Các đường trung tuyến *BL*, *CK* kéo dài cắt (O) lần lượt tại *P*, *Q*.

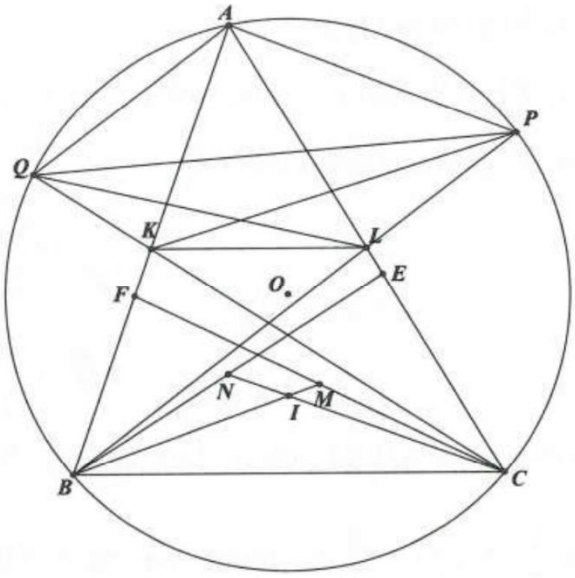
a. Chứng minh: Các tam giác *BFC*, *QAC* đồng dạng.

b. Chứng minh: Tứ giác *PQKL* nội tiếp.

c. Gọi *I* là giao điểm *BN*, *CM*. Chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IBC* nằm trên đường thẳng cố định.

Giải:





Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O) các tiếp tuyến tại *A*, *B* cắt nhau ở *X*. *XC* cắt *AB* tại *F* thì: $ACK = FCB$.

Thật vậy giả sử *CX* cắt (O) tại *R* thì: $XR.XC = XB^2 = XK.XO$ suy ra *COKR* là tứ giác nội tiếp. Suy ra $RKX = OCR = ORC = OKC$ nên *KB* là phân giác của góc CKR.

Ta có:

$CKA = 180^0 - CKB = 180^0 - \frac{1}{2}CKR = 180^0 - \frac{1}{2}COB = 180^0 - CAR = CBR$ suy ra

$\Delta CBR \backsim \Delta CKA\ (g.g)$

suy ra $ACK = FCB$.

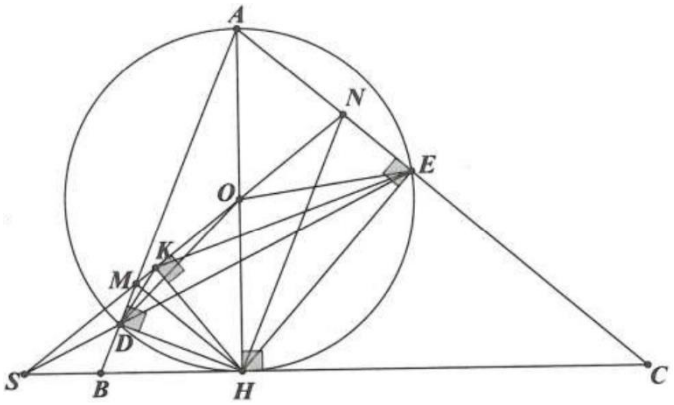
a. Trở lại bài toán: Từ bổ đề ta suy ra tam giác *BFC*, *QAC* đồng dạng.

b. Ta có $PQK = PBC = BLK$ suy ra *PQKL* nội tiếp.

c. Ta cần chứng minh: $MBC = NCB$.

Ta có $\Delta BFC \backsim \Delta QAC$ mà BM, QL là các trung tuyến tương ứng nên $\Delta BMC \backsim \Delta QLC \Rightarrow MBC = LQK$. Tương tự ta cũng có $BCN = LPK$ mà $LQK = LPK$ suy ra $MBC = NCB$ suy ra tam giác IBC cân tại I. Suy ra trung trực của BC đi qua O, I hay tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC nằm trên đường thẳng cố định là trung trực của BC.

Bài 59. Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH. Đường tròn tâm O đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Đường thẳng DE cắt BC tại S, SO cắt AB, AC lần lượt tại M, N.



a. Chứng minh: $SD.SE = SH^2$.

b. Hạ $HK \perp SO$ (K nằm trên SO). Chứng minh $OKDE$ là tứ giác nội tiếp.

c. Chứng minh: KH là phân giác của DKE.

d. Chứng minh: O là trung điểm của MN.

Giải:

a. Từ giả thiết ta suy ra SH là tiếp tuyến của (O). Xét tam giác SDH và tam giác SHE ta có:

$SHD = SEH = \frac{1}{2}$ sđ DH, HSE chung suy ra $\Delta SDH \backsim \Delta SHE$ $(g.g)$

Suy ra $\frac{SH}{SD} = \frac{SE}{SH} \Leftrightarrow SH^2 = SD.SE\,(1)$

b. Tam giác SHO vuông tại H có $HK \perp SO$ suy ra $SH^2 = SK.SO$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $SK.SO = SD.SE \Rightarrow \Delta SDK \backsim \Delta SOE (c.g.c)$ suy ra $SKD = SEO \Rightarrow OKDE$ là tứ giác nội tiếp.

c. Từ câu b) ta có biến đổi góc: $SKD = OED = ODE = OKE \Rightarrow DKH = HKE$ hay HK là phân giác của góc DKE.

d. Tứ giác $HKNE$ có $HKN + NEH = 180^0 \Rightarrow HKNE$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $HNE = HKE = \frac{1}{2}DKE$

$= \frac{1}{2}DOE = DAE \Rightarrow HN // AD$. Xét tam giác OMA và tam giác ONH có: $OA = OH$, $AOM = HON$, $OAM = OHN$ (so le trong) suy ra $\Delta OMA = \Delta ONH$ $(g.c.g)$ suy ra $OM = ON$.

Bài 60. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn (O), *H* là trực tâm của tam giác. Gọi *P* là điểm đối xứng của *A* qua *OH* (giả sử *P* nằm trên nửa mặt phẳng bờ *BC* không chứa điểm *A*), lấy các điểm *E, F* lần lượt nằm trên *AB, AC* sao cho $BE = CP, CF = PB$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*, *K, D* lần lượt là giao điểm của *PM, AP* với *OH*.

a. Chứng minh: *BDCP* là hình bình hành.

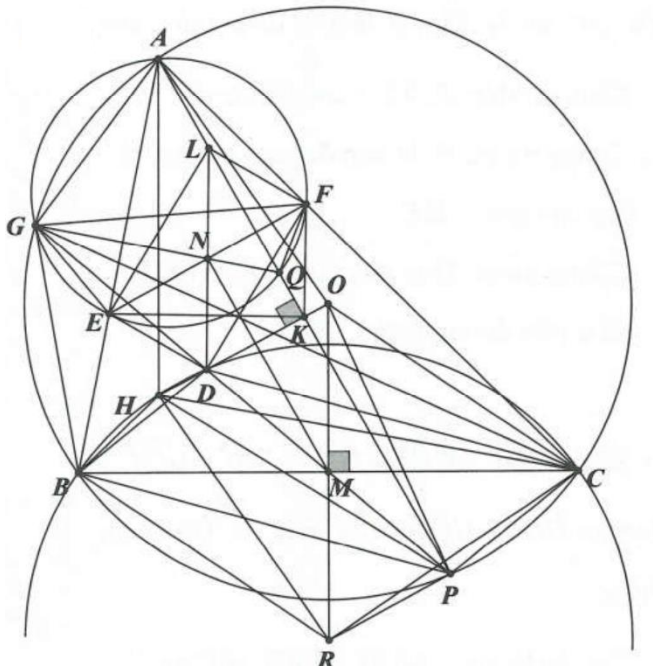
b. Chứng minh: $EDF = 90^0$

c. Gọi *G* là giao điểm của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF*. Chứng minh: *GP* chia đôi *BC*.

d. Chứng minh: $EKF = 90^0$.

Giải:

a. Gọi *R* là điểm đối xứng với *O* qua *BC* ta dễ chứng minh được *R* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *BHC*. Do *A* đối xứng với *P* qua *OH* nên $OP = OA$ hay *P* nằm trên đường tròn (O).



Ta có $OR = AH = HP, OC = OP = HR$ nên tam giác $\Delta OPR = \Delta HRP$ (c.c.c) từ đó suy ra *OHRP* là hình thang cân nên $\Delta DMO = \Delta PMO$ (g.c.g) suy ra $MD = MP$. Suy ra *BDCP* là hình bình hành.

b. Từ chứng minh ở câu a ta có: $BD = CP = BE,\ BP = CD = CF$ nên các tam giác *BED, CFD* là tam giác cân.

Ta có $EDF = 360^0 - BDC - EDB - FDC$

$$= 360^0 - BPC - \frac{180^0 - EBD}{2} - \frac{180^0 - FCD}{2} = 360^0 - \left(180^0 - BAC\right) - \frac{180^0 - EBD}{2} - \frac{180^0 - FCD}{2}$$

$$= BAC + \frac{ABC - DBC}{2} + \frac{ACB - DCB}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = 90^0.$$

Gọi *Q* là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF* với *AP*.

c. Ta có $GBE = GCF, GEB = GFC$ nên $\Delta GEB \backsim \Delta GFC\ (g.g) \dfrac{GB}{GC} = \dfrac{EB}{CF} = \dfrac{PC}{PB}$ suy ra *GP* chia đôi *BC* hay *G, D, M, P* thẳng hàng. Tương tự ta có *G, N, Q* thẳng hàng.

Ta có $MG.MP = MB.MC = MC^2 \Rightarrow \dfrac{MP}{MG} = \left(\dfrac{MC}{MG}\right)^2 = \left(\dfrac{\sin MGC}{\sin GCB}\right)^2$. Tương tự

$\dfrac{NP}{NG} = \left(\dfrac{\sin QGF}{\sin GFE}\right)^2$ mà $MGC = PAC = QGF, GCB = GAE = GFE$ suy ra $\dfrac{MP}{MG} = \dfrac{NP}{NG} \Rightarrow MN // AP$.

Gọi L là điểm đối xứng với D qua N thì $L \in AP$ khi đó $EDFL$ là hình chữ nhật, $ELKD$ nội tiếp nên 5 điểm E, L, F, K, D cùng nằm trên một đường tròn, hay $EKF = 90^0$.

Bài 61. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có trực tâm là điểm H. Một điểm D nằm trên cung nhỏ BC, gọi E là điểm đối xứng với D qua BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác ODE cắt AD tại G. Gọi J là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác AGO với AH.

a. Chứng minh: J, O, E thẳng hàng.

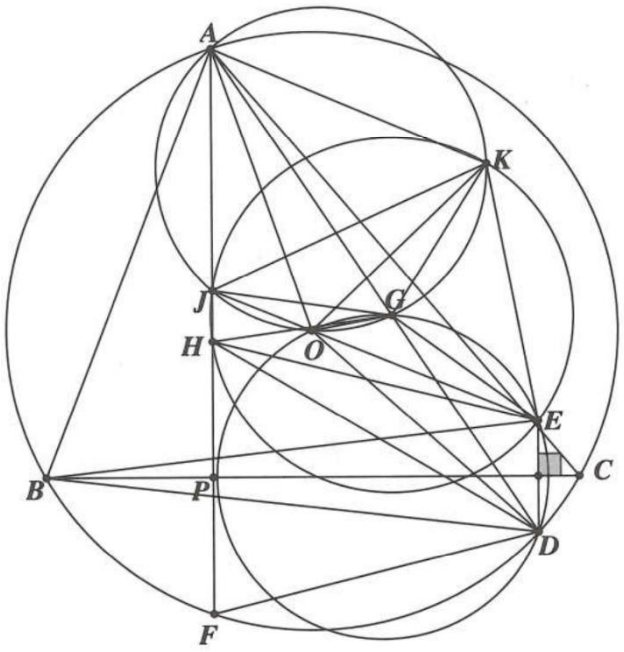
b. Chứng minh: G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE.

c. Chứng minh: Trực tâm tam giác AGO nằm trên đường thẳng HE.

Giải:

a. Ta có $GOE = GDE = GAJ = 180^0 - GOJ$

Suy ra $GOE + GOJ = 180^0$ hay J, O, E thẳng hàng.



b. Từ các tứ giác $AJOG, ODEG$ nội tiếp

Ta có biến đổi góc:

$GJO = GAO = GDO = GEO$ suy ra tam giác GJE cân tại G.

Gọi F là giao điểm thứ 2 của AH với (O) thì F đối xứng với H qua BC nên tứ giác $HEDF$ là hình thang cân. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AGO tại giao điểm thứ 2 là K. Suy ra

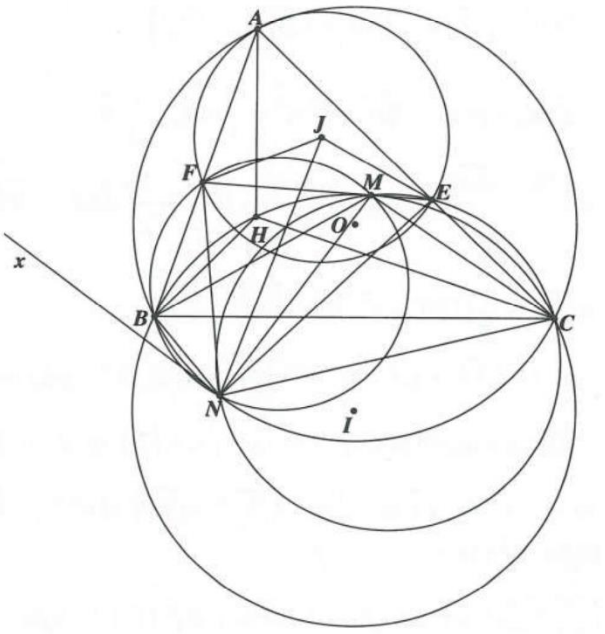
$JGE = AOD = 2ABD = 2AFD$

$= 2\left(180^0 - JHE\right) = 2JKE$ suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE.

c. Ta có: $GOE = GDE = GAJ = GKJ = GJK = GOK$ lại có $GKO = GJO = GEO$ suy ra $\Delta GOK = \Delta GOE$ hay OG là trung trực của KE hay E là điểm đối xứng với K qua OG. Do $GK = GJ$ và tứ giác $AJGK$ nội tiếp nên AG là phân giác của HAK mà $GKA = GJH = GHJ$ suy ra

H, K đối xứng nhau qua *AG*. Suy ra *HE* là đường thẳng Steiner của *K* trong tam giác *AGO*. Theo một tính chất quen thuộc thì *HK* đi qua trực tâm của tam giác *AGO*.

Bài 62. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp (O) có trực tâm là điểm *H*, gọi *M* là một điểm thuộc cung nhỏ *BC* của đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác *BHC*, tiếp tuyến tại *M* của (I) cắt các cạnh *AB, AC* lần lượt tại *F, E*. Gọi *N* là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác *BFM* với (O) (*N* khác *B*), *J* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF*.



a. Chứng minh: 4 điểm *C, N, M, E* cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: *NJ* là phân giác của ENF.

c. Chứng minh: Đường tròn ngoại tiếp tam giác *EJF* tiếp xúc với (O).

Giải:

a. Vì *ABNC* và *MNBF* là tứ giác nội tiếp nên ta có biến đổi góc sau:

$MNC = BNC - BNM = 180^0 - BAC - AFE = AEF$, suy ra *CNME* là tứ giác nội tiếp.

b. Tacó: $ENF = BNC - BNF - CNE = 180^0 - BAC - BMF - CME = BMC - BAC$

$BHC - BAC = 180^0 - 2BAC = 180^0 - EJF$

Suy ra *ENFJ* là tứ giác nội tiếp. Lại có $JE = JF$ nên *NJ* là phân giác của ENF.

c. Dựng tiếp tuyến *Nx* của (O). Ta có

$FNx = BNx + FNB = BCN + FMB = BCN + MCB = MCN = FMN$

suy ra *Nx* cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *EJF*.

Bài 63. Cho tam giác nhọn *ABC* có tâm đường tròn nội tiếp là điểm *I*, gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác *BIC*, trên cung nhỏ *BC* lấy điểm *D*, đường tròn (L) qua *A* tiếp xúc ngoài với (K) tại *D* cắt *AC, AB* lần lượt tại *E, F*. Gọi *J* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *AEF*. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác *BDF* cắt cạnh *BC* tại *S*.

a. Chứng minh: *SDEC* nội tiếp.

b. Chứng minh: *EJFS* nội tiếp.

c. Chứng minh: *BC* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *EJF*.

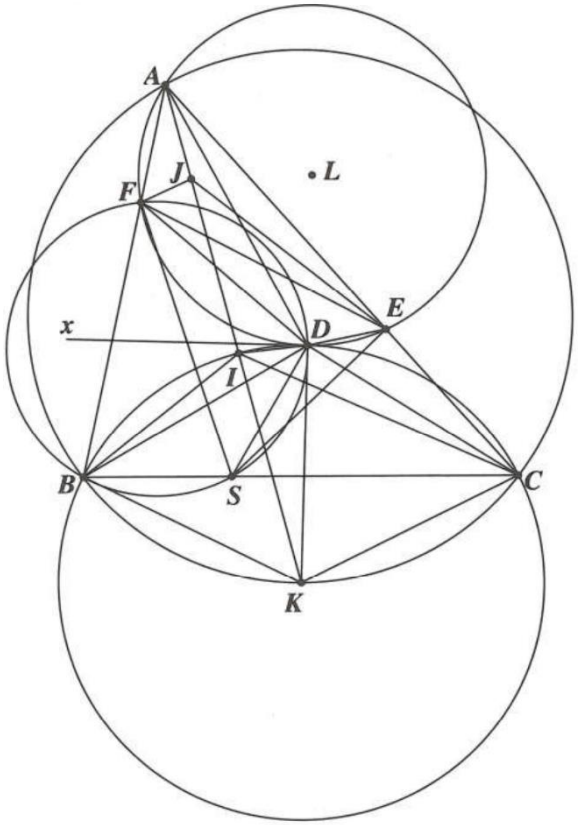
Giải:

a. Ta có: $SDE = 360^0 - EDF - SDF$

$= 180^0 - EDF + 180^0 - SDF = BAC + ABC$

$= 180^0 - ACB$

Suy ra tứ giác *SDEC* nội tiếp.



b. Ta có: $ESF = ESD + DSF = ECD + FBD$

$= 180^0 - DAC - ADC + 180^0 - DAB - ADB$

$= 360^0 - \left(DAB + ADB\right) - \left(DAC + ADC\right)$

$= BDC - BAC = BIC - BAC = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}ACB$

$= \frac{180^0 - BAC}{2}$. Lại có:

$EJF = 180^0 - \frac{1}{2}\left(AEF + AFE\right)$

$= 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - EAF\right) = \frac{180^0 + BAC}{2}$

Suy ra $ESF + EJF = 180^0$ hay *EJFS* là tứ giác nội tiếp.

c. Kẻ tiếp tuyến chung *Dx* của $(K),(L)$

Ta có: $xDB = DCB$ và $xDF = DEF$

Ta có: $FSB = FDB = DCB + DEF = DES + DEF = SEF$ suy ra *BC* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *EJF*.

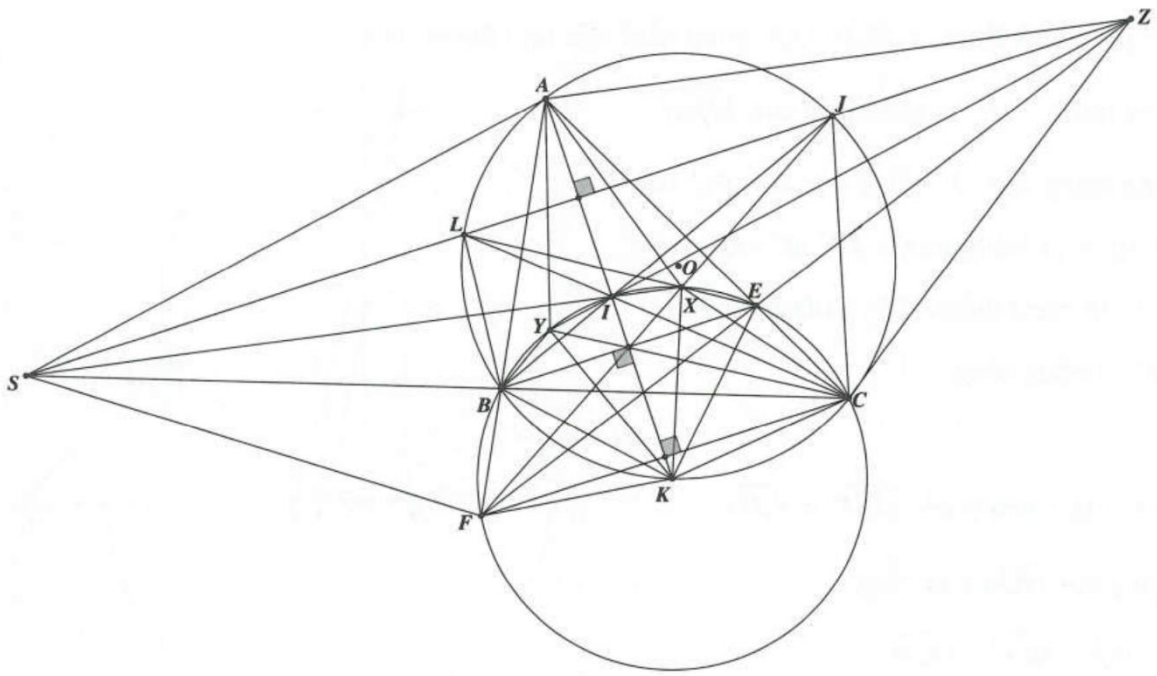
Bài 64. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I), các đường thẳng *AI, BI, CI* cắt (O) lần lượt tại *K, J, L*.

a. Chứng minh: *K* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IBC*.

b. Đường tròn (K) ngoại tiếp *IBC* cắt *CA, AB* lần lượt tại *E, F* khác *C, B*. Chứng minh: *EL, FJ* cắt nhau trên (K)

c. Gọi giao điểm của *EL, FJ* là *X*, *EF* cắt *JL* tại *Z*, *ZI* cắt (K) tại *Y*. Chứng minh: *X, Y* đối xứng nhau qua *AI*.

Giải:



a. Ta có: $BIK=\frac{1}{2}BAC+\frac{1}{2}ABC=KAC+IBC=KBC+IBC=IBK$ suy ra tam giác BIK cân tại K, hay $KB=KI=KC$ (đpcm).

b. Giả sử JL cắt BC tại S, SI cắt (K) tại X. Ta sẽ chứng minh: L, X, E thẳng hàng và F, X, J thẳng hàng. Thật vậy ta có: $SI.SX=SB.SC=SL.SJ$ suy ra tứ giác $LIXJ$ nội tiếp.

Ta có $JXE=360^0-IXE-JXI=180^0-IXE+180^0-JXI=ACL+CLJ=BJL+JBC$

$=180^0-LIJ=180^0-LXJ$ nên $LXJ+JXE=180^0$ hay L, X, E thẳng hàng. Tương tự, ta cũng có F, X, J thẳng hàng hay EL, FJ cắt nhau tại 1 điểm nằm trên (K).

c. Ta có I là trực tâm tam giác LKJ (tính chất quen thuộc), BE là trung trực của AK. Lại có $FC//SZ$ và $ZFC=SCF$ nên $SFCZ$ là hình thang cân, dẫn đến AK là trung trực của SZ, nên $AIZ=AIS$ mặt khác $ZIX=SIY$ đối đỉnh, suy ra $KIX=KIY$ suy ra $IX=IY$ hay X, Y đối xứng nhau qua AK.

Bài 65. Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH, phân giác trong góc BAC cắt BC tại O, qua O dựng các đường thẳng OM vuông góc với AB, ON vuông góc với AC.

a. Chứng minh: 5 điểm A, M, H, O, N cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: AH là phân giác của MHN.

c. Đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt MN tại K. Chứng minh: $KN.AC=KM.AB$

d. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh: A, K, I thẳng hàng.

Giải:

Do $AO \perp MN$ nên ta có: $ONK = NAO$

(cùng phụ với NOA), ta cũng có:

$NOK = 90^0 - NOC = OCA.$

Từ đó suy ra $\Delta OKN \backsim \Delta COA$ (g.g)

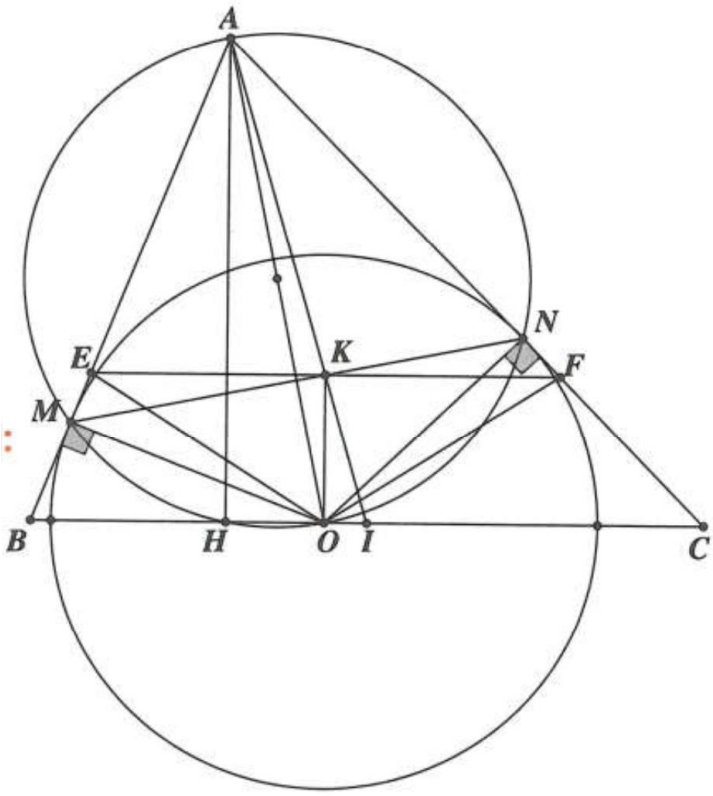
dẫn đến $\frac{KN}{OA} = \frac{ON}{CA}$ tương tự ta cũng có:

$\frac{KM}{OA} = \frac{OM}{BA}$

Do $OM = ON$ suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{AC}{AB}$

Hay $KM.AB = KN.AC$.

Dựng đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F, ta dễ chứng minh được: $KEMO, KNFO$ nội tiếp, kết hợp với $OMK = ONK$ ta có biến đổi góc:



$OEK = OMK = ONK = OFK$ suy ra tam giác OEF cân tại O, dẫn tới $KE = KF$, theo bổ đề hình thang ta có A, K, I thẳng hàng.

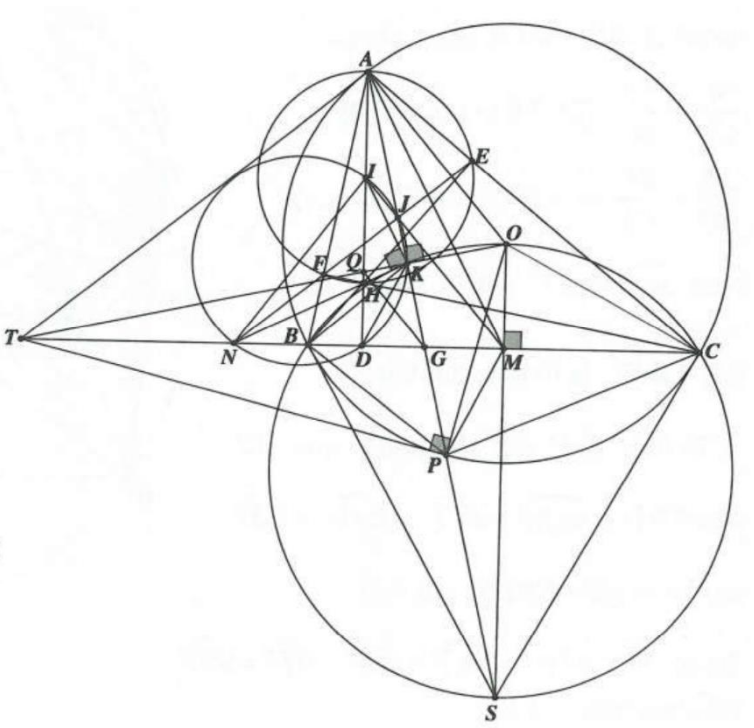
Bài 66. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $(O;R)$ các đường cao BE, CF cắt nhau tại điểm H. Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở S, đường thẳng SA cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là P. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên AS, M là giao điểm của SO và BC, I là trung điểm AH, J là giao điểm của MI với EF, OK cắt BC tại T, cắt AH tại Q, EF cắt BC tại N.

a. Chứng minh: $MAC = PAB$.

b. Chứng minh: $GQ // MI$.

c. Chứng minh: $IKN = 90^0$.

Giải:



a, Ta có $SB^2 = SP.SA = SM.SO$. Suy ra $AOMP$ là tứ giác nội tiếp. Dẫn đến

$$AMO = APO = AOP = PMS$$

Hay MB là phân giác của AMP.

Suy ra

$$AMB = \frac{1}{2}AMP = \frac{1}{2}AOP = ACP$$

$$= 180^0 - ABP \Rightarrow ABP = AMC$$

$$\Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta ABP(g.g)$$

$$MAC = PAB \text{ (đpcm).}$$

b. Giả sử tiếp tuyến tại A, P của (O) cắt nhau ở T', từ chứng minh ở câu a ta suy ra 5 điểm A, T', P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính OT' hay $T'MO = 90^0$ tức là T', B, C thẳng hàng suy ra $T' \equiv T$.

Các tứ giác $TAKD$, $DQKG$ nội tiếp nên $KQG = KDG = KAT = KOA$ suy ra $GQ//OA$ mà $MI \perp EF$ tại J và $OA \perp EF$ (tính chất quen thuộc), suy ra $QG//MI$.

c. Do tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC có AJ, AM là các trung tuyến tương ứng nên $JAF = MAC = BAP \Rightarrow A, J, P$ thẳng hàng hay J thuộc AS.

Ta có $DIJ = DQG = DKG$ nên $IJKD$ nội tiếp, ta cũng có $IJDN$ nội tiếp nên 5 điểm I, J, K, D, N cùng nằm trên đường tròn đường kính NI dẫn đến $IKN = 90^0$.

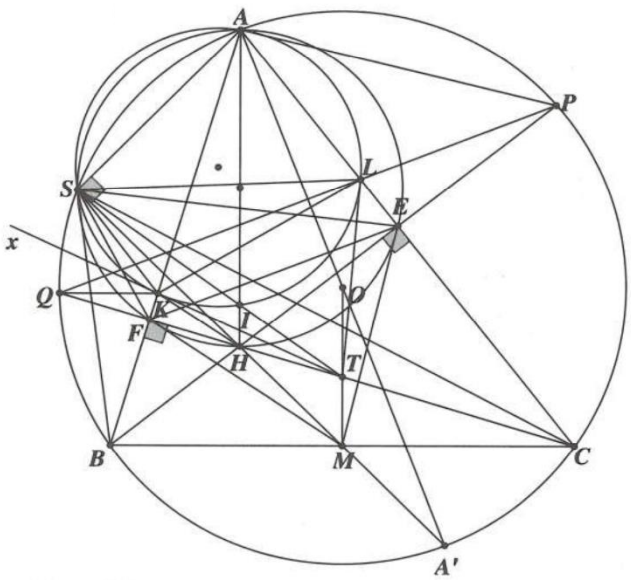
Bài 67. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $(O;R)$ có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Các đường thẳng BE, CE cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là PQ. Đường thẳng PQ cắt AC tại L, gọi K là điểm trên cạnh AB sao cho $QK//BC$. Gọi S là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (O).

a. Chứng minh: Tứ giác $ASKL$ nội tiếp.

b. Gọi I là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với AH, SI cắt CF tại T. Chứng minh: KT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

c. Chứng minh: T nằm trên trung trực của cạnh BC.

Giải:



a.Ta có $HFE = HBC = HQP$ suy ra EF song song với PQ dẫn tới $\frac{CE}{CL} = \frac{CF}{CQ} = \frac{BF}{BK}(1)$, lại có $\Delta SBF \backsim \Delta SCE$ (g.g) suy ra $\frac{BF}{CE} = \frac{SB}{SC}$ (2).

Từ (1), (2) ta suy ra $\frac{SB}{SC} = \frac{BK}{CL} \Rightarrow \Delta SBK \backsim \Delta SCL$ (c.g.c)

Nên $SKB = SLC$ suy ra $SKA = SLA$ hay $ASKL$ là tứ giác nội tiếp.

b. Ta thấy Q, H đối xứng nhau qua AB nên

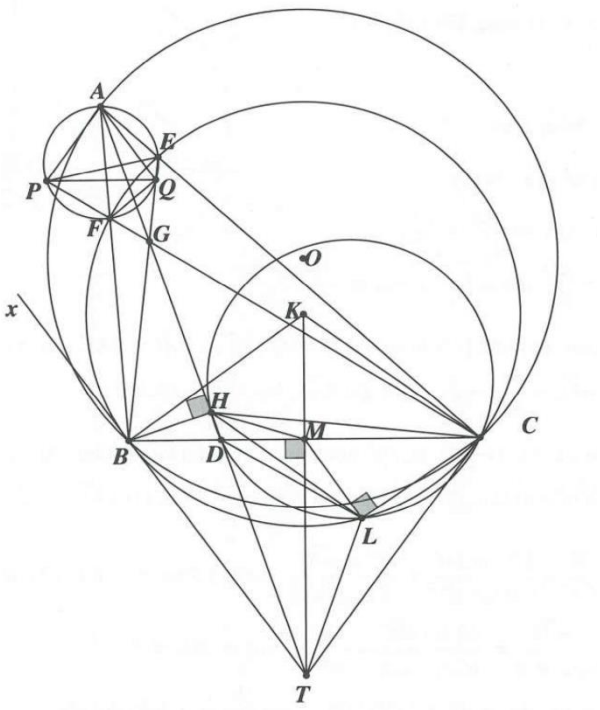
$KHQ = KQH = BCF = BAH = KST$ suy ra tứ giác $SKHT$ nội tiếp.

Ta có $SKx = 180^0 - SKT = 180^0 - SHT = SHF = SAK$ nên KT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL.

c. Ta có biến đổi góc $FSH = FAH = KSI, KIS = KAS = FHS, IKT = IAT = MFH$ suy ra $\Delta SFM \backsim \Delta SKT$ (g.g), lại có $\Delta SKL \backsim \Delta SFE$ (g.g). Gọi M là trung điểm của BC thì suy ra $\Delta LKT \backsim \Delta EFM$ (c.g.c) nên $TK = TL$ hay TL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL.

Thêm nữa ta cũng có: $\frac{HM}{MS} = \frac{MF^2}{MS^2}, \frac{TI}{TS} = \frac{TK^2}{TS^2}$ mà $\frac{MF}{MS} = \frac{TK}{TS}$ suy ra $\frac{HM}{HS} = \frac{TI}{TS}$ dẫn tới $TM // IH$.

Bài 68. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường tròn (K) qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F, BE, CF cắt nhau tại G, AB cắt BC tại D. Gọi H là hình chiếu của B trên AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DHC cắt (K) tại L, gọi M là trung điểm của BC, tiếp tuyến tại B, C của (K) cắt nhau tại T, đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt BE, CF lần lượt tại P, Q.



a. Chứng minh: $AQ//BT$.

b. Chứng minh: A, T, G thẳng hàng.

c. Chứng minh: $ML \perp LC$.

Giải:

a. Ta có: $QAE = AFE = BCE = FBx$ nên $AQ//BT$.

b. Ta có: $APF = FEC = FCT$ nên $AP//CT, BQP = CFE = CBE$ nên $PQ//BC$ do đó $\Delta APQ \backsim \Delta TCB$ (g.g) suy ra $\frac{GQ}{GB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{TB} \Rightarrow \Delta AQG \backsim \Delta TBG (c.g.c)$ suy ra $AGQ = BGT \Rightarrow A, G, T$ thẳng hàng.

c. Ta có: $THB = TMB = 90^0$ nên $HBTM$ nội tiếp, có $TBL = BCL = DHL \Rightarrow BHLT$ nội tiếp hay $THML$ nội tiếp, dẫn đến $MLC = HLC - HLM = HDC - HTM = DMT = 90^0$.

Bài 69. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), tiếp tuyến tại A của (O) cắt CB tại K, kẻ tiếp tuyến KD với (O). Gọi G, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB, BC, CA.

a. Chứng minh: $KA^2 = KB.KC$.

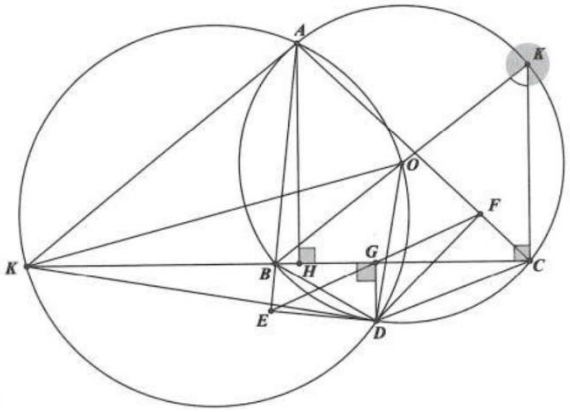
b. Chứng minh: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

c. Chứng minh: $BC = 2R \sin BAC$.

d. Chứng minh: G là trung điểm của EF.

Giải:

a. Học sinh tự chứng minh.



b. Từ chứng minh câu a ta suy ra:

$\Delta KBA \backsim \Delta KAC$ suy ra $\frac{KA}{KC}=\frac{AB}{AC}$, tương tự $\frac{KB}{KC}=\frac{BD}{BC}$ mà $KA=KB$ suy ra $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{BC}$.

c. Kẻ đường kính BK của (O) ta có: $BCK=90^0$, lại có $BAC=BKC$, suy ra $\sin BAC=\sin BKC$

$=\frac{BC}{BK}\Leftrightarrow BC=BK.\sin BAC$, hay $BC=2R\sin A$.

d. Áp dụng câu c ta có: Tứ giác $BGDE$ nội tiếp đường tròn đường kính BD nên $GE=BD.\sin GDE$

$=BD.\sin ABC$, tương tự ta cũng có: $GF=CD.\sin FCG=CD.\sin ACB$

Từ đó suy ra $\frac{GE}{GF}=\frac{BD.\sin ABC}{CD.\sin ACB}=\frac{AB.\sin ABC}{AC.\sin ACB}$, dựng đường cao AH của tam giác ABC thì ta có:

$\frac{GE}{GF}=\frac{BD.\sin ABC}{CD.\sin ACB}=\frac{AB.\sin ABC}{AC.\sin ACB}=\frac{AH}{AH}=1$ suy ra $GE=GF$.

Mặt khác từ các tứ giác $BGDE$, $CFGD$, $ABCD$ nội tiếp ta có biến đổi góc:

$EGD=EBD=ACD=180^0-DGF\Rightarrow EGD+DGF=180^0$ hay E, G, F thẳng hàng. Nói cách khác G là trung điểm của E, F.

Bài 70. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Vẽ dây BD cắt CH tại K nằm giữa H và C. Gọi G giao điểm của CD, BE.

a. Chứng minh: $BFEC$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $\frac{CE}{BF}=\frac{EG}{KF}$.

c. EF cắt (O) tại M. Chứng minh: AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF.

d. Chứng minh: EF đi qua trung điểm của GK.

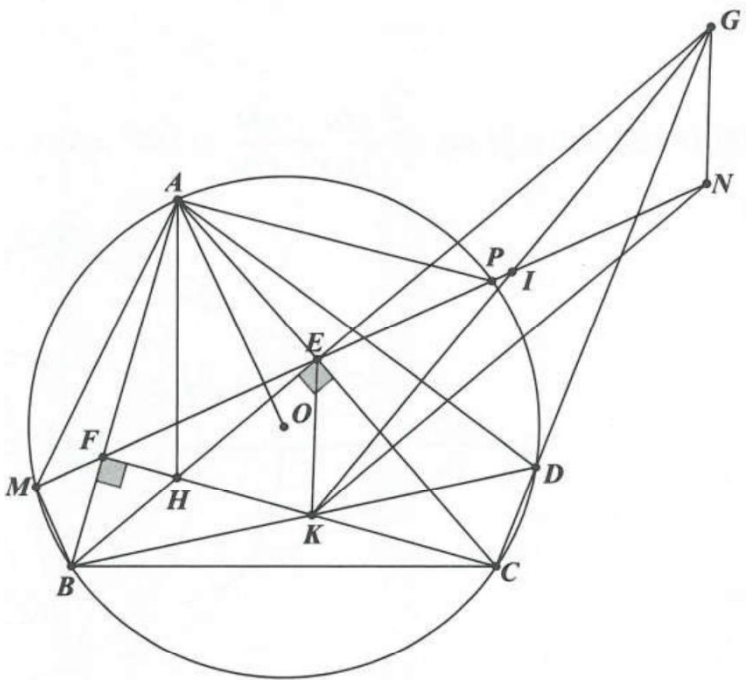
Hướng dẫn giải:

a. Học sinh tự chứng minh.

b. Xét ΔBFK và ΔCEG

ta có: $BFK = CEG = 90^0, ABD = ACD$ (góc nội tiếp chắn cùng một cung) suy ra $\Delta BFK \backsim \Delta CEG\ (g.g)$

nên $\frac{CE}{BF} = \frac{EG}{KF}$ đpcm.



c. Ta chứng minh được tính chất quen thuộc là $OA \perp EF$, giả sử đường thẳng EF cắt các cung nhỏ AB, AC lần lượt tại M, Q suy ra tam giác AMQ cân tại A, suy ra $APM = AMP$, lại có: $APM = ABM$ suy ra $AMF = ABM$ hay AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF.

d. Dựng đường thẳng qua K song song với BE cắt EF tại N. Ta chứng minh: $EKNG$ là hình bình hành.

Do $HE//KN$ và $\Delta HBF \backsim \Delta HCE$ nên ta có: $\frac{KN}{KF} = \frac{HE}{HF} = \frac{CE}{BF}$ lại có $\Delta BFK \backsim \Delta CEG$ (chứng minh ở câu b) suy ra $\frac{CE}{BF} = \frac{GE}{KF}$. Từ đó suy ra $\frac{KN}{KF} = \frac{GE}{KF}$ hay $KN = GE$ nên $EKNG$ là hình bình hành. Suy ra EN đi qua trung điểm I của KG hay EF chia đôi GK.

Bài 71. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) ta dựng các tiếp tuyến MB, MC đến (O) (B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến MDA sao cho tia MA nằm giữa 2 tia MB, MO và $MD < MA$. Gọi H là giao điểm của MO và BC, AM cắt BC tại K.

a. Chứng minh: 4 điểm M, B, O, C cùng nằm trên một đường tròn và $MB^2 = MA.MD$

b. Chứng minh: $\Delta MDH \backsim \Delta MOA$ từ đó suy ra $DHB = DCA$.

c. Chứng minh: $\frac{CH}{HA} = \frac{CD}{CA}$.

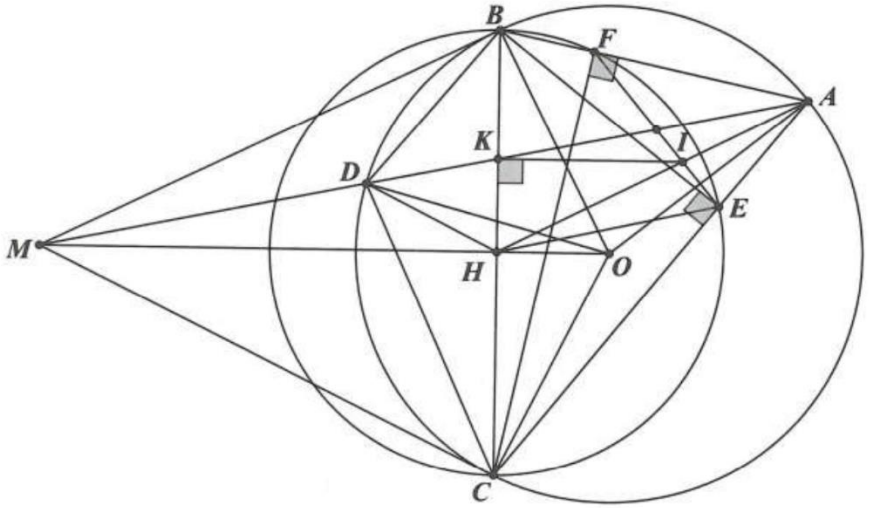
d. Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC tại F, E, EF cắt AH tại I. Chứng minh: $IK//MO$.

Giải:

a. Vì MB, MC là tiếp tuyến của (O) nên $MBO = MCO = 90^0$ suy ra 4 điểm M, B, O, C nằm trên đường tròn đường kính MO.

Ta có $MBD = MDA = \frac{1}{2}sđ\,BD$ suy ra $\Delta MBD \backsim \Delta MAB(g.g)$ suy ra

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MB} \Leftrightarrow MB^2 = MA.MD\,(1)$$



b. Ta có $MO \perp BC$ tại H. Trong tam giác vuông MBO ta có: $MH.MO = MB^2\ (2)$.

Từ (1), (2) suy ra $MH.MO = MD.MA$ suy ra $\Delta MDH \backsim \Delta MOA(c.g.c)$ dẫn tới $DHM = OAM$ suy ra $DHOA$ là tứ giác nội tiếp, mà $OAM = OAD = ODA = OHA$ suy ra

$$DHB = AHB = \frac{1}{2}DHA = \frac{1}{2}DOA = DCA.$$

c. Từ câu b kết hợp với $ABDC$ nội tiếp ta có: $CHA = 180^0 - BHA = 180^0 - DCA = DBA$ suy ra $\Delta DBA \backsim \Delta CHA\ (g.g)$ dẫn tới $\frac{CH}{HA} = \frac{BD}{BA}$ (3), mặt khác cũng từ $\Delta MBD \backsim \Delta MAB$ ta có: $\frac{BD}{BA} = \frac{MB}{MA}(4)$ tương tự ta cũng có: $\frac{CD}{CA} = \frac{MC}{MA}(5)$ mà $MC = MB\ (6)$. Từ (3), (4), (5), (6) ta suy ra $\frac{CH}{HA} = \frac{CD}{CA}$.

d. Từ $\Delta DBA \backsim \Delta CHA$ ta suy ra $HAC = BAD$, lại có $BFEC$ nội tiếp nên $AEI = ABC$ suy ra $\Delta AEI \backsim \Delta ABK$ suy ra $\frac{AI}{AK} = \frac{AE}{AB}$ (7).

Ta cũng có: $AEH = 180^0 - HEC = 180^0 - HCE = 180^0 - ADB = MDB = MBA$ nên $\Delta AEH \backsim \Delta ABM$ suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AM}$ (8). Từ (7), (8) ta suy ra $\frac{AI}{AK} = \frac{AH}{AM}$ hay $IK//HM$ hay $IK//MO$.

Bài 72. Cho tam giác *ABC* nội tiếp $(O;R)$ có trực tâm là điểm *H*, *D* là điểm trên cung nhỏ *BC*, dựng hình bình hành *ADCE* gọi *K* là trực tâm tam giác *ACE*. Gọi *P*, *Q* là hình chiếu vuông góc của *K* trên *BC*, *AB*. Giả sử *HA* cắt (O), *PQ* lần lượt tại *M*, *N*.

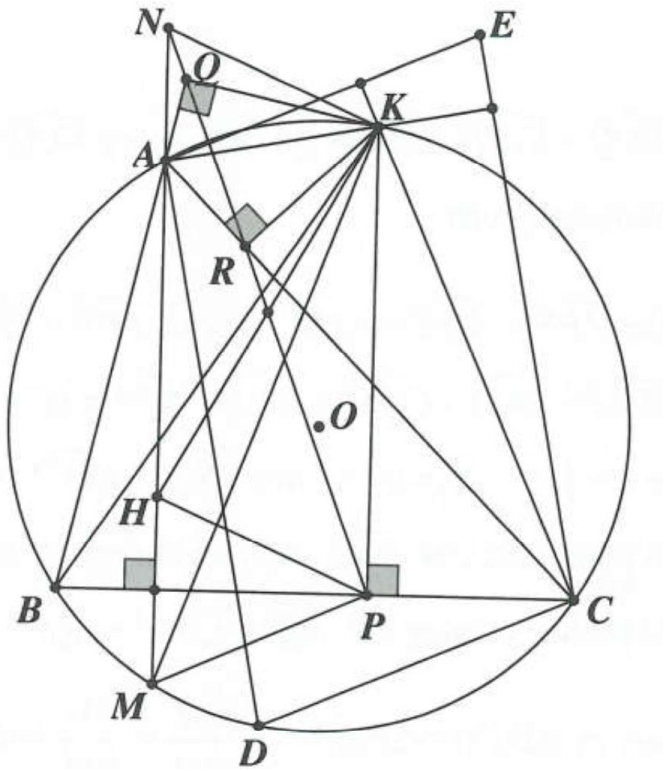
a. Chứng minh: Tứ giác *KPMN* nội tiếp.

b. Chứng minh: *PQ* đi qua trung điểm của *HK*.

c. Chứng minh: $PQ \le AC$.

Giải:

a. Ta có $AKC = 180^0 - AEC = 180^0 - ADC$. Suy ra $AKC + ADC = 180^0$ nên *AKCD* là tứ giác nội tiếp hay $K \in (O)$. Do $MN // KP$, tứ giác *KQBP* nội tiếp nên $QPK = QBK = AMK$ nên tứ giác *KPMN* nội tiếp.



b. Do tứ giác *KPMN* là hình thang nội tiếp trong một đường tròn nên *KPMN* là hình thang cân nên $KNM = PMN$, mặt khác ta cũng dễ chứng minh được *H*, *M* đối xứng nhau qua *BC* nên $PMN = PHM$ suy ra $KNM = PHM$ hay *KNHP* là hình hình bình hành.

c. Hạ $KR \perp AC$ thì 3 điểm *N*, *P*, *R* thẳng hàng. (Đường thẳng Simson của điểm *K* đối với tam giác *ABC*). Từ đó suy ra $\Delta PKQ \backsim \Delta CKA \Rightarrow \dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{KQ}{KA} \le 1$.

Bài 73. Cho tam giác nhọn *ABC* không cân $(AB < AC)$, nội tiếp (O), lấy điểm *P* trên cạnh *AB* sao cho $BOP = ABC$, điểm *Q* trên cạnh *AC* sao cho $COQ = ACB$.

a. Chứng minh: *O*, *A*, *P*, *Q* nằm trên một đường tròn.

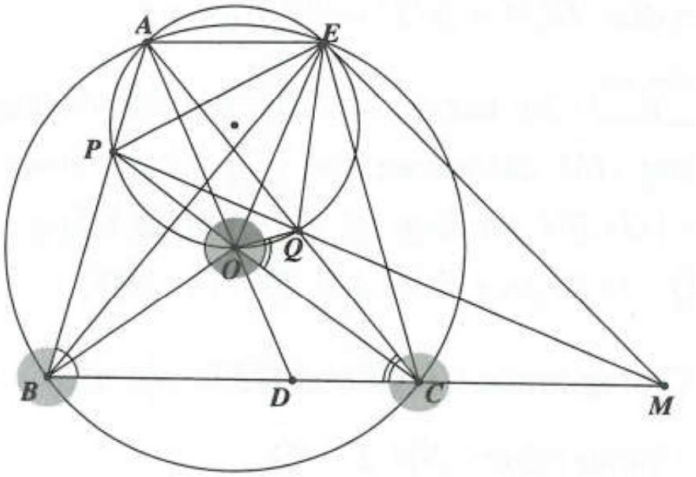
b. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác *APQ* cắt đường tròn (O) tại *E* (khác *A*). Chứng minh: $AE // BC$

c. Giả sử *BC* cắt *PQ* tại *M*. Chứng minh: *ME* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *APQ*.

Giải:

Ta có: $POQ = 360^0 - POB - BOC - COQ$

$= 360^0 - B - 2A - C = 180^0 - BAC$ suy ra $PAQ + POQ = 180^0$ hay $APOQ$ là tứ giác nội tiếp. Ta có $AEOQ$ nội tiếp nên $EOQ = EAQ = EBC = \frac{1}{2}EOC$ suy ra $EOQ = QOC = ACB$ hay $AE // BC$ suy ra tứ giác $ABCE$ là hình thang cân.



Do $APE = AOE - 2ABE$

suy ra $PBE = PEB = B - EBC = B - C$,

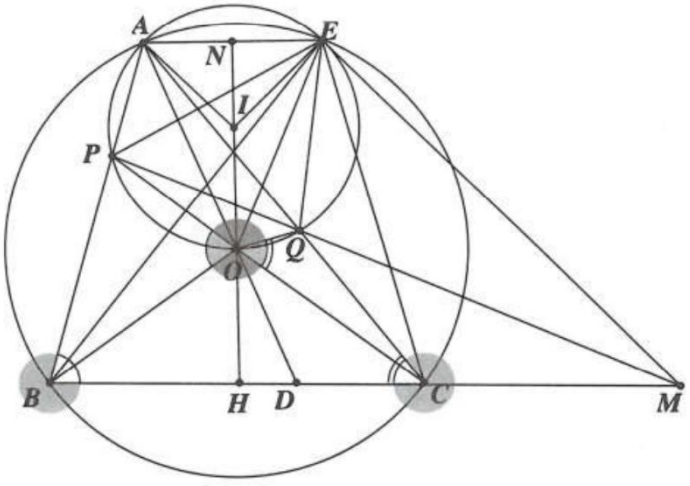
Lại có : $BMP = BCA - CQM = BCA - AQP = BCA - AOP = BCA - AOP = C - \left(AOB - BOP\right)$

$= C - \left(2C - B\right) = B - C$ nên $PEB = BMP$ hay $BPEM$ là tứ giác nội tiếp, mà $PB = PE$ nên PM là phân giác của EMB điều đó chứng tỏ ME nằm trên đường thẳng đối xứng với BC qua PQ. Mặt khác ta cũng có: $EQM = 180^0 - EQP = 180^0 - ABC = PEB$ suy ra

$\Delta EQM \backsim \Delta PEM \Rightarrow \frac{EM}{QM} = \frac{PM}{EM} \Leftrightarrow EM^2 = PM.QM$ hay ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

Ta cũng có thể làm theo cách khác:

Gọi I là tâm đường hòn ngoại tiếp tam giác APQ thì suy ra điểm I nằm trên trung trực của cạnh BC và AE. Giả sử OI cắt BC, AE lần lượt tại H, N. Để chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ ta chứng minh: $IE \perp ME$. Tức là chứng minh: Tứ giác $IHEM$ nội tiếp.



Thật vậy ta có: $NIE = \frac{1}{2}AIE = AQE$ ta chỉ cần chỉ ra tứ giác $EQCM$ nội tiếp, thật vậy ta có:

$EQC = EAB = ECM \Rightarrow EQCM$ nội tiếp,

suy ra $NIE=\frac{1}{2}AIE=AQE=EMH\Rightarrow EIHM$ nội tiếp dẫn đến $IEM=IHM=90^0$ (đpcm).

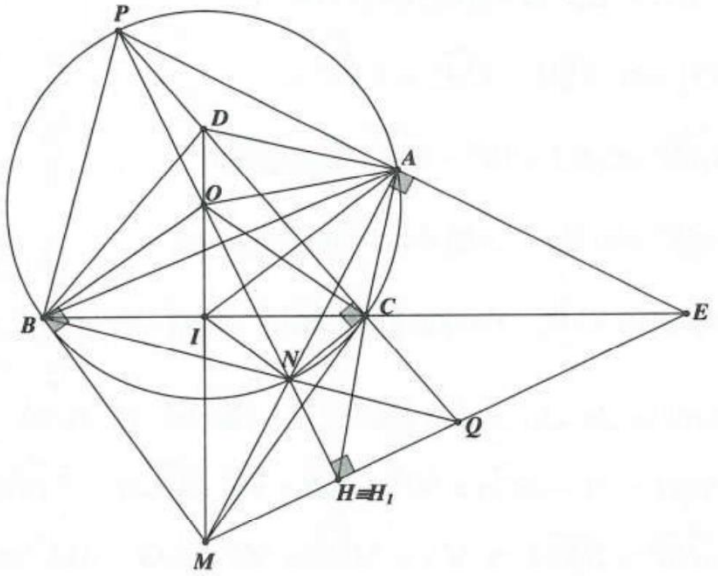
Bài 74. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại *B, C* cắt nhau ở *M*, đường thẳng *AM* cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ 2 là *N*. Đường thẳng qua *C* vuông góc với *NC* cắt (O), *BN* lần lượt tại *P, Q*, đường thẳng *AP* cắt *BC* tại *E*. Gọi *D* là giao điểm của *MO* và *PQ*, *H* là giao điểm của *PO* và *MQ*,

a. Chứng minh: Tứ giác *AMBD* nội tiếp.

b. Chứng minh: $NH\perp MQ$.

c. Chứng minh: *Q, M, E* thẳng hàng.

Giải:



a. Gọi *I* là giao điểm của *OM* với *BC*. Do *D* nằm trên trung trực của *BC* nên $BDM=CDM=90^0-BCP$. Ta cũng có: $BAM=BPN=90^0-BNP=90^0-BCP$ suy ra $BDM=BAM$ hay *AMBD* là tứ giác nội tiếp.

b. Ta có: $NCQ=90^0$.

Để chứng minh $NH\perp MQ$ (1) ta chứng minh: $NHQ=90^0$ tức là quy về chứng minh tứ giác *NHQC* nội tiếp.

Mặt khác ta có: $NQC=90^0-QNC=90^0-BPC=90^0-BOM=BMD$ suy ra tứ giác *BMQD* nội tiếp. Do $BDM=MDQ\Rightarrow MB=MQ=MC$ suy ra $MQC=MCQ=90^0-NCM=90^0-NPC=CNP$. Hay tứ giác *NHQC* nội tiếp (đpcm).

c. Giả sử *PN* cắt *ME* tại H_1, ta chứng minh: $H\equiv H_1$. Tức là chứng minh: $PH_1\perp ME$.

Do *MB, MNA* lần lượt là tiếp tuyến tại *B*, cát tuyến qua *M* của (O) và $MO\perp BC$ tại *I* nên ta có: $MN.MA=MB^2=MI.MO$ suy ra tứ giác *AOIN* nội tiếp, mặt khác ta cũng có: *MIAE* nội tiếp nên: $MNH_1=ONA=OIA=AEM$ suy ra AEH_1N nội tiếp hay $NH_1E=90^0\Leftrightarrow NH_1\perp ME$ (2). Từ (1), (2) suy ra $H\equiv H_1$ hay *M, Q, E* thẳng hàng.

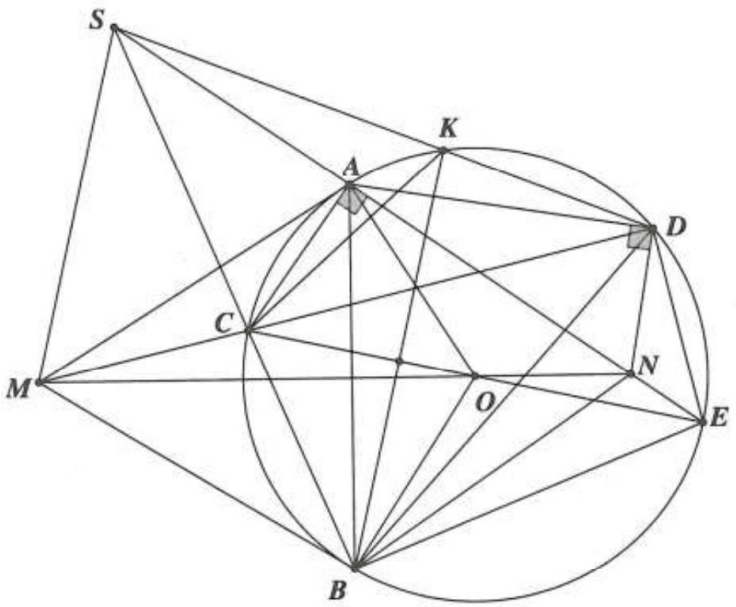
Bài 75. Cho đường tròn (O) và điểm M ngoài đường tròn, kẻ tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MCD $(MC < MD)$, gọi E là điểm đối xứng với C qua O. Đường thẳng EA cắt BC tại S, SD cắt (O) tại K, MO cắt AE tại N.

a. Chứng minh tam giác OAC và tam giác MAS đồng dạng.

b. Chứng minh tam giác BKC cân.

c. chứng minh $AD \perp DN$.

Giải:



a. Ta có CE là đường kính của (O) nên $CAE = CAS = 90^0$.

$SAM = CAO = 90° - MAC$. Tam giác AOC cân tại O nên để chứng minh: tam giác OAC và tam giác MAS đồng dạng ta cần chỉ ra tam giác AMS cân tại M. Ta có $NSB = 90^0 - SCA = 90^0 - AEB$ $= 90^0 - MOB = NMB$ suy ra $SMBN$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác

$ANM = BNM \Rightarrow MS = MB$

$\Rightarrow MS = MB = MA$ hay tam giác AMS cân tại M (đpcm).

b. Từ tam giác MSB cân tại $M \Rightarrow MSB = MBS = MBC = BDC = BDM \Rightarrow$ tứ giác $MSDB$ nội tiếp $\Rightarrow DBM = SDM$. Mặt khác $CBK = CDK = MDS = MBS = MBC \Rightarrow CB = CK \Rightarrow \Delta BCK$ cân.

c. Theo chứng minh trên tứ giác $SMBN$ nội tiếp, từ đó suy ra năm điểm M, S, D, N, B nằm trên một đường tròn $\Rightarrow SND = SBD = CED$

Ta có: $DAE = DCE$ (cùng chắn cung DE), $DNA = DNS = DBC = DEC$

$\Rightarrow DAE + DNA = DCE + DEC = 90^0 \Rightarrow AD \perp DN$.

Bài 76. Cho tam giác nhọn ABC có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AC cắt DF tại M. Gọi N là trung điểm của AC. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC cắt BM tại K.

a. Chứng minh: Tứ giác $FDEN$ nội tiếp.

b. Chứng minh: N, H, K thẳng hàng.

c. Chứng minh: $MH \perp BN$.

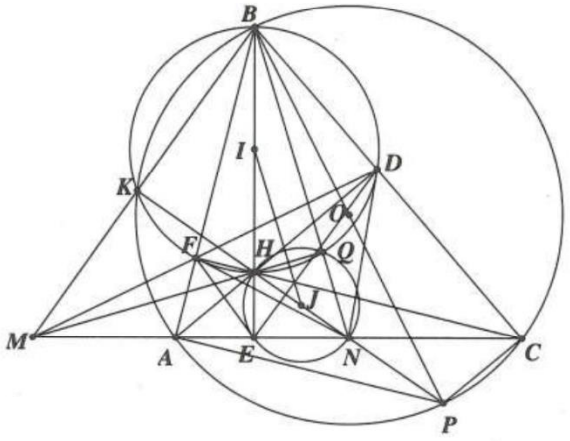
Giải:

a. Ta có tính chất quen thuộc:

BE là phân giác của DEF, các tứ giác *AFHE, CEHD, AFDC* nội tiếp. Suy ra

$DEF = 2DAF = DNF$ vậy *EFDN* là tứ giác nội tiếp.

b. Dựng đường kính *BP* của (O). Ta có các tính chất quen thuộc: *BHCP* là hình bình hành suy ra *H, N, P* thẳng hàng.



Mặt khác $BKH = BKP = 90^0$ suy ra *K, H, P* thẳng hàng. Từ đó suy ra *N, H, K* thẳng hàng.

Chú ý: 4 điểm *E, N, D, F* thuộc đường tròn Ơle của tam giác *ABC*.

Gọi *J* là trung điểm của *HN* thì *J* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *HEN*. Gọi *I* là trung điểm *BH* thì *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *BFDH*.

Ta có: $MF.MD = ME.MN$ nên điểm *M* nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (I) và (J) suy ra $MH \perp IJ$, mà *IJ* là đường trung bình của tam giác *BHN* suy ra $MH \perp BN$.

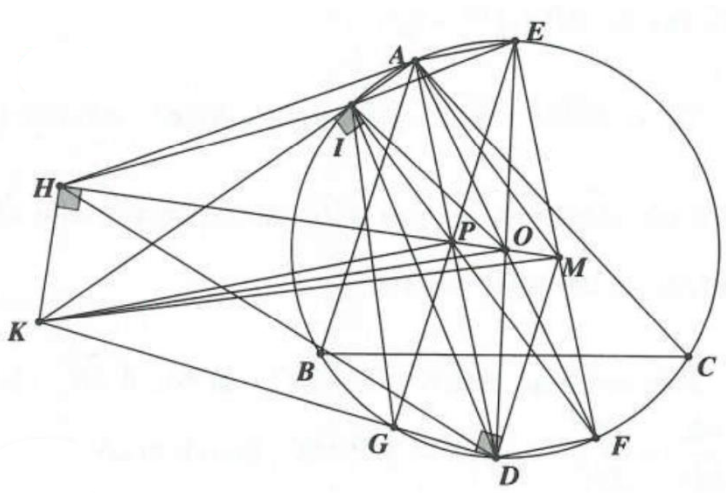
Chú ý: Bài toán này là một trường hợp đặc biệt của định lý Brocard.

Bài 77. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O) và một điểm *P* bất kỳ nằm trong tam giác $(P \neq O)$. Đường thẳng *AP* cắt (O) tại *D*, dựng các đường kính *DE, AF* của (O). Gọi *G, I* lần lượt là các giao điểm của *EP, FP* với đường tròn (O), *K* là giao điểm của *AI* và *DG*. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *K* trên *OP*, đường thẳng *OP* cắt *EF* tại *M*.

a. Chứng minh: *HO* là phân giác của góc *IHD*.

b. Chứng minh: $KD \perp DM$.

Giải:



a. Vì *DE, AF* là đường kính của (O) và $HK \perp OK$ nên

$KIP = KGP = KHP = 90^0$ suy ra 5 điểm *K, H, I, P, G* cùng nằm trên đường tròn đường kính *PK*.

Suy ra $IHP = IGP = IGE = IDE$ hay $IHO = IDO$.

Tức là tứ giác *IHOD* nội tiếp mà $OD = OI \Rightarrow IHO = DHO \Rightarrow HO$ là phân giác của góc IHD.

b. Để chứng minh: $KD \perp DM$ ta phải chứng minh tứ giác *HKDM* nội tiếp.

Theo câu a) ta có: $IHO = DHO,\ IHO = IHP = IKP = IGE = IDE = 90^0 - IED = 90^0 - KAD$ nên $DHO = 90^0 - KAD$, ta cũng có $KHD = 90^0 - DHO \Rightarrow KHD = 90^0 - (90^0 - KAD) = KAD$ suy ra tứ giác *KHDA* nội tiếp. Ta cũng có $OA = OF, AP // MF$ nên tứ giác *APFM* là hình bình hành suy ra $DAM = PFM = IGE = IHP = MHD$ nên 5 điểm *A, H, D, K, M* cùng nằm trên đường tròn đường kính *KM* suy ra $KD \perp DM$.

Bài 78. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn (O) các đường cao *BE, CF* cắt nhau tại *H*. Các đường thẳng *BE, CF* lần lượt cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *P, Q* $(P \neq B, Q \neq C)$. Tiếp tuyến của (O) tại *B, C* cắt *EF* lần lượt tại *M, N*.

a. Chứng minh: Tứ giác *AEHF* nội tiếp và $AH = AP = AQ$.

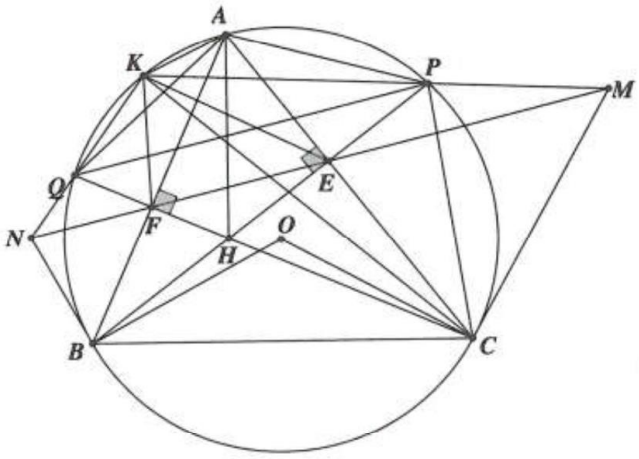
b. Chứng minh tam giác *MEC* cân tại *M*.

c. Giả sử *MP* cắt đường tròn (O) tại *K*. Chứng minh: $ME^2 = MK.MP$.

d. Chứng minh: *N, Q, K* thẳng hàng.

Giải:

a. Vì *BE, CF* là các đường cao của tam giác *ABC* nên *H* là trực tâm của tam giác suy ra $HEA = HFA = 90^0 \Rightarrow AEHF$ nội tiếp.



Ta có: $BAH = BCH$ (cùng phụ với ABC) mà $BCH = BCQ = BAQ$ suy ra $QAB = HAB$, tam giác *QAH* có *AF* là đường cao đồng thời cũng là trung tuyến nên tam giác *QAH* cân tại *A*. Chứng minh tương tự ta có *PAH* cân tại *A* từ đó suy ra $AP = AH = AQ$.

b. Ta có $MEC = AEF$ mà tứ giác *BFEC* nội tiếp (hs tự chứng minh) suy ra $AEF = ABC$

Lại có $ABC = ACM$ (do *CM* là tiếp tuyến của (O) tại *C*). Từ đó suy ra $MEC = MCE$ hay *MEC* là tam giác cân tại *M*.

c. Xét tam giác *MCK* và *MPC* ta có: KMC chung, $MCP = MKC \Rightarrow \Delta MCK \backsim \Delta MPC$ suy ra $\frac{MC}{MK} = \frac{MP}{MC} \Leftrightarrow MC^2 = MP.MK$, theo b ta có $MC = ME$ suy ra $ME^2 = MK.MP$.

d. Từ chứng minh ở câu c) suy ra $\Delta MPE \backsim \Delta MEK$ ta có: $EPK = 180^0 - EPM = 180^0 - MEK = FEK$, mà $EPK = BPK = BAK = FAK \Rightarrow FEK = FAK$ hay *AEFK* là tứ giác nội tiếp. Tức là *K* là giao điểm của (AEF) với (O). Tương tự nếu giả sử *NQ* cắt (O) tại *R* thì *R* cũng là giao điểm của (AEF) với (O) điều đó chứng tỏ $K \equiv R$ hay *N, Q, K* thẳng hàng.

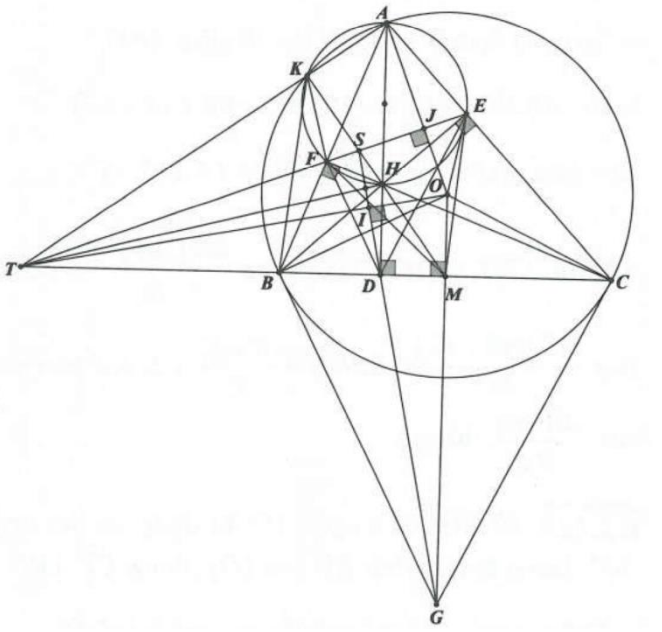
Bài 79. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp (O). Các đường cao *AD, BE, CF* cắt nhau tại *H*. Tiếp tuyến tại *B, C* của (O) cắt nhau tại $G. GD \cap EF = S$. Gọi *M* là trung điểm cạnh *BC*. Giả sử $EF \cap BC = T, AT \cap (O) = K$

a. Chứng minh 5 điểm *A, K, F, E, H* cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh *M, S, H* thẳng hàng.

Giải:

a. Học sinh tự làm.



Tứ giác $EFDM$ nội tiếp và AD là phân giác của EDF nên $MDE = FDB = TEM$ suy ra $\Delta EMD \backsim \Delta TME \Rightarrow ME^2 = MD.MT$.

Thay $ME^2 = MB^2 = MO.MG$ suy ra $MO.MG = MD.MT \Rightarrow \Delta EMD \backsim \Delta TME$,

$\Delta OMT \backsim \Delta DMT \Rightarrow SD \perp TO$ tại I.

Gọi J là giao điểm của AO và EF thì $OA \perp EF$ tại J.

Ta có:

$TS.TJ = TI.TO = TD.TM = TE.TF \Rightarrow AKSJ$ là tứ giác nội tiếp nên $SKA = 90^0 \Rightarrow SK \perp TA$.

Ta cũng có: 5 điểm A, K, E, F, H nằm trên một đường tròn nên $HK \perp TA$ nên $\overline{K,S,H}$ (1). Lại có: $TK.TA = TD.TM \Rightarrow AKDM$ nội tiếp, suy ra $ADM = AKM = 90^0 \Leftrightarrow MK \perp KA$ suy ra $\overline{M,H,K}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra M, S, K thẳng hàng.

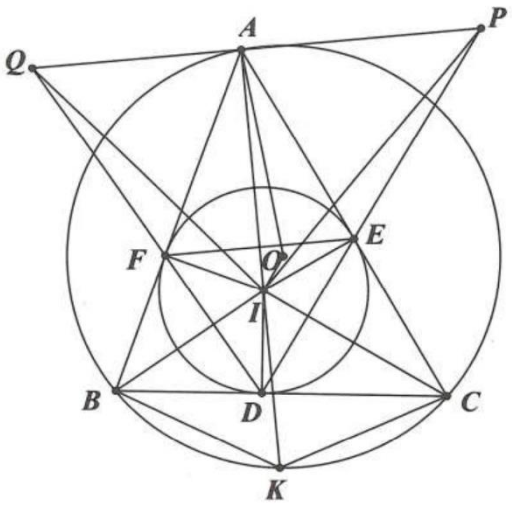
Bài 80. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) và ngoại tiếp đường tròn (I), đường thẳng AI kéo dài cắt (O) tại K. Gọi D, E, F là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua A song song với EF cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại P, Q.

a. Chứng minh: $AE^2 = AP.AQ$ và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b. Giả sử $AIO \le 90^0$. Tìm GTNN của biểu thức: $\dfrac{AB + AC}{BC}$.

Giải:

a. Do E, F là các tiếp điểm của (I) với AC, AB nên



$EFD = CED, FED = BFD, EF // PQ$ suy ra $EFD = AQF, FED = APE$. Mặt khác $PEA = CED, AQF = BFD$ suy ra $\Delta FQA \backsim \Delta PEA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{QA}{EA} = \dfrac{AF}{AP} \Leftrightarrow AP.AQ = AE.FA = AE^2$.

Ta có biến đổi góc sau:

$$BIK = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = KAC + IBC = KBC + IBC = IBK$$

Suy ra tam giác BKI cân tại K nên $KB = KI = KC$

Hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác: $ABKC$ ta có: $AK.BC = AB.CK + AC.BK = BK(AB + AC)$

Tam giác AOD cân $AOI \le 90^0 \Leftrightarrow IA \ge IK \Rightarrow IA + IK \ge 2IK \Leftrightarrow AK \ge 2IK$ suy ra $\dfrac{BK(AB + AC)}{BC} \ge 2IK$

Hay $\dfrac{BK(AB + AC)}{BC} \ge 2BK \Leftrightarrow \dfrac{AB + AC}{BC} \ge 2$. Khi tam giác ABC đều thì $\dfrac{AB + AC}{BC} = 2$ vậy GTNN của $\dfrac{AB + AC}{BC}$ bằng 2.

Bài 81. Từ điểm A ở ngoài $(O;R)$ dựng các tiếp tuyến AB, AC của (O), gọi H là trung điểm BC. Dựng đường kính BD của (O), dựng $CK \perp BD$. Tia AO cắt (O) lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh: $ABOC$ nội tiếp và $AB^2 = AM.AN$.

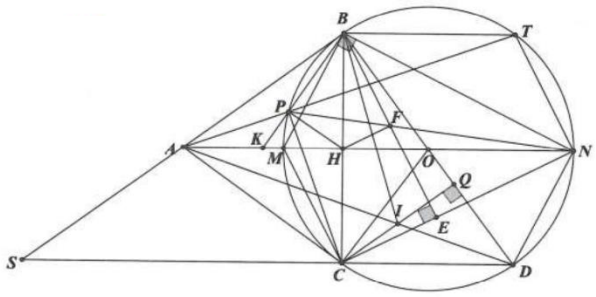
b. Chứng minh: $MH.AN = AM.HN$.

c. AD cắt CK tại I. Chứng minh I là trung điểm của CK.

d. Dựng $BE \perp CN$, gọi F là trung điểm BE, NF cắt (O) tại P. AP cắt (O) tại T. Chứng minh: $BT // MN$ và BP đi qua trung điểm K của AH.

Giải:

a. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $ABO = ACO = 90^0$ suy ra 4 điểm A, B, O, C nằm trên đường tròn đường kính AO.



Ta có: $ABM = BNA = \frac{1}{2} sđ BM$ suy ra $\Delta AMB \backsim \Delta ABN \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AN}$

$\Leftrightarrow AB^2 = AM.AN$.

b. Vì $ABM = MCB = MBC$ nên MB là phân giác của góc ABC. Mặt khác $MB \perp NB$ nên NB là phân giác ngoài của góc ABC. Áp dụng tính chất phân giác ta có: $\frac{BA}{BH} = \frac{MA}{MH} = \frac{NA}{NH}$ hay $MA.NH = NA.MH$.

c. Kéo dài AB cắt CD tại S thì AO là đường trung bình của tam giác BSD suy ra A là trung điểm của BS. Do $CQ//BS$ nên theo định lý Thales ta có: $\frac{IQ}{AB} = \frac{ID}{DA} = \frac{IC}{SA}$ mà $AB = SA \Rightarrow IQ = IC$.

d. Vì F là trung điểm của BE nên $HF \perp BE, BF//CE$. Ta có $BHF = BCE = BPF$ nên $BPHF$ là tứ giác nội tiếp suy ra $BPH = 90^0$. Ta có $AHP = PBC = PCA$ nên $APHC$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $PAH = PCB = PTB \Rightarrow BT//MN$.

BP cắt AH tại K thì $KH^2 = KP.KB$. Lại có $PAH = PCB = PBA \Rightarrow \Delta AKP \backsim \Delta BKA$

$\Rightarrow \frac{AK}{KP} = \frac{BK}{KA} \Leftrightarrow KA^2 = KP.BK$, từ đó suy ra $KH = KA$ (đpcm).

Bài 82. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn $AB < AC$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a. Chứng minh tứ giác $DHEC$ nội tiếp và xác định tâm O của đường tròn nội tiếp tứ giác đó.

b. Trên cung nhỏ EC của (O) lấy điểm I sao cho $IC > IE$, DI cắt CE tại N. Chứng minh: $NI.ND = NE.NC$.

c. Gọi M là giao điểm của EF với IC. Chứng minh: $MN \perp CH$.

d. Đường thẳng HM cắt (O) tại K, KN cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là G, MN cắt BC tại T. Chứng minh: H, T, G thẳng hàng.

Giải:

a. Học sinh tự chứng minh.

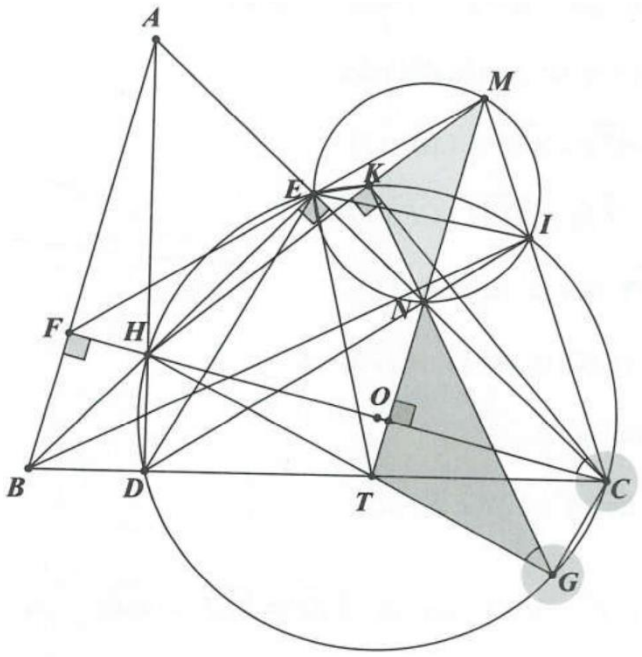
b. Học sinh tự chứng minh.

c. Để chứng minh: $MN \perp CH$ ta quy về chứng minh: $MN // AB$ tức là chứng minh: $AFE = EMN$.

Ta có: Tứ giác *BFEC*, *DEIC* nội tiếp nên $AFE = ACB = DIE$. Ta cần chứng minh: $DIE = EMN$. Tức là quy về chứng minh: *MENI* là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có:

$MEC = AEF = ABC = DEC = DIC$ suy ra tứ giác *MENI* nội tiếp (đpcm).



d. Để chứng minh: *H, T, G* thẳng hàng ta sẽ chứng minh: $HGN = TGN$, ta có biến đổi góc liên quan như sau: $HGN = HCK = KMN$ như vậy để chứng minh: $HGN = TGN$ ta cần chỉ ra $KMN = TGN \Leftrightarrow \Delta TGN \backsim \Delta KMN$. Thật vậy.

+ Xét tam giác *ENM*, *TNC* ta có: $EMN = EIN = NCT, ENM = TNC$ suy ra $\Delta ENM \backsim \Delta TNC$ (g.g) suy ra $\frac{EN}{NT} = \frac{NM}{NC}(1)$

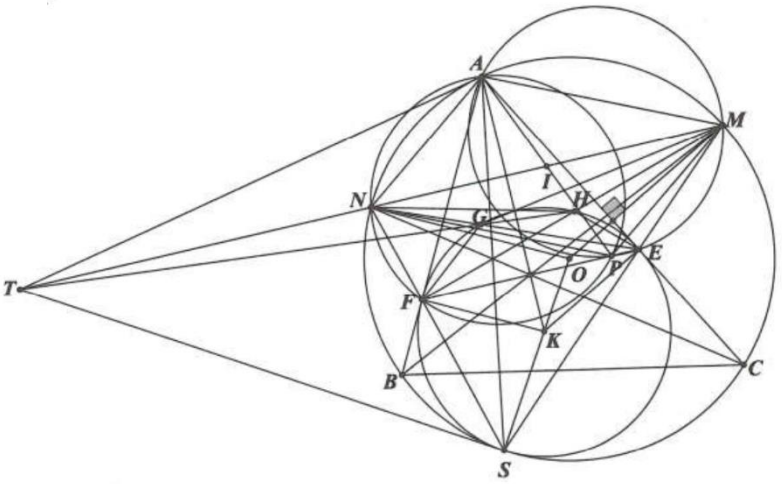
+ Xét tam giác *ENK*, *GNC* ta có: $KEN = CGN, ENK = GNC \Rightarrow \Delta ENK \backsim \Delta GNC$ (g.g) suy ra $\frac{EN}{GN} = \frac{NK}{NC}(2)$. Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{NK}{NT} = \frac{NM}{NG}$ suy ra $\Delta TGN \backsim \Delta KMN$ (c.g.c) đpcm.

Bài 83. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn *K* tiếp xúc với *CA*, *AB* lần lượt tại *E*, *F* và tiếp xúc trong với (O) tại *S*. *SE*, *SF* lần lượt cắt (O) tại *M*, *N* khác *S*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEM*, *AFN* cắt nhau tại *P* khác *A*.

a. Chứng minh tứ giác *AMPN* là hình bình hành.

b. Gọi *EN*, *FM* lần lượt cắt (K) tại *G*, *H* khác *E*, *F*. Gọi *GH* cắt *MN* tại *T*. Chứng minh tam giác *AST* cân.

Giải:



a. Các tứ giác *ANFP, AMEP, AMSN* nội tiếp nên ta có biến đổi góc:

$ANP = AFP = AEP = AMP$ (1)

Ta có:

$APM = AEM = CES = EFS = EAN$ suy ra $NA//PM$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra *ANPM* là hình bình hành.

b. Các tam giác *SKE, SOM* cân tại *K* và *O* suy ra $KES = KSE = OMS$ suy ra $KE//OM$.

Chứng minh tương tự ta có: $KF//ON$. Theo định lý Thales ta có: $\frac{SF}{SN} = \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SM} \Rightarrow EF//MN$.

Từ đó ta có: $MNE = NEF = GHF \Rightarrow MNGH$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $TM.TN = TG.TH$, giả sử *TS* cắt (O) tại S_1, cắt (K) tại S_2 thì $TM.TN = TG.TH = TS.TS_1 = TS.TS_2$ suy ra $TS_1 = TS_2 \Rightarrow S_1 \equiv S_2 \equiv S$ (do 2 đường tròn (O) và (K) tiếp xúc nhau tại *S*). Suy ra $TM = TN = TS^2$ hay *TS* chính là tiếp tuyến chung của (O) và (K).

Ta sẽ chứng minh: *TA* cũng là tiếp tuyến của (O). Các đường thẳng *AP* và *MN* cắt nhau tại *I* là trung điểm của mỗi đường.

Ta có *TS* là tiếp tuyến của (O) nên $\Delta TNS \backsim \Delta TSM$ hay $\frac{TM}{TN} = \frac{S_{TSM}}{S_{TNS}} = \left(\frac{SM}{SN}\right)^2 (*)$

Mặt khác ta cũng có: $AMI = AMN = ASN$, do *PEMA* nội tiếp ta có:

$NAS = MAI = MAP = PES = FES = NST = NAS$ suy ra $\Delta AIM \backsim \Delta ANS \Rightarrow AM.SN = AI.AS$.

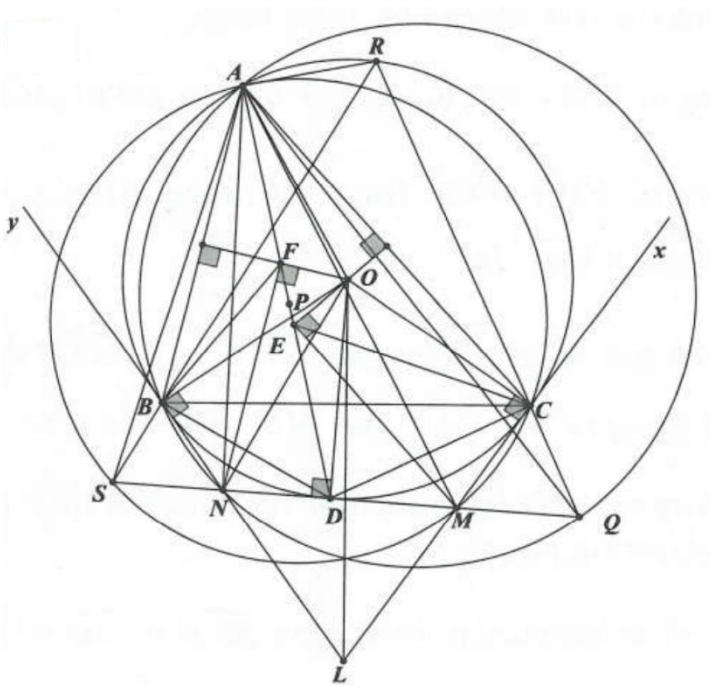
Tương tự ta cũng có $\Delta AIN \backsim \Delta AMS \Rightarrow AN.SM = AI.AS$ từ đó suy ra $AM.SN = AN.SM$ suy ra $\left(\frac{SM}{SN}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$ thay vào (*) ta suy ra $\frac{TM}{TN} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$ hay *TA* là tiếp tuyến của (O), vậy $TA = TS$.

Bài 84. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O). *P* là một điểm nằm trong tam giác *ABC*. Trung trực của *CA, AB cắt PA tại E, F*. Đường thẳng qua *E* song song với *AC* cắt tiếp tuyến tại *C* của (O) tại *M*. Đường thẳng qua *F* song song với *AB* cắt tiếp tuyến tại *B* của (O) tại *N*.

a. Chứng minh *MN* là tiếp tuyến của (O)

b. Giả sử *MN* cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ACM, ABN* lần lượt tại *S, Q* khác *MN*. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta ASQ$ và *SB* cắt *CQ* tại một điểm nằm trên (O).

Giải:



a. Giả sử *AP* cắt (O) tại *D* , ta chứng minh *DM, DN* là các tiếp tuyến của (O). Thật vậy do $FN//AB, EN//AC$ nên $OFN = 90^0, OEM = 90^0$. Kết hợp các điều kiện *OF* là trung trực của *AB*, tam giác *OAD* cân và tứ giác *OFBN* nội tiếp ta có biến đổi góc sau:

$ODF = OAF = OBF = ONF$ suy ra tứ giác *FNDO* nội tiếp, suy ra $OND = 90^0 \Rightarrow DN$ là tiếp tuyến của (O). Chứng minh tương tự ta có: *DM* cũng là tiếp tuyến của (O).

b. Giả sử *SB, CQ* cắt nhau tại *R*, ta chứng minh: *ABCR* nội tiếp.

Tức là chứng minh: $RCA = RBA$, muốn có điều này ta cần chứng minh: $\Delta ABS \backsim \Delta ACQ$. Thật vậy:

Ta có: $ASQ = ASM = 180^0 - ACM = ACx = ABC,\ AQS = AQN = 180^0 - ABN = ABy = ACB$ suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta ASQ$ (g.g). Từ đó suy ra đpcm.

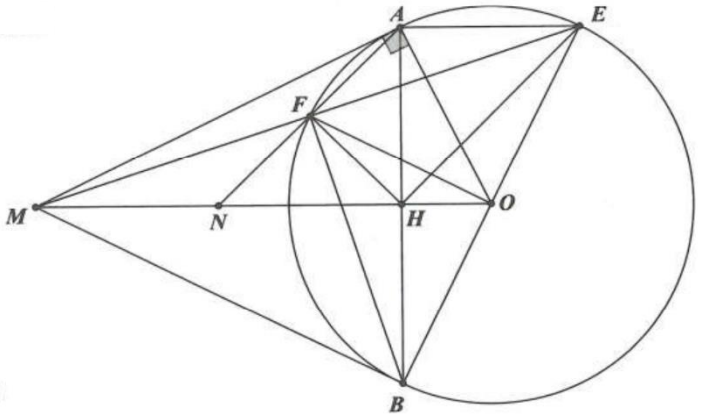
Bài 85. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ một điểm *M* nằm ngoài đường tròn, kẻ 2 tiếp tuyến *MA, MB* đến (O) (*A,B* là các tiếp điểm). Qua *A*, kẻ đường thẳng song song với *MO* cắt đường tròn tại *E* đường thẳng *ME* cắt đường tròn tại *F*, đường thẳng *AF* cắt *MO* tại *N*, *H* là giao điểm của *MO* và *AB*.

1. Chứng minh: Tứ giác *MAOB* nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$.
3. Chứng minh: $HFN = 90^0$ và $MN = NH$
4. Chứng minh: $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1.$

Hướng dẫn giải:

1. Học sinh tự làm.

2. Do $MO \perp AB, AE // MO$ suy ra $EAB = 90^0$ suy ra BE là đường kính của (O) hay B, O, E thẳng hàng.



Suy ra $BFE = 90^0$, tứ giác $MFHB$ có $MFB = MHB = 90^0$ nên $MFHB$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $FMH = FBH$ (cùng chắn cung FH).

Lại có: $FBA = FAM = \frac{1}{2} sđ FA$ từ đó suy ra $NAM = NMF$ (1).

Tam giác MNF và tam giác ANM ta có: MNF chung (2). Từ (1), (2) ta suy ra $\Delta MNF \backsim \Delta ANM$ (g.g) suy ra $\frac{MN}{NF} = \frac{NA}{MN}$ hay $MN^2 = NF.NA(*)$

Cũng có thể chứng minh ngắn hơn: $NMF = AEF$ (so le trong), $AEF = MAF = \frac{1}{2} sđ AF$ suy ra $\Delta MNF \backsim \Delta ANM$ $(g.g)$.

3. Từ chứng minh ở câu b) ta có: $NFM = NMA = HMB = HFB$ suy ra $HFB + BFM = HFB + NFM = 90^0$ hay $HF \perp AN$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHN ta có: $NF.NA = NH^2 (**)$. Từ (*), (**) ta suy ra $MN^2 = NH^2 \Leftrightarrow MN = NH$.

4. Ta viết lại đẳng thức cần chứng minh thành: $\frac{HB^2}{HF^2} = \frac{EF}{MF} + 1 \Leftrightarrow \frac{HB^2}{HF^2} = \frac{ME}{MF}$. Ta dễ chứng minh được đẳng thức quen thuộc: $ME.MF = MA^2 \Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{MA^2}{MF^2}$. Ta cần chứng minh: $\frac{MA^2}{MF^2} = \frac{HB^2}{HF^2} \Leftrightarrow \frac{MA}{MF} = \frac{HB}{HF}$ thay $MA = MB, HB = HA$. Ta cần chứng minh: $\frac{MB}{MF} = \frac{HA}{HF}$ hay chứng minh: $\Delta BFM \backsim \Delta AFH$ nhưng điều này luôn đúng do $BFM = AFH = 90^0$ và $MBF = HAF = \frac{1}{2} sđ FB$.

Cách khác: $\frac{HB^2}{HF^2} = \frac{EF}{MF} + 1 \Leftrightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$. Ta có $HF^2 = FA.FN$ và $\frac{EF}{MF} = \frac{FA}{FN}$ (Định lý Thales) nên vế trái bằng: $\frac{HB^2}{FA.FN} - \frac{FA}{FN} = \frac{HB^2 - AF^2}{FA.FN} = \frac{HA^2 - AF^2}{FA.FN} = \frac{HF^2}{HF^2} = 1.$

Bài 86. Từ một điểm *A* nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ các tiếp tuyến *AB, AC* đến (O) (*B, C* là các tiếp điểm). Điểm *D* thuộc cung nhỏ *BC, CD* cắt *OA* tại *E*, đường thẳng qua *E* song song với *BC* cắt *AB* tại *M*.

a. Chứng minh: *EMBD* là tứ giác nội tiếp.

b. *MD* là tiếp tuyến của (O).

Hướng dẫn giải:

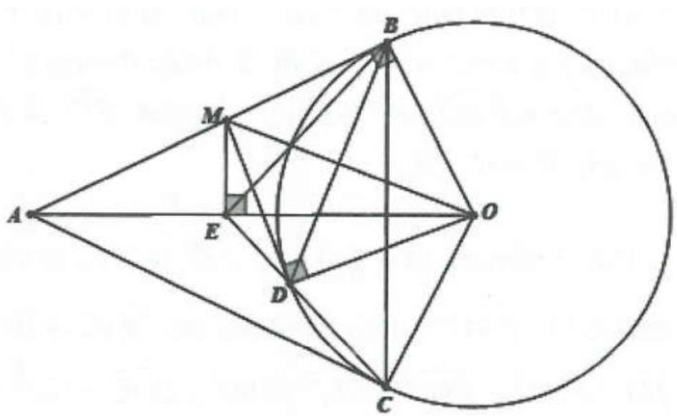
a. Do $ME//BC$ nên ta có:

$AME = ABC = \frac{1}{2}BOC$, lại có:

$BDE = DBC + DCB = -\frac{1}{2}sđCD + \frac{1}{2}sđBD$

$= \frac{1}{2}sđBC = \frac{1}{2}BOC$ suy ra $AME = BDE$

hay *EMBD* là tứ giác nội tiếp.



b. Ta có *MBOE* là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính *MO* (hs tự chứng minh)

Từ đó suy ra 5 điểm *M, B, O, D, E* cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra $MDO = 90^0$ hay *MD* là tiếp tuyến của (O).

Bài 87. Cho tam giác nhọn *ABC*, $AB < AC$, đường tròn (O) đường kính *BC* cắt *AB, AC* lần lượt tại *F, E*. Gọi *K* là giao điểm của *EF, BC, M* là giao điểm của *FD* và đường tròn (O). *H* là giao điểm của *BE, CF, AH* cắt *BC* tại *D*.

a. Chứng minh: $AE.AC = AF.AB$.

b. Tứ giác *KFOM* là tứ giác nội tiếp và $KF.DM = KM.DF$.

c. Gọi *S* là giao điểm của *AK* và đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác *AEF*. Chứng minh $AS.AK = AF.AB$

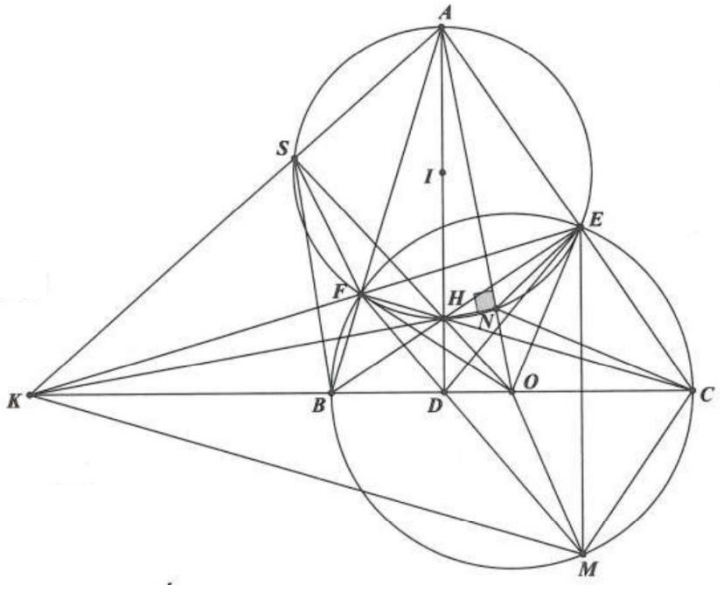
d. Chứng minh: *S, H, O* thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:

a. Tứ giác $BFEC$ nội tiếp (O) suy ra

$AEF = ABC \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC(g.g)$

Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow AE.AC = AF.AB$.



b. Ta có $KFM = KFB + BFM$

$= KCE + BFM = BFM + BFM$

$= 2BFM = BOM$

Hay $KFM = KOM$ suy ra $KFOM$ là tứ giác nội tiếp, mặt khác $OF = OM$ suy ra $FKO = MKO$ hay KO là phân giác của FKM.

Theo tính chất phân giác ta có: $\frac{KF}{KM} = \frac{DF}{DM}$ đpcm.

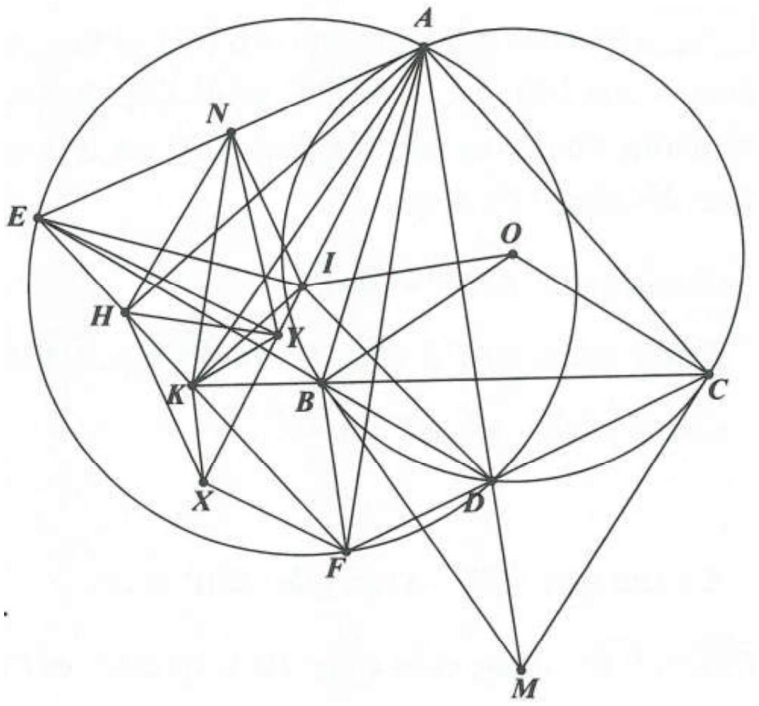
c. Vì H là trực tâm của ΔABC nên $AEH = AFH = 90^0$ suy ra 4 điểm A, E, H, F nằm trên đường tròn đường kính AH. Suy ra S thuộc đường tròn tâm I đường kính AH, tứ giác $ASFE$ nội tiếp nên $ASF = FEC$, $BFEC$ nội tiếp nên $FEC = FBK$ suy ra $KSFB$ nội tiếp $\Rightarrow \Delta ASF \backsim \Delta ABK \Rightarrow AS.AK = AF.AB.$

d. Giả sử đường tròn (I) cắt AO tại N, ta có: $ANE = AFE = ACO$ suy ra $ENOC$ nội tiếp, tương tự $FNOC$ nội tiếp. Ta có

$HNC = 360^0 - HNE - ENC = 180^0 - HNE + 180^0 - EOC = HAC + 180^0 - EOC$

$= EBC + 180^0 - EOC = 180^0 + EBC - 2EBC = 180^0 - EBC$ suy ra $BHNC$ nội tiếp. Giả sử KH cắt (I) tại N' suy ra $EFHN'$ nội tiếp. Suy ra $KH.KN' = KE.KF = KB.KC \Rightarrow BHN'C$ nội tiếp, suy ra $N \equiv N'$. Suy ra $KNO = 90^0$ hay H là trực tâm của tam giác AKO suy ra $OH \perp AK$, mà $SH \perp AK$ suy ra S, H, O thẳng hàng.

Bài 88. Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp (O), các tiếp tuyến tại *B*, *C* của (O) cắt nhau tại điểm *M* đường thẳng *AM* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *D* (khác *A*). Trên đường thẳng qua *O* vuông góc với *AD* ta lấy điểm *I* (*O*, *I* nằm khác phía so với *AD*) dựng đường tròn $(I;ID)$ cắt các đường thẳng *BD*, *DC* lần lượt tại *E*, *F* $(E\neq D, F\neq C)$.



a. Chứng minh: $\frac{MA}{MD}=\left(\frac{BA}{BD}\right)^2$.

b. Gọi *K* là giao điểm của *BC* với *EF*.

Chứng minh: 4 điểm *A*, *C*, *K*, *F* cùng nằm trên một đường tròn.

c. Chứng minh: $\Delta ACD\backsim\Delta AKE$ suy ra *K* là trung điểm của *EF*.

d. Dựng *EX*, *FY* lần lượt vuông góc với *AI*. Chứng minh: $KX=KY$.

Giải:

a. Ta dễ chứng minh được: $\Delta MDB\backsim\Delta MBA(g.g)$ suy ra $\frac{S_{\Delta MDB}}{S_{\Delta MBA}}=\left(\frac{DB}{BA}\right)^2$ mặt khác $\frac{S_{\Delta MDB}}{S_{\Delta MBA}}=\frac{MD}{MA}$ từ đó suy ra $\left(\frac{DB}{BA}\right)^2=\frac{MD}{MA}$.

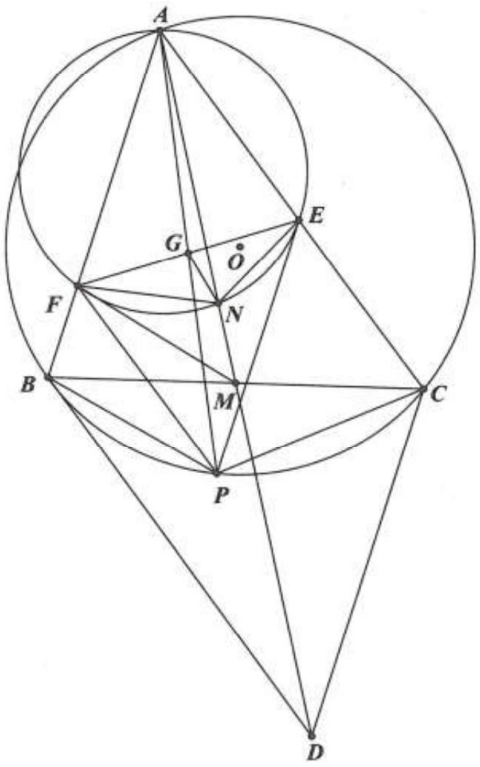
b. Xét tứ giác *ACKF* ta có: $ACK=ACB=ADB=ADE=AFE=AFK$ suy ra *ACFK* là tứ giác nội tiếp.

c. Ta có $ACD=ACF=AKE, ADC=AEK\Rightarrow\Delta ACD\backsim\Delta AKE$ suy ra $\frac{KE}{KA}=\frac{CD}{CA}(*)$, hoàn toàn tương tự ta cũng có: $\Delta ABD\backsim\Delta AKF$ suy ra $\frac{KF}{KA}=\frac{BD}{BA}$ (**). Mặt khác ta cũng dễ dàng chứng minh $\Delta MDB\backsim\Delta MBA\Rightarrow\frac{BD}{BA}=\frac{MB}{MA}$ và $\Delta MDC\backsim\Delta MCA\Rightarrow\frac{CD}{CA}=\frac{MC}{MA}$ mà $MC=MB$ suy ra $\frac{CD}{CA}=\frac{BD}{BA}$ kết hợp với (*), (**) suy ra $\frac{KE}{KA}=\frac{KF}{KA}$ hay *K* là trung điểm của *EF*.

d. Dựng đường cao *AH* của tam giác *AEF*, gọi *N* là trung điểm của *AE*, ta có 5 điểm *E*, *N*, *I*, *Y*, *K* nằm trên đường tròn đường kính *EI*, 4 điểm *A*, *E*, *H*, *I* nằm trên đường tròn đường kính *AE*. Từ đó

ta có biến đổi góc: $YNK = YEK = YEH = YAH = \frac{1}{2}YNH$ suy ra NK là phân giác của góc HNY mà tam giác HNY cân tại N nên NK là trung trực của HI. Chứng minh tương tự ta cũng có K thuộc trung trực của HX suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HXY nên $KX = KY$.

Bài 89. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và trung tuyến AM, điểm P nằm trên cung BC không chứa A của (O), hai điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $PE//AB, PF//AC$. Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại N khác A. Gọi G là giao điểm AP và EF, D là điểm đối xứng với A qua M.



a. Chứng minh: $\Delta PBC \backsim \Delta EAP$.

b. Chứng minh: $\Delta NFE \backsim \Delta CAD$ và $NGE = AMB$.

c. Chứng minh: $AP^2 = 2AM.AN$.

Giải:

a. Xét tam giác PBC và tam giác EAP ta có: $PBC = PAE$ (cùng chắn cung PC). Tứ giác $AEPF$ là hình bình hành nên $EPA = PAF$ lại có $PAF = PCB$ từ đó suy ra $EPA = PCB$ suy ra $\Delta PBC \backsim \Delta EAP\ (g.g)$.

b. Ta có: $NFE = NAE = DAC, NEF = NAF = ADC$ suy ra

$\Delta NFE \sim \Delta CAD\ (g.g)$ và NG, CM là các trung tuyến tương ứng nên $NGE = CMD = AMB$.

c. Từ b ta suy ra $AGN = AGE + NGE = PMB + BMA = PMA$. Suy ra $NGMP$ là tứ giác nội tiếp. Nên $2AN.AM = 2AG.AP = AP^2$.

Bài 90. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), P là một điểm bất kỳ trong tam giác và $Q \in$ cung nhỏ BC của (O), AP cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là D, M là trung điểm của AQ, QP cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là K. Dựng đường tròn (w) qua 2 điểm P, K tiếp xúc với AP. Các đường thẳng AK, MP lần lượt cắt (w) tại E, F. Gọi R là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD với MP.

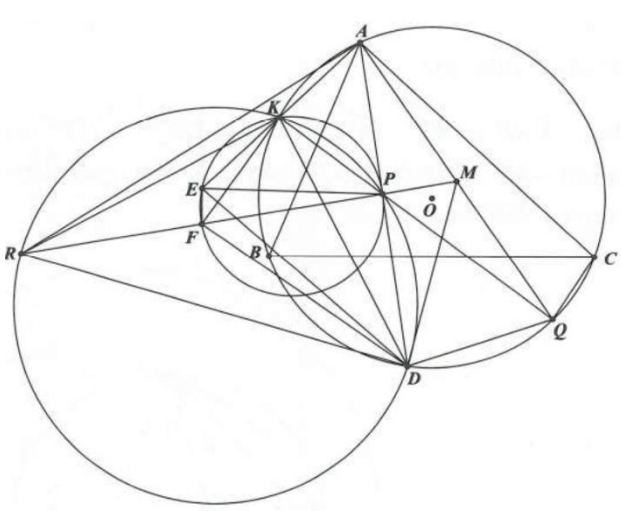
a. Chứng minh: $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $\Delta KFP \backsim \Delta KRD$ suy ra F là trung điểm của PR.

c. Chứng minh: 4 điểm A, D, E, F nằm trên một đường tròn.

Giải:

a. Từ các tứ giác *KPDR*, *AKDQ* nội tiếp ta suy ra $DRP = DKP = DAQ$ hay *AMDR* là tứ giác nội tiếp.



b. Ta có: *PA* là tiếp tuyến của đường tròn (w) và *KPDR* nội tiếp nên $KFP = KPA = KRD$, lại có $KPR = KDR \Leftrightarrow KPF = KDR$

nên $\Delta KFP \backsim \Delta KRD(g.g)$ suy ra $\frac{FP}{RD} = \frac{KP}{KD}$.

Lại có: $\Delta KPD \backsim \Delta APQ(g.g)$ suy ra

$\frac{KP}{KD} = \frac{AP}{AQ}, \Delta PRD \backsim \Delta PAM$ nên $\frac{PR}{RD} = \frac{PA}{AM} = \frac{2PA}{AQ}$, từ đó ta có: $\frac{PR}{RD} = \frac{2PA}{AQ} = \frac{2KP}{KD} = \frac{2FP}{RD}$ suy ra *F* là trung điểm của *RP*.

c. Ta có $KRF = KDP, KFR = 180^0 - KFP = 180^0 - KPA = KPD$ suy ra $\Delta KFR \sim \Delta KPD(g.g)$ kết hợp với $PKF = DPF$ suy ra $\Delta KPF \sim \Delta PDF(c.g.c)$ suy ra $ADF = PDF = KPF = 180^0 - AEF$ hay *ADEF* là tứ giác nội tiếp.

Bài 91. Cho tam giác *ABC* nhọn nội tiếp (O) trực tâm *H*, *M* là trung điểm của *BC*, đường cao *AF*, đường tròn đường kính *AH* cắt (O) tại *Q* khác *A*. Đường tròn đường kính *HQ* cắt (O) tại *K* khác *Q*. Dựng đường kính *AE* của (O), *D* là giao điểm của *AH* với (O).

a. Chứng minh: *Q*, *H*, *M*, *E* thẳng hàng.

b. Tiếp tuyến tại *H*, *K* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *QKH* cắt nhau tại *X*. Chứng minh *X* thuộc *BC*.

c. Chứng minh: Các đường tròn ngoại tiếp tam giác *KQH*, *KFM* tiếp xúc nhau.

Giải:

a. Ta có kết quả quen thuộc:

+ *H*, *M*, *E* thẳng hàng.

+ *H* đối xứng với *D* qua *BC*.

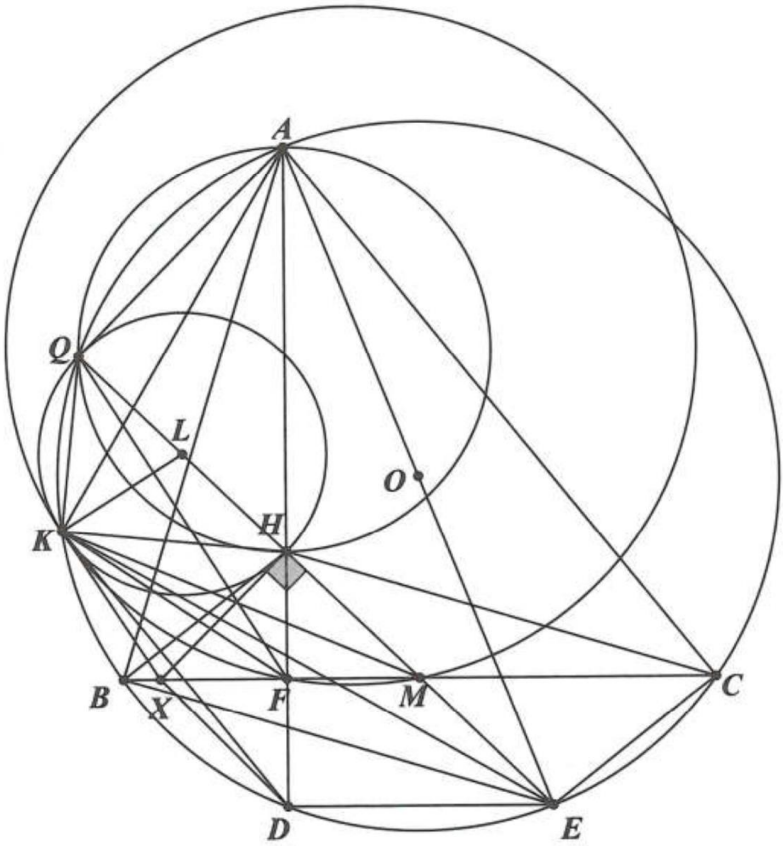
+ *Q*, *H*, *E* thẳng hàng. Do *QH*, *EQ* cùng vuông góc với *AQ*. Từ đó suy ra *Q*, *H*, *M*, *E* thẳng hàng.

b. Giả sử các tiếp tuyến tại *K*, *H* của đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác *QHK* cắt nhau tại *X*. Ta chứng minh:

$X \in BC$. Thật vậy:

Do $KXH = 180^0 - 2XHK = 180^0 - 2KQH = 2\left(90^0 - KQH\right) = 2(90^0 - KAE) = 2EAK = 2KDH$ và

$XK = XH$ nên suy ra X là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác KHD, suy ra X nằm trên trung trực của DH hay $X \in BC$.



Bài 92. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, trên đoạn OA lấy điểm $I\left(I \neq A, I \neq O\right)$. Vẽ tia $Ix \perp AB$ cắt $\left(O\right)$ tại C. Lấy điểm E trên cung nhỏ $BC\left(E \neq B, E \neq C\right)$ nối AE cắt CI tại F, gọi D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của $\left(O;R\right)$.

a. Chứng minh: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $AE.AF = CB.CD$.

c. Tia BE cắt IC tại K. Giả sử I, F lần lượt là trung điểm của OA, IC. Chứng minh: $\Delta AIF \backsim \Delta KIB$ từ đó tính IK theo R.

d. Khi I là trung điểm của OA và E chạy trên cung nhỏ BC. Tìm vị trí điểm E để $EB + EC$ lớn nhất.

Giải:

a. Vì điểm E nằm trên $\left(O\right)$ đường kính AB nên $AEB = 90^0$, lại có $FI \perp AB$ tại I nên $FIB = 90^0$. Tứ giác $IFEB$ có $AEB + FIB = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên $IFEB$ là tứ giác nội tiếp.

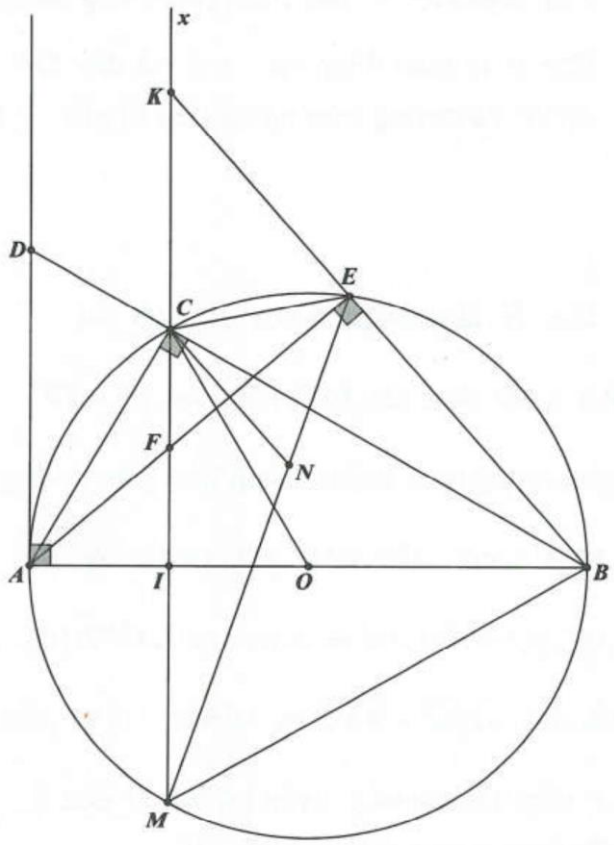
b. Xét tam giác AIF, AEB có

$AIF = AEB = 90^0, EAB$ chung, suy ra

$\Delta AIF \backsim \Delta AEB$ (1) $(g.g)$ dẫn đến

$\frac{AI}{AF} = \frac{AE}{AB} \Leftrightarrow AE.AF = AI.AB$, Vì điểm C nằm trên (O) đường kính AB nên $ACB = 90^0, AD$ là tiếp tuyến của (O) nên $DAB = 90^0$ áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông ACB, BAD ta có:

$AI.AB = AC^2 = CD.CB$ suy ra $AE.AF = CD.CB$.



b. Tam giác AIF và KIB có

$AIF = KIB = 90^0, IAF = IKB = 90^0 - KBA$ nên

$\Delta AIF \backsim \Delta KIB(g.g) \Rightarrow \frac{AI}{KI} = \frac{IF}{IB} \Rightarrow KI = \frac{AI.IB}{IF}$.

Vì điểm I là trung điểm OA và $CI \perp OA$ nên tam giác OAC cân tại C, lại có $OC = OA = R$ nên tam giác OAC là tam giác đều, suy ra $COA = 60^0$.

$CBA = \frac{1}{2}COA = 30^0$, từ đó dễ tính được: $CI = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow IF = \frac{1}{2}CI = \frac{\sqrt{3}}{4}R$ nên

$KI = \frac{IA.IB}{IF} = \frac{IC^2}{\frac{1}{2}IC} = 2IC = \sqrt{3}R$.

c. Gọi M là giao điểm của tia CI với (O) $(M \neq C)$ thì tam giác CBI cân tại B.

Kết hợp với chứng minh ở câu c $CBA = 30^0 \Rightarrow CBM = 60^0$ ta suy ra tam giác CBM đều. Lấy điểm N trên đoạn EM sao cho $EN = EC$, do $CEM = CBM = 60^0$ nên suy ra tam giác CEN đều. Xét các $\Delta CNM, \Delta CEB$ ta có: $CNM = 180^0 - CNE = 120^0, CEB = 180^0 - CMB = 120^0$ và

$CE = CN, CMN = CBE$

$\Rightarrow MCN = BCE \Rightarrow \Delta CNM = \Delta CEB$ $(c.g.c)$ suy ra $MN = EB$.

Từ đó ta có: $EC + EB = EN + MN = EM \leq 2R$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi EM là đường kính của (O), hay E là điểm đối xứng với M qua O.

Nhận xét: Nếu biết định lý Ptolemy thì ta có kết quả: $EC.MB + EB.MC = BC.EM$ mà tam giác BMC đều nên $MB = MC = BC$ suy ra $EC + EB = EM$.

Bài 93. Cho điểm *A* nằm ngoài $(O;R)$. Từ *A* vẽ các tiếp tuyến *AB, AC* đến $(O;R)(O)$ (*B, C* là các tiếp điểm) và cát tuyến *AMN* đến $(O;R)$, *MN* không đi qua *O* và $AM < AN$).

1. Chứng minh: *ABOC* là tứ giác nội tiếp.

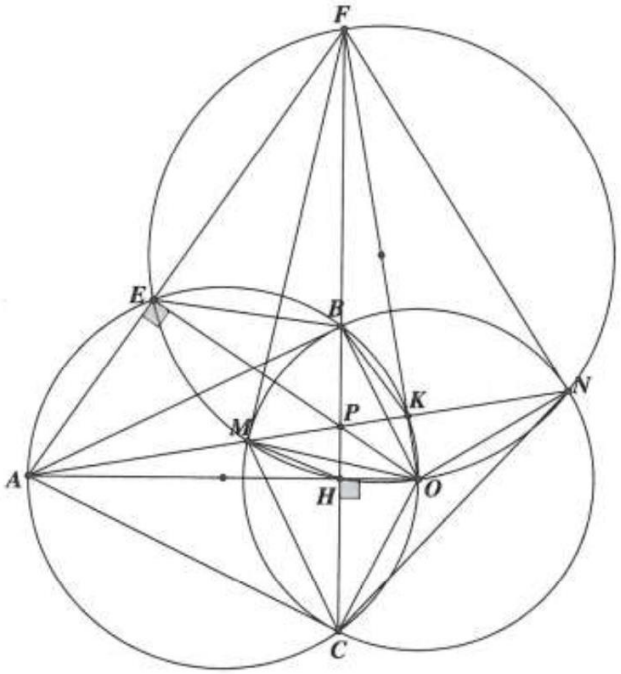
2. Chứng minh: $AM.AN = AB^2$.

3. Tiếp tuyến tại *N* của $(O;R)$ cắt đường thẳng *BC* tại *F*. Chứng minh: *FM* là tiếp tuyến của $(O;R)$.

4. Gọi *P* là giao điểm của *BC* và dây *MN*, *E* là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *MON* và đường tròn ngoại tiếp tứ giác *ABOC* (*E* khác *O*). Chứng minh: *P, E, O* thẳng hàng.

Giải:

1. Gọi *H* là giao điểm của *BC, AO* thì $BH \perp AO$ theo câu b) ta có $AM.AN = AB^2$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *ABO* ta có: $AB^2 = AH.AO$, từ đó suy ra $AH.AO = AM.AN \Rightarrow \Delta AHM \backsim \Delta ANO(c.g.c)$



Dẫn tới $AHM = ANO \Rightarrow MHON$ là tứ giác nội tiếp. Giả sử tiếp tuyến tại *M, N* của (O) cắt nhau tại *F* suy ra 4 điểm *F, M, O, N* cùng nằm trên đường tròn đường kính *OF*.

Ta chứng minh: *F, B, H* thẳng hàng. Thật vậy: do 4 điểm *M, H, O, N* nằm trên một đường tròn và 4 điểm *F, M, O, N* cùng nằm trên một đường tròn đường kính *OF* ta suy ra 5 điểm *F, M, H, O, N*

cùng nằm trên đường tròn đường kính *OF* hay $FHO = 90^0 \Leftrightarrow FH \perp AO$, lại có $BH \perp AO$ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau). Từ đó suy ra *F, B, H* thẳng hàng.

2. Từ chứng minh trên ta suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác *OMN* cũng là đường tròn đường kính *OF*, *E* là giao điểm của đường tròn đường kính *OF* với đường tròn đường kính *AO* ta có $AEO = 90^0$ và $OEF = 90^0$ suy ra $AEO + OEF = 180^0$ hay *A,E, F* thẳng hàng.

Gọi *K* là trung điểm *MN* thì $OF \perp MN$ tại *K*, lại có $FP \perp OA$ tại *H* suy ra *P* là trực tâm tam giác *FOA* suy ra $OP \perp AF$ do $EP \perp AF \Rightarrow E, P, O$ thẳng hàng.

Bài 94. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao *AD, BE, CF* cắt nhau tại điểm *H*, *AH* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *P* (*P* khác *A*). Gọi *M, I* lần lượt là trung điểm của *BC,*

AH. Dựng đường kính *AK* của (O), đường thẳng qua *P* song song với *EF* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *Q* (khác *P*). Gọi *S* là giao điểm của *IM* và *EF*.

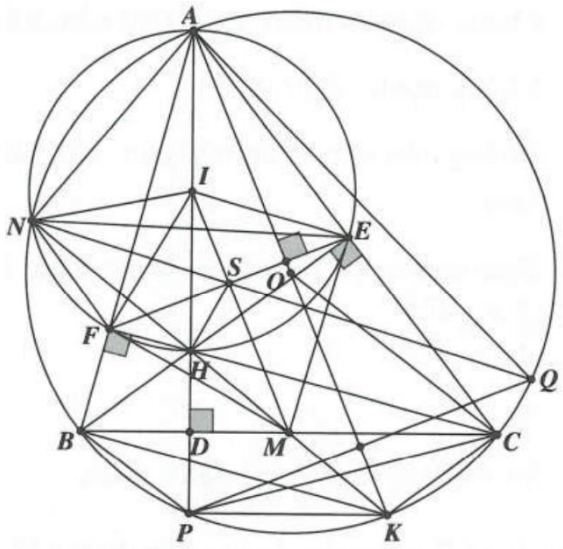
a. Chứng minh: *BFEC* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $IE \perp EM$ từ đó suy ra $ME^2 = MS.MI$.

c. Chứng minh: Tam giác *APQ* cân.

d. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *N*. Chứng minh: *N*, *S*, *Q* thẳng hàng.

Giải:



a. Vì *BE*, *CF* là các đường cao của tam giác *ABC* nên $BEC = BFC = 90^0$ suy ra *BFEC* là tứ giác nội tiếp (Có 2 đỉnh liên tiếp trên cạnh *EF* cùng nhìn cạnh *BC* góc bằng nhau).

b. Do *I* là trung điểm *AH* nên $IA = IE = IH = \dfrac{AH}{2}$ dẫn tới tam giác *AIE* cân tại *I* suy ra $IEA = IAE \ (1)$. Tương tự ta cũng có: $MEC = MCE \ (2)$. Lấy $(1)+(2)$ ta có:

$$IEA + MEC = IAE + MCE = DAC + DCA = 90^0$$

suy ra $IEM = 180^0 - (IEA + MEC) = 90^0$ nên $IE \perp EM$. Do $IE = IF, ME = MF$ nên *IM* là trung trực của *EF* hay $IM \perp EF$ tại *S*. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *IEM* ta có: $ME^2 = MI.MS$.

c. Do *BFEC* là tứ giác nội tiếp nên $AEF = ABC$ (tính chất tứ giác nội tiếp). Lại có: $ABC = \dfrac{1}{2}AOC$

$= \dfrac{1}{2}(180^0 - 2OAC) = 90^0 - OAC$ (do tam giác *OAC* cân tại *O*), từ đó suy ra $ABC + OAC = 90^0$ hay $AEF + OAC = 90^0 \Rightarrow OA \perp EF$, mà $PQ // EF \Rightarrow PQ \perp OA$ mà *PQ* là 1 dây của (O) suy ra $OA \perp PQ$ tại trung điểm của *PQ* hay tam giác *APQ* cân tại *A*.

d. Do $AEH = AFH = 90^0 \Rightarrow E, F$ nằm trên đường tròn tâm *I* đường kính *AH* kí hiệu là (I) suy ra $HNA = 90^0 \ (3)$. Lại có $KC \perp AC, BH \perp AC \Rightarrow BH // KC$, tương tự $CH // KB$ nên *BHCK* là hình bình hành, suy ra *H*, *M*, *K* thẳng hàng (5). Ta cũng có $KNA = 90^0$ (4), từ (3), (4) suy ra *K*, *H*, *N* thẳng hàng (6). Từ (5), (6) suy ra *K*, *H*, *M*, *N* thẳng hàng.

Ta có $\Delta MHF \backsim \Delta MFN\ (g.g)$ suy ra $MF^2 = MH.MN = ME^2$ (do $ME = MF$) kết hợp với chứng minh ở câu b ta suy ra $MH.MN = MI.ME \Rightarrow \Delta MHS \backsim \Delta MIN(c.g.c)$ dẫn đến $HSM = INM \Rightarrow NISH$ là tứ giác nội tiếp. Kết hợp với $IM // AK$ và tam giác APQ cân tại A ta có: $HNS = HIS = PAK = QAK = QNK \Rightarrow NQ \equiv NS$ hay Q, S, N thẳng hàng.

Bài 95. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BH, CH.

a. Chứng minh: 4 điểm H, P, D, Q nằm trên một đường tròn.

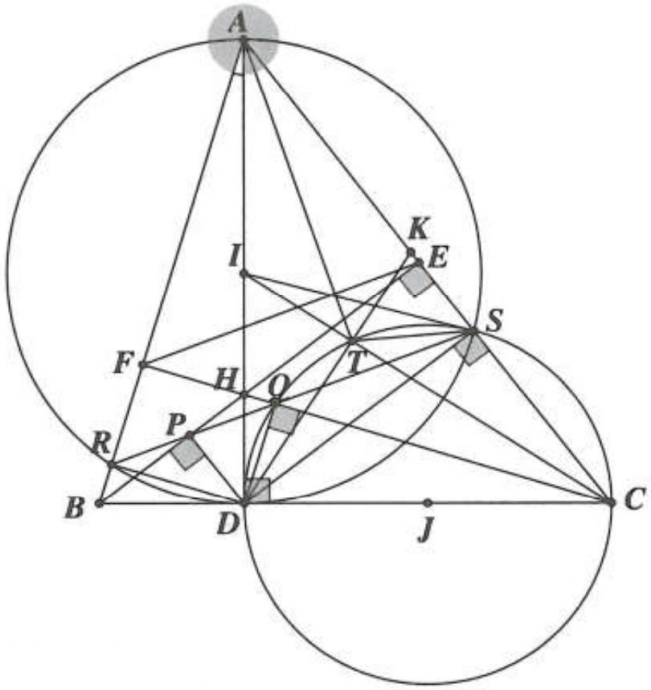
b. Chứng minh: $PQ // EF$.

c. Đường tròn tâm I đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại R, S. Chứng minh R, P, Q, S thẳng hàng.

d. Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác DQS cắt IC tại T, DT cắt AC tại K. Chứng minh: $\frac{KA}{KS} = \frac{CA}{CS}$.

Giải:

a. Vì $HPD = HQD = 90^0$ nên 4 điểm P, H, Q, D nằm trên đường tròn đường kính HD.



b. Do tứ giác $HPDQ$ nội tiếp nên $HPQ = HDQ\ (1)$ (cùng chắn cung HQ). Ta cũng có: $HDQ = HCD(2)$ (cùng phụ với QDC), tứ giác $BFEC$ có $BFC = BEC = 90^0$ nên $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC suy ra $FCB = FEB(3)$. Từ (1), (2), (3) suy ra $HPQ = HEF \Rightarrow PQ // EF$.

c. Đường tròn tâm I đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại R, S thì $ARD = ASD = 90^0$ suy ra $BRD = BSC = 90^0$ nên tứ giác $DQSC, BRPD$ nội tiếp.

Ta có: $SQC = SDC = DAC$ (4). $PQD = PHD = AHE$ (5), mà $AHE + DAC = 90^0$

(4), (5) ta suy ra $PQD + DQC + SQC = 180^0$ hay P, Q, S thẳng hàng, chứng minh tương tự ta có: P, Q, R thẳng hàng, suy ra R, P, Q, S thẳng hàng.

d. Do 4 điểm D, Q, S, C cùng nằm trên đường tròn đường kính DC nên đường tròn tâm J ngoại tiếp tam giác DQC cũng chính là đường tròn đường kính DC suy ra $DTC = 90^0$. Ta có $\Delta CSD \backsim \Delta CDA$

nên suy ra $CD^2 = CS.CA$ (6). Trong tam giác vuông *IDC* ta cũng có: $CD^2 = CT.CI$ (7). Từ (6), (7) ta suy ra $CS.CA = CT.CI \Rightarrow \Delta CTS \backsim \Delta CAI \Rightarrow CTS = CAI$ nên *AITS* là tứ giác nội tiếp, kết hợp với ΔAIS cân tại *I* ta có biến đổi góc: $CTS = CAI = ISA = ITA$ suy ra $ATK = STK$ hay *TK* là phân giác của góc ATS, *TC* vuông góc với *TK* nên *TC* chính là phân giác ngoài của góc ATS.

Theo tính chất phân giác ta có ngay $\frac{KA}{KS} = \frac{CA}{CS}$ đpcm.

Bài 96. Cho đường tròn tâm *O* bán kính *R* và một điểm *N* nằm ngoài (O). Từ *N* kẻ 2 tiếp tuyến *NA*, *NB* đến (O) (*A, B* là 2 tiếp điểm). Gọi *E* là giao điểm của *AB, ON*.

a. Chứng minh: *NAOB* là tứ giác nội tiếp.

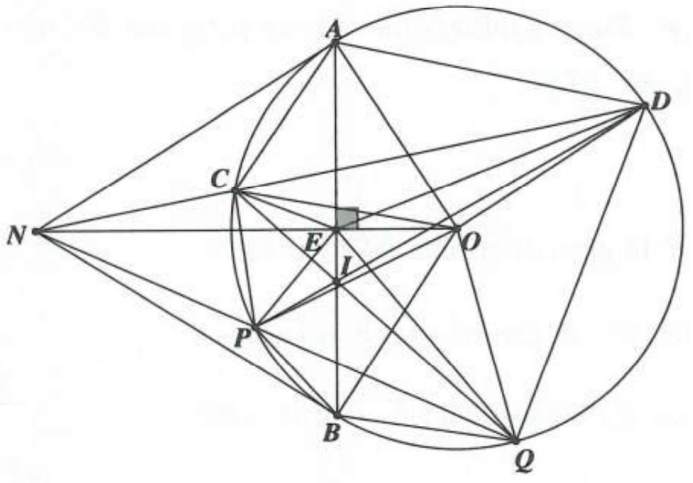
b. Tính *AB* biết $ON = 5cm, R = 3cm$.

c. Kẻ tia *Nx* trong góc ANO cắt (O) tại *C, D* (*C* nằm giữa *N* và *D*). Chứng minh: $NEC = OED$.

d. Qua *N* kẻ cát tuyến thứ 2 với đường tròn là *NPQ* (*P* nằm giữa *N, Q*). Gọi *I* là giao điểm *CQ, DP*. Chứng minh: *A, B, I* thẳng hàng.

Giải:

a. Vì *NA, NB* là các tiếp tuyến của (O) nên $NAO = NBO = 90^0$ suy ra $NAO + NBO = 180^0$. Hay tứ giác *NAOB* nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0).



b. Khi $ON = 5cm, R = 3cm$, theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có $AB = 2AE$.

Và $AE \perp NO$ tại *E*, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *AON* ta có: $OA^2 = OE.ON$

Suy ra $OE = \frac{OA^2}{ON} = \frac{9}{5} \Rightarrow NE = NO - OE = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$, lại có $AE^2 = EN.EO \Rightarrow AN^2 = \frac{16.9}{25}$

$\Leftrightarrow AN = \frac{12}{5} \Rightarrow AB = 2AN = \frac{24}{5}$.

c. Xét tam giác *NCA, NAD* ta có: AND chung và $NAC = NDA = \frac{1}{2}$ *sđ* AC.

Suy ra $\Delta NCA \backsim \Delta NAD$ $(g.g)$ dẫn tới $\frac{NC}{NA} = \frac{NA}{ND}$ (tỷ số đồng dạng) suy ra $NA^2 = NC.ND$ (1)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông NAO ta có: $NA^2 = NE.NO$ (2). Từ (1), (2) ta suy ra $NC.ND = NE.NO \Leftrightarrow \dfrac{NC}{NE} = \dfrac{NO}{ND}$ kết hợp với $\Delta NCE, \Delta NOD$ có góc OND chung ta suy ra $\Delta NCE \backsim \Delta NOD$ (c.g.c) suy ra $NEC = NDO$ dẫn tới $CEOD$ nội tiếp (góc ngoài một đỉnh bằng góc đối). Cũng từ $CEOD$ nội tiếp và tam giác OCD cân tại O ta có biến đổi góc $NEC = NDO = OCD = OED$ (đpcm).

d. Tương tự câu c ta có: $PEOQ$ nội tiếp.

Ta có: $CEP = CEN + NEP = ODC + OQP = \dfrac{1}{2}\left(180^0 - COD\right) + \dfrac{1}{2}\left(180^0 - POQ\right)$

$$\frac{1}{2}\left(180^0 - COD\right) + \frac{1}{2}\left(180^0 - POQ\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(COD + POQ\right) = \frac{360^0 - \left(COD + POQ\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(COP + DOQ\right)$$

$\dfrac{1}{2}\left(COP + DOQ\right) = \dfrac{1}{2}sđCP + \dfrac{1}{2}sđQD = CIP$ suy ra $CEIP$ nội tiếp, tương tự $DEIQ$ nội tiếp.

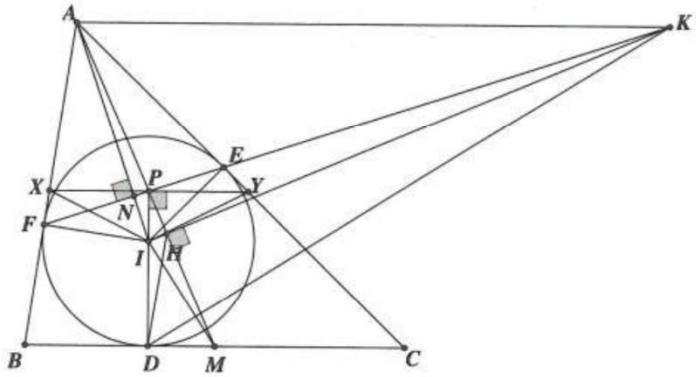
Suy ra $IEP = ICP = IDQ = IEQ$ hay EI là phân giác của PEQ (3). Từ chứng minh câu c ta suy ra $CEA = DEA$ hay EA là phân giác của góc CED, tương tự ta suy ra EB là phân giác của góc PEQ (4). Từ (3), (4) suy ra $EI \equiv EB$ hay I, A, B thẳng hàng.

Bài 97. Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại K, gọi M là trung điểm BC Chứng minh: $MI \perp DK$.

Giải:

Gọi P là giao điểm của ID và EF

Vì AE, AF là các tiếp tuyến của (I) tại E, F nên $IA \perp EF$. Vì $IP \perp BC$ suy ra $IP \perp AK$. Từ đó suy ra P là trực tâm của tam giác $AIK \Rightarrow AP \perp IK$ tại H suy ra tứ giác $ANHK$ nội tiếp.



Kẻ đường thẳng qua P song song với BC cắt AB, AC tại X, Y từ các tứ giác $IPXF, IPEY$ nội tiếp ta suy ra $PXI = PFI = PEI = PYI$ dẫn tới tam giác IXY cân tại I nên P là trung điểm XY. Theo định lý Thales ta dễ suy ra A, P, M thẳng hàng. Lại có: $IH.IK = IN.IA = IF^2 = ID^2 \Rightarrow \dfrac{IH}{ID} = \dfrac{ID}{IK}$ suy ra $\Delta IHD \backsim \Delta IDK$ (c.g.c).

Tứ giác *IDMH* nội tiếp suy ra $IDH = IMH, \Delta IHD \sim \Delta IDK \Rightarrow IDH = IKD \Rightarrow IMH = IKD$ mà IMH phụ với MIH nên IKD phụ với $MIH \Rightarrow IM \perp DK$.

Bài 98. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp (O). Một đường tròn (K) đi qua *B, C* cắt *AC, AB* lần lượt tại *E, F, BE* cắt *CF* tại *H, AH* cắt (O) tại *P* khác *A, PE* cắt (O) tại *R* khác *P*.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác *FHB* cắt *AH* tại *D*.

a. Chứng minh: $KD \perp AH$.

b. Giả sử *AH* cắt *BC* tại *L* và *Q* đối xứng với *P* qua *D*. Chứng minh: *AEQF* là tứ giác nội tiếp.

c. Chứng minh: *BR* chia đôi *EF*.

Giải:

a. Ta có: $AH.AD = AF.AB = AE.AC$ suy ra *EHDC* nội tiếp. Từ đó ta có: $BDC = 360^0 - BDH - CDH = BFC + BEC = 2BFC = BKC$ nên *BDKC* là tứ giác nội tiếp.

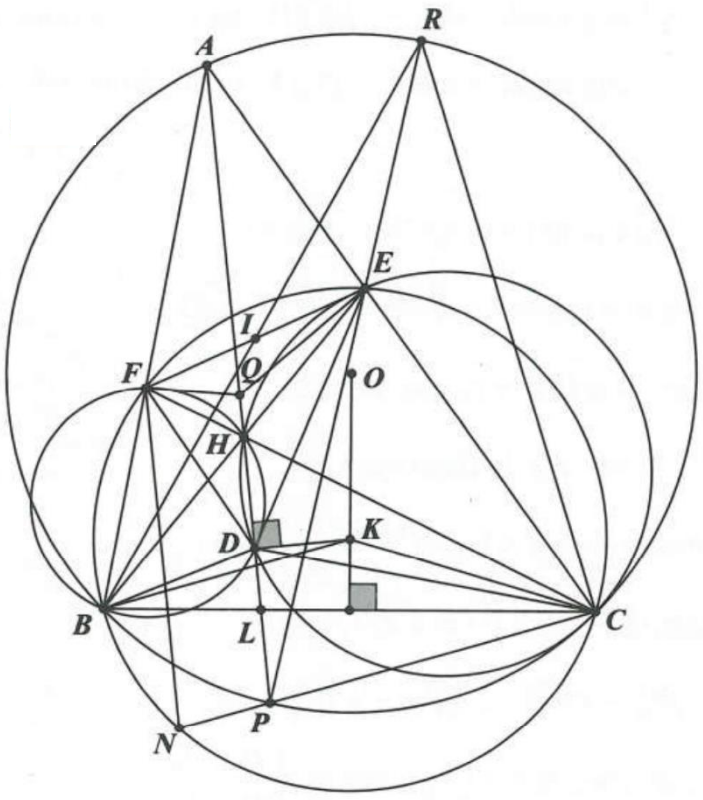
Ta có: $KDH = CDH - CDK = 180^0 - HEC - KBC = 180^0 - \frac{BKC}{2} - \frac{180^0 - BKC}{2} = 90^0$.

b. Gọi *N* là điểm đối xứng với *F* qua *KD*, do $KF = KN$ nên điểm *N* nằm trên (K).

Ta có $BCP = BAP = BFN = BCN$ nên $CP \equiv CN$ hay *C, N, P* thẳng hàng. Do *FQPN* là hình thang cân ta có: $FQA = FNC = FBC$ nên *BFQL* nội tiếp. Tương tự ta cũng có: *CEQL* nội tiếp.

Từ đó ta có biến đổi góc: $FQE = 360^0 - FQL - EQL$

$= ABC + ACB = 180^0 - BAC$ suy ra *AEQF* nội tiếp.



c. Từ *AEQF* là tứ giác nội tiếp ta có:

$BFE = 180^0 - AFE = 180^0 - AQE = DQE$.

Ta cũng có: $FBE = FCE = HDE$ nên $\Delta EFB \backsim \Delta EQD(g.g)$ suy ra $\frac{FB}{FE} = \frac{DQ}{QE}$.

Gọi *I* là trung điểm *EF* ta có

$\frac{FB}{FE}=\frac{DQ}{QE}\Leftrightarrow\frac{FB}{2FI}=\frac{\frac{1}{2}QP}{QE}\Leftrightarrow\frac{FB}{FI}=\frac{QP}{QE}\Rightarrow\Delta IFB\backsim\Delta EQP\ (c.g.c)$ nên $FBI=EPQ=ABR$ hay $BR\equiv BI$ tức là *BR* chia đôi *EF*.

Bài 99. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (O), *P* là một điểm bất kỳ trong tam giác và $Q\in$ cung nhỏ *BC* của (O), *AP* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *D*, *M* là trung điểm của *AQ*, *QP* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *K*. Dựng đường tròn (w) qua 2 điểm *P*, *K* tiếp xúc với *AP*. Các đường thẳng *AK*, *MP* lần lượt cắt (w) tại *E*, *F*. Gọi *R* là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *KPD* với *MP*.

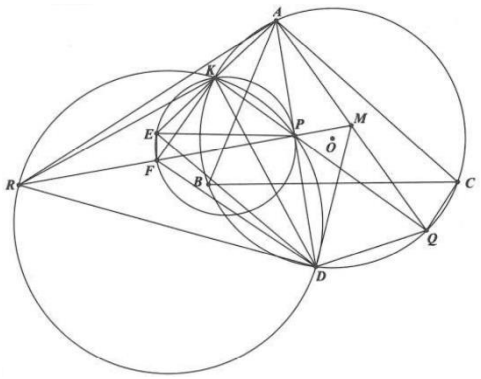
a. Chứng minh: *AMDR* là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $\Delta KFP\sim\Delta KRD$ suy ra *F* là trung điểm của *PR*.

c. Chứng minh: 4 điểm *A*, *D*, *E*, *F* nằm trên một đường tròn.

Giải:

a. Từ các tứ giác *KPDR*, *AKDQ* nội tiếp ta suy ra $DRP=DKP=DAQ$ hay *AMDR* là tứ giác nội tiếp.



b. Ta có: *PA* là tiếp tuyến của đường tròn (w) và *KPDR* nội tiếp nên $KFP=KPA=KRD$, lại có $KPR=KDR\Leftrightarrow KPF=KDR$ nên $\Delta KFP\backsim\Delta KRD\ (g.g)$ suy ra $\frac{FP}{RD}=\frac{KP}{KD}$

Lại có: $\Delta KPD\backsim\Delta APQ\ (g.g)$ suy ra $\frac{KP}{KD}=\frac{AP}{AQ},\Delta PRD\backsim\Delta PAM$ nên $\frac{PR}{RD}=\frac{PA}{AM}=\frac{2PA}{AQ}$, từ đó ta có: $\frac{PR}{RD}=\frac{2PA}{AQ}=\frac{2KP}{KD}=\frac{2KF}{RD}$ suy ra *F* là trung điểm của *RP*.

c. Ta có $KRF=KDP, KFR=180^0-KFP=180^0-KPA=KPD$ suy ra $\Delta KFR\backsim\Delta KPD\ (g.g)$ kết hợp với $PKF=DPF$ suy ra $\Delta KPF\backsim\Delta PDF\ (c.g.c)$ suy ra $ADF=PDF=KPF=180^0-AEF$ hay *ADEF* là tứ giác nội tiếp.

Bài 100. Cho đường tròn tâm *O* đường kính *BC*. Một điểm *A* thuộc đường tròn (O) sao cho $AB>AC$. Tiếp tuyến tại *A* của (O) cắt *BC* tại *D*. Gọi *E* là điểm đối xứng với *A* qua *BC*, *AE* cắt *BC* tại *M*, kẻ đường cao *AH* của tam giác *ABE*, *AH* cắt *BC* tại *F*.

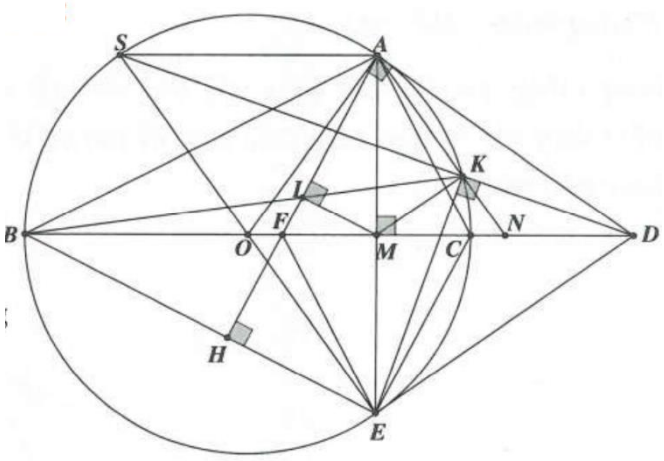
a. Chứng minh: *AFEC* là hình thoi.

b. Chứng minh: $DC.DB=DM.DO$.

c. Gọi I là trung điểm AH, kéo dài BI cắt (O) tại điểm thứ 2 là K. Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp.

d. Đường thẳng AK cắt BD tại N. Chứng minh: N là trung điểm của MD.

Giải:



a. Do điểm E đối xứng với A qua đường kính BC nên $E \in (O)$ dẫn tới $BEC = 90^0$ hay $BE \perp CE$, lại có: $AH \perp BE$ suy ra $AH // CE (1)$, ta cũng có $AE \perp BM$ tại trung điểm M của BC nên F là trực tâm tam giác ABE dẫn đến $EF \perp AB$, mặt khác $AC \perp AB$

Suy ra $EF // AC$ (2), từ (1), (2) kết hợp với $AE \perp FC$ ta suy ra $ACEF$ là hình thoi.

b. Do DA là tiếp tuyến của (O) nên $CAD = ABD = \frac{1}{2} sđ\, AC$ suy ra $\Delta DAB \backsim \Delta DCA\ (g.g)$ suy ra $\frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DA}$ hay $DA^2 = DB.DC\ (3)$. Trong tam giác vuông OED ($OAD = 90^0$ ta có $AM \perp OD$ nên suy ra $DM.DO = DA^2\ (4)$. Từ (3), (4) ta có: $DB.DC = DM.DO$.

c. Do I là trung điểm AH nên MI là đường trung bình của tam giác AHE suy ra $MI \perp AH\ (MI // HE \perp AH)$. Ta có $IMA = AEB$ (đồng vị), $AEB = AKB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB) dẫn đến $IMA = IKA \Rightarrow AIMK$ là tứ giác nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh IA góc bằng nhau).

d. Từ chứng minh ở câu c ta có: $AKM = 180^0 - AIM = 90^0$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AMN ta có: $MN^2 = NK.NA\ (5)$. Kéo dài DK cắt (O) tại S. Ta dễ chứng minh được DE là tiếp tuyến của (O). Ta có $KMD = KAM \equiv KAE = KED$ suy ra $KMDE$ là tứ giác nội tiếp. Dẫn tới $EKD = EMD = 90^0$ suy ra SE là đường kính của (O) nên $SA \perp AE$ dẫn tới $SA // ND$. Tam giác KND và tam giác DNA có AND chung và $NDK = DSA = KAD$ suy ra $\Delta DNA \backsim \Delta KND\ (g.g)$ suy ra $\frac{DN}{KN} = \frac{NA}{ND} \Leftrightarrow ND^2 = NA.NK\ (6)$. Từ (5), (6) suy ra $ND^2 = MN^2$ hay $ND = NM$.

Bài 101. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (O), dựng cát tuyến MCD sao cho $MC<MD$ và tia MC nằm giữa 2 tia MB, MO. Gọi I là trung điểm của CD.

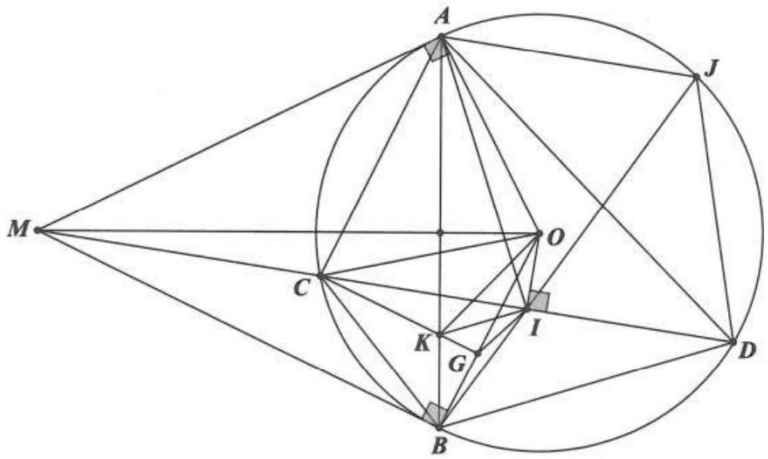
a. Chứng minh: Tứ giác $AIOB$ nội tiếp.

b. Tia BI cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là J (J khác B). Chứng minh: $AJ//MD$.

c. Chứng minh: $AD^2=AJ.MD$.

Đường thẳng qua I song song với BD cắt AB tại K. Tia CK cắt OB tại G. Khi cát tuyến MCD thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CIG thuộc đường tròn nào?

Giải:



a. Vì I là trung điểm của dây CD nên $OI\perp CD$ (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và 1 dây) suy ra $OIM=90^0$, MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $OAM=OBM=90^0\Rightarrow OAM+OBM=180^0$ hay tứ giác $MAOB$ nội tiếp (tổng 2 góc đối nhau bằng 180^0). Tương tự $MAOI$ nội tiếp, suy ra 5 điểm M, A, O, I, B nằm trên một đường tròn. Suy ra tứ giác $AIOB$ nội tiếp.

b. Vì 5 điểm M, A, O, I, B nằm trên một đường tròn nên $MIB=MOB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MB). Mặt khác ta cũng có $AJB=\frac{1}{2}AOB$ (liên hệ góc nội tiếp và góc ở tâm), mà $AOB=2MOB$ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau), từ đó suy ra $AJB=MIB\Rightarrow AJ//MD$. Do $AJ//MD$ nên $JAD=ADM$ (so le trong) (1). Tứ giác $AJDC$ nội tiếp nên $AJD=ACM$ (2), ta có $\Delta MCA\backsim\Delta MAD$ (g.g) (học sinh tự chứng minh) suy ra $MCA=MAD$ (3). Từ (2) và (3) ta suy ra $AJD=MAD$ (4). Từ (1), (4) ta có: $\Delta DAM\backsim\Delta AJD$ (g.g) suy ra $\frac{AD}{AJ}=\frac{DM}{AD}$ (cạnh tương ứng) hay $AD^2=JA.MD$.

c. Vì $IK//BD$ nên $KIC=CDB$ (đồng vị), mà $CDB=CAK$ (cùng chắn cung BC) suy ra $KIC=KAC\Rightarrow ACKI$ nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp *A, I* cùng nhìn cạnh *CK* góc bằng nhau). Từ đó suy ra $CKA=CIA$ (5) (góc nội tiếp cùng chắn cung *CA*). Mặt khác do 4 điểm *A, I, M, B* nằm trên cùng một đường tròn nên $AIM=ABM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung *BM*) (6). Từ (5), (6) suy ra $CKA=MBA\Rightarrow CK//MB$ mà $MB\perp OB\Rightarrow CK\perp OB$ tại *G*. Tứ giác *CGIO* có $CGO=CIO=90^0$ nên *CGOI* là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính *CO* (hai đỉnh liên tiếp *G, I* cùng nhìn cạnh *CO* góc bằng 90^0). Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *CGI* bằng $\frac{CO}{2}=\frac{R}{2}$, hay tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *CIG* thuộc đường tròn tâm *O* bán kính $\frac{R}{2}$.

Bài 102. Từ điểm *M* nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến *MA, MB* đến (O) (*A, B* là các tiếp điểm) và cát tuyến *MCD* sao cho $MC<MD$ và tia *MC* nằm giữa 2 tia *MA, MO*. Gọi *H* là giao điểm của *AB* và *MO*, *E* là trung điểm của *CD*, đường thẳng *CH* cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là *F* (khác *C*). Đường thẳng *DF* cắt các tia *MA, MB* lần lượt tại *P, Q*.

a. Chứng minh: *EM* là tia phân giác của AEB.

b. Chứng minh: $MH.MO=MC.MD$.

c. Chứng minh: $DF//AB$.

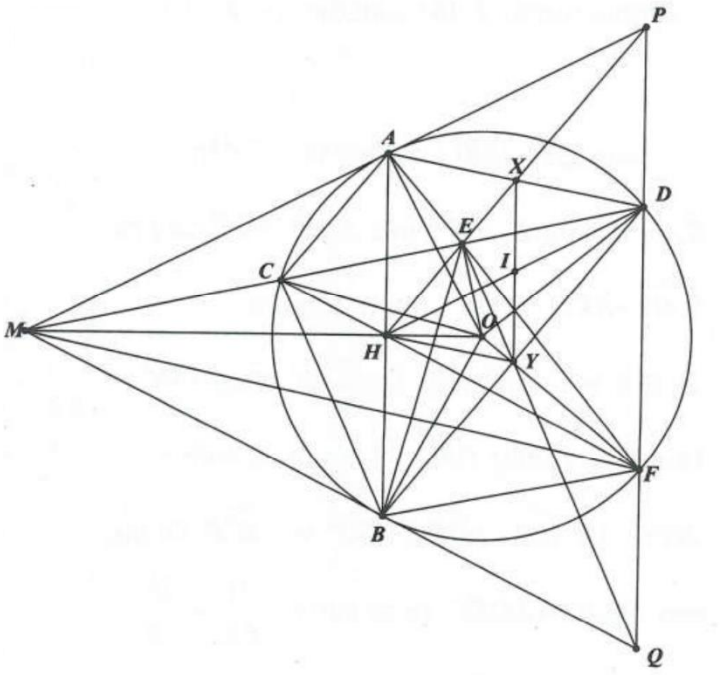
d. Gọi *X* là giao điểm của *EP* với *AD*, *Y* là giao điểm của *EQ* với *BD*. Chứng minh: *HD* chia đôi *XY*.

Giải:

a. Chứng minh 5 điểm *M, A, E, O, B* nằm trên một đường tròn, chú ý $MA=MB$ nên $AEM=BEM$ suy ra đpcm.

b. Ta dễ chứng minh: $MA^2=MC.MD$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *MAO*, $AH\perp MO$ ta có $MA^2=MH.MO$.

Từ đó suy ra $MH.MO=MC.MD$.



c. Từ b ta có: $\frac{MH}{MC}=\frac{MD}{MO}$. Xét tam giác MCH, MOD ta có: $\frac{MH}{MC}=\frac{MD}{MO}$ và OMD chung nên $\Delta MCH\backsim\Delta MOD(g.g)$ suy ra $MHC=MDO\Rightarrow$tứ giác $CHOD$ nội tiếp ta có biến đổi góc

$MHC=MDO=OCD=ODH$

$MHC=OHD$, các góc CHA,DHA phụ với các góc MHC,OHD tương ứng nên suy ra $CHA=DHA$ hay AH là phân giác của góc CHD.

Chú ý rằng: $CHA=\frac{1}{2}CHD=\frac{1}{2}COD=CFD$ mà hai góc CHA,CFD đồng vị nên $AB//DF$.

d. Ta có: $AEM=MEB=MAB=MPQ$ suy ra $APDE$ là tứ giác nội tiếp. Tương tự ta cũng có $BQDE$ là tứ giác nội tiếp. Ta có $XEY=XED+YED=DAP+DBQ=ABD+BAD=180^0-ADB$ nên $EXDY$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó suy ra $DXY=DEY=DBQ=DAB$ hay $XY//AB$. Theo định lý Thales ta có ngay DH đi qua trung điểm I của XY.

Bài 103. Cho tam giác ABC vuông tại A có $(AB<AC)$, trên cạnh AC lấy điểm D (D khác A, C) dựng $DE\perp BC$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn tâm K ngoại tiếp tam giác DEC cắt tia DE tại M. Đường thẳng qua C vuông góc với MK cắt đường tròn (K) tại F (F nằm trong tam giác ABC).

a. Chứng minh: Tứ giác $ADEB$ nội tiếp và $CD.CA=CE.CB$.

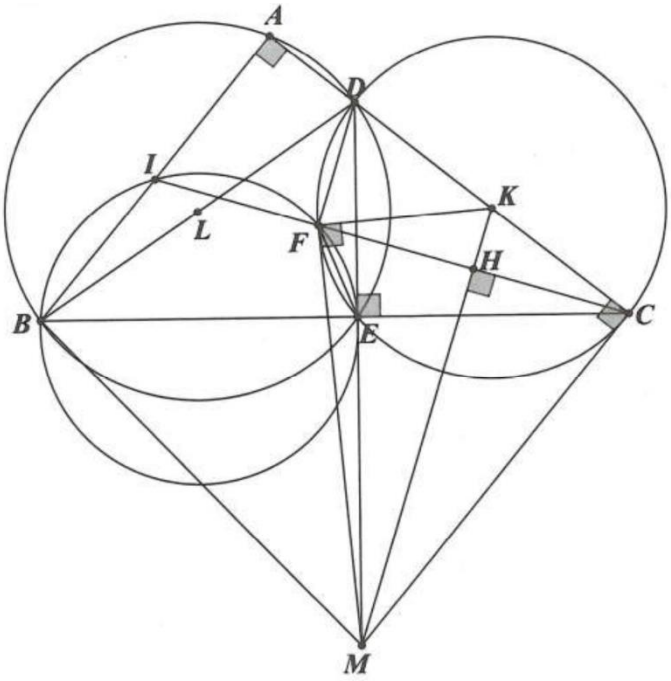
b. Chứng minh: $MF^2=ME.MD$.

c. Tia CF cắt cạnh AB tại I. Chứng minh: $\Delta BIC\backsim\Delta FEC$.

d. Chứng minh: I là trung điểm của AB.

Giải:

a. Vì tam giác ABC vuông tại E nên $BAD=90^0, ED\perp BC$ nên $DEB=90^0$ suy ra $BAD+BED=180^0$ suy ra tứ giác $ADEB$ nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180^0) Tam giác vuông BAC và tam giác vuông DEC có $BAC=DEC=90^0$ và ACB chung nên $\Delta BAC\backsim\Delta DEC$ (g.g) suy ra $\frac{AC}{EC}=\frac{BC}{DC}$ hay $AC.DC=CE.BC$.



b. Giả sử $CF \perp KM$ tại H thì H là trung điểm của FC (Quan hệ vuông góc của đường kính đi qua trung điểm 1 dây) suy ra KH là phân giác của góc FKC. Xét các tam giác KFB và KCM, ta có: $KC = KF$ (là bán kính của (K)), KM chung, $FKM = CKM \Rightarrow \Delta KFB = \Delta KCM\ (c.g.c)$ suy ra $KFM = KCM = 90^0$ hay MF là tiếp tuyến của (K). Từ đó ta có: $MFE = EDF = \frac{1}{2} sđ\, EF$, dẫn đến $\Delta MEF \backsim \Delta MFD$ (g.g) suy ra $\frac{ME}{MF} = \frac{MF}{MD}$ hay $MF^2 = ME.MD$.

c. Do điểm F nằm trên đường tròn đường kính CD nên $CFD = 90^0 \Rightarrow DFI = 90^0$ suy ra tứ giác $ADFI$ nội tiếp. Ta có $IFE = 360^0 - IFD - DFE = 180^0 - IFD + 180^0 - DFE$, chú ý rằng các tứ giác $ADFI$, $DFEC$ nội tiếp nên ta có: $180^\circ - IFD = BAC, 180^0 - DFE = ACB$ từ đó suy ra $IFE = BAC + ACB = 180^0 - ABC$ hay $IFE + IBE = 180^0$ suy ra $IFEB$ là tứ giác nội tiếp.

Dẫn đến $BIC = FEC \Rightarrow \Delta BIC \backsim \Delta FEC$ (g.g) (1) (vì có ICB chung và $BIC = FEC$).

d. Xét tam giác FEC và tam giác DKM ta có: $EFC = EDC = MDK$, $FEC = 180^0 - FDC = 180^0 - \frac{1}{2} FKC = 180^0 - MKC = DKM \Rightarrow \Delta FEC \backsim \Delta DKM$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BIC \backsim \Delta DKM \Rightarrow \frac{BI}{DK} = \frac{BC}{DM}$ (*), ta cũng có $BAC = DCM = 90^0$ và $ABC = CDM$ cùng phụ với ACB suy ra $\Delta BAC \backsim \Delta DCM$ (g.g) suy ra $\frac{BA}{DC} = \frac{BC}{DM}$ (**). Từ (*) và (**) suy ra $\frac{BI}{DK} = \frac{BA}{DC}$ hay $\frac{BA}{BI} = \frac{DC}{DK} = 2$ suy ra I là trung điểm của AB.

HH9-CHUYÊN ĐỀ 11.TỔNG HỢP BÀI THI THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG VÀ CHUYÊN

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi E là giao điểm của AB,CD. F là giao điểm của AC và BD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác FDC tại điểm K khác D. Tiếp tuyến của (O) tại B,C cắt nhau tại M.

a) Chứng minh tứ giác $BKCM$ nội tiếp

b) Chứng minh E,M,F thẳng hàng.

Câu 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của (O) lấy điểm C. Vẽ cát tuyến CDE (tia CD nằm giữa 2 tia CA,CO, $D,E\in O$, D nằm giữa C,E). Gọi M là giao điểm của CO và BD, F là giao điểm của AM và (O), $F\neq A$)

a) Vẽ tiếp tuyến CN của (O). Chứng minh $CNMD$ là tứ giác nội tiếp

b) Vẽ $AH\perp OC$ tại H. Chứng minh $ADMH$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh E,O,F thẳng hàng.

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) $(AD<BC)$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Vẽ đường kính CM,DN. Gọi K là giao điểm của AN,BM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NOC tại điểm J khác C.

a) Chứng minh $KBNJ$ là tứ giác nội tiếp

d) Chứng minh I,K,O thẳng hàng.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC $(AB>AC)$. Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB,AC tại F,E. BE cắt CF tại H. AH cắt BC tại D. Chứng minh các tứ giác $BFHD,IFED$ nội tiếp.

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Vẽ $HI\perp EF$ tại $I,HK\perp DE$ tại K, $IK\cap AD=M,FM\cap DE=N$. Gọi S là điểm đối xứng của B qua D.

Chứng minh tứ giác $FIMH,HMNK$ nội tiếp và $MAN=DAS$

Câu 6. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC B,C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến ADE đến (O) sao cho (ADE nằm giữa 2 tia AO,AB, $D,E\in O$,Đường thẳng qua D song song với BE cắt BC,AB lần lượt tại P,Q. Gọi K là điểm đối xứng với B qua E. Gọi H,I là giao điểm của BC với OA,DE

a) Chứng minh $OEDH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ba điểm A,P,K thẳng hàng.

Câu 7. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC (B,C là hai tiếp điểm). Từ điểm K nằm trên cung BC (K,A nằm cùng phía BC) dựng tiếp tuyến cắt AB,AC tại M,N. BC cắt OM,ON tại P,Q. Gọi I là giao điểm của MQ,NP. Chứng minh $MBOQ,NCOP$ là các tứ giác nội tiếp.

Câu 8. Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB,AC tại E,D. BD cắt CE tại H , các tiếp tuyến của (O) tại B,D cắt nhau tại $K,AK\cap BC=M,MH\cap BK=N$. Vẽ tiếp tuyến AS của (O) với (S thuộc cung nhỏ CD) , $KD\cap AH=I$, $MH\cap OA=L$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt AK tại T.

a) Chứng minh các tứ giác $TKDB,BELO$ nội tiếp

b) Ba điểm N,E,I thẳng hàng.

c) Ba điểm M,E,D thẳng hàng.

d) Ba điểm M,S,H thẳng hàng.

Câu 9. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BE,CD cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Giả sử (O) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AED tại N.

a) Chứng minh N,H,M thẳng hàng.

b) Giả sử AN cắt BC tại K. Chứng minh K,E,D thẳng hàng.

Câu 10. Cho tam giác ABC ngoại tiếp (O). Gọi Q,R là tiếp điểm của (O) với AB,AC. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC,CA. Đường thẳng BO cắt MN tại P.

a) Chứng minh $ORPC$ là tứ giác nội tiếp

b) Ba điểm P,Q,R thẳng hàng.

Câu 11. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Từ A ta dựng các tiếp tuyến AM,AN đến đường tròn đường kính BC.

a) Chứng minh các tứ giác $AMDN,MNDO$ nội tiếp

b) Chứng minh ba điểm H,M,N thẳng hàng.

Câu 12. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại điểm H. Gọi M,N là trung điểm của AH,BC. Các phân giác của góc ABH,ACH cắt nhau tại P.

a) Chứng minh 5 điểm B,C,E,P,F nằm trên một đường tròn. Điểm P là trung điểm cung nhỏ EF.

b) Ba điểm M,N,P thẳng hàng.

Câu 13. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại điểm H.Đường thẳng EF cắt nhau tại điểm M. Gọi O là trung điểm BC. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBF,OCE cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là P.

a) Chứng minh các tứ giác $EFPH$, $BCHP,MEPB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh ΔOPM là tam giác vuông.

Câu 14. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm là điểm H. Gọi M,N là chân các đường cao hạ từ B,C của tam giác ABC.Gọi D là điểm trên cạnh BC. Gọi (w_1) là đường tròn đi qua các điểm B,N,D gọi (w_2) là đường tròn đi qua các điểm C,D,M. DP,DQ lần lượt là đường kính của $(w_1),(w_2)$. Chứng minh P,Q,H thẳng hàng. $(IMO-2013)$

Câu 15. Cho tam giác ABC có BAC là góc lớn nhất. Các điểm P,Q thuộc cạnh BC sao cho $QAB=BCA,CAP=ABC$. Gọi M,N lần lượt là các điểm đối xứng của A qua P,Q. Chứng minh rằng: BN,CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $(IMO-2014)$

Câu 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy một điểm P trên cung BC không chứa điểm A của (O). Gọi (K) là đường tròn đi qua A,P tiếp xúc với AC. (K) cắt PC tại S khác P. Gọi (L) là đường tròn qua A,P đồng thời tiếp xúc với AB. (L) cắt PB tại T khác P.Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC.

a) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DPC.

b) Ba điểm S,D,T thẳng hàng.

Câu 17. Cho tam giác ABC , trên hai cạnh AB,AC lần lượt lấy hai điểm E,D sao cho $ABD = ACE$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt tia CE tại M,N .Gọi H là giao điểm của BD,CE. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt tia BD tại I,K

a) Chứng minh 4 điểm M,I,N,K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi F là giao điểm thứ 2 của các đường tròn $(ABD),(AEC)$. Chứng minh A,H,F thẳng hàng.

c) Chứng minh : Tam giác AMN cân tại A.

Câu 18. Cho tam giác ABC có $(O),(I),(I_a)$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác. Gọi D là tiếp điểm của (I) với $BC;P$ điểm chính giữa cung BAC của (O), PI_a cắt (O) tại điểm K. Gọi M là giao điểm của PO và BC

a) Chứng minh: IBI_aC là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP

c) Chứng minh: $DAI = KAI_a$.

Câu 19. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và một dây cung BC cố định có độ dài $BC = R\sqrt{3}$. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Gọi E,F là điểm đối xứng của B,C lần lượt qua AC,AB. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE,ACF cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là K.

a) Chứng minh điểm K luôn thuộc một đường tròn cố định

b) Xác định vị trí điểm K để tam giác KBC có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó theo R

c) Gọi H là giao điểm của BE,CF. Chứng minh tam giác $ABH\#\Delta AKC$ và đường thẳng AK luôn đi qua điểm cố định.

Câu 20. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC B,C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến ADE đến (O) sao cho (ADE nằm giữa 2 tia AO,AB, $D,E\in O$, Gọi F là điểm đối xứng của D qua AO, H là giao điểm của EF,BC. Chứng minh: A,O,H thẳng hàng.

Câu 21. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC B,C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến AEF đến (O) sao cho (AEF nằm giữa 2 tia AO,AB, $F,E\in O$ và $BAF < FAC$) Vẽ đường thẳng qua E vuông góc với OB cắt BC tại M cắt BF tại N. Vẽ $OK \perp EF$.

a) Chứng minh: $EMKC$ nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng FM đi qua trung điểm của AB

Câu 22. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O).Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B,C của (O) cắt nhau tại G. $GD\cap EF = S$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Giả sử $EF\cap BC = T, AT\cap O = K$

a) Chứng minh 5 điểm A,K,F,E,H cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh M,S,H thẳng hàng.

Câu 23. Cho (O) và (d) không giao nhau. Vẽ $OH \perp (d)$ lấy hai điểm A,B thuộc (d) sao cho $HA = HB$. Lấy điểm M thuộc đường tròn (O). Dựng các cát tuyến qua H,A,B và điểm M cắt đường tròn (O) lần lượt tại C,D,E, $DE \cap d = S$. Dựng đường thẳng qua $O \perp CE$ cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K.Dựng $ON \perp DE$ tại N.

a) Chứng minh tứ giác $HNCS$ là tứ giác nội tiếp

b) Ba điểm S,C,K thẳng hàng

Câu 24. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp là (O) tiếp xúc với ba cạnh BC,AC,AB lần lượt tại D,E,F. Trên đoạn OD lấy điểm I và dựng đường tròn tâm I bán kính ID. Dựng BG,CH là các tiếp tuyến của (I) tại G,H. Gọi $M = BG \cap CH$, $N = EF \cap BC$

a) Chứng minh $EHGF$ nội tiếp

b) Ba điểm N,G,H thẳng hàng.

Câu 25. Cho 3 đường tròn $(O),(O_1),(O_2)$ biết $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm I và $(O_1),(O_2)$ lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại M_1,M_2. Tiếp tuyến của (O_1) tại I cắt (O) lần lượt tại A,A'. Đường thẳng AM_1 cắt (O_1) tại điểm N_1, đường thẳng AM_2 cắt (O_2) tại điểm N_2.

a) Chứng minh tứ giác $M_1N_1N_2M_2$ nội tiếp và $OA \perp N_2N_1$

b) Kẻ đường kính PQ của (O) sao cho $PQ \perp AI$ (Điểm P nằm trên cung AM_1 không chứa điểm M_2). Chứng minh rằng nếu PM_1,PM_2 không song song thì các đường thẳng AI,PM_1,QM_2 đồng quy.

Câu 26. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại M,N,P. Đường thẳng NP cắt BO,CO lần lượt tại E,F

a) Chứng minh các góc OEN,OCA bằng nhau hoặc bù nhau.

b) Chứng minh 4 điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.Chứng minh O,M,K thẳng hàng. Biết K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF.

Câu 27. . Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O . Kẻ $AH \perp BC$ $H \in BC$ và BE vuông góc với đường kiính AD $E \in AD$.

a) Chứng minh $HE//DC$.

b) Qua trung điểm K của đoạn thẳng AB kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại M. Chứng minh ΔMHE cân.

Câu 28. Cho tam giác nhọn ABC $AB < AC$. Vẽ đường cao AD và đường phân giác trong AO của tam giác ABC (D,O thuộc BC). Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB,AC lần lượt tại M,N.

a) Chứng minh các điểm M,N,O,D,A cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $BDM = CDN$.

c) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I. Đường thẳng AI cắt BC tại K. Chứng minh K là trung điểm cạnh BC.

Câu 29. Cho nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$ và C, D là hai điểm di động trên nửa đường tròn sao cho C thuộc cung AD và $COD = 60^0$ (C khác A và D khác B). Gọi M là giao điểm của tia AC và BD, N là giao điểm của dây AD và BC.

a) Chứng minh tứ giác $CMDN$ nội tiếp đường tròn và tính khoảng cách từ A, B đến đường thẳng CD.

b) Gọi H và I lần lượt là trung điểm CD và MN. Chứng minh H, I, O thẳng hàng và $DI = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MCD theo R.

Câu 30. Cho nửa đường tròn $O;R$ đường kính AB. Giả sử M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn này, kẻ MH vuông góc với AB tại H. Từ O kẻ đường thẳng song song với MA cắt tiếp tuyến tại B với nửa đường tròn O ở K.

a) Chứng minh bốn điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Giả sử C, D là hình chiếu của H trên đường thẳng MA và MB. Chứng minh ba đường thẳng CD, MH, AK đồng quy.

c) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH và BH. Xác định vị trí M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 31. Cho hình vuông $ABCD$, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho $BI = BA$. Đường thẳng đi qua I vuông góc với BD cắt AD tại E, AI cắt BE tại H.

a) Chứng minh rằng $AE = ID$.

b) Đường tròn tâm E bán kính EA cắt AD tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng: $DF.DA = EH.EB$.

Câu 32. Cho đường tròn $O;R$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Đường tròn đường kính OM cắt đường tròn $O;R$ tại hai điểm E, F.

a) Chứng minh giao điểm I của đoạn thẳng OM với đường tròn $O;R$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

b) Cho A là một điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm M của đường tròn đường kính OM (A khác E và F). Đoạn thẳng OA cắt đoạn thẳng EF tại B. Chứng minh $OA.OB = R^2$.

c) Cho biết $OM = 2R$ và N là điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm I của đường tròn $O;R$ (N khác E và F). Gọi d là đường thẳng qua F và vuông góc với đường thẳng EN tại điểm P, d cắt đường tròn đường kính OM tại điểm K (K khác F). Hai đường thẳng FN và KE cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng: $PN.PK + QN.QK \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

Câu 33. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn O. Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng:

a) $ABP = AMB$.

b) $MA.MP = BA.BM$.

Câu 34. Cho hai đường tròn $O;R$ và $O';R'$ cắt nhau tại I và J $R' > R$. Kẻ các tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó chúng cắt nhau ở A. Gọi B và C là các tiếp điểm của hai tiếp tuyến trên với $O';R'$, D là tiếp điểm của tiếp tuyến AB với $O;R$ (điểm I và điểm B ở cùng nửa mặt phẳng bờ là $O'A$). Đường thẳng AI cắt $O';R'$ tại M (điểm M khác điểm I).

a) Gọi K là giao điểm của đường thẳng IJ với BD. Chứng minh $KB^2 = KI.KJ$, từ đó suy ra $KB = KD$.

b) AO' cắt BC tại H. Chứng minh bốn điểm I, H, O', M nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh đường thẳng AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle IBD$.

Câu 35. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, trên nửa đường tròn lấy điểm C (cung BC nhỏ hơn cung AB), qua C dựng tiếp tuyến với đường tròn tâm O cắt AB tại D. Kẻ CH vuông góc với AB $H \in AB$, kẻ BK vuông góc với CD $K \in CD$; CH cắt BK tại E.

a) Chứng minh CB là phân giác của DCE.

b) Chứng minh $BK + BD < EC$.

c) Chứng minh $BH.AD = AH.BD$.

Câu 36. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O. Cho P là điểm bất kỳ trên đoạn BC sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác OBP cắt đoạn AB tại N khác B và đường tròn ngoại tiếp tam giác OCP cắt đoạn AC tại M khác C.

a) Chứng minh rằng $OPM = OAC$.

b) Chứng minh rằng $MPN = BAC$ và $OBC + BAC = 90^0$.

c) Chứng minh rằng O là trực tâm tam giác PMN.

Câu 37. Trên nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$ (R là độ dài cho trước) lấy hai điểm M, N (M, N khác A, B) sao cho M thuộc AN và tổng các khoảng cách từ A, B đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN theo R.

b) Gọi I là giao điểm của AN và BM, K là giao điểm của AM và BN. Chứng minh bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó theo R.

c) Tìm GTLN của diện tích tam giác KAB theo R khi M, N thay đổi trên nửa đường tròn O nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết bài toán.

Câu 38. Cho hai đường tròn O và O' cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ đường thẳng d qua A cắt O tại C và cắt O' tại D sao cho A nằm giữa C và D. Tiếp tuyến của O tại C và tiếp tuyến của O' tại D cắt nhau tại E.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BDEC$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $BE.DC = CB.ED + BD.CE$.

Câu 39. Cho đường tròn $O;R$ có đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi sao cho CD không vuông góc cũng không trùng với AB. Gọi d là tiếp tuyến tại A của $O;R$. Các đường thẳng BC và BD cắt d tương ứng tại E và F.

a) Chứng minh rằng $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi M là trung điểm của EF, chứng minh rằng $BM \perp CD$.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDEF$. Chứng minh rằng $MK = R$.

d) Gọi H là trực tâm của tam giác DEF, chứng minh rằng H luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 40. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH, đường tròn này cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác $BDEC$ là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng.

c) Cho biết $AB = 3cm, BC = 5cm$. Tính diện tích tứ giác $BDEC$.

Câu 41. Cho tam giác ABC không là tam giác cân, biết tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn I. Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn I. Gọi M là

giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn I tại điểm N (N không trùng với D), gọi K là giao điểm của AI và EF.

a) Chứng minh rằng các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn I.

Câu 42. Từ một điểm P nằm ngoài đường tròn O kẻ hai tiếp tuyến PM, PN tới đường tròn O, (M, N là hai tiếp điểm). Gọi I là một điểm thuộc cung nhỏ MN của đường tròn O, (I khác điểm chính giữa của MN). Kéo dài PI cắt MN tại điểm K, cắt đường tròn O tại điểm thứ hai là J. Qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với PJ tại điểm F và cắt đường thẳng MN tại điểm Q. Gọi E là giao điểm của PO và MN.

a) Chứng minh rằng $PI.PJ = PK.PF$.

b) Chứng minh năm điểm $Q < I, E, O, J$ cùng thuộc một đường tròn.

Câu 43. Cho đường tròn O có đường kính AB cố định, M là một điểm thuộc O (M khác A, B). Các tiếp tuyến của O tại A và M cắt nhau ở C. Đường tròn I đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. CD là đường kính của I. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm O, M, D thẳng hàng.

b) Tam giác COD là tam giác cân.

c) Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn O.

Câu 44. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng $AB.MB = AE.BS$.

b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.

c) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Câu 45. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của O với các cạnh AB, AC, BC; BO cắt EF tại I. M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

a) Tính BIF.

b) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

c) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của O, P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Câu 46. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O. Giả sử M là điểm thuộc đoạn thẳng AB (M không trùng A, B), N là điểm thuộc tia CA (N nằm trên đường thẳng CA sao cho C nằm giữa A và N) sao cho khi MN cắt BC tại I thì I là trung điểm của MN. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt O tại điểm P khác A.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BMIP$ và $CNPI$ nội tiếp.

b) Giả sử $PB = PC$, chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Câu 47. Cho ΔABC có $A = 60^0$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng ID cắt EF tại K, đường thẳng qua K và song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại M, N.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $IFMK$ và $IMAN$ nội tiếp.

b) Gọi J là trung điểm cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, K, J thẳng hàng.

c) Gọi r là bán kính của đường tròn I và S là diện tích tứ giác $IEAF$. Tính S theo r.

Chứng minh $S_{IMN} \geq \dfrac{S}{4}$ (S_{IMN} là diện tích ΔIMN).

Câu 48. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $O;R$. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E (E không trùng với A và D). Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K. Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M, N. Hai đường thẳng AN, DK cắt nhau tại P.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EPND$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $EKM = DKM$.

c) Khi điểm M ở vị trí trung điểm của AD. Hãy xác định độ dài đoạn AE theo R.

Câu 49. Cho tam giác ABC. Trên phân giác AD có hai điểm M, N sao cho $ABN = CBM$. Chứng minh rằng $ACN = BCM$.

Câu 50. Cho hình thoi $ABCD$ có $BAD = 60^0$. Một đường thẳng Δ thay đổi qua C cắt AB, AD lần lượt tại N, M. Gọi P là giao điểm của BM và DN. Chứng minh rằng P thuộc một đường tròn cố định.

Câu 51. Cho tam giác ABC vuông tại A. $AB < AC$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh BA kéo dài về phía A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi C là một điểm trên AC sao cho E, B, D, P thuộc cùng một đường tròn, Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AQ + CQ = BP$.

Câu 52. Cho tam giác ABC có $A > B > C$ nội tiếp trong đường tròn O, ngoại tiếp đường tròn I. Cung nhỏ BC có M là điểm chính giữa. N là trung điểm cạnh BC. Điểm E đối xứng với I qua N. Đường thẳng ME cắt đường tròn O tại điểm thứ hai Q. Lấy điểm K thuộc BQ sao cho $QK = QA$. Chứng minh rằng:

a) Điểm Q thuộc cung nhỏ AC của đường tròn O.

b) Tứ giác $AIKB$ nội tiếp và $BQ = AQ + CQ$.

Câu 53. Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C qua O. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $A'B'C', A'BC, B'CA, C'AB$ có điểm chung.

Câu 54. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O. Hai phân giác BM và CN của góc B và C. Tia MN cắt O tại P. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của P xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $PY = PX + PZ$.

b) $\dfrac{1}{PB} = \dfrac{1}{PA} + \dfrac{1}{PC}$.

Câu 55. Cho tam giác nhọn ABC $AB \neq AC$. Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại M, N. Gọi O là trung điểm của BC. Đường phân giác của BAC và MON cắt nhau tại R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BMR và CNR cùng đi qua một điểm nằm trên cạnh BC.

Câu 56. Cho tứ giác $ABCD$ có đường chéo BD không là phân giác của các góc ABC và CDA. Một điểm P nằm trong tứ giác sao cho: $PBC = DBA; PDC = BDA$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $AP = CP$.

Câu 57. Ba tia Ix, Iy, Iz chung gốc I. Lấy cặp điểm A, A' trên Ix, lấy cặp điểm B, B' trên Iy, lấy cặp điểm C, C' trên Iz theo thứ tự đó kể từ I sao cho $IA.IA' = IB.IB' = IC.IC'$. Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABC, A'B'C'$ và I thẳng hàng.

Câu 58. Cho BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn O. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

a) Tìm vị trí của A để chu vi tam giác MNP đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 59. Cho hai đường tròn $O_1; r_1$ và $O_2; r_2$ tiếp xúc ngoài với nhau. Một đường tròn O thay đổi tiếp xúc ngoài với O_1 và O_2. Giả sử AB là một đường kính của O sao cho AO_1O_2B

là một hình thang $AB//O_1O_2$. Gọi I là giao điểm của AO_2 với BO_1. Chứng minh rằng I thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 60. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G. Giả sử rằng $OIA=90^0$. Chứng minh rằng IG và BC song song.

Câu 61. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và bốn đường tròn $A;R_1$, $B;R_2$, $C;R_3$, $D;R_4$ sao cho $R_1+R_3=R_2+R_4<AC$. Gọi Δ_1,Δ_3 là hai tiếp tuyến chung ngoài của $A;R_1$ và $C;R_3$; Δ_1,Δ_3 là hai tiếp tuyến chung ngoài của $B;R_2$ và $D;R_4$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với cả bốn đường thẳng $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4$.

Câu 62. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại S. Gọi M,N,P,Q lần lượt đối xứng với S qua AB,BC,CD,DA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SPQ cắt tại AP tại S. Chứng minh rằng bốn điểm M,E,F,Q cùng thuộc một đường tròn.

Câu 63. Cho tam giác ABC cân tại A, trên cạnh BC lấy D sao cho $BD:DC=2:1$ và trên đoạn AD lấy P sao cho $BAC=BPD$. Chứng minh rằng $DPC=\dfrac{1}{2}BAC$.

Câu 64. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P,Q,R lần lượt là các chân đường vuông góc của D xuống BC,CA,AB. Chứng tỏ rằng $PQ=QR$ khi và chỉ khi phân giác các góc ABC và ADC cắt nhau trên AC.

Câu 65. Trong mặt phẳng cho hai đường tròn O_1 và O_2 cắt nhau ở hai điểm A và B. Các tiếp tuyến tại A và B của O_1 cắt nhau ở điểm K. Giả sử M là một điểm nằm trên O_1 nhưng không trùng vào A và B. Đường thẳng AM cắt O_2 ở điểm thứ hai P, đường thẳng KM cắt O_1 ở điểm thứ hai C và đường thẳng AC cắt O_2 ở điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ nằm trên đường thẳng MC.

Câu 66. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O. Đường tròn O' nằm trong O tiếp xúc với O tại T thuộc cung AC (cung không chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA',BB',CC' tới O'. Chứng minh rằng $BB'.AC=AA'.BC+CC'.AB$.

Câu 67. Cho hai đường tròn O_1 và O_2 cùng tiếp xúc với đường tròn O. Tiếp tuyến chung của O_1 và O_2 cắt O tại bốn điểm. Gọi B,C là hai trong bốn điểm đó sao cho B,C nằm về cùng một phía đối với O_1O_2. Chứng minh rằng BC song song với một tiếp tuyến chung ngoài của O_1 và O_2.

Câu 68. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn O. Chứng minh rằng

$$\frac{AC}{BD}=\frac{BC.CD+AB.BD}{BC.BA+DC.DA}.$$

Câu 69. Cho tam giác ABC cân ở A. Kí hiệu x,y,z lần lượt là khoảng cách MA',MB',MC' từ một điểm M nằm trong tam giác tới các đường thẳng BC,CA,AB. Giả sử $x^2=yz$, chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

Câu 70. Cho tam giác nhọn ABC. Điểm O thay đổi trên BC. Đường tròn tâm O bán kính OA cắt AB, AC lần lượt tại các điểm thứ hai M, N. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác AMN thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 71. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh bốn điểm H_1, H_2, H_3, H_4 cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 72. Điểm I nằm trong tam giác ABC và thỏa mãn $AIB = BIC = CIA = 120^0$. Chứng minh rằng ba đường thẳng Ơ-le của các tam giác ABI, BCI và CAI đồng quy.

Câu 73. Gọi O, I và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng: Nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH đi qua một trong các đỉnh của tam giác ABC thì phải đi qua một đỉnh khác của tam giác ABC.

Câu 74. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O, trực tâm H, đường cao AK $K \in BC$. Giả sử một đường thẳng qua K vuông góc với OK cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Các tia MH, NH cắt AC, AB thứ tự tại P, Q. Chứng minh rằng tứ giác $APHQ$ nội tiếp.

Câu 75. Tam giác ABC có trực tâm H, đường cao BE. Điểm P trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vẽ các hình bình hành $PAQB$ và $PARC$. Giao điểm AQ và HR là X. Chứng minh rằng EX song song với AP.

Câu 76. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Một đường tròn O_1 qua B và C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Đường tròn O_2 qua ba điểm A, D, E cắt O tại K $K \neq A$. Chứng minh rằng $AKO_1 = 90^0$.

Câu 77. Cho hai đường tròn O và O' cắt nhau tại A và B. Giả sử CD, EF là hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này $C, E \in O$; $D, F \in O'$, điểm A gần CD hơn B). Gọi Δ_1 là đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và Δ_2 là đường thẳng qua B tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh rằng các đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, CD, EF$ đồng quy.

Câu 78. Cho hai đường tròn O và O' tiếp xúc trong tại M (O' chứa trong O). Giả sử P và N là hai điểm bất kỳ thuộc O'. Qua P và N kẻ các tiếp tuyến với O' cắt O tại A, C và B, D. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACD, BCD nằm trên NP.

Câu 79. Cho hai đường tròn O_1 và O_2 tiếp xúc ngoài với nhau tại I và cùng tiếp xúc trong với O. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài với O_1 và O_2 cắt O tại B, C. Qua I kẻ tiếp tuyến chung với O_1 và O_2 cắt O tại A (A thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ BC với O_1, O_2. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 80. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $BMC = 90^0 + \frac{1}{2}A$. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại X, Y.

Vẽ MZ, MT lần lượt song song với AB, AC. Gọi N là giao điểm của XZ và YT. Chứng minh rằng tứ giác $ABNC$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 81. Cho tam giác nhọn ABC $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $O;R$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $AE.AC = AF.AB$.

b) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD, ABDE$ nội tiếp đường tròn.

c) Vẽ tia Ax là tia tiếp tuyến của đường tròn O, tia Ax nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C. Chứng minh rằng $Ax // EF$. Từ đó suy ra $OA \perp EF$.

d) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Đường thẳng đi qua F song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $MF = NF$.

Câu 82. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy C thuộc O (C không trùng với A, B), M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Các đường thẳng AM và BC cắt nhau tại I, các đường thẳng AC, BM cắt nhau tại K.

a) Chứng minh $ABM = IBM$ và ΔABI cân.

b) Chứng minh tứ giác $MICK$ nội tiếp.

c) Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến tại A của O ở N. Chứng minh đường thẳng NI là tiếp tuyến của B, BA và $NI \perp MO$.

d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK cắt đường tròn B, BA tại D (D không trùng với I). Chứng minh A, C, D thẳng hàng.

Câu 83. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn O tâm O, đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H là hình chiếu của I lên AD và M là trung điểm của ID. Đường tròn HMD cắt O tại N (N khác D). Gọi P là giao điểm của BC và HM.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCMH$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng ba điểm P, D, N thẳng hàng.

Câu 84. Cho đường tròn O cố định. Từ một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn O, kẻ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A cắt đường tròn O tại hai điểm B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của dây BC.

a) Chứng minh rằng $AMON$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh rằng $AK.AI = AB.AC$.

c) Khi cát tuyến ABC thay đổi thì điểm I chuyển động trên cung tròn nào? Vì sao?Xác định vị trí của cát tuyến ABC để $IM = 2IN$.

Câu 85. Cho tam giác ABC nhọn $AB < AC$, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB cắt AC tại N. Gọi E là điểm đối xứng của H qua AC, EN cắt AB tại M và cắt đường tròn O tại điểm thứ hai D.

a) Chứng minh $AD = AE$.

b) Chứng minh HA là phân giác của MHN.

c) Chứng minh rằng điểm A,E,C,H,M cùng thuộc một đường tròn tâm O_1. Và ba đường thẳng CM,BN,AH đồng quy tại một điểm.

d) DH cắt đường tròn O_1 tại điểm thứ hai Q. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của DQ và BC. Chứng minh rằng I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK.

Câu 86. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AC, AC=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AD, tam giác ABD đều.

a) Tính BC và CN theo a.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác CMN; MH cắt CN tại E, MN cắt AC tại K. Chứng minh năm điểm B,M,K,E,C cùng thuộc một đường tròn T.

c) Đường tròn T cắt BD tại F $F\neq B$, tính DF theo a.

d) KF cắt ME tại I. Chứng minh KM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MIF. Tính IND.

Câu 87. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $O;R$. Vẽ hai tiếp tuyến MA,MB và cát tuyến MCD (A,B,C,D thuộc đường tròn O), tia MC nằm giữa hai tia MO và MB. Gọi H là giao điểm của MO và AB.

a) Chứng minh rằng $MA^2=MC.MD$.

b) Chứng minh tứ giác $CHOD$ nội tiếp, $\Delta MHC\sim\Delta DHO$.

c) Chứng minh rằng $ADH=CDB$.

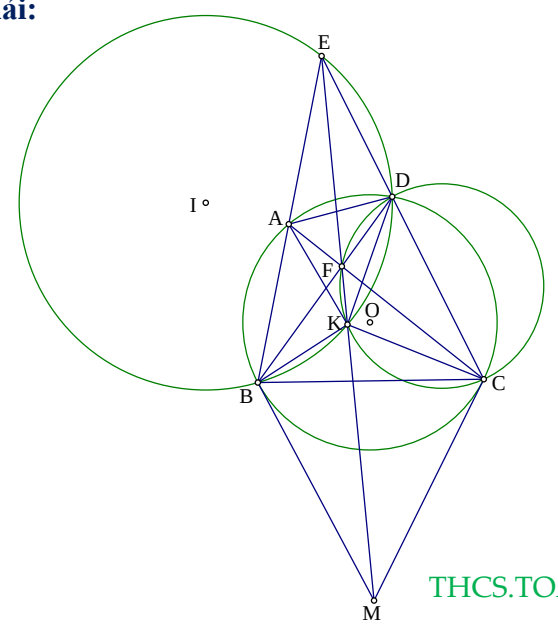
d) MO cắt đường tròn O tại E,F (E nằm giữa M,O). Chứng minh rằng các đường thẳng DE,CF cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng AB.

Câu 88. Cho A ở ngoài đường tròn $O;R$. Vẽ các tiếp tuyến AB,AC với O. S là điểm trên tia đối của tia $OA, OS<R$. Đường thẳng vuông góc với (OA tại S cắt AB,AC lần lượt tại D,E; cắt đường tròn O tại F,T (F nằm giữa D,T). AF cắt O tại M. G là điểm đối xứng của F qua D, L là điểm đối xứng của F qua T. Chứng minh rằng hai đường tròn O và MGL tiếp xúc nhau.

HƯỚNG DẪN

Câu 1) Phân tích và định hướng giải:

a). Để chứng minh tứ giác $BKCM$ nội tiếp ta chứng minh $BKC+BMC=180^0$. Điểm K trong bài toán có mối quan hê với hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $EBKD, KFDC$ vì vậy ta



tìm cách tính các góc BKC, BMC

theo các góc có liên quan đến 2 tứ

giác này.

Ta có: $BKC = 360^0 - \left(BKE + CKE \right) = 360^0 - \left[BDE + CKE \right]$

$= 360^0 - \left(180^0 - BDC + 180^0 - BDC \right) = 2BDC$ (1)

Mặt khác ta cũng có: $BMC = 180^0 - 2MBC = 180^0 - 2BDC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $BKC + BMC = 180^0$.

b). Thực nghiệm hình vẽ cho ta thấy E, K, M thẳng hàng. Thật vậy ta có:

$EKB + BKM = EDB + BCM = EDB + BDC = 180^0$. Bây giờ ta chứng minh: F, K, M thẳng hàng:

Thật vậy ta có: $MKC + CKF = MBC + CKF = BDC + CKF = 180^0$. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2)

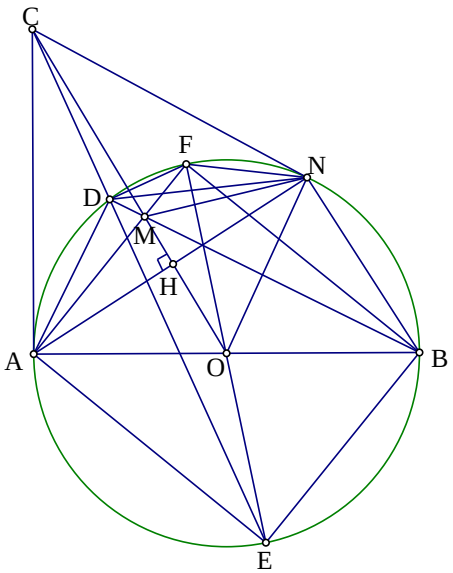
Phân tích định hướng giải:

a). Tứ giác $CNMD$ có liên quan

đến tiếp tuyến CN nên ta tập trung

khai thác giả thiết về góc tạo bởi

tiếp tuyến và một dây.



Ta thấy: $MCN = MCA$, mặt khác

$MCA = BAN$ cùng phụ với góc

NAC, nhưng $BAN = BDN$

(góc nội tiếp) từ đó ta suy ra $MDN = MCN$ hay tứ giác $CNMD$ nội tiếp.

b). Dễ thấy $ADM = 90^0$. Từ đó suy ra $ADM + AHM = 180^0$ suy ra đpcm.

c). Để chứng minh E,O,F thẳng hàng: Ta chứng minh: $EOA+AOF=180^0$, điều này cũng tương đương với việc chứng minh: $EAF=90^0$. Thật vậy ta có: $EAF=EAB+BAF$, nhưng $EAB=EDB$ (Cùng chắn cung EB), mặt khác $EDB=MNC$ do $CMND$ nội tiếp, suy ra $EAB=MNC=MAC$,Từ đó suy ra $EAF=MAC+MAF=90^0$. (đpcm).

Câu 3).

Phân tích định hướng giải:

Để chứng minh tứ giác $BNJK$ nội tiếp ta sẽ chứng minh

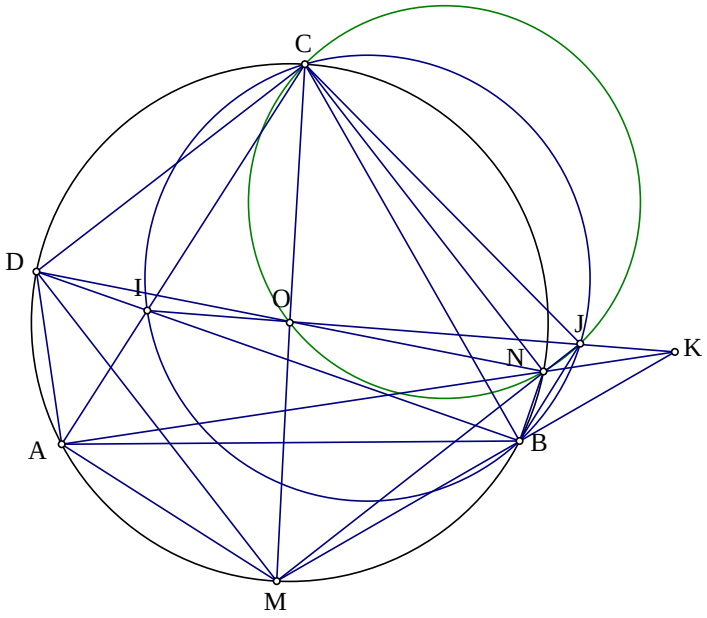
$BJN=BKN$. Ta có: $BJN=BJC-NJC=180^0-BIC-\left(180^0-NOC\right)=NOC-BIC$

Mặt khác ta cũng có: $NOC=\frac{1}{2}\left(DM+NC\right)$,

$BIC=\frac{1}{2}\left(BC+AD\right)$ từ đó suy ra: $BJN=\frac{1}{2}\left(DM+NC-BC-AD\right)$

Ta cũng có: $NKB=\frac{1}{2}\left(AM-NB\right)=\frac{1}{2}\left[DM-AD-\left(BC-NC\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(DM+NC-BC-AD\right)$. Từ đó suy ra đpcm.

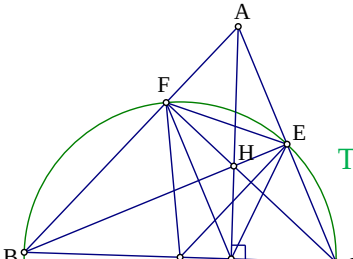


b). Ta có tứ giác $BNJK$ nội tiếp nên

$NJK+NBK=180^0\Leftrightarrow NJK+NAM=180^0\Leftrightarrow NJK+NCM=180^0\Leftrightarrow NJK+NJO=180^0$ hay O,J,K thẳng hàng. Mặt khác ta cũng có: $KJB+IJB=KNB+BCI=KNB+BNA=180^0$ hay K,I,J thẳng hàng. Từ đó suy ra I,K,O thẳng hàng.

Câu 4) Phân tích định hướng giải:

Ta có: $BEC=CFB=90^0$. Suy ra H



là trực tâm của tam giác ABC.

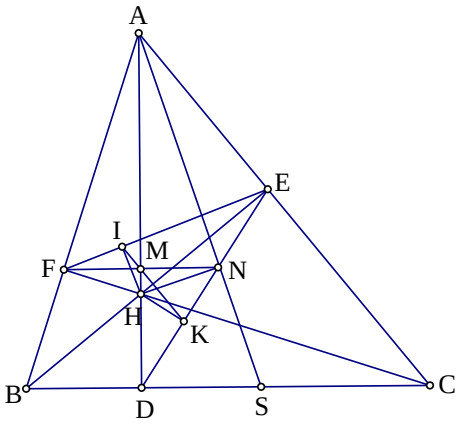
Hay $AH \perp BC \Rightarrow BFH = HDB = 90^0$

hay tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

Tương tự ta cũng có: $DHEC$ nội tiếp.

Ta có: $FBH = FDH = HCE = HDE \Rightarrow FDE = 2FBE = FIE$ tức là

$FIDE$ là tứ giác nội tiếp.



Câu 5)

+ Ta có tính chất quen thuộc:

BE là phân giác trong của góc

FED. (Học sinh tự chứng minh

điều này dựa vào các tứ giác

nội tiếp $BFHD, HIEK, HDEC$).

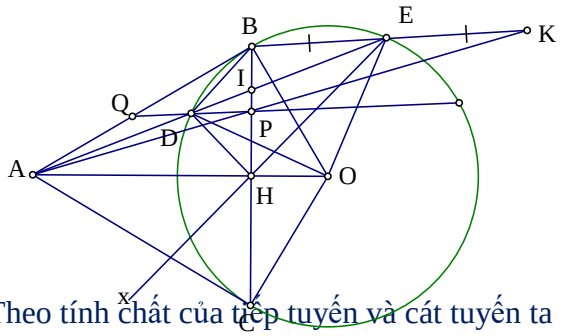
Từ đó suy ra $HK = HI$ và $EI = EK$. Do đó $KIE = \frac{1}{2}\left(180^0 - IEK\right) = 90^0 - IEH$. Mặt khác ta cũng có $MHF = 90^0 - FAH = 90^0 - FEH = 90^0 - IEH$. Suy ra đpcm.

+ Xét tứ giác $HMNK$ ta có: $HKN = 90^0$, mặt khác ta vừa chứng minh $FIMH$ nội tiếp nên suy ra $FMH = HIF = 90^0 \Rightarrow HMN = 90^0$. Như vậy $HKN + HMN = 180^0$ suy ra đpcm.

+ Ta có: $HNM = HKM = HIM = HFM \Rightarrow \Delta FHN$ cân tại $H \Leftrightarrow MF = MN$. Từ đó dễ dàng chứng minh được: $MAN = DAS$.

Câu 6)

Phân tích định hướng giải:



a). Áp dụng hệ thức lượng

trong tam giác vuông

ABO ta có: $AB^2 = AH.AO$. Theo tính chất của tiếp tuyến và cát tuyến ta có: $AB^2 = AD.AE$ nên suy ra $AH.AO = AD.AE \Leftrightarrow OHED$ nội tiếp.

<u>Ta có thể giải thích tường minh hơn như sau:</u>

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có: $AB^2 = AH.AO$.

Xét tam giác ABD và tam giác AEB ta có: BAD chung, $ABD = BED$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây). Từ đó suy ra ΔABD đồng dạng với ΔAEB nên $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow AD.AE = AB^2$.

b). Để giải quyết tốt câu hỏi này ta cần nắm chắc tính chất liên quan đến cát tuyến và tiếp tuyến. (Xem thêm phần: ‘’Chùm bài tập liên quan đến cát tuyến và tiếp tuyến’’) đó là: HI là phân giác trong của góc DHE và HA là phân giác ngoài của góc DHE

Thật vậy ta có: $OHE = ODE = OED$ mặt khác ta cũng có: $AHD = OED$ (Tính chất tứ giác nội tiếp). Suy ra $AHD = OHE \Rightarrow DHB = BHE$ hay HI là phân giác của góc DHE do $HA \perp HI$ nên suy ra HA là phân giác ngoài của góc DHE.

Quay trở lại bài toán:

Ta thấy rằng : Từ việc chứng minh: HI là phân giác trong của góc DHE và HA là phân giác ngoài của góc DHE ta có: $\frac{ID}{IE} = \frac{HD}{HE}$ và $\frac{AD}{AE} = \frac{HD}{HE}$ suy ra $\frac{ID}{IE} = \frac{AD}{AE}$

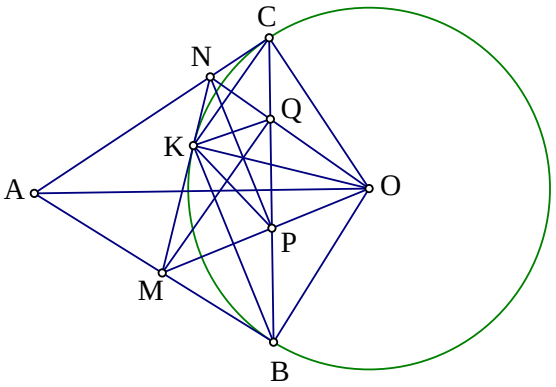
Mặt khác theo định lý Thales ta cũng có: $\frac{ID}{IE} = \frac{DP}{BE}$ suy ra $\frac{DP}{BE} = \frac{AD}{AE}$ mà $EK = BE$ nên $\frac{DP}{EK} = \frac{AD}{AE}$. Điều này chứng tỏ D là trung điểm của PQ và A, P, K thẳng hàng.

Câu 7).

Ta thấy rằng: Nếu tứ giác $MBOQ$ nội tiếp thì $MQB = MOB$

Mặt khác $MOB = MKB$ do tứ giác $MBOK$ nội tiếp suy ra $MQB = MKB$.

Như vậy ta cần quy bài toán về chứng minh $MKQB$ nội tiếp.

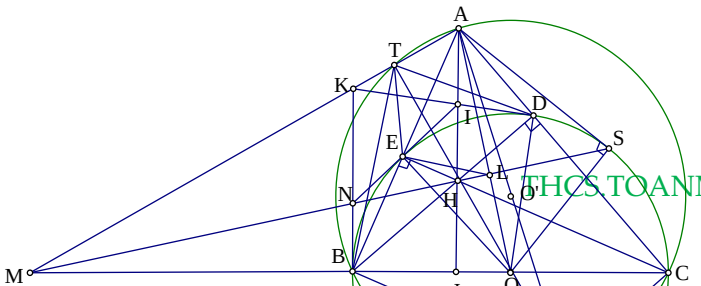


Ta có: $ABC = ACB = NKQ$ (Tính chất tiếp tuyến).

Như vậy $MKQB$ là tứ giác nội tiếp. Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $NKPC$ nội tiếp nên cũng suy ra được: $NCOP$ nội tiếp.

Câu 8).

a). Giả sử đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ thấy H là trực tâm tam giác ABC



O là trung điểm BC.

Những điểm đặc biệt này

giúp ta nghỉ đến bài toán

đặc biệt liên quan đến

đường thẳng, đường tròn Ơ le.

Kẻ đường kính AF của (O'). Ta dễ chứng minh được: $BHCF$ là hình bình hành và H,O,F thẳng hàng. Ta có: $MTB=ACB$ do $BTAC$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác $KDB=DBC\equiv ACB$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây). Từ đó suy ra $KDB=KTB$ tức là tứ giác $TKBD$ nội tiếp.

Để ý rằng: Tứ giác $BKDO$ nội tiếp, từ đó suy ra 5 điểm O,B,K,T,D cùng nằm trên một đường tròn đường kính OK hay $OTK=90^0$. Mặt khác $FTA=90^0$ suy ra F,O,T thẳng hàng. Do đó 4 điểm F,O,H,T thẳng hàng. Tam giác MAO có AH,OT là hai đường cao nên suy ra H là trực tâm, do đó $ML\perp AO$ nên 5 điểm A,E,H,L,D cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra $ELA=EDA=EBC$ tức là tứ giác $BELO$ nội tiếp.

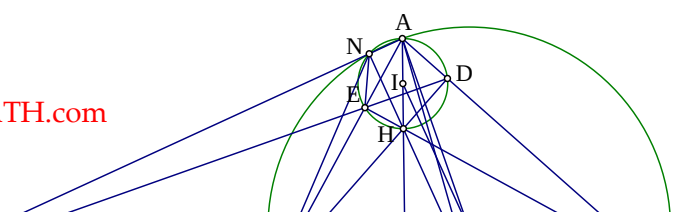
b). Ta có 5 điểm B,N,E,L,O cùng nằm trên đường tròn đường kính NO nên $NEO=NLO=90^0$, nhưng $KDB=DCB=BHJ=IHD$ suy ra I là trung điểm của $AH\Rightarrow IE=ID\Rightarrow IEO=90^0$. Như vậy: $IEO+NEO=180^0$ nên N,E,I thẳng hàng.

c) Ta có $MTE=ADE$ do $TADE$ nội tiếp. $ADE=ABC\Rightarrow ABC=MTE\Rightarrow MTEB$ nội tiếp. $\Rightarrow MEB=MTB$. Mà $BED=BTA$ cùng bù với $ACB\Rightarrow MEB+BED=MTB+BTA=180^0$ hay M,E,D thẳng hàng.

d) Vì $OE\perp IE\Rightarrow OE$ là tiếp tuyến của đường tròn đi qua các điểm A,E,T,H,D,L tâm I. Suy ra $OEL=OAE\Rightarrow \Delta OEL\#\Delta OAE\Rightarrow OA.OL=OE^2\Leftrightarrow OA.OL=OS^2\Rightarrow \Delta OLS\#\Delta OSA$. Mặt khác $OSA=90^0\Rightarrow OLS=90^0\Rightarrow MLO+OLS=180^0\Leftrightarrow M,L,S$ thẳng hàng. Mà H,M,N,L thẳng hàng nên suy ra M,H,S thẳng hàng.

Câu 9) Phân tích định hướng giải toán:

Bài toán này làm ta liên tưởng đến đường thẳng Ole, đường tròn Ơ le. Dựng đường kính AA'.Ta dễ thấy 4 điểm A,E,H,D cùng nằm trên đường tròn tâm I đường kính AH. Suy ra $HN\perp AN$. Mặt khác từ tính chất quen thuộc khi chứng minh $BHCA'$ là hình bình hành ta cũng suy ra $HIOM$ là hình bình hành do đó $HM//OI$. Ta lại có OI là đường nối tâm của 2 đường tròn $(O),(I)$ nên $OI\perp AN$ (Do OI nằm trên đường trung trực của AN). Từ đó suy ra $MH\perp AN$. Hay M,H,N thẳng hàng.



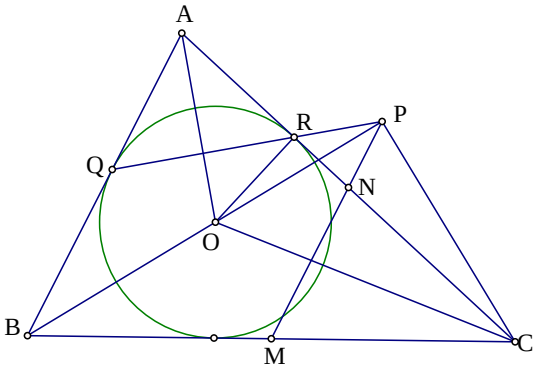
*) Để chứng minh K,E,D thẳng hàng. Ta chứng minh: $KEN+NED=180^0$. Ta tìm cách quy 2 góc này về 2 góc đối nhau trong một tứ giác nội tiếp.

+ Ta có: $NEA=NHA$ (Cùng chắn cung NA), $NHA=NKB$ cùng phụ với góc KAH suy ra $NEA=NKB\Leftrightarrow NKBE$ nội tiếp suy ra $NEK=NBK$. Mà $NBK=NAD$ (Do $NBCA$ nội tiếp).

+ Từ đó suy ra $KEN+NED=NAD+NED=180^0$ (Điều phải chứng minh).

Câu 10) Phân tích định hướng giải:

a). Ta cần dùng các góc để tận dụng điều kiện AR,AQ là các tiếp tuyến của (O) Thật vậy: $ORC=90^0$, vì vậy ta cần chứng minh $OPC=90^0$.



Mặt khác do NM là đường trung bình của tam giác ABC nên $ABP=BPM$ nhưng $ABP=PBM$ (Tính chất phân giác trong)

Từ đó suy ra ΔBMP cân tại $M\Rightarrow MB=MP=MC\Leftrightarrow\Delta BPC$ vuông tại $P\Rightarrow ORC=OPC=90^0$ hay $ORPC$ là tứ giác nội tiếp.

b). Để chứng minh P,Q,R thẳng hàng ta chứng minh: $PRC+CRQ=180^0$.

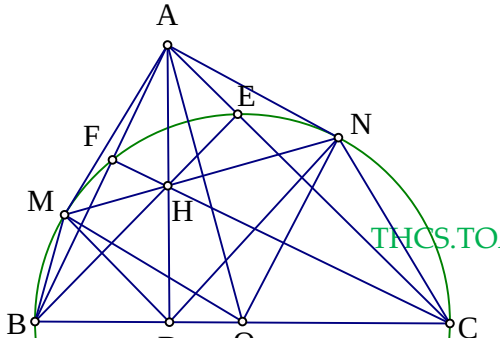
Thật vậy ta có: $PRC=POC$ mà $POC=OBC+OCB=\dfrac{B+C}{2}$,

$CRQ=180^0-ARQ=180^0-\left(\dfrac{180^0-A}{2}\right)=90^0+\dfrac{A}{2}$ suy ra $PRC+CRQ=\dfrac{B+C}{2}+90^0+\dfrac{A}{2}=180^0$

(Đpcm).

11) Phân tích định hướng giải:

a). Ta có: $AMO=ANO=ADO=90^0$ nên 5 điểm A,M,D,O,N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.



Suy ra các tứ giác
$AMDN, MNDO$ là tứ giác nội tiếp.

b). Ta có: $BDHF$ là tứ giác nội tiếp

nên: $AH.AD = AF.AB$

Mặt khác $AF.AB = AM^2$

nên $AM^2 = AH.AD = AF.AB$. Hay AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD suy ra $AMH = ADM$. Ta cũng có: $AMDN$

là tứ giác nội tiếp nên: $AMN = ANM = ADM$ từ đó ta suy ra $AMH = AMN$ hay M, H, N thẳng hàng.

Câu 12) Phân tích định hướng giải:

a). Ta thấy các điểm B, C, E, F nằm trên đường tròn đường kính

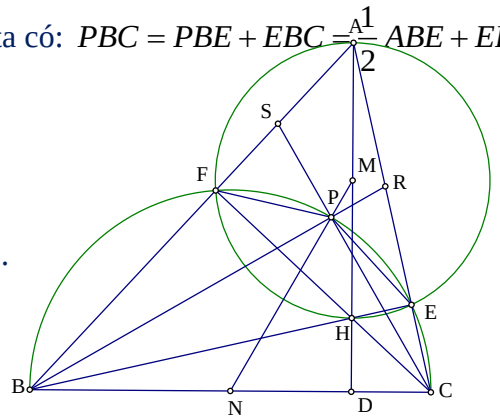
BC. Để chứng minh 5 điểm B, C, E, P, F nằm trên một đường tròn

Ta cần chứng minh $BPC = 90^0$. Thật vậy ta có: $PBC = PBE + EBC = \frac{1}{2}ABE + EBC$

$= \frac{1}{2}\left(90^0 - A\right) + \left(90^0 - C\right)$

Tương tự ta cũng có: $PCB = PCF + FCB$.

$= \frac{1}{2}\left(90^0 - A\right) + \left(90^0 - B\right)$. Từ đó suy ra



$PBC + PCB = 270^0 - \left(A + B + C\right) = 90^0 \Rightarrow BPC = 90^0$. Vậy điểm P thuộc đường tròn đường kính

BC.Mặt khác BP là phân giác của góc ABH nên P là trung điểm của cung nhỏ EF.

b). Để ý rằng M, N là tâm của hai đường tròn đường kính BC và đường tròn đường kính AH Do hai đường tròn cắt nhau theo dây cung EF nên MN đi qua trung điểm của cung EF. Hay M, N, P thẳng hàng.

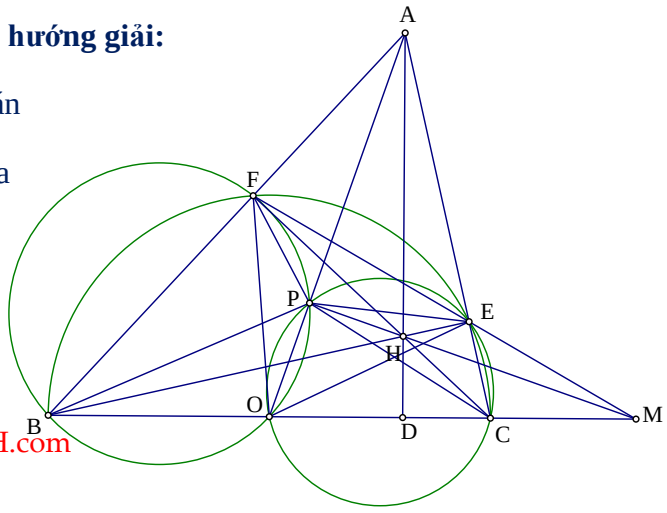
Câu 13) Phân tích định hướng giải:

a). Điểm P trong bài toán

chính là điểm Miquel của

tam giác ABC.

+ Ta dễ thấy 4 điểm



A,F,H,E cùng nằm

trên đường tròn

đường kính AH.

Bây giờ ta chứng minh $AFPE$ là tứ giác nội tiếp.

Thật vậy ta có: $FPE=360^0-FPO-EPO$

$=360^0-\left(180^0-B\right)-\left(180^0-C\right)=B+C$ suy ra $EPF+A=180^0\Rightarrow AEPF$ là tứ giác nội tiếp hay 5 điểm A,E,P,F,H cùng nằm trên đường tròn đường kính $AH\Rightarrow EFPH$ là tứ giác nội tiếp.

+ Xét tứ giác $BPHC$ ta có: $BPH=BPE-HPE=BPO+OPE-HFE=BFO+180^0-C-HBC$
$=B+180^0-C-\left(90^0-C\right)=90^0+B$. Mặt khác ta cũng có: $HCB=90^0-B\Rightarrow HCB+BPH=180^0$ hay $BCHP$ là tứ giác nội tiếp.

+ Ta có: Ta có: $FPA=FEA=FBC\Rightarrow FPA+FPO=180^0\Rightarrow A,P,O$ thẳng hàng.

$FEP=FAP=\frac{1}{2}sđ\left(BO-FP\right)$, $PBM=PFO=\frac{1}{2}sđ PO=\frac{1}{2}sđ\left(FO-FP\right)$, mặt khác ta có:

$OB=OF\Rightarrow sđOB=sđOF$ suy ra $FEP=PBM\Leftrightarrow MEPB$ là tứ giác nội tiếp.

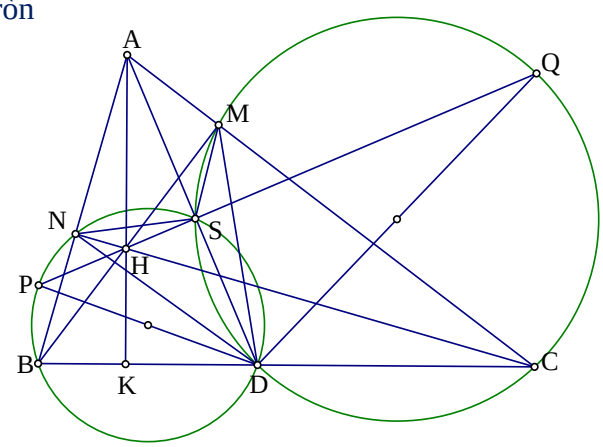
b). Theo câu a ta có: $MEPB$ nội tiếp nên

$BPM=BEM\Leftrightarrow BPO+OPM=BEC+CEM\Leftrightarrow BPO+OPM=BEC+AEF$ mà

$AEF=FBO=BFO=BPO\Rightarrow OPM=BEC=90^0$ hay ΔOPM là tam giác vuông tại P

Chú ý: Bài toán này có thể giải theo cách như bài 1: Đó là chỉ ra $OH\perp AM$ suy ra H là trực tâm tam giác AOM, ngoài ra ta cũng thấy P,H,M thẳng hàng.

Câu 14) Phân tích định hướng giải. Gọi S là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn $\left(w_1\right),\left(w_2\right)$. Ta dễ chứng minh được $ANSM$ là tứ giác nội tiếp (Đây là bài toán rất quen thuộc) từ đó suy ra 5 điểm A,N,H,S,M cùng nằm trên một đường tròn.



+ Trước hết ta chứng minh: A,S,D thẳng hàng: Ta có:

$ASN=AHN$ cùng chắn cung AN, $NSD=180^0-NBD=NHK$ do các tứ giác $NSDB,NHKB$ nội

tiếp . Suy ra $ASN+NSD=AHN+NHK=180^0$ do đó A,S,D thẳng hàng: +

Vì 5 điểm A,N,H,S,M cùng nằm trên một đường tròn nên: $ASH=90^0$. Vì DP là đường kính của (w_1) suy ra $PSD=90^0$, DQ là đường kính của (w_2) nên $DSQ=90^0$ điều đó chứng tỏ các tia PS,HS,QS trùng nhau. Hay P,S,Q thẳng hàng.

Câu 15).

Giả sử BN,CM cắt nhau tại R.

Ta cần chứng minh $ABRC$ nội tiếp.

Ta có $\Delta ABC\#\Delta PAC$ vì

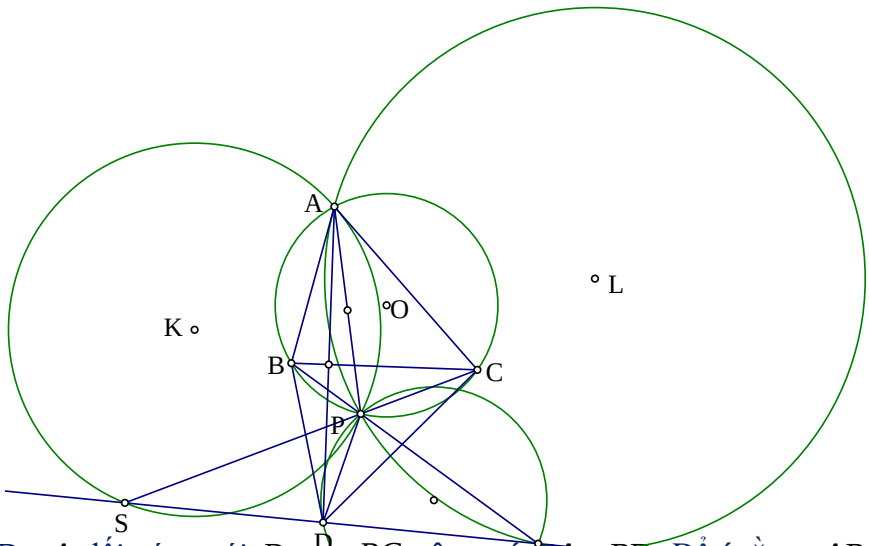
(C chung, $CAP=ABC$)

suy ra $\frac{PA}{AB}=\frac{PC}{AC}$ (1) $\Delta ABC\#\Delta QBA$

vì (B chung, $BCA=QAB$) suy ra

$\frac{QB}{AB}=\frac{QA}{AC}$ (2). Từ (1), (2) ta có: $\frac{QB}{QA}=\frac{PA}{PC}$. Vì $PA=PM$, $QA=QN$ suy ra $\frac{QB}{QN}=\frac{PM}{PC}$. Mặt khác $MPC=PAC+ACB, NQB=ABC+QAB$ (Tính chất góc ngoài tam giác). Suy ra $MPC=NQB$ hay $\Delta MPC\#\Delta BQN\Rightarrow BNQ=PCM\Rightarrow QCNR$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $CRN=CQN=BAC\Leftrightarrow ABRC$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 16). Phân tích định hướng giải:



a). Do A đối xứng với D qua BC nênta có ~~$BA=BD$~~. Để ý rằng: AB là tiếp tuyến của (L) nên $BA^2=BT.BP\Rightarrow BD^2=BT.BP$ điều này chứng tỏ
BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DPC.

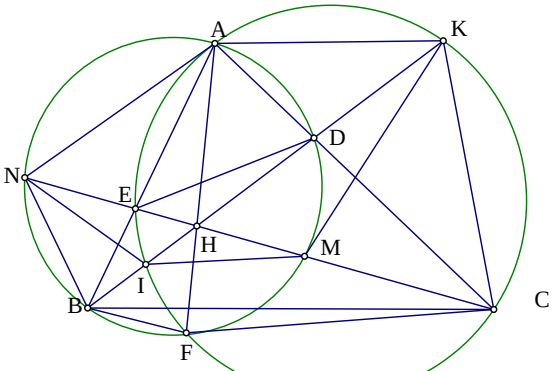
b). Từ chứng minh ở câu a ta có: $\Delta BDT\# \Delta BPD \Rightarrow BDT = BPD$.

Tương tự ta cũng có: $CDS = CPD$.

Ta có: $SDB + BDT = SDC - BDC + BDT = CPD - BAC + BPD = \left(CPD + BPD\right) - BAC$ Mặt khác ta có: $CPD + BPD = 360^0 - BPC$. Nhưng $BPC + BAC = 180^0$ do tứ giác $ABPC$ nội tiếp. Vậy $SDB + BDT = 180^0$ hay 3 điểm S, D, T thẳng hàng.

Câu 17)

Phân tích định hướng giải:



a). Theo giả thiết ta có: $ABD = ACE$

suy raTứ giác $BEDC$ là tứ giác

nội tiếp.Suy ra $HB.HD = HE.HC$

Tứ giác $BNDM$ nội tiếp nên:

$HB.HD = HM.HN$. Tứ giác $EICK$ nội tiếp nên $HI.HK = HE.HC$

Kết hợp các đẳng thức trên ta suy ra $HM.HN = HI.HK$ suy ra $NIMK$ là tứ giác nội tiếp.

Hay bốn điểm N, I, M, K cùng nằm trên một đường tròn.

b). Giả sử đường thẳng AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại điểm F . Ta có tứ giác $NFMA$ nội tiếp nên: $HF.HA = HM.HN$ mặt khác theo chứng minh ở câu a) ta có: $NIMK$ nội tiếp nên: $HM.HN = HI.HK$ suy ra $HF.HA = HI.HK$ suy ra 4 điểm I, F, K, A cùng nằm trên một đường tròn. Điều đó chứng tỏ hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACE cắt nhau tại F và A, H, F thẳng hàng.

c) Ta có $AMN = MAC + MCA$ (Góc ngoài của tam giác). Mặt khác $ACM = ABD$ (giả thiết) suy ra $AMN = ABD + MAC = AND + MAD = AND + MND = ANM$. Suy ra tam giác AMN cân tại A.
Chú ý rằng: Chứng minh tương tự ta cũng có: AIK cân tại A suy ra A là tâm vòng tròn ngoại tiếp tứ giác $NIMK$.

Câu 18) Phân tích định hướng giải :

a). Gọi N là giao điểm của PO

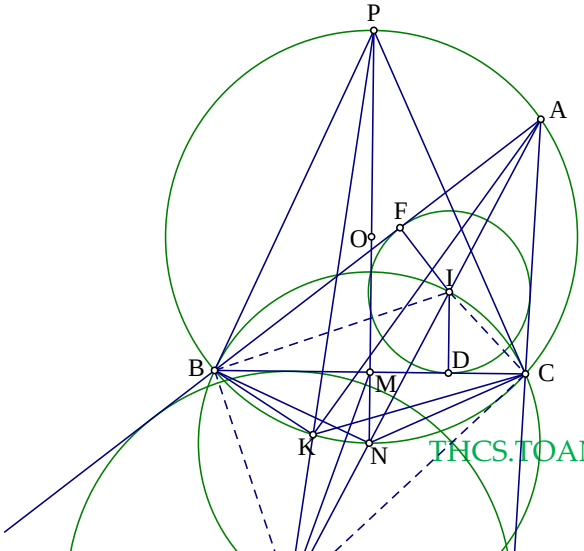
với đường tròn (O) thì N

là điểm chính giữa của cung BC

(không chứa A). F là tiếp điểm

của (I) với AB.

Ta có các tính chất quen thuộc sau:



+ A, I, N, I_a thẳng hàng

+ Tam giác NIB, NIC cân tại N

(Hay N là tâm

vòng tròn ngoại tiếp tam giác IBC)

(Xem thêm phần góc với đường tròn)

+ $BI_a \perp BI, CI_a \perp CI$ (Phân giác trong

và phân giác ngoài cung một góc thì vuông góc với nhau).

Từ đó suy ra tứ giác IBI_aC là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm N .

b). Để chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP ta chứng minh: $NI_a{}^2 = NM.NP$.

Mặt khác $NI_a = NB$ nên ta cần chứng minh: $NB^2 = NM.NP$. Nhưng điều này là hiển nhiên do:

+ NP là đường kính của (O) nên $NBP = 90^0$, M là trung điểm của BC nên $PN \perp BC$ tại M + Hệ thức lượng trong tam giác vuông PBN cho ta $NB^2 = NM.NP$.

c). Vì $KAI \equiv KAN = KPN$ (Góc nội tiếp) , $KPN \equiv I_aPN$ nhưng NI_a là tiếp tuyến của ngoại tiếp tam giác I_aMP nên $I_aPN = NI_aM$.

Như vậy ta cần chứng minh: $NI_aM = DAI$ (*).Ta có: $MN//ID$ nên $MNI_a = DIA$ do đó ta cần chứng minh: $\Delta NMI_a \# \Delta IDA$.

Điều này tương đương với: $\frac{NM}{ID} = \frac{NI_a}{IA}$, nhưng ta có: $ID = IF$, $NI_a = NB$ nên ta cần chứng minh: $\frac{NM}{FI} = \frac{NB}{IA}$.

Để ý rằng: $\Delta MNB, \Delta FIA$ có: $MNB = IFA = 90^0$, $NBM = \frac{1}{2}BAC = IAF \Rightarrow \Delta MNB \# \Delta FIA$. (Bài toán được giải quyết).

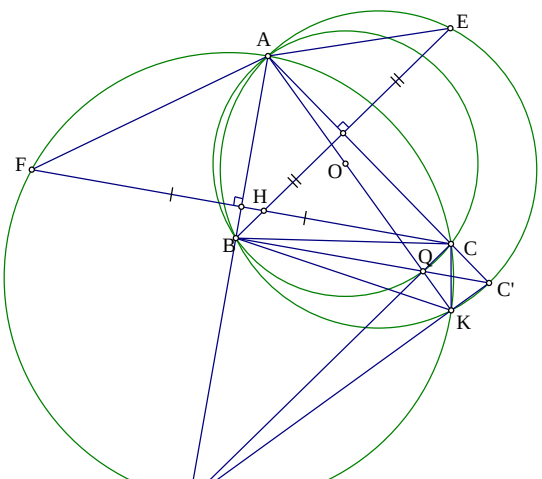
Câu 19) Phân tích định hướng:

Vì $BC = R\sqrt{3}$. Áp dụng công thức

$BC = 2R\sin BAC = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ do đó

$A = 60^0$. Trong bài toán



có các yếu tố cố định là

BC, A nên ta tập trung khai

thác các yếu tố này.

a). Ta có: $BKC = AKB + AKC$. Mà $AKB = AEB = ABE = 90^0 - A = 30^0$,

$AKC = AFC = ACF = 90^0 - A = 30^0$, suy ra $BKC = AKB + AKC = 60^0$. Do đó K luôn thuộc cung chứa góc nhìn đoạn BC dưới một góc 60^0.

b). Ta có tam giác KBC có độ dài cạnh BC không đổi , nên diện tích lớn nhất khi và chỉ khi đường cao hạ từ K đến BC lớn nhất. Tức là K là trung điểm cung BC, khi đó A là trung điểm cung lớn BC. Tam giác KBC đều nên độ dài đường cao tam giác đều KBC là $\sqrt{3}R.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}R$,

$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2}R.\sqrt{3}R = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

c) Để ý rằng: $AB \perp CF$ tại trung điểm của CF, $AC \perp BE$ tại trung điểm của CE nên kéo dài AB cắt đường tròn (ACF) tại A' thì AA' là đường kính của đường tròn. Kéo dài AC cắt đường tròn (ABE) tại $C' \Rightarrow AC'$ là đường kính của đường tròn.

Dễ thấy A', K, C' thẳng hàng. $ACA' = 90^0$, $ABC' = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nữa đường tròn) nên các đường cao CA', BC' của tam giác $AA'C'$ cắt nhau tại trực tâm Q.Nên đường thẳng AK đi qua Q. Mặt khác tứ giác $ABQC$ nội tiếp $ABQ = ACQ = 90^0 \Rightarrow CQ$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABQC$. Điều đó chứng tỏ CQ đi qua O cố định.

Câu 20) Bài toán này làm ta liên

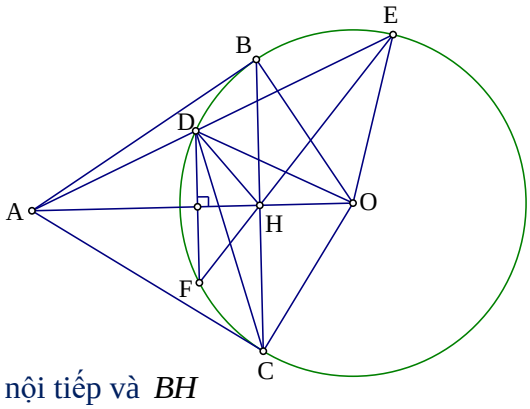
tưởng đến tính chất quen thuộc:

Từ điểm A ở ngoài đường tròn

(O) dựng hai tiếp tuyến

AB, AC và cát tuyến ADE.

Gọi H là giao điểm của



BC và AO thì $HDEO$ là tứ giác nội tiếp và BH

là đường phân giác trong của DHE. (Các em học sinh tự chứng

minh tính chất này)

Quay trở lại bài toán:

Ta có BH là đường phân giác trong của DHE nên $DHA = EHO = AHF$. Suy ra $AHE + AHF = 180^0$. Nên ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Câu 21)

Do 5 điểm A, B, K, O, C

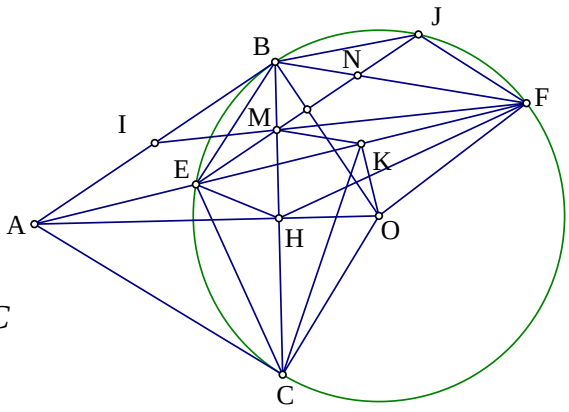
cùng nằm trên một đường tròn

nên ta có: $CKO = OBC$. Mà

$EKC = 90^0 - CKO$ suy ra

$EKC = 90^0 - OBC = BMJ = EMC$

hay tứ giác $EMKC$ nội tiếp.



Kéo dài FM cắt AB tại I.

Ta chứng minh I là trung điểm của AB. Do tứ giác $EMKC$ nội tiếp nên $EKM = ECM$ mà $ECM = EFB$ suy ra $EKM = EFB \Leftrightarrow MK // FB$

Suy ra M là trung điểm của EN. Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{ME}{AI} = \frac{MN}{BI} = \frac{FM}{FI}$ mà $ME = MN \Rightarrow AI = BI$ (đpcm).

Câu 22) Giả sử GD cắt TO tại I, TF cắt AO tại J. Khi đó ta dễ dàng chứng minh được: $AO \perp EF$ tại J. Thật vậy: Dựng tiếp tuyến Ax của (O) thì $Ax \perp AO$. Ta có: $xAC = ABC$ mà $ABC = AEF \Rightarrow xAC = AEF \Rightarrow Ax // EF$ hay $AO \perp EF$.

Ta cũng chứng minh được: $GS \perp TO$ tại điểm I. Thật vậy ta có:

$MFB = MBF \Leftrightarrow MFD + DFB = MTF + TFB$ mà

$DFB = DCA = EFA = TFB$

suy ra $MFD = MTF$ hay

$\Delta MDF \# \Delta MTF$ suy ra

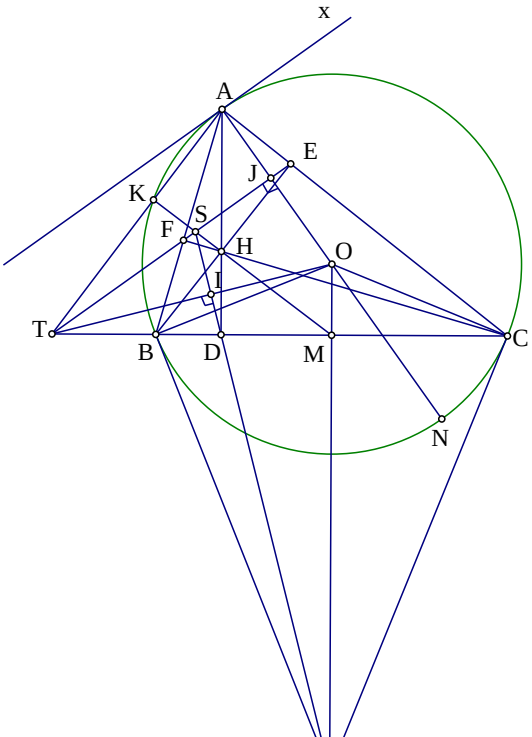
$MF^2 = MD.MT$. Mặt khác ta

có: $MO.MG = MB.MC = MF^2$

(Do $MB = MC = MF$)

Suy ra $MO.MG = MD.MT$

hay $\Delta MOT \# \Delta MDG \Rightarrow GI \perp OT$.



Dễ thấy 4 điểm A,K,H,E cùng

nằm trên đường tròn đường kính AH.

Tứ giác $AKBC$ nội tiếp nên: $TK.TA=TB.TC$

Tứ giác $EFBC$ nội tiếp nên suy ra $TK.TA=TF.TE$ hay tứ giác $AKFE$ nội tiếp. Từ đó suy ra 5 điểm A,K,F,H,E cùng nằm trên một đường tròn.

Tứ giác $JSIO$ nội tiếp nên $TS.TJ=TI.TO$. Tứ giác $IOMD$ nội tiếp

nên $TI.TO=TM.TD$. Xét tứ giác $MDFE$ ta có:

$FDE=180^0-FDB-EDB=180^0-A-A=180^0-2A$ .Mặt khác ta cũng có

$FME=180^0-FMB-EMC=180^0-\left(180^0-2B\right)-\left(180^0-2C\right)=2(B+C)-180=180^0-2A$. Suy ra tứ giác $MDFE$ nội tiếp. Do đó $TD.TM=TE.TF$. Nhưng $TE.TF=TK.TA$ suy ra $TS.TJ=TA.TK$ hay tứ giác $AKSJ$ nội tiếp $SKA=SJA=90^0\Rightarrow S\in HK$. Mặt khác từ chứng minh trên ta cũng có: $AKMD$ nội tiếp nên $MKA=MDA=90^0$. Suy ra M,H,S,K thẳng hàng.

Câu 23) Trong bài toán có giả thiết H

là trung điểm AB.Mặt khác các điểm

$A.B,H$ có liên quan đến cát tuyến

qua M. Để tận dụng điều này ta sẽ

dựng đường thẳng qua D song

song với đường thẳng (d) cắt HC,BM

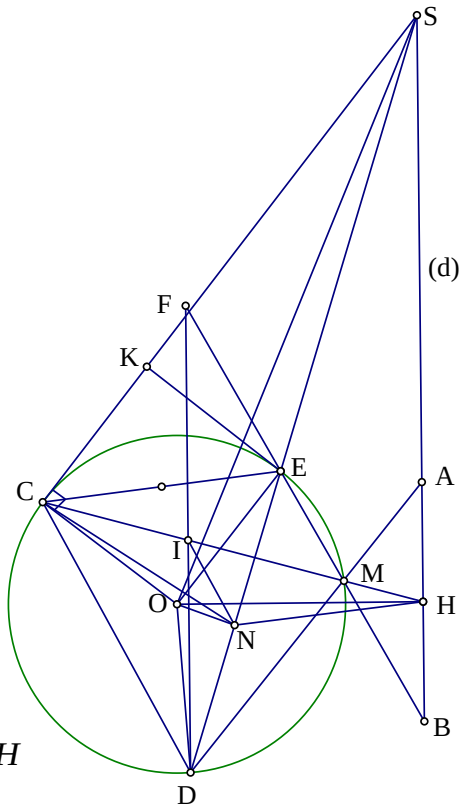
tại I,F. Khi đó ta dễ chứng minh được

I là trung điểm của DF theo định lý

Thales từ đó suy ra IN là đường trung

bình của tam giác IEF.Để chứng minh

tứ giác $HNCS$ nội tiếp ta chứng minh:



$NCH=HSN$. Mặt khác ta có: $IDN=NSH$

so le trong. Như vậy ta cần chứng minh:

$NCH=IDN$ tức là ta cần chứng minh $ICDN$ nội tiếp.

+ Thật vậy: $INE=NEM$ (so le trong) mà $MEN\equiv MED=MCD$ suy ra

$INE = MCD$ hay $ICDN$ là tứ giác nội tiếp.

+ Ta có tứ giác $HNCS$ nên: $SNH = SCH$. Tứ giác $ONHS$ nội tiếp nên

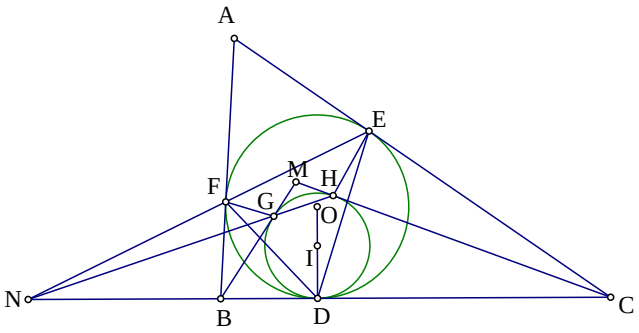
$SNH = SOH$ suy ra $SCH = SOH$. Hay tứ giác $SCOH$ là tứ

giác nội tiếp. Nhưng $OHS = 90^0 \Rightarrow OCS = 90^0 \Rightarrow SC$

là tiếp tuyến của (O). Mà KC cũng là tiếp tuyến của (O)

nên ta suy ra S, K, C thẳng hàng.

Câu 24)



Theo tính chất tuyến

tuyến ta có: $CE = CD = CH$,

$BF = BD = BG$, $MH = MG$,

$AE = AF$

+ Ta có:

$HEF = 180^0 - AEF - HEC$. Mặt khác $AEF = \dfrac{180^0 - A}{2}$, $HEC = \dfrac{180^0 - ECH}{2}$ suy ra

$HEF = \dfrac{ECH + A}{2}$ (1)

+ Ta có: $EGH = FGM + MGH$ nhưng $FGM = 180^0 - FGB = 180^0 - \dfrac{180^0 - FBG}{2} = 90^0 + \dfrac{FBG}{2}$,

$MGH = \dfrac{180^0 - GMH}{2} = 90^0 - \dfrac{\left(180^0 - MBC - MCB\right)}{2} = \dfrac{\left(MBC + MCB\right)}{2}$ suy ra

$EGH = 90^0 + \dfrac{FBG + MBC + MCB}{2}$ (2). Từ (1) và (2) ta có:

$HEF + EGH = \dfrac{ECH + A}{2} + 90^0 + \dfrac{FBG + MBC + MCB}{2} = 90^0 + \dfrac{A + B + C}{2} = 180^0$ Hay tứ giác $EHGF$

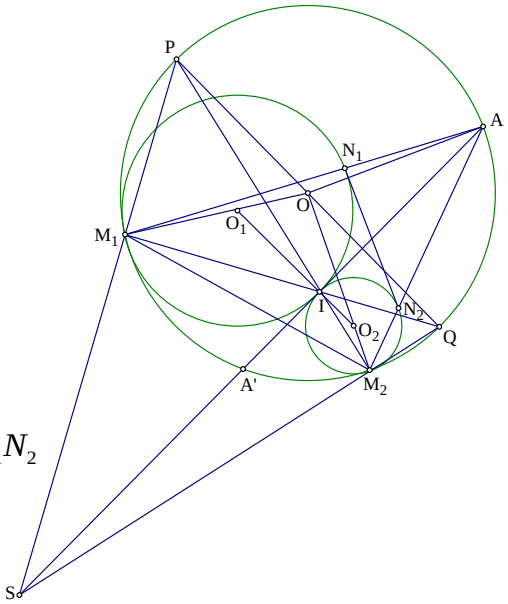
nội tiếp.

Việc chứng minh trực tiếp N, G, H thẳng hàng là rất khó. Để khắc phục khó khăn này ta giả sử NG cắt đường tròn (I) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EHGF$ lần lượt tại H_1, H_2. Ta sẽ chứng minh $H_1 \equiv H_2 \equiv H$.

Thật vậy: Theo tính chất tiếp tuyến, cát tuyến ta có: $NG.NH_1 = ND^2$, $NG.NH_1 = NE.NF$,

$NE.NF = ND^2$, $NG.NH_2 = NE.NF \Rightarrow NH = NH_1 = NH_2 \Leftrightarrow H_1 \equiv H_2 \equiv H$ là điều phải chứng minh.

Câu 25)



Phân tích định hướng giải toán:

a). Do AI là tiếp tuyến chung

của các đường tròn $(O_1),(O_2)$

nên $AN_1.AM_1 = AI^2 = AN_2.AM_2$

Từ đó suy ra tứ giác $N_1M_1N_2M_2$ nội tiếp.

b). Để chứng minh OA vuông góc với N_1N_2

Ta chứng minh $AN_1N_2 + OAM_1 = 90^0$

Thật vậy ta có: Từ việc chứng minh

$N_1M_1N_2M_2$. Ta suy ra $AN_1N_2 = N_2M_2M = \frac{1}{2}M_1OA$

Do đó $AN_1N_2 + OAM_1 = \frac{1}{2}M_1OA + \frac{1}{2}\left(OAM_1 + OM_1A\right) = 90^0$ (Do tam giác M_1OA cân tại O). Vậy OA vuông góc với N_1N_2.

c) Ta có $AI \perp PQ \Rightarrow PQ//O_1O_2$. Gọi S là giao điểm của PM_1 và QM_2 thì O,O_2,M_2 thẳng hàng và $O_2I//OP \Rightarrow O_2IM_2 = M_2PO$ mặt khác ta có: $O_2IM_2 = IM_2O_2 \Rightarrow M_2PO = O_2IM_2$. Suy ra P,I,M_2 thẳng hàng . Tương tự Q,I,M_1 thẳng hàng. Mà PQ là đường kính của (O) nên $QM_1 \perp M_1P, QM_2 \perp M_2P$. Suy ra I là trực tâm tam giác SPQ. Suy ra AI qua S. Vậy ba đường thẳng AI, PM_1, QM_2 đồng quy tại I.

Câu 26)

a) Có hai trường hợp xảy ra:

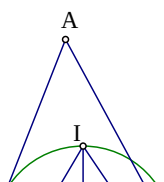
Trường hợp 1: E nằm trong đoạn NP. Ta có $OEN = OBP + BPE$ (Góc ngoài tam giác).

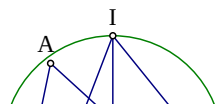
Ta có $OBP = \frac{B}{2}, EPB = 180^0 - NPA = 180^0 - \frac{\left(180^0 - A\right)}{2} = 90^0 + \frac{A}{2}$. Từ đó suy ra

$OEN = 90^0 + \frac{B}{2} + \frac{A}{2} = 180^0 - \frac{C}{2} = 180 - OCA$.

Trường hợp 2: E nằm ngoài đoạn NP. Ta có

$OEN = 180^0 - BPN - EBP = 180^0 - 90^0 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 90^0 - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{C}{2} = OCA$ (Đpcm)





b) Từ kết quả chứng minh ở câu a)

Ta suy ra $ONEC$ là tứ giác nội tiếp suy ra $ONC = OEC = 90^0$, Chứng minh tương tự ta cũng có: $OFPB$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $OFB = OPB = 90^0$ do đó $OFB = OEC \Leftrightarrow CFB = BEC$ suy ra 4 điểm B, E, C, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Gọi I là giao điểm của BE, CF. Từ chứng minh ở câu b ta suy ra O là trực tâm của tam giác IBC. Suy ra O, I, M thẳng hàng. Ta cũng có: I, F, E, O cùng nằm trên đường tròn đường kính OI nên K là trung điểm của OI. Từ đó suy ra K, O, M thẳng hàng.

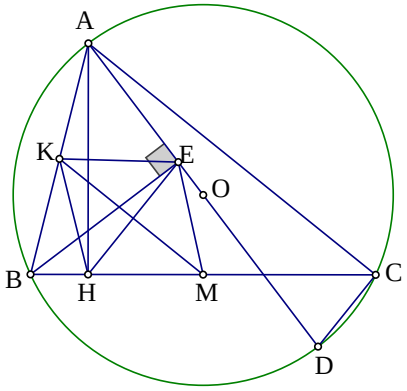
Câu 27)

a). Có $BHA = BEA = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BHEA$ nội tiếp.

$\Rightarrow HED = ABC$ mà

$ABC = ADC \Rightarrow$

$HED = EDC \Rightarrow HE // CD$

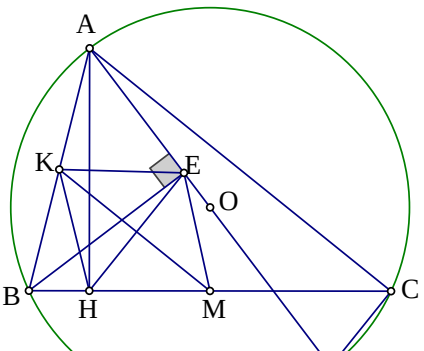


b) Nối K với E, K với H. Ta được $KE = KH = \frac{1}{2}AB \Rightarrow K$ thuộc trung trực của HE. Có $DC \perp CA$ và $HE // CD \Rightarrow HE \perp AC$.

Có $KM // AC$ và $HE \perp AC \Rightarrow KM \perp HE \Rightarrow KM$ là trung trực của $HE \Rightarrow ME = MH$ hay ΔMHE cân tại M.

Câu 28)

a). Ta có $AMO = ADO = ANO = 90^0$ nên 5 điểm A, M, D, O, N thuộc đường tròn tâm O' đường kính AO.



b) Ta có $ADB = ADC = 90^0$ (1) mà

$ADM = ADN$ (2) (góc nội tiếp chắn

hai cung bằng nhau).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

c) Qua I ta kẻ đường thẳng song song BC cắt AB, AC tại P, Q. Ta có các tứ giác $OMPI, OQNI$ nội tiếp nên $POI = PMI; QOI = INA$ mà $PMI = INA$ (do ΔAMN cân tại A). Nên $POI = QOI$. Xét ΔPOQ có OI vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên $IP = IQ$. Áp dụng hệ quả định lý Talet cho hai tam giác ABK và ACK có $PQ // BC$. Ta có $\frac{BK}{IP} = \frac{AK}{AI} = \frac{CK}{IQ} \Rightarrow BK = CK$ (đpcm).

Câu 29)

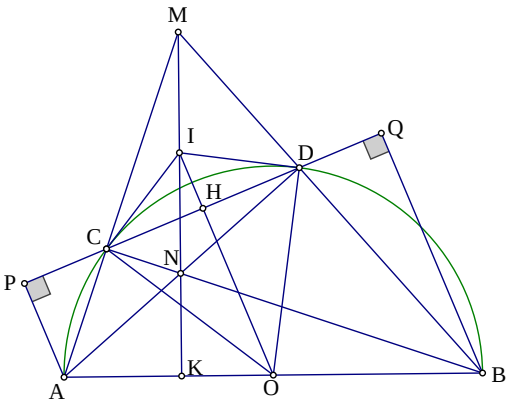
a). Ta có $ACB = ADB = 90^0$

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $MCN = MDN = 90^0$

$\Rightarrow MCN + MDN = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $MCDN$ nội tiếp



đường tròn tâm I đường kính MN (theo định lý đảo). Kẻ AP và AQ vuông góc với đường thẳng CD ta có tứ giác $APQB$ là hình thang vuông có OH là đường trung bình nên $AP + BQ = 2OH$.

Trong ΔOCD đều có OH là đường cao nên $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ không đổi. Vậy $AP + AQ = R\sqrt{3}$

không đổi. Theo giả thiết $COD = 60^0$ nên $\text{sđ}CD = 60^0$. $AMB = \frac{1}{2}\ \text{sđ}AB - \text{sđ}CD\ = 60^0$ nên

$CMD = 60^0$, ta có $CID = 2CMD = 120^0$

Trong tam giác DIH vuông có $DH = DI.\sin 60^0 \Rightarrow DI = \frac{DH}{\sin 60^0} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ (không đổi). Ta có tam giác CID, COD cân tại I và O có H là trung điểm CD nên IH và OH cùng vuông góc với CD suy ra I, H, O thẳng hàng.

c) $\Delta MCD \sim \Delta MBA$ (g.g)

nên $\frac{S_{MCD}}{S_{MBA}} = \left(\frac{MD}{MA}\right)^2 = \sin 30^{0\ 2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{4} S_{MBA}$.

S_{MCD} lớn nhất khi S_{MBA} lớn nhất. Kéo dài MN cắt AB tại K thì MK vuông góc với AB. Ta có MN không đổi, MK lớn nhất khi NK lớn nhất và N chạy trên cung 120^0 dựng trên AB; $NK\max$ khi N thuộc trung điểm cung này, khi đó tam giác MAB đều,

$S_{MBA}=\frac{1}{2}AB.MH=R^2\sqrt{3}$; $\max\ S_{MCD}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Cách khác: Kẻ $ME\perp CD$ thì $ME\le MH\le MI+IH$. Tính được $IH;MI$ theo R.

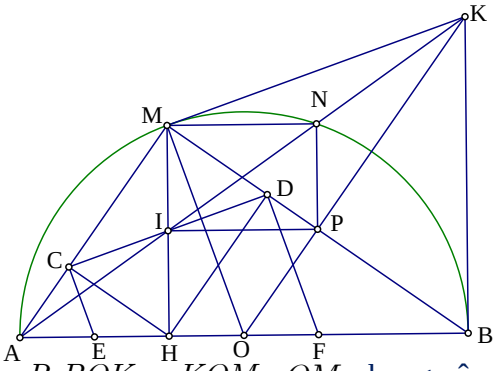
Câu 30)

a). Ta có $BOK=OAM$ (1) (đồng vị);

$MOK=AMO$ (2) (so le trong);

$OMA=OAM$ (3) (ΔAOM cân) (3).

Từ (1),(2),(3) ta có $BOK=KOM$.



Xét ΔBOK và ΔKOM có $OB=OM=R;BOK=KOM$; OM chung nên

$\Delta BOK=\Delta MOK$ (c.g.c) suy ra $OMK=OBK=90^0\Rightarrow OMK+OBK=180^0$ nên bốn điểm O,B,K,M cùng thuộc một đường tròn đường kính OK.

b) Ta có tứ giác $CHDM$ là hình chữ nhật nên CD và MH cắt nhau tại I và là trung điểm của mỗi đường. Ta chứng minh K,I,A thẳng hàng. Gọi MB cắt OK tại P; KA cắt O tại N cắt MH tại I' ta có tứ giác $BPNK$ nội tiếp (vì $BPK=BNK=90^0$) nên cùng bù với PNK mà so le. Nên $I'NP=I'MP$ suy ra tứ giác $I'MNP$ nội tiếp suy ra $MNA=MPI$ mà $MNA=MBA\Rightarrow MBA=MPI'$ ở vị trí đồng vị nên $PI'//AB$ mà $PI//AB$ nên $I\equiv I'$. Vậy AK đi qua I hay ba đường thẳng CD,MH,AK đồng quy.

c) Ta có $EF=\frac{1}{2}\ AH+HB\ =\frac{1}{2}AB=R$ (không đổi) $\Delta EHI=\Delta ECI$ (c.c.c);

$\Delta FHI=\Delta DHI$ (c.c.c) nên $S_{CDFE}=2.S_{EIF}$

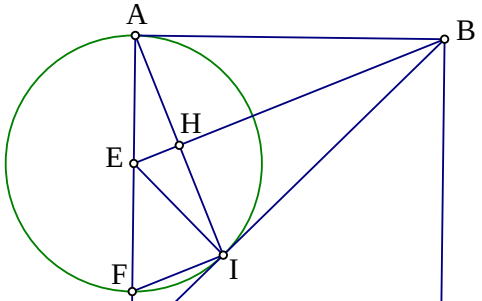
$S_{EFI}=\frac{1}{2}EF.IH=\frac{R.MH}{4}\le\frac{R.MO}{4}=\frac{R^2}{4}\Rightarrow S_{CDFE}\le\frac{R^2}{4}\ \max\ S_{CDFE}=\frac{R^2}{4}\Leftrightarrow H\equiv O$ khi M thuộc chính giữa AB.

Câu 31)

a). Tam giác ABI cân tại B nên

$BAI=BIA$ suy ra $EAI=EIA$

hay $EA=EI$ (1).Xét ΔDIE vuông



cân đỉnh I do đó $IE = ID$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AE = ID$ (đpcm).

b) Do $\frac{DA}{DI} = \frac{ID}{FD} \Leftrightarrow DA.DF = ID^2$ và $EI \perp BD$ nên đường tròn E đi qua I và nhận BD làm tiếp tuyến. Từ đó ta có $DAI = DIF$.

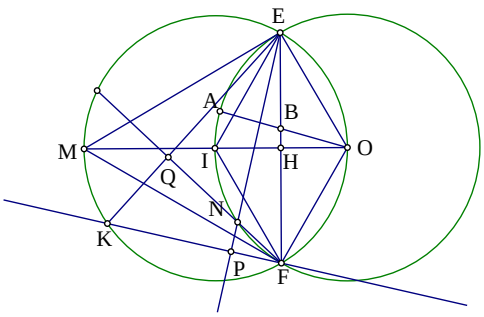
Xét $\Delta AID \sim \Delta IFD$ có $\frac{DA}{DI} = \frac{ID}{FD} \Leftrightarrow DA.DF = ID^2$. Mặt khác $ID = IE$ nên $DA.DF = IE^2$ (1). Do ΔABI cân tại B nên $EB \perp AI$.

Xét $\Delta IHE \sim \Delta BIE$ có $\frac{IE}{EB} = \frac{EH}{IE} \Leftrightarrow EH \pm EB = IE^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DF.DA = EH.EB$ (đpcm).

Câu 32)

a). Ta có ME, MF là tiếp tuyến của đường tròn O, từ đó dễ dàng chứng minh được $EI = FI$ của đường tròn O. Dễ dàng chứng minh được EI, FI, MI là các đường phân giác của ΔMEF.



b) Gọi EF cắt OM tại H. Dễ chứng minh được $OA.OB = OH.OM = OE^2$

c) Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMEF và ΔMEF đều có cạnh bằng $R\sqrt{3}$. Sử dụng góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung để chứng minh $FQ \perp EK$. Ta có $PN.PK + QN.QK = 2S_{KPNQ} \le KN.QP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $KN \perp PQ$ (*). Mà N là trực tâm tam giác EKF nên $KN = 2.IH = R$ (1). Ta có $\Delta KPQ \sim \Delta KEF$ nên $\frac{PQ}{EF} = \frac{KP}{KE} = \frac{1}{2} \Rightarrow PQ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (2). Thay (1),(2) vào (*) ta có đpcm, dấu bằng khi $KN \perp PQ$ hay N, I trùng nhau.

Câu 33)

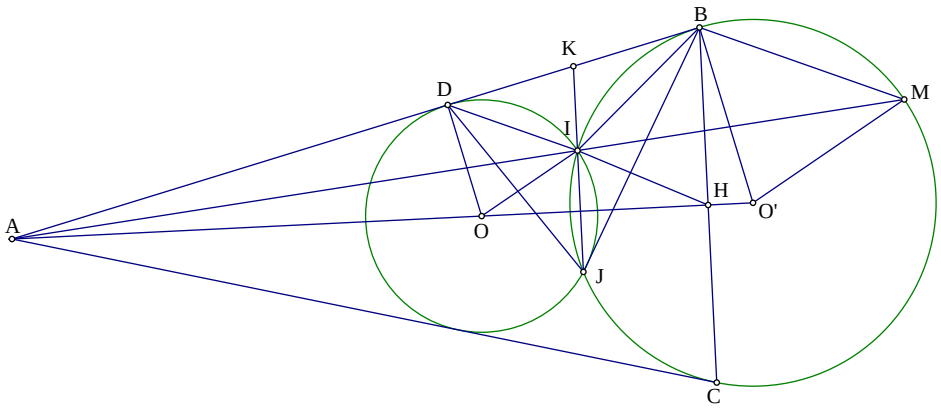
a) $AMB = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AB - \text{sđ}PC\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AC - \text{sđ}PC\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}AP = ABP$.

b) $PA = PC \Rightarrow CAP = ABP = AMB \Rightarrow CM = AC = AB$.

Xét $\Delta MAC \sim \Delta MBP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MP}$

$\Rightarrow MA.MP = MB.MC = MB.AB.$

Câu 34)



a) Do AO và AO' là hai phân giác của $BAC \Rightarrow A, O, O'$ thẳng hàng.

Có $BJI = IBK = \dfrac{1}{2}$ sđBI; BKI chung $\Rightarrow \Delta KBI \sim \Delta KJB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{KI}{KB} = \dfrac{KB}{KJ} \Rightarrow KB^2 = KI.KJ$ (1). Tương tự

$\Delta KDI \sim \Delta KJD \Rightarrow \dfrac{KI}{KD} = \dfrac{KD}{KJ} \Leftrightarrow KD^2 = KI.KJ$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow KB = KD.$

b) Xét $\Delta ABO'$ vuông có: $AB^2 = AH.AO'$ (3).

Lại có $ABI = AMB = \dfrac{1}{2}$ sđBI, BAI chung $\Rightarrow \Delta ABI \sim \Delta AMB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AI}{AB} \Rightarrow AB^2 = AM.AI$ (4). Từ (3) và (4)

$\Rightarrow AI.AM = AH.AO' \Rightarrow \dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AM}{AO'} \Rightarrow \Delta AHI \sim \Delta AMO'$ (vì $\dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AM}{AO'}$, A chung)

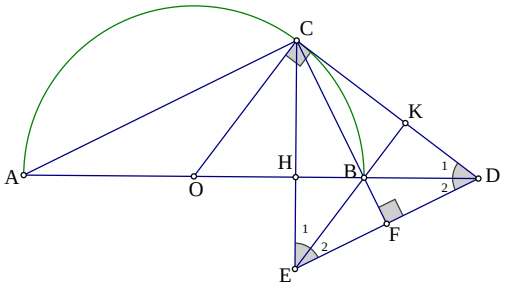
$\Rightarrow AHI = AMO' \Rightarrow$ tứ giác $MIHO'$ nội tiếp hay 4 điểm I, H, M, O' cùng thuộc một đường tròn.

c) Do $OD // O'B$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \dfrac{AO}{AO'} = \dfrac{OD}{O'B} = \dfrac{R}{R'} = \dfrac{OI}{O'M} = \dfrac{OI}{O'I}$ nhưng OI cắt $O'I$ và

A, I, M thẳng hàng $\Rightarrow OI // O'M \Rightarrow DOI = BO'M$. Mà $BDI = \dfrac{1}{2} DOI = \dfrac{1}{2}$ sđDI và

$BIM = \frac{1}{2}BO'M = \frac{1}{2}$sđ$BM \Rightarrow BDI = BIM \Rightarrow IM$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔBID hay AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔIBD.

Câu 35)



a). Ta có $DCB = CAB$

(cùng chắn BC), $BCE = CAB$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow DCB = BCE$. Do đó CB là tia phân giác của DCE.

b) Xét ΔCDE có: $\begin{cases} EK \perp CD \ \ BK \perp CD \\ DH \perp CE \ \ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow B$ là trực tâm ΔCDE

$\Rightarrow CB \perp DE$ tại F hay CB là đường cao của ΔCDE. Mà CB là tia phân giác của DCE nên ΔCDE cân tại $C \Rightarrow CED = CDE$. Mặt khác $D_1 = E_1$ (góc cạnh tương ứng vuông góc), $D_2 = E_2$. Do đó ΔBDE cân tại $B \Rightarrow BD = BE \Rightarrow BD + BK = BE + BK = EK$

Trong tam giác CKE vuông tại K có $EK < EC$ (cạnh huyền lớn nhất)

$\Rightarrow BK + BD < EC$.

c) Xét ΔABC có $ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BH.BA = BC^2$ (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông) Ta lại có: $\Delta BHC \sim \Delta BFD$ (g.g)

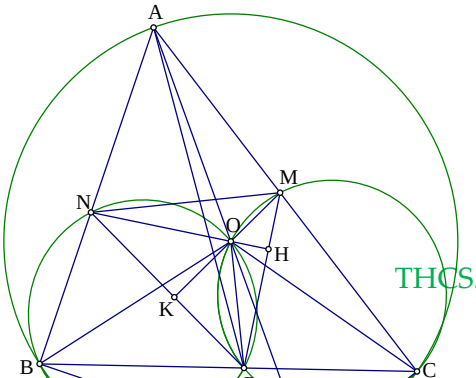
$\Rightarrow \frac{BH}{BF} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BH.BD = BC.BF$

$\Rightarrow BH.\ BA + BD\ = BC.\ BC + BF\ \Leftrightarrow BH.AD = BC.CF$ (1)\

Mặt khác ta có: $AC\ //DE$ (cùng vuông góc với CF) $\Rightarrow D_2 = CAB$ (so le trong) mà

$AHC = DFB = 90^0 \Rightarrow \Delta ACH \sim \Delta DBE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{DF} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow AH.BD = DF.AC$ (2). Mặt khác $\Delta ABC \sim \Delta CDF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CF}{DF} \Rightarrow BC.CF = DF.AC$ (3). Từ (1),(2) và (3) suy ra $BH.AD = AH.BD$.

Câu 36)



a) $OPM = OCM$ (nội tiếp chắn OM) mà $OPM = OAC$

(ΔOAC cân)

nên $OPM = OAC$ (1).

b) Tương tự $OPN = OAB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $MPN = BAC$. Kéo dài AO cắt O tại D. Ta có

$DBA = DBC; OBA = OAB$ nên

$90^0 = DBA = DBC + CBO + OBA = DAC + COB + OAB = OBC + BAC$

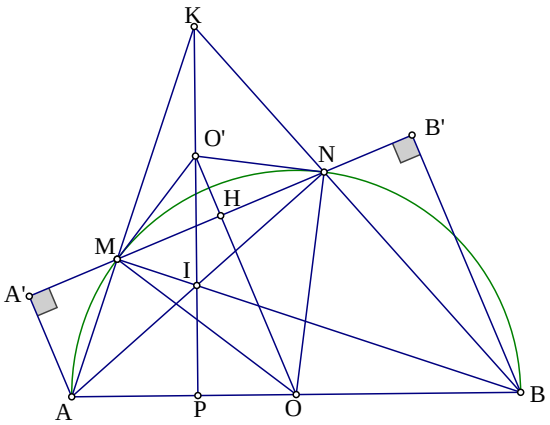
$\Rightarrow OBC + BAC = 90^0$ (đpcm)

c) Gọi H là giao điểm của NO và MP, MO cắt NP tại K. Ta có $HNP = OBC$ mà $OBC + BAC = 90^0$ và $BAC = HPN \Rightarrow HNP + HPN = 90^0$ hay $NH \perp MP$ (3). Tương tự $MK \perp NP$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra O là trực tâm ΔMNP (đpcm)

Câu 37)

a). Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên đường thẳng MN. Gọi H là trung điểm đoạn thẳng MN thì $OH \perp MN$.



Xét hình thang $AA'B'B$ có OH là đường trung bình nên

$$OH = \frac{1}{2}(AA' + BB') = \frac{R\sqrt{3}}{2}; MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}} = \frac{R}{2} \Rightarrow MN = 2MH = R.$$

b) Ta có $AMB = ANB = 90^0 \Rightarrow KMI = KNI = 90^0$. Suy ra bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn đường kính KI.

Vì $MN = R$ nên ΔOMN đều. $KAN = MAN = \frac{1}{2}MON = 30^0 \Rightarrow AKN = 60^0$. Gọi O' là trung điểm của IK thì O' là tâm của đường tròn đi qua bốn điểm M, N, I, K và $R' = O'M$ là bán kính của đường tròn này. Do đó

$$MO'N = 2MKN = 2AKN = 120^0 \Rightarrow MN = R'\sqrt{3} \Rightarrow R' = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

c) Gọi P là giao điểm của IK và AB, do I là trực tâm của ΔKAB nên $KI \perp AB$, nên KP là đường cao

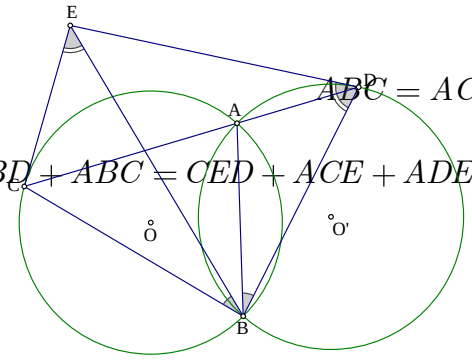
tam giác KAB hạ từ K. Do O,O' nằm trên trung trực đoạn MN, nên O,O',H thẳng hàng. Xét $\Delta MOO'$ có $OMO'=90^0$ $MOO'=30^0, MO'O=60^0$. Suy ra $OO'=2MO'=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ mà ΔKAB có AB không đổi nên nó có diện tích lớn nhất khi KP lớn nhất. Ta có

$KP\le KO'+OO'=\dfrac{R}{\sqrt{3}}+\dfrac{2R}{\sqrt{3}}=R\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $P\equiv O\Leftrightarrow OO'\perp AB\Leftrightarrow MN//AB\Leftrightarrow\Delta KAB$ cân tại $K\Leftrightarrow KAB$ đều (do $AKB=60^0$). Do đó

$S_{KAB}=\dfrac{1}{2}AB.KP=R.KP\le\sqrt{3}R^2$. Kết luận:

Diện tích ΔKAB lớn nhất bằng $\sqrt{3}R^2$ khi và chỉ khi $MN//AB$ (hay ΔKAB đều).

Câu 38)



a) $ABD=ADE=\dfrac{1}{2}$sđAD của O', $ABC=ACE=\dfrac{1}{2}$sđAC của O $\Rightarrow CED+CBD=CED+ABD+ABC=CED+ACE+ADE=180^0$ (tổng ba góc trong ΔECD).

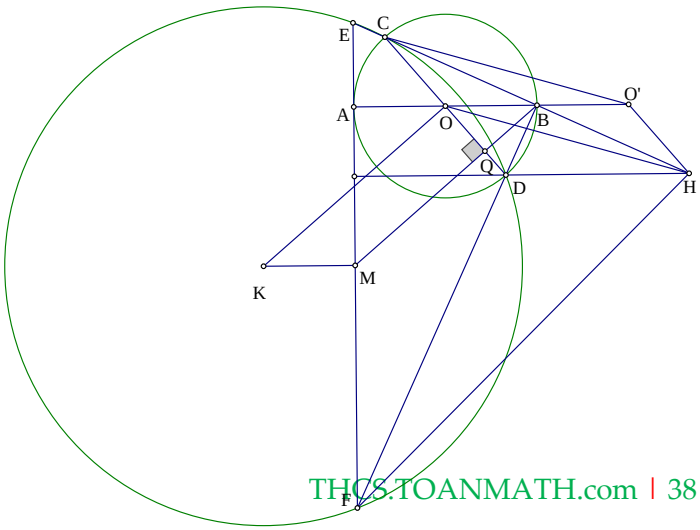
Vậy tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

b) Vì tứ giác $BCED$ nội tiếp nên $CEB=CDB; EBC=EDC$ mà $EDC=ABD$ nên $EBC=ABD.\Rightarrow\Delta EBC\sim\Delta DBA\Rightarrow\dfrac{EC}{EB}=\dfrac{DA}{DB}\Rightarrow EC.DB=DA.EB$ (1). Tương tự $\Delta EBD\sim\Delta CBA\Rightarrow\dfrac{ED}{EB}=\dfrac{CA}{CB}\Rightarrow ED.CB=CA.EB$ (2). Từ (1) và (2) ta được: $EC.DB=ED.CB=DA.EB+CA.EB=DA+CA\ EB=CD.EB$.

Nhận xét: Kết quả câu b) thực chất là định lý **Ptolemy** (Xem thêm phần ***''Các định lý hình học nổi tiếng''***)

Câu 39)

a). Vì CD là đường kính nên $CBD=90^0$. Do đó $BEF=ABF$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn), mà $ABF=ODB$



$OB=OD=R$

$OB = OD = R$

nên $BEF = CDB$. Do đó tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Gọi $Q = BM \cap CD$, ΔBEF vuông tại B nên $BM = ME \Rightarrow MBE = MEB$ (1)

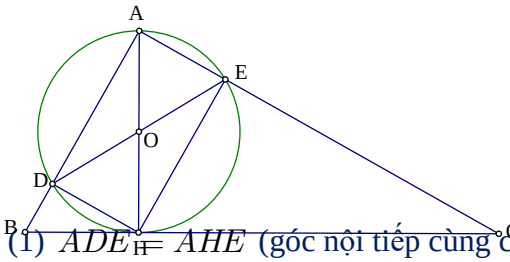
ΔBCD vuông tại B nên $BCD + BDC = 90^0$ mà $BDC = BEF$ (chứng minh ở câu a) nên $BCD + BEF = 90^0$ (2). Từ (1) và (2) ta có $BCD + MBE = 90^0 \Rightarrow BQC = 90^0$ hay $BM \perp CD$.

c) K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDEF$, M là trung điểm của EF nên $KM \perp EF \Rightarrow KM // AB$ (vì cùng vuông góc với EF). Tương tự $KO // BM$ (cùng vuông góc với CD). Do đó tứ giác $KMBO$ là hình bình hành nên $MK = BO = R$.

d) H là trực tâm của tam giác DEF, do đó $HD \perp EF$ suy ra $HD // AB$. Tương tự $BH // AD$ (cùng vuông góc với EF). Do đó tứ giác $BHDA$ là hình bình hành nên $BH = AD$. Mặt khác tứ giác $BDAC$ là hình chữ nhật nên $AD = BC \Rightarrow BH = BC$ (3).Lấy O' đối xứng với O qua B ta có $BO' = BO$ (4) với O' cố định vì B, O cố định. Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $HO'CO$ là hình bình hành nên $O'H = OC = R$. Vậy H chạy trên đường tròn $O'; R$ cố định.

Câu 40)

a) Nối H với E.



$HEA = 90^0$ (vì AH là đường kính),

$AHC = 90^0$ (AH là đường cao)

$\Rightarrow AHE = ACB$ (cùng phụ với EHC) (1) $ADE = AHE$ (góc nội tiếp cùng chắn AE) (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow ADE = ACB \Rightarrow$ tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn

b) Vì $DAE = 90^0 \Rightarrow DE$ là đường kính $\Rightarrow D, O, E$ thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có $S_{BDEC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE}$

ΔABC vuông có AH là đường cao:

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4cm \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC}{2} = 6\ cm^2$ $DE = AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{12}{5}\ cm$

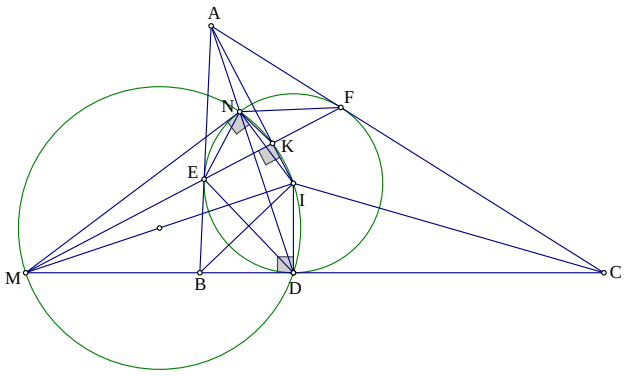
(cùng là đường kính đường tròn O) ΔADE và ΔABC có A chung; $ADE = ACB$ (câu a)

$\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow$ Tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng

$$\Leftrightarrow \frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \Leftrightarrow S_{\Delta AED} = \frac{S_{\Delta ABC}.DE^2}{BC^2}$$

$$S_{BDEC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\left(1 - \frac{DE^2}{BC^2}\right) = 6\left(1 - \frac{12^2}{5^2.5^2}\right) = \frac{2886}{625}\ cm^2$$

Câu 41)



a) Nối N với F, D với F.

+ Xét ΔANF và AFD có

$AFN = ADF$ (vì AF là

tiếp tuyến) và FAD chung

$\Rightarrow \Delta ANF \sim \Delta AFD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AN}{AF} = \frac{AF}{AD} \Leftrightarrow AF^2 = AN.AD$ (1) + Xét ΔAFI có $AF \perp IF$ (vì AF là tiếp tuyến, FI là bán kính) và $FK \perp AI$ (vì AF và AE là tiếp tuyến chung và AI nối tâm) $\Rightarrow \Delta AFI$ vuông tại F có FK là đường cao) $\Rightarrow AK.AI = AF^2$ (2).

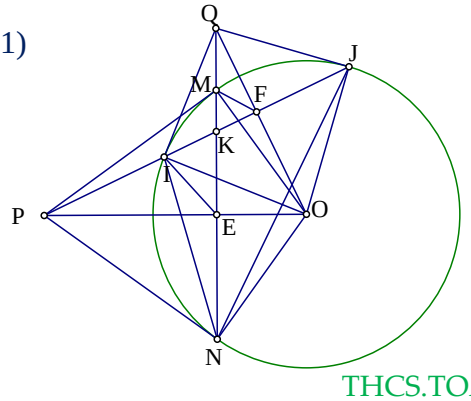
+ Xét ΔANK và ΔAID có IAD chung. Từ (1) và (2) $\Rightarrow AN.AD = AK.AI \Rightarrow \frac{AN}{AK} = \frac{AI}{AD}$

$\Rightarrow \Delta ANK \sim \Delta AID$ (c.g.c) $\Rightarrow NKA = IDN$ (3). Từ (3) có

$IDN + DKN = NKA + DKN = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $DIKN$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow$ Các điểm I, D, N, K cùng thuộc đường tròn (đpcm)

b) Ta có $ID \perp DM$ (DM là tiếp tuyến, DI là bán kính) và $IK \perp KM$ (câu a) $\Rightarrow$ Tứ giác $DIKM$ nội tiếp đường tròn đường kính MI. Vì bốn điểm D, I, K, N cùng thuộc một đường tròn (câu a) $\Rightarrow$ Hai đường tròn này ngoại tiếp ΔDIK $\Rightarrow$ Hai đường tròn trùng nhau $\Rightarrow N$ cũng nằm trên đường tròn đường kính MI $\Rightarrow INM = 90^0$. Vì IN là bán kính đường tròn I, $MN \perp IN \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn I tại tiếp điểm N (đpcm).

Câu 42)



1.a) $\Delta PIN \sim \Delta PNJ \Rightarrow PI.PJ = PN^2$ (1)

Xét ΔPON vuông tại N

có $NE \perp PO \Rightarrow PN^2 = PE.PO$ (2)

$\Delta PKE \sim \Delta POF$

$\Rightarrow PK.PF = PO.PE$ (3)

Từ (1),(2) và (3) $\Rightarrow PI.PJ = PK.PF$

b) $\Delta PIO \sim \Delta POJ$ suy ra tứ giác $IEOJ$ nội tiếp (4)

Ta có $IEP = IJO; IEP + QEI = 90^0; IJO + QOJ = 90^0 \Rightarrow QEI = QOJ$.

Mà $QOJ = QOI \Rightarrow QEI = QOI$. Suy ra tứ giác $QIEO$ nội tiếp (5)

Từ (4) và (5) suy ra Q, I, O, J cùng thuộc một đường tròn.

Câu 43) a). Ta có MC là tiếp tuyến của đường tròn $O \Rightarrow MC \perp MO$ (1)

Xét đường tròn I :

Ta có $CMD = 90^0$

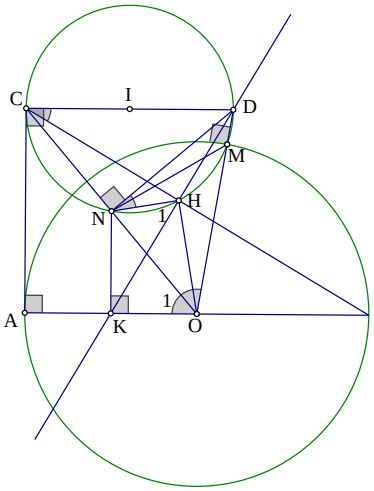
$\Rightarrow MC \perp MD$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow MO // MD \Rightarrow MO$

và MD trùng nhau

$\Rightarrow O, M, D$ thẳng hàng.



b) CA là tiếp tuyến của đường tròn $O \Rightarrow CA \perp AB$ (3). Đường tròn I tiếp xúc với AC tại $C \Rightarrow CA \perp CD$ (4). Từ (3) và (4) $\Rightarrow CD // AB \Rightarrow DCO = COA$ (*) (hai góc so le trong)

CA, CM là hai tiếp tuyến cắt nhau của $O \Rightarrow COA = COD$ (**). Từ (*) và (**)

$\Rightarrow DOC = DCO \Rightarrow \Delta COD$ cân tại D.

c) Gọi chân đường vuông góc hạ từ D tới BC là H có $CHD = 90^0 \Rightarrow H \in I$ (bài toán quỹ tích) DH kéo dài cắt AB ở K. Gọi N là giao điểm của CO và đường tròn $I \Rightarrow CND = 90^0$ và ΔCOD cân tại $D \Rightarrow NC = NO$. Ta có tứ giác $NHOK$ nội tiếp.

Vì có $H_2 = O_1 = DCO$ (cùng bù với DHN) $\Rightarrow NHO + NKO = 180^0$ (5) Ta có $NDH = NCH$ (cùng chắn cung NH của đường tròn I) $CBO = HND = HCD \Rightarrow \Delta DHN \sim \Delta COB$ (g.g)

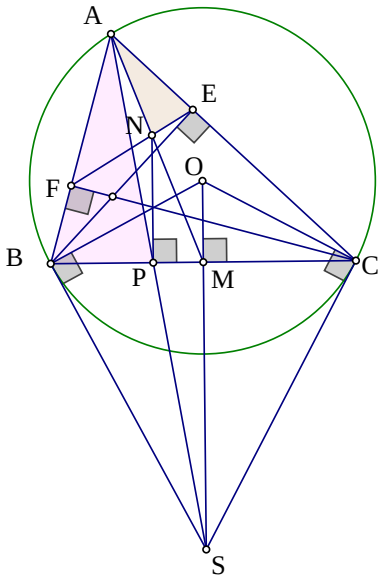
$\Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{OB}{OC}$. Tương tự ta có: $\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OC}; \frac{OA}{OC} = \frac{CN}{CD} = \frac{ON}{CD} \Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{ON}{CD}$.

Mà $ONH = CDH \Rightarrow \Delta NHO \sim \Delta DHC$ (c.g.c) $\Rightarrow NHO = 90^0$ mà $NHO + NKO = 180^0$ (5)

$\Rightarrow NKO = 90^0 \Rightarrow NK \perp AB \Rightarrow NK // AC \Rightarrow K$ là trung điểm của OA cố định $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 44)

a) Ta chứng minh $\Delta ABE \sim \Delta BSM$.



b) Từ câu a ta có $\frac{AE}{AB} = \frac{MB}{BS}$ (1)

mà $MB = EM$ (do ΔBEC vuông tại E có M là trung điểm của BC)

nên $\frac{AE}{AB} = \frac{EM}{BS}$

Có $MOB = BAE; EBA + BAE = 90^0;$

$MBO + MOB = 90^0$ nên $MBO = EBA$

do đó $MEB = OBA = MBE$. Suy ra $MEA = SBA$ (2)

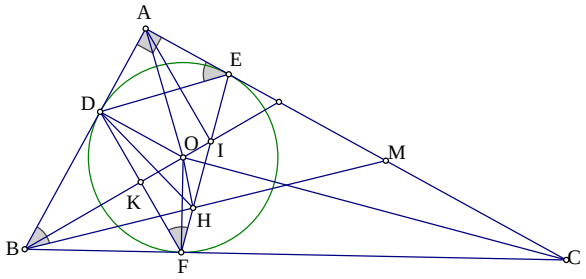
Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AME \sim \Delta ABS$ (đpcm).

c) Dễ thấy SM vuông góc với BC nên ta chứng minh $NP // SM$.

Xét ΔANE và ΔAPB: Từ câu b) ta có $\Delta AEM \sim \Delta ABS$ nên $NAE = PAB$. Mà $AEN = ABP$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp). Do đó $\Delta ANE \sim \Delta APB$ nên $\frac{AN}{AP} = \frac{AE}{AB}$. Lại có $\frac{AM}{AS} = \frac{AE}{AB}$ $\Delta AEM \sim \Delta ABS$. Suy ra $\frac{AM}{AS} = \frac{AN}{AP}$ nên trong tam giác AMS có $NP // SM$ (định lý Talet đảo). Do đó bài toán được chứng minh.

Câu 45)

a). Gọi K là giao điểm của BO với $DF \Rightarrow \Delta IKF$ vuông tại K



có $DFE = \frac{1}{2} DOE = 45^0$

$\Rightarrow BIF = 45^0$

b) Khi $AM = AB$ thì ΔABM

vuông cân tại $A \Rightarrow DBH = 45^0$. Có $DFH = 45^0 \Rightarrow$ Tứ giác $BDHF$ nội tiếp $\Rightarrow$ 5 điểm B, D, O, H, F cùng thuộc một đường tròn. $BAH = BIH = 45^0 \Rightarrow$ Tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

$BFO = BHO = 90^0 \Rightarrow OH \perp BM$, mà $OA \perp BM \Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng.

c) Có tứ giác $PNQD$ nội tiếp $\Rightarrow QPN = QDN = EFN$ .Tương tự có $NQP = NDP = FEN \Rightarrow \Delta NEF \sim \Delta NQP$. Cách xác định điểm M : Kẻ đường kính DN của O , BN cắt AC tại M thì PQ lớn nhất. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv F; Q \equiv E \Rightarrow DN$ là đường kính của O $\Rightarrow PQ$ lớn nhất bằng $EF \Rightarrow \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NQ}{NE} \le 1 \Rightarrow PQ \le EF$.

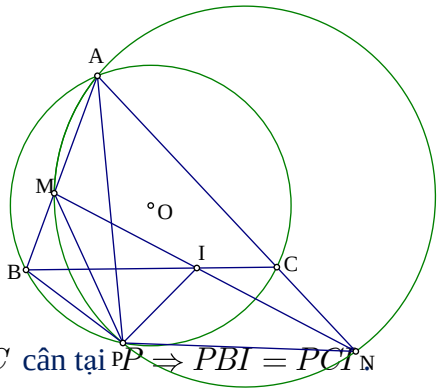
Câu 46)

a). Chỉ ra $PBI = PMI = PAC$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMIP$ nội tiếp.

Chỉ ra $PNI = PCI = PAB$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CNIP$ nội tiếp.



b) Vì $BP = CP$ (giả thiết) $\Rightarrow \Delta BPC$ cân tại $P \Rightarrow PBI = PCI$

Kết hợp câu a) $\Rightarrow BAP = CAP; PMI = PNI \Rightarrow \Delta PMN$ cân $\Rightarrow PM = PN$.

$\Rightarrow PI$ là đường trung trực của $MN \Rightarrow PI \perp MN$

Kết hợp câu a) $\Rightarrow ABP = ACP = 90^0 \Rightarrow \Delta ABP = \Delta ACP$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân.

Câu 47)

a). Ta có $MN // BC$ (gt), $ID \perp BC$

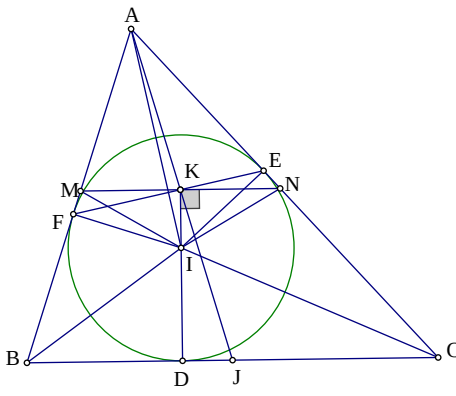
(I tiếp xúc với BC tại D

$\Rightarrow ID \perp MN \Rightarrow IK \perp MN$

$\Rightarrow IKM = IKN = 90^0 \Rightarrow$

$IFM + IKM = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $IFMK$ nội tiếp.



$IFM + IKM = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mặt khác $IKN = IEN = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $IKEN$ nội tiếp. Ta có $IMF = IKF$ (tứ giác $IFMK$ nội tiếp) ; $IKF = ANI$ (tứ giác $IKEN$ nội tiếp)$\Rightarrow IMF = ANI \Rightarrow$ Tứ giác $IMAN$ nội tiếp.

b) Ta có $IMK = IFK$ (tứ giác $IFMK$ nội tiếp); $INK = IEK$ (tứ giác $IKEN$ nội tiếp). Mặt khác $IE = IF = r \Rightarrow \Delta IEF$ cân tại $I \Rightarrow IMK = INK \Rightarrow \Delta IMN$ cân tại I có IK là đường cao $\Rightarrow IK$ là đường trung tuyến của $\Delta IMN \Rightarrow K$ là trung điểm của $MN \Rightarrow MN = 2MK$

Mà $BC = 2BJ$ (J là trung điểm của BC). Do đó $\frac{MN}{BC} = \frac{2MK}{2BJ} = \frac{MK}{BJ}$.Mặt khác ΔABC có $MN // BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ (hệ quả của định lý Talet). Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{MK}{BJ}\left(= \frac{MN}{BC}\right)$. Xét ΔAMK và ΔABJ có: $AMK = ABJ$ (hai góc đồng vị do $MN // BC$); $\frac{AM}{AB} = \frac{MK}{BJ}$

$\Rightarrow \Delta AMK \sim \Delta ABJ$ (c.g.c) $\Rightarrow MAK = BAJ \Rightarrow$ Hai tia AK, AJ trùng nhau. Vậy ba điểm A, K, J thẳng hàng.

c) AE, AF là các tiếp tuyến của đường tròn $I \Rightarrow AE = AF$, AI là tia phân giác của EAF.

ΔAEF cân tại A có $EAF = 60^0$ (gt) $\Rightarrow \Delta AEF$ đều $\Rightarrow EF = AE = AF$, ΔAEF đều có AI là đường phân giác $\Rightarrow AI$ là đường cao của $\Delta AEF \Rightarrow AI \perp EF \Rightarrow S = \frac{1}{2} AI.EF$. ΔIAE vuông tại

$E \Rightarrow AE = IE.\cot IAE; IE = AI.\sin IAE \Rightarrow AE = r.\cot 30^0 = r\sqrt{3}; AI = \frac{r}{\sin 30^0} = 2r$

$\Rightarrow EF = AE = r\sqrt{3}$. Vậy $S = \frac{1}{2} AI.EF = \frac{1}{2}.2r.\sqrt{3}.r = r^2\sqrt{3}$ (đvdt). Gọi H là giao điểm của AI và EF. Ta có $IH \perp EF$, H là trung điểm của EF và $HIF = 60^0$

ΔIHF vuông tại $H \Rightarrow IH = IF.\cos HIF = r.\cos 60^0 = \frac{1}{2} r$. Do đó $S_{IEF} = \frac{1}{2} IH.EF = \frac{\sqrt{3}.r^2}{4}$ (đvdt). Xét ΔIMN và ΔIEF, ta có $IMN = IFE; INM = IEF$. Do đó $\Delta IMN \sim \Delta IEF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{S_{IMN}}{S_{IEF}} = \left(\frac{IM}{IF}\right)^2$. Mà

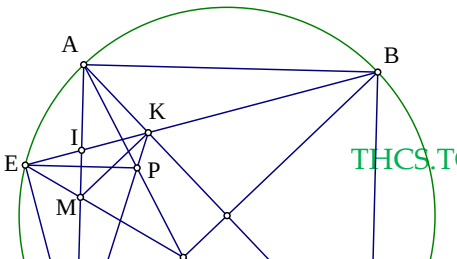
$IF \perp FM \Rightarrow IM \geq IF \Rightarrow \frac{IM}{IF} \geq 1$. Do đó $\frac{S_{IMN}}{S_{IEF}} \geq 1 \Rightarrow S_{IMN} \geq S_{IEF}$. Ta có

$S = \sqrt{3}r^2; S_{IEF} = \frac{\sqrt{3}.r^2}{4}; S_{IMN} \geq S_{IEF}$, vậy $S_{IMN} \geq \frac{S}{4}$.

Câu 48.

a).

*) Tứ giác $IABN$ nội tiếp do



+ $IBN = \frac{1}{2}$sđED, +

$IAN = DAC - NAC =$

$DAN - NCA = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AD - \text{sđ}AE\right)$ $= \frac{1}{2}$sđED

*) Ta có $PNE = NAC + NCA = 2NCA =$sđEA,

$PDE = PDA + ADE = ABE + ADE = 2ABE =$ sđAE . Suy ra tứ giác $PNDE$ nội tiếp.

b). Ta thấy tứ giác $AKME$ nội tiếp do $MEK = MAK = 45^0$ suy ra $MEA = MKA = 90^0$ suy ra $MK // BD \Rightarrow MKD = KDB = EKM$. c). Ta có

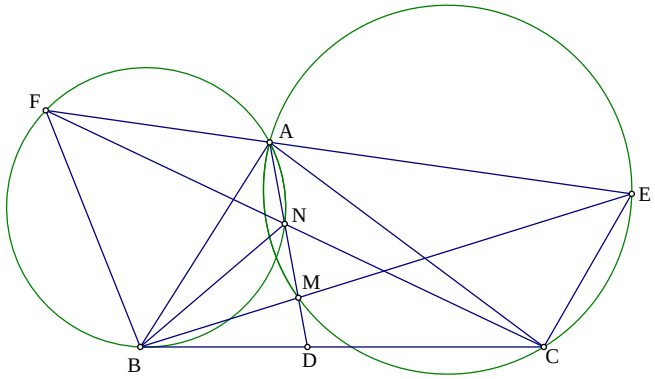
$\Delta MDC \$ \Delta MEA \Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{ME}{MA} \Leftrightarrow ME.MC = MD.MA = MD^2 = \frac{CD^2}{4}$ Mặt khác ta có:

$MC^2 = CD^2 + MD^2 = CD^2 + \frac{CD^2}{4} = \frac{5CD^2}{4}$ suy ra $\Rightarrow MC = \frac{\sqrt{5}}{2}CD \Rightarrow ME = \frac{\sqrt{5}}{10}CD$

hay $MC = 5ME$.Ta có: $\frac{EA}{CD} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow EA = \frac{AM.CD}{MC} = \frac{\frac{CD^2}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}CD} = \frac{\sqrt{5}}{5}CD = \frac{\sqrt{10}}{5}R$.

Câu 49). Giải:

Giả sử CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm thứ hai F, BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC tại điểm thứ hai E. Ta có $BEC = CAM = MAB = CFB$ do đó $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.



Suy ra $EFC = EBC = ABN = AFN$, do đó A, E, F thẳng hàng.

Khi đó $ACM = AEM = FCB$ suy ra $BCM = ACN$.

Câu 50. Giải:

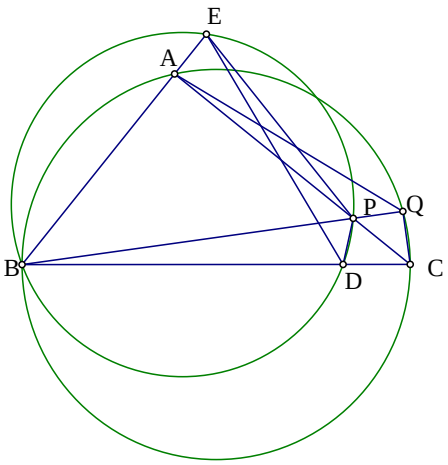
Đường thẳng qua A song song với BD cắt BM tại Q.

Ta có $\frac{NA}{AB} = \frac{NA}{CD} = \frac{MA}{MD} = \frac{AQ}{BD}$ do đó $NA = AQ$. Mặt khác $NAQ = 60^0$ nên tam giác NAQ đều.

Vậy phép quay tâm A góc quay 60^0 biến D thành B, N thành Q. Do đó DN và BQ tạo với nhau một góc 60^0.

Vậy $BPD = 60^0$. Do đó P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Câu 51. Giải:



Vì tứ giác $BEPD, AQCB$

nội tiếp nên $CAQ = CBQ = DEP$.

Mặt khác $AQC = 180^0 - ABC = EPD$

(1).Áp dụng định lý Ptô –lê- mê

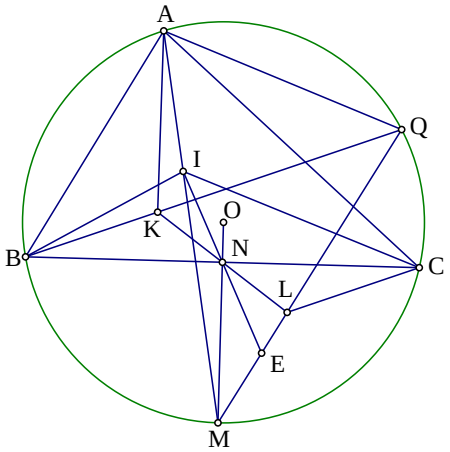
cho tứ giác $BEPD$ ta có

$PE.BD + PD.EB + DE.BP$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AQ.BD + QC.EB = CA.BP$. Mặt khác $BD = EB = CA$ nên $AQ + QC = BP$.

Câu 52. Giải:

a) Ta có $NCE = IBN = \frac{1}{2}B < \frac{1}{2}A = NCM$. Do đó E nằm trong góc NCM (1). Do $B > C$ nên N và C nằm



về cùng một phía đối với AM.

Do đó E và C nằm về cùng

một phía đối với AM (2).

Từ (1) và (2) suy ra E nằm trong

góc AMC. Vậy Q thuộc cung nhỏ AC.

b) Vì $QK = QA$ (3), suy ra

$QAK = AKQ = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \Rightarrow IAK + CAQ = \frac{1}{2}B = IBK + CBQ$. Mặt khác $CAQ = CBQ$

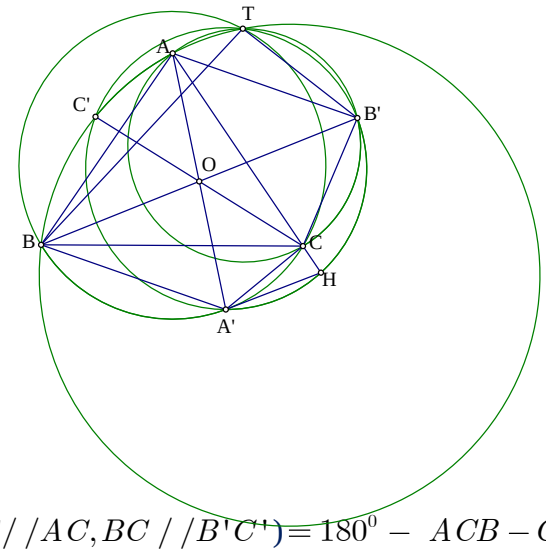
nên $CAQ = IBK$ hay tứ giác $AIKB$ nội tiếp. Từ đó ta có $IKQ = BAI = \frac{1}{2}A = KQM$ nên $KI // MQ$.

Gọi L là giao điểm của KN và MQ, khi đó $KILE$ là hình bình hành. Do đó N là trung điểm của KL.Vậy $BKCL$ là một hình bình hành. Mặt khác ta có $BK // CL, BK = CL$ và

$CLQ = BLQ = CQM$ (4) nên $CL = QC$ (5). Từ (4) và (5) suy ra $BK = CL$ (6).
Từ (3) và (6) ta có $BQ = QA + QC$.

Câu 53. Giải:

Gọi T là giao điểm (khác A') của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'BC$. Tứ giác $BA'CT$ nội tiếp một đường tròn do đó



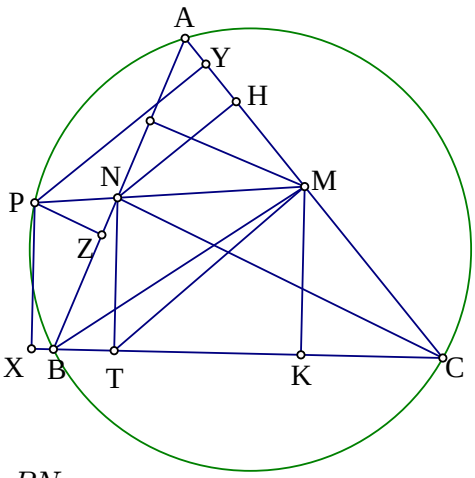
$CTB = CTA' + A'TB$

$= CBA' + 180^0 - A'C'B'$

$= CBA' + 180^0 - ACB$ (do $A'C' // AC, BC // B'C'$) $= 180^0 - ACB - CBA'$. Gọi H là giao điểm của BA' và AC. Khi đó $ACB - CBA' = BHC = CAB'$ do đó $BH // AB'$. Suy ra $CTB = 180^0 - CAB'$. Do đó tứ giác $AB'TC$ nội tiếp hay T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $B'CA$. Tương tự T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $C'AB$.

Câu 54. Giải:

a). Gọi K, T lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N xuống BC. H là hình chiếu vuông góc của N xuống AC, L là hình chiếu vuông góc của M xuống AB.



Đặt $MK = ML = a; NT = NH = b; \dfrac{PN}{PM} = c$. Dễ dàng tính được:

$$PX = \frac{1}{1-c}NT - \frac{c}{1-c} = \frac{1}{1-c}b - \frac{c}{1-c}a;\ PZ = \frac{c}{1-c}ML = \frac{c}{1-c}a;$$

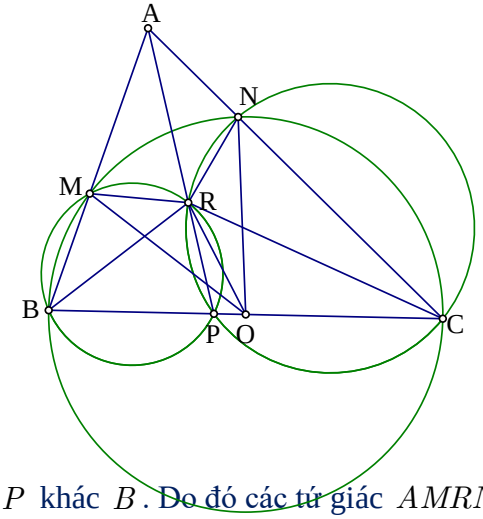
$PY = \dfrac{1}{1-c}NH = \dfrac{1}{1-c}b$. Do đó $PY = PX + PZ$.

b) Dễ dàng chứng minh được $\Delta PZB \sim \Delta PYC$ nên $\frac{PB}{PC} = \frac{PZ}{PY}$; $\Delta PXB \sim \Delta PYA$ nên $\frac{PB}{PA} = \frac{PX}{PY}$. Do đó $\frac{PB}{PC} + \frac{PB}{PA} = \frac{PX + PZ}{PY} = 1$ hay $\frac{1}{PB} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PC}$.

Câu 55. Giải:

Ta có $OM = ON$ và $ROM = RON$ nên $\Delta OMR = \Delta ONR$ (c.g.c).

Vậy $RM = RN$.Do N nằm trên đường trung trực của MN và nằm trên phân giác MAN nên R là điểm chính giữa cung MN (cung không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.



Vậy tứ giác $AMRN$ nội tiếp một đường tròn. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BMR cắt BC tại P khác B. Do đó các tứ giác $AMRN, BMRP$ nội tiếp được nên tứ giác $CNRP$ cũng nội tiếp.

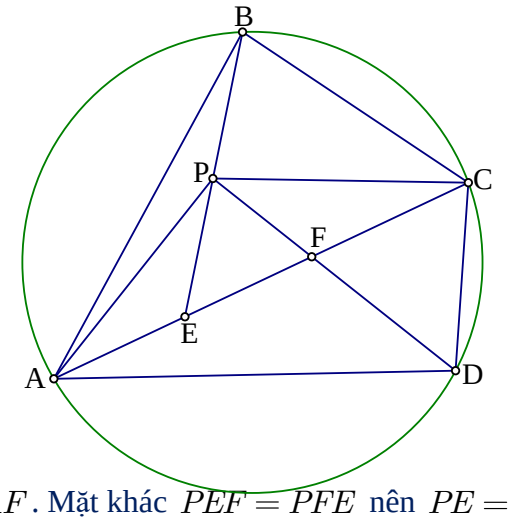
Vậy hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMR, CNR cắt nhau tại P thuộc BC.

Câu 56. Giải:

Sử dụng tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Ta chứng minh $PA = PC$.

Giả sử BP cắt AC ở E, DP cắt AC ở F. Dễ dàng chứng minh được các cặp tam giác đồng dạng $\Delta BCE \sim \Delta BDA$, $\Delta DAF \sim \Delta DBC$ suy ra $\frac{AF}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{CE}{BC}$. Do đó $CE = AF$. Mặt khác $PEF = PFE$ nên $PE = PF$. Từ đó ta có $\Delta PEC = \Delta PFA$ (c.g.c). Vậy $PC = PA$.



Ngược lại, giả sử $PA = PC$. Gọi X, Y tương ứng là giao điểm của CD, DP với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP. Ta có các cặp tam giác đồng dạng $\Delta ADB \sim \Delta PDX, \Delta ADP \sim \Delta BDX$ nên

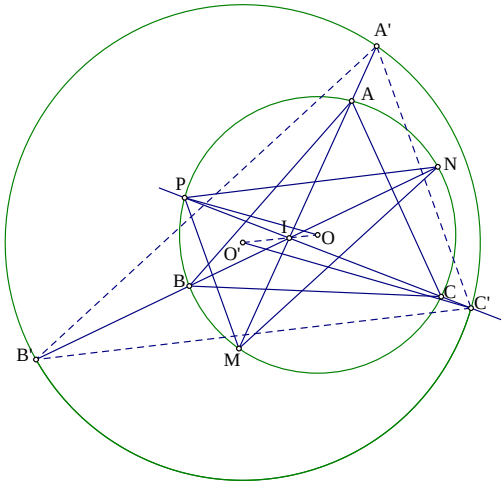
$\frac{BX}{AP}=\frac{BD}{AD}=\frac{XD}{PD}$ (1). Mặt khác $\Delta DPC\sim\Delta DXY$ nên $\frac{XY}{CP}=\frac{XD}{PD}$ (2). Từ (1) và(2) suy ra $BX=XY$. Do đó

$DCB=XYB=XPY=PDX+PXD=ADB+ABD=180^0-BAD$.Vậy $ABCD$ nội tiếp.

Câu 57. Giải:

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt các đường thẳng IA,IB,IC lần lượt tại các điểm thứ hai M,N,P.

Gọi $O;R$, $O';R'$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC,A'B'C'$.

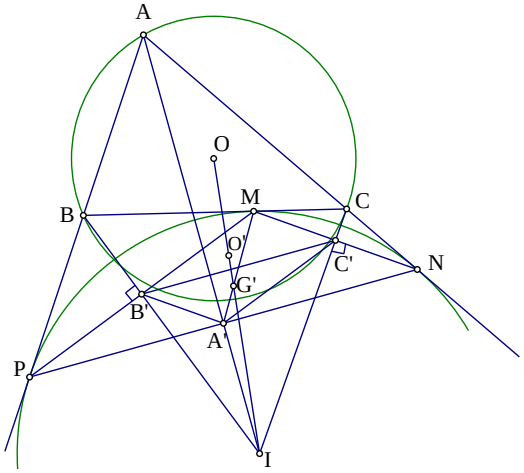


Ta có: $IA.IA'=IB.IB'=IC.IC';IA.IM=IB.IN=IC.IP$ do đó $\frac{IA'}{IM}=\frac{IB'}{IN}=\frac{IC'}{IP}$. Suy ra hai tam giác $A'B'C'$ và MNP có các cạnh tương ứng song song nên $O'C'//OP$. Mặt khác ta có $\frac{OP}{O'C'}=\frac{R}{R'}=\frac{NP}{C'B'}=\frac{IP}{IC'}$. Vậy ba điểm O,I,O' thẳng hàng.

Câu 58.

Giải:

Khi A thay đổi trên cung lớn BC thì tam giác MNP có NMP không đổi bằng $90^0+\frac{A}{2}$.



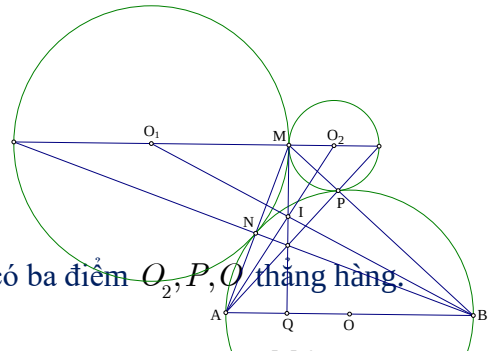
Tam giác ANP luôn cân, có A không đổi nên NP lớn nhất khi $AB+AC$ lớn nhất, khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC. Gọi A_0 là điểm chính giữa của cung lớn BC, ứng với vị trí đó ta có tam giác $M_0N_0P_0$ cân tại M_0;

$N_0P_0\geq NP;N_0M_0P_0=NMP$. Vậy chu vi $\Delta M_0N_0P_0\geq$ chu vi ΔMNP. Do đó chu vi tam giác MNP lớn nhất khi $A\equiv A_0$.

b) Gọi A' là giao điểm của IA với NP, B' là giao điểm của IB với MP, C' là giao của IC với MN. Các điểm O', G' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Ta có $IA.IA' = IB.IB' = IC.IC' = r_a^2$. Do đó theo câu 9 suy ra ba điểm I, O', O thẳng hàng. Mặt khác ba điểm I, G', O' cùng nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác MNP luôn đi qua O cố định.

Câu 59) Giải:

Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của các cặp đường tròn O_1 , O_2 ; O_1 , O ; O_2 , O .

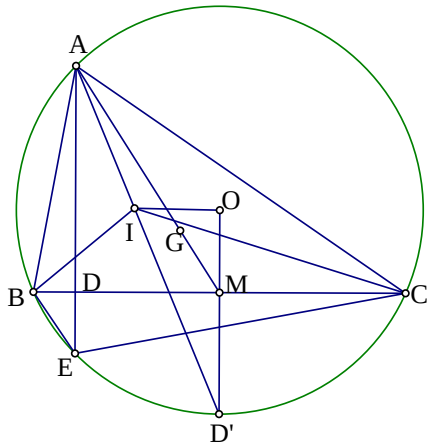


Đường thẳng MI cắt AB tại Q. Ta có ba điểm O_2, P, O thẳng hàng.

Mặt khác $O_2M // OB$ và $\frac{O_2M}{OB} = \frac{r_2}{r} = \frac{O_2P}{OB}$ nên $\frac{QA}{QB} = \frac{MO_2}{MO_1} = \frac{r_2}{r_1}$. Tương tự $\frac{PB}{PM} = \frac{PO}{PO_2} = \frac{r}{r_2}$ và $\frac{MN}{NA} = \frac{r_1}{r}$. Do đó $\frac{QA}{QB}.\frac{PB}{PM}.\frac{NM}{NA} = \frac{r_2}{r_1}.\frac{r}{r_2}.\frac{r_1}{r} = 1$. Vậy các đoạn thẳng AP, MQ, BN đồng quy nên MQ cũng là đường cao của tam giác MAB hay $MQ \perp AB$ suy ra $MQ \perp O_1O_2$. Vậy I thuộc đường thẳng qua M vuông góc với O_1O_2.

Câu 60. Giải:

Gọi E là giao điểm thứ hai khác A của AI với đường tròn O . Khi đó E là điểm chính giữa cung BC (cung không chứa A).



Ta có $EB = EI = EC = IA$.

Theo định lý Ptô-lê-mê ta có $EA.BC = EC.AB + EB.AC$ do đó $2BC = AB + AC$. Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có:

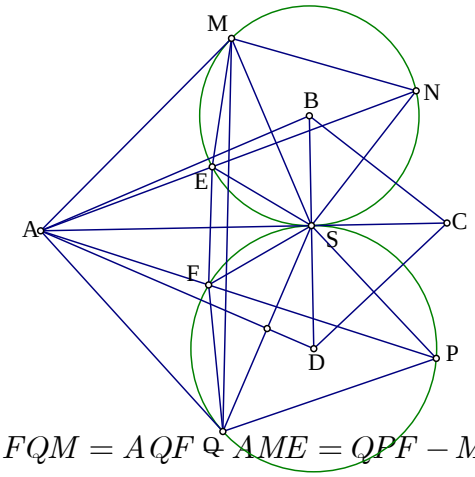
$\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{ID} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB + AC}{BD + DC} = \frac{AB + AC}{BC} = 2$ .Vậy $\frac{AI}{AD} = 2$ .Gọi M là trung điểm cạnh BC, khi đó $\frac{AG}{GM} = 2 = \frac{AI}{ID}$. Vậy $GI // BC$.

Câu 61. Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $d_{O/\Delta_1} = \frac{1}{2}\ R_1 + R_3$ (Tính chất đường trung bình trong một hình thang), ở đó d_{O/Δ_1} là khoảng cách từ O tới Δ_1. Tương tự $d_{O/\Delta_3} = \frac{1}{2}\ R_1 + R_3\ ; d_{O/\Delta_2} = \frac{1}{2}\ R_2 + R_4\ = d_{O/\Delta_4}$. Vậy $d_{O/\Delta_1} = d_{O/\Delta 3} = d_{O/\Delta_4}$. Do đó $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ cùng tiếp xúc với một đường tròn tâm O.

Câu 62. Giải:

Đường tròn ngoại tiếp tam giác SMN có tâm B và tiếp xúc với AS tại S, AM tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SPQ có tâm D và tiếp xúc với AQ tại Q, AS tại S.



Ta có $AMQ = AQM$ suy ra $QME - FQM = AQF \Leftrightarrow AME = QPF - MNE$ (1)

Ta có $AE.AN = AM^2 = AF.AP$ hay tứ giác $NEFP$ nội tiếp. Do đó

$FEM - EFQ = FEN + NEM - EFP + PFQ$

$= \left[180^0 - FPN + NEM \right] - \left[180^0 - ENP + PFQ \right] = ENP - FPN + NSM - PSQ$

$= ENC - FPC \quad NSM - PSQ$ (để ý rằng

$CP = CS = CN) = \left[ENS + NSC - FRS + SPC \right] + NSM - PSQ$

$= \left[ENS + NSC - FPS + CSP \right] + NSM - PSQ$

$= NSC + NSM - CSP + PSQ + NSM - FPS$

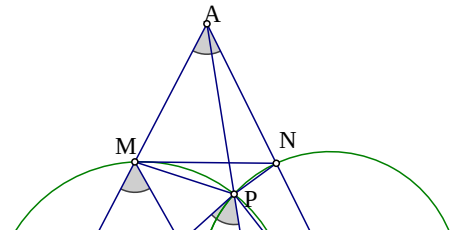
$= \left[90^0 - SNM - 90^0 - SPQ \right] + ENS - FPS = MSC - QSC + ENS - FPS$

$= SPQ - FPS - SNM - ENS = QPF = MNE (2)$ Từ (1) và (2) suy ra

$QME - FQM = FEM - EFQ$ hay $QME + EFQ = EFM + FQM$. Do đó tứ giác $MEFQ$ nội tiếp.

Câu 63. Giải:

Đường thẳng qua D song song



với AC cắt AB tại M. Đường

thẳng qua M song song với BC

cắt AC tại N. Gọi Q là trung

điểm của NC.Ta có

$\frac{AM}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{1}{3}$ nên $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$.

Vậy $CQ=NQ=AN$. Do đó $\frac{QC}{CA}=\frac{DC}{BC}=\frac{1}{3}$ suy ra $DQ//AB$. Do $BAC=BPD$ nên

$BMD=BPD$. Vậy tứ giác $BMPD$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $MPA=MDB=ACB=MNA$ suy ra tứ giác $AMPN$ nội tiếp.

Vì $BMPD, AMPN$ là các tứ giác nội tiếp nên $CDPN$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa do $QD=QC=QN$, nên Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDPN$. Vậy

$DPC=\frac{1}{2}DQC=\frac{1}{2}BAC$.

Câu 64. Giải:

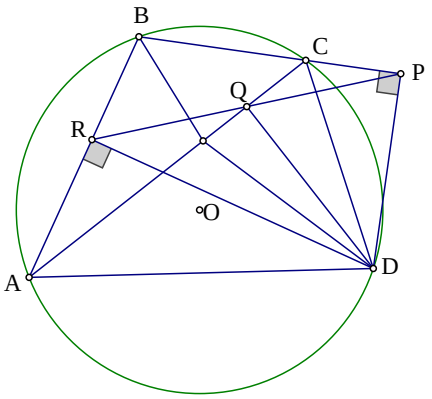
Theo định lý Sim-sơn, ba điểm

P,Q,R thẳng hàng. Từ hai bộ

bốn điểm C,D,P,Q ; A,D,Q,R

cùng thuộc một đường tròn ta

suy ra $\Delta DCA\sim\Delta DPR$.



Tương tự ta được các cặp tam giác đồng dạng $\Delta DAB\sim\Delta DQP, \Delta DBC\sim\Delta DRQ$. Do đó

$\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}.\frac{PQ}{QR}$. Suy ra $PQ=QR\Leftrightarrow\frac{DC}{DA}=\frac{BC}{BA}$. Điều đó tương đương với chân đường phân giác góc D của tam giác ADC và chân đường phân giác góc B của tam giác ABC trùng nhau, hay các phân giác góc ABC và ADC cắt nhau trên AC.

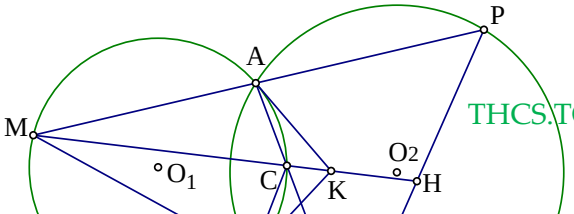
Câu 65. Giải:

Gọi H là giao điểm của MC với PQ. Ta cần chứng minh H là trung điểm của MQ.Ta có

$\Delta KAC\sim\Delta KMA$ suy ra $\frac{MA}{CA}=\frac{KA}{KC}$. Tương tự $\Delta KBC\sim\Delta KMB$ suy ra $\frac{MB}{CB}=\frac{KB}{KC}$.

Mặt khác $KA=KB$ nên

$\frac{MA}{CA}=\frac{MB}{CB}$ do đó



$AC.BM = BC.AM$ (1).

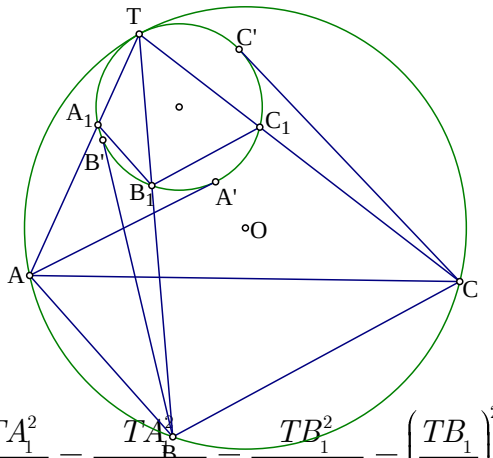
Dễ dàng nhận thấy

$\Delta BMP \sim \Delta BCQ$

suy ra $\frac{BC}{BM} = \frac{CQ}{MP}$ (2). Từ (1) và (2) ta có $\frac{CA}{CQ}.\frac{MP}{MA} = 1$. Sử dụng định lý Mê-lê-la –uyt cho tam giác QPA với cát tuyến MCH ta có: $\frac{MP}{MA}.\frac{CA}{CQ}.\frac{HQ}{HD} = 1$. Do đó $HQ = HD$.

Câu 66. Giải:

TA, TB, TC cắt đường tròn O' tại các điểm thứ hai A_1, B_1, C_1.

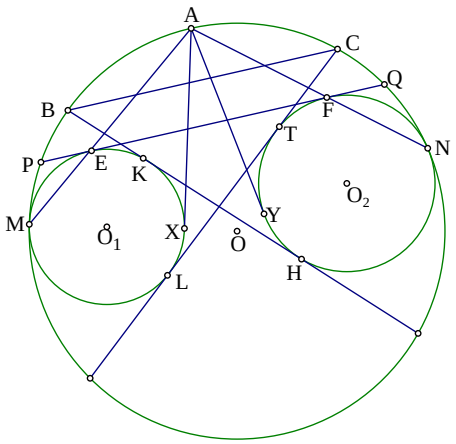


Khi đó $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, hơn nữa chúng có các cạnh tương ứng song song. Ta có $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1B_1}{AB}$ và $\left(\frac{TA_1}{AA'}\right)^2 = \frac{TA_1^2}{AA'^2} = \frac{TA_1^2}{AA_1.AT} = \frac{TB_1^2}{BB_1.BT} = \left(\frac{TB_1}{BB'}\right)^2$ .Do đó $\frac{TA_1}{AA'} = \frac{TB_1}{BB'}$. Tương tự $\frac{TA_1}{AA'} = \frac{TC_1}{CC'}$.

Vậy $\frac{TA_1}{AA'} = \frac{TB_1}{BB'} = \frac{TC_1}{CC'}$ do đó $\frac{TA}{AA'} = \frac{TB}{BB'} = \frac{TC}{CC'}$ (1). Theo định lý Ptô- lê-mê ta có $TB.AC = TA.BC + TC.AB$ (2). Từ (1) và (2) ta có: $BB'.AC = AA'.BC + CC'.AB$.

Câu 67. Giải:

Kẻ các tiếp tuyến chung trong KH, LT của O_1 và O_2. Giao điểm của KH, LT với O lần lượt là B, C.Kẻ tiếp tuyến chung



ngoài EF của O_1 và O_2 sao cho E và B nằm về cùng một phía đối với O_1O_2. Các điểm M,N lần lượt là các tiếp điểm của O_1, O_2 với O. EF cắt O tại P,Q. Ta sẽ chứng minh $BC//PQ$. Gọi A là điểm chính giữa của cung PQ của đường tròn O, kẻ các tiếp tuyến AX,AY của O_1, O_2. Dễ dàng chứng minh được ba điểm A,E,M thẳng hàng, ba điểm A,F,N thẳng hàng và tứ giác $MEFN$ nội tiếp. Do đó $AX^2 = AE.AM = AF.AN = AY^2$ hay $AX = AY$.

Áp dụng câu 66 cho tam giác ABQ nội tiếp đường tròn O và đường tròn O_1 tiếp xúc với O tại M, ta có: $AX.PQ = BK.AC + CL.AB$. Tương tự $AY.PQ = BH.AC + CT.AB$.

Suy ra $AC\ BH - BK\ = AB\ CL - CT$ do đó $AC.KH = AB.TL$ hay $AC = AB$. Vậy A là trung điểm của cung BC, do đó $PQ//BC$.

Câu 68. Giải:

Lấy E,F thuộc đường tròn sao cho $CDB = ADE, BDA = DCF$.

Khi đó $AE = BC, FD = AB, EC = AB, BF = AD$.

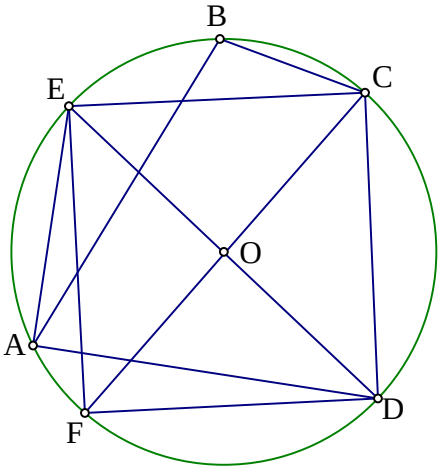
Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp $AECD$ và $BCDF$ ta có:

$AC.ED = AE.CD + AD.EC$

$= BC.CD + AD.AB$ (1)

Và $BD.CF = BC.DF + BF.CD$

$= BC.AB + AD.CD$ (2)



Mặt khác $CDE = CDB + BDE = ADE + BDE = ADB = FCD$

Do đó $FDC = FDE + EDC = FCE + FCD = ECD$ suy ra $ED = FC$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta có điều phải chứng minh.

Câu 69. Giải:

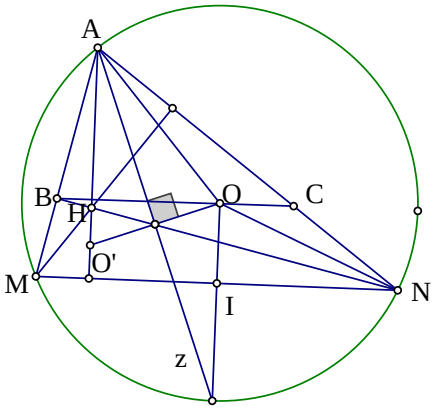
Tứ giác $BC'MA'$ và $A'MB'C$ nội tiếp được nên

$A'MC'+B=C+A'MB'=180^0$ và $MB'A'=MCA'$. Mà $B=C$ suy ra $A'MC'=A'MB'$.

Ta lại có $\frac{CM}{MA'}=\frac{MA'}{MB'}$ suy ra $\Delta C'MA'\sim\Delta A'MB'$ (c.g.c). Do đó $C'A'M=A'B'M+MCA'$. Mặt khác $MC'A'=MBA'$ nên $\Delta BMC\sim\Delta C'MA'$. Do đó $BCM=A'MC'=180^0-B$ không đổi. Vậy M thuộc một đường tròn cố định.

Câu 70)

Gọi H trực tâm của AMN, I là trung điểm cạnh MN. Gọi Az là tia phân giác của BAC.



Ta có $HAM=OAN$ nên Az cũng là tia phân giác của OAH.

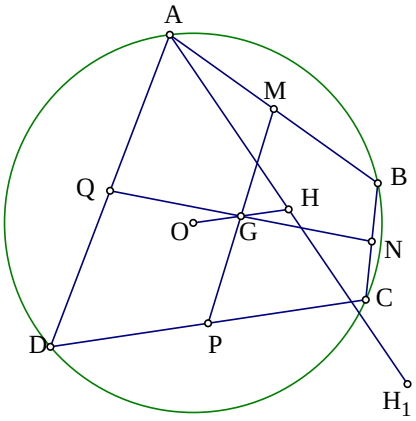
Gọi O' đối xứng với O qua Az.

Khi đó O' thuộc AH. Khi O thay đổi trên BC thì O' thay đổi trên đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng BC qua Az. Tam giác OIN có $\hat{I}=90^0, ION=BAC$ không đổi nên $\frac{ON}{OI}$ không đổi. Mặt khác $AH=2.OI$ nên $\frac{OA}{OI}$ không đổi. Do đó $\frac{AO'}{AH}$ không đổi. hơn nữa O' thuộc Δ cố định nên H thuộc một đường thẳng Δ' song song với Δ.

Câu 71. Giải:

Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD,DA.

Gọi G là giao điểm của MP,NQ thì G là trung điểm chung của cả hai đoạn đó. H đối xứng với O qua G, H_1' đối xứng với A qua H. Ta chứng minh $H_1'\equiv H_1$. Thật vậy, ta có $MH//BH_1'$ (MH là đường trung bình của tam giác ABH_1'; $MH//OP$ ($MOPH$ là hình bình hành); $OP\perp CD$ (đường kính đi qua trung điểm dây cung).Suy ra $BH_1'\perp CD$. Tương tự $DH_1'\perp BC$, suy ra H_1' là trực tâm của tam giác BCD do đó $H_1'\equiv H$. Lấy O' đối xứng với O qua H, thì AOH_1O' là hình



bình hành. Suy ra $O'H_1 = OA = R$ (bán kính của O). Tương tự $O'H_2 = O'H_3 = O'H_4 = R$. Vậy ta có đpcm.

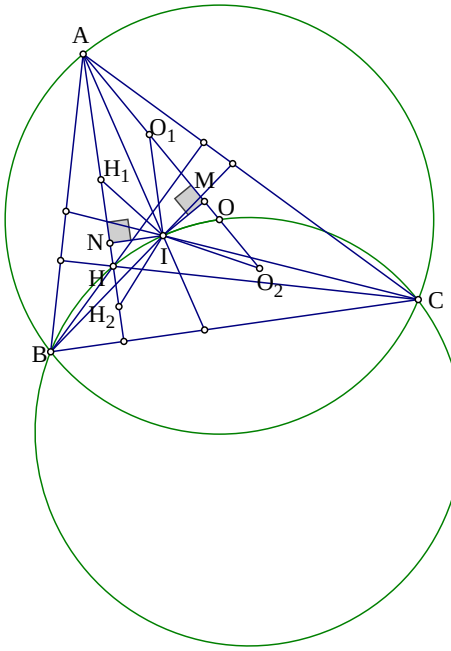
Câu 72. Giải:

Ta sẽ chứng minh ba đường thẳng Ơ-le đó cùng đi qua trọng tâm tam giác ABC.

Do tính tương tự, ta chỉ chứng minh cho tam giác BCI.

Về phía ngoài tam giác ABC, dựng tam giác $A'BC$ đều, nội tiếp trong đường tròn O_1. Tứ giác $IBA'C$ nội tiếp vì $BA'C + BIC = 180^0$. Do $A'B = A'C$ nên IA' là phân giác CIB, suy ra ba điểm A, I, A' thẳng hàng. Gọi F là trung điểm của BC, S và S_1 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác IBC. Vì $\frac{FS}{FA} = \frac{FS_1}{FI} = \frac{FO_1}{FA'} = \frac{1}{3}$ nên ba điểm S_1, O_1, S thẳng hàng. Mặt khác, O_1S_1 là đường thẳng Ơ-le của tam giác IBC, do đó đường thẳng Ơ-le của tam giác IBC đi qua trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh hoàn toàn tương tự với các tam giác IAC, IAB. Ta có đpcm.

Câu 73. Giải:



Ta sử dụng bổ đề sau để chứng minh.

Bổ đề: cho tam giác nhọn ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Khi đó nếu $AO = AH$ thì ta có $BAC = 60^0$.

Trở lại bài toán: Giả sử bốn điểm O, I, H, C cùng thuộc một đường tròn. Vì CI là phân giác của HCO nên $IH = IO = t$.

Ta chứng minh: nếu $BAC \neq 60^0$ thì bốn điểm O, I, H, A cùng thuộc một đường tròn.

Kí hiệu M, N lần lượt là hình chiếu của I trên OA và AH. Lấy hai điểm O_1, O_2 nằm trên tia AO sao cho $IO_1 = IO_2 = t$ (O_1 nằm giữa A và M, M nằm giữa O_1 và O_2).

Lấy hai điểm H_1, H_2 nằm trên tia AH sao cho $IH_1 = IH_2 = t$ (H_1 nằm giữa A và N, N nằm giữa H_1 và H_2).

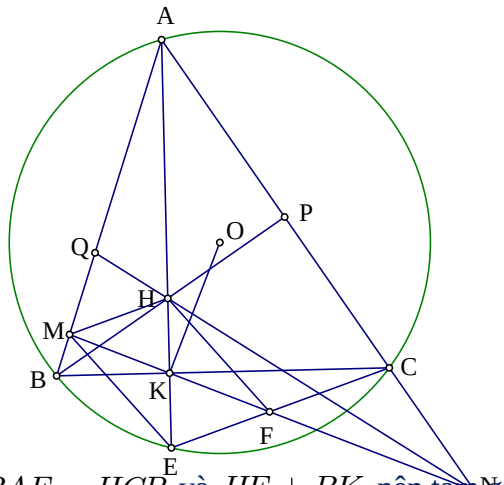
a) Nếu $O \equiv O_1$ và $H \equiv H_1$, hoặc $O \equiv O_2$ và $H \equiv H_2$. Khi đó $\Delta AIO \sim \Delta AIH$ suy ra $AO = AH$. Áp dụng bổ đề ta được $BAC = 60^0$, trái với điều giả thiết.

b) Nếu $O \equiv O_1$ và $H \equiv H_2$ hoặc $O \equiv O_2$ và $H \equiv H_1$. Ta có $\Delta IO_1O_2 = \Delta IH_1H_2$ nên $IO_1O_2 = IH_2H_1$ và $IO_2O_1 = IH_1H_2$. Suy ra tứ giác $AOIH$ nội tiếp.

Giả sử A và B không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH. Khi đó $BAC = ABC = 60^0$ nên tam giác ABC đều, suy ra ba điểm O, I, H trùng nhau, vô lý. Vậy ta có đpcm.

Câu 74. Giải:

Gọi E là giao điểm của AH và O, (E khác A). Giao điểm của MN và EC là F.



Tứ giác $ABEC$ nội tiếp đường tròn O, có $OK \perp MK$ nên theo "bài toán con bướm" ta có $KM = KF$ (1). Mặt khác $MAK = BAE = HCB$ và $HE \perp BK$ nên tam giác HCE cân tại C, suy ra $HK = KE$ (2).Từ (1) và (2) ta có tứ giác $MHFE$ là hình bình hành, do đó $MH // EF$.

Suy ra $MHK = KEF = ABC$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được $NHK = ACB$. Ta có $QHP = MHN = ABC + ACB = 180^0 - BAC$. Suy ra tứ giác $AQPH$ nội tiếp được.

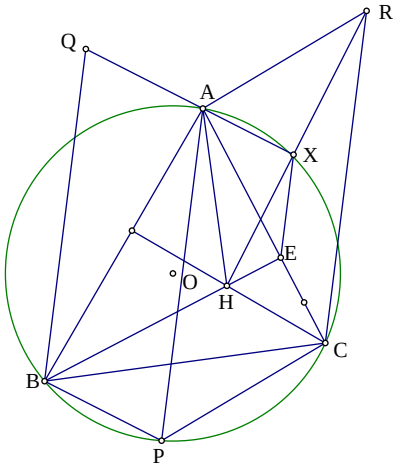
Câu 75. Giải:

Ta có $ARC = APC = ABC = 180^0 - AHC$. Do đó tứ giác $AHCR$ nội tiếp.Suy ra $AHX = ACR = CAP$.

Tương tự ta cũng có tứ giác $AHBQ$ nội tiếp.Từ đó suy ra

$XAH = QBH =$

$QBA + ABH = BAP + ABH$ (2)

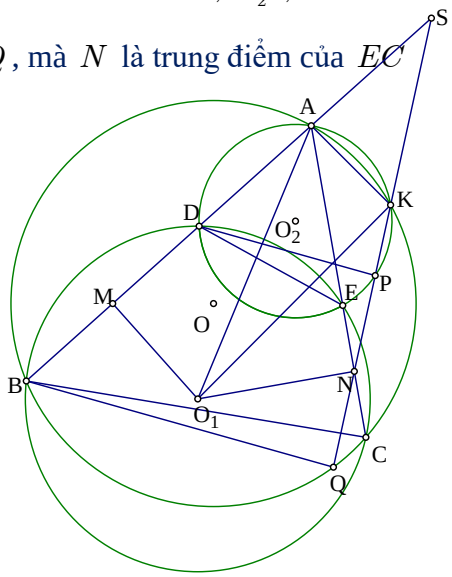


Từ (1) và (2) suy ra $AHX + XAH =$

$CAP + BAP + ABH = CAB + ABH = 90^0$. Do đó $AXH = 90^0 = AEH$ hay tứ giác $AXEH$ nội tiếp được. Vậy $XEA = AHX = CAP$ (theo (1)). Suy ra $EX // AP$ (đpcm).

Câu 76. Giải:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, CE. KN cắt AB, O_2 , O lần lượt tại S, P, Q. Ta có $KQC = KAC = EPQ$. Suy ra $EP // CQ$, mà N là trung điểm của EC nên N là trung điểm của PQ.



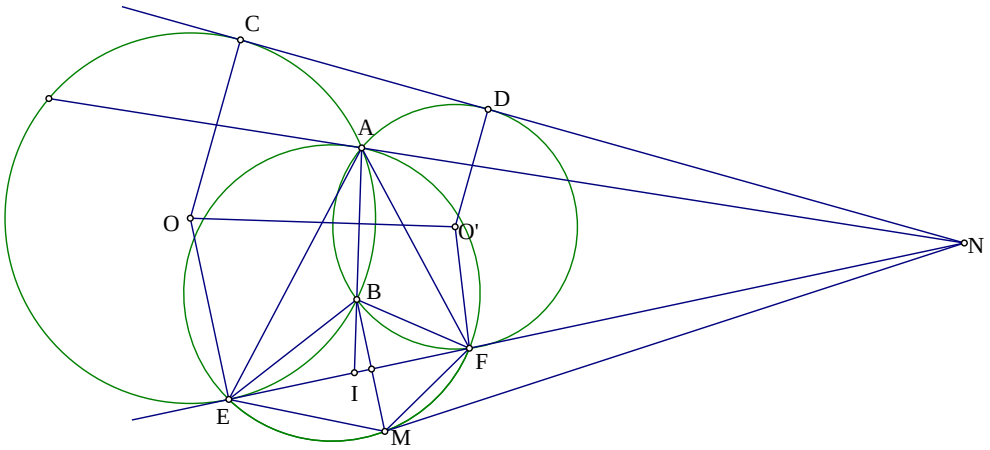
Ta thấy: $2SA.SM = SA.SD + SA.SB$;

$2SK.SN = SK.SP + SK.SQ$ mà

$SA.SD = SK.SP$ (tứ giác $AKPD$ nội tiếp); $SA.SB = SK.SQ$ (tứ giác $AKQB$ nội tiếp)

$\Rightarrow SA.SM = SK.SN \Rightarrow$ tứ giác $AKNM$ nội tiếp, hay K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Mặt khác tứ giác AMO_1N nội tiếp vì $AMO_1 = ANO_1 = 90^0$ hay cũng có O_1 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Suy ra tứ giác $AKNO_1$ nội tiếp $\Rightarrow AKO_1 = ANO_1 = 90^0$ (đpcm).

Câu 77.



Giải: Gọi M là điểm đối xứng của B qua EF. Ta có $EMF = EBF$.

Mà $EBF + EAF = EBF + A_1 + A_2 = EBF + E_1 + F_1 = 180^0$ nên $EMF + EAF = 180^0$. Vậy tứ giác $MEAF$ nội tiếp đường tròn φ. Gọi N là giao điểm của các tiếp



tuyến tại A và M của φ ta

chứng minh ba điểm N,E,F

thẳng hàng. Thật vậy, gọi F'

là giao điểm thứ hai của NE

với φ . Ta có $\Delta NAE \sim \Delta NF'A$

(g.g) . Suy ra $\frac{AE}{AF'}=\frac{NA}{NF'}$ (1). Tương tự $\frac{ME}{MF'}=\frac{NM}{NF'}=\frac{NA}{NF'}$ (2). Từ (1) và (2) ta có

$\frac{AE}{AF'}=\frac{ME}{MF'}$ nên $\frac{AE}{ME}=\frac{AF'}{MF'}$ (*) Gọi I là giao điểm của AB và EF . Ta có

$IE^2=IA.IB=IF^2$ do đó $IE=IF$. Mà $\Delta IEB \sim \Delta IAE$ (g.g) nên

$\frac{EB}{AE}=\frac{IF}{IA}=\frac{IE}{IA}$. Tương tự $\frac{BF}{AF}=\frac{IF}{IA}$. Suy ra $\frac{EB}{AE}=\frac{BF}{AF}$. Do vậy $\frac{ME}{AE}=\frac{MF}{AF}$ hay

$\frac{AE}{ME}=\frac{AF}{MF}$ (**). Từ (*) và (**) ta có $\frac{AF'}{MF'}=\frac{AF}{MF}$ suy ra $F\equiv F'$. Vậy ba điểm N,E,F thẳng hàng. Ta có N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF. Do vậy N thuộc trung trực AB, suy ra N thuộc đường thẳng OO'. Tương tự Δ_2 và CD cắt nhau tại một điểm N' thuộc OO'. Do tính chất đối xứng, CD và EF cắt nhau tại một điểm thuộc OO' do đó $N\equiv N'$. Vậy các đường thẳng CD,EF,Δ_1,Δ_2 đồng quy tại N. (đpcm).

Câu 78. Giải*(Bạn đọc có thể xem thêm phần''Các định lý hình học nổi tiếng''Nội dung định lý Lyness*

Qua M kẻ tiếp tuyến chung của O' và O .

Ta có $N_1=NMX$ và $B_1=M_1$

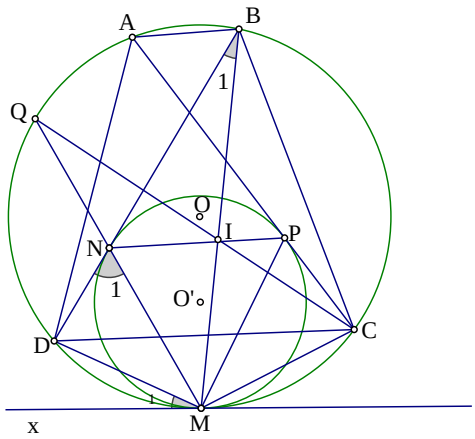
do đó $NMD=NMB$.

Vậy MN là phân giác góc DMB.

Gọi Q là giao điểm thứ hai của

MN và O . Ta có Q là điểm

chính giữa của cung BD do đó



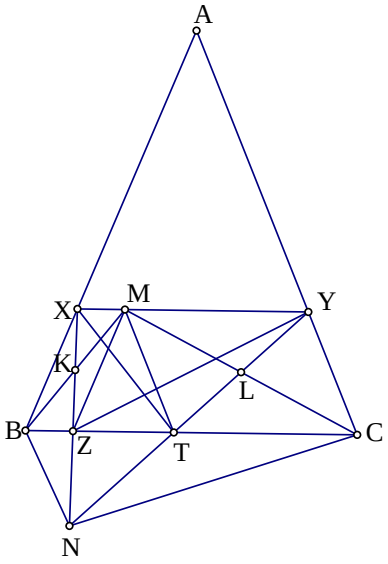
CQ là phân giác góc DCB. Gọi I là giao điểm của CQ và NP.

Ta có $ICM = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DM + \text{sđ}DQ\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DM + \text{sđ}QB\right) = N_1 = IPM$. Suy ra tứ giác $IPCM$ nội tiếp. Do đó $QMB = NPA = IMC \Rightarrow \Delta QIM \sim \Delta QNI \Rightarrow QI^2 = QN.QM$. Mà $QMD = QDN \Rightarrow \Delta DQN \sim \Delta MQD \Rightarrow QD^2 = QN.QM \Rightarrow QD = QI$. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD. Tương tự tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD nằm trên NP.

Câu 79. Giải:

Gọi A' là giao điểm thứ hai của AI với O. Theo câu 78 ta có tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên IM (xét với O_1 và IN (xét với O_2). Suy ra tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. (đpcm).

Câu 80. Giải:



Ta có $BMC = 90^0 + \frac{1}{2}A = 180^0 - B$

và $ZMY = 180^0 - B$

(vì tứ giác $MZCY$ nội tiếp)

Do đó $BMZ = YMC$ nên

$XBM = YNC$. Suy ra $\Delta BXM \sim \Delta MYC$

do đó $\Delta KXB \sim \Delta LYM$

$\Rightarrow BXK = LYM = YTC = BTN$. Vậy tứ giác $BXTN$ nội tiếp.

Tương tự ta cũng có tứ giác $YCNZ$ nội tiếp. Mặt khác $BNX = BTX = BMX$ suy ra $YNC = YZT = YMC$ và $XNY = B$.Từ đó

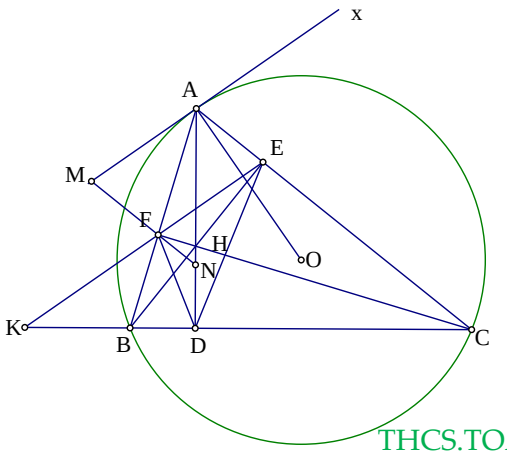
$BNC = BMX + YMC + B = BMX + XBM + B = 2B = B + C$ do đó

$BNC + BAC = A + B + C = 180^0$. Suy ra tứ giác $ABNC$ nội tiếp.

Câu 81. Giải:

a) $\Delta ABE \sim \Delta ACF$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$.



b). Ta có $BFH + BDH = 180^0 \Rightarrow$

Tứ giác $BFHD$ nội tiếp (tứ giác có hai góc đối bù nhau).

Ta có $ADB = AEB = 90^0$ $\Rightarrow$Tứ giác $ABDE$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh D, E cùng nhìn AB dưới một góc vuông).

c). Ta có $BFC = BEC = 90^0$ $\Rightarrow$Tứ giác $BFEC$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh F, E cùng nhìn BC dưới một góc vuông) $\Rightarrow AEF = ABC$. Mà $xAC = ABC$ (hệ quả). Do đó $xAC = AEF$ (hai góc ở vị trí so le trong) nên $Ax // EF$.Lại có $OA \perp Ax$. Do đó $OA \perp EF$.

d). Gọi I là giao điểm của AD và EF. Ta có $ADE = ABE = FDH \Rightarrow DI$ là tia phân giác EDF. Mà $AD \perp BC$ nên có DK là đường phân giác ngoài của ΔDEF. Xét ΔDEF có $\frac{KF}{KE} = \frac{IF}{IE}$ (1). Áp dụng hệ quả Talet vào các tam giác: ΔIAE có $FN // AE : \frac{NF}{AE} = \frac{IF}{IE}$ (2); ΔKAE có $MF // AE : \frac{KF}{KE} = \frac{MF}{AE}$ (3). Từ (1),(2),(3) cho $\frac{NF}{AE} = \frac{MF}{AE} \Rightarrow NF = MF$.

Câu 82. Giải:

a). Ta có $AM = MC$

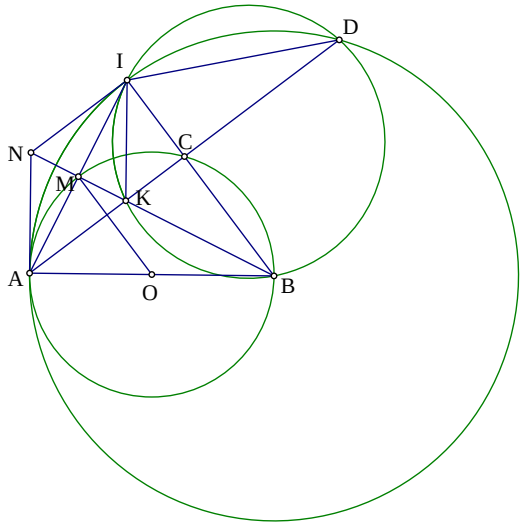
(M là điểm chính giữa của AC)

$\Rightarrow ABM = IBM$ (hệ quả góc

nội tiếp). $AMB = ACB = 90^0$

(góc nội tiếp chắn nửa đường

tròn) $\Rightarrow BM \perp AI, AC \perp BI$.



ΔABI có BM vừa là đường cao $BM \perp AI$ vừa là đường phân giác $ABM = IBM$. Do đó tam giác ABI cân tại B.

b) Ta có $KMI = 90^0$ $BM \perp AI$; $KCI = 90^0$ $AC \perp BI$

$\Rightarrow KMI + KCI = 90^0 + 90^0 = 180^0$.Vậy tứ giác $MICK$ nội tiếp.

c) Xét ΔABN và ΔIBN có $AB = BI$ (ΔABI cân tại B), $ABN = IBN$ (chứng minh trên), BN cạnh chung. Do đó $\Delta ABN = \Delta IBN$ (c.g.c) $\Rightarrow NAB = NIB$. Mà $NAB = 90^0$ nên $NIB = 90^0 \Rightarrow NI \perp BI$. Mà I thuộc đường tròn B, BA (vì $BI = BA$). Vậy NI là tiếp tuyến của đường tròn B, BA.

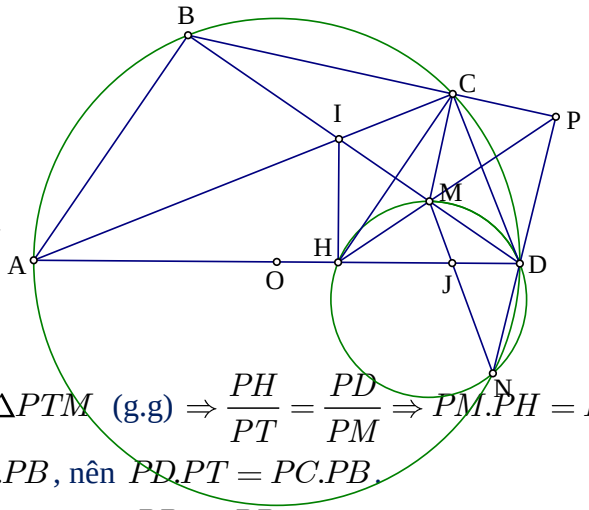
+ Xét ΔABC có M là trung điểm của AI, ΔABI cân tại B, BM là đường cao, O là trung điểm của $AB \Rightarrow MO$ là đường trung bình của tam giác $ABI \Rightarrow MO // BI$. Mà $NI \perp BI$ (chứng minh trên). Vậy $NI \perp MO$.

d) Ta có $IKD = IBM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IK của đường tròn IBK). Mà $IDA = \frac{1}{2}IBA = IBM$ (IDA và IBA là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AI của đường tròn B, BA , BN là tia phân giác của IBA). Do đó $IDK = IDA \Rightarrow$ hai tia DK, DA trùng nhau.

$\Rightarrow D, K, A$ thẳng hàng. Mà C, K, A thẳng hàng nên D, K, A, C thẳng hàng. Vậy ba điểm A, C, D thẳng hàng.

Câu 83. Giải:a) Ta có $ICD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn O).Tứ giác $IHDC$ có $IHD = ICD = 90^0$. Do đó tứ giác $IHDC$ nội tiếp đường tròn tâm $M \Rightarrow IMH = 2ICH$ và $ICH = IDH$. Mà $BCA = ICH = IDH$ (hai góc cùng chắn cung AB của O).

Do đó $BCA = ICH = IDH$ nên $BCH = 2ICH$.Ta có $BCH = IMH = 2ICH$. Vậy tứ giác $BCMH$ nội tiếp. b) Gọi T là giao điểm của PD và đường tròn J ngoại tiếp tam giác HMD $T \neq D$.



Xét ΔPHD và ΔPTM có HPD (chung), $PHD = PTM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MD của J).Do đó $\Delta PHD \sim \Delta PTM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PH}{PT} = \frac{PD}{PM} \Rightarrow PM.PH = PD.PT$. Chứng minh tương tự có $PM.PH = PC.PB$, nên $PD.PT = PC.PB$.

Xét ΔPBD và ΔPTC có PBD (chung), $\frac{PD}{PC} = \frac{PB}{PT}$ (vì $PD.PT = PC.PB$). Do đó $\Delta PBD \sim \Delta PTC$ (c.g.c) $\Rightarrow PBD = PTC$

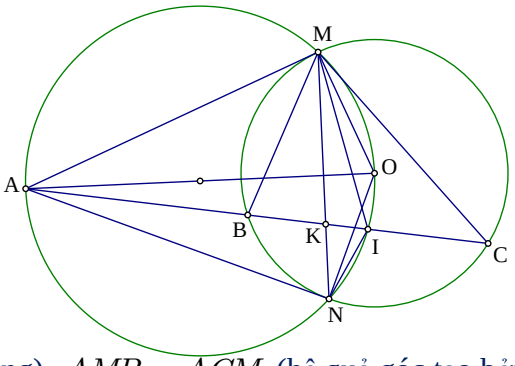
$\Rightarrow$ Tứ giác $BCDT$ nội tiếp nên T thuộc đường tròn O . Do đó $T \equiv N$. Vậy ba điểm P, D, N thẳng hàng.

Câu 84. Giải:

a) AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn O (gt) $\Rightarrow AMO = ANO = 90^0$. Tứ giác $AMON$ có $AMO + ANO = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $AMON$ nội tiếp đường tròn đường kính OA.

b) I là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow OI \perp BC$, $AIO = 90^0 \Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính OA.Ta có $AM = AN$ (AM, AN là các tiếp tuyến của O).

+ Xét đường tròn $AMOIN$ có $AM = AN \Rightarrow AM = AN \Rightarrow AIM = AMK$.



Xét ΔAIM và ΔAMK có IAM (chung), $AIM = AMK$. Do đó $\Delta AIM \sim \Delta AMK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AM}{AK} \Rightarrow AK.AI = AM^2$.

Xét ΔAMB và ΔACM có MAB(chung), $AMB = ACM$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).Do đó $\Delta AMB \sim \Delta ACM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AM} \Rightarrow AB.AC = AM^2$.Vậy $AK.AI = AB.AC = AM^2$.

c) Ta có $AIO = 90^0$; O, A cố định. vậy I thuộc đường tròn đường kính OA. Khi $B \to M$ thì $I \to M$; khi $B \to N$ thì $I \to N$. Do vậy khi cát tuyến ABC thay đổi thì I chuyển động trên cung tròn MON của đường tròn đường kính OA.

d) Xét đường tròn đường kính OA có $AM = AN \Rightarrow MIK = NIK$

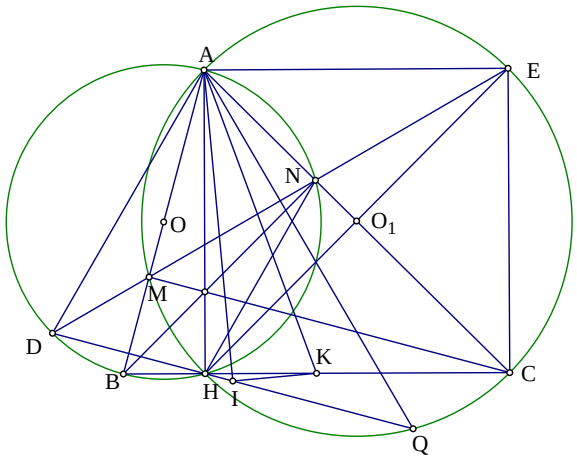
ΔIMN có IK là đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{IM}{IN} = \dfrac{MK}{NK}$. Do đó

$IM = 2IN \Leftrightarrow \dfrac{IM}{IN} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{MK}{NK} = 2 \Leftrightarrow MK = 2NK \Leftrightarrow MK = \dfrac{2}{3}MN$. Vậy khi cát tuyến ABC cắt đoạn thẳng MN tại điểm K sao cho $MK = \dfrac{2}{3}MN$ thì $IM = 2IN$.

Câu 85. Giải:

a) Ta có $AHB = 90^0$ $AH \perp BC$. Do đó H thuộc đường tròn O .H và E đối xứng qua AC (gt) và $N \in AC$.

Do đó $AHN = AEN$ (tính chất đối xứng trục)



Mà $AHN = ADN \left(= \dfrac{1}{2} sđ AN \right)$.

Do đó $AEN = ADN \Rightarrow \Delta ADE$

cân tại A.Vậy $AD = AE$.

b) $ADB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn

nửa đường tròn), $AH = AE$ (tính chất đối xứng trục) và $AD = AE$ nên $AD = AH$.

+ Xét ΔADB $ADB = 90^0$ và ΔAHB $AHB = 90^0$ có $AD = AH$, AB (cạnh chung). Do đó

$\Delta ADB = \Delta AHB$ (cạnh huyền- cạch góc vuông) $\Rightarrow DAB = HAB$.

+ Xét ΔADM và ΔAHM có $AD = AH, DAM = HAM, AM$ (cạnh chung). Do đó

$\Delta ADM = \Delta AHM$ (c.g.c) $\Rightarrow ADM = AHM$. Ta có $AHM = AHN = ADM$. Vậy HA là tia

phân giác của MHN. c) H và E đối xứng qua AC (gt)

$\Rightarrow AHC = AEC$ (tính chất đối xứng trục). Mà $AHC = 90^0$ $AH \perp BC$ nên $AEC = 90^0$. Tứ

giác $AHCE$ có $AHC + AEC = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác $AHCE$ nội tiếp $\Rightarrow A, H, C, E$ cùng thuộc một đường tròn. Mặt khác

$AHM = AEM = ADM$ $\Rightarrow$tứ giác $AEHM$ nội tiếp $\Rightarrow A, E, H, M$ cùng thuộc một đường tròn

(2). Từ (1) và (2) ta có năm điểm A, E, C, H, M cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $ANB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). $AMC = AHC = 90^0$ (A, E, C, H, M cùng thuộc một đường tròn) ΔABC có CM, BN, AH là ba đường cao

($AMC = 90^0, ANB = 90^0, AH \perp BC$).Do đó ba đường thẳng CM, BN, AH đồng quy.

d) Xét ΔADQ và ΔABC có $ADQ = ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AH của

O); $AQD = ACB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AH của O_1. Do đó $\Delta ADQ \sim \Delta ABC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DQ}{BC}$. Mà $DI = \dfrac{DQ}{2}$ (I là trung điểm của DQ), $BK = \dfrac{BC}{2}$ (K là trung điểm của

BC) nên $\dfrac{DI}{BK} = \dfrac{DQ}{BC}$

+ Xét ΔADI và ΔABK có $ADI = ABK, \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DI}{BK}\left(= \dfrac{DQ}{BC}\right)$. + Do đó

$\Delta ADI \sim \Delta ABK$ (c.g.c) $\Rightarrow AID = AKB$ $\Rightarrow$Tứ giác $AIHK$ nội tiếp. Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK.

Câu 86). Giải:

a). Ta có $ABC = ADC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).Xét ΔABC $ABC = 90^0$ và

ΔADC $ADC = 90^0$ có AC (cạnh chung), $AB = AD$ (ΔABD đều) Do đó

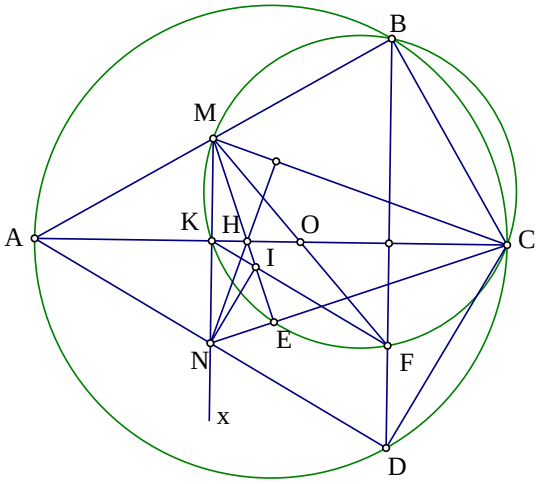
$\Delta ABC = \Delta ADC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow BAC = DAC = 30^0$

$CD = BC = AC.\sin BAC = 2a\sin 30^0 = a$; $BD = AD = AB = AC.\cos BAC = \sqrt{3}a$,

$DN = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$, ΔDNC vuông tại $D \Rightarrow CN^2 = DN^2 + CD^2$, $CN^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 + a^2 = \dfrac{7a^2}{4}$

nên $CN = \dfrac{\sqrt{7}a}{2}$.

b) ΔABD đều có AC là đường phân giác nên là đường cao, đường trung tuyến. M, N lần lượt là trung điểm $AB, AD \Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $ABD \Rightarrow MN // BD$. Ta có



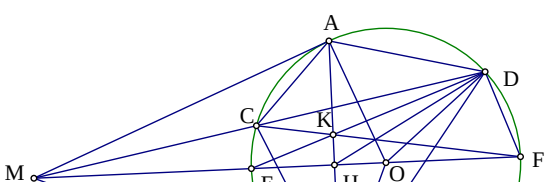
$AC \perp BD, MN // BD \Rightarrow MN \perp AC \Rightarrow MKC = 90^0$,

$MBC = 90^0, MKC = 90^0, MEC = 90^0$ (H là trực tâm của ΔCMN). Do đó B, M, K, E, C cùng thuộc một đường tròn T đường kính MC. Ta có $KFB = KCB$ (xét T), $KCB = ADB$ (xét O) $\Rightarrow KFB = ADB \Rightarrow KF // AD$. Tứ giác $KFDN$ có $KF // ND$ và $KN // FD$ nên là hình bình hành $\Rightarrow DF = KN$. ΔAMN có $AM = AN \left(AM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AD}{2} = AD\right)$ nên ΔAMN cân tại A. Mà AK là đường phân giác nên cũng là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow KN = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$. Vậy $DF = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

c) ΔCMN có CK là đường cao, đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta CMN$ cân tại C.

Do đó CK là tia phân giác $MCE \Rightarrow MCK = KCE$. Xét đường tròn T có $MCK = KCE \Rightarrow MK = KE \Rightarrow KME = MFI$. Vẽ Mx là tiếp tuyến của đường tròn MIF có $xME = MFI$ Ta có $KME = xME \Rightarrow$ Hai tia MK, Mx trùng nhau. Vậy KM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MIF. $\Delta KMI \sim \Delta KFM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KM}{KF} = \dfrac{KI}{KM}$, mà $KM = KN$ nên $\dfrac{KN}{KF} = \dfrac{KI}{KN}$. Ta có $NF // FM, KN \perp AC \Rightarrow KN \perp NF \Rightarrow KNF = 90^0$, $\Delta KIN \sim \Delta KNF$ ($\dfrac{KI}{KN} = \dfrac{KN}{KF}, IKN$ chung) $\Rightarrow KIN = KNF = 90^0$. mà $KF // AD$. Vậy $IND = 90^0$.

Câu 87. Giải:



a) $\Delta MAC \sim \Delta MDA$

b) $\Delta MHC \sim \Delta MDO$ (c.g.c)

$MCH = DOH, MHC = DHO$

c) $CAD = \dfrac{COD}{2} = \dfrac{CHD}{2} = BHD.$

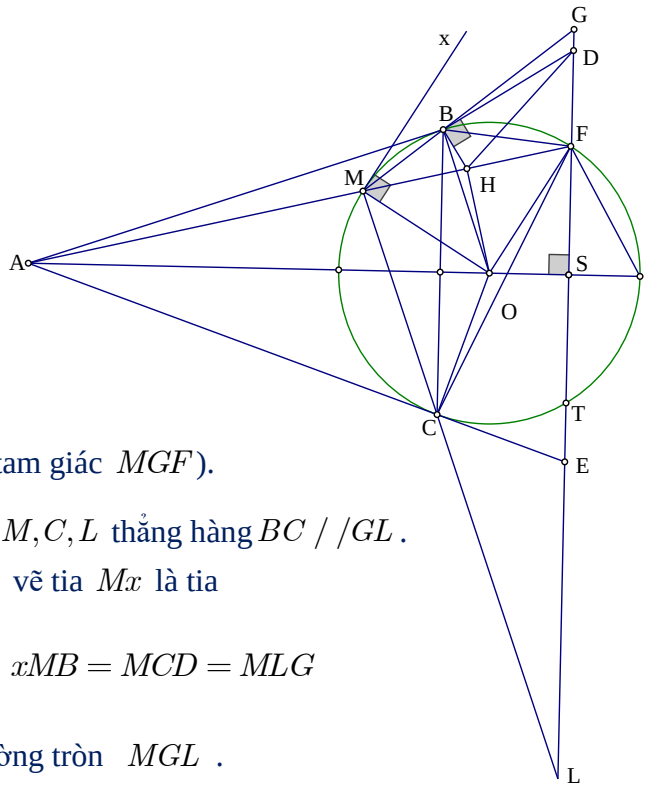
d) DE cắt CF tại K.

$OHD = OCD = \dfrac{180^0 - COD}{2} = \dfrac{180^0 - sđCD}{2} = \dfrac{sđCE - sđDF}{2} = DKF \Rightarrow$ tứ giác $DKHF$,

$KHF = 180^0 - KDF = 90^0 \Rightarrow KH \perp MO$ tại H. Mà $AB \perp MO$ tại H. Nên KH, AB trùng nhau.

Câu 88. Giải:

Vẽ $OH \perp MF$ tại H. Tứ giác $OBDH$ nội tiếp, A, B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn.



$AHB = AOB = BDS \Rightarrow$

Tứ giác $BDFH$ nội tiếp

$\Rightarrow BDH = BFH$

$ABM = BDH = BFH$

$\Rightarrow BM // DH, DH // GM$

(DH là đường trung bình của tam giác MGF).

M, B, G thẳng hàng.Tương tự M, C, L thẳng hàng $BC // GL$. Trên nửa mặt phẳng bờ BM có chứa F vẽ tia Mx là tia

tiếp tuyến của đường tròn O, $xMB = MCD = MLG$

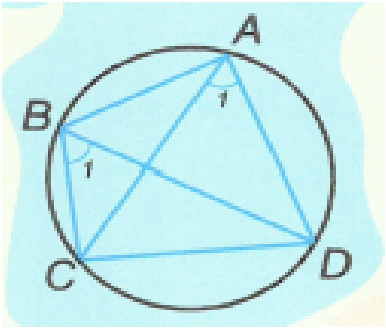
$\Rightarrow Mx$ là tia tiếp tuyến của đường tròn MGL.

Vậy hai đường tròn O và MGL tiếp xúc nhau.

HH9-CHUYÊN ĐỀ 12. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

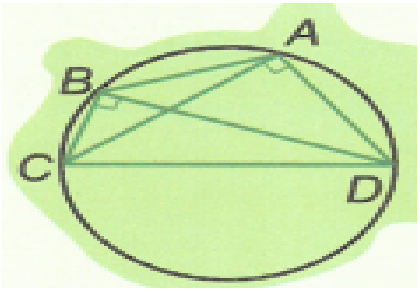
- Hai đỉnh cùng nhìn một cạnh



$A_1 = B_1$.

A và B là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh CD

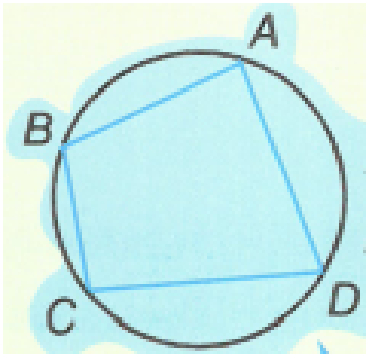
Đặc biệt



$CBD = CAD = 90°$

A, B là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh CD.

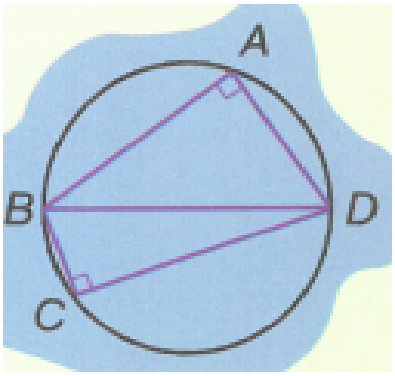
- Hai góc đối bù nhau



$A + C = 180°$

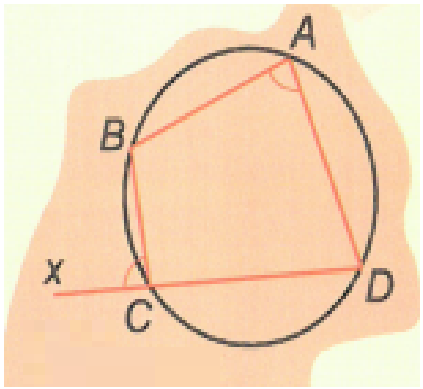
$$B + D = 180°$$

Đặc biệt



$$A = C = 90°$$

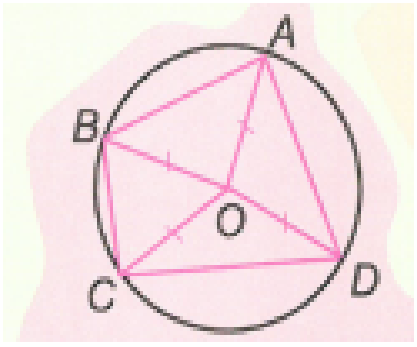
Góc trong = góc ngoài tại đỉnh đối diện



$$A = BCx$$

BCx là góc ngoài tại C

Cùng cách đều một điểm



OA=OB=OC=OD

Phương pháp giải

a) Phương pháp 1. Chứng minh cho bốn đỉnh của tứ giác cách đều một điểm nào đó.

Cho một điểm I cố định và tứ giác ABCD. Nếu chứng minh được 4 điểm A, B, C, D cách đều điểm I, tức là $IA = IB = IC = ID$ thì điểm I chính là tâm đường tròn đi qua 4 điểm A, B, C, D. Hay nói cách khác tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm I bán kính IA.

b) Phương pháp 2. Chứng minh tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180º

Cho tứ giác ABCD. Nếu chứng minh được $A + C = 180°$ hoặc $B + D = 180°$ thì tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn.

c) Phương pháp 3. Chứng minh từ hai đỉnh cùng kề một cạnh cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

Cho tứ giác ABCD, nếu chứng minh được rằng DAC và DBC bằng nhau và cùng nhìn cạnh DC thì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

d) Phương pháp 4: Nếu một tứ giác có tổng số đo hai cặp góc đối diện bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.

Cho tam giác ABCD. Nếu chứng minh được $A + C = B + D$ thì tứ giác ABCD cũng nội tiếp trong một đường tròn.

e) Phương pháp 5: Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện đỉnh đó thì nội tiếp được trong một đường tròn.

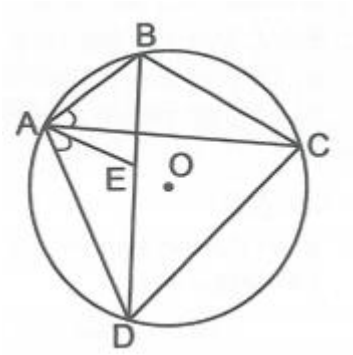
Nếu cho tứ giác ABCD và chứng minh được góc ngoài tại đỉnh A mà bằng góc trong tại đỉnh C (tức là góc C của tứ giác đó) thì ABCD cũng nội tiếp đường tròn.

f) Phương pháp 6: Chứng minh bằng phương pháp phản chứng

Chú ý: Có thể chứng minh tứ giác ABCD là một trong những hình đặc biệt sau: Tứ giác ABCD là hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông.

Định lí Pto-lê-mê:

Trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối diện.



Chứng minh

GT	Tứ giác ABCD nội tiếp (O)
KL	$AC.BD = AB.DC + AD.BC$

Láy $E \in BD$ sao cho $BAC = EAD$

$\Rightarrow \Delta DAE \sim \Delta CAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{CB} \Rightarrow AD.BC = AC.DE$ (1)

Tương tự: $\Delta BAE \sim \Delta CAD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BE}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

$\Rightarrow BE.AC = CD.AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD.BC + AB.CD = AC.DE + EB.AC$

$\Rightarrow AD.BC + AB.CD = AC.BD$ (điều phải chứng minh)

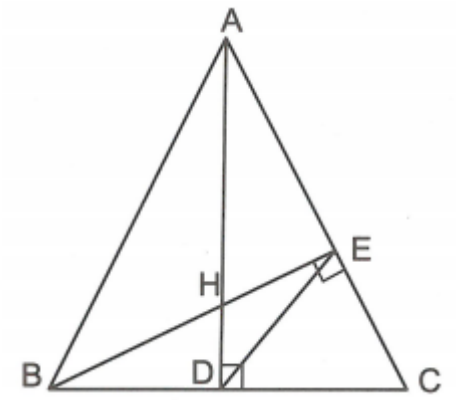
B.BÀI MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Các đường cao AD, BE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác AEDB nội tiếp.

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Xét tứ giác CEHD ta có: $CEH = 90°$ (vì BE là đường cao) và $CDH = 90°$

(vì AD là đường cao)

$\Rightarrow CEH + CDH = 180°$.

Mà CEH, CDH là hai góc đối diện của tứ giác CEHD.

Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp.

b) Theo giả thiết: BE là đường cao

$\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow BEA = 90°$

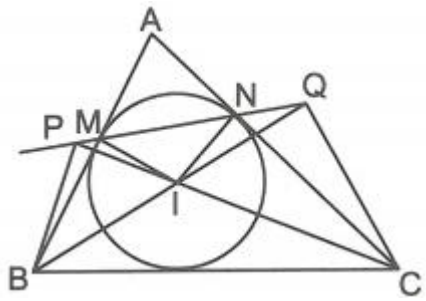
AD là đường cao $\Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow BDA = 90°$.

Do đó E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90°, suy ra E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB. Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn hay tứ giác AEDB nội tiếp.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $A > B > C$. Đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với cạnh AB, AC tại M và N. Gọi P và Q lần lượt là các giao điểm của CI, BI với đường thẳng MN. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác INQC nội tiếp. b) Tứ giác BPQC nội tiếp.

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Vì đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC tại M và N nên $AM = AN$.

$CNQ = ANM$ (hai góc đối đỉnh)

$= \dfrac{180° - A}{2} = \dfrac{B + C}{2} = IBC + ICB = CIQ$

Tứ giác INQC có hai điểm liên tiếp I và N cùng nhìn cạnh QC dưới các góc bằng nhau nên tứ giác này nội tiếp được một đường tròn.

b) Vì INQC là tứ giác nội tiếp nên $INC = IQC$.

Vì AC tiếp xúc với đường tròn (I) tại N nên $IN \perp AC$ hay $INC = 90°$.

Suy ra $IQC = 90°$. (1)

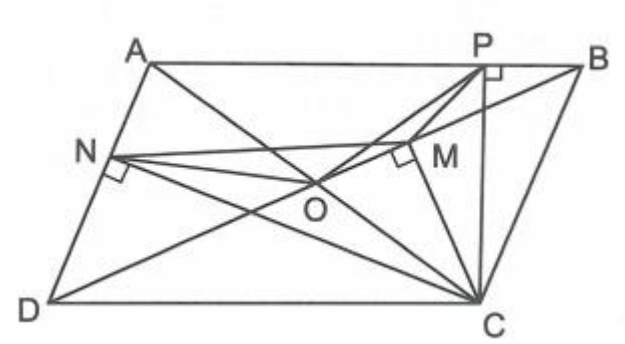
Chứng minh tương tự câu a) ta có tứ giác IMPB nội tiếp

$\Rightarrow IMB = IPB = 90°$

Từ (1) và (2) suy ra: $BPC = BQC = 90°$ nên tứ giác BPQC nội tiếp đường tròn đường kính BC.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành ABCD, có tâm là O. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên BD, AD, AB. Chứng minh tứ giác NMOP là tứ giác nội tiếp.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: $CPA = CNA = 90°$ (gt) nên tứ giác ANCP nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC.

Suy ra $PON = 2PCN$.

Lại có $PCN + NAP = 180^{\circ}$

$\Rightarrow PCN = 180° - NAP = ABC$ (do AD // BC)

Do đó $PON = 2ABC$ (1)

Mặt khác $PMN = 180° - \left(PMB + NMD\right)$

Mà tứ giác CDNM nội tiếp đường tròn đường kính CD nên:

$NMD = NCD = 90° - CDN = 90° - ABC$.

Lại có tứ giác BCMP nội tiếp đường tròn đường kính BC nên:

$PMB = PCB = 90° - ABC$

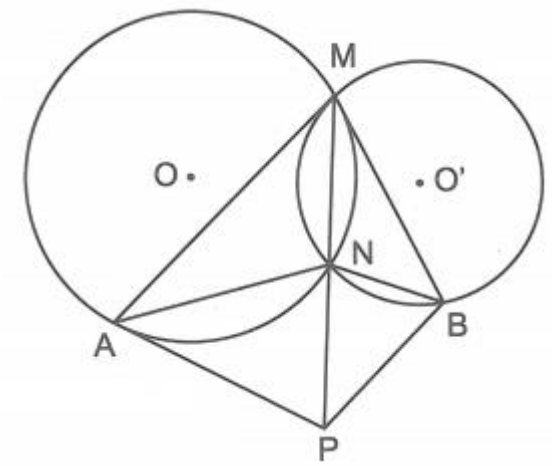
$\Rightarrow PMN = 180° - \left(90° - ABC + 90° - ABC\right) = 2ABC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $PON = PMN$ do đó tứ giác PMON nội tiếp.

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại M, N. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt (O') tại B, tiếp tuyến tại M của (O') cắt (O) tại A. Gọi P là điểm đối xứng của M qua N. Chứng minh tứ giác MAPB nội tiếp.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Cách 1:



Ta có: $AMN = MBN,\ MAN = BMN$

Nên ΔAMN ~ ΔMBN (g.g)

Do đó $\frac{AN}{MN} = \frac{MN}{BN} \Rightarrow \frac{AN}{NP} = \frac{NP}{BN}$

$\Rightarrow$ ΔANP ~ ΔPNB (c.g.c)

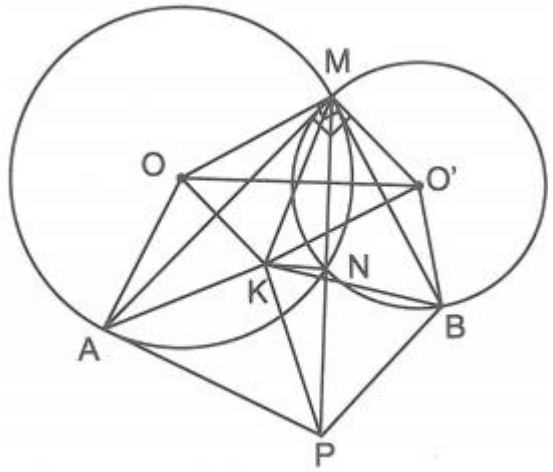
$\Rightarrow NAP = NPB$ (hai góc tương ứng)

Từ đó suy ra $MAP = MAN + NAP$

$= PMB + MPB = 180° - MBP$

Vậy tứ giác AMBP là tứ giác nội tiếp.

Cách 2:



Gọi K là điểm đối xứng của M qua trung điểm của OO'.

Ta có tứ giác OMO'K là hình bình hành nên OM // O'K, O'M // OK.

Mặt khác do $OM \perp MB, O'M \perp MA$ nên $O'K \perp MB, OK \perp MA$.

Vậy OK, O'K là các đường trung trực của MA, MB nên $KA = KB = KM$ (1)

Mà ta dễ dàng chứng minh được KN // OO', $OO' \perp MN \Rightarrow KN \perp MN$.

Do $MN = NP$ nên tam giác KMP cân tại K, suy ra $KM = KP$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KA = KB = KM = KP$.

Vậy tứ giác AMBP là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 5. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại M và P. Vẽ dây MA của đường tròn (O_2) là tiếp tuyến của đường tròn (O_1). Vẽ dây MB của đường tròn (O_1) là tiếp tuyến của đường tròn (O_2). Trên tia đối của tia PM lấy điểm H sao cho $PH = PM$. Chứng minh rằng tứ giác MAHP nội tiếp.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tìm cách giải.

- Khai thác giả thiết, ta có $PH = PM$. Do vậy nếu I, K là trung điểm MB, MA mà MIPK là tứ giác nội tiếp thì MAHB cũng là tứ giác nội tiếp.
- Ta biết rằng tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm các đường trung trực của các cạnh và đường chéo. Dễ nhận biết đường trung trực của MB đi qua O_1, đường trung trực của MA đi qua O_2. Nếu giao điểm của hai đường trung trực này nằm trên đường trung trực của MH thì bài toán xong.

Với hai định hướng trên ta có hai cách giải sau:

Trình bày HƯỚNG DẪN GIẢI

Cách 1. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MB, MA.

Ta có: $BMP = MAP$; $AMP = MBP$ suy ra $\Delta MBP \backsim \Delta AMP$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BP}{MP} = \dfrac{MB}{AM} \Rightarrow \dfrac{BP}{MP} = \dfrac{BI}{MK}$

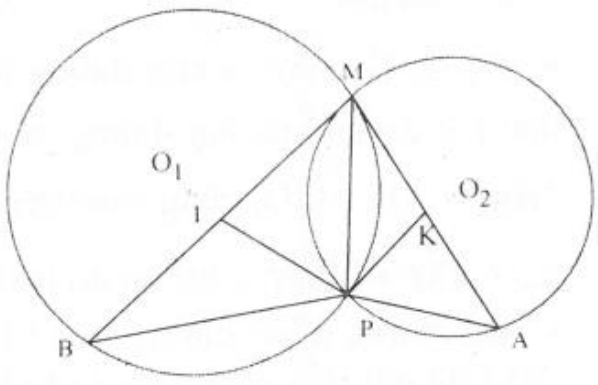
$\Rightarrow \Delta BPI \backsim \Delta MPK$ (c.g.c)

$\Rightarrow BPI = MPK$

Xét $IMK + IPK = IMP + PMK + IPM + MPK$

$= IMP + MBP + IPM + BPI = 180°$

Suy ra tứ giác MIPK nội tiếp, mà IP, KP lần lượt là

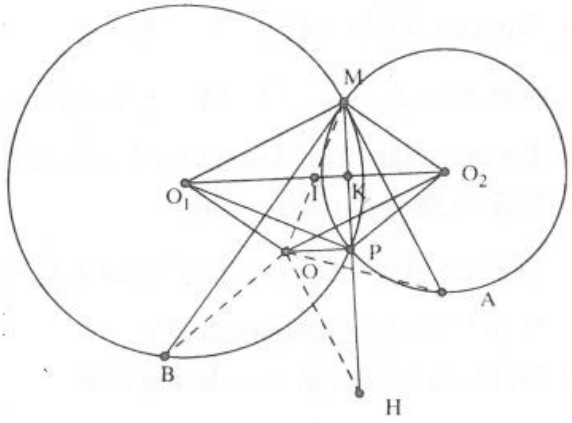


đường trung bình của tam giác MBH, MAH $\Rightarrow IP//BH$, $KP//AH$

$\Rightarrow KPI = AHB \Rightarrow AMB + AHB = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác MAHP nội tiếp

Cách 2. Dựng hình bình hành O_1MO_2O



Suy ra $O_1O//MO_2$, $O_2O//O_1M$

Mà $MB \perp MO_2$, $MA \perp MO_1$ nên:

$O_1O \perp MB$, $O_2O \perp MA$.

Do đó $OM = OB$; $OM = OA$ (1)

Gọi giao điểm O_1O_2 với MO; MP là I, K

Ta có $O_1O_2 \perp MP$ và $IM = IO$; $KM = KP$

Do đó IK là đường trung bình của tam giác MOP

Suy ra $IK//OP \Rightarrow OP \perp MH$ mà $MP = PH$

$\Rightarrow$ OP là đường trung trực của $MH \Rightarrow OM = OH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OM = OA = OH = OB$

$\Rightarrow$Tứ giác MAHB nội tiếp.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên cạnh AB lấy điểm M (M khác A và B). Gọi O; O_1; O_2 lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMC và BMC.

1) Chứng minh bốn điểm C, O_1, M, O_2 cùng nằm trên một đường tròn (T).

2) Chứng minh rằng đường tròn (T) đi qua O.

3) Xác định vị trí của M trên đoạn AB sao cho đường tròn (T) có bán kính nhỏ nhất.

(Tuyển sinh 10, chuyên toán ĐHSP Hà Nội, năm học 2008 - 2009)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tìm cách giải.

O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp nên CO_1M ; CO_2M lần lượt hai góc ở tâm của hai đường tròn tròn tương ứng. Phân tích đi lên ta có bốn điểm C, O_1, M, O_2 cùng nằm trên một đường tròn $\Leftrightarrow CO_1M + CO_2M = 180° \Leftrightarrow CAM + CBM = 90°$ từ đó ta tìm được cách giải.

• Để chứng minh đường tròn (T) đi qua điểm O, ta cần chứng minh tứ giác CO_2OM nội tiếp hoặc tứ giác CO_1MO nội tiếp. Cả hai hướng trên đều cho **HƯỚNG DẪN GIẢI** đúng.

Trình bày HƯỚNG DẪN GIẢI

1) Sử dụng tính chất góc ở tâm đường tròn, ta có:

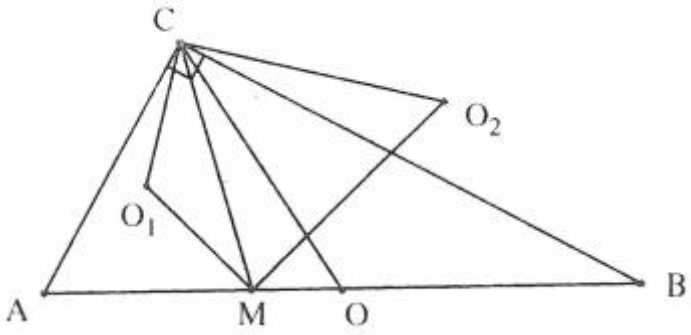
$CO_1M = 2.CAM$; $CO_2M = 2.CBM$.

Do tam giác ABC vuông nên:

$CAM + CBM = 90°$.

Suy ra $CO_1M + CO_2M = 180°$.

Vậy bốn điểm C, O_1, M, O_2 cùng thuộc một đường tròn



2) Do tam giác ABC vuông tại C nên O là trung điểm của AB,

Giả sử M thuộc đoạn OA.

Do tam giác COB cân tại O nên $COM = 2.CBO = CO_2M$.

Vậy O thuộc đường tròn (T)

3) Gọi R là bán kính của đường tròn (T).

Do (T) đi qua C và O nên $CO \le 2R$ hay $R \ge \frac{1}{2}CO$

Dấu bằng đạt được khi M là hình chiếu của C trên AB.

Vậy bán kính của đường tròn (T) nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}CO$ khi M là hình chiếu của C trên AB.

Ví dụ 7. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia BC lấy điểm D. Gọi E là giao điểm của DO và AC. Qua E vẽ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (O), tiếp tuyến này cắt đường thẳng AB tại K. Chứng minh bốn điểm D, B, O, K cùng thuộc một đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tìm cách giải. Dựa vào hình vẽ ta có một số định hướng sau:

• Nếu gọi M là tiếp điểm của đường tròn (O) với EK, dễ thấy BOMK là tứ giác nội tiếp. Nên muốn chứng minh D, O, K, B cùng thuộc một đường tròn, ta chỉ cần chứng minh D, O, M, B cùng thuộc một đường tròn.

• Quan sát kỹ, ta có $BKO = \frac{K}{2}$. Vậy ta chỉ cần chứng minh $BDO = \frac{K}{2}$.

• Cũng dễ nhận thấy $DBK = ABC = \frac{180° - A}{2}$.

Do đó ta cũng cần chứng minh $DOK = \dfrac{180° - A}{2}$.

Trình bày HƯỚNG DẪN GIẢI

Cách 1. Gọi M là tiếp điểm của đường tròn (O) với EK.

Ta có EM, EC là tiếp tuyến của (O) nên:

$MOE = COE = \dfrac{1}{2}MOC$

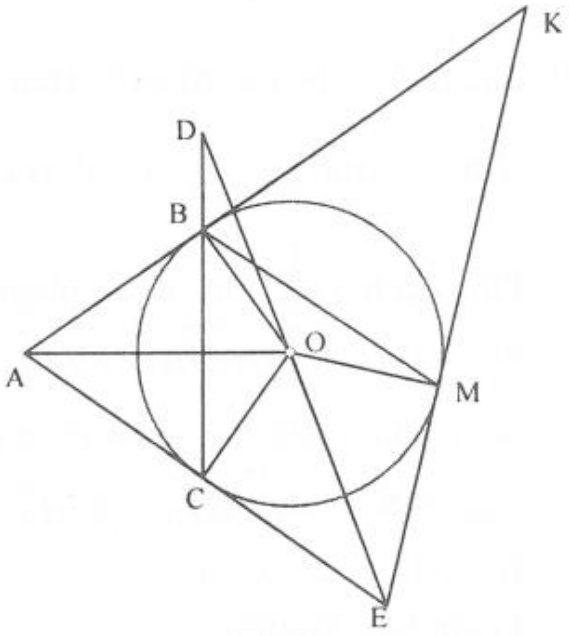
Vì $MBC = \dfrac{1}{2}MOC \Rightarrow MOE = MBC$.

Mặt khác $MOE + MOD = 180°$

Và $MBC + MBD = 180°$

Suy ra $MOD = MBD$

Vậy D, O, M, B cùng thuộc một đường tròn.



Mà $KMO = KBO = 90°$ nên tứ giác KMOB nội tiếp.

Vậy năm điểm D, K, O, M, B cùng thuộc một đường tròn

Suy ra D, O, K, B cùng thuộc một đường tròn.

Cách 2. Ta có

$CDE = 180° - DCE - DEC = 180° - 90° - \dfrac{A}{2} - \dfrac{E}{2}$

$\Rightarrow CDE = 90° - \dfrac{A+E}{2} = \dfrac{K}{2}$

Mà $BKO = \dfrac{K}{2} \Rightarrow BKO = BDO$.

Suy ra D, O, K, B cùng thuộc một đường tròn.

Cách 3. Tam giác OEK có $DOK = OKE + OEK = \dfrac{K+E}{2}$ (tính chất góc ngoài tam giác).

Suy ra $DOK = \dfrac{180° - A}{2}$

Mặt khác, ta có: $DBK = ABC = \dfrac{180° - A}{2}$

Do đó: $DBK = DOK$

Vậy D, O, K, B cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 8. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và C là điểm chính giữa cung AB. Lấy điểm M tùy ý trên cung BC (M khác B). Gọi N là giao điểm của hai tia OC và BM; H, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AO, AM; K là giao điểm các đường thẳng BM và HI.

a) Chứng minh rằng A, H, K và N cùng nằm trên một đường tròn;

b) Xác định vị trí của điểm M trên cung BC (M khác B) sao cho $AK=\dfrac{R\sqrt{10}}{2}$

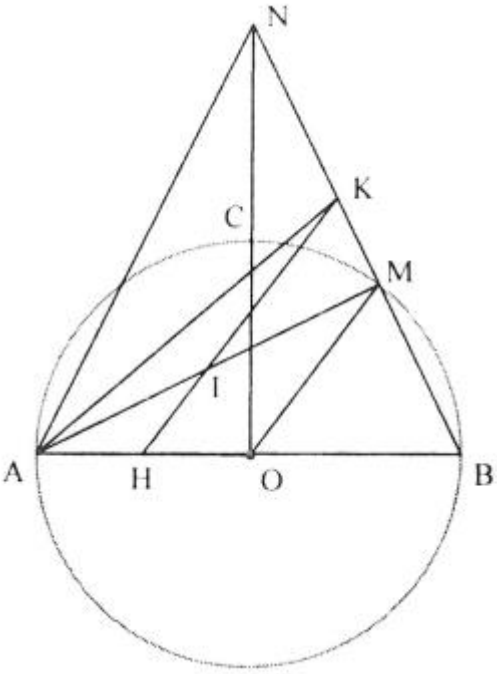
(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Hà Nội, năm học 2088 - 2019)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tìm cách giải. Dễ dàng nhận thấy HI là đường trung bình của ΔAOM nên $HI//OM$ suy ra $KHB=MOB$; $HKB=OMB$. Do vậy để chứng minh A, H, K và N cùng nằm trên một đường tròn ta chỉ cần chứng minh $NAO=HKB$ hoặc $ANB=KHB\Leftrightarrow NAO=OMB$ hoặc $ANB=MOB$.

Từ đó ta có cách giải sau:

Trình bày HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Ta có tam giác NAB cân tại N (ON là trung trực của AB)

$\Rightarrow NAB=NBA \qquad (1)$

Lại có: $OM=OB=R$.

$\Rightarrow NBA=BMO \qquad (2)$.

Do H, I là trung điểm của OA, AM nên HI là đường trung bình của tam giác AOM.

Suy ra $HI//OM\Rightarrow BMO=HKM \qquad (3)$

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $NAB=HKB$.

Do đó tứ giác AHKN nội tiếp hay A, H, K, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có: $AH=HO=\dfrac{AO}{2}=\dfrac{R}{2}$.

$HK//OM\Rightarrow \dfrac{KM}{KB}=\dfrac{OH}{OB}=\dfrac{R}{2R}=\dfrac{1}{2}$

Đặt $MB=x\Rightarrow MK=\dfrac{x}{2}$

Áp dụng định lí Py-ta -go trong các tam giác vuông AKM và AMB, ta có:

$AK^2-KM^2=AM^2=AB^2-BM^2$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{R\sqrt{10}}{2}\right)^2-\dfrac{x^2}{4}=4R^2-x^2\Leftrightarrow x=R\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin MAB = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{R\sqrt{10}}{2R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow MAB = 45^\circ \Leftrightarrow sd\,BM = 90^\circ \Leftrightarrow M \equiv C$.

C.BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho hình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB. Kẻ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CBMD là tứ giác nội tiếp.

b) Khi điểm D di động trên đường tròn thì $BMD + BCD$ không đổi.

c) $DB.DC = DN.AC$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) và (O') cắt đường tròn (O') và (O) theo thứ tự tại C và D. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các dây AC và AD. Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác ABD và CBA đồng dạng.

b) $BQD = APB$.

c) Tứ giác APBQ nội tiếp.

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt AB và AC thứ tự tại D và E. Chứng minh AO vuông góc với DE.

Bài 4. Cho hai vòng tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm T. Hai vòng tròn này nằm trong vòng tròn (O_3) và tiếp xúc với (O_3) tương ứng tại M và N. Tiếp tuyến chung tại T của (O_1) và (O_2) cắt (O_3) tại P. PM cắt vòng tròn (O_1) tại điểm thứ hai A và MN cắt (O_1) tại điểm thứ hai B. PN cắt vòng tròn (O_2) tại điểm thứ hai D và MN cắt (O_2) tại điểm thứ hai C.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AB, CD và PT đồng quy.

Bài 5. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B và C). Tiếp tuyến qua M cắt AB và AC tại E và F. Đường thẳng BC cắt OE và OF ở P và Q. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác OBEQ, OCFP là các tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác PQFE là tứ giác nội tiếp.

c) Tỉ số $\frac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

Bài 6. Cho tam giác ABC, D và E là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB và AC. Chứng minh đường phân giác trong của góc B, đường trung bình của tam giác song song với cạnh AB và đường thẳng DE đồng quy.

Bài 7. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định và đường kính CD quay quanh điểm O. Các đường thẳng AC và AD cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn theo thứ tự tại E và F.

1. Chứng minh rằng tứ giác CDFE nội tiếp đường tròn.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDFE. Chứng minh rằng điểm I di động trên đường thẳng cố định khi đường kính CD quay quanh điểm O.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Trà Vinh, năm học 2009 - 2010)

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A và D là một điểm trên cạnh AC (Khác với A và C). Vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với BC tại E. Từ B kẻ tiếp tuyến thứ hai BF với đường tròn (D). Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của BF và AM. Chứng minh năm điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn và $AN = NF$.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Vĩnh Long, năm học 2019 -2020)

Bài 9. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB, vẽ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M, N khác với điểm). Đường thẳng DE cắt MN tại 1. Chứng minh rằng:

a) $MI.BE = BI.AE$.

b) Khi điểm C thay đổi thì đường DE luôn đi qua một điểm cố định.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2009 - 2010)

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với CA và CB lần lượt tại M và N. Đường thẳng MN cắt đường thẳng AI tại P. Chứng minh rằng góc IPB vuông.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Gia Lai, năm học 2009 - 2010)

Bài 11. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại A, $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với $(O;R)$ tại B. Hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai M.

a) Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB, chứng minh $OM//CD$ và 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N;

c) Tìm vị trí của P để tích PM.PN lớn nhất? Diện tích tam giác AMB lớn nhất.

(Thi Học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2009 - 2010)

Bài 12. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có AD là phân giác góc BAC, tia AD cắt đường tròn tại điểm E (E khác A). Kẻ đường kính EF của đường tròn (O). Gọi P là một điểm nằm giữa A và D. Tia FP cắt đường tròn (O) tại Q khác F. Đường thẳng qua P vuông góc với AD cắt CA, AB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng các tứ giác PQBN, PQCM là tứ giác nội tiếp.

b) Giả sử QN và PC cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O). Chứng minh rằng QM và PB cũng cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O).

Bài 13. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp $(O;R)$ có $AB < AC$. Vẽ 3 đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H, AD cắt (O) tại K và cắt EF tại I.

a) Chứng minh rằng: BC là trung trực của HK và $IF.IE = IH.IA$;

b) Chứng minh rằng : Các tứ giác DHEC, BFIK nội tiếp được;

c) Chứng minh rằng: $\frac{KC}{AC} + \frac{BK}{BA} = \frac{EF}{AI}$;

d) Đường thẳng qua E song song với AD cắt BK tại M. Chứng minh rằng: 3 điểm F, D, M thẳng hàng;

Bài 14. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ có AD là đường phân giác. Đường thẳng qua C song song với AD cắt đường trung trực của AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung trực của AB tại F.

a) Chứng minh rằng tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là G.

c) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BF tại Q. Đường thẳng QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC và P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn.

Bài 15. Cho tam giác ABC có BAC là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $QAB = BCA$ và $CAP = ABC$. Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng của A qua P; Q. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(Thi vô địch Toán Quốc Tế IMO, năm 2014)

Bài 16. Cho 19 điểm nằm trong hay trên cạnh của một lục giác đều cạnh bằng 4 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 trong số 19 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

(thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hưng Yên, năm học 2013 - 2014)

Bài 17. Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và B, M là trung điểm của AB. Đường thẳng qua A vuông góc với MD cắt đường thẳng qua B vuông góc với MC tại N. Chứng minh $MN \perp CD$.

(tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán. Đại học sư phạm TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015 - 2016)

Bài 18. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có các góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm cạnh BC, E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, F là điểm đối xứng của E qua M.

a) Chứng minh rằng $EB^2 = EF.EO$;

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC. Chứng minh các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P, O, F không thẳng hàng. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua một điểm cố định.

(tuyển sinh lớp 10, trường phổ thông Năng khiếu Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015-2016)

Bài 19. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$, M là trung điểm cạnh BC, O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO. Chứng minh rằng:

a) $MX \perp BF$.

b) Hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

c) $\frac{EF}{FY} = \frac{BC}{CD}$.

(tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, Đại học sư phạm Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Bài 20. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trung điểm của BC. M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của MN.

1) Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi P là giao điểm của OI và AB. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

3) Xác định vị trí của điểm M để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

(tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, TP. Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Bài 21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh bốn điểm A, E, P, F cùng nằm trên một đường tròn .

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB. Chứng minh:

$QKL + PAB = QLK + PAC$.

(tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, ĐHKHTN, Đại học Quốc Gia Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Bài 22. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC không đi qua tâm. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ *BC*. Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm *A* và có số đo bằng α không đổi sao cho *E*, *F* khác phía với điểm *A* so với *BC*; *AF* và *AE* cắt đường thẳng *BC* lần lượt tại *M* và *N*. Lấy điểm *D* sao cho tứ giác *MNED* là hình bình hành.

a) Chứng minh *MNEF* là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MDF*. Chứng minh rằng khi góc nội tiếp EAF quay quanh điểm *A* thì *I* chuyển động trên một đường thẳng cố định.

c) Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng *OI* khi $\alpha = 60°$ và $BC = R$.

(thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2013 - 2014)

Bài 23. Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

1. Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

2. Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

3. Gọi D là trung điểm của HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

(thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2017 - 2018)

Bài 24. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Lấy điểm D nằm giữa B và C. Qua D vẽ một đường thẳng vuông góc với OD cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Khi D di động trên BC, chứng minh rằng tứ giác AEOF luôn là tứ giác nội tiếp.

Bài 25. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, AD. Chứng minh tứ giác MNPQ nội tiếp.

Bài 26. Cho hai đường tròn (O) và (O') ngoài nhau. Các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD sao cho $A,C \in (O);\ B,D \in (O')$. Nối AD cắt (O), (O') lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.

Bài 27. *(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Lê Quý Đôn - Bình Định năm học 2018-2019 vòng 1)*

Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có các góc đều nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. AD là đường kính của đường tròn (O), H là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC tại M. Đường thẳng MO cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh $MD^2 = MB.MC$

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường thẳng AD tại P. Chứng minh tứ giác BHPD là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh O là trung điểm của EF.

Bài 28. Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $AB < AC$. Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H $(D \in AC,\ E \in AB)$. Gọi I là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔBEI và đường tròn ngoại tiếp ΔCDI cắt nhau tại K $(K \neq I)$.

a) Chứng minh rằng: $BDK = CEK$

b) Đường thẳng DE cắt BC tại M. Chứng minh ba điểm M, H, K thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng tứ giác BKMD nội tiếp.

Bài 29. *(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Ninh Bình năm học 2017- 2018)*

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B (O, O'thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O) và (O') tại C, D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt (O) và (O') tại M, N (M, N khác A). Các đường thẳng CM, DN cắt nhau tại E. Gọi P và Q lần lượt là giao của đường thẳng MN với đường thẳng BC và đường thẳng BD. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD.

b) Tứ giác BCED nội tiếp.

c) Tam giác EPQ là tam giác cân.

Bài 30. *(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Bắc Giang năm học 2018-2019)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M không trùng với B và C), đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD cắt đường thẳng AC tại điểm E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD cắt đường thẳng AB tại điểm F khác B.

a) Chứng minh rằng tứ giác BECF nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng hai tam giác ECD, FBD đồng dạng và ba điểm E, M, F thẳng hàng

Bài 31. *(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Sư phạm Hà Nội năm học 2017-2018 vòng 2)*

Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C (C khác A, khác B). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MA, MC. Đường thẳng KA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D.

1. Chứng minh $KO^2 - KM^2 = R^2$

2. Chứng minh tứ giác *BCDM* là tứ giác nội tiếp.

3. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với (O) và N là trung điểm của KE. Đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng tứ giác ANFI là tứ giác nội tiếp.

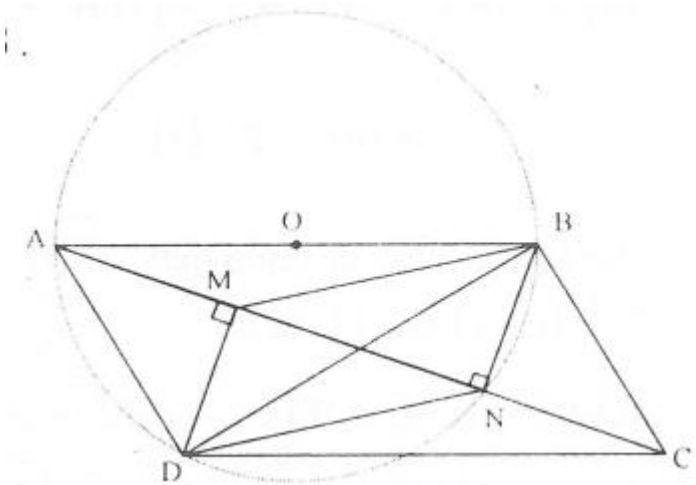
HƯỚNG DẪN

1.

a) AB là đường kính đường tròn $(O) \Rightarrow ADB = 90°$ mà $ADB = DBC$ (so le trong) $\Rightarrow DBC = 90°$.

Mặt khác $DMC = 90°$ suy ra: $DMC = DBC = 90°$ do đó tứ giác CBMD nội tiếp đường tròn đường kính CD.

Nhận xét. Ngoài cách giải trên, chúng ta có thể giải theo hướng sau:



• Ta có: $MDB = DBN = DAN = MCB$.

Suy ra điều phải chứng minh.

• Ta có: $DMB = DNB$; $DAB = DCB$

Mà $DAB + DNB = 180°$.

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Khi điểm D di động trên đường tròn (O) thì tứ giác CBMD luôn là tứ giác nội tiếp

Suy ra $BMD + BCD = 180°$ (điều phải chứng minh).

c) Do $ANB = 90°$ thuộc (O).

Ta có: $BDN = BAN$ (góc nội tiếp) mà $ACD = BAN$ (so le trong)

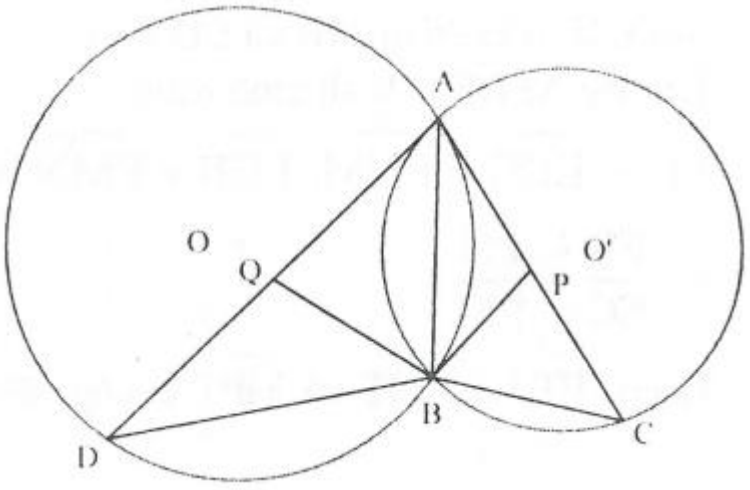
$\Rightarrow BDN = ACD$.

Mặt khác $DAC = DAN = DBN$ (cùng chắn cung DN)

Suy ra: $\Delta ACD \backsim \Delta BDN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{CD}{DN} \Rightarrow AC.DN = BD.CD$

2.

a) Áp dụng hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có:



$CAB = ADB$, $ACD = BAD$

Suy ra: $\Delta ABD \backsim \Delta CBA$ (g.g).

b) Vì $\Delta ABD \backsim \Delta CBA$, suy ra: $\dfrac{AD}{CA} = \dfrac{BD}{BA}$

Mà $DQ = \dfrac{AD}{2}$; $AP = \dfrac{AC}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DQ}{AP}$

Lại có: $QDB = PAB$

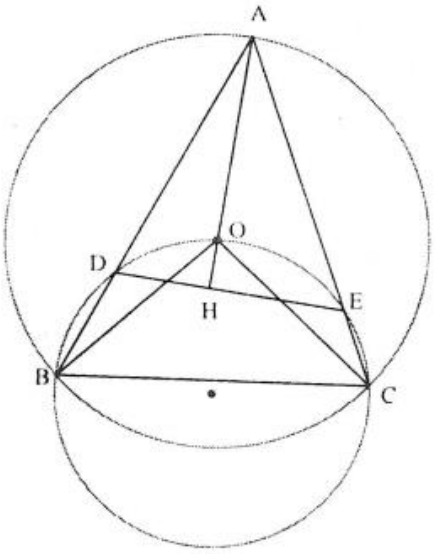
Suy ra: $\Delta BQD \backsim \Delta APB$ (c.g.c)

$\Rightarrow BQD = APB$.

c) Ta có: $AQB + BQD = 180°$, mà $BQD = APB \Rightarrow AQB + APB = 180°$

Suy ra tứ giác APBQ nội tiếp.

3. Tia AO cắt DE tại H.



Vì O là tâm đường tròn nội tiếp AABC nên $AOC = 2.B$.

Suy ra $OAC = OCA = \dfrac{1}{2}\left(180° - AOC\right)$

$= 90° - B \ (1)$

Tứ giác BDEC nội tiếp nên $AED = B \qquad (2)$

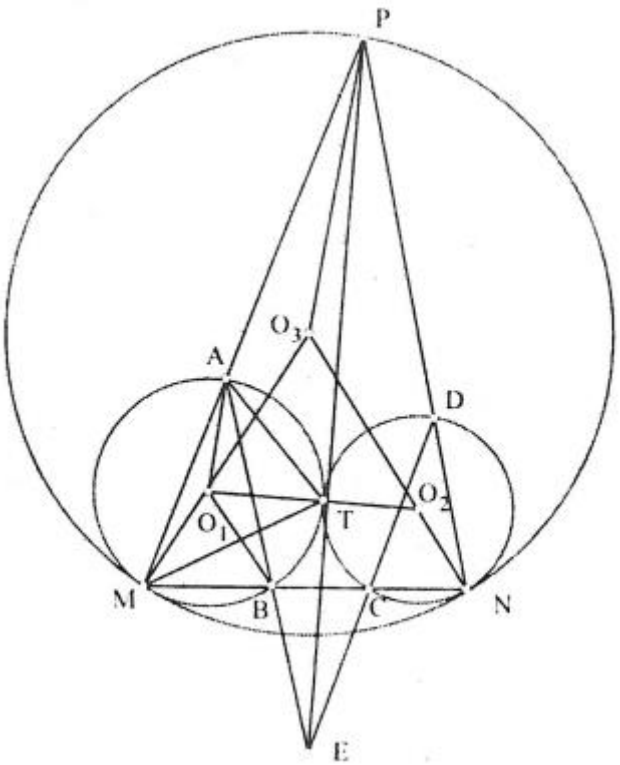
Kết hợp (1) và (2) ta có:

$OAC = HAE = 90° - B = 90° - AED$.

Suy ra: $HAE + AEH = 90° \Rightarrow AHE = 90°$

Hay AO vuông góc với BC.

4.



a) Gọi O_1; T; O_2 thẳng hàng.

Các tam giác cân O_1MB và O_3MN có chung góc M suy ra $\Delta O_1MB \backsim \Delta O_3MN$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MN} = \dfrac{MO_1}{MO_3}$

Tương tự suy ra $\Delta O_1MA \backsim \Delta O_3MP$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MP} = \dfrac{MO_1}{MO_3}$

Vậy $\dfrac{MB}{MN} = \dfrac{MA}{MP} \Rightarrow AB // PN$

Tương tự ta có $CD // PM$.

Gọi E là giao điểm AB và CD.

Tứ giác AEDP là hình bình hành.

Tacó: $EBC = PNM$; $ECB = PMN$ nên $\Delta EBC \backsim \Delta PNM$ (g.g) (1)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{PN}{PM}$

Ta có: $PTA = PMT$ và MPT chung, nên $\Delta PAT \backsim \Delta PTM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{PT} = \dfrac{PT}{PM} \Rightarrow PA.PM = PT^2$

Tương tự, ta có: $PD.PN = PT^2$

$\Rightarrow PA.PM = PD.PN$ nên $\Delta PNM \backsim \Delta PAD$ (c.g.c) (2)

Mà APDE là hình bình hành nên $\Delta EDA = \Delta PAD$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\Delta EBC \backsim \Delta EDA \Rightarrow EBC = EDA$

Do đó tứ giác ABCD nội tiếp,

b) Gọi giao điểm của PT và AB là I. Tia IC cắt (O_2) tại D'

Ta có: $IA.IB = IT^2 = IC.ID'$ suy ra $\Delta IBC \backsim \Delta ID'A \Rightarrow IBC = ID'A$

Do đó tứ giác $ABCD'$ nội tiếp mà ABCD nội tiếp nên D trùng D'

Vậy các đường thẳng AB, CD và PT đồng quy.

5.

a) Ta có EB, EM là tiếp tuyến nên $EOM = \dfrac{1}{2} BOM$;

Ta có FC, FM là tiếp tuyến nên $FOM = \dfrac{1}{2} COM \Rightarrow EOF = \dfrac{1}{2} BOC$;

Mặt khác $EOF = \dfrac{1}{2} BOC \left(= \dfrac{1}{2} sd\, BMC \right)$

Suy ra $EBQ = EOQ$

Từ đó ta có O và B là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn EQ dưới một góc bằng nhau

Vậy OBEQ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có OCFP là tứ giác nội tiếp.

b) OBEQ là tứ giác nội tiếp nên

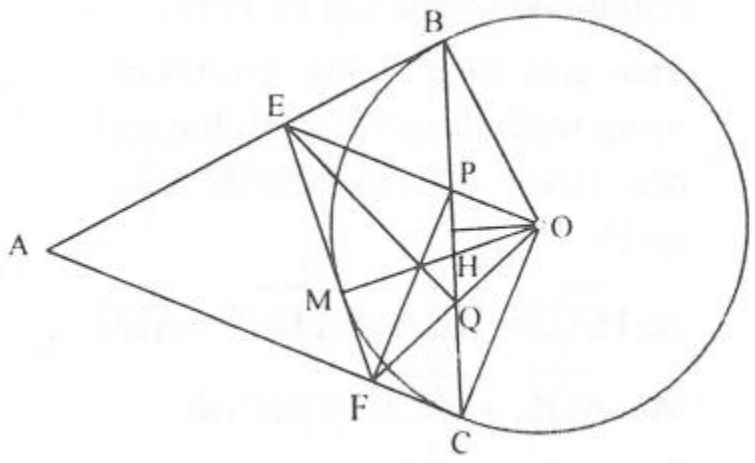
$OBE + OQE = 180° \Rightarrow OQE = 90° \Rightarrow FQE = 90°$

OCFP là tứ giác nội tiếp nên

$OCF + OPF = 180° \Rightarrow OPF = 90° \Rightarrow EPF = 90°$

Suy ra $EPF = EQF = 90°$.

Vậy tứ giác PQFE là tứ giác nội tiếp.



c) Kẻ OH vuông góc với BC.

Ta có: PQFE là tứ giác nội tiếp

Suy ra $OPQ = EFO$

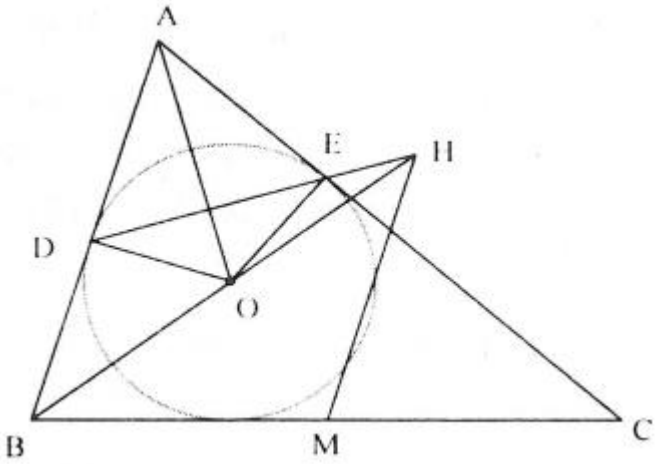
Do đó $\Delta OPQ \backsim \Delta OFE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{OH}{OM}$

Vì điểm A và (O) cố định nên OH và OM không đổi do đó tỉ số $\dfrac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

6. Tứ giác ADOE nội tiếp $\Rightarrow EAO = EDO$.

Gọi tia BO cắt tia DE tại H thì:

$$BHD = 180° - HDB - HBD = 180° - 90° - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \frac{C}{2}$$



Mặt khác $ACO = \dfrac{C}{2}$ nên tứ giác EOCH nội tiếp

$\Rightarrow OHC = OEC = 90°$.

Hay BH vuông góc với CH.

Gọi M là trung điểm của BC

Suy ra $MB = MC = MH \Rightarrow \Delta BHM$ cân

$\Rightarrow HBM = MHB \Rightarrow ABH = MHB$

Suy ra BH song song với AB.

Suy ra điều phải chứng minh.

7.

1. Ta có: $ACD = ABD$; $ABD = AFB$ nên $ACD = AFB$.

Do đó tứ giác CDFE nội tiếp.

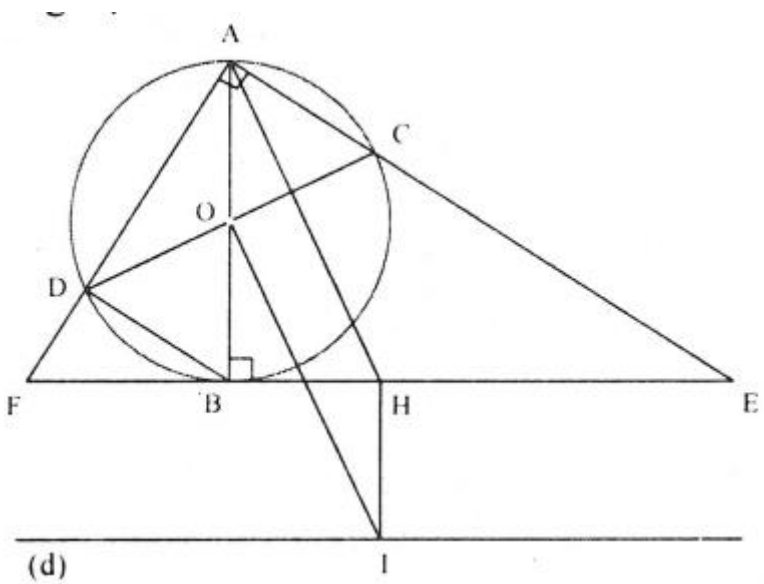
2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDFE.

Đường tròn (I) qua CD nên I thuộc trung trực của CD.

Đường tròn (I) qua EF nên I thuộc trung trực của EF.

Gọi H là trung điểm của EF.

Do đó I là giao điểm hại đường trung trực của CD và EF



$\Rightarrow AO//HI$ hoặc trùng với HI (cùng vuông góc với EF) (1)

Tam giác AEF vuông, có AH là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $HA = HE \Rightarrow \Delta HAE$ cân tại H

$\Rightarrow HAE = HEA \Rightarrow HAE = ADC$

Mà $ADC + ACD = 90°$ nên $HAE + ACD = 90°$

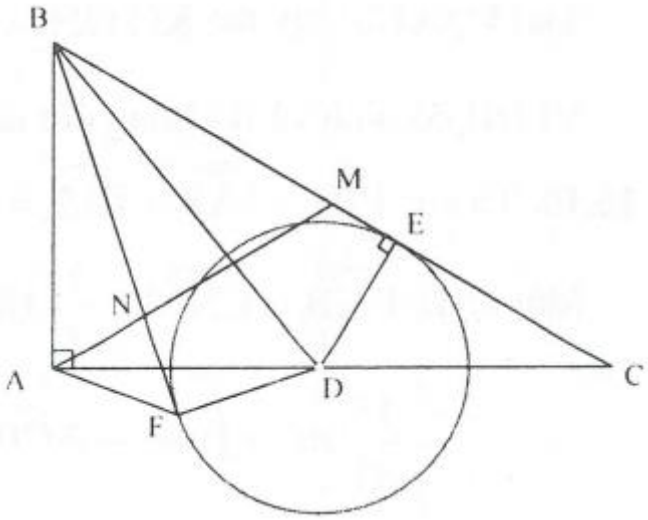
Suy ra $AH \perp CD$.

Mà $OI \perp CD$ nên $AH//OI$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra tứ giác AOIH là hình bình hành. Do đó $IH = OA = R$. Suy ra I cách EF một khoảng không đổi bằng R, nên I di động trên đường thẳng d song song với EF và cách EF một khoảng bằng R.

5. Ta có: $BFD = BED = BAD = 90°$.

Do đó B, E, D, A, F cùng thuộc một đường tròn đường kính BD.



Trong tam giác vuông ABC có AM lcà cạnh huyền nên $MA = MC$

$\Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M

$\Rightarrow MAC = MCA$.

Xét đường tròn đi qua năm điểm A, B, E, D, F

Ta có $DE = DF$ nên $DF = DE \Rightarrow DBE = DBF$

Xét:

$NAF = MAC + DAF = MCA + DBF = MCA + DBE = BDA = NFA$

$\Rightarrow \Delta NAF$ cân tại N $\Rightarrow NF = NA$.

9.

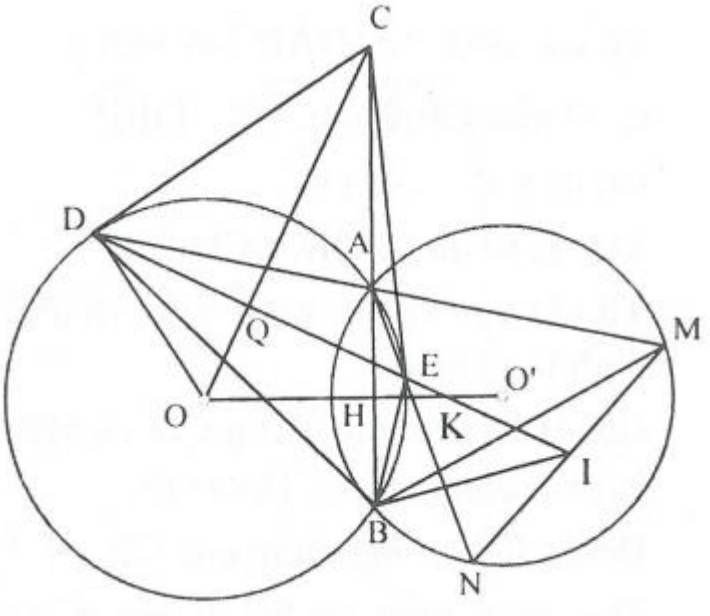
a) Ta có $BDE = BAE$ (cùng chắn cung BE của đường tròn tâm O)

$BDE = BMN$ (cùng chắn cung BN của đường tròn tâm O')

$\Rightarrow BDE = BMN$ hay $BDI = BMN \Rightarrow$ Tứ giác BDMI nội tiếp

$\Rightarrow MDI = MBI$ (cùng chắn cung MI)

Mà $MDI = ABE$ (cùng chắn cung AE của đường tròn tâm O)



$\Rightarrow ABE = MBI$

Mặt khác: $BMI = BAE$

$\Rightarrow \Delta MBI \backsim \Delta ABE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MI}{AE} = \dfrac{BI}{BE} \Rightarrow MI.BE = BI.AE$

b) Gọi Q là giao điểm của CO và DE.

Ta có $OC \perp DE$ tại Q

$\Rightarrow \Delta OCD$ vuông tại D , có đường cao là DQ nên $OQ.OC = OD^2 = R^2$ (1)

Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OO' và DE, H là giao điểm của AB và OO'

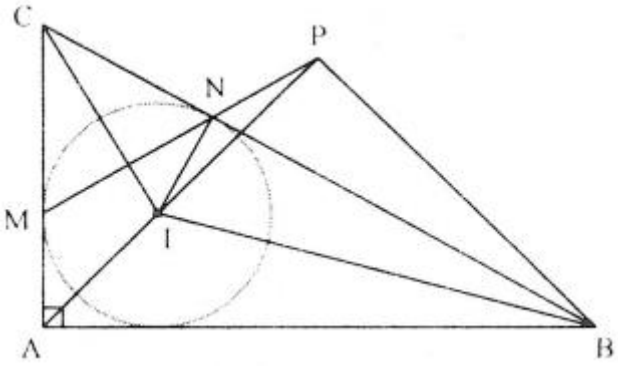
Ta có: $OO' \perp AB$ tại H. $\Delta KQO \backsim \Delta CHO$ ($Q = H = 90°$; O chung)

$\Rightarrow \dfrac{KO}{CO} = \dfrac{OQ}{OH} \Rightarrow OC.OQ = KO.OH$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $KO.OH = R^2 \Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OH}$

Vì OH cố định và R không đổi nên OK không đổi. Do đó K cố định.

10. Ta có: $PIB = IAB + IBA = 45° + IBC$ (1)



Mặt khác $PNB = CNM = \dfrac{1}{2}\left(180° - ACB\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left[90° + \left(90° - ACB\right)\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left(90° + ACB\right)$

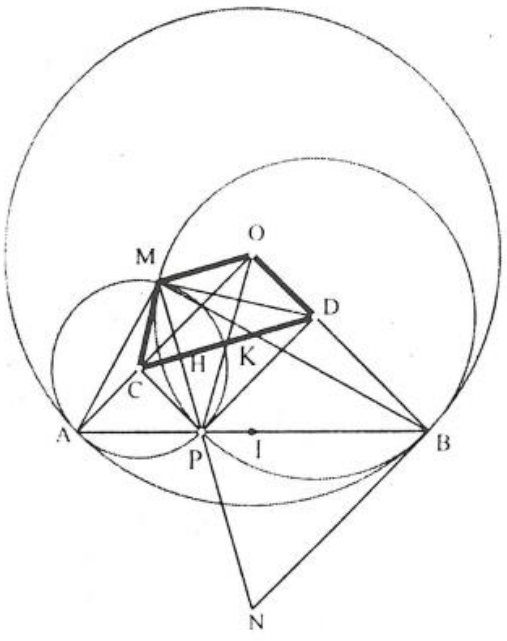
$= 45° + \dfrac{1}{2}ABC = 45° + IBC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $PIB = PNB$.

Do đó 4 điểm P, N, I, B cùng nằm trên một đường tròn.

Mặt khác $INB = 90°$ nên IB là đường kính của đường tròn này

$\Rightarrow IPB = 90°$



11.

a) Nối CP, PD .

Ta có A, C, O thẳng hàng; B, D, O thẳng hàng.

Ta có: ΔACP , ΔOAB lần lượt cân tại C, O nên

$CPA = CAP = OBP$.

Do đó $CP//OD$ (1)

Tương tự, ta có $OD//CP$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ODPC là hình bình hành.

Gọi H là giao điểm của CD và MP, K là giao điểm của CD và OP.

Do đó K là trung điểm của OP.

Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau thì $CD \perp MP$

$\Rightarrow$ H là trung điểm của MP.

Do đó $HK//OM \Rightarrow CD//OM$.

Giả sử $AP < BP$.

Vì tứ giác CDOM là hình bình hành nên $OC = DP$; $DP = DM = R_2$ nên tứ giác CDOM là hình thang cân.

Do đó 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có: $OA^2 + OB^2 = 2R^2 = AB^2$. Do đó ΔAOB vuông cân tại O.

Vì 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn (Kể cả M trùng O) nên $COB = CMD$ (1)

Ta có: $MAB = MCD$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ MP của đường tròn (C))

Vì $MBP = MDC$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ MP của đường tròn (D)).

Do đó $\Delta MAB \backsim \Delta MCD$ (g-g) $\Rightarrow AMB = AOB = 90°$ mà $CMD = COD$ (tứ giác CDOM nối tiếp).

Do AB cố định nên điểm M thuộc đường tròn tâm I đường kính AB.

Ta có: $ACP = BDP = AOB = 90° \Rightarrow AMP = \frac{1}{2} ACP = 45°$ (Góc nội tiếp và góc tâm của (C))

$\Rightarrow BMP = \frac{1}{2} BCP = 45°$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (D))

Do đó MP là tia phân giác của AMB. Mà $AMB = AOB = 90°$ nên M thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AOB. Giả sử MP cắt đường tròn (I) tại N và N là trung điểm cung AB không chứa điểm O nên N cố định.

c) Ta có: $MPA = BPN$; $AMP = PBN$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Do đó $\Delta MAP \backsim \Delta BNP$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{PA}{PN} = \frac{PM}{PB} \Leftrightarrow PM.PN = PA.PB \le \left(\frac{PA+PB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2}$$ (không đổi)

Vậy PM.PN lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi $PA=PB$ hay P là trung điểm của dây AB. Tam giác AMB vuông tại M nên:

$$S_{AMB}=\frac{1}{2}AM.BM\le\frac{1}{4}\left(AM^2+BM^2\right)=\frac{AB^2}{4}=\frac{R^2}{2}$$

Vậy S_{ABM} lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi $PA=PB$ hay P là trung điểm của dây AB.

12.

a) EF là đường kính nên $EAF=90°$

Mà $AE\perp MN$ suy ra $AF//MN\Rightarrow QPN=QFA$.

Mà AFQB nội tiếp nên $QFA+QBA=180°$

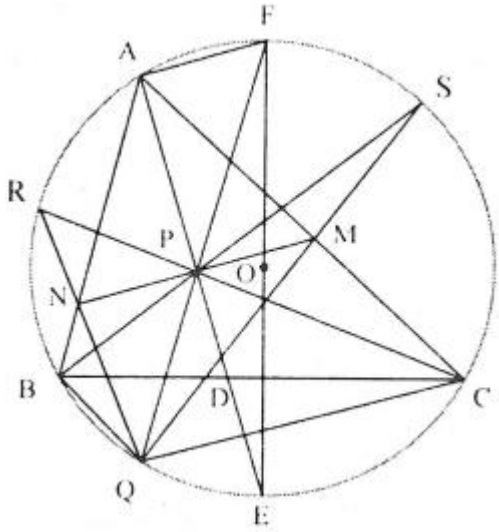
$\Rightarrow QPN+QBN=180°$.

Suy ra tứ giác PQBN nội tiếp.

Lại có $QCA=QFA\Rightarrow QPN=QCM$

Suy ra tứ giác PQCM nội tiếp.

b) Giả sử QN và PC cắt nhau tại R thuộc (O).



Từ tứ giác PQBN nội tiếp suy ra $NPB=NQB=BCP$.

Từ tứ giác PMCQ nội tiếp ta có:

$PBC=RPB-PCB=RPN+NPB-NPB=RPN=MPC=MQC$

Từ đó nếu QM cắt BP tại điểm S thì SBQC nội tiếp hay S thuộc đường tròn (O).

13.

a) Ta có: $BKA=ACB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà $ACB=BHK$ (cùng phụ với góc EBC) $\Rightarrow BKA=BHK$

$\Rightarrow$ tam giác BHK cân $\Rightarrow BH=BK$

Lập luận tương tự ta có $CH=CK$

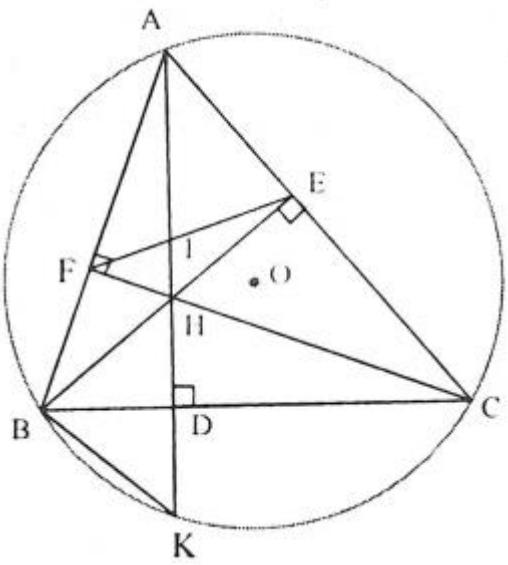
$\Rightarrow$ BC là trung trực của HK.

Ta có: $AEH=AFH=90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác AFHE nội tiếp.

Xét tam giác AIE và tam giác FIH ta có:

$AIE=FIH$ (2 góc đối đỉnh),



$IAE = IFH$ (Tứ giác AFHE nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta AIE \backsim \Delta FIH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AI}{EI} = \dfrac{FI}{HI} \Rightarrow AI.HI = EI.FI$

b) Xét tứ giác DHEC ta có: $HDC = BEC = 90° \Rightarrow$ Tứ giác DHEC nội tiếp .

Xét tứ giác BFEC ta có: $BFC = BEC = 90° \Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp

$\Rightarrow AFE = ACB$ mà $ACB = AKB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AFE = AKB \Rightarrow$ Tứ giác KBFI nội tiếp .

c) Theo như trên ta đã có: $BKH = BHK$ mà $BHK = IHE$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow BKH = IHE$.

Xét tam giác HEI và tam giác KAB ta có:

$BKH = IHE$ (cmt), $IHE = BAK$ (tứ giác AFHE nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta HEI \backsim \Delta KAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KB}{AB} = \dfrac{HI}{EI}$

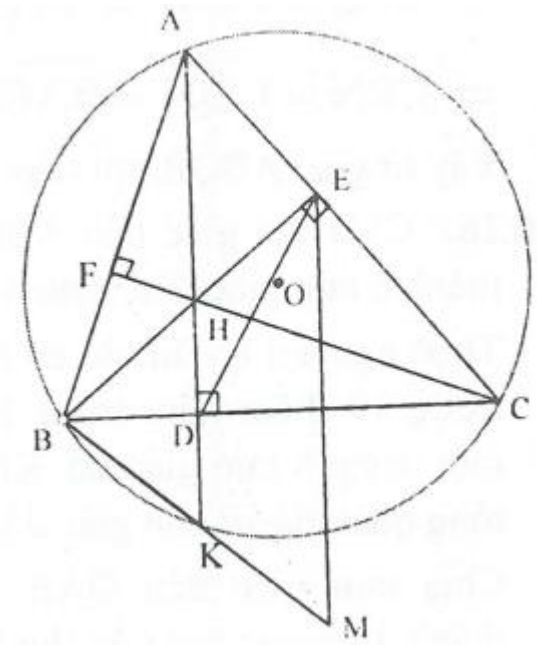
Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{KC}{AC} = \dfrac{HI}{FI}$

Từ đó suy ra $\dfrac{KB}{AB} + \dfrac{KC}{AC} = IH\left(\dfrac{1}{EI} + \dfrac{1}{FI}\right) = IH.\dfrac{EI + FI}{EI.FI} = \dfrac{IH.EF}{AI.HI} = \dfrac{EF}{AI}$

(theo chứng minh ở câu a có $IF.IE = IH.IA$).

d) Ta có: $BME = BKH$ (2 góc ở vị trí đồng vị do $HK // ME$)

Mà $BKH = BHK$; $BKH = BME$ (2 góc ở vị trí đồng vị do $HK // ME$)



$\Rightarrow BME = BEM \Rightarrow$ Tam giác BEM là tam giác cân.

Ta có: $AD \perp BC$ mà $EM // BC \Rightarrow EM \perp BC$.

Trong tam giác cân BEM có BC là đường cao của tam giác (do $BC \perp ME$)

$\Rightarrow$ BC là trung trực của ME.

Ta có D nằm trên đường trung trực của $ME \Rightarrow DM = DE$

$\Rightarrow$Tam giác DME là tam giác cân

$\Rightarrow MDC = EDC$.

Xét tứ giác ABDE ta có: $ADB = AEB = 90°$

$\Rightarrow$Tứ giác ABDE nội tiếp

$\Rightarrow EDC = BAC$.

Xét tứ giác AFDC ta có: $AFC = ADC = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác AFDC nội tiếp $\Rightarrow BAC = BDF$.

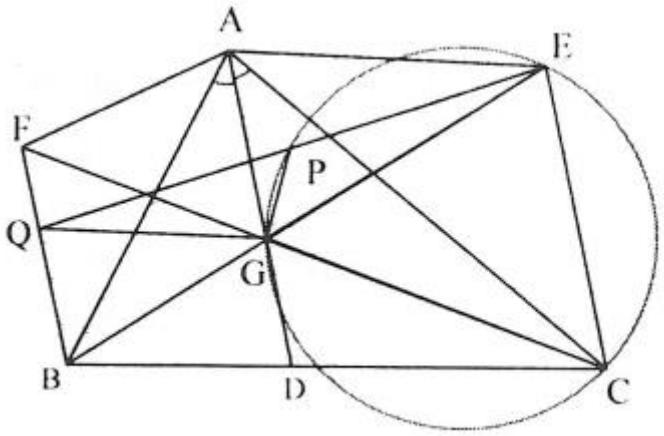
Từ đó suy ra $MDC = BDF$

Ta có: $180° = BDC = MDC + BDM = BDF + BDM = FDM$

$\Rightarrow$Ba điểm F, D, M thẳng hàng.

14.

a) Ta có ΔABF ; ΔACE là các tam giác cân tại F và E



Và $FBA = BAD = DAC = ECA \Rightarrow \Delta ABF \backsim \Delta ACE$.

b) Gọi G là giao điểm của BE và CF.

Ta có: $\frac{GF}{GC} = \frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$

$\Rightarrow DG // BF$

Mặt khác $DA // BF$ suy ra A, D, G thẳng hàng.

Suy ra điều phải chứng minh.

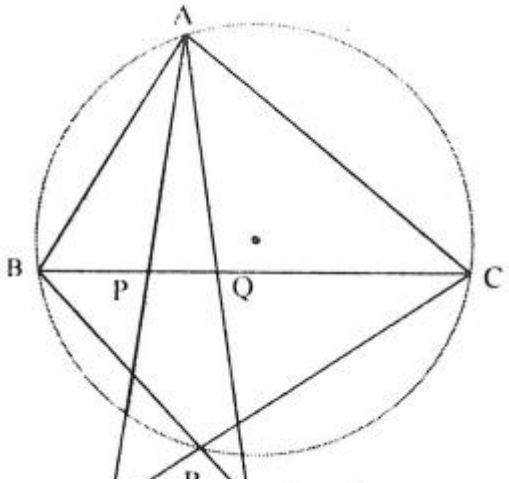
c) Ta có $BQG = QGA = GAE = GAC$

$= GAC + CAE = GAB + BAF = GAF$

Suy ra AGQF là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác $QPG = GCE = GFQ$ nên QGPF là tứ giác nội tiếp. Suy ra điều phải chứng minh.

5. Gọi R là giao điểm của BN và CM.



Ta thấy $\Delta ABC \backsim \Delta PAC \backsim \Delta QBA$

Do đó $\frac{BQ}{QA} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow \frac{QB}{QN} = \frac{PM}{PC}$.

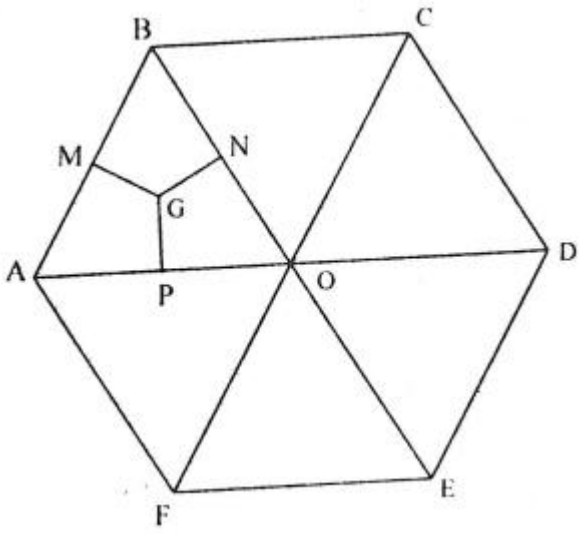
Mặt khác $MPC = NQB$ nên $\Delta MPC \backsim \Delta BQN$

$BNQ = PCM \Rightarrow$ Tứ giác QCNR nội tiếp

$\Rightarrow CRN = CQN = BAC$.

Vậy tứ giác ABQR nội tiếp, suy ra điều phải chứng minh.

16. Chia lục giác đều ABCDEF tâm O thành 6 tam giác đều cạnh 4cm (hình vẽ).



Theo nguyên lý Điriclê có ít nhất 4 điểm trong 19 điểm nằm trong hay trên cạnh một trong 6 tam giác đó. Không mất tính tổng quát giả sử tam giác đó là OAB.

Chia tam giác đều OAB trọng tâm G thành 3 tứ giác nội tiếp (hình vẽ) với $GM \perp AB$; $GN \perp OB$; $GP \perp OA$.

ΔOAB đều cạnh bằng 4 có đường cao $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow GA = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Các tứ giác GMBN, GMAP, GPON nội tiếp trong đường tròn đường kính GB, GA, GO đều bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Theo nguyên lý Điriclê có ít nhất 2 điểm trong 4 điểm đang xét nằm trong hay trên cạnh một trong 4 tứ giác nói trên, giả sử tứ giác đó là GMBN

$\Rightarrow$ khoảng cách giữa hai điểm đó không vượt quá đường kính $GB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

17. Gọi H là giao điểm cúa AN và MD, K là giao điểm cua BN và MC, I là giao điểm của MN và CD.

ΔAMD vuông tại A, AH là đường cao $\Rightarrow AM^2 = MH.MD$.

ΔBMC vuông tại B, BK là đường cao $\Rightarrow BM^2 = MK.MC$.

Mà $AM = BM$

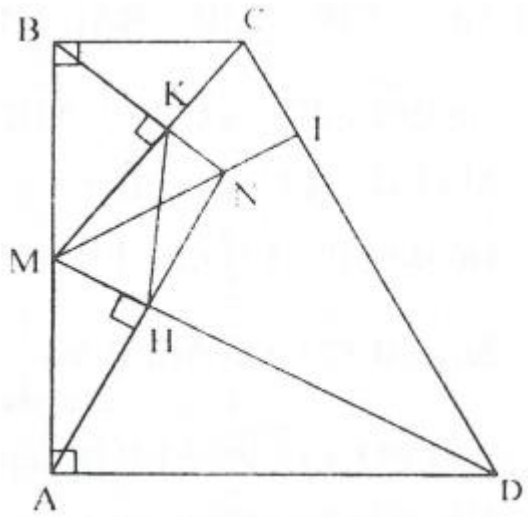
Do đó $MH.MD = MK.MC \Rightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{MK}{MD}$

ΔMKH và ΔMDC có KMH chung, $\frac{MH}{MC} = \frac{MK}{MD}$

$\Rightarrow \Delta MKH \backsim \Delta MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow MKH = IDC$.

Tứ giác MKNH có $MKN + MHN = 90° + 90° - 180° \Rightarrow$ tứ giác MKNH nội tiếp $\Rightarrow MKH = MNH$, ta có

$MNH = IDN \left(= MKH\right) \Rightarrow$ tứ giác HNID nội tiếp $\Rightarrow MIC = NHD = 90°$. Vậy $MN \perp CD$.



18.

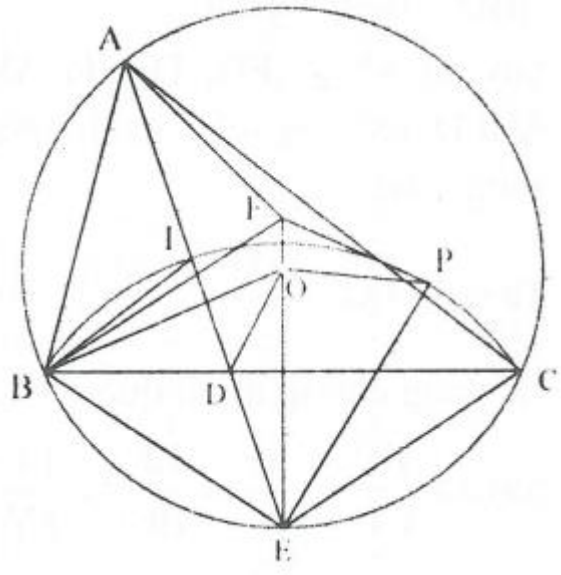
a) Ta có E, M, O, F thẳng hàng, $ME = MF$ (E, F đối xứng qua M) $EF \perp BC$

$\Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B $\Rightarrow BFE = FEB$.

Mặt khác $OB = OE$ suy ra ΔOBE cân tại O

$\Rightarrow OBE = OEB$.

Ta có $BFE = FEB = OBE$



$\Rightarrow \Delta BEF \backsim \Delta OBE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{OB} = \dfrac{EF}{EB} \Rightarrow EB^2 = EF.EO$

b) Không giảm tính tổng quát xét O nằm giữa M và F.

Dễ thấy $\Delta FBD \backsim \Delta EAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = ED.EA$

Ta có $ED.EA = EF.EO\left(= EB^2\right) \Rightarrow \dfrac{EO}{EA} = \dfrac{ED}{EF}$.

Xét ΔEOD và ΔEAF có $\dfrac{EO}{EA} = \dfrac{ED}{EF}$, OED chung $\Rightarrow \Delta EOD \backsim \Delta EAF$ (c.g.c)

$\Rightarrow EOD = EAF$, dẫn đến tứ giác DAFO nội tiếp. Vậy các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Ta có $EIB = ABI + BAI$, $ABI = IBC$, $BAI = CBE\left(EB = EC\right)$

$\Rightarrow EBI = IBC + CBE = ABI + BAI = EIB \Rightarrow \Delta EBI$ cân tại E $\Rightarrow EB = EI$

Mà $EB = EC$ nên $EB = EI = EC \Rightarrow$ E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IBC.

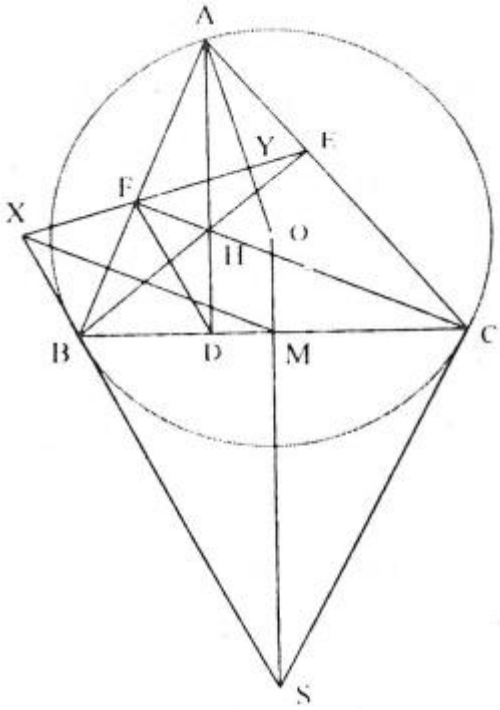
Do đó $EP = EB$ nên $EP^2 = EF.EO$.

Xét ΔEPO và ΔEFP có $\dfrac{EP}{EF} = \dfrac{EO}{EP}$, PEO chung $\Delta EPO \backsim \Delta EFP$ (c.g.c)

$\Rightarrow EPO = EFP \Rightarrow$ EP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF.

Vậy tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua điểm E cố định.

19.



a) Vì $BE \perp CA$, $CF \perp AB$ nên BCEF là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow XFB = ACB = XBF \Rightarrow \Delta XFB$ cân tại X.

Mà ΔMFB cân tại M, suy ra $MX \perp BF$.

b) Dễ thấy $MX \perp AB$, $HF \perp AB$ nên $MX // HF$; $MS \perp BC$, $HD \perp BC$ nên $MS // HD$.

Mặt khác, do CAFD là tứ giác nội tiếp và SB tiếp xúc với (O) tại B nên $SBD = BAC = BDF$

Suy ra $SX // FD$. Do đó $\Delta MXS \backsim \Delta HFD$ (có cặp canh tương ứng song song).

c) Ta có: $OAE = \dfrac{180° - AOC}{2} = 90° - ABC = 90° - AEF$, suy ra $OA \perp EF$.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$; $\Delta AFY \backsim \Delta ACD$.

Suy ra $\frac{FY}{CD}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{EF}{FY}=\frac{BC}{CD}$

20.

1) H là trung điểm của BC nên $OH\perp BC$.

$\Delta BMO=\Delta CNO$ (cgc) suy ra $OM=ON\ (1)$

Tam giác OMN cân tại O, I là trung điểm của MN nên $OI\perp MN\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm O, M, H, I cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

2) Chứng minh tứ giác ABON nội tiếp (vì $PAN+PON=60°+120°=180°$)

Suy ra $OPN=OAN=30°$

Chứng minh tương lự. $OPM=30°$, suy ra $MPN=60°$.

Kết hợp với $MP=NP$ (P thuộc đường trung trực OI cua MN)

Suy ra tam giác MNP đều.

3) Từ câu 1 suy ra $IHC=IOM-60°=ABC$ nên $IH//AB$.

Suy ra đường thẳng IH cố định. Gọi K là trung điểm của AC suy ra H, I, K thẳng hàng.

Lấy điểm T đối xứng với A qua HI suy ra T cố định.

Ta có $AI+BI+AB=TI+IB+AB\geq BT+AB=const$.

Chu vi tam giác AIB nhỏ nhất bằng $BT+AB$, đạt được khi ba điểm B, I,T thẳng hàng.

Khi đó I là trung điểm của BT cố định (theo tính chất đường trung bình ΔBAT).

Suy ra tứ giác BMTN là hình bình hành và $TN//BC$.

Lại có $BH=KT$, $BK=MT$

Suy ra tứ giác BHTK là hình bình hành và $TK//BC$.

Từ đó $N\equiv K$, suy ra $M\equiv H$.

21.

1) Chứng minh bốn điểm A, E, P, F cùng nằm trên một đường tròn

Ta có $AEP=ADB$ (chắn cung AB của (ABD)):

Ta có $AFP=ADC$ (chắn cung AC của (ADC));

Nên $AEP+AFP=ADB+ADC$ nên AEFP nội tiếp

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại I

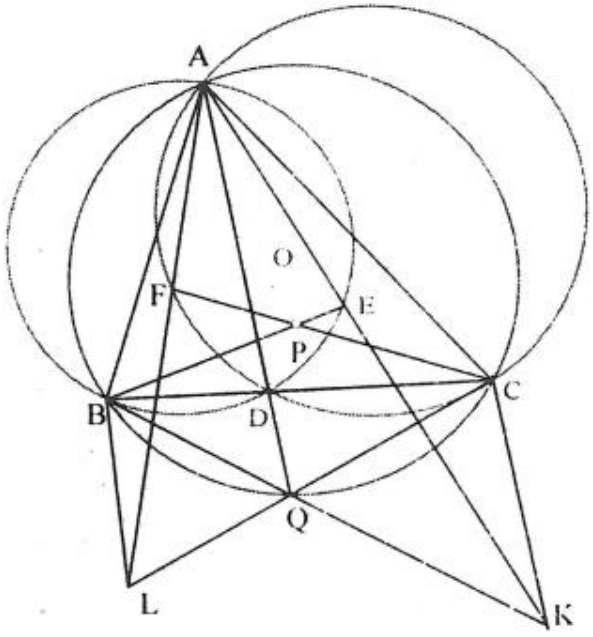
Chứng minh tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF

Xét ΔABE; ΔCLF có $AEB = CFL$ (cùng bù AFP) (1) ta lại có $BAE = BAD + DAE$;

$FCL = BCL + FCB$ mà $BAD = BCL$; $DAE = FCB$;

Nên $BAE = FCL$ (2) từ (1) và (2) suy ra $\Delta ABE \backsim \Delta CLF$ (g.g)

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB chứng minh $QKL + PAB = QLK + PAC$



Theo 2) $\Delta ABE \backsim \Delta CLF$ nên $LF.AE = BE.CF$

Ta lại có $KE.AF = BE.CF$

Suy ra $KE.AF = LF.AE$

$\Leftrightarrow \dfrac{LF}{AF} = \dfrac{KE}{AE} \Rightarrow EF // LK$

Nên $AEF = AKL$

Mà $AEF = APF \Rightarrow APF = AKL$

Nên $PAC + PCA = EKP + QKL$

Mà $PCA = EKP \Rightarrow PAC = QKL$.

Tương tự $PAB = QLK$, suy ra $QKL + PAB = QLK + PAC$.

22.

a) Ta có $MNE = \dfrac{1}{2}\left(sd\,AB + sd\,BEF\right)$

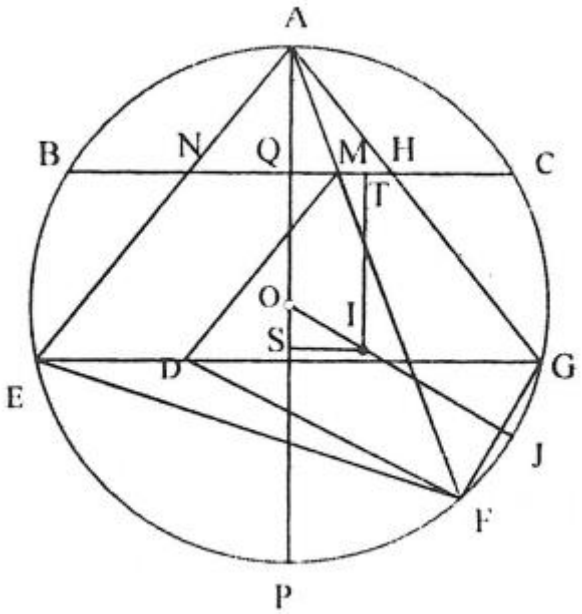
$= \dfrac{1}{2}\left(sd\,AC + sd\,BEF\right)$

$AFE = \dfrac{1}{2}\left(sd\,AB + sd\,BE\right)$

Suy ra: $MNE + MFE = 180°$

Vậy tứ giác MNEF nội tiếp.

b) Gọi P là giao điểm khác A của AO với đường tròn $(O;R)$.



Lấy G đối xứng với E qua $AP \Rightarrow D \in EG$, $G \in (O)$

Ta có $MDG = NEG$, $AEG = AFG \Rightarrow MDG = MFG$

Suy ra tứ giác $MDGF$ nội tiếp (1)

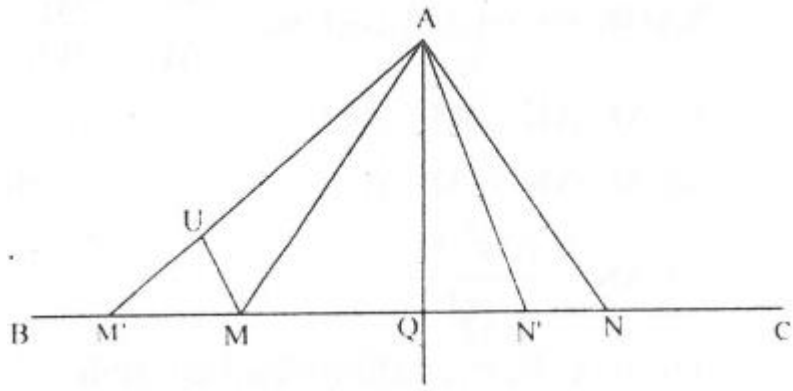
Gọi giao điểm của AG và BC là H.

Chứng minh tương tự a) có tứ giác MHGF nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra các điểm *M, H, D, G, F* nằm trên một đường tròn.

Trung trực của đoạn thẳng *FG* đi qua *O* và cắt đường tròn (O) tại J; $I \in OJ$, $sd\,JF = sd\,JG$ và $sđ\,PG = sđ\,PE$ nên $JOP = \alpha$ hay *I* nằm trên đường thẳng cố định. Đó là đường thẳng đi qua *O* và tạo với *AO* một góc α không đổi.

c) Hạ $IT \perp BC (T \in BC) \Rightarrow TH = TM$.



Gọi Q là giao điểm của BC và AP.

Do $QH = QN$

Suy ra $QT = QH - MH$

$\frac{1}{2}(NM - MH) = \frac{1}{2}MN$

Kẻ $IS \perp AP \Rightarrow IS = QT = \frac{1}{2}MN$

Tam giác vuông *OSI* có $IOS = \alpha$ không đổi nên *OI* nhỏ nhất khi và chỉ khi *IS* nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ *MN* nhỏ nhất.

Ta chứng minh *MN* nhỏ nhất khi và chỉ khi tam giác *AMN* cân tại *A*.

Thật vậy, trên *BC* lấy $M'N'$ sao cho $M'AN' = \alpha$.

Không mất tính tổng quát giả sử $QM' > QN'$

Suy ra $AM' > AN'$.

Trên đoạn AM' lấy điểm *U* sao cho $AU = AN'$

$\Rightarrow \Delta AUM = \Delta ANN'$ (c.g.c)

$\Rightarrow S_{AM'M} > S_{ANN'} \Rightarrow MM' > NN' \Rightarrow M'N' > MN$

Với $\alpha = 60°$; $BC = R$ suy ra $AQ = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R(2-\sqrt{3})}{2}$

$$MN = \frac{R(2-\sqrt{3})}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{R(2\sqrt{3}-3)}{3} \Rightarrow OI = \frac{R(2\sqrt{3}-3)}{6}$$

23.

1. I là trung điểm của BC (Dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow OIA = 90°$

Ta có $AMO = 90°$, $ANO = 90°$

Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

2. AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) nên OA là phân giác MON mà ΔMON cân ở O nên $OA \perp MN$

$\Delta ABN \backsim \Delta ANC$ (Vì $ANB = ACN$, CAN chung)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$

ΔANO vuông tại N đường cao NH nên

$AH.AO = AN^2$

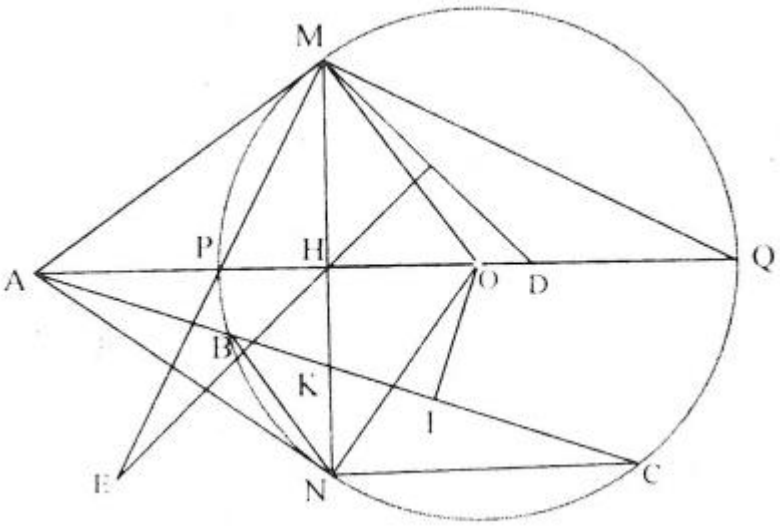
$\Rightarrow AB.AC = AH.AO$

$\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (g-g) nên $\dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AK}{AO}$

$\Rightarrow AI.AK = AH.AO$

$\Rightarrow AI.AK = AB.AC$

$\Rightarrow AK = \dfrac{AB.AC}{AI}$



Ta có A, B, C cố định nên I cố định

$\Rightarrow AK$ cố định

Mà A cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB $\Rightarrow$ K cố định

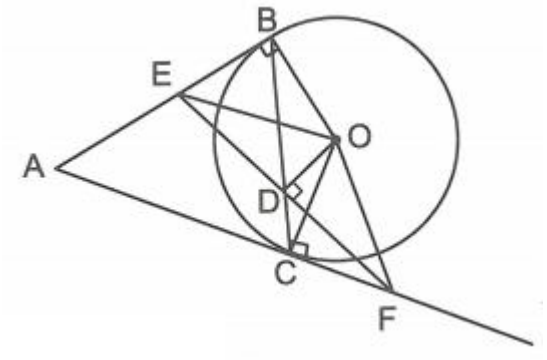
3) Ta có $PMQ = 90°$

Ta có: $\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MQ} = \dfrac{MH}{DQ}$

Ta có: $\Delta PMH \backsim \Delta MQH \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MH}{QH} = \dfrac{MH}{2DQ}$

$\Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{ME}{MQ} \Rightarrow ME = 2MP \Rightarrow$ P là trung điểm ME.

24.



Ta có: $EBO = 90°$ (vì AB là tiếp tuyến với (O) tại B)

$EDO = 90°$ (gt)

$\Rightarrow$ hai đỉnh B và D cùng nhìn đoạn OE dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ tứ giác EBOD là tứ giác nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow BEO = BDO$ (1) (cùng chắn cung OB).

Chứng minh tương tự ta có tứ giác ODCF nội tiếp đường tròn.

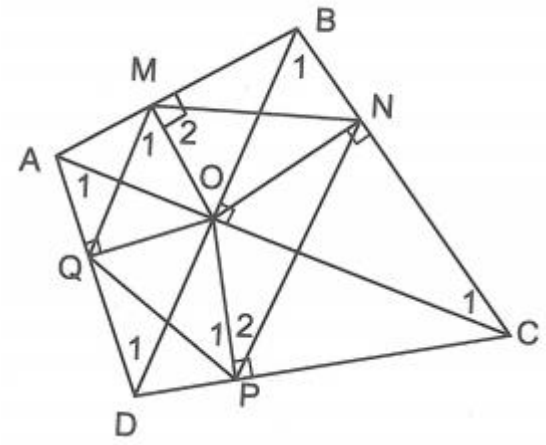
$\Rightarrow OFC = BDO$ (2) (Góc trong một đỉnh bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OFC = BEO$

Suy ra tứ giác AEOF là tứ giác nội tiếp đường tròn (theo dấu hiệu góc trong một đỉnh bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).

Vậy tứ giác AEOF là tứ giác nội tiếp.

25.



Xét tứ giác AMOQ có $AMO + AQO = 180°$. Suy ra tứ giác AMOQ nội tiếp.

$\Rightarrow M_1 = A_1$ (cùng chắn OQ).

Chứng minh tương tự $M_2 = B_1$.

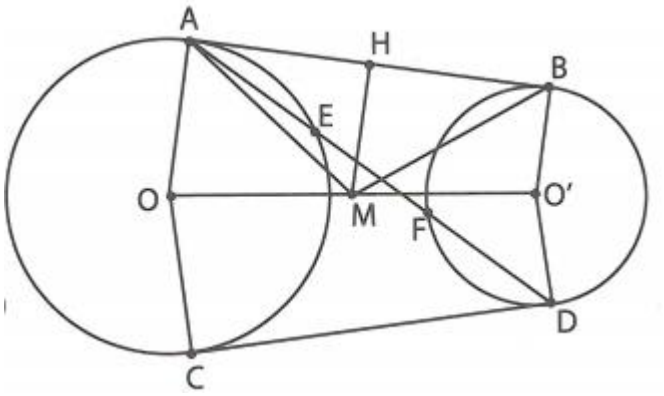
$\Rightarrow QMN = A_1 + B_1$

Chứng minh tương tự: $D_1 = P_1;\ P_2 = C_1 \Rightarrow QPN = D_1 + C_1$

$\Rightarrow QMN + QPN = A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 180°$

Vậy tứ giác MNPQ là tứ giác nội tiếp.

26.



Lấy M là trung điểm OO'. Hạ $MH \perp AB$.

Vì AB là tiếp tuyến chung của (O), (O') suy ra $\begin{cases} OA \perp AB \\ O'B \perp AB \end{cases} \Rightarrow$ OA // O'B $(\perp AB)$

(Từ vuông góc đến song song).

Suy ra tứ giác ABO'O là hình thang.

Mà M là trung điểm OO', MH // OA $(\perp AB)$

$\Rightarrow$ H là trung điểm AB.

Lại có $HM \perp AB \Rightarrow MA = MB$

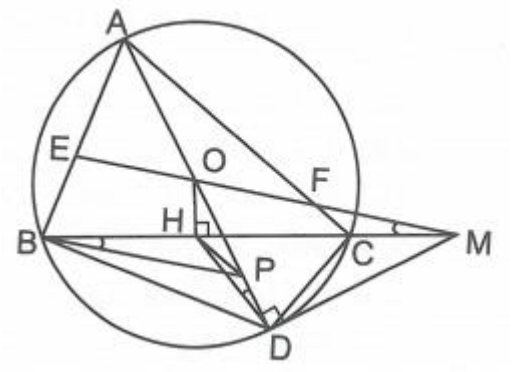
Chứng minh tương tự ta có $MC = MD$

$O_1 = O_2$ (Định lí đường tiếp tuyến chung của hai đường tròn).

$\Delta AOM = \Delta COM$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = MC$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow MA = MB = MC = MD$

Vậy ABCD là tứ giác nội tiếp.

27.



a) Xét ΔMDB và ΔMCD có:

DMB chung;

$MDC = MBD$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp chắn cung BD)

$\Rightarrow$ ΔMDB ~ ΔMCD (g.g)

$\Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MB.MC = MD^2$

b) Ta có: $HB = HC \Rightarrow OH \perp BC$

Mà $MD \perp OD$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow OHM = ODM = 90° \Rightarrow$ H, D nằm trên đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow$ tứ giác OHDM nội tiếp $\Rightarrow OMH = ODH$ mà $OMH = HBP$ (so le trong) nên $HBP = HDP$

$\Rightarrow$ bốn điểm B, H, D, P cùng nằm trên đường tròn đường kính OM hay tứ giác BHPD là tứ giác nội tiếp.

c) Vì tứ giác BDPH nội tiếp nên $BHD = BPD$ (góc nội tiếp chắn cung BD).

Vì EF // BP $\Rightarrow BPD = EOD$ (đồng vị) mà $EOD = AOF$ (đối đỉnh).

Suy ra $BHD = AOF$

Lại có $DBH = OAF$ (góc nội tiếp chắn cung CD)

Suy ra ΔOAF ~ ΔHBD (g.g) $\Rightarrow \frac{OA}{HB} = \frac{FO}{HD}$ (1).

Ta có: $CHD = 180° - BHD = 180° - AOF = AOE$ và $EAO = HCD$ (góc nội tiếp chắn cung BD)

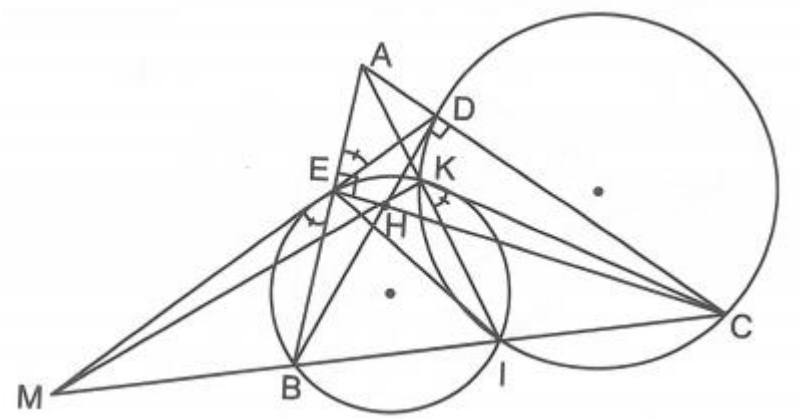
Suy ra $\Delta OAE \sim \Delta HCD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OA}{HC} = \dfrac{OE}{HD}$ (2)

Lại có $BH = HC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{FO}{HD} = \dfrac{OE}{HD} \Rightarrow OE = FO \Rightarrow$ O là trung điểm của FE.

Vậy O là trung điểm của FE.

28.



a) Vì $A+B+C+EKD+EKI+IKD=540°$.

Mà $B+EKI=C+IKD=180°$. Nên $A+EKD=180°$.

Suy ra tứ giác AEKD nội tiếp.

Mặt khác, tứ giác AEHD nội tiếp.

Vậy các điểm A, E, H, K, D cùng nằm trên đường tròn đường kính AH, nên $BDK = CEK$ (đpcm)

b) Ta có: $ADE = ABC$, $AKE = ADE$, suy ra $AKE = ABC$.

Từ đó $AKE + EKI = 180°$, vậy ba điểm A, K, I thẳng hàng.

Lại có $IKC = IDC = ICD$, $IKC = KAC + ACK$, $ICD = ICK + KCD$

suy ra $KAD = IKC$ mà $KAD = KED$

Vậy tứ giác MEKC nội tiếp

Tứ giác MEKC nội tiếp nên $MEC = MKC$.

Vì $IKC = AED = MEB;\ MEC = MEB + 90°;\ MKC = MKI + IKC$

$\Rightarrow MKI = 90°$

Do A, E, H, K, D nằm trên đường tròn đường kính AH, nên $HKA = 90°$.

Vậy K, H, M thẳng hàng.

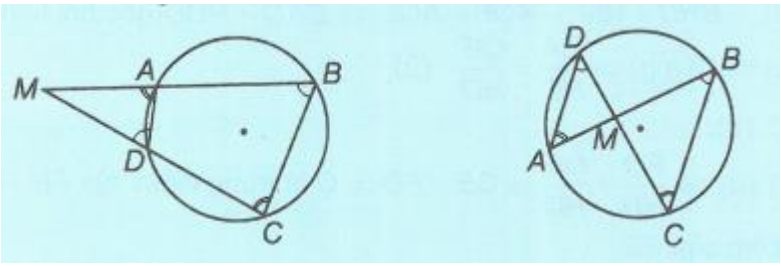
c) Do tứ giác DEHK nội tiếp, nên $HEK = HDK$ (1)

Tứ giác MEKC nội tiếp nên $KEC = KMC$ (2)

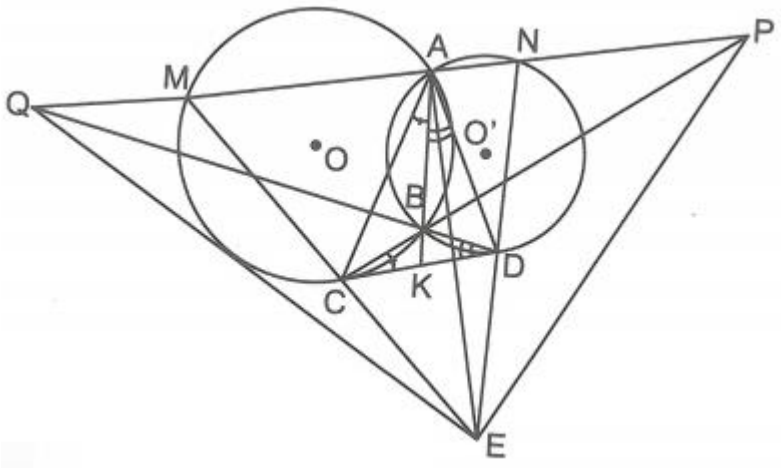
Từ (1) và (2) suy ra $KMB = HDK$, hay tứ giác MBKD nội tiếp (đpcm)

Chú ý:

Sử dụng kiến thức của tam giác đồng dạng ta thấy: Nếu hai cát tuyến AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại M thì $MA.MB = MC.MD$



29.



a) Ta có: $ECD = AMC = ACD$. Tương tự $CDE = CDA$.

Từ đó CD là trung trực của AE.

b) Dễ thấy $\begin{cases} BCD = BAC \\ BDC = BAD \end{cases} \Rightarrow CBD = 180° - BCD - BDC$

$\Rightarrow CBD = 180° - CAD = 180° - CED$

$\Rightarrow$ BCED nội tiếp.

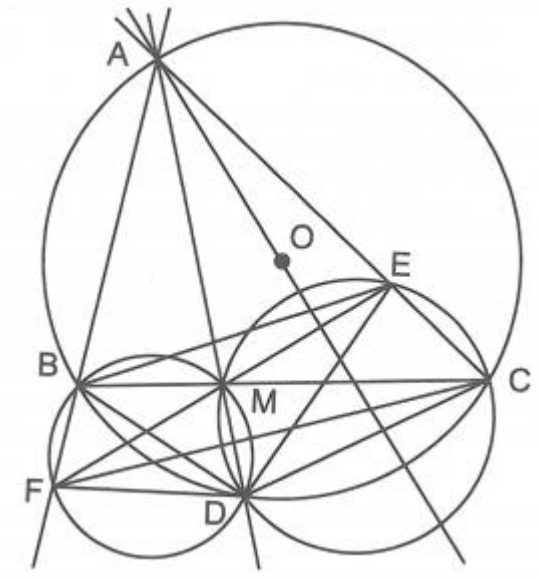
c) Gọi K là giao điểm của AB và CD.

Nhận thấy: $\begin{cases} \Delta BCK \sim \Delta CAK \\ \Delta DBK \sim \Delta ADK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} KC^2 = KB.KA \\ KD^2 = KB.KA \end{cases} \Rightarrow KC = KD$

CD // PQ $\Rightarrow \dfrac{KD}{AQ} = \dfrac{KC}{AP} \Rightarrow AQ = AP$.

$AE \perp PQ \Rightarrow \Delta EPQ$ cân tại E.

30.



a) Chứng minh tứ giác BECF nội tiếp.

Do tứ giác MBFD nội tiếp nên ta dễ dàng chứng minh được $AB.AF = AM.AD$

Tương tự, tứ giác MECD nội tiếp nên chứng minh được $AE.AC = AM.AD$.

Do đó $AB.AF = AE.AC$. Từ đây ta chứng minh được BECF là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác ABDC nội tiếp nên ta có $FBD = ACD$ (1)

Lại có $AMB = CMD \Rightarrow BFD = DEC$ (2)

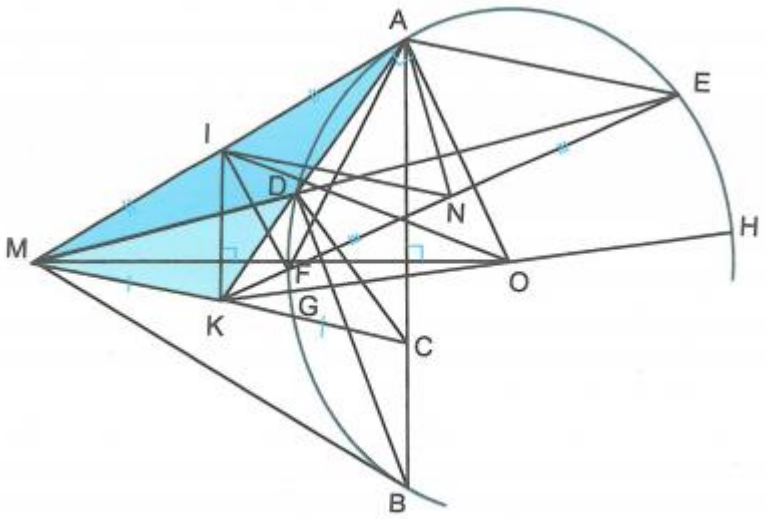
Từ (1) và (2) suy ra ΔECD ~ ΔFBD

$\Rightarrow BDF = EDC$

Mà $\begin{cases} BDF = BMF \\ EDC = EMC \end{cases}$ nên $BMF = EMC$.

Do vậy 3 điểm E, M, F thẳng hàng.

31.



a) Dễ thấy OM là trung trực của AB nên OM vuông góc với AB. Ta có IK là đường trung bình của tam giác AMC nên IK // AC, từ đó ta có ngay IK vuông OM.

Gọi J là giao điểm của IK và OM. Sử dụng định lý Py-ta-go ta có:

$KO^2 - KM^2 = \left(OJ^2 + JK^2\right) - \left(JM^2 + JK^2\right) = OJ^2 - JM^2$

$= OI^2 - MI^2 = OA^2 + AI^2 - MI^2 = OA^2 = R^2$

b) Giả sử G, H là giao điểm của KO với (O). Do tứ giác ADGH nội tiếp nên $KDG = AHG$

$\Rightarrow \Delta KDG \sim \Delta KHA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KD}{KH} = \dfrac{KG}{KA}$

$\Rightarrow KA.KD = KG.KH = (KO - R)(KO + R) = KO^2 - R^2 = KM^2$

$\Rightarrow KA.KD = KM^2 \Leftrightarrow \dfrac{KA}{KM} = \dfrac{KG}{KD} \Rightarrow \Delta KDM \sim \Delta KMA$ (c.g.c)

Suy ra $DMK = MAK$.

Xét đường tròn (O) ta có: $MAK = ABD$.

Xét tứ giác MDCB có: $DMC = DBC \Rightarrow$ MDCB là tứ giác nội tiếp.

c) $MAD = AED$

Theo câu b) $DMK = DAM = AED \Rightarrow$ KM // AE (vì DMK và AEM là hai góc so le trong).

Từ đây suy ra MAKE là hình thang $\Rightarrow INF = AEN$.

Lại có $AEN = IAF \Rightarrow INF = AEN = IAF$. Suy ra ANFI là tứ giác nội tiếp (đpcm).