

NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giới thiệu nguyên lý Dirichlet

Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 – 1859) là nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại về hàm số. Trên cơ sở quan sát thực tế, ông đã phát biểu thành một nguyên lý mang tên ông – nguyên lý Dirichlet: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi cái lồng có không quá 2 con thỏ. Nói cách khác, nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con trở lên.* Một cách tổng quát hơn, **nếu có k lồng để nhốt m con thỏ (với $k = kn + r$ ($0 < r \leq k - 1$)) thì tồn tại ít nhất một lồng có chứa từ $n + 1$ con thỏ trở lên.**



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Ta cũng có thể dễ dàng chứng minh nguyên lý Dirichet bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử không có một lồng nào chứa $n + 1$ con thỏ trở lên, tức là mỗi lồng chứa nhiều nhất n con thỏ, thì số con thỏ chứa trong k lồng nhiều nhất chỉ có thể là kn con. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có m con thỏ với $m = kn + r$ ($0 < r \leq k - 1$).

Nguyên lý Dirichlet thật đơn giản, dễ hiểu nhưng được vận dụng vào giải rất nhiều bài toán trong số học, đại số, hình học về việc chỉ ra sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng thỏa mãn một điều kiện đặt ra.

Khi sử dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán cụ thể, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

2. Một số dạng áp dụng của nguyên lý Dirichlet

- **Nguyên lý Dirichlet cơ bản:** Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

• **Nguyên lý Dirichlet tổng quát:** Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật. (Ở đây $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x)

• **Nguyên lý Dirichlet mở rộng:** Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left\lceil \frac{n+m-1}{m} \right\rceil$ con thỏ.

• **Nguyên lý Dirichlet dạng tập hợp:** Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B . Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B , thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B .

3. Phương pháp ứng dụng.

Nguyên lý Dirichlet tưởng chừng như đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nguyên lý Dirichlet cũng được áp dụng cho các bài toán của hình học, điều đó được thể hiện qua hệ thống bài tập sau:

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt “thỏ” vào “chuồng” và thỏa mãn các điều kiện:

+ Số “thỏ” phải nhiều hơn số chuồng.

+ “Thỏ” phải được nhốt hết vào các “chuồng”, nhưng không bắt buộc chuồng nào cũng phải có thỏ.

Thường thì phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng. Ngoài ra nó còn có thể áp dụng với các nguyên lý khác. Một số bài toán cơ bản thường gặp như sau:

- 1) Trong $n + 1$ số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hoặc hiệu của chúng chia hết cho n).
- 2) Nếu trên một đoạn thẳng độ dài 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm chung.
- 3) Nếu trên đường tròn có bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn 2π thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm chung.
- 4) Trong một hình có diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm chung.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Chứng minh sự tồn tại chia hết

* Cơ sở phương pháp:

I CHỦ ĐỀ 8 : NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Thông thường ta coi m số tự nhiên đã cho là m “con thỏ”, các số dư trong phép chia các số tự nhiên đó cho n là những “lồng”; như vậy sẽ có n cái lồng: lồng i ($0 \leq i \leq b$) gồm những số tự nhiên đã cho chia cho n dư i .

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

- Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho 2011 có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho 2011).
- Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho 2012 hoặc luôn tìm được hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Hướng dẫn giải

- Ta coi 2012 số tự nhiên đã cho là 2012 “con thỏ”; “lồng i ” gồm các số chia cho 2011 dư i ($0 \leq i \leq 2011$) nên có 2011 lồng: lồng 0, lồng 1, ..., lồng 2010. Như vậy có 2011 lồng chứa 2012 con thỏ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn hai con thỏ, tức là có ít nhất hai số chia cho 2011 có cùng số dư.
- Nếu trong 2012 số đã cho có ít nhất một số chia hết cho 2012 thì ta chọn luôn số này. Nếu không có số nào chia hết cho 2012 thì khi chia cho 2012 nhận nhiều nhất 2012 số dư khác nhau là 1, 2, ..., 2011. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau:

- Trong $n + 1$ số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho n).
- Trong n số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư.

Bài toán 2. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng $20122012\dots2012$ (gồm các số 2012 viết liên tiếp nhau) chia hết cho 2013.

Hướng dẫn giải

Xét 2014 số sau: 2012, 20122012, ..., 2012...2012 (gồm 2014 bộ số 2012).

Đem 2014 số này lần lượt chia cho 2013, có 2014 số mà chỉ có 2013 số dư trong phép chia cho 2013 (là 0, 1, 2, ..., 2012) nên luôn tồn tại hai số chia cho 2013 có cùng số dư, chẳng hạn đó là $a = 2012\dots2012$ (gồm i bộ 2012) và $b = 2012\dots2012$ (gồm j bộ 2012) với $1 \leq i \leq j \leq 2014$.

Khi đó

$b - a = 2012\dots2012.10^{4i}$ (gồm $j - i$ bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013.

Lại có $\text{ƯCLN}(10^{4i}, 2013) = 1$ nên số $2012\dots2012$ (gồm $j - i$ bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây “thỏ” là số có dạng 2012...2012, “lồng” là số dư trong phép chia cho 2013).

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là chọn ra 2014 ($= 2013 + 1$) số tự nhiên có dạng đã cho. Từ đó ta có thể phát biểu nhiều bài toán tương tự, chẳng hạn như: Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 111...1 chia hết cho 29.

Bài toán 3. Cho sáu số tự nhiên a, b, c, d, e, g . Chứng minh rằng trong sáu số ấy, tồn tại một số chia hết cho 6 hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải

Trường hợp có một số bằng 0 thì ta chọn số 0 thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Trường hợp sáu số đều lớn hơn 0. Xét 6 số sau

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + b$$

$$S_3 = a + b + c$$

$$S_4 = a + b + c + d$$

$$S_5 = a + b + c + d + e$$

$$S_6 = a + b + c + d + e + g.$$

Dem mỗi số này chia cho 6 ta nhận được số dư thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nếu tồn tại $S_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ chia hết cho 6 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có S_i nào chia hết cho 6 thì ta có 6 số chia hết cho 6 chỉ nhận 5 loại số dư khác nhau $(1, 2, 3, 4, 5)$; theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho 6 có cùng số dư, chẳng hạn S_2 và S_5 do đó hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 6, tức là $c + d + e$ chia hết cho 6. Bài toán đã được chứng minh.

(Ở đây “thỏ” là các số S_i , “lồng” là số dư trong phép chia cho 6).

Nhận xét. Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:

Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho n .

Bài toán 4. Chứng minh rằng:

a) Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n .

b) Trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n . Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là $n - 1$ số dư khác nhau $(1, 2, 3, \dots, n - 1)$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó $a - b$ chia hết cho n , điều này mâu thuẫn với $0 < a - b < n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Lấy 20 số tự nhiên liên tiếp đầu của dãy, ta luôn tìm được một số có chữ số hàng đơn vị là 0 và có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử đó là N và tổng các chữ số của N là s . Khi đó 11

I CHỦ ĐỀ 8 : NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

số $N, N+1, N+2, N+3, \dots, N+9, N+19$ sẽ nằm trong 39 số đã cho. Vì N tận cùng bằng 0 nên tổng các chữ số của $N, N+1, N+2, \dots, N+9$ lần lượt bằng $s, s+1, s+2, \dots, s+9$. Vì N tận cùng bằng 0 và có chữ số hàng chục khác 9 nên tổng các chữ số của $N+10$ bằng $s+1$, tổng các chữ số của $N+19$ bằng $s+10$.

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $s, s+1, s+2, s+3, \dots, s+9, s+10$ luôn tìm được một số chia hết cho 11. Chẳng hạn số đó là $s+i (0 \leq i \leq 10)$: Nếu $0 \leq i \leq 9$ thì ta chọn được số $N+i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán; nếu $i=10$ thì ta chọn được số $N+19$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Mấu chốt để giải bài toán câu b) là phải tìm ra 11 số trong 39 số đã cho có tổng các chữ số thứ tự là 11 số tự nhiên liên tiếp, đồng thời sử dụng kết quả câu a).

Bài toán 5. Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó?

Hướng dẫn giải

Nhận thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 dư 1; nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012, sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k+2$ ($k=0,1,2,\dots,670$). Khi đó hai số bất kì trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3, nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng. Ta sẽ chứng minh rằng chọn được nhiều nhất $672 (= 671+1)$ số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được $a, b (a > b)$ sao cho $a-b \leq 2$ (Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã chọn sẽ không nhỏ hơn $3 \cdot 671 = 2013$. Điều này mâu thuẫn giả thiết với hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012-1=2011$), nghĩa là $a-b$ bằng 1 hoặc 2.

- Nếu $a-b=1$ thì hiển nhiên $a+b$ chia hết cho $a-b (=1)$
- Nếu $a-b=2$ thì $a+b$ là số chẵn nên $a+b$ chia hết cho $a-b (=2)$.

Như vậy từ 2012 số đã cho không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

Dạng 2: Bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

* **Cở sở phương pháp:** Thông thường ta phải lập ra những tập hợp có tính chất cần thiết rồi sử dụng nguyên lý Dirichlet để chứng tỏ có hai phần tử thuộc hai tập hợp bằng nhau.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Hướng dẫn giải

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_6 < 10$.

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5 + 5 = 10$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

(Ở đây, có 10 “thỏ” là 10 số $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1$ và có 9 “lông” là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Nhận xét. Để giải bài toán này, ta cần tạo ra hai tập hợp gồm các phần tử nhỏ hơn 10 và tổng số phần tử của hai tập hợp phải không nhỏ hơn 10. Từ đó suy ra tồn tại hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

Bài toán 2. Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử 700 số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{700}$. Ta xét các tập hợp sau:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{700}\};$$

$$B = \{a_1 + 6, a_2 + 6, \dots, a_{700} + 6\};$$

$$C = \{a_1 + 9, a_2 + 9, \dots, a_{700} + 9\};$$

Tổng số phần tử của ba tập hợp A, B, C là $700 \cdot 3 = 2100$, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá $2006 + 9 = 2015$, mà $2100 > 2015$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai phần tử bằng nhau. Vì mỗi tập hợp A, B, C có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó phải thuộc hai tập hợp: A và B, hoặc A và C, hoặc B và C.

- Nếu hai phần tử thuộc A và B, chẳng hạn $a_i = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 6$.

- Nếu hai phần tử thuộc A và C, chẳng hạn $a_i = a_j + 9$ suy ra $a_i - a_j = 9$.

- Nếu hai phần tử thuộc B và C, chẳng hạn $a_i + 3 = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 3$.

Như vậy luôn tồn tại hai số thuộc tập hợp A có hiệu là 3, 6, 9. Ta được điều phải chứng minh.

(Ở đây 2100 “thỏ” là 2100 phần tử của ba tập hợp A, B, C; 2015 “lông” là các số từ 1 đến 2015)

Nhận xét. Ta còn có kết quả mạnh hơn như sau:

I CHỦ ĐỀ 8 : NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Cho X là tập hợp gồm 505 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Chứng minh.

Gọi A là tập hợp các số thuộc X mà chia hết cho 3, gọi B là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 1, gọi C là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 2.

Có 505 số xếp vào ba tập hợp, mà $505 = 3.168 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một tập hợp có chứa từ 169 số trở lên.

Trong tập hợp này, hai số bất kì có hiệu là một bội của 3. Tồn tại hai số x, y có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi số trong tập hợp này đều có hiệu không nhỏ hơn 12 thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn $12.168 = 2016 > 2006$, trái với đề bài.

Vậy trong tập hợp X tồn tại hai phần tử x, y mà $x - y \in E$.

Bài toán 3. Cho hai tập hợp số nguyên dương phân biệt mà mỗi số đều nhỏ hơn n . Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không nhỏ hơn n thì có thể chọn được trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng của chúng bằng n .

Hướng dẫn giải

Giả sử hai tập hợp số nguyên dương đã cho là

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \text{ và } B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

với $a_i < n$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $b_j < n$ ($j = 1, 2, \dots, k$) và $m + k \geq n$.

Xét tập hợp $C = \{n - b_1, n - b_2, \dots, n - b_k\}$.

Nhận thấy, có tất cả $n - 1$ số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn n , các phần tử của A và C đều nhỏ hơn n và tổng số các phần tử của A và C không nhỏ hơn n . Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai phần tử bằng nhau, chúng không cùng thuộc A và C , do đó một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc C , tức là tồn tại hai số a_p và $n - b_q$ mà $a_p = n - b_q \Leftrightarrow a_p + b_q = n$ (điều phải chứng minh).

(Ở đây coi $m + k$ “thỏ” là các số nguyên dương thuộc tập hợp A hoặc C , $n - 1$ “lồng” là các số nguyên dương từ 1 đến $n - 1$).

Dạng 3: Bài toán liên quan đến bảng ô vuông

* **Cở sở phương pháp:** Một bảng vuông kích thước $n \times n$ gồm n dòng, n cột và 2 đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có n ô vuông.

Một bảng các ô vuông kích thước $m \times n$ gồm m dòng và n cột.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho một mảng ô vuông kích thước 5×5 . Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-1, 0, 1$; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Bảng ô vuông kích thước 5×5 có 5 dòng, 5 cột, 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, cột và đường chéo đều có ghi 5 số thuộc tập $\{-1; 0; 1\}$. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có 11 phần tử. Có 12 tổng nhận trong tập 11 các giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị. Bài toán được chứng minh. (Ở đây “thỏ” là tổng nên có 12 “thỏ”, “lồng” là giá trị của tổng nên có 11 “lồng”).

Nhận xét. Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:

Cho một bảng ô vuông kích thước $n \times n$. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-1, 0, 1$; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài toán 2. Trên bảng ô vuông kích thước 8×8 , ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Hướng dẫn giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).

Ta có $64 = 14 \cdot 4 + 7$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn $4 + 1 = 5$. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây, “thỏ” là hiệu của hai số trong 64 số (từ 1 đến 64) nên có 63 thỏ; “lồng” là số cặp ô vuông kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nên có nhiều nhất là 14 lồng).

Nhận xét.

- Mấu chốt của bài toán là quan tâm đến hai ô vuông ghi số nhỏ nhất (số 1) và số lớn nhất (số 64) sẽ có hiệu lớn nhất là 63; đồng thời xét từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 chỉ cần tối đa là $(8 - 1) + (8 - 1) = 14$ ô. Ở đây ta đã vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát: Có m thỏ, nhốt vào k lồng mà $m = kn + r$ ($1 \leq r \leq k - 1$) thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $n + 1$ con thỏ.
- Nếu thay bởi bảng chữ nhật gồm 8×10 ô vuông, trên đó ghi các số từ 1 đến 80 không lặp một cách tùy ý thì kết quả câu bài toán còn đúng hay không? Hãy chứng minh.

📁 Dạng 4: Bài toán liên quan đến thực tế

Cơ sở phương pháp: Khi chứng minh sự tồn tại một số đối tượng thỏa mãn điều kiện nào đó, ta thường sử dụng nguyên lí Dirichlet.

Điều quan trọng nhất là phải xác định được “thỏ” và “lồng”.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Một tổ học tập có 10 học sinh. Khi viết chính tả, cả tổ đều mắc lỗi, trong đó bạn Bình mắc nhiều lỗi nhất (mắc 5 lỗi). Chứng minh rằng trong tổ ấy có ít nhất 3 bạn đã mắc

I CHỦ ĐỀ 8 : NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

một số lỗi bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Ta coi “thỏ” là học sinh (trừ bạn Bình) nên có 9 thỏ; “lồng” là số lỗi chính tả học sinh mắc phải nên có 4 lồng: lồng i gồm những học sinh mắc i lỗi ($i = 1, 2, 3, 4$). Có 9 thỏ nhốt vào 4 lồng, mà $9 = 4.2 + 1$, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $2 + 1 = 3$ thỏ, tức là có ít nhất 3 bạn mắc một số lỗi bằng nhau.

Bài toán 2. Ở một vòng chung kết cờ vua có 8 đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ đều phải gặp đủ 7 đấu thủ còn lại, mỗi người một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Hướng dẫn giải

Ta coi “thỏ” là đấu thủ nên có 8 thỏ; “lồng” là số trận đấu của đấu thủ nên có 8 lồng: “lồng i ” gồm các đấu thủ đã thi đấu i trận (với $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).

Ta thấy lồng 0 và lồng 7 không đồng thời tồn tại, vì nếu có một đấu thủ chưa đấu trận nào thì sẽ không có đấu thủ nào đã đấu đủ 7 trận, cũng như nếu có đấu thủ đã đấu đủ 7 trận thì không có ai chưa đấu trận nào.

Như vậy, có 7 lồng chứa 8 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn 2 con thỏ, tức là trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu luôn tìm được 2 đấu thủ đã đấu cùng một số trận.

Bài toán 3. Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Hướng dẫn giải

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2.2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề tài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

(Ở đây coi nhà khoa học (trừ A) là “thỏ” nên có 5 thỏ, coi đề tài là “lồng” nên có 2 lồng và vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát).

Dạng 5: Bài toán liên quan đến sự sắp xếp

* **Cơ sở phương pháp:** Các bài toán về sắp xếp chỗ, phân công việc không đòi hỏi nhiều về kiến thức và kĩ năng tính toán, chúng chủ yếu kết hợp suy luận logic để xét các khả năng có thể xảy ra với nguyên lí Dirichlet.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Có 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Biết rằng nếu hai người A và B mà không quen nhau thì tổng số những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân công vào các thuyền đôi sao cho mỗi thuyền đều là hai người quen nhau.

Hướng dẫn giải

Nếu trong 20 người không có hai người nào quen nhau thì tổng số người quen của hai người bất kì là 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là tổng số người quen của hai người không nhỏ hơn 19. Vậy tồn tại một số cặp quen nhau.

Ta xếp mỗi cặp quen nhau đó vào một thuyền đôi. Gọi k là số lượng thuyền lớn nhất mà trong đó ta có thể xếp được những cặp quen nhau vào một thuyền và kí hiệu thuyền thứ i xếp hai người A_i và B_i quen nhau ($1 \leq i \leq k$).

Giả sử $k \leq 9$, kí hiệu tập hợp M gồm những người chưa được xếp vào thuyền nào, tức là gồm những người đôi một không quen nhau. Chọn hai người A và B trong tập hợp M . Theo bài ra thì tổng số người quen của A và số người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen A hoặc quen B đã được xếp vào thuyền rồi. Như vậy có 19 người quen hệ quen A hoặc B được xếp vào nhiều nhất là 9 thuyền đôi (trừ 1 thuyền vì A, B chưa được xếp), mà $19 = 9 \cdot 2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một thuyền chở 2 người quen cả A và B. Nhưng khi đó ta có thể xếp lại như sau: trong $k - 1$ thuyền đầu tiên vẫn giữ nguyên, còn thuyền thứ k xếp A_k và B, còn thuyền thứ $k + 1$ xếp A và B_k . Điều này mâu thuẫn với giả sử.

Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

Bài toán 2. Kỳ thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên Long An năm nay có 529 học sinh đến từ 16 địa phương khác nhau tham dự. Giả sử điểm bài thi môn Toán của mỗi học sinh đều là số nguyên lớn hơn 4 và bé hơn hoặc bằng 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 6 học sinh có điểm môn Toán giống nhau và cùng đến từ một địa phương.

Hướng dẫn giải

Ta có 529 học sinh có điểm bài thi từ 5 điểm đến 10 điểm. Theo nguyên lí Dirichlet ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau (từ 5 điểm đến 10 điểm).

I CHỦ ĐỀ 8 : NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau và đến từ 16 địa phương. Theo nguyên lý Dirichlet tìm được 6 em có cùng điểm thi môn toán và đến từ cùng một địa phương.

Dạng 6: Vận dụng nguyên lý Dirichlet vào các bài toán hình học

* **Cơ sở phương pháp:** Một số các dạng toán hình học thường gặp:

- 1) Nếu trên một đoạn thẳng độ dài 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm chung.
- 2) Nếu trên đường tròn có bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn 2π thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm chung.
- 3) Trong một hình có diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm chung.

4) * Ví dụ minh họa:

Bài toán 1. Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho.

Hỏi có hay không 3 điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó?

(Thi chọn HSG lớp 9 Quốc Gia năm 1995-1996- Bảng A)

Hướng dẫn giải

Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh là 1; vì có 33 điểm chứa trong 16 hình vuông, do đó theo nguyên tắc Dirichlet ắt phải có ít nhất là một hình vuông chứa không ít hơn 3 điểm.

Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong hình vuông đơn vị đã cho không thể vượt qua độ dài đường chéo của nó bằng $\sqrt{2}$.

Gọi O_1, O_2, O_3 là 3 điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó.

Vẽ ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 cùng bán kính là $\sqrt{2}$. Chắc chắn cả ba điểm O_1, O_2, O_3 đều nằm trong cả ba đường tròn này, nghĩa là chúng nằm trong phần chung của 3 hình tròn có tâm tại chính các điểm O_1, O_2, O_3 .

Bài toán 2. Trên mặt phẳng cho 25 điểm sao cho từ ba điểm bất kỳ trong số chúng đều tìm được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 13 điểm.

Hướng dẫn giải

Xét điểm A và hình tròn (C_1) có tâm A và bán kính là 1. Nếu tất cả 24 điểm còn lại đều nằm trong (C_1) thì hiển nhiên bài toán được chứng minh.

Xét trường hợp có điểm B nằm ngoài (C_1) . Ta có $AB > 1$ xét hình tròn (C_2) tâm B và bán kính là 1.

Giả sử C là một điểm bất kỳ khác A và B . Ta chứng minh C phải thuộc một trong hai hình tròn (C_1) hoặc (C_2) .

Thật vậy: giả sử ngược lại điểm C không thuộc cả (C_1) , cả $(C_2) \Rightarrow AC > 1$ và $BC > 1$; theo trên, $AB > 1$ như vậy có bộ ba điểm A, B, C trong đó không có bất kỳ 2 điểm nào có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Vô lý, vì trái với giả thiết.

Điều vô lý đó chứng tỏ rằng hoặc là C thuộc vào (C_1) hoặc là C thuộc vào (C_2) .

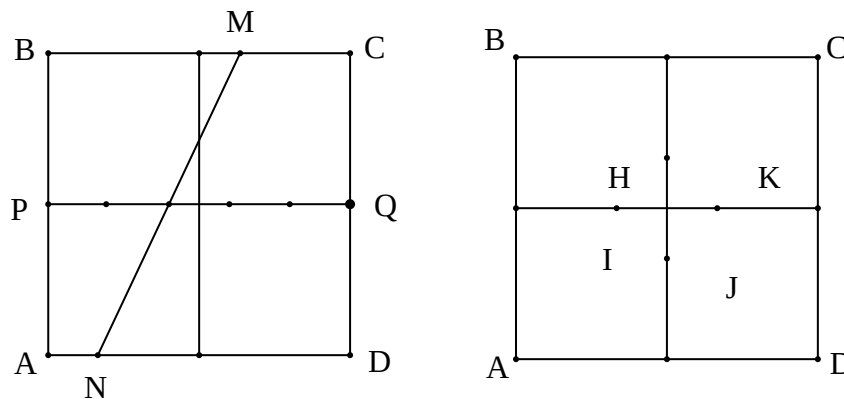
Như vậy cả 25 điểm đã cho đều thuộc vào (C_1) và (C_2) .

Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt phải có ít nhất là một hình tròn chứa không ít hơn 13 điểm.

Bài toán 3. Cho hình vuông $ABCD$ và chín đường thẳng phân biệt thỏa mãn mỗi một đường thẳng đều chia hình vuông thành hai tứ giác có diện tích tỷ lệ với 2 và 3.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là ba đường thẳng đồng quy tại một điểm.

Hướng dẫn giải



Nhận xét: các đường thẳng đã cho không thể đi qua trung điểm các cạnh hình vuông $ABCD$ bởi vì ngược lại thì hình vuông sẽ bị phân thành hai phần tam giác và ngũ giác.

Giả sử một đường thẳng trong số đó cắt cạnh BC tại M và cắt cạnh AD tại N .

I CHỦ ĐỀ 8 : NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Các hình thang $ABMN$ và $CDNM$ có chiều cao bằng nhau nên từ giả thiết suy ra MN chia đoạn thẳng nối trung điểm P, Q của AB và CD theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$.

Dễ thấy chỉ có 4 điểm chia 2 đường trung bình của hình vuông $ABCD$ theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$ là I, J, K, H . Có 9 đường thẳng đi qua 4 điểm này; theo nguyên tắc Dirichlet, phải có ít nhất là 3 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

Bài toán 4. Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng 2 màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng ắt phải tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

Hướng dẫn giải

Ta có đa giác 1999 cạnh nên có 1999 đỉnh. Do đó ắt phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được sơn bởi cùng 1 màu (chẳng hạn màu đỏ).

Vì đa giác đã cho là đa giác đều có một số lẻ đỉnh, cho nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ . Giả sử đỉnh đó là A .

Nếu A tô màu đỏ thì ta có $\triangle APQ$ là tam giác cân có 3 đỉnh A, P, Q được tô cùng màu đỏ.

Nếu A tô màu xanh. Lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q .

Nếu cả 2 đỉnh B và C được tô màu xanh thì $\triangle ABC$ cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.

Nếu ngược lại một trong hai đỉnh B hoặc C mà tô màu đỏ thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là các tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một đồi thông có 800 000 cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá 500 000 chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau ở trên cây.

Bài 2. Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Bài 3. Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

Bài 4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. chứng minh rằng tồn tại một số có dạng $111\dots 11$ mà chia hết cho p .

Bài 5. Với 39 số tự nhiên liên tiếp, hỏi rằng ta có thể tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11 hay không?

Bài 6. Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên tùy ý, chỉ ít cũng có một cặp gồm hai số sao cho hoặc tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Bài 7. Chứng minh rằng tồn tại lũy thừa của 29 mà các chữ số tận cùng của nó là 00001.

Bài 8. (Bài toán áp dụng 2 lần nguyên tắc Dirichlet)

Có 17 nhà toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người viết thư cho một người về một vấn đề. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Bài 9. Một lớp học có 30 học sinh. Khi viết chính tả, em A phạm 14 lỗi, các em khác phạm ít lỗi hơn. Chứng minh rằng có ít nhất là 3 học sinh không mắc lỗi hoặc mắc số lỗi bằng nhau.

Bài 10. Cho 5 người tùy ý. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất là hai người có số người quen bằng nhau (chú ý là A quen B thì B quen A).

Bài 11. Trong một giải bóng đá có 10 đội tham gia, bất cứ hai đội nào trong số đó cũng phải đấu với nhau một trận. Chứng minh rằng tại bất cứ thời điểm nào của lịch thi đấu cũng có hai đội đã đấu được một số trận như nhau.

Bài 12. Chứng minh rằng đối với một số n nguyên dương bất kì bao giờ ta cũng tìm được một số tự nhiên mà các chữ số của nó bao gồm chỉ có chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n .

Bài 13. Chứng minh rằng luôn tồn tại số được viết bởi toàn chữ số 8 chia hết cho 2011.

Bài 14. Chứng minh rằng nếu $(n, 2010) = 1$ thì luôn tồn tại một số k nguyên dương sao cho $n^k - 1$ chia hết cho 2010.

Bài 15. Chứng minh rằng trong 1007 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 2011.

Bài 16. Cho $n + 1$ số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn $2n$ ($n > 1$). Chứng minh rằng có thể chọn ra 3 số nào đó mà một số bằng tổng hai số kia.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kỳ trong ΔABC . Chứng minh rằng ắt tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 0,5.

Bài 18. Bên trong hình vuông có cạnh bằng 1, lấy bất kỳ 51 điểm phân biệt. Chứng minh rằng phải tồn tại ít nhất là 3 điểm trong số 51 điểm này nằm trong một hình tròn có bán kính bằng $\frac{1}{7}$.

I CHỦ ĐỀ 8 : NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Bài 19. Bên trong hình tròn (O, R) có diện tích bằng 8, người ta lấy 17 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất là 3 điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

Bài 20. Bên trong một cái sân hình chữ nhật có chiều dài 4m và chiều rộng là 3m có 6 con chim đang ăn. Chứng minh rằng phải có ít nhất là hai con chim mà khoảng cách đều giữa chúng nhỏ hơn là $\sqrt{5}m$.

Bài 21. Các điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm được tô bởi cùng một màu và khoảng cách giữa chúng bằng 1.

Bài 22. Trên mặt phẳng cho 100 điểm bất kỳ. Nối mỗi điểm với ít nhất là 66 điểm trong số 99 điểm còn lại bằng một đoạn thẳng. Chứng minh rằng có thể xây ra trường hợp có 2 điểm trong số 4 điểm bất kỳ của 100 điểm đã cho không được nối với nhau.

Bài 23. Cho 5 điểm phân biệt nằm bên trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $35 + \sqrt{3}$. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là một điểm trong hình vuông đã cho sao cho, khoảng cách từ nó đến ẽm đã cho lớn hơn 10.

Bài 24. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là ba điểm được tô bởi cùng một màu tạo thành một tam giác đều có cạnh là 1 hoặc $\sqrt{3}$.

Bài 25. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu đen và đỏ. Chứng tỏ rằng tồn tại một tam giác đều mà các đỉnh của nó chỉ được tô bằng một màu.

Bài 26. Trên mặt phẳng cho 2000 đường thẳng phân biệt, đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 đường thẳng mà góc tạo bởi chúng không lớn hơn $\frac{180^\circ}{2000}$

Bài 27. Bên trong đường tròn có bán kính 2000 có 8000 đoạn thẳng có độ dài là 1. Chứng minh rằng có thể dựng được một đường thẳng d hoặc là song song hoặc là vuông góc với một đường thẳng l cho trước, sao d cắt ít nhất là hai đoạn thẳng đã cho.

Bài 28. Cho bảng ô vuông kích thước 10.10 gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Bài 29. Trong hình chữ nhật kích thước 1.2 ta lấy $6n^2 + 1$ điểm với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại 1 hình tròn có bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn 4 trong số các điểm đã cho.

Bài 30. Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

CHỦ ĐỀ 8. NGUYÊN LÝ ĐIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Bài 1. Ta hãy tưởng tượng mỗi cây thông là một "thỏ", như vậy có 800.000 "thỏ" được nhốt vào không quá 500.000 "chiếc lồng". Lồng 1 ứng với cây thông có 1 chiếc lá trên cây, lồng 2 ứng với cây thông có 2 chiếc lá trên cây v.v... Số thỏ lớn hơn số lồng, theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất có 1 lồng nhất không ít hơn 2 thỏ nghĩa là có ít nhất 2 cây thông có cùng số lá.

Bài 2. Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: $3 \cdot 12 = 36$ mà $36 < 40$ (vô lý). Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh (trong bài này 40 thỏ là 40 học sinh, 12 lồng là 12 tên tháng).

Bài 3. Ta sẽ thành lập dãy số mới gồm 5 số sau đây:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

- Nếu một trong các S_i ($i = 1, \dots, 5$) chia hết cho 5 thì bài toán đã được chứng minh.

- Nếu không có số nào chia hết cho 5 thì khi đem chia các số S_i cho 5 sẽ được 5 số dư có giá trị từ 1 đến 4.

Có 5 số dư mà chỉ có 4 giá trị (5 thỏ, 4 lồng). Theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất phải có 2 số dư có cùng giá trị. Hiệu của chúng chia hết cho 5. Hiệu này chính là tổng các a_i liên tiếp nhau hoặc là a_i nào đó.

Bài 4.

Xét dãy số $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots 11}_{p \text{ chữ số } 1}$

Ta chứng minh trong dãy trên phải có số chia hết cho p . Giả sử kết luận ấy không đúng, tức là không có bất kỳ số nào của dãy lại chia hết cho p .

Cho tương ứng mỗi số dư của phép chia cho p . Tập hợp số dư có thể thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ (Do 0 không thể thuộc tập hợp này). Ta lại có p số trong dãy số trên. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho p . Giả sử các số đó là $\underbrace{111\dots 11}_m$ (m chữ số 1) và số $\underbrace{111\dots 11}_n$ (n chữ số 1) với $(1 \leq n < m \leq p)$. Từ đó ta có

$$\underbrace{(111\dots 11)}_m - \underbrace{(111\dots 11)}_n \div p, \text{ hay } \underbrace{111\dots 1}_{m-n} \underbrace{000\dots 0}_n \div p \text{ Hay } \underbrace{111\dots 1}_{m-n} \cdot 10^n \div p \quad (1)$$

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên $(p; 10) = 1$, Vì thế từ (1) ta suy ra $\underbrace{111\dots 1}_{m-n \text{ chữ số } 1} : p \quad (2)$

$\underbrace{111\dots 1}_{m-n \text{ chữ số } 1}$ là một số thuộc dãy trên nên từ (2) suy ra mâu thuẫn với giả thiết. Vậy giả sử

phản chứng là sai. Ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5. Từ 20 số đầu tiên của dãy bao giờ ta cũng có thể tìm được 2 số mà chữ số hàng đơn vị là 0, và trong hai số đó ít nhất phải có một số có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử N là số đó, và ta gọi S là tổng các chữ số của N .

Ta có dãy số mới $N, N+1, N+2, \dots, N+9, N+10$ là 11 số vẫn nằm trong 39 số cho trước mà tổng các chữ số của chúng là $S, S+1, S+2, \dots, S+9, S+10$. Đó là 11 số tự nhiên liên tiếp, ắt phải có một số chia hết cho 11.

Bài 6. Để làm xuất hiện số "thỏ" và số "lồng" ta làm như sau:

Trong tập hợp các số dư trong phép chia cho 100 ta lấy ra từng cặp số sao cho tổng các cặp đó bằng 100 và thành lập thành các nhóm sau:

$(0; 0), (1; 99), (2; 98), (3; 97), (4; 96), (5; 95), (6; 94) \dots (49; 51), (50; 50)$. Chú ý rằng sẽ có 50 cặp như vậy, ta thêm vào cặp $(0, 0)$ sẽ có 51 cặp (51 lồng).

- Đem chia 52 số tự nhiên cho 100 sẽ có 52 số dư (52 thỏ).

- Có 52 số dư mà chỉ có 51 nhóm, theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất cũng phải có 2 số dư cùng rơi vào một nhóm.

Rõ ràng là cặp số tự nhiên ứng với cặp số dư này chính là hai số tự nhiên có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100. (đpcm)

Bài 7. Trước hết ta chú ý rằng:

29^m có tận cùng là 1 nếu m là số chẵn

29^m có tận cùng là 9 nếu m là số lẻ.

Ta hãy xét 10^5 lũy thừa của 29 với các số mũ chẵn khác nhau. Có hai khả năng xảy ra:

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 8: NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

a. Trong đó nếu có số mũ $2k$ nào mà 29^{2k} có tận cùng là 00001 thì bài toán đã được chứng minh.

b. Không có số mũ $2k$ nào để 29^{2k} có tận cùng là 00001.

Từ b, ta thấy rằng:

Số các số có 5 chữ số tận cùng khác nhau nhỏ hơn 10^5 (kể từ 5 chữ số tận cùng 00002, 00003, ... 99 999, 10^5).

trong khi đó số các số khác nhau mà ta đang xét là 10^5 số. Theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất phải có hai lũy thừa nào đó có 5 chữ số tận cùng là như nhau.

$$\text{Giả sử} \quad A_1 = 29^{2k_1} = M_1 \cdot 10^5 \overline{abcd}_1$$

$$A_2 = 29^{2k_2} = M_2 \cdot 10^5 \overline{abcd}_1$$

Có thể giả sử $k_1 > k_2$ mà không làm mất tính chất tổng quát của bài toán. Thế thì ta có:

$$A_1 - A_2 = 29^{2k_1} - 29^{2k_2} = (M_1 - M_2) 10^5$$

$$A_1 - A_2 = 29^{2k_1} - 29^{2k_2} = 29^{2k_2} (29^{2(k_1-k_2)} - 1)$$

Vì 29^{2k_2} có tận cùng là 1 và $A_1 - A_2 = (M_1 - M_2)10^5$ có tận cùng không ít hơn 5 số 0 nên suy ra $(29^{2(k_1-k_2)} - 1)$ phải có tận cùng không ít hơn 5 chữ số 0, từ đó suy ra $29^{2(k_1-k_2)}$ có tận cùng là 00001 (số các chữ số 0 ít nhất là 4).

Ta tìm được số $k = 2(k_1 - k_2)$ thỏa mãn đề bài (đpcm).

Bài 8. Gọi A là nhà toán học nào đó trong số 17 nhà toán học, thì nhà toán học A phải trao đổi với 16 nhà toán học còn lại về 3 vấn đề. Như vậy nhà toán học A phải trao đổi ít nhất với 6 nhà toán học về một vấn đề nào đó. Vì nếu chỉ trao đổi với số ít hơn 6 nhà toán học về một vấn đề thì số nhà toán học được trao đổi với A ít hơn 16. (Các bạn có thể diễn tả theo khái niệm "thỏ" và "lồng" để thấy ở đây đã áp dụng nguyên tắc Dirichlet lần thứ nhất.)

- Gọi các nhà toán học trao đổi với nhà toán học A về một vấn đề nào đó (giả sử vấn đề I) là $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Như vậy có 6 nhà toán học trao đổi với nhau về 3 vấn đề (không kể trao đổi với A). Như vậy có 6 nhà toán học $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ trao đổi với nhau về 3 vấn đề, I, II, III.

Có hai khả năng xảy ra:

- Nếu có 2 nhà toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thế thì có 3 nhà toán học (kể cả A) trao đổi với nhau về vấn đề I. Bài toán được chứng minh.
- Nếu không có nhà toán học nào trong 6 nhà toán học $A_1, A_2 \dots A_6$ trao đổi về vấn đề I thì ta có 6 nhà toán học chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III. Theo nguyên tắc Dirichlet có ít nhất 3 nhà toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề II hoặc III. Bài toán cũng được chứng minh.

Bài 9. Để tôn trọng ta cần thay đổi ngôn ngữ *thỏ, chuồng* là *học sinh, phòng*.

Phòng 1: Chứa các em mắc 1 lỗi.

Phòng 2: Chứa các em mắc 2 lỗi.

.....

Phòng 14: Chứa các em mắc 14 lỗi.

Phòng 15: Chứa các em không mắc lỗi.

Theo giả thiết *phòng 14* chỉ có em A. Còn lại 14 phòng chứa 29 em. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 3 em. Từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 10. Có 5 người nên số người quen nhiều nhất của mỗi người là 4.

Phòng 0: Chứa những người không có người quen.

Phòng 1: Chứa những người có 1 người quen.

.....

Phòng 4: Chứa những người có 4 người quen.

Để ý rằng *phòng 0 & phòng 4* không thể cùng có người.

Thực chất 5 người chứa trong 4 phòng.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 8: NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một phòng chứa ít nhất 2 người. Từ đó có điều phải chứng minh.

Bài 11. Xét một thời điểm bất kỳ của lịch thi đấu (mỗi đội thi đấu tối đa 9 trận).

Phòng 0: Chứa các đội chưa đấu trận nào.

Phòng 1: Chứa các đội đã thi đấu 1 trận.

.....

Phòng 9: Chứa các đội đã thi đấu 9 trận.

Để ý rằng phòng 0 và phòng 9 không thể cùng có đội thi đấu.

Thực chất 10 đội chứa trong 9 phòng.

Theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 12. Xét $n+1$ số sau: $a_1 = 5; a_2 = 55; \dots; a_{n+1} = 55\dots 5$ ($n+1$ chữ số 5).

Theo nguyên lý Dirichlet : với $n+1$ số trên ắt tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n . Hiệu của hai số này là số có dạng: $55\dots 50\dots 0$ gồm toàn chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n . Đó là điều phải chứng minh!

Bài 13. Xét 2012 số $a_1 = 8; a_2 = 88; \dots; a_{2012} = 88\dots 8$ (2012 chữ số 8). Tương tự ví dụ 4 sẽ tồn tại số có dạng $88\dots 80\dots 0$ (n chữ số 8 và k chữ số 0) chia hết cho 2011.

Mà: $88\dots 80\dots 0 = 88\dots 8 \cdot 10^k$ và $(10^k, 2011) = 1$ suy ra số: $88\dots 8$ chia hết cho 2011. Điều phải chứng minh! (Lưu ý: 2011 là số nguyên tố)

Bài 14. Xét 2011 số sau: $n; n^2; n^3; \dots; n^{2011}$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2010. Giả sử hai số đó là n^i và n^j với $1 \leq i < j \leq 2011$. Khi đó $n^j - n^i = n^i (n^{j-i} - 1) = n^i (n^k - 1)$ chia hết cho 2010 ($k = j - i$ là số nguyên dương). Vậy $n^k - 1$ chia hết cho 2010 (vì $(n^i, 2010) = 1$).

Bài 15. Ta xét phép chia 1007 số trên cho 2011 và xếp vào:

Nhóm 0: Các số chia hết cho 2011 (dư 0)

Nhóm 1: Các số chia cho 2011 dư 1 hoặc 2010.

Nhóm 2: Các số chia cho 2011 dư 2 hoặc 2009.

.....

Nhóm 1005: Các số chia cho 2011 dư 1005 hoặc 1006.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm chứa ít nhất hai số. Theo cách xếp nhóm thì hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 2011.

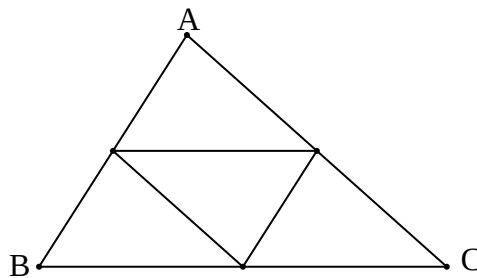
Bài 16. Sắp thứ tự $n + 1$ số đã cho $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} < 2n$ (Nhóm 1). Xét thêm n số:

$b_1 = a_2 - a_1; b_2 = a_3 - a_1; \dots; b_n = a_{n+1} - a_1$. Ta có: $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_n < 2n$ (Nhóm 2).

Tập $2n$ số của cả 2 nhóm trên (trừ a_1 của nhóm 1) nhận $2n - 1$ giá trị (chuồng).

Theo nguyên lý Dirichlet có 2 số bằng nhau nhưng không cùng một nhóm 1 hoặc nhóm 2 tức là phải thuộc 2 nhóm. Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

Bài 17.

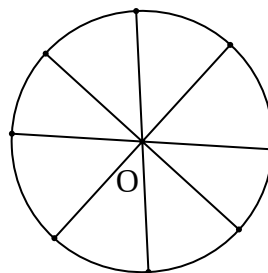


Các đường trung bình của $\triangle ABC$ chia nó thành bốn tam giác đều có cạnh là $0,5$.

Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt tồn tại ít nhất là 2 điểm rơi vào cùng một tam giác nhỏ. Ta có khoảng cách giữa 2 điểm này nhỏ hơn $0,5$.

Bài 18. Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh là $0,2$. Suy ra theo nguyên tắc Dirichlet, ắt tồn tại ít nhất là 3 điểm nằm trong một hình vuông con. Ta có bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông này bằng $\frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7}$. Suy ra 3 điểm đã cho nằm trong hình tròn bán kính là $\frac{1}{7}$.

Bài 19.



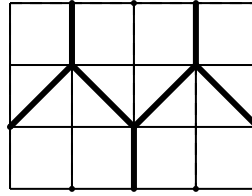
Chia hình tròn (O, R) thành 8 phần bằng nhau. Do đó mỗi hình quạt có diện tích bằng 1.

Theo nguyên tắc Dirichlet, ắt có ít nhất là một hình quạt chứa nhiều hơn 2 điểm.

Xét 3 điểm phân biệt trong hình quạt đã cho. Dễ thấy tam giác tạo bởi 3 điểm này có diện tích bé hơn 1.

Bài 20.

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 8: NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC



Chia sân thành 5 hình như hình vẽ. Áp dụng nguyên tắc Dirichlet, ta suy ra kết quả cần chứng minh.

Bài 21. Dựng $(0; \sqrt{3})$. P là một điểm thuộc $(0; \sqrt{3})$. Dựng hình thoi $OAPB$ có đường chéo OP cạnh là 1.

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo, ta có: $OI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow AI^2 = AO^2 - OI^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 1$$

Vậy $\triangle AOB$ đều có cạnh bằng 1.

Giả sử ngược lại, mọi cặp hai điểm có khoảng cách giữa chúng bằng 1 mà đều được tô bằng hai màu khác nhau.

Không matas tính chất tổng quát, ta giả sử điểm O được tô bằng màu xanh, điểm A được tô bằng màu đỏ và điểm B được tô bằng màu vàng.

Bởi vì $PA = PB = 1$ suy ra P phải được tô bằng màu xanh.

Với cách lập luận như vậy ta suy ra, tất cả các điểm trên đường $(0; \sqrt{3})$ đều được tô cùng một màu xanh. Mặt khác dễ dàng tìm được trên $(0; \sqrt{3})$ hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bằng 1, nên theo giả sử chúng được tô bằng hai màu khác nhau. Vô lý.

Điều vô lý đó chứng tỏ có hai điểm được tô cùng một màu mà khoảng cách của chúng bằng 1.

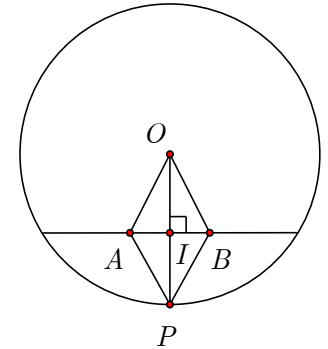
Bài 22. Gọi các điểm đã cho là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$

Kí hiệu: $M = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{33}\}$, $N = \{A_{34}, A_{35}, A_{36}, \dots, A_{66}\}$, $P = \{A_{67}, A_{68}, A_{69}, \dots, A_{100}\}$

Tập M gồm 33 điểm, tập N gồm 33 điểm và tập P gồm 34 điểm. Trường hợp của bài toán: yêu cầu chứng minh có thể xảy ra nếu như:

Mỗi điểm trong tập hợp M chỉ được nối với các điểm của tập hợp N hoặc P .

Các điểm của tập hợp N chỉ được nối với các điểm của tập hợp P hoặc tập M .



Các điểm của tập hợp P chỉ được nối với các điểm có trong tập M hoặc tập N (2 tập này có 66 điểm).

Thật vậy, giả sử (A_i, A_j, A_k, A_l) là 4 điểm bất kỳ trong số 100 điểm. Theo nguyên tắc Dirichlet awrt phải có ít nhất là 2 điểm cùng thuộc vào cùng 1 tập hợp (M, N hoặc P)

Do đó với cách phân chia trên đây, 2 điểm này không được nối với nhau.

Bài 23. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

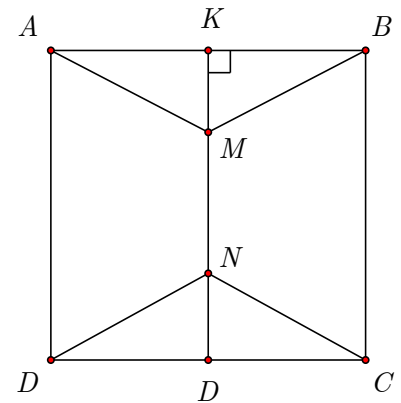
Trên đoạn KI lấy điểm M và N sao cho:

$$KM = NI = 8$$

$$\text{Ta có: } MN = KI - KM - NI = 35 + \sqrt{3} - 16 = 19 + \sqrt{3}$$

$$\text{còn } AM = BM = DN = CN$$

$$= \sqrt{\left(\frac{35 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + 8^2} > 20$$



Do đó nếu ta vẽ các đường trong có tâm là A, B, C, D, M, N bán kính là 10 thì các đường tròn này không cắt nhau.

Bởi vì chỉ có 5 điểm phân biệt nằm trong hình vuông, do đó ắt tồn tại ít nhất là một hình tròn không chứa điểm nào trong số 5 điểm đã cho.

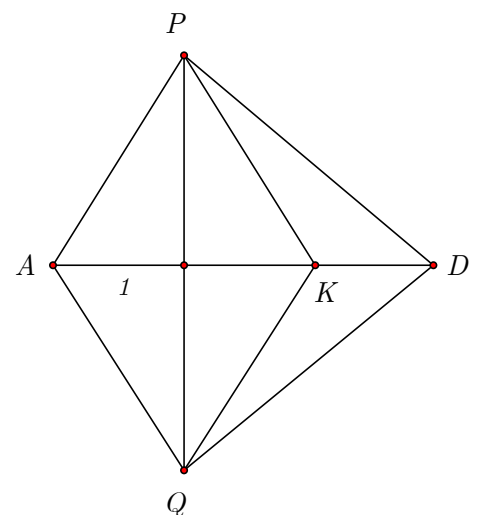
Nhận thấy, tâm của đường tròn này có khoảng cách tới 5 điểm đã cho lớn hơn 10.

Bài 24. Dựng một tam giác đều có cạnh bằng 1. Nếu cả ba đỉnh được tô bởi cùng một màu (xanh hoặc đỏ) thì bài toán được chứng minh.

Trong trường hợp ngược lại, xét tam giác đều ABC có cạnh $AB = 1$ mà A và B được tô bằng hai màu khác nhau.

Lấy điểm D của mặt phẳng sao cho $AO = BO = 2$. Vì A, B khác màu nên D cùng màu với chỉ một trong hai điểm A hoặc B .

Suy ra tồn tại đoạn thẳng $AD = 2$ hoặc $BD = 2$ có 2 mút được tô bằng hai màu khác nhau. Giả sử là đoạn thẳng AD . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng AD thì K cùng màu với một trong hai điểm A hoặc D . Giả sử K và A cùng có màu xanh.



I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 8: NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

Vẽ các tam giác đều APK và AQK .

Nếu P và Q có màu xanh thì ta có tam giác đều APK và AQK có cạnh bằng 1 và ba đỉnh được tô bằng cùng màu xanh.

Nếu P và Q có màu đỏ thì tam giác PQD có 3 đỉnh được tô cùng màu đỏ. Dễ thấy, tam giác PQD đều có cạnh là $\sqrt{3}$.

Bài 25.

Cách 1. Có thể giải như bài 808

Cách 2: có thể giải như cách sau đây:

Vẽ tam giác ABC nếu cả ba đỉnh A, B, C được tô cùng một màu thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu A, B, C được tô bởi 2 màu khác nhau, theo nguyên tắc Dirichlet, ắt phải có hai đỉnh được tô cùng một màu. Giả sử các đỉnh A và B được tô cùng màu đen, khi đó C được tô bằng màu đỏ..

Dựng lục giác đều $ADGEFC$ có tâm là B .

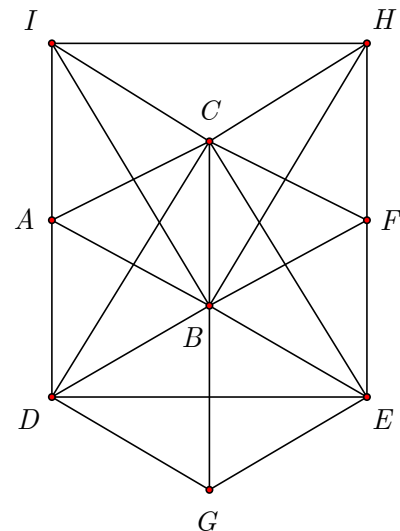
Ta có tam giác ADB đều. Nếu D được tô màu đen ta có ngay điều phải chứng minh. Còn nếu D được tô màu đỏ, lại xét tam giác CDE đều. Nếu E được tô bằng màu đỏ thì tam giác CDE có ba đỉnh được tô cùng màu đỏ, thỏa mãn.

Có nếu ngược lại E được tô bằng màu đen, lại xét tam giác BEF đều. Nếu F được tô bằng màu đen thì ta có BEF có ba đỉnh được tô cùng màu đen, thỏa mãn.

Giả sử ngược lại F được tô bằng màu đỏ, thì lại xét tam giác CFH đều.

Nếu điểm H được tô bằng màu đỏ thì ta có tam giác CFH có ba đỉnh được tô bằng màu đỏ, thỏa mãn. Còn giả sử ngược lại H được tô bằng màu đen thì lại vẽ tam giác đều BHI . Nếu I được tô bằng màu đen thì tam giác BHI có ba đỉnh được tô bằng màu đen, thỏa mãn. Giả sử ngược lại, I được tô bằng màu đỏ thì xét tam giác IDF . Dễ thấy tam giác IDF đều, theo trên ta có ba đỉnh I, D, F được tô bởi cùng màu đỏ, thỏa mãn.

Tóm lại: ta chứng tỏ được rằng, tồn tại tam giác đều mà ba đỉnh được tô bởi cùng một màu.



Bài 26. Lấy một điểm O bất kỳ trên mặt phẳng. Qua O dựng các đường thẳng song song với 2000 đường thẳng đã cho. Tại O ta có 4000 góc đôi một đối đỉnh có tổng số đo bằng 360° . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 27. Giả sử xy là một đường thẳng bất kỳ vuông góc với l . Ta đánh dấu các đoạn thẳng theo thứ tự $1, 2, 3, \dots, 8000$. Chiếu các đoạn thẳng này lên hai đường thẳng xy và l .

Kí hiệu a_i và b_i ($i = 1, 2, \dots, 8000$) tương ứng là độ dài của các đoạn thẳng đã cho trên các đường thẳng xy và l .

Ta có $a_i + b_i \geq 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 8000$

Do đó $(a_1 + a_2 + \dots + a_{8000}) + (b_1 + b_2 + \dots + b_{8000}) \geq 8000 = 4000 + 4000$

Suy ra: hoặc là $a_1 + a_2 + \dots + a_{8000} \geq 4000$

hoặc là $b_1 + b_2 + \dots + b_{8000} \geq 4000$

Ta có 8000 đoạn thẳng có thể chiếu vuông góc lên đường kính của đường tròn với độ dài 4000.

Nếu các hình chiếu của các đoạn thẳng đã cho lên đường thẳng l mà không có các điểm chung thì ta có: $a_1 + a_2 + \dots + a_{8000} < 4000$.

Vì vậy trên l tìm được một điểm là hình chiếu của các điểm thuộc ít nhất là hai trong số các đoạn thẳng đã cho.

Khi đó đường thẳng vuông góc với l dựng qua điểm này sẽ có điểm chung với ít nhất hai đoạn thẳng trong số 8000 đoạn thẳng đã cho.

Bài 28. Xét hình vuông cạnh 2×2 , do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng 10×10 được chia thành 25 hình vuông có cạnh 2×2 nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít

nhất $\left\lceil \frac{50}{3} \right\rceil + 1 = 17$ lần

Bài 29. Chia các cạnh của hình chữ nhật thành n đoạn và $2n$ đoạn bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài $\frac{1}{n}$. Nối các điểm chia bằng các đường thẳng song song với các cạnh của hình chữ

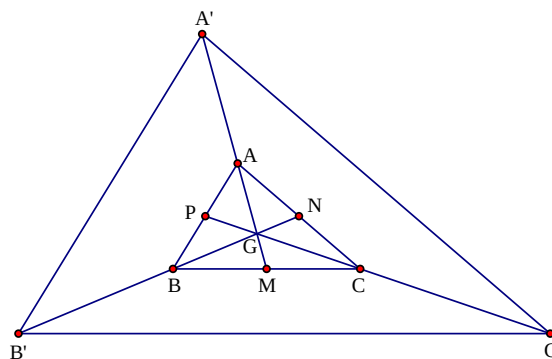
nhật ta được $n \cdot 2n = 2n^2$ hình vuông nhỏ với cạnh là $\frac{1}{n}$. Nếu mỗi hình vuông chứa không

I ĐÁP ÁN CHỦ ĐỀ 8: NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG SỐ HỌC

quá 3 điểm thì tổng số điểm đã cho không quá $3.2n^2 = 6n^2$ (trái với giả thiết). Do đó phải tồn tại 1 hình vuông chứa không ít hơn 4 điểm. Rõ ràng hình vuông cạnh $\frac{1}{n}$ nội tiếp đường tròn bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{2n}$ và đường tròn này được chứa trong đường tròn đồng tâm bán kính $\frac{1}{n}$.

Bài 30.

Lấy năm điểm tùy ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng có hai màu để tô các đỉnh, mà theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là ba điểm A, B, C có màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chỉ có hai khả năng xảy ra:



+ Nếu G có màu đỏ. Khi đó A, B, C, G cùng đỏ và bài toán đã được giải.

+ Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA' = 3GA$, $BB' = 3GB$, $CC' = 3GC$. Khi đó gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì $A'A = 3AG = 6GM \Rightarrow A'A = 2AM$.

Tương tự $B'B = 2BN$, $CC' = 2CP$. Do đó các tam giác $A'BC$, $B'AC$, $C'AB$ tương ứng nhận A, B, C là trọng tâm. Mặt khác, ta cũng có các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm G. Có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

- Nếu A', B', C' cùng xanh. Khi đó tam giác $A'B'C'$ và trọng tâm G có cùng màu xanh.
- Nếu ít nhất một trong các điểm A', B', C' có màu đỏ. Không mất tính tổng quát giả sử A' đỏ. Khi đó tam giác $A'BC$ và trọng tâm A màu đỏ.

Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.