

PHAN QUANG ĐẠT

NGUYỄN NHẤT HUY • DƯƠNG QUỲNH CHÂU



CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

TUYỂN CHỌN TỪ CÁC ĐỀ TUYỂN SINH CHUYÊN TOÁN

f MATHPIAD

L^AT_EX

TUYỂN TẬP SỔ HỌC TRONG KÌ THI CHUYÊN TOÁN 2020 – 2021

Mathpiad – Tạp chí và tư liệu toán học

Phan Quang Đạt – Nguyễn Nhất Huy – Dương Quỳnh Châu

Chương I

Một số kiến thức sử dụng trong tài liệu

① Các định nghĩa ngoài sách giáo khoa.

- **Số chính phương** là số có thể biểu diễn dưới dạng bình phương của một số tự nhiên.
- **Số lập phương** là số có thể biểu diễn dưới dạng lập phương của một số nguyên.

② Các kí hiệu, quy ước ngoài sách giáo khoa.

- Kí hiệu $a \mid b$ dùng thay cho mệnh đề " a là ước của b ", và đọc là " a chia hết b ".
- Kí hiệu (a, b) dùng để chỉ ước chung lớn nhất của a và b . Đôi lúc, nó còn dùng để chỉ cặp số (a, b) , vì thế cần phân biệt rõ.
- Kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$ dùng thay cho mệnh đề " a và b có cùng số dư khi chia cho m ", và đọc là " a đồng dư với b theo modulo m ".

③ Các hằng đẳng thức mở rộng.

- $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$.
- $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)$.

④ Các tính chất về ước chung lớn nhất.

- a) Với các số nguyên a, b, c khác 0 thỏa mãn $c \mid ab$ và $(a, c) = 1$, ta có thể suy ra $c \mid b$.
- b) Với các số nguyên a, b, c khác 0 thỏa mãn $ab = c^2$, và $(a, c) = 1$, ta có $|a|$ và $|b|$ là hai số chính phương.
- c) Với các số nguyên a, b, c khác 0 thỏa mãn $ab = c^3$, và $(a, c) = 1$, ta có a và b là hai số lập phương.

⑤ Các tính chất về đồng dư thức và chia hết.

- (a) Tính chia hết của tổng, tích các số nguyên liên tiếp.
 - Tổng của n số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho n .
 - Tích của n số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho $n!$, ở đây $n!$ là tích của tất cả các số tự nhiên từ 1 đến n .

(b) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$, ta có thể suy ra

- ☐ $m \mid (a - b)$.
- ☐ $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, với c là một số nguyên.
- ☐ $ac \equiv bc \pmod{m}$, với c là một số nguyên.
- ☐ $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{\frac{m}{n}}$, với n là một ước chung nào đó của a, b, m .
- ☐ $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

(c) Một số chính phương bất kì chỉ có thể

- ☐ Đồng dư với 0 hoặc 1 theo modulo 3.
- ☐ Đồng dư với 0 hoặc 1 theo modulo 4.
- ☐ Đồng dư với 0, 1 hoặc 4 theo modulo 8.

(d) **Định lý Fermat nhỏ.** Cho p là số nguyên tố và a là số nguyên dương thỏa mãn a không chia hết cho p , khi đó

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

⑥ **Bổ đề kẹp.**

Giữa hai lũy thừa số mũ n liên tiếp, không tồn tại một lũy thừa cơ số n nào. Hệ quả, với mọi số nguyên a

- ☐ Không có số chính phương nào nằm giữa a^2 và $(a + 1)^2$.
- ☐ Số chính phương duy nhất nằm giữa a^2 và $(a + 2)^2$ là $(a + 1)^2$.
- ☐ Có đúng $k - 1$ số chính phương nằm giữa a^2 và $(a + k)^2$, đó là

$$(a + 1)^2, (a + 2)^2, \dots, (a + k - 1)^2.$$

⑦ **Bổ đề về nghiệm nguyên của phương trình bậc hai.**

Nếu phương trình bậc hai với hệ số nguyên $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm nguyên (không nhất thiết phân biệt) thì $\Delta = b^2 - 4ac$ là số chính phương.

Chương II

Giới thiệu một số bài toán số học trong đề thi vào lớp 10 chuyên Toán

Câu 1.

- ① Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2021} .
- ② Cho số tự nhiên n và số nguyên tố p sao cho $a = \frac{2n+2}{p}$ và $b = \frac{4n^2+2n+1}{p}$ là các số nguyên. Chứng minh rằng a và b không đồng thời là các số chính phương.

Chuyên Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG thành phố Hồ Chí Minh

Câu 2. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n thỏa mãn $m(m+1)(m+2) = n^2$.

Hà Tĩnh

Câu 3.

- ① Tìm tất cả các nghiệm $(x; y)$ của phương trình $x^2 - 2x + 2y = 2(xy + 1)$.
- ② Cho p là số nguyên tố sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - p = 6xy - 8$. Tìm giá trị lớn nhất của p .

Lào Cai

Câu 4. Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố (p, q, r) thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$.

Quảng Nam

Câu 5. Tìm tất cả số tự nhiên a và b với lớn hơn 1 sao cho $(a-1)(b-1) \mid (ab-1)$.

Chuyên Đại học Khoa học Huế

Câu 6. Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1) + 7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3 - 5n - 1$ không là số chính phương.

Thái Bình

Câu 7.

- ① Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y + 6 = 0$.
- ② Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p}{2} - 1$ là lập phương một số tự nhiên.

Thanh Hóa - Chuyên Toán

Câu 8.

- ① Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - \sqrt{yz} = y, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 1.$$

- ② Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho n và $n^3 - 1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng $n + p$ là một số chính phương.

Thanh Hóa - Chuyên Tin

Câu 9.

- ① Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n - 1989$ và $n - 2022$ đều là các số chính phương.
- ② Biết rằng phương trình $x^2 - ax + b + 2 = 0$ (với a, b là các số nguyên) có hai nghiệm nguyên. Chứng minh rằng $2a^2 + b^2$ là hợp số

Quảng Trị

Câu 10. Cho hình lăng trụ đứng, đáy là tam giác vuông, chiều cao bằng 6. Số đo ba cạnh của tam giác đáy là các số nguyên. Số đo diện tích toàn phần của lăng trụ bằng số đo thể tích của lăng trụ. Tính số đo ba cạnh tam giác đáy của lăng trụ.

Quảng Ninh

Câu 11.

- ① Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn bất đẳng thức $5x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x + 8y + 8 \leq 0$.
- ② Trong 2021 số nguyên dương đầu tiên, có bao nhiêu số không chia hết cho 7 và không chia hết cho 11?

Đồng Nai

Câu 12. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(xy - 1)^2 = x^2 + y^2$.

Bà Rịa - Vũng Tàu

Câu 13. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y - xy + 2x - 1 = y^2 - xy^2 - 2y$.

Bến Tre

Câu 14.

- ① Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x^3 = 1993 \cdot 3^y + 2021$.
- ② Tìm số nguyên dương n để $\frac{n-23}{n+89}$ là bình phương một số hữu tỉ dương.

Nghệ An

Câu 15.

- ① Cho a là số nguyên tố lẻ và a không chia hết cho 3.
Chứng minh rằng $a^2 - 2021$ chia hết cho 24
- ② Cho các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p + q^2$ là số chính phương. Chứng minh rằng
a, $p = 2q + 1$.
b, $p^2 + q^{2021}$ không phải là số chính phương.
- ③ Cho tập hợp S gồm n số nguyên dương đôi một khác nhau ($n \geq 3$) thỏa mãn tính chất: tổng của 3 phần tử bất kì trong S đều là số nguyên tố. Tìm giá trị lớn nhất có thể của n .

Quảng Ngãi

Câu 16.

- ① Chứng minh rằng tổng các bình phương của 6 số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.
- ② Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2y + 2xy + y = 32x$.

Vĩnh Long

Câu 17. Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $a = b - c = \frac{b}{c}$. Chứng minh rằng $a + b + c$ là lập phương của một số nguyên.

Bình Dương

Câu 18.

- ① Cho m, p, r là các số nguyên tố thỏa mãn $mp + 1 = r$. Chứng minh rằng $m^2 + r$ hoặc $p^2 + r$ là số chính phương.
- ② Tìm tất cả các số nguyên tố q sao cho tồn tại các số nguyên dương n để $n^2 + 22q$ là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.

Kiên Giang

Câu 19. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2021 mà $n^3 + 2021$ chia hết cho 6.

Hòa Bình

Câu 20. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $y^2 + 3y = x^4 + x^2 + 18$.

Ninh Thuận

Câu 21. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2 - 2^y \cdot x - 4^{21} \cdot 9 = 0$.

Thừa Thiên Huế - Chuyên Toán

Câu 22.

① Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$x^2y - y^2x - 2x^2 - 3y^2 + 10xy - 16x + 21y = 100.$$

② Chứng minh rằng từ 1012 số nguyên bất kì, luôn tồn tại hai số mà hiệu bình phương của chúng là một số nguyên chia hết cho 2021.

Thừa Thiên Huế - Chuyên Tin

Câu 23. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.

Tây Ninh

Câu 24. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $m^2 + n^2 + m$ chia hết cho mn . Chứng minh rằng m là số chính phương.

Tiền Giang

Câu 25. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 4xy + 4y + 2x - 3 = 0$.

Cần Thơ

Câu 26. Hai số tự nhiên khác nhau được gọi là "thân thiết" nếu tổng bình phương của chúng chia hết cho 3. Hỏi tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 2021\}$ có bao nhiêu cặp số "thân thiết" (không phân biệt thứ tự)?

Khánh Hòa

Câu 27.

① Cho phương trình bậc hai với tham số m $x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $P = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$ nhận giá trị nguyên.

② Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình $x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x - 4y - 2 = 0$.

Đắk Nông

Câu 28.

- ① Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x + y)(x - y) + 3(2x + y) - 5(x - y) = 22$.
- ② Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ là số chính phương.

Bình Phước

Câu 29.

- ① Tìm tất cả các số tự nhiên n và k để $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.
- ② Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$x^4 - x^2 + 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 2y - 36 = 0.$$

Đắc Lắc

Câu 30. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho hai số $n^2 - 2n - 7$ và $n^2 - 2n + 12$ đều là lập phương của một số nguyên dương nào đó.

Quảng Bình

Câu 31. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $A = 4n^3 + 2n^2 - 7n - 5$ là một số chính phương.

Thái Nguyên - Chuyên Toán

Câu 32. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho phương trình $x^2 - px + q = 0$ có các nghiệm là số nguyên.

Thái Nguyên - Chuyên Tin

Câu 33. Giải phương trình $x^3 + y^3 - x + 3z = 2021$ với x, y, z là các số nguyên.

Hà Nam

Câu 34. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b + 20c = c^3$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

Lâm Đồng

Câu 35.

- ① Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.
- ② Cho phương trình $x^2 - mx + m + 2 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có các nghiệm nguyên.

Bình Định - Chuyên Toán

Câu 36. Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho $x^2 - x + 13$ là số chính phương.

Bình Định - Chuyên Tin

Câu 37. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $7(x + 2y)^3(y - x) = 8y - 5x + 1$.

Ninh Bình

Câu 38. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y^4 + 2y^3 - 3 = x^2 - 3x$.

Hải Phòng

Câu 39.

① Gọi A là số tạo nên khi viết liên tục các số tự nhiên từ 1 đến 2021, nghĩa là

$$A = 123 \dots 201920202021.$$

a, Số A gồm bao nhiêu chữ số?

b, Chữ số thứ 2021 (theo chiều từ trái qua phải) của A là chữ số nào?

② Cho p, x, y là các số tự nhiên thỏa mãn $px^2 + x = (p + 1)y^2 + y$. Chứng minh rằng $x - y$ là một số chính phương.

Bình Thuận - Chuyên Toán

Câu 40. Cho a và b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + \frac{3}{2}b^2$ chia hết cho 25. Chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 25.

Bình Thuận - Chuyên Tin

Câu 41.

① Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x^2y - xy + y)(x + y) = 3x + 1$.

② Tìm các số nguyên tố p, q đồng thời thỏa mãn hai điều kiện

i, $p^2q + p$ chia hết cho $p^2 + q$.

ii, $pq^2 + q$ chia hết cho $q^2 - p$.

Phú Thọ

Câu 42.

① Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên tố thì $n^2 + 2022$ không là lũy thừa của 3.

② Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 3p + 2021$ cũng là một số nguyên tố.

Yên Bái

Câu 43. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta luôn có

$$2005^n + 60^n - 1897^n - 168^n \text{ chia hết cho } 2004.$$

Lai Châu

Câu 44.

- ① Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0$.
- ② Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta luôn có $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49.
- ③ Cho số thực x khác 0 thỏa mãn cả hai số $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ. Chứng minh rằng x cũng là số hữu tỉ.

Hà Nội - Chuyên Toán

Câu 45.

- ① Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , ta luôn có $n^2 + 3n + 16$ không chia hết cho 25.
- ② Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - xy - 2y^2 + x + y - 5 = 0$.

Hà Nội - Chuyên Tin

Câu 46.

- ① Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng khi chia n cho 7, 9, 11, 13 ta nhận được các số dư tương ứng là 3, 4, 5, 6.
- ② Cho tập $A = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất ($k > 2$) sao cho ta có thể chọn được k số phân biệt từ tập A mà tổng của hai số phân biệt bất kì trong k số được chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

Chuyên Khoa học Tự nhiên - Vòng 1

Câu 47. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $3^x + 29 = 2^y$.

Chuyên Khoa học Tự nhiên - Vòng 2

Câu 48. Tìm tất cả các số nguyên a, b thỏa mãn $a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 18a - 16 = 4b^2 + 20b$.

Cao Bằng

Câu 49.

- ① Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^2y^2(y - x) = 5xy^2 - 27$.
- ② Cho $p_1, p_2, \dots, p_{12}$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Nam Định

Câu 50.

- ① Tìm tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 và $\overline{abc} - \overline{bda} = 650$.
- ② Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2(xz + 2x + 2z) = 396, \quad x^2 + y^2 = 3z.$$

Hải Dương

Câu 51. Cho số nguyên dương $n > 2$. Chứng minh rằng

- ① $A = n^3 - 3n^2 + 2n$ chia hết cho 6.
- ② $B = n^{A+1} - 1$ chia hết cho 7.

Tuyên Quang

Câu 52. Cho a, b là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ là số hữu tỉ thì $a = b = 0$.

Chuyên Sư phạm - Vòng 1

Câu 53.

- ① Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn duy nhất một cách biểu diễn ở dạng $\frac{x^2 + y}{xy + 1}$ với x, y là hai số nguyên dương.
- ② Cho a, b, c là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 - bx + c = 0$ có hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình này bằng nhau.

Chuyên Sư phạm - Vòng 2

Câu 54. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 20y$.

Đà Nẵng

Câu 55. ① Cho các số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
Chứng minh rằng xyz chia hết cho 24.

- ② Tìm các bộ ba số nguyên dương (a, b, c) sao cho $(a + b + c)^2 - 2a + 2b$ là số chính phương.

Vĩnh Phúc

Câu 56. ① Tìm tất cả các số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y$.

② Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số có dạng $\overline{357abc}$ chia hết cho 3, 5 và 7.

Kon Tum

Câu 57. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n^5 + n^4 + 1$ là số nguyên tố.

Sóc Trăng

Câu 58. ① Chứng minh rằng $n^5 - n$ chia hết cho 240 với n là số tự nhiên lẻ bất kì.

② Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - y^2 (x + y^4 + 6y^2) = 0$.

Bắc Giang

Câu 59. ① Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $2x^2 - xy + 9x - 3y + 4 = 0$.

② Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(1) \cdot f(2) = 2021$, chứng minh phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

③ Cho tập hợp $\mathcal{A}$ có các tính chất sau:

i, Tập hợp $\mathcal{A}$ chứa toàn bộ các số nguyên.

ii, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathcal{A}$.

iii, Với mọi $x, y \in \mathcal{A}$ thì $x + y \in \mathcal{A}$ và $xy \in \mathcal{A}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in \mathcal{A}$.

Lạng Sơn

Chương III

Lời giải tham khảo

○ Câu 1

- ① Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2021} .
- ② Cho số tự nhiên n và số nguyên tố p sao cho $a = \frac{2n+2}{p}$ và $b = \frac{4n^2+2n+1}{p}$ là các số nguyên. Chứng minh rằng a và b không đồng thời là các số chính phương.

Chuyên Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG thành phố Hồ Chí Minh

Lời giải.

- ① Từ giả thiết, ta có

$$2^{2021} \mid (2n+2)(4n^2+2n+1) \quad (*)$$

Ta nhận thấy $4n^2+2n+1$ là số lẻ, do đó $(4n^2+2n+1, 2^{2021}) = 1$. Như vậy, $(*)$ tương đương với

$$2^{2021} \mid (2n+2) \Leftrightarrow 2^{2020} \mid (n+1).$$

Kết quả, tất cả các số tự nhiên n cần tìm có dạng $2^{2020}k - 1$, ở đây k nguyên dương.

- ② Ta nhận thấy p là số lẻ, vậy nên

$$\begin{cases} p \mid (2n+2) \\ p \mid (4n^2+2n+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \mid (n+1) \\ p \mid (4n^2+2n+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \mid (n+1) \\ p \mid [(4n-2)(n+1)+3] \end{cases} \Rightarrow p = 3.$$

Ta giả sử a, b là số chính phương, khi đó ab cũng là số chính phương. Đặt $ab = m^2$, ta được

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{2n+2}{3} \cdot \frac{4n^2+2n+1}{3} \Leftrightarrow 9m^2 = (2n+2)(4n^2+2n+1) \\ &\Leftrightarrow 9m^2 = (2n+1)^3 + 1 \\ &\Leftrightarrow (3m-1)(3m+1) = (2n+1)^3. \end{aligned}$$

Nhận xét được m chẵn chỉ ra cho ta $(3m+1, 3m-1) = 1$. Theo đó, tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho

$$3m+1 = x^3 \quad (1)$$

$$3m - 1 = y^3 \quad (2)$$

Trừ theo vế (1) cho (2), ta được

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 2 \\ x - y = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Các số x, y không thể âm, thế nên suy luận trên là vô lí. Giả sử phản chứng là sai, và bài toán được chứng minh.

▽

○ Câu 2 Tìm tất cả các số nguyên dương m, n thỏa mãn $m(m+1)(m+2) = n^2$.

Hà Tĩnh

Lời giải.

Giả sử tồn tại các số nguyên m, n thỏa đề.

Hai số $m+1$ và $m(m+2)$ không thể đồng thời bằng 0, chứng tỏ chúng tồn tại ước chung lớn nhất, gọi là d . Ta có

$$\begin{cases} d \mid (m+1) \\ d \mid m(m+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid (m+1) \\ d \mid [(m+1)^2 - 1] \end{cases} \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1.$$

Như vậy, $(m+1, m(m+2)) = 1$. Lại do $|m+1||m(m+2)| = n^2$ nên cả $|m+1|$ và $|m(m+2)|$ đều là số chính phương.

① Với $m = -1$, ta tìm được $n = 0$.

② Với $m \neq -1$, do m là số nguyên nên $m(m+2) \geq 0$. Lúc này, $|m(m+2)| = m(m+2)$ là số chính phương. Tiếp tục đặt $m(m+2) = x^2$, với x là số nguyên dương, ta được

$$\begin{aligned} m(m+2) = x^2 &\Rightarrow m^2 + 2m + 1 = x^2 + 1 \\ &\Rightarrow (m+1)^2 - x^2 = 1 \\ &\Rightarrow (m+1-x)(m+1+x) = 1. \end{aligned}$$

Đến đây, ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Với $m+1-x = m+1+x = 1$, ta có $m = 0$ và $x = 0$. Thử trực tiếp, ta tìm ra $n = 0$.
- **Trường hợp 2.** Với $m+1-x = m+1+x = -1$, ta có $m = -1$ và $x = 0$. Thử trực tiếp, ta tìm ra $n = 0$.

Kết quả, có ba cặp số nguyên (m, n) thỏa đề là $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ và $(0, 0)$.

▽

○ Câu 3

- ① Tìm tất cả các nghiệm (x, y) của phương trình $x^2 - 2x + 2y = 2(xy + 1)$.
- ② Cho p là số nguyên tố sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - p = 6xy - 8$. Tìm giá trị lớn nhất của p .

Lào Cai

Lời giải.

- ① Phương trình đã cho tương đương

$$x^2 - 2x - 2 = 2y(x - 1).$$

Dựa vào điều hiển nhiên là $x \neq 1$, ta suy ra $x^2 - 2x - 2$ chia hết cho $x - 1$. Ta nhận thấy

$$x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3,$$

thế nên $x - 1$ là ước của 3. Ta lập bảng

$x - 1$	-3	-1	1	3
x	-2	0	2	4
y	-1	1	-1	1

Kết quả, phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên là $(-2, -1), (0, 1), (2, -1), (4, -1)$.

- ② Với các số x, y, p thỏa mãn giả thiết, ta có

$$x^3 + y^3 + 2^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot 2 = p \Leftrightarrow (x + y + 2)(x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y) = p.$$

Do x, y nguyên dương nên ta được $x + y + 2 \geq 1$ từ lập luận trên, và như vậy

$$x + y + 2 = p,$$

$$x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y = 1.$$

Ta nhận thấy

$$x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y = 1 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

Tổng ba bình phương trên bằng 2, chứng tỏ một bình phương phải bằng 0. Tới đây, ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Với $x = y$, ta có $p = x + y + 2 = 2x + 2$. Ta được p chẵn và $p = 2$.
- **Trường hợp 2.** Với $x = 2$, ta có

$$(2 - y)^2 + (2 - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Thử với từng trường hợp, ta được $p = 5$ và $p = 7$.

Tổng kết lại, $p = 7$ là số nguyên tố lớn nhất thỏa đề.

▽

Câu 4 Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố (p, q, r) thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$.

Quảng Nam

Lời giải.

Ta chia bài toán thành các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Với p, q, r là ba số nguyên tố lẻ, ta có pq lẻ, còn $r + 1$ chẵn. Điều này vô lí.
- **Trường hợp 2.** Với $r = 2$, ta có $pq = 3$. Điều này vô lí.
- **Trường hợp 3.** Với $q = 2$, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2p = r + 1 \\ 2(p^2 + 4) = r^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2p - 1 \\ 2(p^2 + 4) = (2p - 1)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2p - 1 \\ (p - 3)(p + 2) = 0 \end{cases}.$$

Do p nguyên tố, ta được $p = 3$ và $r = 2$.

- **Trường hợp 4.** Với $p = 2$, làm tương tự trường hợp trên, ta được $q = 3$ và $r = 2$.

Kết quả, có 2 bộ (p, q, r) thỏa đề là $(2, 3, 2)$ và $(3, 2, 2)$. ▽

Câu 5 Tìm tất cả số tự nhiên a và b với lớn hơn 1 cho $(a - 1)(b - 1) \mid (ab - 1)$.

Chuyên Đại học Khoa học Huế

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} (a - 1)(b - 1) \mid (ab - 1) &\Rightarrow (a - 1)(b - 1) \mid [(a - 1)(b - 1) + a + b - 2] \\ &\Rightarrow (a - 1)(b - 1) \mid [(a - 1) + (b - 1)] \end{aligned}$$

Ta được $a - 1$ và $b - 1$ chia hết cho nhau từ đây, tức là $a = b$. Sử dụng kết quả này cho $(a - 1)(b - 1) \mid (ab - 1)$, ta có

$$(a - 1)^2 \mid (a^2 - 1) \Rightarrow (a - 1) \mid (a + 1) \Rightarrow (a - 1) \mid 2.$$

Lập luận trên chứng tỏ $a = 2$ hoặc $a = 3$.

Thử trực tiếp, ta kiểm tra được có 2 cặp (a, b) thỏa mãn là $(2, 2)$ và $(3, 3)$. ▽

Câu 6 Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n + 1) + 7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3 - 5n - 1$ không là số chính phương.

Thái Bình

Lời giải.

Từ giả thiết $n(n+1) + 7$ không chia hết cho 7, ta suy ra $n+1$ không chia hết cho 7. Mặt khác, ta xét phân tích

$$4n^3 - 5n - 1 = (n+1)(4n^2 - 4n - 1).$$

Giả sử $4n^3 - 5n - 1$ là số chính phương. Đặt $d = (n+1, 4n^2 - 4n - 1)$, ta có

$$\begin{cases} d \mid (n+1) \\ d \mid (4n^2 - 4n - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid (n+1) \\ d \mid [4n(n+1) - 8(n+1) + 7] \end{cases} \Rightarrow d \mid 7.$$

Tuy nhiên, do $n+1$ không là bội của 7 nên $d = 1$, dẫn đến việc $4n^2 - 4n - 1$ là số chính phương. Đây là điều không thể xảy ra, do

$$4n^2 - 4n - 1 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Giả sử phản chứng là sai, và ta có điều phải chứng minh. ▽

🔴 Câu 7

- ① Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y + 6 = 0$.
- ② Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p}{2} - 1$ là lập phương một số tự nhiên.

Thanh Hóa – Chuyên Toán

Lời giải.

- ① Phương trình đã cho tương đương

$$2y^2 - (2x+4)y + (x^2 - 2x + 6) = 0.$$

Coi đây là một phương trình bậc hai theo ẩn y , thế thì Δ' phải là số chính phương. Ta tính được

$$\Delta' = (x+2)^2 - 2(x^2 - 2x + 6) = -x^2 + 8x - 8.$$

Ta suy ra $x^2 - 8x + 8 \leq 0$. Giải bất phương trình nghiệm nguyên này, ta được $2 \leq x \leq 6$. Thử với từng trường hợp, ta kết luận phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên phân biệt là

$$(2, 1), (2, 3), (6, 3), (6, 5).$$

- ② Ta đặt $\frac{p^2 - p}{2} - 1 = n^3$, với n là một số tự nhiên. Phép đặt này cho ta

$$p^2 - p - 2 = 2n^3 \Leftrightarrow p^2 - p = 2n^3 + 2 \Leftrightarrow p(p-1) = 2(n+1)(n^2 - n + 1).$$

Ta được $p \mid 2(n+1)(n^2 - n + 1)$. Ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Với $p = 2$, bằng kiểm tra trực tiếp, ta thấy thỏa mãn đề bài.

- **Trường hợp 2.** Với $p \mid (n+1)$, ta có $p \leq n+1$. Đánh giá này cho ta

$$2(n+1)(n^2-n+1) = p(p-1) \leq (n+1)n.$$

Ta được $2n^2 - 2n + 1 \leq n$. Không tồn tại số thực n nào như vậy.

- **Trường hợp 3.** Với $p \mid (n^2 - n + 1)$, ta đặt $n^2 - n + 1 = kp$, ở đây k là số nguyên dương.

Phép đặt này cho ta

$$p(p-1) = 2(n+1)(n^2-n+1) = 2(n+1)kp.$$

Từ đây, ta có $p = 2kn + 2k + 1$. Thế ngược lại phép đặt, ta chỉ ra

$$n^2 - n + 1 = k(2kn + 2k + 1) \Leftrightarrow n^2 - (2k^2 + 1)n - (2k^2 + k - 1) = 0.$$

Coi phương trình trên là một phương trình bậc hai ẩn n , lúc này

$$\Delta = (2k^2 + 1)^2 + 4(2k^2 + k - 1)$$

phải là số chính phương.

Đánh giá được $(2k^2 + 1)^2 < \Delta < (2k^2 + 4)^2$ và Δ lẻ, ta áp dụng bổ đề kẹp để suy ra $\Delta = (2k^2 + 3)^2$. Ta lần lượt tìm được $k = 3, n = 20, p = 127$.

Như vậy, có 2 giá trị của p thỏa đề là $p = 2$ và $p = 127$.

▽

○ Câu 8

- ① Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - \sqrt{yz} = y, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 1.$$

- ② Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n và $n^3 - 1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương.

Thanh Hóa – Chuyên Tin

Lời giải.

- ① Điều kiện thứ nhất tương đương với

$$(\sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Thay vào điều kiện còn lại, ta được

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{1}{z} = 1 &\Leftrightarrow 2z - x = xz \Leftrightarrow xz + x - 2z - 2 = -2 \\ &\Leftrightarrow x(z+1) - 2(z+1) = -2 \Leftrightarrow (2-x)(z+1) = 2. \end{aligned}$$

Từ đây, ta thu được $x = 1, z = 1$, và đương nhiên $y = 1$. Kết luận $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ là bộ số duy nhất thỏa đề.

② Để giải bài toán này, ta xét các trường hợp sau.

○ **Trường hợp 1.** $p \mid (n-1)$.

Ta đặt $n = lp + 1$, với l là số tự nhiên. Kết hợp với giả thiết $n \mid (p-1)$, phép đặt này cho ta

$$(lp + 1) \mid (p - 1) \Rightarrow p - 1 \geq lp + 1 \Rightarrow (l - 1)p \leq -2 \Rightarrow l = 0, p = 2.$$

Với $l = 0, p = 2$, ta tìm ra $n = 1$, trái giả thiết $n \geq 2$.

○ **Trường hợp 2.** $p \mid (n^2 + n + 1)$.

Do giả thiết $n \mid (p-1)$, ta có thể đặt $p = kn + 1$, thế thì

$$n^2 + n + 1 = n^2 + n - kn + kn + 1 = n(n - k + 1) + kn + 1$$

là bội của $kn + 1$, thế nhưng do $(n, kn + 1) = 1$ nên $(kn + 1) \mid (n - k + 1)$.

Bằng dãy đánh giá

$$-kn - 1 \leq -k - 1 < n - k + 1 \leq n \leq kn < kn + 1,$$

ta chỉ ra $k = n + 1$, tức là $p = n^2 + n + 1$.

Như vậy, $n + p = n + n^2 + n + 1 = (n + 1)^2$ là số chính phương. Chứng minh hoàn tất.

▽

🔴 Câu 9

- ① Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n - 1989$ và $n - 2022$ đều là các số chính phương.
- ② Biết rằng phương trình $x^2 - ax + b + 2 = 0$ (với a, b là các số nguyên) có hai nghiệm nguyên. Chứng minh rằng $2a^2 + b^2$ là hợp số

Quảng Trị

Lời giải.

- ① Từ giả thiết, ta có thể đặt $n - 1989 = x^2, n - 2022 = y^2$, ở đây x, y là các số nguyên dương. Lấy hiệu theo vế, ta được

$$(n - 1989) - (n - 2022) = x^2 - y^2 \Rightarrow 33 = (x - y)(x + y)$$

Vì $0 < x - y < x + y$ nên đến đây, ta xét các trường hợp.

- **Trường hợp 1.** Với $x - y = 1$ và $x + y = 33$, ta có $x = 17$, và vì thế $n = 1989 + 17^2 = 2278$.
- **Trường hợp 2.** Với $x - y = 3$ và $x + y = 11$, ta có $x = 7$, và vì thế $n = 1989 + 7^2 = 2038$.

Như vậy, $n = 2038$ và $n = 2278$ là tất cả các giá trị thỏa đề.

② Gọi 2 nghiệm nguyên của phương trình đã cho là x_1 và x_2 . Theo định lí Viète, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = b + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x_1 + x_2 \\ b = x_1 x_2 - 2 \end{cases}.$$

Các hệ thức trên cho ta

$$2a^2 + b^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 2)^2 = x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4 = (x_1^2 + 2)(x_2^2 + 2).$$

Do $x_1^2 + 2 \geq 2$ và $x_2^2 + 2 \geq 2$, ta được $2a^2 + b^2$ là hợp số. Bài toán được chứng minh. ▼

🔍 Câu 10 Cho hình lăng trụ đứng, đáy là tam giác vuông, chiều cao bằng 6. Số đo ba cạnh của tam giác đáy là các số nguyên. Số đo diện tích toàn phần của lăng trụ bằng số đo thể tích của lăng trụ. Tính số đo ba cạnh tam giác đáy của lăng trụ.

Quảng Ninh

Lời giải.

Gọi số đo ba cạnh của tam giác đáy là a, b, c với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+, c > b \geq a$.

Tam giác đáy là tam giác vuông, nên theo định lý Pythagoras, ta có

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Số đo thể tích của lăng trụ bằng $3ab$, trong khi số đo diện tích của nó bằng $6(a + b + c) + ab$. Vậy nên

$$6(a + b + c) + ab = 3ab \Leftrightarrow 3(a + b + c) = ab \Leftrightarrow ab - 3a - 3b = 3c. \quad (2)$$

Nhân đôi hai vế của (2) rồi cộng tương ứng vế với (1), ta được

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab - 6a - 6b &= c^2 + 6c \Leftrightarrow (a + b)^2 - 6(a + b) = c^2 + 6c \\ &\Leftrightarrow (a + b)^2 - 6(a + b) + 9 = c^2 + 6c + 9 \\ &\Leftrightarrow (a + b - 3)^2 = (c + 3)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 3 = c + 3 \\ a + b - 3 = -c - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = a + b - 6 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Do a, b, c nguyên dương nên ta loại trường hợp $a + b + c = 0$, tức là $c = a + b - 6$. Thế vào (2), ta được

$$ab - 3a - 3b = 3a + 3b - 12 \Leftrightarrow (a - 6)(b - 6) = 6.$$

Giải phương trình ước số trên rồi thử lại, ta tìm ra có tổng cộng 18 bộ số đo 3 cạnh tam giác đáy, bao gồm $(7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 12, 15)$ và các hoán vị của chúng. ▼

○ Câu 11

- ① Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn bất đẳng thức $5x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x + 8y + 8 \leq 0$.
- ② Trong 2021 số nguyên dương đầu tiên, có bao nhiêu số không chia hết cho 7 và không chia hết cho 11?

Đồng Nai**Lời giải.**

- ① Bất phương trình đã cho tương đương

$$(2x + y)^2 + (x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 \leq 1. \quad (*)$$

Tổng ba bình phương trong vế trái của (*) không vượt quá 1, chứng tỏ có ít nhất hai bình phương bằng 0. Mặt khác, do

$$2x + y = 2(x - 1) + (y + 2)$$

nên nếu 2 trong 3 số kia bằng 0, số còn lại chắc chắn cũng bằng 0. Ta suy ra

$$2x + y = x - 1 = y + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = -2.$$

Như vậy $(x, y) = (1, -2)$ là nghiệm nguyên duy nhất của bất phương trình.

- ② Ta kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá với x . Trong 2021 số nguyên dương đầu tiên, ta gọi
- A là tập các số chia hết cho 7.
 - B là tập các số chia hết cho 77.
 - C là tập các số chia hết cho 7 và không chia hết cho 11.

Dựa vào nhận xét $B \cup C = A$ và $B \cap C = \emptyset$, ta suy ra

$$|C| = |A| - |B| = \left[\frac{2021}{7} \right] - \left[\frac{2021}{77} \right] = 288 - 26 = 262.$$

Như vậy, trong 2021 số nguyên dương đầu tiên có tất cả 262 số chia hết cho 7 và không chia hết cho 11.

▽

○ Câu 12

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(xy - 1)^2 = x^2 + y^2$.

Bà Rịa - Vũng Tàu

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$(xy)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow (xy)^2 + 1 = (x+y)^2 \Leftrightarrow 1 = (x+y-xy)(x+y+xy)$$

Tới đây, ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Với $x+y-xy = x+y+xy = 1$, ta có $xy = 0$ và $x+y = 1$.
Giải ra, ta được $(x, y) = (0, 1)$ hoặc $(x, y) = (1, 0)$.
- **Trường hợp 2.** Với $x+y-xy = x+y+xy = -1$, ta có $xy = 0$ và $x+y = -1$.
Giải ra, ta được $(x, y) = (0, -1)$ hoặc $(x, y) = (-1, 0)$.

Như vậy, phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên phân biệt, bao gồm

$$(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0).$$

▽

○ Câu 13 Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y - xy + 2x - 1 = y^2 - xy^2 - 2y$.

Bên Tre

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 - xy - y^2 + 2x + 2y = 1 &\Leftrightarrow xy(x+y) - y(x+y) + 2(x+y) = 1 \\ &\Leftrightarrow (xy - y + 2)(x+y) = 1. \end{aligned}$$

Tới đây, ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Với $x+y = xy - y + 2 = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y = 1 \\ xy - y + 2 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ x(-1 - x) - (-1 - x) + 2 = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ (x+2)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, y = 3 \\ x = 2, y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

- **Trường hợp 2.** Với $x+y = xy - y + 2 = -1$, ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y = -1 \\ xy - y + 2 = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x(1 - x) - (1 - x) + 2 = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = 2, y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy, phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên phân biệt, bao gồm

$$(-2, 3), (0, 1), (2, 1), (2, 3).$$

▽

○ Câu 14

- ① Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x^3 = 1993 \cdot 3^y + 2021$.
- ② Tìm số nguyên dương n để $\frac{n-23}{n+89}$ là bình phương một số hữu tỉ dương.

Nghệ An

Lời giải.

- ① Dựa vào tính chất đã biết $x^3 \equiv 0, 1, 8 \pmod{9}$, ta có các đánh giá

$$1993 \cdot 3^y + 2021 \equiv 0, 1, 8 \pmod{9} \Rightarrow 4 \cdot 3^y \equiv 3, 4, 5 \pmod{9}.$$

Ta xét các trường hợp kể trên.

- **Trường hợp 1.** Với $4 \cdot 3^y \equiv 3 \pmod{9}$, ta được $y = 1$. Thay ngược lại, ta tìm ra $x = 20$.
- **Trường hợp 2.** Với $4 \cdot 3^y \equiv 4 \pmod{9}$, ta được $y = 0$. Thay ngược lại, ta tìm ra $x = \sqrt[3]{4041}$, không là số nguyên.
- **Trường hợp 3.** Với $4 \cdot 3^y \equiv 5 \pmod{9}$, ta không tìm được y nguyên dương thỏa mãn.

Như vậy, cặp số (x, y) duy nhất thỏa mãn là $(x, y) = (20, 1)$.

- ② Vì $\frac{n-23}{n+89}$ là bình phương một số hữu tỉ dương nên $n > 23$.

Lúc này, ta có thể đặt $\frac{n-23}{n+89} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1, a < b$.

Vì $(a, b) = 1$ nên $(a^2, b^2) = 1$. Do đó, tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$\begin{cases} n-23 = a^2k, & (1) \\ n+89 = b^2k, & (2) \end{cases}$$

Trừ tương ứng vế của (1) cho (2), ta suy ra

$$(n+89) - (n-23) = (b^2 - a^2)k \Leftrightarrow 112 = (b+a)(b-a)k.$$

Ta có các đánh giá:

- i, $b+a$ và $b-a$ đều là ước dương của 112.
- ii, $b+a$ và $b-a$ cùng tính chẵn lẻ.
- iii, $b+a > b-a > 0$.

Dựa vào đây, ta lập được bảng giá trị sau

$b+a$	$b-a$	k	b	a	$n = a^2k + 23$
28	4	1	16	12	loại vì $(a, b) > 1$
56	2	1	29	27	752
14	8	1	11	3	32
14	4	2	9	5	73
28	2	2	15	13	361
8	2	7	5	3	86
14	2	4	8	6	loại vì $(a, b) > 1$
4	2	14	3	1	37
7	1	16	4	3	167

Kết quả, có 7 giá trị của n thỏa mãn đề bài, gồm

$$n = 32, n = 37, n = 73, n = 86, n = 167, n = 361, n = 752.$$

▽

○ Câu 15

- ① Cho a là số nguyên tố lẻ và a không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a^2 - 2021$ chia hết cho 24
- ② Cho các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p + q^2$ là số chính phương. Chứng minh rằng
 - a, $p = 2q + 1$.
 - b, $p^2 + q^{2021}$ không phải là số chính phương.
- ③ Cho tập hợp S gồm n số nguyên dương đôi một khác nhau ($n \geq 3$) thỏa mãn tính chất: tổng của 3 phần tử bất kì trong S đều là số nguyên tố. Tìm giá trị lớn nhất có thể của n .

Quảng Ngãi

Lời giải.

- ① Do $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ và a lẻ, ta suy ra $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$.
Mặt khác, do $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ và a không chia hết cho 3, ta suy ra $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$.
Hai lập luận trên kết hợp với việc $(3, 8) = 1$ chỉ ra cho ta

$$a^2 \equiv 1 \pmod{24} \Rightarrow 24 \mid (a^2 - 1).$$

Tuy nhiên, do $2021 - 1 = 2020$ không chia hết cho 11 nên 24 không là ước của $a^2 - 2021$. Bài toán được chứng minh.

- ② a, Từ giả thiết, ta có thể đặt $p + q^2 = a^2$, với a nguyên dương. Phép đặt trên cho ta

$$p = a^2 - q^2 \Rightarrow p = (a - q)(a + q).$$

Do p nguyên tố và $0 < a - q < a + q$, ta suy ra $a - q = 1$, còn $a + q = p$. Lấy hiệu theo vế, ta được $p = 2q + 1$.

- b, Giả sử $(2q + 1)^2 + q^{2021}$ là số chính phương. Theo đó, ta có thể đặt $(2q + 1)^2 + q^{2021} = b^2$, với b là số nguyên dương.

Phép đặt này cho ta

$$q^{2021} = b^2 - (2q + 1)^2 \Rightarrow q^{2021} = (b - 2q - 1)(b + 2q + 1).$$

Ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Nếu $b - 2q - 1$ và $b + 2q + 1$ có ước nguyên tố chung là r , ta suy ra

$$\begin{cases} r \mid (b - 2q - 1) \\ r \mid (b + 2q + 1) \\ r \mid q^{2021} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \mid (4q + 2) \\ r \mid q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \mid 2 \\ r \mid q \end{cases} \Rightarrow q = r = 2.$$

Lúc này, $(2q + 1)^2 + q^{2021} = 5^2 + 2^{2021}$. Số này chia cho 5 dư 2, do vậy nó không là số chính phương.

- **Trường hợp 2.** Nếu $b - 2q - 1$ và $b + 2q + 1$ nguyên tố cùng nhau, ta suy ra

$$\begin{cases} b - 2q - 1 = 1 \\ b + 2q + 1 = q^{2021} \end{cases} \Rightarrow 4q + 2 = q^{2021} - 1 \Rightarrow 4q + 3 = q^{2021}.$$

Xét tính chia hết cho q ở cả hai vế, ta được $q = 3$. Thay trở lại $q = 3$, ta có $15 = 3^{2021}$, một điều vô lí.

Mâu thuẫn chỉ ra ở tất cả các trường hợp chứng tỏ giả sử phản chứng là sai. Bài toán được chứng minh.

- ③ Ta sẽ đi chứng minh $\max n = 4$. Thật vậy, ta giả sử trong S tồn tại 5 số nguyên dương a, b, c, d, e thỏa mãn tổng của 3 số bất kì trong 5 số này là số nguyên tố. Gọi số dư của chúng khi chia cho 3 lần lượt là m, n, p, q, r . Xét xâu

$$T = (m, n, p, q, r).$$

Theo đó, tổng 3 phần tử bất kì trong xâu không chia hết cho 3. Ta sẽ tìm cách phản chứng khẳng định này.

- Nếu xâu T chứa đầy đủ các số 0, 1, 2 thì tổng của 3 phần tử đó chia hết cho 3, mâu thuẫn.
- Nếu xâu T không chứa một số nào đó trong 0, 1, 2 (giả sử là 2) thì T chỉ có thể chứa 0 hoặc 1. Do độ dài của T bằng 5 nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại 3 số giống nhau trong T . Tuy nhiên, tổng của 3 số này chia hết cho 3, một điều mâu thuẫn.

Phản chứng ở trên cho ta $n \leq 4$. Ta sẽ xây dựng một tập S thỏa đề. Thật vậy, tập $S = \{1; 3; 7; 9\}$ là tập thỏa đề do

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 7 &= 11, & 1 + 3 + 9 &= 13, \\ 1 + 7 + 9 &= 17, & 3 + 7 + 9 &= 19 \end{aligned}$$

đều là các số nguyên tố. Kết quả, $\max n = 4$.

▽

○ Câu 16

- ① Chứng minh rằng tổng các bình phương của 6 số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.
- ② Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2y + 2xy + y = 32x$.

Vĩnh Long

Lời giải.

- ① Xét 6 số nguyên liên tiếp $n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$. Tổng bình phương của chúng là

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 6n(n+1) + 19.$$

Do $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên dương liên tiếp nên n chẵn. Từ đây ta có

$$6n(n+1) + 19 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Không có số chính phương nào đồng dư 3 theo modulo 4, chứng tỏ tổng đã cho không là số chính phương.

- ② Phương trình đã cho tương đương với

$$y(x+1)^2 = 32x. \quad (*)$$

Xét tính chia hết của (*), ta có

$$(x+1) \mid 32x \Rightarrow (x+1) \mid [32(x+1) - 32] \Rightarrow (x+1) \mid 32.$$

Ta được $x+1$ là ước nguyên dương lớn hơn 1 của 32. Ta lập bảng giá trị sau

$x+1$	2	4	8	16	32
x	1	3	7	15	31
y	8	6	3,5	1,875	0,96875

Căn cứ vào bảng giá trị được lập, ta kết luận phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên phân biệt là (1, 8) và (3, 6).

▽

🔍 Câu 17 Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $a = b - c = \frac{b}{c}$. Chứng minh rằng $a + b + c$ là lập phương của một số nguyên.

Bình Dương

Lời giải.

Xuất phát từ $b - c = \frac{b}{c}$, ta có

$$c(b - c) = b \Rightarrow bc - c^2 = b \Rightarrow b(c - 1) = c^2. \quad (*)$$

Ta được c^2 chia hết cho $c - 1$, chứng tỏ

$$c - 1 \mid c^2 - 1 + 1 = (c - 1)(c + 1) + 1.$$

Do $c - 1$ là ước của 1 và $c \neq 0$, ta có $c = 2$ hoặc $c = -2$. Thế vào (*), ta suy ra $b = 4$. Các kết quả này cho ta

$$a + b + c = b - c + b + c = 2b = 8.$$

Ta nhận ra $a + b + c$ là số lập phương. Bài toán được chứng minh. ▽

🔍 Câu 18

- ① Cho m, p, r là các số nguyên tố thỏa mãn $mp + 1 = r$. Chứng minh rằng $m^2 + r$ hoặc $p^2 + r$ là số chính phương.
- ② Tìm tất cả các số nguyên tố q sao cho tồn tại các số nguyên dương n để $n^2 + 22q$ là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.

Kiên Giang

Lời giải.

- ① Không mất tính tổng quát, ta giả sử $m \geq p$. Ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Nếu m, p, r cùng lẻ, ta có $mp + 1$ chẵn, nhưng r lẻ, vô lí.
- **Trường hợp 2.** Nếu $r = 2$, ta có $mp + 1 = 2$, hay là $mp = 1$, vô lí.
- **Trường hợp 3.** Nếu $p = 2$, ta có $r = 2m + 1$. Ta nhận thấy rằng

$$m^2 + r = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$$

là một số chính phương. Bài toán được chứng minh.

- ② Từ giả thiết, ta có thể đặt $n^2 + 22q = 11^m$, với m là số nguyên dương. Ta lần lượt suy ra được

$$11 \mid 11^m \Rightarrow 11 \mid n^2 + 22q \Rightarrow 11 \mid n^2 \Rightarrow 11 \mid n \Rightarrow 121 \mid n^2.$$

Rõ ràng $m \geq 2$, thế nên $121 \mid 11^m$. Kết hợp với $121 \mid n^2$, ta suy ra $121 \mid 22q$, tức $q = 11$. Cuối cùng, ta sẽ chỉ ra một số nguyên dương n thỏa mãn. Với $n = 33$ và $q = 11$, ta có

$$n^2 + 22q = 33^2 + 22 \cdot 11 = 11^3.$$

Kết luận, $q = 11$ là số nguyên tố cần tìm

▽

○ Câu 19 Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2021 mà $n^3 + 2021$ chia hết cho 6.

Hòa Bình

Lời giải.

Với số tự nhiên n thỏa mãn $n^3 + 2021$ chia hết cho 6, ta chứng minh được

- n lẻ (thông qua việc xét tính chẵn, lẻ của n).
- $n \equiv 1 \pmod{3}$ (thông qua việc xét số dư của n khi chia cho 3).

Các khẳng định trên cho ta $n \equiv 1 \pmod{6}$. Như vậy, số các số tự nhiên n thỏa đề chính là số các số tự nhiên chia 6 dư 1 không vượt quá 2021, và bằng

$$\frac{2017-1}{6} + 1 = 337.$$

▽

○ Câu 20 Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $y^2 + 3y = x^4 + x^2 + 18$.

Ninh Thuận

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4y^2 + 12y &= 4x^4 + 4x^2 + 72 \Leftrightarrow 4y^2 + 12y + 9 = 4x^4 + 4x^2 + 1 + 80 \\ &\Leftrightarrow (2y+3)^2 = (2x^2+1)^2 + 80 \\ &\Leftrightarrow (2y-2x^2+2)(2y+2x^2+4) = 80 \\ &\Leftrightarrow (y-x^2+1)(y+x^2+2) = 20 \end{aligned}$$

Ta có các đánh giá.

- $y - x^2 + 1 < y + x^2 + 2$.
- $y - x^2 + 1$ và $y + x^2 + 2$ khác tính chẵn lẻ.

Dựa vào đây, ta lập được bảng giá trị sau

$y - x^2 + 1$	$y + x^2 + 2$	y	x
-20	-1	-12	± 3
-5	-4	-6	0
1	20	9	± 3
4	5	3	0

Kết quả, phương trình đã cho có 6 nghiệm (x, y) phân biệt, bao gồm

$$(-3, -12), (-3, -9), (0, -6), (0, 3), (3, 9), (3, 12).$$

▽

○ Câu 21 Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2 - 2^y \cdot x - 4^{21} \cdot 9 = 0$.

Thừa Thiên Huế – Chuyên Toán

Lời giải.

Với mỗi số nguyên dương x , luôn tồn tại các số nguyên dương z và số nguyên dương lẻ t sao cho $x = 2^z t$. Bằng cách đặt như vậy, phương trình đã cho trở thành

$$2^{2z} t^2 - 2^{y+z} t - 9 \cdot 4^{21} = 0.$$

Phương trình kể trên tương đương với

$$2^{2z} t (t - 2^{y-z}) = 9 \cdot 4^{21} \quad (*)$$

Trong hai vế của (*), ta sẽ xét số mũ của lũy thừa cơ số 2. Thật vậy

○ Cả t và $t - 2^{y-21}$ đều lẻ, thế nên số mũ của 2 ở vế trái là $2z$.

○ Số mũ của 2 ở vế phải là $2 \cdot 21 = 42$.

Do vậy, $z = 21$. Thay $z = 21$ vào (*), ta được $t(t - 2^{y-21}) = 9$. Ta có đánh giá

$$0 < t - 2^{y-21} < t.$$

Đánh giá trên cho ta $t = 8$ và $2^{y-21} = 8$, tức $y = 24$. Kết luận, $(x, y) = (9 \cdot 2^{21}, 24)$ là cặp số duy nhất thỏa đề. ▽

○ Câu 22

① Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$x^2 y - y^2 x - 2x^2 - 3y^2 + 10xy - 16x + 21y = 100.$$

② Chứng minh rằng từ 1012 số nguyên bất kì, luôn tồn tại hai số mà hiệu bình phương của chúng là một số nguyên chia hết cho 2021.

Thừa Thiên Huế – Chuyên Tin

Lời giải.

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& (x+3)y^2 - (x^2 + 10x + 21)y + 2x^2 + 16x + 100 = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+3)y^2 - (x+3)(x+7)y + 2(x+3)(x+5) + 40 = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+3)[y^2 - (x+7)y + 2(x+5)] = -40
\end{aligned}$$

Ta được $x+3$ là ước của 40. Bằng cách xét (khá nhiều) các trường hợp, ta tìm ra được phương trình đã cho có tất cả 6 nghiệm (x, y) nguyên phân biệt, bao gồm

$$(-8, -5), (-8, 4), (-5, -5), (-5, 7), (4, 4), (4, 7).$$

② **Bổ đề.** Với số nguyên tố lẻ p , các số chính phương khi chia cho p nhận tối đa $\frac{p+1}{2}$ số dư.

Thật vậy, xét hai số chính phương a^2, b^2 bất kì không cùng chia hết cho p . Ta đặt

$$a = pm \pm i, \quad b = pn \pm j,$$

trong đó i, j thuộc tập $\left\{0; 1; \dots; \frac{p-1}{2}\right\}$ và không mất tổng quát, ta giả sử $i > j$.

Ta sẽ chứng minh $a^2 \not\equiv b^2 \pmod{p}$. Ta có

$$a^2 - b^2 \equiv i^2 - j^2 = (i-j)(i+j) \pmod{p}.$$

Với việc $0 \leq j < i \leq \frac{p-1}{2}$, ta suy ra

$$0 < i-j < i+j < p-1.$$

Lập luận trên chứng tỏ $(i-j)(i+j)$ không chia hết cho p . Nói cách khác, $a^2 - b^2$ không chia hết cho p . Bổ đề được chứng minh.

Quay trở lại với bài toán. Ta có $2021 = 43 \cdot 47$. Số chính phương khi chia cho 43 chỉ nhận tối đa 22 số dư, do vậy trong 1012 bình phương của 1012 số đã cho, tồn tại ít nhất $\left\lceil \frac{1012}{22} \right\rceil = 46$ số chính phương có cùng số dư khi chia cho 43.

Xét 46 số trên, khi chia cho 47 chỉ có nhiều nhất 24 số dư, do vậy tồn tại 2 số trong 46 số này có cùng số dư khi chia cho 47, giả sử là a^2 và b^2 . Khi đó,

$$43 \mid (a^2 - b^2), \quad 47 \mid (a^2 - b^2).$$

Lại do $(43, 47) = 1$ nên $2021 \mid (a^2 - b^2)$. Bài toán được chứng minh. ▽

🔍 Câu 23 Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x-y) = 2(x+1)$.

Tây Ninh

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x = 4 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2)^2 = 8$$

Từ đây suy ra $(x - 2)^2 \leq 8 \Rightarrow (x - 2)^2 \in \{0, 1, 4\}$.

- Với $(x - 2)^2 = 0$, thì $(x - 2y)^2 = 8$, vô nghiệm.
- Với $(x - 2)^2 = 1$, thì $(x - 2y)^2 = 7$, vô nghiệm.
- Với $(x - 2)^2 = 4$, thì $(x - 2y)^2 = 4$, ta được các nghiệm (x, y) là $(0, 1), (0, -1), (4, 1), (4, 3)$.

Vậy phương trình có các nghiệm (x, y) là $(0, 1), (0, -1), (4, 1), (4, 3)$. ▽

🔍 Câu 24 Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $m^2 + n^2 + m$ chia hết cho mn . Chứng minh rằng m là số chính phương.

Tiền Giang

Lời giải.

Gọi ước chung lớn nhất của m và n là d . Ta đặt $m = dx, n = dy$, với $(x, y) = 1$. Phép đặt này cho ta $m^2 + n^2 - m = d^2x^2 + d^2y^2 - dx$ và $xy = d^2mn$. Kết hợp với giả thiết, ta được

$$d^2xy \mid (d^2x^2 + d^2y^2 - dx) \Rightarrow dxy \mid (dx^2 + dy^2 - x). \quad (*)$$

Kết hợp (*) với việc xét tính chia hết cho x và d ở cả số bị chia và số chia, ta lần lượt suy ra

$$\begin{cases} x \mid dn^2 \\ d \mid x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \mid d \\ d \mid x \end{cases} \Rightarrow d = x.$$

Ta có $m = dx = d^2$ là số chính phương. Bài toán được chứng minh. ▽

Bài toán này đã xuất hiện ở trong đề thi của Ba Lan.

*Cho x, y là số nguyên dương sao cho $x^2 + y^2 - x$ chia hết cho xy .
Chứng minh x là số chính phương.*

Polish Mathematical Olympiad 2000

🔍 Câu 25 Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 4xy + 4y + 2x - 3 = 0$.

Cần Thơ

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$5y^2 + (4x + 4)y + (x^2 + 2x - 3) = 0.$$

Coi đây là một phương trình bậc hai theo ẩn y , thế thì Δ' phải là số chính phương. Ta tính được

$$\Delta' = (2x + 2)^2 - 5(x^2 + 2x - 3) = -x^2 - 2x + 19.$$

Ta suy ra $-x^2 - 2x + 19 \geq 0$. Giải bất phương trình nghiệm nguyên này, ta được $-5 \leq x \leq 3$. Thử với từng trường hợp, ta kết luận phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên phân biệt là

$$(-5, 2), (-3, 0), (1, 0), (3, -2).$$

▽

🔴 Câu 26 Hai số tự nhiên khác nhau được gọi là "thân thiết" nếu tổng bình phương của chúng chia hết cho 3. Hỏi tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 2021\}$ có bao nhiêu cặp số "thân thiết" (không phân biệt thứ tự)?

Khánh Hòa

Lời giải.

Trước hết, ta chứng minh bổ đề: Với mọi số nguyên a, b , ta phát biểu mệnh đề

$$\begin{cases} 3 \mid a \\ 3 \mid b \end{cases} \Leftrightarrow 3 \mid (a^2 + b^2).$$

Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh chiều đảo của mệnh đề trên. Ta đã biết, một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

○ Nếu $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, ta có $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$, một điều vô lí.

○ Nếu $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$, ta có $b^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Lúc này, cả a và b đều chia hết cho 3.

Mệnh đề trên được chứng minh, thế nên ta suy ra một cặp số "thân thiết" chính là một cặp hai số cùng chia hết cho 3. Trong X , có tổng cộng 673 số tự nhiên chia hết cho 3, vậy nên số cặp "thân thiết" là

$$\frac{673 \cdot 672}{2} = 226128.$$

▽

Khi thay 3 bằng một số nguyên tố bất kì có dạng $4k + 3$, dựa vào việc chứng minh bổ đề

$$\begin{cases} p \mid a \\ p \mid b \end{cases} \Leftrightarrow p \mid (a^2 + b^2),$$

bài toán cũng có hướng giải quyết tương tự.

Một trong những cách chứng minh bổ đề này chính là sử dụng định lí *Fermat* nhỏ. Về chi tiết, mời bạn đọc tự tìm hiểu.

○ Câu 27

- ① Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3 = 0$, với tham số m . Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $P = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$ nhận giá trị nguyên.

- ② Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình

$$x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x - 4y - 2 = 0.$$

Đắc Nông

Lời giải.

- ① Điều kiện để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - (m^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow -4m + 7 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{4}.$$

Với điều kiện như vậy, áp dụng định lí Viète, ta có

$$x_1 + x_2 = 2(m-2), \quad x_1x_2 = m^2 - 3.$$

Như vậy, P là số nguyên khi và chỉ khi

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2(m^2 - 3)}{2(m-2)} = \frac{m^2 - 4 + 1}{m-2} = m + 2 + \frac{1}{m-2}.$$

là số nguyên, tức là $m-2$ là ước của 1. Ta tìm được $m = 3, m = 1$. Đối chiếu với điều kiện $m < \frac{7}{4}$, ta chỉ ra $m = 1$ là số nguyên duy nhất thỏa mãn.

- ② Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+y)(x+3y) - (x+y) - (x+3y) + 1 = 3 \Leftrightarrow (x+y-1)(x+3y-1) = 3.$$

Đến đây, ta lập bảng giá trị

$x+y-1$	-3	-1	1	3
$x+3y-1$	-1	-3	3	1
x	-3	1	1	5
y	1	-1	1	-1

Kết quả, phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên phân biệt $(-3, 1), (1, -1), (1, 1)$ và $(5, -1)$.

▽

○ Câu 28

- ① Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y) + 3(2x+y) - 5(x-y) = 22$.
- ② Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ là số chính phương.

Bình Phước**Lời giải.**

- ① Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x+y)(x-y) + 3(2x+y) - 5(x-y) - 15 = 7 \Leftrightarrow (2x+y-5)(x-y+3) = 7$$

Đến đây, ta lập bảng giá trị

$2x+y-5$	-7	-1	1	7
$x-y+3$	-1	-7	7	1
x	-2	-2	$\notin \mathbb{Z}$	$\notin \mathbb{Z}$
y	2	8	$\notin \mathbb{Z}$	$\notin \mathbb{Z}$

Kết quả, phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên phân biệt $(-2, 2)$ và $(-2, 8)$.

- ② Với các số a, b thỏa mãn giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} 2a^2 + a &= 3b^2 + b \Rightarrow 2a^2 - 2b^2 + a - b = b^2 \\ &\Rightarrow 2(a-b)(a+b) + (a-b) = b^2 \\ &\Rightarrow (a-b)(2a+2b+1) = b^2. \end{aligned}$$

Ta đặt $d = (a-b, 2a+2b+1)$. Do $b^2 = (a-b)(2a+2b+1)$ nên b^2 chia hết cho d^2 , tức b chia hết cho d . Khi đó

$$\begin{cases} d \mid (a-b) \\ d \mid (2a+2b+1) \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid (2a+2b+1) \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid 1 \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d = 1.$$

Do vậy, ta được $a-b$ và $2a+2b+1$ đều là các số chính phương. Chứng minh hoàn tất.

▽

○ Câu 29

- ① Tìm tất cả các số tự nhiên n và k để $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.

- ② Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$x^4 - x^2 + 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 2y - 36 = 0.$$

Đắc Lắc

Lời giải.

- ① Ta đặt $2^k = m$, khi đó $4^{2k+1} = m^4$. Ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} n^4 + 4m^4 &= n^4 + 4n^2m^2 + 4m^4 - 4m^2n^2 \\ &= (n^2 + 2m^2)^2 - (2mn)^2 \\ &= (n^2 - 2mn + 2n^2)(n^2 + 2mn + 2n^2) \end{aligned}$$

Do $0 < n^2 - 2mn + 2n^2 < n^2 + 2mn + 2n^2$ nên $n^4 + m^4$ là số nguyên tố chỉ khi

$$n^2 - 2mn + 2n^2 = 1. \quad (*)$$

Theo chứng minh ở (*), ta có

$$m^2 + (m - n)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 0, |m - n| = 1 \\ m = 1, |m - n| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ |m - n| = 0 \end{cases} \Rightarrow m = n = 1.$$

Với $m = n = 1$, ta tìm được $k = 0$. Thử trên tiếp, ta thấy đúng. Như vậy, cặp (n, k) duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(1, 0)$.

- ② Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 + y - 1)^2 + (x - y)^2 = 37.$$

Có duy nhất một cách biểu diễn 37 thành tổng hai bình phương, đó là $37^2 = 1 + 6^2$. Đồng thời, ta chỉ ra được $x^2 + y - 1 > x - y$. Ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Với $x^2 + y - 1 = 6$ và $x - y = 1$, ta có

$$x^2 + (x - 1) - 1 = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 8 = 0.$$

Ta không tìm được x nguyên dương ở đây.

- **Trường hợp 2.** Với $x^2 + y - 1 = 6$ và $x - y = -1$, ta có

$$x^2 + (x + 1) - 1 = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0.$$

Do x nguyên dương, ta nhận được $x = 2$ và $y = 3$.

- **Trường hợp 3.** Với $x^2 + y - 1 = 1$ và $x - y = -6$, ta có

$$x^2 + (x + 6) - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0.$$

Ta không tìm được x nguyên dương ở đây.

Như vậy, cặp (x, y) duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(2, 3)$.

▽

○ Câu 30 Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho hai số $n^2 - 2n - 7$ và $n^2 - 2n + 12$ đều là lập phương của một số nguyên dương nào đó.

Quảng Bình

Lời giải.

Từ giả thiết ta có thể đặt

$$n^2 - 2n + 12 = a^3, \quad n^2 - 2n - 7 = b^3,$$

ở đây a, b là các số nguyên dương, đồng thời $a > b$.

Lấy hiệu theo vế, ta được

$$19 = a^3 - b^3 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 19.$$

Do $0 < a - b < a^2 + ab + b^2$ và 19 là số nguyên tố, ta nhận được $a - b = 1$ và $a^2 + ab + b^2 = 19$.

Thế $b = a - 1$ vào $a^2 + ab + b^2 = 19$, ta được

$$a^2 + a(a - 1) + (a - 1)^2 = 19 \Rightarrow 3a^2 - 3a - 18 = 0 \Rightarrow 3(a - 3)(a + 2) = 0 \Rightarrow a = 3.$$

Thay trở lại $a = 3$, ta tìm ra $n = 5$. Đây là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn yêu cầu. ∇

○ Câu 31 Tìm các số nguyên dương n để $A = 4n^3 + 2n^2 - 7n - 5$ là số chính phương.

Thái Nguyên – Chuyên Toán

Lời giải.

Giả sử A là số chính phương. Xét phân tích

$$A = (n + 1)(4n^2 - 2n - 5).$$

Ta đặt $d = (n + 1, 4n^2 - 2n - 5)$. Phép đặt này cho ta

$$\begin{cases} d \mid (n + 1) \\ d \mid (4n^2 - 2n - 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid (n + 1) \\ d \mid [2(n + 1)(2n - 3) + 1] \end{cases} \Rightarrow d = 1.$$

Tích của hai số nguyên tố cùng nhau là một số chính phương, vậy nên cả 2 số này chính phương. Tối đây, ta đánh giá

$$(2n - 2)^2 < 4n^2 - 2n - 5 < (2n)^2.$$

Do $4n^2 - 2n - 5$ chính phương, đánh giá trên cho ta

$$4n^2 - 2n - 5 = (2n - 1)^2 \Leftrightarrow 4n^2 - 2n - 5 = 4n^2 - 4n + 1 \Leftrightarrow n = 3.$$

Thử với $n = 3$, ta được A chính phương. Đây là giá trị duy nhất của n thỏa đề. ∇

🔍 Câu 32 Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho phương trình $x^2 - px + q = 0$ có các nghiệm là số nguyên.

Thái Nguyên – Chuyên Tin

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm nguyên, thế nên $\Delta = p^2 - 4q$ phải là số chính phương.

Ta đặt $p^2 - 4q = a^2$ với $a \in \mathbb{N}$, khi đó $4q = (p - a)(p + a)$.

Do $p - a \equiv p + a \pmod{2}$ và $0 < p - a < p + a$ nên ta có bảng sau

$p - a$	2	4	q
$p + a$	$2q$	q	4
p	$q + 1$	$\frac{q + 4}{2}$	$\frac{q + 4}{2}$

Từ bảng trên, kết hợp với tính nguyên tố của p và q , ta tìm được $p = 3, q = 2$.

Thử lại, với $p = 3, q = 2$ phương trình có 2 nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$, do vậy $(p, q) = (3, 2)$ là cặp duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài. ▽

🔍 Câu 33 Giải phương trình $x^3 + y^2 - x + 3z = 2021$ với x, y, z là các số nguyên.

Hà Nam

Lời giải.

Ta đã biết $x^3 - x = x(x + 1)(x - 1)$ chia hết cho 3 do đây là tích ba số nguyên liên tiếp. Trong phương trình ban đầu, lấy đồng dư theo modulo 3 hai vế, ta được

$$y^2 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Đây là điều không thể xảy ra. Phương trình đã cho vô nghiệm. ▽

🔍 Câu 34 Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b + 20c = c^3$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

Lâm Đồng

Lời giải.

Ta nhận thấy

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 + 2c^3 - (a + b + 20c) \\ &= (a^3 - a) + (b^3 - b) + 2(c^3 - c) - 18c \\ &= a(a - 1)(a + 1) + b(b - 1)(b + 1) + 2c(c - 1)(c + 1) - 18c. \end{aligned}$$

Các tích dạng $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$ chia hết cho 6 do đây là tích ba số nguyên liên tiếp, và $18c$ cũng chia hết cho 6. Từ đây, ta suy ra điều phải chứng minh. ▽

○ Câu 35

- ① Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.
- ② Cho phương trình $x^2 - mx + m + 2 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có các nghiệm nguyên.

Bình Định – Chuyên Toán**Lời giải.**

- ① Từ giả thiết, ta suy ra $4n^4 + 4n^3 + 4$ cũng là số chính phương. Với mọi số nguyên n , ta có

$$4n^4 + 4n^3 + 4 - (2n^2 + n - 1)^2 = 3n^2 + 2n + 3 > 0,$$

$$(2n^2 + n + 3)^2 - (4n^4 + 4n^3 + 4) = 13n^2 + 6n + 5 > 0.$$

Các đánh giá trên cho ta

$$(2n^2 + n - 1)^2 < 4n^4 + 4n^3 + 4 < (2n^2 + n + 3)^2.$$

Do $4n^4 + 4n^3 + 4$ là số chính phương nên theo bổ đề kẹp, ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Với $4n^4 + 4n^3 + 4 = (2n^2 + n)^2$, ta có

$$4n^4 + 4n^3 + 4 = 4n^4 + 4n^3 + n^2 \Leftrightarrow n^2 = 4 \Leftrightarrow n = \pm 2.$$

- **Trường hợp 2.** Với $4n^4 + 4n^3 + 4 = (2n^2 + n + 1)^2$, ta có

$$4n^4 + 4n^3 + 4 = 4n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 5n^2 + 2n - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n + 1)(5n - 3) = 0.$$

Không tồn tại n tự nhiên trong trường hợp này.

- **Trường hợp 3.** Với $4n^4 + 4n^3 + 4 = (2n^2 + n + 2)^2$, ta có

$$4n^4 + 4n^3 + 4 = 4n^4 + 4n^3 + 9n^2 + 4n + 4 \Leftrightarrow 9n^2 = 0 \Leftrightarrow n = 0.$$

Như vậy, có 2 giá trị của n thỏa đề là $n = 0$ và $n = 2$.

- ② Giả sử phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên x_1, x_2 , áp dụng định lý Viète, ta có $x_1 + x_2 = m$, suy ra m là số nguyên.

Do phương trình đã cho có nghiệm nguyên nên $\Delta = m^2 - 4(m + 2) = (m - 2)^2 - 12$ phải là số chính phương. Đặt $(m - 2)^2 - 12 = a^2$ với $a \in \mathbb{N}$. Phép đặt này cho ta

$$(m - 2 - a)(m - 2 + a) = 12.$$

Với chú ý $m - 2 - a < m - 2 + a$ và $m - 2 - a \equiv m - 2 + a \pmod{2}$, ta có bảng sau

$m - 2 - a$	-6	2
$m - 2 + a$	-2	6
m	-2	6

- Với $m = -2$, phương trình $x^2 + 2x = 0$ có 2 nghiệm là 0 và -2 , thỏa mãn.
- Với $m = 6$, phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$ có 2 nghiệm là 2 và 4, thỏa mãn.

Vậy các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài là $m = 2, m = 4$.

▽

🔍 Câu 36 Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho $x^2 - x + 13$ là số chính phương.

Bình Định – Chuyên Tin

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có thể đặt $x^2 - x + 13 = t^2$, với t nguyên dương. Phép đặt này cho ta

$$4x^2 - 4x + 52 = 4t^2 \Rightarrow (2x - 1)^2 + 51 = (2t)^2 \Rightarrow (2t - 2x + 1)(2t + 2x - 1) = 51.$$

Do $0 < 2t - 2x + 1 < 2t + 2x - 1$, ta lập được bảng giá trị sau

$2t - 2x + 1$	1	3
$2t + 2x - 1$	51	17
x	13	4

Căn cứ vào bảng, ta kết luận $x = 4$ và $x = 13$ là tất cả các giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

▽

🔍 Câu 37 Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $7(x + 2y)^3(y - x) = 8y - 5x + 1$.

Ninh Bình

Lời giải.

Ta đặt $A = x + 2y, B = y - x$. Bằng biểu diễn $8y - 5x = A + 6B$, phương trình đã cho trở thành

$$7A^3B = A + 6B + 1 \Leftrightarrow (7A^3 - 6)B = A + 1 \quad (*)$$

Ta được $(7A^3 - 6) \mid (A + 1)$. Ta lần lượt suy ra

$$(7A^3 - 6) \mid 7(A + 1)(A^2 - A + 1) \Rightarrow (7A^3 - 6) \mid (7A^3 + 7) \Rightarrow (7A^3 - 6) \mid 13.$$

Do 13 là số nguyên tố, ta có $7A^3 - 6 \in \{\pm 1; \pm 13\}$. Kết hợp với điều kiện A nguyên, ta tìm ra $A = 1$ hoặc $A = -1$. Ta lập bảng giá trị

A	B	x	y
-1	0	$\notin \mathbb{Z}$	$\notin \mathbb{Z}$
-1	2	-1	1

Căn cứ vào bảng, ta nhận thấy $(x, y) = (-1, 1)$ là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình đã cho.

▽

○ Câu 38 Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y^4 + 2y^3 - 3 = x^2 - 3x$.

Hải Phòng

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4y^4 + 8y^3 - 12 = 4x^2 - 12x \Leftrightarrow 4y^4 + 8y^3 - 3 = (2x - 3)^2.$$

Tới đây, ta xét các hiệu

$$\begin{aligned}(4y^4 + 8y^3 - 3) - (2y^2 + 2y - 1)^2 &= 4(y - 1) \geq 0, \\ (2y^2 + 2y)^2 - (4y^4 + 8y^3 - 3) &= -4y^3 - 3 < 0.\end{aligned}$$

Các đánh giá theo hiệu bên trên cho ta biết

$$(2y^2 + 2y - 1)^2 \leq 4y^4 + 8y^3 - 3 < (2y^2 + 2y)^2.$$

Do $4y^4 + 8y^3 - 3$ là số chính phương, ta bắt buộc phải có $4y^4 + 8y^3 - 3 = (2y^2 + 2y - 1)^2$, tức $y = 1$. Ta tìm ra $x = 3$ từ đây. Kết luận, $(x, y) = (1, 3)$ là cặp số duy nhất thỏa yêu cầu. ▽

○ Câu 39

- ① Gọi A là số tạo nên khi viết liên tục các số tự nhiên từ 1 đến 2021, nghĩa là

$$A = 123 \dots 201920202021.$$

a, Số A gồm bao nhiêu chữ số?

b, Chữ số thứ 2021 (theo chiều từ trái qua phải) của A là chữ số nào?

- ② Cho p, x, y là các số tự nhiên thỏa mãn $px^2 + x = (p + 1)y^2 + y$. Chứng minh rằng $x - y$ là một số chính phương.

Bình Thuận – Chuyên Toán

Lời giải.

- ① a, Số chữ số của A là tổng số chữ số của các số tự nhiên thuộc tập $S = \{1; 2; \dots; 2021\}$. Trong tập S , ta có

- Tổng số chữ số của các số có một chữ số là $1 \cdot 9 = 9$.
- Tổng số chữ số của các số có hai chữ số là $2 \cdot 90 = 180$.
- Tổng số chữ số của các số có ba chữ số là $3 \cdot 900 = 2700$.
- Tổng số chữ số của các số có bốn chữ số là $4 \cdot 1022 = 4088$.

Như vậy, số chữ số của A là $9 + 180 + 2700 + 4088 = 6977$.

b, Do $9 + 180 < 2021 < 9 + 180 + 2700$, chữ số thứ 2021 của A phải là chữ số trong một số có ba chữ số tương ứng.

Dựa vào nhận xét

$$2021 = 9 + 180 + 610 \cdot 3 + 2,$$

ta suy ra chữ số cần tìm là chữ số thứ hai trong số $610 + 100 - 1 = 709$, tức là chữ số 0.

② Với các số x, y thỏa mãn giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} px^2 - py^2 + x - y = y^2 &\Rightarrow p(x-y)(x+y) + (x-y) = y^2 \\ &\Rightarrow (x-y)(px + py + 1) = y^2. \end{aligned}$$

Ta đặt $d = (x-y, px + py + 1)$. Do $y^2 = (x-y)(px + py + 1)$ nên y^2 chia hết cho d^2 , tức y chia hết cho d . Khi đó

$$\begin{cases} d \mid (x-y) \\ d \mid (px + py + 1) \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid (px + py + 1) \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid 1 \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d = 1.$$

Do vậy, ta được $x - y$ là số chính phương. Chứng minh hoàn tất.

▼

Trường hợp đặc biệt của ý thứ hai cũng đã xuất hiện ở trong đề tỉnh Bình Phước

!

"Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ là số chính phương."

🔴 Câu 40 Cho a và b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + \frac{3}{2}b^2$ chia hết cho 25. Chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 5.

Bình Thuận – Chuyên Tin

Lời giải.

Với các số nguyên dương a, b thỏa mãn giả thiết, ta có

$$25 \mid 4 \left(a^2 - ab + \frac{3}{2}b^2 \right) = (2a - b)^2 + 5b^2.$$

Ta được $2a - b$ chia hết cho 25, tức là $2a - b$ chia hết cho 5.

Tiếp tục sử dụng $25 \mid (2a - b)^2 + 5b^2$, ta nhận thấy 25 cũng là ước của $5b^2$, thế nên b chia hết cho 5. Kết hợp với $5 \mid (2a - b)$, ta có điều phải chứng minh là a và b cùng chia hết cho 5.

▼

○ Câu 41

- ① Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x^2y - xy + y)(x + y) = 3x + 1$.
- ② Tìm các số nguyên tố p, q đồng thời thỏa mãn hai điều kiện
- i, $p^2q + p$ chia hết cho $p^2 + q$.
 - ii, $pq^2 + q$ chia hết cho $q^2 - p$.

Phú Thọ**Lời giải.**

- ① Phương trình đã cho tương đương với

$$y(x^2 - x + 1)(x + y) = 3x - 1.$$

Ta nhận được $(x^2 - x + 1) \mid (3x - 1)$, thế nên

$$\begin{aligned}(x^2 - x + 1) \mid (3x - 1)(3x - 2) &\Rightarrow (x^2 - x + 1) \mid (9x^2 - 9x + 9 - 7) \\ &\Rightarrow (x^2 - x + 1) \mid 7.\end{aligned}$$

Lần lượt cho $x^2 - x + 1$ nhận các giá trị là $-7, -1, 1, 7$ ta kết luận rằng phương trình đã cho có ba nghiệm nguyên là $(-2, 1), (1, -2), (1, 1)$.

- ② Giả sử tồn tại các số nguyên tố p, q thỏa đề. Điều kiện i cho ta

$$(p^2 + q) \mid (q(p^2 + q) + p - q^2) \Rightarrow (p^2 + q) \mid (p - q^2).$$

Đồng thời, điều kiện ii cho ta

$$(q^2 - p) \mid (p(q^2 - p) + q + p^2) \Rightarrow (q^2 - p) \mid (q + p^2)$$

Dựa vào hai nhận xét trên, ta suy ra

$$|p^2 + q| = |q^2 - p|,$$

- Với $q^2 \geq p$, ta có

$$p^2 + q = q^2 - p \Rightarrow (p + q)(p - q + 1) = 0 \Rightarrow q = p + 1.$$

Ta được p, q là hai số nguyên tố liên tiếp, và bắt buộc $p = 2, q = 3$.

- Với $p > q^2$, ta có

$$p^2 + q = p - q^2 \Rightarrow p^2 + q^2 = p - q,$$

điều này là không thể xảy ra do $p^2 > p$ và $q^2 > -q$.

Kết luận $(p, q) = (2, 3)$ là cặp số nguyên tố duy nhất thỏa mãn.

▽

○ Câu 42

- ① Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên tố thì $n^2 + 2022$ không là lũy thừa của 3.
- ② Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 3p + 2021$ cũng là một số nguyên tố.

Yên Bái

Lời giải.

- ① Giả sử $n^2 + 2022$ là lũy thừa của 3. Rõ ràng, do $2022 > 9$ nên $9 \mid (n^2 + 2022)$, và ta có

$$n^2 + 2022 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow n^2 \equiv 3 \pmod{9}.$$

Ta suy ra n^2 chia hết cho 3, nhưng không chia hết cho 9. Đây là một điều vô lí. Giả sử sai, và ta có điều phải chứng minh.

- ② Với $p = 3$, ta có $p^2 + 3p + 2021 = 2039$ là một số nguyên tố. Với $p \geq 3$, ta có

$$p^2 + 3p + 2021 \equiv 1 + 0 + 2021 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Nói cách khác, $p^2 + 3p + 2021$ chia hết cho 3 khi $p \neq 3$, chứng tỏ nó là hợp số. Như vậy, chỉ có kết quả $p = 3$ thỏa yêu cầu.

▽

○ Câu 43

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta luôn có $2005^n + 60^n - 1897^n - 168^n$ chia hết cho 2004.

Lai Châu

Lời giải.

Đặt $A = 2005^n + 60^n - 1897^n - 168^n$. Ta sẽ chứng minh A chia hết cho 3, 4 và 167. Thật vậy

$$\circ A = (3 \cdot 668 + 1)^n + (3 \cdot 20)^n - (3 \cdot 632 + 1)^n - (3 \cdot 56)^n \equiv 1 + 0 - 1 - 0 \equiv 0 \pmod{3}.$$

$$\circ A = (4 \cdot 501 + 1)^n + (4 \cdot 15)^n - (4 \cdot 474 + 1)^n - (4 \cdot 42)^n \equiv 1 + 0 - 1 - 0 \equiv 0 \pmod{4}.$$

$$\circ A = (12 \cdot 167 + 1)^n + 60^n - 11 \cdot 167 + 60^n - (167 + 1)^n \equiv 1 - 60^n + 60^n - 1 \equiv 0 \pmod{167}.$$

Dựa vào các nhận xét trên, ta suy ra A chia hết cho các số 3, 4, 167. Các số này đôi một nguyên tố cùng nhau và có tích bằng 2004, thế nên A chia hết cho 2004. Bài toán được chứng minh.

▽

○ Câu 44

- ① Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0$.

- ② Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49.
- ③ Cho số thực x khác 0 thỏa mãn cả hai số $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ. Chứng minh rằng x cũng là số hữu tỉ.

Hà Nội – Chuyên Toán

Lời giải.

- ① Phương trình đã cho tương đương với

$$(x + 2y)(x + 3y) + x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2y)(x + 3y + 1) = 2.$$

Ta lập bảng giá trị

$x + 2y$	-2	-1	1	2
$x + 3y + 1$	-1	-2	2	1
x	-2	3	1	6
y	0	-2	0	-2

Như vậy, có tổng cộng bốn cặp (x, y) thỏa đề, bao gồm $(-2, 0), (1, 0), (3, -2)$ và $(6, -2)$.

- ② Giả sử tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $49 \mid (n^2 + n + 16)$. Giả sử này cho ta

$$\begin{aligned} 49 \mid 4(n^2 + n + 16) &\Rightarrow 49 \mid [(2n + 1)^2 + 63] \Rightarrow 7 \mid [(2n + 1)^2 + 63] \\ &\Rightarrow 7 \mid (2n + 1)^2 \Rightarrow 7 \mid (2n + 1) \Rightarrow 49 \mid (2n + 1)^2. \end{aligned}$$

Tiếp tục kết hợp điều này với $49 \mid [(2n + 1)^2 + 63]$, ta có 63 chia hết cho 49, một điều vô lí. Như vậy, giả sử phản chứng là sai, và ta có điều phải chứng minh.

- ③ Từ giả thiết thứ nhất, ta có thể đặt $x + \frac{2}{x} = a$, với a là số hữu tỉ. Phép đặt này cho ta

$$x^2 - ax + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 8}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}.$$

Kết hợp biến đổi vừa rồi giả thiết x^3 hữu tỉ, ta suy ra

$$x^3 = \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \left[(a^3 - 6a) + (a^2 - 2) \sqrt{a^2 - 8}\right] \in \mathbb{Q}.$$

Nếu như $\sqrt{a^2 - 8}$ là số vô tỉ, ta bắt buộc phải có $a^2 - 2 = 0$, tức là $a = \pm\sqrt{2}$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện phép đặt là a hữu tỉ. Như vậy, $\sqrt{a^2 - 8}$ là số hữu tỉ. Dựa vào $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}$, ta thu được điều phải chứng minh.

▽

○ Câu 45

- ① Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , ta có $n^2 + 3n + 16$ không chia hết cho 25.
- ② Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - xy - 2y^2 + x + y - 5 = 0$.

Hà Nội – Chuyên Tin

Lời giải.

- ① Giả sử tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $25 \mid (n^2 + 3n + 16)$. Giả sử này cho ta

$$\begin{aligned} 25 \mid 4(n^2 + 3n + 16) &\Rightarrow 25 \mid [(2n+3)^2 + 55] \Rightarrow 5 \mid [(2n+3)^2 + 55] \\ &\Rightarrow 5 \mid (2n+3)^2 \Rightarrow 5 \mid (2n+3) \Rightarrow 25 \mid (2n+3)^2. \end{aligned}$$

Tiếp tục kết hợp điều này với $25 \mid [(2n+3)^2 + 55]$, ta có 55 chia hết cho 25, một điều vô lí. Như vậy, giả sử phản chứng là sai, và ta có điều phải chứng minh.

- ② Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+y)(x-2y) + (x+y) - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y+1) = 5.$$

Tới đây, ta lập bảng được giá trị

$x+y$	-5	-1	1	5
$x-2y+1$	-1	-5	5	1
x	-4	$\notin \mathbb{Z}$	2	$\notin \mathbb{Z}$
y	-1	$\notin \mathbb{Z}$	-1	$\notin \mathbb{Z}$

Như vậy, có tổng cộng hai cặp (x, y) thỏa đề, bao gồm $(-4, -1)$ và $(2, -1)$.

▽

○ Câu 46

- ① Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng khi chia n cho 7, 9, 11, 13 ta nhận được các số dư tương ứng là 3, 4, 5, 6.
- ② Cho tập $A = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất ($k > 2$) sao cho ta có thể chọn được k số phân biệt từ tập A mà tổng của hai số phân biệt bất kì trong k số được chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

Chuyên Khoa học Tự nhiên – Vòng 1

Lời giải.

① Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu. Ta có

$$\begin{cases} n \equiv 3 \pmod{7} \\ n \equiv 4 \pmod{9} \\ n \equiv 5 \pmod{11} \\ n \equiv 6 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 6 \pmod{7} \\ 2n \equiv 8 \pmod{9} \\ 2n \equiv 10 \pmod{11} \\ 2n \equiv 12 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \equiv 0 \pmod{7} \\ 2n+1 \equiv 0 \pmod{9} \\ 2n+1 \equiv 0 \pmod{11} \\ 2n+1 \equiv 0 \pmod{13} \end{cases}$$

Dựa vào nhận xét trên, ta suy ra $2n+1$ là số nguyên dương nhỏ nhất chia hết cho 7, 9, 11, 13. Bốn số đó đôi một nguyên tố cùng nhau, thế nên

$$2n+1 = 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 = 9009.$$

Từ đây, ta thu được $n = 4504$.

② Ta dự đoán rằng $k = 674$. Ta sẽ chứng minh kết quả trên.

a, **Điều kiện cần.** Nếu $k \geq 675$, ta xét 675 số bất kì trong A . Ta phân hoạch A thành các tập con như sau

$$\{1; 2; 3\}, \{4; 5; 6\}, \dots, \{2017; 2018; 2019\}, \{2020; 2021\}.$$

Theo nguyên lí *Dirichlet*, tồn tại hai số a, b nằm trong cùng một tập con kể trên. Tuy nhiên, khi đó $a+b$ lại chia hết cho $a-b$, mâu thuẫn với giả thiết đã cho.

b, **Điều kiện đủ.** Nếu $k = 674$, ta xét các số chia 3 dư 1 trong A , đó là

$$1, 4, 7, \dots, 2020$$

Tổng 2 số bất kì trong 674 số đó chia 3 dư 2, trong khi hiệu giữa chúng chia hết cho 3, thế nên nó không là ước của tổng.

Kết quả của bài toán chính là $k = 674$.

▽

Câu 47 Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $3^x + 29 = 2^y$.

Chuyên Khoa học Tự nhiên – Vòng 2

Lời giải.

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $x = 1$, kiểm tra trực tiếp, ta nhận được $y = 5$. Với $x \geq 2$, ta có

$$3^x + 29 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 2^y \equiv 2 \pmod{9}.$$

Xét các số dư khi chia cho 6 của y , ta nhận được $y \equiv 1 \pmod{6}$. Bằng cách đặt $y = 6z + 1$ (trong đó z là số tự nhiên), ta chỉ ra

$$2^y = 2^{6z+1} = 2 \cdot 64^z \equiv 2 \pmod{7}.$$

Ta tiếp tục suy ra

$$3^x + 29 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 3^x \equiv 1 \pmod{7}.$$

Xét các số dư khi chia cho 6 của x , ta nhận được $x \equiv 0 \pmod{6}$. Tiếp tục đặt $x = 6t$ (trong đó t là số tự nhiên), ta chỉ ra

$$3^x + 29 = 3^{6t} + 29 = 729^t + 29 \equiv 6 \pmod{8}.$$

Ta được $2^y \equiv 6 \pmod{8}$ từ đây, là điều không thể xảy ra.

Kết luận, $(x, y) = (1, 5)$ là cặp số nguyên dương duy nhất thỏa yêu cầu. ▽

Cơ sở của việc chọn modulo 6 để xét cho x và y khi ta tìm ra $2^y \equiv 2 \pmod{9}$ và $3^x \equiv 1 \pmod{7}$ là nhờ vào hai định lí sau:

❗ ① Cho số nguyên dương a và số nguyên tố p , khi đó nếu $(a, p) = 1$ thì

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

② Cho các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau. Khi đó, tồn tại số nguyên dương n sao cho $a^n \equiv 1 \pmod{b}$.

Số nguyên dương n nhỏ nhất ở trong định lí thứ hai chính là modulo ta cần xét.

❏ Câu 48

Tìm tất cả các số nguyên a, b thỏa mãn $a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 18a - 16 = 4b^2 + 20b$.

Cao Bằng

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 18a + 9 = 4b^2 + 20b + 25 &\Leftrightarrow a^4 - 2a^3 + a^2 + 9a^2 - 18a + 9 = (2b + 5)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2(a - 1)^2 + 9(a - 1)^2 = (2b + 5)^2 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + 9)(a - 1)^2 = (2b + 5)^2 \end{aligned}$$

Nếu như $a = 1$, ta suy ra $b = -\frac{5}{2}$, mâu thuẫn giả thiết a, b là số nguyên. Lập luận này chứng tỏ $(a - 1)^2 > 0$, và như vậy, $a^2 + 9$ là số chính phương.

Ta đặt $a^2 + 9 = c^2$, với c là số nguyên dương. Phép đặt này cho ta

$$(c - a)(c + a) = 9$$

Do $c > |a|$, ta suy ra $c - a > 0$ và $c + a > 0$. Dựa vào đây, ta lập được bảng giá trị sau

$c + a$	9	3	1
$c - a$	1	3	9
a	4	0	-4

Lần lượt thay $a = -4, 0, 4$ trở lại phương trình ban đầu, ta tìm được tất cả 6 cặp (a, b) thỏa yêu cầu, đó là

$$(-4, -15), (-4, 10), (0, -4), (0, -1), (4, -1), (4, 5).$$

▽

○ Câu 49

- ① Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^2y^2(y-x) = 5xy^2 - 27$.
- ② Cho $p_1, p_2, \dots, p_{12}$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Nam Định

Lời giải.

- ① Giả sử tồn tại cặp số (x, y) thỏa đề. Theo đó:

$$xy(5y - xy^2 + x^2y) = 27. \quad (*)$$

Biến đổi trên chứng tỏ xy là ước nguyên dương của 27. Ta lần lượt xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** $xy = 1$.
Trong trường hợp này, rõ ràng $x = y = 1$. Đối chiếu với (*), ta thấy không thỏa.
- **Trường hợp 2.** $xy = 3$. Thay trở lại (*), ta được

$$5y - 3y + 3x = 9 \Leftrightarrow 3x + 2y = 9.$$

Lần lượt kiểm tra với $(x, y) = (1, 3), (3, 1)$ ta thấy chỉ có $(x, y) = (3, 1)$ thỏa mãn.

Trường hợp 3. $xy = 9$. Thay trở lại (*), ta được

$$5y - 9y + 9x = 3 \Leftrightarrow 9x - 4y = 3.$$

Lần lượt kiểm tra với $(x, y) = (1, 9), (3, 3), (9, 1)$, ta thấy chúng đều không thỏa mãn.

- **Trường hợp 4.** $xy = 27$. Thay trở lại (*), ta được

$$5y - 27y + 27x = 1 \Leftrightarrow 27x - 22y = 3.$$

Lần lượt kiểm tra với $(x, y) = (1, 27), (3, 9), (9, 3), (27, 1)$, ta thấy chúng đều không thỏa mãn.

Kết luận, $(x, y) = (3, 1)$ là cặp số duy nhất thỏa đề.

- ② Tất cả các số $p_1^2, p_2^2, \dots, p_{12}^2$ đều không chia hết cho 3, thế nên chúng chia cho 3 được dư là 1. Lập luận này cho ta

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{12}^2 \equiv 12 \pmod{3}.$$

Ta được $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{12}^2$ chia hết cho 3. Đây chính là điều phải chứng minh.

▽

🔵 Câu 50

- ① Tìm tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 và $\overline{abc} - \overline{bda} = 650$.
- ② Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2(xz + 2x + 2z) = 396, \quad x^2 + y^2 = 3z.$$

Hải Dương

Lời giải.

- ① Giả sử tồn tại số tự nhiên $\overline{abcd}$ thỏa đề. Rõ ràng, $c = a$. Đồng thời, từ giả thiết, ta nhận thấy $a \geq 7$. Ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** $a = c = 7$. Trong trường hợp này, ta có

$$650 = \overline{abc} - \overline{bda} = \overline{7b7} - \overline{bd7} = 700 - 90b - 10d \leq 700 - 90 \cdot 1 = 610,$$

một điều mâu thuẫn.

- **Trường hợp 2.** $a = c = 8$. Trong trường hợp này, ta có

$$650 = \overline{abc} - \overline{bda} = \overline{8b8} - \overline{bd8} = 800 - 90b - 10d.$$

Từ đây, ta suy ra $9b + d = 15$, tức $b = 1$ và $d = 6$. Kiểm tra trực tiếp, ta thấy số $\overline{abcd} = 8186$ không chia hết cho 3, mâu thuẫn.

- **Trường hợp 3.** $a = c = 9$. Trong trường hợp này, ta có

$$650 = \overline{abc} - \overline{bda} = \overline{9b9} - \overline{bd9} = 900 - 90b - 10d.$$

Từ đây, ta suy ra $9b + d = 25$. Do b, d là các chữ số, chỉ có trường hợp $b = 2, d = 7$ xảy ra. Kiểm tra trực tiếp, ta thấy số $\overline{abcd} = 9297$ chia hết cho 3, và đây là số tự nhiên duy nhất thỏa mãn yêu cầu.

- ② Từ phương trình thứ hai, ta chỉ ra cả x, y, z đều chia hết cho 3, đồng thời z dương. Ngoài ra, phương trình thứ nhất trong hệ tương đương với

$$(x + z + 2)^2 + (2y)^2 + z^2 = 400.$$

Có đúng hai cách để viết 400 thành tổng ba số chính phương, đó là

$$400 = 0^2 + 0^2 + 20^2 = 0^2 + 12^2 + 16^2.$$

Dựa vào các nhận xét kể trên, ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Nếu $z = 0$, phương trình thứ hai trở thành

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Ta có $x = y = 0$. Thế ngược lại phương trình thứ nhất, ta thấy không thỏa.

- **Trường hợp 2.** Nếu $z = 12$, một trong hai số $x + y + 2, 2y$ phải bằng 0, vậy nên

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, y = 0 \\ x = -6, y = 0 \end{cases}.$$

Thế ngược lại phương trình thứ nhất, ta thấy không thỏa.

Như vậy, không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa yêu cầu.

▽

○ Câu 51 Cho số nguyên dương $n > 2$. Chứng minh rằng

① $A = n^3 - 3n^2 + 2n$ chia hết cho 6.

② $B = n^{A+1} - 1$ chia hết cho 7.

Tuyên Quang

Lời giải.

- ① Ta viết lại biểu thức A như sau:

$$A = n(n^2 - 3n + 2) = n(n-1)(n-2).$$

Cách viết trên kết hợp giả thiết $n > 2$ cho ta A là tích ba số nguyên dương liên tiếp, và vì thế, A chia hết cho 6.

- ② Theo như kết quả trên, ta có thể đặt $A = 6m$, với m là số nguyên dương. Ta xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1.** Nếu n chia hết cho 7, hiển nhiên B cũng chia hết cho 7.

- **Trường hợp 2.** Nếu n không chia hết cho 7, ta suy ra $n^3 \equiv 1, -1 \pmod{7}$, kéo theo $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Kết quả này cho ta

$$\begin{aligned} n^6 &\equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow n^{6m} \equiv 1 \pmod{7} \\ &\Rightarrow n^{6m+1} \equiv n \pmod{7} \Rightarrow 7 \mid (n^{A+1} - n). \end{aligned}$$

Như vậy, bài toán được chứng minh trong mọi trường hợp.

▽

Nhận xét. Cách xét modulo 7 của lũy thừa thông qua xét modulo 6 của số mũ là ý tưởng đã xuất hiện trong đề thi của chuyên Khoa học Tự nhiên vào cùng năm: "Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $3^x + 29 = 2^y$."

○ Câu 52 Cho a, b là hai số hữu tỉ.

Chứng minh rằng nếu $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ là số hữu tỉ thì $a = b = 0$.

Chuyên Sư phạm – Vòng 1

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có thể đặt $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c$, với c là số hữu tỉ. Bình phương hai vế, ta được

$$2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = c^2,$$

hay là

$$2a^2 + 3b^2 - c^2 = 2ab\sqrt{6}.$$

Trong trường hợp $ab \neq 0$, ta suy ra

$$\sqrt{6} = \frac{2a^2 + 3b^2 - c^2}{2ab}.$$

Lập luận trên chứng tỏ $\sqrt{6}$ là số hữu tỉ, mâu thuẫn. Như vậy, ta thu được $ab = 0$.

○ Nếu $a = 0$, ta suy ra $b\sqrt{3}$ là số hữu tỉ, thế nên $b = 0$.

○ Nếu $b = 0$, ta suy ra $a\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, thế nên $a = 0$.

Bài toán được chứng minh.

▽

○ Câu 53

- ① Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn duy nhất một cách biểu diễn ở dạng $\frac{x^2 + y}{xy + 1}$ với x, y là hai số nguyên dương.
- ② Cho a, b, c là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 - bx + c = 0$ có hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình này bằng nhau.

Chuyên Sư phạm – Vòng 2

Lời giải.

- ① Giả sử tồn tại số nguyên dương N thỏa mãn, tức là tồn tại duy nhất một cặp (x, y) sao cho

$$x^2 - (Ny)x + y - N = 0. \quad (*)$$

Tính tồn tại của x chứng tỏ $N^2y^2 - 4y + 4N$ là số chính phương. Ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} (Ny + 2)^2 - (N^2y^2 - 4y + 4N) &= 4Ny + 4y - 4N + 4 = 4(N + 1)(y - 1) + 8 > 0, \\ (N^2y^2 - 4y + 4N) - (Ny - 2)^2 &= 4Ny - 4y + 4N - 4 = 4(N - 1)(y + 1) \geq 0, \end{aligned}$$

Các đánh giá trên cho ta

$$(Ny - 2)^2 \leq N^2y^2 - 4y + 4N < (Ny + 2)^2$$

Đến đây, ta xét các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** $N^2y^2 - 4y + 4N = (Ny - 2)^2$.

Trường hợp này cho ta

$$\begin{aligned} N^2y^2 - 4y + 4N &= N^2y^2 - 4Ny + 4 \Leftrightarrow 4Ny + 4N - 4y - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(N - 1)(y + 1) = 0. \end{aligned}$$

Ta tìm ra $N = 1$. Thay trở lại (*), ta có

$$x^2 - xy + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - y + 1) = 0.$$

Bằng phân tích như vậy, ta chỉ ra số 1 có vô hạn dạng biểu diễn thỏa mãn, đó là

$$1 = \frac{x^2 + (x + 1)}{x(x + 1) + 1},$$

với x là một số nguyên dương bất kì.

- **Trường hợp 2.** $N^2y^2 - 4y + 4N = (Ny - 1)^2$.

Trường hợp này cho ta

$$N^2y^2 - 4y + 4N = N^2y^2 - 2Ny + 1 \Leftrightarrow 2Ny - 2y + 4N = 1.$$

So sánh tính chẵn lẻ của hai vế, ta thấy mâu thuẫn.

- **Trường hợp 3.** $N^2y^2 - 4y + 4N = (Ny)^2$.

Trường hợp này cho ta $y = N$. Thay trở lại (*), ta tìm được $x = N^2$.

- **Trường hợp 4.** $N^2y^2 - 4y + 4N = (Ny + 1)^2$.

Trường hợp này cho ta

$$N^2y^2 - 4y + 4N = N^2y^2 + 2Ny + 1 \Leftrightarrow -2Ny - 2y + 4N = 1.$$

So sánh tính chẵn lẻ của hai vế, ta thấy mâu thuẫn.

Kết luận, tất cả các số nguyên dương $N > 1$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán, và cách biểu diễn của mỗi số N này là

$$N = \frac{(N^2)^2 + N}{N^2 \cdot N + 1}.$$

- ② Từ giả thiết, ta có thể đặt $a = 2^m, b = 2^n, c = 2^p$, với m, n, p nguyên dương. Phương trình đã cho trở thành

$$2^m x^2 - 2^n x + 2^p = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$\Delta = 4^n - 2^{m+p} = 2^{2n} - 2^{m+p}$$

là số chính phương, và hiển nhiên $2n \geq m + p$.

Ta đặt $2^{2n} - 2^{m+p} = q^2$, với q nguyên dương. Theo đó,

$$(2^n - q)(2^n + q) = 2^{m+p}.$$

Rõ ràng, $2^n - q$ và $2^n + q$ đều là các lũy thừa cơ số 2. Ta tiếp tục đặt $2^n - q = 2^k, 2^n + q = 2^l$, với k, l là các số tự nhiên và $k \leq l$. Lấy tổng theo vế, ta được

$$2^{n+1} = 2^k + 2^l = 2^k (2^{l-k} + 1).$$

So sánh số mũ của 2 ở hai vế, ta tìm được $k = l$, kéo theo $q = 0$ và $\Delta = 0$. Nói cách khác, phương trình bậc hai đã cho có nghiệm kép. Bài toán được chứng minh.

▽

Câu 54 Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 20y.$$

Dà Nẵng

Lời giải.

Giả sử tồn tại các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn. Rõ ràng $y \geq 0$, đồng thời khi thay x thành $-x$, đẳng thức vẫn đúng, thế nên không mất tổng quát, giả sử $x \geq 0$.

Ta nhận thấy $x = y$ không thỏa mãn. Trong trường hợp $x \neq y$, ta suy ra $(x - y)^2 \geq 1$, vì thế

$$1 + 20y = (x^2 - y^2)^2 = (x - y)^2(x + y)^2 \geq (x + y)^2 \geq y^2.$$

Dựa vào đánh giá trên, ta có

$$y^2 \leq 20y + 1 \Rightarrow (y - 10)^2 \leq 101 \Rightarrow 10 - \sqrt{101} \leq y \leq 10 + \sqrt{101}.$$

Do y là số tự nhiên, ta chọn $y = 0, 1, 2, \dots, 20$. Trong các số này, $20y + 1$ chỉ nhận giá trị là số chính phương với $y = 0, y = 4, y = 6$ và $y = 18$.

① Với $y = 0$, ta có $x^4 = 1$. Do $x \geq 0$, ta chọn $x = 1$.

② Với $y = 4$, ta có $(x^2 - 16)^2 = 81 \Leftrightarrow x^2 - 16 = \pm 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ x^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 5$.

Do $x \geq 0$, ta chọn $x = 5$.

③ Với $y = 6$, ta có $(x^2 - 36)^2 = 121 \Leftrightarrow x^2 - 36 = \pm 11 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ x^2 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 5$.

Do $x \geq 0$, ta chọn $x = 5$.

④ Với $y = 18$, ta có $(x^2 - 324)^2 = 381 \Leftrightarrow x^2 - 324 = \pm 19 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 305 \\ x^2 = 343 \end{cases}$, mâu thuẫn.

Kết quả, có tất cả 6 cặp (x, y) thỏa đề, bao gồm

$$(1, 0), (-1, 0), (5, 4), (-5, 4), (5, 6), (-5, 6).$$

▽

○ Câu 55

① Cho các số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

Chứng minh rằng xyz chia hết cho 24.

② Tìm các bộ ba số nguyên dương (a, b, c) sao cho $(a + b + c)^2 - 2a + 2b$ là số chính phương.

Vĩnh Phúc

Lời giải.

① Ta thực hiện các bước làm sau đối với bài toán này.

a. **Ta chứng minh xyz chia hết cho 8.**

Từ giả thiết, ta suy ra $x^2 + y^2 + z^2$ là số chẵn, thế nên trong x, y, z có 1 hoặc 3 số chẵn. Không mất tính tổng quát, ta xét các trường hợp sau.

○ **Trường hợp 1.** x là số chẵn, y, z là số lẻ.

Trong trường hợp này, ta có

$$xyz \equiv 0 \pmod{4}. \quad (1)$$

Ta cũng biết rằng một số chẵn dạng a^2 khi chia cho 8 được dư là 0 hoặc 4, trong khi số dư của một số lẻ dạng a^2 là 1. Lập luận này chỉ ra cho ta

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2, 6 \pmod{8}. \quad (2)$$

Đối chiếu (1) và (2), ta nhận thấy điều mâu thuẫn. Trường hợp này không thỏa.

○ **Trường hợp 2.** x, y, z đều là số chẵn. Trong trường hợp này, hiển nhiên xyz chia hết cho 8.

b, **Ta chứng minh xyz chia hết cho 3.**

Giả sử phản chứng rằng x, y, z không chia hết cho 3, lúc này

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Đánh giá trên chứng tỏ xyz chia hết cho 3, tức một trong ba số x, y, z chia hết cho 3, mâu thuẫn với giả sử. Mâu thuẫn này chứng tỏ một trong ba số x, y, z chia hết cho 3.

Như vậy, xyz chia hết cho $[3, 8] = 24$. Bài toán được chứng minh.

② Ta xét các hiệu sau

$$\begin{aligned} (a+b+c+1)^2 - [(a+b+c)^2 - 2a+2b] &= 2a+2b+2c+1+2a-2b \\ &= 4a+2c+1 > 0, \\ [(a+b+c)^2 - 2a+2b] - (a+b+c-1)^2 &= 2a+2b+2c-1-2a+2b \\ &= 4b+2c-1 > 0. \end{aligned}$$

Các đánh giá trên cho ta

$$(a+b+c-1)^2 < (a+b+c)^2 - 2a+2b < (a+b+c+1)^2.$$

Như vậy, $(a+b+c)^2 - 2a+2b$ là số chính phương khi và chỉ khi

$$(a+b+c)^2 - 2a+2b = (a+b+c)^2,$$

tức là $a = b$. Nói cách khác, tất cả các bộ số (a, b, c) thỏa đề là (k, k, t) , với k, t là các số nguyên dương.

▽

Đây là dạng toán sử dụng bổ đề kẹp trong trường hợp nhiều biến. Dạng toán này cũng xuất hiện trong bài đề thi chuyên Sư phạm vào cùng năm, và đề thi vòng 2 của chuyên Khoa học Tự nhiên vào năm 2014 - 2015:

① Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x = y$.

Chuyên Khoa học Tự nhiên 2014 - 2015 vòng 2

② Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn duy nhất một cách biểu diễn ở dạng $\frac{x^2+y}{xy+1}$ với x, y là hai số nguyên dương.

Chuyên Sư phạm 2021 - 2022 vòng 2

○ Câu 56

- ① Tìm tất cả các số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y$.
- ② Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số có dạng $\overline{357abc}$, biết rằng số này chia hết cho 3, 5 và 7.

Kon Tum

Lời giải.

- ① Phương trình đã cho tương đương với

$$y(x-1)(x^2+x+1) = (x+1)(x^2+x+1)$$

Do $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{Z}$ nên phương trình trên tiếp tục tương đương

$$y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow y(x-1) = x-1+2 \Leftrightarrow (y-1)(x-1) = 2.$$

Tới đây, ta lập được bảng giá trị

$x-1$	1	2	-1	-2
$y-1$	2	1	-2	-1
x	2	3	0	-1
y	3	2	-1	0

Như vậy, phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên là $(2, 3), (0, -1), (3, 2), (-1, 0)$.

- ② Từ giả thiết, ta có số

$$\overline{357abc} = 357000 + \overline{abc} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3400 + \overline{abc}$$

chia hết cho cả 3, 5 và 7, vậy nên số $\overline{abc}$ cũng có tính chất tương tự. Trong các cụm $\overline{abc}$ từ 000 đến 999, có tất cả

$$\left[\frac{999}{105} \right] + 1 = 10$$

số chia hết cho cả 3, 5, 7, do đó có đúng 6 số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

▽

○ Câu 57 Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n^5 + n^4 + 1$ là số nguyên tố.

Sóc Trăng

Lời giải.

Ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} n^5 + n^4 + 1 &= n^5 - n^2 + n^4 - n + n^2 + n + 1 \\ &= n^2(n-1)(n^2+n+1) + n(n-1)(n^2+n+1) \\ &= (n^2+n+1)(n^3-n^2+n^2-n+1) \\ &= (n^2+n+1)(n^3-n+1) \end{aligned}$$

Do $n^5 + n^4 + 1$ nên hoặc $n^2 + n + 1 = 1$, hoặc $n^3 - n + 1 = 1$. Kiểm tra trực tiếp từng trường hợp, ta nhận thấy $n = 1$ là số nguyên dương duy nhất thỏa yêu cầu. ∇

○ Câu 58

- ① Chứng minh rằng $n^5 - n$ chia hết cho 240 với n là số tự nhiên lẻ bất kì.
- ② Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - y^2(x + y^4 + 6y^2) = 0$.

Bắc Giang

Lời giải.

- ① Ta chia bài toán kể trên thành 3 bước làm

- **Ta chứng minh $n^5 - n$ chia hết cho 16.**

Ta đã biết rằng $n^4 \equiv 0, 1 \pmod{16}$. Tuy nhiên, do n là số lẻ nên $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$, và vì thế

$$16 \mid n(n^4 - 1) = n^5 - n.$$

- **Ta chứng minh $n^5 - n$ chia hết cho 3.**

Ta nhận xét

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1).$$

Tích $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp, và tích này chia hết cho 3.

- **Ta chứng minh $n^5 - n$ chia hết cho 5.**

Ta đã biết $n^2 \equiv 0, 1, -1 \pmod{5}$. Dựa trên biến đổi

$$n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1),$$

mệnh đề trong ý này được chứng minh.

Thông qua các kết quả trên, ta chỉ ra số $n^5 - n$ chia hết cho $[16, 3, 5] = 240$. Toàn bộ bài toán được chứng minh.

- ② Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - xy^2 = y^6 + 6y^4 \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy^2 + y^4 = 4y^6 + 25y^4 \Leftrightarrow (2x - y^2)^2 = y^4(4y^2 + 25).$$

Tới đây, ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Nếu $2x = y^2$, ta tìm được $x = y = 0$.
- **Trường hợp 2.** Nếu $2x \neq y^2$, ta có $4y^2 + 25$ là số chính phương. Đặt $4y^2 + 25 = z^2$, trong đó z là số nguyên dương. Phép đặt này cho ta

$$z^2 - 4y^2 = 25 \Rightarrow (z - 2y)(z + 2y) = 25.$$

Do $z - 2y \leq z + 2y$ nên ta lập được bảng giá trị

$z - 2y$	$z + 2y$	y	x
-25	-1	-6	252 hoặc -216
-5	-5	0	0
5	5	0	0
1	25	6	252 hoặc -216

Kiểm tra trực tiếp từng trường hợp, ta nhận thấy rằng phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm nguyên, đó là

$$(-216, -6), (-216, 6), (0, 0), (252, -6), (252, 6).$$

▽

○ Câu 59

- ① Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2x^2 - xy + 9x - 3y + 4 = 0$.
- ② Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(1)f(2) = 2021$, chứng minh phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.
- ③ Cho tập hợp $\mathcal{A}$ có các tính chất sau:
- i, Tập hợp $\mathcal{A}$ chứa toàn bộ các số nguyên.
 - ii, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathcal{A}$.
 - iii, Với mọi $x, y \in \mathcal{A}$ thì $x + y \in \mathcal{A}$ và $xy \in \mathcal{A}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in \mathcal{A}$.

Lạng Sơn

Lời giải.

- ① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^2 + 9x + 4 &= (x + 3)y \Leftrightarrow (x + 3)(2x + 3) - 5 = (x + 3)y \\ &\Leftrightarrow (x + 3)(2x - y + 3) = 5. \end{aligned}$$

Căn cứ vào biến đổi kể trên, ta lập được bảng giá trị

$x+3$	$2x-y+3$	x	y
-5	-1	-8	-12
-1	-5	-4	0
1	5	-2	-6
5	1	2	6

Kết luận, có tất cả 4 cặp (x, y) thỏa yêu cầu, bao gồm

$$(-8, -12), (-4, 0), (-2, -6), (2, 6).$$

- ② Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm nguyên a . Theo như định lí *Bezout*, đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $x-a$, thế nên ta viết được $f(x) = (x-a)g(x)$, trong đó $g(x)$ là đa thức có các hệ số nguyên. Kết hợp với giả thiết, ta có

$$f(1) = (1-a)g(1)$$

$$f(2) = (2-a)g(2)$$

Lấy tích theo vế, ta được

$$2021 = (1-a)(2-a)g(1)g(2)$$

Tuy nhiên, đẳng thức trên không xảy ra vì vế trái là số lẻ, còn vế phải chia hết cho số chẵn $(a-1)(a-2)$. Giả sử phản chứng là sai. Bài toán được chứng minh.

- ③ Ta sẽ chứng minh kết quả trên bằng biến đổi hệ quả liên tục. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathcal{A} &\Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} \in \mathcal{A} \Rightarrow -5 + 2\sqrt{6} \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow 5 - 2\sqrt{6} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathcal{A} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Bài toán đã cho được chứng minh.

▽