

CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

A. Kiến thức cần nhớ

I. Ước và bội

1) Định nghĩa về ước và bội

Ước: Số tự nhiên $d \neq 0$ được gọi là ước của số tự nhiên a khi và chỉ khi a chia hết cho d . Ta nói d là ước của a .

Nhận xét: Tập hợp các ước của a là $U(a) = \{d \in \mathbb{N} : d \mid a\}$

Bội: Số tự nhiên m được gọi là bội của $a \neq 0$ khi và chỉ khi m chia hết cho a hay a là một ước số m .

Nhận xét: Tập hợp các bội của $a (a \neq 0)$ là $B(a) = \{0; a; 2a; \dots; ka\}, k \in \mathbb{Z}$

2) Tính chất:

- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.
- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.
- Nếu $U(a) = \{1; a\}$ thì a là số nguyên tố.
- Số lượng các ước của một số: Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots$ thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1) \dots$

Thật vậy ước của A là số có dạng $mnp \dots$ trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1, a, a^2, \dots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1, b, b^2, \dots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1, c, c^2, \dots, c^z$),...

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

II. Ước chung và bội chung

1) Định nghĩa

Ước chung (ƯC): Nếu hai tập hợp $U(a)$ và $U(b)$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là ước số chung của a và b . Kí hiệu $ƯC(a; b)$

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Nhận xét: Nếu $ƯC(a; b) = \{1\}$ thì a và b nguyên tố cùng nhau.

Ước chung lớn nhất (ƯCLN): Số $d \in \mathbb{N}$ được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b ($a; b \in \mathbb{Z}$) khi d là phần tử lớn nhất trong tập hợp $ƯC(a; b)$. Kí hiệu ước chung lớn nhất của a và b là $ƯCLN(a; b)$ hoặc $(a; b)$ hoặc $gcd(a; b)$.

Bội chung (BC): Nếu hai tập hợp $B(a)$ và $B(b)$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là bội số chung của a và b . Kí hiệu $BC(a; b)$

Bội chung nhỏ nhất (BCNN): Số $m \neq 0$ được gọi là bội chung nhỏ nhất của a và b khi m là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp $BC(a; b)$. Kí hiệu bội chung nhỏ nhất của a và b là $BCNN(a; b)$ hoặc $[a; b]$ hoặc $lcm(a; b)$.

2) Cách tìm ƯCLN và BCNN

a) Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện các bước sau :

1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố
 - 2.- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung
 - 3.- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó
- Tích đó là ƯCLN phải tìm .

Ví dụ: $30 = 2.3.5, \quad 20 = 2^2.5 \Rightarrow ƯCLN(30; 20) = 2.5 = 10.$

Chú ý :

- Nếu các số đã cho không có thừa số nguyên tố chung thì ƯCLN của chúng là 1.
- Hai hay nhiều số có ƯCLN là 1 gọi là các số nguyên tố cùng nhau.
- Trong các số đã cho, nếu số nhỏ nhất là ước các số còn lại thì ƯCLN của các số đã cho chính là số nhỏ nhất ấy.

b) Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau :

- 1- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố .
 - 2- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng .
 - 3- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của chúng
- Tích đó là BCNN phải tìm .

Ví dụ: $30 = 2.3.5, \quad 20 = 2^2.5 \Rightarrow BCNN(30; 20) = 2^2.3.5 = 60$

Chú ý:

- Nếu các số đã cho từng đôi một nguyên tố cùng nhau thì BCNN của chúng là tích các số đó. Ví dụ : $BCNN(5; 7; 8) = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$
- Trong các số đã cho, nếu số lớn nhất là bội của các số còn lại thì BCNN của các số đã cho chính là số lớn nhất đó . Ví dụ : $BCNN(12; 16; 48) = 48$

3) Tính chất

Một số tính chất của ước chung lớn nhất:

- Nếu $(a_1; a_2; \dots; a_n) = 1$ thì ta nói các số $a_1; a_2; \dots; a_n$ nguyên tố cùng nhau.
- Nếu $(a_m; a_k) = 1, \forall m \neq k, \{m, k\} \in \{1; 2; \dots; n\}$ thì ta nói các số $a_1; a_2; \dots; a_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.
- $c \in \text{ƯC}(a; b)$ thì $\left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right) = \frac{(a; b)}{c}$.
- $d = (a; b) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right) = 1$.
- $(ca; cb) = c(a; b)$.
- $(a; b) = 1$ và $(a; c) = 1$ thì $(a; bc) = 1$
- $(a; b; c) = ((a; b); c)$
- Cho $a > b > 0$
- Nếu $a = b.q$ thì $(a; b) = b$.
- Nếu $a = bq + r (r \neq 0)$ thì $(a; b) = (b; r)$.

Một số tính chất của bội chung nhỏ nhất:

- Nếu $[a; b] = M$ thì $\left(\frac{M}{a}; \frac{M}{b}\right) = 1$.
- $[a; b; c] = [[a; b]; c]$
- $[ka, kb] = k[a, b];$
- $[a; b].(a; b) = a.b$

4) Thuật toán Euclid trong việc tính nhanh ƯCLN và BCNN

“**Thuật toán Euclid**” là một trong những thuật toán cổ nhất được biết đến, từ thời Hy Lạp cổ đại, sau đó được Euclid (Ơ-clit) hệ thống và phát triển nên thuật toán mang tên ông. Về số học, “**Thuật toán Euclid**” là một thuật toán để xác định ước số chung lớn nhất (GCD – Greatest Common Divisor) của 2 phần tử thuộc vùng Euclid (ví dụ: các số nguyên). Khi có ƯCLN ta cũng tính nhanh được BCNN. Thuật toán này không yêu cầu việc phân tích thành thừa số 2 số nguyên.

Thuật toán Oclit – dùng để tìm ƯCLN của 2 số nguyên bất kỳ.

Để tìm ƯCLN của hai số nguyên a và b bất kỳ ta dùng cách chia liên tiếp hay còn gọi là “vòng lặp” như sau:

- **Bước 1:** Lấy a chia cho b:

Nếu a chia hết cho b thì $\text{ƯCLN}(a, b) = b$.

Nếu a không chia hết cho b (dư r) thì làm tiếp bước 2.



Euclid
(325–265 BC)

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘỊ

- **Bước 2:** Lấy b chia cho số dư r :

Nếu b chia hết cho r thì $\text{ƯCLN}(a, b) = r$

Nếu b chia r dư r_1 ($r_1 \neq 0$) thì làm tiếp bước 3.

- **Bước 3:** Lấy r chia cho số dư r_1 :

Nếu r chia cho r_1 dư 0 thì $\text{ƯCLN}(a, b) = r_1$

Nếu r chia r_1 dư r_2 ($r_1 \neq 0$) thì làm tiếp bước 4.

Bước 4: Lấy r_1 chia cho số dư r_2 :

Nếu r_1 chia hết cho r_2 thì $\text{ƯCLN}(a, b) = r_2$.

Nếu r_1 cho cho r_2 dư r_3 ($r_3 \neq 0$) thì làm tiếp như trên đến khi số dư bằng 0.

Số dư cuối cùng khác 0 trong dãy chia liên tiếp như trên là ƯCLN (a, b) .

Ví dụ: Tính ước số chung lớn nhất của 91 và 287.

- Trước hết lấy 287 (số lớn hơn trong 2 số) chia cho 91:

$$287 = 91 \cdot 3 + 14 \quad (91 \text{ và } 14 \text{ sẽ được dùng cho vòng lặp kế})$$

Theo thuật toán Euclid, ta có $\text{ƯCLN}(91, 287) = \text{ƯCLN}(91, 14)$.

Suy ra bài toán trở thành tìm $\text{ƯCLN}(91, 14)$. Lặp lại quy trình trên cho đến khi phép chia không còn số dư như sau:

$$91 = 14 \cdot 6 + 7 \quad (14 \text{ và } 7 \text{ sẽ được dùng cho vòng lặp kế})$$

$$14 = 7 \cdot 2 \quad (\text{không còn số dư suy ra } \mathbf{kết\ th\acute{u}c}, \text{ nhận } 7 \text{ làm kết quả})$$

$$\text{Thật vậy: } 7 = \text{ƯCLN}(14, 7) = \text{ƯCLN}(91, 14) = \text{ƯCLN}(287, 91)$$

$$\text{Cuối cùng } \text{ƯCLN}(287, 91) = 7$$

Tính BCNN nhanh nhất

Để việc giải toán về BCNN và ƯCLN được nhanh, Nếu biết áp dụng "**Thuật toán Euclid**" :

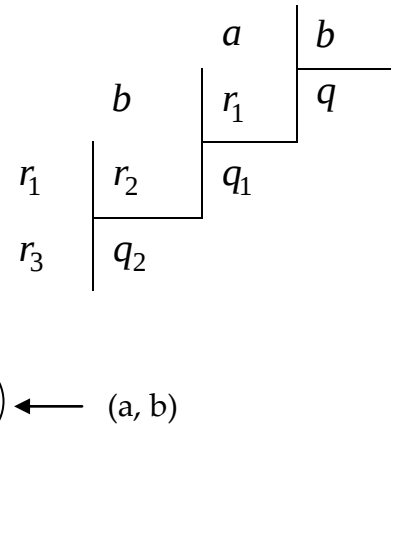
Biết rằng: hai số nguyên a, b có BCNN là $[a, b]$ và ƯCLN là (a, b) thì

$$|a \cdot b| = [a, b] \cdot (a, b) \Rightarrow [a, b] = \frac{|a \cdot b|}{(a, b)}, \quad (a, b) = \frac{|a \cdot b|}{[a, b]}$$

Nghĩa là: Tích 2 số nguyên $|a \cdot b| = \text{ƯCLN}(a, b) \times \text{BCNN}(a, b)$

Ví dụ: có $a = 12; b = 18$ suy ra $\text{ƯCLN}(12, 18) = 6$ thì:

$$\text{BCNN}(12, 18) = (12 \times 18) : 6 = 36$$



Nếu làm theo cách phân tích thừa số nguyên tố thì phải tính:

$$12 = 2^2 \times 3; \quad 18 = 2 \times 3^2 \quad \text{suy ra} \quad \text{BCNN}(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$$

Nhận xét: Với cặp số nguyên có nhiều chữ số thì việc phân tích ra thừa số nguyên tố mất nhiều thời gian; trong khi lấy tích số có thể bấm máy tính cầm tay khá nhanh và dễ hơn.

5) Phân số tối giản

$\frac{a}{b}$ là phân số tối giản khi và chỉ khi $(a, b) = 1$.

Tính chất:

- i) Mọi phân số khác 0 đều có thể đưa về phân số tối giản.
- ii) Dạng tối giản của một phân số là duy nhất.
- iii) Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

 **Dạng 1: Các bài toán liên quan tới số ước của một số**

*** Cơ sở phương pháp:** Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots$ thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1) \dots$

Thật vậy ước của A là số có dạng $mnp \dots$ trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1, a, a^2, \dots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1, b, b^2, \dots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1, c, c^2, \dots, c^z$),...

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số ước của số 18^{96}

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } 18^{96} = (3^2 \cdot 2)^{96} = 3^{192} \cdot 2^{96}.$$

$$\text{Vậy số ước của số } 18^{96} \text{ là } (96+1)(192+1) = 97 \cdot 193 = 18721.$$

Bài toán 2. Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 0 là số chính phương khi và chỉ khi số ước số của nó là số lẻ.

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Hướng dẫn giải

Giả sử $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ với p_i nguyên tố và $a_i \in \mathbb{N}^*$.

n là số chính phương khi và chỉ khi $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số chẵn khi đó $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ là số lẻ.

Mặt khác $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ là số các số ước của n , do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Một số tự nhiên n là tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n không thể có đúng 17 ước số.

Hướng dẫn giải

Tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp có dạng :

$$n = (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = 3m^2 + 2 \text{ không thể là số chính phương.}$$

Nếu n có đúng 17 ước số thì n là số chính phương (bài toán 1), vô lí. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

 **Dạng 2: Tìm số nguyên n để thỏa mãn điều kiện chia hết**

* **Cơ sở phương pháp:** Tách số bị chia thành phần chứa ẩn số chia hết cho số chia và phần nguyên dư, sau đó để thỏa mãn chia hết thì số chia phải là ước của phần số nguyên dư, từ đó ta tìm được số nguyên n thỏa mãn điều kiện.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên n để $(5n + 14)$ chia hết cho $(n + 2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $5n + 14 = 5 \cdot (n + 2) + 4$.

Mà $5 \cdot (n + 2)$ chia hết cho $(n + 2)$.

Do đó $(5n + 14)$ chia hết cho $(n + 2) \Leftrightarrow 4$ chia hết cho $(n + 2) \Leftrightarrow (n + 2)$ là ước của 4.

$$\Leftrightarrow (n + 2) \in \{1; 2; 4\}$$

$$\Rightarrow n \in \{0; 2\}.$$

Vậy với $n \in \{0; 2\}$ thì $(5n + 14)$ chia hết cho $(n + 2)$.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên thì $(n + 15)$ chia hết cho $(n + 3)$.

$\Rightarrow [(n+15) - (n+3)]$ chia hết cho $(n+3)$.

$\Leftrightarrow 12$ chia hết cho $(n+3)$.

$\Leftrightarrow (n+3)$ là $U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

$\Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3; 9\}$.

Vậy với $n \in \{0; 1; 3; 9\}$ thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 3n + 6 : n + 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^2 + 3n + 6 : n + 3$

Suy ra: $n(n+3) + 6 : n + 3 \Leftrightarrow 6 : n + 3$

$\Rightarrow n + 3 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow n = 0; n = 3$.

Bài toán 4. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = \frac{n(2n-1)+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$

Vì n nguyên nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ nguyên thì $\frac{7}{2n-1}$ nguyên

$\Rightarrow 2n - 1 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$

$\Leftrightarrow 2n \in \{-6; 0; 2; 8\} \Leftrightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Vậy với $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên:

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2} = \frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2} = \frac{4n+19}{n+2} \\ &= \frac{4(n+2)+11}{n+2} = 4 + \frac{11}{n+2} \end{aligned}$$

Để B là số tự nhiên thì $\frac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow 11 : (n+2) \Rightarrow n+2 \in U(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Do $n + 2 > 1$ nên $n + 2 = 11 \Rightarrow n = 9$

Vậy $n = 9$ thì $B \in \mathbb{N}$

Bài toán 6. Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số $n = \frac{(k+1)^2}{k+23}$ là một số nguyên dương

Hướng dẫn giải

Ta có: $n = \frac{(k+1)^2}{k+23} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k+23} = \frac{(k+23)(k-21) + 484}{k+23} = k - 1 + \frac{484}{k+23}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ n là một số nguyên dương khi và chỉ khi $k+23 \mid 484$, $k+23 > 23$

Ta có $484 = 22^2 = 4 \cdot 121 = 44 \cdot 11 \Rightarrow \begin{cases} k+23 = 121 \\ k+23 = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 98 \\ k = 21 \end{cases}$

Với $k = 98$, ta có $n = 81$

Với $k = 21$, ta có $n = 11$

Vậy giá trị k lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 98.

Dạng 3: Tìm số biết ƯCLN của chúng

* Cơ sở phương pháp:

* Nếu biết $\text{ƯCLN}(a, b) = K$ thì $a = K \cdot m$ và $b = K \cdot n$ với $\text{ƯCLN}(m, n) = 1$ (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b .

* Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Tìm hai số tự nhiên a, b , biết rằng: $a + b = 162$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 18$

Hướng dẫn giải

Giả sử $a \leq b$

Ta có: $a + b = 162$, $(a, b) = 18$

Đặt $\begin{cases} a = 18m \\ b = 18n \end{cases}$ với $(m, n) = 1, m \leq n$

Từ $a + b = 162 \Rightarrow 18(m + n) = 162 \Rightarrow m + n = 9$

Do $(m, n) = 1$, lập bảng:

m	1	2	3	4
n	8	7	6	5
a	18	36	loại	72
b	144	126		90

Kết luận: Các số cần tìm là: $(18;144);(36;126);(72;90)$

Bài toán 2. Tìm hai số nhỏ hơn 200, biết hiệu của chúng bằng 90 và ƯCLN là 15

Hướng dẫn giải

Gọi hai số cần tìm là a, b ($a, b \in \mathbb{N}; a, b < 200$)

Ta có: $a - b = 90; (a, b) = 15$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 15m \\ b = 15n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = 1 \\ 15(m - n) = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = 1 \\ m - n = 6 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } a, b < 200 \Rightarrow \begin{cases} 15m < 200 \\ 15n < 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 13 \\ n \leq 13 \end{cases}$$

m	n	a	b
13	7	195	105
11	5	65	75
7	1	85	15

Vậy: $(a, b) = (195; 105), (65; 75), (85; 15)$.

Bài toán 3. Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 432 và ƯCLN bằng 6

Hướng dẫn giải

Ta có: $ab = 432; (a, b) = 6$ ($a \leq b$)

$$\text{Đặt } a = 6m, b = 6n \text{ với } (m, n) = 1 \text{ và } m \leq n \Rightarrow 36mn = 432 \Rightarrow mn = 12$$

Ta được:

m	n	a	b
1	12	6	72
3	4	18	24

Vậy $(a, b) = (6; 72), (18; 24)$

Bài toán 4. Tìm hai số a, b biết $7a = 11b$ và ƯCLN(a, b) = 45

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra $a > b$

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

$$\text{Từ } \text{ƯCLN}(a; b) = 45 \Rightarrow \begin{cases} a = 45a_1 \\ b = 45b_1 \end{cases} \quad (a_1; b_1) = 1, (a_1 \geq b_1)$$

$$\text{Mà: } \frac{a}{b} = \frac{11}{7} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{11}{7} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 \\ b_1 = 7 \end{cases} \text{ vì } (a_1; b_1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 45.11 = 495 \\ b = 45.7 = 315 \end{cases}$$

Vậy hai số a, b cần tìm là $a = 495$ và $b = 315$

Dạng 4: Các bài toán phối hợp giữa BCNN của các số với ƯCLN của chúng

*** Cơ sở phương pháp:**

* Nếu biết BCNN $(a, b) = K$ thì ta gọi $\text{ƯCLN}(a; b) = d$ thì $a = m.d$ và $b = n.d$ với $\text{ƯCLN}(m; n) = 1$ (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b .

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $a = 1980, b = 2100$.

a) Tìm (a, b) và $[a, b]$.

b) So sánh $[a, b].(a, b)$ với ab . Chứng minh nhận xét đó đối với hai số tự nhiên a và b khác 0 tùy ý.

(Nâng cao và phát triển lớp 6 tập 1 – Vũ Hữu Bình)

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } 1980 = 2^2.3^2.5.11, \quad 2100 = 2^2.3.5^2.7.$$

$$\text{ƯCLN}(1980, 2100) = 2^2.3.5 = 60$$

$$\text{BCNN}(1980, 2100) = 2^2.3^2.5^2.7.11 = 69300.$$

b) $[1980, 2100].(1980, 2100) = 1980.2100$ (đều bằng 4158000). Ta sẽ chứng minh rằng $[a, b].(a, b) = ab$

Cách 1. Trong cách giải này, các thừa số riêng cũng được coi như các thừa số chung, chẳng hạn a chứa thừa số 11, b không chứa thừa số 11 thì ra coi như b chứa thừa số 11 với số mũ bằng 0. Với cách viết này, trong ví dụ trên ta có:

$$1980 = 2^2.3^2.5.7^0.11.$$

$$2100 = 2^2.3.5^2.7.11^0.$$

$(1980, 2100)$ là tích các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất $2^2.3^2.5.7^0.11^0 = 60$.

$[1980, 2100]$ là tích các thừa số chung với số mũ lớn nhất $2^2.3^2.5^2.7.11 = 69300$.

Bây giờ ta chứng minh trong trường hợp tổng quát:

$$[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b \quad (1)$$

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, các thừa số nguyên tố ở hai vế của (1) chính là các thừa số nguyên tố có trong a và b . Ta sẽ chứng tỏ rằng hai vế chứa các thừa số nguyên tố như nhau với số mũ tương ứng bằng nhau.

Gọi p là thừa số nguyên tố tùy ý trong các thừa số nguyên tố như vậy. Giả sử số mũ của p trong a là x , số mũ của p trong b là y trong đó x và y có thể bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \geq y$. Khi đó vế phải của (1) chứa p với số mũ $x + y$. Còn ở vế trái, $[a, b]$ chứa p với số mũ x , (a, b) chứa p với số mũ y nên vế trái cũng chứa p với số mũ $x + y$.

Cách 2. Gọi $d = (a, b)$ thì $a = da', b = db'$ (1), trong đó $(a', b') = 1$.

Đặt $\frac{ab}{d} = m$ (2), ta cần chứng minh rằng $[a, b] = m$.

Để chứng minh điều này, cần chứng tỏ tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho $m = ax$, $m = by$ và $(x, y) = 1$.

Thật vậy từ (1) và (2) suy ra $m = a \cdot \frac{b}{d} = ab'$,

$m = b \cdot \frac{a}{d} = ba'$. Do đó, ta chọn $x = b', y = a'$, thế thì $(x, y) = 1$ vì $(a', b') = 1$.

Vậy $\frac{ab}{d} = [a, b]$, tức là $[a, b] \cdot (a, b) = ab$.

Bài toán 2. Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 10, BCNN của chúng bằng 900.

Hướng dẫn giải

Gọi các số phải tìm là a và b , giả sử $a \leq b$. Ta có $(a, b) = 10$ nên. $a = 10a'$, $b = 10b'$, $(a', b') = 1, a' \leq b'$. Do đó $ab = 100a'b'$ (1). Mặt khác $ab = [a, b] \cdot (a, b) = 900 \cdot 10 = 9000$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a'b' = 90$. Ta có các trường hợp :

a'	1	2	3	4
b'	90	45	18	10

Suy ra:

a	10	20	50	90
b	900	450	180	100

Bài toán 3. Tìm hai số tự nhiên a, b sao cho tổng của ƯCLN và BCNN là 15

Hướng dẫn giải

Giả sử $a < b$

$$\text{Gọi } d = \text{ƯCLN}(a; b) \Rightarrow \begin{cases} a = d \cdot a_1 \\ b = d \cdot b_1 \end{cases} \quad (a_1 < b_1), (a_1; b_1) = 1, \text{ và } d < 15$$

$$\text{Nên BCNN}(a; b) = a_1 \cdot b_1 \cdot d$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } d + a_1 \cdot b_1 \cdot d = 15 \Rightarrow d(1 + a_1 \cdot b_1) = 15 \Rightarrow d \in U(15) = \{1; 3; 5; 15\}, \text{ Mà } d < 15,$$

Nên

$$\text{TH1 : } d = 1 \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = 14 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ b_1 = 14 \Rightarrow b = 14 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 2 \\ b_1 = 7 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$

$$\text{TH2 : } d = 3 \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ b_1 = 4 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

$$\text{TH3 : } d = 5 \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 5 \\ b_1 = 2 \Rightarrow b = 10 \end{cases}$$

Vậy các cặp số $(a; b)$ cần tìm là : $(1; 14), (2; 7), (3; 12), (5; 10)$ và đảo ngược lại.

Dạng 5: Các bài toán liên quan đến hai số nguyên tố cùng nhau

* **Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh hai số là nguyên tố cùng nhau, ta chứng minh chúng có ƯCLN = 1.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

- Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.
- Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.
- $2n + 1$ và $3n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $d \in \text{ƯC}(n, n + 1) \Rightarrow (n + 1) - n : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$. Vậy n và $n + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $d \in \text{ƯC}(2n + 1, 2n + 3) \Rightarrow (2n + 3) - (2n + 1) : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$.

Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy $d = 1$.

Vậy $(2n + 1)$ và $(2n + 3)$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Gọi $d \in \text{ƯC}(2n + 1, 3n + 1) \Rightarrow 3(2n + 1) - 2(3n + 1) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$.

Vậy $2n + 1$ và $3n + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài toán 2. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

- a) a và $a + b$ b) a^2 và $a + b$ c) ab và $a + b$.

Hướng dẫn giải

- a) Gọi $d \in \text{ƯC}(a, a + b) \Rightarrow (a + b) - a : d \Rightarrow b : d$ Ta lại có: $a : d \Rightarrow d \in \text{ƯC}(a, b)$, do đó $d = 1$ (vì a và b là hai số nguyên tố cùng nhau). Vậy $(a, a + b) = 1$.
- b) Giả sử a^2 và $a + b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d , do đó b cũng chia hết cho d . Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d , trái với giả thiết $(a, b) = 1$.
Vậy a^2 và $a + b$ là hai số nguyên tố cùng nhau.
- c) Giả sử ab và $a + b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d . Tồn tại một trong hai thừa số a và b , chẳng hạn là a , chia hết cho d , do đó b cũng chia hết cho d , trái với $(a, b) = 1$.
Vậy $(ab, a + b) = 1$.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n để các số: $9n + 24$ và $3n + 4$ là các số nguyên tố cùng nhau?

Hướng dẫn giải

Giả sử $9n + 24$ và $3n + 4$ cùng chia hết cho số nguyên tố d .

Ta có $(9n + 24) - 3(3n + 4) : d \Rightarrow 12 : d \Rightarrow d \in \{2; 3\}$. Điều kiện để $(9n + 24, 3n + 4) = 1$ là $d \neq 2, d \neq 3$. Ta dễ thấy $d \neq 3$ vì $3n + 4$ không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ thì ít nhất một trong hai số $9n + 24$ hoặc $3n + 4$ không chia hết cho 2.

Ta thấy $9n + 24$ là số lẻ suy ra n lẻ, $3n + 4$ lẻ suy ra n lẻ.

Vậy để $(9n + 24, 3n + 4) = 1$ thì n phải là số lẻ.

Bài toán 4. Tìm n để $18n + 3$ và $31n + 7$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Hướng dẫn giải

Gọi $\text{ƯCLN}(18n + 3; 31n + 7) = d, d \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có : } \begin{cases} 18n + 3 : d \\ 31n + 7 : d \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 7(18n + 3) : d \\ 6(31n + 7) : d \end{cases} \Rightarrow (126n + 42) - (126n + 21) : d \Rightarrow 21 : d \\ &\Rightarrow d \in U(21) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21\} \end{aligned}$$

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Do $21n + 7 \vdots d$, Mà $21n + 7$ không chia hết cho 3, nên $d = 1$ hoặc $d = 7$

Để hai số $18n + 3$ và $21n + 7$ là hai số nguyên tố thì d khác 7 hay

$$18n + 3 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n + 3 - 2 \cdot 1 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n - 18 \not\vdots 7 \Rightarrow 18(n - 1) \not\vdots 7 \Rightarrow n - 1 \not\vdots 7$$

$$\Rightarrow n - 1 \neq 7k \Rightarrow n \neq 7k + 1$$

Vậy $n \neq 7k + 1$ với k là số tự nhiên thì $18n + 3$ và $21n + 7$ là hai số nguyên tố

Dạng 6: Các bài toán về phân số tối giản

* **Cơ sở phương pháp:** Một phân số là tối giản khi tử số và mẫu số có ước chung lớn nhất bằng 1.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $\frac{2n+3}{3n+4}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn giải

Gọi d là ước chung của $(2n + 3)$ và $(3n + 4)$. Suy ra:

$$\begin{cases} 2n + 3 \vdots d \\ 3n + 4 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n + 3) \vdots d \\ 2(3n + 4) \vdots d \end{cases} \Rightarrow 3(2n + 3) - 2(3n + 4) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d \in U(1)$$

$$\text{Mà } U(1) = \{-1; 1\} \Rightarrow d \in \{-1; 1\}$$

Vậy $\frac{2n+3}{3n+4}$ là phân số tối giản.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn giải

$$\text{Cách 1: Gọi } (21n + 4, 14n + 3) = d \Rightarrow \begin{cases} 21n + 4 \vdots d & (1) \\ 14n + 3 \vdots d & (2) \end{cases} \Rightarrow 7n + 1 \vdots 3 \Rightarrow 14n + 2 \vdots 3 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Vậy $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Cách 2: Giả sử phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ chưa tối giản

Suy ra $21n + 4$ và $14n + 3$ có một ước số chung nguyên tố d .

$$\Rightarrow (21n + 4) - (14n + 3) = 7n + 1 \vdots d$$

$$\Rightarrow 14n + 2 \vdots d$$

Do đó: $(14n + 3) - (14n + 1) = 1 \vdots d$, vô lý

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn giải

Ta viết lại: $\frac{2n+3}{n^2+3n+2} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

Do $n+1$ và $n+2$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (n+1, n+2) = 1$

Suy ra tổng của chúng là $(n+1) + (n+2) = 2n+3$ và tích của chúng là $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Vậy phân số $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}, n \in \mathbb{N}$ là phân số tối giản.

Bài toán 4. Định n để $\frac{n+8}{2n-5}$ là phân số tối giản với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để $\frac{n+8}{2n-5}$ là phân số tối giản thì $(n+8, 2n-5) = 1$

Giả sử d là một ước nguyên tố của $2n-5$ và $n+8$. Suy ra: $\begin{cases} d \mid n+8 & (1) \\ d \mid 2n-5 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra: $d \mid 2(n+8) = (2n-5) + 21 \quad (3)$

Do đó $d \mid 21 \Rightarrow d = 3, 7$

Muốn cho phân số tối giản thì điều kiện cần và đủ là $(n+8)$ không chia hết cho 3 và 7.

Do đó: $n \neq 3k+1, n \neq 7m-1$ với $k, m \in \mathbb{N}$

Vậy $n \neq 3k+1$ và $n \neq 7m-1$ là điều kiện cần tìm để phân số $\frac{n+8}{2n-5}$ tối giản.

Dạng 7: Tìm ƯCLN của các biểu thức số

* Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Tìm ƯCLN của $2n-1$ và $9n+4$ ($n \in \mathbb{N}$).

Hướng dẫn giải

Gọi $d \in \text{ƯC}(2n-1, 9n+4) \Rightarrow 2(9n+4) - 9(2n-1) \vdots d \Rightarrow 17 \vdots d \Rightarrow d \in \{17; 1\}$

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Vì $2n - 1 : 17 \Rightarrow 2n - 18 : 17 \Leftrightarrow 2(n - 9) : 17 \Leftrightarrow n - 9 : 17 \Leftrightarrow n = 17k + 9$ với $k \in \mathbb{N}$

Nếu $n = 17k + 9$ thì $2n - 1 : 17$ và $9n + 4 = 9(17k + 9) + 4 = 153k + 85 : 17$

do đó $(2n - 1, 9n + 4) = 17$.

Nếu $n \neq 17k + 9$ thì $2n - 1$ không chia hết cho 17 do đó $(2n - 1, 9n + 4) = 1$

Bài toán 2. Tìm ƯCLN của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Hướng dẫn giải

Gọi $d \in \text{ƯC}\left(\frac{n(n+1)}{2}, 2n+1\right)$ thì $n(n+1) : d$ và $2n+1 : d$

Suy ra $n(2n+1) - n(n+1) : d$ tức là $n^2 : d$.

Từ $n(n+1) : d$ và $n^2 : d$ suy ra $n : d$. Ta lại có $2n+1 : d$, do đó $1 : d$ nên $d = 1$

Vậy ƯCLN của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n+1$ bằng 1.

Dạng 8: Liên hệ giữa phép chia có dư với phép chia hết, ƯCLN, BCNN

*** Cơ sở phương pháp:**

* Nếu số tự nhiên **a** chia cho số tự nhiên **b** được số dư là **k** $\Rightarrow a - k : b$

* Nếu $a : b$ và $a : c$ mà $\text{ƯCLN}(a, b) = 1 \Rightarrow a$ chia hết cho tích $b \cdot c$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

* Nếu $a : b$ và $a : c$ mà a là số nhỏ nhất $\Rightarrow a = \text{BCNN}(a, b)$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

* Nếu $a : b$ và $m : b$ mà b lớn nhất $\Rightarrow b = \text{ƯCLN}(a, m)$ ($a, b, m \in \mathbb{N}$)

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Bạn Nam nghĩ 1 số có 3 chữ số, nếu bớt số đó đi 8 thì được 1 số $: 7$, nếu bớt số đó đi 9 thì được 1 số $: 8$, nếu bớt số đó đi 10 thì được 1 số $: 9$, Hỏi bạn Nam nghĩ số nào?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số bạn Nam đã nghĩ, Điều kiện: $99 < x < 1000$

Theo bài ra ta có:
$$\begin{cases} x - 8 : 7 \\ x - 9 : 8 \\ x - 10 : 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 : 7 \\ x - 1 : 8 \\ x - 1 : 9 \end{cases} \Rightarrow x - 1 : 7; 8; 9 \Rightarrow x - 1 \in \text{BC}(7; 8; 9)$$

$x - 1 \in \{0; 504; 1008; \dots\} \Rightarrow x \in \{1; 505; 1009; \dots\}$, Mà $99 < x < 1000$ nên $x = 505$

Vậy số có ba chữ số mà bạn Nam nghĩ là 505

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho chia a cho 3, cho 5, cho 7 được các số dư theo thứ tự là 2, 3, 4

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} a = 3m + 2 \\ a = 5n + 3 \\ a = 7p + 4 \end{cases} (m, n, p \in N) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 6m + 4 \\ 2a = 10n + 6 \\ 2a = 14p + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 : 3 \\ 2a - 1 : 5 \\ 2a - 1 : 7 \end{cases} \Rightarrow 2a - 1 \in BC(3; 5; 7)$$

Vì a nhỏ nhất nên $2a - 1$ nhỏ nhất khác 0 hay $2a - 1 = BCNN(3; 5; 7) = 105 \Rightarrow 2a = 106 \Rightarrow a = 53$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 53

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 5, 7, 9 có số dư theo thứ tự là 3, 4, 5

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a. Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} a = 5m + 3 \\ a = 7n + 4 \\ a = 9p + 5 \end{cases} (m, n, p \in N) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 10m + 6 \\ 2a = 14n + 8 \\ 2a = 18p + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 : 5 \\ 2a - 1 : 7 \\ 2a - 1 : 9 \end{cases} \Rightarrow 2a - 1 \in BC(5; 7; 9)$$

Vì a nhỏ nhất nên $2a - 1$ nhỏ nhất khác 0 hay $2a - 1 = BCNN(5; 7; 9) = 315 \Rightarrow 2a = 316 \Rightarrow a = 158$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 158

Bài toán 4. Linh và Mai cùng mua một số hộp bút chì màu, số bút đựng trong mỗi hộp bằng nhau và lớn hơn 1. Kết quả Linh có 15 bút chì màu và Mai có 18 bút chì màu hỏi mỗi hộp có bao nhiêu chiếc bút?

Hướng dẫn giải

Gọi số bút trong mỗi hộp là a. Điều kiện: $a \in N, a < 15$ và $a > 1$

Theo bài ra ta có : $15 : a$ và $18 : a$, Nên a là 1 ước chung của 15 và 18

Và a phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn 15 $\Rightarrow$ kết quả được $a = 3$

Bài toán 5. Hai lớp 6A và 6B tham gia phong trào tết trồng cây, mỗi em trồng 1 số cây như nhau, kết quả lớp 6A trồng được 132 cây và 6B được 135 cây. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh.

Hướng dẫn giải

Gọi số cây mỗi em trồng được là a, Điều kiện: $a \in N, a < 132, a > 1$

Theo bài ra ta có: $132 : a$ và $135 : a$ khi đó ta thấy $a \in UC(132; 135) = \{1; 3\}$

Vậy $a = 3$, Khi đó lớp 6A có $132 : 3 = 44$ học sinh và lớp 6B có $135 : 3 = 45$ học sinh.

Bài toán 6. Trong cuộc thi HSG cấp tỉnh có ba môn Toán Văn Anh ,số học sinh tham gia như sau: Văn có 96 học sinh, Toán có 120 học sinh và Anh có 72 học sinh.Trong buổi tổng

kết các bạn được tham gia phân công đứng thành hàng dọc sao cho mỗi hàng có số bạn thi mỗi môn bằng nhau. Hỏi có thể phân học sinh đứng thành ít nhất bao nhiêu hàng?

Hướng dẫn giải

Gọi số học sinh đứng ở mỗi hàng là a . Điều kiện : $a \in N, a < 72$ và $a > 1$

Vì mỗi hàng có số học sinh mỗi môn bằng nhau nên ta có:

$$96 : a ; 120 : a \text{ và } 72 : a ,$$

Để có ít nhất bao nhiêu hàng thì số học sinh phải là lớn nhất hay a lớn nhất

Hay $a = \text{ƯCLN} (96 ; 120 ; 72) = 24$, Vậy số hàng cần tìm là : $(96 + 120 + 72) : 24 = 12$ hàng

Dạng 9: Tìm ƯCLN của hai số bằng thuật toán O-clit

* Cơ sở phương pháp:

a) Trường hợp $b | a$ thì $(a, b) = b$

b) Trường hợp $b \nmid a$ giả sử $a = bq + c$ thì $(a, b) = (b, c)$.

Thuật toán Euclid.

Giả sử:

$$a = bq + r_1, 0 < r_1 < b$$

$$b = r_1 q_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2$$

....

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_n$$

Thuật toán Euclid phải kết thúc với số dư

$$r_{n+1} \neq 0$$

Theo b) ta có

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Vậy $\text{ƯCLN}(a, b)$ là số dư cuối cùng khác 0 trong thuật toán Euclid.

* Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Dùng thuật toán Euclid để chứng minh : $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

Hướng dẫn giải

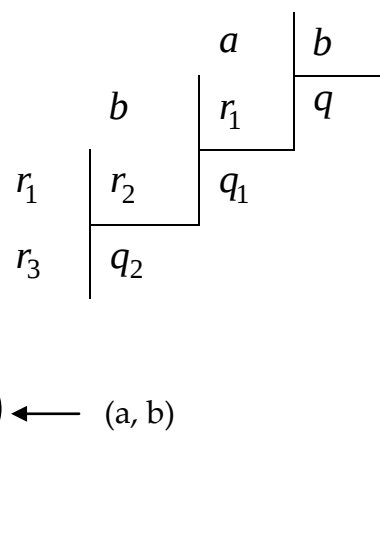
Ta có $n^4 + 3n^2 + 1 = (n^3 + 2n)n + n^2 + 1$

$$n^3 + 2n = (n^2 + 1)n + n$$

$$n^2 + 1 = n.n + 1$$

$$n = 1.n + 0$$

Vậy $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.



Bài toán 2. Cho hai số tự nhiên a và b ($a > b$).

- Chứng minh rằng nếu a chia hết cho b thì $(a, b) = b$.
- Chứng minh rằng nếu a không chia hết cho b thì ƯCLN của hai số bằng ƯCLN của số nhỏ và số dư trong phép chia số lớn cho số nhỏ.
- Dùng các nhận xét trên để tìm ƯCLN(72, 56)

(Nâng cao và phát triển lớp 6 tập 1)

Hướng dẫn giải

a) Mọi ước chung của a và b hiển nhiên là ước của b . Đảo lại, do a chia hết cho b nên b là ước chung của a và b . Vậy $(a, b) = b$.

b) Gọi r là số dư trong phép chia a cho b ($a > b$). Ta có $a = bk + r$ ($k \in \mathbb{N}$), cần chứng minh rằng $(a, b) = (b, r)$.

Thật vậy, nếu a và b cùng chia hết cho d thì r chia hết cho d , do đó ước chung của a và b cũng là ước chung của b và r (1). Đảo lại nếu b và r cùng chia hết cho d thì a chia hết cho d , do đó ước chung của b và r cũng là ước chung của a và b (2). Từ (1) và (2) suy ra tập hợp các ước chung của a và b và tập hợp các ước chung của b và r bằng nhau. Do đó hai số lớn nhất trong hai tập hợp đó cũng bằng nhau, tức là $(a, b) = (b, r)$.

c) 72 chia 56 dư 16 nên $(72, 56) = (56, 16)$;

56 chia 16 dư 8 nên $(56, 16) = (16, 8)$;

16 chia hết cho 8 nên $(16, 8) = 8$. Vậy $(72, 56) = 8$.

Nhận xét : Giả sử a không chia hết cho b và a chia cho b dư r_1 , b chia cho r_1 dư r_2 , r_1 chia cho r_2 dư $r_3, \dots, r_{n-2}$ chia cho r_{n-1} dư r_n , r_{n-1} chia cho r_n dư 0 (dãy số $b, r_1, r_2, \dots, r_n$ là dãy số tự nhiên giảm dần nên số phép chia là hữu hạn do đó quá trình trên kết thúc với một số dư bằng 0). Theo chứng minh ở ví dụ trên ta có $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \dots (r_{n-1}, r_n) = r_n$ vì r_{n-1} chia hết cho r_n

Như vậy $UCLN(a, b)$ là số chia cuối cùng trong dãy các phép chia liên tiếp a cho b , b cho r_1 , r_1 cho $r_2, \dots$, trong đó $r_1, r_2, \dots$ là số dư trong các phép chia theo thứ tự trên.

Trong thực hành người ta đặt tính như sau :

$$\begin{array}{r}
 72 \overline{) 56} \\
 \underline{56} \\
 16 \\
 16 \overline{) 16} \\
 \underline{16} \\
 0 \\
 0 \overline{) 8} \\
 \underline{8} \\
 0 \\
 0 \overline{) 2} \\
 \underline{2} \\
 0
 \end{array}$$

Việc thực hiện một dãy phép chia liên tiếp như trên được gọi là thuật toán O clit.

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Trường hợp tìm ƯCLN của ba số, ta tìm ƯCLN của hai số rồi tìm ƯCLN của kết quả với số thứ ba.

Bài toán 3. Tìm ƯCLN(a, b) biết a là số gồm 1991 chữ số 2; b là số gồm 8 chữ số 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: 1991 chia 8 dư 7, còn 8 chia 7 dư 1

Theo thuật toán O- Clít:

$$(a, b) = (\underbrace{22 \dots 2}_{1991 \text{ số } 2}, \underbrace{22 \dots 2}_8) = (\underbrace{22 \dots 2}_8, \underbrace{22 \dots 2}_7) = (\underbrace{22 \dots 2}_7, 2) = 2.$$

Bài toán 4. Tìm ƯCLN của

a) $\underbrace{11 \dots 1}_{2004 \text{ số } 1}$ và 11111111

b) 123456789 và 987654321.

(Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS phần số học- Nguyễn Vũ Thanh)

Hướng dẫn giải

a) Gọi $a = \underbrace{11 \dots 1}_{2004 \text{ số } 1}; b = \underbrace{11 \dots 1}_8$. Ta có $2000:8$ nên $\underbrace{11 \dots 1}_{2000 \text{ số } 1} = \underbrace{11 \dots 1}_8 \underbrace{11 \dots 1}_8 \dots \underbrace{11 \dots 1}_8 : b$.

Do đó $a = \underbrace{11 \dots 1}_{2000 \text{ số } 1} 0000 + 1111 = bq + 1111 \Rightarrow (a, b) = (b, 1111) = 1111 (do b:1111)$.

b) Gọi $a = 987654321; b = 123456789$. Ta có:

$$a = 8b + 9 \Rightarrow (a, b) = (b, 9) = 9 (do b:9).$$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Tìm số chia và thương của một phép chia có số bị chia bằng 145, số dư bằng 12 biết rằng thương khác 1 (số chia và thương là các số tự nhiên).

Câu 2. Hãy viết số 108 dưới dạng tổng các số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 0.

Câu 3. Tìm số tự nhiên n để $3n + 4$ chia hết cho $n - 1$.

Câu 4. Tìm $a \in \mathbb{N}$ để $a + 1$ là bội của $a - 1$

Câu 5. Tìm số tự nhiên sao cho $4n - 5$ chia hết cho $2n - 1$

Câu 6. Tìm số nguyên n để: $5 + n^2 - 2n$ chia hết cho $n - 2$

Câu 7. Tìm số nguyên n để: $n^2 + 4$ chia hết cho $n + 2$

Câu 8. Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Câu 9. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nó tăng gấp n lần nếu cộng mỗi chữ số của nó với n (n là số tự nhiên, có thể gồm một hoặc nhiều chữ số)

Câu 10. Tìm số tự nhiên a biết rằng 264 chia cho a dư 24, còn 363 chia cho a dư 43.

Câu 11. Tìm số tự nhiên a biết rằng 398 chia cho a thì dư 38, còn 450 chia cho a thì dư 18.

Câu 12. Có 100 quyển vở và 90 bút chì được thưởng đều cho một số học sinh, còn lại 4 quyển vở và 18 bút chì không đủ chia đều. Tính số học sinh được thưởng.

Câu 13. Phần thưởng cho học sinh của một lớp học gồm 128 vở, 48 bút chì, 192 nhãn vở. Có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu phần thưởng như nhau, mỗi phần thưởng gồm bao nhiêu vở, bút chì, nhãn vở?

Câu 14. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự là 2, 3, 4

Câu 15. Một cuộc thi chạy tiếp sức theo vòng tròn gồm nhiều chặng. Biết rằng chu vi đường tròn là $330m$, mỗi chặng dài $75m$, địa điểm xuất phát và kết thúc cùng một chỗ. Hỏi cuộc thi có ít nhất mấy chặng?

Câu 16. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, sao cho chia nó cho 17, cho 25 được các số dư theo thứ tự là 8 và 16.

Câu 17. Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia cho 8 thì dư 7, chia cho 31 thì dư 28.

Câu 18. Nếu xếp một số sách vào từng túi 10 cuốn thì vừa hết, vào từng túi 12 cuốn thì thừa 2 cuốn, vào từng túi 18 cuốn thì thừa 8 cuốn. biết rằng số sách trong khoảng từ 715 đến 1000. Tính số sách đó?

Câu 19. Hai lớp 6A, 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Trong lớp 6A, một bạn thu được $25kg$, còn lại mỗi bạn thu $10kg$. Tính số học sinh mỗi lớp, biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng từ $200kg$ đến $300kg$.

Câu 20. Có hai chiếc đồng hồ (có kim giờ và kim phút). Trong một ngày, chiếc thứ nhất chạy nhanh 2 phút, chiếc thứ hai chạy chậm 3 phút. Cả hai đồng hồ được lấy lại giờ chính xác. Hỏi sau ít nhất bao lâu, cả hai đồng hồ lại chạy chính xác?

Câu 21. Tìm hai số tự nhiên biết rằng:

a) Hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN bằng 28, các số đó trong khoảng từ 300 đến 440.

b) Hiệu của chúng bằng 48, ƯCLN bằng 12.

Câu 22. Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 36 và tổng của chúng bằng 432

Câu 23. Tìm hai số tự nhiên biết rằng tích của chúng bằng 864 và ƯCLN của nó là 6

Câu 24. Chứng minh rằng $14n + 3$ và $21n + 4$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 25. Chứng minh rằng $2n + 1$ và $6n + 5$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 26. BCNN của 2 số tự nhiên bằng 770, một số bằng 14. Tìm số kia.

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Câu 27. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) b và $a - b$ ($a > b$);

b) $a^2 + b^2$ và ab .

Câu 28. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng nhau với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab .

Câu 29. Tìm số tự nhiên n sao cho:

a) $4n - 5$ chia hết cho 13;

b) $5n + 1$ chia hết cho 7;

c) $25n + 3$ chia hết cho 53.

Câu 30. Tìm số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau:

a) $4n + 3$ và $2n + 3$;

b) $7n + 13$ và $2n + 4$;

c) $9n + 24$ và $3n + 4$;

d) $18n + 3$ và $21n + 7$.

Câu 31. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để $n + 15$ và $n + 72$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 32. Cho $(a, b) = 1$. Tìm :

a) $(a + b, a - b)$

b) $(7a + 9b, 3a + 8b)$

Câu 33. Tìm a, b biết:

a) $[a, b] + (a, b) = 55$;

b) $[a, b] - (a, b) = 5$;

c) $[a, b] + (a, b) = 35$.

Câu 34. Tìm ƯCLN của các số sau bằng thuật toán Ô-clit:

a) $(187231, 165148)$;

b) $(\underbrace{11 \dots 1}_{100 \text{ chu số}}, \underbrace{11 \dots 1}_{8 \text{ chu số}})$.

Câu 35. Tìm $[n; n + 1; n + 2]$

Câu 36. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ biết $n < 30$ để các số $3n + 4$ và $5n + 1$ có ước chung lớn hơn 1.

Câu 37. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên.

Câu 38. Ba xe buýt cùng khởi hành lúc 6 giờ sáng từ một bến xe và đi theo 3 hướng khác nhau. Xe thứ nhất quay về bến sau 1 giờ 5 phút và sau 10 phút lại đi. Xe thứ hai quay về

bến sau 56 phút và lại đi sau 4 phút. Xe thứ ba quay về bến sau 48 phút và sau 2 phút lại đi. Hỏi ba xe lại cùng xuất phát từ bến lần thứ hai vào lúc mấy giờ?

Câu 39. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phân số $\frac{2n+1}{6n+5}$ luôn tối giản.

Câu 40. Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) Chứng tỏ rằng phân số P là phân số tối giản.

b) Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất?

Câu 41. Tìm hai số nguyên dương biết $a + 2b = 48$ và $\text{ƯCLN}(a; b) + 3 \cdot \text{BCNN}(a; b) = 114$

Câu 42. Cho $(a, b) = 1$, tìm $(11a + 2b, 18a + 5b)$.

Câu 43. Chứng minh rằng $(a, b) = (5a + 3b, 13a + 8b)$

Câu 44. Cho ba số tự nhiên a, b, c nguyên tố cùng nhau đôi một.

Chứng minh rằng $(ab + bc + ca, abc) = 1$

Câu 45. Tìm tất các các số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau biết rằng:

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73}$$

Câu 46. Cho $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$. Chứng minh rằng: $(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1$

Câu 47. Cho $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$. Tìm $(2^m - 1, 2^n - 1)$

Câu 48. Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$ và $\text{BCNN}(a, b) = 300$;

Câu 49. Cho $a \in \mathbb{Z}$, tìm $(a, a+2)$

Câu 50. Cho a, m là các số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng :

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^{m-1}, a - 1) = (m, a - 1).$$

Câu 51. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số lẻ thì $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = (a, b, c)$.

Câu 52. Tổng các số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ bằng 999. Hỏi ước số chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

Câu 53. Cho $(a, b) = 1$, tìm $(11a + 2b, 18a + 5b)$

Câu 54. Cho $(m, n) = 1$. Tìm $(m + n, m^2 + n^2)$.

Câu 55. Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

a) $\frac{21n+4}{14n+3};$

b) $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$

I CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Câu 56. Tìm số nguyên n để các phân số sau tối giản.

a) $\frac{18n+3}{21n+7};$

b) $\frac{2n+3}{n+7}.$

Câu 57. Tìm hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $a+b=128$ và $(a,b)=16$.

Câu 58. Tìm ƯCLN của $\overline{ab} + \overline{ba}$ và 33 với $a+b$ không chia hết cho 3

Câu 59. Chứng minh rằng một số tự nhiên có ba chữ số tận cùng là 136 thì ít nhất có 4 ước số dương.

Câu 60. Chứng minh rằng nếu $|kn-lm|=1$ thì $(ma+nb, ka+lb)=(a,b)$.

Câu 61. Tìm ƯCLN của tất cả các số có 9 chữ số được viết bởi các chữ số 1, 2, 3, ..., 9 và trong các số đó các chữ số đều khác nhau.

Câu 62. Cho $(a,b)=1$ tìm ƯCLN của $2a+b$ và $a(a+b)$

Câu 63. Chứng minh các phân số sau tối giản với n là số nguyên

a) $\frac{12n+1}{30n+2};$

b) $\frac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}.$

Câu 64. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{13+n}{n-2}$ tối giản.

Câu 65. Chứng minh rằng nếu $5n^2+1 \vdots 6$ thì $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{3}$ tối giản.

Câu 66. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất để các phân số sau tối giản: $\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \dots, \frac{31}{n+33}.$

Câu 67. Tìm số tự nhiên a, b biết $ab=360, [a,b]=60$.

Câu 68. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia cho 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có số dư lần lượt là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Câu 69. Tìm tất cả các cặp số (a,b) nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a, b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a, b là 1.

ii) Số $N=ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

Câu 70. Xác định các số nguyên tố p, q sao cho $p^2-pq+2q^2$ và $2p^2+pq+q^2$ là các số nguyên tố cùng nhau.

Câu 71. Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0: a và b , sao cho: $(a,b)=1$ và $\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{7}{25}.$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm 1992 – 1993)

Câu 72. Cho m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Tìm ước chung lớn nhất của $m+n$ và m^2+n^2 .

Câu 73. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b thỏa mãn $4a + 1$ và $4b - 1$ nguyên tố cùng nhau, đồng thời $a + b$ là ước của $16ab + 1$.

Câu 74. Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a, b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a, b là 1.

ii) Số $N = ab(ab + 1)(2ab + 1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

(Trích đề học sinh giỏi toán Đắk Lắk năm học 2017-2018)

Câu 75. Cho hai số tự nhiên m và n thỏa mãn $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là số nguyên.

Chứng minh ước chung lớn nhất của m và n không lớn hơn $\sqrt{m+n}$

(Trích đề học sinh giỏi lớp 9 Hải Dương năm học 2004-2005)

Câu 76. Cho ba số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau và đồng thời thỏa mãn các điều kiện:

i) a là ước của $b + c + bc$,

ii) b là ước của $a + c + ac$,

iii) c là ước của $a + b + ab$,

a) Hãy chỉ ra bộ ba số (a, b, c) thỏa mãn các điều kiện trên.

b) Chứng minh rằng a, b, c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

(Trích đề vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2007-2008)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1. CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Câu 1.

Gọi x là số chia, a là thương, ta có $145 = ax + 12 (x > 12)$. Như vậy x là ước của $145 - 12 = 133$

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $133 = 7.19$

Ước của 133 mà lớn hơn 12 là 19 và 133

Nếu số chia bằng 19 thì thương bằng 7. Nếu số chia bằng 133 thì thương bằng 1, trái với đề bài.

Vậy số chia bằng 19, thương bằng 7.

Câu 2. Giả sử số 108 viết dưới dạng tổng của k số tự nhiên liên tiếp là $n+1, n+2, \dots, n+k$ với $k, n \in \mathbb{N}, k \geq 2, n+1 \geq 1$. Ta có:

$$(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) = 108$$

$$\frac{(2n+k+1).k}{2} = 108$$

$$(2n+k+1).k = 216$$

Bài toán đưa đến việc tìm các ước của 216. Ta đưa ra hai nhận xét sau để giảm bớt số trường hợp phải xét:

$$1) \quad 2n+k+1 > k \geq 2$$

2) Hiệu $(2n+k+1) - k = 2n+1$ là số lẻ nên trong hai số $2n+k+1$ và k có một số chẵn, một số lẻ.

Do đó ta chỉ cần tìm ước lẻ của 216, đồng thời trong hai số $2n+k+1$ và k có tích bằng 216, chọn k là số nhỏ hơn.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $216 = 2^3.3^3$. Ước lẻ của 216 lớn hơn 1 là 3, 9, 27

Với $k = 3$ thì $2n+k+1 = 72$ ta được $n = 34$, do đó $108 = 35 + 36 + 37$

Với $k = 9$ thì $2n+k+1 = 24$ ta được $n = 7$, do đó $108 = 8 + 9 + \dots + 16$

Với $2n+k+1 = 27$ thì $k = 8$, ta được $n = 9$, do đó $108 = 10 + 11 + \dots + 17$

Câu 3. Để $3n+4 : n-1 \Leftrightarrow [1.(3n+4) - 3.(n-1)] : n-1 \Leftrightarrow 7 : n-1$ hay $n-1 \in U(7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n-1=1 \\ n-1=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=8 \end{cases}$$

Vậy với $n = 2$ hoặc $n = 8$ thì $3n+4 : n-1$

Câu 4. Để $a+1$ là bội của $a-1$ nên thì $\frac{a+1}{a-1}$ là số nguyên $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

$$\Rightarrow a - 1 \in U(2) = \{-1, 1, 2\}$$

$$\Rightarrow a = \{0, 2, 3\} \text{ (thỏa mãn } a \in \mathbb{N})$$

Câu 5. Ta có $4n - 5 = 2(2n - 1) - 3$

Để $4n - 5$ chia hết cho $2n - 1$ thì 3 chia hết cho $2n - 1$

$$\text{Với } 2n - 1 = 1 \Rightarrow n = 1$$

$$\text{Với } 2n - 1 = 3 \Rightarrow n = 2$$

Vậy $n = 1; 2$

Câu 6. Ta có $5 + n^2 - 2n = 5 + n(n - 2)$

$$\Rightarrow 5 + n^2 - 2n : (n - 2) \text{ khi } 5 : (n - 2)$$

$$\Rightarrow n - 2 \in U(5) = \{-5, -1, 1, 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-3, 1, 3, 7\}$$

Câu 7. $n^2 + 4 : n + 2 \Rightarrow n(n + 2) - 2(n + 2) + 8 : n + 2 \Rightarrow 8 : n + 2.$

Tìm được: $n = 0, 2; 6.$

Câu 8. Ta có $\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1) : n - 2$

$$\text{Ta có: } n + 1 = [(n - 2) + 3]$$

$$\text{Vậy } (n + 1) : n - 2 \text{ khi } 3 : n - 2 \Rightarrow n - 2 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

Câu 9. Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta có $\overline{abc} + 1001 + 10n + n = \overline{abc}.n$ Suy ra $\overline{abc} : n.$

Đặt $\overline{abc} = n.k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $nk + 111n = nkn.$

Chia hai vế cho $n \neq 0$ ta được $k + 111 = nk$ tức là $111 = k(n - 1)$. Như vậy k và $n - 1$ là ước của 111.

Bài toán có 4 đáp số:

k	$n - 1$	n	$\overline{abc}$
1	111	112	112
3	37	38	114
37	3	4	148
111	1	2	222

Câu 10.

Số 264 chia cho a dư 24 nên a là ước của $264 - 24 = 240$, $a > 24$

Số 363 chia cho a dư 43 nên a là ước của $363 - 43 = 320$, $a > 43$

Do a là ước chung của 240 và 320, đồng thời $a > 43$.

ƯCLN $(240, 320) = 80$ ước chung lớn hơn 43 là 80.

Vậy $a = 80$

Câu 11. Ta thấy : $398 - 38 = 360 : a ; a > 38$.

$$450 - 18 = 432 : a ; a > 18.$$

Vậy a là ước chung của 360 và 420, đồng thời $a > 38$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 ; 432 = 2^4 \cdot 3^3$.

$$\text{ƯCLN}(360, 432) = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Ước chung của 360 và 432 mà lớn hơn 38 là 72.

Vậy $a = 72$.

Câu 12. Số học sinh là ước chung của $100 - 4 = 96$ và $90 - 18 = 72$, đồng thời lớn hơn 18.

Tìm được: 24 học sinh.

Câu 13. Số phần thưởng lớn nhất là $\text{ƯCLN}(128, 48, 192)$.

Đáp số: Chia được nhiều nhất thành 16 phần thưởng, mỗi phần gồm 8 vở, 3 bút chì, 12 nhãn vở.

Câu 14. $a = 3m + 2 (m \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2a = 6m + 4$, chia cho 3 dư 1

$$a = 5n + 3 (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2a = 10n + 6 \text{ chia cho 5 dư 1}$$

$$a = 7p + 4 (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2a = 14p + 8, \text{ chia cho 7 dư 1}$$

Do đó: $2a - 1 \in BC(3, 5, 7)$. Để a nhỏ nhất thì $2a - 1$ là $BCNN(3, 5, 7)$

$$BCNN(3, 5, 7) = 1$$

$$2a - 1 = 105$$

$$2a = 106$$

$$a = 53$$

Câu 15. Chiều dài ngắn nhất của đường chạy tính bằng mét là $BCNN(330, 75) = 1650$ gồm $1650 : 75 = 22$ chặng.

Câu 16. Gọi số phải tìm là n .

$$n + 9 \in BC(17, 25). \text{ Từ đó } b = 425k - 9.$$

Đáp số: 416 và 841.

Câu 17. $n + 1 : 8 \Rightarrow n + 1 + 64 : 8 \Rightarrow n + 65 : 8 \quad (1).$

$$n + 3 : 31 \Rightarrow n + 3 + 62 : 31 \Rightarrow n + 65 : 31 \quad (2).$$

Từ (1) và (2): $n + 65 : BCNN(8, 31)$

$$\Rightarrow n + 65 : 248$$

$$\Rightarrow n = 248k - 65 \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Với $k = 3$ thì $n = 679$;

Với $k = 4$ thì $n = 927$;

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Với $k = 5$ thì $n = 1175$.

Để n là số lớn nhất có ba chữ số, ta chọn $n = 927$.

Câu 18. Gọi số sách là x thì $x + 10 \in \text{BC}(10, 12, 18)$ và $715 < x < 1000$.

Đáp số: $x = 890$.

Câu 19. Gọi số giấy mỗi lớp thu được là x (kg) thì $x - 26 : 11$; $x - 25 : 10$ do đó $x - 15 \in \text{BC}(11, 10)$ ngoài ra $200 < x < 300$. Ta tìm được $x = 235$, do đó lớp 6A có 20 học sinh, lớp 6B có 22 học sinh.

Câu 20. Đồng hồ thứ nhất lấy lại giờ chính xác khi nó chạy nhanh được 12 giờ, tức là 720 phút, như vậy nó lại chỉ đúng giờ sau: $720 : 2 = 360$ (ngày).

Đồng hồ thứ hai lấy lại giờ chính xác khi nó chạy chậm được 12 giờ, tức là 720 phút, như vậy nó lại chỉ đúng giờ sau: $720 : 3 = 240$ (ngày).

Số ngày ít nhất để cả hai đồng hồ cùng chỉ giờ đúng là $\text{BCNN}(360, 240) = 720$.

Đáp số: 720 ngày.

Câu 21. a) Gọi hai số phải tìm là a và b , ta có: $a - b = 84, a = 28a', b = 28b'$ trong đó $(a', b' = 1)$, suy ra $a' - b' = 3$.

Do $300 \leq b < a \leq 400$ nên $11 \leq b' < a' \leq 15$.

Trường hợp $a' = 15, b' = 12$ loại vì trái với $(a', b') = 1$.

Trường hợp $a' = 14, b' = 11$ cho $a = 392, b = 308$.

b) Có vô số đáp số: $a = 12a', b = 12b'$ với $a' = 2n + 5, b' = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$)

Câu 22.

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b , ta có:

Vì $\text{UCLN}(a; b) = 36$ nên $\begin{cases} a = 36a_1 \\ b = 36b_1 \end{cases}$ và $(a_1; b_1) = 1$, Mà:

$a + b = 432 \Rightarrow 36a_1 + 36b_1 = 432 \Rightarrow 36(a_1 + b_1) = 432$ Nên $a_1 + b_1 = 12$ Mà $(a_1; b_1) = 1$ Nên

ta có bảng sau:

a_1	1	5	7	11
a	36	180	252	396
b_1	11	7	5	1
b	396	252	180	36

Vậy các cặp số tự nhiên $(a; b)$ cần tìm là: $(36; 396)$, $(180; 252)$, $(252; 180)$, và $(396; 36)$

Câu 23. Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b , ta có:

Vì $\text{UCLN}(a; b) = 6$ nên $\begin{cases} a = 6a_1 \\ b = 6b_1 \end{cases}$ và $(a_1; b_1) = 1$, Mà:

$a.b = 864 \Rightarrow 6a_1.6b_1 = 864 \Rightarrow 36.a_1.b_1 = 864$ Nên $a_1.b_1 = 24$ Mà $(a_1; b_1) = 1$ Nên ta có bảng sau:

a_1	1	3	8	24
a	6	18	48	144
b_1	24	8	3	1
b	144	48	18	6

Câu 24. Gọi $d = \text{UCLN}(14n + 3; 21n + 4) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 14n+3:d \\ 21n+4:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(14n+3):d \\ 2(21n+4):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42n+9:d \\ 42n+8:d \end{cases} \Rightarrow (42n+9)-(42n+8):d \Rightarrow 1:d$$

Vậy hai số $14n + 3$ và $21n + 4$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 25. Gọi $d = \text{UCLN}(2n + 1; 6n + 5), \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 2n+1:d \\ 6n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1):d \\ 6n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3:d \\ 6n+5:d \end{cases} \Rightarrow (6n+5)-(6n+3):d \Rightarrow 2:d \Rightarrow d \in U(2) = \{1; 2\}$$

Do $2n + 1 : d$, mà $2n + 1$ lại là số lẻ nên $d=2$ loại, do đó $d=1$

Vậy hai số $14n + 3$ và $21n + 4$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 26. Gọi số phải tìm x , thì $[14, x] = 770$.

Ta có: $770 = x.k$ ($k \in \mathbb{N}$), $770 = 14.55$, $(k, 55) = 1$, do đó k là ước của 14.

Vậy k bằng: 1, 2, 7, 14, tương ứng x bằng 770, 385, 110, 55.

Câu 27. a) Gọi $d \in \text{ƯC}(b, b-a)$ thì $a-b:d, b:d$, do đó $a:d$. Ta có $(a, b) = 1$ nên $d = 1$.

b) Giả sử $a^2 + b^2$ và ab cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Câu 28. Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Câu 29. a) $4n - 5 : 13$

$$\Rightarrow 4n - 5 + 13 : 13$$

$$\Rightarrow 4n + 8 : 13$$

$$\Rightarrow 4(n+2) : 13$$

Do $(4, 13) = 1$ nên $n+2 : 13$

Đáp số: $n = 13k - 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

b) Đáp số: $n = 7k - 3 (k \in \mathbb{N}^*)$

c) $(25n + 3) : 53 \Rightarrow (25n + 3 - 53) : 53$.

Đáp số: $n = 53k + 2 (k \in \mathbb{N})$

Câu 30.a) n không chia hết cho 3.b) n là số chẵn.c) n là số lẻ.d) Giả sử $18n + 3$ và $21n + 7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$$6(21n + 7) - 7(18n + 3) : d \Rightarrow 21 : d$$
.

Vậy $d \in \{3; 7\}$.

Hiển nhiên $d \neq 3$ vì $21n + 7$ không chia hết cho 3. Như vậy $(18n + 3, 21n + 7) \neq 1$

$$\Leftrightarrow (18n + 3) : 7 \text{ (còn } 21n + 7 \text{ luôn chia hết cho 7)}$$

$$\Leftrightarrow (18n + 3 - 21) : 7 \Leftrightarrow 18(n - 1) : 7 \Leftrightarrow (n - 1) : 7$$
.

Vậy nếu $n \neq 7k + 1 (k \in \mathbb{N})$ thì $(18n + 3, 21n + 7) = 1$.

Câu 31. Bài toán không yêu cầu tìm mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $(n + 5, n + 72) = 1$. Do đó ngoài cách giải như ở bài trên, có thể giải như sau:Gọi $d \in \text{ƯC}(n + 5, n + 72)$ thì $57 : d$. Do $(n + 15) : d$, $57 : d$ nên nếu tồn tại n sao cho $n + 15 = 57k + 1$ thì $d = 1$. Nếu ta chọn $n = 57k - 14 (k = 1, 2, 3, \dots)$ thì $(n + 15, n + 72) = 1$, rõ ràng có vô số giá trị của n .**Câu 32.** a) $\text{ƯCLN}(a + b, a - b)$ bằng 2 nếu a và b cùng lẻ, bằng 1 nếu trong a và b có một số chẵn và một số lẻ.

b) 1 hoặc 29.

Câu 33.a) Gọi $a = da'$, $b = db'$, $(a', b') = 1$. Ta có:

$$[a, b] = \frac{ab}{d} = da'b'. \text{ Theo đề bài, ta có: } da'b' + d = 55 \text{ hay } d(a'b' + 1) = 55. \text{ Như vậy}$$

 $a'b' + 1$ là ước của 55, mặt khác $a'b' + 1 \geq 2$.

Ta có lần lượt

d	$a'b' + 1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
11	5	$4 = 2^2$	1	4	11	44
5	11	$10 = 2 \cdot 5$	1 2	10 5	5 10	50 25

1	55	$54 = 2.3^3$	1	54	1	54
			2	27	2	27

b) Giải tương tự câu a) ta được: $d(a'b'-1) = 5$. Từ đó:

d	$a'b'-1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
1	5	6	6	1	6	1
			3	2	3	2
5	1	2	2	1	10	5

c) Có 6 cặp số (1, 36), (4, 9), (5, 40), (7, 42), (14, 21), (35, 70).

Câu 34. a) 1; b) 1111

Câu 35.

Đặt $A = [n, n+1]$ và $B = [A, n+2]$. Áp dụng tính chất $[a, b, c] = [[a, b], c]$, ta có $B = [n, n+1, n+2]$.

Dễ thấy $(n, n+1) = 1$, suy ra $[n, n+1] = n(n+1)$. (do $[a, b].(a, b) = ab$)

Lại áp dụng tính chất $[a; b] = \frac{a.b}{(a; b)}$ thế thì $[n, n+1, n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1), n+2)}$

Gọi $d = (n(n+1), n+2)$. Do $(n+1, n+2) = 1$ nên $d = (n, n+2) = (n, 2)$

Xét hai trường hợp:

- Nếu n chẵn thì $d = 2$, suy ra $[n, n+1, n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

- Nếu n lẻ thì $d = 1$, suy ra $[n, n+1, n+2] = n(n+1)(n+2)$.

Câu 36. Gọi d là một ước chung của $3n+4$ và $5n+1$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

Ta có $3n+4:d$ và $5n+1:d$ nên $5(3n+4)-3(5n+1):d \Leftrightarrow 17:d \Rightarrow d \in \{1; 17\}$

Để $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung lớn hơn 1, ta phải có $3n+4:17$

hay $3(n-10):17$ mà $UCLN(3; 17)=1$ nên $(n-10):17$

$n-10=17k$ ($k \in \mathbb{N}$). Vì $n \in \mathbb{N}$, $n < 30 \Rightarrow -10 \leq n-10 < 20$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Với $k=0 \Rightarrow n=10$, khi đó $3.10+4:17$ và $5.10+1:17$ (thỏa mãn)

Với $k=1 \Rightarrow n=27$, khi đó $3.27+4:17$ và $5.27+1:17$ (thỏa mãn)

Vậy $n \in \{10; 27\}$.

Câu 37. Để $\frac{2n+1}{n+2}$ có giá trị là số nguyên thì $2n+1:n+2$ (1)

Vì $n+2:n+2$ nên $2(n+2):n+2$ (2)

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Từ (1) và (2) $[2(n+2) - (2n+1)] : n+2$

$$\Rightarrow 3 : n+2$$

Vì $n+2$ nguyên nên $n+2 \in \{-1; -3; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-3; -5; -1; 1\}$

Vậy với $\Rightarrow n \in \{-3; -5; -1; 1\}$ thì phân số $\frac{2n+1}{n+2}$ là số nguyên.

Câu 38. Giả sử sau a phút (kể từ lúc 6h) thì 3 xe lại cùng xuất phát tại bến lần thứ 2.

Lập luận để suy ra a là BCNN (75, 60, 50).

Tìm được BCNN(75, 60, 50) = 300 (phút) = 5 giờ.

Sau 5h thì 3 xe lại cùng xuất phát, lúc đó là 11h cùng ngày.

Câu 39. Giả sử $d \in UCLN(2n+1, 6n+5) \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ 6n+5 : d \end{cases} \Rightarrow 6n+5 - 3(2n+1) : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$

Vì n là số nguyên dương nên $2n+1 \not\equiv 2 \Rightarrow d \neq 2 \Rightarrow d = 1$

Vậy với mọi số nguyên dương n thì phân số $\frac{2n+1}{6n+5}$ luôn tối giản.

Câu 40. Cho phân số: $P = \frac{6n+5}{3n+2} (n \in \mathbb{N})$.

a) Chứng tỏ rằng phân số P là phân số tối giản.

Gọi $d = \text{ƯC}(6n+5, 3n+2)$ (với $d \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow 6n+5 : d \text{ và } 3n+2 : d$$

$$\Rightarrow (6n+5) - (3n+2) \cdot 2 : d \Leftrightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số P là phân số tối giản.

b) Với giá trị nào của n thì phân số P có giá trị lớn nhất?

$$\text{Ta có: } P = \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{2(3n+2)+1}{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$$

$$\text{Với } n \in \mathbb{N} \text{ thì } 3n+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3n+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{3n+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow n = 0$

Vậy $n = 0$ thì phân số P có giá trị lớn nhất bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 41. Gọi $UCLN(a; b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = d \cdot a_1 \\ b = d \cdot b_1 \end{cases} (a_1; b_1) = 1$

$$\text{Mà : } a + 2b = 48 \Rightarrow da_1 + 2db_1 = 48 \Rightarrow d(a_1 + 2b_1) = 48 \Rightarrow d \in U(48) \quad (1)$$

Ta lại có: $3 \cdot \text{BCNN}(a; b) + \text{ƯCLN}(a; b) = 114$

$$\Rightarrow d + 3 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot d = 114 \Rightarrow d(1 + 3a_1 \cdot b_1) = 114 \Rightarrow d \in U(114) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d \in UC(48; 114) = \{1; 2; 3; 6\}$

$$\text{Mà : } d(1 + 3a_1.b_1) = 114 = 3.38 \Rightarrow d : 3 \Rightarrow d = 3 \text{ hoặc } d = 6$$

$$\text{TH1 : } d = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 16 \\ 1 + 3a_1.b_1 = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 16 \\ 3a_1.b_1 = 37 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2 : } d = 6 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 8 \\ 1 + 3a_1.b_1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 8 \\ a_1.b_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 12 \\ b_1 = 3 \Rightarrow b = 18 \end{cases}$$

Vậy $a = 12$ và $b = 18$

Câu 42. Đặt $(11a + 2b, 18a + 5b) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 55a + 10b : d \\ 36a + 10b : d \end{cases} \Rightarrow 19a : d$$

$$\text{Và } \begin{cases} 198a + 36b : d \\ 198a + 55b : d \end{cases} \Rightarrow 19b : d$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 19a : d \\ 19b : d \end{cases} \Rightarrow 19 : d \text{ (vì } (a, b) = 1)$$

Vậy $d \in \{1; 9\}$

Câu 43. Ta có

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a, a + b) \\ &= (a + a + b, a + b) = (2a + b, a + b) \\ &= (2a + b, 3a + 2b) = (5a + 3b, 3a + 2b) \\ &= (5a + 3b, 2(5a + 3b) + 3a + 2b) \\ &= (5a + 3b, 13a + 8b) \end{aligned}$$

Câu 44. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $\begin{cases} (ab + bc + ca) : p \\ abc : p \end{cases}$

$$\text{Từ } abc : p \Rightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \\ c : p \end{cases}$$

$$\text{Giả sử } a : p \Rightarrow ab + ac : p \Rightarrow bc : p \Rightarrow \begin{cases} b : p \\ c : p \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với $(a, b) = 1$ hoặc $(a, c) = 1$.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Câu 45. Ta có $(a+b, a^2-ab+b^2) = (a+b, (a+b)^2 - (a^2-ab+b^2)) = (a+b, 3ab)$

Do $(a, b) = 1$ nên $(a+b, ab) = 1$

Vì vậy $(a+b, a^2-ab+b^2) = (a+b, 3ab) = (a+b, 3) \Rightarrow d \in \{1, 3\}$

* Xét $d = 1$

$$\text{Khi đó } \frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ a^2-ab+b^2=73 \end{cases} \Leftrightarrow 3ab=-9$$

Điều này không xảy ra vì $a, b \in \mathbb{N}$

* Xét $d = 3$

$$\text{Khi đó } \frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=24 \\ a^2-ab+b^2=219 \end{cases} \Leftrightarrow 3ab=-9 \Leftrightarrow \begin{cases} (a;b)=(17;7) \\ (a;b)=(7;17) \end{cases}$$

Thử lại ta được hai cặp số trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 46. Đặt $d = (2^{2^n} + 1, 2^{2^n} + 1) \Rightarrow d$ lẻ.

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \dots (2^{2^m} + 1)(2^{2^m} - 1) : d \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (2^{2^n} + 1) - (2^{2^n} - 1) = 2 : d \Rightarrow d = 1 \text{ (vì } d \text{ lẻ)}$$

$$\text{Vậy } (2^{2^n} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1$$

Câu 47. Đặt $d = (m, n)$. Khi đó tồn tại các số tự nhiên r, s sao cho $rn - sm = d$.

$$\text{Đặt } d_1 = (2^m - 1, 2^n - 1) \Rightarrow d_1 \text{ lẻ.}$$

Ta có:

$$2^n - 1 : 2^d - 1 \text{ (vì } n : d)$$

$$2^m - 1 : 2^d - 1 \text{ (vì } m : d)$$

Do đó $d_1 : 2^d - 1$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} 2^n - 1 : d_1 \Rightarrow 2^m - 1 : d_1 \\ 2^m - 1 : d_1 \Rightarrow 2^{sm} - 1 : d_1 \end{cases} \Rightarrow 2^m - 2^{sm} = 2^{sm} (2^{m-sm} - 1) = 2^{sm} (2^d - 1) : d_1$$

$$\text{Mà } (2, d_1) = 1 \Rightarrow 2^d - 1 : d_1$$

Từ đó suy ra $d_1 = 2^d - 1$

$$\text{Vậy } (2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$$

Câu 48. Giả sử $a \leq b$

$$\text{Do ƯCLN}(a, b) = 15 \Rightarrow \begin{cases} a = 15.m \\ b = 15.n \end{cases} \quad (m \leq n), (m, n) = 1,$$

$$\text{Khi đó BCNN}(a; b) = 15.m.n.$$

Do đó:

$$\text{ƯCLN}(a; b). \text{BCNN}(a; b) = (15.m.n).15 = (15m).(15n) = a.b \Rightarrow ab = 300.15 = 4500$$

$$\Rightarrow 15m.15n = 4500 \Rightarrow \begin{cases} mn = 20 \\ m \leq n \end{cases}$$

Ta có bảng:

m	n	a	b
1	20	15	300
4	5	60	75

Vậy các cặp số $(a; b)$ cần tìm là : $(15; 60)$, $(300; 75)$ và đảo ngược lại.

Câu 49. Giả sử $d = (a, a + 2) \Rightarrow d \mid a$ và $d \mid a + 2 \Rightarrow d \mid a + 2 - a \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 2$.

Với a lẻ thì $(a, a + 2) = 1$.

Với a chẵn thì $(a, a + 2) = 2$.

Câu 50. Giả sử $d \mid (1 + a + \dots + a^{m-1})$ và $d \mid (a - 1)$, suy ra :

$$d \mid (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \dots + (a - 1) + m \Rightarrow d \mid m.$$

Vậy $d \mid m$ và $d \mid a - 1$.

Ngược lại, nếu $d \mid a$ và $d \mid a - 1$ thì $d \mid (a^{m-1} + \dots + a + 1)$

$$\text{Vậy } (1 + a + \dots + a^{m-1}, a - 1) = (m, a - 1)$$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Câu 51. Giả sử $d \mid a, b \mid d, c \mid d$ thì d lẻ.

Ta có $a+b \mid d$ và $a+b \mid 2 \Rightarrow a+b \mid 2d$ (do $(2, d) = 1$) $\Rightarrow \frac{a+b}{2} \mid d$.

Tương tự: $\frac{b+c}{2} \mid d$ và $\frac{c+a}{2} \mid d$

Vậy d là ước của $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$.

Ngược lại, giả sử d là ước của $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ thì d là ước của $\frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2} = a$.

Tương tự $d \mid b$ và $d \mid c$.

Vậy: $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2} \right) = (a, b, c)$.

Câu 52. Giả sử $d = (a_1, a_2, \dots, a_{49})$, khi đó $a_1 + a_2 + \dots + a_{49} = 999 \mid d$, suy ra d là ước của $999 = 3^3 \cdot 37$

Vì $d \mid a_k$ ($k = 1, 2, \dots, 49$) nên $a_k \geq d, \forall k \Rightarrow 999 = a_1 + a_2 + \dots + a_{49} \geq 49d$
 $\Rightarrow d \leq \frac{99}{29} < 21$. Vậy d chỉ có thể nhận các giá trị 1, 3, 9.

Giá trị d lớn nhất bằng 9 khi $a_1 = a_2 = \dots = a_{48} = 9; a_{49} = 567$ (vì $9 \cdot 48 + 567 = 999$)

Câu 53. Giả sử $d = (11a + 2b, 18a + 5b)$, khi đó $d \mid 18a + 5b$ và $d \mid 11a + 2b$, suy ra
 $d \mid 11(18a + 5b) - 18(11a + 2b) = 19b \Rightarrow d \mid 19$ hoặc $d \mid b$.

- Nếu $d \mid b$ thì từ $d \mid 5(11a + 2b) - 3(18a + 5b) = a - 5b \Rightarrow d \mid a \Rightarrow d \mid (a, b) = 1 \Rightarrow d = 1$.

- Nếu $d \mid 19$ thì $d = 1$ hoặc $d = 19$.

Vậy $(11a + 2b, 18a + 5b)$ bằng 1 hoặc bằng 19.

Câu 54. Giả sử $d = (m + n, m^2 + n^2)$ khi đó $d \mid m + n$ và $d \mid m^2 + n^2$ suy ra

$$d \mid (m + n)^2 - (m^2 + n^2) = 2mn.$$

$d \mid m + n$ và $d \mid 2mn$ suy ra $d \mid 2m(m + n) - 2mn = 2m^2$ và $d \mid 2n(m + n) - 2mn = 2n^2$.

Do đó $d \mid (2m^2, 2n^2) = 2(m^2, n^2) = 2 \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 2$.

Nếu m, n cùng lẻ thì $d = 2$.

Nếu m, n khác tính chẵn lẻ thì $d = 1$.

Câu 55. a) Giả sử $d = (21n + 4, 14n + 3)$, khi đó $d \mid 21n + 4$ và $d \mid 14n + 3$ suy ra $d \mid 2(21n + 4)$ và $d \mid 3(14n + 3) \Rightarrow d \mid 3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1 \Rightarrow d = 1$.

Vậy $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ là phân số tối giản.

b) Giả sử $d = (2n + 1, 2n^2 + 2n)$ suy ra $d \mid 2n^2 + 2n - n(2n + 1) = n$.

Từ $d \mid 2n + 1$ và $d \mid n$ suy ra $d \mid 2n + 1 - 2n = 1 \Rightarrow d = 1$.

Vậy $\frac{2n + 1}{2n^2 + 2n}$ là phân số tối giản.

Câu 56. a) Ta có: $\frac{18n + 3}{21n + 7} = \frac{3(6n + 1)}{7(3n + 1)}$. Mà $(3, 7) = (3, 3n + 1) = (6n + 1, 3n + 1) = 1$ nên để là

phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ tối giản ta phải có $(6n + 1, 7) = 1$.

Mặt khác, $6n + 1 = 7n - (n - 1)$, do đó :

$$(6n + 1, 7) = 1 \Leftrightarrow (n - 1, 7) = 1 \Leftrightarrow n \neq 7k + 1 (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy, với n chia cho 7 không dư 1 thì $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ là phân số tối giản.

b) Ta có $\frac{2n + 3}{n + 7} = 2 - \frac{11}{n + 7}$ tối giản $\Leftrightarrow (n + 7, 11) = 1 \Leftrightarrow n \neq 11k - 7 (k \in \mathbb{Z})$,

Câu 57. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \leq b$.

Vì $(a, b) = 16$ nên $a = 16a_1, b = 16b_1$ với $(a_1, b_1) = 1$.

Từ $a + b = 128$ suy ra $16(a_1 + b_1) = 128 \Leftrightarrow a_1 + b_1 = 8$. Với điều kiện $a_1 \leq b_1$ và $(a_1, b_1) = 1$ ta có $a_1 = 1, b_1 = 8$ hoặc $a_1 = 3, b_1 = 5$. Từ đó ta có $a = 16, b = 112$ hoặc $a = 48, b = 80$.

Câu 58. Ta có $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b); 33 = 11.3$. Vì $(a + b)$ không chia hết cho 3 nên $(\overline{ab} + \overline{ba}, 33) = 11$

Câu 59. Số có 3 chữ số tận cùng là 136 chia hết cho 8 nên có ít nhất 4 ước số dương là 1, 2, 4, 8.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Câu 60. $d \mid a, d \mid b$ thì $d \mid ma + nb, d \mid ka + lb$;

$$d \mid ma + nb, d \mid ka + lb \text{ thì } d \mid k(ma + nb) - m(ka + lb) = \pm b \Rightarrow d \mid b.$$

Tương tự : $d \mid a$.

Câu 61. Ta có $123456798 - 123456789 = 9$ nên ƯCLN phải tìm chỉ có thể là 1, 3 hoặc 9, mà tất cả các số đã cho đều chia hết cho 9 nên ƯCLN phải tìm là 9.

Câu 62.

$$d = (2a - b, a^2 + ab) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a(2a + b) - (a^2 + ab) = a^2 \\ d \mid b(2a + b) - 2(a^2 + ab) = b^2 - 2a \end{cases} \Rightarrow d \mid (a^2, b^2) = 1 \Rightarrow d = 1$$

Câu 63.

$$a)d = (12n + 1, 30n + 2) \Rightarrow d \mid 5(12n + 1) - 2(30n + 2) = 1 \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

$$b)d = (15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13) \Rightarrow d \mid 2(15n^2 + 8n + 6) - (30n^2 + 21n + 13) = 1 \Rightarrow d \mid 5n + 1$$

$$\Rightarrow d \mid 3n(5n + 1) - (15n^2 + 8n + 6) \Rightarrow d \mid 5n + 6 \Rightarrow d \mid (5n + 6) - (5n + 1) \Rightarrow d \mid 5$$

$$\begin{cases} d \mid 5n + 6 \\ d \mid 5 \end{cases} \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1.$$

Vậy phân số $\frac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}$ là phân số tối giản.

Câu 64. $\frac{n+13}{n-2} = 1 + \frac{15}{n-2}$ tối giản $(15, n-2) = 1$.

Do đó $n - 2$ không chia hết cho 3 và 5.

Do đó để phân số $\frac{n+13}{n-2}$ tối giản thì $n \neq 3k + 2, n \neq 5l + 2$

Câu 65. Chứng minh n lẻ là không chia hết cho 3.

Câu 66. Các số đã cho có dạng $\frac{k}{k+(n+2)} (k = 7, 8, \dots, 31)$. Mà $\frac{k+(n+2)}{k} = 1 + \frac{n+2}{k}$ tối

giản $\Leftrightarrow (n+2, k) = 1 \Leftrightarrow n+2$ nguyên tố cùng nhau với $7, 8, \dots, 31$ và $n+2$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow n+2 = 37 \Leftrightarrow n = 35.$$

Câu 67. a) $a = 6, b = 60$ hoặc $a = 12, b = 30 (a \leq b)$;

b) Các cặp số (a, b) với $a \leq b$ cần tìm là $(1; 54), (2; 27), (5; 50), (10; 25)$ và $(11; 44)$

Câu 68. $n+1: [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] = 5.7.8.9 = 2520$. Vậy $n = 2519$.

Câu 69. Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số: $1; a$

$; b(ab+1)(2ab+1); b; a(ab+1)(2ab+1); ab+1; ab(2ab+1); 2ab+1$;

$ab(ab+1); N; ab; (ab+1)(2ab+1); b(ab+1); a(2ab+1); a(ab+1); b(2ab+1)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì $a; b; ab+1; 2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a, b > 1 \Rightarrow ab+1 > 2$

Nếu $a; b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a = 2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1 = 4b+1$ và $ab+1 = 2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow b = 3$.

Vậy $a = 2; b = 3$.

Câu 70. Đặt $A = p^2 - pq + 2q^2$ và $B = 2p^2 + pq + q^2$. Xét các trường hợp:

+) $p = q = 2$, không thoả mãn.

+) $p = 2, q \geq 3$, khi đó

$$\begin{aligned}(A, B) &= (4 - 2q + 2q^2, 8 + 2q + q^2) \\&= (2 - q + q^2, 8 + 2p + q^2) \quad (\text{vì } 8 + 2p + q^2 : 2) \\&= (6 + 3q, 8 + 2q + q^2) \\&= (2 + q, 8 + (2 + q)q), \quad (\text{vì } 8 + 2p + q^2 : 3) \\&= d.\end{aligned}$$

Suy ra d lẻ và $d \mid 8$. Do đó $d = 1$.

+) $q = 2, p \geq 3$, khi đó

$$\begin{aligned}(A, B) &= (p^2 - 2p + 8, 2p^2 + 2p + 4) \\&= (p^2 - 2p + 8, p^2 + p + 2), \quad (\text{vì } p^2 - 2p + 8 : 2) \\&= (3p - 6, p^2 + p + 2) \\&= (p - 2, p^2 + p + 2), \quad (\text{vì } p^2 + p + 2 : 3) \\&= (p - 2, p^2 + 4) \\&= (p - 2, (p - 2)^2 + 4p) \\&= d.\end{aligned}$$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Suy ra $d \mid 4p$, d lẻ và $d < p$. Do đó $d = 1$.

+) $p, q \geq 3$. Vì p, q đều là số lẻ nên $p + q$ và $p - q$ là các số chẵn. Suy ra

$A = p(p - q) + 2q^2 : 2$ và $B = 2p^2 + q(q + p) : 2$. Vậy A và B không nguyên tố cùng nhau.

Tóm lại: $p = 2, q \geq 3$, q nguyên tố hoặc $q = 2, p \geq 3$, p nguyên tố.

Câu 71. Gọi $(a + b, a^2 + b^2) = d \Rightarrow a + b : d$ và $a^2 + b^2 : d$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 : d \Rightarrow 2ab : d \text{ vì } (a, b) = 1$$

$$\Rightarrow (ab, a + b) = 1 \Rightarrow (2ab, a + b) = (2, a + b)$$

$$\Rightarrow d \text{ là ước số của } (2ab, a + b) \Rightarrow d \text{ là ước số của } (2, a + b)$$

$$\Rightarrow d \text{ là ước số của } 2 \Rightarrow d = 1 \text{ hoặc } d = 2.$$

$$\text{Nếu } d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Nếu } d = 2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 14 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Tóm lại } (a, b) = (3, 4), (4, 3)$$

Câu 72. Đặt $A = m + n$ và $B = m^2 + n^2$. Gọi d là ước chung lớn nhất của A và B với $d \geq 1$.

Khi đó ta có $A : d; B : d$ hay ta được $m + n : d; m^2 + n^2 : d$.

Ta lại có $A^2 - B = (m + n)^2 - (m^2 + n^2) = 2mn$. Mà $(A^2 - B) : d$ nên suy ra $2mn : d$.

Lại có $m + n : d$ nên $2n(m + n) : d \Rightarrow 2mn + 2n^2 : d$

Kết hợp với $2mn : d$ ta được $2n^2 : d$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $2m^2 : d$.

Theo bài ra thì m và n nguyên tố cùng nhau nên m và n không cùng tính chẵn. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Trong hai số m và n có một số chẵn và một số lẻ, khi đó $m + n$ là số lẻ nên từ $m + n$ chia hết cho d ta suy ra được d là số lẻ. Từ đó ta được m^2 và n^2 cùng chia hết cho d . Mà ta lại có m và n nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d = 1$.
- Trường hợp 2: Cả hai số m và n đều là số lẻ, khi đó từ $m + n$ là số chẵn nên từ $m + n$ chia hết cho d với d lớn nhất ta suy ra được d là số chẵn.

Đặt $d = 2d'$, khi đó từ $2m^2 : d$ và $2n^2 : d$ ta được $m^2 : d'$ và $n^2 : d'$.

Do m và n nguyên tố cùng nhau nên suy ra $d' = 1$, do đó $d = 2$.

Vậy ta có hai kết quả như sau:

+ Nếu trong hai số m và n có một số chẵn và một số lẻ thì $(m+n, m^2+n^2) = 1$

+ Nếu cả hai số m và n cùng lẻ thì $(m+n, m^2+n^2) = 2$.

Câu 73. Giả sử các số nguyên dương a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó ta có $(4a+1, 4b-1) = 1$ và $16ab+1 : (a+b)$.

Ta có $(4a+1)(4b+1) = 16ab+1+4(a+b) : (a+b)$.

Lại có $4a+1+4b-1 = 4(a+b) : (a+b)$. Mà $(4a+1, 4b-1) = 1$.

Nếu cả hai số $4a+1$ và $a+b$ cùng chia hết cho một số nguyên tố p nào đó, thì từ $4a+1+4b-1$ chia hết cho $(a+b)$ ta suy ra được $4b-1 : p$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $(4a+1, 4b-1) = 1$. Từ đó suy ra $(4a+1, a+b) = 1$.

Ta có $(4a+1)(4b+1) : (a+b)$ và $(4a+1, a+b) = 1$ nên suy ra $4b+1 : (a+b)$.

Ngược lại giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $4b+1 : (a+b)$

Khi đó từ $(4a+1)(4b+1) : (a+b)$ ta suy được $16ab : (a+b)$.

Nếu hai số $4a+1$ và $4b-1$ cùng chia hết cho p thì p là số nguyên tố lẻ.

Ta lại có $4a+1+4b-1 = 4(a+b) : (a+b)$, suy ra $4b+1 : p$.

Do đó ta được $4b+1 - (4b-1) = 2 : p$, điều này mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta được $(4a+1, 4b-1) = 1$.

Như vậy hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $(4a+1, 4b-1) = 1$ và $16ab : (a+b)$ tương đương với hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $4b+1 : (a+b)$.

Chú ý là $4b+1$ là số lẻ và $4b+1 < 4(a+b)$ nên từ $4b+1 : (a+b)$ ta suy ra được

$$\begin{cases} 4b+1 = a+b \\ 4b+1 = 3(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b+1 \\ b = 3a-1 \end{cases}$$

Như vậy cặp số nguyên dương $(a; b)$ là $(c; 3c-1), (3c+1; c)$ với $c \in \mathbb{N}^*$.

Câu 74. Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số:

$1; a; b(ab+1)(2ab+1); b; a(ab+1)(2ab+1); ab+1; ab(2ab+1); 2ab+1$;

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ ƯỚC VÀ BỘI

$ab(ab+1); N; ab; (ab+1)(2ab+1); b(ab+1); a(2ab+1); a(ab+1); b(2ab+1)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì $a; b; ab+1; 2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a, b > 1 \Rightarrow ab+1 > 2$

Nếu $a; b$ cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a = 2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1 = 4b+1$ và $ab+1 = 2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow b = 3$.

Vậy $a = 2; b = 3$.

Câu 75. Gọi d là ƯCLN(m, n) suy ra m^2, n^2, mn cùng chia hết cho d^2 .

Do $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m} = \frac{m^2 + n^2 + m + n}{mn}$ là số nguyên nên $m^2 + n^2 + m + n$ cũng chia hết cho d^2 .

Suy ra $m + n$ chia hết cho $d^2 \Rightarrow m + n \geq d^2 \Rightarrow \sqrt{m+n} \geq d$.

Câu 76. a) Dễ thấy bộ số $(a, b, c) = (1, 3, 7)$ thỏa mãn đề bài

b) Đặt $S = a + b + c + ab + bc + ac$.

Từ giả thiết suy ra S chia hết cho a, b, c .

Vì a, b, c đôi một khác nhau, do đó a, b, c đồng thời là các số nguyên tố thì $S : abc$ hay $S = kabc (k \in \mathbb{N})$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b < c$.

Nếu $a = 2$ thì b, c đều lẻ $\Rightarrow b + c + bc$ lẻ nên không chia hết cho 2.

Do đó $a \geq 3$ nên $b \geq 5, c \geq 7$. Từ $S = kabc (k \in \mathbb{N})$ suy ra

$$0 < k = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$$

Vậy a, b, c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Câu 77. Thay $x = 2n+1 \Rightarrow A = 4n(n+3) = 4n(n+1+2) = 4n(n+1) + 8n$

Câu 78. Ta cần tìm $\overline{ab}$; cho biết $\overline{ab} : ab$ với $1 \leq a, b \leq 9$.

$$\Leftrightarrow \overline{ab} = nab \text{ với } n \text{ là số tự nhiên khác } 0.$$

$$\Leftrightarrow 10a + b = nab \Leftrightarrow 10a = b(na - 1) \Rightarrow 10a : (na - 1)$$

Nếu $a = 1 \Rightarrow b(n-1) = 10 \Rightarrow$ có thể lập bảng để chọn:

b	1	2	5
$n-1$	10	5	2
n	11	6	3

Nếu $a \neq 1 \Rightarrow (an - 1) = 1 \Rightarrow an - 1$ là ước số của 10.

$$\Rightarrow an - 1 \in \{1; 2; 5\} \Rightarrow an \in \{2; 3; 6\}$$

$$\Rightarrow (an - 1, n) = (2; 1), (3; 1), (2; 3), (3; 2)$$

Thay (a, n) vào ta tính được b.

$$\text{Ta có: } (a; b) = (2; 4), (3; 6)$$

$$\text{Đáp số: } \overline{ab} \in \{11; 12; 15; 24; 36\}$$