

CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH CỰC TRỊ HÌNH HỌC

F. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH CỰC TRỊ HÌNH HỌC

MỤC LỤC

F. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH CỰC TRỊ HÌNH HỌC	1
A. Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.....	2
1. Dạng chung của bài toán cực trị hình học:.....	2
2. Hướng giải bài toán cực trị hình học:.....	2
3. Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học	2
B. Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học.....	3
1. Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu.....	3
2. Sử dụng quan hệ giữa đường thẳng và đường gấp khúc.....	7
3. Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.	9
4. Sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai	10
5. Sử dụng bất đẳng thức Cô-si	12
6. Sử dụng tỉ số lượng giác.	15
C. Một số bài toán ôn luyện có hướng dẫn.....	18
D. Bài tập tự luyện	36
E. Rèn luyện tổng hợp	41

A. Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.

1. Dạng chung của bài toán cực trị hình học:

“Trong tất cả các hình có chung một tính chất, tìm những hình mà một đại lượng nào đó (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích ...) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.” và có thể được cho dưới các dạng :

a) Bài toán về dựng hình.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn, xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

b) Bài toán về chứng minh.

Ví dụ: Chứng minh rằng trong các dây đi qua điểm P trong một đường tròn (O), dây vuông góc với OP có độ dài nhỏ nhất.

c) Bài toán về tính toán.

Ví dụ: Cho đường tròn (O;R) và điểm P nằm trong đường tròn có $OP = h$, tính độ dài nhỏ nhất của dây đi qua P.

2. Hướng giải bài toán cực trị hình học:

a) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được :

+ Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \leq m$ (m là hằng số)

+ Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

b) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được :

+ Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \geq m$ (m là hằng số)

+ Xác định vị trí của hình H trên miền D để $f = m$

3. Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học .

+ *Cách 1:* Trong các hình có tính chất của đề bài, chỉ ra một hình rồi chứng minh mọi hình khác đều có giá trị của đại lượng phải tìm cực trị nhỏ hơn (hoặc lớn hơn) giá trị của đại lượng đó của hình đã chỉ ra.

+ Cách 2: Biến đổi tương đương điều kiện để đại lượng này đạt cực trị bởi đại lượng khác đạt cực trị cho đến khi trả lời được câu hỏi mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ : Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn(P không trùng với O). Xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

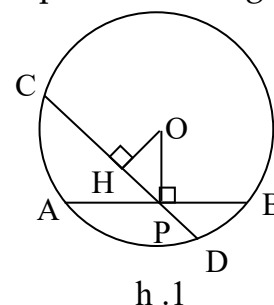
+Cách 1 :

Gọi AB là dây vuông góc với OP tại P , và dây CD là dây bất kỳ đi qua P và không trùng với AB (h.1).

Kẻ $OH \perp CD$.

$\triangle OHP$ vuông tại H $\Rightarrow OH < OP \Rightarrow CD > AB$

Như vậy trong tất cả các dây đi qua P , dây vuông góc với OP tại P có độ dài nhỏ nhất .



+ Cách 2 :

Xét dây AB bất kỳ đi qua P (h.2). Kẻ $OH \perp AB$

Theo liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

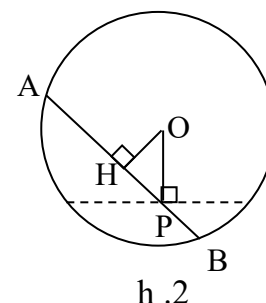
$AB \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow OH \text{ lớn nhất}$

Ta lại có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$

Do đó $\max OH = OP$

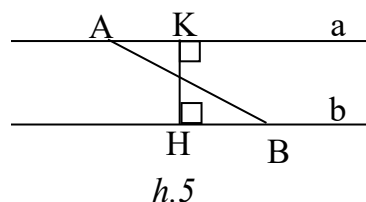
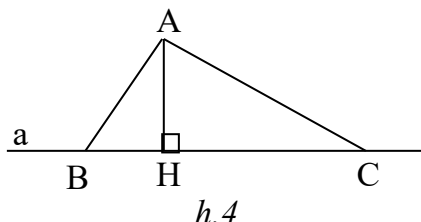
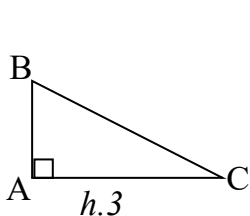
Khi đó dây AB vuông góc với OP tại P.



B. Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học.

1. Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu.

a-Kiến thức cần nhớ:



a₁) $\triangle ABC$ vuông tại A (có thể suy biến thành đoạn thẳng) $\Rightarrow AB \leq BC$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv C$. (h.3)

a₂) (h.4)

+ $AH \perp a \Rightarrow AH \leq AB$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$.

+ $AB < AC \Leftrightarrow HB < HC$

a₃) (h.5)

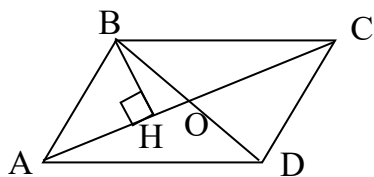
$A, K \in a; B, H \in b; a \parallel b; HK \perp a \Rightarrow HK \leq AB$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv K$ và $B \equiv H$.

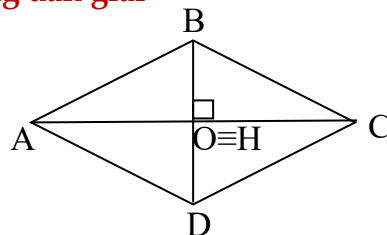
b- Các ví dụ:

Ví dụ 1: Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

Hướng dẫn giải



h.6



h.7

Xét hình bình hành ABCD có $AC = 8$ cm; $BD = 6$ cm (h.6)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Kẻ $BH \perp AC$.

Ta có : $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC.BH$

Ta có $AC = 8$ cm, $BH \leq BO = 3$ cm. Do đó :

$$S_{ABCD} \leq 8.3 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow BH \equiv BO \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow BD \perp AC$$

Vậy $\max S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2$. Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi (h.7) có diện tích 24 cm^2 .

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.

Giải :

$$\triangle HAE = \triangle EBF = \triangle FCG = \triangle GHD$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH$$

$\Rightarrow EFGH$ là hình thoi.

$$\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^\circ$$

$\Rightarrow EFGH$ là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG . Tứ giác $AECG$ có $AE = CG$, $AE \parallel CG$ nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG , do đó O là tâm của cả hai hình vuông $ABCD$ và $EFGH$.

$$\triangle HOE \text{ vuông cân : } HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$$

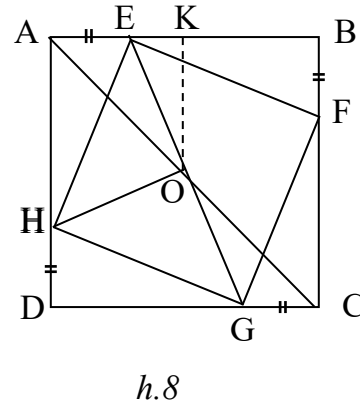
$$\text{Chu vi } EFGH = 4HE = 4\sqrt{2}OE. \text{ Do đó chu vi } EFGH \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow OE \text{ nhỏ nhất}$$

$$\text{Kẻ } OK \perp AB \Rightarrow OE \geq OK \text{ (} OK \text{ không đổi)}$$

$$OE = OK \Leftrightarrow E \equiv K$$

$$\text{Do đó } \min OE = OK$$

Như vậy, chu vi tứ giác $EFGH$ nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA .



Ví dụ 3: Cho đoạn thẳng AB có độ dài $2a$. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua trung điểm của M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D . Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích tam giác đó.

Hướng dẫn giải

Gọi K là giao điểm của CM và DB

$$MA = MB; \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ, \widehat{AMC} = \widehat{BMK}$$

$$\Rightarrow \triangle MAC = \triangle MBK \Rightarrow MC = MK$$

Mặt khác $DM \perp CK$

$$\Rightarrow \triangle DCK \text{ cân} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$$

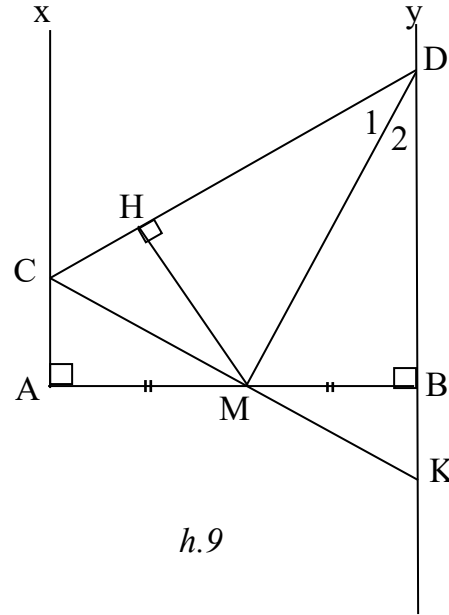
Kẻ $MH \perp CD$.

$$\triangle MHD = \triangle MBD \Rightarrow MH = MB = a$$

$$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{2} CD \cdot MH \geq \frac{1}{2} AB \cdot MH = \frac{1}{2} 2a \cdot a = a^2$$

$$S_{MCD} = a^2 \Leftrightarrow CD \perp Ax \text{ khi đó } \widehat{AMC} = 45^\circ; \widehat{BMD} = 45^\circ.$$

Vậy $\min S_{MCD} = a^2$. Các điểm C, D được xác định trên Ax, By sao cho $AC = BD = a$.



h.9

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ là góc tù, điểm D di chuyển trên cạnh BC . Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi S là diện tích $\triangle ABC$ Khi D di chuyển trên cạnh BC ta có:

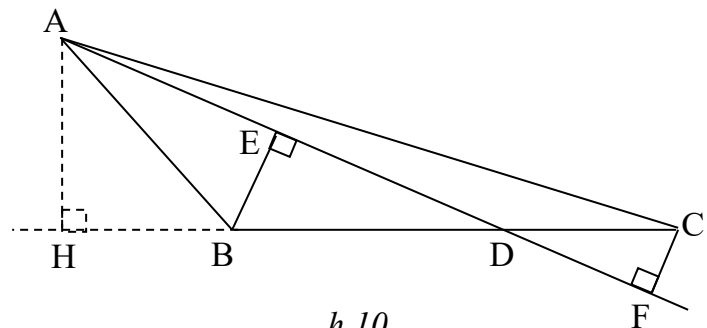
$$S_{ABD} + S_{ACD} = S$$

Kẻ $BE \perp AD, CF \perp AD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AD \cdot BE + \frac{1}{2} AD \cdot CF = S$$

$$\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}$$

Do đó $BE + CF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ hình chiếu HD nhỏ nhất



h.10

Do $HD \geq HB$ (do $\widehat{ABD} > 90^\circ$) và $HD = HB \Leftrightarrow D \equiv B$

Vậy Khi $D \equiv B$ thì tổng các khoảng cách từ B và C đến AD có giá trị lớn nhất .

2. Sử dụng quan hệ giữa đường thẳng và đường gấp khúc.

a. Kiến thức cần nhớ:

Với ba điểm A,B,C bất kỳ ta có : $AC + CB \geq AB$

$AC + CB = AB \Leftrightarrow C$ thuộc đoạn thẳng AB

b. Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho góc xOy và điểm A nằm trong góc đó. Xác định điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho $OB = OC$ và tổng $AB + AC$ là nhỏ nhất .

Hướng dẫn giải

Kẻ tia Om nằm ngoài góc xOy sao cho $\widehat{yOm} = \widehat{xOA}$. Trên tia Om lấy điểm D sao cho $OD = OA$. Các điểm D và A cố định .

$$OD = OA, OC = OB, \widehat{COD} = \widehat{BOA}$$

$$\Rightarrow \triangle DOC = \triangle AOB \Rightarrow CD = AB$$

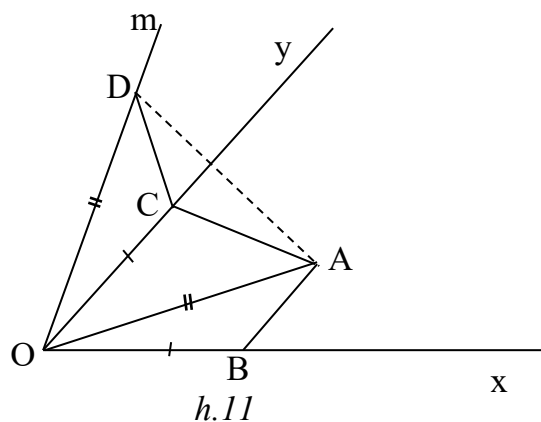
$$\text{Do đó } AC + AB = AC + CD$$

$$\text{Mà } AC + CD \geq AD$$

$$\Rightarrow AC + AB \geq AD$$

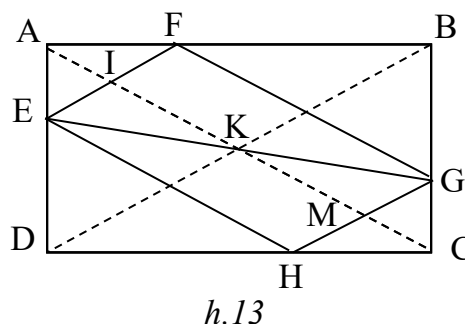
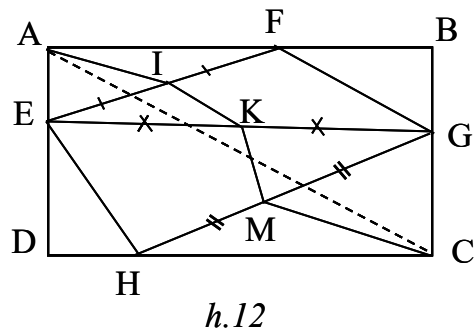
Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $C \in AD$

Vậy $\min(AC + AB) = AD$. Khi đó C là giao điểm của AD và Oy, B thuộc tia Ox sao cho $OB = OC$.



Ví dụ 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm E thuộc cạnh AD . Xác định vị trí các điểm F thuộc cạnh AB , G thuộc cạnh BC , H thuộc cạnh CD sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Gọi I, K, L theo thứ tự là trung điểm của EF, EG, EH (h.12).

$\triangle AEF$ vuông tại A có AI là trung tuyến $\Rightarrow AI = \frac{1}{2}EF$

$\triangle CGH$ vuông tại C có CM là trung tuyến $\Rightarrow CM = \frac{1}{2}GH$

IK là đường trung bình của $\triangle EFG \Rightarrow IK = \frac{1}{2}FG$

KM là đường trung bình của $\triangle EGH \Rightarrow KM = \frac{1}{2}EH$

Do đó : chu vi $EFGH = EF + FG + GH + EH = 2(AI + IK + KM + MC)$

Ta lại có : $AI + IK + KM + MC \geq AC$

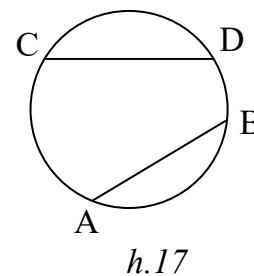
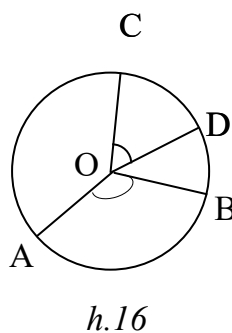
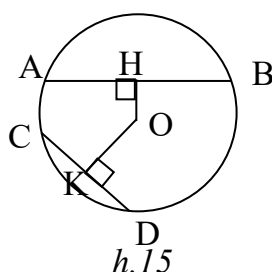
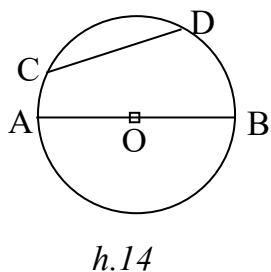
Suy ra chu vi $EFGH \geq 2AC$ (độ dài AC không đổi)

Chu vi $EFGH$ nhỏ nhất bằng $2AC \Leftrightarrow A, I, K, M, C$ thẳng hàng.

Khi đó ta có $EH \parallel AC, FG \parallel AC, \widehat{AEI} = \widehat{EAI} = \widehat{ADB}$ nên $EF \parallel DB$, tương tự $GH \parallel DB$.
Suy ra tứ giác $EFGH$ là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$ (h.13).

3. Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.

a. Kiến thức cần nhớ:



a₁) Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

AB là đường kính, CD là dây bất kỳ $\Rightarrow CD \leq AB$ (h.14)

a₂) Trong hai dây của đường tròn.

Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn

Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn

OH, OK là các khoảng cách từ tâm đến dây AB và CD :

$AB \geq CD \Leftrightarrow OH \leq OK$ (h.15)

a₃) AB, CD là các cung nhỏ của (O) : $AB \geq CD \Leftrightarrow \widehat{AOB} \geq \widehat{COD}$ (h.16)

a₄) AB, CD là các cung nhỏ của (O) : $AB \geq CD \Leftrightarrow \widehat{AB} \geq \widehat{CD}$ (h.17)

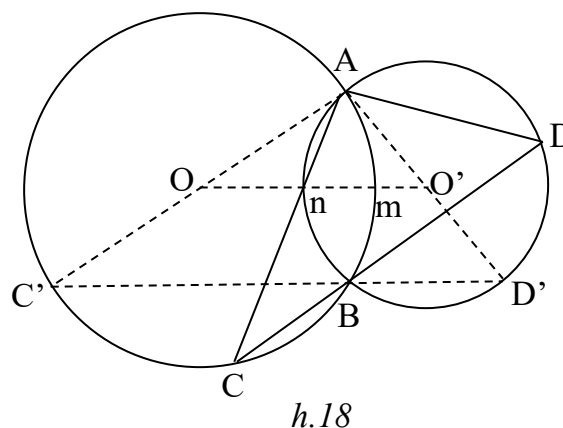
b. Các ví dụ:

Ví dụ 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B, một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D. Xác định vị trí của cát tuyến CBD để $\triangle ACD$ có chu vi lớn nhất.

Hướng dẫn giải

$$\text{sđ } \widehat{C} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AmB} ; \text{sđ } \widehat{D} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AnB}$$

$\Rightarrow$ số đo các góc $\triangle ACD$ không đổi (do A, B cố định)



$\Rightarrow \Delta ACD$ có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất, chẳng hạn AC là lớn nhất.

AC là dây của đường tròn (O) , do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O) , khi đó AD là đường kính của đường tròn (O') . Cát tuyến CBD ở vị trí $C'BD'$ vuông góc với dây chung AB .

Ví dụ 8: Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn. Xác định dây AB đi qua P sao cho $\widehat{OAB}$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Xét tam giác cân OAB , góc ở đáy $\widehat{OAB}$ lớn nhất nếu góc ở đỉnh $\widehat{AOB}$ nhỏ nhất.

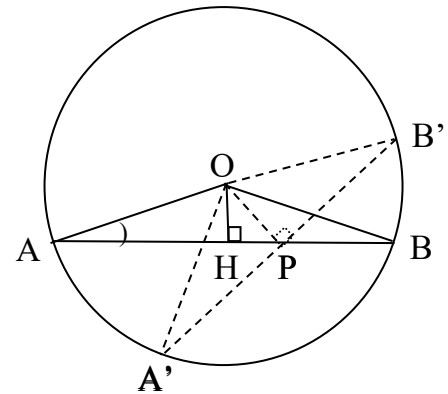
$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB}$$

Góc $\widehat{AOB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Cung $\widehat{AB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ dây AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.

Ta có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$ nên $\max OH = OP \Leftrightarrow AB \perp OP$

Suy ra dây AB phải xác định là dây $A'B'$ vuông góc với OP tại P .



h.19

4. Sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai.

a. Kiến thức cần nhớ:

Các bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai được sử dụng dưới dạng:

$$A^2 \geq 0 ; -A^2 \leq 0$$

Do đó với m là hằng số, ta có:

$$f = A^2 + m \geq m ; \min f = m \text{ với } A = 0$$

$$f = -A^2 + m \leq m ; \max f = m \text{ với } A = 0$$

b. Các ví dụ:

Ví dụ 9: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Tính độ dài AE sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

$$\triangle AHE = \triangle BEF = \triangle CFG = \triangle DGH$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH, \angle HEF = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ HEFG là hình vuông nên chu vi EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất.

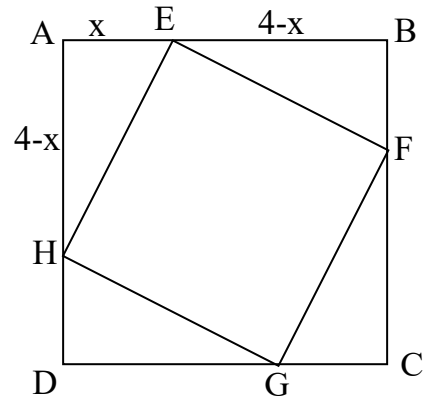
$$\text{Đặt } AE = x \text{ thì } HA = EB = 4 - x$$

$\triangle HAE$ vuông tại A nên :

$$HE^2 = AE^2 + HA^2 = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x - 2)^2 + 8 \geq 8$$

$$HE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$$

Chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất bằng $8\sqrt{2}$ cm, khi đó $AE = 2$ cm.



h.20

Ví dụ 10: Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC. Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ADME.

Hướng dẫn giải

ADME là hình chữ nhật.

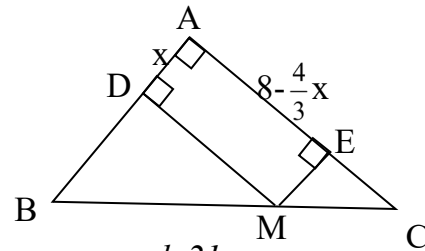
$$\text{Đặt } AD = x \text{ thì } ME = x$$

$$ME \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CE}{8} \Rightarrow CE = \frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow AE = 8 - \frac{4}{3}x$$

$$\text{Ta có : } S_{ADME} = AD \cdot AE = x \left(8 - \frac{4}{3}x \right) = 8x - \frac{4}{3}x^2 = -\frac{4}{3}(x - 3)^2 + 12 \leq 12$$

$$S_{ADME} = 12 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow x = 3$$



h.21

Diện tích lớn nhất của tứ giác ADME bằng 12 cm^2 , khi đó D là trung điểm của AB, M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AC.

5. Sử dụng bất đẳng thức Cô-si .

a-Kiến thức cần nhớ:

Bất đẳng thức Cô-si : Với $x \geq 0 ; y \geq 0$ ta có : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Bất đẳng thức Cô-si thường được sử dụng dưới các dạng sau :

$$+ \text{Dạng 1: } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy \text{ hay } (x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

$$+ \text{Dạng 2: } \frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4 ; \frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} \leq 2 ; \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 3: Với $x \geq 0 ; y \geq 0 ; x + y$ không đổi thì xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 4: Với $x \geq 0 ; y \geq 0 ; xy$ không đổi thì $x+y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$

b. Các ví dụ:

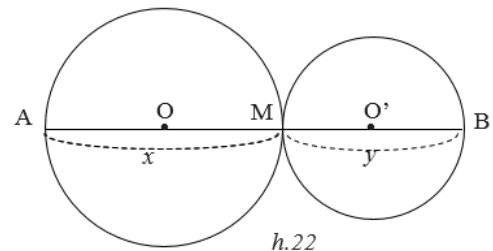
Ví dụ 11: Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy . Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB . Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất .

Giải :

Đặt $MA = x, MB = y$

Ta có : $x + y = AB$ ($0 < x, y < AB$)

Gọi S và S' theo thứ tự là diện tích của hai hình tròn có đường kính là MA và MB .



$$\text{Ta có: } S + S' = \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4}$$

$$\text{Ta có bất đẳng thức: } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ nên:}$$

$$S + S' \geq \pi \cdot \frac{(x+y)^2}{8} = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

$$\text{Do đó } \min(S + S') = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}. \text{ Khi đó } M \text{ là trung điểm của } AB.$$

Ví dụ 12: Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB . Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D . Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } S_{MCD} = \frac{1}{2} MC \cdot MD$$

$$\text{Đặt } MA = a, MB = b$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$$

$$MC = \frac{a}{\cos \alpha}, MD = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} \frac{ab}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

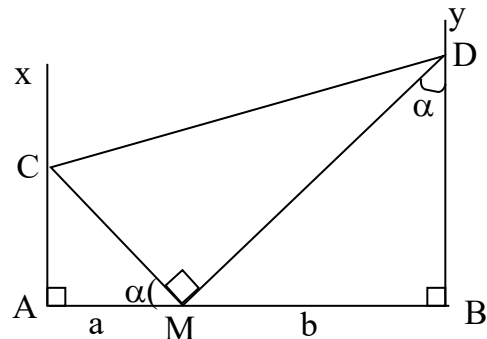
Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.

Theo bất đẳng thức $2xy \leq x^2 + y^2$ ta có:

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{nên} \quad S_{MCD} \geq ab$$

$$S_{MCD} = ab \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

$\Leftrightarrow \triangle AMC$ và $\triangle BMD$ vuông cân.



h.23

Vậy $\min S_{MCD} = ab$. Khi đó các điểm C, D được xác định trên tia Ax ; By sao cho $AC = AM$, $BD = BM$.

Ví dụ 13: Cho $\triangle ABC$, điểm M di động trên cạnh BC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và với AB, chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành ADME có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

$$S_{ADME} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} \text{ lớn nhất}$$

Kẻ $BK \perp AC$ cắt MD ở H.

$$S_{ADME} = MD \cdot HK$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$$

$$\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2 \cdot \frac{MD}{AC} \cdot \frac{HK}{BK}$$

Đặt $MB = x$, $MC = y$,

$$MD \parallel AC \text{ ta có: } \frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{x+y}; \quad \frac{HK}{BK} = \frac{MC}{BC} = \frac{y}{x+y}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức } \frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$

Vậy $\max S_{ADME} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ khi đó M là trung điểm của BC.

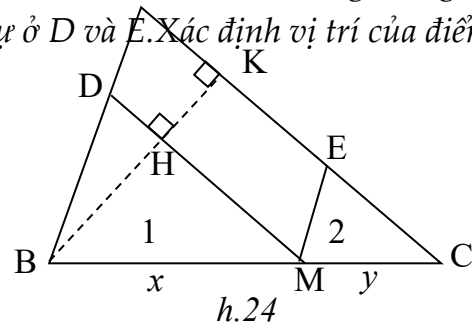
Ví dụ 14: Cho $\triangle ABC$ vuông cân có cạnh huyền $BC = a$. Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC. Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH. Khi đó hình thang trở thành hình gì?

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$2S_{DEKH} = (DH + EK) \cdot HK = (BH + KC) \cdot HK$$

Mà $(BH + KC) + HK = BC = a$ không đổi



Nên $(BH + KC) \cdot HK$ lớn nhất $\Leftrightarrow BH + KC = HK = \frac{a}{2}$

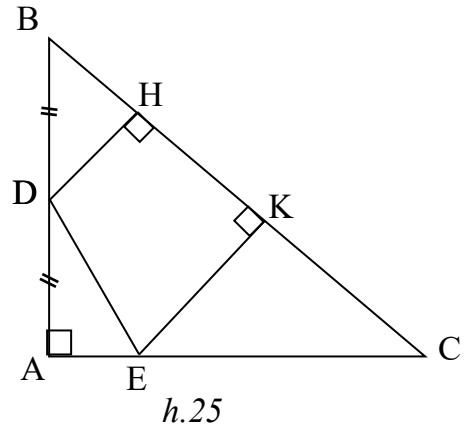
Do đó :

$$\max S_{DEKH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$$

Khi đó đường cao $HK = \frac{a}{2}$ suy ra :

$$KC = BC - BH - HK = a - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$$

$$\text{Do đó } DH = HB = \frac{a}{4}, EK = KC = \frac{a}{4}.$$



Hình thang DEKH là hình chữ nhật, E là trung điểm của AC.

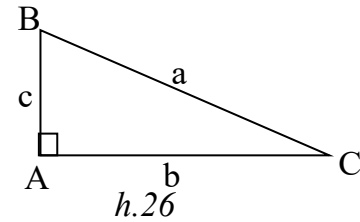
6. Sử dụng tỉ số lượng giác.

a-Kiến thức cần nhớ:

Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

$$+ b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$$

$$+ b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$$



b-Các ví dụ:

Ví dụ 15: Chứng minh rằng trong các tam giác cân có cùng diện tích tam giác có cạnh đáy nhỏ hơn là tam giác có góc ở đỉnh nhỏ hơn.

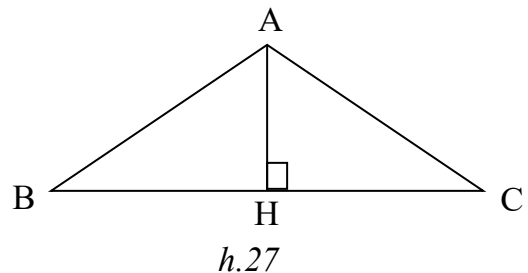
Hướng dẫn giải

Xét các tam giác ABC cân tại A có cùng diện tích S. Kẻ đường cao AH. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$

$\triangle AHC$ vuông tại H, ta có :

$$\widehat{HAC} = \frac{\alpha}{2},$$

$$AH = HC \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} BC \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$



$$\text{Do đó : } S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{1}{2} BC \cdot \cot g \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} BC^2 \cot g \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{4S}{\cot g \frac{\alpha}{2}}} = 2\sqrt{S \cdot \tan g \frac{\alpha}{2}}$$

Do S không đổi nên :

$$BC \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \tan g \frac{\alpha}{2} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \alpha \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \widehat{BAC} \text{ nhỏ nhất}$$

Ví dụ 16: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy các điểm K, M sao cho $BK : KC = 4 : 1$, $CM : MD = 4 : 1$. Tìm tỉ số $AB : BC$ để số đo góc $\widehat{KAM}$ lớn nhất.

$$(\text{Cho công thức biến đổi } \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y})$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \widehat{BAK} = x, \widehat{DAM} = y \quad (x+y < 90^\circ)$$

$$\widehat{KAM} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \widehat{BAK} + \widehat{DAM} \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow x+y \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \tan(x+y) \text{ nhỏ nhất}$$

$$\text{Giả sử } AB : BC = 1 : m \quad (m > 0)$$

$$\tan x = \frac{BK}{AB} = \frac{BK}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{4m}{5}$$

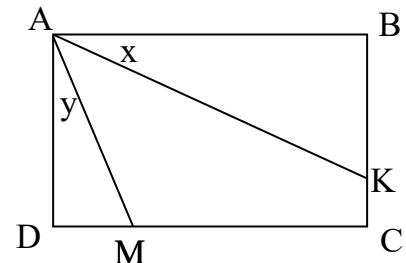
$$\tan y = \frac{DM}{AD} = \frac{DM}{DC} \cdot \frac{DC}{AD} = \frac{1}{5m}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \left(\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \right) : \left(1 - \frac{4m}{5} \cdot \frac{1}{5m} \right) = \frac{25}{21} \left(\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \right)$$

$$\tan(x+y) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \text{ nhỏ nhất}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{4m}{5} + \frac{1}{5m} \geq 2\sqrt{\frac{4m}{5} \cdot \frac{1}{5m}} = \frac{4}{5}$$



h.28

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{4m}{5} = \frac{1}{5m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Vậy $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$

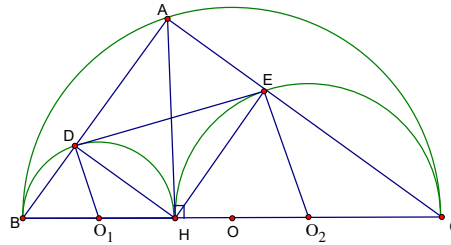
Do đó $\widehat{KAM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $AB : BC = 2 : 1$

C. Một số bài toán ôn luyện có hướng dẫn

Bài 1. Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH \perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm $O_1; O_2$ cắt AB, AC thứ tự tại D và E .

- Chứng minh tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết $R = 25$ và $BH = 10$
- Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.
- Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác DEO_1O_2 đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

Hướng dẫn giải



- Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{BDH} = \widehat{CEH} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ADHE$ có $\widehat{A} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật.

Từ đó $DE = AH$ mà $AH^2 = BH \cdot CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

hay $AH^2 = 10 \cdot 40 = 400$ ($BH = 10$; $CH = 2 \cdot 25 - 10 = 40$) $\Rightarrow DE = 20$ (đơn vị độ dài)

- Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{DAH} = \widehat{ADE}$ (1)

(Vì $ADHE$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{ADE}$ do $\widehat{C} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ nên tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

- Vì $O_1D = O_1B \Rightarrow \Delta O_1BD$ cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BDO_1}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{BDO_1} = \widehat{B} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow O_1D \parallel O_2E$

Vậy DEO_1O_2 là hình thang vuông tại D và E .

Ta có $S = \frac{1}{2}(O_1D + O_2E) \cdot DE = \frac{1}{2}O_1O_2 \cdot DE \leq \frac{1}{2}O_1O_2^2$

(Vì $O_1D + O_2E = O_1H + O_2H = O_1O_2$ và $DE \leq O_1O_2$)

$$S_{\text{ht}} \leq \frac{1}{2}O_1O_2^2 = \frac{BC^2}{8} = \frac{R^2}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $DE = O_1O_2$

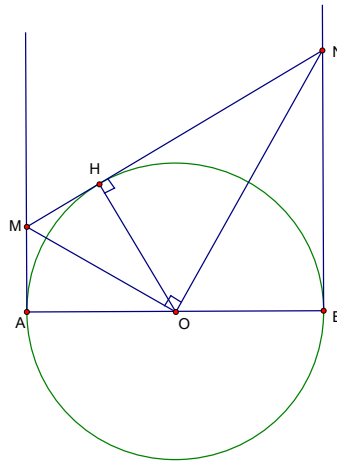
$\Leftrightarrow DEO_1O_2$ là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung BC Khi đó $\max S_{DEO_1O_2} = \frac{R^2}{2}.$

Bài tập 2. Cho đường tròn (O), đường kính AB, d1, d2 là các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB. Lấy M, N là các điểm lần lượt thuộc d1, d2 sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$.

- 1) Chứng minh đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- 2) Chứng minh $AM \cdot BN = \frac{AB^2}{4}$.
- 3) Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác MON đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

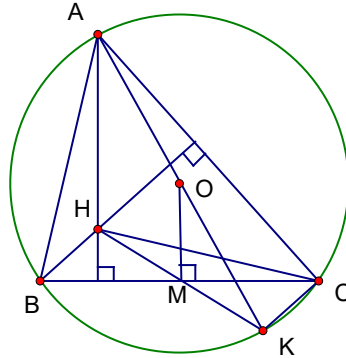


- 1) Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng MN. Xét tứ giác OAMH
 $\widehat{A} + \widehat{H} = 180^\circ$ (do $\widehat{A} = \widehat{H} = 90^\circ$)
 $\Rightarrow$ OAMH là tứ giác nội tiếp đường tròn.
Tương tự tứ giác OBNH nội tiếp được
 $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{M_1}$, $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn 1 cung)
 $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = \widehat{M_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ$. Hay H thuộc (O) lại có $OH \perp MN$
 $\Rightarrow$ MN là tiếp tuyến của (O)
- 2) Ta có $AM = MH$, $BN = NH$, theo hệ thức lượng trong tam vuông, ta có:
 $AM \cdot BN = MH \cdot NH = OH^2 = \frac{AB^2}{4}$ (đpcm)
3. $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} OH \cdot MN \geq \frac{1}{2} OH \cdot AB$ (Vì AMNB là hình thang vuông)
Dấu “=” khi và chỉ khi $MN = AB$ hay H là điểm chính giữa của cung AB
 $\Leftrightarrow M, N$ song song với AB $\Leftrightarrow AM = BN = \frac{AB}{2}$.
Vậy $S_{\triangle MON}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM = BN = \frac{AB}{2}$.

Bài tập 3. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, trực tâm là H và nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính AK.

- Chứng minh tứ giác BHCK là hình bình hành.
- Vẽ $OM \perp BC$ ($M \in BC$). Chứng minh H, M, K thẳng hàng và $AH = 2.OM$.
- Gọi A', B', C' là chân các đường cao thuộc các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$ Khi BC cố định hãy xác định vị trí điểm A để tổng $S = A'B' + B'C' + C'A'$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

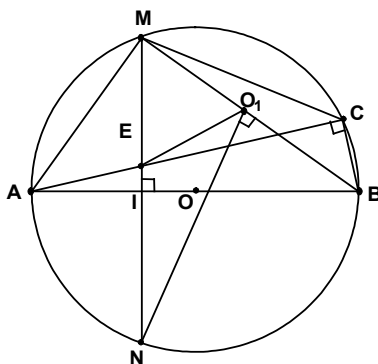


- Ta có $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
Nên $CK \perp AC$ mà $BH \perp AC$ (vì H trực tâm)
 $\Rightarrow CK \parallel BH$ tương tự có $CH \parallel BK$
 $\Rightarrow$ Tứ giác BHCK là hbh (đpcm)
- $OM \perp BC \Rightarrow M$ trung điểm của BC
(định lý đường kính và dây cung) $\Rightarrow M$ là trung điểm của HK (vì BHCK là hình bình hành) $\Rightarrow$ đpcm $\triangle AHK$ có OM là đường trung bình $\Rightarrow AH = 2.OM$
- Ta có $\widehat{AC'C} = \widehat{BB'C} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BC'B'C$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$ (Ax là tiếp tuyến tại A) $\Rightarrow Ax \parallel B'C'$
 $OA \perp Ax \Rightarrow OA \perp B'C'$. Do đó $S_{AB'OC'} = \frac{1}{2} R.B'C'$
Tương tự: $S_{BA'OC'} = \frac{1}{2} R.A'C'$; $S_{CB'OA'} = \frac{1}{2} R.A'B'$
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} R(A'B' + B'C' + C'A') = \frac{1}{2} AA'.BC \leq \frac{1}{2} (AO + OM).BC$
 $\Rightarrow A'B' + B'C' + C'A'$, lớn nhất khi A, O, M thẳng hàng
 $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC

Bài tập 4. Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

- 1) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp.
- 2) Chứng minh hệ thức: $AM^2 = AE.AC$
- 3) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



1. Theo giả thiết $MN \perp AB$ tại I

$$\widehat{ACB} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{ECB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EIB} + \widehat{ECB} = 180^\circ$$

mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết $MN \perp AB$, suy ra A là điểm chính giữa của $\widehat{MN}$ nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay $\widehat{AME} = \widehat{ACM}$, lại có $\widehat{CAM}$ là góc chung do đó tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM $\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$

$$C2: AM^2 = AI.AB = AE.AC$$

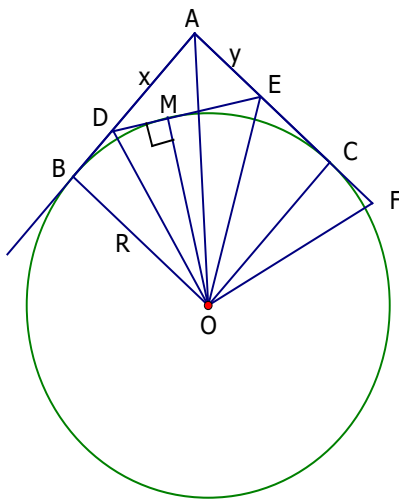
3. Theo trên $\widehat{AMN} = \widehat{ACM} \Rightarrow AM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECM$. Nối MB ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$, do đó tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECM$ phải nằm trên BM. Ta thấy NO_1 nhỏ nhất khi NO_1 là khoảng cách từ N đến BM $\Rightarrow NO_1 \perp BM$. Gọi O_1 là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECM$ có bán kính là O_1M .

Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECM$ là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn (O_1), bán kính O_1M với đường tròn (O) trong đó O_1 là hình chiếu vuông góc của N trên BM.

Bài tập 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = R\sqrt{2}$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy D thuộc AB ; E thuộc AC sao cho chu vi của tam giác ADE bằng $2R$.

- Chứng minh tứ giác $ABOC$ là hình vuông.
- Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.
- Tìm giá trị lớn nhất của diện tích $\triangle ADE$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến) (1)

$$AB = AC = \sqrt{OA^2 - OB^2} = R = OB = OC \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $ABOC$ là hình vuông.

b) Theo bài ra ta có: $AD + DE + AE = 2R$ (3).

Suy ra: $DE = BD + CE$ (4).

Vẽ $OM \perp DE$ ($M \in DE$) (5)

Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CF = BD$; suy ra $\triangle BDO = \triangle COF$ (c-g-c)

$\Rightarrow OD = OF$; lại có $DE = FE$ nên $\triangle ODE = \triangle OFE$ (c-c-c)

$\Rightarrow OM = OC = R$ (hai đường cao tương ứng) (6).

Từ (5) và (6) suy ra DE là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

c) Đặt: $AD = x$; $AE = y \Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2}xy$ ($x, y > 0$)

Ta có: $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (định lý Pitago).

Vì $AD + DE + AE = 2R \Rightarrow x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2R$ (6)

Áp dụng BĐT – Côsi cho hai số không âm ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ và $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2xy}$ (7).

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Từ (6) và (7) suy ra: $2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy} \leq 2R \Leftrightarrow \sqrt{xy}(2 + \sqrt{2}) \leq 2R$

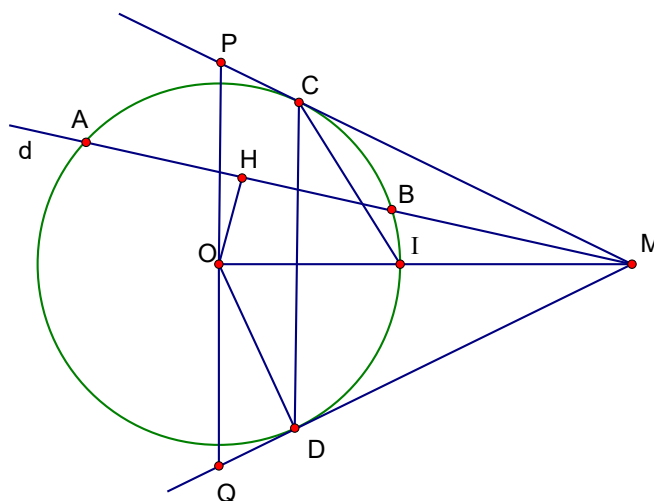
$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{2R}{(2+\sqrt{2})} \Leftrightarrow xy \leq \frac{2R^2}{3+2\sqrt{2}} \Rightarrow SADE \leq \frac{R^2}{3+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow S_{ADE} \leq (3 - 2\sqrt{2})R^2.$$

Vậy $\max SADE = (3 - 2\sqrt{2})R^2 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \triangle ADE$ cân tại A

Bài tập 6. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B . Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB

- 1) Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) Đoạn OM cắt đường tròn tại I . Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD
- 3) Đường thẳng qua O , vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q . Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

Hướng dẫn giải



1) Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $\widehat{OHM} = 90^\circ$. Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $\widehat{ODM} = 90^\circ$. Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $MC = MD \Rightarrow \triangle MCD$ cân tại $M \Rightarrow MI$ là một đường phân giác của $\widehat{CMD}$.

Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{CD}$ nên $\widehat{DCI} = \frac{1}{2} s\widehat{D} = \frac{1}{2} s\widehat{C} = \widehat{MCI}$

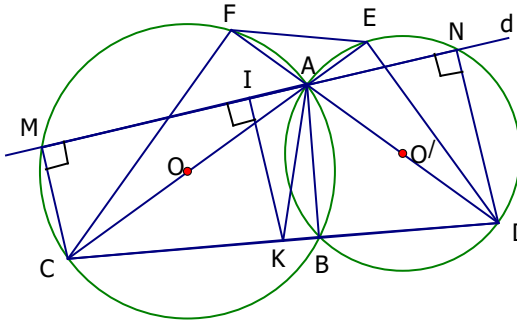
$\Rightarrow CI$ là phân giác của $\widehat{MCD}$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD

3) Ta có tam giác MPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính:
 $S = 2S_{OMQ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OD \cdot QM = R(MD + DQ)$. Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow MD + DQ$ nhỏ nhất. Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có $DM \cdot DQ = OD^2 = R^2$ không đổi nên $MD + DQ$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DM = DQ = R$. Khi đó $OM = R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

Bài tập 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ AC, AD thứ tự là đường kính của hai đường tròn (O) và (O').

- Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.
- Đường thẳng AC cắt đường tròn (O') tại E; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F (E, F khác A). Chứng minh 4 điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
- Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt (O) và (O') thứ tự tại M và N. Xác định vị trí của d để $CM + DN$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



- Ta có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và (O')
 $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$ $\widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 180^\circ$
 Suy ra C, B, D thẳng hàng.

- Xét tứ giác CDEF có:

$$\widehat{CFD} = \widehat{CFA} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))}$$

$$\widehat{CED} = \widehat{AED} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))}$$

$$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^\circ \text{ suy ra CDEF là tứ giác nội tiếp.}$$

- Ta có $\widehat{CMA} = \widehat{DNA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); suy ra $CM \parallel DN$ hay CMND là hình thang.

Gọi I, K thứ tự là trung điểm của MN và CD. Khi đó IK là đường trung bình của hình thang CMND. Suy ra $IK \parallel CM \parallel DN$ (1) và $CM + DN = 2 \cdot IK$ (2)

Từ (1) suy ra $IK \perp MN \Rightarrow IK \leq KA$ (3) (KA là hằng số do A và K cố định).

Từ (2) và (3) suy ra: $CM + DN \leq 2KA$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $IK = AK \Leftrightarrow d \perp AK$ tại A

Vậy khi đường thẳng d vuông góc AK tại A thì $(CM + DN)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $2KA$

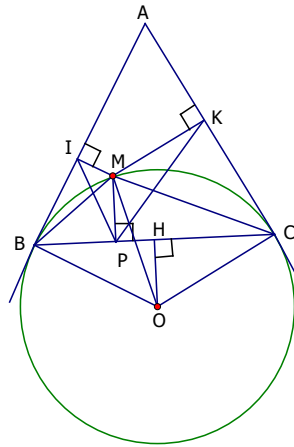
Bài tập 8. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ ($I \in AB, K \in AC$)

a) Chứng minh: AIMK là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ $MP \perp BC$ ($P \in BC$). Chứng minh: $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^\circ$ (gt), suy ra tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn đường kính AM.

b) Tứ giác CPMK có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^\circ$ (gt). Do đó CPMK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPK} = \widehat{MCK}$ (1). Vì KC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $\widehat{MCK} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn $\widehat{MC}$) (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$ (3)

c) Chứng minh tương tự câu b ta có BPMI là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{MIP} = \widehat{MBP}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MIP}$.

Tương tự ta chứng minh được $\widehat{MKP} = \widehat{MPI}$.

Suy ra: $MPK \sim \Delta MIP \Rightarrow \frac{MP}{MK} = \frac{MI}{MP}$

$\Rightarrow MI.MK = MP^2 \Rightarrow MI.MK.MP = MP^3$.

Do đó $MI.MK.MP$ lớn nhất khi và chỉ khi MP lớn nhất (4)

- Gọi H là hình chiếu của O trên BC, suy ra OH là hằng số (do BC cố định).

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AC \perp AB$; $BD \perp AB \Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow$ tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB $\Rightarrow$ IO là đường trung bình của hình thang ACDB

$IO \parallel AC$, mà $AC \perp AB \Rightarrow IO \perp AB$ tại O $\Rightarrow$ AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà $CA = CM$; $DB = DM$ nên suy ra $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

$\Rightarrow MN \parallel BD$ mà $BD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$

7. Ta có chu vi tứ giác ACDB = $AB + AC + CD + BD$ mà $AC + BD = CD$ nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = $AB + 2CD$ mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất, mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữa Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó $CD \parallel AB \Rightarrow$ M phải là trung điểm của cung AB.

Bài tập 10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B Tia AM cắt d tại điểm N. Đường thẳng OC cắt d tại E.

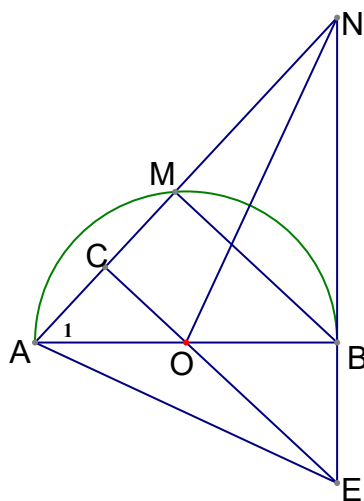
a) Chứng minh: tứ giác OCNB nội tiếp.

b) Chứng minh: $AC \cdot AN = AO \cdot AB$

c) Chứng minh: NO vuông góc với AE.

d) Tìm vị trí điểm M sao cho $(2 \cdot AM + AN)$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



6.

a) Phần đường kính OC đi qua trung điểm C của AM $\Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OCN} = 90^\circ$.

BN là tiếp tuyến của (O) tại B $\Rightarrow OB \perp BN \Rightarrow \widehat{OBN} = 90^\circ$.

Xét tứ giác OCNB có tổng hai góc đối: $\widehat{OCN} + \widehat{OBN} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Do đó tứ giác OCNB nội tiếp.

b) Xét $\triangle ACO$ và $\triangle ABN$ có: $\widehat{A}_1$ chung; $\widehat{ACO} = \widehat{ABN} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle ABN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AO}{AN}$$

Do đó $AC \cdot AN = AO \cdot AB$ (đpcm).

c) Theo chứng minh trên, ta có:

$OC \perp AM \Rightarrow EC \perp AN \Rightarrow EC$ là đường cao của $\triangle ANE$ (1)

$OB \perp BN \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow AB$ là đường cao của $\triangle ANE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trực tâm của $\triangle ANE$ (vì O là giao điểm của AB và EC).

$\Rightarrow NO$ là đường cao thứ ba của $\triangle ANE$.

Do đó; $NO \perp AE$ (đpcm).

d) Ta có: $2 \cdot AM + AN = 4AC + AN$ (vì C là trung điểm của AM).

$$4AC \cdot AN = 4AO \cdot AB = 4R \cdot 2R = 8R^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$4AC + AN \geq 2\sqrt{4AC \cdot AN} = 2\sqrt{8R^2} = 4\sqrt{2}R$$

$$\Rightarrow \text{Tổng } 2 \cdot AM + AN \text{ nhỏ nhất} = 4\sqrt{2}R \Leftrightarrow 4AC = AN$$

$$\Leftrightarrow AN = 2AM \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } AN.$$

$\triangle ABN$ vuông tại B có BM là đường trung tuyến nên $AM = MB$

$$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{BM} \Rightarrow M \text{ là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính } AB$$

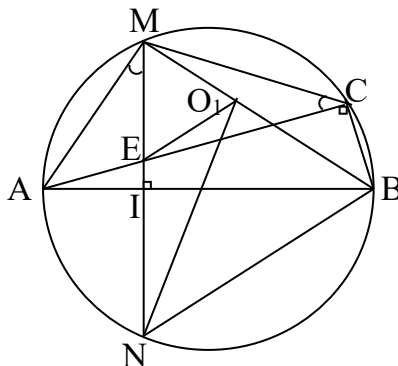
Vậy với M là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB thì $(2 \cdot AM + AN)$ nhỏ nhất $= 4\sqrt{2}R$.

Bài tập 11. Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi không trùng với AB Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E và F . Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF .

- 1) Chứng minh $ACBD$ là hình chữ nhật;
- 2) Gọi H là trực tâm của tam giác BPQ . Chứng minh H là trung điểm của OA ;
- 3) Xác định vị trí của đường kính CD để tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Hướng dẫn giải



- a) * $\widehat{EIB} = 90^\circ$ (giả thiết)
 * $\widehat{ECB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 * Kết luận: Tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp

b) Ta có:

$$* \widehat{\text{sdf AM}} = \widehat{\text{sdf AN}}$$

$$*\widehat{\text{AME}} = \widehat{\text{ACM}}$$

*Góc A chung, suyra $\Delta AME \sim \Delta ACM$.

* Do đó: $\frac{AC}{AM} = \frac{AM}{AE} \Leftrightarrow AM^2 = AE.AC$

- c) * MI là đường cao của tam giác vuông MAB nên $MI^2 = AI \cdot IB$

* Trừ từng vế của hệ thức ở câu b) với hệ thức trên

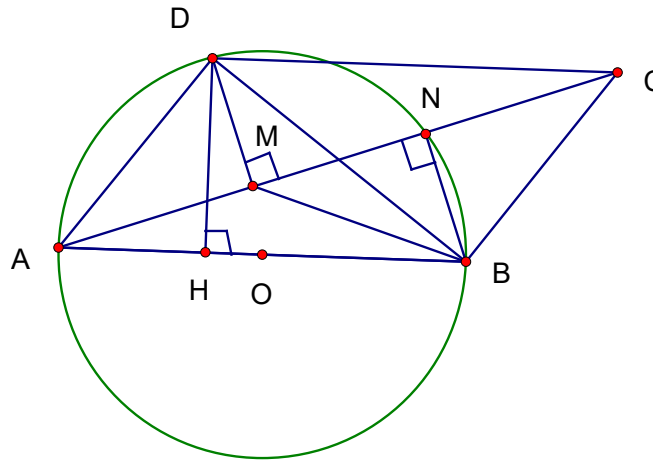
* Ta có: $AE.AC - AI.IB = AM^2 - MI^2 = AI^2$.

- d) * Từ câu b) suy ra AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME. Do đó tâm O₁ của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME nằm trên BM. Ta thấy khoảng cách NO₁ nhỏ nhất khi và chỉ khi NO₁ ⊥ BM.)

* Dựng hình chiếu vuông góc của N trên BM ta được O1. Điểm C là giao của đường tròn đã cho với đường tròn tâm O1, bán kính O1M.

Bài tập 14. Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Hạ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC

- Chứng minh tứ giác: CBMD nội tiếp được
- Chứng minh rằng: $DBDC = DN.AC$
- Xác định vị trí của điểm D để diện tích hình bình hành ABCD có diện tích lớn nhất và tính diện tích trong trường hợp này

Hướng dẫn giải

a. $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

mà $AD \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow DB \perp BC$

Xét tứ giác DMBC có $\widehat{DMC} = \widehat{DBC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác nội tiếp.

b. Ta có $\triangle DBN$ đồng dạng với $\triangle CAD$

($\widehat{DAC} = \widehat{DBN}$, $\widehat{BDN} = \widehat{BAN} = \widehat{DCA}$)

$$\Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{DB}{AC} \Rightarrow DB \cdot DC = DN \cdot AC$$

c. $S_{ABCD} = DH \cdot AB$

Do AB không đổi $= 2R$

$\Rightarrow S_{ABCD} \max \Leftrightarrow DH \max \Leftrightarrow D$ nằm chính giữa cung AB

Bài tập 15. Cho đường tròn (O), dây AB không đi qua tâm. Trên cung nhỏ AB lấy điểm M (M không trùng với A, B). Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H. Kẻ MK vuông góc với AN (K $\in$ AN).

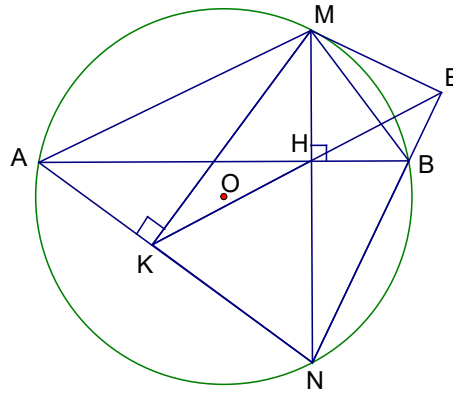
1) Chứng minh: Bốn điểm A, M, H, K thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh: MN là phân giác của góc BMK.

3) Khi M di chuyển trên cung nhỏ AB Gọi E là giao điểm của HK và BN.

Xác định vị trí của điểm M để $(MK \cdot AN + ME \cdot NB)$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Chú ý: Kể cả trường hợp đặc biệt khi MN đi qua O

1) Từ giả thiết: $\widehat{AKM} = 90^\circ$, $\widehat{AHM} = 90^\circ$

Bốn điểm A, K, H, M cùng thuộc một đường tròn

$$2) \widehat{NAH} = \widehat{NMK} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{KH} \quad (1)$$

$$\widehat{NAH} = \widehat{NMB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{NB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{NMK} = \widehat{NMB}$

$\Rightarrow$ MN là phân giác của góc KMB

$$3) \widehat{MAB} = \widehat{MNB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{MB}; \widehat{MAB} = \widehat{MKH} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{MH}$$

$$\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{MKH} \Rightarrow K, M, E, N \text{ cùng thuộc một đường tròn}$$

$$\Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{MKN} = 180^\circ \Rightarrow ME \perp NB$$

$$S_{\triangle MAN} = \frac{1}{2} MK \cdot AN; S_{\triangle MNB} = \frac{1}{2} ME \cdot NB; S_{\square AMBN} = \frac{1}{2} MN \cdot AB$$

$$\Rightarrow MK \cdot AN + ME \cdot BN = MN \cdot AB$$

$$\Rightarrow (MK \cdot NA + ME \cdot NB) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow MN \cdot AB \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow MN \text{ lớn nhất (Vì } AB = \text{const)} \Rightarrow M \text{ là chính giữa } \widehat{AB}$$

Bài tập 16. Cho (O), dây cung AB. Từ điểm M bất kỳ trên cung AB sao cho $MA > MB$ ($M \neq A$ và $M \neq B$), kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại H. Gọi MQ là đường cao của tam giác MAN.

1. C/m 4 điểm A; M; H; Q cùng nằm trên một đường tròn.

2. C/m: $NQ \cdot NA = NH \cdot NM$

3. C/m MN là phân giác của góc $\widehat{BMQ}$.

4. Hạ đoạn thẳng MP vuông góc với BN; xác định vị trí của M trên cung AB để $MQ \cdot AN + MP \cdot BN$ có giá trị lớn nhất.

$$\widehat{AQM} = \widehat{AHM} = 90^0$$

Xét hai Δ vuông NQM và Δ NAH đồng dạng. (g-g)

$$\widehat{QMN} = \widehat{NAH} \text{ (Cùng phụ với góc ANH)}$$
$$\widehat{NAH} = \widehat{NMB} \text{ (Cùng chắn cung NB)} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Ta có $2S_{\Delta MAN} = MQ.AN$

$$2S_{\triangle MBN} = MP \cdot BN.$$

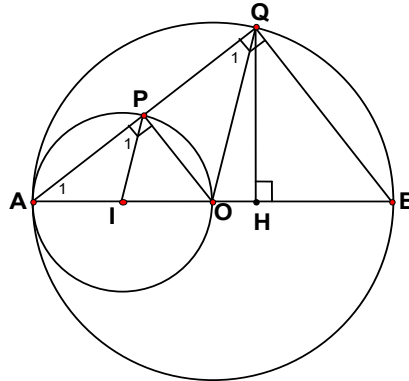
Ta lại có: $2S_{\Delta MAN} + 2S_{\Delta MBN} = 2(S_{\Delta MAN} + S_{\Delta MBN}) = 2S_{\Delta MBN} = 2 \cdot \frac{AB \times MN}{2} = AB \cdot MN$

$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB

4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

Toán Học: 0986 915 960 – Tổng hợp.

1. Ta có $OI = OA - IA$ mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đường tròn (O) và đường tròn (I) . Vậy đường tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A
2. $\triangle OAQ$ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle Q_1$
 $\triangle IAP$ cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle P_1$
 $\Rightarrow \angle P_1 = \angle Q_1$ mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra $IP \parallel OQ$.



3. $\angle APO = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow OP \perp AQ \Rightarrow OP$ là đường cao của $\triangle OAQ$ mà $\triangle OAQ$ cân tại O nên OP là đường trung tuyến $\Rightarrow AP = PQ$.
4. (HD) Kẻ $QH \perp AB$ ta có $SAQB = \frac{1}{2} ABQH$. mà AB là đường kính không đổi nên $SAQB$ lớn nhất khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB . Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO . Thật vậy P là trung điểm của cung $AO \Rightarrow PI \perp AO$ mà theo trên $PI \parallel QO \Rightarrow QO \perp AB$ tại $O \Rightarrow Q$ là trung điểm của cung AB và khi đó H trùng với O ; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

D. Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Cho nửa đường tròn đường kính AB và C là một điểm nằm giữa hai điểm A và B. Trên nửa mặt phẳng có bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ hai tia Ax và By tiếp xúc với nửa đường tròn đã cho. Trên tia Ax lấy điểm I (với I khác A); đường thẳng vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt tia IK tại E.

1. Chứng minh tứ giác CEKB nội tiếp được đường tròn.
2. Chứng minh $AI.BK = AC.CB$
3. Chứng minh điểm E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB
4. Cho các điểm A; B; I cố định. Hãy xác định vị trí điểm C sao cho diện tích hình thang ABKI lớn nhất.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC vuông cân ở A, trên cạnh BC lấy điểm M. Gọi (O_1) là đường tròn tâm O_1 qua M và tiếp xúc với AB tại B, gọi (O_2) là đường tròn tâm O_2 qua M và tiếp xúc với AC tại C. Đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại D (D không trùng với A).

- 1) Chứng minh rằng tam giác BCD là tam giác vuông.
- 2) Chứng minh O_1D là tiếp tuyến của (O_2) .
- 3) BO_1 cắt CO_2 tại E. Chứng minh 5 điểm A, B, D, E, C cùng nằm trên một đường tròn.
- 4) Xác định vị trí của M để O_1O_2 ngắn nhất.

Bài tập 3. Cho tam giác đều ABC, trên cạnh BC lấy điểm E, qua E kẻ các đường thẳng song song với AB và AC chúng cắt AC tại P và cắt AB tại Q.

- 1) Chứng minh $BP = CQ$.
- 2) Chứng minh tứ giác ACEQ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí của E trên cạnh BC để đoạn PQ ngắn nhất.
- 3) Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $HB^2 = HA^2 + HC^2$. Tính góc AHC

Bài tập 4. Cho hình vuông ABCD, M là một điểm trên đường chéo BD, gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC và AD

- 1) Chứng minh: $\triangle MIC = \triangle HMK$.
- 2) Chứng minh CM vuông góc với HK.
- 3) Xác định vị trí của M để diện tích của tam giác CHK đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 5. Cho nửa đường tròn đường kính MN. Lấy điểm P tùy ý trên nửa đường tròn ($P \neq M, P \neq N$). Dựng hình bình hành MNQP. Từ P kẻ PI vuông góc với đường thẳng MQ tại I và từ N kẻ NK vuông góc với đường thẳng MQ tại K.

- 1) Chứng minh 4 điểm P, Q, N, I nằm trên một đường tròn.
- 2) Chứng minh: $MP.PK = NK.PQ$.
- 3) Tìm vị trí của P trên nửa đường tròn sao cho $NK.MQ$ lớn nhất.

Bài tập 6. Cho điểm A ở ngoài đường tròn tâm O. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC ($M \neq B, M \neq C$). Gọi D, E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, AC, BC; H là giao điểm của MB và DF; K là giao điểm của MC và EF.

1) Chứng minh:

a) MECF là tứ giác nội tiếp.

b) MF vuông góc với HK.

2) Tìm vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích MDME lớn nhất.

Bài tập 7. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA, kẻ dây cung MN vuông góc với OA tại C. Lấy điểm K tùy ý thuộc cung BM nhỏ. Gọi H là giao điểm của AK và MN.

a) Chứng minh tứ giác BCHK nội tiếp

b) Tính AH. AK theo R

c) Xác định vị trí của điểm K để tổng $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị lớn nhất đó.

Bài tập 8. Cho tam giác đều ABC nội tiếp (O; R). M di động trên AB N di động trên tia đối của tia CA sao cho $BM = CN$.

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại A và D Chứng minh rằng D cố định.

b) Tính góc MDN.

c) MN cắt BC tại K. Chứng minh DK vuông góc với MN.

d) Đặt $AM = x$. Tính x để diện tích tam giác AMN là lớn nhất.

Bài tập 9. Hai đường tròn tâm O và tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B Đường thẳng d đi qua A cắt các đường tròn (O) và (I) lần lượt tại P, Q. Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng PO và QI.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BCQP, OBCI nội tiếp.

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AP, AQ, K là trung điểm của EF. Khi đường thẳng d quay quanh A thì K chuyển động trên đường nào?

c) Tìm vị trí của d để tam giác PQB có chu vi lớn nhất.

Bài tập 10. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), H là trực tâm của tam giác ABC, M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A

a. Xác định vị trí của M để tứ giác BHCM là hình bình hành.

b. Gọi N và E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.

c. Xác định vị trí của M để NE có độ dài lớn nhất.

Bài tập 11. Cho (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với (O). (B, C, M, N cùng thuộc (O); $AM < AN$). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với (O).

- Chứng minh bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh góc $AOC = \text{góc } BIC$
- Chứng minh $BI \parallel MN$.
- Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Bài tập 12. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và một điểm M di chuyển trên nửa đường tròn. Người ta vẽ đường tròn tâm E tiếp xúc với (O) tại M và tiếp xúc với AB tại N. Đường tròn này cắt MA, MB lần lượt tại các điểm thứ hai C, D

- Chứng minh $CD \parallel AB$
- Chứng minh MN là tia phân giác của góc AMB và đường thẳng MN đi qua một điểm K cố định.
- Chứng minh tích $KM \cdot KN$ cố định.
- Gọi giao điểm của các tia CN, DN với KB, KA lần lượt là C', D'. Tìm vị trí của M để chu vi tam giác NC'D' đạt giá trị nhỏ nhất có thể được.

Bài tập 13. Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn. Từ A vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O).

- C/m OA vuông góc BC
- Vẽ cát tuyến AMN của (O). Gọi E là trung điểm MN. C/m A, O, E, C cùng thuộc 1 đường tròn và xác định tâm K.
- Tia CE cắt (O) tại I. C/m $BI \parallel MN$
- Tìm vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Bài tập 14. Cho đường tròn (O; R), Với các kí hiệu có trên hình hãy chứng minh:

- Tứ giác CAIM, BDMI nội tiếp.
- Tam giác CID vuông.
- $EF \parallel AB$
- Khi M cố định I thay đổi trên AO, tìm vị trí của I để ACBD lớn nhất.
- Cho biết khi $OI = \frac{R}{3}$ và $AM = R$. Hãy tính độ dài đoạn thẳng CD và diện tích tam giác CID theo R.

Bài tập 15. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD (nằm giữa A và D)

- Chứng minh $AB^2 = AC \cdot AD$
- Gọi H là trung điểm CD Chứng minh tứ giác ABOE có bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.

- 3) Vẽ tia $Bx \parallel CD$ cắt (O) tại I, IE cắt (O) tại K. Chứng minh AK là tiếp tuyến của (O) .
- 4) Đường thẳng BH cắt (O) tại F. Chứng minh $KF \parallel CD$
- 5) Tìm vị trí của cát tuyến ACD để diện tích tam giác AID lớn nhất.

Bài tập 16. Cho đường tròn (O, R) , đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM và CN (M và N thuộc (O)). Gọi H là trung điểm AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K. Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I. Chứng minh:

- 1) C, O, H, N cùng thuộc một đường tròn.
- 2) $KN \cdot KC = KH \cdot KO$
- 3) I cách đều CM, CN, MN
- 4) Một đường thẳng qua O song song MN cắt tia CM và CN tại E và F. Xác định vị trí C trên d để diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

Bài tập 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có M là trung điểm của BC. Có hai đường thẳng lưu động và vuông góc với nhau tại M cắt các đoạn AB và AC lần lượt tại D và E. Xác định các vị trí của D và E để diện tích tam giác DME đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 18. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C thuộc đoạn AB, M là một điểm trên nửa đường tròn. Đường thẳng qua M vuông góc MC cắt các tiếp tuyến qua A và B của nửa đường tròn tại E và F.

- 1) Khi M cố định, C di động. Tìm vị trí của C để $AE \cdot BF$ lớn nhất.
- 2) Khi C cố định, M di động. Tìm vị trí của M để S_{CEF} lớn nhất.

Bài tập 19. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, M là một điểm trên nửa đường tròn (khác A và B). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của nửa đường tròn (O) tại C và D

- 1) Tìm giá trị nhỏ nhất của:
 - a) Độ dài đoạn thẳng CD và diện tích tam giác COD
 - b) Diện tích và chu vi tứ giác ACDB
 - c) Tổng diện tích của tam giác ACM và BDM
- 2) Tìm giá trị lớn nhất của:
 - a) Diện tích và chu vi tam giác MAB
 - b) Tích MAMB

Bài tập 20. (Đề thi tuyển vào lớp 10, 95 - 96 Thành phố Hồ Chí Minh) Cho hình vuông ABCD cố định cạnh a. Điểm E di chuyển trên cạnh CD ($E \neq D$). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

- 1) Chứng minh $ABF = ADK$, suy ra AKF vuông cân

- 2) Gọi I là trung điểm của FK. Chứng minh là tâm đường tròn qua A, C, F, K và I di chuyển trên một đường thẳng cố định khi E di động trên CD
- 3) Chứng minh tứ giác ABFI nội tiếp được.
- 4) Cho $DE = x$ ($0 < x \leq a$). Tính độ dài các cạnh của AEK theo a và x.
- 5) Hãy chỉ ra vị trí của E để EK ngắn nhất.

Bài tập 21. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng (d) quay quanh A cắt (O) và (O') tại C và D

- 1) Chứng minh đường trung trực của đoạn thẳng CD luôn đi qua điểm cố định. Xác định điểm cố định ấy.
- 2) Với vị trí nào của đường thẳng (d) thì tam giác BCD có diện tích lớn nhất.

Bài tập 22. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Lấy điểm D thuộc cạnh AC. Vẽ đường tròn đường kính CD cắt BD ở E và cắt AE ở F.

- a) Chứng minh A, B, C, E cùng thuộc một đường tròn.
- b) Chứng minh $\widehat{BCA} = \widehat{ACF}$.
- c) Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của D qua AB và BC. Chứng minh tứ giác BNCM nội tiếp.
- d) Xác định vị trí điểm D sao cho bán kính đường tròn (BNCM) đạt giá trị nhỏ nhất.

E. Rèn luyện tổng hợp

Bài 1 : Cho hình vuông ABCD . Hãy xác định đường thẳng d đi qua tâm hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là :

- Lớn nhất
- Nhỏ nhất

Hướng dẫn:

Xét trường hợp d cắt hai cạnh đối BC và AD (h.29)

Gọi m là tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến d.

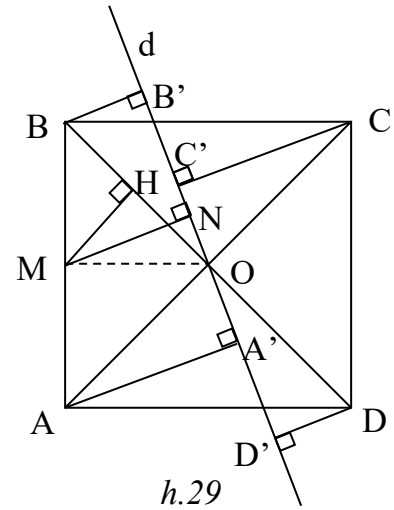
$$m = 2(AA' + BB')$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A'B'

Suy ra : $m = 4MN$ do đó:

m lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

m nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất



a) $MN \leq MO \Rightarrow m$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv O \Leftrightarrow d \parallel AB$

b) kẻ $MH \perp OB$. Chứng minh $MN \geq MH \Rightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow N \equiv H \Leftrightarrow d \equiv BD$ hoặc $d \equiv AC$.

Bài 2 : Cho ΔABC vuông cân tại A các điểm D,E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB , AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí các điểm D,E sao cho :

- DE có độ dài nhỏ nhất .
- Tứ giác BDEC có diện tích lớn nhất .

Hướng dẫn: (h.30)

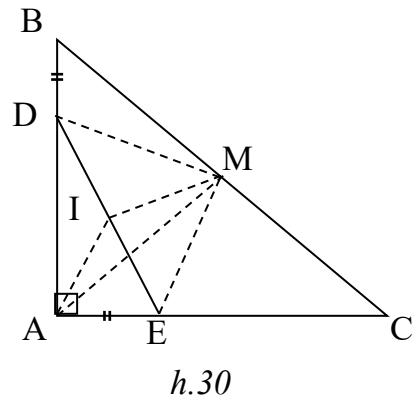
a) Gọi M là trung điểm của BC .

$$\Delta BDM = \Delta AEM \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AME}$$

$$\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{DMA} + \widehat{AME} = \widehat{DMA} + \widehat{BMD} = \widehat{BMA} = 90^\circ$$

Gọi I là trung điểm của DE .

$$DE = DI + IE = AI + IM \geq AM$$



$\min DE = AM \Leftrightarrow I$ là trung điểm của AM

$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

$$b) \text{Đặt } AE = x, AB = AC = a \text{ thì } AD = a - x, S_{ADE} = \frac{x(a-x)}{2}$$

S_{BDEC} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{ADE}$ lớn nhất $\Leftrightarrow x(a-x)$ lớn nhất

Do $x + (a-x) = a$ không đổi nên $x(a-x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = a/2$

Khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

Bài 3 : Cho ΔABC vuông tại A có $BC = a$, diện tích là S . Gọi m là trung điểm của BC . Hai đường thẳng thay đổi qua M và vuông góc với nhau cắt các cạnh AB, AC ở D, E . Tìm :

- Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE .
- Giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔMDE

Hướng dẫn:

a) (h.31) Gọi O là trung điểm của DE

Ta có $OA = OD = OE = OM$

$$\Rightarrow DE = OA + OM \geq AM = \frac{a}{2}$$

$\min DE = a/2 \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AM

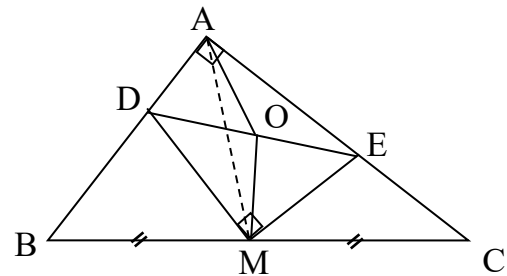
$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

b) (h.32) Kẻ $MH \perp AB, MK \perp AC$

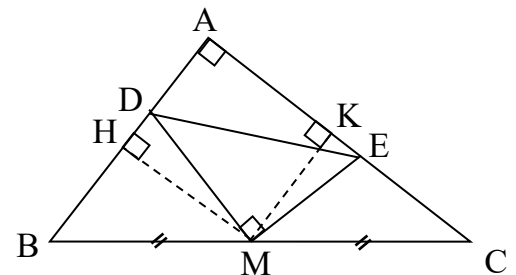
$ME \geq MK, MD \geq MH$.

$$2S_{MDE} = MD \cdot ME \geq MH \cdot MK = \frac{AC}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{S}{2}$$

$$\min S_{MDE} = \frac{S}{4} \Leftrightarrow D \equiv H \text{ và } E \equiv K$$



h.31



h.32

Bài 4 : Cho điểm m di chuyển trên đoạn thẳng AB .Vẽ các tam giác đều AMC và BMD về một phía của AB . Xác định vị trí của M để tổng diện tích hai tam giác đều trên là nhỏ nhất .

Hướng dẫn: (h.33)

Gọi K là giao điểm của AC và BD .

Các tam giác AMC ,BMD đồng dạng với $\triangle AKB$

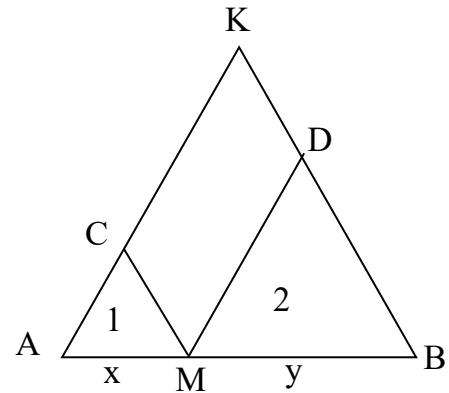
Đặt $AM = x, BM = y, AB = a$ ta có :

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2; \frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \geq \frac{(x + y)^2}{2a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Do đó : $\min (S_1 + S_2) = \frac{I}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB.



h.33

Bài 5 : Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a,b,c tương ứng đường cao AH =H. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC sao cho nó có diện tích lớn nhất . Biết $M \in AB; N \in AC; P, Q \in BC$.

Hướng dẫn: (h.34)

Gọi I là giao điểm của AH và MN

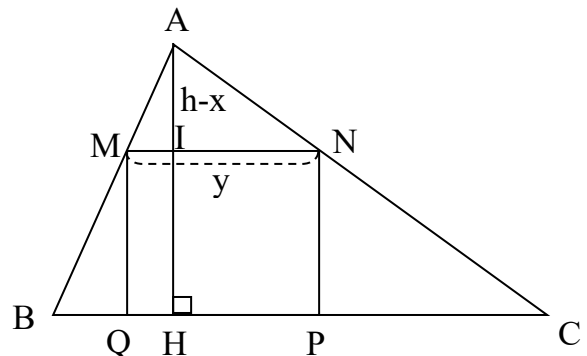
Đặt $NP = x; MN = y; AI = h - x$

$\triangle AMN \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow y = a \cdot \frac{h-x}{h}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = xy = \frac{a}{h} \cdot x(h-x)$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x(h-x) \text{ lớn nhất}$$



h.34

$x + (h - x) = h$ không đổi nên

$x(h - x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = h - x \Leftrightarrow x = h/2$

Khi đó MN là đường trung bình của $\triangle ABC$

Bài 6 : Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IK \perp AB$. Tìm vị trí của I sao cho tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.35)

Kẻ $AH \perp BC$, $IE \perp AH$

$ANIK$, $IMHE$ là các hình chữ nhật.

$$IK^2 + IN^2 = IK^2 + AK^2 = AI^2 \geq AE^2$$

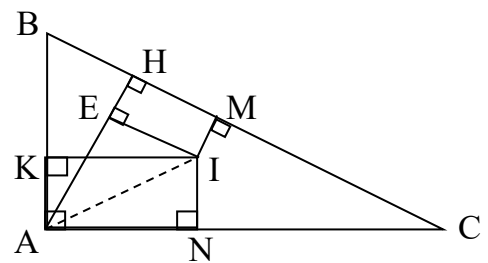
$$IM = EH$$

$$\text{nên } IK^2 + IN^2 + IM^2 = AI^2 + EH^2 \geq AE^2 + EH^2$$

$$\text{Đặt } AE = x, EH = y \text{ ta có : } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$$

$$\Rightarrow IK^2 + IN^2 + IM^2 \geq \frac{AH^2}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi I là trung điểm của đường cao AH .



h.35

Bài 7 : Cho tam giác nhọn ABC . Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IK \perp AB$. Đặt $AK = x$; $BM = y$; $CN = z$.

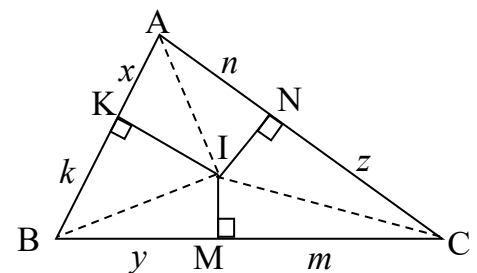
Tìm vị trí của I sao cho tổng $x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.36)

Đặt $BK = k$, $CM = m$, $AN = n$,

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

$$x^2 + y^2 + z^2 =$$



h.36

$$= (IA^2 - IK^2) + (IB^2 - IM^2) + (IC^2 - IN^2)$$

$$= (IA^2 - IN^2) + (IB^2 - IK^2) + (IC^2 - IM^2) = n^2 + k^2 + m^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 + n^2 + k^2 + m^2$$

$$= (x^2 + k^2) + (y^2 + m^2) + (z^2 + n^2)$$

$$x^2 + k^2 \geq \frac{(x+k)^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{c^2}{2} \quad y^2 + m^2 \geq \frac{(y+m)^2}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$z^2 + n^2 \geq \frac{(z+n)^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Leftrightarrow x = k, y = m, z = n.$$

$\Leftrightarrow I$ là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC .

Bài 8: Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 10$ cm. Một dây CD có độ dài 6cm có hai đầu di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của A và B trên CD . Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ABFE$.

Hướng dẫn: (h.37)

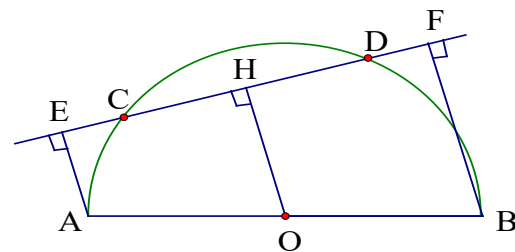
Kẻ $OH \perp CD$, ta tính được $OH = 4$ cm

$$S_{ABFE} = \frac{1}{2}(AE + BF).EF$$

$$= OH.EF \leq OH.AB = 4.10 = 40$$

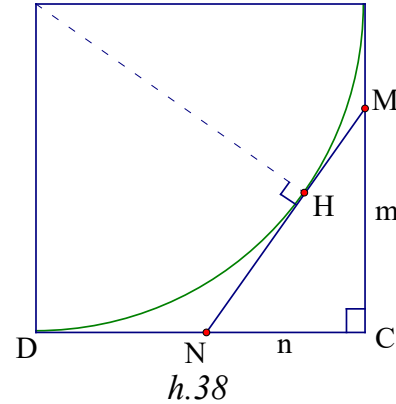
$$\max S_{ABFE} = 40 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow EF \parallel AB, \text{ khi đó } OH \perp AB$$



h.37

Bài 9 : Cho hình vuông ABCD cạnh a . Vẽ cung BD tâm A bán kính a (nằm trong hình vuông). Một tiếp tuyến bất kỳ với cung đó cắt BC, CD theo thứ tự ở M và N. Tính độ dài nhỏ nhất của MN.



Hướng dẫn:(h.38)

Đặt $CM = m$, $CN = n$, $MN = x$

$$m + n + x = 2CD = 2a \text{ và } m^2 + n^2 = x^2$$

$$\text{Do đó : } x^2 = m^2 + n^2 \geq \frac{(m+n)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 \geq (2a - x)^2 \Rightarrow x\sqrt{2} \geq 2a - x$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{2a}{\sqrt{2} + 1} = 2a(\sqrt{2} - 1)$$

$\min MN = 2a(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow m = n$. Khi đó tiếp tuyến $MN \parallel BD$, AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, AN là phân giác của $\widehat{DAC}$

Bài 10 : Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau, chúng cắt các đường tròn (O), (O') lần lượt tại B và C. Xác định vị trí của các tia đó để ΔABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn:(h.39)

Kẻ $OD \perp AB$; $O'E \perp AC$ ta có:

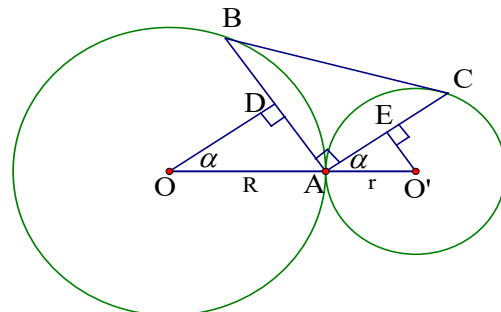
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2AD \cdot 2AE = 2 \cdot AD \cdot AE$$

$$\text{Đặt } OA = R; O'A = r; \widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha$$

$$AD = R \sin \alpha; AE = r \cos \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = Rr \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



h.39

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq Rr$$

Do đó :

$$\max S_{ABC} = Rr \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy nếu ta vẽ các tia AB, AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = 45^\circ$ thì ΔABC có diện tích lớn nhất.

Bài 11 : Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC , A là một điểm di động trên đường tròn. Vẽ tam giác đều ABM có A và M nằm cùng phía đối với BC . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống MB . Gọi D, E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OC, CM, MH, OH . Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác $DEFG$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn: (h.40)

$DEFG$ là hình bình hành.

Kẻ $OI \perp FH$, ta có OI là đường trung bình của ΔBHC nên $OI = \frac{1}{2} HC = GD$

MO là đường trung trực của AB nên $\widehat{IMO} = 30^\circ \Rightarrow OI = \frac{1}{2} OM \Rightarrow GD = \frac{1}{2} OM$

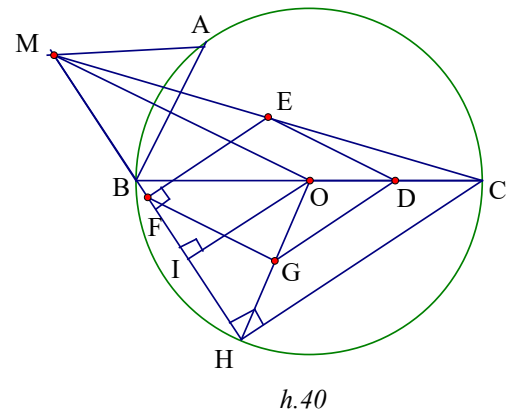
Mà $ED = \frac{1}{2} OM \Rightarrow EG = GD$

$\Rightarrow DEFG$ là hình thoi

$\widehat{HFG} = \widehat{HMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{EFG} = 60^\circ \Rightarrow \Delta EFG$ đều

$$\Rightarrow S_{DEFG} = 2S_{EFG} = 2 \cdot \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\left(\frac{HC}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{2} \leq \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\max S = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow H \equiv B \Leftrightarrow \widehat{MBC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 30^\circ \Leftrightarrow AC = R.$$



Bài 12 : Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) D là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A và không trùng với B,C. Gọi H,I,K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng BC, AC, AB. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $DH = x$, $DI = y$, $DK = z$.

a) Chứng minh rằng : $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x}$

b) Tìm vị trí của điểm D để tổng $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.41)

a) Lấy E trên BC sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$

ΔCDE đồng dạng với ΔADB

$$\Rightarrow \frac{DH}{DK} = \frac{CE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{CE}{c} \Rightarrow \frac{c}{z} = \frac{CE}{x}$$

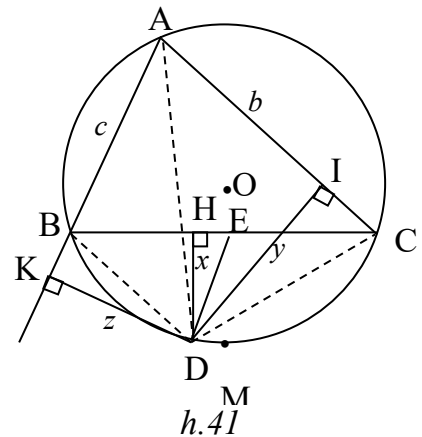
Tương tự ΔBDE đồng dạng với ΔADC

$$\Rightarrow \frac{DH}{DI} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{BE}{b} \Rightarrow \frac{b}{y} = \frac{BE}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{BE + CE}{x} = \frac{a}{x}$$

b) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x} = \frac{2a}{x}$ Do đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x$ lớn nhất $\Leftrightarrow D \equiv M$ (M

là điểm chính giữa của cung BC không chứa A)

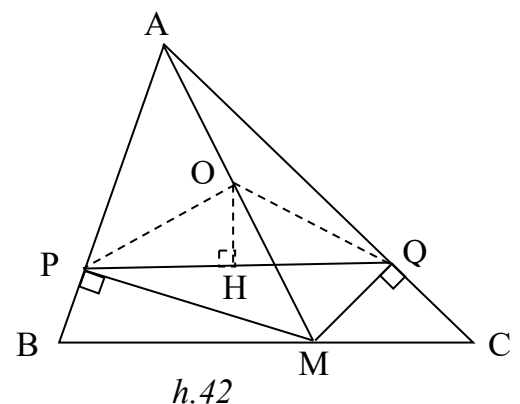


Bài 13 : Cho ΔABC nhọn, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Gọi P, Q là hình chiếu của M trên AB, AC. Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn: (h.42)

Tứ giác APMQ là tứ giác nội tiếp. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ.

Kẻ $OH \perp PQ$. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ thì $\widehat{POH} = \alpha$



$$PQ = 2 PH = 2.OP \sin \alpha = AM \sin \alpha$$

Do α không đổi nên

$$PQ \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AM \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AM \perp BC.$$

Bài 14 : Cho đoạn thẳng AB và một điểm C trên AB .Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các nửa đường tròn có đường kính AB,AC,BC . Xác định vị trí của điểm C trên đoạn AB để diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn: (h.43)

Gọi $(O_1;r_1);(O_2;r_2);(O_3;r_3)$ là các đường tròn có đường kính là Ab,AC,BC

Đặt $AB = 2a$, $AC = 2x$ thì $r_1 = a$, $r_2 = x$ Suy ra $BC = 2a - 2x$ và $r_3 = a - x$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi ba đường tròn

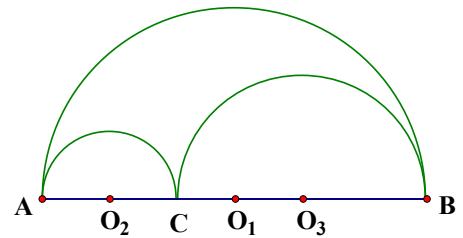
$$\text{Ta có : } S = \frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi x^2}{2} - \frac{\pi (a-x)^2}{2} = \pi x(a-x)$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow x(a-x)$ lớn nhất

Mặt khác $x + (a-x) = a$ không đổi nên

$$x(a-x) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow C \equiv O_1$$

$$\text{Lúc đó ta có } S = \frac{\pi a^2}{4}$$



h.43

Bài 15 : Cho đường tròn $(O;R)$. Trong đường tròn (O) vẽ hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc trong với (O) trong đó bán kính đường tròn (O_2) gấp đôi bán kính đường tròn (O_1) . Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài các hình tròn (O_1) và (O_2) .

Hướng dẫn:

Gọi x là bán kính đường tròn (O_1) Khi đó $2x$ là bán kính đường tròn (O_2) (h.44)

Xét $\triangle OO_1O_2$ ta có : $O_1O_2 \leq OO_1 + OO_2$

$$\Rightarrow 3x \leq (R - x) + (R - 2x) \Rightarrow 6x \leq 2R \Rightarrow x \leq \frac{R}{3}$$

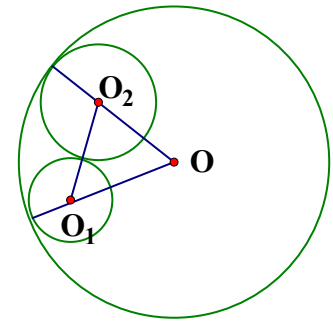
Gọi S là phần diện tích hình tròn (O) nằm ngoài các đường tròn (O_1) và (O_2) , ta có :

$$S = \pi R^2 - \pi x^2 - \pi 4x^2 = \pi(R^2 - 5x^2)$$

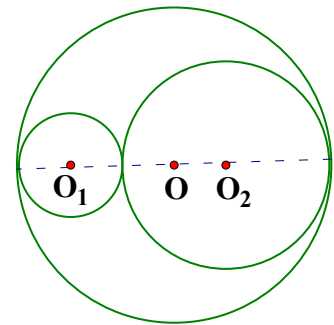
$$\text{Do } x \leq \frac{R}{3} \text{ nên } x^2 \leq \frac{R^2}{9} \Rightarrow S \geq \frac{4\pi R^2}{9};$$

$$\min S = \frac{4\pi R^2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$$

Khi đó O_1, O, O_2 thẳng hàng và bán kính các đường tròn (O_1) và (O_2) là $\frac{R}{3}$ và $\frac{2R}{3}$ (h.45).



h.44



h.45