

CÁC BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC ĐẶC SẮC

I. HỆ THỐNG KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ TAM GIÁC

1. Tổng ba góc trong một tam giác

- + Tổng ba góc của một tam giác bằng 180°
- + Trong một tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau.
- + Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.
- + Định lí: Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.
- + Nhận xét: Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

2. Hai tam giác bằng nhau

a. Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

b. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

- Trường hợp 1: Tam giác ABC và $A'B'C'$ có $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $CA = C'A'$ thì tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau

- Trường hợp 2: Tam giác ABC và $A'B'C'$ có $AB = A'B'$; $\widehat{A} = \widehat{A'}$; $CA = C'A'$ thì ABC và $A'B'C'$ bằng nhau

- Trường hợp 2: Tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\widehat{B} = \widehat{B'}$; $BC = B'C'$; $\widehat{C} = \widehat{C'}$ thì ABC và $A'B'C'$ bằng nhau

c. Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

- Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

- Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (g.c.g)

- Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

- Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

3. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác

a. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

- Trong một tam giác góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Trong một tam giác cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

b. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

- Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

- Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu

hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

c. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tam giác

- Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.
- Hệ quả: Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.
- Nhận xét: Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

4. Các đường đồng quy trong tam giác

a. Ba đường trung tuyến của tam giác

- Định nghĩa: Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC. Đôi khi đường thẳng AM cũng được gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC.

- Tính chất: Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm đó gọi là trọng tâm. Trọng tâm cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

b. Ba đường phân giác của tam giác

- Định nghĩa: Trong tam giác ABC tia p.g của góc A cắt cạnh BC tại điểm M, khi đó đoạn thẳng AM đglà đường phân giác của tam giác ABC(đôi khi ta cũng gọi đường thẳng AM là đường p.g của tam giác)

- Tính chất: Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác và chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

c. Ba đường trung trực của tam giác

- Định nghĩa: Trong một tam giác đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.

- Tính chất: Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó và chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

d. Ba đường cao của tam giác

- Định nghĩa Trong một tam giác đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.

- Tính chất: Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này gọi là trực tâm của tam giác.

5. Tam giác đồng dạng

a. Định lí Talets trong tam giác

- Tỉ số của hai đoạn thẳng
 - + Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.
 - + Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.

- Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD được gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

- Định lí Talét trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

- Định lí Talets đảo: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

- Hệ quả: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

- Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng song song với một cạnh và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

b. Tính chất đường phân giác trong tam giác: Trong tam giác đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

Chú ý: Định lí vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác.

c. Tam giác đồng dạng

- Định nghĩa: Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu

$$\widehat{A'} = \widehat{A}, \widehat{B'} = \widehat{B}, \widehat{C'} = \widehat{C} \text{ và } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

- Kí hiệu: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

- Định lí: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với hai cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

- Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

+ Trường hợp 1: Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

+ Trường hợp 2: Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

+ Trường hợp 3: Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

- Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

+ Trường hợp 1: Nếu tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của

tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

+ Trường hợp 2: Nếu tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

+ Trường hợp 3: Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

- Tính chất của hai tam giác đồng dạng

Nếu hai tam giác đồng dạng với nhau thì:

- + Tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.
- + Tỉ số hai đường phân giác tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.
- + Tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.
- + Tỉ số các chu vi bằng tỉ số đồng dạng.
- + Tỉ số các diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

6. Hệ thức lượng trong tam giác

a. Hệ thức liên hệ giữa cạnh, đường cao và hình chiếu trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH.

- + $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- + $AB^2 = BC.BH$ và $AC^2 = BC.CH$
- + $AH^2 = BH.CH$
- + $AB.AC = BC.AH$
- + $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

b. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Định nghĩa: Cho tam giác ABC vuông tại A, ta định nghĩa tỉ số lượng giác của góc B như sau

$$\sin B = \frac{AC}{BC}; \cos B = \frac{AB}{BC}; \tan B = \frac{AC}{AB}; \cot B = \frac{AB}{AC}$$

Chú ý:

- Cho góc nhọn α . Ta có $0 < \sin \alpha < 1$; $0 < \cos \alpha < 1$.

- Nếu $\sin \alpha = \sin \beta$ hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$ hoặc $\tan \alpha = \tan \beta$ hoặc $\cot \alpha = \cot \beta$ thì $\alpha = \beta$

với $\alpha; \beta$ là hai góc nhọn.

c. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Cho hai góc nhọn $\alpha; \beta$ có $\alpha + \beta = 90^\circ$, khi đó ta có

$$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta, \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta$$

d. Một số hệ thức lượng giác

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

e. Liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Ta có

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C;$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$$

II. MỘT SỐ KIẾN THỨC NÂNG CAO THƯỜNG ÁP DỤNG

1. Các công thức về đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác trong tam giác

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và $p = \frac{a+b+c}{2}$. Gọi $h_a; h_b; h_c$,

$m_a; m_b; m_c$ và $l_a; l_b; l_c$ lần lượt là các đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác tương ứng với cạnh a, b, c .

- Công thức về đường cao

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \quad h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b} \quad h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$$

- Công thức về đường trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \quad m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

Từ các hệ thức trên học sinh tiếp tục suy ra được hệ thức sau:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

- Công thức về đường phân giác

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2p(p-a)}{(b+c) \cos \frac{A}{2}} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$$

$$l_b = \frac{2ac \cdot \cos \frac{B}{2}}{a+c} = \frac{2p(p-b)}{(a+c) \cos \frac{B}{2}} = \frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$$

$$l_c = \frac{2ab \cdot \cos \frac{C}{2}}{a+b} = \frac{2p(p-c)}{(a+b) \cos \frac{C}{2}} = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$$

2. Các công thức về lượng giác trong tam giác

- **Định lý cosin:** Cho tam giác ABC nhọn bất kì, ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$$

Hệ quả: Với tam giác ABC nhọn bất kì thì:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \quad \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \quad \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$$

- **Định lý sin:** Trong tam giác ABC nhọn thì $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, với R là bán kính

đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3. Các định lý hình học nổi tiếng trong tam giác

- **Định lý Menelaus** (Nhà toán học cổ Hy Lạp, thế kỷ I sau công nguyên)

Cho tam giác ABC. Các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho trong chúng hoặc không có điểm nào, hoặc có đúng 2 điểm thuộc các cạnh của tam giác ABC. Khi đó A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$

- **Định lý Ceva** (Nhà toán học Ý, 1647-1734)

Cho tam giác ABC. Các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

II. CÁC THÍ DỤ MINH HỌA

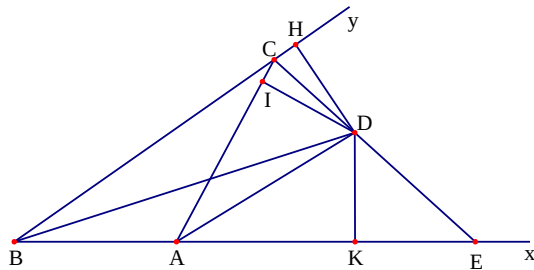
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $\widehat{BAC} = 130^\circ$. Gọi Ax là tia đối của tia AB, đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ cắt phân giác $\widehat{CAx}$ tại D. Đường thẳng BA cắt đường thẳng CD tại E. So sánh độ dài AC và CE.

Lời giải

Gọi Cy là tia đối của tia CB. Dựng DH, DI, DK lần lượt vuông góc với BC, AC, AB. Từ giả thiết ta suy ra $DI = DK$; $DK = DH$ nên suy ra $DI = DH$ (CI nằm trên tia CA vì nếu điểm I thuộc tia đối của CA thì $DI > DH$). Vậy CD là tia phân giác của $\widehat{ICy}$ và $\widehat{ICy}$ là góc ngoài của tam giác ABC.

$$\text{Suy ra } \widehat{ACD} = \widehat{DCy} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = \frac{30^\circ + 130^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Mặt khác ta có $\widehat{CAE} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Do đó $\widehat{CEA} = 50^\circ$ nên $\triangle CAE$ cân tại C. Vậy ta được $CA = CE$.



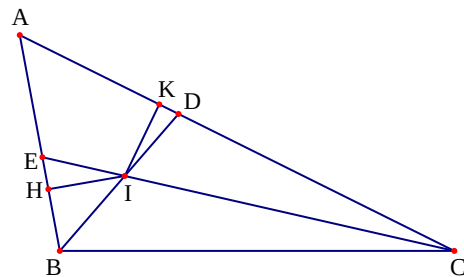
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I và $ID = IE$. Chứng minh rằng $\widehat{B} = \widehat{C}$ hay $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$

Lời giải

Qua I kẻ $IH \perp AB$ và $KI \perp AC$. Do I là giao điểm của hai đường phân giác nên $IH = IK$.

Lại có $ID = IE$ nên $\triangle IHE = \triangle IKD$

Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{BEC}$. Ta xét các trường hợp sau:



+ Trường hợp $K \in AD$; $H \in BE$ thì ta có

$$\widehat{BEC} = \widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{C} \quad (\widehat{BEC} \text{ là góc ngoài của } \triangle AEC)$$

$$\text{Và } \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{B} + \widehat{C} \quad (\widehat{ADB} \text{ là góc ngoài của } \triangle BCD) \quad \text{Từ đó ta được } \widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{B}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{B} \text{ nên } 2\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}, \text{ do đó ta được } \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$$

+ Trường hợp $K \in DC$; $H \in AE$, tương tự như trên ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$

+ Trường hợp $K \in DC$; $H \in BE$, tương tự như trên ta được $\widehat{B} = \widehat{C}$

+ Trường hợp $K \in DA$; $H \in AE$, tương tự như ta được $\widehat{B} = \widehat{C}$

Vậy cả bốn trường hợp trên ta luôn có $\widehat{B} = \widehat{C}$ hoặc $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Trên đoạn AD lấy điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CBF}$. Chứng minh rằng $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

Lời giải

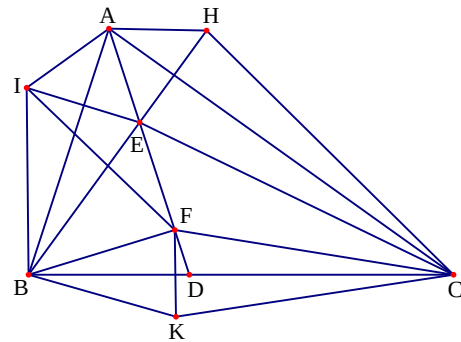
Vẽ K, H, I sao cho BC, AC, AB là các đường trung trực của KF, EH, EI. Khi đó ta có $\widehat{HCE} = 2\widehat{ACE}$ và $\widehat{KCF} = 2\widehat{BCF}$. Ta phải chứng minh $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$

Ta có $AI = AE = AH$ (vì AB là đường trung trực của EI) nên tam giác AHI cân tại A, mà AE là phân giác nên AD là đường trung trực của IH, do đó $IF = FH$ (1).

Ta lại có $BK = BF$; $\widehat{IBE} = \widehat{FBK}$; $BI = BE$ nên

$$\triangle BEK = \triangle BIF, \text{ suy ra } EK = FI \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $EK = FH$. Xét tam giác HCF và ECK ta có $HC = EC$. Kết hợp với $CF = CK$ và $EK = FH$ nên ta được $\triangle HCF = \triangle ECK$ suy ra $\widehat{HCF} = \widehat{ECK}$. Do đó ta được $\widehat{HCE} + \widehat{ECF} = \widehat{KCF} + \widehat{FCE}$ nên $\widehat{HCE} = \widehat{KCF}$. Suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Kẻ $NH \perp CM$ tại H. Kẻ $HE \perp AB$ tại E. Chứng minh rằng tam giác ABH cân và HM là phân giác của góc BHE.

Lời giải

Từ A kẻ $AK \perp CM$ tại K và $AQ \perp HN$ tại Q.

Hai tam giác vuông có $MA = NC = \frac{1}{2}AB$ và

$\widehat{ACH} = \widehat{MAK}$ nên $\triangle MAK = \triangle NCH$. Suy ra $AK = HC$.

Ta lại có $\triangle ABK = \triangle ACH$ nên $\widehat{BKA} = \widehat{AHC}$. Hai tam giác vuông AQN và CHN có $NA = NC$ và

$\widehat{ANQ} = \widehat{HNC}$ nên $\triangle ANQ = \triangle CHN$. Suy ra

$AQ = CH$. Từ đó suy ra $AK = AQ$ nên HA là tia phân giác của góc KHQ.

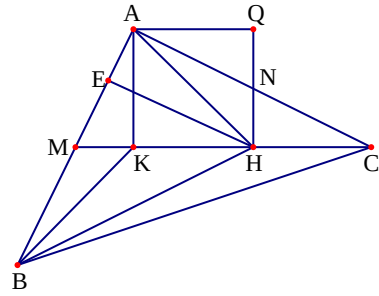
Do đó ta được $\widehat{AHQ} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ \Rightarrow \widehat{AKM} = 135^\circ$.

Từ $\widehat{AKB} + \widehat{BKH} + \widehat{AKH} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BKH} = 135^\circ$. Tam giác vuông AKH có $\widehat{KHA} = 45^\circ$ nên

vuông cân tại K suy ra $KA = KH$. Xét hai tam giác BKA và BKH có BK chung; $\widehat{BKA} = \widehat{BKH}$ và $KA = KH$

Do đó $\triangle BKA = \triangle BKH$ suy ra $\widehat{KHB} = \widehat{MAK}$ và $AB = BH$ hay tam giác BAH cân tại B

Ta có $\widehat{KHB} = \widehat{MAK}$ và $KE \parallel CA$ nên $\widehat{ACH} = \widehat{EHM}$ mà $\widehat{ACH} = \widehat{MAK}$ suy ra $\widehat{EHM} = \widehat{MHB}$ nên HM là tia phân giác của EHB.



Ví dụ 5. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 30^\circ$. Lấy điểm D trên cạnh AC. Điểm E trên cạnh AB sao cho $\widehat{ABD} = 20^\circ$; $\widehat{ACE} = 10^\circ$. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Tính các góc của tam giác KDE.

Lời giải

Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 30^\circ$ nên

$$\widehat{A} = 90^\circ.$$

Do đó

$$\widehat{CEA} = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ; \widehat{BDA} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

Ta có

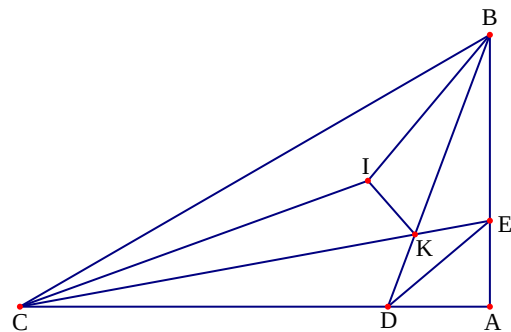
$$\widehat{CKB} = \widehat{DKE} = 180^\circ - (\widehat{KCB} + \widehat{CBK}) = 120^\circ$$

Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác của các góc $\widehat{BCK}$ và $\widehat{KBC}$ nên

$$\widehat{CKI} = \widehat{BKI} = 60^\circ.$$

Do đó $\widehat{KEA} = \widehat{BKE} + \widehat{KBE}$ nên $\widehat{BKE} = \widehat{KEA} - \widehat{KBE} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$

Suy ra $\triangle IKB = \triangle EKB$ suy ra $KI = KE$.



Tương tự ta chứng minh được $\triangle IKC = \triangle DKC$ suy ra $KI = KD$.

Do đó $KD = KE$ nên tam giác KDE cân tại K suy ra $\widehat{KDE} = \widehat{KED} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$, các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh bên AB, AC sao cho $\widehat{BCM} = 50^\circ$ và $\widehat{CBN} = 60^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{MNA}$

Lời giải

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AN = AD$, khi đó $DN \parallel BC$ và $\widehat{AND} = 80^\circ$. Ta tính $\widehat{DNM}$.

Gọi I là giao điểm của BN và CD thì các tam giác IBC và IDN là các tam giác đều vì $\widehat{IBC} = 60^\circ$ và tam giác ABC cân tại A . Ta sẽ chứng minh MN là tia phân giác của $\widehat{DNB}$.

Thật vậy, trong tam giác BDC có

$$\widehat{MDI} = \widehat{BDC} = 180^\circ - (\widehat{DBC} + \widehat{DCB}) = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ \quad (1)$$

Trong tam giác BMC có $\widehat{MBC} = 80^\circ$; $\widehat{MCB} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BMC} = 50^\circ$ nên tam giác BMC cân tại B .

Do đó $BM = BC$ mà tam giác BIC đều nên $IB = BC$ suy ra $MB = BI$ hay tam giác BMI cân tại B .

Mà ta lại có $\widehat{MBI} = 20^\circ$ nên $\widehat{MIB} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$.

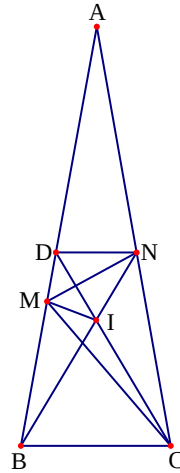
$$\text{Do đó } \widehat{MID} = 180^\circ - (\widehat{MIB} + \widehat{DIN}) = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MDI} = \widehat{DIM}$ nên tam giác MDI cân tại M . Suy ra $MD = MI$.

Ta lại có $NI = ND$ nên MN là đường trung trực của DI , suy ra MN là phân giác của $\widehat{DNB}$

$$\text{Do đó ta được } \widehat{DNM} = \frac{\widehat{DNB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

$$\text{Vậy ta được } \widehat{MNA} = \widehat{MND} + \widehat{DNA} = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$$



Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên AC lấy điểm D sao cho

$\widehat{ABD} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}$. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{ACE} = \frac{1}{3} \widehat{ACB}$. Gọi F là giao điểm của BD

và CE . Gọi I, K lần lượt là chân đường vuông góc vẽ từ F xuống BC và AC . Lấy hai điểm G và H trên các tia FI và FK sao cho I là trung điểm của FG và K là trung điểm của FH .

Chứng minh rằng đường thẳng HG đi qua điểm D .

Lời giải

Tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên được $\widehat{C} = 30^\circ$.

Mà theo giả thiết $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$

Do đó

$$\widehat{ABD} = 20^\circ; \widehat{DBC} = 40^\circ; \widehat{ACE} = 10^\circ; \widehat{BCE} = 20^\circ$$

Do $\widehat{DFC}$ là góc ngoài của tam giác BCF nên ta có

$$\widehat{DFC} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$$

Lại có $CK \perp FH$, $KF = KH$ nên CK là đường trung trực của FH.

Suy ra $CH = CF$ nên tam giác CHF cân tại C, suy ra CK là phân giác của $\widehat{CFH}$

Do đó ta được $\widehat{CDH} = \widehat{CDF} = 10^\circ$.

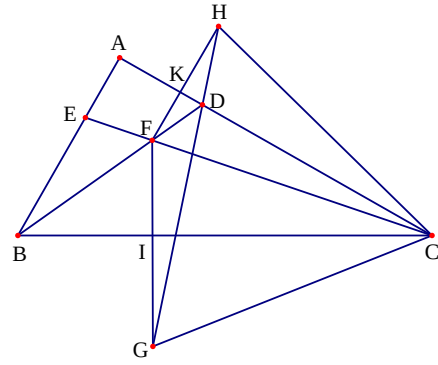
Xét hai tam giác CHD và CFD có $CH = CK$, CD chung và $\widehat{DCH} = \widehat{FCD}$

Suy ra $\triangle CHD = \triangle CFD$ nên ta được $\widehat{CHD} = \widehat{CFD}$, suy ra $\widehat{CHD} = 60^\circ$.

Chứng minh tương tự ta có tam giác CFG cân tại C có CI là đường phân giác.

Do đó ta được $CF = CG$, $\widehat{ICG} = \widehat{ICF} = 20^\circ$. Ta có $CG = CH = CF$ nên tam giác CGH cân tại C.

Mặt khác $\widehat{GCH} = \widehat{ICG} + \widehat{ICF} + \widehat{DCH} + \widehat{DCF} = 60^\circ$. Do đó ta được $\widehat{CHG} = \widehat{CHD} = 60^\circ$, suy ra hai tia HD và HG trùng nhau. Suy ra đường thẳng HG đi qua điểm D.



Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có H là trực tâm, G là trọng tâm và O là giao điểm ba đường trung trực. Chứng minh rằng $HG = 2GO$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia

OA lấy điểm D sao cho $OD = OA$

Vì O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC nên ta có $OA = OC$.

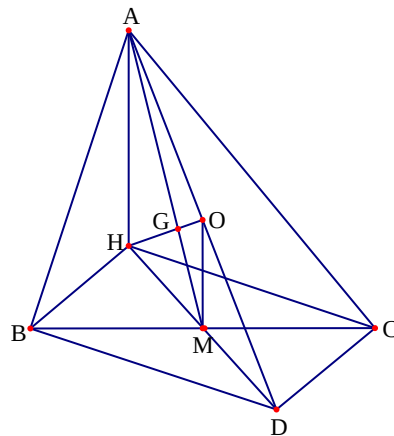
Do đó ta được tam giác AOC cân tại O nên ta có

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$$

Lại có $OC = OD$ nên ta được tam giác OCD cân tại O

$$\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$$

Ta có $\widehat{OAC} + \widehat{ODC} = \widehat{OCA} + \widehat{OCD} = \widehat{ACD}$ nên ta



được $\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AC$

Mà $BH \perp AC$ nên ta được $BH \parallel CD$. Chứng minh tương tự ta có $BD \parallel CH$.

Để thấy $\triangle BHC = \triangle CDB$ nên ta được $BH = CD$

$\triangle MBH = \triangle MCD$ nên ta được $MH = MD$, $\widehat{BMH} = \widehat{CMD}$

Do đó ta được $\widehat{HMD} = \widehat{BMH} + \widehat{BMD} = \widehat{CMD} + \widehat{BMD} = 180^\circ$. Suy ra ba điểm H, M, D thẳng hàng.

Trong tam giác ABC có AM là đường trung tuyến và G là trọng tâm nên G thuộc đường thẳng AM và $AG = \frac{2}{3}AM$.

Trong tam giác AHD có AM là đường trung tuyến và $AG = \frac{2}{3}AM$ nên G là trọng tâm của tam giác AHD.

Lại có O là trung điểm của AD nên HO là đường trung tuyến nên ta được $HG = 2GO$.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{A} = 45^\circ$, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của DE, G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng ba điểm G, I, H thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của BC, AH, AG.

Vì H là trực tâm nên ta có $AH \perp BC$ và G là trọng tâm nên $AK = KG = GM$. Tam giác BDA vuông tại D có $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên vuông cân tại D, suy ra $AD = BD$.

Xét tam giác DAH và DBC có

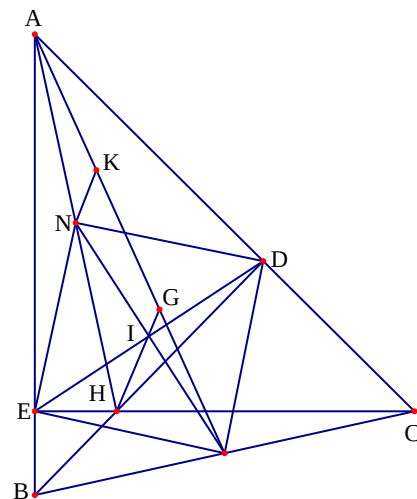
$\widehat{DAH} = \widehat{CBD}$; $AD = BD$ nên $\triangle DAH = \triangle DBC$ suy ra $AH = BC$.

Tam giác EAH vuông tại E có EN là đường trung

tuyến nên $EN = \frac{AH}{2}$. Tương tự

$ND = \frac{AH}{2}$; $DM = \frac{BC}{2}$; $ME = \frac{BC}{2}$

Do đó ta được $EN = ND = DM = ME$ nên tứ giác



ENDM là hình thoi. Do I là trung điểm của DE
nên I là trung điểm của MN.

Tam giác AGH có N, K lần lượt là các trung điểm của AH và AG nên NK là đường trung bình của tam giác AGH. Do đó ta được $HG \parallel NK$. Tam giác MNK có I, G lần lượt là các trung điểm của MN và MK nên IG là đường trung bình của tam giác MNK. Do đó $IG \parallel NK$. Ta có $IG \parallel NK$ và $GH \parallel NK$ nên theo tiên đề Oclit thì hai đường thẳng IG và GH trùng nhau. Do đó ba điểm I, G, H thẳng hàng.

Ví dụ 10. Cho ABC vuông tại A, vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng:

a) $AH = AK$

b) $AH^2 = BH \cdot CK$

Lời giải

Đặt $AB = c$; $AC = b$. Ta có $BD \parallel AC$ nên
theo định lý Talets thì

$$\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{b}{c}$$

Do đó ta được $\frac{AH}{HB + AH} = \frac{b}{b + c}$ hay

$$\frac{AH}{AB} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow AH = \frac{b \cdot c}{b + c}$$

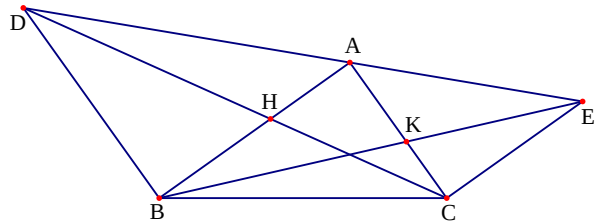
Do $AB \parallel CF$ nên theo định lý Takets ta có $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC + AK} = \frac{c}{b + c}$

$$\text{Hay } \frac{AK}{AC} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow AK = \frac{b \cdot c}{b + c}$$

Từ các kết quả trên suy ra $AH = AK$

$$\text{b) Từ } \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \text{ và } \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \text{ suy ra } \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AH} \text{ (Vì } AH = AK \text{)}$$

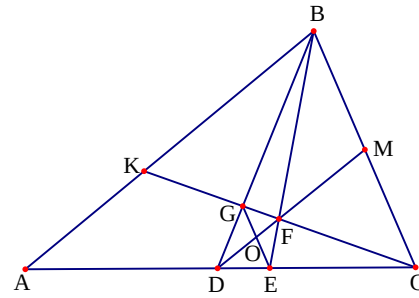
Do đó ta được $AH^2 = BH \cdot CK$



Ví dụ 11. Cho $\triangle ABC$ có $BC < BA$. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác BE của góc $\widehat{ABC}$ và đường thẳng này cắt BE tại F và cắt trung tuyến BD tại G. Chứng minh rằng đoạn thẳng EG bị đoạn thẳng DF chia làm hai phần bằng nhau.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của CF và AB, M là giao điểm của DF và BC. Tam giác KBC có BF vừa là phân giác vừa là đường cao nên tam giác KBC cân tại B nên $BK = BC$ và $FC = FK$. Mặt khác D là trung điểm AC nên DF là đường trung bình của tam giác AKC nên DF song song với AK hay DM song song với AB. Suy ra M là trung điểm của BC và $DF = \frac{1}{2} AK$ (DF là đường trung bình của tam giác AKC)



Do $DF \parallel AK$ nên ta được $\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF}$ suy ra $\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK}$ (1)

Mặt khác chú ý đến $AD = CD$ ta được $\frac{CE}{DE} = \frac{DC - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$

Nên ta được $\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$ hay $\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} - 1 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2$.

Suy ra $\frac{CE}{DE} = \frac{AK + BK}{DE} - 2 = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2$. Nên ta được $\frac{CE}{DE} = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2 = \frac{2BK}{AK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE}$ do đó $EG \parallel BC$

Gọi giao điểm của EG và DF là O ta có $\frac{OG}{MC} = \frac{OE}{MB} = \frac{FO}{FM}$ hay $OG = OE$

Bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 12. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đường thẳng đi qua I và vuông góc với CI theo thứ tự cắt các cạnh CA và CB tại M và N. Chứng minh rằng:

$$BC \cdot AI^2 + CA \cdot BI^2 + AB \cdot CI^2 = AB \cdot BC \cdot CA$$

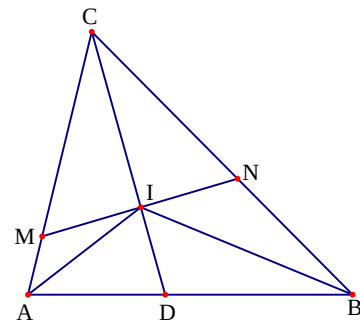
Lời giải

Gọi D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{BCA}$.

Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có

$$\widehat{AMI} = \widehat{MIC} + \widehat{ICM} = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2}; \widehat{INB} = \widehat{NIC} + \widehat{ICN} = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2}$$

$$\widehat{AIB} = \widehat{AID} + \widehat{DIB} = \widehat{IAC} + \widehat{ACI} + \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{C}}{2} + 90^\circ$$



Từ đó suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{INB} = \widehat{AIB}$.

Mặt khác do $\widehat{IAM} = \widehat{IAD}$; $\widehat{IBN} = \widehat{IBA}$. Từ đó suy ra $\triangle AMI \sim \triangle AIB \sim \triangle INB$

Do $\triangle AMI \sim \triangle INB$ nên $\frac{AM}{MI} = \frac{IN}{NB} \Rightarrow AM \cdot NB = MI \cdot IN = IM^2$. Suy ra

$$\begin{aligned} AM \cdot NB &= CM^2 - CI^2 = CM \cdot CN - CI^2 = (CA - AM)(CB - BN) - CI^2 \\ &= CA \cdot CB - AM \cdot BC - CA \cdot BN + AM \cdot BN - CI^2 \end{aligned}$$

Do đó $CA \cdot BC = AM \cdot BC + BN \cdot CA + CI^2$

$$\Rightarrow CA \cdot BC \cdot AB = AM \cdot BC \cdot AB + BN \cdot CA \cdot AB + CI^2 \cdot AB \quad (1)$$

Mặt khác, do $\triangle AMI \sim \triangle AIB \sim \triangle INB$ nên $\frac{AI}{AM} = \frac{AB}{AI}$; $\frac{IB}{AB} = \frac{NB}{IB}$

$$\Rightarrow AM \cdot AB = AI^2; BN \cdot AC = BI^2 \quad (2)$$

Thay vào hệ thức (1) ta được $BC \cdot AI^2 + CA \cdot BI^2 + AB \cdot CI^2 = AB \cdot BC \cdot CA$.

Ví dụ 13. Cho tam giác nhọn ABC. Đường thẳng d song song với cạnh BC và cắt hai đường thẳng AB và AC lần lượt tại D và E. Gọi M là giao điểm của BE và CD. Gọi N lần lượt là trung điểm của BC. Chứng minh rằng đường trung tuyến AN đi qua điểm M.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Đường thẳng d song song với BC đi qua điểm A thì ba điểm D, E, A trùng nhau. Khi đó hai điểm A và M trùng nhau nên ta luôn có A, M, N thẳng hàng

+ Trường hợp 2: Đường thẳng d cắt hai cạnh AB và AC tại D và E, khi đó gọi K là trung điểm của DE thì ta được ba điểm A, K, N thẳng hàng.

Tam giác ABN có DK//BC nên theo định lý Talets ta có

$$\frac{DK}{BN} = \frac{AK}{AN}$$

Tam giác CAN có KE//BC nên theo định lý Talets ta có

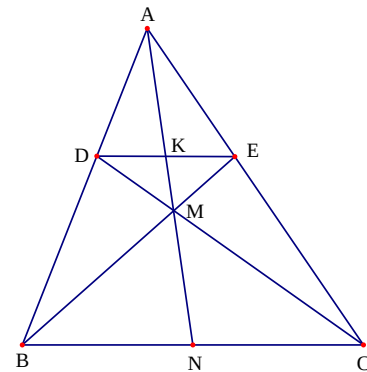
$$\frac{KE}{NC} = \frac{AK}{AN}$$

Do đó $\frac{DK}{NE} = \frac{KE}{NC}$, mà $BN = CN$ suy ra $DK = KE = \frac{DE}{2}$

$$\text{Suy ra } \frac{DK}{NC} = \frac{DE}{BC}$$

Xét tam giác MDE và tam giác MCB có $\widehat{MDE} = \widehat{MCB}$; $\widehat{DME} = \widehat{BMC}$

Nên ta được $\triangle MDE \sim \triangle MCB \Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{DE}{BC}$. Từ đó ta được $\frac{DK}{CN} = \frac{MD}{MC}$



Xét tam giác MDK và tam giác MCN có $\frac{DK}{CN} = \frac{MD}{MC}$ và $\widehat{MDK} = \widehat{MCN}$

Suy ra $\triangle MDK \sim \triangle MCN$ nên ta được $\widehat{DMK} = \widehat{CMN}$

Ta có $\widehat{DMK} + \widehat{KMC} = \widehat{DMC} = 180^\circ$ nên ta có $\widehat{KMN} = \widehat{CMN} + \widehat{KMN} = \widehat{DMK} + \widehat{KMC} = 180^\circ$

Do đó ba điểm K, M, N thẳng hàng nên bốn điểm A, K, M, N thẳng hàng

Vậy đường trung tuyến AN đi qua M.

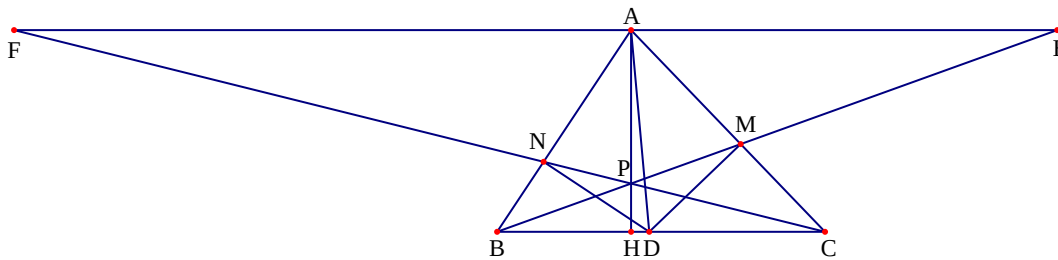
+ Trường hợp 3: Đường thẳng d song song với BC và cắt hai đường kéo dài của hai cạnh AB và AC.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được đường trung tuyến AN đi qua M.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC nhọn có đường phân giác AD. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AC và AB. Gọi giao điểm của BM và CN là P. Chứng minh rằng $AP \perp BC$

Lời giải



Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC cắt BM và CN lần lượt tại E và F. Gọi H là giao điểm của AP và BC.

Theo định lý Talet ta có $\frac{HC}{HB} = \frac{AF}{AE}$ và $\frac{AM}{CM} = \frac{AE}{BC} \Rightarrow AM = \frac{AE \cdot CM}{BC}$

Mặt khác ta có $\frac{AN}{BN} = \frac{AF}{BC} \Rightarrow AN = \frac{AF \cdot BN}{BC}$

Theo tính chất tia phân giác của một góc ta có $DM = DN$, từ đó ta được $AM = AN$.

Suy ra $\frac{AE \cdot CM}{BC} = \frac{AF \cdot BN}{BC} \Rightarrow AE \cdot CM = AF \cdot BN \Rightarrow \frac{CM}{BN} = \frac{AF}{AE}$ nên ta được $\frac{HC}{HB} = \frac{CM}{BN}$ (1)

Kẻ AK vuông góc với BC, khi đó ta có $\triangle DMC \sim \triangle AKC$ suy ra $\frac{CD}{CA} = \frac{CM}{CK}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{BD}{AB} = \frac{BN}{BK}$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{CD}{CA} = \frac{BD}{BA}$. Do đó ta được $\frac{CM}{CK} = \frac{BN}{BK}$.

Từ đó ta được $\frac{CM}{BN} = \frac{CK}{BK}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra K và H trùng nhau nên AH vuông góc với BC. Vậy $AP \perp BC$

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và AD là đường phân giác của tam giác. Lấy M và N lần lượt trên AC và AB sao cho $CM = BN$. Đường thẳng CN, BM cắt nhau tại I, qua I kẻ đường thẳng song song với AD cắt AC tại K và cắt AB tại J. Chứng minh rằng $AB = CK$ và $BJ = AC$.

Lời giải

Từ M, N kẻ đường thẳng song song với AD cắt BC theo thứ tự tại P và Q. đường thẳng KI cắt BC tại E.

Theo định lí Talet ta có $\frac{BP}{BD} = \frac{BN}{BA}$; $\frac{CD}{CQ} = \frac{CA}{CM}$

Suy ra $\frac{BP}{BD} \cdot \frac{CD}{CQ} = \frac{BN}{BA} \cdot \frac{CA}{CM}$.

Theo giả thiết ta có $CM = BN$ nên ta được

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BP}{BD} \cdot \frac{CD}{CQ}$$

Mặt khác do AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên ta lại có $\frac{CA}{BA} = \frac{CD}{BD}$ do đó $BP = CQ$, suy ra $BQ = CP$

Do $NP \parallel AD \parallel MQ$ nên theo định lí Talet ta $\frac{NP}{AD} = \frac{BP}{BD}$ và $\frac{CD}{CQ} = \frac{AD}{MQ}$.

Suy ra $\frac{NP}{AD} \cdot \frac{AD}{MQ} = \frac{AP}{BD} \cdot \frac{CD}{CQ}$ nên ta được $\frac{NP}{MQ} = \frac{CD}{BD}$

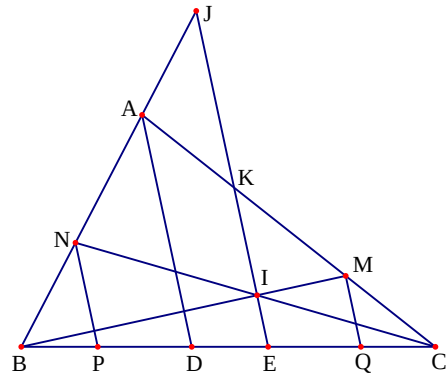
Mặt khác cũng theo định lí Talet ta có $\frac{NP}{IE} = \frac{CP}{CE}$ và $\frac{IE}{MQ} = \frac{BE}{BQ}$.

Suy ra $\frac{NP}{IE} \cdot \frac{IE}{MQ} = \frac{CP}{CE} \cdot \frac{BE}{BQ}$ nên ta được $\frac{NP}{MQ} = \frac{BE}{CE}$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{CD}{BD} = \frac{BE}{CE}$ nên suy ra $\frac{CD + BD}{BD} = \frac{CE + BE}{CE}$, do đó ta có $BD = CE$

Lại có $\frac{BN}{BA} = \frac{BP}{BD} = \frac{CQ}{CE} = \frac{CM}{CK}$ và $BN = CM$ nên ta được $AB = CK$

Mà tam giác AKJ cân tại A nên $AK = AJ$. Do vậy ta được $AB + AJ = CK + AK$ hay $BJ = AC$



Ví dụ 16. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$

Lời giải

Xét tam giác ABC nhọn có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

Xét hai tam giác ABE và ACF có $\widehat{BAC}$ chung và $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$

Do đó ta được $\triangle ABE \sim \triangle ACF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Xét tam giác AEF và tam giác ABC có $\widehat{EAF}$ chung và $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Nên ta được $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, do đó ta có $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$

Mà $\cos A = \frac{AE}{AB}$ nên ta được $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \cos^2 B$; $\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$

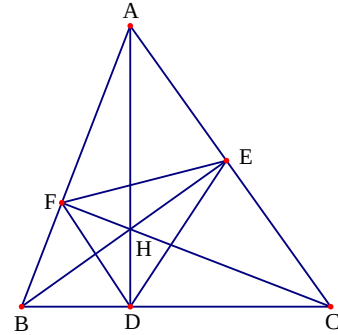
Mà ta có $S_{DEF} = S_{ABC} - (S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE})$ nên ta được $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$

Vì $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} > 0 \Rightarrow 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) > 0 \Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$

Mà ta có $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$; $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$; $\cos^2 C + \sin^2 C = 1$

Suy ra $(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) + (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 3$

Lại có $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$ nên ta được $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$.



Ví dụ 17. Cho tam giác nhọn ABC và m, n, p là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$m \cos A + n \cos B + p \cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{np}{m} + \frac{mp}{n} + \frac{mn}{p} \right)$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh

$$\cos C = \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B$$

Thật vậy, xét tam giác ABC nhọn có ba đường cao AD,

BE, CF cắt nhau tại H. Ta có $\widehat{ACF} = \widehat{FBH}$ nên

$$\tan \widehat{ACF} = \tan \widehat{FBH}$$

Suy ra $FA \cdot FB = FC \cdot FH$

Mà ta lại có $\frac{CE}{CH} = \frac{CF}{CA} = \cos C$ nên ta có

$$CE \cdot CA = FC \cdot CH$$

Dễ thấy $\triangle CEH \sim \triangle CFA$ nên ta được

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CE \cdot CA = CF \cdot CH$$

Do đó ta được

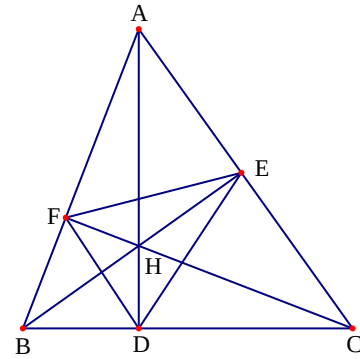
$$\begin{aligned} \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B &= \frac{FC}{AC} \cdot \frac{FC}{BC} - \frac{FA}{AC} \cdot \frac{FB}{BC} = \frac{FC^2 - FA \cdot FB}{AC \cdot BC} \\ &= \frac{FC^2 - FC \cdot FH}{AC \cdot BC} = \frac{FC(FC - FH)}{AC \cdot BC} = \frac{CF \cdot CH}{AC \cdot BC} \\ &= \frac{CE \cdot AC}{AC \cdot BC} = \frac{CE}{BC} = \cos C \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\cos A}{n} + \frac{\cos B}{m} + \frac{1}{p} \right)^2 + \left(\frac{\sin A}{n} - \frac{\sin B}{m} \right)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow &\frac{\cos^2 A}{n^2} + \frac{\cos^2 B}{m^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2 \cos A \cdot \cos B}{mn} + \frac{2 \cos A}{np} + \frac{2 \cos B}{mp} \\ &+ \frac{\sin^2 A}{n^2} + \frac{\sin^2 B}{m^2} - \frac{2 \sin A \cdot \sin B}{mn} \geq 0 \\ \Rightarrow &\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq \frac{2 \cos A}{np} + \frac{2 \cos B}{mp} + \frac{2(\sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B)}{mn} \\ \Rightarrow &\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq \frac{2 \cos A}{np} + \frac{2 \cos B}{mp} + \frac{2 \cos C}{mn} \\ \Rightarrow &m \cos A + n \cos B + p \cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{np}{m} + \frac{mp}{n} + \frac{mn}{p} \right) \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: Nếu cho $m = n = p = 1$ ta có bất đẳng thức $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$



Ví dụ 18. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD, đường cao BH và đường phân giác CE đồng quy. Chứng minh rằng: $(BC + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC.CA^2$

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AD, BH và CE. Xét tam

giác BHC vuông tại H ta có

$$\begin{aligned} CH^2 &= BC^2 - BH^2 = BC^2 - (AB^2 - AH^2) \\ &= BC^2 - AB^2 + (CA - CH)^2 \end{aligned}$$

Từ đó ta được $BC^2 + CA^2 - AB^2 = 2CA.CH$

Suy ra $CH = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2CA}$, chứng minh

tương tự ta được $AH = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2CA}$

Do đó ta được $\frac{CH}{AH} = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{AC^2 + AB^2 - BC^2}$ (1)

Do CE là đường phân giác của tam giác ABC và AD, BH, CE đồng quy nên CO là đường phân giác của tam giác ACD. Do đó ta được $\frac{OD}{OA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{2CA}$ (2)

Từ D kẻ DK vuông góc với AC nên ta được $BH \parallel DK$, nên ta được $HK = \frac{HC}{2}$

Suy ra ta được $\frac{OD}{OA} = \frac{HK}{HA} = \frac{CH}{2HA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\frac{BC}{AC} = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{AC^2 + AB^2 - BC^2}$, suy ra ta được

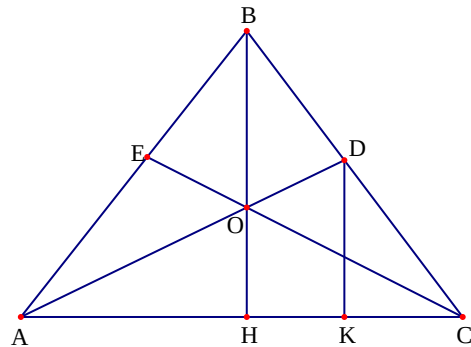
$$\begin{aligned} BC^2.CA + CA^3 - AB^2.CA &= CA^2.BC + AB^2.BC - BC^3 \\ \Rightarrow (BC^3 + CA^3) + BC^2.CA + CA^2.BC - AB^2.CA - AB^2.BC &= 2BC.CA^2 \\ \Rightarrow (BC + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) &= 2BC.CA^2 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

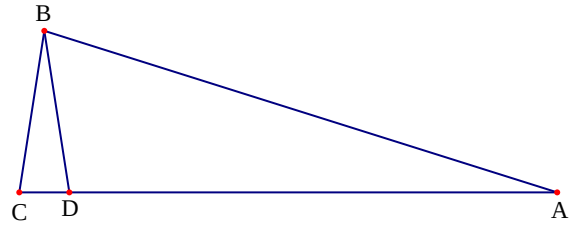
Ví dụ 19. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$ và $BC = a$, $CA = AB = b$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Lời giải



Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$ nên ta được $\widehat{B} = \widehat{C} = 80^\circ$. Dựng góc $\widehat{ABD} = 60^\circ$ với D thuộc đoạn thẳng AC, khi đó $\widehat{ABC} = 20^\circ$



Do đó tam giác BCD cân tại B.

Từ đó ta được $BC = BD$

Suy ra $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ nên ta được $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$ và $CD = AC - AD = AB - AD$

Từ đó ta có $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{AB - AD}$, suy ra $AB^2 - AB \cdot AD = BC^2$ nên ta được

$$AD = \frac{AB^2 - BC^2}{AB}$$

Từ đó ta được $AD^2 = \frac{(AB^2 - BC^2)^2}{AB^2}$ (1). Mặt khác tam giác ABD có $\widehat{ABD} = 60^\circ$.

Theo định lí hàm số cosin ta có $AD^2 = AB^2 + BD^2 - AB \cdot BD = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC$ (2)

Thay hệ thức (1) vào hệ thức (2) ta được $\frac{(AB^2 - BC^2)^2}{AB^2} = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC$

Do đó ta được $AB^4 + BC^4 - 2AB^2 \cdot BC^2 = AB^4 + AB^2 \cdot BC^2 - AB^3 \cdot BC$

Suy ra $BC^3 + CA^3 = 3BC \cdot AB^2$ hay $a^3 + b^3 = 3ab^2$. Bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC. Qua I kẻ các đường thẳng d_1 cắt AC, AB lần lượt tại M, N và đường thẳng d_2 cắt AC, AB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng PN cắt cạnh BC tại E và đường thẳng QM cắt cạnh BC tại F. Chứng minh rằng $IE = IF$.

Lời giải

Áp dụng định lí Menelaus cho ba điểm M, N, I thẳng hàng trong tam giác ABC ta có

$$\frac{IB}{IC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1. \text{ Mà I là trung điểm của BC}$$

$$\text{nên ta được } \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1.$$

Mặt khác vì P, Q, I thẳng hàng nên áp dụng tương tự ta được $\frac{IB}{IC} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{PA}{PC} = 1$. Mà I là

$$\text{trung điểm của BC nên ta được } \frac{QB}{QA} \cdot \frac{PA}{PC} = 1.$$

$$\text{Từ đó } \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{PA}{PC}$$

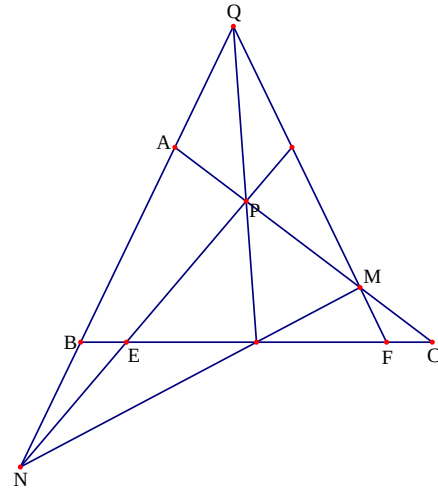
$$\text{Hay ta được } \frac{PC}{PA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{MA}{MC}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự đối với các bộ ba điểm thẳng hàng N, E, P và Q, M, F ta có

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{FC}{FB} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{MA}{MC} = 1$$

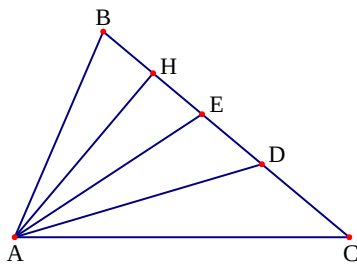
$$\text{Do đó ta được } \frac{EB}{EC} = \frac{FC}{FB}, \text{ do đó ta được } \frac{EB}{EC+EB} = \frac{FC}{FB+FC} \text{ hay } \frac{EB}{BC} = \frac{FC}{BC}$$

Suy ra $EB = FC$ nên ta được $IE = IF$.

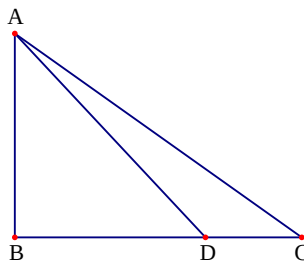


Ví dụ 21. Cho tam giác ABC có $BC = 2AC - 2AB$ và D là một điểm trên cạnh BC. Chứng minh rằng $\widehat{ABD} = 2\widehat{ADB}$ khi và chỉ khi $BD = 3CD$

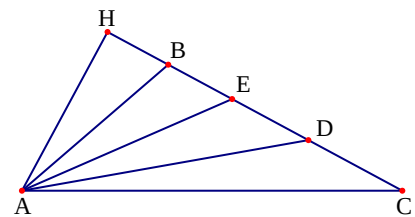
Lời giải



Trường hợp 1



Trường hợp 2



Trường hợp 1

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC có $\hat{B} < 90^\circ$. Khi đó hạ AH vuông góc với BC, lấy E trên đoạn CH sao cho $AE = AB$. Ta có

$$AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2 = (CH - BH)(CH + BH) = CE \cdot BC = CE \cdot 2(AC - AB)$$

$$\text{Do đó ta được } (AC - AB)(AC + AB) = CE \cdot 2(AC - AB) \text{ hay } AC + AB = 2CE$$

Do đó giả thiết $BC = 2AC - 2AB \Leftrightarrow 2AB = \frac{1}{2}BC + 2CE$ (1)

Vì vậy $\widehat{ABD} = 2\widehat{ADB} \Leftrightarrow \widehat{AEB} = 2\widehat{ADB}$ tương đương với tam giác AED cân tại E
 $\Leftrightarrow AB = AE = DE$

$$\Leftrightarrow 2DE + \frac{1}{2}BC = 2CE \Leftrightarrow BC = 4(CE - DE) = 4CD \Leftrightarrow BD = 3CD$$

+ Trường hợp 2: Tam giác ABC có $\hat{B} = 90^\circ$. Khi đó ta có

$$AC^2 - AB^2 = BC^2 = 2(AC - AB)BC \Leftrightarrow AC + AB = 2BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}BC + AB + AB = 2BC \Leftrightarrow AB = \frac{3}{4}BC$$

Do đó $\widehat{ABD} = 2\widehat{ADB} \Leftrightarrow \widehat{ADB} = 45^\circ = \widehat{BAD} \Leftrightarrow AB = BD \Leftrightarrow BD = \frac{3}{4}BC \Leftrightarrow BD = 3CD$

+ Trường hợp 3: Tam giác ABC có $\hat{B} > 90^\circ$. Khi đó kẻ AH vuông góc với BC và lấy E thuộc đoạn CH sao cho $AE = AB$. Ta có

$$AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2 = (CH - BH)(CH + BH) = CE \cdot BC = CE \cdot 2(AC - AB)$$

Do đó ta được $(AC - AB)(AC + AB) = CE \cdot 2(AC - AB)$ hay $AC + AB = 2CE$

Tương tự như trên ta được $AB + \frac{1}{4}BC = CE$

Do đó $\widehat{ABD} = 2\widehat{ADB} \Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{ABE} = 2\widehat{ADB} \Leftrightarrow \widehat{AEB} + 2\widehat{ADE} = \widehat{ABE} + 2\widehat{ADB} = 180^\circ$ (2)

Mà $\widehat{AEB} + \widehat{EAD} + \widehat{ADE} = 180^\circ$ nên (2) $\Leftrightarrow \widehat{EAD} = \widehat{ADE} \Leftrightarrow$ tam giác ADE cân tại E

$$\Leftrightarrow AE = ED = AB \Leftrightarrow 2ED + \frac{1}{2}BC = 2CE \Leftrightarrow BC = 4(CE - DE) = 4CD \Leftrightarrow BD = 3CD$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC với hai phân giác BD và CE. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng khoảng cách từ M đến BC bằng tổng khoảng cách từ M đến AB và AC.

Lời giải

Từ D hạ DL vuông góc với AB và DR vuông góc với BC

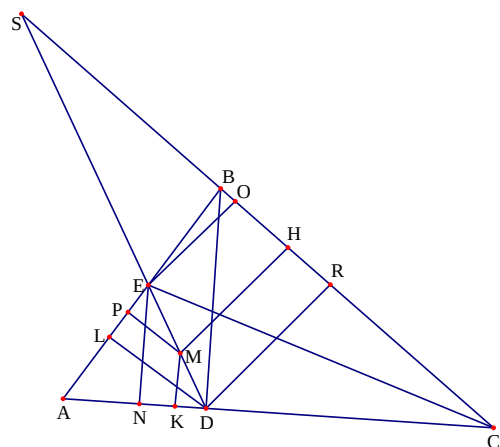
Từ E hạ EQ vuông góc với BC và EN vuông góc với AC.

Theo định lý Talet ta có

$$\frac{MK}{EN} = \frac{MD}{ED} \Rightarrow MK = \frac{MD \cdot EN}{ED} = \frac{EQ \cdot MD}{ED}$$

$$\frac{MP}{DL} = \frac{EM}{ED} \Rightarrow MP = \frac{DL \cdot EM}{ED} = \frac{DR \cdot EM}{ED}$$

Do đó ta được



$$MK + MP = \frac{EQ \cdot MD}{ED} + \frac{DR \cdot EM}{ED} = \frac{EQ \cdot MD + DR \cdot EM}{ED}$$

(3)

Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp $ED \parallel AB$. Khi đó

$$EQ = DR = MH$$

$$\text{Do đó ta có } MK + MP = \frac{EQ \cdot MD + DR \cdot EM}{ED} = \frac{MH(MD + EM)}{ED} = \frac{MH \cdot ED}{ED} = MH$$

+ Trường hợp ED không song song với AB , khi đó gọi S là giao điểm của ED với AB .Xét $\triangle SDR$ có $EQ \parallel MH \parallel DR$ nên theo định lý Talets ta có

$$\frac{DR}{MH} = \frac{SD}{SM} \Rightarrow \frac{DR - MH}{MH} = \frac{SD - SM}{SM} = \frac{MD}{SM} \quad (4)$$

$$\frac{MH}{EQ} = \frac{SM}{SE} \Rightarrow \frac{HM}{HM - EQ} = \frac{SM}{SM - SE} = \frac{SM}{ME} \quad (5)$$

Nhân (4) và (5) vế theo vế ta có

$$\begin{aligned} \frac{DR - HM}{HM - EQ} &= \frac{MD}{ME} \Leftrightarrow ME(DR - HM) = MD(HM - ED) \\ \Leftrightarrow ME \cdot DR - ME \cdot HM &= MD \cdot HM - MD \cdot ED \Leftrightarrow ME \cdot DR + MD \cdot DE = (MD + ME)HM \\ \Leftrightarrow HM &= \frac{ME \cdot DR + MD \cdot DE}{DE} \end{aligned}$$

Thay vào hệ thức (3) ta được $MH = MK + MP$. Vậy ta có $MH = MK + MP$

Ví dụ 23. Cho tam giác ABC không cân. Gọi D là trung điểm của BC , gọi AE và AF lần lượt là đường phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ABC . Gọi H là hình chiếu của A trên BC .

Chứng minh rằng $EF \cdot DH = AB \cdot AC$.

Lời giải

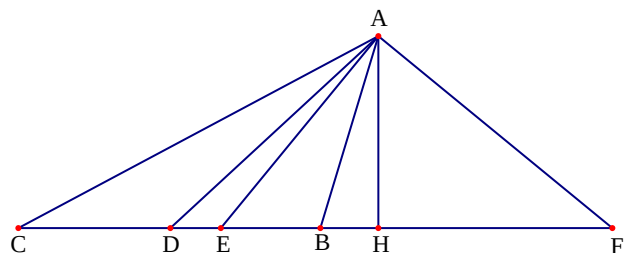
Giả sử $AB < AC$, vì AE và AF là đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của tam giác ABC nên theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{EB}{EC + EB} = \frac{FB}{FC + FB} = \frac{AB}{AB + CA}$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{EB}{BC} = \frac{AB}{AB + CA} \Rightarrow EB = \frac{AB \cdot BC}{AB + CA}$$

$$\text{Lại có } \frac{FB}{FB - FC} = \frac{AB}{AC - AB} \Rightarrow FB = \frac{AB \cdot BC}{AC - AB}$$



$$\text{Suy ra } EF = FB + EB = \frac{AB \cdot BC}{AB + CA} + \frac{AB \cdot BC}{AB - CA} = \frac{2AB \cdot BC \cdot CA}{AC^2 - AB^2} \quad (1)$$

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông ACH và ABC ta được

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = AH^2 + \left(\frac{BC}{2} + DH\right)^2; AB^2 = AH^2 + BC^2 = AH^2 + \left(\frac{BC}{2} - DH\right)^2$$

$$\text{Suy ra } AC^2 - AB^2 = 2BC \cdot DH \text{ nên ta được } DH = \frac{AC^2 - AB^2}{2BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } EF \cdot DH = \frac{2AB \cdot BC \cdot CA}{AC^2 - AB^2} \cdot \frac{AC^2 - AB^2}{2BC} \text{ hay } EF \cdot DH = AB \cdot AC.$$

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC, gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Đường cao BH. Đường vuông góc với đường phân giác của góc $\widehat{HMN}$ kẻ từ M cắt AC tại K sao cho $HK = \frac{1}{2}(AB + BC)$ và $\widehat{HMN} = 45^\circ$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

Lời giải

Ta có $BH \perp AC$ nên tam giác BHC vuông tại H.

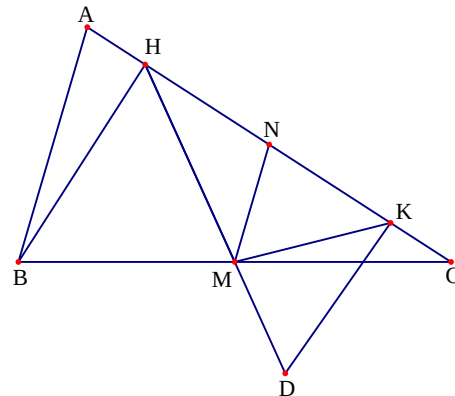
Ta có M và N lần lượt là trung điểm của BC

$$\text{và AC nên } MH = \frac{1}{2}BC; MN = \frac{1}{2}AB.$$

$$\text{Ta có } HK = \frac{1}{2}(AB + BC) = MH + MN.$$

Đặt $\widehat{HMN} = \alpha$, ta xét các vị trí của H, N, K theo các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Nếu N nằm giữa H và K. Khi đó trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MN$



$$\text{Suy ra } DH = HK \Rightarrow \widehat{HDK} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \text{ mà MK vuông góc với tia phân giác của góc } \widehat{HMN}$$

$$\text{nên KH là tia phân giác của góc } \widehat{NMD}. \text{ Suy ra } \widehat{NMK} = \widehat{KMD}$$

$$\text{Do đó ta được } \triangle MDK = \triangle MNK \text{ nên } \widehat{MNK} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Mặt khác ta có } \widehat{MNK} = \alpha + 45^\circ \text{ nên ta được } 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \alpha + 45^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\text{Do vậy ta được } \widehat{MNK} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{HNK} = 105^\circ; \widehat{MHB} = 60^\circ.$$

$$\text{Mà tam giác MHB cân tại M nên } \widehat{HMB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BMN} = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$$

Do đó ABMN là hình thang cân nên $AC = BC$ hay tam giác ABC cân tại C.

+ Trường hợp 2: Nếu H nằm giữa N và K. Khi đó đường thẳng vuông góc với phân giác của $\widehat{HMN}$ cắt AC tại K. Trên tia HM lấy điểm D sao cho $DM = MN$

$$\text{Suy ra } HD = HK \Rightarrow \widehat{HKD} = \widehat{HDK} = \frac{1}{2}\alpha$$

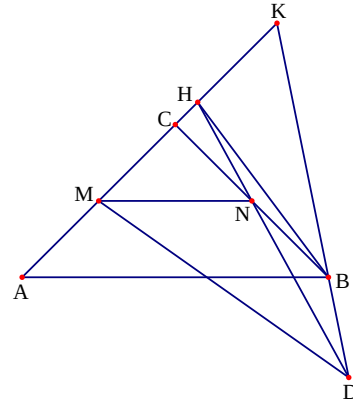
Mà $MN = HK = HM = HD - HM = MD$. Suy ra KM là đường trung trực của đoạn ND.

Suy ra $KD = KN$, từ đó ta có $\triangle NMK = \triangle DMK$

$$\text{suy ra } \widehat{KNM} = \widehat{KDM} = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{Do đó ta được } \alpha + \frac{1}{2}\alpha + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ \text{ nên H trùng với C.}$$

Suy ra tam giác ABC vuông cân tại C.



Ví dụ 25. Cho tam giác ABC có M là điểm nằm trong tam giác thỏa mãn

$\widehat{AMC} - \hat{B} = \widehat{AMC} - \hat{C}$. Các tia phân giác của $\widehat{ABM}$ và $\widehat{ACM}$ cắt nhau tại I. Chứng minh I nằm trên AM.

Lời giải

Dựng phía ngoài tam giác ABC các góc thỏa mãn

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAM}; \widehat{DCA} = \widehat{ABM}.$$

Khi đó tam giác ACD đồng dạng với tam giác

$$ABM, \text{ suy ra } \widehat{ADC} = \widehat{AMB}; \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AD}.$$

Lại có $\widehat{BAC} = \widehat{MAD}$ nên tam giác ABC đồng dạng với tam giác AMD. Suy ra

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADM}; \widehat{AMD} = \hat{B}, \text{ do đó ta được}$$

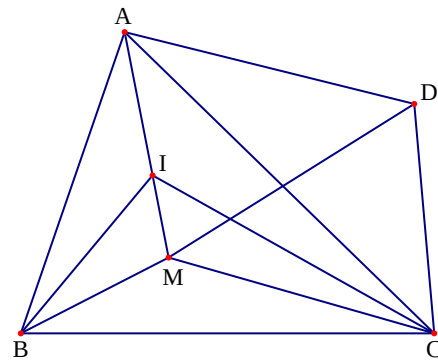
$$\widehat{MDC} = \widehat{ADC} - \widehat{ADM} = \widehat{AMB} - \hat{C}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{DMC} = \widehat{AMC} - \widehat{AMD} = \widehat{AMB} - \hat{B}$$

Theo giả thiết ta có $\widehat{AMC} - \hat{B} = \widehat{AMC} - \hat{C}$ nên ta được $\widehat{MDC} = \widehat{DMC}$ nên tam giác DMC

$$\text{cân tại C suy ra } CM = CD. \text{ Ta có } \triangle ACD \sim \triangle ABM \text{ nên ta được } \frac{CD}{CA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{BM}{BA}.$$

$$\text{Gọi I là giao điểm của đường phân giác của } \widehat{ACM} \text{ với AM, suy ra } \frac{CM}{CA} = \frac{MI}{MA}$$



Do đó ta được $\frac{BM}{BA} = \frac{MI}{MA}$ nên BI là phân giác của góc $\widehat{ABM}$. Vậy I nằm trên AM.

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC, dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác BCD, CAM, ABN thỏa mãn điều kiện $\widehat{CBD} = \widehat{CAM} = 45^\circ$; $\widehat{BCD} = \widehat{ACM} = 30^\circ$; $\widehat{ABN} = \widehat{BAN} = 15^\circ$. Chứng minh rằng tam giác DMN vuông cân.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\widehat{ABN} = \widehat{BAN} = 15^\circ$ nên ta có $\widehat{ANB} = 15^\circ$.

Dựng tam giác đều BNI sao cho I nằm trong nửa mặt phẳng bờ BN có chứa điểm C.

Ta có $\widehat{ANI} = \widehat{ANB} - \widehat{BNI} = 90^\circ$, do đó tam giác ANI vuông tại N, suy ra $\widehat{NIA} = 45^\circ$.

Do đó ta được $\widehat{BAI} = \widehat{NAI} - \widehat{NAB} = 30^\circ$ và $\widehat{ABI} = \widehat{NBI} - \widehat{NBA} = 45^\circ$

Từ đó các tam giác BAI, ACM, BCD đồng dạng với nhau

Suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{CBD} \Rightarrow \widehat{DBI} = \widehat{ABC}$ và $\frac{IB}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{AM}{AC}$

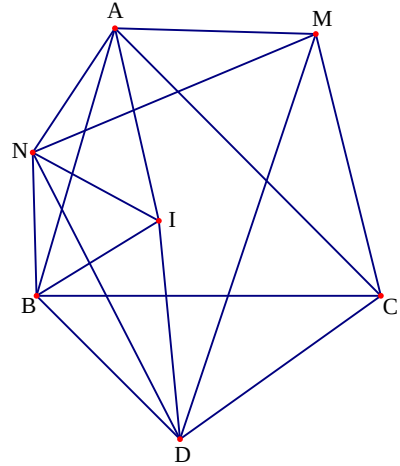
(1)

Do đó hai tam giác DBI và CBA đồng dạng với nhau, suy ra $\frac{BD}{BC} = \frac{DI}{AC} = \frac{BI}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $AM = DI$. Mặt khác $\widehat{DIB} = \widehat{CAB} \Rightarrow \widehat{DIN} = \widehat{MAN}$ nên ta được $\triangle ANM = \triangle IND$

Do đó ta được $MN = DN$ và $\widehat{ANM} = \widehat{IND}$.

Từ đó suy ra $\widehat{DNM} = \widehat{DNI} + \widehat{INM} = \widehat{MNA} + \widehat{INM} = \widehat{INA} = 90^\circ$. Vậy tam giác DMN vuông cân tại N.



Ví dụ 27. Cho tam giác ABC có AD, BE, CE là các đường phân giác trong của tam giác. Gọi giao điểm của DE và CF là M và giao điểm của DF và BE là N. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

Lời giải

Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Từ M và N kẻ các đường thẳng MP và NQ ($P \in AC$, $Q \in AB$) song song với AD . Theo

định lý Talet ta có

$$\frac{AP}{AE} = \frac{DM}{DE} \Rightarrow AP = \frac{AE \cdot DM}{DE}$$

$$\frac{PM}{AD} = \frac{ME}{DE} \Rightarrow PM = \frac{AD \cdot ME}{DE}$$

Khi đó ta được $\frac{AP}{PM} = \frac{MD}{ME} \cdot \frac{AE}{AD}$ (1)

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{BC}{BC + AB} \Rightarrow CE = \frac{BC \cdot AC}{BC + AB} = \frac{ab}{a + c}$$

Chúng minh tương tự ta được $CD = \frac{ab}{b + c}$; $AE = \frac{bc}{c + a}$.

Mặt khác ta lại có $\frac{MD}{ME} = \frac{CD}{CE} = \frac{a + c}{b + c}$, thay vào hệ thức (1) ta được $\frac{AP}{MP} = \frac{bc}{b + c} \cdot \frac{1}{AD}$

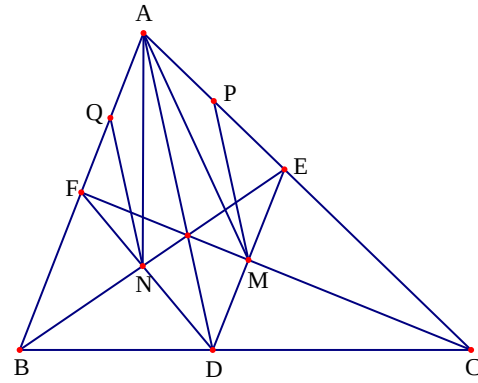
Chúng minh tương tự ta được $\frac{AQ}{QN} = \frac{bc}{b + c} \cdot \frac{1}{AD}$. Từ đó ta được $\frac{AP}{MP} = \frac{AQ}{NQ}$.

Lại có $PM \parallel AC$ nên $\widehat{APM} = 180^\circ - \widehat{EPM} = 180^\circ - \widehat{CAD} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{A}$

Tương tự ta được $\widehat{AQN} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{A}$. Nên ta được $\widehat{APM} = \widehat{AQN}$

Do đó ta có $\triangle APM \sim \triangle AQN$, suy ra $\widehat{PAM} = \widehat{QAN} \Rightarrow \widehat{NAD} = \widehat{MAD}$

Hay AD là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$.



Ví dụ 28. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và M là trung điểm của BC , đường cao AD ($D \in BC$).

Chúng minh rằng: $AH \cdot AD = |AM^2 - BM^2|$

Lời giải

+ Nếu tam giác ABC vuông khi đó ta có các trường hợp sau:

- Trường hợp tam giác ABC vuông tại A , khi đó A trùng với H và $AM = BM$ nên kết luận hiển nhiên đúng.

- Trường hợp tam giác ABC vuông tại B , khi đó H, B và D trùng nhau.

Theo định lý Pitago cho tam giác vuông ABM ta có $AH \cdot AD = AB^2$ và $|AM^2 - BM^2| = AB^2$

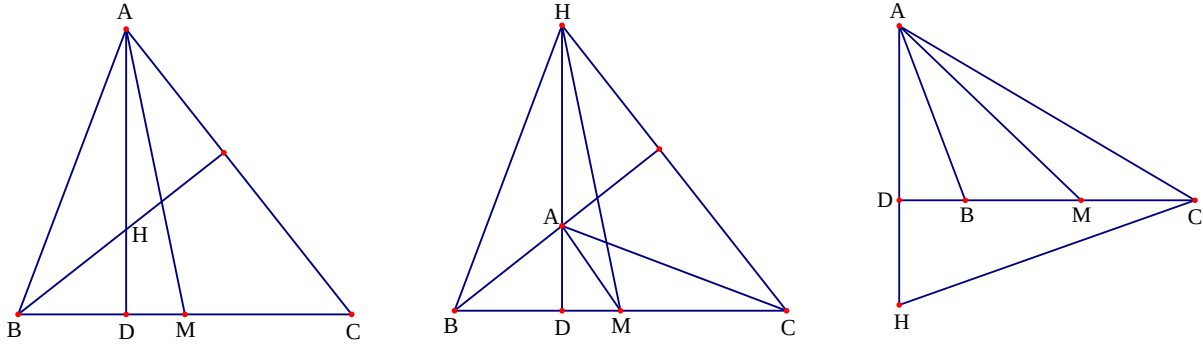
Do đó ta có $AH \cdot AD = |AM^2 - BM^2|$.

- Trường hợp tam giác ABC vuông tại C , khi đó H, C và D trùng nhau.

Theo định lý Pitago cho tam giác vuông AMC ta có $AH \cdot AD = AB^2$ và $|AM^2 - CM^2| = AB^2$ và để ý là $MB = MC$.

Do đó ta có $AH \cdot AD = |AM^2 - BM^2|$.

+ Nếu tam giác ABC không vuông, khi đó hai tam giác BDH và ADC đồng dạng



Suy ra $\frac{BD}{AD} = \frac{HD}{CD} \Rightarrow BD \cdot CD = AD \cdot HD$. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp tam giác ABC nhọn, khi đó ta có theo định lý Piatgo ta có

$$AD \cdot HD = BD \cdot CD = (BM - DM)(BM + DM) = BM^2 - DM^2 = BM^2 - AM^2 + AD^2$$

Do đó ta được $AD \cdot HD - AD^2 = BM^2 - AM^2$ suy ra $AD(HD - AD) = BM^2 - AM^2$

Từ đó ta được $AH \cdot AD = AM^2 - BM^2$.

- Trường hợp tam giác ABC tù tại A, khi đó ta có

$$AD \cdot HD = BD \cdot CD = (BM - DM)(BM + DM) = BM^2 - DM^2 = BM^2 - AM^2 + AD^2$$

Do đó ta được $AD \cdot HD - AD^2 = BM^2 - AM^2$ suy ra $AD(HD - AD) = BM^2 - AM^2$

Từ đó ta được $AH \cdot AD = BM^2 - AM^2$.

- Trường hợp tam giác tù tại B hoặc C (chẳng hạn tại B), khi đó ta được

$$AD \cdot HD = BD \cdot CD = (DM \pm BM)(DM \mp MM) = DM^2 - BM^2 = DM^2 - AD^2 - BM^2$$

Suy ra $AD(HD + AD) = AM^2 - BM^2$ mà $AH = HD + AD$. Từ đó ta được

$$AH \cdot AD = AM^2 - BM^2.$$

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $AH \cdot AD = |AM^2 - BM^2|$.

Ví dụ 29. Cho tam giác ABC có I là giao điểm ba đường phân giác và D, E lần lượt là trung điểm của AC, AB. Đường thẳng DI cắt AB tại Q và đường thẳng EI cắt AC tại P. Biết rằng diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác APQ. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải

Gọi giao điểm của BI và AC là M, giao điểm của CI và AB là N.

Đặt $AB = c, BC = a, CA = b, AP = x, AQ = y$.

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có

$$\frac{CI}{NI} = \frac{CA}{NA}; \frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}. \text{ Từ đó ta được}$$

$$\frac{AN}{AN+NB} = \frac{AC}{AC+BC} \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AC+BC}$$

$$\text{Hay } AN = \frac{bc}{a+b}. \text{ Suy ra } \frac{CI}{NI} = \frac{a+b}{c}.$$

Tương tự ta được $AD = \frac{bc}{a+c}; \frac{BI}{MI} = \frac{a+c}{b}$. Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC cân tại A. Khi đó $AP = AQ$ và $AB = AC$

Mà ta lại có $S_{ABC} = S_{APQ}$ nên ta suy ra được $AB.AC = AP.AQ$. Từ đó ta có $AP = AC$ và $AB = AQ$. Điều này dẫn đến P trùng với C và B trùng với Q nên ta suy ra được tam giác ABC cân tại B và C hay tam giác ABC đều. Từ đó ta được $\widehat{BAC} = 60^\circ$

+ Trường hợp 2: Tam giác ABC cân tại B. Khi đó M trùng với D và Q trùng với B. Từ đó ta được $AQ = AB$.

Theo giả thiết ta có $S_{ABC} = S_{APQ}$ nên ta được $AB.AC = AP.AQ$

Nên suy ra $AC = AP$, do đó ta được $AB = AC = BC$ hay tam giác ABC đều

Suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

+ Trường hợp 3: Tam giác ABC không cân tại B, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB > AC$, khi đó ta được $AD < AM$. Suy ra $AQ > AB$. Theo giả thiết ta có $S_{ABC} = S_{APQ}$ nên ta được $AB.AC = AP.AQ$

Nên ta được $AP < AC$, do đó $BE < BN \Rightarrow BC > AC \Rightarrow a > b$.

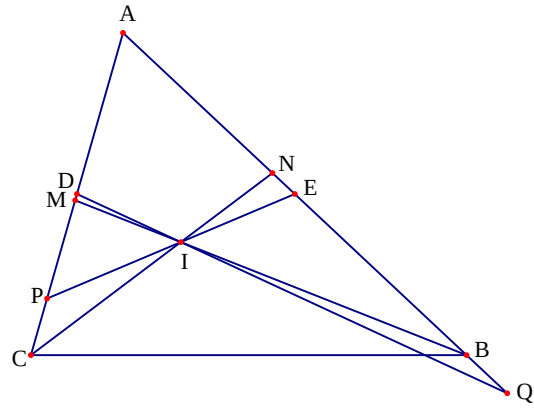
$$\text{Suy ra } DM = AM - AD = \frac{b}{2} - \frac{bc}{a+c} = \frac{b(c-a)}{2(a+c)} \text{ nên } \frac{DN}{DA} = \frac{c-a}{c+a}$$

Xét tam giác ABM có ba điểm D, I, Q thẳng hàng nên theo định lý Menelaus ta có

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BI}{IM} \cdot \frac{DM}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{y}{y-c} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{c-a}{c+a} = 1 \Rightarrow y = \frac{bc}{a+b-c}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $x = \frac{bc}{a+c-b}$

$$\text{Mà } AB.AC = AP.AQ \text{ nên ta được } bc = xy = \frac{b^2 c^2}{(a+b-c)(a+c-b)}$$



Do đó ta được $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, theo định lí hàm số cosin ta được $\cos \hat{A} = \frac{1}{2}$ nên $\hat{A} = 60^\circ$.

Vậy ta được $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Ví dụ 30. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi $\sqrt{3}l_a + \frac{a}{2} = b + c$, với l_a là độ dài đường phân giác của góc $\hat{A}$ và $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Lời giải

+ Dễ thấy nếu tam giác ABC đều thì ta có $l_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $a = b = c$. Khi đó ta có

$$\sqrt{3}l_a + \frac{a}{2} = b + c$$

+ Ta cần chứng minh: Nếu $\sqrt{3}l_a + \frac{a}{2} = b + c$ thì tam giác ABC đều

$$\text{Thật vậy, trước hết ta chứng minh } l_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$$

Xét tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c và $2p = a + b + c$

Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{AB + AC}{AB} = \frac{2AB \cdot \cos \frac{A}{2}}{AD}$$

Do đó ta được

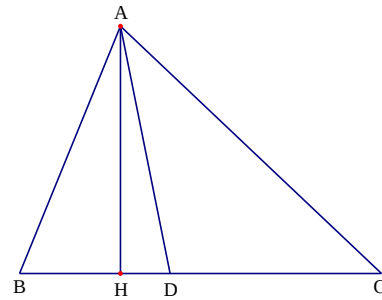
$$AD = \frac{2AB \cdot AC \cdot \cos \frac{A}{2}}{AB + AC} \Rightarrow l_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

Áp dụng định lí cosin ta lại có

$$2AD \cdot AB \cdot \cos \frac{A}{2} = AB^2 + AD^2 - BD^2; \quad 2AD \cdot AC \cdot \cos \frac{A}{2} = AC^2 + AD^2 - CD^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2AD \cdot \cos \frac{A}{2} (AB + AC) &= AB^2 + AD^2 - BD^2 + AC^2 + AD^2 - CD^2 \\ &= (AB + AC + BC)(AB + AC - BC) = 4p(p - a) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } AD = \frac{2p(p - a)}{(b + c) \cos \frac{A}{2}} \Rightarrow l_a = \frac{2p(p - a)}{(b + c) \cos \frac{A}{2}}$$



Khi đó ta được $l_a^2 = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \cdot \frac{2p(p-a)}{(b+c) \cos \frac{A}{2}} = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$.

Dễ thấy $\frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2}$.

Nên ta có $l_a = \frac{\sqrt{bc} \cdot \sqrt{(b+c)^2 - a^2}}{b+c} \leq \frac{\sqrt{(b+c)^2 - a^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot l_a \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(b+c)^2 - a^2}$ (1)

Lại có $\left(\frac{b+c}{2} - a\right)^2 \geq 0$ nên ta được $\frac{(b+c)^2}{4} - a(b+c) + a^2 \geq 0$
 $\Rightarrow (b+c)^2 - \frac{3}{4}(b+c)^2 - a(b+c) + \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \left(b+c - \frac{a}{2}\right)^2 \geq \frac{3}{4}[(b+c)^2 - a^2]$

Do đó ta được $b+c - \frac{a}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(b+c)^2 - a^2}$ (2)

Kết hợp (1) và (2) với $\sqrt{3}l_a + \frac{a}{2} = b+c$, ta được $b=c$; $a = \frac{b+c}{2}$

Suy ra $a=b=c$ hay tam giác ABC đều.

Ví dụ 31. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 2\widehat{B}$. Gọi D là điểm trên cạnh BC sao cho $CD = 2BD$. Trên tia AD lấy điểm E sao cho $DE = DA$. Chứng minh rằng $\widehat{ECB} + 180^\circ = 2\widehat{EBC}$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của CD, khi đó

$$DI = CI = BD.$$

Theo giả thiết $DE = DA$ nên ta được

ABEI là hình bình hành, do đó $BE = AI$.

Trên tia đối của tia CB lấy điểm J sao cho

$$CJ = CA.$$

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

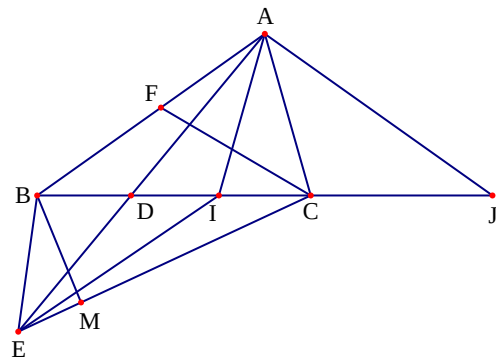
$$\text{Ta có } BD = CI = ID = \frac{a}{3}.$$

Đặt $BE = AI = m$, $AD = DE = n$, $CE = p$.

Ta có $2\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 2\widehat{CJA}$, suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{CJA}$

Tam giác ABC có $\widehat{C} = 2\widehat{B}$ nên khi vẽ tia phân giác CF thì ta được tam giác BFC cân tại F.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta được $\frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{FA+FB}{FB} = \frac{AC+BC}{BC}$



Từ đó ta được $CF = FB = \frac{AB \cdot BC}{AC + BC} = \frac{ac}{a+b}$. Mà theo công thức đường phân giác trong tam giác ta có

$$CF^2 = \frac{BC \cdot CA}{(BC + AC)^2} \left[(BC + AC)^2 - AB^2 \right] = \frac{ab}{(a+b)^2} \left[(a+b)^2 - c^2 \right]$$

Do đó ta được $\left(\frac{a \cdot c}{a+b} \right)^2 = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \left[(a+b)^2 - c^2 \right] \Rightarrow c^2 = b(a+b)$

Theo công thức đường trung tuyến của các tam giác ABI, ADC, DEC ta có

$$c^2 + m^2 = 2n^2 + \frac{2}{9}a^2; \quad b^2 + n^2 = 2m^2 + \frac{2}{9}a^2; \quad n^2 + p^2 = 2c^2 + \frac{2}{9}a^2$$

Từ đó ta được $c^2 + 2b^2 = 3m^2 + \frac{2}{3}a^2$. Suy ra $m^2 = b^2 + \frac{ab}{3} - \frac{2}{9}a^2 = \left(b + \frac{2a}{3}\right)\left(b - \frac{a}{3}\right)$

Lại có $m^2 + 2p^2 = 3c^2 + \frac{2}{3}a^2 = 3b(b+a) + \frac{2}{3}a^2 = 3b^2 + 3ab + \frac{2}{3}a^2$

Do đó ta được $\left(b + \frac{2a}{3}\right)\left(b - \frac{a}{3}\right) + 2p^2 = 3b^2 + 3ab + \frac{2}{3}a^2 = 3\left(b + \frac{2a}{3}\right)\left(b + \frac{a}{3}\right)$

Suy ra $p^2 = \left(b + \frac{2a}{3}\right)^2 \Rightarrow p = b + \frac{2a}{3}$, do đó ta được $m^2 = p(p-a)$

Suy ra $BE^2 = CE(CE - BC)$. Trên CE lấy M sao cho $CM = BC$

Khi đó ta được $BE^2 = CE \cdot EM \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{ME}{BE}$. Do đó tam giác EBC đồng dạng với tam giác

EMB, suy ra $\widehat{EBM} = \widehat{ECM}$. Vì $CM = BC$ nên $\widehat{MBC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BCE})$

Suy ra $\widehat{EBM} = \widehat{ECB} = \widehat{EBC} - \widehat{MBC} = \widehat{EBC} - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{ECB})$

Do đó ta được $\widehat{ECB} + 180^\circ = 2\widehat{EBC}$.

Ví dụ 32. Cho tam giác ABC nhọn có các đường phân giác trong AD, BE, CF cắt nhau tại O. Chứng minh rằng nếu bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác AOF, BOD, COE bằng nhau thì tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

Gọi $O_1; O_2; O_3$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AOF, BOD, COE. Giả sử $OO_1; OO_2; OO_3$ lần lượt cắt AB, BC, CA lại M, N, P.

Do bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác AOF, BOD, COE nên ta được $O_1O_2 \parallel AD$; $O_1O_3 \parallel CE$ và $O_2O_3 \parallel BE$.

Mặt khác ta có $\frac{MO_1}{MO} = \frac{NO_2}{NO} = \frac{PO_3}{OP}$ do đó ta

được $O_1O_2 \parallel MN$; $O_1O_3 \parallel MP$ và $O_2O_3 \parallel CF$.

Từ đó ta được $MN \parallel AD$, $NP \parallel BE$ và $MP \parallel CF$.

Gọi giao điểm của MO và NP là H, giao điểm của BO và MN là K.

Ta có $\frac{MO}{OH} = \frac{MK}{NK}$, mặt khác ta có $\frac{MK}{AO} = \frac{KN}{DO}$ nên ta được $\frac{MK}{KN} = \frac{AO}{DO}$

Do đó ta được $\frac{MO}{HO} = \frac{AO}{DO}$. Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{AO}{DO} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB+AC}{BC}$$

Mặt khác ta có $\widehat{MNO} = \widehat{NOD}$; $\widehat{PNO} = \widehat{BON}$ mà $\widehat{BON} = \widehat{NOD}$ nên ta được $\widehat{MNO} = \widehat{PNO}$,

suy ra NO là tia phân giác của $\widehat{MNP}$. Tương tự ta được MO là phân giác của $\widehat{NMP}$ nên O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

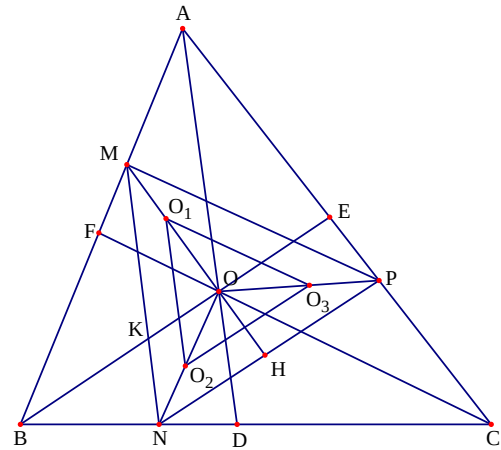
Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{MO}{HO} = \frac{MN}{HN} = \frac{MP}{HP} = \frac{MN+MP}{NP}$

Từ đó ta được $\frac{AB+AC}{BC} = \frac{MN+MP}{NP}$ nên ta được $\frac{AB+AC+BC}{BC} = \frac{MN+MP+NP}{NP}$

Hay $\frac{NP}{BC} = \frac{MN+MP+NP}{AB+AC+BC}$. Chứng minh tương tự ta được $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{MN+MP+NP}{AB+AC+BC}$

Do đó ta được $\frac{NP}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC}$, suy ra $\triangle MNP \sim \triangle ABC$. Do đó ta được $\widehat{NMP} = \widehat{BAC}$, mà

ta lại có $\widehat{NMP} = \widehat{AOF} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA}$. Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{OCA}$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$. Chứng minh tương tự ta được $\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$. Vậy nên tam giác ABC đều.



Ví dụ 33. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh BC, AC, AB. Gọi M là trung điểm cạnh AC. Đường thẳng MI cắt AB tại N, đường thẳng DF cắt đường cao AH tại P. Chứng minh tam giác ANP là tam giác cân.

Lời giải

Ta có $IE \perp AC$ và $AB \perp AC$ nên IE song song với AB . Theo định lý Talets ta có

$$\frac{AN}{EI} = \frac{AM}{EM}$$

$$\text{Do đó } AN = \frac{AM \cdot EI}{EM} = \frac{AC \cdot EI}{2(AM - AE)} \quad (1)$$

Vì $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên tứ giác $AEIF$ là hình vuông, do đó $AE = EI$

Vì D, E, F lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh BC, AC, AB nên ta có

$$AE + CD + BD = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \Rightarrow IE = AE = \frac{AB + CA - BC}{2} \quad (2)$$

$$\text{Lại có } BC - AB = CD - AF = CE - AE = 2(AM - AE) \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào hệ thức (1) ta được

$$\begin{aligned} AN &= \frac{AC \cdot EI}{2(AM - AE)} = \frac{AC(AB + CA - BC)}{2(BC - AB)} \\ &= \frac{BC^2 - AB^2 + AB \cdot AC - AC \cdot BC}{2(BC - AB)} = \frac{BC + AB - AC}{2} \end{aligned}$$

Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt DF tại K , khi đó tam giác APK vuông tại A .

Ta có $BD = BF$ do đó ta có $AK = AF = AE$ và $\widehat{AKF} = \widehat{BDF} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{BIF}$.

Trong tam giác AKP có $AP = AK \cdot \tan \widehat{AKF} = AK \cdot \tan \left(90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B} \right) = AK \cdot \cot \frac{\widehat{B}}{2} = AE \cdot \cot \frac{\widehat{B}}{2}$

$$\text{Do đó ta được } AP = \frac{AC + AB - BC}{2} \cdot \frac{BD}{ID} \quad (*)$$

$$\text{Mà } BD = \frac{BC + AB - AC}{2} \text{ và } DI = AE = \frac{AC + AB - BC}{2}$$

$$\text{Suy ra } AP = \frac{AC + AB - BC}{2} \cdot \frac{BC + AB - AC}{AB + AC - BC} = \frac{AB + BC - AC}{2} \quad (**)$$

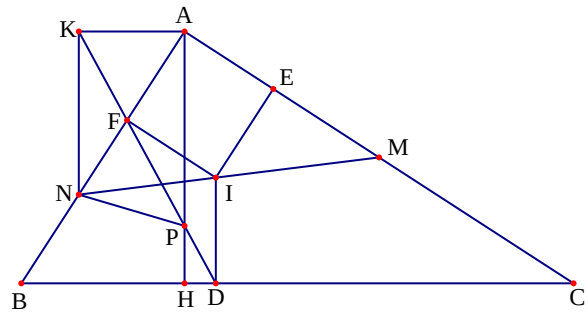
Từ (*) và (**) ta được $AN = AP$ nên tam giác ANP cân tại A .

Ví dụ 34. Cho tam giác ABC có $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại B hoặc C khi và chỉ khi một trong các đẳng thức sau đây xảy ra:

$$\text{a) } \tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$$

$$\text{b) } \tan^2 \frac{A}{2} = \frac{|b-c|}{b+c}$$

Lời giải



+ Trước hết ta chứng minh: Nếu tam giác ABC vuông tại

B hoặc C thì ta luôn có $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ và $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{|b-c|}{b+c}$

Thật vậy, xét tam giác ABC vuông tại B (trường hợp tam giác ABC vuông tại C chứng minh tương tự).

Khi đó gọi AD là đường phân giác của tam giác ABC.

Trong tam giác BAD vuông tại B có $\tan \frac{A}{2} = \frac{BD}{BA}$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{BD+CD}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{a}{b+c}$$

Do đó ta được $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$

Từ $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ được $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{b^2 - c^2}{(b+c)^2} = \frac{b-c}{b+c}$

Do đó ta được $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ và $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{|b-c|}{b+c}$

+ Ta chứng minh: Nếu có $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ hoặc $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{|b-c|}{b+c}$ thì tam giác ABC vuông tại B hoặc C.

Thật vậy, gọi AD là đường phân giác của tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AC = b$.

Khi đó ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{ACE} = \widehat{AEC}$ nên ta được $AD \parallel EC$. Kẻ BK vuông góc với BE cắt đường thẳng EC tại K.

Ta có $\tan \frac{A}{2} = \tan E = \frac{BK}{BE} = \frac{BK}{b+c}$.

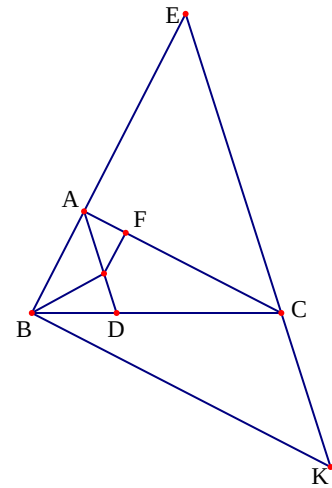
Không mất tính tổng quát ta giả sử $b \geq c$, khi đó $\widehat{ABD} \geq \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{ADB} \leq \widehat{ADC}$ nên $\widehat{ADC}$ là góc vuông hoặc góc tù. Từ đó ta được $\widehat{DCE}$ là góc nhọn

a) Nếu có $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ thì từ $\tan \frac{A}{2} = \tan E = \frac{BK}{BE} = \frac{BK}{b+c}$ ta được $BK = a = BC$ do đó K

trùng với điểm C. Điều này có nghĩa là tam giác ABC vuông tại B.

Vậy khi $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ thì tam giác ABC vuông tại B hoặc C.

b) Nếu $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{|b-c|}{b+c}$, khi đó giả sử $b \geq c$ kết hợp với $\tan \frac{A}{2} = \tan E = \frac{BK}{BE} = \frac{BK}{b+c}$ ta có



$$\frac{BK^2}{(b+c)^2} = \frac{(b-c)(b+c)}{(b+c)^2} \Rightarrow BK^2 = b^2 - c^2$$

Mặt khác ta có $AK^2 = BK^2 + c^2$ nên ta được $AK^2 = b^2 = AC^2$.

Từ đó suy ra K trùng với C. Điều này có nghĩa là $\widehat{ABC} = 90^\circ$ hay tam giác ABC vuông tại B.

Vậy khi $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{|b-c|}{b+c}$ thì tam giác ABC vuông tại B hoặc C.

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC có ba đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$.

Lời giải

+ Nếu tam giác ABC đều khi đó ta có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

Suy ra $\cos A = \cos B = \cos C = \frac{1}{2}$ do đó

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$$

+ Ta cần chứng minh khi $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$ thì tam giác ABC đều

Thật vậy, tam giác ABN vuông tại N nên ta có

$$\cos A = \frac{AN}{AB}$$

Tam giác APC vuông tại P nên ta có $\cos A = \frac{AP}{AC}$

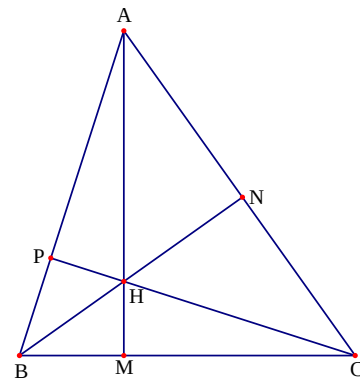
$$\text{Do đó ta được } \cos^2 A = \frac{AN \cdot AP}{AB \cdot AC} \Rightarrow \cos A = \sqrt{\frac{AN \cdot AP}{AB \cdot AC}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{\frac{AN \cdot AP}{AB \cdot AC}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AP}{AN} + \frac{AN}{AC} \right)$. Do đó ta được

$$\cos A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AP}{AN} + \frac{AN}{AC} \right)$$

Chứng minh tương tự ta được $\cos B \leq \frac{1}{2} \left(\frac{PB}{AB} + \frac{BM}{BC} \right)$; $\cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{MC}{BC} + \frac{NC}{AC} \right)$

$$\text{Do đó ta được } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AP}{AB} + \frac{PB}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{NC}{AC} + \frac{BM}{BC} + \frac{MC}{BC} \right) = \frac{3}{2}.$$



Mà theo bài ra ta có $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$, điều này có nghĩa là ba bất đẳng thức trên xảy ra dấu bằng

$$\text{Hay } \frac{AP}{AB} = \frac{AN}{AC}; \frac{BP}{AB} = \frac{BM}{BC}; \frac{MC}{BC} = \frac{NC}{AC} \Leftrightarrow \frac{AP}{AN} = \frac{AB}{AC}; \frac{BP}{BM} = \frac{AB}{BC}; \frac{MC}{NC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{Cũng từ } \cos A = \frac{AN}{AB} \text{ và } \cos A = \frac{AP}{AC} \text{ dẫn đến } \frac{AN}{AB} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Mà từ trên ta có } \frac{AP}{AN} = \frac{AB}{AC}, \text{ do đó ta được } \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC$$

Lập luận tương tự ta được $AB = BC$. Do đó tam giác ABC có $AB = BC = CA$ nên tam giác ABC đều.

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi I, J, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác MBC, MCA, MAB . Gọi G và K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và IJL . Chứng minh rằng đường thẳng GK đi qua điểm M .

Lời giải

Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Gọi giao điểm của AD và EF là V .

Vì D và E lần lượt là trung điểm của BC và CA nên DE là đường trung bình của tam giác ABC

Do đó ta được $DE \parallel AB$ và $DE = \frac{1}{2}AB$.

Ta có $DE = AF = \frac{1}{2}AB$ và $DE \parallel AF$ nên tứ giác

$AEDF$ là hình bình hành, suy ra V là trung điểm của EF .

Do đó AD đi qua trung điểm của EF . Tương tự ta có BE đi qua trung điểm của DE

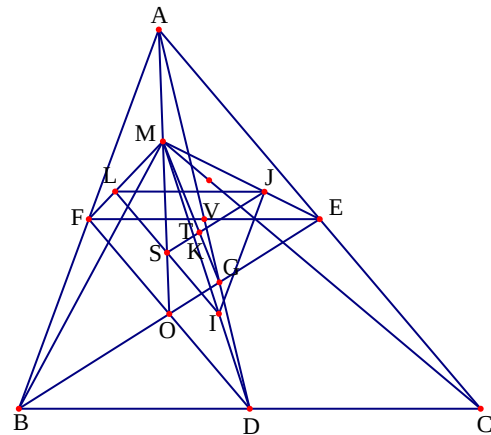
Do đó G là trọng tâm của tam giác ABC thì cũng là trọng tâm của tam giác DEF .

Tam giác MAB có MF là đường trung tuyến và L là trọng tâm nên $\frac{ML}{MF} = \frac{2}{3}$

Tương tự ta có $\frac{MI}{MD} = \frac{2}{3}$. Suy ra $\frac{ML}{MF} = \frac{MI}{MD}$. Nên theo định lý Talet ta có $LI \parallel DF$.

Gọi S là giao điểm của MO và DF . Khi đó trong tam giác MFO có $LS \parallel FO$ nên

$$\frac{LS}{FO} = \frac{MS}{MO} = \frac{ML}{MF} = \frac{2}{3}$$



Trong tam giác MOD có $SI \parallel OD$ nên ta có $\frac{SI}{OD} = \frac{MS}{MO}$

Mà ta có $OD = OF$ nên ta được $LS = SI$ hay S là trung điểm của LI.

Gọi T là giao điểm của TS và MG, khi đó trong tam giác MOE có $\frac{MS}{MO} = \frac{MJ}{ME} = \frac{2}{3}$ nên $SJ \parallel EO$.

Trong tam giác MGE có $TJ \parallel EG$ nên ta được $\frac{TJ}{GE} = \frac{MJ}{ME}$

Trong tam giác MOE có $SJ \parallel OE$ nên $\frac{SJ}{OE} = \frac{MJ}{ME}$. Do đó ta được $\frac{TJ}{GE} = \frac{SJ}{OE} \Rightarrow \frac{JT}{JS} = \frac{GE}{OE} = \frac{2}{3}$.

Trong tam giác IJL có JS là đường trung tuyến và T thuộc JS thỏa mãn $TJ = \frac{2}{3}JS$

Do đó T là trọng tâm tam giác IJL nên T và K trùng nhau. Suy ra đường thẳng MG đi qua điểm K.

Ví dụ 37. Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} < 90^\circ$. Lấy điểm D bất kì nằm trong tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} = \widehat{BDC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. Chứng minh rằng CD đi qua trung điểm của AB.

Lời giải

Cách 1: Gọi M là trung điểm của AB, ta cần chứng minh CD đi qua M.

Vẽ hình bình hành ACBE, khi đó hai đường chéo cắt nhau tại M nên M là trung điểm của CE.

Lấy điểm F trong tam giác ABE sao cho

$$\triangle DBF \sim \triangle ABE$$

Suy ra $\widehat{BFD} = \widehat{BEA}$ mà ta có $\widehat{BEA} = \widehat{ACB}$

nên ta được $\widehat{BFD} = \widehat{ACB}$

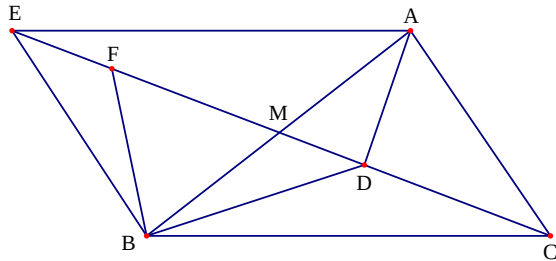
Lại có $\widehat{BAE} = \widehat{ABC}$ nên ta được $\widehat{BDF} = \widehat{ABC}$ suy ra $\widehat{BDC} + \widehat{BDF} = \widehat{BDC} + \widehat{ABC}$

Nên ta được $\widehat{BDC} + \widehat{BDF} = 180^\circ$, suy ra ba điểm F, D, C thẳng hàng

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{EBF} + \widehat{FBA} = \widehat{EBA} \\ \widehat{ABD} + \widehat{FBA} = \widehat{FBD} \Rightarrow \widehat{EBF} = \widehat{ABD} \\ \widehat{EBA} = \widehat{FBD} \end{cases}$$

Lại có $\triangle DBF \sim \triangle ABE$ nên ta được $\frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BE} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BD}$

Mà $\widehat{EBF} = \widehat{ABD}$ suy ra $\triangle EBF \sim \triangle ABD$ nên ta được $\widehat{EFB} = \widehat{ADB}$.



Mà ta có $\widehat{BFD} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ nên suy ra $\widehat{EFB} + \widehat{BFD} = 180^\circ$

Từ đó suy ra ba điểm E, F, D thẳng hàng. Từ đó ta được các điểm C, D, M, E, F cùng thuộc một đường thẳng. Vậy CD đi qua trung điểm của cạnh AB.

Cách 2: Gọi M là trung điểm của AB. Ta có

$$\begin{cases} \widehat{ADB} + \widehat{DBA} + \widehat{DAB} = 180^\circ \\ \widehat{ADB} + \widehat{ACB} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{DAB} = \widehat{ACB}$$

Hay ta có $\widehat{DBA} + \widehat{DAB} = \widehat{DCB} + \widehat{DCA}$

Lại có

$$\begin{cases} \widehat{BDC} + \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 180^\circ \\ \widehat{BDC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = \widehat{ABC}$$

Hay ta có $\widehat{DBC} + \widehat{DAB} = \widehat{DCB} + \widehat{DCA}$

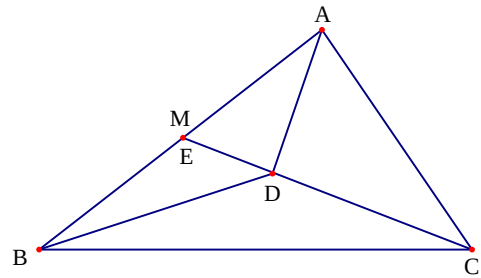
Suy ra $\widehat{DBA} = \widehat{DCB}$, mà ta có $\widehat{DBA} + \widehat{DAB} = \widehat{DCB} + \widehat{DCA}$ nên ta được $\widehat{DAB} = \widehat{DCA}$

Gọi E là giao điểm của CD và AB. Xét hai tam giác EAD và ECA có $\widehat{DAE} = \widehat{ECA}$ và $\widehat{AED}$

chung nên $\triangle EAD \sim \triangle ECA$. Suy ra $\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA^2 = CE \cdot DE$.

Chứng minh tương tự ta được $EB^2 = EC \cdot ED$

Do đó ta được $EA = EB$, suy ra hai điểm E và M trùng nhau. Vậy CD đi qua trung điểm của cạnh AB.



Ví dụ 38. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi G, H, O, I lần lượt là trọng tâm, trực tâm, giao điểm của ba đường trung trực và giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Xét $X \in \{G, H, O, I\}$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A khi và chỉ khi $AB + XC = AC + XB$

Lời giải

Với $X \in \{G, H, O, I\}$, ta xét các trường hợp như sau

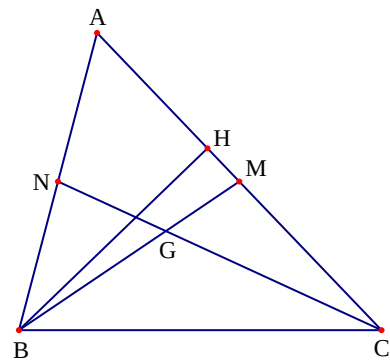
• Trường hợp 1: Khi X là trọng tâm G.

+ Dễ thấy khi tam giác ABC cân tại A thì

$AB = AC$; $GB = GC$ nên ta được $AB + GC = AC + GB$.

+ Ta chứng minh nếu $AB + GC = AC + GB$ thì tam giác ABC cân tại A.

Đặt $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$. Gọi BM và CN là hai đường trung tuyến và BH là đường cao.



Khi đó dễ dàng tính được $AH = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2b}$.

Vì M là trung điểm của BC nên $AM = \frac{b}{2}$.

Do đó $HM = \frac{b}{2} - BH = \frac{b}{2} - \frac{2b^2 - 2a^2 + 2c^2}{2b}$ hay $MH = \frac{c^2 - a^2}{2b}$

Áp dụng định lý Pitago ta có

$$BM^2 = BH^2 - MH^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2} - \left(\frac{c^2 - a^2}{2b}\right)^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$$

Áp dụng tương tự ta được $CN^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$

Do G là trọng tâm của tam giác nên ta được $GB = \frac{2}{3}BM$; $GC = \frac{2}{3}CN$ nên ta được

$$GB^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}; GC^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9}$$

Giả sử $b > c$, từ giả thiết $AB + GC = AC + GB$ ta được

$$3(b-c) = -\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{3(b^2 - c^2)}{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}$$

Mà ta lại có $2(b-c)^2 + 2b^2 - c^2 = (2b-c)^2$ và $2(b-c)^2 + 2c^2 - b^2 = (2c-b)^2$

Do đó ta được $3(b-c) = \frac{3(b^2 - c^2)}{2b-c+|2c-b|}$

+ Nếu $b > 2c$, ta có $3(b-c) < \frac{3(b^2 - c^2)}{2b-c+2c-b} = 3(b-c)$, điều này vô lý.

+ Nếu $b < 2c$, ta có $3(b-c) < \frac{3(b^2 - c^2)}{2b-c+b-2c} \Rightarrow 9(b-c)^2 < 3(b^2 - c^2)$, điều này vô lý.

Như vậy trường hợp $b > c$ không xảy ra

Tương tự trường hợp $b < c$ cũng không xảy ra.

Vậy $b = c$ hay tam giác ABC cân tại A.

• Trường hợp 2: Khi X là trực tâm H.

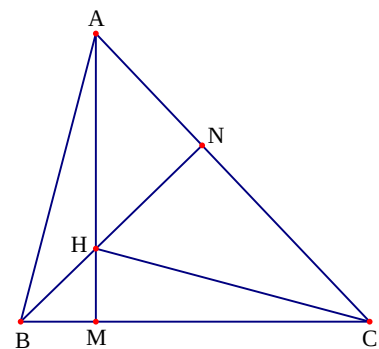
+ Dễ thấy khi tam giác ABC cân tại A thì

$AB = AC$; $HB = HC$ nên ta được $AB + HC = AC + HB$.

+ Ta chứng minh nếu $AB + HC = AC + HB$ thì tam giác ABC cân tại A. Thật vậy, gọi AM và BN là các đường cao của tam giác ABC. Vì tam giác BAC nhọn nên H nằm trong tam giác ABC. Áp dụng định lý Pitago ta có

$$BH^2 - CH^2 = BM^2 - CM^2 = AB^2 - AC^2$$

Do đó ta được



$$(BH + CH)(BH - CH) = (AB + AC)(AB - AC)$$

Từ giả thiết $AB + HC = AC + HB$ ta được $AB - AC = BH - HC$

$$\text{Do đó ta suy ra } (AB - AC)(BH + CH - AB - AC) = 0$$

Mà ta luôn có $BH < BN < AB$, tương tự ta được $CH < AC$. Do đó ta được

$BH + CH - AB - AC < 0$. Nên từ đây ta suy ra $AB - AC = 0$ hay $AB = AC$. Vậy tam giác ABC cân tại A.

• Trường hợp 3: Khi X là giao điểm ba đường trung trực O. Dễ thấy khi O là giao điểm ba đường trung trực thì $OB = OC$ nên từ $AB + OC = AC + OB$ ta luôn có $AB = AC$. Do đó tam giác ABC cân tại A.

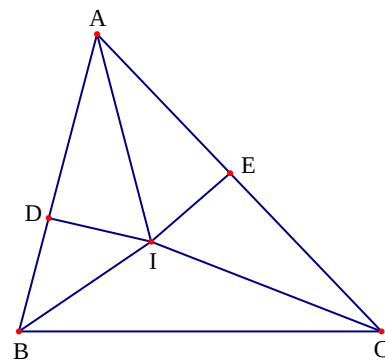
• Trường hợp 4: Khi X là giao điểm ba đường phân giác I.

+ Dễ thấy khi tam giác ABC cân tại A thì

$$AB = AC; IB = IC \text{ nên ta được } AB + IC = AC + IB.$$

+ Ta chứng minh nếu $AB + IC = AC + IB$ thì tam giác ABC cân tại A.

Thật vậy, vẽ $DI \perp AB, EI \perp AC$ ($D \in AB, E \in AC$)



Khi đó ta có $ID = IE$. Áp dụng định lý Pitago vào các tam giác vuông BID và CIE ta được

$$BI^2 - BD^2 = ID^2 = CI^2 - CE^2 \Rightarrow BI^2 - CI^2 = BD^2 - CE^2$$

Do đó ta được $(BI + CI)(BI - CI) = (BD + CE)(BD - CE)$. Từ giả thiết $AB + IC = AC + IB$ ta được $AB - AC = BI - IC$. Mà ta có $BD - CE = AB - AC$ nên ta được

$$(BI + IC)(AB - AC) = (BD + CE)(AB - AC) \Leftrightarrow (AB - AC)(BI + CI - BD - CE) = 0$$

$$\text{Do } BI > BD; CI > CE \Rightarrow BI + CI - BD - CE > 0$$

Do đó ta được $AB - AC = 0 \Rightarrow AB = AC$. Vậy tam giác ABC cân tại A.

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là giao điểm ba đường phân giác.

Chứng minh rằng GI song song với BC khi và chỉ khi $\tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Hạ $AH \perp BC$, $GD \perp BC$, $IE \perp BC$.

Do đó ta được $GD \parallel IE$.

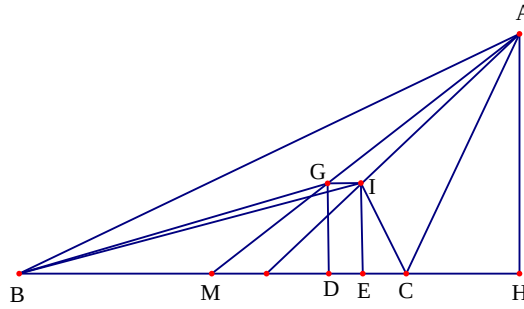
Gọi độ dài các cạnh của tam giác ABC là

a, b, c và đặt $p = \frac{a+b+c}{2}$. Gọi r là khoảng

cách từ I đến các cạnh của tam giác ABC.

Khi đó ta chứng minh được

$$BE = p - b; CE = p - c.$$



$$\text{Ta có } \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{IE}{BE} \cdot \frac{IE}{CE} = \frac{r}{p-b} \cdot \frac{r}{p-c} = \frac{r^2(p-a)p}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Theo công thức Hêrông ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ và công thức $S = pr$

$$\text{Ta được } \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{r^2(p-a)p}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S \cdot r \cdot (p-a)}{S^2} = \frac{p \cdot r - r \cdot a}{S} = 1 - \frac{r \cdot a}{S} = 1 - \frac{2r}{h_a}$$

+ Ta chứng minh nếu $\tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ thì $GI \parallel BC$.

$$\text{Thật vậy, khi } \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \text{ ta suy ra } 1 - \frac{2r}{h_a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IE}{AH} = \frac{1}{3}$$

Gọi M là trung điểm của BC , khi đó ta có $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$

$$\text{Do đó ta được } \frac{MG}{MA} = \frac{GD}{AH} = \frac{1}{3}, \text{ suy ra } \frac{IE}{AH} = \frac{DG}{AH} \Rightarrow IE = GD$$

Suy ra tứ giác $GIED$ là hình bình hành. Do đó ta được $GI \parallel BC$.

+ Ta chứng minh nếu $GI \parallel BC$ thì $\tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

Thật vậy, khi GI song song với BC thì ta có $IE = GD$

Theo định lí Talét ta có $\frac{MG}{MA} = \frac{GD}{AH} = \frac{IE}{Ah} = \frac{1}{3}$. Do đó ta được $1 - \frac{2r}{h_a} = \frac{1}{3}$ hay

$$\tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 40. Cho tam giác nhọn ABC. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác cân DAC, EAB, FBC sao cho $DA = DC$, $EA = EC$, $FB = FC$ và $\widehat{ADC} = 2\widehat{A}$, $\widehat{AEB} = 2\widehat{B}$, $\widehat{CFB} = 2\widehat{C}$. Gọi M là giao điểm của BD và EF , N là giao điểm của EC và DF , P là giao điểm của FA và DE .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{BD}{MD} + \frac{CE}{NE} + \frac{AF}{PF} = 4.$$

Lời giải

Từ $\widehat{ADC} = 2\hat{A}$, $\widehat{AEA} = 2\hat{B}$, $\widehat{CFB} = 2\hat{C}$ ta suy ra

$$\widehat{ADC} < 180^\circ; \widehat{AEB} < 180^\circ; \widehat{BFC} < 180^\circ$$

$$\text{Do đó ta được } \widehat{DAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ADC} = 90^\circ - \hat{A},$$

$$\widehat{BAE} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AEB} = 90^\circ - \hat{B}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{DAE} = \widehat{DAC} + \hat{A} + \widehat{BAE} = 180^\circ - \hat{B} > 90^\circ$$

$$\text{Tương tự ta được } \widehat{EBF} > 90^\circ; \widehat{FCD} > 90^\circ. \text{ Do đó}$$

đa giác ADCFBE là đa giác lồi

$$\text{Suy ra ta có } \widehat{ADC} + \widehat{AEB} + \widehat{BFC} = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 360^\circ$$

Dựng các đường tròn $(D; AD)$ và $(E; EB)$ cắt nhau tại O, suy ra $DA = DC = OD$

$$\text{Do đó ta được } \widehat{AOC} = 360^\circ - 2\widehat{ADC} = 360^\circ - 4\hat{A}.$$

$$\text{Lại có } AE = EB = EO \text{ nên ta được } \widehat{AOB} = 360^\circ - 4\hat{B}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{AOC} + \widehat{AOB} = 720^\circ - 4(\hat{A} + \hat{B}) = 4\hat{C}$$

$$\text{Do đó ta được } \widehat{BOC} = 360^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) = 360^\circ - 4\hat{C} \text{ suy ra } FB = FC = FO$$

Do đó ba đường tròn $(D; AD)$, $(E; EB)$ và $(F; FB)$ cắt nhau tại O.

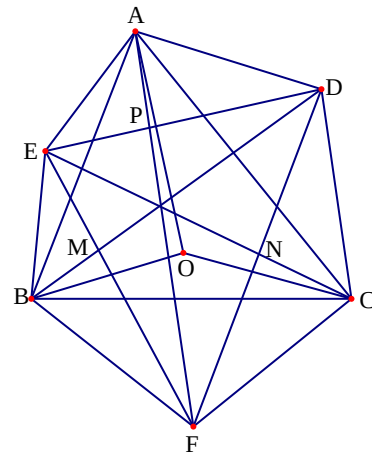
Từ đó ta được hai điểm O và C đối xứng qua DF, hai điểm O và A đối xứng qua DE, hai điểm O và B đối xứng qua EF.

$$\text{Điều này dẫn đến } S_{AED} = S_{OED}; S_{BEF} = S_{OEF}; S_{CDF} = S_{ODF}$$

$$\text{Ta lại có } \frac{BD}{MD} = \frac{MD + MB}{MD} = 1 + \frac{MB}{MD} = 1 + \frac{S_{BEF}}{S_{DEF}} = 1 + \frac{S_{OEF}}{S_{DEF}}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta được } \frac{CE}{NE} = 1 + \frac{S_{ODF}}{S_{EDF}}; \frac{AF}{PF} = 1 + \frac{S_{ODE}}{S_{FDE}}$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{BD}{MD} + \frac{CE}{NE} + \frac{AF}{PF} = 3 + \frac{S_{OEF} + S_{ODF} + S_{ODE}}{S_{DEF}} = 4. \text{ Bài toán được chứng minh}$$



Ví dụ 41. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường phân giác AD. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC. Gọi giao điểm của BN và CM là K, giao điểm của AK và DM là I. Tính số đo góc $\widehat{BID}$.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC có $AB < AC$,
khi đó điểm I nằm giữa M và D.

Gọi E là giao điểm của BN và MD, F là giao điểm của CM và DN.

Ta có tứ giác AMDN là hình vuông, do đó $ND \parallel AB$ và $MD \parallel AC$ nên theo định lý Talet ta có

$$\frac{MF}{CF} = \frac{BD}{CD} = \frac{BM}{AM} = \frac{BM}{DN} = \frac{ME}{DE}$$

Do đó ta được $EF \parallel DC$ nên suy ra $EF \parallel BC$. Theo định lý Talet ta có

$$\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB} = \frac{NC}{AC} = \frac{NF}{AM} = \frac{NF}{AN}$$

Suy ra $\triangle NAF \sim \triangle ABN$, từ đó ta được $\widehat{NAF} = \widehat{NBA}$ suy ra $AF \perp BN$

Lập luận tương tự ta được $AE \perp CM$. Do đó K là trực tâm của tam giác AEF nên ta được $AK \perp EF$

Do đó ta suy ra $AI \perp BC$, mà $MD \perp AB$ nên I là trực tâm của tam giác ABD.

Từ đó ta được $\widehat{BID} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

+ Trường hợp 2: Tam giác ABC có $AB > AC$,
khi đó điểm D nằm giữa M và I.

Gọi E là giao điểm của BN và MD, F là giao điểm của CM và DN.

Ta có tứ giác AMDN là hình vuông, do đó $ND \parallel AB$ và $MD \parallel AC$ nên theo định lý Talet ta có

$$\frac{MF}{CF} = \frac{BD}{CD} = \frac{BM}{AM} = \frac{BM}{DN} = \frac{ME}{DE}$$

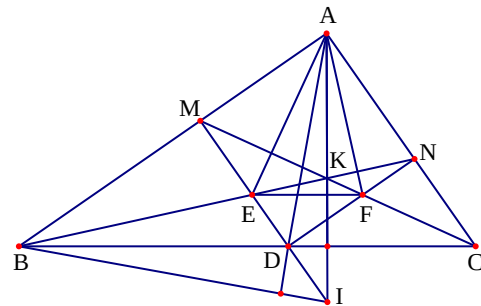
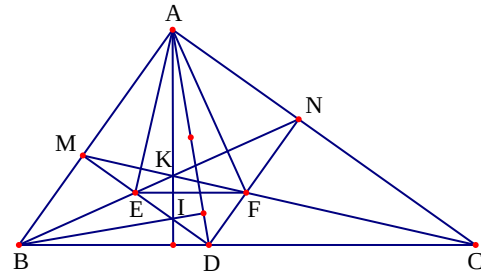
Do đó ta được $EF \parallel DC$ nên suy ra $EF \parallel BC$. Theo định lý Talet ta được

$$\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB} = \frac{NC}{AC} = \frac{NF}{AM} = \frac{NF}{AN}$$

Suy ra $\triangle NAF \sim \triangle ABN$, từ đó ta được $\widehat{NAF} = \widehat{NBA}$ suy ra $AF \perp BN$

Lập luận tương tự ta được $AE \perp CM$. Do đó K là trực tâm của tam giác AEF nên ta được $AK \perp EF$

Do đó ta suy ra $AI \perp BC$, mà $MD \perp AB$ nên I là trực tâm của tam giác ABD.



Từ đó ta được $\widehat{BID} = 45^\circ$

+ Trường hợp 3: Tam giác ABC có $AB = AC$, khi đó điểm D và điểm I trùng nhau nên $\widehat{BID}$ không xác định.

Vậy nếu $AB < AC$ thì ta được $\widehat{BID} = 135^\circ$ và nếu $AB > AC$ thì ta được $\widehat{BID} = 45^\circ$.

Ví dụ 42. Cho tam giác ABC vuông tại C và $\hat{A} < \hat{B}$. Gọi O là trung điểm của AB và I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác. Biết tam giác BIO vuông, tính tỉ số các cạnh của tam giác ABC.

Lời giải

Đặt $AB = c$, $BC = a$; $CA = b$ suy ra $a < b < c$.

Dựng $IE \perp AB$, $IF \perp BC$, $IG \perp CA$. Ta có $\widehat{IBO} < \widehat{CBO} < 90^\circ$.

Nếu $\widehat{IOB} = 90^\circ$ thì ta được $\hat{E} = \hat{O}$, khi đó $\triangle IAO = \triangle IBO$ nên ta được $\widehat{IAB} = \widehat{IBA} \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\hat{A} < \hat{B}$.

Do đó ta được $\widehat{IOB} \neq 90^\circ$ nên tam giác BIO chỉ có thể vuông I, tức là $\widehat{BIO} = 90^\circ$. Do I là giao điểm ba đường phân giác nên ta được

$$AG = AE = \frac{b+c-a}{2}; \quad BF = BE = \frac{c+a-b}{2}; \quad IE = IF = IG = CG = \frac{a+b-c}{2}$$

Do $a < b < c$ nên ta được $\frac{b+c-a}{2} > \frac{c}{2}$ suy ra $AE > AO$. Do đó điểm E nằm giữa hai điểm B và O nên ta được $OE = \frac{b-a}{2}$. Tam giác EIO vuông tại E nên theo định lý Pitago ta có

$$OI^2 = OE^2 + IE^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2 - 2ac - 2bc}{4}$$

Tam giác BFI vuông tại F nên theo định lý Pitago ta có

$$BI^2 = BF^2 + IF^2 = \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4bc}{4}$$

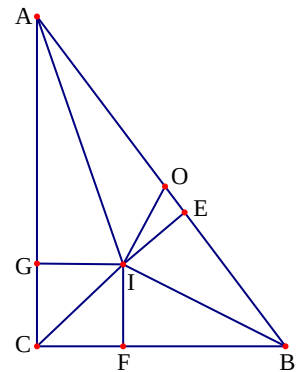
Lại có $OB^2 = \frac{c^2}{4}$ nên trong tam giác BIO vuông tại I có

$$OI^2 + BI^2 = OB^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + c^2 - ac - 3bc = 0$$

Mà ta lại có $a^2 + b^2 = c^2$ nên ta được $3c^2 = ab + 3bc \Leftrightarrow 3c = a + 3b$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} 3c = a + 3b \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$. Đặt $x = \frac{a}{c}$; $y = \frac{b}{c}$, khi đó ta có $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ với $0 < x < y < 1$

Giải hệ trên ta được $x = \frac{3}{5}$; $y = \frac{4}{5}$, từ đó ta được $a : b : c = 3 : 4 : 5$.



Ví dụ 43. Cho $\triangle ABC$ đều. Gọi M và N là các điểm trên cạnh AB và BC sao cho $BM = BN$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BMN$ và I là trung điểm AN, P trung điểm của MN. Chứng minh rằng $\triangle GPI \sim \triangle GNC$ và $IC \perp GI$.

Lời giải

+ Chứng minh rằng $\triangle GPI \sim \triangle GNC$.

Tam giác BMN có $BM = BN$ nên tam giác BMN

cân tại B, mà ta lại có $\widehat{MBN} = 60^\circ$ nên tam giác

BMN đều. Do G là trọng tâm tam giác BMN

nên $GP \perp MN$, $GP = \frac{1}{2}GN$

Lại có $\widehat{GNB} = 30^\circ$; $\widehat{BMN} = 60^\circ$. Gọi P, I lần lượt

là trung điểm của MN, AN nên ta được

$$PI = \frac{AM}{2} \text{ và } PI \parallel AM.$$

Ta có $\widehat{MPI} = \widehat{BMN} = 60^\circ$.

Do đó ta có $\widehat{GPI} = \widehat{GPM} + \widehat{MPI} = 150^\circ$. Mặt khác ta có $\widehat{GNB} + \widehat{BNC} = 180^\circ$, nên $\widehat{GNC} = 150^\circ$

Mà ta lại có $AB = BM + AM$; $BC = BN + CN$; $AB = BC$; $BM = BN$ nên ta được $AM = CN$

Do đó ta được $PI = \frac{NC}{2}$. Xét hai tam giác GPI và GNC có $\widehat{GPI} = \widehat{GNC} = 150^\circ$ và

$$\frac{GP}{GN} = \frac{PI}{NC} = \frac{1}{2}$$

Do đó ta được $\triangle GPI \sim \triangle GNC$

+ Chứng minh rằng $IC \perp GI$.

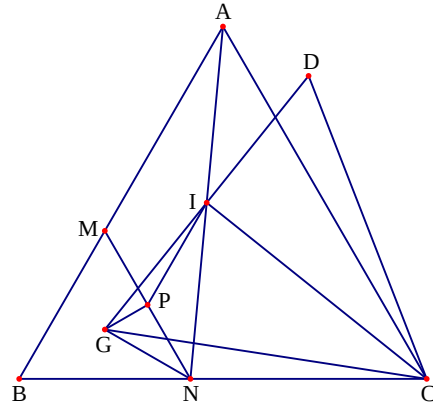
Từ $\triangle GPI \sim \triangle GNC$ ta được $\frac{GI}{GC} = \frac{GP}{GN}$ và $\widehat{IGP} = \widehat{CGN}$

Do đó ta được $\frac{GI}{GC} = \frac{1}{2}$ và $\widehat{IGC} = \widehat{IGP} + \widehat{PGC} = \widehat{CGN} + \widehat{PGC} = 60^\circ$

Trên tia đối của tia IG lấy điểm D sao cho $ID = IG$.

Trong tam giác DGC có $GC = GD$ và $\widehat{DGC} = 60^\circ$ nên tam giác DGC đều

Mà CI là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao của tam giác DGC. Do đó ta được $IC \perp GI$.



Ví dụ 44. Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 2\widehat{ABC}$, điểm P nằm trong góc $\widehat{BAC}$ sao cho $PB = PC$ và $AC = AP$. Chứng minh rằng $\widehat{PAC} = 2\widehat{PAB}$.

Lời giải

Gọi D là chân đường phân giác của $\widehat{ACB}$ của tam giác ABC. Khi đó ta có

$$\widehat{DCB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$$

Suy ra $DC = DB$, mà ta lại có $PB = PC$ nên PD là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Gọi E là điểm đối xứng với C qua AP. Ta lại có $PC = PE = PB$ nên P là tâm đường tròn đi qua ba điểm C, E, B.

Vẽ đường thẳng qua P và vuông góc với EB cắt BC tại Q. Từ đó suy ra $AP \perp CE$ và $PD \perp BC$, do đó ta được $\widehat{ECB} = \widehat{APD}$.

Suy ra $\widehat{APE} = \widehat{QPE}$, từ đó ta được $\widehat{ACP} = \widehat{APE} = \widehat{APD} + \widehat{DPE} = \widehat{DPE} + \widehat{QPE} = \widehat{DPQ}$.

Mặt khác ta lại có $PQ \perp BE$ và $PD \perp BC$ nên ta được $\widehat{ACP} = \widehat{DPQ} = \widehat{EBQ}$.

Do đó ta được $\widehat{ACD} + \widehat{DCP} = \widehat{DBP} + \widehat{EBA} - \widehat{PBC}$

Mà ta lại có $\widehat{DCP} = \widehat{DBP}$ nên $\widehat{EBA} = \widehat{ACD} + \widehat{PBC} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} + \widehat{PBC} = \widehat{ABC} + \widehat{PBC} = \widehat{ABP}$

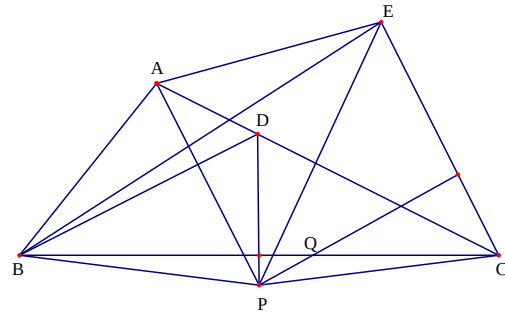
$$\text{Suy ra } \frac{AB}{\sin \widehat{AEB}} = \frac{AE}{\sin \widehat{ABE}} = \frac{AF}{\sin \widehat{ABP}} = \frac{AB}{\sin \widehat{APB}}$$

Điều này dẫn đến $\sin \widehat{AEB} = \sin \widehat{APB} \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{APB}$

Xét hai tam giác AEB và APB có $\widehat{AEB} = \widehat{APB}$, AB là cạnh chung và $\widehat{ABE} = \widehat{ABP}$

Suy ra $\triangle AEB = \triangle APB$, nên ta được $\widehat{BAP} = \widehat{BAE} = \frac{1}{2} \widehat{PAE} = \frac{1}{2} \widehat{PAC}$

Do đó ta được $\widehat{PAC} = 2\widehat{PAB}$. Bài toán được chứng minh.



Ví dụ 45. Cho tam giác ABC nhọn và ba đường cao AG, BD, CE cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm của DE và AH. Đường thẳng qua I và song song với BC cắt tia AB, tia DB lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của AH. Chứng minh rằng $IP = IQ$ và I là trực tâm của tam giác MBC.

Lời giải

Vẽ HK vuông góc với DE tại K và AL vuông góc với ED tại L.

$$\text{Ta có } \frac{AI}{AH} = \frac{AL}{HK} = \frac{S_{ADE}}{S_{HDE}} \text{ và } \frac{GA}{GH} = \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}}$$

Mặt khác ta chứng minh được $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ và $\triangle HDE \sim \triangle HBC$

$$\text{Do đó } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{HDE}}{S_{HBC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \text{ nên ta được}$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{HDE}} = \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}}$$

$$\text{Do đó ta suy ra } \frac{AI}{HI} = \frac{GA}{GH} \Rightarrow \frac{AI}{AG} = \frac{IH}{GH}.$$

$$\text{Do } PQ \parallel BC \text{ nên theo định lý Talet ta có } \frac{IP}{GB} = \frac{AI}{GI} = \frac{IH}{GH} = \frac{IQ}{GB}. \text{ Suy ra } IP = IQ.$$

$$\text{Mặt khác cũng từ } \frac{AI}{HI} = \frac{GA}{GH} \text{ ta được } \frac{IH + IA}{GH + GA} = \frac{HI}{HG}$$

Mà ta có $2MA = AH = IH + IA$ và $2GM = GH + GA$ nên ta được

$$\frac{2MA}{2GM} = \frac{HI}{GI} \Rightarrow \frac{MA}{GM} = \frac{HI}{GI} \Rightarrow \frac{GA}{GM} - 1 = \frac{GI}{GH} - 1 \Rightarrow \frac{GA}{GM} = \frac{GI}{GH} \Rightarrow GA \cdot GH = GI \cdot GM$$

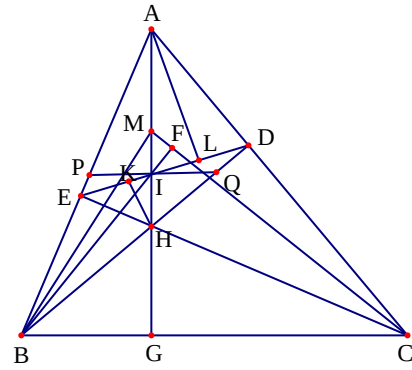
Mà ta chứng minh được $\triangle GBH \sim \triangle GAC$ nên ta có $GH \cdot GH = GB \cdot GC$

Do đó ta được $GI \cdot GM = GB \cdot GC$ nên hai tam giác vuông $\triangle GBI$ và $\triangle GMC$ đồng dạng với nhau

Suy ra $\widehat{GBI} = \widehat{GMC}$, mà ta lại có $\widehat{GMC} + \widehat{GCM} = 90^\circ$ nên ta được $\widehat{GBI} + \widehat{GCM} = 90^\circ$

Gọi F là giao điểm của BI với MC, khi đó tam giác BFC vuông tại F hay $BI \perp MC$

Tam giác BCM có hai đường cao MG và BF cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác BMC.



Ví dụ 46. Cho tam giác nhọn ABC, lấy điểm X nằm trong tam giác và điểm Y, Z nằm ngoài tam giác sao cho các tam giác XBC, YCA, ZBA đồng dạng với nhau. Đường thẳng YZ cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi P là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $YN = ZM$ khi và chỉ khi $\widehat{PAB} = \widehat{XAC}$.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Nếu P là trung điểm cạnh BC và điểm S nằm trong tam giác

ABC sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{SAC}$ thì ta luôn có $\frac{S_{SAB}}{S_{SAC}} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Thật vậy, do $\widehat{PAB} = \widehat{SAC}$ nên ta được $\widehat{BAS} = \widehat{CAP}$.

Khi đó ta có

$$\frac{S_{SAB}}{S_{PAC}} = \frac{AB \cdot AS \cdot \sin \widehat{BAS}}{AC \cdot AP \cdot \sin \widehat{CAP}} = \frac{AB \cdot AS}{AC \cdot AP} \text{ và } \frac{S_{PAB}}{S_{SAC}} = \frac{AB \cdot AP \cdot \sin \widehat{BAP}}{AC \cdot AS \cdot \sin \widehat{SAC}} = \frac{AB \cdot AP}{AC \cdot AS}$$

Do AP là đường trung tuyến nên ta được $S_{PAB} = S_{PAC}$

Do đó ta được $\frac{S_{SAB}}{S_{PAC}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{SAC}} = \frac{AB \cdot AS}{AC \cdot AP} \cdot \frac{AB \cdot AP}{AC \cdot AS} \Rightarrow \frac{S_{SAB}}{S_{SAC}} = \frac{AB^2}{AC^2}$

Trở lại bài toán: Gọi S là giao điểm của AX

và YZ. Gọi K và H lần lượt là hình chiếu của

Y và Z trên AB và AC. Ta chứng minh tứ

giác AZXY là hình bình hành

Thật vậy, theo giả thiết ta có $\triangle XBC \sim \triangle YCA$

nên ta được $\widehat{BCX} = \widehat{ACY}$ nên $\widehat{BCA} = \widehat{XCY}$

Và ta cũng có $\frac{XC}{YC} = \frac{BC}{AC}$ nên

$\triangle ABC \sim \triangle YXC$

Từ đó ta được $\widehat{BAC} = \widehat{CYX}$, $\widehat{ABC} = \widehat{YXC}$

Hoàn toàn tương tự nên ta được $\triangle ABC \sim \triangle ZBX$, suy ra $\widehat{BZX} = \widehat{BAC}$, $\widehat{BXZ} = \widehat{ACB}$

Từ đó ta được $\widehat{XYC} = \widehat{XZB}$ mà ta lại có $\widehat{AZB} = \widehat{AYC}$ nên ta được $\widehat{AZX} = \widehat{AYX}$ (1)

Mặt khác ta lại có $\widehat{ZAY} = \widehat{ZAB} + \widehat{BAC} + \widehat{YAC}$. Mà ta có

$$\begin{aligned} \widehat{ZXY} &= 360^\circ - \widehat{ZXB} - \widehat{BXC} - \widehat{CXY} = 360^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{ABC} - (180^\circ - \widehat{XBC} - \widehat{XCB}) \\ &= 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{ABC} + \widehat{XBC} + \widehat{XCB} = \widehat{BAC} + \widehat{XBC} + \widehat{XCB} \end{aligned}$$

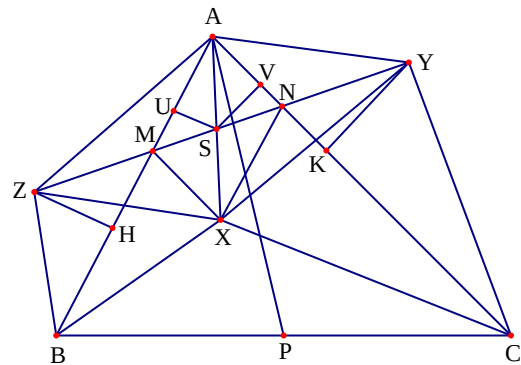
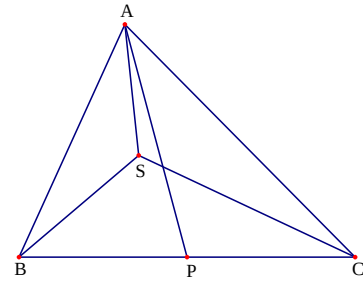
Để ý là $\widehat{BAZ} = \widehat{BCX}$; $\widehat{YAC} = \widehat{CBX}$ nên ta được $\widehat{ZAY} = \widehat{ZXY}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được tứ giác AZXY là hình bình hành.

+ Điều kiện cần: Nếu có $YN = ZM$, kết hợp với giả thiết $\triangle ABZ \sim \triangle CAY$ ta được

$$\frac{AC}{AB} = \frac{YK}{ZH} = \frac{YK \cdot AN}{ZH \cdot AM} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{S_{AYN}}{S_{AZM}} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{YN}{ZM} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{AM}{AN}$$

Do đó ta được $\triangle ABC \sim \triangle ANM$



Ta có tứ giác AZXY là hình bình hành nên ta có $SY = SZ$, mà $YN = ZM$ nên ta được $SN = SM$.

Kết hợp với $\triangle ABC \sim \triangle ANM$ ta được $\triangle ABP \sim \triangle ANS$. Do đó ta được $\widehat{PAB} = \widehat{SAN} = \widehat{XAC}$.

+ Điều kiện đủ: Nếu có $\widehat{PAB} = \widehat{XAC}$, khi đó với U và V lần lượt là hình chiếu của S trên AB và AC, kết hợp với giả thiết $\triangle ABZ \sim \triangle CAY$ thì theo bổ đề trên ta được

$$\frac{SU \cdot AB}{SV \cdot AC} = \frac{S_{SAB}}{S_{SAC}} \Rightarrow \frac{SU}{SV} = \frac{S_{SAB}}{S_{SAC}} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{ZH}{YK}$$

Do đó ta được $\frac{SU}{ZH} = \frac{SV}{YK}$. Do $SU \parallel ZH, SV \parallel YK$ ta có $\frac{SM}{ZM} = \frac{SU}{ZH} = \frac{SV}{YK} = \frac{SN}{YN}$.

Kết hợp với $SY = SZ$ ta được $\frac{ZM}{YN} = \frac{SM}{SN} = \frac{ZM + SM}{YN + SN} = \frac{SZ}{SY} = 1$

Do đó ta được $YN = ZM$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 47. Cho tam giác ABC không vuông có các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi M, N, P, Q, S theo thứ tự là trung điểm của BF, CE, BE, CF, EF. Đường thẳng qua M vuông góc với BS và đường thẳng qua N vuông góc với CS cắt nhau tại K. Đường thẳng qua P vuông góc với BS và đường thẳng qua Q vuông góc với CS cắt nhau tại L. Chứng minh rằng $2KL = AH$.

Lời giải

Do M, N, P, Q, S theo thứ tự là trung điểm của

BF, CE, BE, CF, EF nên ta được

$$MB = \frac{1}{2}BE, MS = \frac{1}{2}BE, NS = \frac{1}{2}CF, CN = \frac{1}{2}CF$$

Trong các tam giác vuông BCE và BCF có

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 = BF^2 + CF^2$$

Gọi I là giao điểm của BS và MK, ta có

$KM \perp BS$ và $KN \perp CS$ nên ta được

$$KB^2 = KI^2 + SI^2; KS^2 = KI^2 + BI^2$$

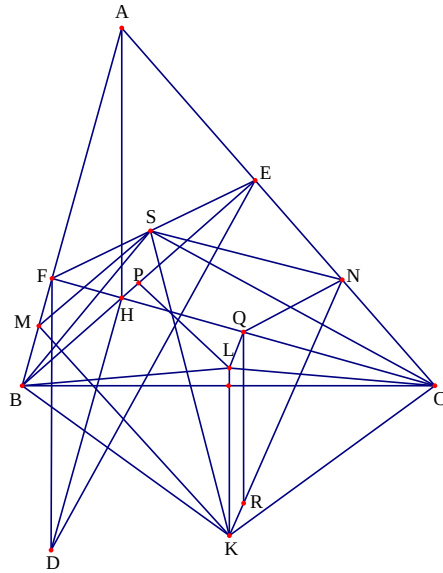
$$\Rightarrow KB^2 - KS^2 = BI^2 - SI^2$$

Tương tự ta được $MB^2 - MS^2 = BI^2 - SI^2$

Tương tự ta được $NC^2 - NS^2 = KC^2 - KS^2$

$$\text{Suy ra } KB^2 - KS^2 = MB^2 - MS^2 = \frac{1}{4}BF^2 - \frac{1}{4}BE^2 = \frac{1}{4}CE^2 - \frac{1}{4}CF^2 = NC^2 - NS^2 = KC^2 - KS^2$$

Từ đó ta được $KC = KB$.



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, khi đó BF và CE là các đường cao của tam giác HBC.

Tương tự như trên ta chứng minh được $LB = LC$

Từ đó ta suy ra LK là đường trung trực của đoạn thẳng BC nên LK vuông góc với BC.

Dễ thấy $\widehat{LKN} = \widehat{BCS}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Lại thấy $\widehat{QLK} + \widehat{SCB} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{QLK} + \widehat{LKN} = 180^\circ$. Do đó ta được $QL \parallel KN$.

Lấy các điểm D và R sao cho tứ giác AHDF và QRKL là các hình bình hành, suy ra R thuộc KN.

Ta có $HE \perp NC$ và $HD \parallel AF$, $CF \parallel NS$, $AF \perp CF$ suy ra $HD \perp NS$

Từ đó ta được $\widehat{EHD} = \widehat{CNS}$

Dễ thấy hai tam giác CHE và CAF đồng dạng nên ta có $\frac{HE}{HD} = \frac{HE}{AF} = \frac{EC}{HC} = \frac{2NC}{2NS} = \frac{NC}{NS}$

Từ đó suy ra $\triangle EHD \sim \triangle CNS$ nên ta được $\widehat{HED} = \widehat{NCS}$.

Ta có $DE \perp SN$, $SN \perp RN$ nên $DE \parallel KR$, mà $CF \parallel RQ$, $FE \parallel QN$ nên ta được $\triangle DEF \sim \triangle RNQ$

Từ đó suy ra $\frac{KL}{HA} = \frac{RQ}{DF} = \frac{QN}{FE} = \frac{1}{2}$ nên ta được $2KL = AH$.

Ví dụ 48. Cho tam giác ABC và đường phân giác AD. Lấy điểm M bất kì trên AD (với M khác A và D). Tia BM cắt AC tại E, tia CM cắt AB tại F. Chứng minh rằng nếu $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AF^2}$ thì tam giác ABC cân.

Phân tích và lời giải

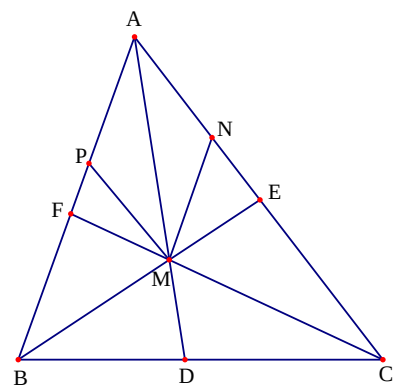
Cách 1: Từ M kẻ MN song song với AB với điểm N thuộc AC và MP song song với AC với P thuộc AB nên tứ giác ANMP là hình bình hành. Do AD là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên tứ giác ANMP là hình thoi. Áp dụng định lý Talets ta được $\frac{MP}{AE} = \frac{BP}{BA}$.

Mà ta lại có $BP = AB - AP = AB - MP$

Nên ta được $\frac{MP}{AE} = 1 - \frac{MP}{AB} \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AE} = \frac{1}{MP}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{MN}$.

Do $MN = MP$ nên từ đó ta được $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AE}$



$$\text{Suy ra } \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} \right)^2 = \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AE} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} + \frac{2}{AB \cdot AE} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AF^2} + \frac{2}{AC \cdot AF}$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AF^2} \text{ nên ta được } \frac{2}{AB \cdot AE} = \frac{2}{AC \cdot AF}$$

$$\text{Do đó ta được } \left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{AF} \right)^2 = \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AE} \right)^2, \text{ từ đó ta có các trường hợp sau}$$

+ Nếu $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AE} = \frac{1}{AC} - \frac{1}{AF}$, kết hợp với $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AE}$ ta được $AB = AC$ hay tam giác ABC cân tại A.

+ Nếu $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AE} = \frac{1}{AF} - \frac{1}{AC}$ khi đó ta được $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$

Điều này không xảy ra vì $AB > AF, AC > AE$. Vậy tam giác ABC cân tại A.

Cách 2: Áp dụng công thức tính diện tích $2S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin A$

Đặt $x = \sin A; y = \sin \frac{A}{2}$. Khi đó ta được

$$AB \cdot AC \cdot x = 2S_{ABE} = 2S_{ABM} + 2S_{AEM} = AM \cdot AB \cdot y + AM \cdot AE \cdot y = AM \cdot y \cdot (AB + AE)$$

$$\text{Suy ra ta được } \frac{AB + AE}{AB \cdot AE} = \frac{x}{AM \cdot y} \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AE} = \frac{x}{AM}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta được } \frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} = \frac{x}{AM \cdot y}. \text{ Từ đó ta được } \frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AE}.$$

Đến đây lập luận tương tự như cách 1 ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 49. Cho tam giác ABC có D là chân đường cao hạ từ đỉnh C. Trên cạnh AB lấy điểm các E, F sao cho $\widehat{ACE} = \widehat{BCF} = 90^\circ$. Lấy điểm X trên đoạn CD và điểm K trên đoạn FX sao cho $BK = BC$. Lấy điểm L trên đoạn EX sao cho $AL = AC$. Gọi giao điểm của AL và BK là M. Chứng minh rằng $ML = MK$.

Lời giải

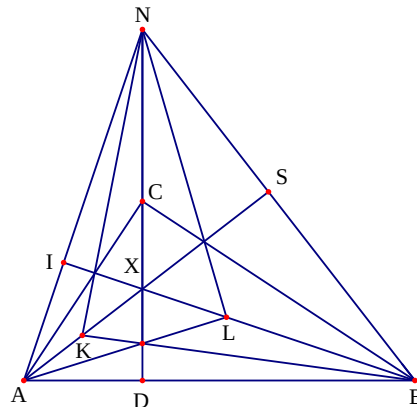
+ Trường hợp 1: Xét tam giác ABC có

$$\widehat{ACB} = 90^\circ$$

Khi đó ta được hai điểm A và F trùng nhau, hai điểm B và E trùng nhau

Vẽ $AI \perp BX$, đường thẳng AI cắt CD tại N. Tam giác NAB cao ND và BI là đường cao nên X là trực tâm, do đó ta được $AX \perp NB$ tại S.

Tam giác ACB vuông tại C có CD là đường cao



nên ta có $AC^2 = AD.AB$

Theo bài ra ta có $AL = AC$ nên ta được

$$AL^2 = AD.AB$$

Ta có $\frac{AD}{AN} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow AD.AB = AI.AN$. Do đó ta được $AL^2 = AI.AN$. Lại có $\triangle AIL \sim \triangle ALN$, do đó $\widehat{ALN} = \widehat{AIL} = 90^\circ$. Tam giác ALN vuông tại L có LI là đường cao nên ta được $LN^2 = NI.NA$.

Tương tự ta có $NK^2 = NS.NB$. Mà ta có $\frac{NI}{NB} = \frac{NS}{NA}$ nên ta được $NI.NA = NS.NB$. Do đó ta được $NK = NL$. Từ đó suy ra hai tam giác vuông KMN và LMN bằng nhau. Từ đó ta suy ra $ML = MK$

+ Trường hợp 2: Xét tam giác ABC có

$$\widehat{ACB} > 90^\circ$$

Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với XE cắt CD tại N .

Khi đó X là trực tâm tam giác NAE .

Suy ra $AX \perp NE$. Từ đó ta được

$$\widehat{AEX} = \widehat{AND}.$$

Ta có $AL^2 = AC^2 = AD.AE$ nên AL tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EDL .

Suy ra $\widehat{ALD} = \widehat{LED} = \widehat{AEX}$. Từ đó ta được

$$\widehat{AND} = \widehat{ALD}, \text{ nên bốn điểm } A, N, L, D$$

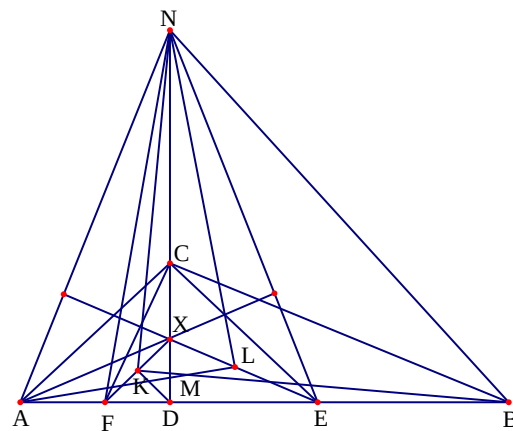
cùng nằm trên một đường tròn

Do đó ta được $\widehat{NLA} = \widehat{NDA} = 90^\circ$ hay $NL \perp AL$.

Lại có $\triangle XED \sim \triangle AND$ nên ta được $\frac{XD}{AD} = \frac{ED}{ND}$. Hai tam giác ACE và BCF cùng vuông góc

tại C nên ta được $CD^2 = AD.DE = BD.FD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{FD}{ED}$.

Do đó ta được $\frac{XD}{FD} = \frac{BD}{ND}$, nên ta có $\triangle BDN \sim \triangle XDF$, suy ra $\widehat{BND} = \widehat{DFX} = \widehat{BFK}$



Mặt khác ta có $BK^2 = BC^2 = BD \cdot BF$ nên BK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DKF. Từ đó suy ra $\widehat{BKD} = \widehat{BFK}$. Từ đó ta được $\widehat{BND} = \widehat{BKD}$ nên bốn điểm B, D, K, N cùng nằm trên một đường tròn. Do đó ta được $NK \perp BK$, áp dụng định lý Pitago ta được

$$\begin{aligned} MK^2 - ML^2 &= NL^2 - NK^2 = (NA^2 - AL^2) - (NB^2 - BK^2) \\ &= (NA^2 - NB^2) + (CB^2 - CA^2) = (CA^2 - CB^2) + (CA^2 - CB^2) = 0 \end{aligned}$$

Từ đó ta được $MK^2 = ML^2 \Rightarrow MK = ML$.

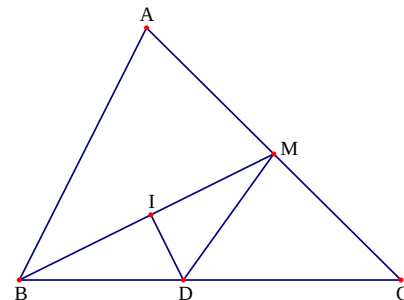
+ Trường hợp 2: Xét tam giác ABC có $\widehat{ACB} < 90^\circ$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $ML = MK$.

Nhận xét: Trường hợp $\widehat{ACB} = 90^\circ$ chính là nội dung bài toán 5 trong kì thi IMO 2012.

Ví dụ 50. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AC và D là điểm trên cạnh BC sao cho $DB = DM$. Biết rằng $2BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$. Chứng minh rằng $BD \cdot CD = \frac{AC^2 \cdot AB}{2(AB + AC)}$

Phân tích và lời giải

Cách 1. Một ý tưởng rất tự nhiên đó là tìm cách biểu diễn BD và CD theo các cạnh của tam giác ABC và kết hợp với giả thiết đã cho. Quan sát hình vẽ ta thấy có thể biểu diễn BD theo BM và $\cos \widehat{CBM}$. Để ý BM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên ta có thể biểu diễn BM và $\cos \widehat{CBM}$ theo các cạnh của tam giác ABC. Từ đó kết hợp với $2BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$ ta có thể tính được BD.CD theo các cạnh của tam giác ABC.



Để đơn giản trong quá trình biến đổi ta đặt $AB = c; BC = a; CA = b$. Để tính được $\cos \widehat{CBM}$ ta cần tạo ra tam giác vuông bằng cách vẽ DI vuông góc với BM với I thuộc BM. Khi đó ta được DI là đường trung tuyến của tam giác cân BDM. Do đó ta được

$$BD = \frac{BI}{\cos \widehat{CBM}} = \frac{BM}{\cos \widehat{CBM}}.$$

Mặt khác theo định lí cosin ta có $2 \cos \widehat{CBM} = \frac{BM^2 + BC^2 - CM^2}{BC \cdot BM} = \frac{BM^2 + a^2 - \frac{b^2}{4}}{a \cdot BM}$

Từ đó ta được $BD = \frac{a \cdot BM^2}{BM^2 + a^2 - \frac{b^2}{4}}$. Mặt khác ta có

$$BD \cdot CD = BD(a - BD) = \frac{a^2 BM^2 \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)}{\left(BM^2 + a^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2}$$

Lại có $BM^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) - \frac{b^2}{4}$ và kết hợp với giả thiết $2a^2 - b^2 = bc$ ta được

$$\left(BM^2 + a^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + a^2\right)^2 = \left(\frac{2c^2 + 2bc + b^2 + bc}{4}\right)^2 = \frac{(b+c)^2 (2c+b)^2}{16}$$

$$\text{Ta có } a^2 \cdot BM^2 \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{a^2 (2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4} \cdot \left(\frac{b^2 + bc}{2} - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{a^2 bc (2c + bc)^2}{16}$$

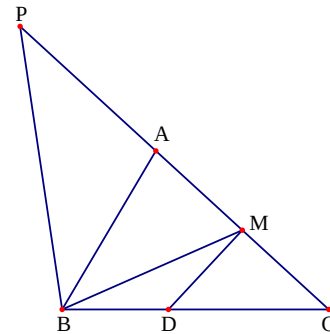
$$\text{Từ đó ta được } BD \cdot CD = \frac{a^2 bc (2c + bc)^2}{(b+c)^2 (2c+b)^2} = \frac{b^2 c}{2(b+c)} = \frac{AC^2 \cdot AB}{2(AB+AC)}$$

Cách 2: Một ý tưởng khác cũng khá tự nhiên đó là tìm cách biến đổi giả thiết $2BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$ sao cho có thể xác định được các yếu tố phụ một cách hợp lí. Chẳng hạn khi ta viết lại giả thiết của bài toán thành $2BC^2 = AC(AB + AC)$ ta chú ý đến xác định một điểm P trên AC sao cho $PA = AB$, khi đó thì ta được $CP = AC + AB$.

Từ đó ta được

$$2BC^2 = AC \cdot CP = 2CM \cdot CP \Rightarrow BC^2 = CP \cdot CM.$$

Hệ thức này làm ta tiên tưởng đến tính chất tiếp tuyến và cát tuyến của đường tròn. Tức là BC sẽ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP hay BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP. Mặt khác ta lại thấy $BD = DM$ nên DM cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP. Khi đó dễ dàng chứng minh được $\widehat{MDC} = \widehat{BAM}$ nên tứ giác ABDM nội tiếp, từ đó dẫn đến AD là phân giác của $\widehat{BAC}$. Đến đây ta có thể biểu diễn BD, CD qua các cạnh của tam giác ABC.



Trên tia đối của tia AC lấy điểm P sao cho $PA = AB$, khi đó từ giả thiết ta được

$$2BC^2 = AC.CP = 2CM.CP \Rightarrow BC^2 = CP.CM$$

Từ đó suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBM với tiếp điểm là B.

Ta lại có $DB = DM$ với D thuộc BC nên DM cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBM.

Từ đó $\widehat{ABP} = \widehat{MPB} = \widehat{DBM} = \widehat{DMB}$. Lại có $\widehat{MDC} = \widehat{DBM} + \widehat{BMD}$ và $\widehat{BAM} = \widehat{APB} + \widehat{ABP}$

Suy ra $\widehat{MDC} = \widehat{BAM}$ nên tứ giác MDBA nội tiếp đường tròn, do đó

$$\widehat{DBM} = \widehat{DMB} = \widehat{CAD} = \widehat{BAD}$$

Do đó ta được AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ta được

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow BD = \frac{AB.BC}{AB+AC}$$

Từ đó suy ra $DC = \frac{AC.BC}{AB+AC}$, kết hợp với giả thiết ta được

$$BD.CD = \frac{AB.AC.BC^2}{(AB+AC)^2} = \frac{AC^2.AB}{2(AB+AC)}$$

Nhận xét: Rõ ràng cách làm thứ hai ngắn gọn hơn cách làm thứ nhất. Tuy nhiên khi đọc bài toán thì đa phần ý tưởng đầu tiên sẽ là cách thứ nhất vì ý tưởng đó hoàn toàn tự nhiên kết hợp với các yếu tố hình học thông thường. Vấn đề là chúng ta có được sự kiên trì khi đi theo ý tưởng đó không.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC và điểm M, N lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Biết $\frac{AM}{BM} = m$; $\frac{AN}{CN} = n$. Gọi I là giao điểm của AM và BN. Tính $\frac{BI}{NI}$ và $\frac{CI}{MI}$ theo m và n.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$ và O là trung điểm cạnh BC. Góc $\widehat{xOy} = \alpha$ quay quanh điểm O sao cho Ox và Oy cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng:

a) $\triangle OEF \sim \triangle BEO$

b) Khoảng cách từ O đến EF không đổi.

Bài 3. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC} = k$. Đường thẳng cắt các tia AB, AC, AM lần lượt tại B', C', M'.

a) Chứng minh rằng nếu $k = 1$ thì $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = \frac{2AM}{AM'}$

b) Chứng minh rằng với $k > 0$ thì $\frac{AB}{AB'} + \frac{kAC}{AC'} = \frac{(1+k)AM}{AM'}$

Bài 4. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F lần lượt chia các đoạn thẳng BC, CA, AB theo tỉ số $k (k > 0)$. Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng EF, FD, DE theo cùng tỉ số $\frac{1}{k}$.

Chứng minh rằng $\triangle MNP \sim \triangle ABC$

Bài 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đường thẳng d đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại C' và B', cắt đường kéo dài của cạnh BC lại A'. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{GA'} = \left| \frac{1}{GB'} - \frac{1}{GC'} \right|$$

Bài 6. Cho tam giác ABC biết $\hat{A} = 2\hat{B} = 4\hat{C}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{AB}$

Bài 7. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng d qua I cắt tia BC và các cạnh CA, AB theo thứ tự tại $A_1; B_1; C_1$. Chứng minh rằng $\frac{BC}{IA_1} + \frac{CA}{IB_1} = \frac{AB}{IC_1}$

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Tia phân giác của góc $\widehat{BAH}$ cắt BH tại D. Gọi M là trung điểm cạnh AB, gọi E là giao điểm của MD và AH. Chứng minh rằng $AD \parallel CE$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có chu vi bằng 30cm và diện tích bằng 30cm^2 . Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Bài 10. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = 2a$. Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a. Tìm điểm M thuộc (O) sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 11. Cho đường tròn (I) nội tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Đường thẳng AD cắt đường thẳng EF tại M. Lấy N trên DF và điểm P trên DE sao cho tứ giác MNDP là hình bình hành.

a) Chứng minh rằng $\frac{ME}{MF} = \left(\frac{DE}{DF}\right)^2$

b) Chứng minh rằng tứ giác EFNP

nội tiếp.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A và có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức

$$2 \leq BC \leq \sqrt{2}(AB + AC - \sqrt{2}).$$

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $\tan \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{AB}{AC + BC}$

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ đường cao AH. Chu vi của tam giác ABH bằng 30 cm, chu vi của tam giác ACH bằng 40 cm. Tính chu vi tam giác ABC.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} \geq 3 + 2\sqrt{2}$

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Về phía ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác ABD, ACE, BCF lần lượt cân tại B, C, F. Gọi O là điểm đối xứng với F qua BC. Chứng minh rằng DE đi qua điểm O.

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 150^\circ$. Dựng các tam giác AMB và ANC sao cho các tia AM và AN nằm trong góc $\widehat{BAC}$ thỏa mãn $\widehat{ABM} = \widehat{ACN} = 90^\circ$, $\widehat{NAC} = 60^\circ$ và $\widehat{MAB} = 30^\circ$. Trên đoạn MN lấy điểm D sao cho $ND = 3MD$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM và AN theo thứ tự tại K và E. Gọi F là giao điểm của BC với AN. Chứng minh rằng:

a) Tam giác NEC cân.

b) $KF \parallel CD$.

Bài 18. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD thỏa mãn $BC = BD + AD$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Bài 19. Cho tam giác ABC có đường cao AH, biết H thuộc BC và $BH = \frac{1}{3}BC$. Trên tia đối của tia HA, lấy điểm K sao cho $AK^2 - KH^2 = \frac{1}{3}BC^2 + AB^2$. Chứng minh:

$$AK \cdot BC = AB \cdot KC + AC \cdot BK.$$

Bài 20. Trong tam giác ABC, các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho

$$\widehat{AFE} = \widehat{BFD}, \widehat{BDF} = \widehat{CDE}, \widehat{CED} = \widehat{AEF}.$$

a) Chứng minh rằng $\widehat{BDF} = \widehat{BAC}$.

b) Cho $AB = 5$, $BC = 8$, $CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD.

Bài 21. Cho tam giác ABC có M là điểm nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh đối diện lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng trong các tỉ số

$$\frac{AM}{MD}; \frac{MB}{ME}; \frac{CM}{MF}$$

có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và có một tỉ số không nhỏ hơn 2.

Bài 22. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), phân giác AD. Trên AB lấy điểm M, trên AC lấy điểm N sao cho $BM = CN$. gọi giao điểm của CM và BN là O. Từ O vẽ đường thẳng song song với AD cắt AC, AB tại E và F. Chứng minh rằng: $AB = CF$; $BE = CA$

Bài 23. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao BD và CE. Gọi I là trung điểm của BC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt BD tại M và cắt CE tại N. Chứng minh rằng $AM = AN$.

Bài 24. Cho tam giác ABC có ba đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$.

Bài 25. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, O là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 120^\circ$, D là điểm trên OC sao cho tam giác OAD đều. Đường thẳng đi qua trung điểm của AO và vuông góc với AO cắt BC tại P. Chứng minh rằng OP đi qua trung điểm của BD.

Bài 26. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác trong của tam giác. Gọi E và F là hình chiếu của A trên BI và CI. Chứng minh rằng $2EF^2 = AI^2$.

Bài 27. Chứng minh rằng $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ và $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Bài 28. Cho tam giác đều ABC có cạnh 60cm. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20\text{cm}$. Đường trung trực của AD cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F. Tính độ dài các cạnh của tam giác DEF.

Bài 29. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác BOC vuông cân tại O. Đường thẳng AB cắt BO tại F. Vẽ EN song song với FM (N thuộc tia AC và M thuộc tia AB). Đường thẳng MN cắt BC tại Q. Chứng minh AO vuông góc với OQ.

Bài 30. Cho tam giác OAB có góc O nhọn. M là điểm tùy ý trên AB . P và Q là chân đường thẳng góc kẻ từ M đến OA và OB lần lượt. Tìm tập hợp các điểm H là trực tâm tam giác OPQ . Tập hợp là gì nếu M thay đổi bên trong tam giác OAB ?

Bài 31. Ở ngoài tam giác ABC , dựng các tam giác ABR , BCP , CAQ sao cho

$$\widehat{CBP} = \widehat{CAQ} = 45^\circ, \widehat{BCP} = \widehat{ACQ} = 30^\circ, \widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^\circ.$$

Chứng minh rằng $\widehat{QRP} = 90^\circ$ và $QR = RP$.

Bài 32. Cho tam giác ABC và điểm T thuộc cạnh BC sao cho $TB = 2TC$. Gọi H là hình chiếu của B trên AT và D là trung điểm BC . Biết rằng $\widehat{TAB} = 2\widehat{TAC}$. Chứng minh rằng $DH \perp AC$.

Bài 33. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = b$; $BC = a$ ($a > b$). Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}.$$

Bài 34. Cho tam giác nhọn ABC . Lấy một điểm D bất kì nằm trong tam giác ABC và thỏa mãn các điều kiện $\widehat{ADB} = 90^\circ + \widehat{ACB}$ và $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. Chứng minh rằng $AB \cdot CD = \sqrt{2} AC \cdot BD$

Bài 35. Cho hai tam giác đều ABC và $A_1B_1C_1$ bằng nhau và nằm chồng lên nhau sao cho phần chung là một lục giác mà kí hiệu là $MNPQRS$. Chứng minh rằng $MN + PQ + RS = NP + QR + SM$

Bài 36. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa điểm C có bờ là đường thẳng AB kẻ đoạn thẳng AE vuông góc với AB sao cho $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm B có bờ là đường thẳng AC kẻ đoạn thẳng AF vuông góc với AC sao cho $AF = AC$.

Chứng minh rằng $EF = 2AM$ và $EF \perp AM$.

Bài 37. Cho tam giác ABC không cân. Có các đường trung tuyến AA' , BB' , CC' và các đường cao AH , BF , CK . Biết $CK = BB'$, $BF = AA'$. Tính $\frac{CC'}{AH}$.

Bài 38. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA' , BB' , CC' cắt nhau tại H. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt trực tâm của các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$. Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 39. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 40^\circ$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi D và E lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB và AC sao cho $\widehat{DCB} = 70^\circ$ và $\widehat{EBC} = 40^\circ$. Gọi F là giao điểm của DC và BE. Chứng minh rằng AF vuông góc với BC.

Bài 40. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$. Kẻ AD là đường phân giác trong của góc (với điểm D nằm trên cạnh BC). Gọi $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$.

- Tính các đoạn thẳng DB và DC theo a, b, c
- Chứng minh rằng $a^2 - b^2 = bc$
- Chứng minh rằng $\sin \widehat{BAC} = 2 \sin \widehat{ABC} \cdot \cos \widehat{ABC}$

Bài 41. Cho ΔABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

- Chứng minh rằng $\Delta BEC \sim \Delta ADC$. Tính BE theo $AB = m$
- Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng $\Delta BHM \sim \Delta BEC$. Tính $\widehat{AHM}$
- Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh rằng $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

Bài 42. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 60^\circ$; $BC = a$; $AB = c$. Hình chữ nhật MNPQ có đỉnh M trên cạnh AB, N trên cạnh AC, P và Q ở trên cạnh BC được gọi là hình chữ nhật nội tiếp trong tam giác ABC.

- Tìm vị trí của M trên cạnh AB để hình chữ nhật MNPQ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.
- Nêu cách dựng hình vuông EFGH nội tiếp trong tam giác ABC. Tính diện tích của hình vuông.

Bài 43. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường thẳng d đi qua A sao cho d không cắt đoạn BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác BHKC.

Bài 44. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H ($D \in BC$; $E \in AC$; $F \in AB$). Chứng minh rằng:

- Bốn điểm B, F, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) $HA.HD = HB.HE = HC.HF$.

c) Điểm H là giao của ba đường phân giác trong của tam giác DEF.

d) $\sin \widehat{ADF} \cdot \sin \widehat{BED} \cdot \sin \widehat{CFE} \leq \frac{1}{8}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Qua N kẻ đường thẳng song song với CM cắt AB tại K. Khi đó ta có

$$\frac{BI}{NI} = \frac{BM}{KM} = \frac{BM}{AM} \cdot \frac{MA}{MK} = \frac{BM}{AM} \cdot \frac{CA}{CN} = \frac{BM}{AM} \left(1 + \frac{AN}{CN} \right) = \frac{1+n}{m}$$

Vậy ta được $\frac{BI}{NI} = \frac{1+n}{m}$, hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{CI}{MI} = \frac{1+m}{n}$$

Chú ý: Khi BN và CM là các đường trung tuyến thì ta được $m = n = 1$, thì I là trọng tâm của tam giác ABC và

$$\frac{BI}{NI} = \frac{CI}{MI} = 2$$

Bài 2.

a) Đặt $\widehat{BOE} = \beta$ khi đó ta có $\widehat{COF} = 180^\circ - \alpha - \beta = \widehat{BOE}$

Do đó $\triangle COF \sim \triangle BEO$ nên ta được $\frac{EB}{CO} = \frac{EO}{OF}$

Mà ta có $OC = OB$ nên ta được $\frac{EB}{OB} = \frac{EO}{FO}$

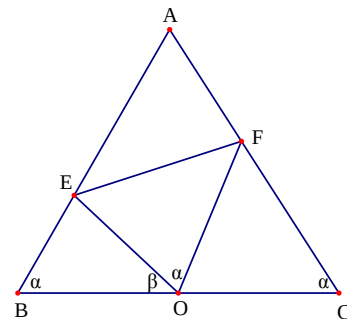
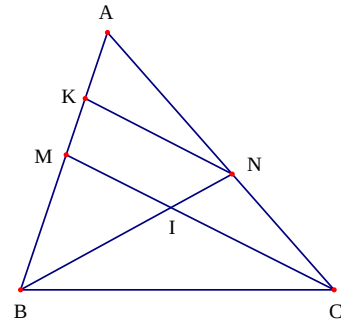
Và ta lại có $\widehat{EBO} = \widehat{FOE} = \alpha$ nên $\triangle BEO \sim \triangle OFE$

b) Vì $\triangle BEO \sim \triangle OFE$ nên ta có $\widehat{BEO} = \widehat{OEF}$, suy ra OE là phân giác của góc $\widehat{BEF}$.

Do đó khoảng cách từ O đến EF bằng khoảng cách từ O đến EB, hay khoảng cách từ O đến AB.

Mà khoảng cách từ O đến AB không đổi nên khoảng cách từ O đến EF không đổi

Bài 3.



- a) Câu a là trường hợp riêng của câu b khi $k = 1$
 b) Qua B, C kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng d cắt AM lần lượt tại E và F. Khi đó ta có E và F thuộc tia AM và M nằm giữa E và F.

Giả sử điểm F thuộc đoạn AM, khi đó điểm E nằm ngoài đoạn AM. Vì $BE \parallel CF \parallel d$ nên theo định lý Talet ta có

$$\frac{ME}{MF} = \frac{MB}{MC} = k \Rightarrow ME = kMF$$

$$\text{Lại có } \frac{AB}{AB'} = \frac{AE}{AM'} = \frac{AM + ME}{AM'} = \frac{AM + kMF}{AM'}$$

$$\text{Và } \frac{AC}{AC'} = \frac{AF}{AM'} = \frac{AM - MF}{AM'} \Rightarrow \frac{kAC}{AC'} = \frac{kAM - kMF}{AM'}. \text{ Do đó } \frac{AB}{AB'} + \frac{kAC}{AC'} = \frac{(1+k)AM}{AM'}$$

Bài 4. Trên các đoạn thẳng BF và CE lấy các điểm I

và K tương ứng sao cho $\frac{IB}{IF} = k = \frac{ND}{NF}$ và

$$\frac{KC}{KE} = \frac{1}{k} = \frac{PD}{PE}$$

Khi đó ta được $IN \parallel BD$ và $KP \parallel CD$ hay IN và KP

cùng song song với BC. Mặt khác do $\frac{IB}{IF} = k$ nên ta

$$\text{được } \frac{IB}{BF} = \frac{k}{k+1} \text{ và } \frac{FB}{FA} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{FB}{AB} = \frac{1}{k+1}. \text{ Từ đó}$$

$$\frac{BI}{AB} = \frac{BI}{BF} \cdot \frac{BF}{AB} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{CK}{CA} = \frac{CK}{CE} \cdot \frac{CE}{CA} = \frac{k}{(k+1)^2}. \text{ Do đó ta được } \frac{BI}{BA} = \frac{KC}{CA} \text{ nên } IK \parallel BC.$$

Mà $IN \parallel BC$, $KP \parallel BC$ nên các điểm I, N, P, K thẳng hàng, suy ra $NP \parallel BC$

Chứng minh tương tự ta được $PM \parallel CA$ và $MN \parallel AB$.

Vậy hai tam giác ABC và MNP có ba cạnh tương ứng song song với nhau

Ta đi chứng minh hai tam giác ABC và MNP có $\hat{A} = \hat{M}$; $\hat{B} = \hat{N}$; $\hat{C} = \hat{P}$

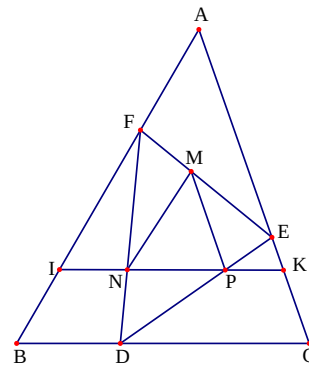
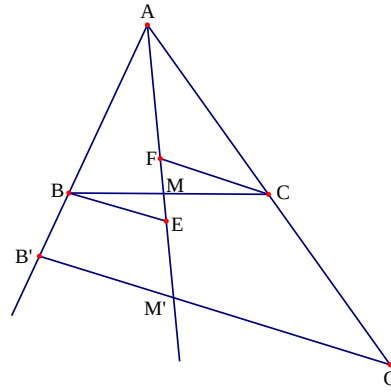
Thật vậy, khi hai góc có cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau hoặc bù nhau.

Giả sử $\hat{A} \neq \hat{M}$ khi đó $\hat{A} + \hat{M} = 180^\circ$. Do tổng ba góc của một tam giác là 180° nên khi

$\hat{A} \neq \hat{M}$ ta được $\hat{B} \neq \hat{N}$ hoặc $\hat{C} \neq \hat{P}$. Chẳng hạn $\hat{B} \neq \hat{N}$, khi đó ta lại có $\hat{B} + \hat{N} = 180^\circ$

Suy ra $\hat{A} + \hat{B} + \hat{M} + \hat{N} = 360^\circ$ nên ta được $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{M} + \hat{N} + \hat{P} > 360^\circ$, điều này vô lý.

Do đó giả sử $\hat{A} \neq \hat{M}$ là sai nên ta được $\hat{A} = \hat{M}$. Hoàn toàn tương tự ta được $\hat{B} = \hat{N}$



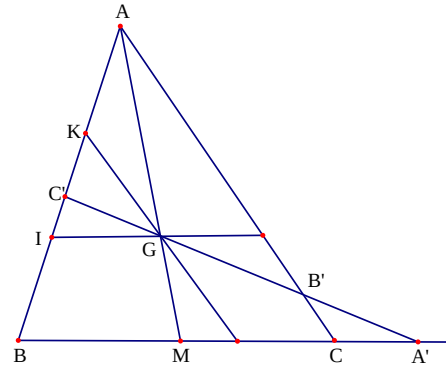
Do đó ta được $\triangle MNP \sim \triangle ABC$.

Bài 5. Giả sử điểm A' nằm trên đường kéo dài của BC về phía C . Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{GA'} = \frac{1}{GC'} - \frac{1}{GB'}.$$

Qua G kẻ các đường thẳng lần lượt song song với BC và CA , cắt cạnh AB tại I và K .

Có thể thấy được điểm C' nằm giữa hai điểm I và K .



Đặt $AB = 3x$, khi đó do G là trọng tâm tam giác ABC nên $AK = KI = IB = x$. Do $IG \parallel BA'$ nên ta được

$$\frac{GC'}{GA'} = \frac{IC'}{IB} = \frac{IC'}{x} \Rightarrow \frac{1}{GA'} = \frac{1}{GC'} \cdot \frac{IC'}{x}$$

Do $KG \parallel AB'$ nên ta được $\frac{GC'}{GB'} = \frac{KC'}{KA} = \frac{KC'}{x} \Rightarrow \frac{1}{GB'} = \frac{1}{GC'} \cdot \frac{KC'}{x}$

Do đó ta được $\frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} = \frac{1}{GC'} \left(\frac{IC'}{x} + \frac{KC'}{x} \right) = \frac{1}{GC'} \cdot \frac{KI}{x} = \frac{1}{GC'}$

Suy ra $\frac{1}{GA'} = \frac{1}{GC'} - \frac{1}{GB'}$. Nếu nằm trên BC kéo dài về phía A thì ta có $\frac{1}{GA'} = \frac{1}{GB'} - \frac{1}{GC'}$

Do đó ta được $\frac{1}{GA'} = \left| \frac{1}{GB'} - \frac{1}{GC'} \right|$.

Bài 6.

Cách 1: Đặt $\widehat{ACB} = \alpha$, khi đó ta được $7\alpha = 180^\circ$.

Gọi D là giao điểm của AB với đường trung trực của đoạn thẳng BC . Khi đó ta được tam giác ABD cân tại D và tam giác ACD cân tại C . Do đó ta được

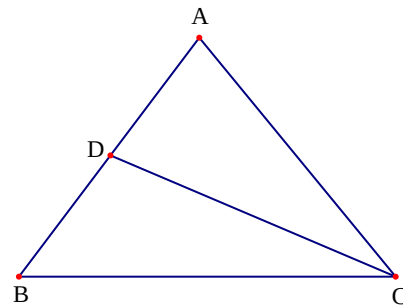
$$BD = DC = CA \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{BC}$$

Lại có CA là đường phân giác của tam giác BCD

nên ta có $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DB}$

Do đó ta được $\frac{AB}{AC} + \frac{AB}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{AB}$

Cách 2. Ta chứng minh bổ đề sau: Trong tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + bc$



Thật vậy, kẻ đường phân giác AD, theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có

$$\frac{DC}{DB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{DC}{DB+DC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow DC = \frac{ab}{b+c}$$

Do đó $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ khi và chỉ khi

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} \Leftrightarrow a^2 = b(b+c) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$$

Áp dụng bổ đề trên vào bài toán như sau: Vì ta có $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$ nên ta có $\begin{cases} a^2 = b^2 + bc \\ b^2 = c^2 + ca \end{cases}$

$$\text{Khi đó ta được } a^2 = c^2 + bc + ca \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{b+c}{a^2}$$

$$\text{Từ hệ thức } a^2 = b^2 + bc \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{b+c}{a^2}$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ hay } \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{AB}$$

Bài 7. Xét tam giác AB_1C_1 có AI là đường phân giác

của $\widehat{B_1AC_1}$. Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{AB_1}{IB_1} = \frac{AC_1}{IC_1}$$

Xét tam giác BC_1A có BI là đường phân giác

trong nên ta có $\frac{BA_1}{IA_1} = \frac{BC_1}{IC_1}$. Trên IC lấy điểm E sao

cho $B_1E \parallel A_1C$, khi đó ta có $CB_1 = EB_1$ và

$$\frac{CB_1}{IB_1} = \frac{EB_1}{IB_1} = \frac{CA_1}{IA_1}$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{CB_1}{IB_1} - \frac{CA_1}{IA_1} = 0. \text{ Từ đó ta có } \frac{AB_1 + CB_1}{IB_1} + \frac{BA_1 - CA_1}{IA_1} = \frac{AC_1 + BC_1}{IC_1}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AC}{IB_1} + \frac{BC}{IA_1} = \frac{AB}{IC_1}$$

Bài 8. Gọi N là điểm đối xứng với D qua M, mà M

là trung điểm của AB nên tứ giác BNAD là hình

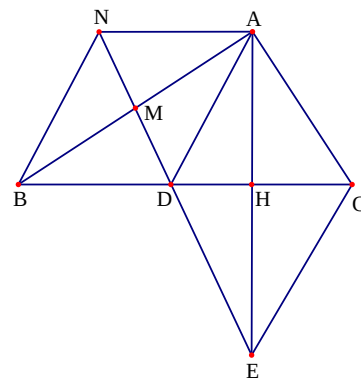
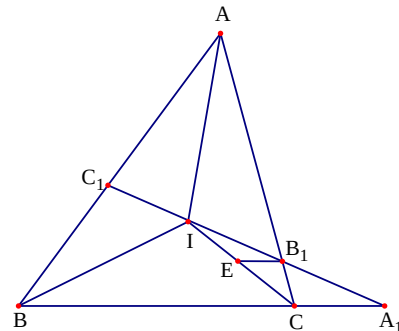
biên hành, do đó ta được $DH \parallel NA$ và $BD = AN$.

Xét tam giác EAN có $DH \parallel AN$ nên $\frac{HE}{AE} = \frac{DH}{AN}$.

Trong tam giác ABH có AD là đường phân giác

nên ta có $\frac{HD}{BD} = \frac{AH}{AB}$. Xét hai tam giác vuông HAB

và HCA có $\widehat{HAB} = \widehat{HCA}$ nên $\triangle HAB \sim \triangle HCA$



Do đó ta được $\frac{AH}{CH} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC}$.

Mặt khác ta thấy $\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$ (Cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Do đó tam giác CDA cân tại C nên ta được $CD = CA$

Ta có $\frac{HE}{AE} = \frac{DH}{AN} = \frac{DH}{BD} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow \frac{HE}{AE - HE} = \frac{CH}{CD - CH} \Rightarrow \frac{HE}{AH} = \frac{CH}{DH}$

Do đó ta được $\triangle HEC \sim \triangle HAD$, suy ra $\widehat{HEC} = \widehat{HAD}$. Từ đó ta được $AD \parallel CE$.

Bài 9. Tam giác ABC có chu vi bằng 30cm nên $AB + BC + CA = 30$

Tam giác ABC vuông tại A có diện tích bằng 30cm^2 nên $\frac{1}{2}AB \cdot AC = 30$

Mà theo Pytago ta lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Gọi $AB = x$; $AC = y$; $BC = z$, khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ \frac{1}{2}xy = 30 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 30 - z \\ 2y = 120 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

Ta có $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (30 - z)^2 - z^2 \Leftrightarrow 120 = 900 - 60z \Leftrightarrow z = 13$

Thay vào hệ phương trình trên ta được $\begin{cases} x + y = 17 \\ xy = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5; y = 12 \\ x = 12; y = 5 \end{cases}$

Vậy ta được tam giác ABC có độ dài các cạnh là

$$AB = 5\text{cm}; AC = 12\text{cm}; BC = 13\text{cm} \text{ hoặc } AB = 12\text{cm}; AC = 5\text{cm}; BC = 13\text{cm}$$

Bài 10. Đường thẳng OA cắt (O) tại C và D, với C là trung điểm của OA. Gọi E là trung điểm của OC

- Trường hợp M không trùng với C và D ta có hai tam giác OEM và OMA đồng dạng vì

$$\widehat{MOE} = \widehat{AOM}, \frac{OM}{OA} = \frac{OE}{OM}.$$

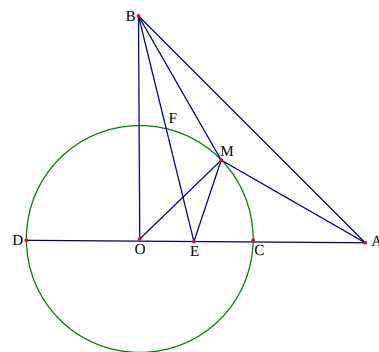
Do đó ta được $\frac{ME}{AM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2 \cdot EM$

- Trường hợp M trùng với C ta được $MA = CA = 2 \cdot EC = 2 \cdot EM$

- Trường hợp M trùng với D ta được $MA = DA = 2 \cdot ED = 2 \cdot EM$

Vậy ta luôn có $MA = 2 \cdot EM$ do đó ta được $MA + 2 \cdot MB = 2(EM + MB) \geq 2 \cdot EB$ không đổi

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn (O)



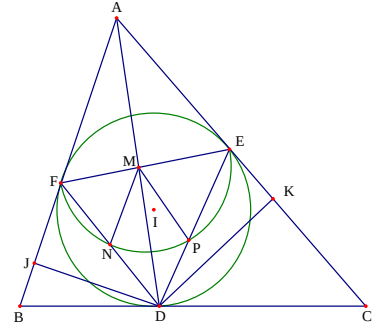
Vậy $MA + 2.MB$ nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn (O)

Bài 11. Gọi J, K là hình chiếu của D trên AB, AC .

$$\text{Ta có } \frac{ME}{MF} = \frac{S_{\triangle DEA}}{S_{\triangle DFA}} = \frac{DK}{DJ} \quad (1)$$

Trong tam giác vuông DJE thì

$$DJ = DF \sin \widehat{DFJ} = DF \cos \frac{B}{2} = DF \cdot \frac{BF}{BI}$$



Tương tự trong tam giác vuông DKE có $DK = DE \cdot \frac{CE}{CI}$

$$\text{Suy ra } \frac{DK}{DJ} = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{CE}{BF} \cdot \frac{BI}{CI} = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{CE}{BF} \cdot \frac{\frac{r}{\sin \frac{B}{2}}}{\frac{r}{\sin \frac{C}{2}}} = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{CE \cdot \sin \frac{C}{2}}{BF \cdot \sin \frac{B}{2}} = \left(\frac{DE}{DF} \right)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } \frac{ME}{MF} = \left(\frac{DE}{DF} \right)^2$$

b) Do $MNDP$ là hình bình hành nên ta được

- $\frac{DN}{DF} = \frac{MP}{DF} = \frac{ME}{EF} \Rightarrow DN \cdot DF = \frac{ME}{EF} \cdot DF^2$
- $\frac{DP}{DE} = \frac{MN}{DE} = \frac{MF}{EF} \Rightarrow DP \cdot DE = \frac{MF}{EF} \cdot DE^2$

Từ đó, theo kết quả ở câu trên, suy ra $DN \cdot DF = DP \cdot DE$. Do đó tứ giác $EFPN$ nội tiếp.

Bài 12. Tam giác ABC vuông tại A có diện tích bằng 1 nên ta có $\frac{1}{2}AB \cdot AC = 1 \Rightarrow AB \cdot AC = 2$

Theo định lý Pytago ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \geq \sqrt{2AB \cdot AC} = 2$$

Lại có

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(AB + AC) &= \sqrt{2(AB + AC)^2} = \sqrt{2(AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC)} = \sqrt{2(BC^2 + 4)} \\ &= \sqrt{(BC + 2)^2 + (BC - 2)^2} \geq \sqrt{(BC + 2)^2} = BC + 2 \end{aligned}$$

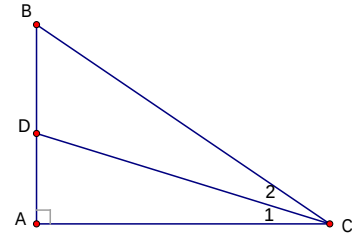
$$\text{Do đó ta được } 2 \leq BC \leq \sqrt{2}(AB + AC - \sqrt{2})$$

Bài 13. Kẻ phân giác CD ($D \in AB$) của $\widehat{ACB}$

$$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$$

Xét tam giác ACD vuông tại A ta có

$$\tan \widehat{C_1} = \tan \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{AD}{AC} \quad (1)$$



Mặt khác theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$$

Suy ra $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD+BD}{AC+BC} = \frac{AB}{AC+BC}$ (2). Từ (1) và (2) thì $\tan \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{AB}{AC+BC}$

Bài 14. Gọi p là chu vi của tam giác ABC. Ta có $p = AB + AC + BC$

Để thấy $\triangle ABH \sim \triangle CAH \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB+AH+BH}{CA+CH+AH} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ (1)

Ta lại có $\triangle ABH \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AH}{CA} = \frac{BH}{BA} = \frac{AB+AH+BH}{CB+CA+BA} = \frac{30}{p}$ (2)

Từ (1) ta đặt $AB = 3k$; $AC = 4k$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2 \Rightarrow BC = 5k$

Do đó $\frac{AB}{CB} = \frac{3}{5}$, thay vào (2) ta được $\frac{30}{p} = \frac{3}{5} \Rightarrow p = 50$

Vậy chu vi tam giác ABC bằng 50cm

Bài 15. Vì BM, BN lần lượt là phân giác của góc B và C trong tam giác ABC nên theo tính

chất đường phân giác của tam giác ta được $\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{AB}$; $\frac{NB}{NA} = \frac{BC}{AC}$. Ta có

$$\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA} = \left(\frac{MC}{MA} + 1\right) \left(\frac{NB}{NA} + 1\right) = \left(\frac{BC}{AB} + 1\right) \left(\frac{BC}{AC} + 1\right) = \frac{BC^2}{AB.AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} + 1$$

Mà $BC^2 = AB^2 + AC^2 \geq 2AB.AC \Rightarrow \frac{BC^2}{AB.AC} \geq 2 \Rightarrow \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} \geq 2\sqrt{\frac{BC^2}{AB.AC}} = 2\sqrt{2}$

Do đó ta được $\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA} \geq 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$ hay tam giác ABC vuông cân.

Bài 16. Bạn đọc tự vẽ hình

Gọi I là trung điểm của DE. Trên tia CE lấy điểm K sao cho I là trung điểm CK, tia CA cắt DK tại H.

Xét tứ giác CDKE có I là trung điểm của DE và CK nên tứ giác CDKE là hình bình hành.

Suy ra $DK \parallel CE$, mà nên $AC \perp CE$ nên ta được $AC \perp DK$ tại H.

Xét tứ giác ABDH có $\widehat{BDH} + \widehat{DHA} + \widehat{HAB} + \widehat{ABD} = 360^\circ$

Suy ra $\widehat{BDH} + 90^\circ + \widehat{HAB} + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BDH} + \widehat{HAB} = 180^\circ$

Mà lại có $\widehat{BAC} + \widehat{HAB} = 180^\circ$ nên ta được $\widehat{BDH} = \widehat{BAC}$

Ta có $DH = CE$, $CE = AC$ suy ra $DK = AC$

Xét hai tam giác BDK và BAC có $AD = AB$; $\widehat{BDK} = \widehat{BAC}$; $DK = AC$

Nên ta có $\triangle BDK = \triangle BAC$ suy ra $BK = BC$ và $\widehat{DBK} = \widehat{ABC}$

Do đó tam giác BCK cân tại B và $\widehat{KBC} = \widehat{ABC} + \widehat{KBA} = \widehat{DBK} + \widehat{KBA} = \widehat{DBA} = 90^\circ$

Suy ra tam giác BCK vuông cân tại B mà BI là đường trung tuyến nên BI vuông góc với CK tại I.

Nên tam giác BIC vuông tại I mà ta có $\widehat{BCI} = 45^\circ$ suy ra tam giác BIC vuông cân tại I.

Ta có O đối xứng với F qua BC nên $\triangle BOC = \triangle BFC$

Mà ta có tam giác BFC vuông cân tại F nên tam giác BOC vuông cân tại O

Lại có O và I cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC nên ta được O trùng với I

Vậy DE đi qua điểm O.

Bài 17.

a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} - \widehat{CAN} = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$

Nên $BM \parallel AE \Rightarrow \frac{NE}{BM} = \frac{DN}{DM} = 3 \Rightarrow NE = 3BM$.

Xét hai tam giác vuông BAM và CAN, ta có

$$BM = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{AB}{\sqrt{3}}, CN = AC \cdot \tan 60^\circ = AC\sqrt{3}$$

Do $AB = AC$ nên $CN = 3BM \Rightarrow CN = NE$ hay tam giác NEC cân tại N.

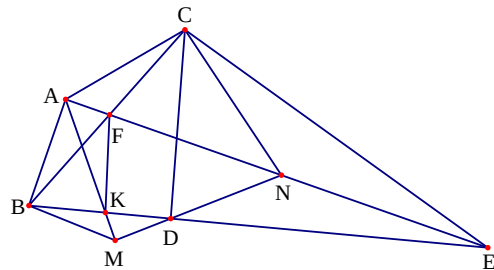
b) Vì tam giác NEC cân tại N có $\widehat{ANC} = 30^\circ$ nên $\widehat{NEC} = 15^\circ$

Tam giác ABC cân tại A mà $\widehat{BAC} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEC}$, hay tứ giác ABEC nội tiếp, suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{CAE} = 60^\circ$. Kết hợp với $\widehat{KAF} = \widehat{BAF} - \widehat{BAK} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, ta có tứ giác ABKF nội tiếp. Mặt khác $\widehat{FAB} = 90^\circ$ nên $\widehat{FKB} = 90^\circ$ hay $FK \perp BE$.

Do tứ giác ABEC nội tiếp nên $\widehat{BCE} = \widehat{BAE} = 90^\circ$.

Tam giác vuông BCE có $\widehat{CBE} = 60^\circ$ nên $BE = 2BC$

Lại có $\frac{BD}{BE} = \frac{DM}{MN} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BD}{2BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow BC = 2BD$. Suy ra $\triangle BDC \sim \triangle BCE$



Do đó ta được $\widehat{BDC} = \widehat{BCE} = 90^0$ hay $CD \perp BE$ nên ta được $KF // CD$.

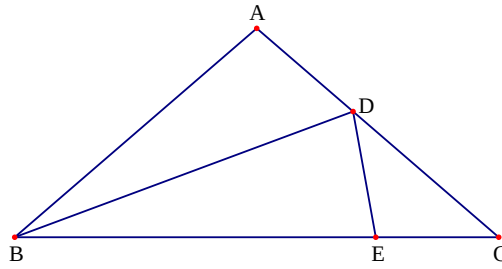
Bài 18. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho

$$BD = BE. \text{ Ta có } BC = BD + AD = BE + AD$$

suy ra $BE + EC = BE + AD$

Từ đó ta được $EC = AD$.

Mà BD là đường phân giác của tam giác ABC nên ta được



$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

Do đó ta được $\triangle CED \cong \triangle CAB$ nên ta được tam giác CED cân tại E.

Do đó $\widehat{ECD} = \widehat{CDE}$, mà $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ nên ta được $\widehat{DCE} = 2\widehat{CBC}$ và $BD = BE$.

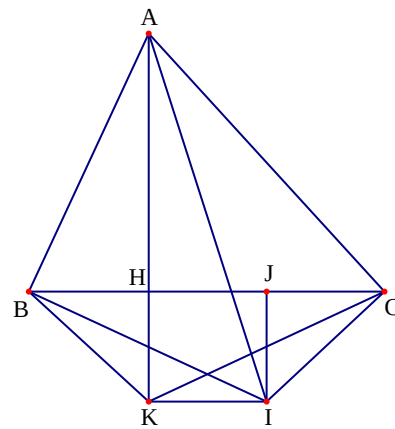
Suy ra $\widehat{BDE} = \widehat{BED} = \frac{180^\circ - \widehat{DBC}}{2}$. Mà $\widehat{CED} = 180^\circ - 2\widehat{ECD} = 180^\circ - 4\widehat{DBC}$

Do đó ta được $\widehat{BED} + \widehat{CED} = \frac{180^\circ - \widehat{DBC}}{2} + 180^\circ - 4\widehat{DBC} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{9DBC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{DBC} = 20^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^0$. Do đó ta được $\widehat{BAC} = 100^0$.

Bài 19.

Gọi J là điểm thuộc đoạn BC sao cho H là trung điểm BJ. Kẻ đường thẳng Jx qua J vuông góc BC, đường thẳng qua K song song BC cắt đường thẳng Jx tại I. Khi đó, BKIC là hình thang cân và HKIJ là hình chữ nhật.



$$BI^2 = BJ^2 + JI^2 = BJ^2 + KH^2 = \frac{4}{9}BC^2 + KH^2$$

$$AI^2 = AK^2 + KI^2 = AK^2 + HJ^2 = AK^2 + \frac{1}{9}BC^2$$

$$= \frac{1}{3}BC^2 + AB^2 + KH^2 + \frac{1}{9}BC^2$$

$$= \frac{4}{9} \text{BC}^2 + \text{AB}^2 + \text{KH}^2 = \text{BI}^2 + \text{AB}^2$$

Do đó $\triangle ABI$ vuông tại B.

Lại

CÓ

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = AB^2 - \frac{1}{9}BC^2 + \frac{4}{9}BC^2 = AB^2 + \frac{1}{3}BC^2; IC^2 = KH^2 + JC^2 = KH^2 + \frac{1}{9}BC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 + IC^2 = \frac{4}{9}BC^2 + AB^2 + KH^2 = AB^2 + BI^2 = AI^2$$

Do đó $\triangle ACI$ vuông tại C. Khi đó

$$S_{ABKC} = S_{ABIC} = S_{ABI} + S_{AIC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AK \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot BI + \frac{1}{2} AC \cdot IC$$

Hay $AK \cdot BC = AB \cdot IC + AC \cdot BK$.

Bài 20. Bạn đọc tự vẽ hình

a) Đặt $\widehat{AFE} = \widehat{BFD} = \omega$, $\widehat{BDF} = \widehat{CDE} = \alpha$, $\widehat{CED} = \widehat{AEF} = \beta$. Ta có $\widehat{BAC} + \beta + \omega = 180^\circ$ (*)

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O. Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF.

Suy ra $\widehat{OFD} + \widehat{OED} + \widehat{ODF} = 90^\circ$ (1). Ta có $\widehat{OFD} + \omega + \widehat{OED} + \beta + \widehat{ODF} + \alpha = 270^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\alpha + \beta + \omega = 180^\circ$ (**). Từ (*) và (**) ta được $\widehat{BAC} = \alpha = \widehat{BDF}$.

b) Chứng minh tương tự câu a ta có $\widehat{B} = \beta$; $\widehat{C} = \omega$

Do đó ta được $\triangle AEF \sim \triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \\ \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \\ \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7AE = 5AF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7(7 - CE) = 5(5 - BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{cases}$$

Từ đó ta được $CD - BD = 3$ mà lại có $CD + BD = 8$ nên ta tính được $BD = 2,5$ (đvdd)

Bài 21. Trước hết ta chứng minh $\frac{AM}{MD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$.

Thật vậy, qua điểm A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BM và CM lần lượt tại P và Q.

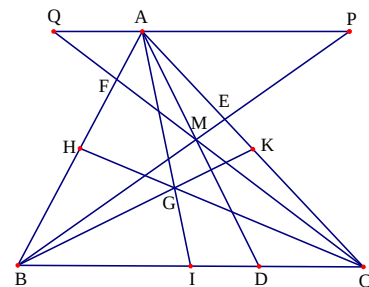
Khi đó theo định lý Talet ta có $\frac{AM}{MD} = \frac{AQ}{DC} = \frac{AP}{BD}$

Do đó ta được $\frac{AM}{MD} = \frac{AQ + AP}{CD + DB} = \frac{AQ + AP}{BC}$

Cũng theo định lý Talét ta có $\frac{AQ}{BC} = \frac{AF}{FB}$; $\frac{AP}{BC} = \frac{AE}{EC}$

Nên ta được $\frac{AQ + AP}{BC} = \frac{AQ}{BC} + \frac{AP}{BC} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$. Do vậy ta được $\frac{AM}{MD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$.

Kẻ ba đường trung tuyến AI, BK, CH cắt nhau tại G. Khi đó ba đường trung tuyến chia tam giác ABC thành sáu tam giác gồm BGI, CGI, CGK, AGK, AGH, BGH. Do đó điểm M sẽ nằm ở một trong 6 tam giác kể trên. Không mất tính tổng quát ta giả sử M nằm trên tam giác AGK.



Khi đó ta có $\frac{AM}{MD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} \leq \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{KC} \leq 2$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\frac{BM}{ME} = \frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC} \geq \frac{BF}{FA} + \frac{BD}{IC} \geq 2$

Vậy với điểm G ta đã chỉ ra được $\frac{AM}{MD} \leq 2$ và $\frac{BM}{MD} \geq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M và G trùng nhau.

Bài 22. Ta có AD là phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAF}$

Do $EI \parallel AD$ nên ta được $\widehat{BAD} = \widehat{AEF}$ (góc đồng vị)

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{OFC}$ (đồng vị) và $\widehat{AFE} = \widehat{OFC}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ nên $\triangle AEF$ cân tại A suy ra $AE = AF$

Áp dụng định lý Talet vào tam giác ACD, với I là giao điểm của EF với BC ta có

$$\frac{CF}{CA} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow \frac{CF}{CI} = \frac{CA}{CD}. \text{ Lại có AD là phân giác của}$$

$$\widehat{BAC} \text{ nên } \frac{CA}{CD} = \frac{BA}{BD}. \text{ Từ đó ta được } \frac{CF}{CI} = \frac{BA}{BD}$$

Kẻ đường cao AG của $\triangle AFE$ và $BP \parallel AG$ ($P \in AD$); $CQ \parallel AG$ ($Q \in OI$) thì

$$\widehat{BPD} = \widehat{CQI} = 90^\circ$$

Gọi trung điểm của BC là K, ta có $\triangle BPK = \triangle CQK$ nên ta được $CQ = BP$

Do đó $\triangle BPD = \triangle CQI$ nên ta được $CI = BD$. Thay vào $\frac{CF}{CI} = \frac{BA}{BD}$ ta được

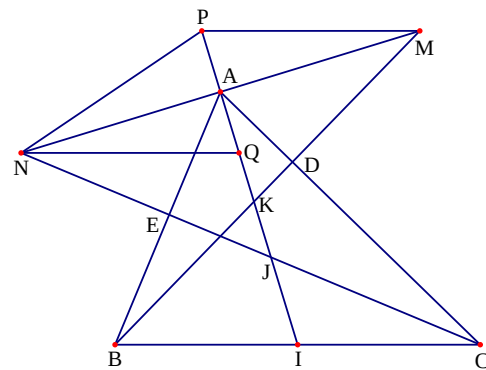
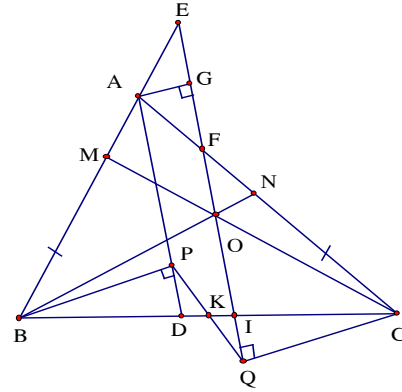
$$\frac{CF}{BD} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow CF = AB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CA$

Bài 23. Gọi giao điểm của AI với BD và CE

lần lượt tại K và J. Từ M và N kẻ các đường thẳng song song với BC cắt AI lần lượt tại P và Q. Ta có $MP \parallel NQ \parallel BC$, nên theo ta có

$$\frac{MP}{BI} = \frac{MK}{BK} \text{ và } \frac{NQ}{CI} = \frac{NJ}{CJ}$$



Do đó ta được $MP = \frac{MK \cdot BI}{KB}$, $NQ = \frac{NJ \cdot CI}{CJ}$

Mà ta có $BD \perp AC$, $CE \perp AB$, $AI \perp MN$ nên

được $\widehat{MAB} = \widehat{CJA}$; $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

Do đó hai tam giác ABM và JCA đồng dạng với nhau. Suy ra $\frac{AB}{BM} = \frac{CJ}{CA}$ nên ta được

$$AB \cdot CA = JC \cdot BM$$

Lại có $\widehat{ABK} = \widehat{ACN}$; $\widehat{AKB} = \widehat{ANC}$ nên hai tam giác KAM và ANC đồng dạng với nhau.

Suy ra $\frac{CA}{CN} = \frac{BK}{AB}$ nên ta được $AB \cdot CA = BK \cdot CN$.

Từ đó ta được $JC \cdot BM = BK \cdot CN$. Suy ra $\frac{BM}{CN} = \frac{BK}{CJ} = \frac{BM - BK}{CN - CJ} = \frac{MK}{NJ}$, do đó $\frac{JN}{JC} = \frac{KM}{KB}$

Do $BI = CI$ nên từ kết hợp các kết quả trên ta được $MP = NQ$. Do đó $PMQN$ là hình bình hành nên ta được $AM = AN$.

Bài 24.

+ Nếu tam giác ABC đều khi đó ta có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$

Suy ra $\cot A = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot B = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot C = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên ta

được $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$

+ Ta cần chứng minh khi

$\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ thì tam giác ABC đều

Thật vậy, tứ giác $ANHP$ có

$$\widehat{A} + \widehat{APH} + \widehat{PHN} + \widehat{HNA} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{PHN} = 180^\circ$$

Suy ra $\widehat{NAP} = \widehat{NHC}$. Chứng minh tương tự ta được $\widehat{ABC} = \widehat{MHC}$; $\widehat{ACB} = \widehat{MHB}$

Xét hai tam giác CMH và AMB có $\widehat{CMH} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ và $\widehat{MCH} = \widehat{MAB}$

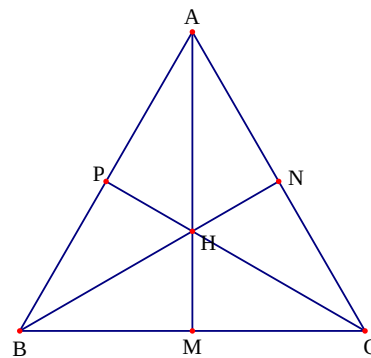
Do đó $\triangle CMH \sim \triangle AMB$ nên ta được $\frac{CM}{AM} = \frac{HM}{BM} \Rightarrow CM \cdot BM = AM \cdot AH$

Chứng minh tương tự ta được $\triangle ANH \sim \triangle BNC$ nên ta được $HN \cdot BC = AH \cdot CN$

Tam giác NHC vuông tại N nên ta có $\cot \widehat{NHC} = \frac{HN}{CN}$ suy ra $\cot A = \frac{HN}{CN}$

Chứng minh tương tự ta được $\cot B = \frac{HM}{CM}$; $\cot B = \frac{HM}{BM}$

Do đó ta được



$$\begin{aligned}
\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A &= \frac{HN}{CN} \cdot \frac{HM}{CM} + \frac{HM}{CM} \cdot \frac{HM}{BM} + \frac{HM}{BM} \cdot \frac{HN}{CN} \\
&= \frac{HM(HN \cdot BM + HM \cdot CN + HN \cdot CM)}{CN \cdot CM \cdot BM} = \frac{HM(HN \cdot BM + HN \cdot CM + HM \cdot CN)}{CN \cdot AM \cdot HM} \\
&= \frac{HN(BM + CN) + HM \cdot CN}{CN \cdot AM} = \frac{HN \cdot BC + HM \cdot CN}{CN \cdot AM} = \frac{AH \cdot CN + HM \cdot CN}{CN \cdot AM} \\
&= \frac{AM \cdot CN}{CN \cdot AM} = 1
\end{aligned}$$

Suy ra $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$. Mà ta luôn có

$$\begin{aligned}
&(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3(\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A) \\
&\Leftrightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$. Suy ra bất đẳng thức trên xảy ra dấu bằng

Hay $\cot A = \cot B = \cot C \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Do đó ta giác ABC đều.

Bài 25. Ta có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 120^\circ$

nên ta được $\widehat{AOC} = 120^\circ$.

Suy ra $\widehat{OAC} + \widehat{OCA} = 60^\circ$

Do $\hat{A} = 60^\circ$ nên $\widehat{OAB} + \widehat{OAC} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$.

Xét hai tam giác OAB và OCA có

$$\widehat{OAB} = \widehat{OCA} \text{ và } \widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 120^\circ$$

Nên ta được $\triangle OAB \sim \triangle OCA$, do đó $\frac{OA}{OB} = \frac{OA}{OC}$. Kéo dài PD lấy điểm E sao cho tứ giác

ADOE là hình thoi, khi đó ba điểm B, O, E thẳng hàng. Từ D kẻ $DE \perp DH$ với H trên OB nên ta được $OH = OE$. Tương tự kẻ $EF \perp DE$ với F trên OC nên ta được DHFE là hình chữ nhật.

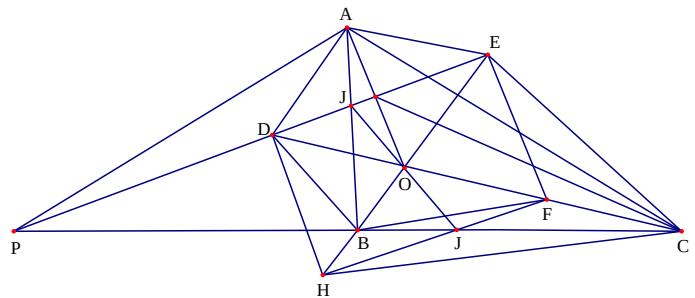
Ta có $\frac{OB}{OE} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OC}$ suy ra $BD \parallel CE$ và $\frac{OB}{OH} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OC} = \frac{OF}{OC}$ suy ra $BF \parallel HC$

Gọi I là giao điểm của HF và BC, J là giao điểm của OI và DE.

Theo định lý Talet ta có $\frac{BF}{HC} = \frac{BI}{CI}$; $\frac{BF}{CO} = \frac{BO}{HO} = \frac{BO}{EO}$ nên ta được $\frac{BI}{CI} = \frac{BO}{EO}$ suy ra $OI \parallel EC$

Do đó ta được $IJ \parallel BD$. Ta thấy IJ đi qua O và DEFH là hình chữ nhật nên $IO = JO$

Suy ra PO đi qua trung điểm của BD.



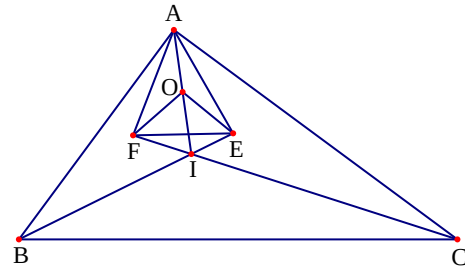
Bài 26. Trong các tam giác vuông IAE và IAF

ta có

$$\begin{cases} \widehat{IAE} + \widehat{AIE} = 90^\circ \\ \widehat{IAF} + \widehat{AIF} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{IAE} + \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = 90^\circ \\ \widehat{IAF} + \widehat{ICA} + \widehat{IAC} = 90^\circ \end{cases}$$

Từ đó ta được
$$\begin{cases} \widehat{IAE} + \frac{1}{2}\widehat{CBA} + 45^\circ = 90^\circ \\ \widehat{IAF} + \frac{1}{2}\widehat{BCA} + 45^\circ = 90^\circ \end{cases}$$

Do đó ta được $\widehat{IAE} + \widehat{IAF} + \frac{1}{2}(\widehat{CBA} + \widehat{BCA}) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAF} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAF} = 45^\circ$



Gọi O là trung điểm của AI, do $\widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90^\circ$ nên ta được $\begin{cases} OE = OA \\ OF = OA \end{cases}$

Do đó ta được các tam giác OAE và OAF cân tại O.

Suy ra $\widehat{EOF} = \widehat{EOI} + \widehat{FOI} = 2\widehat{EAO} + 2\widehat{FAO} = 2\widehat{EAF} = 90^\circ$. Do đó tam giác OEF cân tại O, từ đó ta được. Do ta có $OE = OF = OI$ nên $EF^2 = OE^2 + OF^2 = 2OI^2$

Mà lại có O là trung điểm của AI nên ta được $EF^2 = \frac{1}{2}AI^2$ hay $2EF^2 = AI^2$.

Bài 27.

Cách 1. Trước hết ta chứng minh các công thức sau

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \text{ với } 0 < \alpha < 45^\circ$$

Thật vậy, xét tam giác AHM có

$$\widehat{AHM} = 90^\circ; \widehat{AMH} = 2\alpha \text{ nên ta được}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{HM}{AM} = \frac{HM}{a}$$

$$\text{Do đó } 1 + \cos 2\alpha = 1 + \frac{HM}{a} = \frac{a + HM}{a} = \frac{CM + HM}{a} = \frac{HC}{a}$$

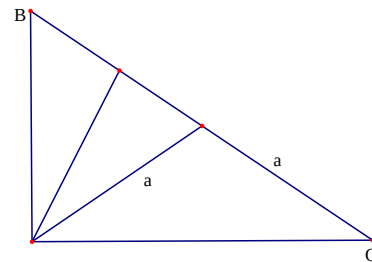
$$\text{Lại có } 2\cos^2\alpha = 2\left(\frac{CH}{AC}\right)^2 = \frac{2CH^2}{BC \cdot CH} = \frac{2CH}{BC} = \frac{2CH}{2a} = \frac{CH}{a}$$

Từ đó ta được $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$. Áp dụng công thức trên ta được

$$\begin{aligned} 2\cos^2 15^\circ &= 1 + \cos 30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16} \\ \Rightarrow \cos 15^\circ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Áp dụng hằng đẳng thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ta có

$$\sin^2 15^\circ = 1 - \cos^2 15^\circ = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{16} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$



Vậy ta được $\cos 15^0 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ và $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Cách 2: Vẽ tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$. Giả sử AC = 1 (đvđđ)

Khi đó ta được $BC = 2AB = \sqrt{3}$. Kẻ đường phân giác AD, khi đó theo tính chất đường

phân giác của tam giác ta có $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DC} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3$

Theo định lí Pitago ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 3 + 12 + 9 - 12\sqrt{3} = 12(2 - \sqrt{3})$

$$\text{Do đó } BD = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}(\sqrt{3}-1). \text{ Ta có } \cos 15^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Vậy ta được $\cos 15^0 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ và $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Bài 28. Đặt $DE = AE = x$; $DF = AF = y$.

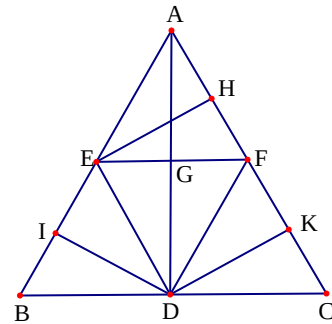
Kẻ $DI \perp AB$; $DK \perp AC$. Ta có

$$BI = BD \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

Trong tam giác BDI có

$$DI = \sqrt{BD^2 - BI^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$$

Ta có $EI = 50 - x$, áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông DEI ta được



$$\begin{aligned} \text{ED}^2 &= \text{EI}^2 + \text{ID}^2 = (50 - x)^2 + (10\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2500 - 100x + x^2 + 300 \Leftrightarrow x = 28 \end{aligned}$$

Lại có $CK = CD.\cos 60^\circ = 40.\frac{1}{2} = 20$.

Trong tam giác vuông DKC có $DK = \sqrt{DC^2 - KC^2} = \sqrt{40^2 - 20^2} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$

Ta có $FK = 40 - y$, áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông DFK ta có

$$DF^2 = DK^2 + FK^2 = (40 - y)^2 + (20\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow y^2 = 1600 - 80y + y^2 + 1200 \Leftrightarrow y = 35$$

Kẻ EH vuông góc với AF, ta có $AH = EA \cdot \cos 60^\circ = 28 \cdot \frac{1}{2} = 14$

Do đó ta được $HF = y - 14 = 35 - 14 = 21$; $EH = x \cdot \sin 60^\circ = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$

Ong tam giác vuông EFH có $EF = \sqrt{EH^2 + FH^2} = \sqrt{(14\sqrt{3})^2 + 12^2} = \sqrt{1029} = 7\sqrt{21}$

Vậy độ dài các cạnh của tam giác DEF là $DE = 28$; $DF = 35$; $EF = 7\sqrt{21}$

Bài 29.

Lấy C' đối xứng với B qua O.

Lấy điểm E' thuộc tia OB sao cho $OE' = OE$. Lấy F' thuộc tia OC sao cho $OF' = OF$. Gọi giao điểm của $E'C$ và $F'C'$ là A' . Khi đó dễ thấy $BE = E'C$.

Nên ta được $\triangle BEC = \triangle CE'C'$,

suy ra $\widehat{EBC} = \widehat{E'CC'}$ nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'CC'}$$

Tương tự ta có $CF = C'F'$.

Nên ta được $\triangle BCF = \triangle CC'F'$,

suy ra $\widehat{BCF} = \widehat{CC'F'}$ nên

$$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'C}$$

Xét hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'CC'$ có $\widehat{ABC} = \widehat{A'CC'}$, $BC = CC'$ và $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'C}$

Từ đó ta được $\triangle ABC = \triangle A'CC'$, suy ra $\triangle OBA = \triangle OCA'$

Nên ta được $AO = A'O$ và $\widehat{AOB} = \widehat{A'OC} \Rightarrow AO \perp A'O$.

Đặt $OB = OC = x$; $OE = OE' = y$. Gọi Q là giao điểm của OA' và BC.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác $E'BC$ với cát tuyến $OA'Q$ ta được $\frac{QC}{QB} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{A'E'}{A'C} = 1$

Từ trên ta có $A'C = AB$, $A'E' = AE$ và $\frac{A'E'}{A'C} = \frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Do đó ta được $\frac{QC}{QB} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{AN}{AC} = 1$.

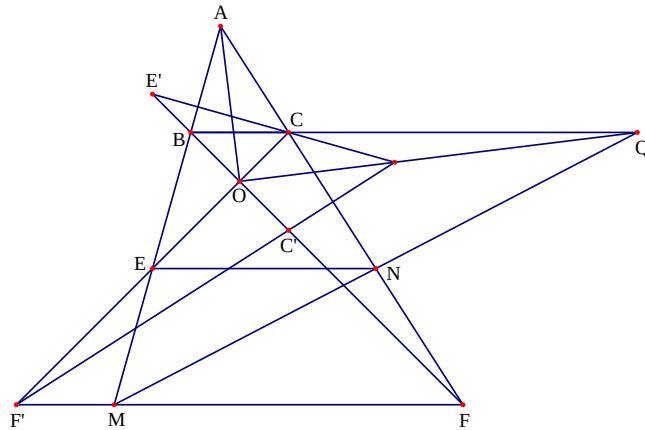
Gọi Q' là giao điểm của NC với BC. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến MNQ' ta được $\frac{Q'C}{Q'B} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NA}{NC} = \frac{Q'C}{Q'B} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AEC với cát tuyến FOE' ta suy ra được

$$\frac{FC}{FA} = \frac{BE}{BA} \cdot \frac{x}{y} = \frac{CN}{CA} \cdot \frac{x}{y}$$

Do đó ta được $\frac{Q'C}{Q'B} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{NA}{AC} = 1$

Từ đó ta suy ra $\frac{Q'C}{Q'B} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{NA}{AC} = \frac{QC}{QB} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{Q'C}{Q'B} = \frac{QC}{QB}$, nên ta được hai điểm Q và Q' trùng nhau.

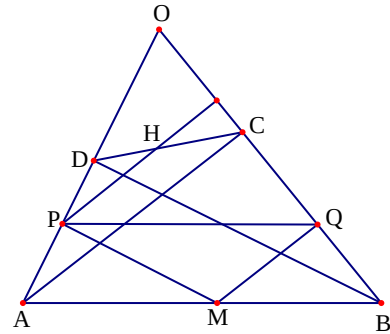


Điều này dẫn đến ba đường thẳng BC , $A'O$ và MN đồng quy tại O .

Do đó ta được AO vuông góc với OQ

Bài 30. Gọi C và D là chân đường thẳng góc kẻ từ A đến OB và từ B đến OA . Ta thấy rằng trực tâm của tam giác OPQ phải nằm trên DC .

Thật vậy, nếu từ P kẻ một đường cao của tam giác OPQ cắt DC tại H , ta sẽ chứng minh đường cao thứ hai kẻ từ Q của tam giác OPQ cũng đi qua H .



Vì $MP \parallel BD$ nên theo định lý Talets ta có $\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{DP}$.

Ta cũng có $PH \parallel AC$ nên theo định lý Talets ta cũng có $\frac{AP}{DP} = \frac{CH}{DH}$

Cũng do $MQ \parallel AC$ nên theo định lý Talets ta được $\frac{AM}{MB} = \frac{CQ}{BQ}$.

So sánh những tỷ lệ trên ta có $\frac{CH}{DH} = \frac{CQ}{BQ}$. Theo định lý Talets đảo suy ra $QH \parallel BD$

Từ đó ta được QH vuông góc với OP . Do đó QH chính là đường cao thứ hai của tam giác OPQ .

Vậy tập hợp các điểm H là trực tâm của tam giác OPQ chính là đoạn thẳng DC .

Giả sử M nằm trên đường $A'B' \parallel AB$ với A' trên OA và B' trên OB thì tập hợp điểm H là đoạn thẳng $D'C' \parallel DC$. Vậy nếu M di chuyển bên trong tam giác OAB thì các điểm H là miền bên trong tam giác ODC .

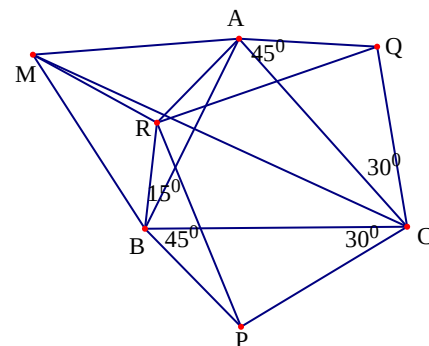
Bài 31. Dựng tam giác đều ABM . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \widehat{RAM} &= \widehat{RBM} = 45^\circ, \widehat{AMR} = \widehat{BMR} = 30^\circ, \\ \widehat{ARM} &= \widehat{BRM} = 105^\circ. \end{aligned}$$

Do đó ta được $\triangle QAC \sim \triangle RAM$ nên ta được

$$\frac{QA}{RA} = \frac{CA}{MA}$$

Điều này dẫn đến $\triangle QRA \sim \triangle CMA$, do đó ta được



$$\frac{QR}{CM} = \frac{RA}{MA} \text{ và } \widehat{QRA} = \widehat{CMA}.$$

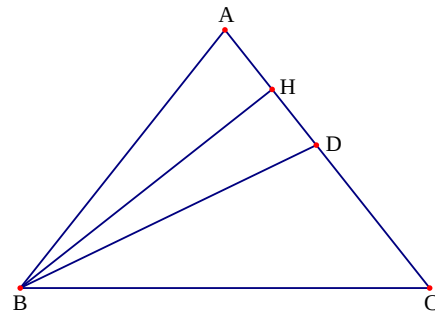
Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\triangle PBC \sim \triangle RBM$ nên ta được $\frac{PB}{RB} = \frac{CB}{MB}$

Từ đó suy ra $\triangle PRB \sim \triangle CMB$ nên ta được $\frac{PR}{CM} = \frac{RB}{MB}$ và $\widehat{PRB} = \widehat{CMB}$

Từ $\frac{PB}{RB} = \frac{CB}{MB}$ và $\frac{PR}{CM} = \frac{RB}{MB}$, để ý là $RA = RB$ và $MA = MB$ nên ta được $QR = PR$

Từ $\widehat{QRA} = \widehat{CMA}$ và $\widehat{PRB} = \widehat{CMB}$ ta được $\widehat{QRA} + \widehat{PRB} = \widehat{AMB} = 60^\circ$. Nên ta suy ra $\widehat{QRP} = 90^\circ$

Bài 33. Vẽ đường cao BH của tam giác ABC. Do đường phân giác BD bằng cạnh bên của tam giác ABC nên tam giác BAD cân tại B. Từ đó ta thấy BH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến của tam giác BAD. Do đó ta được $AH = \frac{AD}{2}$



Tam giác ABC có BD là đường phân giác nên ta

$$\text{có } \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Từ đó ta được } \frac{DA}{b} = \frac{DC}{a} = \frac{DA + DC}{a + b} = \frac{AC}{a + b} = \frac{b}{a + b} \Rightarrow DA = \frac{b^2}{a + b}$$

Tam giác ABH vuông tại H nên theo định lý Pitago ta được

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2$$

Nên ta được $BH^2 = b^2 - \frac{AD^2}{4}$. Tam giác BCH vuông tại H nên ta có $BC^2 = BH^2 + CH^2$

$$\text{Do đó suy ra } BH^2 = BC^2 - CH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2 = a^2 - \left(b - \frac{AD}{2}\right)^2$$

$$\text{Hay ta được } BH^2 = a^2 - b^2 + b, AD - \frac{AD^2}{4}$$

$$\text{Từ các kết quả trên ta được } b^2 - \frac{AD^2}{4} = a^2 - b^2 + b, AD - \frac{AD^2}{4} \Leftrightarrow b^2 - a^2 = b \cdot AD - b^2$$

$$\text{Thay } DA = \frac{b^2}{a + b} \text{ vào đẳng thức trên ta được } (b + a)(b - a) = b \cdot \frac{b^2}{a + b} - b^2 \Leftrightarrow \frac{a - b}{ab} = \frac{b}{(a + b)^2}$$

$$\text{Từ đó ta suy ra được } \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a + b)^2}$$

Bài 34. Vẽ tam giác DAE vuông cân tại E sao cho E và D nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB.

Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDB} = 90^\circ + \widehat{EDB}$

Mà ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ + \widehat{ACB}$ nên ta được $\widehat{EDB} = \widehat{ACB}$

Mà ta có $AD = DE$ nên từ $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$ ta được

$$\frac{AD}{DE} = \frac{BC}{BD}.$$

Xét hai tam giác ABC và EBD có $\widehat{EDB} = \widehat{ACB}$ và

$$\frac{AD}{DE} = \frac{BC}{BD} \text{ nên ta được } \triangle ABC \sim \triangle EBD$$

Từ đó ta được $\widehat{ABC} = \widehat{EBD}$ và $\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD}$

Từ $\widehat{ABC} = \widehat{EBD}$ ta suy ra được $\widehat{DBC} = \widehat{ABE}$

Xét hai tam giác ABE và CBD có $\widehat{DBC} = \widehat{ABE}$ và $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD}$ nên $\triangle ABE \sim \triangle CBD$

Từ đó suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AE \cdot BC$

Tam giác DEA vuông tại D nên theo định lý Pitago ta có

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = AD^2 + AD^2 = 2AD^2$$

Do đó ta được $AE = \sqrt{2}AD$. Mà ta có $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$ nên $AD \cdot BC = AC \cdot BD$

Do đó ta được $AB \cdot CD = AE \cdot BC = \sqrt{2}AD \cdot BC = \sqrt{2}AD \cdot BD$ hay $AB \cdot CD = \sqrt{2}AC \cdot BD$.

Bài 35.

Giả sử hai tam giác đều ABC và $A_1B_1C_1$

bằng nhau và nằm chồng lên nhau sao cho lục giác MNPQRS được kí hiệu như hình vẽ.

Các góc của hai tam giác đều ABC và $A_1B_1C_1$

bằng nhau và hai góc đối đỉnh thì bằng nhau

nên ta nhận thấy các tam giác

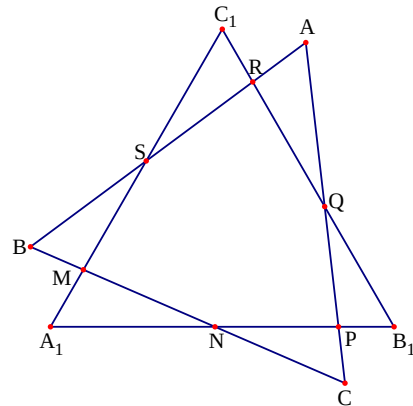
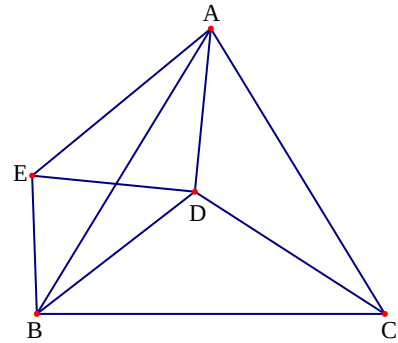
A_1MN ; B_1PQ ; C_1RS ; CPN ; ARQ ; BMS đồng dạng

với nhau. Từ đó ta được

$$\frac{MN}{A_1M + A_1N} = \frac{PQ}{B_1P + B_1Q} = \frac{RS}{C_1R + C_1S} = \frac{NP}{CN + CP} = \frac{QR}{AQ + AR} = \frac{SM}{BS + BM}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{MN + PQ + RQ}{A_1M + A_1N + B_1P + B_1Q + C_1R + C_1S} = \frac{NP + QR + MS}{CN + CP + AQ + AR + BM + BS}$$



Đặt độ dài cạnh của tam giác đều là a và $x = MN + PQ + RQ$; $y = NP + QR + MS$.

Khi đó ta được $\frac{x}{3a-y} = \frac{y}{3a-x} \Leftrightarrow x(3a-y) = y(3a-x) \Leftrightarrow (x-y)(3a-x-y) = 0$

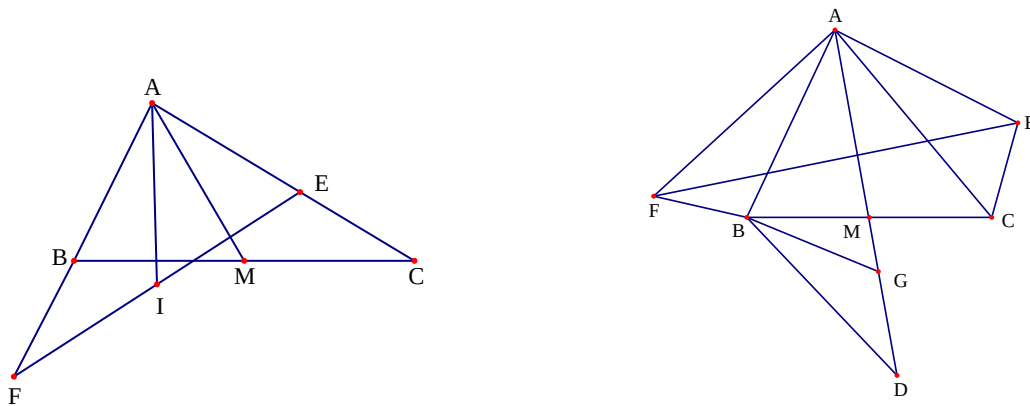
Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} 3a &= BC + CA + AB = (BM + MN + NC) + (CP + PQ + QA) + (AR + RS + SB) \\ &= (CN + CP) + (AQ + AR) + (BS + BM) + (MN + PQ + RS) \\ &> (NP + QR + MS) + (MN + PQ + RS) = y + x \end{aligned}$$

Hay ta được $3a > x + y \Rightarrow 3a - x - y > 0$

Do đó từ đẳng thức trên ta suy ra được $x = y$ hay $MN + PQ + RS = NP + QR + SM$.

Bài 36. Ta xét các trường hợp sau



+ Trường hợp 1: Nếu tam giác ABC vuông tại A. Khi đó E nằm trên tia AB và F nằm trên tia AB.

Hai tam giác vuông AEF và ABC bằng nhau nên ta được $BC = EF$

Mà M là trung điểm của BC nên ta được $2AM = BC$ do đó ta được $EF = 2AM$

Mặt khác ta lại có $\widehat{MAE} = \widehat{ACM}$; $\widehat{ABB} = \widehat{BAM} = \widehat{AEF}$ và $\widehat{ABM} + \widehat{MAE} = 90^\circ$

Do đó ta được $\widehat{MAE} + \widehat{AEF} = 90^\circ$ nên ta được $EF \perp AM$

+ Trường hợp 2: Nếu tam giác ACB có $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Khi đó trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MA = MD$. Nối B với D, từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AD tại G.

Xét hai tam giác AMC và DMB có $AM = MD$, $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$, $BM = CM$

Do đó ta được $\triangle AMC = \triangle DMB$, suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{BDM}$ và $AC = BD$

Ta có $AE \perp AB$, $BG \perp AB$ nên ta được $BG \parallel AE$ suy ra $\widehat{EAM} = \widehat{BGA}$

Mà ta có $\widehat{BGA} = \widehat{GBD} + \widehat{BMD}$ và $\widehat{EAM} = \widehat{EAC} + \widehat{CAM}$. Do đó ta được $\widehat{EAC} = \widehat{GBD}$.

Ta có $AE = AB$, $\widehat{EAF} = \widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC}$, $BD = AF = AC$ nên $\triangle EAF = \triangle ABD$.

Từ đó suy ra $EF = AD$ mà $AD = 2AM$ nên ta được $EF = 2AM$.

Cũng do $\triangle EAF = \triangle ABD$ nên ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ABD}$

Mà ta có $\widehat{BAD} + \widehat{DAE} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEF} + \widehat{DAE} = 90^\circ$, suy ra $AM \perp EF$

+ Trường hợp 3: Nếu tam giác ACB có $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được $EF = 2AM$ và $EF \perp AM$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 37. Trước hết ta phát biểu hai bổ đề:

Bổ đề 1: Trong tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} \text{ (Định lí sin)}$$

Bổ đề 2: Trong tam giác ABC ta luôn có

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot CA \cos C \text{ (Định lí cosin)}$$

Giả sử $1 = AB < AC < BC$. Gọi M là trọng tâm tam giác và kẻ $A'E \perp AC$, $B'Q \perp AB$.

Khi đó $A'E$ là đường trung bình của tam giác BCF .

Do đó $A'E = \frac{BF}{2} = \frac{AA'}{2}$ và tam giác vuông AEA' nên ta được $\widehat{A'AE} = 30^\circ$. Tương tự $\widehat{B'BA} = 30^\circ$.

Do $A'B' \parallel AB$ nên ta có $\widehat{A'B'M} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'AM} = 30^\circ$ do đó ta có $\triangle B'A'M \sim \triangle AA'B'$

Suy ra $\frac{A'B'}{A'M} = \frac{AA'}{A'B'} \Rightarrow A'B'^2 = AA' \cdot A'M$

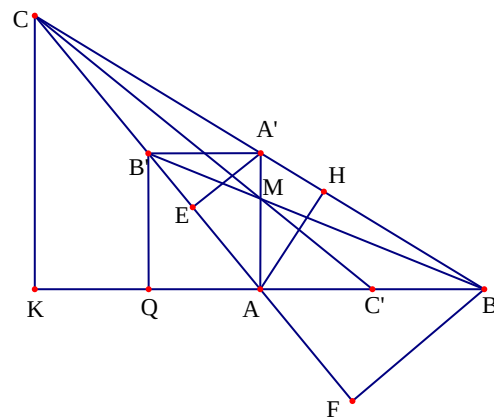
$$\text{Do đó ta có } A'B'^2 = 3A'M^2 \Leftrightarrow \frac{A'B'}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{A'M}{\frac{1}{2}} = \frac{A'M}{\sin \widehat{A'B'M}}$$

Như vậy áp dụng định lí sin cho tam giác $A'MB'$ ta được $\widehat{A'MB'} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{A'MB'} = 120^\circ$
+ Nếu $\widehat{A'MB'} = 60^\circ$ thì ta có $\widehat{B'A'A} = \widehat{A'AB} = 90^\circ$, $\widehat{B'BA} = 30^\circ$ nên tam giác BAB' cân tại A

Do đó ta được $AB' = AB = 1$. Từ đó ta được $AC = 2AB = 2$; $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ACC' ta được

$$C'C^2 = AC^2 + AC'^2 - 2AC \cdot AC' \cdot \cos 120^\circ = \frac{21}{7}$$



Do đó ta được $CC' = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Tam giác $AA'B'$ vuông tại A' nên ta được

$$AA'^2 = AB'^2 - A'B'^2 = \frac{3}{4}$$

Trong tam giác $AA'B$ vuông tại A có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{AA' \cdot AB}{A'B} = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó ta được $\frac{CC'}{AH} = \frac{7}{2}$

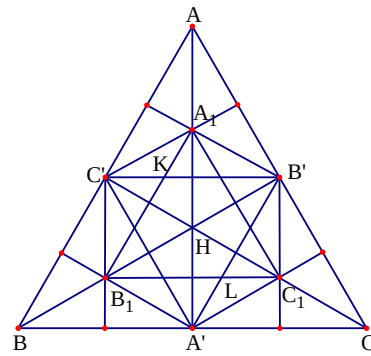
+ Nếu $\widehat{A'M'B} = 120^\circ$, khi đó tam giác $A'MB'$ cân tại M , do đó tam giác AMB cân tại M . Suy ra ta có $AA' = BB'$ dẫn đến $AC = BC$, điều này mâu thuẫn với giả thiết tam giác ABC không cân. Do vậy khả năng này không xảy ra.

Vậy ta được $\frac{CC'}{AH} = \frac{7}{2}$.

Bài 38. + Điều kiện cần: Khi tam giác ABC đều thì

H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$.

Thật vậy, khi tam giác ABC đều thì AA' , BB' và CC' lần lượt là các đường trung trực của các cạnh B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 của tam giác $A_1A_2A_3$. Mặt khác ta cũng có tam giác $A_1A_2A_3$ đều nên H là giao điểm ba đường trung trực đồng thì là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$.



+ Điều kiện đủ: Khi H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ thì tam giác ABC đều.

Thật vậy, vì H là trực tâm tam giác ABC nên các tứ giác $BA'HC'$, $CA'HB'$, $BCB'C'$ nội tiếp được.

Do đó ta được $\widehat{C'A'H} = \widehat{C'BH} = \widehat{HCB'} = \widehat{HA'B'}$ hay $A'H$ là phân giác của $\widehat{C'A'B'}$

Hoàn toàn tương tự ta có $B'H$ là phân giác của góc $\widehat{A'B'C'}$. Do đó H là tâm đường tròn trong nội tiếp tam giác $A'B'C'$. Ta có $C'A_1 \parallel HB'$ và $B'A_1 \parallel HC'$ do đó tứ giác $A_1B'HC'$ là hình bình hành.

Hoàn toàn tương tự ta được $C'HA'B_1$ cũng là hình bình hành. Do đó ta suy ra tứ giác

$A_1A'B'B_1$ là hình bình hành nên ta được $A_1B_1 \parallel A'B'$. Tương tự ta cũng có $B_1C_1 \parallel B'C'$.

Gọi K và L lần lượt là giao điểm của A_1B_1 với $B'C'$ và B_1C_1 với $A'B'$. Khi đó ta được tứ giác $B'KB_1L$ là hình bình hành. Trong hình bình hành $B'KB_1L$ các đường phân giác của góc $\widehat{B'}$ và $\widehat{B_1}$ hoặc song song hoặc trùng nhau. Mà hai đường phân giác đó lại có giao điểm chung là H (do H là tâm đường tròn nội tiếp của hai tam giác $A'B'C'$ và $A_1A_2A_3$) nên hai đường phân giác đó trùng nhau, do đó ba điểm B', H, B_1 thẳng hàng. Do BB' vuông góc với cả AC và $A'C'$ nên ta được $AC \parallel A'C'$. Mà ta lại có tứ giác $AC'A'C$ nội tiếp nên ta được $\widehat{BAC} = \widehat{BC'A'} = \widehat{BCA}$. Tương tự ta cũng được $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Do đó tam giác ABC đều.

Bài 39. Trên AC lấy điểm N sao cho $\widehat{ABN} = 40^\circ$, khi đó

ta có $\widehat{ABN} = \widehat{BAN} = 40^\circ$. Do đó tam giác ABN cân tại N .

Do đó ta được $\widehat{BNC} = 80^\circ$. Do đó ta suy ra

$\widehat{BNC} = \widehat{BCN} = 80^\circ$ nên tam giác BCN cân tại B , suy ra $BN = BC$.

Trong tam giác BFC có $\widehat{FBC} = 40^\circ$; $\widehat{FCB} = 70^\circ$ nên

$$\widehat{BFC} = 70^\circ$$

Từ đó ta được tam giác BCF cân tại B , suy ra $BC = BF$.

Như vậy ta được $BN = BF$.

Kéo dài BC lấy điểm M sao cho $AB = AM$, khi đó tam giác ABM đều. Xét tam giác ABN và tam giác MBF có $AB = AM$, $BN = BF$ và $\widehat{ABN} = \widehat{BAN} = 40^\circ$. Nên ta được $\triangle ABN = \triangle MBF$, mà ta có tam giác ABN cân tại N nên tam giác MBF cân tại F , do đó ta được $FM = FB$. Từ $AB = AM$ và $FM = FB$ suy ra AF là đường trung trực của MB hay AF vuông góc với BC .

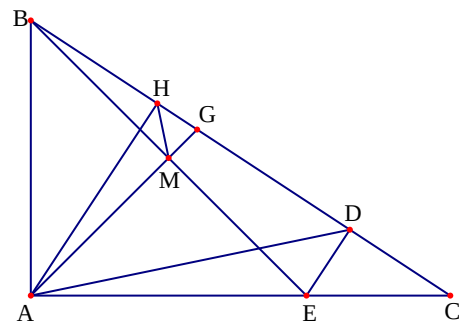
Bài 41.

a) Xét $\triangle EDC$ và $\triangle BAC$ có $\begin{cases} \widehat{EDC} = \widehat{BAC} = 90^\circ (\text{gt}) \\ \widehat{C} \text{ chung} \end{cases}$

Suy ra $\triangle EDC \sim \triangle BAC$ nên ta được $\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle ADC$ có $\begin{cases} \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC} \\ \widehat{C} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow$

$$\triangle BEC \sim \triangle ADC$$



Suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{ADC}$. Mà $AH = HD$ nên

$$\widehat{ADH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{AEB} = 45^\circ$$

Do đó $\triangle AEB$ vuông cân tại A. Từ đó ta tính được $BE = m\sqrt{2}$

b) Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CAB$ có $\begin{cases} \widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^\circ (\text{gt}) \\ \widehat{B} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CAB$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 2AB^2 = 2BH \cdot BC$$

$$\Rightarrow BE^2 = 2BH \cdot BC \Rightarrow \frac{BE}{2BC} = \frac{BH}{BE} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BE}$$

Xét $\triangle BHM$ và $\triangle BEC$ có $\begin{cases} \frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BE} \\ \widehat{MBH} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle BHM \sim \triangle BEC$

$$\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BEC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{AHM} = 45^\circ$$

c) Xét $\triangle AHC$ và $\triangle BAC$ có $\begin{cases} \widehat{AHC} = \widehat{BAC} = 90^\circ (\text{gt}) \\ \widehat{C} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle BAC$

Do đó ta được $\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{AC}$. Mặt khác $\triangle AEB$ vuông cân tại A có AM là trung tuyến thì AM

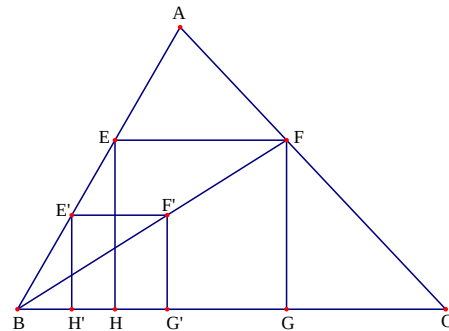
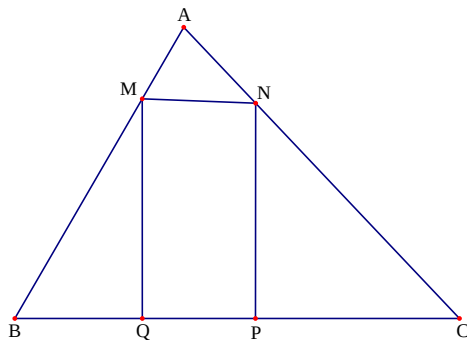
cũng là phân giác hay AG là đường phân giác của $\triangle ABC$. Suy ra $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$. Từ đó ta có:

$$\frac{GB}{GC} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow GB \cdot HC = AH \cdot GC \Rightarrow GB \cdot HC = AH \cdot (BC - GB)$$

$$\Rightarrow GB \cdot HC = AH \cdot BC - AH \cdot GB \Rightarrow AH \cdot GB + GB \cdot HC = HD \cdot BC \Rightarrow GB \cdot (AH + HC) = HD \cdot BC$$

$$\text{Từ ta được } \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

Bài 42.



a) + Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq c$). Ta có $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow MN = \frac{ax}{c}$ và $MQ = BM \sin 60^\circ = \frac{(c-x)\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra diện tích của MNPQ là: $S = \frac{ax(c-x)\sqrt{3}}{2c} = \frac{a\sqrt{3}}{2c} x(c-x)$

+ Ta có bất đẳng thức $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a > 0, b > 0$)

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $x(c-x) \leq \left(\frac{x+c-x}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = c - x \Leftrightarrow x = \frac{c}{2}$.

Suy ra $S \leq \frac{a\sqrt{3}}{2c} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{ac\sqrt{3}}{8}$. Vậy $S_{\max} = \frac{ac\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{c}{2}$ hay M là trung điểm của cạnh AC.

b) Giả sử đã dựng được hình vuông EFGH nội tiếp trong tam giác ABC. Nối BF, trên đoạn BF lấy điểm F'.

Dựng hình chữ nhật E'F'G'H' ($E' \in AB; G', H' \in BC$).

Ta có: $E'F' // EF$ và $F'G' // FG$, nên $\frac{E'F'}{EF} = \frac{BE'}{BE} = \frac{BF'}{BF} = \frac{F'G'}{FG}$

$\Rightarrow E'F' = F'G'$. Do đó E'F'G'H' là hình vuông.

+ Cách dựng và chứng minh: Trên cạnh AB lấy điểm E' tùy ý, dựng hình vuông E'F'G'H' (G', H' thuộc cạnh BC). Dựng tia BF' cắt AC tại F. Dựng hình chữ nhật EFGH nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh tương tự trên, ta có $EF = FG$, suy ra EFGH là hình vuông.

+ Ta có $\frac{BH'}{E'H'} = \cot g 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cot g \widehat{F'BC} = \frac{BG'}{F'G'} = \frac{BH' + H'G'}{F'G'} = \frac{BH'}{E'H'} + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$

Suy ra tia BF' cố định khi E' di động trên AB, cắt AC tại một điểm F duy nhất.

Trường hợp hình vuông E'F'G'H' có đỉnh F' ở trên cạnh AC; G' và H' ở trên cạnh BC, lý luận tương tự ta cũng có tia CE' cố định, cắt AB tại E. Vậy bài toán có một nghiệm hình duy nhất.

+ Đặt $AE = x$. Ta có $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow EF = \frac{ax}{c}$ và $HE = (c-x) \sin B = \frac{(c-x)\sqrt{3}}{2}$

EFGH là hình vuông, nên $EF = EH \Leftrightarrow \frac{ax}{c} = \frac{(c-x)\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{c^2\sqrt{3}}{2a + c\sqrt{3}}$

Suy ra diện tích hình vuông EFGH là $S = EF^2 = \frac{3a^2c^2}{(2a + c\sqrt{3})^2}$.

Bài 43.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = BH^2 + AH^2 + AK^2 + CK^2$

Để dàng chứng minh bất đẳng thức

$$2(BH^2 + AH^2) \geq (BH + AH)^2$$

Tương tự ta có $2(AK^2 + CK^2) \geq (AK + CK)^2$

Suy ra $2BC^2 \geq (BH + AH)^2 + (AK + CK)^2$

Đặt $BH + AH = m$; $AK + CK = n$.

Vì $\widehat{CAK} + \widehat{BAH} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$ nên $\widehat{CAK} = \widehat{ABH}$. Dẫn đến tam giác ABH đồng dạng với tam giác CAK

$$\text{Do đó } \frac{AH}{CK} = \frac{BH}{AK} = \frac{AB}{AC} = \frac{AH+BH}{CK+AK} = \frac{m}{n} \text{ Nên } \frac{AB^2}{m^2} = \frac{AC^2}{n^2} = \frac{(AB^2 + AC^2)}{(m^2 + n^2)} \geq \frac{BC^2}{2BC^2} = \frac{1}{2}$$

Hay $m \leq \sqrt{2}AB$; $n \leq AC\sqrt{2}$

Chu vi tứ giác BHKC là $BC + BH + AH + AK + KC = BC + m + n \leq BC + (AB + AC)\sqrt{2}$

Vậy chu vi BHKC lớn nhất là $BC + (AB + AC)\sqrt{2}$

Bài 44.

a) Gọi I là trung điểm BC

+ Tam giác BEC vuông tại E nên có

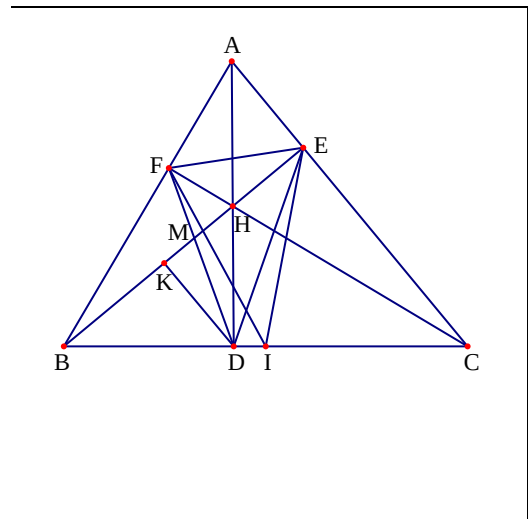
$$IB = IC \Rightarrow EI = BI = CI = \frac{BC}{2}$$

+ Tam giác BFC vuông tại F nên có

$$IB = IC \Rightarrow FI = BI = CI = \frac{BC}{2}$$

Từ các kết quả trên suy ra $BI = FI = EI = CI = \frac{BC}{2}$

Vậy bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc đường tròn tâm I đường kính BC



b) Xét tam giác HAE và HBD có $\widehat{AHE} = \widehat{BHD}$; $\widehat{HEA} = \widehat{HDB} = 90^\circ$

$$\text{Nên ta được } \triangle HAE \sim \triangle HBD \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow HA \cdot HD = HB \cdot HE$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \triangle AHF \sim \triangle CHD \Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{HF}{HD} \Rightarrow HA \cdot HD = HC \cdot HF$$

Từ các kết quả trên ta được $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$

c) Ta có $HA.HD = HC.HF \Rightarrow \frac{HD}{HC} = \frac{HF}{HA}$ kết hợp với $\widehat{DHF} = \widehat{CHA}$

Suy ra $\triangle DHF \sim \triangle CHA \Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HCA}$

Tương tự ta cũng được $\triangle DHE \sim \triangle BHA \Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{HBA}$

Mà ta lại có $\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$. Kết hợp các kết quả trên ta được $\widehat{HDF} = \widehat{HDE}$

Do đó DH là phân giác của $\widehat{FDE}$. Chứng minh tương tự ta có EH là phân giác của $\widehat{DEF}$

Do đó H là giao điểm của ba đường phân giác trong tam giác DEF

d) Kẻ $DK \perp BE$ ($K \in BE$). Gọi M là giao điểm của BE và DF

$$\Rightarrow \sin \widehat{BED} = \sin \widehat{KED} = \frac{DK}{DE} \text{ mà } DK \leq DM \Rightarrow \sin \widehat{BED} \leq \frac{DM}{DE}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{DM}{DE} = \frac{FM}{FE} \Rightarrow \frac{DM}{DE} = \frac{FM}{FE} = \frac{DM+FM}{DE+FE} = \frac{DF}{DE+FE}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương DE và EF ta có

$$DE + EF \geq 2\sqrt{DE.EF} \Rightarrow \frac{DF}{DE+EF} \leq \frac{DF}{2\sqrt{DE.EF}} \text{ hay } \sin \widehat{BED} \leq \frac{DF}{2\sqrt{DE.EF}}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \sin \widehat{CFE} \leq \frac{DE}{2\sqrt{FD.FE}} \text{ và } \sin \widehat{ADF} \leq \frac{EF}{2\sqrt{DE.DF}}$$

$$\text{Do đó ta được } \sin \widehat{ADF} . \sin \widehat{BED} . \sin \widehat{CFE} \leq \frac{EF}{2\sqrt{DE.DF}} . \frac{DF}{2\sqrt{DE.EF}} . \frac{DE}{2\sqrt{FD.FE}}$$

$$\text{Hay } \sin \widehat{ADF} . \sin \widehat{BED} . \sin \widehat{CFE} \leq \frac{1}{8}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.}$$

HẾT