

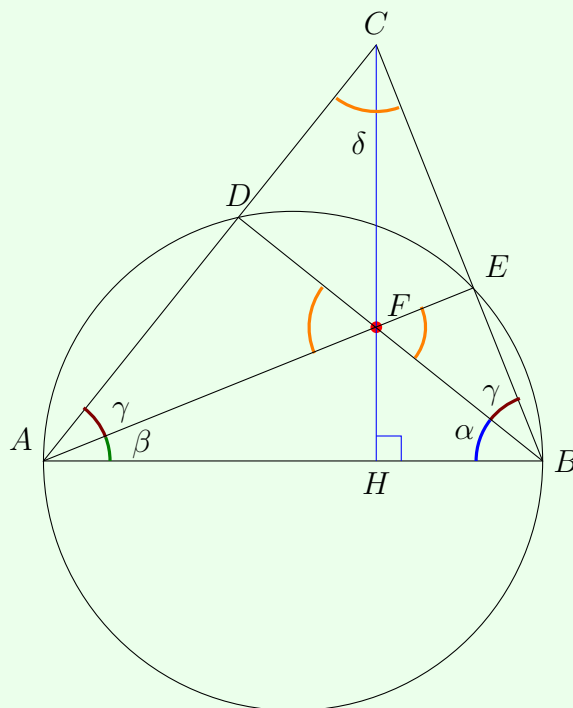
NGUYỄN NGỌC DŨNG - VƯƠNG PHÚ QUÝ - TIÊU KHÁNH
VĂN - BÙI TIẾN LỘC - NGUYỄN CAO ĐẲNG - NGUYỄN ANH
KHOA - NGUYỄN NGỌC THIÊN - NGUYỄN THÀNH ĐIỆP

BÀI TẬP

TOÁN

9

TẬP MỘT



- | | |
|----------------------------|--------------------|
| ■ Tóm tắt giáo khoa | ■ Bài tập cơ bản |
| ■ Các dạng toán thường gặp | ■ Bài tập nâng cao |
| ■ Phương pháp giải toán | ■ Bài tập tổng ôn |

(Tài liệu lưu hành nội bộ)

Mục lục

Phần I ĐẠI SỐ 5

Chương 1 CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA 7

§1.	CÁC PHÉP TOÁN CĂN BẢN VỀ CĂN BẬC HAI	7
1	Tìm tập xác định của một biểu thức chứa căn bậc hai	7
2	So sánh các biểu thức của căn bậc hai	8
3	Các bài toán về hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	8
§2.	LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG	9
1	Tính giá trị các biểu thức căn bậc hai (không chứa ẩn)	9
2	Rút gọn các biểu thức căn bậc hai (có chứa ẩn)	12
3	Chứng minh đẳng thức chứa căn bậc hai	13
4	Giải phương trình chứa căn bậc hai	15
5	Giải bất phương trình chứa căn bậc hai	18
§3.	BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG	22
1	Bài tập cơ bản	22
2	bài tập nâng cao	24
§4.	ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG	28
1	ĐỀ 1	28
2	ĐỀ 2	28
3	ĐÁP ÁN ĐỀ 1	29
4	ĐÁP ÁN ĐỀ 2	30

Chương 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT 33

§1.	NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ	33
§2.	HÀM SỐ BẬC NHẤT	34
§3.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG	35
§4.	BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG	37
§5.	ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG	37
1	ĐỀ 1	37
2	ĐỀ 2	38
3	ĐÁP ÁN ĐỀ 1	38
4	ĐÁP ÁN ĐỀ 2	39

Phần II HÌNH HỌC 41

Chương 1 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG 43

§1.	MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG	43
§2.	TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN	46
§3.	MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG. GIẢI TAM GIÁC	47

§4.	BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG	51
§5.	ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG	54
1	ĐỀ 1	54
2	ĐỀ 2	55
3	ĐÁP ÁN ĐỀ 1	55
4	ĐÁP ÁN ĐỀ 2	56
Chương 2	ĐƯỜNG TRÒN	57
§1.	SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN	57
§2.	ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN	58
§3.	LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY	61
§4.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN	63
§5.	TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU	66
§6.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN	69
§7.	ÔN TẬP CHƯƠNG II	70

Phần I

ĐẠI SỐ

Chương 1

CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. CÁC PHÉP TOÁN CĂN BẢN VỀ CĂN BẬC HAI

1 Tìm tập xác định của một biểu thức chứa căn bậc hai

Bài 1: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{-3x+2}$ b) $\sqrt{\frac{-4}{-2x+3}}$ c) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$
- d) $\frac{2}{\sqrt{x+4}-1}$

Bài 2: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{x(x+2)}$ b) $\sqrt{-5x^2+20}$ c) $\sqrt{-5x^2-3x+8}$
- d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}$

Bài 3: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{x^2+1}$ b) $\frac{-3}{\sqrt{x^2-x+1}}$ c) $\sqrt{-5x^2-3x+8}$
- d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}$

Bài 4: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{|x|+1}$ b) $\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+|x|+6}}$ c) $\frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{|-5x^2-3x+8|}}$
- d) $\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2+4x+4}}$

Bài 5: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ b) $\sqrt{4x+4-6\sqrt{4x-5}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{x^2-4\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}}$

Bài 6: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}\right)$ b) $\left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\right)$

Bài 7: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ b) $2 - \sqrt{1-4x}$ c) $\frac{3}{x^2-6x+8}$
 d) $\sqrt{x^2-x+1}$ e) $\sqrt{-x^2+2x-5}$ f) $\sqrt{2x^2+1} + \frac{2}{3-2x}$
 g) $3 + \sqrt{-x^2}$ h) $\sqrt{\frac{-5}{x-2}}$

Bài 8: Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{x^2-5}$ b) $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x-0,5}}}$
 d) $\frac{-3}{1-\sqrt{x^2-3}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$ f) $\frac{2}{1-\sqrt{x}}$

2 So sánh các biểu thức của căn bậc hai

Bài 1: So sánh

- a) 2 và $\sqrt{7}$ b) 7 và $\sqrt{48}$ c) 10 và $\sqrt{101}$
 d) 6 và $\sqrt{37}$

Bài 2: So sánh

- a) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ và 2 b) $3\sqrt{12}$ và $2\sqrt{26}$ c) $4 - 2\sqrt{2}$ và $3 - \sqrt{3}$

Bài 3: So sánh

- a) $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ và 0 b) $\frac{15-\sqrt{107}}{-22}$ và 0

Bài 4: Cho biểu thức $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

- a) Tìm x để P có nghĩa b) So sánh P và $\sqrt{P}$ c) So sánh P và $|P|$

Bài 5: So sánh

- a) $\sqrt{10} + \sqrt{17} + 1$ và $\sqrt{61}$ b) $\sqrt{24} + \sqrt{99} + 3$ và 18 c) $\sqrt{33} - \sqrt{17}$ và $6 - \sqrt{15}$

3 Các bài toán về hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ b) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}(\sqrt{3}-2)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$
 c) $\sqrt{(a-2)^2}$ với $a < 2$ d) $\frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^2+b^2-2ab}$ với $a > b$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{9-6\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$
 d) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ e) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ f) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}} + \sqrt{16-12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{2}} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{11+2\sqrt{10}} - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{4x^2-1}$ với $x > \frac{-1}{2}$

b) $9+x+\sqrt{4-4x+x^2}$ với $x < 2$

c) $\sqrt{9x^2-6x+1} - \sqrt{9x^2+6x+1}$ với $x > 0$

Bài 5: Chứng minh các biểu thức sau:

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = 2$

c) $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$

Bài 6: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2} = 1$

b) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 3$

c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 5$

d) $\sqrt{x^2-3x+6+4\sqrt{x^2-3x+2}} = 1$

§2. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

1 Tính giá trị các biểu thức căn bậc hai (không chứa ẩn)

Bài tập cơ bản

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147}$

b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{1}{3}\sqrt{63} + \frac{1}{4}\sqrt{20}$

c) $12\sqrt{3\frac{5}{9}} - 4\sqrt{0,5} + 2\sqrt{2} - 64\sqrt{0,125}$

d) $\frac{6}{2-\sqrt{10}} + \frac{6}{2+\sqrt{10}}$

e) $\sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$

f) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 4\sqrt{48} - 2\sqrt{75}$

g) $42\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{112} + \frac{7+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$

h) $2\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{175} + \sqrt{112} - \sqrt{20}$

i) $(\sqrt{44} + \sqrt{11})\sqrt{11}$

j) $\sqrt{24} - 6\sqrt{\frac{1}{6}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

k) $3\sqrt{27} - \sqrt{98} - 7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

l) $\frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}}$

$$m) \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{10}{1 + \sqrt{6}}$$

$$n) \left(2 + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right) \cdot \left(2 - \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right)$$

$$o) \frac{1}{3 + \sqrt{8}} - \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$p) \frac{6 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$q) \frac{-3}{5 + 2\sqrt{7}} - \frac{1}{3 + \sqrt{7}} + \frac{6}{\sqrt{7} - 2} + \frac{5 - \sqrt{7}}{2}$$

$$r) \left(\frac{5}{\sqrt{15}} - \sqrt{10} - \frac{3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}\right)^2$$

$$s) \frac{\sqrt{27} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{12}{3 + \sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$t) \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{4}{2 - \sqrt{6}}$$

$$u) \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$$

$$v) \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{15})^2}$$

$$w) \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}$$

$$x) \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} + 5)^2}$$

$$y) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{24}$$

$$z) \sqrt{2}\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$$

Bài 2. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$$

$$b) \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$$

$$c) (2 + \sqrt{7}) \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$$

$$d) \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$$

$$e) \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{(\sqrt{2} - 5\sqrt{3})^2}$$

$$f) \sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{\sqrt{20} + 6}$$

$$g) \sqrt{2}\sqrt{8 + 3\sqrt{7}} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$$

$$h) \sqrt{96} - 6\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{3}{3 + \sqrt{6}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$$

$$i) \frac{1}{\sqrt{7 - \sqrt{24}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{7 + \sqrt{24}} - 1}$$

$$j) \frac{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{5} - 2}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 2}$$

$$k) \frac{\sqrt{10 - 4\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{6} - 2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + 2}$$

$$l) \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2} + 2\sqrt{3}}$$

$$m) \frac{1}{5} \left(\sqrt{\frac{11 - 2\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 1}} + \sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{10} + 1}} \right)^2 - \sqrt{\frac{8}{5}}$$

$$n) \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} \cdot (7 - 2\sqrt{10})$$

$$o) \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}} - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} \right) : \sqrt{3}$$

$$p) \sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{2})(3 - \sqrt{5})$$

$$q) (\sqrt{35} + 5) \sqrt{6 - \sqrt{35}}$$

$$r) \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{3}}}$$

$$s) \frac{2}{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{\frac{2}{7 + 3\sqrt{5}}}$$

$$t) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$u) \frac{2}{\sqrt{5}+1} + \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}} - 5\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$v) \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$w) \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

$$x) \sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2\sqrt{2}+2}$$

$$y) \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$$

$$z) \left(\frac{14}{\sqrt{14}} + \frac{\sqrt{12}+\sqrt{30}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt{5-\sqrt{21}}$$

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) \frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} + 1$$

$$b) \frac{\sqrt{47+21\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{47-21\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-2}$$

$$c) (2-\sqrt{3})\sqrt{26+15\sqrt{3}} - (2+\sqrt{3})\sqrt{26-15\sqrt{3}} \quad d) \sqrt{16+4\sqrt{15}} - \sqrt{8-4\sqrt{3}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$e) \frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}$$

$$f) \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}} \cdot (2+\sqrt{3})$$

$$g) \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{3}+3\sqrt{21}}} \cdot (3\sqrt{2}+\sqrt{14})$$

$$h) \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}+3}} \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{10})$$

$$i) \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{5\sqrt{5}+11}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}}$$

$$j) \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$$

Bài tập nâng cao

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2\sqrt{2}+2}$$

$$b) \frac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7}-2}}$$

$$c) \frac{\sqrt{11+\sqrt{5}} + \sqrt{11-\sqrt{5}}}{\sqrt{11+2\sqrt{29}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$d) \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$e) \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}$$

Hướng dẫn:

$$a) \sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

$$b) \text{Đặt } A = \sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}. \text{ Tính } A^2.$$

$$c) \text{Đặt } A = \sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}. \text{ Tính } A^2.$$

$$d) \text{Thực hiện phép nhân từ phải sang trái.}$$

$$e) \text{Thực hiện phép nhân từ phải sang trái.}$$

2 Rút gọn các biểu thức căn bậc hai (có chứa ẩn)

Bài tập cơ bản

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\frac{5\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

b) $\frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

c) $\left(\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+1}$ với $x \geq 0$.

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 4$.

e) $\left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \left(\sqrt{x}-2 + \frac{10-x}{\sqrt{x}+2} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 4$.

f) $\left(\frac{\sqrt{x}}{x-9} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{3-\sqrt{x}} \right) : \left(\sqrt{x}-3 + \frac{12-x}{\sqrt{x}+3} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

g) $\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x-1}{2(x-2\sqrt{x}+1)}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

h) $\frac{1}{2(\sqrt{x}-1)} \cdot \left(\frac{x^2-8\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4} + 1 \right) - \frac{x-\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

i) $\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4; x \neq 9$.

j) $\left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

k) $\left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right)^2 \cdot \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{\sqrt{3x}+1} - \sqrt{3x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq \frac{4}{3}$.

l) $\frac{2}{3} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}} \right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \cdot \frac{2017}{x+1}$ với $x \geq 0$.

m) $\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} \right) \cdot (a\sqrt{b}-b\sqrt{a})$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

n) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) \left(\frac{a+b+\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} \right)^2$ với $a \geq 0, b \geq 0$ và $a \neq b$.

Bài tập nâng cao

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$

- Tìm điều kiện có nghĩa của A .
- Rút gọn A .
- Tìm x để $A = 3$.
- Tìm x để A có giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-9} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{3-\sqrt{x}} \right) : \left(\sqrt{x}-3 + \frac{12-x}{\sqrt{x}+3} \right)$

- Tìm điều kiện xác định của A và rút gọn A .
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{8\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{x}}$.

- Tìm điều kiện của x để biểu thức có nghĩa.
- Rút gọn biểu thức M .
- Tìm x để $M > 3$.

Bài 4. Cho biểu thức sau: $A = \sqrt{\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}} + \sqrt{x}$ với $x > 1$

Với giá trị nào của x thì biểu thức $B = A + \frac{9}{A}$ có giá trị nhỏ nhất và tính giá trị đó.

Bài 5. Cho biểu thức $A = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

- Tìm các giá trị của x để giá trị của $A \leq 5$.
- Tìm các giá trị của x để $\frac{2}{A}$ nhận giá trị nguyên.

3 Chứng minh đẳng thức chứa căn bậc hai

Bài tập cơ bản

Bài 1: Chứng minh các đẳng thức sau

- $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$
- $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$
- $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$
- $\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} + \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right) : (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 1$
- $\left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{12} + 2} - \frac{\sqrt{54}}{3} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = -1$
- $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right)^2 = 4\sqrt{6}$
- $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$
- $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$$

$$b) \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

$$c) \left(2 + \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) \cdot \left(2 - \frac{a + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}\right) = 4 - a \text{ với } a > 0, a \neq 1$$

$$d) \left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy}\right) : (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 1 \text{ với } (x > 0, y > 0, x \neq y)$$

$$e) \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{\frac{a^4}{x^4} - 1} = \frac{a^2}{x^2} \text{ với } |a| > |x|$$

$$f) \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = a - b \text{ với } a > 0, b > 0 \text{ và } a \neq b$$

$$g) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \sqrt{(2n+1)^2} - \sqrt{(2n+1)^2 - 1} \text{ với } n \in \mathbb{N}$$

Bài tập nâng cao

Bài 1: Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) |x + y| + |x - y| = \left|x + \sqrt{x^2 - y^2}\right| + \left|x - \sqrt{x^2 - y^2}\right| \text{ với } |x| \geq |y|$$

HD: Bình phương hai vế.

$$b) \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25} = 3\sqrt{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}}$$

HD: Nhận xét 2 vế không âm sau đó bình phương.

$$c) \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}} = -\sqrt{2}$$

HD: Đánh giá âm dương, bình phương hai vế hoặc nhân hai vế với $\sqrt{2}$.

$$d) \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$$

HD: Rút gọn vế trái sau đó lập phương hai vế.

$$e) \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$$

HD: Đặt $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. Đưa về phương trình bậc 3 theo x rồi giải phương trình.

$$f) \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = 3$$

HD: Tương tự câu trên.

$$g) \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

HD: Lập phương hai vế. Rút nhân tử chung cho vế phải rồi nhân liên hiệp.

4 Giải phương trình chứa căn bậc hai

Bài tập cơ bản

Bài 1. Giải phương trình:

- | | |
|--|---|
| a) $\sqrt{x^2 + 9} = 5$ | b) $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} = 1$ |
| c) $\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x - 2}$ | d) $\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{3 - x}$ |
| e) $\sqrt{x - 1} + 1 = x$ | f) $\sqrt{25x^2 - 30x + 9} = x + 7$ |
| g) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2 - x} = 5$ | h) $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{8 - 2x} = 5$ |
| i) $\sqrt{x + 1} = 8 - \sqrt{3x + 1}$ | j) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$ |
| k) $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$ | l) $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2 - x}$ |
| m) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 2x - 1 $ | n) $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3 - x$ |
| o) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 5} = \sqrt{5}$ | p) $\sqrt{x^2 + 10x - 5} = 2(x - 1)$ |
| q) $\sqrt{17 + x} - \sqrt{17 - x} = 2$ | r) $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 1} = 0$ |
| s) $\sqrt{x + 10} - \sqrt{3 - 4x} = 2\sqrt{x + 2}$ | t) $\sqrt{x^2 - 2x - 8} = \sqrt{3}(x - 4)$ |
| u) $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$ | |

Bài tập nâng cao

Bài 1. Giải phương trình:

- | | |
|--|---|
| a) $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$ | b) $\sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3$ |
| c) $\sqrt{25x - 50} + \frac{\sqrt{x - 2} + 1}{2} = 8\sqrt{\frac{9x - 18}{16}}$ | d) $\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x - 2} = 2$ |
| e) $\sqrt{x + 6} - 6\sqrt{x - 3} = 1$ | f) $\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{1 + x^2}} = -2$ |
| g) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$ | h) $\sqrt{2x + \sqrt{4x - 1}} + \sqrt{2x - \sqrt{4x - 1}} = \sqrt{6}$ |
| i) $3 + \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = 2\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}}$ | j) $\sqrt{x^2 + 3x + 12} = x^2 + 3x$ |
| k) $\sqrt{x^2 + 2x} = -2x^2 - 4x + 3$ | l) $\sqrt{(x + 1)(x + 2)} = x^2 + 3x - 4$ |
| m) $-x^2 + 2x + 4\sqrt{(3 - x)(x + 1)} = 9$ | n) $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$ |
| o) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$ | p) $\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$ |
| q) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$ | r) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{3 - x} - \sqrt{(x + 1)(3 - x)} = 2$ |
| s) $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 1} - 4\sqrt{4x - x^2 - 3} = -2$ | t) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{8 - x} + \sqrt{(x + 1)(8 - x)} = 3$ |
| u) $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$ | v) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 4} + 2x + 2$ |
| w) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{4 - x} - \sqrt{(x + 1)(4 - x)} = 5$ | x) $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$ |
| y) $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$ | z) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$ |

Hướng dẫn:

a) $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} = 0 \\ \sqrt{x^2 + x - 2} = 0 \end{cases}$

b) $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} = 3$
 $\Leftrightarrow |x-1| + |x+2| = 3$

c) $\sqrt{25x-50} + \frac{\sqrt{x-2}+1}{2} = 8\sqrt{\frac{9x-18}{16}}$
 $\Leftrightarrow 5\sqrt{x-2} + \frac{\sqrt{x-2}+1}{2} = 6\sqrt{x-2}$
 Đặt $t = \sqrt{x-2} \geq 0$

d) $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} = 2$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2} = 2$
 $\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1| = 2$

e) $\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 1$
 Tương tự câu trên.

f) $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}} = -2 (*)$
 DKXD: $x \in \mathbb{R}$.
 $(*) \Leftrightarrow -x + \sqrt{1+x^2} - x - \sqrt{1+x^2} = -2$

g) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2 (*)$
 DKXD: $x \geq 1$

h) $\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}} + \sqrt{2x-\sqrt{4x-1}} = \sqrt{6}$
 Tương tự bài g). Đáp số: $x = 1$

Bình phương hai vế ta được phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 2-x \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 2-x$$

Đáp số: $S = [1; 2]$

i) $3 + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} (*)$
 DKXD: $x \geq 4$
 $(*) \Leftrightarrow 3 + |\sqrt{x-1}+1| = 2|\sqrt{x-4}+2|$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x-4}$

j) $\sqrt{x^2+3x+12} = x^2+3x$
 Đặt $t = \sqrt{x^2+3x+12}$

k) $\sqrt{x^2+2x} = -2x^2-4x+3$
 Đặt $t = \sqrt{x^2+2x}$

l) $\sqrt{(x+1)(x+2)} = x^2+3x-4$
 Đặt $t = \sqrt{(x+1)(x+2)} = \sqrt{x^2+3x+2}$

m) $-x^2+2x+4\sqrt{(3-x)(x+1)} = 9$
 Đặt $t = \sqrt{(3-x)(x+1)} = \sqrt{-x^2+2x+3}$

n) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$
 Đặt $t = \sqrt{x^2+3x}$

o) $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$
 Đặt $t = \sqrt{x^2-3x+3}$ hoặc $t = \sqrt{x^2-3x+6}$

p) $\sqrt{3-x+x^2} - \sqrt{2+x-x^2} = 1$
 Đặt $t = \sqrt{3-x+x^2}$ hoặc $t = \sqrt{2+x-x^2}$

q) $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$
 Đặt $t = \sqrt{x^2+11}$ hoặc bình phương hai vế đưa về phương trình trùng phương.

r) $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = 2$
 Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$
 $\Leftrightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(x+1)(3-x)}$

s) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} - 4\sqrt{4x-x^2-3} = -2$
 Đặt $t = \sqrt{3-x} + \sqrt{x-1}$
 $\Leftrightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{4x-x^2-3}$

t) $\sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(x+1)(8-x)} = 3$
 Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$
 $\Leftrightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(x+1)(8-x)}$

$$u) 1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 + 2\sqrt{x-x^2}$$

$$v) \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} + 2x + 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 2\sqrt{x^2-4} + 2x$$

$$w) \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} - \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 5 + 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$$

$$x) x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 4 + 2x\sqrt{4-x^2}$$

$$y) \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 4x-3+2\sqrt{3x^2-5x+2}$$

$$z) \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}$$

Bài 2. Giải phương trình:

$$a) 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2-2x-1$$

$$b) x^2+3x+1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$$

$$c) 5x^2-6x+1 = (x+1)\sqrt{x^2+3x-1}$$

$$d) 2x^2+8x-4 = (x+7)\sqrt{x^2+2x}$$

$$e) \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$$

$$f) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$g) \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1$$

$$h) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$$

Hướng dẫn:

$$a) 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2-2x-1$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x-1}$, ta được phương trình:

$$t^2 - 2(1-x)t - 4x = 0 (*)$$

có $\Delta' = (x+1)^2 \geq 0$ nên $(*)$ có hai nghiệm:

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-1} = 2 \\ \sqrt{x^2+2x-1} = -2x \end{cases}$$

$$c) 5x^2-6x+1 = (x+1)\sqrt{x^2+3x-1}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+3x-1}$, ta được phương trình:

$$t^2 + (x+1)t - 6x^2 + 3x = 0$$

$$b) x^2+3x+1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$, ta được phương trình:

$$t^2 - (x+3)t + 3x = 0 (*)$$

có $\Delta = (x-3)^2 \geq 0$ nên $(*)$ có hai nghiệm:

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3 \\ \sqrt{x^2+1} = x \end{cases}$$

$$d) 2x^2+8x-4 = (x+7)\sqrt{x^2+2x}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x}$, ta được phương trình:

$$2t^2 - (x+7)t + 4x - 4 = 0$$

$$e) \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được phương trình: $|x-1| = 1-x$

$$f) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = \frac{x+3}{2}$$

$$g) \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1| - |\sqrt{x-2}-1| = 1$$

$$h) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| - |\sqrt{x-1}-1| = 2$$

- $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \frac{x+5}{2}$
- $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{7+x+6\sqrt{x-2}} = 6$
- $\sqrt{3x^2-18x+28} + \sqrt{4x^2-24x+45} = -5-x^2+6x$
- $\sqrt{4x^2+4x+5} + \sqrt{8x^2+8x+11} = 4-4x^2-4x$

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \frac{x+5}{2} \\ & \Leftrightarrow |\sqrt{x+1}+1| + |\sqrt{x+1}-1| = \frac{x+5}{2} \\ \text{b) } & \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{7+x+6\sqrt{x-2}} = 6 \\ & \Leftrightarrow |\sqrt{x-2}+1| + |\sqrt{x-2}+3| = 6 \\ \text{c) } & \sqrt{3x^2-18x+28} + \sqrt{4x^2-24x+45} = -5-x^2+6x \\ & \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-18x+28}-1 + \sqrt{4x^2-24x+45}-3 + x^2-6x+9 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3(x-3)^2}{\sqrt{3x^2-18x+28}+1} + \frac{4(x-3)^2}{\sqrt{4x^2-24x+45}+3} + (x-3)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-3)^2 \left(\frac{3}{\sqrt{3x^2-18x+28}+1} + \frac{4}{\sqrt{4x^2-24x+45}+3} + 1 \right) = 0 \\ \text{d) } & \sqrt{4x^2+4x+5} + \sqrt{8x^2+8x+11} = 4-4x^2-4x \quad (*) \end{aligned}$$

Đáp số: $x = -\frac{1}{2}$

Bài tập cơ bản

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sqrt{3x+1} > \sqrt{2x-3} \\ \text{c)} & \sqrt{x^2-x-1} < 1-x \\ \text{e)} & \sqrt{4-\sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x} \\ \text{g)} & \sqrt{x^2-x-12} < 7-x \\ \text{i)} & \sqrt{x^2-3x-10} \geq x-2 \\ \text{k)} & 1-x+\sqrt{2x^2-3x-5} < 0 \\ \text{b)} & \sqrt{x^2-4x+3} < \sqrt{2x^2-10x+11} \\ \text{d)} & \sqrt{x^2+x-6} < x-1 \\ \text{f)} & \sqrt{2x-1} > 2x-3 \\ \text{h)} & \sqrt{21-4x-x^2} < x+3 \\ \text{j)} & \sqrt{3x^2+13x+4}+2-x \geq 0 \\ \text{l)} & \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2} < 1 \end{array}$$

m) $3\sqrt{-x^2 + x + 6} + 2(2x - 1) > 0$

n) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$

o) $\sqrt{2x + \sqrt{x^2 + 1}} > x + 1$

p) $\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-2x-3}$

q) $\sqrt{11-x} - \sqrt{x-1} > 2$

r) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

s) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$

Bài 2: Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

b) $\sqrt{x+3} < 1-x$

c) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} \leq x - 4$

d) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$

e) $\sqrt{x^2 - 16} \geq 2x - 7$

f) $x - 3\sqrt{x+1} + 3 > 0$

g) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} \geq 2x - 1$

h) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} > 2x + 3$

i) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$

j) $\sqrt{(x^2 - x)^2} > x - 2$

k) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2x - 5$

l) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} > \sqrt{x-3}$

m) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3} \leq \sqrt{4x+9}$

n) $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$

o) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} > 0$

p) $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \geq \sqrt{5-2x}$

Bài tập nâng cao

Bài 3: Giải bất phương trình:

a) $x\sqrt{1-x^2} \leq 0$

b) $\frac{4}{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}} < 2$

c) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$

d) $\sqrt{|1-4x|} \geq 2x+1$

e) $(x-3)\sqrt{x^2-4} > x^2-9$

f) $\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-7x+5} \geq -\sqrt{x-1}$

g) $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+6x+5} \geq \sqrt{2x^2+9x+7}$

h) $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$

i) $\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 4}{x} \geq 2$

j) $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$

k) $\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^2-3x-10}} > 1$

l) $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$

m) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+2} > 1$

n) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$

o) $\frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-5}} > \frac{1}{2x-1}$

p) $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}$

Hướng dẫn:

a) $x\sqrt{1-x^2} \leq 0 (*)$

ĐKXD: $-1 \leq x \leq 1 (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \sqrt{1-x^2} \geq 0 \end{cases}$

b) $\frac{4}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}} < 2 (*)$

ĐKXD: $-2 \leq x \leq 2$ và $x \neq 0$
 $(*) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} > \sqrt{2+x} + 2$

c) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$

ĐKXD: $x \geq 4$

Nhân hai vế cho $\sqrt{x-3}$ ta được phương trình:
 $\sqrt{x^2-16} > 8-x$

e) $(x-3)\sqrt{x^2-4} > x^2-9$

$AB > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases}$

d) $\sqrt{|1-4x|} \geq 2x+1$

$|A| \geq B \Leftrightarrow A \geq B \text{ hoặc } A \leq -B$

f) $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+5} \geq -\sqrt{x-1} (*)$

ĐKXD: $x \geq 3$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-3)} - \sqrt{(x-1)(2x-5)} \geq -\sqrt{(x-1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} - \sqrt{2x-5} \geq -1$

(Do $\sqrt{x-1} > 0, \forall x \geq 3$)

g) $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+6x+5} \geq \sqrt{2x^2+9x+7}$

ĐKXD: $x \geq -1$ hoặc $x \leq -5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)} + \sqrt{(x+1)(x+5)} \geq \sqrt{(x+1)(2x+7)}$

Trường hợp 1: $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình.

Trường hợp 2: $x > -1$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} \geq \sqrt{2x+7}$

Trường hợp 3: $x \leq -5$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-5} \geq \sqrt{-2x-7}$

h) $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$

Tương tự câu trên.

i) $\frac{\sqrt{2-x}+4x-4}{x} \geq 2 (*)$

ĐKXD: $x \leq 2$ và $x \neq 0$

Trường hợp 1: $0 < x \leq 2$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} + 4x - 4 \geq 2x$

Trường hợp 2: $x < 0$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} + 4x - 4 \leq 2x$

j) $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$

Tương tự câu trên.

k) $\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^2-3x-10}} > 1 (*)$

ĐKXD: $x > 5$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x-4} > \sqrt{x^2-3x-10}$

l) $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$

ĐKXD: $1-2\sqrt{13} < x < 1+2\sqrt{13}$ và $x \neq 1$

Xét hai trường hợp: $1-2\sqrt{13} < x < 1$ và $1 < x < 1+2\sqrt{13}$

m) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+2} > 1$

Tương tự câu trên.

o) $\frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-5}} > \frac{1}{2x-1}$

ĐKXD: $x > 1$ hoặc $x < -\frac{5}{2}$

Trường hợp 1: $x > 1 \Rightarrow 2x-1 > 0$

Trường hợp 2: $x < -\frac{5}{2} \Rightarrow 2x-1 < 0$

n) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$

Tương tự câu trên.

p) $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}$

ĐKXD: $x > 0$

Bình phương hai vế hai lần ta được bất phương trình:

$4x + \sqrt{x(x+9)} \geq 0$ (luôn đúng $\forall x \geq 0$)

Bài 4: Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+3} < \sqrt{8x} - \sqrt{4x+2}$

b) $\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \geq 3x+2$

c) $(2x-5)\sqrt{2x^2-5x+2} \geq 0$

d) $(x^2-4x+3)\sqrt{x^2-4} \leq 0$

e) $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0$

f) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} \geq 1-x$

g) $x^2 - x - 4 + \sqrt{4-x^2} \geq \frac{x^2}{2-\sqrt{4-x^2}}$

h) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} \leq \frac{x+3}{5}$

i) $3x^2 - 2x - \sqrt{25-x^2} \leq \frac{x^2}{5+\sqrt{25-x^2}}$

j) $x + \sqrt{x^2+16} \geq \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$

k) $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$

l) $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}-1} > 2x+2$

m) $4(x+1)^2 \leq (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$

n) $\frac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})^2} \geq x+21$

o) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$

p) $9(x+1)^2 \leq (3x+7)(1-\sqrt{3x+4})^2$

q) $x^2+4x \geq (x+4)\sqrt{x^2-2x+4}$

Hướng dẫn:

a) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+3} < \sqrt{8x} - \sqrt{4x+2}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} < \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{(6x+1)(4x+2)} < 2\sqrt{8x(2x+3)}$

b) $\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \geq 3x+2$
 $\Leftrightarrow (3x+2)(3x-2-\sqrt{5x^2-4}) \geq 0$

c) $(2x-5)\sqrt{2x^2-5x+2} \geq 0$

d) $(x^2-4x+3)\sqrt{x^2-4} \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} 2x^2-5x+2>0 \\ 2x-5 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} x^2-4>0 \\ x^2-4x+3 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$

e) $(x^2 - 3x) \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

f) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} \geq 1-x$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2+\sqrt{3x-2}) \geq 0$$

g) $x^2 - x - 4 + \sqrt{4-x^2} \geq \frac{x^2}{2-\sqrt{4-x^2}}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 + \sqrt{4-x^2} \geq 2 + \sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0$$

h) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} \leq \frac{x+3}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}} \leq \frac{x+3}{5}$$

i) $3x^2 - 2x - \sqrt{25-x^2} \leq \frac{x^2}{5+\sqrt{25-x^2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - \sqrt{25-x^2} = 0 \\ 3x^2 - 2x - \sqrt{25-x^2} \leq 5 - \sqrt{25-x^2} \end{cases}$$

Nếu không xét riêng trường hợp :

$5 - \sqrt{25-x^2} = 0$ thì sẽ sót nghiệm.

j) $x + \sqrt{x^2+16} \geq \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{\sqrt{x^2+16}-x} \geq \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$$

$\Leftrightarrow 5x \geq 3\sqrt{x^2+16}$ (Do $\sqrt{x^2+16}-x \geq 0$ suy ra từ $VT \geq VT > 0$)

k) $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$

Đặt $t = \sqrt{3x^2+5x+7}$

hoặc $t = \sqrt{3x^2+5x+2}$

l) $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}-1} > 2x+2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+1 > 2x+2$$

m) $4(x+1)^2 \leq (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 \leq 8(x+5) \frac{(x+1)^2}{(1+\sqrt{3+2x})^2}$$

Xét hai trường hợp: $x+1 \neq 0$ và $x+1 = 0$

n) $\frac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})^2} \geq x+21$

$$\Leftrightarrow (3+\sqrt{9+2x})^2 \geq 2x+42$$

(Nhân lượng liên hợp).

o) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{1+x} = 0 \\ (1 - \sqrt{1+x})^2 > x-4 \end{cases}$$

p) $9(x+1)^2 \leq (3x+7)(1-\sqrt{3x+4})^2$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)^2 \leq (3x+7) \frac{9(x+1)^2}{(1+\sqrt{3x+4})^2}$$

Xét hai trường hợp: $x+1 \neq 0$ và $x+1 = 0$

q) $x^2 + 4x \geq (x+4)\sqrt{x^2-2x+4}$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-\sqrt{x^2-2x+4}) \geq 0$$

§3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

1 Bài tập cơ bản

Bài 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Tìm các giá trị của nguyên của x để P đạt giá trị nguyên.

Bài 2: Cho biểu thức $P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

a) Chứng minh rằng $P > 0$ với $\forall x > 0, x \neq 1$

b) Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

Bài 3: Cho biểu thức $P = a - \sqrt{a}$

a) Biết $a > 1$, hãy so sánh P và $Q = |P|$ b) Tìm a để $P = 2$

Bài 4: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

a) Tìm các giá trị nguyên của x để P đạt giá trị nguyên.

b) Tìm các giá trị x để $P = \sqrt{x}$

Bài 5: Cho biểu thức $P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$

c) Tìm các giá trị của x để $P > x$

Bài 6: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện xác định của A .

b) Rút gọn A

c) Tính giá trị của A khi $x = \frac{2}{3 - \sqrt{5}}$

d) Tìm x để $A < 1$

Bài 7: Cho biểu thức $M = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

a) Tìm điều kiện xác định của M .

b) Rút gọn M .

c) Biết $a > 1$. Hãy so sánh M và $\sqrt{M}$

d) Tìm a để $P = 2$

Bài 8: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{6\sqrt{x} - 4}{x - 1}$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài 9: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}}$

a) Thu gọn P .

b) Giải phương trình $P = 2$

c) So sánh M và 1

Bài 10: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{2}{2 - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \left(\sqrt{x} - 2 + \frac{10 - x}{\sqrt{x} + 2} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn P .

c) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

Bài 11: Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) : \frac{x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}(y - x)}$

- Tìm điều kiện xác định của P .
- Rút gọn P .
- Tính giá trị của P khi $x = 4 + 2\sqrt{3}, y = 4 - 2\sqrt{3}$

Bài 12: Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$

- Tìm điều kiện xác định của P .
- Rút gọn M .
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $M \in \mathbb{Z}$

Bài 13: Cho biểu thức $P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3x + 3}{9 - x} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x} - 7}{\sqrt{x} + 1} + 1 \right)$

- Rút gọn P .
- Tìm x để $P \geq -\frac{1}{2}$

Bài 14: Cho biểu thức $A = \frac{4 - 4\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} - 35} + \frac{2}{\sqrt{x} - 7} - \frac{3}{\sqrt{x} + 5}$

- Tìm điều kiện xác định của A .
- Rút gọn A .

Bài 15: Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2}{2 - \sqrt{x}} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{6 - x}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right)$

- Tìm điều kiện xác định của M .
- Rút gọn M .
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $M \in \mathbb{Z}$

2 bài tập nâng cao

Bài 1: Rút gọn biểu thức sau:

$$D = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}.$$

HD:

Ta có: $13 + \sqrt{48} = 12 + 2\sqrt{12} + 1$ và $2 + \sqrt{3} = \frac{3}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$.

Bài 2: Cho biểu thức: $D = \left(1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} \right)$

với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$.

- Rút gọn biểu thức D .
- Tìm giá trị của x để $D = 1$.

HD:

- Sử dụng hằng đẳng thức $A^2 - B^2$, chú ý đến đa thức bậc hai với biến là $\sqrt{x}$ và thêm nữa $x + \sqrt{x} - 6 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)$.

b) Dùng kết quả rút gọn ở câu a).

Bài 3: Cho biểu thức $D = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$, với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức D .

b) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức D có giá trị nguyên.

HD:

b) Để D nhận giá trị nguyên thì mẫu phải là ước của tử.

Bài 4: Cho $a = 7 - 4\sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $D = \left(\frac{8-a}{a+4\sqrt{a}} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \right) \cdot \frac{4\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-2}$.

HD:

Rút gọn D và lưu ý: $7 - 4\sqrt{3} = 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3$.

Bài 5: Rút gọn biểu thức $D = (2 - \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}} + (2 + \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

HD: Lưu ý $2 + \sqrt{3} = \frac{3}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$ hoặc $2 + \sqrt{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}$.

Bài 6: Cho biểu thức $D = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức D .

b) Cho biểu thức $T = \frac{(x+27)D}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$. Chứng minh $T \geq 6$.

HD:

a) Khi rút gọn ta sử dụng sơ đồ Hoocner để phân tích đa thức bậc 3 thành các đơn thức, chú ý với biến là $\sqrt{x}$.

b) Biến đổi tương đương để đưa $T \geq 6$ về hằng đẳng thức.

Bài 7: Cho biểu thức $D = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức D .

b) Tìm các giá trị của x để $D = \frac{3}{4}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (\sqrt{x}-4)(x-1)D$.

HD:

c) Thêm bớt để đưa biểu thức T về hằng đẳng thức và kết luận giá trị nhỏ nhất.

Bài 8: Cho biểu thức $D = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $T = \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn các biểu thức D và T .

b) Tìm tất cả giá trị của x để $D = T$.

HD:

a) Đối với T , ta có thể nhẩm hoặc sử dụng máy tính tìm nghiệm của pt bậc 3 theo biến $\sqrt{x}$ và sử dụng Hoocner phân tích thành bậc 2 và 1.

Bài 9: Cho biểu thức $D = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{1}{1-\sqrt{a}}$, với $a \geq 0; a \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức D .
 b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức D .
HD:

- a) Sử dụng các hằng đẳng thức: $A^2 - B^2, A^3 - B^3$.
 b) Chú ý tính chất $(A + B)^2 + c \geq c$.

Bài 10: Cho biểu thức sau:

$$D = \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a^3 + a^2 + ab + a^2b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}\right)$$

với $a > 0, b > 0, a \neq b, a + b \neq a^2$.

- a) Chứng minh $D = a - b$.
 b) Tìm a, b biết rằng $D = 1$ và $a^3 - b^3 = 7$.
HD:

- a) Đối với $\frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})}$ quy đồng rút gọn mẫu, sử dụng hằng đẳng thức

$A^2 - B^2$. Còn ở tử thì $(a^2)^2 - (a+b)^2$.

$\frac{a^3 + a^2 + ab + a^2b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}$, quy đồng mẫu và chú ý đến nhân tử chung $a + b$.

- b) Lưu ý: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2) = (a-b)(a-b)^2 + (a-b)ab = ab = 7$
 (do $D = a - b = 1$).

Tổng tích: $a + (-b) = 1$ và $a \cdot (-b) = -7 \Rightarrow a$ và $-b$.

Bài 11: Biết a, b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left(\frac{(a+2b)^2 - (b+2a)^2}{a+b}\right) : \left(\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a-b} - 3ab\right) = 3. \text{ Tính } D = \frac{1+2ab}{a^2+b^2}.$$

HD:

Rút gọn biểu thức đã cho bằng việc chú ý đến hằng đẳng thức $A^2 - B^2$ và sử dụng thêm $A^3 - B^3$. Kết quả rút gọn $b - a = 1$.

Bài 12: Rút gọn biểu thức $D = 1 + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2017+\sqrt{2017^2-1}}}$.

HD:

Tính $\frac{D}{\sqrt{2}}$, chú ý: $2k + 2\sqrt{(k-1)(k+1)} = (\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1})^2$ và:

$$\frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{2}.$$

Bài 13: Thu gọn biểu thức $D = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}$.

HD:

Nhân lượng liên hợp rồi nhân phân phối.

Bài 14: Cho $D = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} + \frac{5\sqrt{a}+2}{4-a}$, với $a \geq 0, a \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức D .

b*) Tính giá trị biểu thức D khi $a = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$.

HD:

b*) Ta lưu ý $\sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$. Tiếp theo ta sẽ mũ ba hai vế biểu thức $a = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$ và rút gọn:
 $a^3 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a^2 + a + 2) = 0 \Rightarrow a = 1$.

Bài 15: Cho biểu thức:

$$D = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right), \text{ với } x \neq 0; x \neq \sqrt{3}.$$

a) Rút gọn biểu thức D .

b) Tính giá trị của biểu thức D khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$.

HD:

a) Sử dụng $A^3 + B^3$.

b) Lưu ý: $29 - 12\sqrt{5} = 20 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{20} + 9$.

Bài 16:

a) Cho các biểu thức $D(x) = \frac{1}{x} + \frac{9 - x}{x + 3\sqrt{x}}$, $T(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

Tìm số nguyên x nhỏ nhất thỏa mãn $\frac{D(x)}{T(x)} \leq \frac{1}{2}$.

b*) Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{2x^4 - 21x^3 + 55x^2 - 32x - 4012}{x^2 - 10x + 20}$ khi $x = 5 - \sqrt{3}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

HD:

a) Rút gọn $\frac{D(x)}{T(x)}$ và lưu ý điều kiện $x \geq 0$.

b*) Sử dụng máy tính ta ra được $T = 2017$ và mẫu là -2 với $x = 5 - \sqrt{3}$. Khi đó ta sẽ tách ra như sau: $T = \frac{2x^4 - 21x^3 + 55x^2 - 32x + 22}{x^2 - 10x + 20} + \frac{-4034}{x^2 - 10x + 20}$.

Bằng tính toán ta có: $x^2 - 10x + 22 = 0$ khi $x = 5 - \sqrt{3}$, suy ra ta sẽ phân tích:
 $2x^4 - 21x^3 + 55x^2 - 32x + 22 = (x^2 - 10x + 22)(2x^2 - x + 1)$.

Bài 17: Rút gọn biểu thức $D = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + 2)\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38} - 2}$.

HD:

Chú ý: Rút gọn $(\sqrt{5} + 2)\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$.

Bài 18*: Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 1$, chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} = \frac{1 + ab}{\sqrt{2(1 + a^2)(1 + b^2)}}.$$

HD:

Biến đổi tương đương biểu thức đã cho bằng phương pháp bình phương hai vế. Chú ý điều kiện $ab + a + b = 1$ và $(a + b)^2 = (ab - 1)^2$.

Bài 19*: Cho các số dương x, y thỏa mãn $x = 4y + \sqrt{2xy}$. Tính $D = \frac{\sqrt[3]{xy}(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y})}{\sqrt{2xy}}$.

HD:

Biến đổi $x = 4y + \sqrt{2xy} \Leftrightarrow x = 8y$ bằng cách sử dụng hằng đẳng thức thứ 2.

Bài 20*: Rút gọn biểu thức:

$$D = \frac{1+ax}{1-ax} \sqrt{\frac{1-bx}{1+bx}} \text{ với } x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-b}{b}} \text{ và } 0 < a < b < 2a.$$

HD:

Biến đổi $x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-b}{b}}$ để tìm bx theo ax (bình phương).

Chú ý điều kiện $a < b$ để chứng minh $ax < 1$.

§4. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG

1 ĐỀ 1

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau: (4,5 điểm)

a) $(3\sqrt{2} - \sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{90}$.

b) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

c) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Bài 2. (2 điểm)

a) Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{3 - \frac{x}{2}}$ có nghĩa ?

b) Giải phương trình: $\sqrt{4x^4 - 4x^2 + 1} = 3$.

Bài 3. (3 điểm) Cho $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{7\sqrt{x} + 3}{9 - x}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P < 1$.

Bài 4. (0,5 điểm) Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} < 18$.

2 ĐỀ 2

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau: (3 điểm)

a) $2\sqrt{8} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{18}$.

b) $\sqrt{9 - 3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

$$c) \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Bài 2. (3 điểm)

a) Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau: $A = \sqrt{18 + 2x}$; $B = \sqrt{18 - 2x^2}$

b) Giải phương trình: $\frac{5}{2}\sqrt{3x} - \sqrt{3x} - 6 = \frac{1}{2}\sqrt{3x}.$

Bài 3. (3 điểm) Cho $P = \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} + \frac{x + 12}{x - 4} - \frac{x - 2\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để giá trị P lớn hơn giá trị của $\frac{1}{P}$.

Bài 4. (1 điểm) Cho $M = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2017} + \sqrt{2018}}$
và $N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{528}}.$

a) Tính M .

b) So sánh M và N .

3 ĐÁP ÁN ĐỀ 1

Bài 1.

a) $(3\sqrt{2} - \sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{90} = 3\sqrt{10} - 5 - 3\sqrt{10} = -5.$

b) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1 + 3 - \sqrt{2} = 2.$

c) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} - \sqrt{2(4 + \sqrt{15})} + \frac{6\sqrt{3}}{3} = \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} + 2\sqrt{3} = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 0.$

Bài 2.

a) Biểu thức đã cho có nghĩa khi và chỉ khi $3 - \frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 6.$

b) $\sqrt{4x^4 - 4x^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(2x^2 - 1)^2} = 3 \Leftrightarrow |2x^2 - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = 3 \\ 2x^2 - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 = -1 \end{cases} \text{ (VN)}$
 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$

Bài 3.

a) $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{7\sqrt{x} + 3}{9 - x} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3) - (7\sqrt{x} + 3)}{x - 9}$
 $= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 4\sqrt{x} + 3 - 7\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{3x - 9\sqrt{x}}{x - 9} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}.$

b) $P < 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} < 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} < \sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}.$
Vậy $0 \leq x < \frac{9}{4}.$

Bài 4.

Với $k > 1$ thì $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

Cho số nguyên k chạy từ 2 đến 100

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{100}} < 2(\sqrt{100} - \sqrt{99}).$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} < 2(\sqrt{100} - \sqrt{1}) = 18 \text{ (đpcm)}.$$

4 ĐÁP ÁN ĐỀ 2

Bài 1.

$$\text{a) } 2\sqrt{8} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{18} = 2\sqrt{4 \cdot 2} - 4\sqrt{4 \cdot \frac{1}{2}} - \sqrt{9 \cdot 2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sqrt{9 - 3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6 + 3 - 2\sqrt{6}\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{3 + 2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{2} - \sqrt{6}} + \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2} - \sqrt{6}} + \frac{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{(2\sqrt{2} - \sqrt{6})(3 - \sqrt{3})} + \frac{3 - \sqrt{3}}{(2\sqrt{2} + \sqrt{6})(3 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} \\ &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\text{a) } A = \sqrt{18 + 2x} \text{ xác định khi và chỉ khi } 18 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -18 \Leftrightarrow x \geq -9.$$

$$\begin{aligned} B = \sqrt{18 - 2x^2} \text{ xác định khi và chỉ khi } 18 - 2x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 \leq 0 \text{ và } x + 3 \geq 0 \text{ (do } x + 3 > x - 3) \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{5}{2}\sqrt{3x} - \sqrt{3x} - 6 = \frac{1}{2}\sqrt{3x} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{3x} - 6 = \frac{1}{2}\sqrt{3x} \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = 36 \Leftrightarrow x = 12.$$

Bài 3.

a) Với $x > 0; x \neq 4$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x+2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} + \frac{x+12}{x-4} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+12}{x-4} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - (\sqrt{x}-2)^2 + x+12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}+6\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+6(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P > \frac{1}{P} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-2} > \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+6} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+6)^2 - (\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+6)} > 0 \Leftrightarrow \frac{16(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+6)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 > 0 \text{ (do } 16(\sqrt{x}+2) > 0 \text{ và } \sqrt{x}+6 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4. \\ &\text{Vậy } x > 4. \end{aligned}$$

Bài 4.

a) Nhân lượng liên hiệp từng số hạng trong biểu thức M ta được:

$$M = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{2017} + \sqrt{2018} = -1 + \sqrt{2018}.$$

$$\text{b) Với } k > 1 \text{ thì } \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Cho số nguyên k chạy từ 1 đến 528

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{528}} > 2(\sqrt{529} - \sqrt{528}).$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{528}} > 2(-\sqrt{1} + \sqrt{529}) = 2(-1 + 23) = 44.$$

$$\text{Mặt khác } M = -1 + \sqrt{2018} < -1 + \sqrt{2025} = -1 + 45 = 44$$

Do đó $M < N$.

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ và $y = g(x) = \frac{1}{2}x$

a) Tính $f(-3)$, $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(1,5)$.

b) Tính $g(-3)$, $g(-0,5)$, $g(0)$, $g(1,5)$.

c) Hãy nhận xét về giá trị của các hàm số đã cho ở trên khi cho biến x lấy cùng một giá trị?

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-1}{3}x + 1$.

a) Tính $f(-5)$, $f\left(\frac{-3}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$

b) Hàm số đã cho là hàm số đồng biến hay nghịch biến?

Bài 3: Vẽ đồ thị hàm số

a) $y = f(x) = x + 2$

b) $y = f(x) = -4x + 5$

c) $y = f(x) = \frac{-2}{3}x - 1$

d) $y = f(x) = 2x - 3$

e) $y = f(x) = 0,5x - 0,5$

f) $y = f(x) = \frac{-3}{4}x + 2$

g) $y = f(x) = \sqrt{3}x$

h) $y = f(x) = \sqrt{2}x$

Bài 4: Tìm giá trị của m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất

a) $y = f(x) = (m - 3)x + 1$

b) $y = f(x) = \frac{2}{m^2}x - \frac{2}{3}$

c) $y = f(x) = \sqrt{5 - 2m}x + m + 3$

d) $y = f(x) = |m - 1|x - 2$

e) $y = f(x) = \frac{m^2}{2m - 1}x - 2$

f) $y = f(x) = (m^2 + m - 1)x + m + 2x$

g) $y = f(x) = \left(\sqrt{m + 2\sqrt{m - 1}}\right)x + m^2 + 3m$

Bài 5: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến? Hàm số nào nghịch biến? Giải thích

a) $y = f(x) = 3x - 2$

b) $y = f(x) = -x - 7$

c) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$

d) $y = f(x) = (3 - \sqrt{7})x + 2$

e) $y = f(x) = (\sqrt{5} - 2)x + \sqrt{3}$

f) $y = f(x) = \frac{2 + \sqrt{5}}{-3}x - 8$

g) $y = f(x) = \frac{17}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}x - \sqrt{3}$

h) $y = f(x) = \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}} \right)x - 15$

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

Bài tập cơ bản

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x - 2$. Tính $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(a^2)$, $f(2a + 2)$.

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Tính $f(5)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$.

Bài 3: Một hình chữ nhật có các kích thước là 30 cm và 40 cm. Người ta giảm bớt mỗi kích thước của hình đó đi x cm. Gọi S và P lần lượt là diện tích và chu vi của hình chữ nhật mới theo x .

a) Hỏi rằng các đại lượng S và P có phải là hàm số bậc nhất của x hay không? Vì sao?

b) Tính giá trị tương ứng của P khi x nhận các giá trị (tính theo đơn vị cm) sau: 0; 1, 5; 2, 5; 3, 5.

Bài 4: Chứng minh hàm số $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bài 5: Cho hai hàm số $f(x) = 5x - 3$ và $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

a) Tìm a sao cho $f(a) = g(a)$.

b) Tìm b sao cho $f(b - 2) = g(2b + 4)$

Bài 6: Cho hàm số $y = (m - 2)x + 3$ và $y = (m + 1)x + 5$. Tìm các giá trị của m để hàm số:

a) Là hàm số bậc nhất

b) Là hàm số nghịch biến

c) Là hàm số đồng biến

Bài 7: Cho hàm số $y = ax + 5$. Tìm hệ số a biết khi $x = 1$ thì $y = 2$.

Bài 8 Với giá trị nào của m thì hàm số sau là hàm số bậc nhất?

a) $y = \sqrt{5 - m}(x - 1)$

b) $y = \frac{m + 1}{m - 1}x + 3, 5$

Bài 9: Tìm m để hàm số $y = (m^2 - 1)x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 10: Tìm m để hàm số $y = (m^2 - 2m - 3)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài tập nâng cao

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0; 1)$. Biết $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$. Chứng minh rằng $f(\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0$ và $f\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) < 0$.

HD: Lưu ý $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (trục căn thức sẽ thấy) cùng với hàm số nghịch biến trong khoảng $(0; 1)$ và $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

Bài 2: Tìm a, b để hàm số $y = (a^2 - 4)x^2 + (b - 3a)(b + 2a)x - 2$ là hàm số bậc nhất.

HD: Giải phương trình $a^2 - 4 = 0$ ta được hai giá trị của a , lần lượt thay vào $(b - 3a)(b + 2a)$ được một biểu thức theo b . Dùng định nghĩa hàm số bậc nhất để tìm b .

Bài 3: Cho hàm số $y = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)x - 5$. Hàm số là đồng biến hay nghịch biến.

HD: Dùng trục căn thức để rút gọn $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ rồi xét dấu.

Bài 4: Chứng minh rằng hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

HD: Sử dụng định nghĩa để chứng minh.

§3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Bài 1: Xác định vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau:

- | | |
|---|--|
| a) $y = 2x + 6$ và $y = 2x + 5$, | b) $y = 3x - 3$ và $y = 4x - 3$, |
| c) $y = 7x - 1$ và $y = \frac{1}{7}x - 1$, | d) $y = 8x + 2$ và $y = 16x + 4$, |
| e) $2y = 3x + 4$ và $y = \frac{3}{2} + 2$, | f) $y = 4x + 5$ và $3y - 12x + 15 = 0$, |
| g) $7y - 9x + 14 = 0$ và $y = \frac{9}{7}x - 3$, | h) $y = 5x - 32$ và $6x + y = 48$. |

Bài 2: Tìm các giá trị m (nếu có) để các cặp đường thẳng sau cắt nhau:

- | | |
|---|---|
| a) $y = mx + 3$ và $y = (3m + 2)x + 3m$, | b) $y = (m + 1)x + 4$ và $y = 2x + 4m$, |
| c) $y = 5x + 6$ và $y = (m - 1)x + m$, | d) $4x + 3my = 0$ và $y = 3x + 6$, |
| e) $6x + my + 3 = 0$ và $2y - 3mx + 4 = 0$, | f) $y = 3x + 4$ và $y = (m^2 + 4m + 3)x + 9$, |
| g) $(m + 1)y + x = 0$ và $y = (m + 1)x + 4$, | h) $y = (\frac{m^2}{2} + 4)x + 5$ và $y = (m + \frac{7}{2})x + 3$. |

HD: h) Phân tích $\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{2}$ thành hằng đẳng thức.

Bài 3: Tìm giá trị m (nếu có) để các cặp đường thẳng sau song song với nhau:

- | | |
|--|--|
| a) $y = mx + (2m + 1)$ và $y = 7x + 9$, | b) $y = (m - 1)x + 8m$ và $y = 2mx + 3$, |
| c) $y = 2m^2x + 4m$ và $y = 2x - 4$, | d) $y = 3x + 8$ và $y = (9m + 6)x + 4$, |
| e) $my = 4x + 2$ và $y = 8x + 9$, | f) $4x - 2y + 3 = 0$ và $mx + (m - 1)y + 4 = 0$, |
| g) $y = (m^2 + 1)x + 3$ và $y = 2mx + m$, | h) $mx + (m + 1)y - 1 = 0$
và $y = -mx + m + 1$. |

HD:

g) Đưa $m^2 + 1 = 2m$ về hằng đẳng thức.

h) Xét trường hợp $m = 0$, rồi đưa về dạng $y = ax + b$.

Bài 4: Tìm giá trị m (nếu có) để các cặp đường thẳng sau trùng nhau:

a) $y = 3x + 2$ và $y = mx + 3m - 7$,

b) $y = mx + 3m + 2$ và $y = (-m^2 - 4m + 6)x - 1$,

c) $y = 2x + \frac{m}{4}$ và $y = (m - 3)x + 4m + 5$,

d) $4x + my = 0$ và $y = 3x + m$,

e) $m^2x + (m + 1)y + 6 = 0$ và
 $y = (m - \frac{10}{3})x - 2$,

f) $7m^3x + 6y + 5 = 0$ và $4y + (5m + 1)x - m = 0$,

g) $4x + 6m^5y + m^2 + 1 = 0$ và
 $3y + 2x = 8m^4 + 3m^2$,

h) $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ và
 $y = (m^2 + 1)x + m - \frac{3}{2}$.

HD:

e, f, g) Xét trường hợp hệ số trước y bằng 0, rồi sau đó đưa về trường hợp $y = ax + b$. Khi đó, ta giải điều kiện $b = b'$ và thế vào điều kiện $a = a'$.

h) Phân tích $2 - \sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ và xét điều kiện $b = b'$ trước.

Bài 5: Cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định hệ số a trong các trường hợp sau:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 4)$,

b) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 2x + 5$,

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 3,

d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 3x + 4$ tại điểm có hoành độ là -3 ,

e) Đồ thị hàm số vuông góc với trục tung.

f) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; \sqrt{11 + 6\sqrt{2}})$,

g) Đồ thị hàm số tạo với trục hoành và trục tung hai góc đều bằng 45° ,

HD:

f) Phân tích $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$;

g) Xét hai trường hợp: đường thẳng đi qua gốc tọa độ (là tia phân giác của các góc phần tư)-loại do đường thẳng không qua gốc tọa độ O và trường hợp không đi qua gốc tọa độ (cắt trục hoành và tung tại hai điểm A, B , khi đó tam giác OAB vuông cân).

Bài 6: Cho hàm số $y = 5x + b$. Hãy xác định hệ số b trong các trường hợp sau:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(\frac{3}{2}; \frac{4}{7})$,

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 7,

c) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 9x + \frac{17}{5}$ tại điểm có tung độ là 9,

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(\sqrt{7}; \sqrt{8 + 2\sqrt{7}})$,

e) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ -2 ,

f) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 5x + 4$

g) Đồ thị hàm số tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác vuông cân.

HD:

d) Phân tích $8 + 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} + 1)^2$;

f) Để $y = 5x + b$ song song với $y = 5x + 4$ thì $b \neq 4$;

g) Xét hai trường hợp: đường thẳng đi qua gốc tọa độ (là tia phân giác của góc phần tư thứ I) và trường hợp không đi qua gốc tọa độ (cắt trục hoành và tung tại hai điểm A, B , khi đó tam giác OAB vuông cân).

Bài 7: Cho hàm số $y = ax + b$. Hãy xác định hệ số a, b trong các trường hợp sau:

a) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; 9)$,

b) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 5$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 2$,

c) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 3x + 2$ và qua điểm $A(-2; 3)$,

d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 3x + 2$ tại $A(-1; -1)$ và đi qua gốc tọa độ,

e) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(\sqrt{2}; 3)$ và song song với trục hoành,

f) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; \sqrt{4 + \sqrt{7}})$ và $B(\sqrt{14}; \frac{\sqrt{2}}{2})$,

g) Đồ thị hàm số tạo với trục hoành và tạo trục tung 2 góc đều bằng 45° , đồng thời đi qua điểm $A(1; 1)$.

HD:

f) Phân tích $4 + \sqrt{7} = \left(\frac{\sqrt{14}}{2} + 1\right)^2$;

g) Xét hai trường hợp:

+Đường thẳng đi qua gốc tọa độ (là đường phân giác của góc phần tư thứ I và III);

+Đường thẳng không đi qua gốc tọa độ (cắt trục hoành và tung tại hai điểm B, C , khi đó tam giác OBC vuông cân), đồng thời điểm $A(1; 1)$ là trung điểm cạnh huyền.

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

§5. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG

1 ĐỀ 1

Bài 1: (3 điểm) Cho hàm số $y = 2x + 1$ có đồ thị là đường thẳng (d)

a) Tìm tọa độ điểm A thuộc d biết A có hoành độ bằng 2.

b) Tìm tọa độ điểm B thuộc d biết B có tung độ bằng -7 .

c) Điểm $C(4; 9)$ có thuộc d không?

Bài 2: (3 điểm) Cho hàm số $y = (3m + 2)x + 1$

a) Tìm điều kiện của m để hàm số trên là hàm số bậc nhất.

b) Tìm điều kiện của m để hàm số trên đồng biến, nghịch biến.

c) Tìm điều kiện của m để hàm số trên đồng thời đồ thị của hàm số trên song song với đường thẳng $y = x - 3$.

Bài 3: (3 điểm) Cho hàm số bậc nhất $y = f(x) = kx + 3 - 2x + k$

- Xác định k để hàm số trên đồng biến.
- Xác định k để đồ thị hàm số trên đi qua điểm $M(1; 3)$.
- Xác định k để đồ thị hàm số cắt hai trục tọa tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1.

Bài 4: (1 điểm) Cho đường thẳng $d: y = f(x) = \frac{-2m}{m-1}x + \frac{2}{m-1}$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng d là lớn nhất.

2 ĐỀ 2

Bài 1 (2 điểm): Tìm m để:

- Hàm số $y = (m + 2\sqrt{m} + 1)x - 10$ là hàm số đồng biến.
- Hàm số $y = (\sqrt{m} - 3)x + 2$ là hàm số nghịch biến.

Bài 2 (5 điểm): Cho hai hàm số: $y = x + 2$ (d_1) và $y = -\frac{1}{2}x + 1$ (d_2).

- Vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Xác định tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) bằng phép toán.
- Viết phương trình đường thẳng (d_3) qua $O(0; 0)$ và song song với (d_1). Tìm tọa độ giao điểm M của (d_3) và (d_1).

Bài 3 (2 điểm): Cho hàm số $y = (3m - 2)x - 3$ (d) và $y = -4x + 3 - 2m$ (d').

- Định m để (d) song song với (d').
- Định m để (d) và (d') cắt nhau tại điểm thuộc trục hoành.

Bài 4 (1 điểm): Chứng minh rằng đường thẳng $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ (m là tham số) luôn luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .

3 ĐÁP ÁN ĐỀ 1

Bài 1:

- Điểm A có hoành độ bằng 2 nên tọa độ của A là $(2, b)$. Vì A thuộc d nên $b = 2 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow b = 5$. Vậy $A(2; 5)$.
- Điểm A có tung độ bằng -7 nên tọa độ của A là $(a; -7)$. Vì A thuộc d nên $-7 = 2 \cdot a + 1 \Leftrightarrow a = -4$. Vậy $A(-4; -7)$.

Bài 2:

- $y = (3m + 2)x + 1$ là hàm bậc nhất khi và chỉ khi $3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{2}{3}$.
- $y = (3m + 2)x + 1$ đồng biến khi và chỉ khi $3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$.
- $y = (3m + 2)x + 1$ nghịch biến khi và chỉ khi $3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3}$.

Bài 3:

a) $y = f(x) = kx + 3 - 2x + k \Leftrightarrow y = f(x) = (k - 2)x + k + 3$. Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $k - 2 > 0 \Leftrightarrow k > 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = f(x) = kx + 3 - 2x + k$ đi qua $M(1; 3)$ khi và chỉ khi $3 = k.1 + 3 - 2.1 + k \Leftrightarrow k = 1$.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x) = (k - 2)x + k + 3$ cắt Ox tại $A\left(\frac{k + 3}{2 - k}\right)$, cắt Oy tại $B(0; k + 3)$.

$$\text{Diện tích } \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| \frac{k + 3}{2 - k} \right| \cdot |k + 3| = 1 \Leftrightarrow k = -4 + \sqrt{11} \text{ hoặc } k = -4 - \sqrt{11}.$$

Bài 4: Khoảng cách từ O đến đường thẳng d là $\frac{\left| \frac{2}{m-1} \right|}{\sqrt{\left(\frac{-2m}{m-1} \right)^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5m^2 - 2m + 1}} =$

$$\frac{2}{\sqrt{5\left(m^2 - \frac{2}{5}m + \frac{1}{25}\right) + \frac{4}{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5\left(m - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}}. \text{ Sử dụng hằng đẳng thức để làm các bước tiếp theo và ta được kết quả } m = \frac{1}{5}.$$

4 ĐÁP ÁN ĐỀ 2

Bài 1

a) Hàm số đã cho đồng biến khi và chỉ khi

$$m + 2\sqrt{m} + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{m} + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{m} + 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

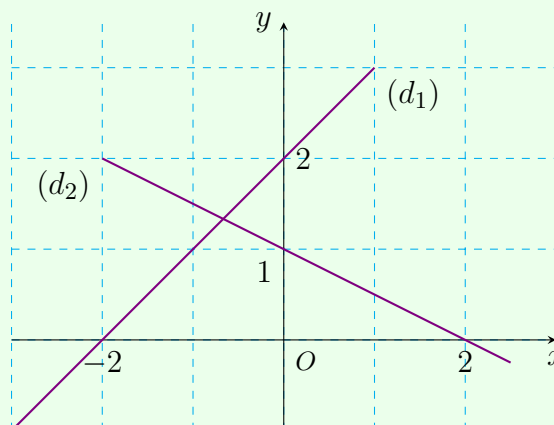
Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến với mọi m .

b) Hàm số đã cho nghịch biến khi và chỉ khi

$$\sqrt{m} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{m} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq m < 9$$

Bài 2:

a)



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là:

$$x + 2 = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Suy ra $y = \frac{4}{3}$. Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

c) Vì đường thẳng (d_3) song song với (d_1) nên phương trình đường thẳng (d_3) có dạng $y = x + b$ ($b \neq 2$).

Ta có $O(0;0)$ thuộc (d_3) nên $0 = 0 + b$, suy ra $b = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y = x$.

Vì (d_3) song song với (d_1) nên không tồn tại giao điểm M của hai đường thẳng.

Bài 3:

a) Hai đường thẳng (d) song song với (d') khi và chỉ khi $\begin{cases} 3m - 2 = -4 \\ -3 \neq 3 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{2}{3} \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $m = -\frac{2}{3}$

b) Giao điểm của (d) và trục hoành là $A\left(\frac{3}{3m-2}, 0\right)$. với $m \neq \frac{2}{3}$

Giao điểm của (d') và trục hoành là $B\left(\frac{3-2m}{4}, 0\right)$.

Vì (d) và (d') cắt nhau tại trục hoành nên $A \equiv B$, suy ra $\frac{3}{3m-2} = \frac{3-2m}{4}$.

Bài 4:

Gọi $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng đi qua. Ta có: $(m-2)x_0 + (m-1)y_0 = 1 \Leftrightarrow m(x_0 - y_0) - 2x_0 - y_0 = 1(1)$.

Vì đường thẳng đi qua A với mọi m nên $m(x_0 - y_0) = 0$ hay $x_0 = y_0$, thay vào (1) ta được $x_0 = -1, y_0 = 1$.

Thử lại ta thấy đường thẳng luôn đi qua $(-1, 1)$ với mọi m .

Phần II

HÌNH HỌC

Chương 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài tập cơ bản

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 6$, $AC = 8$. Tính HB, HC .

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 12$, $BC = 20$. Tính HB, HC .

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $HB = 1$, $HC = 4$. Tính AB, AC .

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 5$, $AC = 7$. Tính AH, BC .

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $HB = 1$, $AH = 2$. Tính AC, HC .

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = AC, HB = HC, AH = 2$. Tính AB, HB .

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết rằng $AH = 4\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh AB, AC, HB, HC .

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AB + AC = 21\text{cm}$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC .

b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết rằng $AB = 2\sqrt{5}\text{cm}$ và diện tích tam giác ABC bằng 15 cm^2 . Tính độ dài các cạnh AC, BC, AH, HB, HC .

Bài 10: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6\text{cm}$, $CD = 8\text{cm}$. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E , cắt cạnh AB tại F . Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF .

Bài tập nâng cao

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH và trung tuyến AM . Kẻ $HD \perp AB$ tại D , $HE \perp AC$ tại E . Biết $HB = 4,5\text{cm}$, $HC = 8\text{cm}$.

a) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$.

b) Chứng minh $AM \perp DE$ tại K .

c) Tính độ dài AK .

Hướng dẫn:

a) $\triangle MAC$ cân tại M

b) Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật nên $\widehat{ADE} = \widehat{DAH}$

$\triangle MAB$ cân tại M nên $\widehat{BAM} = \widehat{ABM}$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{BAM} = \widehat{DAH} + \widehat{ABM} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp DE$$

c) Có HB, HC ta tính được AH, HD, HE . Từ đó tính được AD, AE do tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.

Từ đó ta tính được AK bằng cách xét $\triangle ADE$ vuông tại A đường cao AK .

Bài 2: Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, CD = 30\text{cm}, CA \perp CB$. Tính diện tích hình thang.

Hướng dẫn:

Trong tam giác vuông ACD có $AC = 2AD$ do $\widehat{CAD} = \widehat{ABC} = 60^\circ$

Dùng định lý Pytago tính được $AD = 10\sqrt{3}\text{cm}$

Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$) ta được hình chữ nhật $AHCD$.

Đáp số: $S_{ABCD} = 350\sqrt{3}\text{cm}^2$

Bài 3*: Cho tam giác nhọn ABC , đường cao CK ; H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH . Chứng minh rằng $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{S_1 S_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot MK = \sqrt{\frac{1}{2} AB \cdot CK \cdot \frac{1}{2} AB \cdot HK} \\ &\Leftrightarrow MK^2 = CK \cdot HK \\ &\Leftrightarrow AK \cdot KB = CK \cdot HK \quad (\text{Do } MK^2 = AK \cdot KB) \\ &\Leftrightarrow \triangle AHK \sim \triangle CBK \end{aligned}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và điểm M nằm giữa B và C . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC . Chứng minh rằng $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Hướng dẫn:

$$MB^2 = BD^2 + MD^2 = 2MD^2$$

$$MC^2 = CE^2 + ME^2 = 2ME^2$$

$$\Rightarrow MB^2 + MC^2 = 2(MD^2 + ME^2) = 2DE^2 = 2AM^2$$

Bài 5: Cho tam giác ABC có $AB = 3, BC = 4, AC = 5$. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành bốn tam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.

Hướng dẫn:

Dễ dàng chứng minh được đây là tam giác vuông tại B .

Để tính diện tích các tam giác đề bài yêu cầu, ta cần tính được các đoạn AH, HD, DM, MC .

Dễ dàng tính được $AH = \frac{9}{5}, MC = \frac{5}{2}$.

$$\text{Do } BD \text{ là phân giác của góc } B \text{ nên } \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{DA}{CA} = \frac{3}{7} \Rightarrow DA = \frac{15}{7}.$$

Từ đó $AH < AD < AM$, suy ra $DM = \frac{5}{14}$

Đáp số: $S_{\triangle BAH} = \frac{54}{25}, S_{\triangle BHD} = \frac{72}{175}, S_{\triangle BDM} = \frac{6}{14}, S_{\triangle BMC} = 3$ (đvdt).

Bài 6*: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , đường trung tuyến AM . Tính độ dài các cạnh AB, AC , biết $BC = \sqrt{41}$ và $AH : AM = 40 : 41$.

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} AH : AM &= 40 : 41 \Rightarrow \frac{AH}{40} = \frac{AM}{41} = k \Rightarrow AH = 40k, AM = 41k \\ MH^2 &= AM^2 - AH^2 \Rightarrow MH = 9k \Rightarrow CH = CM + MH = 50k \\ \triangle AHB &\sim \triangle CHA \text{ (g-g) nên } \frac{AB}{AC} = \frac{HA}{HC} = \frac{4}{5} \\ \text{Suy ra } \frac{AB}{4} &= \frac{AC}{5} \Rightarrow \frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{25} = \frac{AB^2 + AC^2}{41} = \frac{BC^2}{41} = \frac{\sqrt{41}^2}{41} = 1 \\ \Rightarrow AB &= 4, AC = 5 \end{aligned}$$

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH và EF . Chứng minh rằng $HB.HC = 4OE.OF$

Hướng dẫn:

Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật nên $AH = EF; OE = OF$ suy ra $EF = 2OE$.

Ta có $OE.OF = OE^2$;

$$EF^2 = AH^2 = 4OE^2 = 4OE.OF$$

Tam giác ABC vuông tại $A, AH \perp BC$ nên $AH^2 = BH.HC$, suy ra $BH.HC = 4OE.OF$

Bài 8: Cho tam giác nhọn ABC , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Gọi M và N lần lượt là điểm thuộc HC, HB sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$.

Tam giác AMN là tam giác gì? Vì sao?

Hướng dẫn:

Tam giác AMB vuông tại M , ta có

$$AM^2 = AE.AB \quad (1)$$

Tam giác ANC vuông tại N , ta có

$$AN^2 = AD.AC \quad (2)$$

$\triangle ABD \sim \triangle ACE$ (g-g), ta có:

$$AD.AC = AE.AB \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AM = AN$. Vậy $\triangle AMN$ là tam giác cân tại A .

Bài 9: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a .

a) M là một điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 30^\circ$. Tính AM, BM theo a .

b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F , đường thẳng này cắt CD tại N . Tính độ dài các đoạn thẳng AF, MF, BF theo a .

Hướng dẫn:

a) $\triangle AMB$ vuông tại A , có $\widehat{ABM} = 30^\circ$ nên $BM = 2AM$.

$$(2AM)^2 - AM^2 = AB^2 \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

b) $\widehat{MAF} = \widehat{ABF} = 30^\circ$ (cùng phụ với $\widehat{FAB}$). Từ đó ta có

$$\begin{aligned} AF &= \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; MF = \frac{AM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ AF^2 &= FM.FB \Rightarrow FB = \frac{AF^2}{MF} = \frac{a^2.6}{4.a.\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Bài 10: Cho hình vuông $ABCD$ và điểm I thay đổi nằm giữa điểm A và B . Tia DI cắt tia BC tại E . Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F . Chứng minh rằng tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I .

Hướng dẫn:

$\triangle AID \sim \triangle CFD$ (c-g-c) suy ra $DI = DF$.

$\triangle EDF$ vuông tại D , có $DC \perp EF$ suy ra

$$\frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2} = \frac{1}{DC^2}$$

Mà $DF = DI$ nên $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DC^2}$ không đổi, do đó $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I .

§2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C , trong đó $AC = 0,3m$, $BC = 0,4m$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B , từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A .

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6cm$, $\tan B = \frac{1}{3}$. Hãy tính các cạnh AC, BC .

Bài 3. Với góc nhọn α tùy ý, hãy chứng minh:

a) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

c) $\cot^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1) = \cos^2 \alpha$.

Bài 4. Không sử dụng máy tính:

A) Hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự giảm dần:

a) $\sin 60^\circ$, $\cos 34^\circ$, $\sin 54^\circ$, $\cos 17^\circ$, $\sin 87^\circ$. b) $\tan 24^\circ$, $\cot 69^\circ$, $\tan 4^\circ$, $\tan 45^\circ$, $\cot 87^\circ$.

B) Hãy tính giá trị biểu thức:

a) $\cos 10^\circ - \sin 80^\circ + 3 \tan 31^\circ \cdot \cot 59^\circ$. b) $\tan 50^\circ - \cot 40^\circ + \frac{\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}{\tan 33^\circ \cdot \cot 33^\circ} + \frac{\cos 66^\circ}{\sin 24^\circ}$.

Bài 5. Cho góc nhọn α

a) Cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $\cos \alpha$; $\tan \alpha$; $\cot \alpha$.

b) Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $\sin \alpha$; $\cos \alpha$; $\cot \alpha$.

c) Cho $\tan \alpha = 5$. Tính $C = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$.

d) Cho $\cot \alpha = 0,2$. Tính $D = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha$.

Bài 6. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) vuông tại A có đường cao AH và đường phân giác trong BK ($K \in AC$).

a) Giả sử $AB = 3cm$; $AH = 2,4cm$. Tính BH ; BC ; $\widehat{ABK}$.

b) Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$. Tính $\sin \widehat{ABC}$ và $\cos \widehat{ABC}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) vuông tại A có đường cao AH

a) Chứng minh $\cos^2 C = \frac{CH}{CB}$; $\tan^2 C = \frac{HB}{HC}$; $\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C$ (*).

HD: (*) Gọi M là trung điểm của BC khi đó $\widehat{AMB} = 2C$

$$\Rightarrow \cos 2C = \frac{MH}{MA} = \frac{2MH \cdot BC}{BC^2} = \frac{(HC - HB)(HC + HB)}{BC^2} = \frac{HC^2 - HB^2}{BC^2}.$$

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên trên các cạnh AB, AC . Chứng minh $AH = EF \cdot \cos \widehat{BAC}$.

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

HD: Kẻ AH, BI, CK lần lượt là các đường cao của tam giác ABC .

Khi đó $\cos A = \sqrt{\frac{AI}{AB} \cdot \frac{AK}{AC}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AI}{AC} + \frac{AK}{AB} \right)$ (bđt Cauchy). Làm tương tự với $\cos B, \cos C$.

§3. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG. GIẢI TAM GIÁC

Bài tập cơ bản

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 5\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$; $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$. Hãy giải tam giác vuông ABC

Bài 4: Trong tam giác ABC có $AB = 11\text{cm}$; $\widehat{ABC} = 38^\circ$; $\widehat{ACB} = 30^\circ$, N là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC . Tính AN và AC . (Kết quả lấy sau dấu phẩy 2 chữ số)

Bài 5: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Biết $\widehat{AOD} = 70^\circ$; $AC = 5,3\text{cm}$; $BD = 4,0\text{cm}$. Tính diện tích $ABCD$. (Biết $\sin 70^\circ = 0,9$)

Bài 6: Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$; $AB = a$; $BC = b$ các đường phân giác của bốn góc cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Biết $HB = 2\text{cm}$. $HC = 64\text{cm}$. Tính góc B , góc C (làm tròn đến độ).

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Biết $HB = 64\text{mm}$, $HC = 81\text{mm}$. Tính góc B , góc C (làm tròn đến độ) và tính AB ; AC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 9: Một chiếc đồ đang ở điểm A muốn băng qua sông theo đường AH vuông góc với bờ bên kia nhưng bị nước cuốn đi nên tấp vào bờ bên kia ở điểm B cách H 50m ($BH = 50\text{m}$). Tìm chiều rộng con sông (AH) và quãng đường đồ đã đi (AB).

Bài 10: Một chiếc máy bay đang bay ở độ cao 900m . Một người quan sát nhìn chiếc máy bay đó dưới góc $\alpha \approx 40^\circ$. Tính khoảng cách từ người quan sát đến máy bay (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 11: Từ vị trí A ở đỉnh một ngọn hải đăng cao 100m so với mặt nước biển, người quan sát nhìn thấy một con tàu (vị trí B) theo một góc 82° so với phương thẳng đứng (hình trên). Tính khoảng cách từ A đến con tàu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 12: Cho tam giác ABC có $BC = 12\text{cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

a) Tính chiều cao CH và AC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

b) Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 13: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$.

- Tính BC ; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ (Kết quả lấy sau dấu phẩy 1 chữ số)
- Phân giác của góc A cắt BC tại D . Tính BD, CD . (Kết quả lấy sau dấu phẩy 1 chữ số)
- Từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Tính chu vi và diện tích của tứ giác $AEDF$. (Kết quả lấy sau dấu phẩy 1 chữ số)

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$. Kẻ đường phân giác trong AD của góc vuông cắt cạnh huyền tại D , rồi kẻ đường song song BE với AD (E thuộc đường thẳng AC)

- Chứng minh rằng $AE = AB$. Tính BE .
- Tính độ dài đường phân giác AD .
- Tính diện tích hình thang $ADBE$ và diện tích tam giác ADC .

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông tại A và có độ dài hai cạnh góc vuông $AB = 24\text{cm}$, $AC = 18\text{cm}$. Từ trung điểm M trên cạnh huyền BC kẻ đường vuông góc với cạnh huyền cắt AC tại D và AB tại E .

- Tính độ dài MC .
- Chứng minh rằng $\triangle DMC$ đồng dạng với tam giác $\triangle ABC$ và tính độ dài các cạnh của tam giác DMC .
- Tính độ dài BE .

Bài 16: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH chia cạnh huyền BC thành hai đoạn BH, CH có độ dài lần lượt là 4cm và 9cm . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC .

- Tính độ dài đoạn DE .
- Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và tại E lần lượt cắt BC tại M và N . Chứng minh M là trung điểm của BH và N là trung điểm của CH .
- Tính diện tích của tứ giác $DENM$.

Bài 17: Gọi AM, BN, CL là ba đường cao của tam giác ABC chứng minh rằng:

- $\triangle ANL \sim \triangle ABC$.
- $AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

Bài 18: Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{C} = 30^\circ$, $BC = 10\text{cm}$.

- Tính AB, AC .
- Từ A kẻ AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong, ngoài của góc B . Chứng minh rằng: $MN \parallel BC$ và $MN = AB$.
- Chứng minh rằng: $\triangle MAB \sim \triangle ABC$.

Bài tập nâng cao

Bài 1: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn.

a) Chứng minh: $\sin A + \cos A > 1$.

b) Vẽ đường cao AH . Chứng minh: $AH = \frac{BC}{\cot B + \cot C}$.

c) Biết $BC = 12\text{cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a$, đường cao AH . Chứng minh:

a) $1 + \tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$.

b) $AH = a \cdot \sin B \cos B$, $BH = a \cdot \cos^2 B$ và $CH = a \cdot \sin^2 B$.

c) Dùng tỉ số lượng giác để chứng minh $AB^2 = BC \cdot BH$, $AB \cdot AC = BC \cdot AH$ và $AH^2 = HB \cdot HC$.

Bài 3: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, hai đường cao BH và CK .

a) Dùng tỉ số lượng giác để chứng minh $\triangle AHK \sim \triangle ABC$.

b) Biết $\widehat{A} = 45^\circ$. Chứng minh rằng $S_{AHK} = S_{BCHK}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC

a) Có $\widehat{A} = 120^\circ$; $AB = 3\text{cm}$; $AC = 6\text{cm}$. Tính độ dài đường phân giác AD .

b) Có đường phân giác AD thỏa mãn $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. Tính $\widehat{BAC}$.

Bài 5: Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng 54cm^2 và 96cm^2 . Tính độ dài cạnh huyền?

Bài 6: Tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác BD . Tia phân giác của góc A cắt BD tại I . Biết $IB = 10\sqrt{5}$; $ID = 5\sqrt{5}$. Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 7: Tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , điểm I thuộc cạnh AC sao cho $AI = \frac{1}{3}AC$, điểm K thuộc tia đối của tia HA sao cho $HK = \frac{1}{3}HA$. Tính $\widehat{BKI}$.

Bài 8: $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ và độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

a) Tính độ dài các cạnh của tam giác.

b) Tính số đo của các góc trong $\triangle ABC$.

Bài 9: Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi bằng 72cm , hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7cm .

Bài 10: Cho $\triangle ABC$ các đường phân giác AD , đường cao BH , đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O . Chứng minh rằng $AC \cdot \cos A = BC \cdot \cos B$.

Bài 11: Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AD . Biết $AB = c$; $AC = b$; $\widehat{A} = 2\alpha (\alpha < 45^\circ)$. Chứng minh rằng: $AD = \frac{2bc \cdot \cos A}{b + c}$.

Bài 12: Cho tam giác nhọn ABC . Hai đường cao BD và CE . Chứng minh rằng:

a) $S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A$.

b) $S_{BCDE} = S_{ABC} \cdot \sin^2 A$.

c) Nếu cho $AE = 3\sqrt{5}\text{cm}$ và $HA = 6\text{cm}$. Khi đó hãy chứng minh rằng các độ dài HE, HA, HD, HG lần lượt tỉ lệ với 1;2;4;8.

d) Nếu cho E là trung điểm của AB . Khi đó, tính $\cos \widehat{EDF}$

Bài 13: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên AB, AC lấy K, L sao cho $AK = AH = AL$. Chứng minh rằng: $S_{AKL} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}$.

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông tại A .

a) Chứng minh $AB \cdot \sin C + AC \cdot \cos C = BC$.

b) Vẽ $AH \perp BC$ tại H . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu H lên AB và AC . Chứng minh:

$$\frac{AF \cdot AC}{EF \cdot BC} = \frac{AE}{AC}$$

c) Chứng minh $AH^3 = BC \cdot BE \cdot CF = BC \cdot AE \cdot AF$.

Bài 15: Cho tam giác ABC có đường cao AH (H nằm giữa B và C ; $AB < AC$).

a) Chứng minh $AH = BC : \left(\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} \right)$.

b) Chứng minh $S_{ABC} = \frac{1}{2}CA \cdot CB \cdot \sin C$.

c) Chứng minh $\sin B + \cos B > 1$.

d) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu H lên AB và AC . Tia FE cắt BC tại D . Chứng minh:
 $DE \cdot DF = DB \cdot DC$.

e) Nếu $AH^2 = HB \cdot HC$. Khi đó chứng minh $\triangle ABC$ vuông và $DB \cdot DC = DH^2$.

Bài 16: Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB và BC lần lượt lấy điểm E và F sao cho $AE = BF$; tia cắt DE tại H và cắt đường thẳng DC tại G .

a) Chứng minh: $DE \perp AF$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{AE^2} - \frac{1}{DG^2} = \frac{1}{HA^2} - \frac{1}{HD^2}$.

c) Nếu cho $AE = 3\sqrt{5}\text{cm}$ và $HA = 6\text{cm}$. Khi đó hãy chứng minh rằng các độ dài HE, HA, HD, HG lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 4; 8.

d) Nếu cho E là trung điểm của AB . Khi đó, tính $\cos \widehat{EDF}$.

Bài 17: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Gọi M, K, N lần lượt là trung điểm của AH, ED, BC .

a) Chứng minh: M, K, N thẳng hàng.

b) Tính $\widehat{MDN}$.

c) AH cắt BC tại F . Ký hiệu S là diện tích. Chứng minh:

- $S_{AED} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A$
- $S_{BEDC} = S_{ABC} \cdot \sin^2 A$.
- $S_{EDF} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$.

d) Chứng minh $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$ và $2 < \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 3$.

e) Cho biết $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Khi đó hãy tính tỉ số $\frac{HD}{HC}$ và $\frac{DE}{BC}$.

Bài 18: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AD . Vẽ $DE \perp AB$ tại E , $DF \perp AC$ tại F .

a) Chứng minh rằng $AE = \frac{AC^2 \cdot AB}{AC^2 + AB^2}$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2}$.

Bài 19: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H và $BC = a$. Cho biết $\tan \widehat{BAC} + \cot \widehat{BAC} = 2$.

a) Tính EF theo a .

b) Chứng minh $(\cot \widehat{ABC} + 1)(\cot \widehat{ACB} + 1) = 2$.

Bài 20: Cho tam giác ABC vuông tại A . Từ điểm D trên cạnh AC , vẽ $DE \perp BC$ tại E . Chứng minh $\sin B = \frac{AB \cdot AD + EB \cdot ED}{AB \cdot EB + AD \cdot ED}$.

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

Bài 1: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Biết $AD = 4$; $BC = 7$.

a) Tính số đo của góc C và góc D .

b) Cho biết thêm $CD = 13$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Đáp án:

a) $\widehat{C} \approx 29^\circ 44'$; $\widehat{D} \approx 60^\circ 16'$.

b) $S_{ABCD} \approx 31,3$ (đvdt).

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $BC = 5$. Các đường phân giác trong và ngoài của góc B cắt đường thẳng AC tại M và N . Tính độ dài MN .

Đáp án: $MN = AN + AM = 6 + 1,5 = 7,5$.

Bài 3: Cho hình thang $ABCD$, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O .

a) $\frac{HC}{HB} = \frac{25}{9}$

b) $HB = 36; HC = 100.$

Bài 11: Tính số đo của góc nhọn x biết:

a) $7 \sin x + 13 \cos(90^\circ - x) = 16,3$

b) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

c) $5 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 4,067.$

Đáp án:

a) $x \approx 54^\circ 35'$

b) $x = 60^\circ$

c) $x \approx 75^\circ.$

Bài 12*: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của nó. Trên một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB . Qua O vẽ một tia cắt tia Ax tại M sao cho $\widehat{AOM} = \alpha < 90^\circ$. Qua O vẽ tia thứ hai cắt tia By tại N sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$. Xác định giá trị của α để tam giác MON có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

Đặt $AB = 2a$ thì $OA = OB = a$. Khi đó dễ dàng tính được các cạnh sau:

$$OM = \frac{a}{\cos \alpha}; ON = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Diện tích } \triangle MON \text{ là } S_{\triangle MON} = \frac{a^2}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \geq \frac{a^2}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \geq \frac{a^2}{1}.$$

Vậy min $S_{\triangle MON} = a^2$, khi và chỉ khi $\alpha = 45^\circ$.

Nhận xét: Nếu O không phải là trung điểm của AB , O chỉ nằm giữa A và B , $OA = a$; $OB = b$ thì chứng minh tương tự như trên ta được min $S = ab \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Bài 13*: Cho tam giác nhọn ABC có diện tích $S_{\triangle ABC} = 1$. Dựng ba đường cao AD, BE, CF . Chứng minh rằng:

a) $S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BDF} + S_{\triangle CDE} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C;$

b) $S_{\triangle DEF} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C.$

Hướng dẫn:

a) Ta có: $\frac{AE}{AB} = \cos C = \frac{AF}{AC}$. Từ đó suy ra: $\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$ (tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng).

$$\text{Suy ra: } S_{\triangle AEF} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A.$$

Chứng minh tương tự, ta được: $S_{\triangle BDF} = \cos^2 B$ và $S_{\triangle CDE} = \cos^2 C$.

b) Áp dụng câu a) và công thức $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Bài 14:** Tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau ở O sao cho $\widehat{AOB} < 90^\circ$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác AOB và COD . Gọi G và I lần lượt là trọng tâm của các tam giác BOC và AOD .

a) Gọi E là trọng tâm của tam giác AOB , F là giao điểm của AH và DK . Chứng minh rằng các tam giác IEG và HFK đồng dạng.

b) Chứng minh rằng IG vuông góc với HK .

Hướng dẫn:

- a) Dễ dàng chứng minh được $EG \parallel AC$ và $EI \parallel BD$.

$$\text{Suy ra } (\widehat{EG, EI}) = (\widehat{AC, BD}). \quad (1)$$

Mặt khác $AF \perp BD$ và $DF \perp AC$ nên $(\widehat{AF, DF}) = (\widehat{AC, BD})$. (2)

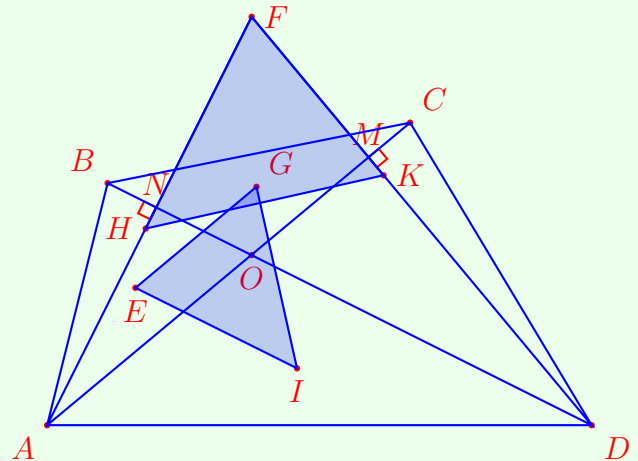
Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{GEI} = \widehat{HFK}$.

$$\text{Dễ thấy } EG = \frac{AC}{3}; EI = \frac{BD}{3} \text{ nên } \frac{EG}{EI} = \frac{AC}{BD}.$$

Gọi $M = AC \cap DF$ và $N = AF \cap BD$, ta có:

$$FK = FM + MK = AM \cot \widehat{COD} + MC \cot \widehat{COD} = AC \cot \widehat{COD}.$$

$$\text{Tương tự } FH = BD \cot \widehat{COD}. \text{ Do đó } \frac{FK}{FH} = \frac{AC}{BD}.$$



- b) Sử dụng câu a), chú ý rằng $IE \perp HF$.

Bài 15*: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng với A qua B . Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia HA sao cho $HE = 2HA$. Chứng minh rằng $\widehat{DEC} = 90^\circ$.

Hướng dẫn:

Gọi K là trung điểm của HE . Khi đó: $DK \parallel BC$ và $DK \perp AE$.

Đặt $AH = x$. Khi đó $HE = 2x$ và $HK = KE = x$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta tính được $HC = \sqrt{2}x$; $AC = \sqrt{3}x$; $CE = \sqrt{6}x$.

Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông, ta tính được $DB = AB = \frac{\sqrt{6}x}{2}$. Từ đó

$$BH = \frac{\sqrt{2}x}{2}, \text{ và suy ra } DK = \sqrt{2}x.$$

Tam giác DEC có các cạnh $DC = 3x$; $DE = \sqrt{3}x$ và $EC = \sqrt{6}x$ nên vuông tại E .

Bài 16*: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , đường trung tuyến BM . Gọi D là hình chiếu của C trên BM , H là hình chiếu của D trên AC . Chứng minh rằng $AH = 3HD$.

Hướng dẫn:

Gọi N là trung điểm của BC và $I = AN \cap BD$. Khi đó: $AN \perp BC$; $AN = BN = NC$; $NM \parallel AB$ và $NM = \frac{AB}{2}$.

Dễ thấy $\triangle AMB \sim \triangle DMC$, suy ra $\triangle AMD \sim \triangle BMC$.

$$\text{Suy ra: } \widehat{DAM} = \widehat{CBM} \Rightarrow \tan \widehat{DAM} = \tan \widehat{CBM} \Rightarrow \frac{HD}{AH} = \frac{IN}{BN} = \frac{IN}{AN} = \frac{1}{3} \text{ (đpcm).}$$

§5. ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG

1 ĐỀ 1

Bài 1. (2 điểm) Không sử dụng máy tính hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần:

$$\tan 25^\circ, \cot 67^\circ, \tan 19^\circ, \tan 30^\circ, \cot 50^\circ.$$

Bài 2. (3 điểm) Cho góc nhọn α , biết $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\sin \alpha$; $\tan \alpha$; $\cot \alpha$.

Bài 3. (5 điểm) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AD và đường trung tuyến CE .

- Tính số đo $\widehat{ACB}$ và tính độ dài CB, CE nếu biết $AC = 2\sqrt{3}cm$ và $CD = \sqrt{3}cm$.
- Vẽ $EH \perp BC$ tại H và $AF \perp CE$ tại F , AF cắt BC tại G . Chứng minh $CF \cdot CE = CD \cdot CB$ và $CG \cdot CH = CH^2 - HD^2$.
- Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng AG tại I . Chứng minh I, H, E thẳng hàng.

2 ĐỀ 2

Bài 1 (1,5 điểm):

Không dùng bảng và máy tính, hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau đây theo thứ tự từ lớn đến nhỏ: $\tan 25^\circ, \cot 15^\circ, \tan 50^\circ, \cot 67^\circ 30'$.

Bài 2 (2,5 điểm):

Giải tam giác ABC biết $\widehat{B} = 90^\circ, \widehat{C} = 40^\circ, AC = 20$ cm (làm tròn hai chữ số ở phần thập phân).

Bài 3 (2 điểm):

Không dùng bảng và máy tính, hãy tính:

$$A = 2 \tan 27^\circ \tan 63^\circ - \sin^2 15^\circ - \sin^2 75^\circ$$

Bài 4 (4,5 điểm): Cho $\triangle ABC$ có $AC = 16$ cm, $AB = 12$ cm, $BC = 20$ cm. Đường cao AH .

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông.
- Tính $AH, \widehat{B}, \widehat{C}$.
- Từ H kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AC, AB . Tính HE, HF .
- So sánh: $\tan B$ và $\sin B$ (không dùng bảng và máy tính bỏ túi).

3 ĐÁP ÁN ĐỀ 1

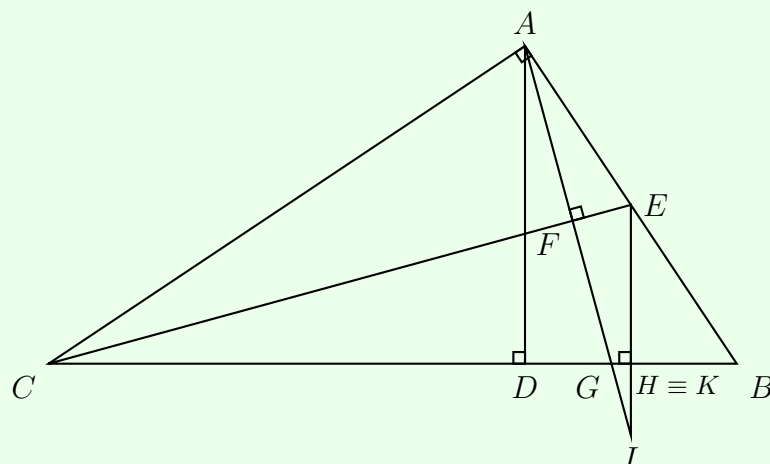
Bài 1. (2 điểm) Ta có : $\cot 67^\circ = \tan 23^\circ, \cot 50^\circ = \tan 40^\circ$.

$$\tan 19^\circ < \tan 23^\circ < \tan 25^\circ < \tan 30^\circ < \tan 40^\circ \Rightarrow \tan 19^\circ < \cot 67^\circ < \tan 25^\circ < \tan 30^\circ < \cot 50^\circ.$$

Bài 2. (3 điểm) Ta có $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}; \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài 3. (5 điểm)



- a) $\triangle ABC$ vuông tại D nên $\cos \widehat{ACD} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$
 $\triangle ABC$ vuông tại A nên $\frac{AC}{CB} = \cos \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \Rightarrow CB = 2AC = 4\sqrt{3}cm$ và $\frac{AB}{CB} = \sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = CB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6cm \Rightarrow AE = 3cm$.
 Ta có $CE^2 = AE^2 + AC^2 = 3^2 + (2\sqrt{3})^2 = 21 \Rightarrow CE = \sqrt{21}$.
- b) Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle AEC$ vuông tại A có đường cao AF và $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AD ta có: $CF \cdot CE = CA^2 = CD \cdot CB$ (đpcm).
 $\triangle ABD$ có E là trung điểm của AB và $EH \parallel AD \Rightarrow H$ là trung điểm của $BD \Rightarrow HB = HD$
 $\triangle CFG \sim \triangle CHE(g.g) \Rightarrow \frac{CG}{CE} = \frac{CF}{CH} \Rightarrow CG \cdot CH = CF \cdot CE$ mà $CF \cdot CE = CD \cdot CB$ (cmt)
 nên $CG \cdot CH = CD \cdot CB = (CH - HD)(CH + HB) = (CH - HD)(CH + HD) = CH^2 - HD^2$ (đpcm).
- c) Vẽ $BK \perp IE$ tại K . Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle AEC$ vuông tại A có đường cao AF và $\triangle IBE$ vuông tại B có đường cao BK , kết hợp E là trung điểm của AB ta có:
 $EF \cdot EC = EA^2 = EB^2 = EK \cdot EI \Rightarrow \frac{EC}{EI} = \frac{EK}{EF}$
 $\triangle EKC \sim \triangle EFI(c.g.c) \Rightarrow CK \perp IE$ tại K mà $BK \perp IE$ tại $K \Rightarrow B, K, C$ thẳng hàng
 do đó K là giao điểm của BC và IE suy ra $H \equiv K$ hay I, H, K thẳng hàng (đpcm).

4 ĐÁP ÁN ĐỀ 2

Chương 2

ĐƯỜNG TRÒN

§1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho tam giác ABC , vuông tại A , đường cao AH . Biết $AH = 14\text{cm}$, $HB = 7\text{cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 2: Cho tam giác ABC cân, có góc $\widehat{A} = 120^\circ$, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Tính diện tích tam giác ABC theo R .

Bài 3: Cho tam giác đều ABC , trực tâm H , cạnh a :

- Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm nào?
- Tính bán kính của đường tròn đó theo a ;
- Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC . Xác định vị trí tương đối của điểm K và đường tròn đó.

Bài 4: Trên các cạnh AB, BC, CD và DA của hình vuông $ABCD$ ta lấy lần lượt các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Các đường chéo AC và BD cắt nhau ở O

- Chứng minh rằng ba điểm F, O, H thẳng hàng;
- Chứng minh rằng O cách đều bốn điểm E, F, G, H ;
- Biết $\widehat{BEC} = 60^\circ$, $BC = 6\text{cm}$, hãy tính BE .

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$), đường cao BD . Đường tròn đường kính AC cắt AB ở E (E khác A). Chứng minh rằng $BEDC$ là hình thang cân.

HD: Tam giác EBC vuông tại E , chứng minh $\triangle EBC = \triangle DCB$, từ đó suy ra $EC = BD$ và $ED \parallel BC$ (định lý Ta-lét đảo).

Bài 2: Cho đường tròn $(O; R)$. Gọi AB, CD là hai đường kính có vị trí thay đổi.

- Tứ giác $ACBD$ là hình gì? Giải thích?
- Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ACBD$ theo R .

HD:

- a) Hình bình hành $\rightarrow$ Hình chữ nhật.
- b) $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = AC \cdot BH$ lớn nhất khi BH là lớn nhất hay BH là bán kính (BH là đường cao kẻ từ B xuống AC).

Bài 3: Cho hai điểm A và B nằm bên ngoài một đường tròn. Qua A hãy kẻ một đường thẳng cắt đường tròn tại C và D sao cho điểm B cách đều hai điểm C và D .

HD: Gọi O là tâm, đường thẳng qua A và vuông góc với BO , cắt đường tròn tại hai điểm C và D .

Bài 4: Chứng minh rằng không thể vẽ được quá 6 đường tròn đi qua điểm A cho trước sao cho tâm của mỗi đường tròn không nằm trong các đường tròn khác.

HD: Gọi $O_1, O_2, \dots, O_6$ là tâm của 6 đường tròn qua điểm A , giả sử $\widehat{O_1AO_2}$ là góc nhỏ nhất trong các góc tạo từ $\widehat{O_kAO_l}$, với $k \neq l; k, l \in \{1; 2; \dots; 5; 6\}$, khi đó $\widehat{O_1AO_2} < 60^\circ$ nên O_1O_2 hoặc nhỏ hơn O_1A hoặc nhỏ hơn O_2A hay $O_2 \in (O_1)$ hoặc $O_1 \in (O_2)$.

Bài 5: Tìm tập hợp các đỉnh C của tam giác ABC có cạnh AB cố định, đường trung tuyến AM có độ dài không đổi bằng m .

HD: Lấy B' đối xứng với B qua A khi đó ta có MA là đường trung bình của tam giác $BB'C$ khi đó $B'C = 2AM = 2m$ cố định nên $C \in (B'; 2m)$.

Bài 6: Tìm tập hợp các trọng tâm của các tam giác ABC có cạnh BC cố định, đường trung tuyến AM có độ dài không đổi bằng m .

HD: Do $GM = \frac{1}{3}AM$ nên $G \in (M; \frac{m}{3})$.

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn (O) , $AC = 40\text{cm}$, $BC = 48\text{cm}$. Tính khoảng cách từ O đến BC .

HD: Gọi M là trung điểm BC , $AM^2 = AB^2 - BM^2$ và $OM^2 = OC^2 - MC^2$.

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) , cạnh bên bằng b , đường cao $AH = h$. Tính bán kính của đường tròn (O) .

HD: Gọi $M = AH \cap (O)$, $M \neq A$; $\triangle AHB \sim \triangle CHM$ (chú ý $\widehat{ACM}$ vuông), suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{AB}{CM}$.

§2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho tam giác ABC . BH và CK là các đường cao của tam giác. CMR:

- a) Bốn điểm B, C, H, K thuộc cùng một đường tròn.
- b) $HK < BC$.

Bài 2: Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$

- a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.
- b) So sánh AC và BD .

Bài 3: Cho đường tròn (O) , đường kính $AB = 10\text{cm}$. Gọi H là một điểm thuộc bán kính OA . Kẻ dây CD đi qua H và vuông góc với OA .

- a) Tính diện tích tứ giác $ACBD$ biết $OH = 3\text{ cm}$.
- b) Điểm H ở vị trí nào thì diện tích $ACBD$ là lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

Bài 4: Cho đường tròn (O) bán kính $5cm$, dây $AB = 8cm$. Đường kính CD cắt dây AB tại I tạo thành góc $\widehat{CIB} = 45^\circ$. Tính độ dài IA, IB .

Bài 5: Cho đường tròn (O) đường kính AD . Dây BC vuông góc với OA tại trung điểm của OA .

- Tứ giác $ABOC$ là hình gì? Vì sao?
- Tam giác BCD là tam giác gì? Vì sao?
- Cho $OA = R$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABD theo R .

Bài 6: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CB$. Tính giá trị lớn nhất của BD theo R .

Bài 7: Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

- Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.
- So sánh AC và BD .

Bài 8: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên đường thẳng AB lấy một điểm C . Nối C với một điểm M bất kì trên đường tròn (O) . Chứng minh rằng: $CA \neq CM \neq CB$.

Bài 9: Cho đường tròn (O) , dây PQ . Vẽ đường kính AB không cắt dây PQ . Các đường vuông góc với PQ tại P và Q cắt AB theo thứ tự ở H và K . Chứng minh rằng $AH = BK$.

Bài 10: Cho tam giác ABC cân tại A , $BC = 24cm$, $AB = 20cm$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 11: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB , dây CD . các đường vuông góc với CD tại C và D cắt AB theo thứ tự ở E, F . Tính diện tích tứ giác $CDEF$ biết $CD = 7cm$, $AB = 25cm$.

Bài 12: Cho đường tròn (O) , bán kính $OA = \sqrt{5}cm$. Kẻ bán kính OB vuông góc với OA . Gọi I là trung điểm của OB . Vẽ dây AC đi qua I . Tính AC .

Bài 13: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên AB lấy hai điểm C và D cách đều tâm O . Qua C và D , kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở I và K . Chứng minh rằng IC vuông góc với IK .

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, H là trực tâm của tam giác ABC . Kẻ đường vuông góc OM từ O đến BC . Chứng minh rằng:

- $OM = \frac{1}{2}AH$.
- $AH^2 + BC^2 = 4R^2$.

HD:

- Kẻ đường kính CK và sau đó chứng minh $OM = \frac{1}{2}KB$.
- Sử dụng kết quả $AH = 2OM$ và $BC = 2MC$.

Bài 2: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm bất kì thuộc cung BC không chứa A . Gọi D, E theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, AC . Tìm vị trí của M để DE có độ dài lớn nhất.

HD: Dễ dàng chứng minh được $AD = AM = AE$.

Mặt khác: $\widehat{MAD} + \widehat{MAE} = 2(\widehat{MAB} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC}$.

Tam giác ADE cân tại A có $\widehat{DAE} = 2\widehat{BAC}$ không đổi nên DE lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ là đường kính.

Bài 3: Cho đường tròn tâm O bán kính $OA = 11\text{cm}$. Điểm M thuộc bán kính OA và cách O là 7cm . Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm . Tính các độ dài MC, MD ($MC < MD$).

HD: Kẻ OH vuông góc với CD sau đó ta tính OH . Từ đó suy ra được độ dài MC, MD .

Bài 4: Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 24\text{cm}$, dây $AC = 20\text{cm}$ ($\widehat{BAC} = 90^\circ$). Gọi M là trung điểm của AC . Khoảng cách từ M đến AB bằng 8cm .

- Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C .
- Tính bán kính của đường tròn.

HD:

- Kẻ MH và CK vuông góc với AB , chứng minh $KA = KB$ khi đó ta được điều phải chứng minh.
- dễ dàng tìm được khi ta chứng minh được câu a.

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$, dây AB khác đường kính. Vẽ về hai phía của AB các dây AC, AD . Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ B đến AC và AD . Chứng minh rằng:

- Bốn điểm A, H, B, K thuộc cùng một đường tròn.
- $HK < 2R$.

Bài 6: Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Trên AB lấy điểm M, N sao cho $AM = BN$. Qua M và N , kẻ các đường thẳng song song với nhau và chúng cắt nửa đường tròn tại C và D . Chứng minh MC và ND vuông góc với CD .

Bài 7: Cho tam giác ABC , các đường cao AD, BE, CF . Đường tròn đi qua D, E, F cắt BC, CA, AB theo thứ tự ở M, N, P . Chứng minh rằng các đường thẳng kẻ từ M vuông góc với BC , kẻ từ N vuông góc với AC , kẻ từ P vuông góc với AB đồng quy.

Bài 8: Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi D là trung điểm của AB , E là trọng tâm của tam giác ACD . Chứng minh rằng OE vuông góc với CD .

Bài 9: Cho đường tròn $(O, 2\text{cm})$. Vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ABCD$.

Bài 10: Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 13\text{cm}$. Dây CD có độ dài 12cm vuông góc với AB tại H .

- Tính độ dài HA, HB .
- Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H trên AC, BC . Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

HD:

- Tự tính.
- Diện tích $CMHN$ bằng tổng diện tích hai tam giác HCM và CAH . Việc tính diện tích 2 tam giác nói trên, ta tính độ dài MH, MC, HN, NC bằng cách sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông. Khi đó ta sẽ tính được diện tích $CMHN$.

Bài 11: Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB , dây CD . Các đường vuông góc với CD tại C và D tương ứng cắt AB tại M và N . Chứng minh $AM = BN$.

Bài 12: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , dây CD . Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến CD .

a) Chứng minh rằng $CH = DK$.

b) Chứng minh rằng $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$.

HD: Kẻ OM vuông góc với CD , dựa vào tính chất đường trung bình của hình thang, chứng minh M là trung điểm của HK , chứng minh được câu b.

§3. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây cung CD vuông góc với AB tại điểm H thuộc bán kính OA . Gọi M là điểm thuộc bán kính OB , E và F theo thứ tự là giao điểm của CM và DM với đường tròn (E khác C , F khác D). Chứng minh rằng:

a) $MC = MD$

b) $ME = MF$

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ các dây BC, BD thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB sao cho $BD > BC$. So sánh độ dài hai dây AD và AC .

Bài 3: Cho một điểm I nằm bên trong đường tròn (O). Qua I kẻ một dây AB bất kì và kẻ dây CD vuông góc với OI . OI kéo dài cắt đường tròn (O) ở E . Bán kính vuông góc với AB tại H .

a) So sánh AB và CD .

b) So sánh IE và HF .

Bài 4: Cho hai dây AB và CD bằng nhau, cắt nhau ở E nằm trên trong đường tròn (O). Chứng minh rằng điểm E chia AB và CD thành những đoạn thẳng bằng nhau từng đôi một.

Bài 5: Cho đường tròn (O), đường kính AB . Kẻ hai dây song song AC và BD . Chứng minh rằng:

a) $AC = BD$;

b) Ba điểm C, O, D thẳng hàng.

Bài 6: Cho cung phần tư AB của đường tròn (O). Từ A và B , ta kẻ hai dây bằng nhau AM và BN . Hai dây này cắt nhau ở C . Chứng minh rằng OC vuông góc với AB .

Bài 7: Cho đường tròn tâm O bán kính 10cm, dây AB bằng 16cm. Vẽ dây CD song song với AB và có khoảng cách đến AB bằng 11cm. Tính độ dài dây CD .

Bài 8: Cho đường tròn tâm O bán kính 5cm. Hai dây AB và CD song song với nhau có độ dài lần lượt là 6cm và 8cm. Tính khoảng cách giữa hai dây.

Bài 9: Cho đường tròn tâm O có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại E . $CD = 4\text{cm}$, $DE = 28\text{cm}$.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

b) Vẽ đường kính DF của (O). So sánh hai khoảng cách từ tâm O đến hai dây cung CF và AB .

Bài 10: Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = 11\text{cm}$. Điểm M thuộc bán kính OA của đường tròn và cách O 7cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính các độ dài MC, MD (biết $CM < MD$).

Bài 11: Cho tam giác MNP vuông tại M nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính 2,5cm và $MN = 4\text{cm}$. Gọi OH, OK là khoảng cách từ O đến MN, MP . So sánh OH, OK .

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Cho đường tròn tâm O có bán kính 15cm. Điểm M cách O 9cm.

- Dựng dây AB đi qua M và có độ dài 26cm.
- Có bao nhiêu dây đi qua M và có độ dài là một số nguyên centimét?

HD:

- Gọi H là trung điểm AB . Tính OH, MH .
- Dây ngắn nhất qua M có độ dài 24cm, dài nhất 30cm. Từ đó suy ra.

Bài 2: Cho đường tròn tâm O có bán kính 13. Điểm M cách O 5.

- Tính độ dài dây dài nhất và dây ngắn nhất đi qua M
- Có bao nhiêu dây có độ dài là một số tự nhiên.

HD: Tương tự câu trên.

Bài 3: Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$

- Chứng minh rằng $AC \neq BD$
- Trong trường hợp nào thì $AC = BD$

HD: Áp dụng định nghĩa.

Bài 4: Cho đường tròn tâm O đường kính AB , các dây AC, AD . Gọi E là điểm bất kì trên đường tròn, H và K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AC, AD . Chứng minh rằng $HK < AB$.

HD: Xét xem khi E di chuyển trên đường tròn thì H, K di chuyển ở đâu.

Bài 5: Cho đường tròn tâm O , dây $AB = 24\text{cm}$, dây $AC = 20\text{cm}$ ($\widehat{BAC} < 90^\circ$ và điểm O nằm trong góc $\widehat{BAC}$). Gọi M là trung điểm của AC . Khoảng cách từ M đến AB bằng 8 cm.

- Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C .
- Tính bán kính của đường tròn.

HD:

- Gọi H chân đường vuông góc vẽ từ M xuống AB . Tính được AH . Gọi K là trung điểm AB . Suy ra được điều cần chứng minh.
- Áp dụng câu a).

Bài 6: Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 13\text{cm}$. Dây CD có độ dài 12cm vuông góc với AB tại H .

- Tính các độ dài HA, HB .
- Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H trên AC, BC . Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

- a) D và E thuộc đường tròn (O) .
- b) MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi C là điểm đối xứng với O qua A . Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) , kẻ đường vuông góc DH từ D đến AB . Chứng minh rằng:

- a) Tam giác OAD là tam giác đều.
- b) $\widehat{HBD} = 60^\circ$.
- c) Đường thẳng CD là tiếp tuyến của đường tròn tâm B bán kính BH .

Hướng dẫn:

- a) $\triangle COD$ có $OC = 2OD \Rightarrow \widehat{COD} = 60^\circ$
- b) $\triangle AOD$ đều có DH là đường cao nên cũng là đường phân giác.
- c) Kẻ $BK \perp CD$ tại K . Hai tam giác vuông HBD và KBD bằng nhau trong trường hợp cạnh huyền góc nhọn.

Bài 7: Cho đường tròn (O) bán kính 15cm . Điểm A nằm ngoài đường tròn, $OA = 25\text{cm}$. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) . Kẻ dây BC vuông góc với OA tại H .

- a) Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- b) Tính các cạnh của tam giác ABC .

Bài 8: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm M chạy trên nửa đường tròn. Qua điểm M , kẻ tiếp tuyến với đường tròn và gọi I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến tuyến tuyến ấy.

- a) So sánh các độ dài MI và MK .
- b) Chứng minh rằng $AB = AI + BK$.
- c) Chứng minh rằng AM là tia phân giác của $\widehat{OAI}$, BM là tia phân giác của $\widehat{OBK}$.
- d) Xét vị trí tương đối của đường thẳng AB và đường tròn đường kính IK .
- e) Khi M chạy trên nửa đường tròn (O) , tứ giác $ABKI$ có diện tích lớn nhất khi M ở vị trí nào? Tính diện tích lớn nhất đó?

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Đường trung trực của BC cắt BC, AC, AB theo thứ tự tại M, D, E . Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE .

Bài tập nâng cao

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi E là điểm đối xứng với B qua H . Đường tròn tâm O đường kính EC cắt EC tại K (K không trùng với C). Gọi M là trung điểm AK . Chứng minh rằng:

- a) $HM \perp AK$.
- b) HK là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Hướng dẫn:

a) HM là đường trung bình của hình thang vuông $ABEK$.

$$b) \begin{cases} \widehat{OKE} = \widehat{OEK} = \widehat{OBA} \\ \widehat{HKE} = \widehat{MHK} = \widehat{MHA} = \widehat{HAB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{OKE} + \widehat{HKE} = 90^\circ$$

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 6\text{cm}$. Qua A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O) . Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC = 2\text{cm}$, trên tia Ay lấy điểm D sao cho $AD = 9\text{cm}$. Chứng minh rằng OD vuông góc với BC .

Hướng dẫn:

Từ D kẻ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (O) , F là tiếp điểm (F không trùng với A). K là giao điểm của AF với tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) .

$$\Rightarrow BK \parallel AC \quad (1)$$

$$\triangle ABK \sim \triangle DAO \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{AO}{DA} \Rightarrow BK = \frac{AB \cdot AO}{DA} = \frac{6 \cdot 3}{9} = 2\text{cm}$$

$$\Rightarrow BK = AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $ACBK$ là hình bình hành $\Rightarrow BC \parallel AK$ hay $BC \parallel AF$, mà $AF \perp OD$
 $\Rightarrow BC \perp OD$.

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB cố định. Gọi d là tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) . Gọi CD là một đường kính có vị trí thay đổi. Gọi giao điểm của các tia AC, AD với d là E, F .

a) Chứng minh rằng tích $BE \cdot BF$ là một hằng số.

b) Tính độ dài nhỏ nhất của EF khi đường kính CD thay đổi.

Hướng dẫn:

$$a) BE \cdot BF = AB^2 = 4R^2 = \text{const}$$

$$b) EF = BE + BF \geq 2\sqrt{BE \cdot BF} = 4R. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow BE = BF \Leftrightarrow CD \perp AB$$

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A ; I giao điểm của các đường phân giác trong của tam giác ABC .

a) Hãy xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác BIC .

b) Gọi H là trung điểm của BC ; IK là đường kính của đường tròn (O) . Chứng minh rằng $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$.

Hướng dẫn:

a) Với H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$, hơn nữa O, H, A thẳng hàng.

$$\begin{cases} \widehat{OCI} = \widehat{OIC} \\ \widehat{ICA} = \widehat{ICB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{OCI} + \widehat{ICA} = 90^\circ$$

b) Với R là bán kính của đường tròn (O) , ta có

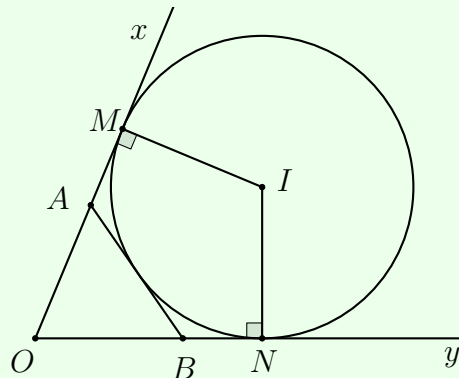
$$\begin{aligned} \frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK} &\Leftrightarrow \frac{OA - R}{OA + R} = \frac{R - OH}{R + OH} \Leftrightarrow \frac{OA - R}{2 \cdot OA} = \frac{R - OH}{2 \cdot R} \Leftrightarrow 1 - \frac{R}{OA} = 1 - \frac{OH}{R} \\ &\Leftrightarrow R^2 = OH \cdot OA \Leftrightarrow OC^2 = OH \cdot OA \end{aligned}$$

Bài 5*: Cho góc xOy , hai điểm A, B theo thứ tự chuyển động trên Ox, Oy sao cho chu vi tam giác OAB không đổi. Chứng minh AB luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.

Hướng dẫn:

Dựng đường tròn bàng tiếp góc O của tam giác OAB (hình bên).

Ta có $OM + ON = OA + OB + AB$ là chu vi tam giác OAB không đổi nên $OM + ON$ không đổi. Mặt khác, $OM = ON$ (bằng nửa chu vi tam giác OAB) $\Rightarrow M, N$ cố định $\Rightarrow$ giao điểm I của đường vuông góc với Ox kẻ từ M với đường phân giác góc xOy là cố định. Vậy AB luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I bán kính IM .



Bài 6*: Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm E trên cạnh BC và điểm F trên cạnh CD sao cho $AB = 3BE = 2DF$. Chứng minh rằng EF tiếp xúc với cung tròn tâm A bán kính AB .

Hướng dẫn:

Gọi a là cạnh hình vuông $ABCD$.

Ta có $3BE = 2DF = AB$

$$\Rightarrow BE = \frac{a}{3}, DF = \frac{a}{2} = CF \Rightarrow CE = \frac{2a}{3}.$$

Trong tam giác vuông CEF có:

$$EF^2 = CE^2 + CF^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{a^2}{4} = \frac{25a^2}{36}$$

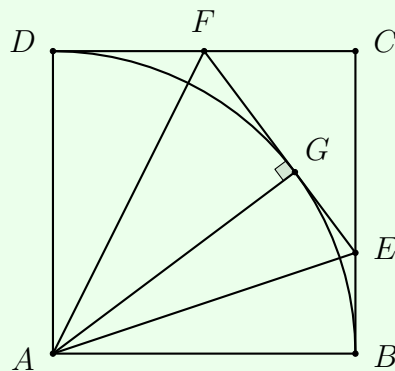
$$\Rightarrow EF = \frac{5a}{6}. \text{ Các tam giác } ABE, ADF, CEF \text{ là các tam giác vuông.}$$

$$\Rightarrow S_{ABE} = \frac{a^2}{6}; S_{ADF} = \frac{a^2}{4}; S_{CEF} = \frac{a^2}{6}$$

$$S_{AEF} = a^2 - S_{ABE} - S_{ADF} - S_{CEF} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{5a^2}{12} \quad (1)$$

$$\text{Kẻ } AG \perp EF. \Rightarrow S_{AEF} = \frac{EF \cdot AG}{2} = \frac{5a \cdot AG}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AG = AB$. $\Rightarrow EF$ tiếp xúc với cung tròn tâm A bán kính AB .



§5. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho đường tròn $(O; R)$, điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Kẻ đường kính COD . Tia phân giác của góc BOD cắt AB ở E .

- Chứng minh rằng ED là tiếp tuyến của đường tròn O .
- Chứng minh rằng $AC + DE \geq 2R$.
- Tính số đo góc AOE .

Bài 2: Cho đường tròn (O) bán kính $OM = 15\text{cm}$. Trên tia đối của tia MO lấy điểm A sao cho $MA = 24\text{cm}$. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E .

a) Tính các độ dài AB, AC .

b) Tính độ dài DE .

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$ bán kính $OA = R$. Gọi B là điểm đối xứng với O qua A . Kẻ các tiếp tuyến BM, BN với đường tròn (O) .

a) Tính số đo góc MBN .

b) Tứ giác $AMON$ là hình gì? Vì sao?

c) Tính OH theo R (H là giao điểm của OA và MN).

Bài 4: Cho đường tròn $(O; R)$, dây MN vuông góc với bán kính OA tại trung điểm H của OA . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M và N cắt nhau ở B .

a) Chứng minh rằng ba điểm O, A, B thẳng hàng.

b) Tam giác BMN là tam giác gì? Vì sao?

c) Tính BM theo R .

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng OA và đường tròn (O) , gọi CK là đường kính của đường tròn (O) . Chứng minh rằng:

a) BC vuông góc với OA .

b) BI là tia phân giác của góc ABC .

c) BK song song với OA .

Bài 6: Cho đường tròn (O) , điểm A nằm trên đường tròn. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A , lấy các điểm B và C (A nằm giữa B và C). Kẻ các tiếp tuyến BD, CE với đường tròn (O) (D và E khác A). Chứng minh rằng: $\widehat{BOC} + \widehat{DAE} = 180^\circ$.

Bài 7: Cho tam giác ABC cân, $AB = AC = 15\text{cm}$, $BC = 24\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự ở D, E .

a) Tính số đo góc BIC .

b) Tính diện tích tứ giác $ADIE$.

Bài 9: Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho $OA = 2R$. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt BC tại H , cắt cung nhỏ và cung lớn BC lần lượt tại I và K .

a) Chứng minh OA vuông góc với BC và $HI.OA = R^2$.

b) Chứng minh tam giác ABC đều và $ABKC$ là hình thoi.

c) Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính theo R bán kính đường tròn này.

d) Vẽ đường kính CD . Chứng BD song song với AO .

e) Vẽ cát tuyến bất kỳ AMN của $(O; R)$. Gọi E là trung điểm của MN . Chứng minh 5 điểm O, E, A, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 10: Cho đường tròn (O) , điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến MD, ME với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Qua điểm I thuộc cung nhỏ DE , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt MD và ME theo thứ tự ở P và Q . Chứng minh rằng chu vi tam giác MPQ bằng $2MD$.

Bài 11: Cho $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Một đường tròn tâm K bán kính $R = 5cm$ tiếp xúc với Ox tại A và tiếp xúc với Oy tại B . Từ điểm M thuộc cung nhỏ AB vẽ tiếp tuyến thứ ba, nó cắt Ox và Oy lần lượt tại E và F .

- Tính chu vi $\triangle OEF$. Chứng minh chu vi đó không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB .
- Chứng minh số đo $\widehat{EKF}$ không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB .

Bài 12: Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. Lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 của (O) tại A và B . Lấy tùy ý M trên (O) (M khác A và B). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt d_1 và d_2 lần lượt tại C và D .

- Chứng minh: $CD = AC + BD$ và $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- Gọi E là giao điểm của CO và AM , F là giao điểm của BM và DO , MH là đường cao của $\triangle AMB$. Chứng minh: $MFOE$ là hình chữ nhật và 5 điểm O, H, E, M, F cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh: $OE \cdot OC = OF \cdot OD = AC \cdot BD = R^2$.
- Chứng minh: đường tròn (K) đường kính CD tiếp xúc với AB .

Bài 13: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên tiếp tuyến Ax của (O) lấy điểm C , trên tiếp tuyến By của (O) lấy điểm D sao cho $AC + BD = CD$.

- Chứng minh: CD tiếp xúc với nửa đường tròn (O) tại E .
- Từ E kẻ EF vuông góc với AB ($F \in AB$). Giao điểm của BC và EF là L . Chứng minh: L là trung điểm của EF .

Bài 14: Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp $(I; r)$ tiếp xúc với các cạnh $BC = a; CA = b; AB = c$ lần lượt tại D, E, F . Gọi p là nửa chu vi của $\triangle ABC$. Chứng minh:

- Diện tích của $\triangle ABC$ là $S = pr$.
- $AE = AF = p - a; BD = BF = p - b; CD = CE = p - c$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH, HB = 9cm, HC = 16cm$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại $A, BC = 5cm$, bán kính đường tròn nội tiếp bằng $1cm$. Tính độ dài các cạnh AB, AC .

Bài 3: Cho đường tròn (O) , điểm K nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến KA, KB với đường tròn. Gọi M là giao điểm của OK và AB . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến OB . Tia MH cắt đường tròn (O) ở D . Đường vuông góc với OK tại K cắt OB ở I . Chứng minh rằng:

- $OH \cdot OI = OM \cdot OK$.
- ID là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 4: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) , $AB = 16cm$, $AC = 20cm$, $BC = 24cm$. Tiếp tuyến của đường tròn (I) song song với BC cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E .

- Tính chu vi tam giác ADE .
- Tính độ dài DE .

Bài 5: Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax, By (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M cắt Ax và By theo thứ tự ở C, D .

- Chứng minh rằng đường tròn có đường kính CD tiếp xúc với AB .
- Tìm vị trí của điểm M để hình thang $ABDC$ có chu vi nhỏ nhất.
- Tìm vị trí của C, D để hình thang $ABDC$ có chu vi bằng $14cm$, biết $AB = 4cm$.

§6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O; 4cm)$ và $(O'; 1cm)$ tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O)$, $C \in (O')$.

- Tính độ dài BC .
- Tính diện tích tứ giác $OBCO'$.

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O; 5cm)$ và $(O'; 2cm)$, $OO' = 9cm$. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB , $A \in (O)$, $B \in (O')$.

- Tính độ dài AB .
- Gọi I là giao điểm của AB và OO' . Tính độ dài OI .

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Gọi I là trung điểm của OO' , gọi C là điểm đối xứng với A qua I . Chứng minh rằng OO' song song với BC .

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O_1; R), (O_2; R)$ cắt nhau ở M và B . Gọi AB là dây của đường tròn (O_1) , BC là dây của đường tròn (O_2) . Vẽ hình bình hành $ABCD$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM .

Bài 5. Vẽ các đường tròn có đường kính là các cạnh của một tứ giác. Chứng minh rằng bốn đường thẳng chứa dây chung của các đường tròn đó cắt nhau tạo thành một hình bình hành.

Bài 6. Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ bằng nhau và ở ngoài nhau. Hãy dựng một đường tròn tiếp xúc ngoài (hoặc tiếp xúc trong) với các đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$.

Bài 7. Cho ba đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau tại A, B, C . Tia AB cắt một đường tròn tại D . Tia AC cắt đường tròn ấy ở E . Chứng minh rằng DE chính là đường kính của đường tròn ấy.

Bài 8. Ba đường tròn không biết tâm, tiếp xúc ngoài với nhau tại A, B, C . Hãy tìm tâm của chúng bằng thước thẳng.

Bài 9. Cho đường tròn $(O; 16mm)$ và đường thẳng d đi qua tâm O . Hãy xác định tâm của một đường tròn có bán kính $4mm$, tiếp xúc với đường tròn (O) và tiếp xúc với đường thẳng d .

Bài 10. Cho hai đường tròn có bán kính là r và có đoạn nối tâm cũng là r . Hãy xác định tâm của một đường tròn có bán kính là $\frac{r}{2}$ và tiếp xúc với hai đường tròn đã cho.

Bài 11. Cho hai đường tròn ở ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB (A, B là các tiếp điểm). Kẻ hai tiếp tuyến chung trong cắt AB ở C và D . Chứng minh rằng $AC = DB$.

Bài 12. Kẻ bốn tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoài nhau. Chứng minh rằng đoạn tiếp tuyến chung trong bao gồm giữa các tiếp tuyến chung ngoài bằng đoạn tiếp tuyến chung ngoài bao gồm giữa các tiếp điểm.

Bài 13. Cho tam giác ABC có $BC = 1$ (đơn vị độ dài), r_A là bán kính của đường tròn bàng tiếp trong góc A và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Biết rằng $r_A = 2r$, hãy tính diện tích tam giác ABC .

Bài 14. Trong hình vuông $ABCD$, ta vẽ các nửa đường tròn có đường kính là AD và BC . Vẽ đường tròn (P) tiếp xúc với hai nửa đường tròn đó và tiếp xúc với cạnh AB . Biết $DC = 2n^2$, hãy tính bán kính của đường tròn (P) .

Bài 15. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ ở ngoài nhau. Từ một điểm P ở ngoài hai đường tròn đó, hãy dựng hai đoạn thẳng PC và PD sao cho C thuộc (O_1) , D thuộc (O_2) , $PC = PD$ và $\widehat{CPD} = \alpha$.

Bài 16. Cho hai đường tròn $(O; 80cm)$ và $(O'; 45cm)$ tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung tại A cắt BC ở I . Gọi H là giao điểm của IO và AB , K là giao điểm của IO' và AC .

a) Tứ giác $AHIK$ là hình gì? Vì sao?

b) Tính các cạnh của tam giác ABC .

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông tại A . Các đường tròn $(B; BA)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại điểm thứ hai D (khác A).

a) Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (B) .

b) Vẽ đường kính DCE của đường tròn (C) . Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại E cắt BA ở K . CMR: CK vuông góc với CB .

c) CMR: AD song song với CK .

d) Tính diện tích tứ giác $BDEK$, biết $AB = 4cm$, $AC = 6cm$.

Bài 18. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A . Tiếp tuyến chung ngoài BC cắt đường nối tâm ở M , trong đó $B \in (O)$, $C \in (O')$ và $BC = CM = 4cm$. Tính R và r .

§7. ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài tập cơ bản

Bài 1: Hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$; $AB = 1$; $AD = CD = 4$. Vẽ đường tròn đường kính BC . Hãy cho biết vị trí tương đối của đường tròn với đường thẳng AD

Bài 2: Cho tam giác ABC , hai đường cao BD , CE cắt nhau tại H . Vẽ đường tròn tâm O đường kính CH . Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 3: Cho đường tròn $(O; 3)$ và đường thẳng xy sao cho khoảng cách OH từ O tới xy là 4, 5. Trên đường thẳng xy lấy điểm A bất kì. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Dây BC cắt OA tại K và cắt OH tại I . Chứng minh rằng:

a) $\triangle AOH \sim \triangle IOK$;

b) Khi A di động trên xy thì dây BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4: Cho đường tròn (O) , tiếp tuyến xy , tiếp điểm A . Vẽ đường tròn (I) đường kính OA .

- Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc nhau.
- Vẽ dây BC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại một điểm thứ hai là M . Chứng minh rằng $MA = MC$.
- Đường thẳng OM cắt xy tại B . Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A cách O một khoảng $2R$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M .

- Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi.
- Đường thẳng MN có phải là tiếp tuyến của đường tròn (O) không?
- Tính diện tích hình thoi $AMON$.

Bài 6: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC . Lấy điểm A thuộc nửa đường tròn và H là hình chiếu của A trên BC . Vẽ đường tròn $(A; AH)$. Vẽ các tiếp tuyến BM và CN với đường tròn (A) sao cho các tiếp điểm M và N không trùng với H . Chứng minh rằng:

- $BM \parallel CN$;
- $MB \cdot CN = AH^2$;
- MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

HD: Chứng minh M, A, N thẳng hàng.

Bài 7: Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn. Trên xy lấy một điểm M khác điểm A . Vẽ đường tròn $(M; MA)$ cắt đường tròn (O) tại một điểm thứ hai là B .

Chứng minh rằng MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) và OB là tiếp tuyến của đường tròn (M) .

Bài 8: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Từ trung điểm M của OA ta vẽ dây $CD \perp OA$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = R$. Chứng minh rằng:

- EC là tiếp tuyến của đường tròn.
- $EC^2 = 3R^2$.

Bài 9: Cho đường tròn (O) và hai tiếp tuyến d và d' song song với nhau. Gọi A và B lần lượt là các tiếp điểm của d và d' với đường tròn (O) . Lấy điểm M bất kì trên d . Đường thẳng MO cắt d' tại N . Từ O vẽ một đường thẳng vuông góc với MN cắt d' tại C .

- Chứng minh rằng: AB là đường kính của đường tròn.
- Chứng minh rằng: Tam giác CMN là tam giác cân.
- Cho biết vị trí của đường thẳng MC đối với đường tròn (O) .

Bài 10: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O)$, $C \in (O')$. Gọi M là trung điểm của OO' , gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC .

- a) Tính số đo góc $OH O'$.
- b) Chứng minh rằng OH là tia phân giác của góc AOB .
- c) Chứng minh rằng AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') .
- d) Cho $R = 5$ cm, $r = 2$ cm, tính độ dài BC .

ĐS:

- a) $\widehat{OH O'} = 90^\circ$
- d) $BC = 2\sqrt{10}$.

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D là hình chiếu của H trên AB , E là hình chiếu của H trên AC . Gọi (O) là đường tròn đường kính HB , (O') là đường tròn đường kính HC . Chứng minh rằng:

- a) Điểm D thuộc đường tròn (O) , điểm E thuộc đường tròn (O') .
- b) Hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài.
- c) AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó.
- d) $AH = DE$.
- e) DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') .
- f) Diện tích tứ giác $DEO'O$ bằng nửa diện tích tam giác ABC .

Bài 12: Cho đường tròn (O) bán kính 15 cm, dây $BC = 24$ cm. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A .

- a) Tính khoảng cách OH từ O đến BC .
- b) Chứng minh rằng ba điểm O, H, A thẳng hàng.
- c) Tính độ dài AB, AC .
- d) Gọi M là giao điểm của AB và CO , N là giao điểm của AC và BO . Chứng minh rằng $BCNM$ là hình thang cân.

Bài 13: Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD vuông góc với OA tại điểm H nằm giữa O và A . Gọi E là điểm đối xứng với A qua H .

- a) Tứ giác $ACED$ là hình gì? Chứng minh.
- b) Gọi I là giao điểm của DE và BC . Chứng minh rằng điểm I thuộc đường tròn (O') có đường kính là EB .
- c) Chứng minh rằng HI là tiếp tuyến của đường tròn (O') .
- d) Tính độ dài HI , biết bán kính các đường tròn (O) và (O') nói trên theo thứ tự bằng 5 cm và 3 cm.

Bài 14: Cho đoạn thẳng AB . Kẻ tia Bx vuông góc với AB . Trên tia Bx lấy một điểm O sao cho $BO = \frac{AB}{2}$. Tia AO cắt đường tròn $(O; OB)$ ở D và E (D nằm giữa A và O). Đường tròn $(A; AD)$ cắt AB ở C .

- a) Chứng minh $DE^2 = AD.AE$.
- b) Chứng minh $AC^2 = CB.AB$.
- c) Tia BD cắt đường tròn (A) ở P . Một đường thẳng đi qua D cắt đường tròn (A) ở M và cắt đường tròn (O) ở N . Chứng minh rằng hai tam giác DPM và DBN đồng dạng.

Bài 15: Cho đường tròn $(O; 2,5)$ đường kính AB . Trên AB lấy điểm H sao cho $AH = 1$. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại H . Gọi E là điểm đối xứng với A qua H .

- a) Chứng minh tứ giác $ACED$ là hình thoi.
- b) Gọi I là giao điểm của DE và BC . Vẽ đường tròn (O') đường kính EB . Chứng minh rằng đường tròn này đi qua I .
- c) Chứng minh rằng HI là tiếp tuyến của đường tròn (O') .
- d) Tính độ dài HI .

Bài tập nâng cao

Bài 1: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Từ một điểm M trên nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến xy . Vẽ AH và BK cùng vuông góc với xy .

- a) Chứng minh rằng tổng $AH + BK$ có giá trị không đổi khi điểm M di động trên nửa đường tròn.
- b) Chứng minh rằng đường tròn đường kính HK tiếp xúc với AB .
- c) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) để diện tích tứ giác $ABKH$ lớn nhất. Tính diện tích đó.

HD:

- a) Đường trung bình của hình thang.
- b) Kẻ $MI \perp AB$. Chứng minh $MI = \frac{HK}{2}$.
- c) Lưu ý: $HK \leq AB$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow HK \parallel AB$.

Bài 2: Cho hai đường tròn đồng tâm O ; D là một điểm cố định trên đường tròn nhỏ. Vẽ dây DC của đường tròn nhỏ, dây AB của đường tròn lớn đi qua D sao cho $AB \perp CD$. Gọi H là trung điểm của AB , CH cắt OD tại G . Chứng minh rằng khi dây DC quay quanh D thì:

- a) G là một điểm cố định.
- b) G là trọng tâm của tam giác ABC .

HD:

- a) Kẻ $OK \perp CD$. Chứng minh $\frac{OG}{GD} = \frac{1}{2}$.
- b) Từ câu a) suy ra.

Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một cát tuyến CAD quay quanh A với $C \in (O)$ và $D \in (O')$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của O và O' trên CD . Vẽ điểm E đối xứng với A qua trung điểm M của OO' . Chứng minh rằng:

- ## HD:

- HD:

- HD:

- HD:

- Trang 74/75

- a) Chứng minh rằng ba điểm D, A, E thẳng hàng.
- b) Vẽ các đường tròn $(B; BD)$ và $(C; CE)$. Chứng minh rằng hai đường tròn này tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với DE .
- c) Vẽ đường tròn đường kính BC . Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn này.

HD:

- a) Chứng minh $\widehat{DAE} = 2\widehat{BAC}$.
- b) Ý đầu dùng dấu hiệu $d = R + r$. Ý sau chứng minh $BD \perp DE$ và $CE \perp DE$.
- c) Gọi O là trung điểm của BC . Hãy chứng minh $OA \perp DE$.