

CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG

E. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY – THẲNG HÀNG

MỤC LỤC

10 phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng.....	2
Ví dụ minh họa	2
Dạng 1: chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (tổng hai góc chung đỉnh bằng 180 độ)	2
Dạng 2: Sử dụng tính chất đường chéo của hình đặc biệt (vd: hình bình hành)	3
Dạng 3: Sử dụng tính chất về tâm và đường kính của đường tròn	3
Dạng 4: Tiên đề O-Clit: Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.....	4
Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho.	5
Một số bài tập.....	10

Chủ đề vận dụng trong bài toán liên quan đến đường tròn.

CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG.

1. Chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (180°)
2. Chứng minh 3 điểm xác định được hai đường thẳng cùng vuông góc hay cùng song song với một đường thẳng thứ 3. (Tiên đề Oclit)
3. Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao trong tam giác.
4. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành, hình thang.

Chúc các em học sinh học tập tốt!

CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM THẲNG HÀNG

10 phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng

1. Chứng minh điểm A thuộc đoạn thẳng BC
2. Chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (180°)
3. Chứng minh hai góc ở vị trí đối đỉnh mà bằng nhau.
4. Chứng minh 3 điểm xác định được hai đường thẳng cùng vuông góc hay cùng song song với một đường thẳng thứ 3. (Tiên đề Oclit)
5. Dùng tính chất đường trung trực: chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai đầu đoạn thẳng.
6. Dùng tính chất tia phân giác: chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.
7. Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao trong tam giác.
8. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành, hình thang.
9. Sử dụng tính chất tâm và đường kính của đường tròn.
10. Sử dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc nhau.

Ví dụ minh họa

Dạng 1: chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (tổng hai góc chung đỉnh bằng 180°)

Bài 1: Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, đường cao AH . Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân ABD , ACE ($\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^\circ$). Gọi M là trung điểm của DE . Chứng minh rằng H, A, M thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Dựng hình bình hành $AEFD$.

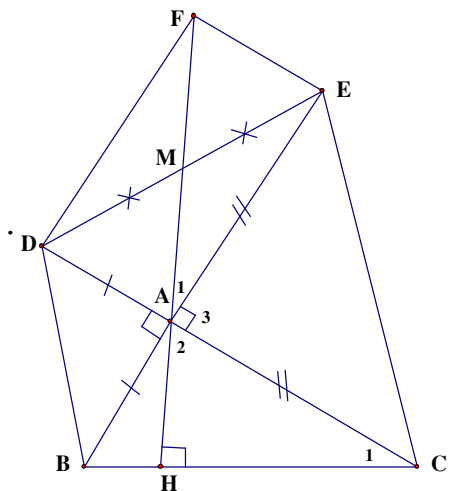
$\Rightarrow M$ là trung điểm của AF (t/c hình bình hành) và $EF = DA = BA$.

Mặt khác $EA = CA$ (gt); $\widehat{AEF} = \widehat{CAB}$ (cùng bù với $\widehat{DAE}$).

$\Rightarrow \triangle EFA = \triangle ABC$ (c - g - c).

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (Hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 90^\circ$



$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 180^\circ \text{ hay } \widehat{FAH} = 180^\circ \Rightarrow M, A, H \text{ thẳng hàng.}$$

Dạng 2: Sử dụng tính chất đường chéo của hình đặc biệt (vd: hình bình hành)

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có trực tâm H nội tiếp (O) đường kính CM , gọi I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng H, I, M thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

$MB \perp BC, AH \perp BC$ (suy từ giả thiết).

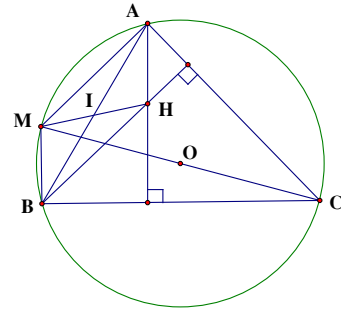
$$\Rightarrow MB \parallel AH.$$

Mà $MA \parallel BH$ (cùng vuông góc với AC).

$$\Rightarrow AMBH \text{ là hình bình hành.}$$

$$\Rightarrow AB \text{ cắt } MH \text{ tại trung điểm } I \text{ của } AB \text{ và } MH \text{ (t/c hình bình hành).}$$

Suy ra H, I, M thẳng hàng.



Dạng 3: Sử dụng tính chất về tâm và đường kính của đường tròn

1. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền

2. Đường kính của đường tròn thì đi qua tâm.

Bài 3: Cho (O) đường kính AB . Điểm M chuyển động trên $(O), M \neq A; M \neq B$. Kẻ MH vuông góc với AB . Vẽ đường tròn (O_1) đường kính MH cắt đường thẳng MA và MB tại C và D . Chứng minh rằng:

a) C, D, O_1 thẳng hàng.

b) $ABCD$ nội tiếp.

Hướng dẫn giải

a) Ta có :

$$\widehat{AMB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa } (O) \text{)}.$$

$$\Rightarrow \widehat{CMD} = 90^\circ. \Rightarrow CD \text{ là đường kính của } (O_1).$$

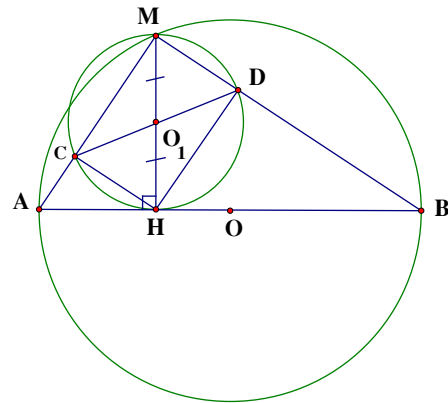
Suy ra C, D, O_1 thẳng hàng.

b) $MCHD$ là hình chữ nhật nội tiếp (O_1) .

$$\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MHD} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{CD} \text{)}.$$

$$\text{Mà } \widehat{MCD} = \widehat{B} \Rightarrow \widehat{MCD} + \widehat{ACD} = \widehat{B} + \widehat{ACD} = 180^\circ.$$

Vậy $ABCD$ nội tiếp.



Dạng 4: Tiên đề Ơ-Clit: Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

- Nếu qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a có 2 đường thẳng song song với a thì chúng trùng nhau.
- Cho điểm M ở ngoài đường thẳng a . Đường thẳng đi qua M và song song với a là duy nhất.

Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm 2 đường chéo. Điểm M trên đoạn OB , lấy E đối xứng với A qua M ; H là hình chiếu của điểm E trên BC , vẽ hình chữ nhật $EHCF$. Chứng minh M, H, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của HF và CE .

$\Rightarrow H, I, F$ thẳng hàng (*) (t/c hình chữ nhật).

Cần chứng minh: M, I, F thẳng hàng.

$$MA = ME = \frac{1}{2} AE \text{ (gt)} \text{ và } OA = OC = \frac{1}{2} AC \text{ (t/c hình chữ nhật)}.$$

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của $\triangle ACE$.

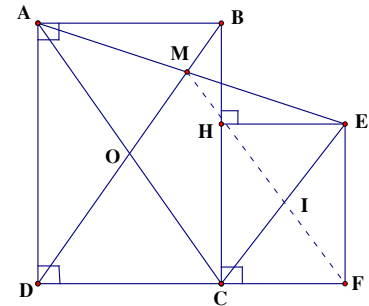
$\Rightarrow OM \parallel CE \Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{ICF}$ (2 góc đồng vị).

Mà $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ và $\widehat{ICF} = \widehat{IFC}$ (vì $\triangle OCD$ cân tại O , $\triangle ICF$ cân tại I , t/c hình chữ nhật).

$\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{IFC} \Rightarrow IF \parallel AC$ mà $IM \parallel AC$ (do IM là đường trung bình $\triangle ACE$).

$\Rightarrow M, I, F$ thẳng hàng (tiên đề Ơclit).

Kết hợp với (*) ta có: M, H, F thẳng hàng.



Bài 5: Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường cao AH, BD và CE . Gọi M, N, P, Q thứ tự là hình chiếu của H trên AB, BD, CE và AC . Chứng minh M, N, P, Q thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

$$+ \text{Từ (gt)} \Rightarrow MH \parallel CE; NH \parallel AC \Rightarrow \frac{BM}{BE} = \frac{BH}{BC} = \frac{BN}{BD} \text{ (định lý Talét)}.$$

$\Rightarrow MN \parallel ED$ (1) (định lý Talét đảo).

+ Chứng minh tương tự ta có: $PQ \parallel ED$ (2)

+ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông HAC và HAB ta có:

$$AH^2 = AQ.AC = AM.AB \Rightarrow \frac{AQ}{AM} = \frac{AB}{AC} \text{ mà } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \text{ (vì } \triangle DAB \sim \triangle EAC \text{ (g.g))}.$$

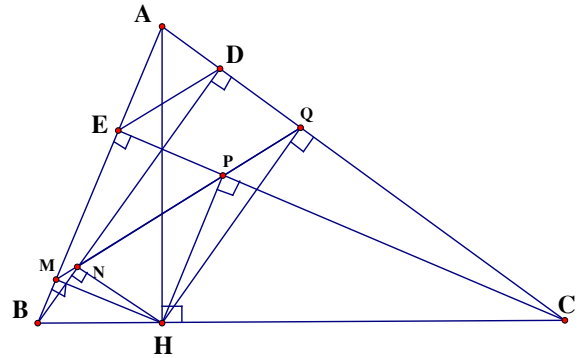
$$\Rightarrow \frac{AQ}{AM} = \frac{AD}{AE} \text{ hay } \frac{AQ}{AD} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow MQ \parallel ED. \text{ (định lý}$$

Talét đảo)

Kết hợp với (1), (2) ta có:

M, N, Q thẳng hàng và M, P, Q thẳng hàng
(tiên đề Oclít).

Do đó M, N, P, Q thẳng hàng.



Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho.

- Nếu qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a có 2 đường thẳng vuông góc với a thì chúng trùng nhau.
- Cho điểm M ở ngoài đường thẳng a . Đường thẳng đi qua M và vuông góc với a là duy nhất.

Bài 6: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) sao cho $OA = 2R$. Từ A vẽ tiếp tuyến AB của đường tròn (O) (B là tiếp điểm).

- 1) Chứng minh tam giác ABO vuông tại B và tính độ dài AB theo R
- 2) Từ B vẽ dây cung BC của (O) vuông góc với cạnh OA tại H . Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- 3) Chứng minh tam giác ABC đều.
- 4) Từ H vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại D . Đường tròn đường kính AC cắt cạnh DC tại E . Gọi F là trung điểm của cạnh OB . Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $\widehat{ABO} = 90^\circ$ (AB là tiếp tuyến của (O) tại B)

$$\Rightarrow \triangle ABO \text{ vuông tại } B$$

$$\Rightarrow AB^2 + OB^2 = OA^2 \text{ (Đ/L Pytago)}$$

$$\Rightarrow AB^2 = OA^2 - OB^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$$

2) Ta có $\triangle BOC$ cân tại O ($OB = OC = R$)

Mà OH là đường cao ($BC \perp OA$ tại H)

$\Rightarrow$ OH là đường phân giác của $\triangle BOC$

$\Rightarrow \widehat{BOA} = \widehat{COA}$

Chứng minh $\triangle AOC = \triangle AOB$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO}$

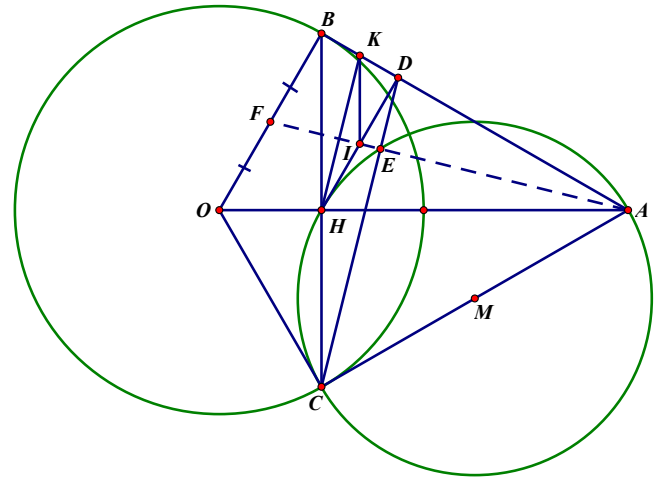
Mà $\widehat{ABO} = 90^\circ$ (AB là tiếp tuyến của (O) tại B)

$\Rightarrow \widehat{ACO} = 90^\circ$

$\Rightarrow AC \perp OC$

$\Rightarrow$ Mà C thuộc (O)

$\Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)



3) Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại A (1)

Xét $\triangle ABO$ vuông tại O, có

$$\sin \widehat{ABO} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ$

Ta có: AO là tia phân giác của góc BAC (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = 2.30^\circ = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABC$ đều

4) Gọi I là giao điểm của AF và HD

Áp dụng hệ quả Talet để I là trung điểm HD

Gọi K là trung điểm BD

Chứng minh KI là đường trung bình của $\triangle BHD$

$\Rightarrow KI \parallel HB$

Mà $HB \perp OA$ tại H (gt)

$\Rightarrow KI \perp AH$

Chứng minh I là trực tâm của ΔAHK

$\Rightarrow$ AI là đường cao của ΔAHK

$\Rightarrow AF \perp HK$ (3)

Chứng minh HK là đường trung bình của ΔBDC

$\Rightarrow HK \parallel CD$ (4)

Từ (3) và (4)

$\Rightarrow AF \perp CD$

Ta có: ΔAEC nội tiếp đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow \Delta AEC$ vuông tại E

$\Rightarrow AE \perp CD$

Mà $AF \perp CD$

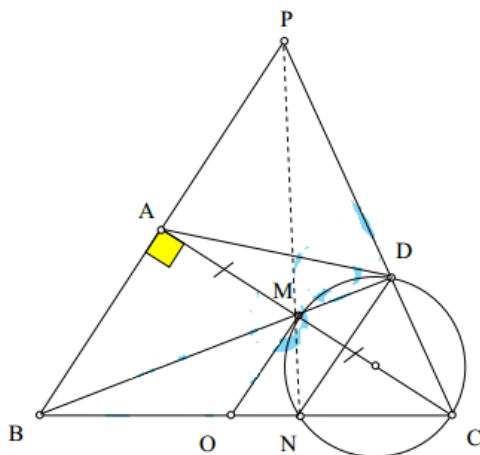
Vậy Ba điểm A, E, F thẳng hàng

Dạng 5: Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao trong tam giác.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh AC. Đường tròn đường kính MC cắt BC tại N. Đường thẳng BM cắt đường tròn đường kính MC tại D.

- 1) Chứng minh tứ giác BADC nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn đó.
- 2) Chứng minh DB là phân giác của góc ADN.
- 3) Chứng minh OM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính MC.
- 4) BA và CD kéo dài cắt nhau tại P. Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



- a) $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ (gt) nên tứ giác BADC nội tiếp đường tròn tâm O là trung điểm của BC.
- b) $\widehat{ADB} = \widehat{BDN}$ ($= \widehat{ACB}$) (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung trong các đường tròn ngoại tiếp tứ giác BADC, NMDC) nên DB là phân giác góc ADN.
- c) $OM \perp AC$ (OM là đường trung bình tam giác ABC) nên suy ra MO là tiếp tuyến đường tròn đường kính MC.

d) $MN \perp BC$ (góc MNC nội tiếp nửa đường tròn đường kính MC)
 $PM \perp BC$ (M là trực tâm tam giác PBC)
 Suy ra P, M, N thẳng hàng.

Bài 8: Tuyển sinh 10 Hà Nam 15 – 16

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm trên đường tròn. Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại A. Trên d lấy điểm D (D không trùng với A), kẻ tiếp tuyến DB của (O) (B là điểm, B không trùng với A).

- Chứng minh rằng tứ giác AOBD nội tiếp.
- Trên tia đối của tia BA lấy điểm C. Kẻ DH vuông góc với OC (H thuộc OC). Gọi I là giao điểm của AB và OD. Chứng minh rằng $OH \cdot OC = OI \cdot OD$
- Gọi M là giao điểm của DH với cung nhỏ AB của (O). Chứng minh rằng CM là tiếp tuyến của (O)
- Gọi E là giao điểm của DH và CI. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính OD và đường tròn ngoại tiếp tam giác OIM. Chứng minh rằng O, E, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) DA và DB là các tiếp tuyến của (O) nên

$$\widehat{OBD} = \widehat{OAD} = 90^\circ$$

Xét tứ giác AOBD có $\widehat{OBD} + \widehat{OAD} = 180^\circ$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác AOBD nội tiếp

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $DA = DB$ và DO là tia phân giác của $\angle ADB$

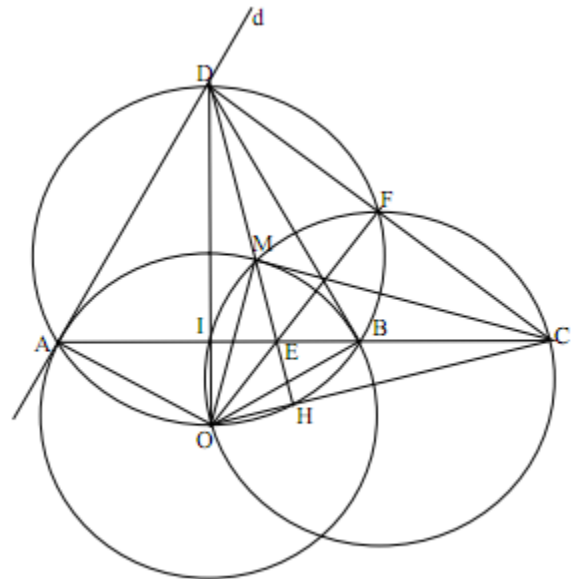
Do đó tam giác ABD cân tại D có DO là đường phân giác nên đồng thời là đường trung trực....

Xét $\triangle OIC$ và $\triangle OHD$ có $\widehat{OIC} = \widehat{OHD} = 90^\circ$;

$\widehat{DOC}$ chung nên

$\triangle OIC \sim \triangle OHD$ (g.g)

$$\frac{OI}{OH} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow OH \cdot OC = OI \cdot OD (1)$$



c) Xét tam giác AOD vuông tại A có AI là đường cao nên $OA^2 = OH \cdot OD$ (2)

Mà $OM = OA$ (là bán kính (O)). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $OM^2 = OH \cdot OC \Rightarrow \frac{OM}{OH} = \frac{OC}{OM}$

Xét $\triangle OHM$ và $\triangle OMC$ có chung $\widehat{MOC}$; $\frac{OM}{OH} = \frac{OC}{OM}$ nên $\triangle OHM \sim \triangle OMC$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{OMC} = \widehat{OIC} = 90^\circ$ nên CM là tiếp tuyến của (O).

d) Do $\widehat{OMC} = \widehat{OIC} = 90^\circ$ nên tứ giác OIMC nội tiếp đường tròn đường kính OC.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác CIM là đường tròn đường kính OC.

$\Rightarrow \widehat{OFC} = 90^\circ$

Mặt khác ta có $\widehat{OFD} = 90^\circ$. Như vậy OFC; OFD kề bù suy ra ba điểm C, F, D thẳng hàng.

Xét tam giác OCD có ba đường cao CH, DI, OF mà có E là giao điểm CH, DI nên ba điểm O, E, F thẳng hàng.

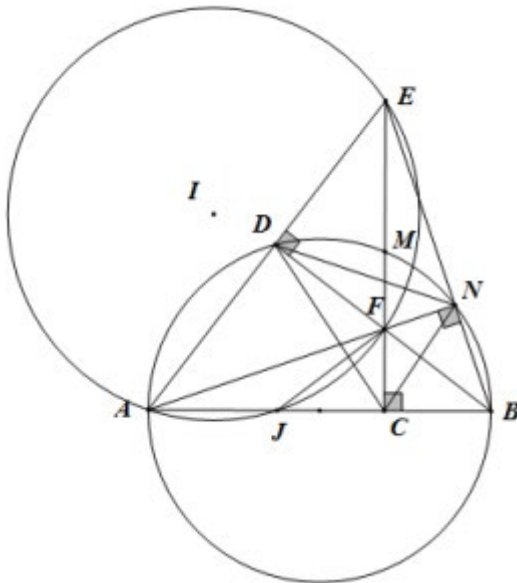
Bài 9: Tuyển sinh 10 Hải Dương 15 – 16

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

a) Chứng minh $AD \cdot AE = AC \cdot AB$

b) Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CDN$

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB



Hướng dẫn giải

a) Có $\widehat{ADB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (cùng phụ góc BAE)

$\Rightarrow$ Tam giác ADB đồng dạng với tam giác ACE (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AC \cdot AB$$

b) Có $AN \perp EB$, $EC \perp AB$, EC giao AN tại F nên F là trực tâm của tam giác AEB

$\Rightarrow BF \perp EA$

Mà $BD \perp EA \Rightarrow B, D, F$ thẳng hàng

+ Tứ giác $ADFC$ có hai góc đối bằng 90° nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{DCF} = \widehat{DAF}$

Tương tự ta có: $\widehat{NCF} = \widehat{NBF}$

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{NBF}$ (cùng phụ với góc AEB) $\Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{NCF}$

Suy ra CF là phân giác của góc DCN

Tương tự ta cũng có DF là phân giác của góc NDC

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DCN

c) Gọi J là giao của (I) với đoạn AB .

Có $\widehat{FAC} = \widehat{CEB} (= 90^\circ - \widehat{ABE}) \Rightarrow$ tam giác FAC đồng dạng với tam giác BEC (g-g)

$$\Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow CF \cdot CE = BC \cdot AC$$

Vì $AEFJ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FJC} = \widehat{FEA} (= 180^\circ - \widehat{AJF})$

$$\Rightarrow \triangle CFJ \sim \triangle CAE \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{CF}{CA} = \frac{CJ}{CE} \Rightarrow CF \cdot CE = CA \cdot CJ$$

Suy ra $BC \cdot AC = CA \cdot CJ \Rightarrow BC = CJ \Rightarrow C$ là trung điểm BJ (vì $J \neq B$)

Suy ra J là điểm cố định

Có $IA = IJ$ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ , là đường cố định.

Một số bài tập.

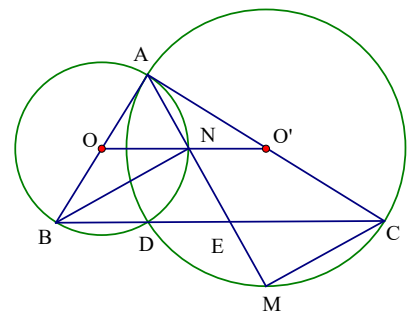
Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn (O) đường kính AB cắt đường tròn (O') đường kính AC tại D , M là điểm chính giữa cung nhỏ DC , AM cắt đường tròn (O) tại N , cắt BC tại E . Chứng minh O, N, O' thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Xét (O') có: $\widehat{AEB} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CM}}{2}$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn).

$\widehat{BAM} = \frac{\widehat{ADM}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{MD}}{2}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

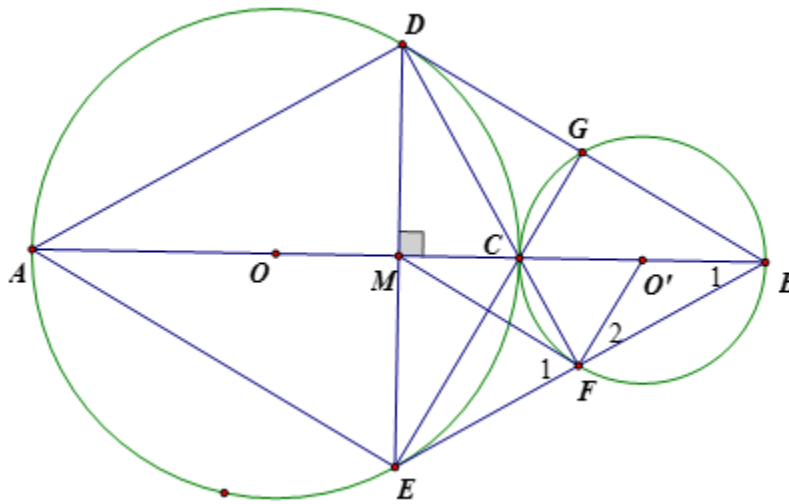
Suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{AEB} \Rightarrow$ tam giác ABE cân tại B nên BN vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow NA = NE$ và $OA = OB, O'A = O'C \Rightarrow NO, NO'$ là đường trung bình của tam giác ACE, ABE nên $O'N \parallel CE, NO \parallel EB$ do đó O, N, O' thẳng hàng.



Bài 2: Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài tại C ($R > r$) gọi AC và BC là hai đường kính đi qua C của đường tròn (O) và (O') . DE là dây cung của đường tròn (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB . Tia DC cắt đường tròn (O') tại điểm thứ 2 là F

- Tứ giác $ADBE$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh ba điểm B, F, E thẳng hàng
- DB cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là G . Chứng minh DF, EG và AB đồng quy
- Chứng minh MF là tiếp tuyến của (O')

Hướng dẫn giải



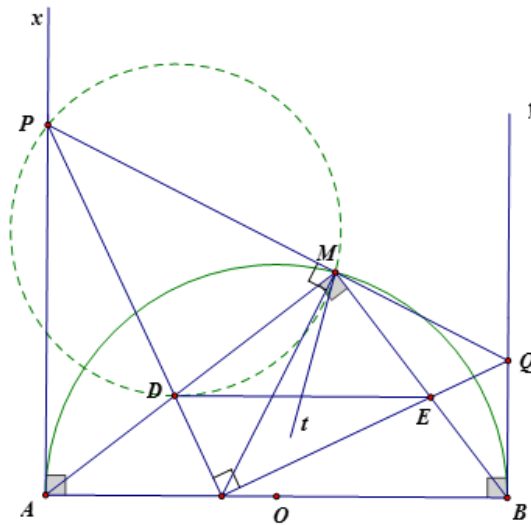
- Tứ giác $ADBE$ là hình thoi vì $AM = MB$; $MD = ME$ và $DE \perp AB$
- Ta có $BE \parallel DA$. Nối BF ta có $\widehat{ADF} = \widehat{BFD} = 90^\circ \Rightarrow BF \parallel DA$. Như vậy $BE \parallel DA$ và $BF \parallel DA$ mà qua B chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với DA do đó 3 điểm B, F, E phải thẳng hàng
- Ta có CG vuông góc với DB , mặt khác EC vuông góc với DB . Nhưng qua C chỉ tồn tại duy nhất một đường vuông góc với DB nên E, C, G phải thẳng hàng và DF, EG, AB phải đồng quy tại điểm C , chính là trực tâm tam giác EDB
- Nhận thấy $\widehat{MEF} = \widehat{F_1}$ và $\widehat{O'BF} = \widehat{F_2}$ mà $\widehat{MEF} + \widehat{O'BF} = 90^\circ$ nên $\widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{MFO'} = 90^\circ$. Vậy MF là tia tiếp tuyến của đường tròn tâm O' .

Bài 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB trên đó có một điểm M . Trên đường kính AB lấy một điểm C sao cho $AC < CB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M , người ta kẻ các tia Ax, By vuông góc với AB ; đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt Ax

tại P; đường thẳng qua C vuông góc với CP cắt By tại Q. Gọi D là giao điểm của CP và AM; E là giao điểm của CQ và BM

- Chứng minh rằng các tứ giác ACMP, CDME nội tiếp được
- Chứng minh rằng hai đường thẳng AB, DE song song
- Chứng minh rằng ba điểm P, M, Q thẳng hàng
- Ngoài điểm M ra, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP, EMQ còn điểm chung nào nữa không? Vì sao?

Lời giải:

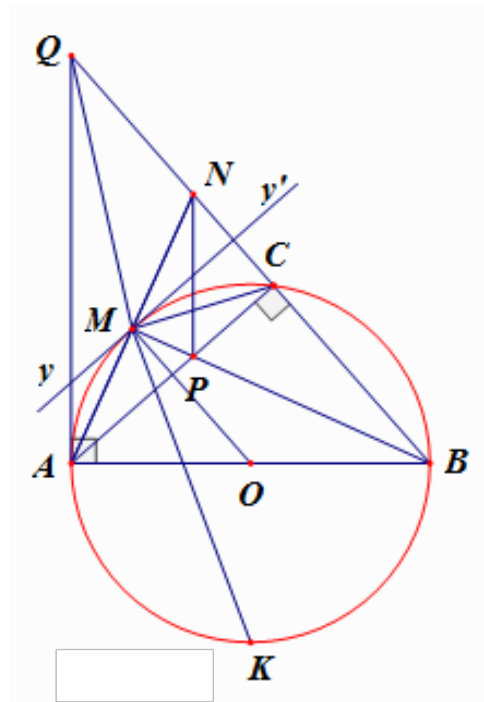


- Tứ giác ACMP có $\widehat{A} = \widehat{M} = 90^\circ$ nên nội tiếp được
Tứ giác CDME có $\widehat{C} = \widehat{M} = 90^\circ$ nên nội tiếp được
 - Do các tứ giác ACMP và CDME nội tiếp được nên $\widehat{MAC} = \widehat{MPC}$, $\widehat{MDE} = \widehat{MCE}$ mà $\widehat{MPC} = \widehat{MCE}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{MCP}$) nên $\widehat{MAC} = \widehat{MDE}$. Vậy AB song song với DE
 - Do $\widehat{MBQ} = \widehat{MAC}$ (vì cùng phụ $\widehat{ABM}$) và $\widehat{MAC} = \widehat{MDE} = \widehat{MCQ}$ nên $\widehat{MCQ} = \widehat{MBQ}$. Suy ra tứ giác CMQB nội tiếp do đó $\widehat{CMQ} = 90^\circ$. Vậy P, M, Q thẳng hàng
 - Trên nửa mặt phẳng bờ MC không chứa điểm D, kẻ tia tiếp tuyến Mt của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMP suy ra $\widehat{AMt} = \widehat{MPD}$ mà $\widehat{MQC}$ phụ với $\widehat{MPC}$ nên $\widehat{BMt} = \widehat{MQC}$. Suy ra Mt tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EMQ. Do đó hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP và EMQ tiếp xúc nhau. Vậy có duy nhất một điểm M là điểm chung của hai đường tròn nói trên
- Nhận xét.** Bạn có thể chứng minh được DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP, EMQ

Bài 4: Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$ và một điểm C trên đường tròn (C không trùng với A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC; P là giao điểm của AC, BM. Tia BC cắt các tia AM, Ax lần lượt tại N và Q

- Chứng minh tam giác ABN cân
- Tứ giác APNQ là hình gì? Vì sao?
- Gọi K là điểm chính giữa của cung AB không chứa C. Hỏi có thể xảy ra ba điểm Q, M, K thẳng hàng không? Vì sao?
- Xác định vị trí của điểm C để đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Hướng dẫn giải



- Tam giác ABN có đường cao BM đồng thời là đường phân giác nên tam giác ABN cân tại B.
- Vì P là trực tâm tam giác ABN nên $NP \perp AB \Rightarrow NP \parallel AQ$, do đó $APNQ$ là hình thang.
- Nếu Q, M, K thẳng hàng thì từ tính chất góc có đỉnh bên ngoài đường tròn, ta có QM là đường phân giác của góc AQB . Mặt khác, BM là phân giác của góc ABQ nên AM là phân giác của góc BAQ , vô lý. Vậy ba điểm Q, M, K không thẳng hàng.

d) Tại điểm M, kẻ tiếp tuyến yMy' với (O) sao cho My và MA cùng phía với đường thẳng MQ. Ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với (O) khi và chỉ khi yMy' tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tại M. Điều đó tương đương với $\widehat{NQM} = \widehat{NMMy'} \Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{AMy} \Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{ABM} \Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{MBC} \Leftrightarrow MB = MQ \Leftrightarrow BC = NQ$ (vì $\triangle MNC$ cân).

$$\text{Mà } AB^2 = BC.BQ \Leftrightarrow AB^2 = BC.(BN + NQ) \Leftrightarrow 4R^2 = BC.(2R + BC)$$

$$\Leftrightarrow BC = R(\sqrt{5} - 1).$$

Vậy $BC = R(\sqrt{5} - 1)$ thì đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNQ$ tiếp xúc với (O).

Bài 5: Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = AC$

a) Chứng minh tam giác ABD cân

b) Đường thẳng vuông góc với AC tại A cắt đường tròn (O) tại E. Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho $EF = AE$. Chứng minh ba điểm D, B, F thẳng hàng

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF tiếp xúc với đường tròn (O)

Hướng dẫn giải

a) Xét $\triangle ABD$ có $BC \perp DA, CA = CD$ nên BC vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến, do đó $\triangle ABD$ cân tại B.

b) $\widehat{CAE} = 90^\circ$ nên CE là đường kính của đường tròn (O) $\Rightarrow C, O, E$ thẳng hàng.

Ta có CO là đường trung bình của tam giác ABD

$$\Rightarrow CO \parallel DB \Rightarrow CE \parallel BD.$$

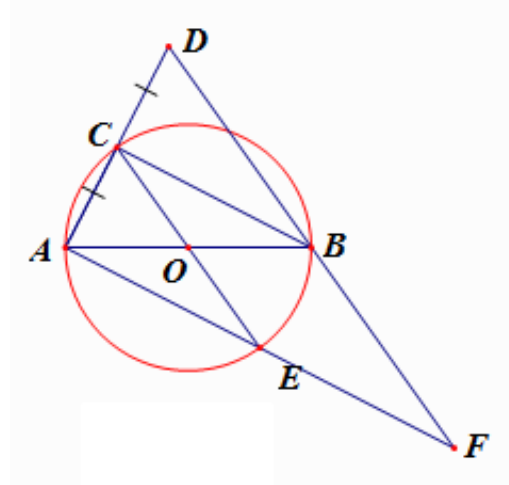
Tương tự, OE là đường trung bình của $\triangle ABF$

$$\Rightarrow OE \parallel BF \Rightarrow CE \parallel BF.$$

Suy ra B, D, F thẳng hàng (theo tiên đề Owclet).

c) Theo tính chất đường trung bình của $\triangle ABD; \triangle ABF$ ta có $OC = \frac{1}{2}DB; OE = \frac{1}{2}BF$ mà

$$OC = OE \Rightarrow BD = BF = AB$$



$\Rightarrow B$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ADF \Rightarrow BA$ là bán kính.

Mà $OB = AB - OA$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF tiếp xúc với đường tròn (O) tại A .

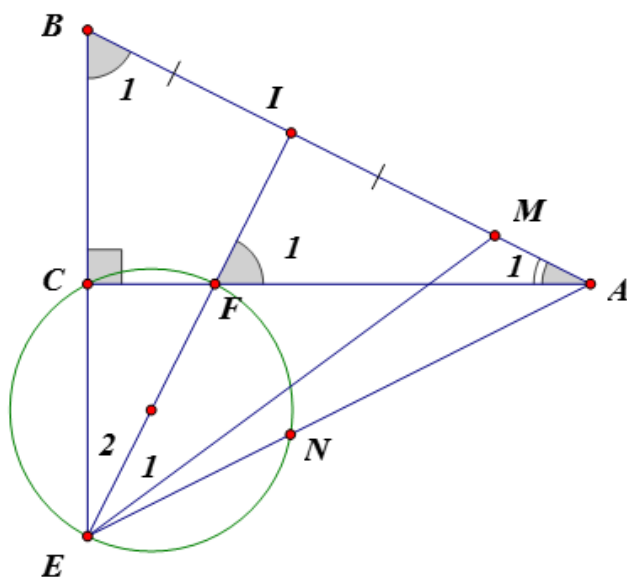
Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại C và $BC < CA$. Gọi I là điểm trên AB và $IB < IA$. Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB . Gọi giao điểm của d với AC , BC lần lượt là F và E . Gọi M là điểm đối xứng với B qua I .

a) Chứng minh rằng tam giác IME đồng dạng với tam giác IFA và $IE \cdot IF = IA \cdot IB$

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF cắt AE tại N . Chứng minh rằng F, N, B thẳng hàng.

c) Cho AB cố định, C thay đổi sao cho $\widehat{BCA} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua hai điểm cố định và tâm đường tròn này nằm trên đường thẳng cố định

Hướng dẫn giải



a) Ta có IE là đường trung trực của BM

$$\Rightarrow \triangle EBM \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{M_1}$$

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{F_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_1}$)

$$\Rightarrow \triangle IME \sim \triangle IFA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IM}{IF} = \frac{IE}{IA} \Rightarrow IE \cdot IF = IA \cdot IM$$

$$\Rightarrow IE \cdot IF = IA \cdot IB$$

b) Ta có $\widehat{ECF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ENF} = 90^\circ$

Xét $\triangle BAE$ có EL , AC là các đường cao cắt nhau tại F nên $BF \perp EA$ mà $FN \perp EA \Rightarrow B, F, N$ thẳng hàng

Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$ suy ra tứ giác $AMFE$ nội tiếp

Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn qua hai điểm A, M cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn nằm trên đường trung trực của AM cố định

Bài 7: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF của đường tròn (O) .

- Chứng minh $BH \parallel FC$
- Chứng minh tứ giác $BHCF$ là hình bình hành
- Vẽ $OM \perp BC$ tại M . Chứng minh H, M, F thẳng hàng
- Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .
Chứng minh rằng $S_{AHG} = 2S_{AGO}$.

Hướng dẫn giải

a) $\triangle ACF$ nội tiếp đường tròn đường kính AF .

$\triangle ACF$ vuông tại C

Ta có: $BH \perp AC, FC \perp AC$

$$\Rightarrow BH \parallel FC$$

b) $BH \parallel FC$ (câu a)

Chứng minh tương tự câu a)

Có: $CH \parallel FB$

Tứ giác $BHCF$ có $BH \parallel FC$

Và $CH \parallel FB$ nên là hình bình hành.

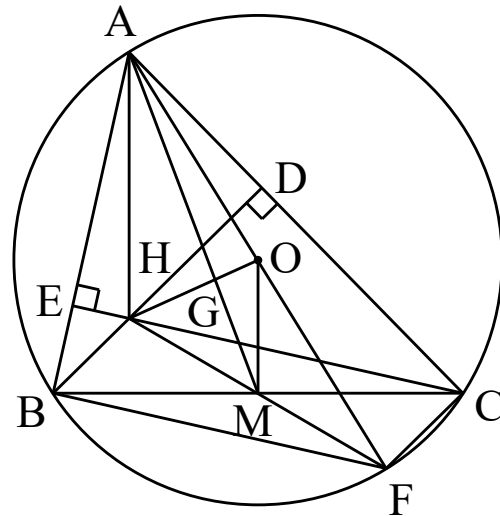
c) $OM \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BC (Định lý đường tròn vuông góc dây cung)

Tứ giác $BHCF$ là hình bình hành, M là trung điểm của BC nên là M trung điểm của HF .

$\Rightarrow H, M, F$ thẳng hàng.

d) Tứ giác ABC có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm (gt)



$\Rightarrow G$ thuộc đoạn thẳng AM , $AG = \frac{2}{3}AM$.

Tam giác AHF có AM là đường trung tuyến, G thuộc đoạn thẳng AM , $AG = \frac{2}{3}AM$

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác AHF và HO là đường trung tuyến của tam giác AHF .

$\Rightarrow HO$ đi qua G , $HG = 2GO$.

Hai tam giác AHG, AGO có chung đường cao vẽ từ A đến HG , $HG = 2GO$.

Do đó $S_{AHG} = 2S_{AGO}$.

Bài 8: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Đường cao AH của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại D (khác A). Từ D vẽ đường thẳng song song với BC cắt đường tròn (O) tại điểm E (khác D).

- Chứng minh rằng A, O, E là thẳng hàng.
- Chứng minh rằng tứ giác $BCED$ là hình thang cân.
- Tính $AB^2 + BD^2 + CD^2 + AC^2$ theo R .

Hướng dẫn giải

- a) $BC \parallel DE$ (gt), $AD \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow AD \perp DE$

$$\widehat{ADE} = 90^\circ$$

$\Rightarrow AE$ là đường kính của đường tròn (O)

$\Rightarrow A, O, E$ thẳng hàng.

- b) Vẽ $OM \perp BC$ ($M \in BC$)

OM cắt DE tại N

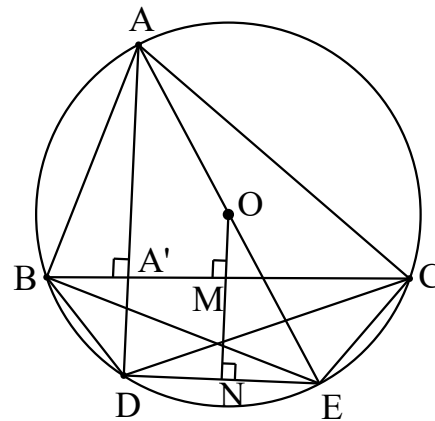
$DE \parallel BC$ (gt) có $ON \perp DE$, tứ giác $BCDE$ là hình thang

$OM \perp BC \Rightarrow M$ là trung điểm BC

$ON \perp DE \Rightarrow N$ là trung điểm DE

MN là trục đối xứng của hình thang cân

- c) $BE = CD$ ($BCED$ là hình thang cân)



AE là đường kính nên $\widehat{ABE} = 90^\circ$

$\triangle ABE$ vuông tại E , theo định lý Py-ta-go có:

$$AB^2 + BE^2 = OE^2$$

$$AB^2 + CD^2 = (2R)^2$$

$$AB^2 + CD^2 = 4R^2$$

Chứng minh tương tự có: $AC^2 + BD^2 = 4R^2$

Ta có: $AB^2 + BD^2 + CD^2 + AC^2 = 8R^2$

Bài 9: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Vẽ các đường kính AC và AD

a) Chứng minh rằng B, C, D thẳng hàng

b) Đường thẳng d di động qua A cắt $(O), (O')$ lần lượt tại E, F (E, F khác A , A nằm giữa E, F)

1) Chứng minh rằng $\triangle BEF \sim \triangle ACD$

2) Xác định vị trí d để chu vi tam giác BEF lớn nhất, diện tích tam giác BEF lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow AB \perp BC$$

Tương tự có $AB \perp BD$

Suy ra B, C, D thẳng hàng.

b) 1) Xét $\triangle BEF$ và $\triangle ACD$ có:

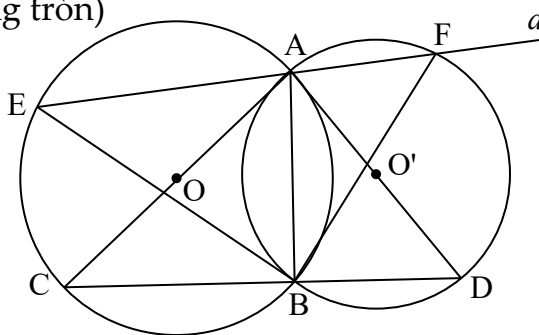
$$\widehat{BEF} = \widehat{ACD} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AB \text{ của đường tròn } (O))$$

$$\widehat{BEF} = \widehat{ACD} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AB \text{ của đường tròn } (O'))$$

Do đó $\triangle BEF \sim \triangle ACD$

2) * $\triangle BEF \sim \triangle ACD$ (kí hiệu $CV = \text{chu vi}$)

$$\Rightarrow \frac{CV(BEF)}{CV(ACD)} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow CV(BEF) = \frac{CV(ACD)}{AC} \cdot BE, \frac{CV(ACD)}{AC} \text{ không đổi}$$



Do đó: $CV(BEF)$ lớn nhất $\Leftrightarrow BE$ lớn nhất

$\Leftrightarrow BE$ là đường kính của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{BAE} = 90^\circ \Leftrightarrow d \perp AB$ tại A

Vậy khi d vuông góc với AB tại A thì chu vi tam giác BEF lớn nhất.

$$* \Delta BEF \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{S_{BEF}}{S_{ACD}} = \left(\frac{BE}{AC}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{BEF} = \frac{S_{ACD}}{AC^2} \cdot BE^2, \frac{S_{ACD}}{AC^2} \text{ không đổi}$$

$$S_{BEF} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow BE^2 \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow BE \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow BE \text{ là đường kính của đường tròn } (O)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAE} = 90^\circ \Leftrightarrow d \perp AB \text{ tại } A$$

Vậy khi d vuông góc với AB tại A thì diện tích tam giác BEF lớn nhất.

Bài 10: Trên cạnh CD của hình vuông $ABCD$, lấy một điểm M , vẽ đường tròn tâm O đường kính AM . Gọi E là giao điểm của đường tròn tâm (O') đường kính CD . Hai đường tròn cắt nhau tại điểm thứ hai N . Tia DN cắt BC tại P . Chứng minh rằng:

a) Ba điểm E, N, C thẳng hàng

b) $CA \perp MP$

Hướng dẫn giải

a) Ta có D là giao điểm thứ nhất của (O) và (O')

Để thấy $AEMD$ là hình chữ nhật và ED là đường kính của (O)

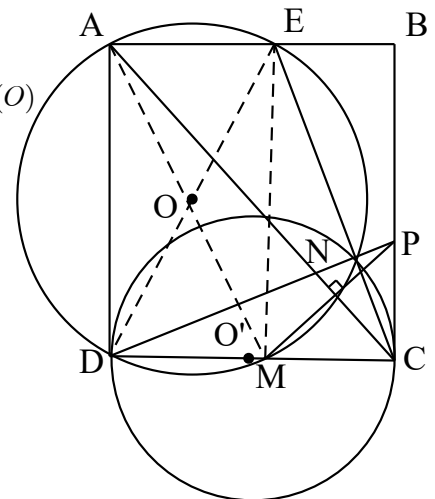
Nên $\widehat{END} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa cung đường tròn)

Mặt khác CD là đường kính của (O')

nên $\widehat{DNC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{END} + \widehat{DNC} = 180^\circ$ hay ba điểm E, N, C thẳng hàng.

Ta có $AEMD$ là hình chữ nhật



$\Rightarrow AECM$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow \widehat{EB} = \widehat{CM} \quad (1)$$

Xét $\triangle CBE$ và $\triangle CDP$ có

$BCE = CDP$ (hai góc cùng phụ với góc DPC)

$CB = DC; B = C = 90^\circ$ (gt)

Do đó: $\triangle CBE = \triangle DCP$ (g.c.g)

$$\Rightarrow EB = CP \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow CM = CP$ hay $\triangle PCM$ cân có CA là đường phân giác

$\Rightarrow CA$ cũng đồng thời là đường cao.

Vậy $CA \perp MP$.

Bài 11: Cho đường tròn (O) , M là điểm ở ngoài (O) , hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp tuyến), C là một điểm trên đường tròn tâm M bán kính MA và nằm trong đường tròn (O) . Các tia AC và BC cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và D .

Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Trong đường tròn (O) ta có: $\widehat{ABD} = \frac{1}{2} \widehat{AOD}$

Mặt khác trong đường tròn (M) có:

$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung).

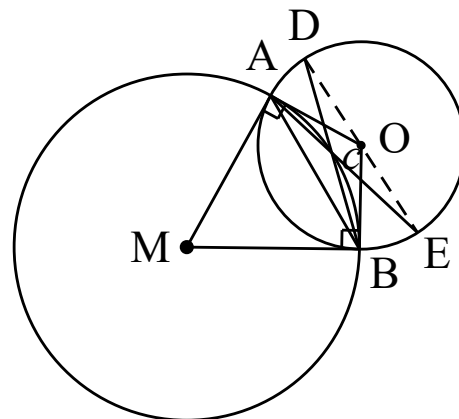
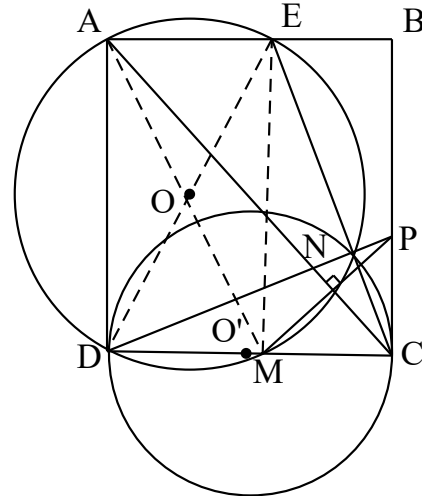
$$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AOD} \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BOE} \quad (2)$

Do MA và MB là tiếp tuyến của (O) nên:

$$\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$$

Hay $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 180^\circ$



$$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{AOB} = 180^\circ$$

$$\text{Hay } \widehat{AMC} + \widehat{BMC} + \widehat{AOB} = 180^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\angle AOD + \angle BOE + \angle AOB = 180^\circ$

Vậy ba điểm D, O, E thẳng hàng.

Bài 12: Gọi M là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$; P, Q, R lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA và AB .

Chứng minh rằng:

a) Các điểm M, B, P, R cùng thuộc một đường tròn.

b) Các điểm R, P, Q thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) $\widehat{BRM} + \widehat{BPM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $RBPM$ nội tiếp.

$\Rightarrow$ Các điểm M, P, B, C cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh tương tự a) có tứ giác $MPQC$ nội tiếp

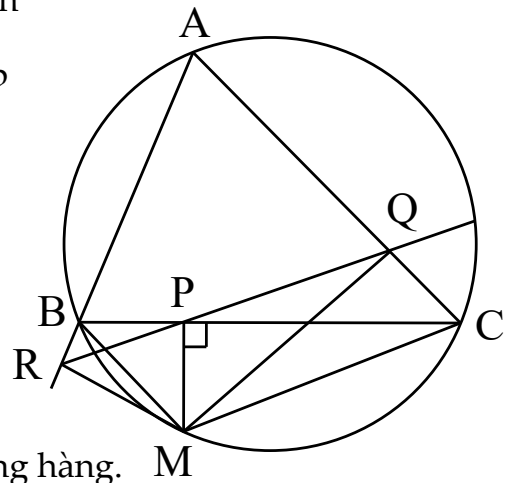
$$\Rightarrow \widehat{MPQ} + \widehat{MCQ} = 180^\circ$$

Mà $\widehat{RBM} = \widehat{RPM}$ (tứ giác $RBPM$ nội tiếp)

Và $\widehat{RBM} = \widehat{MCQ}$ (tứ giác $ABMC$ nội tiếp)

Do đó: $\widehat{RPM} = \widehat{MCQ}$

Ta có: $\widehat{RPM} + \widehat{MPQ} = \widehat{MCQ} + \widehat{MPQ} = 180^\circ \Rightarrow R, P, Q$ thẳng hàng.



Tổng hợp bởi Toán Học – 0986 915 960

Nguồn bài tập: Các sách tham khảo, các đề thi.