

Phần I. HƯỚNG DẪN LÀM BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Do những thay đổi trong tính chất và phương pháp thi trong năm học này nên việc ôn tập cũng thay đổi. Hình thức thi trắc nghiệm sẽ là phổ biến trong các môn thi. Để đáp ứng thi trắc nghiệm cần phải đạt được 4 mức độ kiến thức:

1. Nhận biết

* Nhận biết có thể được hiểu là học sinh nêu hoặc nhận ra các khái niệm, nội dung, vấn đề đã học khi được yêu cầu.

* Các hoạt động tương ứng với cấp độ nhận biết là: nhận dạng, đối chiếu, chỉ ra...

* Các động từ tương ứng với cấp độ nhận biết có thể là: xác định, liệt kê, đối chiếu hoặc gọi tên, giới thiệu, chỉ ra,... nhận thức được những kiến thức đã nêu trong sách giáo khoa.

Học sinh nhớ được (*bản chất*) những khái niệm cơ bản của chủ đề và có nêu hoặc nhận ra các khái niệm khi được yêu cầu. Đây là bậc thấp nhất của nhận thức, khi học sinh kể tên, nêu lại, nhớ lại một sự kiện, hiện tượng. Chẳng hạn ở mức độ này, học sinh chỉ cần có kiến thức về hàm số bậc nhất để thay tọa độ điểm vào phương trình đường thẳng để tìm ra tọa độ điểm phù hợp.

Ví dụ 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 25x^2 - 3y^2 - 10x - 11$ là:

- A.** 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 9

Đáp án **A.**

Ví dụ 2. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo vuông góc và đường cao $AH = h$. Khi đó tổng S của hai đáy là:

- A.** $S = 2h$ **B.** $S = 3h$ **C.** $S = \frac{5}{2}h$ **D.** $S = \frac{7}{2}h$

Đáp án **A.**

Ví dụ 3. Cho $a + b + c + d = 2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là:

- A.** 4 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Đáp án **C.**

2. Thông hiểu

* Học sinh hiểu các khái niệm cơ bản, có khả năng diễn đạt được kiến thức đã học theo ý hiểu của mình và có thể sử dụng khi câu hỏi được đặt ra tương tự hoặc gần với các ví dụ học sinh đã được học tập trên lớp.

* Các hoạt động tương ứng với cấp độ thông hiểu là: diễn giải, kể lại, viết lại, lấy được ví dụ theo cách hiểu của mình...

* Các động từ tương ứng với cấp độ thông hiểu có thể là: tóm tắt, giải thích, mô tả, so sánh (đơn giản), phân biệt, trình bày lại, viết lại, minh họa, hình dung, chứng tỏ, chuyển đổi...

Học sinh hiểu các khái niệm cơ bản và có thể sử dụng khi câu hỏi được đặt ra gần với các ví dụ học sinh đã được học trên lớp.

Ví dụ 1. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 2x + 4}$ là:

- A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 2 D. $\frac{4}{3}$

Đáp án A.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Lấy các điểm D, E tùy ý theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng DE, BC . Đáp án nào đúng?

- A. $\frac{KE}{KD} = \frac{BA}{BC}$ B. $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$
C. $\frac{KE}{KD} = \frac{CB}{CA}$ D. Cả ba kết quả trên đều sai

Đáp án B.

Ví dụ 3. Phương trình $(2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Có 1 nghiệm B. Có 2 nghiệm
C. Có 3 nghiệm D. Có 4 nghiệm

Đáp án D.

3. Vận dụng

* Học sinh vượt qua cấp độ hiểu đơn thuần và có thể sử dụng, xử lý các khái niệm của chủ đề trong các tình huống tương tự nhưng không hoàn toàn giống như tình huống đã gặp trên lớp. Học sinh có khả năng sử dụng kiến thức, kỹ năng đã học trong những tình huống cụ thể, tình huống tương tự nhưng không hoàn toàn giống như tình huống đã học trên lớp (*thực hiện nhiệm vụ quen thuộc nhưng mới hơn thông thường*).

* Các hoạt động tương ứng với vận dụng ở cấp độ thấp là: xây dựng mô hình, phỏng vấn, trình bày, tiến hành thí nghiệm, xây dựng các phân loại, áp dụng quy tắc (định lý, định luật, mệnh đề...), sắm vai và đảo vai trò,...

* Các động từ tương ứng với vận dụng ở cấp độ thấp có thể là: thực hiện, giải quyết, minh họa, tính toán, diễn dịch, bày tỏ, áp dụng, phân loại, sửa đổi, đưa vào thực tế, chứng minh, ước tính, vận hành...

Học sinh vượt qua cấp độ hiểu đơn thuần và có thể vận dụng các khái niệm của chủ đề trong các tình huống tương tự trên lớp để giải quyết một tình huống cụ thể trong thực tế hoặc học sinh có khả năng sử dụng các khái niệm cơ bản để giải quyết một vấn đề mới chưa từng được học hoặc trải nghiệm trước đây, nhưng có thể giải quyết bằng kỹ năng, kiến thức và thái độ đã được học tập và rèn luyện. Các vấn đề này tương tự như các tình huống thực tế học sinh sẽ gặp ngoài môi trường.

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, chiều cao bằng $15cm$, thể tích là $1280cm^3$. Khi đó diện tích xung quanh S_{xq} của hình chóp là:

A. $S_{xq} = 548cm^3$

B. $S_{xq} = 542cm^3$

C. $S_{xq} = 546cm^3$

D. $S_{xq} = 544cm^3$

Đáp án D.

Ví dụ 2. Với x là số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$. Đáp án nào đúng?

A. $\min P = 2$

B. $\min P = \frac{5}{2}$

C. $\min P = 3$

D. Cả ba kết quả trên đều sai

Đáp án B.

Ví dụ 3. Cho phương trình $\frac{m}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{2m}{x^2 + x}$. Phương trình có nghiệm $x < 3$ khi giá trị của tham số m thỏa mãn:

A. $m > 6$

B. $m < 4$

C. $\begin{cases} m > 6 \\ m < 4 (m \neq 0) \end{cases}$

D. $\begin{cases} m > 6 \\ m < 4 (m \neq 0, m \neq 2) \end{cases}$

Đáp án D.

4. Vận dụng ở mức độ cao hơn

Học sinh có khả năng sử dụng các khái niệm cơ bản để giải quyết một vấn đề mới hoặc không quen thuộc, chưa từng được học hoặc trải nghiệm trước đây, nhưng có thể giải quyết

bằng các kỹ năng và kiến thức đã được dạy ở mức độ tương đương. Những vấn đề này tương tự như các tình huống thực tế học sinh sẽ gặp ngoài môi trường lớp học.

Ở mức độ này học sinh phải xác định được những thành tố trong 1 tổng thể và mối quan hệ qua lại giữa chúng; phát biểu ý kiến cá nhân và bảo vệ được ý kiến đó về 1 sự kiện, hiện tượng hay nhân vật lịch sử nào đó.

Ví dụ 1. Các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Khẳng định nào đúng?

A. $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \leq -2$

B. $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \leq -1$

C. $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 1$

D. $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0$

Đáp án **D.**

Ví dụ 2. Tam giác ABC có ba góc nhọn, vẽ các đường cao BD, CE . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng ED . Đáp án nào đúng?

A. $S_{BEC} + S_{BDC} = S_{BHKC}$

B. $S_{BEC} + S_{BDC} = \frac{3}{2}S_{BHKC}$

C. $S_{BEC} + 2S_{BDC} = S_{BHKC}$

D. $2S_{BEC} + S_{BDC} = 2S_{BHKC}$

Đáp án **A.**

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng d cắt AB, BC, BD lần lượt tại M, N, I . Khẳng định nào đúng?

A. $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = 2\frac{BD}{BI}$

B. $2\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = 2\frac{BD}{BI}$

C. $\frac{BA}{BM} + 2\frac{BC}{BN} = 2\frac{BD}{BI}$

D. $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = \frac{BD}{BI}$

Đáp án **D.**

Ở bài thi trắc nghiệm thường sẽ là những bài yêu cầu giải nhanh và không quá rườm rà, yêu cầu kiến thức rộng và bao quát hơn. Nếu như các em đang theo phương pháp “chậm và chắc” thì bạn phải đổi ngay từ “chậm” thành “nhanh”. Giải nhanh chính là chìa khóa để bạn có được điểm cao ở môn thi trắc nghiệm. Với các bài thi nặng về lý thuyết thì sẽ yêu cầu ghi nhớ nhiều hơn, các em nên chú trọng phần liên hệ.

Ngoài việc sử dụng kiến thức để làm bài thi, các em có thể vận dụng thêm các phương pháp sau đây:

- Phương pháp phỏng đoán: Dựa vào kiến thức đã học, đưa ra phỏng đoán để tiết kiệm thời gian làm bài.

- Phương pháp loại trừ

Một khi các em không có cho mình một đáp án thực sự chính xác thì phương pháp loại trừ cũng là một cách hữu hiệu giúp bạn tìm ra câu trả lời đúng. Mỗi câu hỏi thường có 4 đáp án, các đáp án cũng thường khác nhau nhiều lắm về nội dung, tuy nhiên vẫn có cơ sở để các em dùng phương án loại trừ bằng “mẹo” của mình cộng thêm chút may mắn nữa. Thay vì tìm đáp án đúng, bạn hãy thử tìm phương án sai...đó cũng là một cách hay và loại trừ càng nhiều phương án càng tốt.

Khi các em không còn đủ cơ sở để loại trừ nữa thì dùng cách phỏng đoán, nhận thấy phương án nào khả thi hơn và đủ tin cậy hơn thì khoanh vào phiếu trả lời. Đó là cách cuối cùng dành cho các em.

Thi trắc nghiệm nhằm mục đích vừa đảm bảo hiểu rộng kiến thức vừa đảm bảo thời gian nên các em cần phân bố thời gian cho hợp lý nhất.

PHẦN II. CÁC CHỦ ĐỀ**Chủ đề 1. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC****I. Kiến thức cơ bản****1. Nhân đa thức**

- Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức đó với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.
- Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.
- Quy tắc nhân một đơn thức với một đa thức còn được vận dụng theo chiều ngược lại:
 $A.B + A.C = A.(B + C)$
- Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ luôn có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến thì hai đa thức đó gọi là hai đa thức đồng nhất, ký hiệu $P(x) \equiv Q(x)$. Hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ là đồng nhất khi và chỉ khi hệ số của các lũy thừa cùng bậc bằng nhau. Đặc biệt, nếu $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ luôn bằng 0 với mọi x thì $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

2. Những hằng đẳng thức đáng nhớ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ với } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}), n \in \mathbb{N}^*$$

3. Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

- Phương pháp đặt nhân tử chung

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

- Phương pháp dùng hằng đẳng thức

- Phương pháp nhóm các hạng tử

$$ac - ad + bc - bd = a(c - d) + b(c - d) = (c - d)(a + b)$$

- Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử

$$4x^2 - 8x + 3 = 4x^2 - 2x - 6x + 3 = 2x(2x - 1) - 3(2x - 1) = (2x - 1)(2x - 3)$$

- Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

- Phương pháp đổi biến

$$\text{Phân tích thành nhân tử: } P = (x^2 - 1)^2 - 12(x^2 - 1) + 27$$

Đặt $t = x^2 - 1$, ta được:

$$P = t^2 - 12t + 27 = t^2 - 3t - 9t + 27 = t(t - 3) - 9(t - 3) = (t - 3)(t - 9)$$

$$\text{Từ đó ta có: } P = (x^2 - 4)(x^2 - 10) = (x - 2)(x + 2)(x^2 - 10)$$

4. Chia đa thức

- Chia đơn thức P cho đơn thức Q : Chia hệ số của P cho hệ số của Q ; chia lũy thừa của từng biến trong P cho lũy thừa của cùng biến đó trong Q rồi nhân các kết quả với nhau.

- Chia đa thức P cho đơn thức Q : Ta chia mỗi hạng tử của P cho Q rồi cộng các kết quả với nhau

- Chia đa thức P cho đa thức Q : Cho P và Q là hai đa thức tùy ý của cùng một biến ($B \neq 0$). Khi đó tồn tại duy nhất một cặp đa thức T và R sao cho $P = Q.T + R$, trong đó hoặc $R = 0$, hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của Q . T gọi là đa thức thương, R gọi là đa thức dư của phép chia P cho Q . Nếu $R = 0$ thì ta nói P chia hết cho Q .

- Định lý Bozu: Số dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho nhị thức bậc nhất $x - a$ đúng bằng $P(a)$.

Chẳng hạn, số dư trong phép chia đa thức $P(x) = x^3 - 6x + 5$ cho $x - 2$ là $P(2) = 2^3 - 6.2 + 5 = 1$. Số dư phép chia đa thức $P(x) = x^3 - 6x + 5$ cho $x - 1$ là $P(1) = 1^3 - 6.1 + 5 = 0$, có nghĩa là $P(x)$ chia hết cho $x - 1$.

-Hệ quả của định lý Bozu: Nếu a là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $P(x)$ chia hết cho $x - a$.

+ Đặc biệt, nếu tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ bằng 0 thì $P(x)$ chia hết cho $x - 1$, Nếu $P(x)$ có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì $P(x)$ chia hết cho $x + 1$.

+ Áp dụng hệ quả của định lý Bozu vào việc phân tích đa thức thành nhân tử:

Nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = a$ thì khi phân tích $P(x)$ thành nhân tử, tích sẽ chứa nhân tử $x - a$.

-Cách nhẩm nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỷ của đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên:

+ Nếu $P(x)$ có nghiệm nguyên thì nghiệm nguyên đó phải là ước của hệ số tự do.

+ Nếu $P(x)$ có nghiệm hữu tỷ dạng $x = \frac{p}{q}; (p, q) = 1$ thì p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất.

II. Ví dụ minh họa

1. Nhận biết

Ví dụ 1: Cho $x + y = 9; xy = 14$. Khi đó giá trị của $P = x^2 + y^2$ là:

- A. 52 B. 53 C. 54 D. 55

Đáp án: B.

Hướng dẫn: Ta có: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 9^2 - 2.14 = 81 - 28 = 53$.

Ví dụ 2: Cho x, y là hai số khác nhau, thỏa mãn điều kiện:

$$9x(x - y) - 10(y - x)^2 = 0. \text{ Khi đó ta có:}$$

- A. $x = 10y$ B. $x = -10y$ C. $y = 10x$ D. $y = -10x$

Đáp án: A.

Hướng dẫn: Ta có $9x(x - y) - 10(y - x)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(-x + 10y) = 0$

Do $x \neq y$, nên $10y - x = 0$, suy ra $x = 10y$.

2. Thông hiểu

Ví dụ 1. Giá trị của biểu thức $P = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x - 9$ tại $x = 99$ là:

- A. 9 B. 99 C. 90 D. 990

Đáp án: C.

Hướng dẫn: Do $x = 99$, nên $100 = x + 1$. Khi đó ta có:

$$P = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x - 9$$

$$= x^5 - (x+1)x^4 + (x+1)x^3 - (x+1)x^2 + (x+1)x - 9 = x - 9 = 99 - 9 = 90.$$

Ví dụ 2: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x + 3y - 5)^2 - 6xy + 26$ là:

- A.** -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Đáp án: D.

Hướng dẫn: Ta có $P = x^2 + 9y^2 + 25 + 6xy - 10x - 30y - 6xy + 26$

$$= (x^2 - 10x + 25) + (9y^2 - 30y + 25) + 1 = (x - 5)^2 + (3y - 5)^2 + 1$$

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 1 và đạt được khi $x = 5; y = \frac{5}{3}$.

3. Vận dụng

Ví dụ 1. Cho đa thức $P(x) = (x + 5)(ax^2 + bx + 25)$ và $Q(x) = x^3 + 125$. Ta có $P(x) \equiv Q(x)$ khi và chỉ khi

- A.** $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$

Đáp án: A.

Hướng dẫn:

Ta có $P(x) = (x + 5)(ax^2 + bx + 25) = ax^3 + (5a + b)x^2 + (5b + 25)x + 125$

Từ đó suy ra $P(x) \equiv Q(x)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 1 \\ 5a + b = 0 \\ 5b + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$

Ví dụ 2. Xác định các hệ số a và b sao cho đa thức $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$. Các giá trị cần tìm là:

- $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

Đáp án C.

Hướng dẫn: Gọi đa thức thương là T . Ta có $x^4 + ax^3 + b = (x - 1)(x + 1).T$

Vì đẳng thức đúng với mọi x , nên ta lần lượt cho $x = 1; x = -1$ ta được:

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ 1-a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$$

4. Vận dụng nâng cao

Ví dụ 1. Cho đa thức $P = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $P = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz = (x+y)(y+z)(z+x)$

B. $P = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz = 2(x+y)(y+z)(z+x)$

C. $P = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz = (x+y)(y+z)(z-x)$

D. $P = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz = 2(x-y)(y+z)(z+x)$

Đáp án A.

Hướng dẫn: Thay x bởi $-y$ thì $P = yz(y+z) - yz(z-y) - 2y^2z = 0$. Từ đó suy ra P chia hết cho $x - (-y) = x + y$, do đó P phải chứa thừa số $x + y$.

Do vai trò của x, y, z như nhau, nên P có dạng: $P = k(x+y)(y+z)(z+x)$

Đẳng thức đúng với mọi x, y, z nên cho $x = y = z = 1$, ta được $8 = 8k$, suy ra $k = 1$.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu giá trị của số nguyên m sao cho đa thức $(x+m)(x-3)+7$ phân tích được thành $(x+a)(x+b)$ với a, b là các số nguyên và $a \leq b$.

A. Không có giá trị nào

B. Có 1 giá trị

C. Có 2 giá trị

D. Có 3 giá trị

Đáp án C.

Hướng dẫn: Vì $(x+m)(x-3)+7 = (x+a)(x+b)$ với mọi x , nên cho $x=3$ ta được $(x+a)(x+b) = 7$.

Số 7 viết dưới dạng tích của 2 số nguyên chỉ bằng hai cách $1 \cdot 7$ và $(-1) \cdot (-7)$

Vì $a \leq b \Rightarrow x+a \leq x+b$, nên có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 3+a=1 \\ 3+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$

Từ giả thiết, suy ra $(x+m)(x-3)+7 = (x-2)(x+4)$

Cho $x = 2$, suy ra $(2 + m)(-1) + 7 = 0 \Rightarrow m = 5$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 3 + a = -7 \\ 3 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -4 \end{cases}$

Từ giả thiết, suy ra $(x + m)(x - 3) + 7 = (x - 10)(x - 4)$.

Cho $x = 4$, suy ra $(4 + m).1 + 7 = 0 \Rightarrow m = -11$

III. Bài tập trắc nghiệm

1. Nhận biết

1. Xác định các hệ số a, b, c biết rằng $(2x - 5)(3x + b) = ax^2 + x + c$ với mọi x . Các giá trị cần tìm là:

- A. $\begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \\ c = -40 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a = 6 \\ b = -8 \\ c = -40 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = -6 \\ b = 8 \\ c = -40 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \\ c = 40 \end{cases}$

2. Cho $x + y = 9; xy = 14$. Khi đó giá trị của $x^3 + y^3$ là:

- A. 350 B. 351 C. 352 D. 349

3. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 25x^2 + 3y^2 = 10x + 11$ là:

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 9

4. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x - x^2$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. Cho $x > y > 0$ và $x - y = 7; xy = 60$ thì giá trị của biểu thức $x^2 - y^2$ là:

- A. 120 B. 121 C. 118 D. 119

6. Cho $x + y + z = 0$. Đẳng thức nào đúng?

- A. $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ B. $x^3 + y^3 + z^3 = 9xyz$
C. $x^3 + y^3 + z^3 = 27xyz$ D. $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$

7. Đa thức $P = 12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$ được phân tích thành:

- A. $P = 12x^3 + 4x^2 - 27x - 9 = (2x + 3)^2(3x - 1)$
B. $P = 12x^3 + 4x^2 - 27x - 9 = (2x - 3)^2(3x + 1)$

C. $P = 12x^3 + 4x^2 - 27x - 9 = (2x - 3)^2 (3x - 1)$

D. $P = 12x^3 + 4x^2 - 27x - 9 = (2x + 3)(2x - 3)(3x + 1)$

8. Cho đa thức $P = x^4 + 5x^3 + 10x - 4$. Đáp án nào đúng?

A. Đa thức P không thể phân tích thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên

B. Đa thức P phân tích được thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên

C. Đa thức P phân tích được thành tích của bốn nhị thức bậc nhất với hệ số nguyên

D. Đa thức P phân tích được thành tích của một nhị thức bậc nhất với một đa thức bậc ba với hệ số nguyên

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	A	B	A	B	D	A	D	B

2. Thông hiểu

1. Cho $b + c = 10$. Đẳng thức nào đúng?

A. $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) - bc$

B. $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) - 2bc$

C. $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + 2bc$

D. $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$

2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x - 3)^2 + (x - 11)^2$ là:

A. 30

B. 31

C. 32

D. 29

3. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 19 - 6x - 9x^2$ là:

A. 20

B. 10

C. 30

D. 40

4. Cho $x > y > 0$ và $x - y = 7$; $xy = 60$ thì giá trị của biểu thức $x^4 + y^4$ là:

A. 21360

B. 21361

C. 21362

D. 21359

5. Cho $x - y = 2$ thì giá trị của biểu thức $P = 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2$ là:

A. 21360

B. 21361

C. 21362

D. 21359

6. Đa thức $P = x^2(x^2 - 6) - x^2 + 9$ được phân tích thành:

A. $P = x^2(x^2 - 6) - x^2 + 9 = (x^2 - x - 9)(x + x - 1)$

B. $P = x^2(x^2 - 6) - x^2 + 9 = (x^2 - x - 3)(x^2 + x - 3)$

C. $P = x^2(x^2 - 6) - x^2 + 9 = (x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$

D. $P = x^2(x^2 - 6) - x^2 + 9 = (x^2 - x + 9)(x^2 + x + 1)$

7. Đa thức $x^7 + x^2 + 1$ được phân tích thành:

A. $x^7 + x^2 + 1 = (x^2 + x - 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x - 1)$

B. $x^7 + x^2 + 1 = (x^2 + x - 1)(x^5 - x^4 - x^2 + x + 1)$

C. $x^7 + x^2 + 1 = (x^2 + x - 1)(x^5 - x^4 - x^2 - x + 1)$

D. $x^7 + x^2 + 1 = (x^2 + x - 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$

8. Đẳng thức nào đúng?

A. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = (x + y)(y + z)(z + x)$

B. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 2(x + y)(y + z)(z + x)$

C. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

D. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 6(x + y)(y + z)(z + x)$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	D	C	A	B	B	B	D	C

3. Vận dụng

Câu 1. Giá trị của đa thức $P(x) = x^7 - 26x^6 + 27x^5 - 47x^4 - 77x^3 + 50x^2 + x - 24$ tại $x = 25$ là

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) = 2^{32} - 1$; Tồn tại các số x, y sao cho

$3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 26 = 0$; $100^2 + 103^2 + 105^2 + 94^2 = 101^2 + 98^2 + 96^2 + 107^2$;

Nếu $A = 5x + y$ chia hết cho 19 thì $B = 4x - 3y$ cũng chia hết cho 19.

A. Có 1 mệnh đề đúng

B. Có 2 mệnh đề đúng

C. Có 3 mệnh đề đúng **D.** Cả 4 mệnh đề đều đúng

Câu 3. Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề sai?

Nếu $a = 4x + 3y$ chia hết cho 13 thì $B = 7x + 2y$ cũng chia hết cho 13;

Trong bốn số lẻ liên tiếp thì hiệu của tích hai số cuối với tích hai số đầu chia hết cho 16; Hai chữ số tận cùng của số 7^{43} là 43; Số $\underbrace{11\dots1}_{2n} = \underbrace{88\dots8}_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ không phải là số chính phương.

A. Có 1 mệnh đề sai **B.** Có 2 mệnh đề sai

C. Có 3 mệnh đề sai **D.** Cả 4 mệnh đề đều sai

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+1)(x-2)(x-3)(x-6)$ là:

A. -35 **B.** -34 **C.** -37 **D.** -36

Câu 5: Biểu thức $P = (x-y-1)^3 - (x-y+1)^3 + 6(x-y)^2$ có giá trị là:

A. 1 **B.** -1 **C.** -2 **D.** -3

Câu 6: Số $743^3 - 692^3$ có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 ?

A. Có 1 chữ số 0 **B.** Có 2 chữ số 0 **C.** Có 3 chữ số 0 **D.** Có 4 chữ số 0

Câu 7: Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề sai ? Số $43^2 + 43.17$ chia hết cho 60; Số $27^5 - 3^{11}$ chia hết cho 80; Số $21^{10} - 1$ chia hết cho 200; Số $39^{20} + 39^{13}$ chia hết cho 40

A. Có 1 mệnh đề sai **B.** Có 2 mệnh đề sai

C. Có 3 mệnh đề sai **D.** Không có mệnh đề nào sai

Câu 8: Các số x, y khác nhau và thỏa mãn điều kiện: $x^2 - y = y^2 - x$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$ là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	C	A	D	C	B	D	C

4. Vận dụng nâng cao

Câu 1: Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

Các số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ thì $a = b = c$

Biểu thức $x^2 + x + 1$ luôn luôn dương với mọi x ; Biểu thức $x^2 - xy + y^2$ luôn luôn dương với mọi x, y không đồng thời bằng 0; Biểu thức $4x - 10 - x^2$ luôn luôn âm với mọi x .

A. Có 1 mệnh đề đúng

B. Có 2 mệnh đề đúng

C. Có 3 mệnh đề đúng

D. Cả 4 mệnh đề đều đúng.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

Hai số chẵn hơn kém nhau 4 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 16; Hai số lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 24; Cho $a + b + c = 2p$ thì $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Cho $a = m^2 + n^2; b = m^2 - n^2; c = 2mn$ với $m > n > 0$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

A. Có 1 mệnh đề đúng

B. Có 2 mệnh đề đúng

C. Có 3 mệnh đề đúng

D. Cả 4 mệnh đề đều đúng.

Câu 3: Cho x, y thỏa mãn các điều kiện:

$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0; (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16$ thì giá trị của x, y là:

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Câu 4: Số $685^3 + 315^3$ có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 ?

A. Có 1 chữ số 0

B. Có 2 chữ số 0

C. Có 3 chữ số 0

D. Có 4 chữ số 0

Câu 5: Cho $a + b + c + d = 0$. Đẳng thức nào đúng ?

A. $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b - c)(ad - bc)$.

B. $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad - bc)$.

C. $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad + bc)$.

D. $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b - c)(ad + bc)$.

Câu 6: Cho đa thức $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức khi

A. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

Câu 7: Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng?

Số $2^{60} + 5^{30}$ chia hết cho 41; Số $2017^{2019} + 2019^{2017}$ chia hết cho 2018; Số $24^n + 1 (n \in \mathbb{N})$ không chia hết cho 23; Số $\underbrace{11\dots1}_n \underbrace{22\dots2}_n (n \in \mathbb{N})$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

A. Có 1 mệnh đề đúng

B. Có 2 mệnh đề đúng

C. Có 3 mệnh đề đúng**D.** Cả 4 mệnh đề đều đúng.**Câu 8:** Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

Số $999^4 + 999$ có tận cùng là 3 chữ số 0; Số $49^5 - 49$ chia hết cho 100; Lập phương của một số nguyên trừ đi số nguyên đó chia hết cho 6; Nếu tổng của 3 số nguyên chia hết cho 6 thì tổng các lập phương của chúng cũng chia hết cho 6.

A. Có 1 mệnh đề đúng**B.** Có 2 mệnh đề đúng**C.** Có 3 mệnh đề đúng**D.** Cả 4 mệnh đề đều đúng.**Câu 9:** Đa thức $P = x^8y^8 + x^4y^4 + 1$ được phân tích thành:

A. $P = x^8y^8 + x^4y^4 + 1 = (x^2y^2 - xy + 1)(x^2y^2 + xy + 1)(x^4y^4 - x^2y^2 + 1)$

B. $P = x^8y^8 + x^4y^4 + 1 = (x^2y^2 - xy + 1)(x^2y^2 + xy - 1)(x^4y^4 - x^2y^2 - 1)$

C. $P = x^8y^8 + x^4y^4 + 1 = (x^2y^2 - xy + 1)(x^2y^2 + xy + 1)(x^4y^4 + x^2y^2 + 1)$

D. $P = x^8y^8 + x^4y^4 + 1 = (x^2y^2 - xy - 1)(x^2y^2 + xy + 1)(x^4y^4 - x^2y^2 - 1)$

ĐÁP ÁN C

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Đáp án	D	D	A	C	B	D	D	D	B

Chủ đề 2. .PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. Kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa, tính chất cơ bản. Rút gọn phân thức và quy đồng mẫu của nhiều phân thức.

- Phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và $B \neq 0$. Đặc biệt, mỗi đa thức cũng được coi như một phân thức với mẫu thức bằng 1.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ nếu } A.D = B.C (B, D \neq 0)$$

- Tính chất cơ bản của phân thức:

$$+ \frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \text{ (M là đa thức khác 0)}$$

$$+ \frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \text{ (N là một nhân tử chung của A và B)}$$

$$+ \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \text{ (quy tắc đổi dấu)}$$

- Rút gọn phân thức:

+ Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung

+ Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung (nếu có)

- Quy đồng mẫu của nhiều phân thức:

+ Phân tích các mẫu thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung

+ Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức

+ Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng

Ví dụ: Cho $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$, hãy rút gọn phân thức $P = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Từ giả thiết ta có: $5(x^2 + y^2) = 8xy$. Từ đó suy ra

$$P = \frac{5(x^2 - 2xy + y^2)}{5(x^2 + 2xy + y^2)} = \frac{5(x^2 + y^2) - 10xy}{5(x^2 + y^2) + 10xy} = \frac{8xy - 10xy}{8xy + 10xy} = \frac{-2xy}{18xy} = -\frac{1}{9}$$

2. Phép cộng và phép trừ các phân thức đại số

- Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức. Muốn cộng hai phân thức có mẫu khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức cùng mẫu vừa tìm được.

- Phép cộng các phân thức cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp.

- Hai phân thức được gọi là đối nhau, nếu tổng của chúng bằng 0.

$$+) -\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$$

$$+) -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B} = \frac{A}{B}$$

$$+) \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$$

Ví dụ: Thực hiện các phép tính

$$P = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x^2 + xy - xy - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x(x+y) - y(x+z)}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} = \frac{y}{y+z} - \frac{x}{y+x}; \quad \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{z}{z+y} - \frac{x}{z+x}$$

Từ đó suy ra

$$P = \left(\frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{y}{y+z} - \frac{x}{y+x}\right) + \left(\frac{z}{z+y} - \frac{x}{z+x}\right) = 1 - 1 = 0$$

3. Phép nhân và phép chia các phân thức đại số

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}; \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A.D}{B.C}, \quad \left(\frac{C}{D} \neq 0\right)$$

Phép nhân các phân thức đại số có tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối đối với phép cộng.

Ví dụ: Cho $A = \frac{x-y}{x+y}$; $B = \frac{y-z}{y+z}$; $C = \frac{z-x}{z+x}$. Chứng minh rằng:

$$(1+A)(1+B)(1+C) = (1-A)(1-B)(1-C)$$

$$\text{Ta có: } 1 + A = 1 + \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y}; 1 + B = \frac{2y}{y+z}; 1 + C = \frac{2z}{z+x}$$

$$1 - A = 1 - \frac{x-y}{x+y} = \frac{2y}{x+y}; 1 - B = \frac{2z}{y+z}; 1 - C = \frac{2x}{z+x}$$

Từ đó suy ra

$$(1 + A)(1 + B)(1 + C) = (1 - A)(1 - B)(1 - C) = \frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

4. Biến đổi các biểu thức hữu tỷ

- Một phân thức đại số hoặc một biểu thức biểu thị một dãy các phép toán; cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức gọi là một biểu thức hữu tỷ.

Ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỷ thành một phân thức.

- Khi giải bài toán liên quan đến giá trị của biểu thức thì trước tiên phải tìm điều kiện của biến (hoặc nhiều biến tham gia trong biểu thức) sao cho biểu thức có nghĩa (chẳng hạn các mẫu thức phải khác 0)

Ví dụ: Biến đổi biểu thức $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 - xy} + \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 - xy} \right) : \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$

thành phân thức hữu tỷ.

$$\text{Ta có: } P = \frac{2}{x} - \left[\frac{x^2}{x(x-y)} + \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y(x-y)} \right] : \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$$

ĐK: $x \neq 0; y \neq 0; x \neq y$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x} - \frac{x^2 y + (x^2 - y^2)(x - y) + xy^2}{xy(x - y)} \cdot \frac{x - y}{x^2 - xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} - \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{xy(x - y)} \cdot \frac{x - y}{x^2 - xy + y^2} = \frac{2}{x} - \frac{x + y}{xy} = \frac{y - x}{xy} \end{aligned}$$

II. Ví dụ minh họa

1. Nhận biết

Ví dụ 1: Kết quả của tổng: $P = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$ là:

A. $P = \frac{100}{x(x+100)}$ **B.** $P = \frac{101}{x(x+100)}$ **C.** $P = \frac{100}{x(x+101)}$ **D.** $P = \frac{101}{x(x+101)}$

Đáp án A

Ta có:

$$P = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x+99} - \frac{1}{x+100} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+100} = \frac{100}{x(x+100)}$$

Ví dụ 2: Kết quả của tổng:

$$P = \frac{a}{x^2 + ax} + \frac{a}{x^2 + 3ax + 2a^2} + \frac{a}{x^2 + 5ax + 6a^2} + \dots + \frac{a}{x^2 + 19ax + 90a^2} + \frac{1}{x+10a} \text{ là}$$

A. $P = \frac{1}{a}$

B. $P = \frac{1}{x}$

C. $P = \frac{x}{a}$

D. $P = \frac{a}{x}$

Đáp án B

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)(x+2a)} + \dots + \frac{a}{(x+a)(x+10a)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right) + \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+2a} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x+9a} - \frac{1}{x+10a} \right) + \frac{1}{x+10a} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2. Thông hiểu

Ví dụ 1: Sau khi thực hiện phép tính, biểu thức:

$$P = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x} + \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} \text{ có giá trị là}$$

A. $P = 1$

B. $P = -1$

C. $P = 0$

D. $P = 2$

Đáp án C

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(y-z)(z-x) + 2(x-y)(z-x) + 2(x-y)(y-z) + (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{[(x-y) + (y-z) + (z-x)]^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Biểu thức

$$P = \frac{yz}{(x+y)(y+z)} + \frac{zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{xy}{(z+x)(y+z)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \text{ có giá trị là:}$$

Đáp án D

A. $P = -2$

B. $P = 2$

C. $P = -1$

D. $P = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y) + xyz + xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{yz(x+y+z) + zx(x+y+z) + xy(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{(x+y+z)(yz+zx) + xy(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{z(x+y+z)(x+y) + xy(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{(x+y)[z(x+y+z) + xy]}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{(x+y)[x(y+z) + z(y+z)]}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 1 \end{aligned}$$

3. Vận dụng

Ví dụ 1: Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$

Khi đó giá trị của biểu thức: $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$ là:

A. $P = 1$

B. $P = 0$

C. $P = 2$

D. $P = -1$

Đáp án B

Ta có: $\frac{x^2}{y+z} + x = \frac{x(x+y+z)}{y+z}$; $\frac{y^2}{z+x} + y = \frac{y(x+y+z)}{z+x}$; $\frac{z^2}{x+y} + z = \frac{z(x+y+z)}{x+y}$

Từ đó suy ra $P + (x+y+z) = (x+y+z) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) = x+y+z$

Do đó $P = 0$

Ví dụ 2: Cho $xy = a; yz = b; zx = c (a, b, c \neq 0)$. Khi đó $P = x^2 + y^2 + z^2$ nhận giá trị là:

A. $P = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}$.

B. $P = \frac{2(a^4 + b^4 + c^4)}{abc}$.

C. $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc}$.

D. $P = \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{abc}$.

Đáp án C

Từ giả thiết, ta có $x^2y^2z^2 = abc \Rightarrow x^2b^2 = abc \Rightarrow x^2 = \frac{ac}{b}$

Tương tự: $y^2 = \frac{ab}{c}; z^2 = \frac{bc}{a}$

Do vậy, $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc}$

4. Vận dụng nâng cao

Ví dụ 1: Các giá trị của M, N thỏa mãn $\frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$ với mọi giá trị của x là:

A. $\begin{cases} M = 17 \\ N = 15 \end{cases}$ B. $\begin{cases} M = 15 \\ N = 17 \end{cases}$ C. $\begin{cases} M = -17 \\ N = -15 \end{cases}$ D. $\begin{cases} M = -15 \\ N = -17 \end{cases}$

Đáp án A

Ta có:

$$\frac{M(x-2) + N(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{32x-19}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow (M+N)x + (N-2M) = 32x-19$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M+N = 32 \\ -2M+N = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 17 \\ N = 15 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{x} = \frac{y}{x} - \frac{x}{z} - \frac{z}{y}$. Khẳng định nào đúng?

A. $x = y = z$ B. $\begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = y \\ x = -z \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = y \\ x = -z \\ z = -y \end{cases}$

Đáp án D

Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{x^2z - y^2x - z^2y}{xyz} = \frac{y^2z - z^2x - x^2y}{xyz} \Rightarrow x^2z - y^2x - z^2y = y^2z - z^2x - x^2y$$

$$\Rightarrow (x-y)(y+z)(z+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -z \\ z = -y \end{cases}$$

III. Bài tập trắc nghiệm

1. Nhận biết

Câu 1: Phân thức $P = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$ có tập xác định (TXĐ) là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ D. $\mathbb{R}$

Câu 2: Phân thức $P = \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}$ có tập xác định (TXĐ) là:

- A. Với mọi x, y B. Với mọi $x \neq y$ C. Với mọi $x \neq -y$ D. Với mọi $x \neq \pm y$

Câu 3: Cho các phân số:

$$P = \frac{2018 - 2017}{2018 + 2017}; Q = \frac{2018^2 - 2017^2}{2018^2 + 2017^2}; R = \frac{2018^3 - 2017^3}{2018^3 + 2017^3}; S = \frac{2018^4 - 2017^4}{2018^4 + 2017^4}$$

Phân số nào có giá trị nhỏ nhất?

- A. Phân số R B. Phân số S C. Phân số P D. Phân số Q

Câu 4: Sau khi rút gọn các phân thức, có bao nhiêu kết quả đúng?

$$\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 - 7} = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 7}; \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2} = \frac{x + 2}{x - 1}; \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10} = \frac{x + 2}{x + 5}$$

- A. Có 1 mệnh đề đúng B. Có 2 mệnh đề đúng
C. Có 3 mệnh đề đúng D. Cả 4 mệnh đề đều đúng.

Câu 5: Sau khi thực hiện các phép tính, biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{(x - y)^2(x + y)} - \frac{2xy^2}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} + \frac{y^2}{(x^2 - y^2)(x + y)} \text{ được rút gọn là:}$$

- A. $P = \frac{1}{x - y}$ B. $P = \frac{1}{x + y}$ C. $P = \frac{x + y}{x - y}$ D. $P = \frac{x - y}{x + y}$

Câu 6: Sau khi thực hiện các phép tính, biểu thức:

$$P = \frac{1}{x(x - y)(x - z)} + \frac{1}{y(y - x)(y - z)} + \frac{1}{z(z - x)(z - y)} \text{ được rút gọn là:}$$

- A. $P = \frac{2}{xyz}$ B. $P = \frac{1}{xyz}$ C. $P = \frac{-2}{xyz}$ D. $P = \frac{-1}{xyz}$

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P = \left(1 - \frac{3}{2.4}\right) \left(1 - \frac{3}{3.5}\right) \left(1 - \frac{3}{4.6}\right) \dots \left(1 - \frac{3}{n(n+2)}\right)$ ta được

A. $P = \frac{n+3}{4n}$

B. $P = \frac{n+3}{2n}$

C. $P = \frac{n}{4n+3}$

D. $P = \frac{n}{2n+3}$

ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	C	B	C	C	A	B	A

2. Thông hiểu

Câu 1: Trong các số: $M = 2017.4037 + 2018$; $N = 2018.4037 - 2019$

$P = 8070$; $Q = 2018.2020 - 2017.2015$, có bao nhiêu cặp số bằng nhau?

A. Có 1 cặp

B. Có 2 cặp

C. Có 3 cặp

D. Có 4 cặp

Câu 2: Cho hai phân thức: $P = \frac{n!}{(n-1)!(n+1)}$; $Q = \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$. Khẳng định nào đúng?

A. $P = Q$

B. $P > Q$

C. $P < Q$

D. $P \cdot Q > 1$

Câu 3: Trong các kết quả sau, có bao nhiêu kết quả đúng?

Biểu thức $\frac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2 y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2 y^2 + 1}$ có giá trị không phụ thuộc vào biến y ; Biểu thức

$\frac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2 y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2 y^2 + 1}$ có giá trị không phụ thuộc vào biến x ; Biểu thức

$\frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2 y - x^2 z + y^2 z - y^3}$ có giá trị không phụ thuộc vào biến z ; Biểu thức

$\frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2 y - x^2 z + y^2 z - y^3}$ có giá trị không phụ thuộc vào biến x

A. Có 1 mệnh đề đúng

B. Có 2 mệnh đề đúng

C. Có 3 mệnh đề đúng

D. Cả 4 mệnh đề đều đúng.

Câu 4: Sau khi thực hiện các phép tính, biểu thức:

$$P = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} - \frac{8}{x^8+1} - \frac{16}{x^{16}+1}$$
 được rút gọn là:

A. $P = \frac{16}{x^{32}-1}$

B. $P = \frac{32}{x^{32}+1}$

C. $P = \frac{32}{x^{32}-1}$

D. $P = \frac{16}{x^{32}+1}$

Câu 5: Cho biểu thức:

$$P = \frac{1}{(y-z)(x^2+xz-y^2-yz)} + \frac{1}{(z-x)(y^2+xy-z^2-zx)} + \frac{1}{(x-y)(z^2+yz-x^2-xy)}.$$

Khẳng định nào đúng?

- A. Giá trị của biểu thức P chỉ phụ thuộc vào biến x
- B. Giá trị của biểu thức P chỉ phụ thuộc vào biến y
- C. Giá trị của biểu thức P chỉ phụ thuộc vào biến z
- D. Giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào các biến x, y, z

Câu 6: Kết quả của phép tính $P = \frac{x(y^2 - z) + y(x - xy)}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2} : \frac{xy^2 - xz(2y - z)}{2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}$ là:

- A. $P = \frac{x + y + z}{x - z}$
- B. $P = \frac{x + y + z}{y - z}$
- C. $P = \frac{x + y + z}{x - y}$
- D. $P = \frac{x + y + z}{y + z}$

Câu 7: Phân thức $P = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5}$ có tập xác định (TXĐ) là:

- A. Với mọi x, y
- B. Với mọi x và $y \neq 1$
- C. Với mọi y và $x \neq -2$
- D. Với mọi $x \neq -2$ và với mọi $y \neq 1$

ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	A	B	A	C	D	B	D

3. Vận dụng

Câu 1: Với n là số tự nhiên, trong các phân số sau có bao nhiêu phân số tối giản?

$$P = \frac{(n^2 - 3n + 1)^{31} - (n^2 - 4n + 5)^{30} + 2}{n^2 - 4}; Q = \frac{n^3 - 1}{n^5 + n + 1}; R = \frac{6n + 1}{8n + 1}; S = \frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$$

- A. Có 1 phân số
- B. Có 2 phân số
- C. Có 3 phân số
- D. Có 4 phân số

Câu 2: Trong các đẳng thức sau, có bao nhiêu kết quả sai?

$$x^{19} + x^{18} + \dots + x + 1 = \frac{x^{20} - 1}{x - 1} (x \neq 1); x^{19} + x^{18} + \dots + x + 1 = \frac{x^{21} - 1}{x^2 - 1} (x \neq \pm 1);$$

$$(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \dots (x^{32} + 1) = \frac{x^{64} - 1}{x - 1}; (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \dots (x^{32} + 1) = \frac{x^{128} - 1}{x - 1}$$

A. Có 1 kết quả sai

B. Có 2 kết quả sai

C. Có 3 kết quả sai

D. Có 4 kết quả sai

Câu 3: Cho $x + y + z = 0$; $(x, y, z \neq 0)$. Khi đó giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)}{16xyz}$$

A. $P = \frac{xyz}{2}$

B. $P = -\frac{xyz}{2}$

C. $P = \frac{xyz}{3}$

D. $P = -\frac{xyz}{3}$

Câu 4: Tích $P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$) là:

A. $P = \frac{n+1}{2n}$

B. $P = \frac{n+1}{n}$

C. $P = \frac{n}{2n+1}$

D. $P = \frac{n}{n+1}$

Câu 5: Phân thức $P = \frac{5}{x^2 - 6x + 10}$ có giá trị lớn nhất là:

A. 5

B. 10

C. 1

D. 3

Câu 6: Phân thức $P = \frac{8}{-x^2 + 2x - 5}$ có giá trị nhỏ nhất là:

A. -8

B. -2

C. -5

D. -1

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{x+y+z} \cdot \frac{1}{xy+yz+xz} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$ cho ta kết quả nào đúng?

A. $P = \frac{1}{xyz}$

B. $P = \frac{3}{xyz}$

C. $P = \frac{1}{x^2 y^2 z^2}$

D. $P = \frac{3}{x^2 y^2 z^2}$

ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	B	C	B	A	A	B	C

4. Vận dụng cao

Câu 1: Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Khi đó giá trị của phân thức $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$ là:

A. $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$

B. $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}.$

C. $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}.$

D. $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}.$

Câu 2: Cho $x + y + z = 0; (x, y, z \neq 0).$ Khi đó giá trị của biểu thức

$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$ là:

A. $P = \frac{1}{6}$

B. $P = \frac{1}{2}$

C. $P = \frac{1}{4}$

D. $P = \frac{1}{3}$

Câu 3: Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Biểu thức $P = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$ có thể nhận bao nhiêu giá trị khác nhau?

A. Vô số giá trị khác nhau

B. Có 4 giá trị khác nhau

C. Có 2 giá trị khác nhau

D. Cả ba đáp án trên đều sai

Câu 4: Tích $P = \frac{1^4 + 4}{3^4 + 4} \cdot \frac{5^4 + 4}{7^4 + 4} \cdot \frac{9^4 + 4}{11^4 + 4} \cdot \frac{13^4 + 4}{15^4 + 4} \cdot \frac{17^4 + 4}{19^4 + 4}$ có giá trị là:

A. $P = \frac{1}{402}$

B. $P = \frac{1}{400}$

C. $P = \frac{1}{403}$

D. $P = \frac{1}{401}$

5. Tích $P = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \left(1 + \frac{4}{12}\right) \left(1 + \frac{4}{21}\right) \dots \left(1 + \frac{4}{n(n+4)}\right)$ có giá trị là:

A. $P = \frac{5(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$

B. $P = \frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$

C. $P = \frac{3(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$

D. $P = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$

6. Cho $P = \frac{x-y}{1+xy}; Q = \frac{y-z}{1+yz}; R = \frac{z-x}{1+zx}$. Khẳng định nào đúng?

A. $P + Q + R = 2P.Q.R$

B. $P + Q + R = 3.P.Q.R$

C. $P + Q + R = P.Q.R$

D. $P + Q + R = 6.P.Q.R$

7. Cho $x + y + z = 0$ và x, y, z đôi một khác nhau. Xét $P = \frac{4yz - x^2}{yz + 2x^2}$; $Q = \frac{4zx - y^2}{zx + 2y^2}$; $R = \frac{4xy - z^2}{xy + 2z^2}$. Khẳng định nào đúng?

- A. Tích $P.Q.R$ có giá trị luôn là hằng số
- B. Tích $P.Q.R$ nhận vô số giá trị khác nhau, tùy vào giá trị của các biến x, y, z
- C. Tích $P.Q.R$ nhận hai giá trị khác nhau, tùy vào giá trị của các biến x, y, z
- D. Tích $P.Q.R$ nhận ba giá trị khác nhau, tùy vào giá trị của các biến x, y, z

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	A	D	C	D	B	C	A

Chủ đề 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT**I. Kiến thức cơ bản**

1. Mở đầu về phương trình, phương trình bậc nhất một ẩn, phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$

- Phương trình ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x . Giá trị $x = x_0$ làm cho hai vế của phương trình nhận cùng một giá trị gọi là một nghiệm của phương trình. Một phương trình có thể có một, hai, ba, ... nghiệm, nhưng cũng có thể không có nghiệm nào (vô nghiệm) hoặc có vô số nghiệm. Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình gọi là tập nghiệm của phương trình đó, thường kí hiệu là S .

- Hai phương trình tương đương là hai phương trình có cùng một tập nghiệm. Hai phương trình cùng tương đương với một phương trình thứ ba thì tương đương với nhau.

- Quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân:

+ Nếu ta chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu của nó thì được một phương trình tương đương với phương trình đó.

+ Nếu ta nhân (hay chia) cả hai vế của một phương trình với cùng một số khác 0 thì được một phương trình tương đương với phương trình đã cho.

- Nếu ta cộng cùng một đa thức của ẩn vào hai vế của một phương trình thì được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

- Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình dạng $ax + b = 0$ với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$.

Phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ có duy nhất nghiệm là $x = -\frac{b}{a}$.

- Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$ (đối với phương trình mà hai vế là hai biểu thức hữu tỉ, không chứa ẩn ở mẫu)

Các bước giải:

+ Khử mẫu thức

+ Bỏ dấu ngoặc và chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia

+ Thu gọn về dạng $ax + b = 0$ hay $ax = -b$.

Ví dụ: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

$$\frac{3(2x+1)}{4} - \frac{5x+3}{6} = \frac{2x-1}{3} + \frac{m}{12}$$

Ta có phương trình tương đương với

$$9(2x+1) - 2(5x+3) = 4(2x-1) + m \Leftrightarrow 0.x = m - 7$$

Từ đó suy ra, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 7$ (khi đó phương trình có nghiệm với mọi giá trị của x).

2. Phương trình tích

- Phương trình tích là phương trình có dạng $A_1(x).A_2(x)...A_n(x) = 0$

$$\text{- Cách giải: } A_1(x).A_2(x)...A_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1(x) = 0 \\ A_2(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ A_n(x) = 0 \end{cases}$$

Như vậy, muốn giải phương trình tích $A_1(x).A_2(x)...A_n(x) = 0$ ta giải từng phương trình $A_1(x) = 0$; $A_2(x) = 0$; ...; $A_n(x) = 0$ rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

- Ta đã biết, một đa thức bậc n không có quá n nghiệm. Vì thế ta sẽ giải được phương trình bậc n có dạng $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ nếu ta phân tích được vế trái thành nhân tử. Phương trình này có không quá n nghiệm.

Ví dụ: Giải phương trình $\frac{x+16}{49} + \frac{x+18}{47} = \frac{x+20}{45} - 1$

Thêm 2 vào hai vế của phương trình ta được:

$$\frac{x+16}{49} + 1 + \frac{x+18}{47} + 1 = \frac{x+20}{45} + 1 \Leftrightarrow \frac{x+65}{49} + \frac{x+65}{47} - \frac{x+65}{45} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+65) \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{47} - \frac{1}{45} \right) = 0 \Leftrightarrow x+65 = 0 \Leftrightarrow x = -65 \text{ (vì } \frac{1}{49} + \frac{1}{47} - \frac{1}{45} \neq 0 \text{)}$$

3. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

- Điều kiện xác định của một phương trình (viết tắt là ĐKXĐ) là điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều có giá trị khác 0.

- Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức:

+ Tìm ĐKXĐ

+ Khử mẫu thức

+ Giải phương trình vừa nhận được

+ Loại các giá trị không thỏa mãn ĐKXĐ. Các giá trị thỏa mãn ĐKXĐ chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

- Nếu ta biến đổi một phương trình thành một phương trình khác có tập nghiệm rộng hơn thì ta gọi phương trình sau là một phương trình hệ quả của phương trình ban đầu.

Khi nhân hai vế của một phương trình với cùng một đa thức hoặc khi bình phương hai vế của một phương trình, thường dẫn đến một phương trình hệ quả.

Ví dụ: Giải phương trình $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0$

ĐKXD: $x \neq \pm 2$. Đặt $u = \frac{x+3}{x-2}$; $v = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow \frac{x^2-9}{x^2-4} = uv$

Khi đó ta có $u^2 - 7uv + 6v^2 = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u-6v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 6v \end{cases}$

Nếu $u = v$ thì

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Nếu $u = 6v$ thì

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 6. \end{cases}$

4. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

- Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:

+ Lập phương trình: Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số; biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết; lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

- Giải phương trình

- Nhận định kết quả và trả lời

- Khi chọn ẩn số, thường ta chọn trực tiếp theo câu hỏi trong đề bài nhưng cũng có khi chọn gián tiếp nhằm mục đích suy luận lập phương trình được thuận lợi hơn.

Ví dụ: Một sà lan xuôi dòng từ A đến B mất 2,5 giờ và ngược dòng từ B về A mất 4 giờ. Biết vận tốc của dòng nước là 3 km/h. Tính khoảng cách AB.

Lời giải

Gọi vận tốc riêng của sà lan là x km/h. ($x > 3$)..

Suy ra vận tốc xuôi dòng của sà lan là $x + 3$ (km/h); vận tốc ngược dòng của sà lan là $x - 3$ (km/h).

Khi đó trong 2,5 giờ sẽ lan xuôi dòng được $2,5(x+3)$ (km); trong 4 giờ sẽ lan ngược dòng được $4(x-3)$ (km).

Vì khoảng cách AB không đổi, nên ta có phương trình:

$$2,5(x+3) = 4(x-3) \Leftrightarrow x = 13 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 3 \text{)}.$$

Khi đó khoảng cách AB là $4(13-3) = 40$ (km).

II. Ví dụ minh họa

1. Nhận biết

Ví dụ 1: Phương trình

$$\frac{m^2 \left[(x+2)^2 - (x-2)^2 \right]}{8} - 4x = (m-1)^2 + 3(2m+1)$$

vô nghiệm khi tham số m nhận giá trị:

A. $m = 3$

B. $m = 2$

C. $m = 1$

D. $m = 1$

Đáp án B

Ta có phương trình tương đương với $m^2x - 4x = m^2 + 4m + 4$

$$\Leftrightarrow (m-2)(m+2)x = (m+2)^2$$

Từ đó suy ra phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (m-2)(m+2) = 0 \\ (m+2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Ví dụ 2: Hai phương trình $(x+5)(2x-1) = 0$; $(x+5)(2x-1)(x^2-3) = 0$ không tương đương

khi nào?

A. Nếu x nhận giá trị trên tập $\mathbb{R}$

B. Nếu x nhận giá trị trên tập $\mathbb{Q}$

C. Nếu x nhận giá trị trên tập $\mathbb{Z}$

D. Nếu x nhận giá trị trên tập $\mathbb{N}$ **Đáp án A**

Phương trình thứ nhất có tập nghiệm $S_1 = \left\{ -5; \frac{1}{2} \right\}$

Phương trình thứ hai có tập nghiệm $S_2 = \left\{ -5; \frac{1}{2}; \pm\sqrt{3} \right\}.$

Trên tập $\mathbb{Q}$ hai phương trình có cùng tập nghiệm $\begin{cases} x = -5 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Trên tập $\mathbb{Z}$ hai phương trình có cùng tập nghiệm $x = -5$

Trên tập $\mathbb{N}$ hai phương trình đều vô nghiệm

2. Thông hiểu

Ví dụ 1: Phương trình $(x-20) + (x-19) + (x-18) + \dots + 100 + 101 = 101$ có nghiệm là:

A. $x = 90$

B. $x = -90$

C. $x = 80$

D. $x = -80$

Đáp án D

Xóa hạng tử 101 ở hai vế. Gọi số hạng tử còn lại ở vế trái là n ($n \in \mathbb{N}^*$), ta được:

$$\frac{(x-20+100).n}{2} = 0 \Leftrightarrow x+80=0 \Leftrightarrow x=-80.$$

Ví dụ 2: Phương trình $\frac{x+1}{1} + \frac{2x+3}{3} + \frac{3x+5}{5} + \dots + \frac{20x+39}{39} = 22 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \dots + \frac{40}{39}$ có nghiệm là:

- A.** $x=0$ **B.** $x=1$ **C.** $x=2$ **D.** $x=3$

Đáp án C

Ta có phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}x + \dots + \frac{20}{39}x\right) + 20 &= 22 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \dots + \frac{40}{39} \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{20}{39}\right)x &= 2\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{20}{39}\right) \Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

3. Vận dụng

Ví dụ 1: Phương trình $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{9.10}\right)(x-1) + \frac{1}{10}x = x - \frac{9}{10}$ có nghiệm là:

- A.** $x=9$ **B.** $x=1$ **C.** $x=10$ **D.** x tùy ý

Đáp án D.

Ta có phương trình tương đương với:

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)(x-1) + \frac{1}{10}x = x - \frac{9}{10} \Leftrightarrow \frac{9}{10}x + \frac{1}{10}x - x = 0 \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Suy ra phương trình có nghiệm bất kỳ.

Ví dụ 2.

Phương trình $\frac{a(3x-1)}{5} - \frac{6x-17}{4} + \frac{3x+2}{10} = 0$ vô nghiệm khi tham số a nhận giá trị:

- A.** $a=0$ **B.** $a=1$ **C.** $a=2$ **D.** $a=5$

Đáp án C.

Thu gọn ta được phương trình $12(a-2)x = 4a-89$.

Từ đó suy ra phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a-2=0 \\ 4a-89 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=2.$

4. Vận dụng nâng cao.

Ví dụ 1. Phương trình $\left(\frac{1}{1.51} + \frac{1}{2.52} + \dots + \frac{1}{10.60}\right) \cdot x = \left(\frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{50.60}\right)$ có nghiệm là

- A.** $x = 5$ **B.** $x = 10$ **C.** $x = 50$ **D.** $x = 60$

Đáp án A.

$$\text{Ta có } a = \frac{1}{50} \left(\frac{50}{1.51} + \frac{50}{2.52} + \dots + \frac{50}{10.60} \right) - \frac{1}{50} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60} \right) \right]$$

$$b = \frac{1}{10} \left(\frac{10}{1.11} + \frac{10}{2.12} + \dots + \frac{10}{50.60} \right) = \frac{1}{10} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60} \right) \right] = 5a$$

Từ đó suy ra $x = 5$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $\frac{mx+5}{10} + \frac{x+m}{4} = \frac{m}{20}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.** Nếu $m = \frac{-5}{2}$ thì phương trình có nghiệm tùy ý
- B.** Tồn tại giá trị của m để phương trình vô nghiệm
- C.** Khi $m \neq \frac{-5}{2}$ phương trình có nghiệm không phụ thuộc tham số m
- D.** Khi $m \neq \frac{-5}{2}$ phương trình có nghiệm duy nhất

Đáp án B

Thu gọn ta được phương trình: $(2m+5)x = -2(2m+5)$

Từ đó suy ra:

Nếu $m = \frac{-5}{2}$ thì phương trình có nghiệm tùy ý

Nếu $m \neq \frac{-5}{2}$ phương trình có nghiệm $x = -2$

III. Bài tập trắc nghiệm.

1. Nhận biết

1. Phương trình $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ có tập nghiệm S là:

- A.** $S = \{-1\}$ **B.** $S = \{-1; 2; -2\}$ **C.** $S = \{2; -2\}$ **D.** $S = \{-1; 2\}$

2. Phương trình $x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$ có tập nghiệm S là:

- A. $S = \{1\}$ B. $S = \{-1; 3; -3\}$ C. $S = \{1; -3\}$ D. $S = \{3; 1\}$

3. Phương trình $\frac{x+43}{57} + \frac{x+46}{54} = \frac{x+49}{51} + \frac{x+52}{48}$ có nghiệm là:

- A. $x = -100$ B. $x = 100$ C. $x = -101$ D. $x = 101$

4. Phương trình $\frac{x-69}{30} + \frac{x-67}{32} + \frac{x-65}{34} = \frac{x-63}{36} + \frac{x-61}{38} + \frac{x-59}{40}$ có nghiệm là:

- A. $x = 99$ B. $x = 100$ C. $x = -101$ D. $x = 101$

5. Phương trình $\frac{x-17}{33} + \frac{x-21}{29} + \frac{x}{25} = 4$

có nghiệm là:

- A. $x = 60$ B. $x = 50$ C. $x = 40$ D. $x = 30$

6. Cho phương trình $\frac{x-17}{33} + \frac{x-21}{29} + \frac{x}{25} = 4$. Khẳng định nào sau đây đúng

- A. Phương trình vô nghiệm B. Phương trình có 1 nghiệm
C. Phương trình có 2 nghiệm D. Tổng hai nghiệm của phương trình là 0

7. Lúc 7 giờ sáng một người đi xe máy từ A đến B dài 45km. Tới B người đó giải quyết xong công việc 1h30' rồi quay về ngay và tới A lúc 11h. Đoạn đường AB gồm một đoạn đường bằng và một đoạn lên dốc. Vận tốc lúc lên dốc là 24km/h, lúc xuống dốc là 45km/h và trên đường bằng là 40km/h. Đoạn đường bằng S có độ dài là:

- A. $S = 25\text{km}$ B. $S = 26\text{km}$ C. $S = 27\text{km}$ D. $S = 28\text{km}$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	D	C	B	A	B	A	C

2. Thông hiểu:

1. Phương trình $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ba} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ có nghiệm duy nhất khi:

- A. $a+b+c \neq 1$ B. $a+b+c \neq 0$
C. $a+b+c \neq 2$ D. $a+b+c \neq -1$

2. Phương trình $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Có 4 nghiệm B. Có 3 nghiệm
C. Có 2 nghiệm D. Có 1 nghiệm

3. Phương trình $(2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Có 1 nghiệm

B. Có 2 nghiệm

C. Có 3 nghiệm

D. Có 4 nghiệm

4. Phương trình $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$ có nghiệm là:

A. $x = 123$

B. $x = 124$

C. $x = 125$

D. $x = 126$

5. Phương trình $\frac{x-1}{x^2-x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{10}{x(x^4+x^2+1)}$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$

C. $x = -2$

D. $x = -5$

6. Cho số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 1 vào bên phải ta được một số gấp 3 lần nếu viết thêm chữ số 1 vào bên trái số đó. Số tự nhiên có 5 chữ số cần tìm là:

A. 42857

B. 42860

C. 42854

D. 42851

7. Hiện tại tuổi ba gấp 3 lần tuổi con. Sau một thời gian nữa, khi tuổi con bằng tuổi ba hiện nay thì lúc đó tổng tuổi hai ba con là 112 tuổi. Tuổi hiện tại của con là:

A. 13 tuổi

B. 14 tuổi

C. 15 tuổi

D. 16 tuổi

8. Tổng của 4 số là 72. Nếu lấy số thứ nhất cộng thêm 5, số thứ hai trừ đi 5, số thứ ba nhân 5, số thứ tư chia 5 thì bốn kết quả bằng nhau. Khi đó số nhỏ nhất trong bốn số ban đầu là:

A. 4

B. 5

C. 3

D. 2

Đáp án:

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	B	C	D	A	D	A	B	D

3. Vận dụng:

1. Phương trình $\frac{x-4m}{m+1} + \frac{x-4}{m-1} = \frac{x-4m-3}{m^2-1}$ vô nghiệm khi:

A. $m = 0$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. Cả 3 đáp án trên đều sai

2. Phương trình $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} = a+b+c$ vô số nghiệm khi:

A. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0$

B. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 1$

C. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 2$

D. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = -1$

3. Phương trình $x(x-1)(x-1)(x+5) = 84$ có bao nhiêu nghiệm nguyên:

- A. Có 1 nghiệm
B. Có 2 nghiệm
C. Có 3 nghiệm
D. Có 4 nghiệm

4. Phương trình $x^4 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$ có tổng các nghiệm S bằng bao nhiêu

- A. $S = ab + bc + ca$
B. $S = a + b + c$
C. $S = a^2 + b^2 + c^2$
D. $S = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$

5. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\frac{x-m}{m+5} + \frac{x-5}{x+m} = 2$ vô nghiệm:

- A. $m = -5$
B. $m = -4$
C. $m = 5$
D. $m = 4$

6. Phương trình $\frac{x+9}{10} + \frac{x+9}{10} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9}$ có tập nghiệm S là:

- A. $S = \left\{ \frac{-181}{19} \right\}$
B. $S = \left\{ \frac{-181}{19}; -19 \right\}$
C. $S = \left\{ \frac{-181}{19}; -10; 0 \right\}$
D. Một đáp án khác

7. Phương trình $\frac{x^2-2x+2}{x-1} + \frac{x^2-8x+20}{x-4} = \frac{x^2-4x+6}{x-2} + \frac{x^2-6x+12}{x-3}$ có nghiệm nhỏ nhất

là :

- A. $x = 0$
B. $x = 2$
C. $x = -2$
D. $x = 5$

8. Phương trình $\frac{x-5}{x-5} + \frac{x-6}{x-5} + \frac{x-7}{x-5} + \dots + \frac{1}{x-5} = 4 (x \in \mathbb{N})$ có nghiệm là :

- A. $x = 10$
B. $x = 12$
C. $x = 20$
D. $x = 25$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	D	A	B	B	C	C	A	B

4. Vận dụng cao

1. Phương trình $(2x-5)^3 - (3x-4)^3 + (x+1)^3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. Có 1 nghiệm
B. Có 2 nghiệm
C. Có 3 nghiệm
D. Có 4 nghiệm

2. Phương trình $(x-1)^3 + (2x-3)^3 + (3x-5)^3 - 3(x-1)(2x-3)(3x-5) = 0$ có tổng các nghiệm S bằng bao nhiêu ?

- A. $S = \frac{5}{2}$ B. $S = \frac{7}{2}$ C. $S = \frac{9}{2}$ D. $S = \frac{3}{2}$

3. Phương trình $(x^2 + 3x - 4)^3 + (3x^2 + 7x + 4)^3 - (4x^2 + 10x)^3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm

- A. Có 2 nghiệm B. Có 4 nghiệm
C. Có 5 nghiệm D. Có 6 nghiệm

4. Phương trình $(x+5)^4 + (x-4)^4 = (2x+1)^4$ có tổng các nghiệm S bằng bao nhiêu ?

- A. $S = -1$ B. $S = 0$ C. $S = 1$ D. $S = \frac{3}{2}$

5. Phương trình $(x-2)^4 + (x-4)^4 = 82$ có hiệu H giữa nghiệm lớn nhất và nghiệm nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

- A. $H = 3$ B. $H = 4$ C. $H = 1$ D. $H = 2$

6. Cho phương trình với tham số a: $x(x+2) + a^2 - 3 = 2a(x+1)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi tham số a.
B. Tổng hai nghiệm của phương trình luôn phụ thuộc tham số a.
C. Hiệu hai nghiệm của phương trình luôn phụ thuộc tham số a.
D. Khi a là số nguyên thì tổng hai nghiệm của phương trình là số chẵn.

7. Phương trình $x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - bc)x + a^3 + b^3 + c^3 = 0$ với a, b, c là các tham số và $b \neq c$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. Có 1 nghiệm B. Có 2 nghiệm
C. Có 3 nghiệm D. Vô nghiệm

8. Cho phương trình $\frac{a}{1+bx} = \frac{b}{1+ax}$ với a, b là các tham số khác 0. Phương trình vô nghiệm khi nào?

- A. $a = b$ B. $a = 2b$ C. $a = -2b$ D. $a = -b$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	C	B	D	A	B	C	A	D

Chủ đề 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**I. Kiến thức cơ bản****1. Bất đẳng thức, tính chất của bất đẳng thức**

- Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay dạng $a > b; a \leq b; a \geq b$) là bất đẳng thức

$$a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0; a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$$

- Tính chất:

$$+ a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$$

$$+ a \leq b; b \leq c \Rightarrow a \leq c \text{ (tính chất bắc cầu)}$$

$$+ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \text{ (hoặc } a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c \text{)}$$

$$+ a < b \Rightarrow a.c < b.c, \text{ nếu } c > 0$$

$$+ a < b \Rightarrow a.c > b.c, \text{ nếu } c < 0$$

- Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều, ta được một bất đẳng thức cùng chiều.

- Nhân từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm, ta được một bất đẳng thức cùng chiều.

$$\text{Đặc biệt: } a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2; |a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \text{ với } n \text{ là số tự nhiên lẻ.}$$

- Tính chất giá trị tuyệt đối:

$$+ |a + b| \leq |a| + |b| \text{ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a.b \geq 0 \text{)}$$

$$+ |a - b| \geq |a| - |b| \text{ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc } a \geq b \geq 0 \text{ hoặc } a \leq b \leq 0 \text{)}$$

Ví dụ: Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh rằng $a.b > a + b$.

Lời giải:

Thật vậy, do $a > 2$ và $b > 0$ nên $a.b > 2b$.

$$\text{Hoàn toàn tương tự: } a.b > 2a$$

Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều trên, ta được:

$$2ab > 2(a + b), \text{ suy ra } ab > a + b.$$

Để chứng minh bất đẳng thức, trong một số trường hợp ta cần sử dụng hai bất đẳng thức cổ điển quan trọng sau:

- Bất đẳng thức Cauchy:

$$+ \text{ Cho 2 số: Cho } a, b \text{ là hai số không âm. Khi đó ta có: } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\text{Hay } \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \geq ab \text{ (dạng không chứa dấu căn)}$$

$$+ \text{ Cho 3 số: Cho } a, b, c \text{ là ba số không âm. Khi đó ta có: } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Hay $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$ (dạng không chứa dấu căn)

+ Cho n số: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm. Khi đó ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Hay $\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \dots a_n$ (dạng không chứa dấu căn)

- Bất đẳng thức Bunhiacovsk:

+ Cho 4 số: Cho a_1, a_2, b_1, b_2 là bốn số thực tùy ý. Khi đó ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

+ Cho $2n$ số: Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực tùy ý. Khi đó ta có:

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

2. Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

- Phương pháp sử dụng định nghĩa (phương pháp biến đổi tương đương)

Ví dụ: Cho a, b là hai số thực cùng dấu. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Lời giải:

$$\text{Xét hiệu } H = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

Do a, b cùng dấu, nên $ab > 0$. Mặt khác, hiển nhiên.

$$\text{Từ đó suy ra } H = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

- Phương pháp sử dụng các đánh giá hiển nhiên đúng

Ví dụ: Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \in [-1; 1]$ và thỏa mãn các điều kiện $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = 0$.

Chứng minh rằng: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{n}{3}$.

Lời giải:

Do $a_1 \geq -1$ nên ta có: $4a_1^3 - 3a_1 + 1 = 4(a_1 + 1)\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

Hoàn toàn tương tự ta có: $4\sum_{i=1}^n a_i^3 - 3\sum_{i=1}^n a_i + n \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \leq \frac{n}{3}$.

- Dùng các bất đẳng thức cổ điển

Ví dụ: Các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 2$. Chứng minh rằng: $abc \leq 0,125$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{1+a} \geq \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$\frac{1}{1+a} \geq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{1+b} \cdot \frac{c}{1+c}} \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự ta nhận được:

$$\frac{1}{1+b} \geq \frac{c}{1+c} + \frac{a}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{1+c} \cdot \frac{a}{1+a}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{1+c} \geq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{1+a} \cdot \frac{b}{1+b}} \quad (3)$$

Từ các bất đẳng thức (1), (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{1+b} \cdot \frac{1}{1+c} &\geq \left(2\sqrt{\frac{b}{1+b} \cdot \frac{c}{1+c}}\right) \left(2\sqrt{\frac{c}{1+c} \cdot \frac{a}{1+a}}\right) \left(2\sqrt{\frac{a}{1+a} \cdot \frac{b}{1+b}}\right) \\ &= \frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $8abc \leq 1 \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8} = 0,125$

Ví dụ: Các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski cho hai bộ số $(1,1,1)$ và $(\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1})$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= 1 \cdot \sqrt{2a+1} + 1 \cdot \sqrt{2b+1} + 1 \cdot \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{(2a+1) + (2b+1) + (2c+1)} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{2(a+b+c) + 3} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\sqrt{2a+1} = \sqrt{2b+1} = \sqrt{2c+1} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \max P = \sqrt{15} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

- Phương pháp qui nạp toán học

Ví dụ: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng:

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \quad (1)$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Với $n=1$, ta có: $(1) \Leftrightarrow a_1^3 \geq a_1^2$ (HND do a_1 là số nguyên dương)

Giả sử bất đẳng thức (1) được chứng minh đúng đến n , ta cần chứng minh BĐT (1) cũng đúng cho $n+1$. Hay cần chứng minh:

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 + a_{n+1}^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 \quad (2)$$

Thật vậy ta có:

$$(2) \Leftrightarrow a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 + a_{n+1}^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (3)$$

Ta chứng minh:

$$a_{n+1}^3 \geq a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (4)$$

Do $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1}$, nên ta có $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq a_{n+1} - 1$.

Từ đó suy ra các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ được lấy từ các số tự nhiên thuộc đoạn $[1; a_{n+1} - 1]$. Do vậy

$$\text{ta có: } a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1 + 2 + \dots + (a_{n+1} - 1) = \frac{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)}{2}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 - a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$\Rightarrow$ (4) được chứng minh.

$$\text{Vậy ta có: } a_{n+1}^3 \geq a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (5)$$

Từ (5) kết hợp với giả thiết qui nạp suy ra (3) được chứng minh.

- Phương pháp phản chứng

Ví dụ: Cho x, y, z là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai.

$$|x| < |y - z|; |y| < |z - x|; |z| < |x - y|$$

Lời giải:

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Thật vậy, giả sử cả ba bất đẳng thức đã cho đều đúng. Hay ta có:

$$\begin{cases} |x| < |y - z| \\ |y| < |z - x| \\ |z| < |x - y| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < (y - z)^2 \\ y^2 < (z - x)^2 \\ z^2 < (x - y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y + z)(x + y - z) < 0 \\ (y - z + x)(y + z - x) < 0 \\ (z - x + y)(z + x - y) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - y + z)^2 (x + y - z)^2 (y + z - x)^2 < 0 \quad (\text{vô lí}).$$

- Phương pháp xét các khoảng giá trị của biến

Ví dụ: Cho $A = x^{10} - x^9 + x^4 - x + 1$. Chứng minh rằng $A > 0$.

Lời giải:

Xét trường hợp $x \geq 1$:

$$\text{Ta có } A = x^9(x - 1) + x(x^3 - 1) + 1$$

$$\text{Do } x \geq 1 \text{ nên } x^9 > 0; x - 1 \geq 0; x^3 - 1 \geq 0.$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq 1 \Rightarrow A > 0$$

Xét trường hợp $x < 1$:

$$\text{Ta có } A = x^{10} + x^4(1 - x^5) + (1 - x)$$

Do $x < 1$ nên . Mặt khác, hiển nhiên $x^{10} \geq 0; x^4 \geq 0$.

Từ đó suy ra $A > 0$.

- Phương pháp dồn biến

Phương pháp dồn biến là phương pháp làm giảm số biến của hàm số, đưa hàm số về dạng đơn giản hơn. Từ đó thay vì chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức trung gian với số biến ít hơn. Điều quan trọng là chúng ta phải xác định đúng cách lựa chọn biến mới một cách phù hợp, thông thường ta chọn biến mới là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa hay trung bình bình phương,...vv.

Ví dụ: Cho các số thực $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } F(a, b, c) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Do a, b, c có vai trò bình đẳng, nên không mất tính tổng quát, giả sử:

$$a = \max\{a, b, c\}$$

$$\text{Ta có: } F(a, b, \sqrt{ab}) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+a} = \frac{a}{a+b} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\text{Xét: } F(a, b, c) - F(a, b, \sqrt{ab}) = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} - \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{ab}-c)^2}{(b+c)(c+a)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \geq 0$$

$$\Rightarrow F(a, b, c) \geq F(a, b, \sqrt{ab}) \quad (1)$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{a}{b}} \leq 3$ (do $\frac{1}{3} \leq a, b, c \leq 3$). Khi đó ta có:

$$F(a, b, \sqrt{ab}) - \frac{7}{5} = \frac{a}{a+b} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{7}{5} = \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{2}{x+1} - \frac{7}{5} = \frac{(3-x)[x^2+(1-x^2)]}{5(x^2+1)(x+1)} \geq 0$$

Từ đó kết hợp với (1) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = \left(3; \frac{1}{3}; 1\right)$ và các hoán vị của nó.

3. Bất phương trình một ẩn, tính chất của bất phương trình. Bất phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải

- Bất phương trình ẩn x có dạng $A(x) < B(x)$ (hoặc $A(x) > B(x)$; $A(x) \leq B(x)$; $A(x) \geq B(x)$). Trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x .

- Hai bất phương trình tương đương là hai bất phương trình có cùng một tập hợp nghiệm.

- Quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân:

+ Khi chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia của một bất phương trình, ta phải đổi dấu hạng tử đó.

+ Khi nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải giữ nguyên chiều của bất phương trình nếu số đó dương và đổi chiều của bất phương trình nếu số đó âm.

- Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng: $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$), trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$.

- Bất phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

+ $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$ (Nếu $g(x) > 0$). Trường hợp nếu $g(x) \leq 0$ thì các giá trị của biến x làm cho $g(x) \leq 0$ đều không là nghiệm của bất phương trình.

+ $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$ (Nếu $g(x) \geq 0$). Trường hợp $g(x) < 0$ thì các giá trị của biến x làm cho $g(x) < 0$ đều là nghiệm của bất phương trình.

+ $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x)$; $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$.

Ví dụ: Giải và biện luận bất phương trình $\frac{m(x-1)}{9} - \frac{x+2m}{6} < \frac{x-16}{8}$

Lời giải:

Ta có bất phương trình tương đương với:

$$2m(x-1) - 3(x+2m) < x-16 \Leftrightarrow 2(m-2)x < 8(m-2).$$

Từ đó ta có kết quả biện luận sau:

Nếu $m > 2$, bất phương trình có nghiệm $x < 4$; Nếu $m < 2$, bất phương trình có nghiệm $x > 4$; Nếu $m = 2$, bất phương trình vô nghiệm.

4. Dấu của nhị thức bậc nhất

- Xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ có nghĩa là xét xem với những giá trị nào của biến x thì $ax + b > 0$; với những giá trị nào của biến x thì $ax + b < 0$. Hiển nhiên

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} (a \neq 0).$$

Giá trị $x = -\frac{b}{a}$ gọi là nghiệm của nhị thức bậc nhất $ax + b$.

- Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất: Nhị thức $ax + b (a \neq 0)$ cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức; trái dấu với a với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

- Việc xét dấu của nhị thức bậc nhất có nhiều ứng dụng:

+ Giải bất phương trình tích bằng cách xét dấu các nhân tử của tích. Nếu số nhân tử âm mà chẵn thì tích dương, trái lại tích sẽ âm.

+ Giải bất phương trình thương bằng cách xét dấu của tử thức và mẫu thức. Nếu tử và mẫu cùng dấu thì thương sẽ dương, trái lại thương sẽ âm.

+ Giải phương trình và bất phương trình có chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối bằng cách khử dấu giá trị tuyệt đối nhờ xét từng khoảng giá trị của ẩn.

+ Rút gọn biểu thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối bằng cách khử dấu giá trị tuyệt đối nhờ xét từng khoảng giá trị của biến.

Ví dụ: Giải bất phương trình $\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 7x - 15} > 1$

Lời giải:

Ta có bất phương trình tương đương với:

$$\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 7x - 15} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-7x + 14}{(x + 5)(2x - 3)} > 0$$

Lập bảng xét dấu biểu thức ở vế trái T:

x	-5	1,5	2	
$-7x + 14$	+	+	+	0 -
$x + 5$	-	0 +	+	+
$2x - 3$	-	-	0 +	+
T	+	-	+	0 -

Từ bảng xét dấu, suy ra bất phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x < -5 \\ 1,5 < x < 2 \end{array} \right.$

II. Ví dụ minh họa:

1. Nhận biết

Ví dụ 1: Cho a, b là hai số cùng dấu. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ là:}$$

A.2

B.3

C.4

D.5

Đáp án C

Thật vậy, ta có: $P = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 4 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) = 4 + \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 4$ (Do a, b cùng dấu nên $ab > 0$). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 2: Cho a, b là hai số tùy ý khác 0. Khẳng định nào sai?

A. $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

B. $|a+b| \leq |a| + |b|$

C. $|a-b| \geq |a| - |b|$

D. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Đáp án D

Thật vậy, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ sai khi a, b trái dấu.

2. Thông hiểu

Ví dụ 1: Bất phương trình $\frac{x^2 - 2x - 4}{(x+1)(x-3)} > 1$ có tập nghiệm nguyên dương S là:

A. $S = \{1; 2\}$

B. $S = \{1; 2; 4\}$

C. $S = \{2; 4\}$

D. $S = \{1; 4\}$

Đáp án A

Thật vậy, ĐKXD $x \neq -1; x \neq 3$. Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$\frac{x^2 - 2x - 4}{(x+1)(x-3)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x - 4) - (x^2 - 2x - 3)}{(x+1)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x+1)(x-3)} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0.$$

Lập bảng xét dấu về trái T:

x	-1		3	
$x+1$	-	0	+	+
$x-3$	-		-	0
T	+	0	-	0

Từ bảng xét dấu suy ra $-1 < x < 3$. Do vậy $S = \{1; 2\}$

Ví dụ 2: Phương trình $|x+5| - |1-2x| = x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Có 1 nghiệm **B.** Có 2 nghiệm **C.** Có 3 nghiệm **D.** Có 4 nghiệm

Đáp án B

Lập bảng xét dấu:

x	-5		0,5	
$x+5$	-	0	+	+
$1-2x$	+		+	0

Ta xét từng khoảng giá trị của x :

Nếu $x < -5$ phương trình đã cho trở thành

$$-(x+5) - (1-2x) = x \Leftrightarrow 0.x = 6 \text{ (vô lý). Trường hợp này bị loại}$$

Nếu $-5 \leq x \leq 0,5$ phương trình đã cho trở thành

$$(x+5) - (1-2x) = x \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn } -5 \leq x \leq 0,5)$$

Nếu $x > 0,5$ phương trình đã cho trở thành

$$(x+5) - (2x-1) = x \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn } x > 0,5)$$

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 3\}$.

3. Vận dụng

Ví dụ 1: Cho phương trình $\frac{m}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{2m}{x^2+x}$. Phương trình có nghiệm $x < 3$ khi giá trị của tham số m thỏa mãn:

A. $m > 6$ **B.** $m < 4$ **C.** $\begin{cases} m > 6 \\ m < 4 \end{cases} (m \neq 0)$ **D.** $\begin{cases} m > 6 \\ m < 4 \end{cases} (m \neq 0; m \neq 2)$

Đáp án D.

ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq -1$. Khi đó phương trình trở thành

$$mx + m - 4x = 2m \Leftrightarrow (m - 4)x = m$$

- Nếu $m = 4$ thì $0.x = 4$ (vô lý). Phương trình vô nghiệm.

- Nếu $m \neq 4$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{m}{m-4}$ (với điều kiện $x \neq 0; x \neq -1$)

$$+ \text{ Xét } \frac{m}{m-4} \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$$

$$+ \text{ Xét } \frac{m}{m-4} \neq -1 \Rightarrow m \neq 4 - m \Rightarrow m \neq 2$$

Phương trình có nghiệm $x < 3$ khi và chỉ khi $\frac{m}{m-4} < 3$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{m-4} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{m-3m+12}{m-4} < 0 \Leftrightarrow \frac{6-m}{m-4} < 0 \Leftrightarrow \frac{m-6}{m-4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 4 \end{cases}$$

Kết hợp, ta được phương trình có nghiệm $x < 3$ khi giá trị của tham số m thỏa mãn:

$$\begin{cases} m > 6 \\ m < 4 \end{cases} (m \neq 0; m \neq 2)$$

Ví dụ 2: Cho biểu thức $P = \left(\frac{4x-x^3}{1-4x^2-x} \right) : \left(\frac{4x^2-x^4}{1-4x^2} + 1 \right)$. Các giá trị của biến x làm cho

$P > 0$ là:

A. $0 < x < 1$ **B.** $x < -1$ **C.** $\begin{cases} x < -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} (x \neq 0,5)$ **D.** $0 < x < 1 (x \neq 0,5)$

Đáp án C

Rút gọn biểu thức P , ta được $P = \frac{3x}{1-x^2}$ (ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \pm 0,5$)

Khi đó

Lập bảng xét dấu của biểu thức P :

x	-	-1	-	0	+	1	+
$1-x$	+		+		+	0	-
$1+x$	-	0	+		+		+
P	+		-	0	+		-

Từ bảng xét dấu, kết hợp với điều kiện suy ra $P > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 0 < x < 1 (x \neq 0,5) \end{cases}$

4. Vận dụng nâng cao:

Ví dụ 1: Các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Khẳng định nào đúng?

A. $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \leq -2$

B. $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \leq -1$

C. $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 1$

D. $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0$

Đáp án D

Từ giả thiết suy ra $-1 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 0$

$$\Rightarrow abc + a + b + c + ab + bc + ca \geq 0 \quad (1)$$

Mặc khác hiển nhiên ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c+1)^2 &\geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2(a+b+c+ab+bc+ca) \geq 0 \\ \Rightarrow 2 + 2(a+b+c+ab+bc+ca) &\geq 0 \Rightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0$

Ví dụ 2: Các số thực a, b, c . Thỏa mãn điều kiện $0 \leq a, b, c \leq 1$. Bất đẳng thức nào đúng?

A. $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{2}$

B. $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{3}$

C. $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{4}$

D. $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$

Đáp án D

Đặt $S = a + b + c \geq 0$

- Nếu $S = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. Bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng
- Xét $S > 0$. Ta có:

$$\frac{a}{b+c+1} = \frac{a}{S} \left(\frac{S}{b+c+1} \right) = \frac{a}{S} \left(\frac{b+c+1+a-1}{b+c+1} \right) = \frac{a}{S} \left(1 - \frac{1-a}{b+c+1} \right) = \frac{a}{S} - \frac{a(1-a)}{S(b+c+1)}$$

Hoàn toàn tương tự ta có, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a}{S} - \frac{a(1-a)}{S(b+c+1)} + \frac{b}{S} - \frac{b(1-b)}{S(c+a+1)} + \frac{c}{S} - \frac{c(1-c)}{S(a+b+1)} + (1-a)(1-b)(1-c) \left(\frac{a}{S} + \frac{b}{S} + \frac{c}{S} \right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{S} + \frac{b}{S} + \frac{c}{S} + \frac{a}{S}(1-a) \left[(1-b)(1-c) - \frac{1}{b+c+1} \right] \\ & + \frac{b}{S}(1-b) \left[(1-a)(1-c) - \frac{1}{c+a+1} \right] + \frac{c}{S}(1-c) \left[(1-a)(1-b) - \frac{1}{a+b+1} \right] \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{S}(1-a) \left[(1-b)(1-c) - \frac{1}{b+c+1} \right] + \frac{b}{S}(1-b) \left[(1-a)(1-c) - \frac{1}{c+a+1} \right] \\ & + \frac{c}{S}(1-c) \left[(1-a)(1-b) - \frac{1}{a+b+1} \right] \leq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Ta chứng minh } (1-b)(1-c) - \frac{1}{b+c+1} \leq 0 \quad (3)$$

$$\text{Thật vậy ta có: } (3) \Leftrightarrow (1-b)(1-c)(b+c+1) \leq 1 \quad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm ta có:

$$(3) \Leftrightarrow (1-b)(1-c)(b+c+1) \leq \left(\frac{1-b+1-c+b+c+1}{3} \right)^3 = 1$$

Suy ra (4) được chứng minh. Hay bất đẳng thức (3) được chứng minh. Hoàn toàn tương tự

$$\text{ta có: } \begin{cases} (1-a)(1-c) - \frac{1}{a+c+1} \leq 0 \\ (1-a)(1-b) - \frac{1}{a+b+1} \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Từ (3) và (5) suy ra (2) được chứng minh.

III. Bài tập trắc nghiệm

1. Nhận biết

1. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức đúng?

$(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1 \geq 0$ với mọi a ; $x^5 - y^5 \geq xy^4 - x^4y$ với $x \geq y$; Với a, b, c, d là các số dương sao cho $a > b, c > d$ thì $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$; $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ với $a \geq 0; b \geq 0$.

- A. Có 1 bất đẳng thức đúng B. Có 2 bất đẳng thức đúng
C. Có 3 bất đẳng thức đúng D. Cả 4 bất đẳng thức đều đúng

2. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức sai?

$a^4 + b^4 > 2$ với $a + b > 2$; $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$; với a, b, c là các số dương sao cho $abc = 1$ và $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ thì $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$; với a, b là các số dương thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{4}{a+b}$.

- A. Có 1 bất đẳng thức sai B. Có 2 bất đẳng thức sai
C. Có 3 bất đẳng thức sai D. Cả 4 bất đẳng thức đều sai

3. Cho a, b, c, d là các số dương sao $abcd = 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ad + bc$ là:

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

4. Cho a, b, c là các số dương. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \text{ là:}$$

- A. 3 B. 9 C. 6 D. 12

5. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 - 7x + 11$ là:

- A. $-\frac{5}{4}$ B. $-\frac{5}{2}$ C. $-\frac{7}{4}$ D. $-\frac{7}{2}$

6. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{-5}{x^2 - 4x + 7}$

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{5}{3}$

7. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức đúng?

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4 \geq 2(a + b + c + d)$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2; ab + bc + ca < \frac{1}{2}(a + b + c)^2$$

- A. Có 1 bất đẳng thức đúng
B. Có 2 bất đẳng thức đúng
C. Có 3 bất đẳng thức đúng
D. Cả 4 bất đẳng thức đều đúng

8. Cho $a + b + c + d = 2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là:

- A. 4
B. 2
C. 1
D. 3

9. Bất phương trình $\frac{22x-3}{21} - \frac{5x-2}{7} > \frac{2x+1}{6}$ có tập nghiệm S là:

- A. $s = \{R\}$
B. $S = \{\emptyset\}$
C. $S = \{x \in R; x < 1\}$
D. $S = \{x \in R; x > 1\}$

10. Bất phương trình $\frac{x-1}{5} - \frac{4x+3}{10} < \frac{1-5x}{25}$ có tập nghiệm S là:

- A. $S = \{x \in R; x > 5\}$
B. $S = \{x \in R; x < 5\}$
C. $s = \{R\}$
D. $S = \{\emptyset\}$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	B	C	B	A	D	D	C	B	C

2. Thông hiểu

1. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 2x + 4}$ là:

- A. $\frac{7}{3}$
B. $\frac{9}{4}$
C. 2
D. $\frac{4}{3}$

2. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{6x-8}{x^2+1}$ là:

- A. 2
B. 1
C. $\frac{3}{2}$
D. $\frac{5}{2}$

3. Cho x, y, z là các số dương sao cho $xy + yz + zx = 12$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4$ là:

A.40

B.48

C.44

D. 52

4. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức sai?

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \text{ với } x, y \geq 1; \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca \text{ với } a, b, c > 0;$$

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{1+xyz} \text{ với } x, y, z \geq 1; \frac{a^3}{b} \leq a^2 + ab - b^2 \text{ với } a, b, c > 0$$

A. Có 1 bất đẳng thức sai

B. Có 2 bất đẳng thức sai

C. Có 3 bất đẳng thức sai

D. Cả 4 bất đẳng thức đều sai

5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x nghiệm đúng cả hai bất phương trình sau:

$$\frac{x+24}{5} - \frac{x}{3} > x - \frac{x-2}{2}; \frac{7x+3}{8} + \frac{x-3}{12} \geq 3$$

A. Không có giá trị nào

B. Có 1 giá trị

C. Có 2 giá trị

D. Có 3 giá trị

6. Bất phương trình $\frac{x-15}{73} + \frac{x-13}{71} \leq \frac{x-11}{69} + \frac{x-9}{67}$ có tập nghiệm S là:

A. $S = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -5\}$

B. $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -8\}$

C. $S = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -58\}$

D. $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -85\}$

7. Cho bất phương trình $m(2x-m) \geq 2(x-m)+1$. Bất phương trình có nghiệm với mọi x khi:

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = 3$

D. $m = 4$

8. Cho bất phương trình $m(2-x) + (m-1)^2 > 2x+5$. Bất phương trình vô nghiệm khi:

A. $m = 2$

B. $m = -2$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

9. Cho bất phương trình $(m^2 - m - 1)x - 5m > (3 - m)x$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu kết quả đúng?

Nếu $m = 2$ thì bất phương trình vô nghiệm; Nếu $m = -2$ thì bất phương trình có nghiệm với mọi x; Nếu $|m| > 2$ thì bất phương trình có nghiệm $x > \frac{5m}{m^2 - 4}$; Nếu $|m| < 2$ thì bất phương trình có

nghiệm $x < \frac{5m}{m^2 - 4}$.

A. Có 1 khẳng định đúng

B. Có 2 khẳng định đúng

C. Có 3 khẳng định đúng

D. Cả 4 khẳng định đều đúng

10. Bất phương trình $\frac{4x+3}{2x+1} < 2$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. Có 1 nghiệm nguyên

B. Có 4 nghiệm nguyên

C. Có vô số nghiệm nguyên

D. Không có nghiệm nguyên

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	B	B	A	D	C	A	B	D	C

3. Vận dụng

1. Với x là số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Đáp án nào đúng?

A. $\min P = 2$

B. $\min P = \frac{5}{2}$

C. $\min P = 3$

D. Cả ba đáp án trên đều sai.

2. Với x là số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |x - 2017| - |x - 2018|$

Đáp án nào đúng?

A. $\min P = 2017$

B. $\min P = 0$

C. $\min P = 2018$

D. $\min P = 1$

3. Cho a, b, c là các số thực. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức đúng ?

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca ; a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab - bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 > 2(ab + bc - ca) ; a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(-ab + bc + ca)$$

A. Có một bất đẳng thức đúng

B. Có hai bất đẳng thức đúng

C. Có ba bất đẳng thức đúng

D. Cả bốn bất đẳng thức đều đúng.

4. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu kết quả đúng? Với mọi số nguyên dương n, ta luôn

có: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$; Với mọi số nguyên dương n, ta luôn có:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 3; \quad \text{Tồn tại số nguyên dương } n, \text{ sao cho:}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} > \frac{5}{2}.$$

- A.** Có một khẳng định đúng **B.** Có hai khẳng định đúng
C. Có ba khẳng định đúng **D.** Cả bốn khẳng định đều đúng.

5. Cho a, b, c là các số thực dương. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức sai?

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}; \quad \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{abc};$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{9abc}{2(ab+bc+ca)}; \quad \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \leq \frac{9abc}{2(ab+bc+ca)}.$$

- A.** Có một bất đẳng thức sai **B.** Có hai bất đẳng thức sai
C. Có ba bất đẳng thức sai **D.** Cả bốn bất đẳng thức đều sai.

6. Cho $a+b \geq 0$. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức đúng?

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \sqrt[n]{a^n b^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- A.** Có một bất đẳng thức đúng **B.** Có hai bất đẳng thức đúng.
C. Có ba bất đẳng thức đúng **D.** Cả bốn bất đẳng thức đều đúng.

7. Các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}. \text{ Đáp án nào đúng?}$$

- A.** $\min P = 1$ **B.** $\dots$ **C.** $\min P = \frac{3}{4}$ **D.** $\min P = \frac{4}{3}$

8. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn điều kiện: $a+b = \frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b}$. Đáp án nào đúng?

A. $\min P = \frac{2}{3}; \max P = \frac{3}{2}$

B. $\min P = \frac{2}{3}; \max P = 2$

C. $\min P = \frac{1}{3}; \max P = \frac{2}{3}$

D. $\min P = \frac{2}{3}; \max P = 1$

9. Cho bất phương trình $(m-2)x + \frac{mx+2}{m} > \frac{3}{m} - 2x$. Khẳng định nào sai?

A. Nếu $m = -1$ thì phương trình có nghiệm với mọi x

B. Nếu $m < -1$ thì bất phương trình có nghiệm $x < \frac{1}{m(m+1)}$

C. Nếu $m > -1$ thì bất phương trình có nghiệm $x > \frac{1}{m(m+1)}$

D. Nếu $m > -1 (m \neq 0)$ thì bất phương trình có nghiệm $x > \frac{1}{m(m+1)}$

10. Hai bất phương trình $m(x+3) \leq x+5$; $m(x+2)-3 \geq x$ có đúng một nghiệm chung khi:

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = -1$

D. $m = -2$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	D	D	B	A	A	C	D	C	B

4. Vận dụng nâng cao

1. Có bao nhiêu bộ số tự nhiên $(a_1; a_2; \dots; a_{2017})$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{2017} \geq 2017^2 \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2017}^2 \leq 2017^3 + 1 \end{cases}$$

A. Có 1 bộ

B. Có 2 bộ

C. Có 3 bộ

D. Có 4 bộ

2. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x + \sqrt{x+yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{y+zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{z+xy}}. \text{ Đáp án nào đúng?}$$

A. $\max P = \frac{1}{2}$

B. $\max P = 2$

C. $\max P = 1$

D. $\max P = \frac{1}{3}$

3. Cho a, b, c là các số lượng, thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}$. Đáp án nào đúng?

- A.** $\min P = 1$ **B.** $\min P = 2$ **C.** $\min P = 3$ **D.** $\min P = 4$

4. Cho a, b, c, d là các số dương. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức đúng?

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geq 1;$$

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geq 1 + \frac{(a-c)^2}{(a+b+c+d)^2};$$

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geq 1 + \frac{(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2};$$

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geq 1 + \frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}$$

- A.** Có một bất đẳng thức đúng **B.** Có hai bất đẳng thức đúng
C. Có ba bất đẳng thức đúng **D.** Cả bốn bất đẳng thức đều đúng.

5. Cho x, y, z là các số thực không âm và các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $0 < a \leq b \leq c$. Bất đẳng thức nào đúng ?

A. $(ax + by + cz) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \geq \frac{(a+c)^2}{ac} (x+y+z)^2$

B. $(ax + by + cz) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \geq \frac{(a+c)^2}{2ac} (x+y+z)^2$

C. $(ax + by + cz) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \leq \frac{(a+c)^2}{4ac} (x+y+z)^2$

D. $(ax + by + cz) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \leq \frac{4ac}{(a+c)^2} (x+y+z)^2$

6. Với số nguyên dương $n \geq 2$. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức đúng?

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right); n(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n};$$

$$n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)$$

- A.** Không có bất đẳng thức nào đúng **B.** Có một bất đẳng thức đúng
C. Có hai bất đẳng thức đúng **D.** Cả ba bất đẳng thức đều đúng

7. Các số thực $a, a, \dots, a$, thỏa mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 3$. Bất đẳng thức nào đúng?

- A.** $\left| \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} \right| < \sqrt{2}$ **B.** $\left| \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\left| \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} \right| \geq \sqrt{2}$ **D.** $\left| \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} \right| \geq \sqrt{3}$

8. Cho các Số dương a, b thỏa mãn điều kiện: $ab + 4 \leq 2b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = \frac{ab}{a^2 + 2b^2}$. Đáp án nào đúng?

- A.** $\max P = \frac{4}{33}$ **B.** $\max P = \frac{33}{4}$
C. $\max P = \frac{2}{33}$ **D.** $\max P = \frac{33}{2}$

9. Các số thực a, b thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a + b \geq 1 \\ a > 0 \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{8a^2 + b}{4a} + b^2$. Đáp án nào đúng?

- A.** $\min P = \frac{2}{3}$ **B.** $\min P = \frac{3}{2}$ **C.** $\min P = \frac{3}{4}$ **D.** $\min P = \frac{4}{3}$

10. Cho các số dương x, y thỏa mãn điều kiện: $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{y^2} \right)^2$. Đáp án nào đúng?

- A.** $\min P = \frac{8}{289}$ **B.** $\min P = \frac{289}{6}$ **C.** $\min P = \frac{6}{289}$ **D.** $\min P = \frac{289}{6}$

11. Cho các số dương $a, b, c > \frac{25}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{a}{2\sqrt{b}-5} + \frac{b}{2\sqrt{c}-5} + \frac{c}{2\sqrt{a}-5}$. Đáp án nào đúng?

- A.** $\min P = 51$ **B.** $\min P = 52$ **C.** $\min P = 15$ **D.** $\min P = 25$

12. Cho $x_1, x_2 > 0$; $x_1y_1 - z_1^2 > 0$; $x_2y_2 - z_2^2 > 0$. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức đúng?

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 > 0; \quad 4(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 > 0;$$

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

- A. Không có bất đẳng thức nào đúng B. Có một bất đẳng thức đúng
C. Có hai bất đẳng thức đúng D. Cả ba bất đẳng thức đều đúng

13. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên dương phân biệt. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ B. $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$
C. $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ D. $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$

14. Cho các số thực $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Bất đẳng thức nào đúng?

- A. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq \frac{7}{6}$ B. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq \frac{8}{7}$
C. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}$ D. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{4}$

15. Bất phương trình $[x] \cdot \{x\} < 2(x - 2)$ có nghiệm là:

- A. $x \geq 3$ B. $x \leq 4$ C. $x \geq 4$ D. $x \leq 3$

Trong đó $[x]$, $\{x\}$ tương ứng là phần nguyên và phần lẻ của x .

16. Phương trình $[6x - 5] = 2x + 3$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Vô nghiệm B. có 1 nghiệm
C. Có 2 nghiệm D. Có vô số nghiệm

17. Phương trình $\left[\frac{6x+5}{8}\right] = \frac{15x-4}{5}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Vô nghiệm B. có 1 nghiệm
C. Có 2 nghiệm D. Có vô số nghiệm.

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	C	C	D	C	D	A	A	B	D
Câu	1	2	3	4	5	6	7			
Đáp án	C	D	A	C	A	B	C			

Chủ đề 5. TỨ GIÁC**I. Kiến thức cơ bản****1. Tứ giác**

- Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA. Trong đó bất kỳ hai đoạn thẳng nào cũng không nằm trên một đường thẳng.
- Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác. Từ nay, khi nói đến tứ giác mà không nói gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.
- Tổng các góc của một tứ giác bằng 360^0 .
- Tổng bốn góc ngoài ở bốn đỉnh của một tứ giác bằng 360^0 .
- Đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau của tứ giác được gọi là đường chéo của tứ giác (Một tứ giác có hai đường chéo),

2. Hình thang, hình thang cân, hình thang vuông

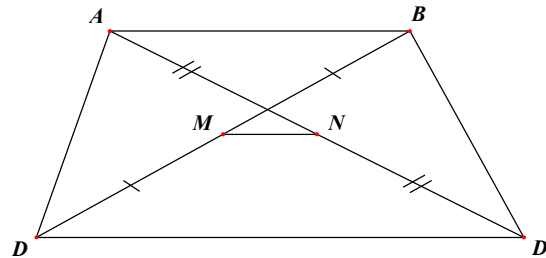
- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song. Hai cạnh song song được gọi là hai đáy, hai cạnh còn lại gọi là cạnh bên.
- Hình thang vuông là hình thang có một cạnh bên vuông góc với hai đáy.
- Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.
- Tính chất của hình thang cân:
 - + Hai cạnh bên bằng nhau
 - + Hai đường chéo bằng nhau
- Dấu hiệu nhận biết hình thang cân:
 - + Theo định nghĩa (Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau)
 - + Hình thang có hai đường chéo bằng nhau.

3. Đường trung bình của tam giác, đường trung bình của hình thang

- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai cạnh đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.
- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác
- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh đó.
- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.
- Trong hình thang có hai cạnh bên không song song, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo thì song song với hai đáy và bằng một nửa hiệu đáy lớn và đáy nhỏ.

Ta có: $MN \parallel AB \parallel CD$ và $MN = \frac{CD - AB}{2}$.



4. Dựng hình bằng thước và compa.

Dựng hình thang

- Dụng cụ dựng hình: Thước và compa
- Các bước giải một bài toán dựng hình (gồm 4 bước)

+ Phân tích $\longrightarrow$ Cách dựng $\longrightarrow$ Chứng minh $\longrightarrow$ Biện luận

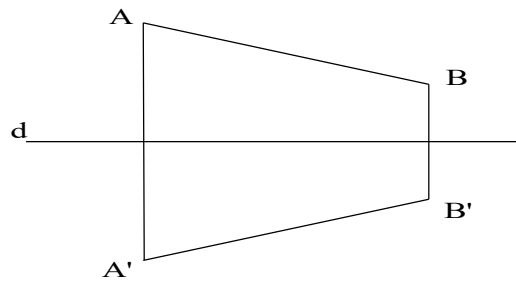
- Trong bước phân tích, ta giả sử đã dựng được hình thỏa mãn đề bài. Trên cơ sở đó xét xem bộ phận nào (đoạn thẳng, tam giác,...) dựng được ngay, bộ phận nào còn phải xác định thường được quy về việc xác định một điểm thỏa mãn hai điều kiện. Ứng với mỗi điều kiện, điểm phải tìm nằm trên một đường nào đó. Giao điểm của hai đường ấy là điểm cần tìm.
- Trong bước biện luận ta phải xét xem với điều kiện nào của các yếu tố đã cho thì dựng được hình và khi đó dựng được bao nhiêu hình.
- Nếu bài toán cho dựng hình về kích thước, không yêu cầu chỉ là vị trí của hình phải dựng thì hai hình bằng nhau chỉ coi là một nghiệm hình.
- Dựng tam giác cần biết 3 yếu tố của nó, trong đó có ít nhất là một yếu tố về độ dài.
- Dựng hình thang cần biết 4 yếu tố của nó (cạnh, góc, đường chéo,...), trong đó góc cho trước không được quá 2.

Đối xứng trục

- Hai điểm A và A' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d, nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng AA'.

Quy ước: Nếu điểm $A \in d$ thì điểm đối xứng với A qua d chính là A.

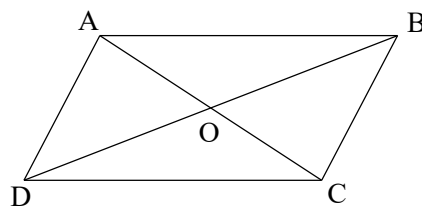
- Hai hình F và F' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d, nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua d với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.
- Hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng với nhau qua đường thẳng d, nếu A đối xứng với A'; B đối xứng với B' qua d.



- Hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng với nhau qua đường thẳng d, nếu A đối xứng với A'; B đối xứng với B'; C đối xứng với C' qua đường thẳng d.
- Nếu hai đoạn thẳng (hai góc, hai tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.
- Đường thẳng d là trục đối xứng của hình F, nếu điểm đối xứng qua d của mỗi điểm thuộc hình F cũng thuộc hình F. Đặc biệt, đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của một hình thang cân là trục đối xứng của nó.
- Hai đường thẳng a và a' đối xứng với nhau qua đường thẳng d, nếu hai điểm của đường thẳng này đối xứng với hai điểm của đường thẳng kia qua đường thẳng d
- Một bình có thể không có, có 1, có nhiều hoặc có vô số trục đối xứng.
- Nếu ba điểm A, M, B thẳng hàng (M nằm giữa A và B) và A', M', B' lần lượt là ba điểm đối xứng của chúng qua đường thẳng d thì ba điểm A', M', B' thẳng hàng (M' nằm giữa A' và B').

6. Hình bình hành

- Hình bình hành là hình tứ giác có các cặp cạnh đối song song.



$$ABCD \text{ là hình bình hành } \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases}$$

- Tính chất của hình bình hành: Nếu ABCD là hình bình hành, thì Các cạnh đối bằng nhau; Các góc đối bằng nhau; Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- Dấu hiệu nhận biết: Tứ giác ABCD là hình bình hành, nếu có một trong các điều kiện sau
 - + Các cạnh đối song song (theo định nghĩa); Các cạnh đối bằng nhau
 - + Các góc đối bằng nhau; Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

+ Một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

7. Đối xứng tâm

- Hai điểm A và A' gọi là đối xứng nhau qua điểm O, nếu O là trung điểm của đoạn thẳng AA'.

Quy ước: Điểm đối xứng của O qua O cũng là O.

- Hai hình F và F' gọi là đối xứng với nhau qua điểm O, nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua O với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.

+ Hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng với nhau qua tâm O, nếu A đối xứng với A'; B đối xứng với B' qua O.

+ Hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng với nhau qua tâm O, nếu A đối xứng với A'; B đối xứng với B'; C đối xứng với C qua O.

- Hai đoạn thẳng (hai góc, hai tam giác) đối xứng với nhau qua tâm O thì chúng bằng nhau.

- Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình F, nếu điểm đối xứng qua O của mỗi điểm thuộc hình F cũng thuộc hình F. Đặc biệt, hình bình hành nhận giao điểm hai đường chéo làm tâm đối xứng của hình.

- Nếu hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng qua tâm O (O nằm ngoài đường thẳng AB, A'B') thì $AB \parallel A'B'$ và AB ngược chiều với A'B'.

- Hai đường thẳng a và a' đối xứng với nhau qua tâm O, nếu hai điểm của đường thẳng này đối xứng với hai điểm của đường thẳng kia qua O

- Một hình có thể không có, có một, có nhiều hoặc có vô số tâm đối xứng.

- Nếu ba điểm A, M, B thẳng hàng (M nằm giữa A và B) và A', M', B' lần lượt là ba điểm đối xứng của chúng qua O thì ba điểm A', M', B' thẳng hàng (M' nằm giữa A' và B').

8. Hình chữ nhật

- Hình chữ nhật là hình tứ giác có 4 góc vuông.

Như vậy, hình chữ nhật cũng là hình bình hành, hình thang cân.

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân.

Như vậy, hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau.

- Dấu hiệu nhận biết:

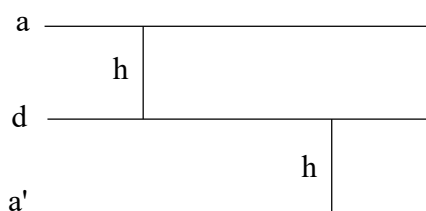
+ Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật

+ Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.

- + Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật
- + Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
- Áp dụng vào tam giác vuông:
- + Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
- Đảo lại, nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng một nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.
- Hình chữ nhật có một tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo
- Hình chữ nhật có hai trục đối xứng là hai đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối.

9. Tính chất về khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

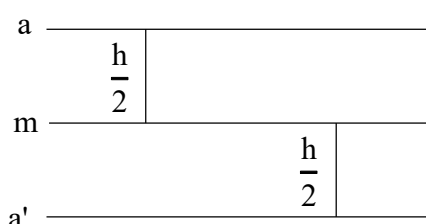
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- Các điểm cách đường thẳng d một khoảng bằng h , nằm trên hai đường thẳng song song với d và cách d một khoảng bằng h .



Như vậy, tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h .

- Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau. Đảo lại, nếu các đường thẳng song song cắt các đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

- Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau và cách nhau một khoảng bằng h . Các điểm cách đều a và b nằm trên đường thẳng m song song với a và b và cách hai đường thẳng đó một khoảng $\frac{h}{2}$.



10. Hình thoi và hình vuông

- Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

Từ đó suy ra:

- Hình thoi cũng là hình bình hành.
- Hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.
- Tính chất:
 - + Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành, ngoài ra còn có: hai đường chéo vuông góc với nhau; hai đường chéo là đường phân giác của các góc của hình thoi.
 - + Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.
- Dấu hiệu nhận biết hình thoi:
 - + Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
 - + Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
 - + Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi
 - + Hình bình hành có một đường chéo là tia phân giác của một góc là hình thoi
- Dấu hiệu nhận biết hình vuông:
 - + Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông
 - + Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông.
 - + Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
 - + Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
 - + Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.
- Trong hình thoi, hai đường chéo là hai trục đối xứng, giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng
- Hình vuông cạnh a có độ dài đường chéo là $a\sqrt{2}$

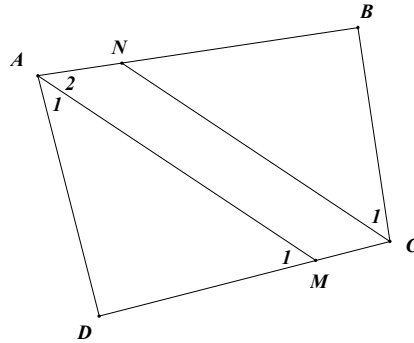
II. Ví dụ minh họa

1. Nhận biết

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Vẽ các đường phân giác của góc A và góc C. Cho biết hai đường phân giác này không trùng nhau. Khi đó góc giữa hai đường phân giác bằng:

- A. 30° B. 90° C. 0° D. 45°

Đáp án C



Gọi M là giao điểm của tia phân giác góc A với CD, N là giao điểm của tia phân giác góc C với AB. Tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$

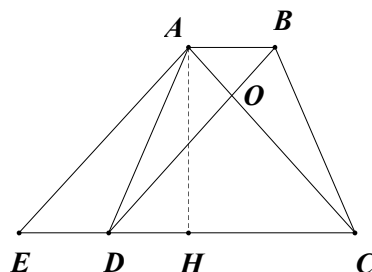
Suy ra $\widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. Mặt khác $\widehat{A}_1 + \widehat{M}_1 = 90^\circ$ (vì tam giác ADM vuông tại D). Từ đó suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{M}_1 \Rightarrow AM \parallel CM$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau)

Vậy góc giữa hai đường phân giác bằng 0°

Ví dụ 2: Cho hình thang cân ABCD (AB//CD) có hai đường chéo vuông góc và đường cao AH = h. Khi đó tổng S của hai đáy là: $S = 2h$

- A. $S = 2h$ B. $S = 3h$ C. $S = \frac{5}{2}h$ D. $S = \frac{7}{2}h$

Đáp án A



Vẽ $AE \parallel BD$ ($E \in CD$). Vì $AC \perp BD$ (theo gt), nên $AC \perp AE$ (quan hệ giữa tính song song và vuông góc)

Ta có $AE = BD$, $AB = DE$ (tính chất đoạn chắn) ; $AC = BD$ (tính chất đường chéo hình thang cân). Suy ra $AC = AE$

Vậy tam giác AEC vuông cân tại A, do đó đường cao AH cũng là đường trung tuyến. Suy ra $EC = AB + CD = 2AH = 2h$

2. Thông hiểu

Ví dụ 1: Tứ giác ABCD có $AD = AB = BC \neq CD$ và $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả sai? Tia DB là tia phân giác của góc D; tứ giác ABCD là hình thang cân; tứ giác ABCD là hình bình hành; tứ giác ABCD là hình thang vuông.

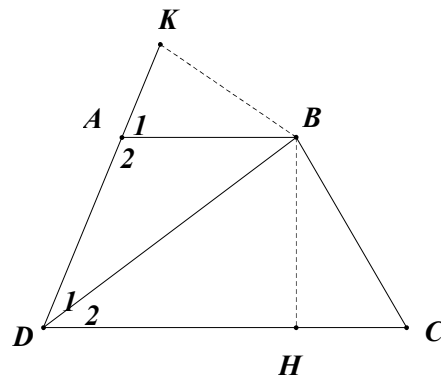
A. Có 1 kết quả sai

B. Có 2 kết quả sai

C. Có 3 kết quả sai

D. Có 4 kết quả sai

Đáp án B



Vẽ $BH \perp CD, BK \perp AD$. Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{C}$ (cùng bù với $\widehat{A}_2$). Từ đó suy ra $\triangle BHC = \triangle BKA \Rightarrow BH = BK$. Suy ra DB là tia phân giác của góc D. Góc A_1 là góc ngoài tại đỉnh A của tam giác cân ADB, nên $\widehat{A}_1 = 2\widehat{D}_1 \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{ADC} \Rightarrow AB \parallel CD$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau). Vậy tứ giác ABCD là hình thang. Hình thang này có $\widehat{ADC} = \widehat{C}$ (vì cùng bằng $\widehat{A}_1$) nên là hình thang cân.

Ví dụ 2 : Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đáp án nào đúng ?

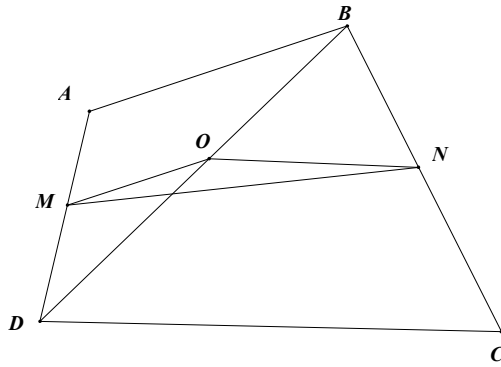
A. $MN = \frac{AB + CD}{2}$

B. $MN = \frac{AB + BC + CD + DA}{4}$

C. $MN \leq \frac{AB + CD}{2}$

D. $MN \geq \frac{AB + CD}{2}$

Đáp án C



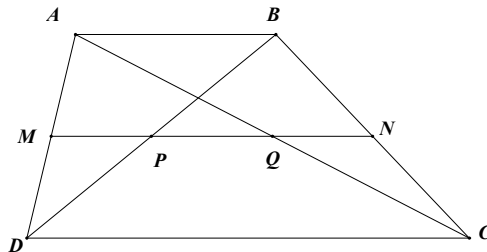
Gọi O là trung điểm của BD. Khi đó các đoạn thẳng OM, ON lần lượt là đường trung bình của tam giác DAB và BDC. Từ đó, ta có $MN < MO + ON = \frac{AB + CD}{2}$

B. Vận dụng :

Ví dụ 1 : Cho hình thang ABCD (đáy AB nhỏ hơn đáy CD). Biết rằng, hai đường chéo của hình thang chia đường trung bình của nó thành ba phần bằng nhau. Khi đó, ta có:

- A.** $CD = 3AB$ **B.** $CD = \frac{3}{2}AB$ **C.** $CD = \frac{5}{2}AB$ **D.** $CD = 2AB$

Đáp án D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

MN cắt BD tại P, cắt AC tại Q. Do MN là đường trung bình của hình thang, nên $MN \parallel AB \parallel CD$.

Xét tam giác ABD có $MA = MD$, $MP \parallel AB$ nên $PB = PD$. Tương tự $QA = QC$.

Ta có MP, NQ lần lượt là đường trung bình của các tam giác DAB và CAB nên $MP = NQ = \frac{AB}{2}$. Mặt khác, theo tính chất của hình thang ta có: $PQ = \frac{CD - AB}{2}$

Do $MP = PQ = QN$ (theo gt), nên ta có: $\frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2} \Rightarrow CD = 2AB$

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của MC, MD, NA, NB. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu kết quả

đúng? Các đoạn thẳng EF, GH cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường; Các đoạn thẳng EF, MN cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường; Các đoạn thẳng MN, GH cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường; Các đoạn thẳng EF, GH, MN cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

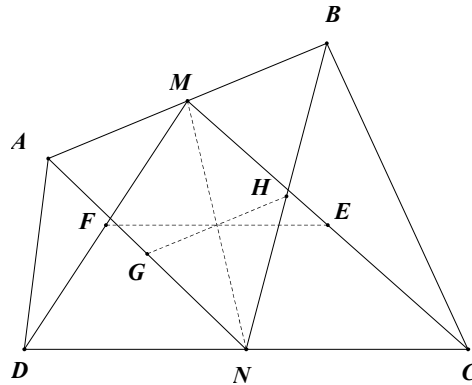
A. Có 1 kết quả đúng

B. Có 2 kết quả đúng

C. Có 3 kết quả đúng

D. Có 2 kết quả đúng

Đáp án D



Ta có NE là đường trung bình của tam giác CDM, nên $NE \parallel MD$ và $NE = \frac{1}{2}MD = FM$. Tứ giác MENF có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau, nên nó là hình bình hành. Tương tự, tứ giác MHNG cũng là hình bình hành. Hai hình bình hành MENF và MHNG có chung đường chéo MN nên các đường chéo EF, GH, MN đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường.

4. Vận dụng nâng cao

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC có $BC = a$, các đường trung tuyến BD, CE. Lấy các điểm M, N trên cạnh BC sao cho $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Khi đó độ dài của đoạn thẳng IK là :

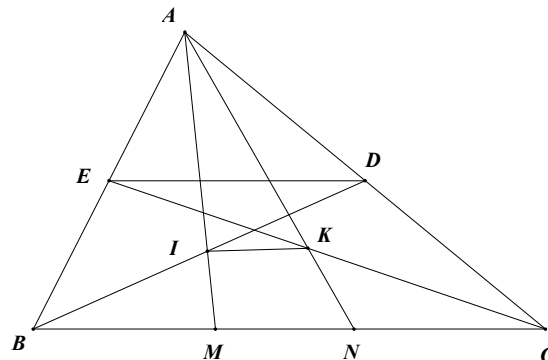
A. $IK = \frac{a}{2}$

B. $IK = \frac{a}{4}$

C. $IK = \frac{a}{3}$

D. $IK = \frac{a}{5}$

Đáp án B



Ta có DN là đường trung bình của tam giác ACM nên $DN \parallel AM$

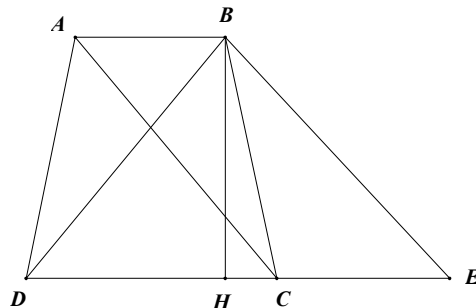
Tam giác BND có $BM=MN$, $MI \parallel ND$ nên I là trung điểm của BD. Tương tự K là trung điểm của CE. Hình thang BEDC có I, K là trung điểm của hai đường chéo.

$$\text{Từ đó, ta được: } IK = \frac{BC - ED}{2} = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$$

Ví dụ 2: Một hình thang cân có đường cao bằng nửa tổng hai đáy. Khi đó góc giữa hai đường chéo của hình thang bằng bao nhiêu?

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 45°

Đáp án C



Xét hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$), đường cao BH và $BH = \frac{AB + CD}{2}$

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC tại E

Ta có $BE = AC$, $AC = BD$ nên $BE = BD$. Tam giác BDE cân tại B, đường cao BH cũng là đường trung tuyến, nên $DH = HE = \frac{DE}{2}$

Ta có $AB = CE$ nên $AB + CD = CE + CD = DE$

Từ các kết quả trên, suy ra $BH = DH = HE$

Các tam giác BHD, BHE vuông cân tại B nên $\widehat{DBE} = 90^\circ$

Ta có : $DB \perp BE$, $AC \parallel BE$ nên $DB \perp AC$

Vậy góc giữa hai đường chéo của hình thang bằng 90°

III. Bài tập trắc nghiệm

1. Nhận biết :

1. Tứ giác ABCD có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, $CB = CD$. Khẳng định nào đúng ?

- A. AC là tia phân giác của góc C
 B. Đường thẳng AC là trục đối xứng của tứ giác ABCD
 C. AC vừa là tia phân giác của góc C, vừa là tia phân giác của góc A
 D. AC là tia phân giác của góc A

2. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), có $AB = \frac{1}{2}CD$. Gọi H là hình chiếu của D trên AC, M là trung điểm của HC. Khi đó đáp án nào đúng?

- A. $\widehat{BMD} = 90^\circ$ B. $\widehat{BMD} = 60^\circ$ C. $\widehat{BMD} = 30^\circ$ D. $\widehat{BMD} = 120^\circ$

3. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} - \widehat{B} = 50^\circ$. Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau tại I và $\widehat{CID} = 115^\circ$. Khi đó các góc A và B có độ lớn là:

- A. $\begin{cases} \widehat{A} = 130^\circ \\ \widehat{B} = 90^\circ \end{cases}$ B. $\begin{cases} \widehat{A} = 140^\circ \\ \widehat{B} = 90^\circ \end{cases}$ C. $\begin{cases} \widehat{A} = 130^\circ \\ \widehat{B} = 100^\circ \end{cases}$ D. $\begin{cases} \widehat{A} = 140^\circ \\ \widehat{B} = 100^\circ \end{cases}$

4. Cho tứ giác ABCD có M là giao điểm của hai đường chéo. Gọi p là nửa chu vi của tứ giác. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu khẳng định sai?

$$MA + MB + MC + MD < 2p; MA + MB + MC + MD > p;$$

$$MA + MB + MC + MD < \frac{2}{3}p; MA + MB + MC + MD > \frac{5}{2}p.$$

- A. Có 1 khẳng định sai B. Có 2 khẳng định sai
 C. Có 3 khẳng định sai D. Có 4 khẳng định đều sai

5. Cho tứ giác ABCD có chu vi của tam giác ABD không lớn hơn chu vi của tam giác ACD. Kết quả nào sau đây là đúng?

- A. $AB < AC$ B. $AB = AC$ C. $AB > 2AC$ D. $AB = 2AC$

6. Cho một hình thang có hai đáy không bằng nhau. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả sai?

Tổng hai góc kề đáy nhỏ lớn hơn tổng hai góc kề đáy lớn; tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai đáy; hai đường chéo luôn vuông góc; tổng hai góc đối diện bằng 180°

- A. Có 1 khẳng định sai B. Có 2 khẳng định sai
 C. Có 3 khẳng định sai D. Có 4 khẳng định đều sai

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	D	A	B	B	A	B

2. Thông hiểu

1. Tìm quan hệ giữa b và c , biết rằng dựng được duy nhất tam giác ABC thỏa mãn các điều kiện: $AC = b$; $AB = c$; $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha < 180^\circ$. Đáp án nào đúng?

- A. $b > 2c$ B. $b > c$ C. $b < c$ D. $b < \frac{c}{2}$

2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM có độ dài là:

- A. 2 cm B. 3 cm C. $\sqrt{7}$ cm D. $\sqrt{5}$ cm

3. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc, $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $AD = 4$ cm. Khi đó độ dài cạnh CD là:

- A. $CD = 2$ cm B. $CD = 1$ cm C. $CD = 4$ cm D. $CD = 3$ cm

4. Tứ giác ABC có O là giao điểm của hai đường chéo, $AB = 6$ cm, $OA = 8$ cm, $OB = 4$ cm, $OD = 6$ cm. Khi đó, độ dài cạnh AD là:

- A. $AD = 12$ cm B. $AD = 13$ cm C. $AD = \sqrt{166}$ cm D. $AD = \sqrt{155}$ cm

5. Hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 11$ cm, $AD = 12$ cm, $BC = 13$ cm. Khi đó, đường chéo AC có độ dài là:

- A. $AC = 10$ cm B. $AC = 15$ cm C. $AC = 25$ cm D. $AC = 20$ cm

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	B	C	B	C	D

3. Vận dụng

1. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với d . Gọi A_1 ; B_1 lần lượt là điểm đối xứng của A, B qua đường thẳng d . Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng?

Điểm C thuộc d sao cho $AC + CB$ có độ dài nhỏ nhất là giao điểm của AB_1 với đường thẳng d ;
điểm C thuộc d sao cho $AC + CB$ có độ dài nhỏ nhất là giao điểm của BA_1 với đường thẳng d ;
điểm C thuộc d sao cho $AC + CB$ có độ dài nhỏ nhất là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d ;
điểm C thuộc d sao cho $AC + CB$ có độ dài nhỏ nhất là hình chiếu của điểm B lên đường thẳng d .

- A. Có 1 kết quả đúng B. Có 2 kết quả đúng
C. Có 3 kết quả đúng D. Cả 4 kết quả đều đúng.

2. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm D trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt các đường thẳng AB, AC ở E, F. Vẽ các hình chữ nhật BDEH, CDFK. Đáp án nào sau đây đúng?

- A. $AH = AK$ B. $AH = 2AK$ C. $AH = \frac{1}{2}AK$ D. $AH = \frac{3}{2}AK$

3. Cho hình bình hành ABCD, các đường cao AE, AF. Cho biết $AC = 25$ cm; $EF = 24$ cm. Khi đó khoảng cách d từ A đến trực tâm của tam giác AEF là:

- A. $d = 6$ cm B. $d = 7$ cm C. $d = 5$ cm D. $d = 8$ cm

4. Tứ giác ABCD có $\widehat{C} = 40^\circ$; $\widehat{D} = 80^\circ$, $AD = BC$. Gọi E, F là trung điểm của AB và CD. Đáp án nào đúng?

- A. $\widehat{EFD} = 50^\circ$ B. $\widehat{EFD} = 60^\circ$ C. $\widehat{EFD} = 70^\circ$ D. $\widehat{EFD} = 80^\circ$

5. Cho tam giác ABC, trọng tâm G, d là đường thẳng nằm ngoài tam giác. Gọi A', B', C', G' là hình chiếu của A, B, C, G trên d. Đáp án nào đúng?

- A. $AA' + BB' + CC' = 3 GG'$ B. $AA' + BB' + CC' = 6 GG'$
C. $AA' + BB' + CC' = 2 GG'$ D. $AA' + BB' + CC' = 4 GG'$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	B	A	B	C	A

4. Vận dụng nâng cao

1. Gọi M là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các hình vuông AMCD, BMEF. Gọi H là giao điểm của AE và BF. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng?

Ba điểm D, H, F thẳng hàng; $AE \perp BF$; đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AB cố định; $\widehat{DMF} = 90^\circ$

- A. Có 1 kết quả đúng B. Có 2 kết quả đúng
C. Có 3 kết quả đúng D. Cả 4 kết quả đều đúng.

2. Cho tứ giác ABCD, E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, F là giao điểm của các đường thẳng BC và AD. Các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau tại I. Đáp án nào đúng?

- A. $\widehat{EIF} = \frac{\widehat{BAD} + \widehat{BCD}}{3}$ B. $\widehat{EIF} = \frac{\widehat{BAD} + \widehat{BCD}}{2}$

C. $\widehat{EIF} = \frac{2(\widehat{BAD} + \widehat{BCD})}{3}$

D. $\widehat{EIF} = \frac{3(\widehat{BAD} + \widehat{BCD})}{5}$

3. Trên đoạn thẳng AB lấy các điểm M và N (M nằm giữa A và N). Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMD, MNE, BNF. Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF, h là khoảng cách từ G đến AB. Khẳng định nào đúng?

A. $h = \frac{AB}{6}$

B. $h = \frac{AB}{4}$

C. $h = \frac{\sqrt{3}}{6} AB$

D. $h = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$

4. Cho tam giác nhọn ABC (không phải là tam giác đều), trực tâm H; M là trung điểm của BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F. Trên tia đối của tia HC, lấy điểm D sao cho HD = HC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. HE = 2HF

B. $BD \perp EF$

C. $BA \perp HD$

D. HE = HF

5. Tứ giác ABCD có B và C nằm trên đường tròn có đường kính là AD. Biết AD = 8 cm, AB = BC = 2 cm. Khi đó, độ dài CD là:

A. CD = 5 cm

B. CD = 6 cm

C. CD = 7 cm

D. CD = 8 cm

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	D	B	C	A	C

CHỦ ĐỀ 6. ĐA GIÁC, DIỆN TÍCH CỦA ĐA GIÁC

I. Kiến thức cơ bản

1. Đa giác, đa giác đều

- Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.
- Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.
- Tổng các góc trong của đa giác n cạnh là $(n - 2).180^0$
- Số đường chéo của một đa giác n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$
- Tổng các góc ngoài của đa giác n cạnh là 360^0 (tại mỗi đỉnh chỉ có một góc ngoài)
- Trong một đa giác đều, giao điểm O của hai đường phân giác của hai góc là tâm của đa giác đều. Tâm O cách đều các đỉnh, cách đều các cạnh của đa giác đều. Có một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh của đa giác đều, gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.
- Trong một đa giác đều, số đo của mỗi góc là $180^0 - \frac{360^0}{n} = \frac{n-2}{n}.180^0$ (do vậy, số đo mỗi góc ngoài là $\frac{360^0}{n}$)

2. Diện tích hình chữ nhật, hình vuông

- Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích của đa giác là một số dương có các tính chất sau;
- + Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- + Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
- + Hình vuông có độ dài cạnh bằng 1 thì có diện tích là 1.
- Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó.
- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó.
- Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.
- Hai hình chữ nhật có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.

3. Diện tích hình tam giác, hình thang, hình bình hành.

- Diện tích tam giác bằng nửa tích một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.

- Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao.
- Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.
- Tam giác đều cạnh a có diện tích là $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (đvdt)
- Hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy ứng với hai chiều cao đó.

4. Diện tích hình tứ giác, diện tích hình đa giác.

- Việc tính diện tích của một hình đa giác bất kì thường được đưa về việc tính diện tích các tam giác (hoặc có khi là tính diện tích hình thang)
- Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích độ dài hai đường chéo. Từ đó ta có, diện tích hình thoi bằng nửa tích độ dài hai đường chéo.
- Hình vuông có độ dài đường chéo bằng d có diện tích là $\frac{1}{2}d^2$

II. Ví dụ minh họa

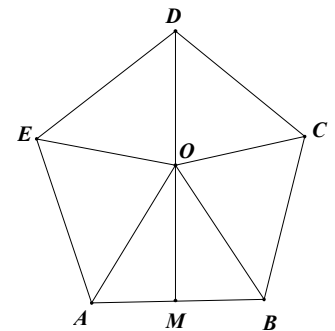
1. Nhận biết

Ví dụ 1: Cho ngũ giác đều ABCDE, $AB = a$. Đường phân giác của các góc A, B cắt nhau tại O. Gọi M là trung điểm của AB. Biết $OM = r$. Khi đó, diện tích S của ngũ giác đều ABCDE là:

- A. $S = 2ar$ B. $S = 3ar$ C. $S = \frac{5}{2}ar$ D. $S = \frac{7}{2}ar$

Đáp án C

Nối O với C, D, E ta có $\triangle AOB = \triangle COB(c.g.c)$. Tương tự các tam giác cân AOB, BOC, COD, DOE, EOA bằng nhau. Suy ra $S = 5S_{AOB} = \frac{5}{2}ar$



Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$. Vẽ $CH \perp AB$. Biết rằng đường chéo AC là đường phân giác của góc A và $CH = a$. Khi đó, diện tích S của tứ giác ABCD là :

- A. $S = 2a^2$ B. $S = a^2$ C. $S = \frac{3}{2}a^2$ D. $S = \frac{1}{2}a^2$

Đáp án B

Vẽ $CK \perp AD$. Tứ giác AHCK có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật. AC là tia phân giác của góc A nên AHCK là hình vuông.

Ta có $\triangle HBC = \triangle KDC(c..g.c)$. Từ đó suy ra $S = S_{ABCD} = S_{AHCK} = a^2$

2. Thông hiểu:

Ví dụ 1: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), hai đường chéo cắt nhau tại O. Biết $S_{AOB} = 9; S_{COD} = 25$, khi đó diện tích S của hình thang ABCD là :

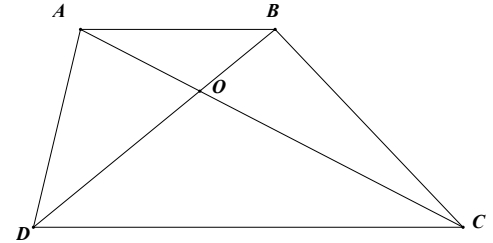
- A. $S = 64$ B. $S = 66$ C. $S = 49$ D. $S = 48$

Đáp án A

Vì $AB \parallel CD$ nên

$$S_{ADC} = S_{BDC} \Rightarrow S_{ADC} - S_{ODC} = S_{BDC} - S_{ODC} \Rightarrow S_{AOC} = S_{BOC}$$

Đặt $S_{AOC} = S_{BOC} = x$. Hai tam giác AOB và COB có cùng chiều cao hạ từ đỉnh B nên $\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \frac{OA}{OC}$.



Tương tự $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{OA}{OC}$. Từ các kết quả trên suy ra $\frac{9}{x} = \frac{x}{25} \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$

(vì $x > 0$). Vậy $S = 9 + 25 + 15 + 15 = 64$

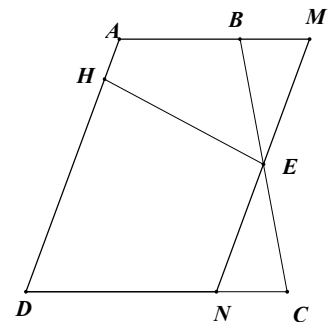
Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD có cạnh bên $AD = a$, khoảng cách từ trung điểm E của BC đến AD bằng h, khi đó diện tích S của hình thang ABCD là:

- A. $S = \frac{1}{2}ah$ B. $S = \frac{3}{2}ah$ C. $S = 2ah$ D. $S = ah$

Đáp án D

Qua E, kẻ đường thẳng song song với AD, cắt AB và CD theo thứ tự tại M và N.

Ta có $\triangle ENC = \triangle EMB (c.g.c)$. Từ đó suy ra $S = S_{AMND} = ah$ (AMND là hình bình hành)

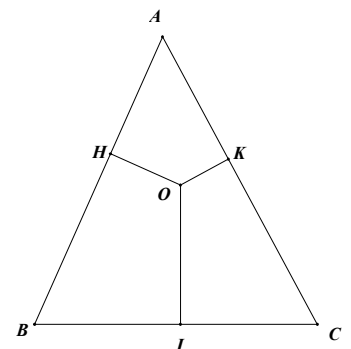


3. Vận dụng

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC có chiều cao là h. Từ một điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OH \perp AB, OI \perp BC, OK \perp CA$. Khẳng định nào đúng?

- A. $OH + OI + OK = 2h$ B. $OH + OI + OK = h$
C. $OH + OI + OK = \frac{1}{2}h$ D. $OH + OI + OK = \frac{3}{2}h$

Đáp án B



Ta có $S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}a.OH + \frac{1}{2}a.OI + \frac{1}{2}a.OK = \frac{1}{2}a.h$

Suy ra $OH + OI + OK = h$

Ví dụ 2: Cho ngũ giác đều ABCE. Gọi giao điểm của AD và CE là F. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu kết quả đúng?

Các đường chéo AC, AD chia góc A thành 3 góc bằng nhau; tứ giác ABCF là hình thoi; $BC \parallel AD$; Số đo mỗi góc của ngũ giác đều là 108°

A. Có 1 kết quả đúng

B. Có 2 kết quả đúng

C. Có 3 kết quả đúng

D. Có 4 kết quả đúng

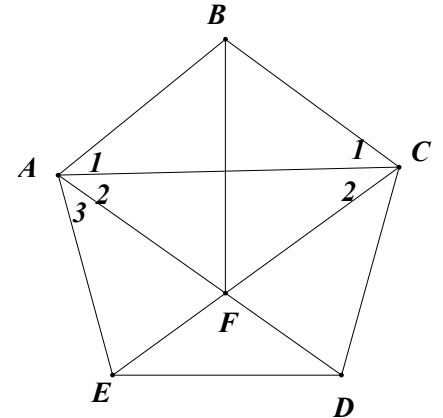
Đáp án **D**

Số đo mỗi góc của ngũ giác đều là: $\frac{(5-2)}{2} \cdot 180^\circ = 108^\circ$

Tam giác ABC cân tại B nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

Tương tự $\widehat{A_3} = 36^\circ$. Từ đó suy ra $\widehat{A_2} = 36^\circ$. Vậy $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = 36^\circ$.

Tương tự ta có $\widehat{C_2} = 36^\circ$. Suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{C_2} \Rightarrow AB \parallel EF$; $\widehat{A_2} = \widehat{C_2} \Rightarrow AF \parallel BC$. Vậy tứ giác ABCF là hình bình hành có $AB = BC$ nên nó là hình thoi.



4. Vận dụng cao:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy (A', B', C' không trùng với các đỉnh của tam giác). Đáp án nào đúng?

A. $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 2$

B. $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{1}{2}$

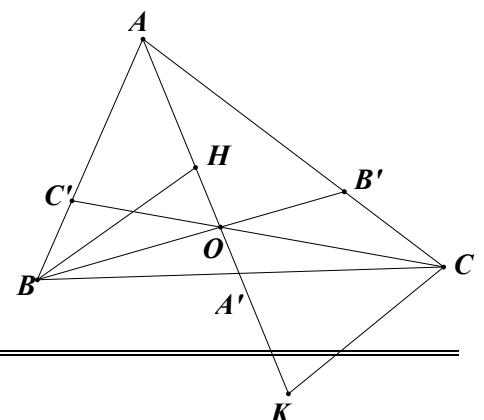
C. $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$

D. $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{3}{2}$

Đáp án **C**

Vẽ $BH \perp AA'$; $CK \perp AA'$. Hai tam giác AA'B và AA'C có cùng chiều cao hạ từ đỉnh A và có cạnh đáy tương ứng là

A'B và A'C nên $\frac{A'B}{A'C} = \frac{S_{AA'B}}{S_{AA'C}}$.



Mặt khác hai tam giác $AA'B$ và $AA'C$ có chung cạnh AA' và có chiều cao tương ứng là BH và CK nên $\frac{S_{AA'B}}{S_{AA'C}} = \frac{BH}{CK}$.

Ta lại có hai tam giác AOB và AOC có chung cạnh AO và có chiều cao tương ứng là BH và CK nên $\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{BH}{CK}$.

Từ các kết quả trên, ta nhận được $\frac{A'B}{A'C} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$

Hoàn toàn tương tự, ta có $\frac{B'C}{B'A} = \frac{S_{BOC}}{S_{BOA}}; \frac{C'A}{C'B} = \frac{S_{COA}}{S_{COB}}$.

Từ đó suy ra $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{BOC}}{S_{BOA}} \cdot \frac{S_{COA}}{S_{COB}} = 1$.

Ví dụ 2: Tổng các góc n cạnh trừ góc A của nó bằng 570° . Kết quả nào sau đây là đúng?

- A. $\begin{cases} n = 6 \\ \hat{A} = 150^\circ \end{cases}$ B. $\begin{cases} n = 6 \\ \hat{A} = 120^\circ \end{cases}$ C. $\begin{cases} n = 5 \\ \hat{A} = 150^\circ \end{cases}$ D. $\begin{cases} n = 5 \\ \hat{A} = 120^\circ \end{cases}$

Đáp án A

Từ giả thiết, ta có $(n-2) \cdot 180^\circ - 570^\circ$

Do $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ nên $0 < (n-2) \cdot 180 - 570 < 180 \Rightarrow 5\frac{1}{6} < n < 6\frac{1}{6} \Rightarrow n = 6$.

Khi đó $\hat{A} = (6-2) \cdot 180^\circ - 570^\circ = 150^\circ$.

III. Bài tập trắc nghiệm

1. Nhận biết

1. Một đa giác đều có mỗi góc trong hơn góc ngoài là 140° . Hỏi đa giác đó có mấy cạnh?

- A. Có 20 cạnh B. Có 19 cạnh C. Có 18 cạnh D. Có 21 cạnh

2. Một đa giác đều có số đường chéo bằng số cạnh. Khi đó mỗi góc của đa giác đều đó có độ lớn là:

- A. 90° B. 108° C. 120° D. 160°

3. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ một đường thẳng song song với AC cắt cạnh AB tại M, cắt cạnh BC tại N. Đáp án nào đúng?

A. $S_{ADM} = S_{CDN}$ **B.** $S_{ADM} = 2S_{CDN}$ **C.** $S_{ADM} = \frac{1}{2}S_{CDN}$ **D.** $S_{ADM} = \frac{2}{3}S_{CDN}$

4. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$). Biết $AB = 2cm$, $AD = \sqrt{3}cm$ và $\widehat{B} = 150^\circ$. Khi đó diện tích S của hình thang là:

A. $S = \frac{7\sqrt{3}}{3}cm^2$ **B.** $S = \frac{7\sqrt{2}}{3}cm^2$ **C.** $S = \frac{7\sqrt{2}}{2}cm^2$ **D.** $S = \frac{7\sqrt{3}}{2}cm^2$

5. Cho O là một điểm bất kì nằm trong hình bình hành ABCD. Đáp án nào đúng?

A. $S_{AOB} + S_{COD} = S_{AOD} + S_{BOC}$ **B.** $S_{AOB} + 2S_{COD} = S_{AOD} + 2S_{BOC}$
C. $S_{AOB} - S_{COD} = S_{AOD} - S_{BOC}$ **D.** $2S_{AOB} + S_{COD} = 2S_{AOD} + 2S_{BOC}$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	C	B	A	D	A

2. Thông hiểu

1. Cho hình chữ nhật ABCD. Góc D chia làm 3 góc bằng nhau bởi các tia DM, DN. Trong đó M là trung điểm của AB và N nằm trên cạnh BC sao cho $CN = 2\sqrt{3}$. Khi đó diện tích S của hình chữ nhật là:

A. $S = 18$ (đvdt) **B.** $S = 18\sqrt{2}$ (đvdt) **C.** $S = 18\sqrt{3}$ (đvdt) **D.** $S = 36$ (đvdt)

2. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $AD = \frac{1}{4}AB$; $BE = \frac{1}{4}BC$; $CF = \frac{1}{4}CA$. Đáp án nào đúng:

A. $S_{ADM} > \frac{2}{3}S_{ABC}$ **B.** $S_{ADM} < \frac{1}{2}S_{ABC}$ **C.** $S_{ADM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ **D.** $S_{ADM} = \frac{4}{5}S_{ABC}$

3. Cho tam hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có đường trung bình bằng 10cm. Biết $AD = 3cm$, $BC = 4cm$. Gọi S là diện tích hình thang. Đáp án nào đúng.

A. $\max S = 25cm^2$ **B.** $\max S = 35cm^2$ **C.** $\max S = 30cm^2$ **D.** $\max S = 20cm^2$

4. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 8cm$, $BC = 17cm$. Trên BC lấy một điểm M. Vẽ hình bình hành ABMN. Khi đó diện tích S của tứ giác ANCM bằng bao nhiêu?

A. $55cm^2$ **B.** $65cm^2$ **C.** $50cm^2$ **D.** $60cm^2$

5. Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Biết diện tích của tam giác AOB, BOC, COD lần lượt là a^2 , $2a^2$, $3a^2$ (đvdt). Khi đó diện tích S của tứ giác ABCD là:

- A. $7,5a^2$ (đvdt) B. $8,5a^2$ (đvdt) C. $7a^2$ (đvdt) D. $8a^2$ (đvdt)

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	C	B	C	D	A

3. Vận dụng

1. Cho hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của một tứ giác, trong đó hai đỉnh của hình bình hành là trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác. Gọi S_{BH}, S_{TG} lần lượt là diện tích của hình bình hành và diện tích tứ giác. Đáp án nào đúng:

- A. $S_{BH} = \frac{1}{4} S_{TG}$ B. $S_{BH} = \frac{1}{2} S_{TG}$ C. $S_{BH} = \frac{2}{3} S_{TG}$ D. $S_{BH} = \frac{1}{3} S_{TG}$

2. Số đo các góc trong một đa giác n cạnh lập thành một dãy cộng biết góc nhỏ nhất là 110° , góc lớn nhất là 160° . Khi đó số cạnh của đa giác là:

- A. $n = 8$ B. $n = 9$ C. $n = 12$ D. $n = 20$

3. Cắt một tấm bìa hình vuông thành 4 hình chữ nhật bằng 3 đường thẳng song song với một cạnh hình vuông. Biết chu vi mỗi hình chữ nhật là 50cm. Khi đó diện tích S của hình vuông là:

- A. $S = 100cm^2$ B. $S = 144cm^2$ C. $S = 169cm^2$ D. $S = 400cm^2$

4. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc. Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Lấy điểm O nằm trong tứ giác. Gọi M, N, P, Q thứ tự là các điểm đối xứng của O qua E, F, G, H. Cho biết $AC = 4cm$, $BD = 3cm$ thì diện tích S của tứ giác MNPQ bằng bao nhiêu?

- A. $S = 9cm^2$ B. $S = 16cm^2$ C. $S = 12cm^2$ D. $S = 20cm^2$

5. Hình chữ nhật ABCD chia làm 4 hình chữ nhật nhỏ bởi hai đường thẳng đi qua điểm O nằm trên đường chéo AC và song song với các cạnh, cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $S_{AMOQ} = 18cm^2$; $S_{MBNO} = 24cm^2$. Khi đó diện tích S của hình chữ nhật ABCD bằng bao nhiêu?

- A. $S = 97cm^2$ B. $S = 98cm^2$ C. $S = 99cm^2$ D. $S = 96cm^2$

6. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Biết $MP + NQ = 2a$, $AC = BD = 2b$ ($a > b$). Khi đó diện tích S của tứ giác ABCD là:

- A. $S = 2(a^2 - b^2)$ (đvdt) B. $S = 2(a^2 + b^2)$ (đvdt)

C. $S = (a^2 - b^2) (\text{đvdt})$

D. $S = (a^2 + b^2) (\text{đvdt})$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	B	A	D	C	B	A

4. Vận dụng nâng cao

1. Tam giác ABC có ba góc nhọn, vẽ các đường cao BD, CE. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng ED. Đáp án nào đúng

A. $S_{BEC} + S_{BDC} = S_{BHKC}$

B. $S_{BEC} + S_{BDC} = \frac{3}{2} S_{BHKC}$

C. $S_{BEC} + 2S_{BDC} = S_{BHKC}$

D. $2S_{BEC} + S_{BDC} = 2S_{BHKC}$

2. Hình thang có độ dài hai đáy tương ứng là 6m và 10m, đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đáy bằng 4m. Khi đó diện tích S của hình thang là:

A. $S = 26\text{cm}^2$ **B.** $S = 24\text{cm}^2$ **C.** $S = 27\text{cm}^2$ **D.** $S = 25\text{cm}^2$

3. Cho tam giác ABC có $\hat{A} \geq 90^\circ$, D là điểm nằm giữa A và C. Gọi h_a, h_c là các đường cao của tam giác tương ứng hạ từ đỉnh A và đỉnh C; d_a, d_c tương ứng là khoảng cách từ A, C đến BD. Khẳng định nào sai?

A. $d_a + d_c > h_c$

B. $d_a + d_c > h_a$

C. $h_a < d_a + d_c < h_c$

D. $d_a + d_c < h_c$

4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = 4\text{cm}$. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = CN$. Gọi S là diện tích của tứ giác BCNM. Đáp án nào đúng?

A. $\min S = 4\text{cm}^2$

B. $\min S = 5\text{cm}^2$

C. $\min S = 6\text{cm}^2$

D. $\min S = 7\text{cm}^2$

5. Một căn phòng hình vuông được lát gạch men hình vuông cùng cỡ, vừa hết 729 viên (không viên nào bị xén). Gạch gồm hai loại men trắng và men xanh, loại men trắng nằm trên hai đường chéo nền nhà, còn lại là men xanh. Khi đó số gạch mỗi loại là:

A. Men trắng có 53 viên, men xanh có 676 viên

B. Men trắng có 52 viên, men xanh có 677 viên

C. Men trắng có 54 viên, men xanh có 675 viên

D. Men trắng có 55 viên, men xanh có 674 viên

6. Cho tứ giác ABCD. Gọi E và G lần lượt là trung điểm của AD và BC. Lấy F và H lần lượt trên AB và CD. Biết EFGH là hình bình hành, G không trùng với trung điểm của AB. Đáp án nào đúng?

A. $S_{EFGH} > \frac{2}{3}S_{ABCD}$ **B.** $S_{EFGH} < \frac{3}{7}S_{ABCD}$ **C.** $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ **D.** $S_{EFGH} = \frac{3}{5}S_{ABCD}$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	A	B	A	C	A

Chủ đề 7. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I. Kiến thức cơ bản

1. Định lý Ta-lét trong tam giác

- Định lý :

+ Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

+ Đảo lại, nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh ấy những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

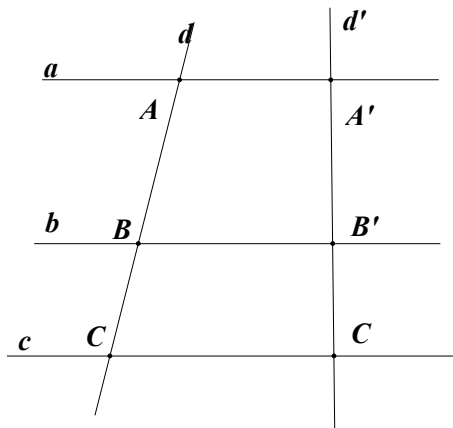
- Hệ quả : Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

$$a \parallel BC, \text{ suy ra } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Hệ quả trên vẫn đúng, nếu đường thẳng a song song với một cạnh và cắt hai đường thẳng chứa hai cạnh kia.

- Định lý Ta – lét tổng quát:

Nhiều đường thẳng song song định ra trên hai cát tuyến bất kì các cặp đoạn thẳng tỉ lệ



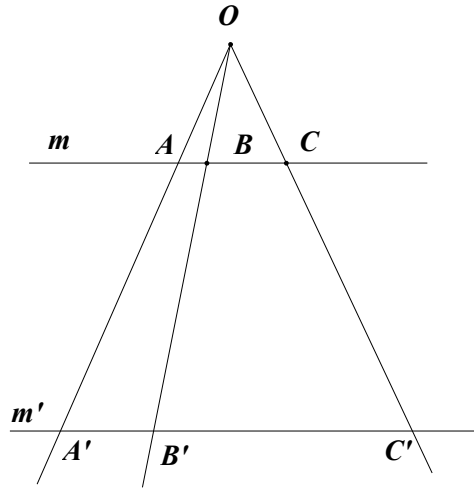
$$a \parallel b \parallel c, \text{ suy ra } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

- Bổ đề hình thang:

Trong hình thang hai đáy không bằng nhau, giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy cùng nằm trên một đường thẳng.

- Chùm đường thẳng đồng quy:

Nếu các đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song thì chúng định ra trên hai đường thẳng song song ấy các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.



$$m \parallel m' \text{ suy ra } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

- Định lý Xê – va:

Cho tam giác ABC và 3 điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB (A', B', C' không trùng với các đỉnh của tam giác). Khi đó ta có: AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

- Định lý Mê – nê – la- uýt:

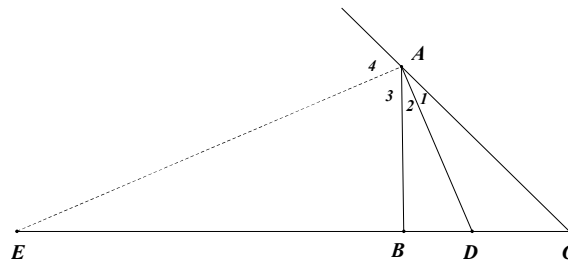
Cho tam giác ABC và 3 điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB (A', B', C' không trùng với các đỉnh của tam giác sao cho trong 3 điểm đó có đúng một điểm hoặc cả 3 điểm nằm ngoài tam giác.) Khi đó ta có: A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

2. Tính chất đường phân giác của một tam giác.

- Đường phân giác của một góc trong tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề của hai đoạn thẳng ấy.

- Đường phân giác ngoài của tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề của hai đoạn thẳng ấy.



$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \widehat{A_3} = \widehat{A_4} \end{cases} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

- Định lý đảo: Nếu một đường thẳng đi qua một đỉnh của tam giác mà chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai cạnh đoạn thẳng ấy thì nó là đường phân giác trong (hay ngoài) của góc tại đỉnh ấy.

3. Khái niệm tam giác đồng dạng, các trường hợp đồng dạng của tam giác

- Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:

$$\begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A}; \widehat{B'} = \widehat{B}; \widehat{C'} = \widehat{C} \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k \end{cases} \quad (k \text{ gọi là tỉ số đồng dạng})$$

- Tính chất:

+ Tam giác ABC đồng dạng với chính nó

+ Nếu tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số đồng dạng k thì tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$.

+ Nếu tam giác $A''B''C''$ đồng dạng với tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC thì tam giác $A''B''C''$ đồng dạng với tam giác ABC

- Một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với hai cạnh còn lại thì sẽ tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

- Các trường hợp đồng dạng:

+ Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng (c.c.c)

+ Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng (c.g.c)

+ Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau (g.g)

- Hai tam giác đều luôn đồng dạng với nhau.

- Hai tam giác cân sẽ đồng dạng nếu có một trong các điều kiện sau:

+ Có một cặp góc ở đáy bằng nhau.

+ Có một cặp góc ở đỉnh bằng nhau.

+ Có một cặp cạnh đáy và một cặp cạnh bên tỉ lệ.

- Nếu hai tam giác đồng dạng thì:

+ Tỉ số hai chu vi bằng tỉ số đồng dạng

+ Tỉ số hai đường trung tuyến, hai đường phân giác, hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.

4. Trường hợp đồng dạng của tam giác vuông, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng.

- Nếu hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.

- Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

II. Ví dụ minh họa

1. Nhận biết

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ các đường phân giác BD, CE . Trong hình vẽ thu được có bao nhiêu cặp đường thẳng song song?

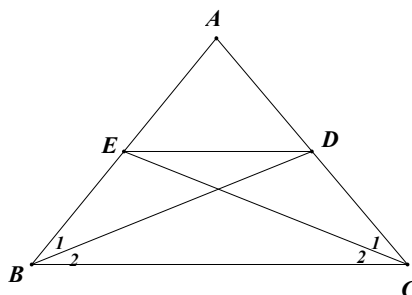
A. Có 1 cặp

B. Không có cặp nào

C. Có 2 cặp

D. Có 3 cặp

Đáp án A



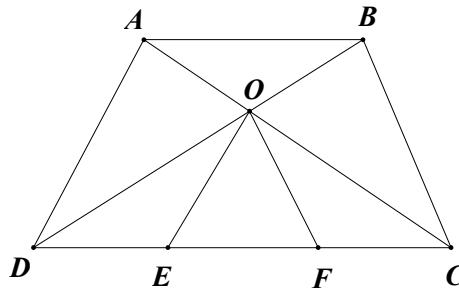
$$\text{Ta có: } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BA}{BC}; \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$$

Từ đó suy ra $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow DE \parallel BC$ (là cặp đường thẳng song song duy nhất có trong hình vẽ).

Ví dụ 2: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), hai đường chéo cắt nhau tại O . Trên đáy CD lấy các điểm E, F sao cho $OE \parallel AD, OF \parallel BC$. Đáp án nào đúng?

- A.** $S_{ODE} = S_{OCF}$ **B.** $S_{ODE} = 2S_{OCF}$ **C.** $S_{ODE} = \frac{1}{2}S_{OCF}$ **D.** $S_{ODE} = \frac{1}{4}S_{OCF}$

Đáp án A



$$OE \parallel AD \Rightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{AO}{AC}; OF \parallel BC \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{BO}{BD}; AC \parallel BD \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$$

Từ các kết quả trên, suy ra $\frac{DE}{DC} = \frac{CF}{DC} \Rightarrow DE = CF \Rightarrow S_{ODE} = S_{OCF}$

2. Thông hiểu

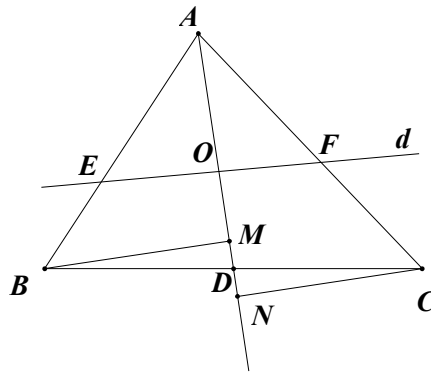
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AD . Lấy điểm O nằm giữa A và D . Qua O vẽ đường thẳng d cắt các tia AB, AC tại E, F . Biết $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$. Khẳng định nào đúng?

- A.** $AO = OD$ **B.** $AO = 2OD$ **C.** $AO = \frac{1}{2}OD$ **D.** $AO = \frac{1}{4}OD$

Đáp án B

Vẽ $BM \parallel d, CN \parallel d$ (M, N thuộc đường thẳng AD)

Ta có $\triangle MBD = \triangle NCD(c.g.c) \Rightarrow DM = DN$



Áp dụng định lí Ta – lét vào các tam giác ABM và ACN ta được:

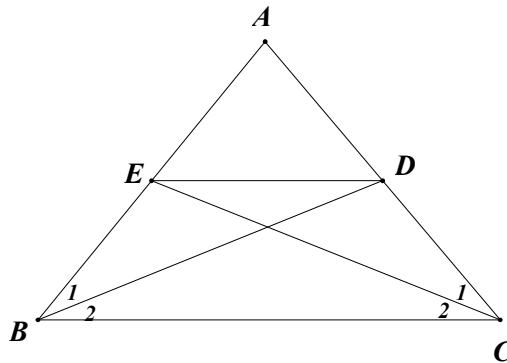
$$\frac{BE}{AE} = \frac{MO}{AO}; \frac{CF}{AF} = \frac{NO}{AO}. \text{ Do đó:}$$

$$\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = \frac{MO + NO}{AO} = \frac{(OD - DM) + (OD + DN)}{AO} = \frac{2OD}{AO} = 1 \Leftrightarrow AO = 2OD.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A , $BC = a$, $AC = b$. Vẽ các đường phân giác BD , CE . Đáp án nào đúng?

A. $DE = \frac{2ab}{a+b}$ **B.** $DE = \frac{ab}{2a+b}$ **C.** $DE = \frac{ab}{a+2b}$ **D.** $DE = \frac{ab}{a+b}$

Đáp án D



Giải

$$\text{Ta có: } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BA}{BC}; \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow DE \parallel BC$$

Tam giác DEC cân. Đặt $DE = DC = x$ thì $AD = b - x$. Áp dụng hệ quả định lý Ta – lét ta có:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b-x}{b} \Rightarrow ax + bx = ab \Rightarrow x = DE = \frac{ab}{a+b}$$

3. Vận dụng

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$, hai đường chéo vuông góc với nhau tại O . Biết

$AB = \frac{1}{2}CD$, $AO = \frac{1}{3}AC$, $S_{AOB} = a^2$. Khi đó diện tích S của tứ giác $ABCD$ là:

- A.** $S = 7a^2$ **B.** $S = 8a^2$ **C.** $9a^2$ **D.** $S = 10a^2$

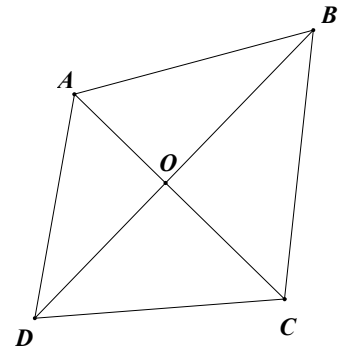
Đáp án C.

Từ giả thiết suy ra $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2}$. Từ đó suy ra hai tam giác vuông

AOB, COD đồng dạng. Do vậy $\frac{S_{AOB}}{S_{COD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{COD} = 4a^2$

Vì $\frac{AO}{CO} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{BOC} = 2S_{AOB} = 2a^2$. Tương tự $S_{AOD} = 2a^2$.

Vậy $S = S_{ABCD} = a^2 + 4a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 9a^2$



Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$, góc B nhọn. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B trên AD và CD . Đáp án nào đúng?

- A.** $DA.DH + DC.DK = 2DB^2$ **B.** $DA.DH + DC.DK = DB^2$
C. $DA.DH + DC.DK = \frac{1}{2}DB^2$ **D.** $DA.DH + DC.DK = \frac{1}{4}DB^2$

Đáp án B

Vẽ $AI \perp BD$.

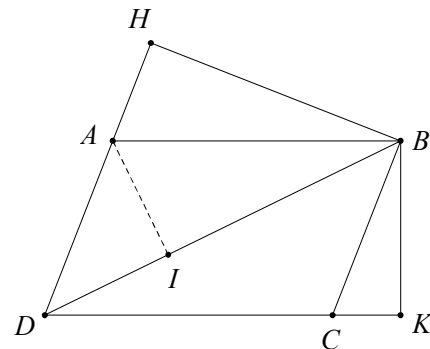
Hai tam giác IDA, HBD đồng dạng nên ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DI}{DH} \Rightarrow DA.DH = DB.DI.$$

Tương tự $DC.DK = DB.BI$.

Từ các kết quả trên ta có:

$$DA.DH + DC.DK = DB(DI + BI) = DB^2.$$



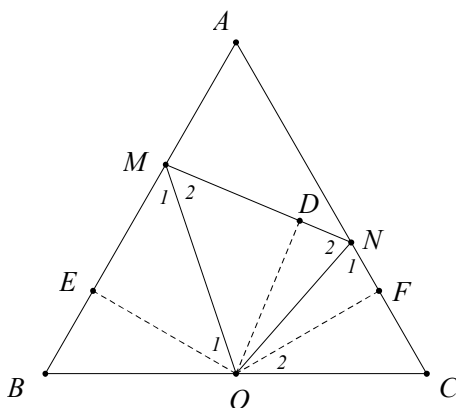
4. Vận dụng nâng cao

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC. Gọi O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm di động M và N sao cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng?

Tam giác OMB đồng dạng với tam giác NOC; tích BM.CN không đổi; các tia MO, NO lần lượt là các tia phân giác của các góc BMN và CMN; chu vi tam giác AMN không đổi.

- A.**Có 1 kết quả đúng
- B.**Có 2 kết quả đúng
- C.**Có 3 kết quả đúng
- D.**Có 4 kết quả đúng

Đáp án D.



Ta có $\widehat{M}_1 + \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_1 = 120^0 \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{O}_2$.

Suy ra hai tam giác OMB, NOC đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{BM}{CO} = \frac{BO}{CN}$.

Suy ra $BM.CN = BO.CO$ hay $BM.CN = \frac{BC^2}{4}$ (không đổi)

Do hai tam giác OMB , NOC đồng dạng nên $\frac{BM}{CO} = \frac{OM}{ON}$ hay ta có $\frac{BM}{BO} = \frac{OM}{ON}$.

Suy ra $\frac{BM}{OM} = \frac{BO}{ON}$.

Mặt khác $\widehat{B} = \widehat{MON} = 60^0$. Từ các kết quả đó suy ra hai tam giác OMB, NMO đồng dạng (c.g.c). Suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. Hoàn toàn tương tự ta có $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$. Vậy các tia MO, NO lần lượt là các tia phân giác của các góc BMN và CMN.

Vẽ $OD \perp MN$, $OE \perp AB$, $OF \perp AC$. Vì O cố định nên E, F cố định.

Ta có $MD = ME$, $ND = NF$.

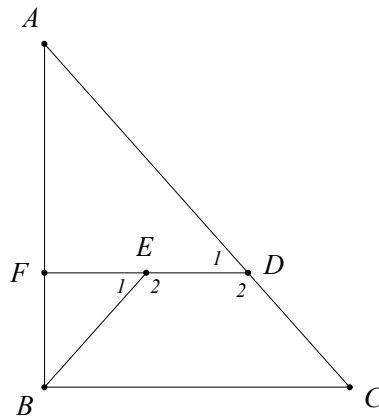
Chu vi $\triangle AMN = AM + MD + ND + NA = AM + ME + NF + NA = AE + AF$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại B . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = \frac{1}{3}CA$.

Vẽ $DF \perp AB$ ($F \in AB$). Gọi E là trung điểm của DF . Đáp án nào đúng?

- A.** $BE = CD$ **B.** $BD = 2CD$ **C.** $BE = \frac{1}{2}CD$ **D.** $BE = \frac{1}{4}CD$

Đáp án A



Ta có $CD = \frac{1}{3}CA \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$; $FE = ED \Rightarrow \frac{FE}{FD} = \frac{1}{2}$.

Ta có $FD \parallel BC$ (vì cùng vuông góc với AB). Suy ra $\frac{BF}{AF} = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$.

Xét hai tam giác vuông BFE và AFD có $\frac{BF}{AF} = \frac{FE}{FD} = \frac{1}{2}$ nên hai tam giác vuông này đồng dạng (c.g.c). Suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{D_2}$.

Tứ giác $BCDE$ có $DE \parallel BC$ và $\widehat{E_2} = \widehat{D_2}$ nên $BCDE$ là hình thang cân $\Rightarrow BE = CD$.

III. Bài tập trắc nghiệm

1. Nhận biết

1. Cho hình thoi $BEDF$ nội tiếp tam giác ABC (E thuộc AB , D thuộc AC , F thuộc BC). Độ dài x cạnh của hình thoi bằng bao nhiêu? Biết rằng $AB = c$, $BC = a$.

- A.** $x = \frac{ac}{a+c}$ **B.** $x = \frac{2ac}{a+c}$ **C.** $x = \frac{ac}{2a+c}$ **D.** $x = \frac{2ac}{a+2c}$

2. Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, K là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng KO cắt AB, CD theo thứ tự tại M, N. Trong các kết quả sau có bao nhiêu kết quả đúng?

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{NC}; \frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND}; MA = MB; NC = ND.$$

- A. Có 1 kết quả đúng B. Có 2 kết quả đúng
C. Có 3 kết quả đúng D. Có 4 kết quả đúng

3. Cho hình chữ nhật ABCD có đường chéo bằng m, điểm M thuộc cạnh AB. Lần lượt vẽ $ME \parallel BD$ (E thuộc AD), $EG \parallel AC$ (G thuộc CD), $GH \parallel BD$ (H thuộc BC). Gọi p là nửa chu vi của tứ giác MEGH. Đáp án nào đúng?

- A. $p = 2m$ B. $p = m$ C. $p = \frac{3}{4}m$ D. $p = \frac{3}{2}m$

4. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo tỉ số 1:2. Các điểm I, K theo thứ tự chia trong các đoạn thẳng ED, FE theo tỉ số 1:2. Nối ED, DF, FE, IK. Trong hình vẽ thu được có bao nhiêu cặp đoạn thẳng song song?

- A. Có 1 cặp B. Có 2 cặp C. Có 3 cặp D. Có 4 cặp

5. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng d đi qua A cắt đường chéo BD tại P, cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại M và N. Đáp án nào đúng?

- A. $BM \cdot DN = \frac{1}{2} AB \cdot AD$ B. $BM \cdot DN = \frac{2}{3} AB \cdot AD$
C. $BM \cdot DN = AB \cdot AD$ D. $BM \cdot DN = 2AB \cdot AD$

6. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng d cắt AB, BC, BD lần lượt tại M, N, I. Khẳng định nào đúng?

- A. $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = 2 \frac{BD}{BI}$ B. $2 \frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = 2 \frac{BD}{BI}$
C. $\frac{BA}{BM} + 2 \frac{BC}{BN} = 2 \frac{BD}{BI}$ D. $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = \frac{BD}{BI}$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	A	D	B	A	C	D

2. Thông hiểu

1. Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Lấy các điểm D, E tùy ý theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng DE, BC . Đáp án nào đúng?

A. $\frac{KE}{KD} = \frac{BA}{BC}$

B. $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$

C. $\frac{KE}{KD} = \frac{CB}{CA}$

D. Cả ba kết quả trên đều sai

2. Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$, đường phân giác AD . Đáp án nào đúng?

A. $BD = \frac{ab}{b+c}$

B. $BD = \frac{bc}{c+a}$

C. $BD = \frac{ac}{c+b}$

D. Cả 3 đáp án trên đều sai

3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), hai đường chéo cắt nhau tại O . Qua O vẽ một đường thẳng song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại M và N . Kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

B. $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{MN}$

C. $\frac{2}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

D. $\frac{1}{AB} + \frac{2}{CD} = \frac{1}{MN}$

4. Cho tam giác ABC , trên đường trung tuyến AD lấy một điểm O . Tia CO cắt AB tại M , tia BO cắt AC tại N . Đáp án nào đúng?

A. $S_{BOM} = 2S_{CON}$

B. $S_{BOM} = S_{CON}$

C. $S_{BOM} = \frac{1}{2}S_{CON}$

D. $S_{BOM} = \frac{2}{3}S_{CON}$

5. Tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}, AC = 3\text{cm}$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = 2AE$. Điểm F chia trong đoạn thẳng DE theo tỉ số $\frac{3}{2}$. Tia AF cắt BC tại M . Đáp án nào đúng?

A. $MB = \frac{1}{2}MC$

B. $MB = \frac{2}{3}MC$

C. $MB = MC$

D. $MB = 2MC$

6. Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BM, CN . Biết $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$. Đáp án nào đúng?

- A. $BM = \frac{1}{2}CN$ B. $BM = \frac{2}{3}CN$ C. $BM = 2CN$ D. $BM = CN$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	B	C	A	B	C	D

3. Vận dụng

1. Cho tam giác ABC , đường phân giác AD . Kẻ tia Cx sao cho $\widehat{DCx} = \widehat{BAD}$ (tia Cx khác phía với A đối với BC). Tia Cx cắt AD kéo dài tại I . Đáp án nào đúng?

- A. $AD \cdot DI = BD \cdot DC$ B. $AD \cdot DI = 2BD \cdot DC$
C. $AD \cdot DI = 3BD \cdot DC$ D. $AD \cdot DI = 4BD \cdot DC$

2. Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, $BC = a$, đường cao $AH = h$. Cạnh x của hình vuông $MNPQ$ bằng bao nhiêu? Biết rằng M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC , P và Q thuộc cạnh BC .

- A. $x = \frac{2ah}{a+h}$ B. $x = \frac{2ah}{a+2h}$ C. $x = \frac{ah}{a+h}$ D. $x = \frac{ah}{a+2h}$

3. Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC . Trên OA lấy một điểm D sao cho $OD = \frac{1}{3}OA$. Qua D vẽ một đường thẳng song song với AB cắt OB tại E . Qua E vẽ một đường thẳng song song với BC cắt OC tại F . Khẳng định nào đúng?

- A. Tam giác DEF đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$
B. Tam giác DEF đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{4}$
C. Tam giác DEF đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$
D. Tam giác DEF đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{3}$

4. Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{A} = 135^\circ$. Trên cạnh BC lấy các điểm M và N sao cho $AM \perp AC$, $AN \perp AB$. Khẳng định nào đúng?

A. $BM^2 = 2BC.MN$

B. $BM^2 = BC.MN$

C. $BM^2 = \frac{1}{2}BC.MN$

D. $BM^2 = \frac{2}{3}BC.MN$

5. Cho tam giác ABC , đường phân giác AD . Vẽ $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ (E thuộc AC , F thuộc AB). Cho biết $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$. Khi đó nửa chu vi p của tứ giác $AEDF$ bằng bao nhiêu?

A. $p = 4\text{ cm}$

B. $p = 5\text{ cm}$

C. $p = 6\text{ cm}$

D. $p = 7\text{ cm}$

6. Cho tam giác đều ABC , các đường phân giác góc B và góc C cắt nhau tại O . Trên cạnh BC lấy điểm D không trùng với trung điểm của nó. Vẽ $DE \perp AB$ cắt OB tại M , vẽ $DF \perp AC$ cắt OC tại N . Đáp án nào đúng?

A. $\frac{DM}{DN} = 2 \frac{DE}{DF}$

B. $\frac{DM}{DN} = \frac{DE}{DF}$

C. $\frac{DM}{DN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DE}{DF}$

D. $\frac{DM}{DN} = \frac{3}{4} \cdot \frac{DE}{DF}$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	A	C	D	B	D	B

4. Vận dụng nâng cao

1. Cho tam giác ABC vuông tại A , biết đường cao AH chia tam giác đó thành hai tam giác AHB và AHC có chu vi theo thứ tự bằng 18 cm và 24 cm . Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC . Đáp án nào đúng?

A. $p = 14\text{ cm}$

B. $p = 15\text{ cm}$

C. $p = 16\text{ cm}$

D. $p = 17\text{ cm}$

2. Tam giác ABH vuông tại H có $AB = 20\text{ cm}$, $BH = 12\text{ cm}$. Trên tia đối của tia HB lấy điểm C sao cho $AC = \frac{5}{3}AH$. Đáp án nào đúng?

A. $\widehat{BAC} = 90^\circ$

B. $\widehat{BAC} = 120^\circ$

C. $\widehat{BAC} = 45^\circ$

D. $\widehat{BAC} = 60^\circ$

3. Cho tam giác ABC và hình bình hành $AEDF$ có E thuộc AB , D thuộc BC , F thuộc AC . Biết $S_{EBD} = 3\text{ cm}^2$; $S_{FDC} = 12\text{ cm}^2$. Khi đó diện tích S của hình bình hành $AEDF$ bằng bao nhiêu?

A. $S = 9\text{ cm}^2$

B. $S = 10\text{ cm}^2$

C. $S = 15\text{ cm}^2$

D. $S = 12\text{ cm}^2$

4. Một ngọn đèn đặt trên cao ở vị trí A, hình chiếu vuông góc của nó trên mặt đất là H. Người ta đặt một chiếc cọc dài 1,6 m thẳng đứng ở hai vị trí B và C thẳng hàng với H, khi đó bóng của chiếc cọc dài 0,4m và 0,6m. Biết $BC = 1,4\text{m}$, khi đó độ cao AH bằng bao nhiêu?

- A. $AH = 3\text{m}$ B. $AH = 4\text{m}$ C. $AH = 3,84\text{m}$ D. $AH = 3,85\text{m}$

5. Cho tam giác ABC, các góc B và C nhọn. Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng? $AB.AF = AC.AE$; tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC; $BH.BE + CH.CF = BC^2$.

- A. Không có kết quả nào đúng B. Có 1 kết quả đúng
C. Có 2 kết quả đúng D. Cả 3 kết quả đều đúng

6. Cho tam giác ABC, vẽ hình bình hành AMON sao cho $M \in AB, O \in BC, N \in AC$. Biết $S_{MOB} = a^2, S_{NOC} = b^2$. Khi đó diện tích S của hình bình hành AMON bằng bao nhiêu?

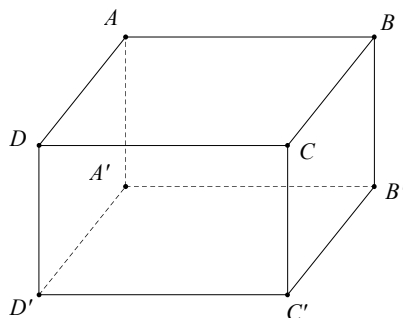
- A. $S = ab$ B. $S = 2ab$ C. $S = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ D. $S = (a^2 + b^2)$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	B	A	D	C	D	B

Chủ đề 8. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH CHÓP ĐỀU**I. Kiến thức cơ bản****1. Hình hộp chữ nhật**

- Hình ảnh của một hình hộp chữ nhật là hình có 6 mặt đều là những hình chữ nhật và được biểu diễn như sau:



- Đặc biệt: Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt đều là hình vuông.

- Nhận xét:

+ Đường thẳng đi qua 2 điểm A, B của mặt phẳng (ABCD) thì nằm trọn trong mặt phẳng đó (ta hình dung mặt phẳng trải rộng về mọi phía)

+ Qua ba điểm không thẳng hàng có suy nhất một mặt phẳng, thường được kí hiệu là $mp(P)$.

+ Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất đi qua điểm đó (đường thẳng này gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng).

- Vị trí của hai đường thẳng phân biệt trong không gian:

+ Hai đường thẳng cắt nhau nếu chúng có một điểm chung. Khi đó có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

+ Hai đường thẳng song song nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung (chẳng hạn, trong hình biểu diễn hình hộp chữ nhật $AB \parallel CD$).

+ Hai đường thẳng chéo nhau nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng nào (chẳng hạn, trong hình biểu diễn hình hộp chữ nhật AB và CC' là hai đường thẳng chéo nhau).

- Đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song

+ Nếu một đường thẳng a không thuộc $mp(P)$ mà song song với một đường thẳng nằm trên $mp(P)$ thì đường thẳng a song song với $mp(P)$.

+ Nếu $mp(Q)$ chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau mà a và b cùng song song với $mp(P)$ thì $mp(Q) \parallel mp(P)$ (chẳng hạn, trong hình biểu diễn hình hộp chữ nhật $mp(ABCD) \parallel mp(A'B'C'D')$).

- Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

+ Nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong $mp(P)$ thì đường thẳng a vuông góc với $mp(P)$. Khi đó đường thẳng a vuông góc với mọi đường thẳng của $mp(P)$.

+ Nếu còn một trong hai $mp(P)$ và $mp(Q)$ chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì $mp(P)$ vuông góc với $mp(Q)$.

- Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân với chiều cao

+ $S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao)

+ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$

Đặc biệt, đối với hình lập phương cạnh a thì: $S_{xq} = 4a^2$; $S_{tp} = 6a^2$.

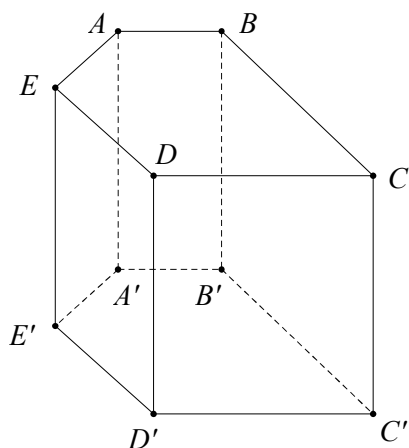
- Thể tích hình hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước: $V = a.b.c$

Đặc biệt, thể tích của hình lập phương cạnh a là $V = a^3$.

- Trong hình hộp chữ nhật: bốn đường chéo đồng quy tại trung điểm của mỗi đường; bình phương của đường chéo bằng tổng các bình phương của ba kích thước.

2. Hình lăng trụ đứng, diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ đứng

- Hình ảnh của một hình lăng trụ đứng được mô tả như sau:



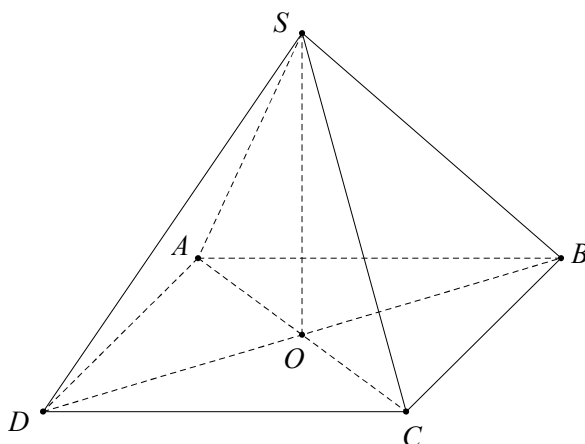
+ Hai đáy là hai đa giác bằng nhau, nằm trên hai mặt phẳng song song.

- + Các mặt bên là những hình chữ nhật. Các mặt bên vuông góc với mặt phẳng đáy.
- + Các cạnh bên song song và bằng nhau, chúng vuông góc với mặt phẳng đáy. Độ dài cạnh bên gọi là chiều cao.
- + Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.
- $S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao); $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{@y}$
- $V = S.h$ (S là diện tích đáy, h là chiều cao)
- Hình lăng trụ đều là một lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều.
- Sự liên hệ giữa số cạnh đáy với số mặt, số đỉnh và số cạnh của một hình lăng trụ

Số cạnh đáy	Số mặt	Số đỉnh	Số cạnh
n	$n + 2$	$2n$	$3n$

3. Hình chóp đều và hình chóp cắt đều. Diện tích xung quanh và thể tích hình chóp đều

- Hình chóp được mô tả như sau:



- + Đáy là một đa giác.
- + Các mặt bên là những tam giác chung một đỉnh.
- + Đường cao là đường vuông góc hạ từ đỉnh xuống mặt phẳng đáy.
- Hình chóp đều là một hình chóp có đáy là một đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm đáy. Trong hình chóp đều:
 - + Các cạnh bên bằng nhau.
 - + Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
 - + Chiều cao của mỗi mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp.

- Hình chóp có đáy là một đa giác đều và tất cả các cạnh bên bằng nhau là một hình chóp đều.
- Hình chóp cụt đều:
 - + Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy, phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy là một hình chóp cụt đều.
 - + Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân.
 - + Chiều cao của mỗi hình thang cân (mặt bên) gọi là trung đoạn của hình chóp cụt đều.
- Diện tích xung quanh, thể tích của hình chóp, hình chóp cụt:
 - + Hình chóp đều: $S_{xq} = p.d$ (p là nửa chu vi đáy, d là trung đoạn)
 - + Hình chóp cụt đều: $S_{xq} = (p + p').d$ ($p; p'$ là nửa chu vi của các đáy, d là trung đoạn)
 - + Hình chóp bất kì: V
 - + Hình chóp cụt bất kì: Muốn tính thể tích hình chóp cụt ta có thể tính hiệu thể tích của hai hình chóp hoặc dùng công thức:

$$V_{\text{chóp cụt}} = \frac{1}{3} \left(S + S' + \sqrt{SS'} \right) \quad (S, S' \text{ là diện tích hai đáy, } h \text{ là chiều cao}).$$

II. Ví dụ minh họa

1. Nhận biết

Ví dụ 1: Trong các hình hộp chữ nhật có kích thước là các số nguyên a, b, c mà $a + b + c = 9$, hình có thể tích V lớn nhất là bao nhiêu?

- A.** $\max V = 24$ **B.** $\max V = 27$ **C.** $\max V = 16$ **D.** $\max V = 15$

Đáp án B

Xét tất cả các trường hợp hình hộp chữ nhật có các kích thước nguyên và tổng bằng 9:

$$V_1 = 1.1.7 = 7; \quad V_2 = 1.2.6 = 12; \quad V_3 = 1.3.5 = 15; \quad V_4 = 1.4.4 = 16$$

$$V_5 = 2.2.5 = 20; \quad V_6 = 2.3.4 = 24; \quad V_7 = 3.3.3 = 27.$$

Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 16 \text{ cm}$, $AD = 12 \text{ cm}$, $AC' = 29 \text{ cm}$. Thể tích V của hình hộp chữ nhật bằng bao nhiêu?

- A.** $V = 4032 \text{ cm}^3$ **B.** $V = 4034 \text{ cm}^3$ **C.** $V = 4030 \text{ cm}^3$ **D.** $V = 4036 \text{ cm}^3$

Đáp án A

Ta có: $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$. Suy ra $29^2 = 16^2 + 12^2 + AA'^2$.

Suy ra $AA' = 21$. Vậy $V = 12.16.21 = 4032 \text{ (cm}^3\text{)}$.

2. Thông hiểu

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là một tam giác vuông cân tại A . Biết lăng trụ có chiều cao là 8cm , thể tích là 100 cm^3 , khi đó diện tích xung quanh S_{xq} của lăng trụ là:

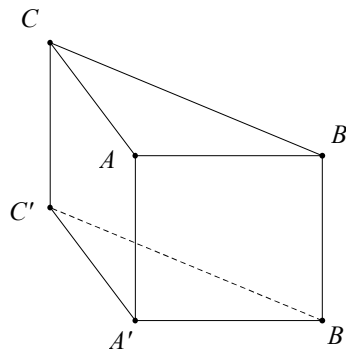
A. $S_{xq} = 40(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

B. $S_{xq} = 40(3 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$

C. $S_{xq} = 40(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

D. $S_{xq} = 40(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$

Đáp án D



Ta có: $V = S_d \cdot h$, suy ra $S_d = \frac{V}{h} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$

Đặt $AB = AC = a$ thì $S_d = \frac{a^2}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow a = 5$. Suy ra $BC = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Vậy $S_{xq} = 2p \cdot h = (5 + 5 + 5\sqrt{2}) \cdot 8 = 40(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$.

Ví dụ 2: Một hình chóp và một hình lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng nhau. Chiều cao của hình chóp gấp đôi chiều cao của hình lăng trụ. Tỉ số T các thể tích của hình chóp và hình lăng trụ bằng:

A. $T = \frac{1}{3}$

B. $T = \frac{2}{3}$

C. $T = \frac{1}{2}$

D. $T = \frac{2}{5}$

Đáp án B

Gọi S và h theo thứ tự là diện tích đáy và chiều cao của hình lăng trụ. Khi đó hình chóp có diện tích đáy S và chiều cao $2h$.

Thể tích hình chóp: $V_1 = \frac{1}{3}S \cdot 2h = \frac{2}{3}S \cdot h$. Thể tích hình lăng trụ: $V_2 = S \cdot h$

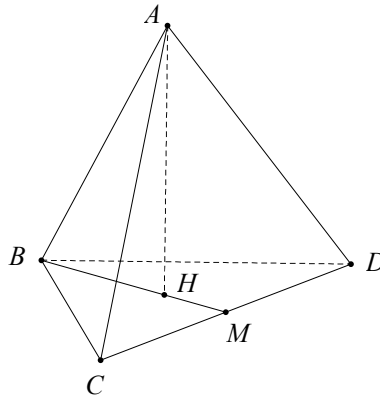
Từ đó suy ra $T = \frac{2}{3}$.

3. Vận dụng

Ví dụ 1: Hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{2}$ và các cạnh bên bằng 1. Thể tích V của hình chóp là:

- A.** $V = \frac{1}{2}$ (đvtt) **B.** $V = \frac{1}{4}$ (đvtt) **C.** $V = \frac{1}{6}$ (đvtt) **D.** $V = \frac{1}{3}$ (đvtt)

Đáp án C



Kí hiệu như hình vẽ (hình chóp có đỉnh A, đáy là tam giác BCD, chân đường cao là H). Khi đó BH cắt BC tại trung điểm M của BC (tính chất tam giác đều)

Xét tam giác CBM vuông tại M:

$$BM^2 = BC^2 - CM^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Suy ra $BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Xét tam giác AHB vuông tại H:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow AH = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Suy ra } S_{BCD} = \frac{1}{2}CD \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

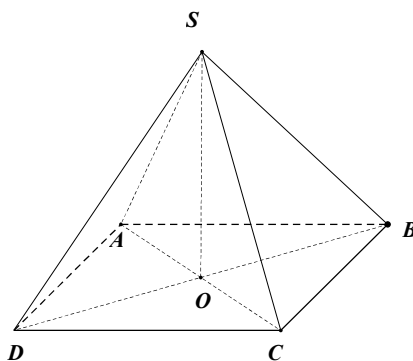
$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \text{ (đvtt)}$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và các mặt bên là những tam giác đều. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng?

Hình chóp S. ABCD là hình chóp đều; diện tích đáy bằng tổng diện tích của hai mặt chéo (SAC) và (SBD); diện tích xung quang của hình chóp $S_{xq} = a^2\sqrt{3}$ (đvdt)

- A.** Có 1 kết quả đúng
- B.** Có 2 kết quả đúng
- C.** Có 3 kết quả đúng
- D.** Có 4 kết quả đúng

Đáp án D



Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác SOA vuông tại O có $SA = a$; $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Suy ra } SO^2 = SA^2 = OA^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Tổng diện tích hai mặt chéo (SAC) và (ABD) là

$$2\left(\frac{1}{2}AC.SO\right) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2 = \text{diện tích đáy.}$$

Các mặt bên là các tam giác đều cạnh a , do đó ta có: $S_{xq} = 4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$ (đvdt)

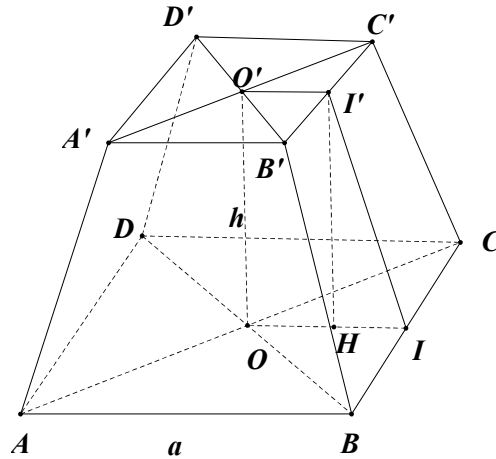
Thể tích hình chóp là $V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (đvtt)

4. Vận dụng nâng cao

Ví dụ 1: Một hình chóp cắt đều có đáy là hình vuông, các cạnh đáy bằng a và b . Biết diện tích xung quanh của hình chóp cắt bằng tổng diện tích hai đáy, khi đó chiều cao h của hình chóp cắt là:

A. $h = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}$ **B.** $h = \frac{a^2 + b^2}{(a + b)}$ **C.** $h = \frac{a + b}{2(a + b)}$ **D.** $h = \frac{a + b}{2(a + b)}$

Đáp án D



Các kí hiệu được minh họa trên hình vẽ

Diện tích xung quanh hình chóp cắt đều bằng tổng diện tích hai đáy nên:

$$(2a + 2b)d = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \frac{a^2 + b^2}{(2a + 2b)}$$

Gọi I, I' theo thứ tự là trung điểm của $BC, B'C'$. Ta có $O'I' \parallel A'B' \parallel AB \parallel OI$. Suy ra $O'I'$ và OI xác định mặt phẳng $(O'I'IO)$. Trên mặt phẳng đó kẻ $I'H \perp OI$

Đặt $I'I = d, I'H = O'O = h$. Ta có: $HI = OI - OH = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Từ đó suy ra:

$$h^2 = I'I^2 - HI^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4(a + b)^2} - \frac{(a - b)^2}{4} = \frac{a^2 b^2}{(a + b)^2} \Rightarrow h = \frac{ab}{a + b}$$

Ví dụ 2: Một hình lập phương lớn cạnh 4 được ghép lại từ 64 hình lập phương nhỏ cạnh 1. Người ta sơn tất cả 6 mặt của hình lập phương lớn. Khẳng định nào sai?

- A.** Số hình lập phương nhỏ cạnh 1 có đúng một mặt được sơn là 24
B. Số hình lập phương nhỏ cạnh 1 có đúng hai mặt được sơn là 24
C. Số hình lập phương nhỏ cạnh 1 có đúng ba mặt được sơn là 8

D. Số hình lập phương nhỏ cạnh 1 không có mặt nào được sơn là 12

Đáp án D

Ở mỗi mặt có 4 hình lập phương nhỏ được sơn một mặt

Do vậy ở 6 mặt có $4 \cdot 6 = 24$ hình.

Ở mỗi cạnh có 2 hình lập phương nhỏ được sơn hai mặt

Do vậy ở 12 cạnh có $2 \cdot 12 = 24$ hình

Ở mỗi đỉnh có 1 hình lập phương nhỏ được sơn ba mặt (là hình ở góc)

Do vậy ở 8 đỉnh có $1 \cdot 8 = 8$ hình.

Các hình lập phương nhỏ không có mặt nào được sơn là các hình lập phương nhỏ ở bên trong, chúng tạo thành hình lập phương có 2 cạnh, gồm $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ hình.

III. Bài tập trắc nghiệm

1. Nhận biết

1. Khẳng định nào sai?

A. Trong hình hộp 4 đường chéo đồng quy tại trung điểm của mỗi đường

B. Trong hình hộp đứng tất cả các mặt của nó đều là hình chữ nhật

C. Trong hình hộp chữ nhật 4 đường chéo bằng nhau

D. Trong các hình hộp chữ nhật có các kích thước a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ là đại lượng không đổi thì đường chéo của các hình hộp chữ nhật đó có độ dài không đổi.

2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Hỏi mp($BDD'B'$) và ($ACC'A'$) cắt nhau theo giao tuyến nào?

A. Là đường thẳng AA'

B. Là đường thẳng BB'

C. Là đường thẳng CC'

D. Một đáp án khác

3. Gọi M, Đ, C lần lượt là số mặt, số đỉnh và số cạnh của hình lăng trụ. Đáp án nào đúng?

A. $M + Đ - C = 2$

B. $M + Đ - C = 3$

C. $M + Đ - C = 4$

D. $M + Đ - C = 5$

4. Một hình hộp chữ nhật có tổng ba kích thước là 19cm, diện tích toàn phần là 192 cm^2 . Khi đó đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài là:

A. $d = 12$

B. $d = 14$

C. $d = 13$

D. $d = 15$

5. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có đường cao bằng cạnh đáy và bằng a. Khi đó diện tích toàn phần S_{tp} của lăng trụ là:

A. $S_{tp} = \frac{(6+\sqrt{2})}{4}a^2$ (đvdt)

B. $S_{tp} = \frac{(6+\sqrt{3})}{4}a^2$ (đvdt)

C. $S_{tp} = \frac{(6+\sqrt{2})}{2}a^2$ (đvdt)

D. $S_{tp} = \frac{(6+\sqrt{3})}{2}a^2$ (đvdt)

6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Khẳng định nào đúng?

A. Hình chóp CC'BD là hình chóp đều có đỉnh C

B. Hình chóp CC'BD là hình chóp đều có đỉnh C'

C. Hình chóp CC'BD là hình chóp đều có đỉnh B

D. Hình chóp CC'BD là hình chóp đều có đỉnh D

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	B	D	A	C	D	A

2. Thông hiểu

1. Đường chéo của hình lập phương bằng 5cm. Khi đó diện tích toàn phần S_{tp} của hình lập phương là:

A. $S_{tp} = 50cm^2$

B. $S_{tp} = 55cm^2$

C. $S_{tp} = 60cm^2$

D. $S_{tp} = 50cm^2$

2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Biết AB = 7cm, AC' = 10cm và $\widehat{AC'A'} = 30^\circ$. Khi đó thể tích V của hình hộp chữ nhật là:

A. $V = 45\sqrt{26}(cm^3)$

B. $V = 35\sqrt{26}(cm^3)$

C. $V = 40\sqrt{26}(cm^3)$

D. $V = 30\sqrt{26}(cm^3)$

3. Cho hình chóp tam giác đều S. ABC. Gọi M là trung điểm của AB. Biết $SM = 5cm$, $SA = \sqrt{29}$. Khi đó diện tích toàn phần S_{tp} của hình chóp là:

A. $V = 30 + 2\sqrt{3}(cm^3)$

B. $V = 30 + 3\sqrt{3}(cm^3)$

C. $V = 30 + 4\sqrt{3}(cm^3)$

D. $V = 30 + 5\sqrt{3}(cm^3)$

4. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, chiều cao bằng 15cm, thể tích là $1280cm^3$. Khi đó diện tích xung quanh S_{xq} của hình chóp là:

A. $S_{xq} = 548cm^2$

B. $S_{xq} = 542cm^2$

C. $S_{xq} = 546cm^2$

D. $S_{xq} = 544cm^2$

5. Một hình hộp chữ nhật có tổng độ dài các cạnh bằng 140cm, khoảng cách từ một đỉnh đến đỉnh xa nhất bằng 21cm. Diện tích toàn phần S_{tp} của hình hộp chữ nhật là:

A. $S_{tp} = 784cm^2$

B. $S_{tp} = 786cm^2$

C. $S_{tp} = 788cm^2$

D. Một đáp án khác

6. Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông, diện tích mặt chéo ($BDD'B'$) bằng $80cm^2$, M và N theo thứ tự là trung điểm của AA' và CC', MN = 8cm. Thể tích V của hình hộp chữ nhật là:

A. $V = 300cm^3$

B. $V = 310cm^3$

C. $V = 320cm^3$

D. $V = 350cm^3$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	A	B	C	D	A	C

3. Vận dụng

1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F, G, H, M, N lần lượt là trung điểm của CD', CB', CC', B'C', C'D'. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng?

Tứ giác EFMN là hình bình hành; $CC' // mp(EFMN)$; $mp(EFG) // mp(A'B'C'D')$; $mp(EFG) \perp mp(CC'D')$

A. Có 1 kết quả đúng

B. Có 2 kết quả đúng

C. Có 3 kết quả đúng

D. Cả 4 kết quả đều đúng

2. Một lăng trụ đều có tổng số mặt, số đỉnh và số cạnh là 20. Biết diện tích xung quang là $360cm^2$, chiều cao là 12cm. Khi đó thể tích V của lăng trụ là:

A. $V = 300\sqrt{3}cm^3$

B. $V = 300\sqrt{2}cm^3$

C. $V = 200\sqrt{3}cm^3$

D. $V = 200\sqrt{2}cm^3$

3. Một hình chóp cắt tứ giác đều, cạnh đáy lớn bằng a, cạnh đáy nhỏ bằng b, chiều cao là $\frac{ab}{a+b}$. Đáp án nào đúng?

A. $S_{xq} = 2(S_{\text{đáy to}} + S_{\text{đáy nhỏ}})$

B. $S_{xq} = (S_{\text{đáy to}} + S_{\text{đáy nhỏ}})$

C. $S_{xq} = \frac{1}{2}(S_{\text{đáy to}} + S_{\text{đáy nhỏ}})$

D. $S_{xq} = \frac{3}{2}(S_{\text{đáy to}} + S_{\text{đáy nhỏ}})$

4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Điểm E chia DB theo tỉ số 1:3, điểm F chia B'A theo tỉ số 1:3, điểm M chia DA theo tỉ số 1:3. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng?

Tứ giác A'B'CD là hình chữ nhật; mp(EMF) // mp(A'B'CD); EF // mp(A'B'CD); diện tích của hình chữ nhật A'B'CD là $a^2\sqrt{2}$ (đvdt)

A. Có 1 kết quả đúng

B. Có 2 kết quả đúng

C. Có 3 kết quả đúng

D. Cả 4 kết quả đều đúng

5. Một cái hòm hình chữ nhật có chiều dài 36cm, chiều rộng 15cm, chiều cao 16cm. Số hình lập phương cạnh 3cm nhiều nhất chứa trong hòm đó là:

A. 180

B. 300

C. 320

D. 192

6. Một hình hộp chữ nhật được ghép bởi 42 hình lập phương cạnh 1cm. Biết chu vi đáy của hình hộp chữ nhật là 18cm. Khi đó tổng ba kích thước của hình hộp chữ nhật là

A. 12cm

B. 15cm

C. 9cm

D. 10cm

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	D	A	B	D	B	A

4. Vận dụng nâng cao

1. Một khối gỗ hình lập phương cạnh dài n đơn vị ($n \in \mathbb{N}, n > 2$) được sơn xanh tất cả các mặt. Xẻ khối gỗ đó bằng những lát cắt song song với các mặt, chia khối gỗ thành n^3 hình lập phương đơn vị. Biết các khối nhỏ không được sơn mặt nào bằng $\frac{2}{3}$ số khối nhỏ được sơn chỉ một mặt. Khi đó n nhận giá trị là:

A. $n = 7$

B. $n = 5$

C. $n = 6$

D. $n = 8$

2. Một khối gỗ hình lập phương cạnh 3dm. Ở chính giữa mỗi mặt người ta đục các lỗ thông hơi tới mặt đối diện. Mặt lỗ đục hình vuông cạnh 1dm song song với các cạnh của hình lập phương. Khi đó tổng diện tích S mặt ngoài và mặt trong của khối gỗ là:

A. $S = 74cm^3$

B. $S = 72cm^3$

C. $S = 76cm^3$

D. $S = 70cm^3$

3. Một bể cá hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có chiều dài AB = 50cm, chiều rộng AD = 40cm, chiều cao AA' = 30cm. Trong bể có nước nhưng không đầy. Nếu ta cho bể nằm nghiêng trên cạnh đáy AB tới khi mép nước dâng lên tới sát cạnh A'B' thì ở thành đối diện, mép nước rút xuống còn cách cạnh CD là 10cm. Khi đó thể tích V của nước trong bể cá là:

- A. $V = 50dm^3$ B. $V = 55dm^3$ C. $V = 40dm^3$ D. $V = 45dm^3$

4. Một con nhện đang ở vị trí E trong một gian phòng hình lập phương (E nằm trên AB và $AE = \frac{1}{3}AB$). Con nhện muốn bò qua cả sáu mặt của gian phòng rồi trở về E. Gọi S là quãng đường mà con nhện đã đi. Đáp án nào sau đây là đúng? Biết rằng bề mặt của gian phòng có đường chéo 6m.

- A. minS = 18m B. minS = 21m C. minS = 15m D. minS = 24m

5. Người ta viết vào sáu mặt của một hình lập phương sáu số có tổng bằng 21. Sau đó ở mỗi đỉnh của hình lập phương, ta ghi một số bằng tổng các số ở các mặt chứa đỉnh đó. Tổng S các số ở đỉnh là:

- A. S = 80 B. S = 80 C. S = 84 D. S = 88

6. Mỗi hình lập phương cạnh 5cm được ghép bởi 125 hình lập phương nhỏ cạnh 1cm. Số các hình lập phương nhỏ giáp với 6 mặt của các hình lập phương nhỏ khác là:

- A. 24 B. 27 C. 21 D. 30

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	C	B	C	A	C	B

PHẦN III: ĐỀ KIỂM TRA

I. Đề kiểm tra 1 tiết

A. Phần đại số

1. Đa thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ được phân tích thành:

A. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

B. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z)$

C. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)[2(x^2 + y^2 + z^2) - xy - yz - zx]$

D. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)[x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)]$

2. Đa thức $P(x) = x^3 - 6x + 5$ chia hết cho đa thức nào?

A. $x - 2$

B. $x + 2$

C. $x - 1$

D. $x + 1$

3. Cho x, y thỏa mãn điều kiện $[(x - 2y)(x - 7y) - x^2 + 4y^2] : (x - 2y) = 18$. Giá trị của x, y là:

A. x tùy ý; $y = 2$

B. $x \neq -4; y = -2$

C. x tùy ý; $y = -2$

D. $x \neq -4; y = 2$

4. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên n , sao cho đơn thức $-7x^{n+1}y^6$ chia hết cho đơn thức $4x^5y^n$

A. Không có giá trị nào

B. có 1 giá trị

C. Có 2 giá trị

D. Có 3 giá trị

5. Cho $P = (75x^5y^2 - 45x^4y^3) : 3x^3y^2 - \left(\frac{5}{2}x^2y^4 - 2xy^5\right) : \frac{1}{2}xy^3$. Khẳng định nào sai?

A. $P \geq 0, \forall x, y \neq 0$

B. $P > 0, \forall x, y \neq 0$ và $5x \neq 2y$

C. $P = 0 \Leftrightarrow 5x = 2y \neq 0$

D. P nhận cả giá trị âm và dương

6. Giá trị nhỏ nhất của thương $(4x^5 + 2x^4 + 4x^3 - x - 1) : (2x^3 + x - 1)$ là:

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

7. Đa thức $P = x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$ được phân tích thành:

A. $P = x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2 = x^2(x+1)(x^3 + x^2 + 9)$

B. $P = x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2 = x^2(x-1)(x^3 + x^2 - 9)$

C. $P = x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2 = x^2(x+9)(x^3 + x^2 + 1)$

D. $P = x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2 = x^2(x-9)(x^3 + x^2 - 1)$

8. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz$. Kết luận nào đúng?

A. $x+y=z$

B. $y+z=x$

C. $z+x=y$

D. $x=y=z$

9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để thương $(3x^3 + 13x^2 - 7x + 5) : (3x - 2)$ nhận giá trị nguyên?

A. Có 1 giá trị

B. Có 2 giá trị

C. Có 3 giá trị

D. Có 4 giá trị

10. Trong các đẳng thức sau, có bao nhiêu đẳng thức đúng?

$$x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$$

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 3xyz = (x+y+z)(xy + yz + zx)$$

$$xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z-x) = (x+y)(y+z)(z-x)$$

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

A. Có 1 đẳng thức đúng

B. Có 2 đẳng thức đúng

C. Có 3 đẳng thức đúng

D. Cả 4 đẳng thức đều đúng

11. Cho $x > y > z$. Bất đẳng thức nào đúng?

A. $x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y) > 0$

B. $x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y) < 0$

C. $x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y) > 1$

D. $x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y) > 1$

12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để thương $(2x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 44) : (2x^2 - 7)$ nhận giá trị nguyên?

A. Có 1 giá trị

B. Có 2 giá trị

C. Có 3 giá trị

D. Có 4 giá trị

13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để thương $(x^6 - x^4 - 2x^2 + 9) : (x^4 + x^2)$ nhận giá trị nguyên?

A. Không có giá trị nào

B. Có 1 giá trị

C. Có 2 giá trị

D. Có 3 giá trị

14. Kết quả của phép tính: $P = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3} \cdot \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 10x + 25}$ là:

A. $P = \frac{x+2}{x+5}$ B. $P = \frac{x-2}{x+5}$ C. $P = \frac{x-2}{x-5}$ D. $P = \frac{x+2}{x-5}$

15. Cho $P = \frac{x + \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{x}}$. Có bao nhiêu cặp giá trị nguyên dương của x và y với $x + y \leq 50$ để P có

giá trị là 8?

A. Có 4 cặp B. Có 5 cặp C. Có 6 cặp D. Có 10 cặp

16. Cho x, y, z khác 0 và $\frac{x-y-z}{x} = \frac{-x+y-z}{y} = \frac{-x-y+z}{z}$. Khi đó biểu thức

$P = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{z}{y}\right) \left(1 + \frac{x}{z}\right)$ có thể nhận bao nhiêu giá trị khác nhau?

A. Vô số giá trị khác nhau B. 3 giá trị khác nhau
C. 2 giá trị khác nhau D. 5 giá trị khác nhau

17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức:

$P = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$ nhận giá trị nguyên?

A. Có 8 giá trị B. Có 9 giá trị C. Có 10 giá trị D. Có 7 giá trị

18. Cho x, y, z khác -1. Khi đó biểu thức:

$P = \frac{xy + 2x + 1}{xy + x + y + 1} + \frac{yz + 2y + 1}{yz + y + z + 1} + \frac{zx + 2z + 1}{zx + z + x + 1}$ có thể nhận bao nhiêu giá trị?

A. Nhận vô số giá trị khác nhau B. Luôn nhận một giá trị (hằng số)
C. Nhận 2 giá trị khác nhau D. Nhận 3 giá trị khác nhau

19. Cho $x = by + cz$; $y = ax + cz$; $z = ax + by$; $x + y + z \neq 0$; $xyz \neq 0$. Khi đó ta có:

A. $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$ B. $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 4$

C. $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 3$ D. $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$

20. Cho $\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} = a$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $P = \frac{x^{2n} - x^{-2n}}{x^{2n} + x^{-2n}}$ có giá trị là:

A. $P = \frac{2a}{1+a^2}$ B. $P = \frac{a}{1+a^2}$ C. $P = \frac{3a}{1+a^2}$ D. $P = \frac{n.a}{1+a^2}$

21. Cho bốn số a, b, x, y sao cho $ab = 1$, $ax + by = 2$. Đáp án nào đúng?

A. $xy \geq 2$ B. $xy \geq 4$ C. $xy \leq 3$ D. $xy \leq 1$

22. Cho $x + y + z = 0$. Đáp án nào đúng?

A. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$ B. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^4 + y^4 + z^4)$
C. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^4 + y^4 + z^4)$ D. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3(x^4 + y^4 + z^4)$

23. Cho x, y là hai số khác 0, thỏa mãn $(x + y)^5 = x^5 + y^5$. Đáp án nào đúng?

- A. $x = y$ B. $x = -y$ C. $x = 2y$ D. $x = -2y$

24. Cho $x^2 - y^2 = 1$. Khẳng định nào đúng?

- A. $2(x^6 - y^6) - 3(x^4 + y^4) = -2$ B. $2(x^6 - y^6) - 3(x^4 + y^4) = 2$
C. $2(x^6 - y^6) - 3(x^4 + y^4) = -1$ D. $2(x^6 - y^6) - 3(x^4 + y^4) = 1$

25. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là sai?

- A. Với mọi số nguyên dương n , biểu thức $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ luôn là số chính phương
B. Với mọi số nguyên dương n , biểu thức $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ luôn là số chính phương
C. Với mọi số nguyên dương x, y , biểu thức $(x - y)(x - 2y)(x - 3y)(x - 4y) + y^4$ luôn là số chính phương
D. Với mọi số nguyên dương n , biểu thức $(n + 1)(n + 3)(n + 4)(n + 6) + 8$ luôn là số chính phương

26. Cho A là một số chính phương và m là số tự nhiên tùy ý. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Không tồn tại số tự nhiên n nào sao cho $A + mn$ là một số chính phương
B. Tồn tại duy nhất một số tự nhiên n , sao cho $A + mn$ là một số chính phương
C. Có đúng m số tự nhiên n , sao cho $A + mn$ là một số chính phương
D. Tồn tại vô hạn số tự nhiên n , sao cho $A + mn$ là một số chính phương

27. Các số A, B, C thỏa mãn $\frac{x^2 + x + 4}{(x + 2)^3} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2} + \frac{C}{(x + 2)^3}$ là:

- A. $\begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 6 \end{cases}$ B. $\begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = 6 \end{cases}$ C. $\begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = -6 \end{cases}$ D. $\begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \\ C = 6 \end{cases}$

28. Cho $x, y, z \neq 0, x + y + z = xyz, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$. Khi đó giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ là:}$$

- A. $P = 2$ B. $P = 1$ C. $P = \frac{1}{2}$ D. $P = \frac{3}{2}$

29. Cho $\frac{x}{y - z} + \frac{y}{z - x} + \frac{z}{x - y} = 0, x \neq y, y \neq z, z \neq x$.

Giá trị của biểu thức $\frac{x}{(y - z)^2} + \frac{y}{(z - x)^2} + \frac{z}{(x - y)^2}$ là:

- A. $P = -1$ B. $P = 1$ C. $P = 0$ D. Một đáp án khác

30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức:

$$P = \left(\frac{2x - x^2}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \right) \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1 - x}{x} \right) \text{ nhận giá trị nguyên?}$$

- A. Có 1 giá trị B. Có 2 giá trị

C. Có 3 giá trị

D. Không có giá trị nào

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	C	B	D	D	A	B	D	B	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	D	A	C	B	C	A	B	D	A
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	D	A	B	C	D	D	A	B	C	B

B. Phần hình học

1. Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có đường chéo BD chia hình thang thành hai tam giác cân: tam giác ABD cân tại A và tam giác BCD cân tại D. Khi đó góc nhọn của hình thang có độ lớn là:

A. 70°

B. 73°

C. 74°

D. 72°

2. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng d qua G, cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên d. Đáp án nào đúng?

A. $BB' + CC' = AA'$

B. $BB' + AA' = CC'$

C. $AA' + CC' = BB'$

D. Cả ba đáp án trên đều sai

3. Trên đoạn thẳng AB lấy một điểm M ($MA > MB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F, I, K lần lượt là trung điểm của CM, CB, DM, DA. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu kết quả đúng?

$$EF \parallel KI; \widehat{AKI} = 60^\circ; KF = \frac{1}{2}CD; KF = EI.$$

A. Có 1 kết quả đúng

B. Có 2 kết quả đúng

C. Có 3 kết quả đúng

D. Cả 4 kết quả đều đúng

4. Gọi H là hình chiếu của đỉnh B trên đường chéo AC của hình chữ nhật ABCD, M, K, I, O lần lượt là trung điểm của AH, CD, AB, IC. Đáp án nào sai?

A. $MO = \frac{1}{2}IC$

B. $\widehat{BMK} = 90^\circ$

C. $IC = KB$.

D. $\widehat{BMK} = 80^\circ$

5. Trong tứ giác ABCD, gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu kết quả đúng?

Các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy; các đường thẳng AA', BB', DD' đồng quy; các đường thẳng AA', DD', CC' không đồng quy; các đường thẳng BB', DD', CC' không đồng quy.

A. Có 1 kết quả đúng

B. Có 2 kết quả đúng

C. Có 3 kết quả đúng

D. Cả 4 kết quả đều đúng

6. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Qua E kẻ đường vuông góc với BD, cắt BC ở F. Khẳng định nào sai?

- A. E và F đối xứng với nhau qua BD B. C và D đối xứng với nhau qua BD
C. Góc có độ lớn 130° D. IF là tia phân giác của góc BIC

7. Cho điểm D nằm bên trong tam giác đều ABC. Vẽ các tam giác đều BDE, CDF (E, F, D nằm cùng phía đối với CD). Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng?

Tứ giác EAFC có một cặp cạnh đối bằng nhau; tứ giác BEAF có một cặp cạnh đối bằng nhau; tứ giác EAFD là hình bình hành; trong ba tam giác DBC, EBA, FAC chỉ có hai tam giác bằng nhau.

- A. Có 1 kết quả đúng B. Có 2 kết quả đúng
C. Có 3 kết quả đúng D. Cả 4 kết quả đều đúng

8. Cho ba điểm phân biệt O, D, E. Dựng tam giác ABC sao cho O là giao điểm của các đường phân giác BD, CE. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng?

Nếu $\widehat{DOE} \leq 90^\circ$ thì bài toán không có nghiệm hình; nếu D, O, E thẳng hàng thì bài toán không có nghiệm hình; nếu tam giác DOE cân ở O và $\hat{O} = 120^\circ$ thì bài toán có vô số nghiệm hình; nếu tam giác DOE cân ở O và $\hat{O} = 100^\circ$ thì bài toán có vô số nghiệm hình.

- A. Có 1 kết quả đúng B. Có 2 kết quả đúng
C. Có 3 kết quả đúng D. Cả 4 kết quả đều đúng

9. Cho tứ giác ABCD. Trên cạnh AB lấy các điểm E, F sao cho $AE = EF = FB$. Trên cạnh CD lấy các điểm G, H sao cho $DG = GH = HC$. Gọi M, I, K, N lần lượt là trung điểm của AD, EG, FH, BC. Đáp án nào sai?

- A. Các điểm M, I, K thẳng hàng
B. Các điểm I, K, N thẳng hàng
C. Các điểm M, I, K, N thẳng hàng và $MI = IK = KN$
D. Đường thẳng EG song song với đường thẳng FH

10. Cho tam giác đều ABC, một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại D, E. Gọi G là trọng tâm của tam giác ADE, I là trung điểm của CD. Khi đó số đo các góc của tam giác GIB lần lượt là:

- A. $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ B. $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$
C. $80^\circ, 50^\circ, 50^\circ$ D. $100^\circ, 40^\circ, 40^\circ$

11. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh bằng a, b, c, chu vi bằng 2p, các chiều cao tương ứng bằng h, m, n. Đáp án nào sai?

A. $(b+c)^2 \geq a^2 + 4h^2$

B. $h^2 + m^2 + n^2 \geq p^2$

C. $h^2 \leq p(p-a)$

D. $m^2 \leq p(p-b)$

12. Cho hình bình hành ABCD có $AB = a$; $AD = b$. Gọi S là diện tích của hình bình hành. Đáp án nào đúng?

A. $\max S = 2ab$

B. $\max S = ab$

C. $\max S = 3ab$

D. S không có giá trị lớn nhất

13. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm M trên đáy BC vẽ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Gọi h là độ dài đường cao hạ từ đỉnh B của tam giác ABC. Đáp án nào đúng?

A. $MD + ME = 2h$

B. $MD + ME = \frac{1}{2}h$

C. $MD + ME = h$

D. $MD + ME = \frac{2}{3}h$

14. Cho ngũ giác ABCDE. Vẽ $AH \perp CD$, $BM \parallel AC$; $EN \parallel AD$ (M, N thuộc đường thẳng CD). Biết $AH = h$, $MN = a$. Khi đó diện tích S của ngũ giác ABCDE là:

A. $S = ah$ (đvdt)

B. $S = 2ah$ (đvdt)

C. $S = \frac{1}{2}ah$ (đvdt)

D. $S = \frac{1}{4}ah$ (đvdt)

15. Một đa giác có phân giác của tất cả các góc đồng quy tại O. Khoảng cách từ O đến một cạnh nào đó của đa giác là r. Gọi p là nửa chu vi của đa giác, khi đó diện tích S của đa giác được tính bởi:

A. $S = 2pr$

B. $S = pr$

C. $S = \frac{1}{2}pr$

D. $S = \frac{1}{4}pr$

16. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm M trên đường thẳng BC (M không thuộc đáy BC) vẽ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Gọi h là độ dài đường cao hạ từ đỉnh B của tam giác ABC. Đáp án nào đúng?

A. $|MD - ME| = 2h$

B. $|MD - ME| = \frac{1}{2}h$

C. $|MD - ME| = h$

D. $|MD - ME| = \frac{1}{4}h$

17. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Vẽ $DH \perp AB$. Đặt $DH = d, AB = c, AC = b$. Đáp án nào đúng?

- A. $\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{d}$ B. $\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| = \frac{2}{d}$ C. $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ D. $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{d}$

18. Cho hình bình hành ABCD. Trên AB lấy điểm M, trên AD lấy điểm N. Gọi O là giao điểm của BN với DM. Biết OC là tia phân giác của góc BOD. Đáp án nào đúng?

- A. $BN = 2DM$ B. $BN = \frac{1}{2}DM$ C. $BN = \frac{2}{3}DM$ D. $BN = DM$

19. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F (khác đỉnh của tam giác) sao cho AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Đáp án nào đúng?

- A. $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 1$ B. $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$
C. $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 3$ D. Cả ba đáp án trên đều sai

20. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Vẽ $MD \perp BC, ME \perp CA, MF \perp AB$. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, MD = x, ME = y, MF = z$ và $S_{ABC} = S$. Khẳng định nào đúng?

- A. $ax + by + cz = S$ B. $ax + by + cz = 3S$
C. $ax + by + cz = 2S$ D. $ax + by + cz = 4S$

21. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), M là một điểm nằm trên cạnh BC. Vẽ $BI \perp AM, CK \perp AM$. Gọi h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các đường cao hạ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Khẳng định nào đúng?

- A. $\min(BI + CK) = \frac{h_a + h_b + h_c}{3}$ B. $\min(BI + CK) = h_c$
C. $\min(BI + CK) = h_a$ D. $\min(BI + CK) = h_b$

22. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F (khác đỉnh của tam giác) sao cho AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Đáp án nào đúng?

- A. $\min\left(\frac{AH}{HD} + \frac{BH}{HE} + \frac{CH}{HF}\right) = 3$ B. $\min\left(\frac{AH}{HD} + \frac{BH}{HE} + \frac{CH}{HF}\right) = 6$
C. $\min\left(\frac{AH}{HD} + \frac{BH}{HE} + \frac{CH}{HF}\right) = 9$ D. $\min\left(\frac{AH}{HD} + \frac{BH}{HE} + \frac{CH}{HF}\right) = 1$

23. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Vẽ $MD \perp BC$, $ME \perp CA$, $MF \perp AB$. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $MD = x$, $ME = y$, $MF = z$ và $S_{ABC} = S$. Khẳng định nào đúng?

A. $\min\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = \frac{(a+b+c)^2}{2S}$

B. $\min\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = \frac{(a+b+c)^2}{S}$

C. $\min\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = \frac{(a+b+c)^2}{3S}$

D. $\min\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = \frac{2(a+b+c)^2}{S}$

24. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh CD, điểm F thuộc cạnh BC. Biết rằng chu vi tam giác CEF bằng nửa chu vi hình vuông. Khi đó ta có:

A. $\widehat{EAF} = 45^\circ$

B. $\widehat{EAF} = 30^\circ$

C. $\widehat{EAF} = 60^\circ$

D. $\widehat{EAF} = 90^\circ$

25. Cho hình vuông ABCD, điểm M thuộc cạnh AB. Tia phân giác của góc MCD cắt cạnh AD tại N. Cho biết $BM = m$, $DN = n$. Khi đó độ dài của CM được tính theo m và n là:

A. $CM = 2(m+n)$

B. $CM = 2m+n$

C. $CM = m+n$

D. $CM = m+2n$

26. Cho hình vuông ABCD. Lấy các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AD, AB sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu của A trên BE. Khi đó ta có:

A. $\widehat{CHF} = 60^\circ$

B. $\widehat{CHF} = 30^\circ$

C. $\widehat{CHF} = 45^\circ$

D. $\widehat{CHF} = 90^\circ$

27. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tâm của các hình vuông có cạnh AB, BC, CD, DA dựng ra phía ngoài tứ giác. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Tứ giác EFGH có hai đường chéo bằng nhau

B. Tứ giác EFGH có hai đường chéo vuông góc với nhau

C. Trung điểm các đường chéo của các tứ giác ABCD, EFGH là đỉnh của một hình vuông

D. Trong ba khẳng định trên có ít nhất một khẳng định sai.

28. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, diện tích S. Đáp án nào đúng?

A. $(a+b+c)(b+c-a) = 4S$

B. $(a+b+c)(b+c-a) = S$

C. $(a+b+c)(b+c-a) = 2S$

D. $(a+b+c)(b+c-a) = 3S$

29. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi D là điểm nằm giữa B và M. Qua M kẻ đường thẳng song song với DA, cắt AC tại E. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Diện tích tam giác DEC thay đổi phụ thuộc vào vị trí của điểm D

B. Diện tích tam giác DEC bằng $\frac{1}{2}$ diện tích tam giác ABC

C. Diện tích tam giác DEC bằng $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác ABC

D. Diện tích tam giác DEC bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC

30. Cho tam giác ABC diện tích S. Lấy các điểm E, G trên BC sao cho $BE = EG = GC$. Gọi D, H theo thứ tự là trung điểm của AC, AB; I là giao điểm của GH và BD; K là giao điểm của AG và BD. Diện tích tứ giác EIKG là:

A. $S_{EIKG} = \frac{6}{35}S$ B. $S_{EIKG} = \frac{1}{7}S$ C. $S_{EIKG} = \frac{1}{5}S$ D. $S_{EIKG} = \frac{6}{37}S$

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	A	D	D	B	C	C	C	D	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	B	C	C	B	C	C	D	B	C
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	D	B	A	A	C	D	D	A	B	A

II. Đề kiểm tra học kì

1. Vận động viên A chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi cách nhau 6km với vận tốc 10km/h rồi chạy xuống với vận tốc 15km/h. Vận động viên B cũng chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi theo cùng một lộ trình với vận tốc 12km/h. Biết rằng B chạy sau A 15 phút. Khi B gặp A từ đỉnh đồi chạy xuống, họ cách đỉnh đồi là:

A. 4km B. 3km C. 2km D. 1km

2. Một lớp có 20 học sinh nữ và một số bạn nam. Cuối năm tất cả đều đạt học sinh giỏi hoặc khá. Biết số nam sinh giỏi bằng số nữ khá. Khi đó tổng số học sinh giỏi của lớp là:

A. 40 học sinh B. 30 học sinh C. 20 học sinh D. 25 học sinh

3. Phương trình $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \dots + \frac{1}{x^2 + 15x + 56} = \frac{1}{14}$ có tổng nghiệm S bằng bao nhiêu?

A. $S = -7$ B. $S = -8$ C. $S = -9$ D. $S = -10$

4. Phương trình $\left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left[1 + \frac{1}{x(x+2)}\right] = \frac{31}{16}$ ($x \in N$) có nghiệm là:

- A. $x = 40$ B. $x = 60$ C. $x = 50$ D. $x = 30$

5. Hai vòi nước khác nhau cùng cho chảy vào một bể. Thời gian cần cho vòi A chảy một mình đầy bể ít hơn thời gian cho vòi B chảy một mình đầy bể 2 giờ. Tích hai thời gian đó bằng 4 lần thời gian cần cho cả hai vòi cùng chảy đầy bể. Khi đó một mình vòi B chảy đầy bể sau mấy giờ?

- A. Sau 6 giờ B. Sau 5 giờ C. Sau 3 giờ D. Sau 4 giờ

6. Cho phương trình $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x-a+b}$ với a, b là các tham số. Phương trình có vô số nghiệm khi nào?

- A. $a = -b$ B. $a = b$ C. $a = -2b$ D. $a = 2b$

7. Cho phương trình $\frac{3}{x-m} - \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-2m}$ với m là tham số. Phương trình có nghiệm duy nhất khi nào?

- A. $m \neq 0$ B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq \pm 2 \end{cases}$

8. Bất phương trình $\frac{x-3}{x+5} + \frac{x+5}{x-3} < 2$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. Có 7 nghiệm nguyên B. Có 6 nghiệm nguyên
C. Có 5 nghiệm nguyên D. Có 4 nghiệm nguyên

9. Bất phương trình $|4x-3| < |4x+1|$ có nghiệm là:

- A. $x > \frac{1}{2}$ B. $x > \frac{1}{4}$ C. $x > 2$ D. $x > 4$

10. Khẳng định nào sai?

A. Bất phương trình $|5x-2| < 8$ có nghiệm là $-\frac{6}{5} < x < 2$

B. Bất phương trình $|3x+2| < 5x-4$ có nghiệm là $x > 3$

C. Bất phương trình $3|x+1| > 5$ có nghiệm là $\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < -\frac{8}{3} \end{cases}$

D. Bất phương trình $|x^2 - 1| > x + 1$ có nghiệm là $\begin{cases} x > 2 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$

11. Bất phương trình $|7x - 1| > |7x + 3|$ có nghiệm là:

A. $x < -\frac{1}{7}$ B. $x < -7$ C. $x < -\frac{1}{3}$ D. $x < -3$

12. Phương trình $\frac{m(x+4) - 5(m-1)}{x+1} = 2$ có nghiệm âm khi:

A. $m > 3$ B. $m < 2$
C. $2 < m < 3$ và $m \neq 2,5$ D. $2 < m < 3$

13. Phương trình $|x - 1| + |x - 4| = 3$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. Có 1 nghiệm B. Có 2 nghiệm C. Có 3 nghiệm D. Có 4 nghiệm

14. Cho a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = \sqrt{5 - a - 2b} + \sqrt{5 - c - 2d} + \sqrt{5 - ac - bd}$. Đáp án nào đúng?

A. $\max P = \sqrt{30}$ B. $\max P = \frac{3}{2}\sqrt{30}$
C. $\max P = 2\sqrt{30}$ D. $\max P = \frac{2}{3}\sqrt{30}$

15. Cho a, b, c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca)$. Đáp án nào đúng?

A. $\min P = 1$ B. $\min P = \frac{1}{2}$ C. $\min P = 0$ D. $\min P = -\frac{1}{2}$

16. Cho x, y, z là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$P = x^3 + y^3 + c^3 - 3xyz - 4(x - y)(y - z)(z - x)$. Đáp án nào đúng?

A. $\min P = 0$ B. $\min P = -1$ C. $\min P = \frac{1}{2}$ D. $\min P = -\frac{1}{2}$

17. Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$. Đáp án nào đúng?

- A. $\min P = 1$ B. $\min P = \frac{3}{2}$ C. $\min P = \frac{1}{2}$ D. $\min P = 2$

18. Các số dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = 4$. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức đúng?

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \leq 16; \quad 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \leq 20$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 17; \quad 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 27$$

- A. Có một bất đẳng thức đúng B. Có hai bất đẳng thức đúng
C. Có ba bất đẳng thức đúng D. Cả bốn bất đẳng thức đều đúng

19. Cho x, y là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện:

$$x^3 + y^3 + xy = x^2 + y^2. \text{ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:}$$

$$P = \frac{1 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{y}} + \frac{2 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{y}}. \text{ Đáp án nào đúng?}$$

- A. $\min P = \frac{4}{3}; \max P = 4$ B. $\min P = \frac{3}{4}; \max P = 4$
C. $\min P = \frac{4}{3}; \max P = 3$ D. $\min P = \frac{3}{4}; \max P = 3$

20. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 4. \text{ Khi đó ta có:}$$

- A. $5x = 4y$ B. $3x = 4y$ C. $4x = 5y$ D. $4x = 3y$

21. Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3}. \text{ Đáp án nào đúng?}$$

- A. $\min P = 1$ B. $\min P = 2$ C. $\min P = \frac{1}{2}$ D. $\min P = \frac{1}{3}$

22. Cho a, b, c là các số thực dương. Trong các bất đẳng thức sau, có bao nhiêu bất đẳng thức sai?

$$\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2};$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{2ac};$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + c)$$

- A.** Không có bất đẳng thức nào sai **B.** Có một bất đẳng thức sai
C. Có hai bất đẳng thức sai **D.** Cả ba bất đẳng thức đều sai

23. Cho a, b, c là các số thực dương và $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{ab + a + 2} + \frac{1}{bc + b + 2} + \frac{1}{ca + c + 2}. \text{ Đáp án nào đúng?}$$

- A.** $\max P = 1$ **B.** $\max P = \frac{3}{4}$ **C.** $\max P = 2$ **D.** 2

24. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Bất đẳng thức nào đúng?

- A.** $(a + b)(b + c)(c + a) + 13 \geq 7(a + b + c)$
B. $(a + b)(b + c)(c + a) + 7 \geq 5(a + b + c)$
C. $(a + b)(b + c)(c + a) + 16 \geq 8(a + b + c)$
D. $(a + b)(b + c)(c + a) + 19 \geq 9(a + b + c)$

25. Các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $0 < a, b, c < 2$. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A.** $\min\{a(2 - b); b(2 - c); c(2 - a)\} \leq \frac{1}{2}$
B. $\min\{a(2 - b); b(2 - c); c(2 - a)\} \geq \frac{3}{2}$
C. $\min\{a(2 - b); b(2 - c); c(2 - a)\} \leq 1$
D. $\min\{a(2 - b); b(2 - c); c(2 - a)\} \geq \frac{6}{5}$

26. Cho tam giác ABC , $AB = 4cm$; $AC = 4,5cm$. Trên AB và AC lấy các điểm M và N sao cho $AM = AN = 3cm$. Gọi O là giao điểm của BN với CM . Đáp án nào đúng?

- A.** $\frac{OB}{ON} + \frac{OC}{OM} = 4$ **B.** $\frac{OB}{ON} + \frac{OC}{OM} = 3$

C. $\frac{OB}{ON} + \frac{OC}{OM} = 4,5$

D. $\frac{OB}{ON} + \frac{OC}{OM} = 3,5$

27. Cho tam giác ABC có $AB = 2cm$, $AC = 3cm$, đường phân giác $AD = 1,2cm$. Khi đó góc BAC có độ lớn là bao nhiêu?

A. $\widehat{BAC} = 120^\circ$

B. $\widehat{BAC} = 90^\circ$

C. $\widehat{BAC} = 60^\circ$

D. $\widehat{BAC} = 45^\circ$

28. Cho tam giác ABC, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, $AB = 5cm$, $AC = 8cm$. Khi đó độ dài cạnh BC là:

A. $BC = 7cm$

B. $BC = 8cm$

C. $BC = 7,8cm$

D. $BC = 7,9cm$

29. Cho tam giác ABC, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Biết $\widehat{A} = 2\widehat{B}$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Khi đó ta có:

A. $a^2 = b^2 + 2bc$

B. $a^2 = b^2 + bc$

C. $a^2 = c^2 + 2bc$

D. $a^2 = c^2 + bc$

30. Cho tam giác ABC, $AB = 12$, $AC = 15$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy M và N sao cho $AM = 5$, $AN = 4$. Gọi O là giao điểm của BN và CM. Đáp án nào đúng?

A. $OB.ON = OC.OM$

B. $OB.ON = OC.ON$

C. $OB.ON = 2OC.OM$

D. $OB.ON = 2OC.ON$

31. Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và D, $AD = 15cm$, $CD = 9cm$. Gọi M là một điểm trên cạnh AD sao cho $MB = 5cm$, $MC = 15cm$. Gọi N là trung điểm của BC. Khi đó MN có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $MN = \frac{1}{4}\sqrt{250} cm$

B. $MN = \frac{1}{2}\sqrt{250} cm$

C. $MN = \frac{1}{4}\sqrt{270} cm$

D. $MN = \frac{1}{2}\sqrt{270} cm$

32. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM, O là trung điểm của AM. Tia BO cắt AC tại D, tia CO cắt AB tại E. Biết diện tích tam giác ADE là a^2 , khi đó diện tích S của tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A. $S = 9a^2$

B. $S = 16a^2$

C. $S = 12a^2$

D. $S = 6a^2$

33. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H, cắt BA tại O. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu kết quả đúng? $OA.OB = OC.OH$; góc OHA có số đo không đổi; tổng $BM.BH + CM.CA$ không đổi.

A. Không có kết quả nào đúng

B. Có 1 kết quả đúng

C. Có 2 kết quả đúng

D. Cả 3 kết quả đều đúng

34. Cho tam giác ABC có diện tích S, O là điểm nằm trong tam giác. Qua O vẽ những đường thẳng song song với ba cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác ABC thành ba hình bình hành và ba tam giác nhỏ. Gọi diện tích của các tam giác đó là $S_1; S_2; S_3$. Khẳng định nào đúng?

A. $\min(S_1 + S_2 + S_3) = \frac{S}{2}$

B. $\min(S_1 + S_2 + S_3) = \frac{S}{3}$

C. $\min(S_1 + S_2 + S_3) = \frac{S}{4}$

D. $\min(S_1 + S_2 + S_3) = \frac{2S}{3}$

35. Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài 4cm, chiều rộng 3cm, đường chéo 13cm. Khi đó diện tích toàn phần S_{tp} của hình hộp chữ nhật là:

A. $S_{tp} = 190 \text{ cm}^2$

B. $S_{tp} = 192 \text{ cm}^2$

C. $S_{tp} = 194 \text{ cm}^2$

D. $S_{tp} = 198 \text{ cm}^2$

36. Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và diện tích hình chữ nhật ADC'B' bằng $2a^2$. Khi đó diện tích xung quanh S_{xq} của hình hộp chữ nhật là:

A. $S_{xq} = 4\sqrt{3}a^2$ (đvdt)

B. $S_{xq} = 6\sqrt{3}a^2$ (đvdt)

C. $S_{xq} = 4\sqrt{6}a^2$ (đvdt)

D. $S_{xq} = 6\sqrt{6}a^2$ (đvdt)

37. Cho hình lập phương. Số T các đoạn thẳng mà hai đầu mút của nó là hai đỉnh của hình lập phương bằng bao nhiêu?

A. $T = 28$

B. $T = 56$

C. $T = 14$

D. Một đáp án khác

38. Có 125 hình lập phương đơn vị ghép lại thành hình lập phương lớn cạnh 5. Người ta sơn sáu mặt của hình lập phương lớn. Số các hình lập phương đơn vị có ít nhất một mặt được sơn là:

A. 94

B. 96

C. 98

D. 100

39. Để sơn một hình lập phương sao cho hai mặt kề nhau có màu khác nhau, số màu ít nhất cần dùng là:

A. 2

B. 3

C. 5

D. 4

40. Một hình lập phương cạnh 10 được tạo thành bởi 1000 hình lập phương đơn vị. Ta có thể nhìn thấy nhiều nhất bao nhiêu hình lập phương đơn vị?

A. 270

B. 274

C. 275

D. 271

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	C	D	C	B	D	A	B	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	C	D	B	C	A	B	D	A	C
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	A	B	B	A	C	B	A	C	B	A
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	9	40
Đáp án	B	A	D	B	B	B	A	A	C	B