

**BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ**  
**TRONG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**



**I – KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**① Ứng dụng hệ thức Vi-ét:**

Xét phương trình bậc hai:  $ax^2 + bx + c = 0 (*)$ ,  $(a \neq 0)$ ,  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Gọi  $S$ ,  $P$  lần lượt là tổng và tích của hai nghiệm  $x_1$ ,  $x_2$ . Hệ thức Viét: 
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- ✓ Điều kiện  $PT(*)$  có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow P < 0$ .
- ✓ Điều kiện  $PT(*)$  có hai nghiệm phân biệt cùng dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .
- ✓ Điều kiện  $PT(*)$  có hai nghiệm phân biệt dương  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .
- ✓ Điều kiện  $PT(*)$  có hai nghiệm phân biệt âm  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .

**① Các hệ thức thường gặp:**

- ✓  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$ .
- ✓  $x_1 - x_2 = \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \pm \sqrt{S^2 - 4P}$ .
- ✓  $x_2 - x_1 = \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \pm \sqrt{S^2 - 4P}$ .
- ✓  $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \pm (x_1 + x_2) \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \pm S \sqrt{S^2 - 4P}$ .
- ✓  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \left[ (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right] = S(S^2 - 3P)$ .
- ✓  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left[ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \right]^2 - 2x_1^2 x_2^2$   
 $= (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$ .
- ✓  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$ .
- ✓  $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \pm \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{x_1 x_2} = \pm \frac{\sqrt{S^2 - 4P}}{P}$ .

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = \pm \frac{(x_1 + x_2)\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{x_1 x_2} = \pm \frac{S \cdot \sqrt{S^2 - 4P}}{P} \\ \checkmark \quad x_1^3 - x_2^3 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2\right] \\ &= \left(\pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}\right)\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2\right] = \pm \left(\sqrt{S^2 - 4P}\right)\left[S^2 - P\right]. \\ \checkmark \quad x_1^4 - x_2^4 &= (x_1^2)^2 - (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) = \pm (S^2 - 2P)\left(S \cdot \sqrt{S^2 - 4P}\right). \end{aligned}$$

## II – CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Câu 1:** Cho phương trình  $(2m-1)x^2 - 2mx + 1 = 0$ . Xác định  $m$  để phương trình trên có nghiệm thuộc khoảng  $(-1; 0)$ .

### Lời giải

- Xét  $2m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$  phương trình trở thành  $-x+1=0 \Rightarrow x=1 \notin (-1; 0)$
- Xét  $2m-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$  khi đó ta có:

$$\Delta' = m^2 - (2m-1) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0 \text{ mọi } m.$$

Suy ra phương trình có nghiệm với mọi  $m$ .

Ta thấy nghiệm  $x=1$  không thuộc khoảng  $(-1; 0)$

$$\text{Với } m \neq \frac{1}{2} \text{ phương trình còn có nghiệm là } x = \frac{m-m+1}{2m-1} = \frac{1}{2m-1}$$

Phương trình có nghiệm trong khoảng  $(-1; 0)$  suy ra

$$-1 \leq \frac{1}{2m-1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2m-1} + 1 > 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{2m-1} > 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm trong khoảng  $(-1; 0)$  khi và chỉ khi  $m < 0$ .

**Câu 2:** Cho phương trình  $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$  ( $x$  là ẩn số)

- Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.
- Định  $m$  để hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình đã cho thỏa mãn:  $(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2$ .

### Lời giải

$$\text{a) } \Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 - 1) = 5 - 4m$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

$$\text{b) } \text{Phương trình hai nghiệm} \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

Theo đề bài:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 &= x_1 - 3x_2 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 &= x_1 - 3x_2 \\ \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(m^2-1) &= x_1 - 3x_2 \\ \Leftrightarrow x_1 - 3x_2 &= 5 - 4m\end{aligned}$$

Ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 - 3x_2 = 5 - 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m+1}{2} \\ x_2 = \frac{3(m-1)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} \cdot \frac{3(m-1)}{2} = m^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1) = 4(m^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

Kết hợp với điều kiện  $\Rightarrow m = \pm 1$  là các giá trị cần tìm

**Câu 3:** Tìm  $m$  để phương trình  $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$  ( $x$  là ẩn số,  $m$  là tham số) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 = 75$

**Lời giải**

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m - 1) = 29 - 12m$$

$$\text{Để phương trình có hai nghiệm phân biệt} \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{29}{12}$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét} \begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1x_2 = 3m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 = 75$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2) + 3x_1x_2 = 75$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(25 - x_1x_2) + 3x_1x_2 = 75$$

$$\Leftrightarrow 25(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)x_1x_2 + 3x_1x_2 = 75$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 3$$

$$\text{Kết hợp } x_1 + x_2 = -5 \text{ suy ra } x_1 = -1; x_2 = -4 \text{ Thay vào } x_1x_2 = 3m - 1 \text{ suy ra } m = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{5}{3} \text{ là giá trị cần tìm}$$

**Câu 4:** Cho phương trình  $x^2 - 10mx + 9m = 0$  ( $m$  là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với  $m = 1$ .

b) Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa điều kiện

$$x_1 - 9x_2 = 0$$

**Lời giải**

a) Với  $m = 1$  phương trình đã cho trở thành  $x^2 - 10x + 9 = 0$

$$\text{Ta có } a + b + c = 0 \text{ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \Delta' = (-5m)^2 - 1 \cdot 9m = 25m^2 - 9m$$

$$\text{Điều kiện phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 25m^2 - 9m > 0 (*)$$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10m \\ x_1 - 9x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_2 = 10m \\ x_1 = 9x_2 \\ x_1 x_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = m \\ x_1 = 9m \\ 9m^2 - 9m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = m \\ x_1 = 9m, (*) \Rightarrow m = 1 \\ \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \end{cases}$$

**Câu 5:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với  $m = 0$ .

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$

**Lời giải**

a) Với  $m = 0$ , phương trình đã cho trở thành:  $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Delta' = 2; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Vậy với  $m = 0$  thì nghiệm của phương trình đã cho là  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ .

b)  $\Delta' = m + 2$  Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 1 \end{cases}$

Do đó:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 4 \Leftrightarrow \frac{2(m+1)}{m^2 + m - 1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \neq 0 \\ m + 1 = 2(m^2 + m - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \neq 0 \\ 2m^2 + m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện  $\Rightarrow m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 6:** Cho phương trình  $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Không giải phương trình, tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $3x_1 - 4x_2 = 11$

**Lời giải**

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thì  $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4.2.(m-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

Mặt khác, theo hệ thức Vi-ét và giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13-4m}{7} \\ x_2 = \frac{7m-7}{26-8m} \\ 3\frac{13-4m}{7} - 4\frac{7m-7}{26-8m} = 11 \end{cases}$$

Giải phương trình  $3\frac{13-4m}{7} - 4\frac{7m-7}{26-8m} = 11$

Ta được  $\begin{cases} m = -2 \\ m = 4,125 \end{cases}$

Vậy  $\begin{cases} m = -2 \\ m = 4,125 \end{cases}$  là các giá trị cần tìm

**Câu 7:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$  ( $m$  là tham số).

- a) Tìm  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm.  
b) Tìm  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

**Lời giải**

- a) Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (m^2 - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2m + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2$$

Vậy  $m \leq 2$  là các giá trị cần tìm

- b) Với  $m < 2$  thì phương trình đã cho có hai nghiệm.

Gọi một nghiệm của phương trình đã cho là  $a$  thì nghiệm kia là  $3a$ . Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} a + 3a = 2m - 2 \\ a \cdot 3a = m^2 - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{m-1}{2} \Rightarrow 3\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 = m^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 15 = 0$$

$$\Rightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{6} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy  $\Rightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{6}$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 8:** Cho phương trình  $\frac{1}{2}x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 + 4m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số).

- a) Giải phương trình đã cho với  $m = -1$ .

- b) Tìm  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2$

**Lời giải**

- a) Với  $m = -1$  phương trình trở thành  $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 9 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{10} \\ x_2 = -1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

- b) Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (-m)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}m^2 + 4m - 1\right) > 0 \Leftrightarrow -8m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm khác } 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 + 4m - 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \neq -4 - 3\sqrt{2} \\ m_2 \neq -4 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1x_2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ m^2 + 8m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 - \sqrt{19} \\ m = -4 + \sqrt{19} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được  $\begin{cases} m = 0 \\ m = -4 - \sqrt{19} \end{cases}$

Vậy  $\begin{cases} m = 0 \\ m = -4 - \sqrt{19} \end{cases}$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 9:** Tìm tất cả các số tự nhiên  $m$  để phương trình  $x^2 - m^2x + m + 1 = 0$  ( $m$  là tham số) có nghiệm nguyên.

**Lời giải**

$$\Delta = (-m^2)^2 - 4.1.(m+1) = m^4 - 4m - 4$$

Phương trình có nghiệm nguyên khi  $\Delta = m^4 - 4m - 4$  là số chính phương

Nếu  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$  thì  $\Delta < 0$  (loại)

Nếu  $m = 2$  thì  $\Delta = 4 = 2^2$  (nhận)

Nếu  $m \geq 3$  thì  $2m(m-2) > 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m - 5 > 0$

$$\Leftrightarrow \Delta - (2m^2 - 4m - 5) < \Delta < \Delta + 4m + 4$$

$$\Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + 1 < \Delta < m^4$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)^2 < \Delta < (m^2)^2$$

$\Delta$  không là số chính phương.

Vậy  $m = 2$  là giá trị cần tìm

**Câu 10:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$  ( $m$  là tham số).

- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho mà không phụ thuộc vào  $m$ .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x_1^2 + x_2^2$  (với  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình đã cho)

**Lời giải**

$$a) \quad \Delta' = [-(m-1)]^2 - 1.(m-3) = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m$$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$b) \text{ Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1 x_2 = 2m-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 - 4 = 0 \text{ không phụ thuộc vào } m.$$

$$c) \quad P = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4(m-1)^2 - 2(m-3)$$

$$= \left(2m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4}, \forall m$$

$$\text{Do đó } P_{\min} = \frac{15}{4} \text{ và dấu "=" xảy ra khi } 2m - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{15}{4} \text{ với } m = \frac{5}{4}.$$

**Câu 11:** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số).

- a) Gọi hai nghiệm của phương trình là  $x_1, x_2$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2}$ . Từ đó tìm  $m$  để  $M > 0$ .
- b) Tìm giá trị của  $m$  để biểu thức  $P = x_1^2 + x_2^2 - 1$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

- a) Theo hệ thức Vi-ét, ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} = \frac{m^2 - 2(m-1) - 1}{(m-1)m} \\ &= \frac{m^2 - 2m + 1}{m(m-1)} = \frac{(m-1)^2}{m(m-1)} \end{aligned}$$

$$\text{Để } M > 0 \Rightarrow \frac{(m-1)^2}{m(m-1)} > 0 \Rightarrow m(m-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } P &= x_1^2 + x_2^2 - 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 = m^2 - 2(m-1) - 1 \\ &= m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0, \forall m \end{aligned}$$

Do đó  $P_{\min} = 0$  và dấu "=" xảy ra khi  $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

Vậy  $P_{\min} = 0$  với  $m=1$ .

**Câu 12:** Cho phương trình  $x^2 - (2m+2)x + 2m = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2}$

**Lời giải**

Điều kiện PT có 2 nghiệm không âm  $x_1, x_2$  là

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 \geq 0 \\ 2(m+1) \geq 0 \\ 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 + 2\sqrt{2m} \leq 2 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $m=0$  là giá trị cần tìm.

**Câu 13:** Cho phương trình  $x^2 - (m+1)x + m = 0$  ( $m$  là tham số). Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị của  $m$  để  $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2007$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \Delta = [-(m+1)]^2 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

$$\text{Để phương trình có hai nghiệm phân biệt } \Delta > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 1$$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2007 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2007 \\ &= m(m + 1) + 2007 = m^2 + m + 2007 = m^2 + 2m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2006 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$= \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8027}{4} \geq \frac{8027}{4}, \forall m$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } m + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = \frac{8027}{4} \text{ với } m = -\frac{1}{2}.$$

**Câu 14:** Cho phương trình  $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị của  $m$  để  $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \Delta = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1) = 4m^2 - 8m + 4 = 4(m - 1)^2$$

$$\text{Để phương trình có hai nghiệm phân biệt } \Delta > 0 \Rightarrow (m - 1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 1$$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ &= m(m + 1) + 2007 = (2m - 1)(-2m) = -4m^2 + 2m = -4\left(m^2 - \frac{1}{2}m\right) \end{aligned}$$

$$= -4\left(m^2 - 2m \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) = -4\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \forall m$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } m - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } A_{\max} = \frac{1}{4} \text{ với } m = \frac{1}{4}.$$

**Câu 15:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$  ( $m$  là tham số).

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .
- Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 1 < x_2$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \Delta &= [-2(m - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 5) = 4m^2 - 12m + 22 \\ &= (2m)^2 - 2 \cdot 2m \cdot 3 + 9 + 13 = (2m - 3)^2 + 13 > 0, \forall m \end{aligned}$$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

$$\text{b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 5 \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\text{Theo giả thiết } x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \quad (\text{II})$$

Thay (I) vào (II) ta có:

$$(2m - 5) - (2m - 2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 0 \cdot m - 2 < 0, \text{ đúng với mọi } m.$$

Vậy với mọi  $m$  thì phương trình trên có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 1 < x_2$ .

**Câu 16:** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 2 = 0$  ( $m$  là tham số).

a) Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị  $m$ .

b) Định  $m$  để hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa mãn  $\frac{x_1^2 - 2}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2^2 - 2}{x_2 - 1} = 4$ .

**Lời giải**

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị  $m$ .

$$\Delta = m^2 - 4 \cdot (m - 2) = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4 > 4 > 0, \forall m$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Vì  $a + b + c = 1 - m + m - 2 = -1 \neq 0, \forall m$  nên phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2 \neq 1, \forall m$ .

$$\text{Phương trình } x^2 - mx + m - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = mx - m$$

$$\text{Ta có } \frac{x_1^2 - 2}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2^2 - 2}{x_2 - 1} = 4 \Leftrightarrow \frac{mx_1 - m}{x_1 - 1} \cdot \frac{mx_2 - m}{x_2 - 1} = 4 \Leftrightarrow \frac{m^2(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = 4 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy  $m = \pm 2$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 17:** Cho phương trình  $x^2 - mx - 1 = 0$  (1) ( $m$  là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình (1):

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$$

**Lời giải**

a) Ta có  $a \cdot c = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$ , với  $\forall m$  nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi  $m$ .

b) Ta có  $\begin{cases} x_1^2 = mx_1 + 1 \\ x_2^2 = mx_2 + 1 \end{cases}$  do  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình (1).

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P &= \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2} = \frac{mx_1 + 1 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{mx_2 + 1 + x_2 - 1}{x_2} \\ &= \frac{x_1(m+1)}{x_1} - \frac{x_2(m+1)}{x_2} = (m+1) - (m+1) = 0 \text{ vì } x_1, x_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Vậy  $P = 0$ .

**Câu 18:** Cho phương trình  $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 1 = 0$  (1) ( $m$  là tham số).

a) Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

b) Định  $m$  để hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình (1) thỏa mãn:  $(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2$ .

**Lời giải**

$$\text{a) } \Delta = [-(2m - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 1) = -4m + 5$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có } (x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = x_1 + x_2 - 4x_2$$

$$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 4(m^2 - 1) = 2m - 1 - 4x_2 \Leftrightarrow 6m - 6 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3m - 3}{2}$$

$$\text{Suy ra } x_1 = \frac{m + 1}{2}$$

$$\text{Do đó } \frac{m + 1}{2} \cdot \frac{3m - 3}{2} = m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện có nghiệm})$$

Vậy  $m = \pm 1$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 19:** Tìm  $m$  để phương trình  $x^2 - 2x - 2m + 1 = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $x_2^2(x_1^2 - 1) + x_1^2(x_2^2 - 1) = 8$ .

**Lời giải**

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-2m+1) = 8m$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  $\Delta > 0 \Leftrightarrow 8m > 0 \Leftrightarrow m > 0$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -2m + 1 \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\text{Ta có } x_2^2(x_1^2 - 1) + x_1^2(x_2^2 - 1) = 8 \Leftrightarrow 2(x_1 x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 8$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 x_2)^2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = 8 \quad (\text{II})$$

Thay (I) vào (II) ta có:

$$2(-2m+1)^2 - [4 - 2(-2m+1)] = 8 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 2 \end{cases}$$

So với điều kiện có nghiệm  $m > 0$ .

Vậy  $m = 2$  là giá trị cần tìm.

**Câu 20:** Xác định giá trị  $m$  trong phương trình  $x^2 - 8x + m = 0$  để  $4 + \sqrt{3}$  là nghiệm của phương trình. Với  $m$  vừa tìm được, phương trình đã cho còn một nghiệm nữa. Tìm nghiệm còn lại.

**Lời giải**

Do  $4 + \sqrt{3}$  là nghiệm của phương trình nên thỏa:

$$(4 + \sqrt{3})^2 - 8(4 + \sqrt{3}) + m = 0$$

$$\Leftrightarrow m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = 13$$

Thay  $m = 13$  vào phương trình ta được phương trình:  $x^2 - 8x + 13 = 0$  (\*)

$$\Delta' = (-4)^2 - 1.13 = 3$$

$$\text{Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là: } \begin{cases} x_1 = 4 + \sqrt{3} \\ x_2 = 4 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy  $x = 4 - \sqrt{3}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 21:** Cho phương trình  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm  $m$  sao cho  $A = (2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1)$  đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có } \Delta = [-(2m+1)]^2 - 4.1.(m^2 + m - 1) = 5 > 0, \forall m.$$

Nên phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

$$\text{b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= (2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1) = 5x_1 x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 9x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 \\ &= 9(m^2 + m - 1) - 2(2m + 1)^2 = m^2 + m - 11 \end{aligned}$$

$$= m^2 + 2m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 11 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{45}{4} \geq -\frac{45}{4}, \forall m$$

Dấu "=" xảy ra  $m + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Vậy  $A_{\min} = -\frac{45}{4}$  với  $m = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 22:** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - \frac{1}{2} = 0$  ( $m$  là tham số).

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị  $m$ .
- Tìm  $m$  để hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng nhau.
- Tìm  $m$  để hai nghiệm đó là số đo của 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng 3.

**Lời giải**

a)  $\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot \left(m^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0, \forall m$ .

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị  $m$ .

b) Hai nghiệm của phương trình là 
$$\begin{cases} x_1 = m - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2 = m + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Theo đề bài ta có  $\left|m - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \left|m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \Leftrightarrow m^2 - \sqrt{2}m + \frac{1}{2} = m^2 + \sqrt{2}m + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}m = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

c) Theo định lý Pitago ta có:

$$\left(m - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow 2m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy  $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 23:** Cho phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số).

- Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = -1$ . Tính nghiệm còn lại.
- Tìm  $m$  để hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^3 + x_2^3 = 8$

**Lời giải**

a) Vì phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  có nghiệm  $x = -1$  nên ta có:

$$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + m + 3 = 0 \Leftrightarrow m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:

$$x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow -1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 3$$

Vậy  $m = 6$  và nghiệm còn lại là  $x = 3$ .

b)  $\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (m + 3) = -m - 2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -2$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m + 3 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
x_1^3 + x_2^3 &= 8 \\
\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) &= 8 \\
\Leftrightarrow 2^3 - 3.(m+3).2 &= 8 \\
\Leftrightarrow 6(m+3) &= 0 \\
\Leftrightarrow m+3 &= 0 \\
\Leftrightarrow m &= -3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\
\text{Vậy } m &= -3 \text{ là giá trị cần tìm.}
\end{aligned}$$

**Câu 24:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  sao cho biểu thức  $P = x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4.1.(m^2-1) = -4m+5$$

$$\text{Để phương trình có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}.$$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m-1) \\ x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } P &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\
&= [-(2m-1)]^2 - 2(m^2-1) = 2m^2 - 4m + 3 \\
&= 2(m^2 - 2m + 1 - 1) + 3 = 2(m-1)^2 + 1 \geq 1, \forall m
\end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } m-1=0 \Leftrightarrow m=1 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 1 \text{ khi } m=1.$$

**Câu 25:** Cho phương trình  $x^2 - (m+5)x + 2m+6 = 0$  ( $x$  là ẩn số)

- Chứng minh rằng: phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $x_1^2 + x_2^2 = 35$ .

**Lời giải:**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \Delta &= [-(m+5)]^2 - 4.1.(2m+6) \\
&= (m+5)^2 - 4.(2m+6) \\
&= m^2 + 10m + 25 - 8m - 24 \\
&= m^2 + 2m + 1 \\
&= (m+1)^2 \geq 0; \forall m
\end{aligned}$$

Vậy với mọi giá trị của  $m$  phương trình luôn luôn có hai nghiệm.

b) Với mọi  $m$ , phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m+5; \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = 2m+6 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 35$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 35$$

$$\Leftrightarrow (m+5)^2 - 2(2m+6) = 35$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 10m + 25 - 4m - 12 - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 22 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = 3^2 - 1 \cdot (-22) = 9 + 22 = 31 > 0$$

Vì  $\Delta' > 0$  nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:  $m_1 = -3 + \sqrt{31}; m_2 = -3 - \sqrt{31}$

$$\text{Vậy } m \in \{-3 + \sqrt{31}; -3 - \sqrt{31}\}$$

**Câu 26:** Cho phương trình  $x^2 + 2x + m - 2 = 0$  (1) ( $m$  là tham số)

- Tìm  $m$  để phương trình (1) có nghiệm
- Tìm  $m$  để phương trình (1) có 2 là một nghiệm và tìm nghiệm còn lại

**Lời giải**

a) Phương trình (1) có nghiệm :

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - (m - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi  $m \leq 3$

b) Do phương trình (1) có 2 là một nghiệm nên thỏa:

$$2^2 + 2 \cdot 2 + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -6$$

Thay  $m = -6$  vào phương trình (1) ta được phương trình:  $x^2 + 2x - 8 = 0$  (\*)

$$\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-8) = 1 + 8 = 9 > 0, \sqrt{\Delta'} = \sqrt{9} = 3$$

Do  $\Delta' > 0$  nên phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt:  $x_1 = \frac{-1+3}{1} = 2; x_2 = \frac{-1-3}{1} = -4$

Vậy  $m = -6$  và nghiệm còn lại là  $-4$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 27:** Cho phương trình  $x^2 + mx + m - 1 = 0$  (1) với  $x$  là ẩn số

- Giải phương trình khi  $m = 2$
- Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .
- Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (x_1 + 1)^2 (x_2 + 1)^2 + 2016.$$

**Lời giải**

a) Khi  $m = 2$ , phương trình (1) trở thành:  $x^2 + 2x + 1 = 0$  (2)

Ta có  $a - b + c = 1 - 2 + 1 = 0$  nên phương trình (2) có hai nghiệm:  $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{2}{1} = -2$

Vậy khi  $m = 2$ , tập nghiệm của phương trình (2) là  $S = \{-1; -2\}$

b)  $\Delta = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \geq 0$ ; với mọi  $m$ .

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

c) Với mọi  $m$ , phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -m \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1 \end{cases}$$

Ta có:  $A = (x_1 + 1)^2 (x_2 + 1)^2 + 2016$

$$A = [(x_1 + 1)(x_2 + 1)]^2 + 2016$$

$$A = (x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2 + 2016$$

$$A = (m - 1 - m + 1)^2 + 2016$$

$$A = 0^2 + 2016$$

$$A = 2016$$

**Câu 28:** Cho phương trình  $x^2 + (2m - 1)x - 2m = 0$  với  $x$  là ẩn số;  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = 2$ . Tìm nghiệm còn lại.

#### Lời giải

Do phương trình có nghiệm  $x = 2$  nên thỏa:  $2^2 + (2m - 1).2 - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow 4 + 4m - 2 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m = -2$$

$$\Leftrightarrow m = -1$$

Thay  $m = -1$  vào phương trình ta được phương trình:  $x^2 - 3x + 2 = 0$  (\*)

Ta có  $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$  nên phương trình (\*) có hai nghiệm:  $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

Vì  $x_2 = 2$  nên nghiệm còn lại là  $x_1 = 1$

Vậy  $m = -1$  và nghiệm còn lại là 1 là giá trị cần tìm.

**Câu 29:** Cho phương trình  $x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0$  ( $x$  là ẩn số,  $m$  là tham số)

a) Chứng tỏ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$

b) Tính tổng và tích của hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình theo  $m$

c) Tính biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$  theo  $m$  và tìm  $m$  để  $A$  đạt giá trị nhỏ nhất

#### Lời giải

$$a) \Delta = [-(m + 1)]^2 - 4.1.(m - 2) = (m + 1)^2 - 4(m - 2) = m^2 + 2m + 1 - 4m + 8$$

$$= m^2 - 2m + 9 = (m^2 - 2m + 1) + 8 = (m - 1)^2 + 8 > 0; \text{ với mọi } m$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

b) Với mọi  $m$ , phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m + 1 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 2 \end{cases}$$

$$c) \text{ Ta có } A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 = (m + 1)^2 - 8(m - 2) = m^2 + 2m + 1 - 8m + 16$$

$$= m^2 - 6m + 17 = m^2 - 6m + 9 + 8 = (m - 3)^2 + 8 \geq 8; \text{ với mọi } m$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $m = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  là:  $\min A = 8$  khi và chỉ khi  $m = 3$ .

**Câu 30:** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m - 1)x - 4m = 0$  ( $x$  là ẩn số,  $m$  là tham số).

a) Giải phương trình với  $m = -1$ .

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

#### Lời giải

a) Với  $m = -1$  phương trình trở thành:  $x^2 + 4x + 4 = 0$  (\*)

$$\Delta' = 2^2 - 1.4 = 0$$

Vì  $\Delta' = 0$  nên phương trình (\*) có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = -\frac{2}{1} = -2$

Vậy với  $m = -1$ , tập nghiệm của phương trình (\*) là  $S = \{-2\}$

b) Ta có

$$\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (-4m) = (m-1)^2 + 4m = m^2 - 2m + 1 + 4m = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Vậy  $m \neq -1$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**Câu 31:** Cho phương trình  $x^2 + 2x - m^2 - 1 = 0$  ( $m$  là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình trên theo  $m$ .

c) Tìm  $m$  để phương trình trên có hai nghiệm thỏa:  $x_1 = -3x_2$

**Lời giải**

a) Ta có  $\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-m^2 - 1) = 1 + m^2 + 1 = m^2 + 2 > 0$ , với mọi  $m$

Vì  $\Delta' > 0$ , với mọi  $m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Với mọi  $m$ , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} = -2 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m^2 - 1}{1} = -m^2 - 1 \end{cases}$$

c) Ta có  $x_1 + x_2 = -2$  (do trên) và  $x_1 = -3x_2$  nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ -x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Thay (\*) vào biểu thức  $x_1 x_2 = -m^2 - 1$  ta được:

$$(-3) \cdot 1 = -m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Vậy  $m = \pm\sqrt{2}$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 32:** Cho phương trình:  $x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số)

a) Chứng minh: phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm  $m$  để có  $x_1^2 + x_2^2 - 13 = x_1 x_2$

**Lời giải**

a) Ta có  $\Delta = (m+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-1) = m^2 + 4m + 4 - 4m + 4 = m^2 + 8 > 0$ , với mọi  $m$ .

Vì  $\Delta > 0$ , với mọi  $m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Với mọi  $m$ , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt nên thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(m+2)}{1} = -(m+2) \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{1} = m-1 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 - 13 = x_1 x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 13 - x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow [-(m+2)]^2 - 3(m-1) - 13 = 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 3(m-1) - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 3m + 3 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-6) = 1 + 24 = 25 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

Do  $\Delta > 0$  nên phương trình  $(*)$  có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-1+5}{2.1} = 2; \quad m_2 = \frac{-1-5}{2.1} = -3$$

Vậy  $m_1 = 2; m_2 = -3$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 33:** Cho phương trình  $x^2 + x + m - 2 = 0$  với  $m$  là tham số và  $x$  là ẩn số

a) Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có nghiệm

b) Giả sử  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm  $m$  để  $x_1x_2^3 + x_1^3x_2 = -10$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \Delta &= 1^2 - 4.1.(m-2) \\ &= 1 - 4m + 8 \\ &= 9 - 4m \end{aligned}$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow -4m \geq -9 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{4}$$

Vậy  $m \leq \frac{9}{4}$  thì phương trình có nghiệm.

b) Với  $m \leq \frac{9}{4}$  thì phương trình trên có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{1} = m-2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1x_2^3 + x_1^3x_2 = -10 \Leftrightarrow x_1x_2(x_2^2 + x_1^2) = -10$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1) \cdot [(-1)^2 - 2.(m-2)] + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1 - 2m + 4) + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + 2m - 4 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m = -5$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$$

Vậy  $m = -\frac{5}{2}$  thì phương trình trên có nghiệm.

**Câu 34:** Cho phương trình  $x^2 + 4x + m + 3 = 0$  ( $x$  là ẩn)

a) Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa  $x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 = 51$

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có } \Delta' = 2^2 - 1.(m+3) = 4 - m - 3 = 1 - m$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$$

b) Theo câu a, ta có  $m \leq 1$  thì phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+3}{1} = m+3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 51 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + (x_1 x_2)^2 - 51 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4)^2 - 2(m+3) + (m+3)^2 - 51 = 0 \Leftrightarrow 16 - 2m - 6 + m^2 + 6m + 9 - 51 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 32 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = 2^2 - 1 \cdot (-32) = 4 + 32 = 36 > 0; \sqrt{\Delta'} = \sqrt{36} = 6$$

Do  $\Delta' > 0$  nên phương trình  $(*)$  có 2 nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-2+6}{1} = 4 \text{ (loại)}; m_2 = \frac{-2-6}{1} = -8 \text{ (nhận)}$$

Vậy  $m = -8$  là giá trị cần tìm.

**Câu 35:** Cho phương trình:  $x^2 + 2(m+3)x + m^2 - 3m + 1 = 0$  ( $x$  là ẩn số,  $m$  là tham số)

a) Tìm  $m$  để phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

b) Tìm  $m$  để  $A = x_1(x_2 - 1) - x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có } \Delta' = (m+3)^2 - 1 \cdot (m^2 - 3m + 1) = m^2 + 6m + 9 - m^2 + 3m - 1 = 9m + 8$$

$$\text{Để phương trình luôn có nghiệm với mọi } m \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 9m \geq -8 \Leftrightarrow m \geq \frac{-8}{9}$$

$$\text{Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi } m \geq \frac{-8}{9}.$$

b) Theo câu a, với mọi  $m \geq \frac{-8}{9}$  thì phương trình luôn có nghiệm thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2(m+3)}{1} = -2(m+3) \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 3m + 1}{1} = m^2 - 3m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } A = x_1(x_2 - 1) - x_2 = x_1 x_2 - x_1 - x_2 = x_1 x_2 - (x_1 + x_2)$$

$$= m^2 - 3m + 1 + 2(m+3) = m^2 - 3m + 1 + 2m + 6 = m^2 - m + 7 = \left(m^2 - m + \frac{1}{4}\right) + \frac{27}{4}$$

$$= \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \geq \frac{27}{4}, \text{ với mọi } m \text{ (vì } \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ với mọi } m)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } m = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của A là: } \min A = \frac{27}{4} \text{ khi và chỉ khi } m = \frac{1}{2}$$

**Câu 36:** Cho phương trình bậc 2 có ẩn  $x$ :  $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$  (1)

a) Chứng tỏ phương trình (1) luôn có nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi giá trị của  $m$

b) Đặt  $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1 x_2$ , tìm  $m$  sao cho  $A = 27$

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có } \Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (2m - 1) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0; \text{ với mọi } m$$

Do  $\Delta' \geq 0$  (với mọi  $m$ ) nên phương trình (1) luôn có nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi giá trị của  $m$ .

b) Theo câu a, với mọi  $m$  thì phương trình (1) luôn có nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{1} = 2m \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2m-1}{1} = 2m-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1 x_2 = 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - 5x_1 x_2 \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 5x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1 x_2 = 2(2m)^2 - 9(2m-1) = 8m^2 - 18m + 9 \end{aligned}$$

Do  $A = 27$  nên thỏa:

$$8m^2 - 18m + 9 = 27$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 18m - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m - 9 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \Delta = (-9)^2 - 4.4.(-9) = 81 + 144 = 225 > 0; \sqrt{\Delta} = \sqrt{225} = 15$$

$$\text{Do } \Delta > 0 \text{ nên phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt: } m_1 = \frac{9+15}{2.4} = 3; \quad m_2 = \frac{9-15}{2.4} = \frac{-3}{4}$$

Vậy  $m_1 = 3; \quad m_2 = \frac{-3}{4}$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 37:** Cho phương trình  $x^2 - (m-3)x + m - 5 = 0$  ( $x$  là ẩn)

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm  $m$  để  $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 11$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \Delta &= [-(m-3)]^2 - 4.1.(m-5) = (m-3)^2 - 4.(m-5) = m^2 - 6m + 9 - 4m + 20 \\ &= m^2 - 10m + 29 = (m^2 - 10m + 25) + 4 = (m-5)^2 + 4 > 0; \text{ với mọi } m. \end{aligned}$$

Vì  $\Delta > 0$  (với mọi  $m$ ) nên phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$

b) Theo câu a, ta có với mọi  $m$  thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Viet:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(m-3)}{1} = m-3 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-5}{1} = m-5 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 11 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 4(x_1 + x_2) - 11 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) - 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m-3)^2 - 2(m-5) - 4(m-3) - 11 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 - 2m + 10 - 4m + 12 - 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 12m + 20 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \Delta' = (-6)^2 - 1.20 = 36 - 20 = 16 > 0; \sqrt{\Delta'} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Do } \Delta' > 0 \text{ nên phương trình (6) có 2 nghiệm phân biệt: } m_1 = \frac{6+4}{1} = 10; \quad m_2 = \frac{6-4}{1} = 2$$

Vậy  $m_1 = 10; \quad m_2 = 2$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 38:** Cho phương trình:  $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$  ( $x$  là ẩn số)

a) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$

b) Tính tổng và tích của hai nghiệm theo  $m$

c) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Định  $m$  để  $x_1^2 + x_2^2 = 5$

**Lời giải**

a) Ta có:  $\Delta = m^2 - 4.1.(2m-4) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2 \geq 0$ ; với mọi  $m$ .

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

b) Với mọi  $m$ , phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -m \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 = 5 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (-m)^2 - 2.(2m-4) - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 4m + 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } a + b + c = 1 + (-4) + 3 = 0 \text{ nên phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm: } m_1 = 1; m_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

Vậy  $m_1 = 1; m_2 = 3$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 39:** Cho phương trình  $x^2 - 2x + 4m - 1 = 0$  ( $x$  là ẩn số)

a) Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có nghiệm

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa  $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 = 12$

**Lời giải**

a) Ta có  $\Delta' = (-1)^2 - 1.(4m-1) = 1 - 4m + 1 = 2 - 4m$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow -4m \geq -2 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy  $m \leq \frac{1}{2}$  thì phương trình có nghiệm.

b) Theo câu a, với  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$  thì phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4m-1}{1} = 4m-1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^2 - 2(4m-1) + 2.2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 4 - 8m + 2 + 4 - 12 = 0 \Leftrightarrow -8m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4} \text{ (thỏa)}$$

Vậy  $m = \frac{-1}{4}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 40:** Cho phương trình bậc hai:  $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$  ( $x$  là ẩn)

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm  $m$  để  $x_1^2 + 2mx_2 - 8m + 5 = 0$

**Lời giải**

a) Ta có  $\Delta' = (-m)^2 - 1.(4m-4) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0, \forall m$

Do  $\Delta' \geq 0, \forall m$  nên phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

b) Theo câu a)  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$  nên phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{1} = 2m \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4m-4}{1} = 4m-4 \end{cases}$$

Do  $x_1$  là nghiệm của phương trình nên thỏa:  $x_1^2 - 2mx_1 + 4m - 4 = 0$

$$\Rightarrow x_1^2 = 2mx_1 - 4m + 4 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + 2mx_2 - 8m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2mx_1 - 4m + 4 + 2mx_2 - 8m + 5 = 0 \quad (\text{do } (*))$$

$$\Leftrightarrow 2m(x_1 + x_2) - 12m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m \cdot 2m - 12m + 9 = 0 \quad (\text{do hệ thức Vi-ét})$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m = 3$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Vậy  $m = \frac{3}{2}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 41:** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-4)x + m + 6 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Tính theo  $m$  biểu thức  $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  rồi tìm  $m \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có: } \Delta' = [- (m-4)]^2 - (m-6)$$

$$\Delta' = (m-4)^2 - m + 6$$

$$\Delta' = m^2 - 8m + 16 - m + 6$$

$$\Delta' = m^2 - 9m + 22$$

$$\Delta' = \left(m - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} > 0, \forall m$$

Do  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Theo câu a,  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -[-2(m-4)] = 2(m-4) = 2m-8 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m-6 \end{cases}$$

$$\text{Có: } A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2m-8}{m-6} = \frac{2(m-6)+12-8}{m-6}$$

$$= \frac{2(m-6)+4}{m-6} = \frac{2(m-6)}{m-6} + \frac{4}{m-6} = 2 + \frac{4}{m-6}$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{4}{m-6} \in \mathbb{Z} \text{ suy ra } 4 : (m-6) \text{ hay } m-6 \in U(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$$

Lập bảng:

|       |    |    |    |   |   |    |
|-------|----|----|----|---|---|----|
| $m-6$ | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4  |
| $m$   | 2  | 4  | 5  | 7 | 8 | 10 |

Vậy  $m \in \{2; 4; 5; 7; 8; 10\}$  thì  $A \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 42:** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-2)x - 2m = 0$  (1) với  $x$  là ẩn số.

- Chứng tỏ phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$
- Tìm giá trị của  $m$  để hai nghiệm của phương trình thỏa hệ thức  $x_2 - x_1 = x_1^2$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\Delta' = [-(m-2)]^2 - (-2m) = (m-2)^2 + 2m = m^2 - 4m + 4 + 2m$   
 $= m^2 - 2m + 4 = (m-1)^2 + 3 > 0, \forall m$

Do  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

- b) Theo câu a,  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -[-2(m-2)] = 2(m-2) = 2m-4 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2m \end{cases}$$

Ta có:  $x_2 - x_1 = x_1^2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 2(m-2)x_1 + 2m \Leftrightarrow 2m-4-x_1-x_1 = 2(m-2)x_1 + 2m$

$$\Leftrightarrow -4-2x_1 = (2m-4)x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{2-2m} = \frac{2}{1-m}$$

Thay  $x_1 = \frac{2}{1-m}$  vào (1), ta được:  $\left(\frac{2}{1-m}\right)^2 - 2(m-2)\left(\frac{2}{1-m}\right) - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(1-m)^2} - \frac{4(m-2)(1-m)}{(1-m)^2} - \frac{2m(1-m)^2}{(1-m)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4-4(-m^2+3m-2)-2m(1-2m+m^2)=0$$

$$\Leftrightarrow 4+4m^2-12m+8-2m+4m^2-2m^3=0$$

$$\Leftrightarrow 2m^3-8m^2+14m-12=0$$

$$\Leftrightarrow m^3-4m^2+7m-6=0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(m^2-2m+3)=0$$

$$\Leftrightarrow m=2$$

Vậy  $m=2$  là giá trị cần tìm.

**Câu 43:** Cho phương trình:  $x^2 - 2x - 2m^2 = 0$  (1) với  $x$  là ẩn số.

- Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .
- Tìm giá trị của  $m$  để hai nghiệm của phương trình thỏa hệ thức  $x_1^2 = 4x_2^2$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\Delta' = (-1)^2 - (-2m^2) = 1 + 2m^2 > 0, \forall m$

Do  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Theo câu a,  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -(-2) = 2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2m^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$\text{Có: } x_1^2 = 4x_2^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ thay vào (3) .Ta được: } \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = -2m^2 \text{ (vô lý)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ thay vào (3) . Ta được: } 4(-2) = -2m^2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2 .$$

Vậy  $m = \pm 2$  là giá trị cần tìm .

**Câu 44:** Cho phương trình:  $x^2 - (3m-2)x - 2m^2 - m - 3 = 0$  (1) ,(với  $x$  là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$  .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của (1) . Tìm  $m$  để  $x_1 = 3x_2$  .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \Delta &= [-(3m-2)]^2 - 4(2m^2 - m - 3) \\ &= (3m-2)^2 - 8m^2 + 4m + 12 \\ &= 9m^2 - 12m + 4 - 8m^2 + 4m + 12 \\ &= m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2 \geq 0, \forall m \end{aligned}$$

Do  $\Delta \geq 0, \forall m$  nên phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$  .

b) Theo câu a,  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$  nên phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -[-(3m-2)] = 3m-2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2m^2 - m - 3 \quad (3) \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 + x_2 = 3m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9m-6}{4} \\ x_2 = \frac{3m-2}{4} \end{cases}, \text{ thay vào (3), ta được: } \frac{9m-6}{4} \cdot \frac{3m-2}{4} = 2m^2 - m - 3$$

$$\Leftrightarrow (9m-6)(3m-2) = 16(2m^2 - m - 3)$$

$$\Leftrightarrow 27m^2 - 36m + 12 = 32m^2 - 16m - 48$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 20m - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2, m = 6$$

Vậy  $m = -2, m = 6$  là giá trị cần tìm.

**Câu 45:** Cho phương trình:  $x^2 + 2(m-2)x - m^2 = 0$  (1) với  $x$  là ẩn số.

- a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .  
b) Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 2$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\Delta' = (m-2)^2 - (-m^2) = (m-2)^2 + m^2 > 0, \forall m$

Do  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Theo câu a,  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -2(m-2) = 4-2m \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 \quad (3) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (x_1 + 1)(x_2 + 1) &= x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 2 \\ \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 &= x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2 \\ \Leftrightarrow -m^2 + 4 - 2m + 1 &= -m^2 (4 - 2m) + 2 \\ \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 5 &= -4m^2 + 2m^3 - 2m^2 \\ \Leftrightarrow 2m^3 - 5m^2 + 2m - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 (2m - 5) + (2m - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2m - 5)(m^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Vậy  $m = \frac{5}{2}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 46:** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  (1) (với  $x$  là ẩn số)

- a) Tìm điều kiện để (1) có nghiệm.  
b) Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  
 $(2x_1 - 1)(x_2 + 1) + (2x_2 - 1)(x_1 + 1) = x_1^2 + x_2^2 + 14$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\Delta' = [-(m+1)]^2 - (m^2 - 3) = (m+1)^2 - m^2 + 3 = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 3 = 2m + 4$

Để (1) có nghiệm thì  $\Delta' = 2m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$

b) Theo câu a)  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -2$  nên phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -[-2(m+1)] = 2m + 2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 3 \quad (3) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (2x_1 - 1)(x_2 + 1) + (2x_2 - 1)(x_1 + 1) &= x_1^2 + x_2^2 + 14 \\ \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + 2x_1 - x_2 - 1 + 2x_1 x_2 + 2x_2 - x_1 - 1 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 14 \\ \Leftrightarrow 4x_1 x_2 + (x_1 + x_2) - 2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 16 = 0 \\
&\Leftrightarrow (2m + 2)^2 - 6(m^2 - 3) - (2m + 2) + 16 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 6m^2 + 18 - 2m - 2 + 16 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2m^2 - 6m - 36 = 0 \\
&\Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 = 0 \\
&\Leftrightarrow m = -3, m = 6
\end{aligned}$$

Vậy  $m = 6$  là giá trị cần tìm.

**Câu 47:** Tìm  $m$  để phương trình  $x^2 - mx + 3 = 0$  ( $m$  là tham số) có hai nghiệm thỏa mãn  $3x_1 + x_2 = 6$

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta = m^2 - 12$

Để pt có 2 nghiệm phân biệt thì  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \geq 2\sqrt{3}$  hoặc  $m \leq -2\sqrt{3}$

$$\text{Kết hợp với hệ thức Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m & (1) \\ 3x_1 + x_2 = 6 & (2) \\ x_1x_2 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ (1), (2) ta được } x_1 = \frac{6-m}{2}; \quad x_2 = \frac{3m-6}{2}$$

Thay  $x_1 = \frac{6-m}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3m-6}{2}$  vào (3) ta được:

$$\frac{6-m}{2} \cdot \frac{3m-6}{2} = 3 \Leftrightarrow (6-m)(3m-6) = 12 \Leftrightarrow m = 4$$

Vậy  $m = 4$  là giá trị cần tìm.

**Câu 48:** Cho phương trình  $x^2 - (5m-1)x + 6m^2 - 2m = 0$  (1) ( $m$  là tham số)

- Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .
- Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình. Tìm  $m$  để  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
\text{a) Ta có: } \Delta &= [-(5m-1)]^2 - 4(6m^2 - 2m) = 25m^2 - 10m + 1 - 24m^2 + 8m \\
&= m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0, \quad \forall m
\end{aligned}$$

Vì  $\Delta \geq 0, \forall m$  nên phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình

$$\text{Ta có: } x_1 = \frac{5m-1+m-1}{2} = 3m-1; \quad x_2 = \frac{5m-1-(m-1)}{2} = 2m$$

$$\text{Theo đề bài: } x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow (3m-1)^2 + (2m)^2 = 1 \Leftrightarrow 9m^2 - 6m + 1 + 4m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 13m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = \frac{6}{13}$$

Vậy  $m = 0; m = \frac{6}{13}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 49:** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$  (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x_1^2 + x_2^2$ .

c) Tìm hệ thức giữa  $x_1$  và  $x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m-3)$

$$\Delta' = m^2 - 2m + 1 - m + 3$$

$$\Delta' = m^2 - 3m + 4$$

$$\Delta' = \left[ m^2 - 2.m.\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] + 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Delta' = \left( m - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m$$

Do  $\Delta' > 0, \forall m$  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình (1)

$$\text{Áp dụng định lý Vi-ét: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2(m-1) & (2) \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m-3 & (3) \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$P = x_1^2 + x_2^2$$

$$P = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 2x_1x_2$$

$$P = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$P = 4(m-1)^2 - 2(m-3)$$

$$P = 4m^2 - 8m + 4 - 2m + 6$$

$$P = 4m^2 - 10m + 10$$

$$P = \left[ (2m)^2 - 2.2m.\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] + 10 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$P = \left( 2m - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{15}{2} \geq \frac{15}{2}, \forall m$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 2m - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$$

Vậy  $\min(x_1^2 + x_2^2) = \frac{15}{2}$  khi  $m = \frac{5}{4}$ .

c) Từ (3)  $\Rightarrow m = x_1x_2 + 3$

Thay  $m = x_1x_2 + 3$  vào (2), ta được:  $x_1 + x_2 = 2(x_1x_2 + 3 - 1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 4$

**Câu 50:** Cho phương trình bậc hai (ẩn  $x$ , tham số  $m$ ):  $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$  (1)

Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 = 3x_2$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\Delta' = (-m)^2 - (2m - 1)$

$$\Delta' = m^2 - 2m + 1$$

$$\Delta' = (m - 1)^2 \geq 0, \forall m$$

Với  $m \neq 1$  thì phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$

$$\text{Áp dụng Định lý Vi-ét: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m & (2) \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 1 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = 2m \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{m}{2} \\ x_1 = \frac{3m}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được:  $\frac{3m^2}{4} = 2m - 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0$  (\*)

$$\Delta' = (-4)^2 - 3.4$$

$$\Delta' = 4$$

$$\sqrt{\Delta'} = 2 > 0$$

Nên phương trình (\*) có 2 nghiệm phân biệt:  $m_1 = 2$ ;  $m_2 = \frac{2}{3}$

Vậy  $m_1 = 2$ ;  $m_2 = \frac{2}{3}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 51:** Cho phương trình:  $x^2 - 5x + m = 0$  (1) ( $m$  là tham số).

a) Giải phương trình trên khi  $m = 6$ .

b) Tìm  $m$  để phương trình trên có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $|x_1 - x_2| = 3$ .

**Lời giải**

a) Với  $m = 6$  phương trình (1) trở thành  $x^2 - 5x + 6 = 0$  (\*)

$\Delta = 25 - 4.6 = 1 > 0$ . Suy ra phương trình có hai nghiệm:  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = 2$ .

b) Ta có:  $\Delta = 25 - 4m$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thì  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{25}{4}$ .

Kết hợp với hệ thức Vi-ét, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 & (1) \\ x_1 x_2 = m & (2) \\ |x_1 - x_2| = 3 & (3) \end{cases} \text{ . Giải hệ (1), (3) : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ |x_1 - x_2| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \\ x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra:  $m = 4$  . Thử lại thì thỏa mãn.

Vậy  $m = 4$  là giá trị cần tìm.

**Câu 52:** Cho phương trình ẩn  $x$  :  $x^2 - 2mx + 4 = 0$  (1)

a) Giải phương trình đã cho khi  $m = 3$  .

b) Tìm giá trị của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2.$$

**Lời giải**

a) Với  $m = 3$  phương trình (1) trở thành:  $x^2 - 6x + 4 = 0$  (2)

Giải (2) ra ta được hai nghiệm:  $x_1 = 3 + \sqrt{5}, x_2 = 3 - \sqrt{5}$  .

b) Ta có:  $\Delta' = m^2 - 4$  .

Phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases} (*)$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét ta có: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow (2m)^2 - 2.4 + 2.2m = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -2 \end{cases} .$$

Đối chiếu với điều kiện (\*) ta thấy chỉ có nghiệm  $m_2 = -2$  thỏa mãn.

Vậy  $m = -2$  là giá trị cần tìm.

**Câu 53:** Cho phương trình ẩn  $x$  :  $x^2 - 2mx - 1 = 0$  (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  .

b) Tìm các giá trị của  $m$  để:  $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$  .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  .

$$\text{b) Theo định lí Vi-ét: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 7 \Leftrightarrow (2m)^2 - 3(-1) = 7$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy  $m = \pm 1$  là giá trị cần tìm.

**Câu 54:** Cho phương trình ẩn  $x$ :  $x^2 - x + 1 + m = 0$  (1)

a) Giải phương trình đã cho với  $m = 0$ .

b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:

$$x_1 x_2 (x_1 x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2).$$

**Lời giải**

a) Với  $m = 0$  phương trình (1) trở thành  $x^2 - x + 1 = 0$  (2)

Ta có:  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ , nên phương trình (2) vô nghiệm.

b) Ta có:  $\Delta = (-1)^2 - 4(1 + m) = -3 - 4m$

$$\text{Để phương trình có nghiệm thì } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{-4}{3} \quad (*)$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 1 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 + m \end{cases}$$

Thay vào đẳng thức:  $x_1 x_2 (x_1 x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$  ta được:  $(1 + m)(1 + m - 2) = 3 \cdot 1$

$$\Leftrightarrow (1 + m)(m - 1) = 3 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Đối chiếu với điều kiện (\*) suy ra chỉ có  $m = -2$  thỏa mãn.

Vậy  $m = -2$  là giá trị cần tìm.

**Câu 55:** Cho phương trình  $x^4 - (m^2 + 4m)x^2 + 7m - 1 = 0$ . Định  $m$  để phương trình có 4 nghiệm phân biệt và tổng bình phương tất cả các nghiệm bằng 10

**Lời giải**

Đặt  $X = x^2$  ( $X \geq 0$ )

Phương trình trở thành  $X^2 - (m^2 + 4m)X + 7m - 1 = 0$  (1)

Phương trình có 4 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow$  (1) có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 4m)^2 - 4(7m - 1) > 0 \\ m^2 + 4m > 0 \\ 7m - 1 > 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

Với điều kiện (I), (1) có 2 nghiệm phân biệt dương  $X_1, X_2$ .

$\Rightarrow$  Phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{X_1};$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{X_2}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(X_1 + X_2) = 2(m^2 + 4m)$$

$$\text{Vậy ta có } 2(m^2 + 4m) = 10 \Rightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Với  $m = 1$ , (I) thỏa mãn

Với  $m = -5$ , (I) không thỏa mãn.

Vậy  $m = 1$  là giá trị cần tìm.

**Câu 56:** Cho phương trình  $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$ . Không giải phương trình, tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $3x_1 - 4x_2 = 11$ .

**Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi  $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4.2.(m-1) > 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 8m + 8 > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 > 0 \Leftrightarrow (2m-3)^2 > 0$$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m \neq \frac{3}{2}$  (1).

$$\text{Theo định lí Vi-et, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13-4m}{7} \\ x_2 = \frac{7m-7}{26-8m} \\ 3 \cdot \frac{13-4m}{7} - 4 \cdot \frac{7m-7}{26-8m} = 11 \end{cases} \quad (*)$$

Giải phương trình (\*) ta được:  $m = -2 \vee m = 4,125$ .

So với điều kiện (1), ta được:  $m = -2 \vee m = 4,125$ .

**Câu 57:** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$  (1) ( $m$  là tham số).

a) Tìm  $m$  để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

**Lời giải.**

a) Tìm  $m$  để phương trình (1) có nghiệm.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow [-2(m-1)]^2 - 4.(m^2 - 3) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Vậy với  $m \leq 2$  phương trình (1) luôn có nghiệm.

b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

Với  $m \leq 2$  phương trình (1) có 2 nghiệm.

Gọi  $a$  là một nghiệm thì nghiệm kia là  $3a$ .

$$\text{Theo Vi-et, ta có: } \begin{cases} a + 3a = 2(m-1) \\ a.3a = m^2 - 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:  $m = -3 \pm 2\sqrt{6}$  thỏa mãn điều kiện.

Vậy  $m = -3 \pm 2\sqrt{6}$  phương trình (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

**Câu 58:** Cho phương trình:  $x^2 - mx + m - 1 = 0$ .

- a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .
- b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}.$$

**Lời giải.**

- a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

Phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$  khi và chỉ khi  $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 \geq 0$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

- b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}.$

$$\text{Theo Vi-et, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m-1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{2m+1}{m^2+2}$$

Tìm điều kiện để  $P$  có nghiệm theo ẩn

$$\text{Suy ra } -\frac{1}{2} \leq P \leq 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất bằng 1 khi  $m = 1$ , giá trị nhỏ nhất bằng  $-\frac{1}{2}$  khi  $m = -2$ .

**Câu 59:** Cho phương trình  $\frac{2}{2-\sqrt{3}}x^2 - mx + \frac{2}{2-\sqrt{3}}m^2 + 4m - 1 = 0$  (1)

- a) Giải phương trình (1) với  $m = -1$ .

- b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2$ .

**Lời giải.**

- a) Giải phương trình (1) với  $m = -1$ .

Thế  $m = -1$  vào phương trình (1) ta được  $x^2 + 2x - 9 = 0$ .

$$\text{Giải phương trình này ta được: } \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{10} \\ x_2 = -1 + \sqrt{10} \end{cases}.$$

- b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2$ .

$$\text{Để phương trình có 2 nghiệm thì } \Delta > 0 \Leftrightarrow -8m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \quad (*).$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm khác } 0 \text{ thì: } \frac{2}{2-\sqrt{3}}m^2 + 4m - 1 \neq 0$$

$$\text{Hay } \begin{cases} m_1 \neq -4 - 3\sqrt{2} \\ m_2 \neq -4 + 3\sqrt{2} \end{cases} \quad (**).$$

$$\text{Theo đề bài, ta có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1x_2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ m^2 + 8m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 - \sqrt{19} \\ m = -4 + \sqrt{19} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (\*) và (\*\*), ta được  $m = 0 \vee m = -4 - \sqrt{19}$ .

**Câu 60:** Xác định các giá trị của tham số  $m$  để phương trình:  $x^2 - (m+5)x - m + 6 = 0$ .

Có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

- Nghiệm này lớn hơn nghiệm kia một đơn vị.
- $2x_1 + 3x_2 = 13$ .

**Lời giải.**

Để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì  $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (m+5)^2 - 4(m-6) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 14m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < -7 - 4\sqrt{3} \vee m > -7 + 4\sqrt{3} \quad (*)$$

- Nghiệm này lớn hơn nghiệm kia một đơn vị.

Giả sử  $x_1 < x_2$ , theo Vi-et, ta có: 
$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 x_2 = -m + 6 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được:  $m = 0 \wedge m = -14$  thỏa mãn (\*).

- Theo giả thiết ta có: 
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 13 \\ x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 x_2 = -m + 6 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được:  $m = 0 \wedge m = 1$  thỏa mãn (\*).

**Câu 61:** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$  (1)

- Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.
- Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình (1) mà không phụ thuộc vào  $m$ .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x_1^2 + x_2^2$  (với  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình (1))

**Lời giải.**

- Để phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thì:  $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - (m-3) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ luôn đúng với mọi } m.$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi  $m$ .

- Theo Vi-ét: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1 x_2 = 2m-6 \end{cases}.$$

- Suy ra  $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 4$  hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình (1) mà không phụ thuộc vào  $m$ .

$$P = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2m-2)^2 - 2m + 6 = 4m^2 - 10m + 10 = \left(2m - \frac{5}{2}\right)^2 + 4 \geq 4$$

Vậy  $P_{\min} = 4$  khi và chỉ khi  $m = \frac{5}{4}$ .

**Câu 62:** Cho phương trình:  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$  (\*)

a) Tìm  $m$  để phương trình (\*) có hai nghiệm.

b) Tìm  $m$  để phương trình (\*) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1^3 - x_2^3| = 50$ .

**Lời giải.**

a) Để phương trình (\*) có hai nghiệm thì:  $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4(m^2 + m - 6) > 0 \Leftrightarrow 25 > 0$

Vậy phương trình (\*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

Để phương trình (\*) có hai nghiệm âm thì:  $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 > 0 \\ 2m + 1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \vee m > 2 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

Vậy với  $m < -3$  thì phương trình (\*) luôn có hai nghiệm âm.

b) Với  $\Delta = 25$  suy ra  $x_1 = m - 2; x_2 = m + 3$

Theo giả thiết, ta có:  $|x_1^3 - x_2^3| = 50 \Leftrightarrow |(m-2)^3 - (m+3)^3| = 50 \Leftrightarrow |5(3m^2 + 3m + 7)| = 50$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

**Câu 63: Bài 9.** Cho phương trình có ẩn  $x$ :  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số)

1. Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

2. Đặt  $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 \cdot x_2$

a) Chứng minh  $A = m^2 - 8m + 8$

b) Tìm  $m$  sao cho  $A = 8$ .

c) Tính giá trị nhỏ nhất của  $A$  và giá trị của  $m$  tương ứng.

d) Tìm  $m$  sao cho  $x_1 = 3x_2$ .

**Lời giải.**

1. Để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4(m-1) > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 > 0$

Vậy với  $m \neq 2$  phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt.

2.  $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 \cdot x_2$

a)  $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 \cdot x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1 \cdot x_2 = m^2 - 8(m-1) = m^2 - 8m + 8$

b) Với  $A = 8 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 = 8 \Leftrightarrow m = 8 \vee m = 0$

c)  $A = m^2 - 8m + 8 = (m-4)^2 - 8 \geq -8$

Vậy  $A_{\min} = -8$  khi và chỉ khi  $m = 4$ .

d) Theo Vi-et, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4 \\ m_2 = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

**Câu 64: Bài 10.** Cho phương trình bậc 2 có ẩn  $x$ :  $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$

1. Chứng tỏ phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .
2. Đặt  $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1 x_2$ 
  - a) Chứng minh  $A = 8m^2 - 18m + 9$
  - b) Tìm  $m$  sao cho  $A = 27$ .
  - c) Tìm  $m$  để  $A$  đạt giá trị nhỏ nhất.
  - d) Tìm  $m$  sao cho  $x_1 = 3x_2$ .

**Lời giải.**

1. Chứng tỏ phương trình có nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Để phương trình có 2 nghiệm thì  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(2m - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (2m - 2)^2 \geq 0$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

2.  $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1 x_2 \Leftrightarrow A = 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - 5x_1 x_2 \Leftrightarrow A = 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1 x_2$

Theo Vi-et, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases}.$$

a)  $A = 2(2m)^2 - 9(2m - 1) = 8m^2 - 18m + 9$  (đpcm).

b) Theo giả thiết, ta có:  $A = 27 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m + 9 = 27 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}.$

c) Tìm  $m$  để  $A$  đạt giá trị nhỏ nhất:  $A = 8m^2 - 18m + 9 = \left(2\sqrt{2}m - \frac{9}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8} \geq -\frac{9}{8}$

Vậy  $A_{\min} = -\frac{9}{8}$  khi  $m = -\frac{9}{8}$ .

- d) Tìm  $m$  sao cho  $x_1 = 3x_2$ .

Theo Vi-et, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

**Câu 65: Bài 11.** Cho phương trình bậc hai ẩn  $x$  ( $m$  tham số):  $x^2 + 2(m - 1)x - 2m + 5 = 0$  (1)

1. Giải và biện luận số nghiệm của  $x_1, x_2$  của (1) theo tham số  $m$ .
2. Tìm  $m$  sao cho  $x_1, x_2$  thỏa mãn:
  - a)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$ .
  - b)  $x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 \leq 6$
  - c)  $2x_1 + 3x_2 = -5$ .
  - d) Tìm  $m$  sao cho  $12 - 10x_1 x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

1. Giải và biện luận số nghiệm của  $x_1, x_2$  của (1) theo tham số  $m$ .

$$\Delta' = (m-1)^2 + 2m - 5 = m^2 - 4.$$

- Nếu  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Phương trình (1) vô nghiệm.

- Nếu  $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất  $x = -1$ .

- Nếu  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

2. Tìm  $m$  sao cho  $x_1, x_2$  thỏa mãn

- Theo Vi-et, ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-1) \\ x_1 x_2 = -2m + 5 \end{cases}$

- Điều kiện nghiệm khác 0  $\Leftrightarrow m \neq \frac{5}{2}$  (\*)

a)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2x_1 x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 8m - 20 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

b)  $x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 \leq 6 \Leftrightarrow -2(m-1) - 4m + 10 \leq 6 \Leftrightarrow m \geq 1$

c) Theo giả thiết, ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-1) \\ x_1 x_2 = -2m + 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m_1 = \frac{13}{6} \vee m_2 = 2$

d) Tìm  $m$  sao cho  $12 - 10x_1 x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$  đạt giá trị lớn nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 12 - 10x_1 x_2 - (x_1^2 + x_2^2) &= 12 - 8x_1 x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 12 - 8(-2m + 5) - 4(m-1)^2 \\ &= -4m^2 + 24m - 32 = -4[(m-3)^2 + 23] \leq -92 \end{aligned}$$

Đẳng thức đạt giá trị lớn nhất bằng  $-92$  khi  $m = 3$ .

**Câu 66: Bài 12.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$  ( $m$  là tham số)

a) Định  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm giá trị của  $m$  để  $x_1^2 + x_2^2 = 4$ , với  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình.

**Lời giải.**

a) Định  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \Delta = -2m + 4 \Leftrightarrow m < 2$

b) Theo Vi-et, ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 3$

**Câu 67: Bài 13.** Cho phương trình:  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  (1) ( $m$  là tham số)

a) Chứng minh phương trình (1) có 2 nghiệm với mọi  $m$ .

b) Tìm  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 2$ .

**Lời giải.**

- a)  $\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$  với mọi  $m$ .
- b)  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 2 \Leftrightarrow (m-1)m = 2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 2$ .

**Câu 68: Bài 14.** Cho phương trình:  $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

- a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .
- b) Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình theo  $m$ .
- c) Tìm  $m$  để  $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 3$  ( $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình trên).

**Lời giải.**

a)  $\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

b) Theo Vi-et, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 3 \end{cases}$$

c)  $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 3 \Leftrightarrow 2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ .

**Câu 69: Bài 15.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$  ( $x$  là ẩn số)

- a) Chứng tỏ phương trình trên có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .
- b) Tìm  $m$  để  $A = x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2$  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

a)  $\Delta' = (m-2)^2 - (2m-5) = (m-3)^2 \geq 0$

Vậy với mọi  $m$  phương trình luôn có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ .

b)  $A = x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 = x_1 x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 2m - 5 - 4(m-2)^2 = -\left[\left(2m - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \leq -\frac{3}{4}$

Vậy  $A_{\max} = -\frac{3}{4}$  khi  $m = \frac{9}{4}$ .

**Câu 70: Bài 16.** Cho phương trình:  $x^2 - (2m+1)x + m = 0$  ( $m$  là tham số)

- a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .
- b) Tìm  $m$  để  $A = x_1^2 - x_1 + 2mx_2 + x_1 x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

a)  $\Delta = (2m+1)^2 - 4m = 4m^2 - 8m + 4 = 4(m-1)^2 \geq 0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Theo Vi-et, ta có:  $x_1 + x_2 = 2m+1$  và  $x_1 x_2 = m$

Khi đó:  $A = 4m^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$ . Vậy  $A_{\min} = \frac{3}{2}$  khi  $m = 0$ .

**Câu 71: Bài 17.** Cho phương trình:  $x^2 - (2m-3)x + m^2 - m + 1 = 0$  ( $x$  là ẩn)

- a) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- b) Cho  $B = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 x_2$  tìm  $m$  để  $B$  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

a)  $\Delta = (2m-3)^2 - 4(m^2 - m + 1) = -8m + 5$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{8}$ .

$$b) \quad B = (x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2$$

$$B = (2m - 3)^2 - 7(m^2 - m + 1)$$

$$B = -3 \left[ \left( m + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{49}{36} \right] \leq \frac{49}{12}$$

$$\text{Vậy } B_{\max} = \frac{49}{12} \text{ khi } m = -\frac{5}{6}.$$

**Câu 72: Bài 18.** Cho phương trình:  $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$

- a) Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.  
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)$  và giá trị của  $m$  tương ứng.

**Lời giải.**

$$a) \quad \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4m + 3) = -2m - 2$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -1$ .

$$b) \quad \text{Theo Vi-et, ta có: } x_1 + x_2 = 2(m+1) \text{ và } x_1x_2 = m^2 + 4m + 3$$

$$\text{Khi đó: } A = m^2 + 4m + 3 - 4(m+1) \Leftrightarrow A = m^2 - 1 \geq -1$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = -1 \text{ khi } m = 0.$$

**Câu 73: Bài 19.** Cho phương trình:  $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$

- a) Chứng minh phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ .  
b) Viết tổng và tích hai nghiệm theo  $m$ .  
c) Tìm  $m$  để 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa mãn:  $\frac{4x_1-1}{x_2} + \frac{4x_2-1}{x_1} = -9$

**Lời giải.**

$$a) \quad \Delta = (2m-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m-1) = (2m-3)^2 \geq 0$$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ .

$$b) \quad \text{Theo Vi-et, ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{2} \text{ và } x_1x_2 = \frac{m-1}{2}.$$

$$c) \quad \text{Điều kiện để } x_1 \text{ và } x_2 \text{ khác } 0 \text{ là } m \neq 1$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \frac{4x_1-1}{x_2} + \frac{4x_2-1}{x_1} = -9 \Leftrightarrow 4(x_1+x_2)^2 - (x_1+x_2) + x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 + \frac{2m+1}{2} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 8m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 2 \text{ thỏa điều kiện } m \neq 1.$$

**Câu 74:** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$

- a) Chứng minh phương trình trên luôn có nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .  
b) Đặt  $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2$ . Tìm  $m$  sao cho  $A = 27$ .

**Lời giải.**

$$a) \quad \Delta' = m^2 - m + 2 = \left( m - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

Vậy phương trình trên luôn có hai nghiệm với mọi  $m$ .

$$b) \quad A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2 = 8m^2 - 18m + 9$$

$$\text{Theo giả thiết, có: } A = 27 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m + 9 = 27 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -\frac{3}{4}.$$

**Câu 75: Bài 21.** Cho phương trình  $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$  (1) ( $x$  là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị  $m$ .

b) Định  $m$  để hai nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình (1) thỏa mãn:

$$(1 + x_1)(2 - x_2) + (1 + x_2)(2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2$$

**Lời giải.**

$$a) \quad \Delta' = m^2 - m + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} > 0$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

b) Theo Vi-et, ta có:  $x_1 + x_2 = 2m$  và  $x_1x_2 = m - 2$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } (1 + x_1)(2 - x_2) + (1 + x_2)(2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -\frac{1}{2}.$$

**Câu 76: Bài 22.** Cho phương trình:  $x^2 - mx + m - 2 = 0$  (1) ( $x$  là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Định  $m$  để hai nghiệm  $x_1, x_2$  của (1) thỏa mãn:  $\frac{x_1^2 - 2}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2^2 - 2}{x_2 - 1} = 4$ .

**Lời giải.**

$$a) \quad \Delta = m^2 - 4(m - 2) = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4 > 0$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Theo Vi-et, ta có:  $x_1 + x_2 = m$  và  $x_1x_2 = m - 2$ .

$$\text{Theo giả thiết: } \frac{x_1^2 - 2}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2^2 - 2}{x_2 - 1} = 4 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - (x_1x_2)^2 - 4(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - (m - 2)^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

**Câu 77:** Cho phương trình  $2(mx + 1) - x^2 = 0$  (1) ( $x$  là ẩn số).

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình (1). Tính giá trị của biểu thức:

$$A = (x_1^2 + 4x_1 - 2)(x_2^2 + 4x_2 - 2) + 2(x_1^2 + x_2^2)$$

**Lời giải.**

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2 = 0$$

a)  $\Delta' = m^2 + 2 > 0$ . Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

b) Theo Vi-et, ta có:  $x_1 + x_2 = 2m$  và  $x_1x_2 = -2$ .

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } A = (x_1^2 + 4x_1 - 2)(x_2^2 + 4x_2 - 2) + 2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Leftrightarrow A = (x_1 x_2)^2 + 4x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 8(x_1 + x_2) + 16x_1 x_2 + 4$$

$$\Leftrightarrow A = 4m^2 - 16m - 16m - 32 + 4 \Leftrightarrow A = 4m^2 - 32m - 28.$$

----- HẾT -----