

QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa phép chia.

Cho hai số nguyên a và b trong đó $b \neq 0$ ta luôn tìm được hai số nguyên q và r duy nhất sao cho $a = bq + r$, với $0 \leq r \leq |b| - 1$. Trong đó a là số bị chia, b là số chia, q là thương, r là số dư.

Khi a chia cho b thì các số dư $r \in \{0; 1; 2; \dots; |b| - 1\}$

- Nếu $r = 0$ thì $a = bq$, khi đó ta nói a chia hết cho b hay b chia hết a . Ký hiệu: $a : b$ hay $b | a$.

Vậy a chia hết cho b khi và chỉ khi tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

- Nếu $r \neq 0$, khi đó ta nói a chia b có số dư là r .

2. Một số tính chất cần nhớ

- Tính chất 1. Mọi số nguyên khác 0 luôn chia hết cho chính nó.
- Tính chất 2. Nếu $a : b$ và $b : c$ thì $a : c$.
- Tính chất 3. Nếu $a : b$ và $b : a$ thì $a = \pm b$.
- Tính chất 4. Nếu $a : b$ và $(b, m) = 1$ thì $a : m$.
- Tính chất 5. Nếu $a : m$ và $b : m$ thì $(a \pm b) : m$.
- Tính chất 6. Nếu $a : m$, $a : n$ và $(m, n) = 1$ thì $a : mn$.
- Tính chất 7. Nếu $a : b$ và $c : d$ thì $ac : bd$.
- Tính chất 8. Trong n số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số nguyên chia hết cho n .
- Tính chất 9. Nếu $a - b \neq 0$ với a, b là các số tự nhiên thì $(a^n - b^n) : (a - b)$ ($n \in \mathbb{N}$).
- Tính chất 10. Nếu $a + b \neq 0$ với a, b, n là các số tự nhiên và n là số lẻ thì $(a^n + b^n) : (a + b)$.

3. Một số dấu hiệu chia hết

Đặt $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, với $a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0$ là các chữ số. Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau:

- $A:2 \Leftrightarrow a_0:2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$
- $A:3 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n):3.$
- $A:4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}:4$
- $A:5 \Leftrightarrow a_0:5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}.$
- $A:8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0}:8$
- $A:9 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n):9.$
- $A:11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_2 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)]:11.$
- $A:25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}:25$
- $A:125 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0}:125$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

 **Dạng 1: Sử dụng tính chất trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n ($n \geq 1$)**

* **Cơ sở phương pháp:** Sử dụng các tính chất cơ bản như: tích hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2, tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 và 3 do đó chia hết cho 6. Chúng ta vận dụng linh hoạt các tính chất cơ bản này trong nhiều các bài toán về chia hết.

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

- Tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6
- Tích của 2 số chẵn liên tiếp chia hết cho 8
- Tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 120

Hướng dẫn giải

a) Trong 3 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 2 nên tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6 (do $(2, 3) = 1$)

b) Hai số chẵn liên tiếp có dạng $2n$ và $(2n + 2)$ với $n \in \mathbb{Z}$

Do đó tích hai số nguyên liên tiếp có dạng $4n(n + 1)$

Do n và $n + 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên $n(n + 1):2$

Vì thế $4n(n + 1):8$

c) Ta có $120 = 3.5.8$

Do 5 số nguyên liên tiếp có 3 số liên tiếp nên theo ý a) ta có tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

5 số nguyên liên tiếp có 2 số chẵn liên tiếp nên theo ý b) ta có tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 8.

Mặt khác 5 số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 5 nên tích chúng cũng chia hết cho 5.

Vậy tích của 5 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 120.

Chú ý: Tổng quát ta có tích của n số tự nhiên liên tiếp chia hết cho $n!$

Bài toán 2. Chứng minh rằng tích của 3 số chẵn liên tiếp chia hết cho 48

Hướng dẫn giải

Ba số chẵn liên tiếp có dạng $2n$, $(2n + 2)$ và $(2n + 4)$ với $n \in \mathbb{Z}$

Do đó tích hai số nguyên liên tiếp có dạng $8n(n + 1)(n + 2)$

Do n , $(n + 1)$ và $(n + 2)$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $n(n + 1)(n + 2) : 6$

Vì thế $n(n + 1)(n + 2) = 6m$ ($m \in \mathbb{Z}$)

Do đó tích của 3 số chẵn liên tiếp là $8n(n + 1)(n + 2) = 48m : 48$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh với mọi số nguyên n thì $n^3 - n$ chia hết cho 6

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Biểu thức là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên một trong 3 số chia hết cho 2, và một trong 3 số chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên $(n^3 - n) : 6$

Bài toán 4. Chứng minh với mọi số nguyên lẻ n thì $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho 128

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$n^6 - n^4 - n^2 + 1 = n^4(n^2 - 1) - (n^2 - 1) = (n^2 - 1)(n^4 - 1) = (n^2 - 1)^2(n^2 + 1)$$

Vì n là số lẻ nên đặt $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) Ta có:

$$(n^2 - 1)^2 = [(2k + 1)^2 - 1]^2 = (4k^2 + 4k)^2 = [4k(k + 1)]^2$$

Ta có $k(k + 1)$ chia hết cho 2 nên $[4k(k + 1)]^2 : 64$

$$\text{Mặt khác: } n^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1) : 2$$

$$\text{Do đó } n^6 - n^4 - n^2 + 1 = (n^2 - 1)^2 (n^2 + 1) : 128 \text{ (đpcm)}$$

Chú ý: Bình phương của một số lẻ là số lẻ

Dạng 2: Phân tích thành nhân tử

* **Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh $A(x)$ chia hết cho p ta phân tích $A(x) = D(x) \cdot p$, còn nếu không thể đưa ra phân tích như vậy ta có thể viết $p = k \cdot q$

Nếu $(k, q) = 1$ ta chứng minh $A(x)$ chia hết cho k và q .

Nếu $(k, q) \neq 1$ ta viết $A(x) = B(x) \cdot C(x)$ rồi chứng minh $B(x)$ chia hết cho k và $C(x)$ chia hết cho q .

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

(Đề thi HSG lớp 9 TP Thanh Hóa 2016-2017)

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ giả thiết } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 0$$

Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow a + b = -c$$

$$\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 : 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Bài toán 2. Cho $A = 1.2.3.....29$, $B = 30.31.32.....58$.

Chứng minh rằng $A + B$ chia hết cho 59.

Hướng dẫn giải

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Ta có:

$$B = (59 - 29)(59 - 28)(59 - 27) \dots (59 - 1) = 59k - 1.2.3 \dots 29 = 59k - A \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow A + B = 59k : 59$$

Vậy $A + B$ chia hết cho 59.

Bài toán 3. Cho 3 số nguyên dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 \text{ chia hết cho } 5(x - y)(y - z)(z - x)$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } a = x - y, b = y - z \Rightarrow z - x = -(a + b)$$

Do đó ta cần chứng minh: $a^5 + b^5 - (a + b)^5$ chia hết cho $-5ab(a + b)$

$$\text{Ta có: } a^5 + b^5 - (a + b)^5 = -(5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4)$$

$$= -5ab(a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2)$$

$$= -5ab[(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a + b)]$$

$$= -5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

Do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với ba số tự nhiên a, b, c trong đó có đúng một số lẻ và hai số chẵn ta luôn có $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (a - b + c)^3$ Chia hết cho 96

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ 2015)

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } a + b - c = z; b + c - a = x; a + c - b = y \text{ thì } x + y + z = a + b + c.$$

$$\text{Ta có } (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(x + z) = 3.2c.2a.2b = 24abc$$

Do 3 số a, b, c có 2 số chẵn nên abc chia hết cho 4 do đó $24abc$ chia hết cho $24.4 = 96$

Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 3: Sử dụng phương pháp tách tổng

* **Cở sở phương pháp:** Để chứng minh $A(x)$ chia hết cho p ta biết đổi $A(x)$ thành tổng các số hạng rồi chứng minh mỗi số hạng chia hết cho p .

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh m, n là số nguyên ta có:

$$a) \quad n(n^2 + 11) : 6$$

$$b) \quad mn(m^2 - n^2) : 6$$

$$c) \quad n(n + 1)(2n + 1) : 6$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $n(n^2 + 11) = n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = (n-1)n(n+1) + 12n$

Để chứng minh: $(n-1)n(n+1):6, 12n:6 (n \in \mathbb{Z})$

Do đó: $n(n^2 + 11):6$

b) Ta có: $mn(m^2 - n^2) = mn[(m^2 - 1) - (n^2 - 1)] = mn(m^2 - 1) - mn(n^2 - 1)$

Do: $mn(m^2 - 1) = n(m-1)m(m+1):6, mn(n^2 - 1) = m(n-1)n(n+1):6$

Do đó: $mn(m^2 - n^2):6$

c) Ta có: $n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(n+2+n-1) = n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1)$

Do: $n(n+1)(n+2):6, (n-1)n(n+1):6$

Do đó: $n(n+1)(2n+1):6$

Chú ý: Tách tổng là phương pháp chứng minh chia hết mà lời giải dễ hiểu, ngắn gọn và đẹp mắt nên thường được trình bày khi bài toán có thể giải bằng nhiều phương pháp, tuy nhiên để áp dụng các em cần linh hoạt trong việc tách.

Ví dụ: như câu a) thì ta thấy $12n$ chia hết cho 6 nên ta tách riêng ra phần còn lại chúng ta phân có thể đưa về dạng tích, dựa vào tính chất chia hết của tích các số tự nhiên để dàng chứng được cũng chia 6.

Câu b) chúng ta nghĩ việc thêm bớt 1 để tạo ra tổng của hai tích của 3 số tự nhiên liên tiếp.

Tương tự câu c) dễ dàng tách $2n + 1 = (n - 1) + (n + 2)$ để đưa về tổng của hai tích 3 số tự nhiên tiếp.

Bài toán 2. Chứng minh rằng: n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để chứng minh n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau ta chứng minh $(n^5 - n):10$

Thật vậy: $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1)[(n^2 - 4) + 5]$

$n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)$

Nhận xét: $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 5 do đó chia hết cho 10.

Mặt khác $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 nên

$5(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 10.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Do đó $(n^5 - n):10$ vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. a) Chứng minh rằng $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{Z}$

b) Chứng minh rằng $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ là số nguyên với mọi n là số nguyên chẵn

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{7n}{15} = n - \frac{8n}{15} = n - \frac{n}{5} - \frac{n}{3}$

Do đó: $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + n - \frac{n}{5} - \frac{n}{3} = \frac{n^5 - n}{5} + \frac{n^3 - n}{3} + n$

Từ các thí dụ trên ta dễ dàng chứng minh được: $(n^5 - n):5, (n^3 - n):3$ do đó bài toán được chứng minh.

b) Do n là số nguyên chẵn nên $n = 2m$ (với $m \in \mathbb{Z}$)

Do đó: $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{m}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} = \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

Theo ý c) thí dụ 6 ta có $n(n+1)(2n+1):6$ do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 4. Chứng minh rằng $ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $2a, a+b, c \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $ax^2 + bx + c = ax^2 - ax + (a+b)x + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c$.

Dễ thấy: $\frac{x(x-1)}{2} \in \mathbb{Z}$ vì x và $(x-1)$ là hai số nguyên liên tiếp.

Do đó: $ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $2a, a+b, c \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 5. Cho các số nguyên $a_1; a_2; \dots; a_n$. Đặt $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ và $B = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$.

Chứng minh rằng A chia hết cho 6 khi và chỉ khi B chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với mọi số nguyên a ta luôn có $a^3 - a : 6$.

Thật vậy, ta có $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$.

Ta thấy trong ba số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 2 và có một số chia hết cho 3, lại có 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra được $a^3 - a = (a-1)a(a+1) : 6$.

Xét hiệu sau

$$B - A = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_n^3 - a_n)$$

Áp dụng bổ đề trên ta được $(a_1^3 - a_1) : 6; (a_2^3 - a_2) : 6; \dots; (a_n^3 - a_n) : 6$

Do đó ta được $B - A : 6$. Suy ra A chia hết cho 6 khi và chỉ khi B chia hết cho 6.

Dạng 4: Sử dụng hằng đẳng thức

Cơ sở phương pháp: Nếu a, b là các số nguyên thì:

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ với n là số tự nhiên và $a \neq b$.

$a^n - b^n$ chia hết cho $a + b$ với n là số tự nhiên chẵn và $a \neq -b$.

$a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$ với n là số tự nhiên lẻ và $a \neq -b$.

$(a + b)^n = ka + b^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên.

$(a + 1)^n = ac + 1 \quad (a - 1)^n = ac + (-1)^n, n$ là số tự nhiên.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Với n là số tự nhiên chẵn. Chứng minh rằng:

a) $22^{22} + 55^{55}$

b) $20^n + 16^n - 3^n - 1 : 323.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $P = 22^{22} + 55^{55} = (21 + 1)^{22} + (56 - 1)^{55} = (BS\ 7 + 1)^{22} + (BS\ 7 - 1)^{55}$

$= BS\ 7 + 1 + BS\ 7 - 1 = BS\ 7$ nên $22^{22} + 55^{55}$ chia 7 dư 0

b) Ta có: $323 = 17 \cdot 19$. Ta biến đổi $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$

Ta có: $(20^n - 1) : (20 - 1) \Rightarrow (20^n - 1) : 19$

Mặt khác n là số chẵn nên $(16^n - 3^n) : (16 + 3) \Rightarrow (16^n - 3^n) : 19$

Do đó $(20^n - 1) + (16^n - 3^n) : 19 \Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : 19 \quad (1)$

Ta biến đổi $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1^n)$

Ta có: $(20^n - 3^n) : (20 - 3) \Rightarrow (20^n - 3^n) : 17$

Mặt khác n là số chẵn nên $(16^n - 1^n) : (16 + 1) \Rightarrow (16^n - 3^n) : 17 \quad (2)$

Do $(17, 19) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra: $20^n + 16^n - 3^n - 1 : 323.$

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$ b) $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$ c) $7.5^{2n} + 12.6^n : 19$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } 11^{n+2} + 12^{2n+1} &= 11^2.11^n + 12.12^{2n} = 121.11^n + 12.144^n \\ &= (133 - 12).11^n + 12.144^n = 133.11^n + 12(144^n - 11^n) \end{aligned}$$

Do đó $133.11^n : 133$ và $12(144^n - 11^n) : (144 - 11)$ hay $12(144^n - 11^n) : 133$ Nên $133.11^n + 12(144^n - 11^n) \Rightarrow 11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$ (đpcm)**b) Ta có:**

$$\begin{aligned} 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} &= 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n} = 51.5^n + 8.64^n \\ &= (59 - 8).5^n + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } (64^n - 5^n) : (64 - 5) \Rightarrow (64^n - 5^n) : 59$$

Nên $59.5^n + 8(64^n - 5^n) : 59 \Rightarrow 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$ (đpcm)

$$\text{c) Ta có: } 7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + (19 - 7).6^n = 19.6^n + 7(25^n - 6^n)$$

$$\text{Vì } (25^n - 6^n) : (25 - 6) \Rightarrow 7(25^n - 6^n) : 19$$

Nên $19.6^n + 7(25^n - 6^n) : 19 \Rightarrow 7.5^{2n} + 12.6^n : 19$ (đpcm)**Bài toán 3.** Chứng minh rằng $A = 1993^{1997} + 1997^{1993} : 30$ *Hướng dẫn giải*Sử dụng tính chất $(a + b)^n = ka + b^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 1993^{1997} + 1997^{1993} = (1980 + 13)^{1997} + (2010 - 13)^{1993} \\ &= 1980c + 13^{1997} + 2010d - 13^{1993} \\ &= 1980c + 2010d + 13^{1993}(13^4) \\ &= 30(66c + 67d + 952.13^{1993}) : 30. \end{aligned}$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng $C = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) : 91$ ($n \in \mathbb{N}$).

(Chuyên sư phạm Hà Nội 1997 – 1998)

Hướng dẫn giải

Sử dụng tính chất $(a+b)^n = ka + b^n$, $(a+1)^n = ac + 1$, $(a-1)^n = ac + (-1)^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 25^n + 5^n - 18^n - 12^n \\ &= (21+4)^n + 5^n - (14+4)^n - (7+5)^n \\ &= 21c + 4^n + 5^n - 14d - 4^n - 7e - 5^n \\ &= 7(3c - 2d - e):7. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} C &= (26-1)^n + 5^n - (13+5)^n - (13-1)^n \\ &= 26f + (-1)^n + 5^n - 13g - 5^n - 13h - (-1)^n \\ &= 13(2f - g - h):13. \end{aligned}$$

Vì $(13, 7) = 1$ nên $C:7.13 = 91$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng: $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Hướng dẫn giải

Ta có $B = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 101.50$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \dots + (50^3 + 51^3) \\ &= (1+100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2+99)(2^2 + 2.99 + 99^2) + \dots + (50+51)(50^2 + 50.51 + 51^3) \\ &= 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2.99 + 99^2 + \dots + 50^2 + 50.51 + 51^2):101 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + \dots + (50^3 + 100^3)$

Mỗi số hạng đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chia hết cho B .

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có: $A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

(Chuyên sư phạm Hà Nội 2001)

Hướng dẫn giải

Ta có công thức quen thuộc $B = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$\text{Lại có: } 2A = (n^5 + 1) + [(n-1)^5 + 2^5] + [(n-2)^5 + 3^5] + \dots + (1 + n^5)$$

Nhận thấy mỗi số hạng đều chia hết cho $(n+1)$ nên $2A : (n+1) \quad (1)$

$$\text{Lại có } 2A - 2n^5 = [(n-1)^5 + 1^5] + [(n-2)^5 + 2^5] + \dots \text{ chia hết cho } n$$

$$\text{Do } 2n^5 : n \text{ nên } 2A : n \quad (2)$$

$$\text{Do } 2n^5 : n \text{ nên } 2A : n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2A$ chia hết cho $n(n+1)$ do đó $2A : 2B \Rightarrow A : B$ (đpcm)

Chú ý: Ta có công thức tổng quát: với n là số nguyên dương và k là số tự nhiên lẻ thì:

$$a) 1^k + 2^k + \dots + n^k : (1 + 2 + \dots + n)$$

$$b) 1^k + 2^k + \dots + (2k)^k : n(2n+1)$$

Đây cũng là một bài tập, bạn đọc có thể tự chứng minh để củng cố kiến thức.

Dạng 5: Sử dụng phương pháp xét số dư

*** Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho p ta xét số n có dạng $n = kp + r$ với $r \in \{0; 1; 2; \dots; p-1\}$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $n(2n^2 + 7)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

Hướng dẫn giải

Xét 3 trường hợp:

$$\text{- Trường hợp 1: } n = 3k \text{ thì } n(2n^2 + 7) = 3k[2(3k)^2 + 7] = 3k(18k^2 + 7) : 3$$

$$\text{- Trường hợp 2: } n = 3k + 1 \text{ thì}$$

$$\begin{aligned} n(2n^2 + 7) &= (3k+1)[2(3k+1)^2 + 7] \\ &= (3k+1)[18k^2 + 12k + 2 + 7] = 3(3k+1)(6k^2 + 4k + 3) : 3 \end{aligned}$$

$$\text{- Trường hợp 3: } n = 3k + 2 \text{ thì}$$

$$\begin{aligned} n(2n^2 + 7) &= (3k+2)[2(3k+2)^2 + 7] \\ &= (3k+2)[18k^2 + 24k + 8 + 7] = 3(3k+2)(6k^2 + 8k + 5) : 3 \end{aligned}$$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n(2n^2 + 7)$ chia hết cho 3.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $n(2n+7)(7n+1)$ chia hết cho 6

Hướng dẫn giải

Trong 2 số n và $(7n + 1)$ phải có một số chẵn nên $n(2n + 1)(7n + 1) : 2$

Mà $(3, 2) = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh $n(2n + 1)(7n + 1) : 3$

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ thì $n(2n + 1)(7n + 1) = 3k(6k + 1)(21k + 1) : 3$
- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ thì $2n + 7 = (6k + 9) : 3 \Rightarrow n(2n + 7)(7n + 1) : 3$
- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì $7n + 1 = (21k + 15) : 3 \Rightarrow n(2n + 7)(7n + 1) : 3$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n(2n + 7)(7n + 1)$ chia hết cho 6.

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $(a^3 + b^3 + c^3) : 9$ thì một trong ba số a, b, c chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Với a, b, c là các số nguyên khi đó ta có $a = 3q_1 + r_1; b = 3q_2 + r_2; c = 3q_3 + r_3$ với $q_1; q_2; q_3$ là các số nguyên và các số dư $r_1; r_2; r_3 \in \{-1; 0; 1\}$.

Dễ thấy $r_1^3 = r_1; r_2^3 = r_2; r_3^3 = r_3$. Từ đó ta được

$$a^3 = (3q_1 + r_1)^3 = 9k_1 + r_1; b^3 = (3q_2 + r_2)^3 = 9k_2 + r_2; c^3 = (3q_3 + r_3)^3 = 9k_3 + r_3$$

Khi đó ta được $a^3 + b^3 + c^3 = 9(k_1 + k_2 + k_3) + (r_1 + r_2 + r_3)$.

Mà theo giả thiết ta có $(a^3 + b^3 + c^3) : 9$. Do đó nên ta suy ra $(r_1 + r_2 + r_3) : 9$.

Dễ thấy $|r_1 + r_2 + r_3| \leq 3$, do đó suy ra $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

Do $r_1; r_2; r_3 \in \{-1; 0; 1\}$ nên từ $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ suy ra trong $r_1; r_2; r_3$ có một số bằng 0. Điều này có nghĩa là trong ba số a, b, c có một số chia hết cho 3.

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$ (*)

Chứng minh rằng $(x + y + z)$ chia hết cho 27

Hướng dẫn giải

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu 3 số x, y, z chia cho 3 có số dư khác nhau thì $(x - y), (y - z), (z - x)$ sẽ đều không chia hết cho 3 do đó $(x - y)(y - z)(z - x)$ sẽ không chia hết cho 3. Nhưng khi đó tổng của 3 số $(x + y + z)$ sẽ chia hết cho 3 điều này trái với điều kiện (*) của bài toán, vì thế trường hợp này không thể xảy ra.

- Nếu 3 số x, y, z có 2 số khi chia cho 3 có cùng số dư thì $(x - y), (y - z), (z - x)$ sẽ có một hiệu chia hết cho 3 do đó $(x - y)(y - z)(z - x)$ sẽ chia hết cho 3. Nhưng khi đó tổng của 3 số $(x + y + z)$ sẽ không chia hết cho 3 điều này trái với điều kiện (*) của bài toán, vì thế trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy 3 số x, y, z chia cho 3 phải cùng số dư, khi đó $(x - y), (y - z), (z - x)$ sẽ đều chia hết cho 3 nên tích $(x - y)(y - z)(z - x)$ sẽ chia hết cho 27. Mặt khác theo giả thiết (*) ta có $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$ nên $(x + y + z)$ chia hết cho 27.

Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 6: Sử dụng phương pháp phản chứng

* **Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh $A(x)$ không chia hết cho n ta giả sử $A(x)$ chia hết cho n sau đó dùng lập luận để chỉ ra mâu thuẫn để chỉ ra điều giả sử là sai.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $n^2 + n - 16$ không chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn giải

Giả sử $n^2 + n - 16$ chia hết cho 25.

Do $n^2 + n - 16$ chia hết cho 25 nên cũng chia hết cho 5.

Ta có: $n^2 + n - 16 = (n + 3)(n - 2) - 10$

Do $n^2 + n - 16$ và 10 chia hết cho 5 nên $(n + 3)(n - 2)$ chia hết cho 5 (1)

Mặt khác $(n + 3)$ và $(n - 2)$ có hiệu bằng 5 nên chúng cùng chia hết cho 5 hoặc cùng không chia hết cho 5, lại do (1) nên $(n + 3)$ và $(n - 2)$ cùng chia hết cho 5 suy ra ta có $(n + 3)(n - 2)$ chia hết cho 25.

Tức là $n^2 + n - 16$ chia cho 25 dư 15 mâu thuẫn với giả sử, vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, n^3 chia hết cho 3 thì n cũng chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Giả sử n không chia hết cho 3. Khi đó n có dạng $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$ (với k là số tự nhiên)

Nếu $n = 3k + 1$ thì $n^3 = (3k + 1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$ không chia hết cho 3

Nếu $n = 3k + 2$ thì $n^3 = (3k + 2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8$ không chia hết cho 3

Cả hai trường hợp đều mâu thuẫn suy ra n phải chia hết cho 3 vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh 2 số dương có tổng bình phương chia hết cho 3 thì mỗi số đều phải chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Giả sử 2 số nguyên dương a, b có ít nhất một số không chia hết cho 3, chẳng hạn số đó là a . Khi đó $a = 3k + 1$ hoặc $a = 3k + 2$ với k là số tự nhiên, ta có $a^2 = 3l + 1$ nếu số b chia hết cho 3 hoặc không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ luôn có dạng $3m + 1$ hoặc $3m + 2$, nghĩa là không chia hết cho 3, mâu thuẫn.

Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 7: Sử dụng phương pháp quy nạp

* **Cơ sở phương pháp:** Để kiểm tra mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ ta làm như sau:

- 1) Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.
- 2) Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ (**Giả thiết quy nạp**)
- 3) Chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Nhận xét: Trong việc chứng minh bằng phương pháp quy nạp các bạn cần khai thác triệt để **giả thiết quy nạp** (là mệnh đề chia hết khi $n = k$), tức là trong quá trình giải bài toán ở bước chứng minh $n = k + 1$ các bạn phải biến đổi làm sao xuất hiện **giả thiết quy nạp**.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $n(2n^2 + 7)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

Hướng dẫn giải

Với $n = 1$ thì ta có: $n(2n^2 + 7) = 1 \cdot (2 + 7) = 9 : 3$, do đó bài toán đúng với $n = 1$

Giải sử bài toán đúng đến $n = k$ với $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ tức là:

$$k(2k^2 + 7) : 3 \text{ hay } k(2k^2 + 7) = 3x \left(x \in \mathbb{N}^* \right),$$

Ta sẽ cần chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$\begin{aligned}
 (k+1)[2(k+1)^2+7] &= (n+1)(2n^2+4n+9) \\
 &= 2n^3+4n^2+9n+2n^2+4n+9 \\
 &= (2n^3+7n)+(6n^2+6n+9) \\
 &= 3x+3(2n^2+2n+3)=3y:3
 \end{aligned}$$

Do đó $n(2n^2+7)$ chia hết cho 3 với $n = k+1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Hướng dẫn giải

Với $n = 1$ thì ta có: $A = 18$ chia hết cho 9, do đó bài toán đúng với $n = 1$

Giải sử bài toán đúng đến $n = k$ với $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ tức là:

$$4k^2 + 15k - 1 : 9 \text{ hay } 4k^2 + 15k - 1 = 9x \left(x \in \mathbb{N}^* \right) \Leftrightarrow 4k^2 = 9x - 15k + 1,$$

ta sẽ cần chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned}
 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 \\
 &= 4(9x - 15k + 1) + 15k + 14 \\
 &= 36x - 45k + 18 : 9
 \end{aligned}$$

Do đó $A = 4n^2 + 15n - 1$ chia hết cho 9 với $n = k + 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $5^{2n} + 7$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên dương n .

Hướng dẫn giải

- Với $n = 1$, khi đó ta có $5^2 + 7 = 32 : 8$ (đúng)
- Giả sử mệnh đề đúng với n , tức là ta có $5^{2n} + 7 : 8$.
- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có

$$5^{2(n+1)} + 7 = 25 \cdot 5^{2n} + 7 = 24 \cdot 5^{2n} + (5^{2n} + 7)$$

Để ý là $5^{2n} + 7 : 8$ và $24 \cdot 5^{2n} : 8$. Do đó ta được $5^{2(n+1)} + 7 : 8$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được $5^{2n} + 7$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên dương n .

Bài toán 4. Cho n là một số nguyên dương, Chứng minh rằng: $C = 7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1} : 5$ (1)

Hướng dẫn giải

Xét với $n = 1$ ta có: $C = 10:5$. Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{N}$), tức là: $C_k = 7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}:5$ (2)

Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh:

$$C_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1}:5$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C_{k+1} &= 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} = 7.2^{2k+2-2} + 3^2.3^{2k-1} = 4.7.2^{2k-2} + 9.3^{2k-1} \\ &= 4(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5.3^{2k-1} = 4.C_k + 5.3^{2k-1}:5 \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được $C = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên dương n .

Bài toán 5. Chứng minh rằng số được tạo 3^n bởi chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với $n \in \mathbb{N}^*$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 toàn quốc năm 1978)

Hướng dẫn giải

Với $n = 1$, ta có: $\overline{aaa} = 111.a:3$, Vậy bài toán đúng với $n = 1$.

Giả sử bài toán đúng đến $n = k$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{N}$), tức là: $\underbrace{aa\dots a}_{3^k}:3^k$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng đến $n = k + 1$.

$$\text{Thật vậy: } \underbrace{aa\dots a}_{3^{k+1}} = \underbrace{aa\dots a}_{3^k} \underbrace{aa\dots a}_{3^k} \underbrace{aa\dots a}_{3^k} = \underbrace{aa\dots a}_{3^k} \times \underbrace{100\dots 01}_{3^{k-1}} \underbrace{100\dots 01}_{3^{k-1}}:3^{n+1} \left(\text{do } \underbrace{100\dots 01}_{3^{k-1}} \underbrace{100\dots 01}_{3^{k-1}}:3 \right)$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 8: Sử dụng nguyên lý Dirichlet

* **Cơ sở phương pháp:** Đầu tiên ta phải nắm được nguyên lý Dirichlet: “Nhất $m = kn + 1$ con thỏ vào k ($k < n$) chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $n + 1$ con thỏ”

Áp dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán chia hết như sau: “Trong $m = kn + 1$ số có ít nhất $n + 1$ số chia hết cho k có cùng số dư”

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh trong 5 số nguyên bất kì có thể tìm được ba số có tổng chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Một số khi chia cho 3 thì tồn tại 3 loại số dư là: 1, 2 hoặc 3.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Trường hợp 1: Nếu tồn tại cả 3 loại số dư khi chia cho 3 thì:

$$\begin{cases} a_1 = 3k_1 + 0 \\ a_2 = 3k_2 + 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3) + 3:3 \\ a_3 = 3k_3 + 2 \end{cases}$$

Trường hợp 2: Chỉ tồn tại hai loại số dư, theo nguyên lý **Dirichlet** trong 5 số nguyên bất kì luôn tồn tại ít nhất 3 số cùng dư khi chia cho 3 suy ra tổng 3 số ấy chia hết cho 3.

Trường hợp 3: Chỉ tồn tại duy nhất một loại số dư khi chia hết cho 3 suy ra 3 số tùy ý trong 5 số đó chia hết cho 3.

Bài toán 2. Cho 4 số nguyên phân biệt a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$A = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d):12$$

Hướng dẫn giải

Theo nguyên lý **Dirichlet** trong 3 số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số nguyên tùy ý có cùng số dư khi chia hết cho 3 suy ra $A:3$

Trường hợp 1: cả 4 số đều là số chẵn nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 2: cả 4 số đều là số lẻ nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 3: 2 số chẵn và hai số lẻ nên tồn tại 4 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 4: 3 số chẵn và một số lẻ, từ 3 số chẵn đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 5: 3 số lẻ và một số chẵn, từ 3 số lẻ đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Do đó A cũng chia hết cho 4 mà $(3, 4) = 1$ nên A chia hết cho 12.

Bài toán 3. Chứng minh trong 101 số nguyên bất kì có thể tìm được hai số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.

Hướng dẫn giải

Lấy 101 số nguyên bất kì chia cho 100 thì theo nguyên lý Dirichle có ít nhất 2 số có cùng số dư khi chia cho 100. Suy ra trong 101 số đã cho tồn tại ít nhất 2 số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.

Bài toán 4. Cho 2014 số tự nhiên bất kì $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2014}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 2014 hoặc tổng một số số chia hết cho 2014.

Hướng dẫn giải

Xét 2014 số: $S_1 = x_1; S_2 = x_1 + x_2; \dots; S_{2014} = x_1 + x_2 + \dots + x_{2014}$

Nếu tồn tại S_i với $i = 1, 2, 3, \dots, 2014$ chia hết cho 2014 thì bài toán được chứng minh.

Nếu không tồn tại S_i với $i = 1, 2, 3, \dots, 2014$ chia hết cho 2014. Dem 2014 số này chia cho 2014 nhận được 2014 số dư. Giá trị của các số dư nhận được thuộc vào tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 2013\}$. Vì 2014 số dư mà chỉ có 2013 giá trị nên theo nguyên lý Dirichlet có 2 số dư bằng nhau.

Kí hiệu hai số đó là S_m, S_n có cùng số dư khi chia cho 2014 $\{m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < m \leq 2014\}$

Thì hiệu: $S_m - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m$ chia hết cho 2014.

Nhận xét: Ta có thể tổng quát hóa bài toán như sau: Cho n số tự nhiên $x_1; x_2; \dots; x_n$. Chứng minh rằng trong n số trên có một số chia hết cho n hoặc một số số có tổng chia hết cho n .

Bài toán 5. Chứng minh rằng trong 8 số tự nhiên có 3 chữ số bao giờ cũng chọn được hai số mà khi viết liền nhau ta được một số có 6 chữ số và chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

Lấy 8 số đã cho chia 7 được 8 số dư nhận một trong 7 giá trị 0, 1, 2, 3, ..., 6. Theo nguyên tắc Dirichlet có hai số cùng số dư, giả sử là $\overline{abc}$ và $\overline{def}$ khi chia cho 7 có cùng số dư là r . Giả sử $\overline{abc} = 7k + r$ và $\overline{def} = 7l + r$. Ta có:

$$\overline{abcdef} = 100\overline{abc} + \overline{def} = 1000(7k + r) + 7l + r = 7(1000k + l) + 1001r : 7$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 6. Có hay không một số nguyên dương k để 29^k là một số có các chữ số tận cùng là 0001.

Hướng dẫn giải

Ta cần chứng minh tồn tại số nguyên k sao cho $29^k - 1 : 10^4$. Thật vậy, lấy $10^4 + 1$ số: $29, 29^2, \dots, 29^{10^4+1}$ chia cho 10^4 , khi đó có hai số có hiệu chia hết cho 10^4 , giả sử đó là 29^n và 29^m ($n > m$). Ta có $29^m - 29^n : 10^4$ hay $29^m (29^{n-m} - 1) : 10^4$.

Vì $(29^m, 10^4) = 1$ nên $29^{n-m} - 1 : 10^4$ (đpcm).

Dạng 9: Xét đồng dư

Tóm tắt lý thuyết về đồng dư:

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Định nghĩa: Cho a, b là số nguyên (n là số nguyên dương). Ta nói a đồng dư với b theo modun n và kí hiệu $a \equiv b \pmod{n}$ nếu a và b có cùng số dư khi chia cho n .

Như vậy: $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a-b) : n$. Ví dụ: $2019 \equiv 9 \pmod{5}$

Một số tính chất cơ bản:

- 1) Với mọi số nguyên a ta có: $a \equiv a \pmod{n}$
- 2) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}$
- 3) $a \equiv b \pmod{n}$ và $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$
- 4) $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$

Hệ quả của tính chất 4)

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{n}, a_2 \equiv b_2 \pmod{n}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{n} \\ \Rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \equiv (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \pmod{n}$$

$$5) \quad a \equiv b \pmod{n} \text{ và } c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a.c \equiv b.d \pmod{n}$$

Hệ quả của tính chất 5)

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{n}, a_2 \equiv b_2 \pmod{n}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{n} \\ \Rightarrow (a_1 . a_2 . \dots . a_n) \equiv (b_1 . b_2 . \dots . b_n) \pmod{n}$$

$$6) \quad a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$7) \quad \text{Nếu } a \equiv b \pmod{m} \text{ và } d \text{ là ước chung của } a \text{ và } b \text{ sao cho } (d, m) = 1$$

$$\text{thì } \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$$

$$8) \quad \text{Nếu } a \equiv b \pmod{m} \text{ và } d \text{ là ước chung của } a, b, m \text{ thì } \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$9) \quad \text{Nếu } a \equiv r \pmod{m} \text{ và } 0 \leq r < m, \text{ thì } r \text{ chính là số dư của phép chia } a \text{ cho } m.$$

*** Cơ sở phương pháp:** Sử dụng định nghĩa và các tính chất của đồng dư thức để giải bài toán chia hết.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = 7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + 12.6^n$$

$$\text{Do } 25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19} \Rightarrow 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \pmod{19}$$

$$\text{Mà } 7.6^n + 12.6^n = 19.6^n : 19 \Rightarrow 7.25^n + 12.6^n : 19 \Rightarrow A = 7.5^{2n} + 12.6^n : 19$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng hai số: $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$

Chứng minh rằng A và B đều là bội số của 7

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} \equiv (-1)^{1000} \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} - 1 : 7$$

Vậy A là bội của 7.

$$\text{Từ } 6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} \equiv 6 \pmod{7}$$

$$\text{Mà } 6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} + 1 : 7$$

Vậy B là bội của 7.

Bài toán 3. a) $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

a) Xét số dư của 2222^{5555} khi chia cho 7.

$$\text{Ta có: } 2222 \equiv 3 \pmod{7} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2222^4 \equiv 3^4 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 2222^4 \equiv 81 \pmod{7}$$

$$\text{Mà } 81 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 2222^4 \equiv 4 \pmod{7} \quad (2)$$

Nhân vế với vế (1) và (2) ta được $2222^5 \equiv 3.4 \pmod{7}$

$$\Rightarrow 2222^5 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod{7} \quad (3)$$

$$+ \text{ Tương tự: } 5555^{2222} \equiv 2^{1111} \pmod{7} \quad (4)$$

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Cộng vế với vế (3) và (4) ta có: $A \equiv 2^{1111} + 5^{1111} \pmod{7}$ (5)

Mặt khác: $2^{1111} + 5^{1111} \equiv (2 + 5) \pmod{7}$

$$\equiv 0 \pmod{7} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta được: $A \equiv 0 \pmod{7}$

Vậy: $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7

b) Ta có:

Ta có: $1961 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 1961^{1962} \equiv 1 \pmod{7}$

Tương tự: $1963^{1964} \equiv 3^{1964} \pmod{7} \equiv 9 \cdot (3^3)^{654} \pmod{7} \equiv 9 \cdot 27^{654} \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$

$$1965^{1966} \equiv (-2)^{1966} \pmod{7} \equiv 2 \cdot (2^3)^{655} \pmod{7} \equiv 2 \cdot 8^{655} \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow B \equiv 1 + 2 + 2 + 2 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$$

Vậy: $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 : 7$

Bài toán 4. Tìm số dư của phép chia: $1532^5 - 1$ cho 9.

Hướng dẫn giải

Ta có: $1532 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \pmod{9}$

Mà $2^5 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod{9}$

Vậy số dư của phép chia $1532^5 - 1$ cho 9 là 4.

Dạng 10: Tìm điều kiện biến để chia hết

Bài toán 1.

a) Tìm n nguyên để $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho $B = n^2 - n$

b) Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Hướng dẫn giải

a) Chia A cho B ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n + 3)(n^2 - n) + 2$

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho $n^2 - n = n(n - 1)$ do đó 2 chia hết cho n , ta có:

n	1	-1	2	-2
n - 1	0	-2	1	-3
n(n - 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy để giá trị biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị biểu thức $B = n^2 - n$ thì $n = -1$ hoặc $n = 2$.

b) Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$ được kết quả:

$$a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$$

Để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$

$$(4a - 1) : (a^2 + 3)$$

$$\Rightarrow (4a - 1)(4a + 1) : (a^2 + 3) \quad (a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a + 1 \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (16a^2 - 1) : (a^2 + 3)$$

$$\Rightarrow 49 : (a^2 + 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3 = 7 \\ a^2 + 3 = 49 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Thử lại ta được $a = 2$ và $a = -2$ đều thỏa mãn.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^3$ chia hết cho 10.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } A = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^3 = 2(2n^2 + 6n + 7)$$

$$A : 10 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 7 : 5 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 2 : 5 \Leftrightarrow 2(n^2 + 3n + 1) : 5$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 : 5$$

Do đó $n(n+3)$ có tận cùng là 4 hoặc 0 hay n có tận cùng là 1 hoặc 6

Vậy n có tận cùng bằng 1 hoặc 6 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 3. Tìm số nguyên dương n để $(n+3)(n+4)$ chia hết cho $3n$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } (n+3)(n+4) : 3n \Leftrightarrow n^2 + 7n + 12 : 3n \Leftrightarrow n^2 + n + 12 : 3n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 + n + 12 : n & (1) \\ n^2 + n + 12 : 3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } 12 : n \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } n(n+1) : 3 \Rightarrow \begin{cases} n = 3k \\ n = 3k + 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Loại các số có dạng $n = 3k + 1$ ở (1) ta được:

n	2	3	6	12
$3n$	6	9	18	36
$n^2 + n + 12$	18	24	54	168

Chỉ có $n = 2$ và $n = 6$ thì $n^2 + n + 12$ chia hết cho $3n$ do đó: $(n+3)(n+4):3n$

Vậy $n = 2$ và $n = 6$.

Bài toán 3. Tìm các số nguyên dương x và y lớn hơn 1 sao cho $x + 3$ chia hết cho y và $y + 3$ chia hết cho x .

Hướng dẫn giải

Giải sử $2 \leq x \leq y$.

- a) Xét $y = 2$ thì $x = 2$, không thỏa mãn $x + 3$ chia hết cho y .
- b) Xét $y \geq 3$. Đặt $x + 3 = ky$ ($k \in \mathbb{N}$) (1) thì $ky = x + 3 \leq y + 3 \leq y + y = 2y$ nên $k \leq 2$.
- Với $k = 1$, từ (1) có $x + 3 = y$. Thay vào: $y + 3 : x$ được $x + 6 : x$ nên lại có $x > 1$ nên $x \in \{2; 3; 6\}$.

x	2	3	6
y	5	6	9

Với $k = 2$, từ (1) có $x + 3 = 2y$. Thay vào: $y + 3 : x$ được $2y + 6 : x \Rightarrow x + 9 : x \Rightarrow 9 : x$ do $x > 1$ nên $x \in \{3; 9\}$.

Khi $x = 3$ thì $y = 3$, thử lại đúng.

Khi $x = 9$ thì $y = 6$, loại vì trái với $x \leq y$.

Các cặp số (x, y) phải tìm là $(2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3), (6; 9), (9; 6), (3; 3)$.

Dạng 11: Các bài toán cấu tạo số liên quan đến tính chia hết của số tự nhiên

*** Cơ sở phương pháp:** Số tự nhiên $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ được biểu diễn dưới dạng tổng các lũy

thừa như sau: $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_0$

Trong đó $a_n; a_{n-1}; \dots; a_0$ là các chữ số và a_n khác 0.

Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau:

- $A : 2 \Leftrightarrow a_0 : 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$
- $A : 3 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) : 3$.
- $A : 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 4$

- $A:5 \Leftrightarrow a_0:5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}$.
- $A:8 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0}:8$
- $A:9 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n):9$.
- $A:11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_2 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)]:11$.
- $A:25 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0}:25$
- $A:125 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0}:125$

* Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, chia hết cho 5 và 9, biết rằng chữ số hàng chục bằng trung bình cộng của hai chữ số kia.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$. Do $a + b + c$ chia hết cho 9 và $2b = a + c$ nên $3b$ chia hết cho 9, suy ra b chia hết cho 3. Như vậy $b \in \{0;3;6;9\}$. Do $\overline{abc}:5$ nên $c \in \{0;5\}$

Xét các số $\overline{ab0}$ với $a = 2b$, ta được số 630.

Xét các số $\overline{ab5}$ với $a = 2b - 5$, ta được số 135 và 675.

Bài toán 2. Tìm các chữ số a, b sao cho:

- $a - b = 4$ và $\overline{7a5b1}$ chia hết cho 3
- $a - b = 6$ và $\overline{4a7} + \overline{1b5}$ chia hết cho 9

Hướng dẫn giải

a) Số $\overline{7a5b1}:3 \Rightarrow 7 + a + 5 + b + 1:3 \Rightarrow 13 + a + b:3 \Rightarrow a + b$ chia cho 3 dư 2 (1).

Ta có $a - b = 4$ nên:

$$4 \leq a \leq 9$$

$$0 \leq b \leq 5$$

Suy ra $4 \leq a + b \leq 14$ (2).

Mặt khác $a - b$ là số chẵn nên $a + b$ là số chẵn (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $a + b \in \{8;14\}$.

Với $a + b = 8$; $a - b = 4$ ta được $a = 6$; $b = 2$.

Với $a + b = 14$; $a - b = 4$ ta được $a = 9$; $b = 5$.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$b) \overline{4a7} + \overline{1b5} : 9 \Rightarrow 512 + 10(a+b) : 9$$

$$\Rightarrow 504 + 8 + 9(a+b) + a + b : 9 \Rightarrow a + b \text{ chia cho } 9 \text{ dư } 1$$

Do $a + b \geq a - b = 6$ nên $a + b = 10$. Từ đó tìm được: $a = 8; b = 2$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} = 2 \cdot \overline{cd}$ thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 67

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 201 \cdot \overline{cd}$ chia hết cho 67.

Bài toán 4. Cho số $\overline{abc}$ chia hết cho 27. Chứng minh rằng $\overline{bca}$ chia hết cho 27

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{abc} : 27$

$$\Rightarrow \overline{abc0} : 27$$

$$\Rightarrow 1000a + \overline{bc0} : 27$$

$$\Rightarrow 999a + a + \overline{bc0} : 27$$

$$\Rightarrow 27.37a + \overline{bca} : 27$$

Do $27.37a : 27$ nên $\overline{bca} : 27$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

$$\overline{abcdeg} = 10000 \cdot \overline{ab} + 100 \times \overline{cd} + \overline{eg} = 9999 \times \overline{ab} + 99 \times \overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) \text{ chia hết cho } 11.$$

Bài toán 6. Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Ta có $99 = 9 \cdot 11$ và $(9, 11) = 1$ nên ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99 khi và chỉ khi

$\overline{62ab427}$ chia hết cho 9 và chia hết cho 11.

- Ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $(6 + 2 + a + b + 4 + 2 + 7) : 9$ hay $(a + b + 3) : 9$

Từ đó ta được $(a + b + 3) \in \{9; 18\}$ nên suy ra $(a + b + 3) \in \{6; 15\}$

- Ta có $\overline{62ab427}$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi $(6 + a + 4 + 7) - (2 + b + 2) : 11$ hay $(a - b + 2) : 11$

Từ đó ta được $(a - b + 2) \in \{0; 11\}$ nên suy ra $(a - b) \in \{-2; 9\}$.

Từ đó ta xét các trường hợp sau

- + Trường hợp 1: $\begin{cases} a - b = 9 \\ a + b = 6 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.
- + Trường hợp 2: $\begin{cases} a - b = 9 \\ a + b = 15 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.
- + Trường hợp 3: $\begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$
- + Trường hợp 4: $\begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = 15 \end{cases}$, trường hợp này không tồn tại các chữ số a, b thỏa mãn.

Vậy các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a = 2; b = 4$.

Cách 2. Ta có $\overline{62ab427} = 62.100000 + \overline{ab}.1000 + 427 = 62630.99 + \overline{ab}.990 + 10.\overline{ab} + 57$

Suy ra $\overline{62ab427}$ chia hết cho 99 khi và chỉ khi $10.\overline{ab} + 57$ chia hết cho 99.

Từ đó ta được $10.\overline{ab} + 57 = 99.k$ với k là một số tự nhiên.

Để thấy $10.\overline{ab} + 57$ có chữ số tận cùng là 7, do đó $99.k$ phải có chữ số tận cùng là 7 nên ta được $k = 3$

Từ đó suy ra $10.\overline{ab} + 57 = 99.3 \Rightarrow \overline{ab} = 24$

Vậy các chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a = 2; b = 4$.

Bài toán 7. Tìm chữ số a biết rằng $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} n = \overline{20a20a20a} &= \overline{20a20a}.1000 + \overline{20a} = (\overline{20a}.1000 + \overline{20a}).1000 + \overline{20a} \\ &= 1001.\overline{20a}.1000 + \overline{20a}. \end{aligned}$$

Theo đề bài n chia hết cho 7, mà 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{20a}$ chia hết cho 7.

Ta có $\overline{20a} = 196 + (4 + a)$, chia hết cho 7 nên $4 + a$ chia hết cho 7. Vậy $a = 3$.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

📁 Dạng 12: Các bài chia hết sử dụng định lý Fermat

* Cơ sở phương pháp:

Với p là số nguyên tố ta có: $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Đặc biệt, nếu $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Chứng minh

Xét các số $a, 2a, \dots, (p-1)a$. Dễ thấy, không có số nào trong $p-1$ số trên chia hết cho p và không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho p . Vậy khi chia $p-1$ số nói trên cho p , ta nhận được các số dư là $1, 2, \dots, p-1$. Suy ra $a \cdot (2a) \cdot (3a) \dots ((p-1)a) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (p-1) \pmod{p}$ hay $(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)) \cdot a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) \pmod{p}$

Vì $(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1), p) = 1$ nên $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

* Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Cho $a \in \mathbb{Z}; m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $a^{6n} + a^{6m} : 7$ khi và chỉ khi $a : 7$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $a^{6n} + a^{6m} : 7$ và $a \not: 7$ ta có $(a, 7) = 1$.

Theo định lý Fermat: $a^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a^{6n} \equiv 1 \pmod{7}$ và $a^{6m} \equiv 1 \pmod{7}$
 $\Rightarrow a^{6n} + a^{6m} \equiv 2 \pmod{7}$. Vô lí! Vậy $a : 7$

Ngược lại, nếu $a : 7$ thì $a^{6n} + a^{6m} : 7$

Bài toán 2. Chứng minh rằng $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 : 11$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Fermat, ta có $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Ta tìm số dư trong phép chia 2^{4n+1} và 3^{4n+1} cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng của chúng.

Ta có $2^{4n+1} = 2 \cdot 16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$

$3^{4n+1} = 3 \cdot 81^n \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 10l + 3 (k, l \in \mathbb{N})$

Mà $3^{10k} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10l} \equiv 1 \pmod{11}$ nên

$$3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 = 3^{10k+3} + 2^{10l+3} + 5 \equiv 3^2 + 2^3 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Vậy $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 : 11 \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 2. Một số có $6n$ chữ số và chia hết cho 7. Chứng minh rằng nếu chuyển chữ số tận cùng lên đầu của số đó thì được một số cũng chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

Gọi số ban đầu là $N = 10A + a$, với a là chữ số tận cùng của N và A có $6n - 1$ chữ số. Sau khi chuyển a lên đầu ta được số $M = a \cdot 10^{6n-1} + A$.

Ta chứng minh $N - 3M : 7$.

Thật vậy, ta có $N - 3M = 7A - a(3 \cdot 10^{6n-1} - 1)$

Áp dụng định lý Fermat ta có:

$$\begin{aligned} 10^6 &\equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 10^{6n} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3 \cdot 10^{6n} \equiv 3 \equiv 10 \pmod{7} \\ &\Rightarrow 3 \cdot 10^{6n-1} \equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

Vậy $N - 3M : 7$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 13: Các bài toán chia hết liên quan đến đa thức

*** Cơ sở phương pháp:**

Định lý Bôdu:

Phần dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ bằng giá trị của đa thức tại $x = a$

Tức là: $f(x) = (x - a) \cdot g(x) + f(a)$

Chứng minh: Gọi $g(x)$ là đa thức thương và R là số dư thì:

$$f(x) = (x - a) \cdot g(x) + R$$

$$f(a) = (a - a) \cdot g(a) + R = R \quad (\text{đpcm})$$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho $x - 1$ dư 5. Tìm các hệ số a, b, c .

(Trích đề vào 10 Chuyên Nam Định năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Vì $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 3 nên $P(x) - 3$ chia hết cho $x + 1$.

$$\Rightarrow P(x) - 3 = f(x) \cdot (x + 1)$$

Thay $x = -1$ vào đẳng thức trên ta có:

$$P(-1) - 3 = f(-1) \cdot (-1 + 1) = 0.$$

$$\Rightarrow P(-1) = 3 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } P(x) \text{ chia cho } x \text{ dư 1 nên } P(0) = 1 \quad (2)$$

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$P(x)$ chia cho $x - 1$ dư 5 nên $P(1) = 5$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 3 \\ a.0^2 + b.0 + c = 1 \\ a.1^2 + b.1 + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x) = 3x^2 + x + 1$. Thử lại ta thấy $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

Vậy $P(x) = 3x^2 + x + 1$.

Bài toán 2. Tìm các số thực a, b , sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hà Nội, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4$

$$= (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1)$$

Đặt thương là $q(x)$ ta có: $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6 = (x - 3)(x + 1)q(x)$

Chọn $x = 3$ ta có: $4.3^4 - 11.3^3 - 2a.3^2 + 5b.3 - 6 = 0$

$$\Rightarrow 15b - 18a = -21 \Rightarrow 5b - 6a = -7 \quad (1)$$

Chọn $x = -1$, ta có: $4.(-1)^4 - 11.(-1)^3 - 2a.(-1)^2 + 5b.(-1) - 6 = 0$

$$\Rightarrow 5b + 2a = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $8a + 16 \Rightarrow a = 2$

Thay vào (2) suy ra: $5b + 4 = 9 \Rightarrow b = 1$.

Bài toán 3. Tìm đa thức $f(x)$ biết: $f(x)$ chia cho $x + 3$ dư 1; $f(x)$ chia cho $x - 4$ dư 8; $f(x)$ chia cho $(x + 3)(x - 4)$ thì được $3x$ và còn dư.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Bézout ta có $f(3) = 1; f(4) = 8$

Đặt dư $f(x)$ chia cho $(x + 3)(x - 4)$ là $ax + b$

Suy ra $f(x) = (x + 3)(x - 4)3x + ax + b$.

- Với $x = -3$ ta có: $1 = (-3 + 3)(-3 - 4)3(-3) + a(-3) + b \Rightarrow b - 3a = 1$ (1)
- Với $x = 4$ ta có: $8 = (4 + 3)(4 - 4)(3 \cdot 4) + a \cdot 4 + b \Rightarrow b + 4a = 8$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $7a = 7 \Rightarrow a = 1$ thay vào (2) ta được $b = 4$.

Từ đó ta được: $f(x) = (x + 3)(x - 4)3x + x + 4$.

Hay $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 35x + 4$.

Bài toán 4. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x - 3)^{200} + (x - 2)^{100} - 1$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - 5x + 6$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(2) = (2 - 3)^{200} + (2 - 2)^{100} - 1 = 0$ nên $f(x) : (x - 2)$

$f(3) = (3 - 3)^{200} + (3 - 1)^{100} - 1 = 0$ nên $f(x) : (x - 3)$

Nên $f(x)$ chia hết cho $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$

Bài toán 5. Cho đa thức $P(x) = x^3 - x$ và $Q(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x + 1$.

- Tìm số dư trong phép chia $Q(x)$ cho $P(x)$
- Tìm x để $Q(x) : P(x)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $P(x) = x(x^2 - 1)$; $Q(x) = x(x^{80} - 1) + x(x^{48} - 1) + x(x^{24} - 1) + x(x^8 - 1) + 5x + 1$

Vì các đa thức $x^{80} - 1$; $x^{48} - 1$; $x^8 - 1$ đều chia hết cho $x^2 - 1$ nên phép chia $Q(x)$ cho $P(x)$ dư $5x + 1$.

b) Để $Q(x) : P(x)$ thì $5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

TỔNG KẾT CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG ÁP DỤNG

Để làm giải tốt các bài toán về chia hết, chúng ta cần sử dụng linh hoạt các phương pháp đã nêu trên, ở nhiều bài toán chia hết chúng ta có thể giải bằng nhiều phương pháp, nhưng có khi cũng một bài toán nhìn có vẻ tương tự như vậy nhưng chỉ có một phương pháp có thể giải quyết. Để mô phỏng về điều này tôi sẽ trích một bài viết của tác giả Nguyễn Đức Tấn trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ:

Bài toán: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Cách 1: (Sử dụng phương pháp xét số dư)

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 3k(k+1) + 1$
- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 9k(k+1) + 3$
- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 3(3k^2 + 5k + 2) + 1$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Cách 2: (Sử dụng phương pháp tách tổng)

Ta có: $n^2 + n + 1 = (n-1)(n+2) + 3$

Do $(n+2) - (n-1) = 3$ nên $(n+2)$ và $(n-1)$ đồng thời hoặc không đồng thời chia hết cho 3

Nếu $(n+2):3; (n-1):3 \Rightarrow (n-1)(n+2):9$ nên $(n-1)(n+2) + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Nếu $(n+2)$ và $(n-1)$ đều không chia hết cho 3 thì $(n-1)(n+2) + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Cách 3: (Sử dụng phương pháp phản chứng)

Giả sử $(n^2 + n + 1):9$. Đặt $n^2 + n + 1 = 9m$ ($m \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow n^2 + n + 1 - 9m = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta = 36m - 3 = 3(12m - 1)$

Ta thấy Δ không thể là số chính phương do chỉ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên (*) không có nghiệm. Vô lý!

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Cách 4: Ta có: $4(n^2 + n + 1) = (2n+1)^2 + 3$

Nếu $(2n+1):3 \Rightarrow (2n+1)^2:9$ nên $(2n+1)^2 + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Nếu $(2n+1)$ không chia hết cho 3 thì $(2n+1)^2$ không chia hết cho 9 nên $(2n+1)^2 + 3$ sẽ không chia hết cho 3 vì thế cũng sẽ không chia hết cho 9.

Vậy $4(n^2 + n + 1)$ không chia hết cho 9 nên $n^2 + n + 1$ sẽ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Các bạn rèn luyện khả năng sử dụng các phương pháp trong chứng minh các bài toán về chia hết thông qua các bài toán tương tự sau:

- 1) Chứng minh: $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.
- 2) Chứng minh: $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 49.
- 3) Chứng minh: $n^2 + 5n + 16$ không chia hết cho 169.

Tuy nhiên với bài toán:

Chứng minh: $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên n .

Ta dễ thấy với các cách 1, 2, 3 có lẽ chúng ta phải bó tay, khai thác các giải 4 chú ý $343 = 7^3$

ta có lời giải thật “dễ thương” sau:

$$9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 = (3n + 1)^3 - 49.$$

Nếu $(3n + 1) : 7 \Rightarrow (3n + 1)^3 : 7^3 = 343$ nên $(3n + 1)^3 - 49$ sẽ không chia hết cho 343.

Nếu $(3n + 1)$ không chia hết cho 7 thì $(3n + 1)^3 - 49$ không chia hết cho 7 nên $(3n + 1)^3 - 49$ không chia hết cho $343 = 7^3$.

Vậy $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ sẽ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên n .

Do đó để giải toán chúng ta cần linh hoạt và nắm vững các phương pháp giải để có thể vận dụng tốt ở các bài toán khác nhau!

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Chứng minh rằng $a^5 - a : 30$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Câu 2. a) Đặt $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n

b) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13

Câu 3. Chứng minh rằng: $A = \left[n^3 (n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Chứng minh rằng $n^3 - 28n$ chia hết cho 48 với mọi n là số nguyên chẵn

Câu 5. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

Câu 6. Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Câu 7. Chứng minh rằng: $Q = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 : 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Câu 8. Chứng minh rằng : $2021^{2019} + 2019^{2021}$ chia hết cho 2020.

Câu 9. Chứng minh rằng

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 10. Chứng minh rằng $A = n^2 + n + 2$ không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n .

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thủy Nguyên 2018-2019)

Câu 11. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$ chia hết cho 24.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thanh Hà 2016-2017)

Câu 12. Cho a, b là số nguyên thỏa mãn: $2a^2 + 3ab + 2b^2$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng $a^2 - b^2$ chia hết cho 7.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Kinh Môn 2013-2013)

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Câu 13. Cho n là số tự nhiên không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $P = 3^{2n} + 3^n + 1$ chia hết cho 13.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang 2018-2019)

Câu 14. Cho biểu thức $P = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}$ với $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2019}$ là các số nguyên dương và P chia hết cho 30. Chứng minh rằng $Q = a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \dots + a_{2019}^5$ chia hết cho 30.

(Đề thi HSG Thành Phố Hải Phòng 2018-2019)

Câu 15. Cho x là số tự nhiên chẵn. Chứng tỏ rằng biểu thức $M = \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{12}$ có giá trị là số nguyên.

(Đề thi Chọn HSG lớp 9 THCS Hiệp An 2018-2019)

Câu 16. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Phù Ninh 2013-2014)

Câu 17. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 18. Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Câu 19. a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 20. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a + b + c$.

(Đề thi vào 10 Chuyên Lam Sơn năm 2019-2020)

Câu 21. Tìm số nguyên dương n bé nhất để $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48$ chia hết cho 125.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Hoàng Hóa 2015-2016)

Câu 22. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho: $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

(đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thanh Oai 2012-2013)

Câu 23. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$

Chứng minh $A = xy$ chia hết cho 12

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vĩnh Lộc 2016-2018)

Câu 24. Chứng minh rằng số tự nhiên $A = 1.2.3 \dots 2017.2018 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Hoài Nhon 2018-2019)

Câu 25. Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2010$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Câu 26. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Câu 27. Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Câu 28. Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên. Chứng minh rằng: Nếu $f(x) : 7$ với $\forall x \in \mathbb{Z}$ thì từng hệ số của $f(x)$ cũng $: 7$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 trường Trần Mai Ninh năm 2012-2013)

Câu 29. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033$ cho $x^2 + 12x + 30$

Câu 30. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng : $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 26, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Câu 31. Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(x)$ chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của x thì các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5.

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thạch Hà 2016-2017)

Câu 32. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20} - 1$ chia hết cho 100

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Lục Nam 2018-2019)

Câu 33. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 3n + 11$ không chia hết cho 49.

(Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội 2019-2020)

Câu 34. Cho $N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$, k là số nguyên. Tìm điều kiện của k để số N chia hết cho 16.

(Đề thi HSG huyện Lê Ninh 2018-2019)

Câu 35. Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không ?

Câu 36. Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) : 91$

Câu 37. Chứng minh rằng $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40.

Câu 38. Tìm đa thức $f(x)$ biết: $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 5; $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 7; $f(x)$ chia cho $(x-2)(x-3)$ được thương là $x^2 - 1$ và đa thức dư bậc nhất với x

Câu 39. Cho số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Câu 40. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử các số nguyên x, y thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y đều chia hết cho p .

(Đề thi HSG lớp 9 TP Hải Phòng 2017-2018)

Câu 41. Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng abc cũng chia hết cho 14.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

(Trích đề Chuyên toán Sư Phạm Hà Nội 2019-2020)

Câu 42.

- a) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho $2^n + 1$ chia hết cho 9.
- b) Cho n là số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng $2^n + 1$ không chia hết cho $2^m - 1$ với mọi số tự nhiên m sao cho $2 < m \leq n$.

(Trích đề Phổ Thông năng khiếu Hồ Chí Minh 2019-2020)

Câu 43. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , số $M = 9 \cdot 3^{4n} - 8 \cdot 2^{4n} + 2019$ chia hết cho 20.

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2019-2020)

Câu 44. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2019 thỏa mãn $n^3 + 2019$ chia hết cho 6.

(Trích đề Chuyên Nam Định 2018-2019)

Câu 45. Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y^2; xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5.

Chứng minh $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5

(Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội 2018-2019)

Câu 46. Tìm tất cả các số nguyên không âm a, b, c thỏa mãn

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc \text{ và } a^3 + b^3 + c^3 + 1 \text{ chia hết cho } a+b+c+1.$$

(Trích đề Chuyên Nam Định 2016-2017)

Câu 47. Cho n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng số $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho số 323

(Trích đề Chuyên Bình Định 2018-2019)

Câu 48. Cho $a^2 + b^2$ là bội số của 5 với a và b là các số nguyên. Chứng minh rằng hai số $A = 2a + b$ và $B = 2b - a$ hoặc hai số $A' = 2a - b$ và $B' = 2b + a$ chia hết cho 5.

Câu 49. Cho phương trình $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!(1)$ với $x; y; z$ là ẩn và $9!$ Là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9

- a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên $x; y; z$ thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4
- b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1).

(Trích đề Chuyên Vĩnh Phúc 2018-2019)

Câu 50. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 1$ chia hết cho 24

(Trích đề Chuyên Bến Tre 2018-2019)

Câu 51. Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho n đồng thời $n^3 - 1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng $n + p$ là một số chính phương.

(Trích đề Chuyên Phan Bội Châu 2018-2019)

Câu 52. Với n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng: $(20^n + 16^n - 3^n - 1) : 323$

(Trích đề Chuyên Lâm Đồng 2018-2019)

Câu 53. Đặt $N = a_1 + a_2 + \dots + a_{2018}$, $M = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{2018}^5$ ($a_1; a_2; \dots; a_{2018} \in \mathbb{Z}^+$). Chứng minh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M cũng chia hết cho 30

(Trích đề Chuyên Hải Dương 2018-2019)

Câu 54. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh nếu $a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}$ chia hết cho 6 thì $a^{2018} + b^{2019} + c^{2020}$ cũng chia hết cho 6.

(Trích đề Chuyên Tuyên Quang 2018-2019)

Câu 55. Tìm dạng tổng quát của số nguyên dương n biết: $M = n \cdot 4^n + 3^n$ chia hết cho 7.

(Trích đề Chuyên Hải Dương 2016-2017)

Câu 56. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

(Trích đề Chuyên Quảng Ngãi 2018-2019)

Câu 57. Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn $4(m+n)^2 - mn$ chia hết cho 225. Chứng minh rằng: mn cũng chia hết cho 225.

(Trích đề Chuyên Lào Cai 2018-2019)

Câu 58. Cho n là số nguyên dương tùy ý, với mỗi số nguyên dương k đặt $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$. Chứng minh $S_{2019} : S_1$.

(Chuyên toán Thanh Hóa 2018-2019)

Câu 59. Chứng minh rằng nếu p và $(p+2)$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

(Trích đề Chuyên Hòa Bình 2015-2016)

Câu 60. Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

(Trích đề Chuyên Phú Thọ 2015-2016)

Câu 61. Chứng minh biểu thức $S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

(Trích đề Chuyên Bình Phước 2017-2018)

Câu 62. Cho $A = 2(1^{2015} + 2^{2015} + \dots + n^{2015})$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho $n(n+1)$.

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2015-2016)

Câu 63. Cho biểu thức $Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để Q chia hết cho 16.

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2016-2017)

Câu 64. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Câu 65. Cho a, b, c là ba số nguyên khác 0 thỏa $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng: abc chia hết cho 4.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Đồng Nai 2019)

Câu 66. Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An Bảng A 2019)

Câu 67. Chứng minh rằng $A = 4^n + 17$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An Bảng B 2019)

Câu 68. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2019)

Câu 69. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Bình Phước 2019)

Câu 70. Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p = a^3 - b^3$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được một số là bình phương của một số nguyên lẻ.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Khánh Hòa 2018)

Câu 71. Cho đa thức $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + b - 1$. Xác định a, b để $f(x)$ chia hết cho $(x - 1)$ và $(x + 2)$.

Câu 72. 1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016} - 1$ chia hết cho 60.

2. Cho x, y, z là các số dương khác nhau đôi một và $x^3 + y^3 + z^3$ chia hết cho $x^2 y^2 z^2$. Tìm thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2 y^2 z^2$

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2017)

Câu 73. Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Nam 2017)

Câu 74. Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Tìm số dư khi chia $p + q$ cho 12.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Vĩnh Long 2016)

Câu 75. Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = 2(c^2 - 8d^3)$.

Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Thành Phố Hà Nội 2016)

Câu 76. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , số $A = 3n^3 + 15n$ chia hết cho 18.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Gia Lai 2019)

Câu 77. Biết $a; b$ là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Thành Phố Hà Nội 2019)

Câu 78. Chứng minh rằng $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$ chia hết cho 3, biết $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các chữ số của 2019²⁰¹⁸.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Hải Dương 2019)

Câu 79. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $46^n + 296.13^n$ chia hết cho 1947

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu 2019)

Câu 80. Chứng minh rằng $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Lâm Đồng 2019)

Câu 81. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b = c^3 - 2018c$. Chứng minh rằng $A = a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Ngãi 2019)

Câu 82. Chứng minh trong các số có dạng 20142014 ... 2014 có số chia hết cho 2013.

(Trích đề vào 10 Chuyên Lạng Sơn năm 2013-2014)

Câu 83. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a + 20$ và $b + 13$ cùng chia hết cho 21. Tìm số dư của phép chia $A = 4^a + 9^b + a + b$ cho 21.

(Trích đề vào 10 Chuyên Hải Phòng năm 2013-2014)

Câu 84. Cho biểu thức: $A = (a^{2020} + b^{2020} + c^{2020}) - (a^{2016} + b^{2016} + c^{2016})$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm 2019-2020)

Câu 85. Cho hai số nguyên dương x, y với $x > 1$ và thỏa mãn điều kiện: $2x^2 - 1 = y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

(Trích đề vào 10 Chuyên Toán Lam Sơn năm 2019-2020)

Câu 86. Cho các số 1; 2; 3; ...; 100. Viết một cách tùy ý 100 số đó nối tiếp nhau theo hàng ngang ta được một số tự nhiên. Hỏi số tự nhiên đó có chia hết cho 2016 hay không?

(Trích đề vào 10 Chuyên Toán Lam Sơn năm 2015-2016)

Câu 87. Tìm k để tồn tại số tự nhiên n sao cho $(n^2 - k) : 4$ với $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Câu 88. Cho n là số dương. Chứng minh rằng: $(n+1)(n+2)\dots(2n)$ chia hết cho 2^n .

Câu 89. Tìm a, b để $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 9$ chia hết cho $Q(x) = x^2 - 9$.

(Đề thi học sinh giỏi huyện Chương Mỹ - Hà Nội năm 2019-2020)

Câu 90. Chứng minh rằng: $(2019^{2019} + 2021^{2020}) : 2020$.

(Đề thi học sinh giỏi huyện Chương Mỹ (vòng 2) - Hà Nội năm 2019-2020)

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Câu 91. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m + n^2$ chia hết cho $m^2 - n$ và $n + m^2$ chia hết cho $n^2 - m$.

(Đề thi học sinh giỏi tỉnh Bắc Ninh năm 2017-2018)

Câu 92. Chứng minh $n^6 - 2n^4 + n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

(Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Bình Định năm 2017-2018)

Câu 93. Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$. Biết rằng $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chia hết cho 3267.

(Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Hải Dương năm 2017-2018)

Câu 94. Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

(Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Hải Dương năm 2011-2012)

Câu 95. Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2y + x + y$ chia hết cho $xy^2 + y + 1$.

(Trích đề thi Chuyên Phan Bội Châu năm 2019-2020)

Câu 96. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $(x^2 - 2) : (xy + 2)$.

(Trích đề thi Chuyên Phan Bội Châu năm 2016-2017)

Câu 97. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 : ab$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$.

(Trích đề thi Chuyên Phan Bội Châu năm 2015-2016)

Câu 98. Giả sử a, b, c là các số nguyên sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng a, b, c đồng thời chia hết cho 2.

(Trích đề thi Chuyên Vinh – Nghệ An năm 2012-2013)

Câu 99. Chứng minh rằng $(5^{3n+2} + 2^{2n+3}) : 11$, với mọi số tự nhiên n .

(Trích đề thi Chuyên Vinh – Nghệ An năm 2007-2008)

Câu 100. Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2 + x + 2$ chia hết cho $xy - 1$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x^2 + x + 2}{xy - 1}$.

Câu 101. Cho S là tập các số nguyên dương n có dạng $n = x^2 + 3y^2$, trong đó x, y là các số nguyên. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a, b \in S$ thì $ab \in S$.

b) Nếu $N \in S$ và N là số chẵn thì N chia hết cho 4 và $\frac{N}{4} \in S$.

(Trích đề thi Chuyên Sư phạm Hà Nội năm 2016-2017)

Câu 102. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$ với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p .

(Trích đề thi Chuyên Sư phạm Hà Nội năm 2011-2012)

Câu 103. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

$$\left[(27n+5)^7 + 10 \right]^7 + \left[(10n+27)^7 + 5 \right]^7 + \left[(5n+10)^7 + 27 \right]^7$$

chia hết cho 42.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2019-2020)

Câu 104. Với x, y là những số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$. Chứng minh $x^2 - y^2 \vdots 40$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2016-2017)

Câu 105. Tìm các số nguyên $(x; y)$ không nhỏ hơn 2 sao cho $xy - 1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2015-2016)

Câu 106. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\overline{abc} - (10d + e)$ chia hết cho 101?

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2014-2015)

Câu 107. Tìm hai chữ số cuối cùng của số: $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2012-2013)

Câu 108. Tìm chữ số tận cùng của số $13^{13} + 6^6 + 2009^{2009}$

(Trích đề thi Chuyên KHTN Hà Nội năm 2009-2010)

Câu 109. Cho m, n là hai số nguyên. Chứng minh rằng: nếu $7(m+n)^2 + 2mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225.

(Trích đề thi Chuyên TP. Hồ Chí Minh năm 2019-2020)

Câu 110. Cho m, n là các số thực dương thỏa mãn $5m + n \vdots m + 5n$. Chứng minh rằng $m \vdots n$.

(Trích đề thi Chuyên TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Câu 111. Cho x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy .

a) Chứng minh rằng x và y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng $k = \frac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

(Trích đề thi Chuyên toán TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Câu 112. Cho x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$F = |5x^2 + 11xy - 5y^2|.$$

(Trích đề thi HSG lớp 9 Hà Tĩnh năm 2017-2018)

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Câu 113. Cho a, b là các số nguyên, chứng minh rằng: $P = a^7b^3 - a^3b^7$ chia hết cho 30.

Câu 114. Cho đa thức $P = a^5 - 5a^4 + 5a^3 + 5a^2 - 6a + 240$. Chứng minh rằng khi a là số nguyên thì P chia hết cho 120.

Câu 115. Cho a, b là các số nguyên dương sao $a+1, b+2007$ cùng chia hết cho 6. Chứng minh rằng: $P = 4^a + a + b$ chia hết cho 6.

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2007-2008).

Câu 116. Cho $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$, với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

(Vòng 2, THPT Chuyên – TP. Hà Nội, năm học 2005-2006)

Câu 117. a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z sao cho:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 560647.$$

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a, b, c, d thoả mãn:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d + 660064.$$

Câu 118. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì:

a) $P = a^2 + 3a + 53$ không chia hết cho 49.

b) $Q = a^2 + 5a + 185$ không chia hết cho 169.

Câu 119. Tìm số tự nhiên n sao $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ không chia hết cho 5.

Câu 120. Tìm số nguyên a sao cho:

a) $P = a^2 - a + 124$ chia hết cho 121.

b) $Q = a^3 - 7a^2 + 4a - 14$ chia hết cho $a^2 + 3$.

Bài 121.

a) Tìm m để đa thức $A(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + m - 7$ chia hết cho đa thức

$$B(x) = x^2 - x - 2.$$

b) Tìm a và b để đa thức $f(x) = 2x^3 - 3bx^2 + 2x + a - 5$ chia hết cho $x-1$ và $x+2$.

Bài 122. Tìm đa thức $A(x)$, biết $A(x)$ chia cho $x-5$ dư 7, $A(x)$ chia cho $x+3$ dư -1 và $A(x)$ chia cho $x^2 - 2x - 15$ được thương là $2x^3 + 1$ và còn dư.

Bài 123. Cho các đa thức

$$P(n) = n^{1880} + n^{1840} + n^{1800}, Q(n) = n^{20} + n^{10} + 1.$$

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ thì $P(n)$ chia cho $Q(n)$.

Bài 124: Cho a là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $P = (a+4)(a+5)(a+6) + \dots + (2a+5)(2a+6)$ chia hết cho 2^{a+3} .

b) $Q = (a+1)(a+2)(a+3)\dots(3a-1)3a$ chia hết cho 3^a .

Bài 125: Tổng của hai số tự nhiên bất kỳ chia hết cho 6 khi và chỉ khi tổng các lập phương của chúng chia hết cho 6.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1979 – 1980 vòng 1)

Bài 126. Chứng minh rằng $m^3 + 20m$ chia hết cho 48 với mọi số chẵn m .

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1979 – 1980 vòng 2)

Bài 127. Tìm tất cả các số tự nhiên mà khi gạch bỏ đi một chữ số thì số đó giảm đi 71 lần.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1982 – 1983 vòng 2)

Bài 128. Tìm một số có hai chữ số; biết rằng số đó chia hết cho 3 và nếu thêm số 0 vào giữa các chữ số rồi cộng vào số mới tạo thành một số bằng hai lần chữ số hàng trăm của nó thì được một số lớn gấp 9 lần số phải tìm.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh năm học 1983 – 1984 Vòng 2)

Bài 129. Chứng minh rằng $(x^2 + y^2):3$ khi và chỉ khi x và y chia hết cho 3.

(Thi học sinh giỏi 9 TP Hồ Chí Minh 1984 – 1985 vòng 2)

Bài 130. Một số gồm 4 chữ số giống nhau chia cho một số gồm 3 chữ số giống nhau thì được thương là 16 và số dư là một số r nào đó. Nếu số bị chia và số chia đều bớt đi một chữ số thì thương không đổi và số dư giảm bớt đi 200. Tìm các số đó.

(Thi học sinh giỏi 9 TP Hồ Chí Minh 1986 – 1987 vòng 2)

Bài 131.

a) Tìm số có ba chữ số sao cho tỷ số giữa số đó và tổng các chữ số của nó có giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng:

$A = (4 + a - 3b)^4 \cdot (3a - 5b - 1)^4$ chia hết cho 16 với mọi số nguyên a và b .

$B = 4^{n+1} + 60n - 4$ chia hết cho 36 với mọi số tự nhiên n .

(Thi học sinh giỏi 9 TP Hồ Chí Minh 1987 – 1988)

Bài 132.

a) Chứng minh rằng biểu thức $A = (2^{3n+1} + 2^n)(n^5 - n)$ chia hết cho 30 với mọi số tự nhiên n .

b) Chứng tỏ rằng $n = 1988$ là số tự nhiên duy nhất sao cho tổng các chữ số $S(n)$ của nó bằng $S(n) = n^2 - 1988n + 26$.

c) Chứng minh rằng hai số: $A = 2n + 1; B = \frac{n(n+1)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n .

(Thi học sinh giỏi 9 TP Hồ Chí Minh 1988 – 1989 vòng 1 - vòng 2)

Bài 133.

a) Cho hai số nguyên dương a và b ($a \geq b$) đều không chia hết cho 5. Chứng minh rằng:

$a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

b) Cho các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ mà giá trị của nó bằng 1 hoặc bằng -1. Chứng minh rằng nếu

$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_na_1 = 0$ thì n chia hết cho 4.

c) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho: $n + S(n) + S(S(n)) = 60$. Trong đó kí hiệu $S(n)$ chỉ tổng các chữ số của số n .

I CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

(Thi học sinh giỏi TP Hồ Chí Minh 1982 – 1983 vòng 2)

Bài 134. Cho số $M = 1993^{1997} + 1997^{1993}$.

- a) Chứng minh rằng: M chia hết cho 15.
 b) Hỏi M tận cùng bằng chữ số nào? (có giải thích)

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1992 – 1993)

Bài 135. 1) Cho biết x, y, z là các số nguyên sao cho $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$. Chứng minh rằng ta có: $x + y + z$ là bội số của 27.

- 2) Chứng minh rằng với k nguyên dương và a là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $a^{4k} - 1$ chia hết cho 240.

(Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh 1995 – 1996)

Bài 136.

- a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n \cdot 2^n + 3^n$ chia hết cho 5.
 b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n \cdot 2^n + 3^n$ chia hết cho 25.

(Thi vào lớp 10 toán – tin P.T.N.K Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh)

Bài 137.

- a) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta đều có:
 $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$ chia hết cho 91.
 b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn phương trình sau:

$$5^{2p} + 1997 = 5^{2p^2} + q^2$$

(Thi vào lớp 10 chuyên toán – tin ĐHSP Hà Nội 1997 - 1198)

Bài 138. Tìm tất cả các số nguyên n để cho $P = 1999n^2 + 1997n + 30$ chia hết cho $6n$ **Bài 139.** a) Cho hai số tự nhiên a, b sao cho $ab = 1996^{1995}$. Hỏi $a + b$ có chia hết cho 1995 hay không?

b) Cho hai số tự nhiên c, d sao cho $cd = 1991^{1992}$. Hỏi $c + d$ có chia hết cho 1992 hay không?

(Thi vào 10 chuyên toán Hà Nội – AMSTERDAM 1991)

Bài 140. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 = 1995$ **Bài 141.** Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $S_n = 1^{2019} + 2^{2019} + \dots + n^{2019}$ chia hết cho

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n.$$

Bài 142. Cho m, n là các số nguyên dương, giả sử $A = \frac{(m+n)^3}{n^2}$ là số nguyên lẻ. Tìm giá trị bé nhất có thể của A và tìm m, n thỏa mãn giá trị này. Chứng minh cho câu trả lời.**Bài 143.** Tìm các số nguyên dương a, b sao cho $\frac{a^3b-1}{a+1}, \frac{b^3a+1}{b-1}$ là các số nguyên dương.

Bài 143. Cho các số tự nhiên a, b, c, d, e biết: $a + b + c + d + e = 3a = 4b = 5c, d + e = 13$. Tìm số lớn nhất trong các số a, b, c, d, e .

Bài 144. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m + n^2 : (m^2 - n)$ và $n + m^2 : (n^2 - m)$

Bài 145. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $2xy - 1$ chia hết cho $(x - 1)(y - 1)$.

Bài 146. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $4x^2 + 6x + 3$ chia hết cho $2xy - 1$.

Bài 147. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $x^2 - 2$ chia hết cho $xy + 2$.

Bài 148. Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $x^2 + 3xy + y^2$ là lũy thừa của 5.

Bài 149. Cho x, y là các số nguyên $x, y \neq -1$ sao cho $\frac{x^4 - 1}{y + 1} + \frac{y^4 - 1}{x + 1}$ là số nguyên. Chứng minh: $x^4 y^{44} - 1$ chia hết $y + 1$.

Bài 150. Xác định tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $\frac{p^{2n+1} - 1}{p - 1} = \frac{q^3 - 1}{q - 1}$ với $n > 1, n \in \mathbb{Z}$.

Bài 151. Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của $a^2 + b^2$ và $a(a + b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a + b)$.

Bài 152. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $a \neq b$ thỏa $ab(a + b)$ chia hết cho $a^2 + ab + b^2$. Chứng minh rằng: $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$

Bài 153. Cho n là một số nguyên dương. Tìm tổng của tất cả các số chẵn nằm giữa $n^2 - n + 1$ và $n^2 + n + 1$.

Bài 154. Cho m, n là các số nguyên dương, giả sử $A = \frac{(m + n)^3}{n^2}$ là số nguyên lẻ, tìm giá trị bé nhất có thể có của A và tìm m, n thỏa mãn giá trị này. Chứng minh cho câu trả lời.

Bài 155. Tìm tất cả các số nguyên $n > 1$ sao cho với bất kỳ ước số nguyên tố của $n^6 - 1$ là một ước của $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$.

Bài 156. Tìm n để $M = \underbrace{100 \dots 01}_{n} \underbrace{0100 \dots 01}_{n}$ chia hết cho 37.

Bài 157. Tìm tất cả các số có năm chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\sqrt[3]{\overline{abcde}} = \overline{ab}$.

Bài 158. Tìm các chữ số a, b, c với $a \geq 1$ sao cho $\sqrt{abc} = (a + b)\sqrt{c}$.

Bài 159. Tìm số có 3 chữ số $\overline{abc}$ biết $\overline{abc} = a! + b! + c!$

Bài 160. Cho các số tự nhiên a, b . Chứng minh:

a, $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a, b đều chia hết cho 3.

b, $a^2 + b^2$ chia hết cho 7 thì a, b đều chia hết cho 7.

c, $a^4 + b^4$ chia hết cho 15 thì a, b đều chia hết cho 3 và 5.

Bài 161. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m + n^2 : (m^2 - n)$ và $n + m^2 : (n^2 - m)$.

Bài 162. Xét phân số $A = \frac{n^2 + 4}{n + 5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2017 sao cho phân số A chưa tối giản.

Bài 163. Cho $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của a và b không vượt quá $\sqrt{a+b}$.

CHỦ ĐỀ 2. QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Câu 1. Ta có:

$$\begin{aligned}a^5 - a &= a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5] \\&= a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1)\end{aligned}$$

Do tích của 5 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

Suy ra $a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) : 30$ và $5a(a+1)(a-1) : 30$.

Vậy $a^5 - a : 30$

Câu 2. a) Ta có:

$$\begin{aligned}A &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n+1)^3 + 2(n+1) = \dots \\&= n(n+1)(n+2) + 3(n+1)\end{aligned}$$

Khi đó: $3(n+1) : 3$; $n(n+1)(n+2)$ là tích của 3 số nguyên dương liên tiếp nên chia hết cho 3 $\Rightarrow A : 3$

b) Ta có:

$$a = 13k + 2, b = 13n + 3$$

$$a^2 + b^2 = (13k + 2)^2 + (13n + 3)^2 = \dots = 13(13k^2 + 4k + 13n^2 + 4n + 1) : 13$$

Câu 3. Ta có: $A = [n^3(n^2 - 7)^2 - 36n]$

$$\begin{aligned}&= n[n(n^2 - 7) - 6][n(n^2 - 7) + 6] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6) \\&= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6) = n[(n^2 - 1) - 6(n+1)][(n^2 - 1) - 6(n-1)] \\&= n(n+1)(n^2 - n - 6)(n-1)(n^2 + n - 6) = n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3)\end{aligned}$$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A : 7 \forall n \in \mathbb{Z}$

Câu 4. Ta có: $n = 2k$, với k là số nguyên; $n^3 - 28n = (2k)^3 - 28(2k) = 8k^3 - 56k$

$$= 8k(k^2 - 7) = 8k(k^2 - 1 - 6)$$

$$= 8k(k^2 - 1) - 48k = 8k(k-1)(k+1) - 48k$$

$k(k-1)(k+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 nên

$8k(k-1)(k+1) - 48k$ chia hết cho 48

Câu 5. Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó n lẻ nên n có dạng $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$

Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1) = (2k+1).2k.(2k+2) = 4.k.(k+1)(2k+1)$

Vì k và $(k+1)$ là 2 số tự nhiên liên tiếp suy ra: $k(k+1):2 \Rightarrow 4k(k+1)(2k+1):8 \Rightarrow (n^3 - n):8$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với $(1);(2)$ suy ra

$$(n^3 - n):24 \quad (\text{dpcm})$$

Câu 6. Ta có:

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3)=1$ nên chia hết cho 6

$18n:6$, suy ra điều phải chứng minh

Câu 7. Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \\ &= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) \\ &= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } C &= n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3 \\ &= n^2(n+1) + 2n(n+1) + 3(n+1) \\ &= n(n+1)(n+2) + 3(n+1) \end{aligned}$$

Ta thấy $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3 (vì tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Và $3(n+1):3 \Rightarrow C$ chia hết cho 3

Nên $Q = 3C$ chia hết cho 9

Câu 8. Ta có: $2019^{2021} + 2021^{2019} = (2019^{2021} + 1) + (2021^{2019} - 1)$

Vì $(2019^{2021} + 1):(2019 + 1) \Leftrightarrow (2019^{2021} + 1):2020. \quad (1)$

$(2021^{2019} - 1):(2021 - 1) \Leftrightarrow (2021^{2019} - 1):2020. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Câu 9.

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11}.(2^4 + 1) = 2^{11}.17$ chia hết cho 17

b) Ta có: $19^{19} + 69^{19}:(19 + 69) \Leftrightarrow 19^{19} + 69^{19}:88 \Rightarrow 19^{19} + 69^{19}:44$

Câu 10.

Nếu $n = 3k (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 3k + 2$ không chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 9k + 4$ không chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 15k + 8$ không chia hết cho 3.

Do đó A không chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Vậy A không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n .

Câu 11. Ta có : $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$

$$= (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) + (24n - 24) = n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) + 24(n - 1)$$

$$= n[(n^3 + n^2) + (5n^2 + 5n) + (6n + 6)] + 24(n - 1) = n(n + 1)(n^2 + 5n + 6) + 24(n - 1)$$

$$= n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 24(n - 1)$$

Vì $n; n + 1; n + 2; n + 3$ là bốn số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 2 số chẵn liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4. Vậy $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ chia hết $2.3.4 = 24$ và $24(n - 1)$ chia hết cho 24 nên $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$ chia hết cho 24.

Câu 12. Ta có: $2a^2 + 3ab + 2b^2 : 7$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 - 2ab) + 7ab : 7 \Rightarrow 2(a - b)^2 + 7ab : 7$$

$$\text{Do } 7ab : 7 \ (a, b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 2(a - b)^2 : 7 \text{ do } (2, 7) = 1$$

$$\text{Từ đó ta có } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) : 7$$

$$\text{Vậy } (a^2 - b^2) : 7$$

Câu 13. Vì n là số tự nhiên không chia hết cho 3 nên $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2 \ (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{- Xét } n = 3k + 1 \text{ ta có: } 3^{2n} = 3^{2(3k+1)} = 3^{6k} \cdot 3^2 = (3^3)^{2k} \cdot 9 = 27^{2k} \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$3^n = 3^{3k+1} = 3^{3k} \cdot 3 = (3^3)^k \cdot 3 = 27^k \cdot 3 \equiv 3.$$

$$\text{Suy ra: } P = 3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 9 + 3 + 1 = 13 \equiv 0 \pmod{13}.$$

$$\text{- Xét } n = 3k + 2 \text{ ta có: } 3^{2n} = 3^{2(3k+2)} = 3^{6k} \cdot 3^4 = (3^3)^{2k} \cdot 81 = 27^{2k} \cdot 81 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$3^n = 3^{3k+2} = 3^{3k} \cdot 3^2 = (3^3)^k \cdot 9 = 27^k \cdot 9 \equiv 9.$$

$$\text{Suy ra: } P = 3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 3 + 9 + 1 = 13 \equiv 0 \pmod{13}$$

Vậy, với n là số tự nhiên không chia hết cho 3 thì $P = 3^{2n} + 3^n + 1$ chia hết cho 13.

Câu 14. Xét x là số nguyên dương, ta thấy

$$x^5 - x = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) : 6 \quad (1) \quad (\text{vì chứa tích của ba số nguyên liên tiếp})$$

$$\text{Với } x = 5q \ (q \in \mathbb{Z}_+) \text{ thì } x^5 - x : 5$$

$$\text{Với } x = 5q \pm 1 \ (q \in \mathbb{Z}_+) \text{ thì } x^5 - x : 5$$

$$\text{Với } x = 5q \pm 2 \ (q \in \mathbb{Z}_+) \text{ thì } x^5 - x : 5$$

$$\text{Suy ra } x^5 - x : 5 \quad (2) \text{ mà } (5, 6) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ } (1), (2), (3) \text{ suy ra } x^5 - x : 30$$

Xét hiệu $Q - P = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + (a_3^5 - a_3) + \dots + (a_{2019}^5 - a_{2019})$

Vì $x^5 - x \vdots 30$ nên $Q - P \vdots 30$

Mà theo bài ra $P \vdots 30$ nên $Q \vdots 30$

Câu 15. Vì a là số tự nhiên chẵn nên $a = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \text{Do đó } M &= \frac{8k^3}{24} + \frac{4k^2}{8} + \frac{2k}{12} = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} \\ &= \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \end{aligned}$$

Ta có: $k(k+1) \vdots 2 \Rightarrow k(k+1)(2k+1) \vdots 2$

Ta cần chứng minh $k(k+1)(2k+1) \vdots 3$

+ Nếu $k = 3n$ (với $n \in \mathbb{N}$) thì $k(k+1)(2k+1) \vdots 3$

+ Nếu $k = 3n + 1$ (với $n \in \mathbb{N}$) thì $2k+1 \vdots 3$

+ Nếu $k = 3n + 2$ (với $n \in \mathbb{N}$) thì $k+1 \vdots 3$

Như vậy $\forall k \in \mathbb{N}$ ta có $k(k+1)(2k+1)$ luôn chia hết cho 2 và cho 3. Mà $(2, 3) = 1 \Rightarrow$

$k(k+1)(2k+1) \vdots 6$

Vậy A có giá trị nguyên.

Câu 16. Với $n = 0$ ta có $A(0) = 19 \vdots 19$

Giả sử A chia hết cho 19 với $n = k$ nghĩa là: $A(k) = 7 \cdot 5^{2k} + 12 \cdot 6^k \vdots 19$

Ta phải chứng minh A chia hết cho 19 với $n = k + 1$ nghĩa là phải chứng minh:

$$A(k+1) = 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 12 \cdot 6^{k+1} \vdots 19$$

Ta có: $A(k+1) = 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 12 \cdot 6^{k+1} \vdots 19$

$$\begin{aligned} &7 \cdot 5^{2k} \cdot 5^2 + 12 \cdot 6^n \cdot 6 \\ &= 7 \cdot 5^{2k} \cdot 6 + 7 \cdot 5^{2k} \cdot 19 + 12 \cdot 6^n \cdot 6 \\ &= 8 \cdot A(k) + 7 \cdot 5^{2k} \cdot 19 \vdots 19 \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n

Câu 17. Ta có:

$$\begin{aligned} 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 2^{n+1} &= 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 2^{2n} \\ &= 5^n (59 - 8) + 8 \cdot 64^n = 59 \cdot 5^n + 8 (64^n - 5^n) \\ 59 \cdot 5^n &\vdots 59 \text{ và } 8 \cdot (64^n - 5^n) \vdots (64 - 5) = 59 \end{aligned}$$

Vậy $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 2^{n+1} \vdots 59$

Câu 18. Dễ thấy $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) \\ = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016})$$

Các hiệu trên chia hết cho 3, do vậy A chia hết cho 3

Câu 19. a) Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có a + b chia hết cho 3

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$$

Vì a + b chia hết cho 3 nên $(a + b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

$$\text{b) } n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1$$

$$\text{Hay } n^2 - n : n^2 - n + 1 \Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1)$$

$$\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$+) n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 20. Từ giả thiết ta có

$$a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = 2ab \Leftrightarrow (a + b)^2 - c^2 = 2ab \Leftrightarrow (a + b + c)(a + b - c) = 2ab \quad (*)$$

Nếu a lẻ, b chẵn thì suy ra c lẻ dẫn tới a + b - c chẵn.

Nếu a, b lẻ thì c chẵn suy ra a + b - c chẵn.

Nếu a, b cũng chẵn thì c chẵn suy ra a + b - c chẵn.

Như vậy trong mọi trường hợp ta luôn có a + b - c chẵn $\Rightarrow a + b - c = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Từ (*) ta cũng suy ra $2k(a + b + c) = 2ab \Leftrightarrow k(a + b + c) = ab \Leftrightarrow ab : a + b + c$.

Câu 21. Ta có: $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48 = (n - 4)(n + 2)(n + 6)$.

Thử với $n = 1; 2; 3$ thì F đều không chia hết cho 125.

Thử với $n = 4$ thì $F = 0$ chia hết cho 125.

Vậy số nguyên dương bé nhất cần tìm là: $n = 4$.

Câu 22. Theo đề bài có: $a + b^2 = k(a^2b - 1) \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\Leftrightarrow a + k = b(ka^2 - b) \Leftrightarrow a + k = mb \quad (1)$$

$$\text{Với } ka^2 - b = m \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow m + b = ka^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $(m - 1)(b - 1) = mb - b - m + 1$

$$= a + k - ka^2 + 1 = (a + 1)(k + 1 - ka) \quad (3)$$

Vì $m > 0$ theo (1) nên $(m - 1)(b - 1) \geq 0$. Từ (3)

$$\Rightarrow k + 1 - ka \geq 0 \Rightarrow k + 1 \geq ka \Rightarrow 1 \geq k(a - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(a - 1) = 0 \\ k(a - 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2, k = 1 \end{cases}$$

* Nếu $a = 1$ từ (3) $\Rightarrow (m - 1)(b - 1) = 2 \Rightarrow b = 2$ hoặc $b = 3$

$$\Rightarrow (a; b) = (1; 2) \text{ và } (1; 3)$$

* Nếu $a = 2, k = 1 \Rightarrow (m - 1)(b - 1) = 0$

$$\text{Khi } m = 1 \text{ từ (1)} \Rightarrow (a; b) = (2; 3)$$

$$\text{Khi } b = 1 \Rightarrow (a; b) = (2; 1)$$

Thử lại ta có đáp số $(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1)$

Câu 23. - Xét phép chia của xy cho 3

Nếu xy không chia hết cho 3 thì

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod{3} \\ y \equiv \pm 1 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv \pm 1 \pmod{3} \\ y^2 \equiv \pm 1 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{3} \quad (\text{Vô lí})$$

Vậy xy chia hết cho 3 (1)

- Xét phép chia của xy cho 4

Nếu xy không chia hết cho 4 thì

$$\text{TH1: } \begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod{4} \\ y \equiv \pm 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ y^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4} \quad (\text{vô lí})$$

TH2: Trong hai số x, y một số chia 4 dư 2, một số chia 4 dư 1 hoặc -1. Không mất tính tổng quát giả sử

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod{4} \\ y \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{8} \\ y^2 \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 5 \pmod{8} \quad (\text{vô lí})$$

- Vậy xy chia hết cho 4 (2)

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

- Từ (1) và (2): Vậy xy chia hết cho 12

Câu 24. Ta có

$B = 1.2.3.....n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ (*) là số tự nhiên. Thật vậy:

Với $n = 1$ thì $B = 1 \in \mathbb{N}$ suy ra (*) đúng.

Với $n = 2$ thì $B = 3 \in \mathbb{N}$ suy ra (*) đúng.

Giả sử (*) đúng khi $n = k$, nghĩa là $B = 1.2.3.....k \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{N}$.

Cần chứng minh (*) đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là

$$B = 1.2.3.....(k+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(k+1)}\right) \in \mathbb{N}.$$

Ta có: $B = 1.2.3.....(k+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(k+1)}\right) = 1.2.3..... \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right) (k+1) + 1.2.3.....k$

$$\text{Có } \begin{cases} 1.2.3..... \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{N} \\ k+1 \in \mathbb{N} \\ 1.2.3.....k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow B \in \mathbb{N}.$$

Vậy $1.2.3.....n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ là số tự nhiên.

Suy ra, với $n = 2k$ thì $1.2.3.....2k \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k}\right)$ và $1.2.3.....k \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)$ là các số tự nhiên.

Suy ra $\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}\right) (k+1)(k+2).....2k$ cũng là các số tự nhiên.

Áp dụng các chứng minh ta có: $1.2.....1009 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1009}\right)$ và

$\left(\frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \dots + \frac{1}{2018}\right) \cdot 1010.1011.....2018$ cũng là các số tự nhiên.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1011:3 \\ 1342:673 \end{cases} \Rightarrow 1010.1011.....1342.....2018:2019$$

$$\Rightarrow 1.2.....1009 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1009}\right) \cdot 1010.1011.....1342.....2018:2019.$$

$$\text{Và } \begin{cases} 3:3 \\ 673:673 \end{cases} \Rightarrow 1.2.3.....673.....1009:2019$$

$$\Rightarrow 1.2.....1009 \cdot \left(\frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot 1010.1011.....2018 : 2019.$$

Vậy số tự nhiên $A = 1.2.3....2017.2018 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018} \right)$ chia hết cho 2019.

Câu 25. Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2010 \\ &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2010 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$, biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x) = (t-5)(t+3) + 2010 = t^2 - 2t + 1995$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1995$ cho t ta có số dư là 1995

Câu 26. Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x) \cdot q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2) \cdot (x-1) \cdot q(x)$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta có: $a=2; b=4$

Câu 27. Chia $f(x)$ cho $x^2 + 2$ được thương là $x-3$ dư $x+2$

Để $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$ thì $x+2$ chia hết cho $x^2 + 2$

$$\Rightarrow (x+2)(x-2) \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 - 6 \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow 6 \text{ chia hết cho } x^2 + 2 \text{ mà } x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \in \{3; 6\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$$

Thử lại ta thấy $x=1; x=-2$ thỏa mãn

Vậy với $x=1; x=-2$ thì $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$

Câu 28. Giả sử $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Do $f(0) = e$ nên $e \div 7$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} f(1) = a + b + c + d + e \div 7 \\ f(-1) = a - b + c - d + e \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \div 7 \\ b + d \div 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e \div 7 \\ f(-1) = 16a - 8b + 4c - 2d + e \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + c \div 7 \\ 4b + d \div 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c \div 7 \\ 4a + c \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a \div 7 \\ c \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \div 7 \\ c \div 7 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} b + d \div 7 \\ 4b + d \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b \div 7 \\ d \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \div 7 \\ d \div 7 \end{cases}$$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Vậy các hệ số của $f(x)$ đều chia hết cho 7.

Câu 29. Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = \dots = (x^2+12x+27)(x^2+12x+35)+2033$

Đặt $x^2+12x+30=t$, ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = (t-3)(t+5)+2033$
 $= t^2+2t-15+2033 = t(t+2)+2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = (x^2+12x+30)(x^2+12x+32)+2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

Câu 30. Giả sử $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư là $ax+b$. Khi đó

$$f(x) = (x^2-4) \cdot (-5x) + ax + b$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 26 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 26 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 18 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = (x^2-4) \cdot (-5x) + 4x + 18$$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm là $f(x) = (x^2-4) \cdot (-5x) + 4x + 18$

Câu 31. Ta có: $P(0) = d : 5$

$$P(1) = a + b + c + d : 5 \Rightarrow a + b + c : 5 \quad (1)$$

$$P(-1) = -a + b - c + d : 5 \Rightarrow -a + b - c : 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2b : 5 \Rightarrow b : 5$ vì $(2,5) = 1$, suy ra $a + c : 5$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d : 5 \Rightarrow 8a + 2c : 5 \Rightarrow a : 5 \Rightarrow c : 5$$

Câu 32. Ta có $p^{20} - 1 = (p^4 - 1)(p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$$\Rightarrow p^2 + 1 \text{ và } p^2 - 1 \text{ là các số chẵn}$$

$$\Rightarrow p^4 - 1 \text{ chia hết cho 4}$$

$$\Rightarrow p^{20} - 1 \text{ chia hết cho 4}$$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^4 - 1$ chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20} - 1$ chia hết cho 25.

Mà $(4; 25) = 1$ nên $p^{20} - 1$. (đpcm)

Câu 33. Giả sử tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + 3n + 11$ chia hết cho 49. Khi đó, ta có

$$4(n^2 + 3n + 11) = (2n + 3)^2 + 35 \text{ chia hết cho 49}$$

Mà 35 và 49 cùng chia hết cho 7 nên $(2n+3)^2$ chia hết cho 7. Suy ra $2n+3$ chia hết cho 7.

Từ đó $(2n+3)^2$ chia hết cho 49. Kết hợp với (1) ta được 35 chia hết cho 49, mâu thuẫn.

Vậy, với mọi số tự nhiên n thì $n^2+3n+11$ không chia hết cho 49.

Câu 34. Ta có : $N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15 = (k^4 - k^2) + (2k^3 - 2k) - (15k^2 - 15)$
 $= (k^2 - 1)(k^2 + 2k - 15) = (k - 1)(k + 1)(k - 3)(k + 5)$

Ta thấy rằng với k là số nguyên lẻ thì N là tích của 4 thừa số (nhân tử) chẵn. Do đó N chắc chắn chia hết cho 16.

Vậy k phải là số nguyên lẻ.

Câu 35. Vì số thứ nhất chia cho 5 dư 1 nên có dạng $5a+1$, số thứ hai chia cho 5 dư 2 nên có dạng $5b+2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Ta có tổng bình phương hai số đó là:

$$(5a+1)^2 + (5b+2)^2 = 25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 20b + 4 = 5(5a^2 + 5b^2 + 2a + 2b + 1) : 5$$

Vậy tổng bình phương của hai số chia hết cho 5

Câu 36. Ta có: $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$

$$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 7$$

$$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 13$$

Do $(13, 7) = 1$ nên A chia hết cho 91

Câu 37. Ta có: $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$

$$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11})$$

$$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$$

$$= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40$$

$$= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8) : 40$$

Vậy $A : 40$

Câu 38. Gọi dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $ax + b$

Ta có: $f(x) = (x-2)(x-3)(x^2-1) + ax + b$

Theo bài ra : $f(2) = 5$ nên ta có: $2a + b = 5$; $f(3) = 7$ nên $3a + b = 7$

$$\Rightarrow a = 2; b = 1$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = (x-2)(x-3)(x^2-1) + 2x + 1$

Câu 39. Ta có: $2^n = 10a + b \Rightarrow b : 2 \Rightarrow ab : 2 \quad (1)$

Ta chứng minh $ab : 3 \quad (2)$

Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

Đặt $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$) ta có: $2^n = 16^k \cdot 2^r$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Nếu $r = 0$ thì $2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 10 \Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

Suy ra $b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow ab : 3$

Từ (1) và (2) suy ra $ab : 6$

Câu 40. Theo giả thiết $p - 5$ chia hết cho 8 nên đặt $p = 8k + 5$ (k là số tự nhiên)

Ta có $\left[(ax^2)^{4k+2} - (by^2)^{4k+2} \right] : (ax^2 - by^2) \Rightarrow a^{4k+2} \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} \cdot y^{8k+4} : p$

$\Rightarrow (a^{4k+2} + b^{4k+2})x^{8k+4} - b^{4k+2}(x^{8k+4} + y^{8k+4}) : p$

Mà $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} : a^2 + b^2 = p$ và $b < p \Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} : p$ (*)

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) ta suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p .

Nếu cả hai không chia hết cho p , theo định lý Fec-ma ta có

$x^{8k+4} \equiv y^{8k+4} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} \equiv 2 \pmod{p}$ mâu thuẫn với (*)

Vậy cả hai số x, y cùng chia hết cho p .

Câu 41. Do $a^3 + b^3 + c^3$ chẵn nên trong các số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 2. (1)

Giả sử trong ba số a, b, c không có số nào chia hết cho 7. Ta thấy rằng, với mọi x nguyên không chia hết cho 7 thì $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$, suy ra $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$.

Do đó $a^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}, b^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}, c^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$.

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \equiv -3, -1, 1, 3 \pmod{7}$, tức $a^3 + b^3 + c^3$ không chia hết cho 7, mâu thuẫn. Vậy trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chia hết cho 7.

Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 7. (2)

Từ (1) và (2) với chú ý $(2; 7) = 1$, ta có abc chia hết cho 14.

Câu 42.

a) $n = 3k$ suy ra $2^n + 1 = 8^k + 1 \equiv (-1)^k + 1 \pmod{9}$. Suy ra k lẻ, $k = 2t + 1$.

Suy ra $n = 3(2t + 1) = 6t + 3$.

Nếu $n = 3k + 1$ ta có $2^n + 1 = 3 \cdot 8^k + 1 \equiv (-1)^k \cdot 3 + 1 \pmod{9}$ suy ra $2^n + 1$ không chia hết cho 9.

Vậy với $n = 6t + 2$, với t là số tự nhiên là các số cần tìm.

b) **Cách 1:** Ta có $2^{km} - 1 : 2^m - 1$. Từ $2^{2n} = (2^n + 1)(2^n - 1)$.

Đặt $2n = km + q$ ($0 \leq q < m$).

Khi đó $2^{2n} - 1 = 2^{km+q} - 2^q + 2^q - 1 = 2^q(2^{km} - 1) + 2^q - 1$ chia hết cho $2^m - 1$, suy ra $2^q - 1$ chia hết cho m mà $0 \leq 2^q - 1 < 2^m - 1$, suy ra $q = 0$.

Do đó $2^n = km$.

Trường hợp 1: Nếu m lẻ, suy ra k chẵn, $k = 2k'$, suy ra $n = k'm$, $2^n + 1 = 2^{k'm} + 1 = 2^{k'm} - 1 + 2$ chia hết cho $2^m - 1$, suy ra 2 chia hết cho $2^m - 1$ vô lý.

Trường hợp 2: Nếu m chẵn $m = 2m'$ nên $n = km'$, suy ra $2^{km'} + 1$ chia hết cho $2^m - 1$, mà $2^m - 1$ chia hết cho $2^{m'} - 1$ nên $2^{km'} + 1$ chia hết cho $2^{m'} - 1$, suy ra 2 chia hết cho $2^{m'} - 1$ vô lý vì $m' > 1$.

Cách 2: Ta có $2^{n-m}(2^m - 1) : 2^m - 1$, suy ra $2^n - 2^{n-m} : 2^m - 1$, mà $2^n + 1 : 2^m - 1$ suy ra $2^{n-m} + 1$ chia hết cho $2^m - 1$.

Lý luận tương tự ta có $2^{n-km} + 1$ chia hết cho $2^m - 1$.

Giả sử $n = km + q$, $0 \leq q < m$.

Chọn k như trên, ta có $2^q + 1$ chia hết cho $2^m - 1$. Mà $q < m$ nên $2^q + 1 = 2^m - 1$, giải ra $q = 1$, $m = 2$ (vô lý).

Câu 43. $M = 9.3^{4n} - 8.2^{4n} + 2019 = 9.81^n - 8.16^n + 2019$

Ta có:

$$81 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 81^n \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 9.81^n \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$8.16^n \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow M \equiv 1 - 0 + 2019 \equiv 2020 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\text{hay } M : 4 \quad (1)$$

Lại có:

$$81 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 81^n \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 9.81^n \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$16 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 16^n \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 8.16^n \equiv 8 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow M \equiv 4 - 3 + 2019 \equiv 2020 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{hay } M : 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M : BCNN(4, 5)$ hay $M : 20$ (đpcm)

Câu 44. Đặt $n = 6q + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Khi đó $n^3 + 2019$ chia hết cho 6 khi $r^3 + 3$ chia hết cho 6.

Nếu r chẵn thì $r^3 + 3$ lẻ, do đó $r^3 + 3$ không chia hết cho 6. Suy ra $r \in \{1, 3, 5\}$.

Với $r = 1 \Rightarrow r^3 + 3 = 4$ không chia hết cho 6.

Với $r = 3 \Rightarrow r^3 + 3 = 30 : 6$.

Với $r = 5 \Rightarrow r^3 + 3 = 128$ không chia hết cho 6.

Suy ra $n = 6q + 3$. Mà $0 \leq n \leq 2019 \Rightarrow 0 \leq q \leq 336$.

Vậy có tất cả 337 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.

Câu 45. Ta có:

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$\begin{aligned} (x^2 - 2xy - y) + (xy - 2y^2 - x) &= x^2 - xy - 2y^2 - x \\ &= x^2 + xy - (2xy + y^2) - (x + y) = (x + y)(x - 2y - 1) \end{aligned}$$

Lại có: $x^2 - 2xy - y, xy - 2y^2 - x$ chia hết cho 5

$$\Rightarrow (x + y)(x - 2y - 1) \text{ chia hết cho } 5$$

TH1: Nếu $x + y$ chia hết cho 5 thì $y \equiv -x \pmod{5}$

$$\Rightarrow 0 \equiv x^2 - 2xy - y \equiv x^2 + 2x^2 + x = x(3x + 1) \pmod{5}, \text{ do vậy } x \text{ chia hết cho } 5 \text{ hoặc chia } 5 \text{ dư } 3.$$

+) Nếu x chia hết cho 5 thì y cũng vậy, bài toán được chứng minh

+) Nếu x chia cho 5 dư 3 thì y chia 5 dư 2, thì

$$2x^2 + y^2 + 2x + y \equiv 2.9 + 4 + 2.3 = 30 \equiv 0 \pmod{5}$$

Ta cũng có điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $x - 2y - 1$ chia hết cho 5 thì $x \equiv 2y + 1 \pmod{5}$

$$\Rightarrow 0 \equiv x^2 - 2xy - y \equiv (2y + 1)^2 - 2y(y + 1) - y = y + 1 \pmod{5}$$

Do đó y chia 5 dư 4 và x cũng chia 5 dư 4 nên:

$$2x^2 + y^2 + 2x + y = 2.16 + 16 + 2.4 + 4 = 60 \equiv 0 \pmod{5}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 46. Giả sử $a; b; c$ là các số nguyên không âm thỏa mãn đề bài, ta có:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 6abc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3abc \quad (1)$$

$$\text{Phân tích } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 3abc(a + b + c) \text{ hay } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc(a + b + c + 1).$$

Do $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ chia hết cho $a + b + c + 1$ nên ta được 1 chia hết cho $a + b + c + 1$

Suy ra $a = b = c = 0$.

Thử lại: $a = b = c = 0$ thỏa mãn. Vậy có duy nhất bộ số $(a; b; c) = (0; 0; 0)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 47. Ta có:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \Rightarrow a^n - b^n = m(a - b) \quad (a, b, n, m \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

$$\text{Vì } n \text{ là số tự nhiên chẵn nên } n = 2k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 20^n - 3^n + 16^n - 1 = 400^k - 9^k + 256^k - 1$$

$$\text{Áp dụng (*), có: } A = (400^k - 1^k) + (256^k - 9^k) = 399x + 247y = 19 \cdot 21x + 19 \cdot 13y \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A : 19 \text{ với mọi số tự nhiên } n \text{ chẵn} \quad (1)$$

$$\text{và có: } A = (400^k - 9^k) + (256^k - 1^k) = 391p + 255q = 17 \cdot 23p + 17 \cdot 15q \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A : 17 \text{ với mọi số tự nhiên } n \text{ chẵn} \quad (2)$$

mà 17 và 19 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) suy ra: $A:17 \cdot 19$ với mọi số tự nhiên n chẵn

Vậy $20^n - 3^n + 16^n - 1:323$ với mọi số tự nhiên n chẵn

Câu 48. Cách 1. Ta có $a^2 + b^2 = a^2 - 4b^2 + 5b^2 = (a - 2b)(a + 2b) + 5b^2$

Do $a^2 + b^2$ là bội số của 5 nên suy ra $(a - 2b)(a + 2b):5$.

Do 5 là số nguyên tố nên từ $(a - 2b)(a + 2b):5$ suy ra $a - 2b:5$ hoặc $a + 2b:5$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a - 2b:5$, khi đó $B = 2b - a$ chia hết cho 5.

Mặt khác ta lại có $2b - a = (2b + 4a) - 5a$ nên $2b + 4a:5 \Rightarrow 2(2a + b):5 \Rightarrow A = 2a + b:5$, do 2 và 5 nguyên tố cùng nhau.

- Nếu $a + 2b:5$, khi đó $B' = a + 2b$ chia hết cho 5. Do đó ta được $-a - 2b:5$.

Mà ta lại có $-a - 2b = -5a - (2b - 4a)$ nên suy ra $2b - 4a:5 \Rightarrow 2(b - 2a):5 \Rightarrow A' = 2a - b:5$ do 2 và 5 nguyên tố cùng nhau.

- Nếu $a - 2b:5$ và $a + 2b:5$ khi đó cả A, B, A', B' cùng chia hết cho 5.

Cách 2. Với mọi số nguyên a và b ta luôn viết được dưới dạng $a = 5k; a = 5k \pm 1; a = 5k \pm 2$ và $b = 5m; b = 5m \pm 1; b = 5m \pm 2$ trong đó k và m là các số nguyên.

Theo bài ra thì $a^2 + b^2$ là bội số của 5 nên ta có các trường hợp sau:

- Nếu $a = 5k$ và $b = 5m$, khi đó ta có A, B, A', B' cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k + 1$ và $b = 5m + 2$, khi đó ta có A', B' cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k + 1$ và $b = 5m - 2$, khi đó ta có A, B cùng chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k - 1$ và $b = 5m + 2$, khi đó ta có A, B chia hết cho 5 hoặc A', B' chia hết cho 5.
- Nếu $a = 5k - 1$ và $b = 5m - 2$, khi đó ta có A, B chia hết cho 5 hoặc A', B' chia hết cho 5.

Câu 49. a) Chứng minh rằng.....

Ta có: $9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn $\Rightarrow x^3:2 \Rightarrow x:2 \Rightarrow x = 2m \quad (m \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 8m^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9! \Leftrightarrow 4m^3 + y^3 + 2z^3 = 1.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow y^3:2 \Rightarrow y:2 \Rightarrow y = 2n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 4m^3 + 8n^3 + 2z^3 = 1.3.4.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow 2m^3 + 4n^3 + z^3 = 1.2.3.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow z^3:2 \Rightarrow z:2 \Rightarrow z = 2p \quad (p \in \mathbb{Z})$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$\Rightarrow 2m^3 + 4n^3 + 8p^3 = 1.2.3.5.6.7.8.9$$

$$\Leftrightarrow m^3 + 2n^3 + 4p^3 = 1.3.5.6.7.8.9$$

$$\text{Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có } \begin{cases} m:2 \\ n:2 \\ p:2 \end{cases} (m; n; p \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2m:4 \\ y = 2n:4 \\ z = 2p:4 \end{cases}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b) Chứng minh rằng không tồn tại.....

Theo ý a) ta có thể đặt $x = 4a; y = 4b; z = 4c$ ($a; b; c \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow a^3 + 2b^3 + 4c^3 = \frac{9!}{4^3} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{4^3} = 1.3.5.6.7.9 \text{ là số}$$

$$\text{chẵn} \Rightarrow a:2 \Rightarrow a = 2u \quad (u \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 8u^3 + 2b^3 + 4c^3 = 1.3.5.6.7.9 \Leftrightarrow 4u^3 + b^3 + 2c^3 = 1.3.3.5.7.9 = 1.5.7.3^4$$

Lại có:

$$\begin{cases} (1.5.7.3^4):3^4 \Rightarrow (1.5.7.3^4):9 \\ x^3 \equiv 0; \pm 1 \pmod{9} \quad (x \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a; b; c:9 \Rightarrow (4u^3 + b^3 + 2c^3):9^3$$

Nhưng do $1.5.7.3^4$ không thể chia hết cho 9^3 nên ta có điều vô lý

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 50. Ta có nhận xét sau: Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$ (1)

$$\text{Lại có: } -1 \equiv 23 \pmod{24} \quad (2)$$

$$\text{Cộng vế theo vế của (1); (2) ta được: } p^2 - 1 \equiv 24 \pmod{24} \equiv 0 \pmod{24}$$

Vậy $p^2 - 1$ chia hết cho 24 với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Câu 51. Ta có: $n^3 - 1 = (n-1) \cdot (n^2 + n + 1):p$

$$(p-1):n \Rightarrow p-1 \geq n \Rightarrow p \geq n+1$$

Vì $p \geq n+1 \Rightarrow (n-1)$ không chia hết cho p

$$\text{Do đó: } (n-1)(n^2 + n + 1):p \Leftrightarrow (n^2 + n + 1):p$$

$$\text{Đặt: } p-1 = kn, \quad k \geq 1 \Rightarrow p = kn+1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow (n^2 + n + 1):(kn+1) \Rightarrow kn+1 \leq n^2 + n + 1$$

$$\Leftrightarrow kn \leq n^2 + n \Leftrightarrow k \leq n+1$$

$$k(n^2 + n + 1) - n(kn+1):(kn+1)$$

$$\Rightarrow [(k-1)n + k):(kn+1)$$

$$k \geq 1 \Rightarrow (k-1)n + k > 0$$

$$\Rightarrow (k-1)n + k \geq kn+1$$

$$\Rightarrow k \geq n+1$$

$$\Rightarrow k = n+1 \Rightarrow p = kn+1 = n^2 + n+1$$

$$\Rightarrow n + p = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$$

Vậy $n + p$ là một số chính phương.

Câu 52. +) Chứng minh hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} & (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n) \\ &= a^n - b^n \end{aligned}$$

+) Vì n là số chẵn, đặt $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ta có:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = 20^{2k} + 16^{2k} - 3^{2k} - 1 = 400^k + 256^k - 9^k - 1$$

Để chứng minh $(20^n + 16^n - 3^n - 1) : 323$, ta cần chứng minh $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ chia hết cho 19 và 17

Ta có:

$$\begin{aligned} 400^k - 1^k &= (400-1)(400^{k-1} + 400^{k-2}.1 + 400^{k-3}.1^2 + \dots + 400.1^{k-2} + 1^{k-1}) \\ &= 399.(400^{k-1} + 400^{k-2}.1 + 400^{k-3}.1^2 + \dots + 400.1^{k-2} + 1^{k-1}) \\ &= 19.21.(400^{k-1} + 400^{k-2}.1 + 400^{k-3}.1^2 + \dots + 400.1^{k-2} + 1^{k-1}) : 19 \\ 256^k - 9^k &= (256-9)(256^{k-1} + 256^{k-2}.9 + \dots + 9^{k-2}.256 + 9^{k-1}) \\ &= 247.(256^{k-1} + 256^{k-2}.9 + \dots + 9^{k-2}.256 + 9^{k-1}) \\ &= 13.19(256^{k-1} + 256^{k-2}.9 + \dots + 9^{k-2}.256 + 9^{k-1}) : 19 \\ &\Rightarrow (400^k - 1^k + 256^k - 9^k) : 19 \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\begin{aligned} 400^k - 9^k &= (400-9)(400^{k-1} + 400^{k-2}.9 + \dots + 9^{k-2}.400 + 9^{k-1}) \\ &= 17.23(400^{k-1} + 400^{k-2}.9 + \dots + 9^{k-2}.400 + 9^{k-1}) : 17 \\ 256^k - 1 &= (256-1)(256^{k-1} + 256^{k-2}.1 + \dots + 256.1^{k-2} + 1^{k-1}) \\ &= 17.15(256^{k-1} + 256^{k-2}.1 + \dots + 256.1^{k-2} + 1^{k-1}) : 17 \\ &\Rightarrow 400^k - 9^k + 256^k - 1 : 17 \end{aligned}$$

Như vậy ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (400^k + 256^k - 9^k - 1) : 19 \\ 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (400^k + 256^k - 9^k - 1) : 17 \end{cases} \Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : (19.17) \\ & \Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : 323 \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều cần chứng minh.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Câu 53. Ta có : $N = a_1 + a_2 + \dots + a_{2018}; M = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{2018}^5 \left(a_1; a_2, \dots, a_{2018} \in \mathbb{Z}^+ \right)$

Xét hiệu

$$\begin{aligned} M - N &= a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{2018}^5 - a_1 - a_2 - \dots - a_{2018} \\ &= (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + \dots + (a_{2018}^5 - a_{2018}) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 + 1)(a^2 - 1) = a(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$$

$30 = 2.3.5$ với $2, 3, 5$ đều là các số nguyên tố

Ta có: $a(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$ có tích của 3 số tự nhiên liên tiếp $a - 1; a; a + 1$ nên

$a(a - 1)(a + 1)$ sẽ chia hết cho 2 và 3

Nếu a chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4 thì lần lượt $a, a - 1, a + 1$ sẽ chia hết cho 5

Nếu a chỉ 5 dư 2 hoặc 3 thì $a + 1$ sẽ chia hết cho 5

Vậy $a(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$ sẽ chia hết cho cả $2; 3; 5$ nên sẽ chia hết cho 30

Do vậy $M - N$ chia hết cho 30 do đó M cũng chia hết cho 30

Ta có điều phải chứng minh

Câu 54. Ta có:

$$\begin{aligned} &a^{2018} + b^{2019} + c^{2020} - (a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}) \\ &= a^{2016}(a^2 - 1) + b^{2017}(b^2 - 1) + c^{2018}(c^2 - 1) \\ &= a^{2015}.a(a - 1)(a + 1) + b^{2016}.(b - 1)(b + 1) + c^{2017}.c(c - 1)(c + 1) \end{aligned}$$

Ta có tích 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 6, do có 1 số chẵn và 1 số chia hết cho 3.

Do vậy: $a(a - 1)(a + 1); b(b - 1)(b + 1); c(c - 1)(c + 1)$ đều chia hết cho 6 nên

$$\left[a^{2018} + b^{2019} + c^{2020} - (a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}) \right] : 6$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 55. +) $n = 2k$ (k nguyên dương): $M = 2k.4^{2k} + 3^{2k} = 2k.16^k + 9^k$. Ta có: 16^k và 9^k cùng dư với 2^k chia 7.

$$\Rightarrow M \text{ cùng dư với } (2k.2^k + 2^k) = 2^k.(2k + 1) \text{ chia } 7 \Rightarrow (2k + 1) \text{ chia hết cho } 7 \Rightarrow k \text{ chia } 7 \text{ dư } 3,$$

$$\text{hay } k = 7q + 3 \Rightarrow n = 14q + 6 \quad (q \in \mathbb{N}).$$

$$+) n = 2k + 1 \quad (k \text{ nguyên dương}): M = (2k + 1).4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 4(2k+1).16^k + 3.9^k$$

$$\Rightarrow M \text{ cùng dư với } (k + 4).2^k + 3.2^k = (k + 7).2^k \text{ chia } 7.$$

$$\Rightarrow k \text{ chia hết cho } 7 \Rightarrow k = 7p \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Vậy $n = 14q + 6$ hoặc $n = 14p + 1$, với p và q là các số tự nhiên.

Câu 56. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

Giả sử tồn tại số tự nhiên n để $n^3 - 9n + 27 : 81$,

$$\text{suy ra } n^3 - 9n + 27 : 3 \text{ hay } n : 3$$

$$\Rightarrow n = 3k \text{ khi đó } n^3 - 9n + 27 = 27(k^3 - k + 1)$$

mà $n^3 - 9n + 27 : 81$ nên $k^3 - k + 1 : 3$

Nhưng $k^3 - k + 1 = (k - 1).k.(k + 1) + 1$ không chia hết cho 3 với mọi k .

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

Câu 57. Đặt $A = 4(m + n)^2 - mn$

$$\Rightarrow 4A = 16(m + n)^2 - 4mn = 16(m + n)^2 - [(m + n)^2 - (m - n)^2]$$

$$= 15(m + n)^2 + (m - n)^2$$

$$A : 225 = 15^2 \Rightarrow \begin{cases} (m - n) : 3 \\ (m - n) : 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m - n)^2 : 9 \\ (m - n)^2 : 25 \end{cases} \Rightarrow (m - n)^2 : 225$$

$$\Rightarrow (m + n)^2 : 15 \Rightarrow \begin{cases} (m + n) : 3 \\ (m + n) : 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m - n) : 15 \\ (m + n) : 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m : 15 \\ n : 15 \end{cases} \Rightarrow mn : 225$$

Vậy $4(m + n)^2 - mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225

Câu 58. Ta có $S_1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng tỏ $2S_{2019} : n(n+1)$.

Ta có nhận xét sau: Với a, b nguyên dương bất kì thì $(a^{2019} + b^{2019}) : (a + b)$.

Thật vậy : $a^{2019} + b^{2019} = (a + b)(a^{2018} - a^{2017}b + \dots - ab^{2017} + b^{2018}) : (a + b)$.

Xét hai trường hợp:

+) Nếu n lẻ: Từ nhận xét trên ta có $2S_{2019} = 2n^{2019} + 2[1^{2019} + (n-1)^{2019}] + 2[2^{2019} + (n-2)^{2019}] +$

$$\dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}\right] : n$$

$$2S_{2019} = 2(1^{2019} + n^{2019}) + 2[2^{2019} + (n-1)^{2019}] +$$

$$\dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2019}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}\right] : (n+1)$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $2S_{2019} : n(n+1)$.

+) Nếu n chẵn: Ta có

$$2S_{2019} = 2n^{2019} + 2[1^{2019} + (n-1)^{2019}] + 2[2^{2019} + (n-2)^{2019}] +$$

$$\dots + 2\left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+2}{2}\right)^{2019}\right] + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n}{2}\right)^{2019}\right] : n$$

$$2S_{2019} = 2(1^{2019} + n^{2019}) + 2[2^{2019} + (n-1)^{2019}] +$$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$\dots + 2 \left[\left(\frac{n-2}{2} \right)^{2019} + \left(\frac{n+4}{2} \right)^{2019} \right] + 2 \left[\left(\frac{n}{2} \right)^{2019} + \left(\frac{n+2}{2} \right)^{2019} \right] : (n+1)$$

Suy ra $2S_{2019} : n(n+1)$.

Vậy $S_{2019} : S_1$.

Câu 59. Ta có: $p + (p+2) = 2(p+1)$

Vì p lẻ nên $(p+1):2 \Rightarrow 2(p+1):4$ (1)

Vì $p, (p+1), (p+2)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 3, mà p và $(p+2)$ nguyên tố nên $(p+1):3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[p + (p+2)]:12$ (đpcm)

Câu 60. Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k+1 \Rightarrow n^2 + 4 = 5k+5:5; k \in \mathbb{N}^*$.

Nên n^2+4 không là số nguyên tố

Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k+4 \Rightarrow n^2 + 16 = 5k+20:5; k \in \mathbb{N}^*$.

Nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2 : 5$ hay $n : 5$

Câu 61. Ta có

$$\begin{aligned} S &= n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6) \\ &= n[(n^2 - 1)(n^2 + 6) + 5n(n^2 - 1)] \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= n(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Ta có S là tích của 5 số nguyên tự nhiên liên tiếp chia hết cho $5!$ nên chia hết cho 120.

Câu 62. Với 2 số nguyên dương a, b bất kì ta có:

$$a^{2015} + b^{2015} = (a+b)(a^{2014} + a^{2013}b + \dots + ab^{2013} + b^{2014}) \Rightarrow a^{2015} + b^{2015} : (a+b)$$

+ Xét trường hợp n là số lẻ

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned} &2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] : n \\ &2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] : n \\ &\dots \\ &2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n \end{aligned}$$

Suy ra

$$A = n^{2015} + 2 \left[1^{2015} + (n-1)^{2015} \right] + 2 \left[2^{2015} + (n-2)^{2015} \right] + \dots + 2 \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2} \right)^{2015} \right] : n$$

Tương tự

$$A = 2(1^{2015} + n^{2015}) + 2 \left[2^{2015} + (n-1)^{2015} \right] + \dots + 2 \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)^{2015} + \left(\frac{n+3}{2} \right)^{2015} \right] + \left[\left(\frac{n+1}{2} \right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2} \right)^{2015} \right] : (n+1)$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $A : n(n+1)$

Tương tự với trường hợp n chẵn ta cũng có $A : n(n+1)$

Câu 63. Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15 = (a^4 + 2a^3 - 2a - 1) - (16a^2 - 16) \\ &= (a-1)(a+1)^3 - 16(a^2 - 1). \end{aligned}$$

Với a lẻ, $a = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó: $(a-1)(a+1)^3 = 2k(2k+2)^3 = 16k(k+1)^3 : 16$.

Mà $16(a^2 - 1) : 16$ nên Q chia hết cho 16.

Với a chẵn, $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó: $(a-1)(a+1)^3 = (2k-1)(2k+1)^3$ là số lẻ nên không chia hết cho 16. Do đó Q không chia hết cho 16.

Vậy a là số nguyên lẻ.

Câu 64.

+) Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Dirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.

+) Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ra được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2 . Khi đó ta có $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a-b$ là số chẵn và $a+b$ cũng là số chẵn $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) : 4$, (đpcm).

Chú ý:

Ta có thể giải bài toán này bằng cách vận dụng tính chất sau của số chính phương: “Một số chính phương chia cho 4 thì sẽ có số dư là 0 hoặc 1”. Khi đó lập luận như cách làm trên ta thu được điều phải chứng minh. Tuy nhiên trong khi làm bài thi nếu vận dụng tính chất này thì học sinh phải chứng minh lại.

Bình luận: Với cách làm trên ngắn gọn, đầy đủ song một số học sinh cảm thấy hơi trừu tượng (do nguyên lý Dirichlet học sinh ít ôn tập không nằm trong chương trình SGK mà ở sách tham khảo). bài toán trên có thể trình bày như sau:

Trong ba số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số hoặc chẵn hoặc lẻ

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Gọi hai số chính phương chọn ra là a^2 và b^2 (a, b nguyên)

+ TH1: a, b cùng chẵn: suy ra $a^2 - b^2 = (2k_1)^2 - (2k_2)^2 = 4(k_1^2 - k_2^2) : 4, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

+ TH2: a, b cùng lẻ: suy ra $a^2 - b^2 = (2k_1 + 1)^2 - (2k_2 + 1)^2 = 4(k_1^2 + k_1 - k_2^2 - k_2) : 4, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Vậy trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Câu 65.

Cách 1: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow bc = a(b+c)$ (1)

TH1: Nếu a là số nguyên chẵn, suy ra $a(b+c) : 2$, theo (1) suy ra: $b:c : 2$

Vậy abc chia hết cho 4

TH2: Nếu a là số nguyên lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì: $b+c : 2 \Rightarrow a(b+c) : 2$

Mà abc không chia hết cho 2 (vì a, b, c đều lẻ). Suy ra mâu thuẫn.

Vậy trong hai số, b, c tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

+ Với b chẵn, mà a lẻ nên c chẵn (vì $b.c$ chẵn nên $a(b+c)$ chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ)

Suy ra abc chia hết cho 4

+ Với c chẵn, tương tự abc chia hết cho 4

Cách 2: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow bc = a(b+c) \Leftrightarrow abc = a^2(b+c)$ (2)

Ta thấy a, b, c không thể đều là số lẻ vì nếu vậy thì abc là số lẻ, còn $b+c$ là số chẵn.

Vậy trong 3 số tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

Nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4, từ (2) suy ra abc chia hết cho 2.

Nếu b chẵn, do a lẻ nên $b+c$ chẵn (vì abc chẵn) suy ra c chẵn.

Vậy abc chia hết cho 2.

Tương tự cho trường hợp c chẵn.

Câu 66.

Ta có $A = 2^{2^n} + 4^n + 16 = (2^{2^n} - 1) + (4^n - 1) + 18$

Đặt $2^{2^n} = 2^{2^k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) suy ra $2^{2^n} - 1 = 2^{2^k} - 1 = 4^k - 1 : 3$

Do đó với mọi n nguyên dương ta có: $2^{2^n} - 1 : 3; 4^n - 1 : 3; 18 : 3$

$\Rightarrow A = 2^{2^n} + 4^n + 16 : 3$

Câu 67. Ta có $A = 4^n + 17 = (4^n - 1) + 18$

Với mọi n nguyên dương ta có: $4^n - 1 : 3; 18 : 3$

$\Rightarrow A = 4^n + 17 : 3$

Câu 68. Giả sử $2n+1 = m^2, 3n+1 = k^2$ ($m, k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.

$$\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1):4, \text{ Suy ra : } n \text{ chẵn, } k \text{ lẻ}$$

Vì k là số lẻ nên $k-1, k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và $(3, 8) = 1$ nên

$$\text{Từ } 3n+1 = k^2 \Rightarrow 3n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1):8 \Rightarrow n:8 \quad (1)$$

Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:

Nếu n chia cho 5 dư 1 thì $2n+1$ chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 2 thì $3n+1$ chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 3 thì $2n+1$ chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 4 thì $3n+1$ chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Vậy $n:5 \quad (2)$

Vì $(5, 8) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Câu 69. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

Ta có n chẵn $\Rightarrow n = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra

$$n^3 + 20n + 96 = (2k)^3 + 40k + 96 = 8(k^3 + 5k) + 96 = 8[(k^3 - k) + 6k] + 96 = 8(k^3 - k) + 48k + 48.2$$

Do $k-1; k; k+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(k-1).k.(k+1)$ chia hết cho 6

$$\Rightarrow k^3 - k = (k-1).k.(k+1):6 \Rightarrow 8(k^3 - k):48, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy với mọi số nguyên n chẵn thì $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

Câu 70. Ta có $p = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Vì a, b là các số nguyên dương nên, ta có $a^2 + ab + b^2 > 1$.

Do p nguyên tố nên $a-b=1 \Rightarrow a=b+1 \Rightarrow p = 3b^2 + 3b + 1$

$$\Rightarrow 4p = 3(4b^2 + 4b + 1) + 1 = 3(2b+1)^2 + 1 \text{ (đpcm).}$$

Câu 71. Ta có: $f(x):(x-1); \quad f(x):(x+2)$ nên $x=1$ và $x=-2$ là nghiệm của đa thức $f(x)$

hay $f(1) = 0$ và $f(-2) = 0$. Do đó:

$$\begin{cases} 1^2 - 2(a+1).1 + b - 1 = 0 \\ (-2)^2 - 2(a+1).(-2) + b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -2 \\ 4a + b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}; b = -1$$

Câu 72. 1. Ta có :

$$p^{2016} - 1 = (p^4)^{504} - 1^{504} = (p^4 - 1).A = (p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A \in \mathbb{N})$$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra $p-1, p+1$ là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1):4 \quad (2)$$

Vì $p-1, p, p+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1):3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1):3 \quad (3)$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k \pm 1$; $5k \pm 2$

- Nếu $p = 5k \pm 1$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5n + 1$

- Nếu $p = 5k \pm 2$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5l - 1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4 - 1 = 5q : 5$ (4) ($(n, l, q \in \mathbb{N})$)

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016} - 1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

2. Vì vai trò của x, y, z bình đẳng nhau, khác nhau đôi một nên ta có thể giả sử $x < y < z$.

Khi đó, gọi t là thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2 y^2 z^2$. Suy ra :

$$x^3 + y^3 + z^3 = tx^2 y^2 z^2 \Leftrightarrow z = tx^2 y^2 - \frac{x^3 + y^3}{z^2} > tx^2 y^2 - \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} = tx^2 y^2 - x - y \quad (1)$$

- Nếu $tx^2 y^2 - x - y < 0$ (*) thì $t < \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2 y} < 2 \Rightarrow t = 1$

Thay $t = 1$ vào (*), ta được $x^2 y^2 - x - y < 0 \Rightarrow xy - x - y < 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) < 1$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow y^2 - y < 0 \Leftrightarrow y(y-1) < 0 \quad (\text{vô lý})$$

Vậy $tx^2 y^2 - x - y \geq 0$ (2)

- Từ (1), (2) suy ra : $z^2 \geq (tx^2 y^2 - x - y)^2$ (3)

- Mặt khác vì $x^3 + y^3 + z^3 = tx^2 y^2 z^2$ nên $x^3 + y^3 : z^2 \Rightarrow x^3 + y^3 \geq z^2$ (4)

- Từ (3) và (4) suy ra :

$$x^3 + y^3 \geq (tx^2 y^2 - x - y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq t^2 x^4 y^4 - 2tx^2 y^2(x+y) + x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 2tx^2 y^2(x+y) > t^2 x^4 y^4$$

$$\Leftrightarrow txy < \frac{x^3 + y^3 + 2tx^2 y^2(x+y)}{tx^3 y^3}$$

$$\Leftrightarrow txy < 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{tx^3} + \frac{1}{ty^3} \quad (5)$$

- Nếu $x \geq 2$ thì $y \geq 3 \Rightarrow txy \geq 6 > 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{t \cdot 2^3} + \frac{1}{t \cdot 2^3} > 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{tx^3} + \frac{1}{ty^3}$

Điều này mâu thuẫn với (5).

Vậy $x = 1$. Khi đó (5) trở thành :

$$ty < 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3} \quad (6)$$

- Nếu $y \geq 4$ thì $ty \geq 4 > 2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t.4^3} \geq 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3}$.

Điều này mâu thuẫn với (6).

Vậy $y \in \{2; 3\}$ (Vì $y > x = 1$)

+ Nếu $y = 2$ thì $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9:z^2 \\ x \leq y \leq z \\ x = 1; y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 2; z = 3.$

+ Nếu $y = 3$ thì $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28:z^2 \\ x \leq y \leq z \\ x = 1; y = 3 \end{cases} \text{ (Loại)}$

- Thử lại ta thấy $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ và các hoán vị của nó thỏa mãn.

Vậy thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2 y^2 z^2$ là $t = 1$.

Câu 73. Cách 1: $24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 1(\text{mod } 5)$ (1)

Ta có: $\begin{cases} a \equiv 0, \pm 1, \pm 2(\text{mod } 5) \\ b \equiv 0, \pm 1, \pm 2(\text{mod } 5) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0, 1, 4(\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 0, 1, 4(\text{mod } 5) \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 \equiv 0(\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 \equiv 1(\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 0(\text{mod } 5) \end{cases}$.

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 2: $24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5.k + 1$ (1)

$\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 5l + r \left(l \in \mathbb{Z}, r \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \right)$

$\Rightarrow n^2 = 5l_1^2 + r_1^2 \left(l_1 \in \mathbb{Z}, r_1^2 \in \{0; 1; 4\} \right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 = 5k_1 + 1 \\ b^2 = 5k_2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 5k_1 \\ b^2 = 5k_2 + 1 \end{cases}$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 3: $24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 24a^2 - b^2 = -1$ không chia hết cho 5 nên a và b không đồng thời chia hết cho 5.

+ Giả sử a và b đều không chia hết cho 5.

Theo định lý Fermat ta có $\begin{cases} a^4 \equiv 1(\text{mod } 5) \\ b^4 \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \equiv 0(\text{mod } 5)$

Nếu $a^2 + b^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ thì $25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ (vô lí).

Suy ra $a^2 - b^2 \equiv 0(\text{mod } 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 = b^2 - a^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ (*)

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Vì a không chia hết cho 5 nên $a \equiv \pm 1, \pm 2 \pmod{5}$.

Với $a \equiv \pm 1 \pmod{5} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv -1 \pmod{5}$ (trái với (*))

Với $a \equiv \pm 2 \pmod{5} \Rightarrow a^2 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv 3 \pmod{5}$ (trái với (*))

Vậy điều giả sử là sai. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Câu 74. Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

+ Nếu $q = 3k+1$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q = 3k+2$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q = 6(k+1):12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

Câu 75. Từ giả thiết $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$ ta có

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + (c^3 + d^3) + 3cd(c+d) &= 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3 \\ \Leftrightarrow (a+b)^3 + (c+d)^3 &= 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3 \end{aligned}$$

Để thấy $3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được $(a+b)^3 + (c+d)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có $(a+b)^3 + (c+d)^3 = (a+b+c+d)^3 - 3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$

Mà $3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$ chia hết cho 3 nên suy ra $(a+b+c+d)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Chú ý: Bản chất bài toán trên chính là bài toán cơ bản: Nếu $x^3 + y^3$ chia hết cho 3 thì $x+y$ chia hết cho 3.

Câu 76. Ta có: $A = 3n^3 + 15n = 3(n^3 - n + 6n) = 3[(n-1)n(n+1) + 6n]$

Với mọi số nguyên n , $(n-1)n(n+1) + 6n$ chia hết cho 6

Vậy $A = 3[(n-1)n(n+1) + 6n]$ chia hết cho 18

Câu 77. Ta có: $(a^2 + ab + b^2):9 \Rightarrow 4(a^2 + ab + b^2):9$

$$\Rightarrow [(2a-b)^2 + 3b^2]:9 \quad (1)$$

Mà $3b^2:3$ nên $(2a-b)^2:3$ mà 3 là số nguyên tố nên $(2a-b):3$.

$$(2a-b):3 \text{ nên } (2a-b)^2:9. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2:9 \Rightarrow b^2:3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b:3$.

$(2a-b):3$ và $b:3 \Rightarrow 2a:3$ mà $(2:3)=1$ nên $a:3$.

Vậy cả a và b đều chia hết cho 3.

Câu 78. Vì $2019^{2018} \div 3$ nên $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \div 3$. Xét hiệu:

$(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = (a_1 - 1)a_1(a_1 + 1) + (a_2 - 1)a_2(a_2 + 1) + \dots + (a_n - 1)a_n(a_n + 1)$
chia hết cho 3. Do đó $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$ chia hết cho 3 (đpcm).

Câu 79. Ta có: $1947 = 3.11.59$

Đặt $A = 46^n + 296.13^n$

$$* \begin{cases} 46^n \equiv 1^n = 1 \pmod{3} \\ 13^n \equiv 1^n = 1 \pmod{3} \end{cases}$$

Suy ra: $A \equiv 1 + 296 \equiv 297 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow A \div 3$ (1)

$$* \begin{cases} 46^n \equiv 2^n = 1 \pmod{11} \\ 13^n \equiv 2^n = 1 \pmod{11} \end{cases}$$

Suy ra: $A \equiv 2^n + 296.2^n \equiv 297.2^n \equiv 11.27.2^n \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow A \div 11$ (2)

$$* 46^n \equiv (-13)^n \equiv -13^n \pmod{13}$$

Vì n là số tự nhiên lẻ

$$\Rightarrow A \equiv -13^n + 296.13^n \equiv 295.13^n \equiv 5.59.13^n \equiv 0 \pmod{59}$$

$$\Rightarrow A \div 59$$
 (3)

Mà 3; 11; 59 đôi một nguyên tố cùng nhau nên từ (1), (2), (3)

$$\Rightarrow A \div (3.11.59) \Rightarrow A \div 1947$$

Cách 2: Ta có: $1947 = 33.59$

$$\text{Đặt } A = 46^n + 296.13^n = 46^n - 13^n + 297.13^n = (46^n - 13^n) + 297.13^n$$

$$A = (46 - 13).A_1 + 33.9.13^n = 33(A_1 + 9.13^n) \div 33$$

$$\text{Lại có: } A = 46^n + 296.13^n = 46^n - (-13^n) + 295.13^n = [46^n - (-13^n)] + 295.13^n$$

$$A = [46 - (-13)].A_2 + 59.5.13^n \text{ (vì } n \text{ lẻ)}$$

$$= 59.(A_2 + 5.13^n) \div 59$$

$$\text{Mà } (33; 59) = 1 \text{ nên } A \div (33.59) = 1947$$

Câu 80. Ta có: $2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1)$.

+ $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

+ Xét $2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1)$ ta có:

- Nếu n chia hết cho 3 thì $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 3

- Nếu n chia 3 dư 2 thì $n+1$ chia hết cho 3 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3

- Nếu n chia 3 dư 1 thì $2n+1$ chia hết cho 3 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3

Vậy trong mọi trường hợp thì $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Ta có $(2;3)=1$ nên $2n^3+3n^2+n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Câu 81. Ta có $a+b=c^3-2018c \Leftrightarrow a+b+c=(c-1).c.(c+1)-2016c$ chia hết cho 6.

Mặt khác $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)=(a-1).a.(a+1)+(b-1).b.(b+1)+(c-1).c.(c+1)$ chia hết cho 6

Do đó $A=a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Câu 82. Ta xét 2014 số khác nhau có dạng $20142014\dots2014=a_n$, có n bộ 2014. $n \in \mathbb{N}^*$

Trong 2014 số này có ít nhất hai số khi chia cho 2013 có cùng số dư.

Giả sử 2 số đó là a_i, a_j ($j > i$). Khi đó $a_j - a_i \vdots 2013$

$$\text{hay: } \underbrace{20142014\dots2014}_{j \text{ số } 2014} - \underbrace{20142014\dots2014}_{i \text{ số } 2014} = \underbrace{20142014\dots2014}_{j-i \text{ số } 2014} \underbrace{0000\dots0000}_{4i \text{ số } 0} \vdots 2013$$

Số có dạng $20142014\dots2014 \cdot 10^{4i} \vdots 2013$

Vì $\text{UCLN}(10, 2013) = 1$ nên $\text{UCLN}(10^n, 2013) = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Vậy: có số dạng $20142014\dots2014$ chia hết cho 2013.

Câu 83. Từ giả thiết suy ra $a \equiv 1 \pmod{3}$, $a = 3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$); $b \equiv 2 \pmod{3}$, $b = 3q+2$ ($q \in \mathbb{N}$).

Suy ra $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1 + 0 + 1 + 2 \pmod{3}$ hay $A \equiv 4 \pmod{3}$. (1)

Lại có: $4^a = 4^{3k+1} = 4.64^k \equiv 4 \pmod{7}$

$$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \pmod{7} \Rightarrow 9^b \equiv 4.8^q \equiv 4 \pmod{7}.$$

Từ giả thiết ta còn suy ra $a \equiv 1 \pmod{7}$, $b \equiv 1 \pmod{7}$.

Dẫn đến $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4 + 4 + 1 + 1 \pmod{7}$ hay $A \equiv 10 \pmod{7}$.

Từ (1) suy ra $A \equiv 10 \pmod{3}$; mà 3 và 7 nguyên tố cùng nhau nên $A \equiv 10 \pmod{21}$.

Vậy A chia cho 21 dư 10.

Câu 84. Ta có: $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x^2 - 1)[(x^2 - 4) + 5]$

$$= (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) + 5(x-1)(x+1)x$$

Ta có: $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ chia hết ch 5 và 6

mà $(5,6)=1$ nên $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) \vdots 30$

lại có $(x-1)x(x+1)$ Chia hết cho 2 và 3 mà $(2,3)=1$ nên $5(x-1)x(x+1) \vdots 30$

Do đó $x^5 - 1 \vdots 30$

Suy ra $A = (a^{2020} + b^{2020} + c^{2020}) - (a^{2016} + b^{2016} + c^{2016})$

$$A = a^{2015}(a^5 - a) + b^{2015}(b^5 - b) + c^{2015}(c^5 - c) \vdots 30$$

Vậy $A \vdots 30$

Câu 85. Trước tiên, ta chứng minh $x \vdots 3$.

Đặt $y^5 = a$, $a \in \mathbb{N}^*$, ta có $2x^2 - 1 = y^{15} \Leftrightarrow 2x^2 = a^3 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ (1)

Gọi $\text{ƯCLN}(a+1; a^2 - a + 1) = d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), ta có: $a+1 \vdots d$, $a^2 - a + 1 \vdots d$.

Suy ra $(a^2 - a + 1) - (a+1)(a-2) = 3 \vdots d \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 3$

* Nếu $d = 1$ thì từ (1), ta có:

$$\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a+1=x^2 \\ a^2-a+1=2 \end{cases} \text{ (loại vì } a \notin \mathbb{N}^*)$$

$$\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases} \text{ (loại vì phải có } x > 1)$$

* nếu $d = 3$ thì từ (1) ta có: $2x^2 \vdots 9$. Vì $\text{ƯCLN}(2; 9) = 1$ nên $x^2 \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 3$ (*)

Chứng minh $x \vdots 5$.

Đặt $y^3 = b$, $b \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2x^2 - 1 = b^5 \Leftrightarrow 2x^2 = b^5 + 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = (b+1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) \quad (2)$$

Gọi $\text{ƯCLN}(b+1; b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Ta có: $b+1 \vdots k$; $b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 \vdots k$

$$\Rightarrow (b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) - (b+1)(b^3 - 2b^2 + 3b - 4) = 5 \vdots k$$

Suy ra $k = 1$ hoặc $k = 5$.

* Nếu $k = 1$ thì từ (2) có

$$\begin{cases} b+1=x^2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=2 \end{cases} \text{ (loại vì } b \notin \mathbb{N}^*) \quad \text{Hoặc: } \begin{cases} b+1=2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ x=1 \end{cases} \text{ (loại vì phải có } x > 1)$$

* Nếu $k = 5$ thì từ (2) suy ra $2x^2 \vdots 25$. Vì $\text{ƯCLN}(2; 25) = 1$ nên $x^2 \vdots 25 \Rightarrow x \vdots 5$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $x \vdots \text{BCNN}(3; 5)$ hay $x \vdots 15$ (đpcm)

Câu 86. Giả sử A là số tự nhiên được tạo thành bằng cách viết 100 số trên theo hàng ngang một các bất kì. Khi đó trong số tự nhiên A có 21 chữ số 1 và 20 chữ số từ 2 đến 9.

Do đó tổng các chữ số của A là $21 \cdot 1 + 20(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 901$ không chia hết cho 9

Mà 2016 chia hết cho 9 do đó A không thể chia hết cho 2016

Câu 87.

Giả sử tồn tại số $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ để tồn tại số tự nhiên n sao cho $(n^2 - k) \vdots 4$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

• Trường hợp 1: Nếu $n = 4q$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2 - k = 16q^2 - k$.

Do đó để $(n^2 - k) \vdots 4$ thì $k \vdots 4$ nên suy ra $k = 0$.

• Trường hợp 2: Nếu $n = 4q \pm 1$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2 - k = 16q^2 \pm 8q + 1 - k$

Do đó để $(n^2 - k) \vdots 4$ thì $1 - k \vdots 4$ nên suy ra $k = 1$.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

- Trường hợp 3: Nếu $n = 4q + 2$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2 - k = 16q^2 + 16q + 4 - k$

Do đó để $(n^2 - k) : 4$ thì $k : 4$ nên suy ra $k = 0$.

Vậy với $k = 0$ hoặc $k = 1$ thì luôn tồn tại số tự nhiên n để $(n^2 - k) : 4$.

Câu 88. Ta có: $(n+1)(n+2)\dots(2n) = \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(1.3.5\dots(2n-1))(2.4.6\dots 2n)}{n!}$

$$= 1.3.5\dots(2n-1).2^n \cdot \frac{n!}{n!} = 1.3.5\dots(2n-1).2^n$$

Do đó: $(n+1)(n+2)\dots(2n)$ chia hết cho 2^n .

Câu 89. Ta có: $Q(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

Để $P(x) : Q(x)$ thì $P(3) = 0; P(-3) = 0$

Ta có:

$$P(3) = 3.3^3 + a.3^2 + b.3 + 9 = 9a + 3b + 90 = 0 \Rightarrow 3a + b + 30 = 0$$

$$P(-3) = 3.(-3)^3 + a.(-3)^2 + b.(-3) + 9 = 9a - 3b - 72 = 0 \Rightarrow 3a - b - 24 = 0$$

$$\text{Xét } \begin{cases} 3a + b + 30 = 0 \\ 3a - b - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = -6 \\ 3a - b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -27 \end{cases}$$

Vậy $a = -1; b = -27$ thì $P(x) : Q(x)$

Câu 90. Ta có: $(2019^{2019} + 1) + (2021^{2020} - 1) = 2019^{2019} + 2021^{2020}$

$$\text{Mà } 2019^{2019} + 1 = (2019 + 1)(2019^{2018} - 2019^{2017} + 2019^{2016} - \dots - 1) \quad (1)$$

$$2021^{2020} - 1 = (2021 - 1)(2021^{2019} + 2021^{2018} + 2021^{2017} + \dots + 1) \quad (2)$$

Cộng vế (1) và (2) ta được:

$$2020. \left[(2019^{2018} - 2019^{2017} + 2019^{2016} - \dots - 1) + (2021^{2019} + 2021^{2018} + 2021^{2017} + \dots + 1) \right] : 2020$$

Câu 91. $\begin{cases} m + n^2 : m^2 - n \\ n + m^2 : n^2 - m \end{cases} \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + n^2 \geq m^2 - n \\ n + m^2 \geq n^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - n + 1)(m + n) \geq 0 \\ (n - m + 1)(m + n) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - n + 1 \geq 0 \\ n - m + 1 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{do } m, n \text{ nguyên dương})$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq m - n \leq 1$$

*) TH1: $m - n = -1 \Leftrightarrow m = n - 1$

+) $m + n^2 : m^2 - n$

$$\Rightarrow \frac{m + n^2}{m^2 - n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n - 1 + n^2}{(n - 1)^2 - n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{(n^2 - 3n + 1) + 4n - 2}{n^2 - 3n + 1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{4n-2}{n^2-3n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2-3n+1 \leq 4n-2 \Rightarrow n^2-7n+3 \leq 0 \Rightarrow \frac{7-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{7+\sqrt{37}}{2}$$

$$\text{vì } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$\Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp $(m; n)$ thỏa mãn là: $(2; 3)$.

*) TH2: $m - n = 0 \Leftrightarrow m = n$

$$m + n^2 : m^2 - n$$

$$\Rightarrow \frac{m+n^2}{m^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n+n^2}{n^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{(n^2-n)+2n}{n^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-1 \leq 2 \Rightarrow n \leq 3$$

$$\text{Vì } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp số $(m; n)$ thỏa mãn là: $(2; 2), (3; 3)$.

*) TH3: $m - n = 1 \Leftrightarrow m = n + 1$

$$n + m^2 : n^2 - m$$

$$\Rightarrow \frac{n+m^2}{n^2-m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n+(n+1)^2}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{4n+2}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2-n-1 \leq 4n+2 \Rightarrow n^2-5n-3 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{5-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{5+\sqrt{37}}{2}$$

$$\text{Vì } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

Thử lại vào (1) ta được các cặp số $(m; n)$ thỏa mãn là: $(3; 2)$

Câu 92. Ta có: $n^6 - 2n^4 + n^2 = n^6 - n^4 - n^4 + n^2 = n^4(n^2 - 1) - n^2(n^2 - 1) = [n(n-1)(n+1)]^2$

Đặt $A = n(n-1)(n+1)$, ta có $\begin{cases} A:2 \\ A:3 \end{cases}$ và $(2, 3) = 1 \Rightarrow A:6 \Rightarrow [n(n-1)(n+1)]^2 : 36$ (đpcm)

Câu 93. $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a+b)^2 - (10b+a)^2 = 99(a^2 - b^2)$

$\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ chia hết cho 3267 nên $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ chia hết cho 33

$$1 \leq a, b \leq 9 \Rightarrow a = b, \text{ hay } a = 7, b = 4; a = 4, b = 7$$

Vậy ta có các số 11; 22; 33; 44; 47; 55; 66; 74; 77; 88; 99

Câu 94. Ta có:

$$4a^2 + 3ab - 11b^2 : 5 \Rightarrow (5a^2 + 5ab - 10b^2) - (4a^2 + 3ab - 11b^2) : 5$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 : 5$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 : 5$$

$$\Rightarrow a+b : 5 \quad (\text{Vì } 5 \text{ là số nguyên tố})$$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) : 5$$

Câu 95. Ta có:

$$x^2y + x + y : xy^2 + y + 1$$

$$\Leftrightarrow y(x^2y + x + y) - x(xy^2 - y + 1) : xy^2 + y + 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 - x : xy^2 + y + 1$$

$$\text{TH1: } y^2 = x \Rightarrow \begin{cases} y = m \\ x = m^2 \end{cases} : \text{Với mọi } m \text{ là số tự nhiên khác } 0$$

Thử lại thấy thỏa mãn

TH2: $y^2 > x$, ta có:

$$xy^2 + y + 1 \leq y^2 - x \Leftrightarrow (x - 1)y^2 + y + x + 1 \leq 0 \quad (\text{vô lí do } x, y \geq 1)$$

TH3: $y^2 < x$. Ta có:

$$xy^2 + y + 1 < x - y^2 \Leftrightarrow x(y^2 - 1) + y^2 + y + 1 < 0 \quad (\text{vô lí do } x, y \geq 1)$$

Vậy, $(x; y) = (m^2; m)$ với m thuộc tập số tự nhiên khác 0

$$\text{Câu 96. Ta có } (x^2 - 2) : (xy + 2) \Leftrightarrow (x^2y + 2x) - (2x + 2y) : (xy + 2) \Leftrightarrow 2x + 2y : xy + 2$$

$$\text{Đặt } 2x + 2y = k(xy + 2) \text{ với } k \in \mathbb{N}^*$$

Xét $k \geq 2$. Khi đó

$$2x + 2y = k(xy + 2) \geq 2(xy + 2) \Leftrightarrow x + y \geq xy + 2 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) + 1 \leq 0$$

Điều này mâu thuẫn vì $x; y$ nguyên dương.

$$\text{Suy ra } k < 2 \text{ hay } k = 1. \text{ Suy ra } 2(x + y) = xy + 2 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) = 2$$

$$+ \text{ Nếu } x - 2 = 1; y - 2 = 2 \text{ thì } x = 3; y = 4$$

$$+ \text{ Nếu } x - 2 = 2; y - 2 = 1 \text{ thì } x = 4; y = 3$$

Vậy cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(3; 4)$ và $(4; 3)$.

Câu 97. Ký hiệu $(x; y)$ là ước chung lớn nhất của hai số nguyên x và y .

Gọi $d = (a;b) \Rightarrow a = da_1; b = db_1$, với $(a_1;b_1) = 1$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = d^2(a_1^2 + b_1^2) \text{ và } ab = d^2 a_1 b_1$$

$$\Rightarrow d^2(a_1^2 + b_1^2) : d^2 a_1 b_1 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 : a_1 b_1$$

$$\Rightarrow a_1^2 : b_1 \Rightarrow a_1 \cdot a_1 : b_1 \text{ mà } (a_1;b_1) = 1 \Rightarrow a_1 : b_1$$

Tương tự $b_1 : a_1$ suy ra $a_1 = b_1 = 1$

$$\Rightarrow A = \frac{d^2(a_1^2 + b_1^2)}{2d^2 a_1 b_1} = 1.$$

Câu 98. Giả sử a lẻ. Khi đó a^2 chia 4 dư 1. Mà $b^2 + c^2$ chia 4 chỉ có thể có số dư là 0, 1 hoặc 2. Do đó không thỏa mãn. Vậy a chẵn. Tương tự b, c , chẵn, đpcm.

Câu 99. Ta có $5^{3n+2} + 2^{2n+3} = 25 \cdot 125^n + 8 \cdot 4^n = 25(125^n - 4^n) + 33 \cdot 4^n$.

Mặt khác $(125^n - 4^n) : (125 - 4) = 121 : 11$ và $33 \cdot 4^n : 11, \forall n \in \mathbb{N}$. Do đó

$$5^{3n+2} + 2^{2n+3} : 11, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Câu 100. Dễ thấy $xy \neq 1$. Ta xét các trường hợp sau

- Với $x = 1$ và $y \geq 2$, khi đó từ giả thiết ta được 4 chia hết cho $y - 1$ hay $y - 1$ là ước của 4.

Chú ý rằng ước của 4 gồm 1; 2; 4 nên ta tìm được $y \in \{2; 3; 5\}$.

+ Với $x = 1$ và $y = 2$ ta được $A = 4$

+ Với $x = 1$ và $y = 3$ ta được $A = 2$

+ Với $x = 1$ và $y = 5$ ta được $A = 5$

- Với $y = 1$ và $x \geq 2$, khi đó từ giả thiết ta được $x^2 + x + 2$ chia hết cho $x - 1$ hay 4 chia hết cho $x - 1$, suy ra $x - 1$ là ước của 4 nên ta được $x \in \{2; 3; 5\}$.

+ Với $x = 2$ và $y = 1$ ta được $A = 8$

+ Với $x = 3$ và $y = 1$ ta được $A = 7$

+ Với $x = 5$ và $y = 1$ ta được $A = 8$

- Với $x \geq 2$ và $y \geq 2$, khi đó do $x^2 + x + 2$ chia hết cho $xy - 1$ nên ta được $y(x^2 + x + 2)$ chia hết cho $xy - 1$, từ đó suy ra $x + 2y + 1$ chia hết cho $xy - 1$.

Đặt $k = \frac{x + 2y + 1}{xy - 1}$, chú ý rằng do $x \geq 2$ và $y \geq 2$ nên ta được $xy - 1 \geq 3$.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

+ Nếu $k = 1$ thì ta được $x + 2y + 1 = xy - 1 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 1) = 4$.

Giải phương trình tích trên ta được các nghiệm là $(x; y) = (3; 5), (4; 3), (6; 4)$.

Khi đó ta tính được các giá trị tương ứng của A là $1; 2; 4$.

+ Nếu $k \geq 2$, khi đó ta được $x + 2y + 1 \geq xy - 1 \Leftrightarrow (x - 2)(2y - 1) \leq 4$

Với $y \geq 3$ và $x \geq 2$ thì bất đẳng thức trên không xảy ra, còn với $x = 2$ và $y = 2$ thì k không nhận giá trị nguyên dương.

Vậy các giá trị nguyên dương mà A nhận được là $A \in \{1; 2; 4; 7; 8\}$.

Câu 101. a) Ta có $a, b \in S$ nên $a = m^2 + 3n^2$ và $b = p^2 + 3q^2$ với m, n, p, q là các số nguyên.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} ab &= (m^2 + 3n^2)(p^2 + 3q^2) = m^2p^2 + 3n^2p^2 + 3m^2q^2 + 9n^2q^2 \\ &= (m^2p^2 + 6mnpq + 9n^2q^2) + 3(m^2q^2 - 2mnpq + n^2p^2) \\ &= (mp + nq)^2 + 3(mq - np)^2 \end{aligned}$$

Do vậy $ab \in S$.

b) Do $N \in S$ nên ta có $N = x^2 + 3y^2$ với x, y là các số nguyên và do N là số chẵn nên x, y có cùng tính chẵn lẻ. Ta xét các trường hợp sau

+ Xét trường hợp x và y đều là số chẵn. Khi đó dễ thấy N chia hết cho 4.

Đặt $x = 2a; y = 2b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), khi đó $\frac{N}{4} = a^2 + 3b^2$ nên $\frac{N}{4} \in S$.

+ Xét trường hợp x và y đều là số lẻ. Khi đó đặt $x = 2a + 1; y = 2b + 1$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Ta có $N = x^2 + 3y^2 = (2a + 1)^2 + 3(2b + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 12b^2 + 12b + 4$ nên $N \div 4$.

Mặt khác do x, y là các số lẻ nên $x^2 - y^2 \div 8$ nên $x - 3y \div 4$ hoặc $x + 3y \div 4$.

Với $x - 3y \div 4$ ta được $\frac{N}{4} = \left(\frac{x - 3y}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{x + y}{4}\right)^2$ nên $\frac{N}{4} \in S$

Với $x + 3y \div 4$ ta được $\frac{N}{4} = \left(\frac{x - 3y}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{x - y}{4}\right)^2$ nên $\frac{N}{4} \in S$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 102. Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Vì p là số nguyên tố và $p \geq 3$, suy ra $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p khi và chỉ

$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ khi chia hết cho p hay

$a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2) \div p \Leftrightarrow a^2b^2 - c^4 \div p \Leftrightarrow (ab - c^2)(ab + c^2) \div p$.

Do $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$ và p là số nguyên tố nên $ab - c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$
 $\Rightarrow p = 3a^2 \Rightarrow a = b = c = 1$ và $p = 3$.

Câu 103. Trước hết ta chứng minh rằng $x^7 \equiv x \pmod{42}, \forall x \in \mathbb{Z}$. (1)

Thật vậy, ta có $x^7 - x = x(x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$.

Để thấy $x(x-1)(x+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6.

Theo định lí Ole thì $x^7 - x \equiv 0 \pmod{7}, \forall x \in \mathbb{Z}$, tức là $x^7 - x$ chia hết cho 7.

Vậy $x^7 - x$ chia hết cho $\text{BCNN}(6; 7) = 42$. Khẳng định (1) được chứng minh.

Từ đó

$$\begin{aligned} & \left[(27n+5)^7 + 10 \right]^7 + \left[(10n+27)^7 + 5 \right]^7 + \left[(5n+10)^7 + 27 \right]^7 \\ & \equiv (27n+5)^7 + 10 + (10n+27)^7 + 5 + (5n+10)^7 + 27 \pmod{42} \\ & \equiv 27n+5+10+10n+27+5+5n+10+27 \pmod{42} \\ & \equiv 42(n+1) \pmod{42} \\ & \equiv 0 \pmod{42}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có khẳng định của bài toán.

Câu 104. Biến đổi giả thiết $\frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3} \Leftrightarrow 3(x^2-1) = 2(y^2-1) \Leftrightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1$

Vì số chính phương chia 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4, mà $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên x^2 và y^2 chia cho 5 có cùng số dư 1, từ đó ta được $x^2 - y^2 : 5$

Vì số chính phương chia 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4, mà $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên x^2 và y^2 chia cho 8 có cùng số dư 1, từ đó ta được $x^2 - y^2 : 8$

Do 5 và 8 nguyên tố cùng nhau nên ta được $x^2 - y^2 : 40$

Câu 105. Ta có $xy - 1 : (x-1)(y-1)$, suy ra $xy - 1 : xy + 1 - x - y$.

Mà $xy + 1 - x - y : xy + 1 - x - y \Rightarrow (x-1) + (y-1) : (x-1)(y-1)$, suy ra $x-1 : y-1$ và $y-1 : x-1$, nên $x = y$

$x^2 - 1 : (x-1)^2$ ta có $x+1 : x-1$, suy ra $2 : x-1$, nên $x = 2$ hoặc $x = 3$.

Câu 106. Ta có $\overline{abcde} = \overline{abc00} + \overline{de} = \overline{abc} \cdot 100 + \overline{de}$
 $= \overline{abc}(101-1) + \overline{de} = \overline{abc} \cdot 101 - \overline{abc} + \overline{de}$

Suy ra $\overline{abcde}$ chia hết cho 101 $\Leftrightarrow \overline{abc} - \overline{de} = \overline{abc} - (10d + e)$ chia hết cho 101.

Ta có $101 \cdot m \leq 99999 \Rightarrow m \leq \frac{99999}{101} = 990 + \frac{9}{101}$

Vậy số có 5 chữ số lớn nhất chia hết cho 101 là $990 \cdot 101$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Ta có $101 \cdot n \leq 9999 \Rightarrow n \leq \frac{999}{101} = 99$

Vậy số có 5 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 101 là $100 \cdot 101$

Số các số có 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu của bài toán là: $990 - 100 + 1 = 891$.

Đáp số: 891 số.

Câu 107. +) $41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81 \pmod{100}$.

$$41^4 \equiv 81^2 \pmod{100} \equiv (80^2 + 160 + 1) \pmod{100} \equiv 61 \pmod{100}.$$

$$\Rightarrow 41^5 \equiv 61 \cdot 41 \pmod{100} \equiv (60 \cdot 40 + 100 + 1) \pmod{100} \equiv 1 \pmod{100}.$$

$$\Rightarrow (41^5)^{21} = 41^{105} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 41^{106} \equiv 41 \pmod{100}.$$

$$+) 57^4 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1 \pmod{100}.$$

$$\text{Suy ra } A = 41^{106} + 57^{2012} \equiv (41 + 1) \pmod{100}.$$

Vậy 2 chữ số cuối cùng của A là 42.

Câu 108. Ta có

$$13^{13} = (13^4)^3 \cdot 13 \equiv 3 \pmod{10}; 6^6 \equiv 6 \pmod{10}; 2009^{2009} = (2009)^{2008} \cdot 2009 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$13^{13} + 6^6 + 2009^{2009} \equiv 3 + 6 + 9 \equiv 8 \pmod{10}$$

nên $13^{13} + 6^6 + 2009^{2009}$ có tận cùng là 8

Câu 109. Ta có: $A = 7(m+n)^2 + 2mn = 7(m^2 + n^2) + 16mn = 7(m-n)^2 + 30mn$.

Do $A : 225$ nên $A : 15$.

Lại có $30mn : 15$ nên $7(m-n)^2 : 225$.

Suy ra $(m-n) : 15$.

Từ đây, ta có: $7(m-n)^2$ chia hết cho 225.

Dẫn đến $30mn : 225$, tức là $mn : 15$.

Mà $mn = (m-n)n + n^2$ nên $n^2 : 15$ tức $n : 15$. Từ đó, suy ra $m : 15$ (do $(m-n) : 15$).

Vậy $mn : 15^2 = 225$.

Câu 110. Ta có $5m + n : m + 5n$ nên $5m + n = (m + 5n)a$ với a là số nguyên dương.

$$\text{Khi đó ta được } 5m - am = 5an - n \Leftrightarrow m(5-a) = n(5a-1).$$

Do m, n, a là các số nguyên dương nên $5a-1 > 0$ do đó suy ra $5-a > 0$.

Do a nguyên dương nên ta được $a \in \{1; 2; 3; 4\}$. Ta đi xét các trường hợp sau.

+ Với $a = 1$, khi đó ta được $4m = 4n \Leftrightarrow m = n$ nên suy ra $m : n$.

+ Với $a = 2$, khi đó ta được $3m = 9n \Leftrightarrow m = 3n$ nên suy ra $m : n$.

+ Với $a = 3$, khi đó ta được $2m = 14n \Leftrightarrow m = 7n$ nên suy ra $m:n$.

+ Với $a = 4$, khi đó ta được $m = 19n$ nên suy ra $m:n$.

Vậy m luôn chia hết cho n .

Câu 111. a) Chứng minh rằng x và y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Giả sử trong hai số x và y có một số chẵn, do vai trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử x là số chẵn. Khi đó do $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy nên

$x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 2. Từ đó dẫn đến y^2 chia hết cho 2. Từ đó suy ra được

$x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 4, dẫn đến 10 chia hết cho 4, điều này vô lí. Do đó cả hai số x và y đều là số lẻ.

Gọi $d = (x; y)$, khi đó $x = dx_0; y = dy_0$ với $x_0; y_0 \in N, (x_0; y_0) = 1$.

Từ đó ta có $x^2 + y^2 + 10 = d^2x_0^2 + d^2y_0^2 + 10$ chia hết cho $d^2x_0y_0$ nên suy ra 10 chia hết cho d^2 nên suy ra $d = 1$ hay x và y nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng $k = \frac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

Đặt $x = 2m + 1; y = 2n + 1 (m, n \in N)$. Khi đó ta có $k = \frac{4(m^2 + n^2 + m + n + 3)}{(2m + 1)(2n + 1)}$.

Do 4 và $(2m + 1)(2n + 1)$ nên suy ra $m^2 + n^2 + m + n + 3$ chia hết cho $(2m + 1)(2n + 1)$.

Hay ta được $\frac{m^2 + n^2 + m + n + 3}{(2m + 1)(2n + 1)}$ là số nguyên. Từ đó suy ra k chia hết cho 4.

Cũng từ $k = \frac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ ta được $x^2 + y^2 + 10 = kxy$. Nếu trong hai số x và y có một số

chia hết cho 3, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là x . Khi đó ta suy ra được $y^2 + 10$ chia hết cho 3 nên $y^2 + 1$ chia hết cho 3 hay y^2 chia 3 dư 2, điều này vô lý vì y^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1. Do vậy x và y không chia hết cho 3. Suy ra $x^2; y^2$ chia 3 cùng có số dư là 1. Do đó ta được $x^2 + y^2 + 10 = kxy$ chia hết cho 3. Mà ta lại có $(3; xy) = 1$ nên k chia hết cho 3.

Kết hợp với k chia hết cho 4 ta suy ra được k chia hết cho 12. Do đó $k \geq 12$.

Câu 112. Đặt $F = |5x^2 + 11xy - 5y^2| = f(x; y)$, m là GTNN của F .

Ta có m là số nguyên và $f(0; 1) = f(1; 0) = 5 \Rightarrow m \leq 5$.

Vì x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0 nên $5x^2 + 11xy - 5y^2 \neq 0$ hay $F \neq 0$.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Xét $x = 2n; y = 2k$. Ta có $f(x; y) = f(2n; 2k) = 4f(n; k)$ nên giá trị $f(2n; 2k)$ không thể là GTNN. Do đó GTNN của F xảy ra khi x, y không cùng chẵn, vì vậy m là số lẻ.

* Nếu $m = 1$ suy ra tồn tại x, y để

$|5x^2 + 11xy - 5y^2| = 1 \Leftrightarrow 100x^2 + 220xy - 100y^2 = \pm 20 \Leftrightarrow (10x + 11y)^2 - 221y^2 = \pm 20$
 $\Leftrightarrow (10x + 11y)^2 \pm 20 = 221y^2 : 3$. Suy ra $(10x + 11y)^2$ chia 13 dư 6 hoặc dư 7. Mà số chính phương khi chia 13 chỉ có dư 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12. Do đó vô lý.

* Nếu $m = 3$ suy ra tồn tại x, y để

$|5x^2 + 11xy - 5y^2| = 3 \Leftrightarrow 100x^2 + 220xy - 100y^2 = \pm 60 \Leftrightarrow (10x + 11y)^2 - 221y^2 = \pm 60$
 $\Leftrightarrow (10x + 11y)^2 \pm 60 = 221y^2 : 3$. Suy ra $(10x + 11y)^2$ chia 13 dư 5 hoặc dư 8. Mà số chính phương khi chia 13 chỉ có dư 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12. Do đó vô lý.

Vậy GTNN của F là 5.

Câu 113. $P = (a^7b^3 - a^3b^3) - (a^3b^7 - a^3b^3)$

$A = a^7b^3 - a^3b^3 = a^3b^3(a^4 - 1) = a^2b^3(a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$ chia hết cho 6 vì $(a - 1)a(a + 1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp.

$A = a^2b^3[(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5a(a^2 - 1)] \Rightarrow A : 5$. Do đó $A : 30$.

Tương tự $B = (a^3b^7 - a^3b^3) : 30 \Rightarrow P : 30$.

Câu 114. $P = (a^5 - 5a^4 + 6a^3) - a^3 + 5a^2 - 6a + 240$

$= a^3(a^2 - 5a + 6) - a(a^2 - 5a + 6) + 240 = (a^2 - 5a + 6)(a^3 - a) + 240$

Suy ra $P = (a - 3)(a - 2)(a - 1)a(a + 1) + 240 : 120$

Từ đó suy ra P chia hết cho 120.

Câu 115. $P = 4^a + a + b = (4^a + 2) + (a + 1) + (b + 2007) - 2010$

Ta có $4^a + 2 = (4^a - 1) + 3 = (4 - 1)(4^{a-1} + 4^{a-2} + \dots + 4 + 1) + 3$ chia hết cho 3.

Mặt khác $4^a + 2$ là số chẵn nên $(4^a + 2) : 2$ do đó $4^a + 2$ chia hết cho 6.

$a + 1, b + 2007$ và 2010 cùng chia hết cho 6 nên P chia hết cho 6.

Câu 116. Do $a + b + c$ chia hết cho 4 nên đặt $a + b + c = 4k (k \in \mathbb{Z})$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= (4k - c)(4k - b)(4k - a) - abc = (16k^2 - 4kc - 4ka + ac)(4k - b) - abc \\ &= 4k(16k^2 - 4kc - 4ka + ac - 4kb + bc + ab) - 2abc. \end{aligned}$$

Do $a + b + c \vdots 4$ nên trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chẵn nên $2abc \vdots 4$, từ đó suy ra P chia hết cho 4.

Câu 117. a) Ta biết rằng bình phương một số nguyên chia cho 8 dư 0, 1, 4, do đó $x^2 + y^2 + z^2$ chia cho 8 thì số dư thuộc tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Mặt khác, 560647 chia cho 8 dư 7. Vậy không tồn tại x, y, z là các số nguyên thỏa mãn đề bài.

b) Đẳng thức đã cho tương đương với

$$(a-1)a(a+1) + (b-1)b(b+1) + (c-1)c(c+1) + (d-1)d(d+1) = 660064.$$

Vế trái chia hết cho 6, vế phải không chia hết cho 6, từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Câu 118. a) Ta có $(a+5) - (a-2) = 7$ nên $a+5$ và $a-2$ cùng chia hết cho 7 hoặc cùng không chia hết cho 7.

Nếu $a+5$ và $a-2$ cùng chia hết cho 7 thì $P = (a+5)(a-2) + 63$ không chia hết cho 49.

Nếu $a+5$ và $a-2$ cùng không chia hết cho 7 thì $(a+5)(a-2)$ không chia hết cho 7, do đó P không chia hết cho 7, nên P không chia hết cho 49.

b) $Q = a^2 + 5a + 185$ không chia hết cho 169.

Tương tự ta viết $Q = (a+9)(a-4) + 221$.

Câu 119. Ta có $P = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Đặt $Q = n(n+1)(2n+1)$ thì $Q = 6P$.

Dễ thấy rằng $n = 5k + 1, n = 5k + 3$ thì Q không chia hết cho 5, do đó P không chia hết cho 5.

Câu 120. a) $P = (a+5)(a-6) + 154$.

Ta có $(a+5) - (a-6) = 11$ chia hết cho 11, vậy $a+5; a-6$ cùng chia hết cho 11 hoặc cùng không chia hết cho 11.

Nếu $a+5; a-6$ cùng chia hết cho 11 thì $a+5; a-6$ chia hết cho 121. Suy ra P không chia hết cho 121.

Nếu $a+5; a-6$ cùng không chia hết cho 11 thì P không chia hết cho 121.

Vậy không tồn tại số nguyên a để P chia hết cho 121.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

b) $Q = (a^2 + 3)(a - 7) + (a + 7)$ chia hết cho $a^2 + 3$ khi
 $(a + 7) : (a^2 + 3) \Rightarrow (a - 7)(a + 7) = [(a^2 + 3) - 52] : (a^2 + 3)$
 $\Rightarrow a^2 + 3 \in \{4; 13; 26; 52\} \Rightarrow a \in \{1; -7\}.$

Bài 121.

a) Ta có $A(x) = (x^2 - x - 2)(x^2 - 8x + 15) + m + 23$, do đó $A(x)$ chia hết cho $B(x)$ khi
 $m + 23 = 0 \Leftrightarrow m = -23.$

b) $f(x)$ chia hết cho $x - 1$ và $x + 2$ nên ta có:

$$\begin{cases} f(x) = p(x)(x-1) \\ f(x) = q(x)(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-3b=1 \\ a-12b=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=-\frac{8}{3} \end{cases}$$

Bài 122. Theo đề bài ta có với mọi x :

$$\begin{cases} A(x) = p(x)(x-5) + 7 & (1) \\ A(x) = q(x)(x+3) - 1 & (2) \\ A(x) = (2x^3 + 1)(x-5)(x+3) + ax + b & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2) ta có $A(5) = 7, A(-3) = -1.$

Từ (3) ta có $A(5) = 5a + b; A(-3) = -3a + b.$

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} A(5) = 5a + b = 7 \\ A(-3) = -3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2.$$

Vậy $A(x) = (x^2 - 2x - 15)(2x^3 + 1) + x + 2.$

Bài 123. Ta phân tích $P(n)$ thành nhân tử:

$$\begin{aligned} P(n) &= n^{1800}(n^{80} + n^{40} + 1) = n^{1800}[(n^{40} + 1)^2 - n^{40}] \\ &= n^{1800}(n^{40} + n^{20} + 1)(n^{40} - n^{20} + 1) = n^{1800}[(n^{20} + 1)^2 - n^{20}](n^{40} - n^{20} + 1) \\ &= n^{1800}(n^{20} + n^{10} + 1)(n^{30} - n^{10} + 1)(n^{40} - n^{20} + 1). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $P(n)$ chia hết cho $Q(n)$ với $n \in \mathbb{Z}.$

Bài 124.

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{1.2.3...(a+3)(a+4)(a+5)...(2a+5)(2a+6)}{1.2.3...(a+3)} \\ &= 1.2.3...(2a+5) \cdot \frac{2.4.6...(2a+4)(2a+6)}{1.2.3...(a+2)(a+3)} \\ &= 1.3.5...(2a+5)2^{a+3} \text{ chia hết cho } 2^{a+3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Q &= \frac{1.2.3...(3a-1)3a}{1.2.3...a} \\ &= [1.4.7...(3a-2)][2.5.8...(3a-1)] \cdot \frac{3.6.9...3a}{1.2.3...a} \\ &= [1.4.7...(3a-2)][2.5.8...(3a-1)] \cdot 3^a \text{ chia hết cho } 3^a \end{aligned}$$

Bài 125: Ta có: $(a^3 + b^3) - (a + b) = (a^3 - a) + (b^3 - b) = (a-1)a(a+1) + (b-1)b(b+1) : 6$

Do đó: $(a^3 + b^3) : 6 \Leftrightarrow (a + b) : 6$

Bài 126. Vì m là số chẵn $\Rightarrow m = 2k \Rightarrow m^3 + 20m = (2k)^3 + 40k$

$$m^3 + 20m = 8(k^3 + 5k) = 8[(k^3 - k) + 6k] = 8(k^3 - k) + 48k$$

Ta có: $(k^3 - k) : 6 \Rightarrow 8(k^3 - k) : 48$ và $48k : 48$

Vậy: $(m^3 + 20m) : 48$

Bài 127. Gọi số cần tìm là $X = \overline{xy...tba_na_{n-1}...a_2a_1}$, b là chữ số cần gạch.

Đặt $A = \overline{xy...t}$ và $Y = \overline{xy...ta_na_{n-1}...a_2a_1}$

Ta có: $X = 71.Y$

$$\Leftrightarrow A.10^{n+1} + b.10^n + \overline{a_na_{n-1}...a_2a_1} = 71 \quad \left(A.10^n + \overline{a_na_{n-1}...a_2a_1} \right)$$

$$\Leftrightarrow b.10^n = 61.A.10^n + 70.\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1}$$

Nếu $A > 0$ thì $b.10^n > 61A.10^n$ vì $0 < b \leq 9$.

Vậy $A = 0$ tức là $b.10^n = 70.\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1}$

Chữ số bị gạch là chữ số đầu tiên tính từ trái qua phải.

Mặt khác: $(10^k, 7) = 1$ với mọi $k \Rightarrow b : 7$

Mà $1 \leq b \leq 9 \Rightarrow b = 7$

Lúc đó: $7.10^n = 70.\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1}$

$$\Rightarrow Y = \overline{a_na_{n-1}...a_2a_1} = 100...00 \quad (n-1 \text{ chữ số } 0)$$

Vậy: $X = 7100...00$ ($n-1$ chữ số 0) chữ số bị gạch đi là 7.

Bài 128.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$. Ta có:

$$\overline{ab} : 3 \text{ và } \overline{a0b} + 2a = 9.\overline{ab}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) : 3 \\ 100a + b + 2b = 9(10a + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) : 3 \\ 3a = 2b \end{cases}$$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Từ $3a = 2b \Rightarrow 2b : 3$ mà $(2, 3) = 1 \Rightarrow b : 3$ do $(a + b) : 3$

$$\Rightarrow a : 3 \text{ mà } 3a : 2 \Rightarrow a : 2$$

Ta có: $a : 3; a : 2; (2, 3) = 1 \Rightarrow a : 6, 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 9$

Vậy: $\overline{ab} = 69$.

Bài 129.

* Nếu $x : 3$ và $y : 3 \Rightarrow x^2 : 3$ và $y^2 : 3 \Rightarrow (x^2 + y^2) : 3$

* Ngược lại: giả sử $(x^2 + y^2) : 3$

Ta có một số nguyên a bất kỳ chỉ có một trong ba dạng.

$$a = 3q, a = 3q + 1, a = 3q - 1$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ có một trong hai dạng } 3k \text{ hoặc } 3k + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \text{ có một trong các dạng: } 3p, 3p + 1, 3p + 2$$

Do đó: $(x^2 + y^2) : 3 \Leftrightarrow x^2 : 3$ và $y^2 : 3 \Leftrightarrow x : 3$ và $y : 3$.

Bài 130.

Ta có: $\overline{aaaa} = 16\overline{bbb} + r$

$$\overline{aaa} = 16\overline{bb} + (r - 200)$$

Với: $200 \leq r < \overline{bbb}$.

Trừ các đẳng thức, ta có: $1000a = 1600b + 200 \Leftrightarrow 5a = 8b + 1 \Rightarrow a = 5$ và $b = 3$.

Ta có các số 5555 và 333 thỏa mãn.

Bài 131.

a) Gọi số cần tìm là: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

$$k = \frac{\overline{abc}}{a + b + c} = \frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 1 + \frac{9(11a + b)}{a + b + c}$$

Nhận thấy k bé nhất khi c lớn nhất $\Rightarrow$ khi đó $c = 9$

$$\Rightarrow k = 1 + \frac{9(11a + b)}{a + b + 9} = 10 + \frac{9(10a - 9)}{a + b + 9}$$

$$\Rightarrow k \text{ bé nhất khi } b \text{ lớn nhất } \Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow k = 10 + \frac{9(10a - 9)}{a + 18} = 100 - \frac{9 \cdot 180}{a + 18}$$

$$\Rightarrow k \text{ bé nhất khi } a \text{ bé nhất } \Rightarrow a = 1$$

Vậy $\overline{abc} = 199$

b) Xét các trường hợp: (1) a chẵn, b chẵn; (2) a chẵn; b lẻ

(3) a lẻ; b chẵn; (4) a lẻ, b lẻ.

Trong tất cả các trường hợp ta đều có $A : 16$

Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh cho $B : 36$ với mọi n .

Bài 132.

a) Chỉ cần chứng minh $(n^5 - n) : 30$ với mọi n .

b) Với mọi số tự nhiên khác 0, ta có: $0 < S(n) \leq n$.

$$* \text{ Nếu } 1 \leq n \leq 1987 \Rightarrow (n-1)(n-1987) \leq 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 1988n + 1987 \leq 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 1988n + 26 < n^2 - 1988n + 1987 \leq 0$$

$$\Rightarrow \text{ vô lý.}$$

$$* \text{ Nếu } n = 1988 \Rightarrow S(1988) = 1988^2 - 1988 \cdot 1988 + 26$$

Vậy $n = 1988$ thỏa mãn.

$$* \text{ Nếu } n > 1988 \Rightarrow n - 1988 \geq 1$$

$$\Rightarrow n^2 - 1988n + 26 > n^2 - 1988 = n(n - 1988) \geq n$$

$$\Rightarrow S(n) = n^2 - 1988n + 26 > n \text{ (vô lý)}$$

Vì luôn luôn có: $0 < S(n) \leq n$

Vậy chỉ có $n = 1988$ thỏa mãn.

c) Gọi $(A, B) = d \Rightarrow d \geq 1$

$$\Rightarrow A : d \text{ và } B : d \Rightarrow (2n+1) : d \text{ và } \frac{n(n+1)}{2} : d$$

$$\Rightarrow n(2n+1) : d \text{ và } 2n(n+1) : d$$

$$\Rightarrow (2n^2 + n) : d \text{ và } (2n^2 + 2n) : d$$

$$\Rightarrow [(2n^2 + 2n) - (2n^2 + n)] : d$$

$$\Rightarrow n : d \Rightarrow 2n : d \text{ mà } (2n+1) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d \leq 1 \text{ mà } d \geq 1 \Rightarrow d = 1$$

Vậy $(A, B) = 1$

Bài 133.

a) Một số nguyên dương không chia hết cho 5 thì có một trong các dạng:

$$x = 5q + 1, 5q + 2, 5q + 3, 5q + 4$$

$$\Rightarrow x^2 \text{ có một trong các dạng } 5k + 1 \text{ hoặc } 5k + 4$$

$$\Rightarrow x^4 \text{ có dạng duy nhất } 5p + 1$$

$$\Rightarrow b^4 = 5B + 1 \text{ và } a^4 = 5A + 1 \Rightarrow a^4 - b^4 = 5(A - B) : 5$$

b) Theo giả thiết, ta suy ra các tích: $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_1$ chỉ nhận một trong hai giá trị 1 hoặc -1.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Do đó: $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_na_1 = 0 \Leftrightarrow n = 2m$. Đồng thời có m số hạng bằng 1, m số hạng bằng -1 .

Nhận thấy: $(a_1a_2)(a_2a_3)\dots(a_na_1) = a_1^2a_2^2\dots a_n^2 = 1$

$\Rightarrow$ Số các số hạng bằng -1 phải là số chẵn.

Tức là: $m = 2k \Rightarrow n = 4k \Rightarrow n \vdots 4$.

c) Ta có: $n + S(n) + S(S(n)) = 60 \Rightarrow n < 60 \Rightarrow S(n) < 5 + 9 = 14$

$\Rightarrow S(S(n)) < 1 + 9 = 10 \Rightarrow S(n) + S(S(n)) < 14 + 10 = 24$

$60 = n + S(n) + S(S(n)) < n + 24 \Rightarrow 36 < n < 60$

Bởi vì $n, S(n), S(S(n))$ có cùng số dư trong phép chia cho 9.

$\Rightarrow 3n$ chia cho 9 dư 6 (do $S(60) = 6$) $\Rightarrow n$ chia 3 dư 2.

$\Rightarrow n$ chia cho 9 có một trong ba số dư 2, 5, 8.

$\Rightarrow n \in \{44; 47; 50\}$

Bài 134.

a) Biểu diễn $M = (1993^{1997} - 1) + (1997^{1993} + 1) \Rightarrow M \vdots 3$

Biểu diễn $M = 1993.1993^{1996} + 1997.1997^{1992} = 1993.(1993^4)^{499} + 1997.(1997^4)^{498}$

$\Rightarrow M$ tận cùng là chữ số 0 $\Rightarrow M \vdots 5$ mà $(3, 5) = 1 \Rightarrow M \vdots 15$.

b) M tận cùng là chữ số 0.

Bài 135. 1) Xét ba số dư của x, y, z khi chia cho 3.

* Nếu cả ba số là khác nhau: $(0, 1, 2)$ thì $x + y + z \vdots 3$ nhưng khi đó $(x - y)(y - z)(z - x)$ không chia hết cho 3 (vô lý).

* Nếu có hai số dư bằng nhau thì $x + y + z$ không chia hết cho 3 trong khi đó một trong ba hiệu $x - y; y - z$ hoặc $z - x$ chia hết cho 3 (vô lý) vì $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$.

Vậy chỉ còn trường hợp cả 3 số x, y, z đều có cùng số dư khi chia cho 3.

$\Rightarrow (x - y)(y - z)(z - x) \vdots 3.3.3 = 27$

Mà: $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z \Rightarrow x + y + z \vdots 27$

2) Ta có: $a^{4k} - 1 = (a^4)^k - 1^k = (a^4 - 1).P$

Ta có: $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp $a - 1 > 4$ vì a là số nguyên tố $a > 5$.

$\Rightarrow$ $\checkmark$ có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 4.

$$\Rightarrow (a-1)(a+1):8$$

Xét ba số liên tiếp: $a-1, a, a+1$; $\checkmark$ có một số chia hết cho 3 vì a không chia hết cho 3.

$$\Rightarrow (a-1)(a+1):3 \Rightarrow (a-1)(a+1):24$$

Ta có: $a^4 - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)$ và a là số lẻ.

$$\Rightarrow a^2 + 1 \text{ là số chẵn} \Rightarrow (a^2 + 1):2$$

$$\Rightarrow (a-1)(a+1)(a^2+1):48$$

Lại vì a không chia hết cho 5.

$$\Rightarrow a \text{ có dạng } 5k+1, 5k-1, 5k+2, 5k-2 \Rightarrow a^4 \text{ có dạng } 5m+1 \Rightarrow a^4 - 1:5$$

$$\text{Vì } (5, 4, 8) = 1 \Rightarrow (a-1)(a+1)(a^2+1):240$$

Bài 136.

$$\text{a) Nếu } n = 2k \Rightarrow A = 2k \cdot 2^{2k} + 3^{2k} = (2k+1)2^{2k} + 3^{2k} - 2^{2k}.$$

$$A = (2k+1) \cdot 2^{2k} + 5p$$

Bởi vì $(2^{2k}, 5) = 1$ do đó:

$$A:5 \Leftrightarrow 2k+1:5 \Leftrightarrow 2k = 5m+4 \Leftrightarrow k = 5t+2 \Leftrightarrow n = 10t+4$$

$$\text{Nếu } n = 2k+1 \Rightarrow A = (2k+1)2^{2k+1} + 3^{2k+1} = 2k \cdot 2^{2k+1} + 2^{2k+1} - 3^{2k+1} = k \cdot 2^{2k+2} + 5q$$

$$\text{Do đó: } A:5 \Leftrightarrow k:5 \Leftrightarrow n = 10m+1$$

$$\text{Tóm lại: } A:5 \Leftrightarrow n = 10m+4 \text{ hoặc } n = 10m+1$$

$$\text{b) } A:25 \Rightarrow A:5 \Leftrightarrow n = 10m+4 \text{ hoặc } n = 10m+1$$

* Trường hợp $n = 10m+1$

$$\text{Ta có: } 2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$$

$$3^{10} = 59049 \equiv -1 \pmod{25}$$

$$A = (10m+1) \cdot 2^{10m+1} + 3^{10m+1}$$

$$2^{10m} \equiv (-1)^m \pmod{25}; 2^{10m+1} = (-1)^m \cdot 2 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow (10m+1) \cdot 2^{10m+1} = (10m+1)(-1)^m \cdot 2 \pmod{25}$$

$$3^{10m+1} = (-1)^m \cdot 3 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow A = (20m+5)(-1)^m \pmod{25}$$

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

$$A:25 \Leftrightarrow (20m+5):25 \Leftrightarrow 5(4m+1):25 \Leftrightarrow (4m+1):5$$

$$\Leftrightarrow 4m+1=5t \Leftrightarrow 4m=5t-1 \Leftrightarrow m=5q+1$$

$$\text{Vậy } A:25 \Leftrightarrow n=10(5q+1)=50q+11$$

* Trường hợp $n=10m+4$

$$A=(10m+4)2^{10m+4}+3^{10m+4}$$

$$\begin{aligned} \text{Làm tương tự } \Rightarrow A &= 16(10m+4)(-1)^m + 81(-1)^m \pmod{25} \\ &= (-1)^m \cdot (160m+145) \pmod{25} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A:25 \Leftrightarrow (32m+29):5 \Leftrightarrow 32m \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Leftrightarrow m=5q+3 \Leftrightarrow n=50q+34$$

Tóm lại $A:25 \Leftrightarrow n=50q+11$ hoặc $n=50q+34$

Bài 137.

$$\text{a) Viết: } A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n)$$

$$\text{Ta có: } (25^n - 18^n):(25-18) \text{ và } (12^n - 5^n):(12-5)$$

$$\Rightarrow A:7$$

$$\text{Viết: } A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n)$$

$$\text{Ta có: } (25^n - 12^n):(25-12) \text{ và } (18^n - 5^n):(18-5)$$

$$\Rightarrow A:13 \text{ vì } (7,13)=1 \Rightarrow A:7.13=91$$

$$\text{b) Ta có: } 5^{2p} + 1997 = 5^{2p^2} + q^2 \Leftrightarrow (5^{2p} - 1) + 1996 = (5^{2p^2} - 1) + q^2 - 1$$

$$\text{Nếu } p \text{ và } q \text{ là số nguyên tố } \Rightarrow 5^{2p} - 1 = 25^p - 1:24$$

$$\text{Và } 5^{2p^2} - 1 = 25^{p^2} - 1:24; q^2 - 1 = (q-1)(q+1):3$$

$$\Rightarrow 1996:3 \text{ vô lý. Vậy phương trình không có nghiệm } (p, q).$$

$$\text{Bài 138. Biểu diễn } P = (1998n^2 + 1998n) + (n^2 - n + 30)$$

$$\text{Bởi vì } (1998n^2 + 1998n):6n \Rightarrow P:6n \Leftrightarrow (n^2 - n + 30):6n$$

Xét hai trường hợp:

+ Nếu $n > 0$:

$$\text{Ta có } (n^2 - n):n \Rightarrow 30:n \text{ vì } 30:6 \Rightarrow (n^2 - n):6$$

Mà $n^2 - n = n(n-1):2$, do đó:

$$n(n-1):3 \Rightarrow n=3k \text{ hoặc } n=3k+1$$

Vậy $P:6n \Leftrightarrow n = 3k$ hoặc $n = 3k + 1$ với n là ước số của 30 $\Rightarrow n \in \{1, 3, 10, 30\}$

+ Nếu $n < 0$: Đặt $n = -m$ với $m > 0$

Làm tương tự ta có: $m \in \{2, 5, 6, 15\} \Rightarrow n \in \{-2, -5, -6, -15\}$

Bài 139. a) $1996 = 3.665 + 1 \Rightarrow ab = (3k + 1)^{1995} \Rightarrow ab$ có dạng $3Q + 1$

$\Rightarrow a$ và b phải có cùng dạng $3m + 1$ hoặc $3m - 1$

$\Rightarrow a + b$ có dạng $3p + 2$ hoặc $3p - 2$

$\Rightarrow a + b$ không chia hết cho 3 nên $a + b$ không chia hết cho 1995

b) Làm tương tự với:

$1991 = 3k - 1 \Rightarrow cd = 3Q + 1$

$\Rightarrow c$ và d phải có cùng dạng $3m + 1$ hoặc $3m - 1$

$\Rightarrow c + d$ có dạng $3p + 2$ hoặc $3p - 2$

$\Rightarrow c + d$ không chia hết cho 3 nên $c + d$ không chia hết cho 1992

Bài 140. Ta có: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 1995 + 3xy(x + y):3$

Do đó $(x + y)^3 : 3 \Rightarrow (x + y) : 3 \Rightarrow (x + y)^3 : 27$

Ta có: $3xy(x + y) : 9 \Rightarrow 1995 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) : 9$

Vô lý vì 1995 chia cho 9 dư 6

Bài 141. Ta có: $2T_n = n(n + 1)$. Mặt khác, sử dụng tính chất $a^n + b^n$ chia hết cho $a + b \in \mathbb{N}^*$ và

n lẻ, ta có: $2S_n = \left[(1^{2019} + n^{2019}) + 2^{2019} + (n - 1)^{2019} + \dots + (n^{2019} + 1) \right] : (n + 1) \quad (1)$

$2S_n = \left\{ \left[1^{2019} + (n - 1)^{2019} \right] + \left[2^{2019} + (n - 2)^{2019} \right] + \dots + \left[(n - 1)^{2019} + 2n^5 \right] \right\} : n \quad (2)$

Do $(n, n + 1) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra: $2S_n : n(n + 1) = 2T_n$ hay $S_n : T_n$.

Bài 142. Gọi d là ước chung lớn nhất của m và n .

Giả sử $m = ad$, $n = bd$ với $(a, b) = 1$

Ta có: $A = \frac{(m + n)^3}{n^2} = \frac{d^3(a + b)^3}{d^2b^2} = \frac{d(a + b)^3}{b^2}$

Vì $(a, b) = 1$ nên $(b, a + b) = 1$. Suy ra $(b^2, (a + b)^3) = 1$. Như vậy để A nguyên thì $d : b^2$, giả sử $d = cb^2$. Bây giờ ta được $A = c(a + b)^3$ với a, b, c nguyên dương.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Do $a+b \geq 2$ và A lẻ nên A nhận giá trị bé nhất là 27, điều này xảy ra khi $c=1, a+b=3$. Khi đó có hai khả năng:

Nếu $a=2$ và $b=1$ thì ta có $d=1$. Suy ra $m=2, n=1$.

Nếu $a=1$ và $b=2$ thì ta có $d=4$. Suy ra $m=4, n=8$.

Bài 143. Ta có $a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1):a+1 \Rightarrow b+1:a+1$. Tương tự

$b^3a+1=a(b^3-1)+a+1:b-1$ suy ra $a+1:b-1$. Từ đó suy ra

$b+1:b-1 \Leftrightarrow b-1+2:b-1 \Rightarrow b-1 \in U(2)$ suy ra $b=2$ hoặc $b=3$.

Với $b=2$ ta có $3:a+1 \Rightarrow a=2$, với $b=3$ ta có: $4:a+1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=3 \end{cases}$.

Vậy các bộ số $(a;b)$ thỏa mãn điều kiện là: $(a;b) = (1;3), (2;2), (3;3)$.

Bài 143. Từ giả thiết ta suy ra $a+b+c+d+e$ chia hết cho $3.4.5=60$ suy ra $4b, 5c$ chia hết cho 60 nên b chia hết cho 15, c chia hết cho 12. Nếu $b=0$ hoặc $c=0$ thì suy ra

$a=b=c=d=e=0$ trái với giả thiết suy ra $b, c \neq 0$. Vậy $b, c \geq 1$ suy ra $b \geq 15, c \geq 12$. Theo giả thiết ta có: $3(a+b+c+d+e)=3a+4b+5c \Rightarrow 3(d+e)=b+2c \geq 15+2.12 \Rightarrow d+e \geq 13$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=15, c=12$ vậy $a=20$. Vậy $a=20$ là giá trị cần tìm.

Bài 144. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $n \geq m$

+ Nếu $n > m+1$ thì suy ra

$n^2-m > n+m^2$, thật vậy ta có: $n^2-m-n-m^2=(n+m)(n-m-1) > 0$. Từ đó ta suy ra $n+m^2$ không thể chia hết cho $n-m^2$.

+ Ta xét $n=m+1$,

$m+n^2:m^2-n \Leftrightarrow m+(m+1)^2:m^2-(m+1) \Leftrightarrow m^2+3m+1:m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-m+1+4m:m^2-m+1$ h

ay $4m:m^2-m+1 \Rightarrow 4m \geq m^2-m+1 \Leftrightarrow m^2-5m+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \leq m \leq \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, do m là số

nguyên dương nên suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ thử trực tiếp ta thấy $m=1, m=2$ thỏa mãn.

+ Xét $m=n$ ta có $n^2+n:n^2-n \Rightarrow 2n:n^2-n \Rightarrow 2n \geq n^2-n \Leftrightarrow n^2-3n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 3$ thử trực tiếp ta thấy $n=2$ hoặc $n=3$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy cặp số $(m; n)$ thỏa mãn điều kiện là: $(m, n) = (2; 2), (3; 3), (1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 2)$.

Bài 145. Đặt $x-1=a, y-1=b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Yêu cầu bài toán được viết lại thành:

$2(a+1)(b+1)-1:ab \Leftrightarrow 2ab+2(a+b)+1:ab \Leftrightarrow 2(a+b)+1:ab$. Ta giả sử $2(a+b)+1=kab$, và

$1 \leq a \leq b$ thì $kab=2(a+b)+1 \leq 4b+b=5b \Rightarrow ka \leq 5$. Từ đó ta có các trường hợp có thể xảy ra

là: $k=1, a=1 \Rightarrow 2(1+b)+1=b \Rightarrow b=-3$ loại. Thử lần lượt: $k=1, a=2; k=1, a=3; k=1, a=4;$

$k=1, a=5; k=2, a=1; k=2, a=2; k=3, a=1; k=4, a=1; k=5, a=1$; ta suy ra các cặp số

$(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là:

$(x; y) = (2; 2), (2; 4), (4; 2), (8; 4), (4; 8)$.

Bài 146. Từ giả thiết ta suy ra

$$y(4x^2+8x+3):4xy-1 \Leftrightarrow x(4xy-1)+2(4xy-1)+x+3y+2:4xy-1..$$

Hay

$$x+3y+2:4xy-1 \Leftrightarrow 4xy-1 \leq x+3y+2 \Leftrightarrow x(4xy-1) \leq 3y+3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3y+3}{4y-1} = \frac{12y+12}{4(4y-1)} = \frac{3(4y-1)+15}{4(4y-1)}$$

$$\text{Mà } \frac{3(4y-1)+15}{4(4y-1)} = \frac{3}{4} + \frac{15}{4(4y-1)} \leq \frac{3}{4} + \frac{15}{4 \cdot 4.3} = 2 \text{ suy ra } x \leq 2.$$

Thay $x=1 \Rightarrow y=1$ và $y=4$.

Thay $x=2$ suy ra $y=1$.

Bài 147. Từ giả thiết ta suy ra $x^2 - 2 \vdots xy + 2$ Ta có phân tích sau:

$$y(x^2 - 2) = x(xy + 2) - 2(x + y) \text{ suy ra } 2(x + y) \vdots xy + 2 \text{ hay } 2(x + y) = k(xy + 2) \text{ với } k \in \mathbb{N}^*.$$

Nếu $k \geq 2$ thì $2(x + y) = k(xy + 2) \geq 2(xy + 2) \Leftrightarrow x + y \geq xy + 2 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) + 1 \leq 0$. Điều này là vô lý do $x, y \geq 1$. Vậy $k = 1 \Leftrightarrow 2(x + y) = xy + 2 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) = 2$. Từ đó tìm được $(x; y) = (3; 4), (4; 3)$.

Bài 148. Giả sử $x^2 + 3xy + y^2 = 5^n$ do $x, y \geq 2 \Rightarrow n \geq 2$.

$$\text{Suy ra } x^2 + 3xy + y^2 \vdots 25 \Leftrightarrow (x - y)^2 + 5xy \vdots 25 \Rightarrow (x - y)^2 + 5xy \vdots 5 \Rightarrow (x - y)^2 \vdots 5 \Leftrightarrow x - y \vdots 5 \text{ hay } (x - y)^2 \vdots 25 \Rightarrow 5xy \vdots 5 \Leftrightarrow xy \vdots 5.$$

Do x, y là số nguyên tố ta suy ra x hoặc y chia hết cho 5.

Giả sử $x \vdots 5 \Rightarrow x = 5$, lại có $x - y \vdots 5 \Rightarrow$ số còn lại cũng chia hết cho 5, hay $x = y = 5$.

Khi đó $n = 3$.

Bài 149. Đặt $\frac{x^4 - 1}{y + 1} = \frac{a}{b}; \frac{y^4 - 1}{x + 1} = \frac{m}{n}$; với $(a, b) = 1, (m, n) = 1, b, n > 0$. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} \text{ là số nguyên, tức là: } \frac{an + bm}{bn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} an + bm \vdots b \\ an + bm \vdots n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} an \vdots b \\ bm \vdots n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \vdots b \\ b \vdots n \end{cases} \Rightarrow n = b.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{x^4 - 1}{y + 1} \cdot \frac{y^4 - 1}{x + 1} = (x - 1)(x^2 + 1)(y - 1)(y^2 + 1) \text{ là số nguyên, suy ra}$$

$am \vdots n \Rightarrow a \vdots n \Leftrightarrow a \vdots b \Rightarrow x^4 - 1 \vdots y + 1$. Ta có: $x^4 y^{44} - 1 = y^{44}(x^4 - 1) + y^{44} - 1$ mà $x^4 - 1 \vdots y + 1$ và $y^{44} - 1 \vdots y^2 - 1 \vdots y + 1$ nên bài toán được chứng minh.

Bài 150. Ta có:

$$\frac{p^{2n+1} - 1}{p - 1} = \frac{q^3 - 1}{q - 1} \Leftrightarrow (p - 1) \left(\frac{p^{2n} - 1}{p - 1} - 1 \right) = (p - 1) \left(\frac{q^3 - 1}{q - 1} - 1 \right) \Leftrightarrow p(p^n - 1)(p^n + 1) = (p - 1)(p + 1) \quad (1)$$

Nếu $q \leq p^n - 1$ thì các thừa số ở vế trái lớn hơn các thừa số tương ứng ở vế phải của (1), do đó $q \geq p^n$. Vì q nguyên tố còn p^n không nguyên tố nên $q \geq p^n + 1$.

Một trong những thừa số ở vế trái của (1) chia hết cho số nguyên tố q . Theo bất đẳng thức $q \geq p^n + 1$, điều đó chỉ xảy ra khi $q = p^n + 1$

Thay vào (1) ta được: $p(p^n - 1) = (p - 1)(p^n + 2)$ suy ra $p^n - 3p + 2 = 0$.

Từ đó $p \vdots 2$ hay $p = 2, n = 2$ suy ra $q = p^n + 1 = 5$.

Bài 151. Ta có: $2a^2b = a(a + b) - a(a^2 + b^2)$

Vì p^4 là ước của $a^2 + b^2$ và $a(a + b)^2$ nên p^4 là ước của $2a^2b$. Lại vì p lẻ nên p^4 là ước của a^2b .

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 lớn nhất chỉ có thể là 2. Do đó b phải chứa p^2 , nghĩa là b chia hết cho p^2 suy ra $b^2 \vdots p^4$. Điều này vô lý vì $a^2 + b^2$ không chia hết cho p^4 (do a^2 không chia hết cho p^4). Như vậy a phải chia hết cho p^2 .

Vì $a^2 + b^2$ chia hết cho p^4 nên $b^2 \vdots p^4$. Suy ra $b \vdots p$ và $(a + b) \vdots p$.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Tóm lại, p^4 là ước của $a(a+b)$.

Bài 152. Đặt $d = (a, b)$. Suy ra $a = xd, b = yd, (x, y) = 1$

Khi đó: $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} = \frac{dxy(x+y)}{x^2+xy+y^2} \in \mathbb{Z}$

Ta có $(x^2+xy+y^2; x) = (y^2; x) = 1$. Tương tự $(x^2+xy+y^2; y) = 1$.

Vì $(x+y; y) = 1$ nên $(x^2+xy+y^2; x+y) = (y^2; x+y) = 1$.

Do đó $x^2+xy+y^2 \mid d \Rightarrow d \geq x^2+xy+y^2$.

Mặt khác $|a-b|^3 = d^3|x-y|^3 = d^2|x-y|^3 \cdot d \geq d^2 \cdot 1 \cdot (x^2+xy+y^2) > ab$.

Vậy $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

Bài 153. Ta có $n^2-n+1 = n(n-1)+1$ và $n^2+n+1 = n(n+1)+1$ là các số lẻ.

Suy ra rằng số lẻ nhỏ nhất được xem xét là n^2-n+2 và số lẻ lớn nhất là n^2+n . Như vậy tổng cần tìm là:

$$\begin{aligned} & (n^2-n+2) + (n^2-n+4) + \dots + (n^2+n-2) + (n^2+n) \\ &= (n^2-n) + 2 + (n^2-n) + 4 + \dots + (n^2-n) + 2n-2 + (n^2-n) + 2n \\ &= n(n^2-n) + 2(1+2+\dots+n) = n^3 - n^2 + n^2 + n = n^3 + n. \end{aligned}$$

Bài 154. Gọi d là ước chung lớn nhất của m và n .

Giả sử $m = ad, n = bd$ với $(a, b) = 1$.

$$\text{Ta có } A = \frac{(m+n)^3}{n^2} = \frac{d^3(a+b)^3}{d^2b^2} = \frac{d(a+b)^3}{b^2}.$$

Vì $(a, b) = 1$ nên $(b, a+b) = 1$ suy ra $(b^2, (a+b)^3) = 1$. Như vậy để A nguyên thì $d \mid b^2$, giả sử $d = cb^2$. Bây giờ ta được $A = c(a+b)^3$ với a, b, c nguyên dương.

Do $a+b \geq 2$ và A lẻ nên A nhận giá trị bé nhất là 27, điều này xảy ra khi $c=1; a+b=3$.

Khi đó có hai khả năng:

Nếu $a=2$ và $b=1$ thì ta có $d=1$. Suy ra $m=2, n=1$.

Nếu $a=1$ và $b=2$ thì ta có $d=4$, suy ra $m=4; n=8$.

Bài 155. Rõ ràng $n=2$ thỏa mãn các điều kiện bài toán.

Với $n > 2$ ta viết $n^6-1 = (n^3-1)(n^3+1) = (n^3-1)(n+1)(n^2-n+1)$

Do đó tất cả các thừa số nguyên tố của n^2-n+1 chia hết cho n^3-1 hoặc $n^2-1 = (n-1)(n+1)$.

Tuy nhiên cần để ý rằng $(n^2-n+1; n^3-1) \leq (n^3+1, n^2-1) \leq 2$.

Mặt khác, $n^2-n+1 = n(n-1)+1$ là số lẻ, vì vậy tất cả các thừa số nguyên tố của n^2-n+1 phải là chia hết $n+1$.

Nhưng $n^2-n+1 = (n+1)(n-2)+3$ vì vậy ta phải có $n^2-n+1 = 3^k$ với k nguyên dương. Bởi vì $n > 2$ nên ta có $k \geq 3$.

Bây giờ $3 \mid n^2-n+1$ nên $n \equiv 2 \pmod{3}$, nhưng mỗi trường hợp $n \equiv 2, 5, 8 \pmod{9}$, ta có $n^2-n+1 \equiv 3 \pmod{9}$ mâu thuẫn.

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất là $n=2$.

Bài 156. Ta có $M = 10^{2n+1} + 10^{n+1} + 1$.

Để ý rằng $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$, cho nên ta có thể xét các trường hợp của n theo mod 3.

Nếu $n = 3k$ thì $M \equiv 10^2 + 10 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$.

Nếu $n = 3k + 1$ thì $M \equiv 10^4 + 10^2 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$.

Nếu $n = 3k - 1$ thì $M \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{37}$.

Tóm lại, M chia hết cho 37 khi và chỉ khi n có một trong hai dạng $n = 3k$ hoặc $n = 3k + 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 157. Đặt $x = \overline{ab}$. Ta có $\overline{abcde} = 1000x + y$ với $0 \leq y < 1000$.

Từ $\sqrt[3]{\overline{abcde}} = \overline{ab}$ ta suy ra $1000x + y = x^3$.

Vấn đề còn lại là chúng ta đi giải phương trình nghiệm nguyên.

Vì $y \geq 0$ nên $1000x \leq x^3 \Rightarrow x^2 \geq 1000 \Rightarrow x \geq 32$ (1)

Mặt khác do $y < 1000$ nên $1000x + 1000 > x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1000) < 1000 \Rightarrow x < 33$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = 32$ hay $x^3 = 32768$.

Vậy $\overline{abcde} = 32768$.

Bài 158.

Từ $\sqrt{\overline{abc}} = (a+b)\sqrt{c}$, suy ra $100a + 10b + c = (a+b)^2 c \Rightarrow 10(10a+b) = c[(a+b)^2 - 1]$ (*)

Vì $a \geq 1$ nên $10(10a+b) \geq 100 \Rightarrow c[(a+b)^2 - 1] \geq 100 \Rightarrow a+b \geq 4$ và $c \geq 1$.

Nếu $a+b$ không chia hết cho 3 thì $(a+b)^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Từ (*) suy ra $(10a+b):3 \Rightarrow (a+b):3$ (vô lý).

Như vậy $(a+b):3$ nên $(10a+b):3$. Từ (*) suy ra $c:3$ và do đó c không chia hết cho 5.

Từ (*) suy ra $[(a+b)^2 - 1]:5 \Rightarrow \begin{cases} a+b-1=1 \\ a+b+1=1 \end{cases}$. Kết hợp với $(a+b):3$ ta suy ra $a+b = 6$ hoặc

$a+b = 9$.

Trường hợp 1: $a+b = 9$ thay vào (*) ta được: $10(9a+9) = 80c \Rightarrow 8c = 9(a+1) \Rightarrow c:9 \Rightarrow c = 9$, vì vậy $a = 7$.

Trường hợp 2: $a+b = 6$ làm tương tự trường hợp trên.

Bài 159. Vì $\overline{abc} < 999$ nên $a!+b!+c! \leq 999 \Rightarrow a, b, c \leq 6 \Rightarrow \overline{abc} \leq 666$.

Điều này dẫn đến $a!+b!+c! \leq 666 \Rightarrow a, b, c \leq 5 \Rightarrow a!+b!+c! \leq 3.5! = 360 \Rightarrow a \leq 3$.

Suy ra $a!+b!+c! \leq 3!+5!+5! = 246 \Rightarrow a \leq 2$.

Nếu $b=c=5$ thì $a!+5!+5! = \overline{a55} \Rightarrow a!+240 = \overline{a55}$, ta có $a \geq 2$ vì vậy $a = 2$.

Tuy nhiên thử lại thấy $255 \neq 2!+5!+5!$

Một trong hai số b hoặc c nhỏ hơn 5.

Từ đó ta có $a!+b!+c! \leq 2!+4!+5! = 146 \Rightarrow \overline{abc} \leq 146 \Rightarrow a=1, b \leq 4$.

Vì $c < 5$ thì $\overline{abc} = a!+b!+c! < 1!+4!+4! = 49$ vô lý.

Với $c=5$ thì $\overline{1b5} = 1!+b!+5!$ suy ra $10b = 16+b! \Rightarrow b!$ tận cùng bởi số 4, vì vậy $b=4$.

Vậy $\overline{abc} = 145$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 160.

a, Một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Do $a^2 + b^2$ chia cho 3 nên chỉ có thể xảy ra số dư 0+0, 0+1, 1+1 trong 3 trường hợp này chỉ có trường hợp $a, b:3$ thì $a^2 + b^2:3$ suy ra đpcm.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 2: QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

b, Một số chính phương khi chia cho 7 chỉ có thể dư 0, 1, 2, 4. (Thật vậy chỉ cần xét $a = 7k, 7k \pm 1, 7k \pm 2, 7k \pm 3$ thì a^2 chia cho 7 có số dư lần lượt là 0, 1, 4, 2). Như vậy $a^2 + b^2$ khi chia cho 7 thì có số dư là 0+0, 0+1, 0+2, 0+4, 1+2, 1+4, 2+4, 1+1, 2+2, 4+4. Trong các trường hợp này chỉ có a, b đồng thời chia hết cho 7 thì $a^2 + b^2 : 7$ đpcm.

c, Dễ thấy nếu a không chia hết cho 3 thì a^4 chia 3 chỉ có thể dư 1. Từ giả thiết ta có $a^4 + b^4$ chia hết cho 3 và chia hết cho 5.

Nếu a không chia hết cho 3 thì a^4 không chia hết cho 3 suy ra b^4 không chia hết cho 3 nên b không chia hết cho 3 suy ra $a^4 + b^4$ chia cho 3 dư 2. Trái với giả thiết, vậy a, b phải chia hết cho 3. Ta cũng có: Nếu a không chia hết cho 5 thì a^4 chia cho 5 có thể dư 1. Làm tương tự như trên ta suy ra a, b phải chia hết cho 5 là đpcm.

Bài 161. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $n \geq m$.

+) Nếu $n > m+1$ thì suy ra $n^2 - m > n + m^2$ thật vậy ta có:

$$n^2 - m - n - m^2 = (n+m)(n-m-1) > 0. \text{ Từ đó suy ra } n+m^2 \text{ không thể chia hết cho } n^2 - m.$$

+) Ta xét $n = m+1$,

$$m+n^2 : m^2 - n \Leftrightarrow m+(m+1)^2 : m^2 - (m+1) \Leftrightarrow m^2 + 3m+1 : m^2 - m+1 \Leftrightarrow m^2 - m+1 + 4m : m^2 - m+1$$

$$\text{hay } \Leftrightarrow 4m : m^2 - m+1 \Rightarrow 4m \geq m^2 - m+1 \Leftrightarrow m^2 - 5m+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \leq m \leq \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \text{ do } m \text{ là}$$

số nguyên dương nên suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ thử trực tiếp ta thấy $m=1, m=2$ thỏa mãn.

+) Xét $m=n$ ta có $n^2 + n : n^2 - n \Rightarrow 2n : n^2 - n \Rightarrow 2n \geq n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - 3n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 3$ thử trực tiếp ta thấy $n=2$ hoặc $n=3$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy các cặp số $(m; n)$ thỏa mãn điều kiện là $(m; n) = (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)$.

Bài 162. Giả sử A là phân số chưa tối giản, đặt $d = (n^2 + 4, n+5)$, suy ra $d > 1$.

$$\text{Ta có } d | (n+5)^2 - (n^2 + 4) = 10n + 21 = 10(n+5) - 29 \Rightarrow d | 29 \Rightarrow d = 29.$$

Ngược lại nếu $(n+5) : 29$ thì đặt $n+5 = 29m$ với $m \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$n^2 + 4 = 29(29m^2 - 10m + 1) : 29 \text{ nên } A \text{ chưa tối giản.}$$

Như vậy, ta chỉ cần tìm n sao cho $n+5 = 29m$ với $m \in \mathbb{N}^*$.

$$1 \leq n \leq 2017 \Rightarrow 1 \leq 29m - 5 \leq 2017 \Rightarrow 1 \leq m \leq 69 \Rightarrow \text{có 69 giá trị của } m \Rightarrow \text{có 69 giá trị của } n.$$

Vậy có 69 giá trị của n để A là phân số chưa tối giản.

Bài 163. Giả sử $d = (a, b) \Rightarrow a = md, b = nd$ với $(m, n) = 1$.

$$\text{Ta có } \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{(m^2 + n^2)d + (m+n)}{mnd} \Rightarrow (m+n) : d \Rightarrow d \leq m+n \Rightarrow d \leq \sqrt{d(m+n)} = \sqrt{a+b}.$$