

BÀI TẬP Củng Cố PHẦN 8 – 9 – 10 ĐIỂM
TRONG ĐỀ THI THPTQG MÔN TOÁN 2017

Chi tiết xem thêm tại <http://estudy.edu.vn>

1. HÀM SỐ

1.1. Cực trị của hàm số

a. Hàm bậc 3:

Ví dụ 1: Hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)^2(x+1)^3$ có bao nhiêu cực trị

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Ví dụ 2: Hàm số $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ có bao nhiêu cực trị

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m-1)x + 5$ đạt cực đại tại $x = 1$

- A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m \geq 2$ D. $m \in \emptyset$

Ví dụ 4: Tìm điều kiện của m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+1)x - m + 4$ có cực trị

- A. $\frac{3-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ B. $\begin{cases} m > \frac{3+\sqrt{21}}{2} \\ m < \frac{3-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$ C. $m > \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ D. $m < \frac{3-\sqrt{21}}{2}$

Ví dụ 5: Biết rằng có hai giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 5$ có hai cực trị

x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 26$ là m_1 và m_2 . Giá trị của $|m_1 - m_2|$ bằng:

- A. $\frac{11}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = 2x^3 + ax^2 - 12x - 13$. Tìm a để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho chúng cách đều trục tung.

- A. $a > 0$ B. $a = 0$ C. $a = 2$ D. $a \in \emptyset$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

- A. $m \in \{0; \pm\sqrt{2}\}$ B. $m \in \{\pm\sqrt{2}\}$ C. $m = \sqrt{2}$ D. $m \in \emptyset$

Ví dụ 8: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y - 5 = 0$.

- A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$ B. $m = 0$ C. $m = -1$ D. $m \in \emptyset$

Ví dụ 9: Từ bảng biến thiên sau, hãy chỉ ra số cực trị của hàm số

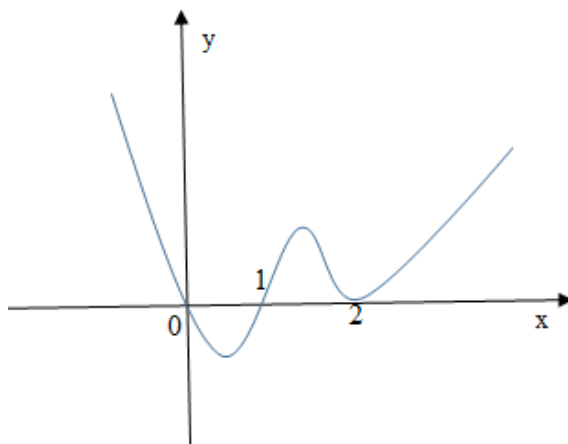
x	-2	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$			2				$+\infty$
	-3			$-\infty$		$-\infty$	

- A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

Ví dụ 10: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình sau. Xác định số cực trị của hàm $y = f(x)$



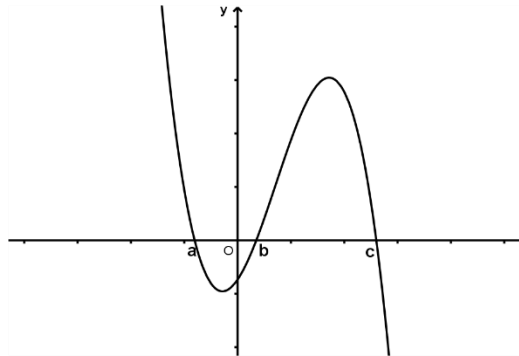
A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(a) > f(b) > f(c)$.B. $f(c) > f(b) > f(a)$.C. $f(c) + f(a) - 2f(b) > 0$.D. $(f(b) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$.

b. Hàm bậc 4 trùng phương

Ví dụ 1: Tìm điều kiện m để hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m - 1$ có 3 cực trị

A. $m \geq -1$ B. $m > -1$ C. $m < 1$ D. $m < -1$

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = mx^4 - (m-1)x^2 + 2$ có đúng một cực đại

A. $m = 0$ B. $m < 0$ C. $m > 1$ D. $0 \leq m < 1$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 + 8mx^3 + 3(1+2m)x^2 - 4$. Tìm m để hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $\frac{1-\sqrt{7}}{6} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{6}$

B. $\begin{cases} \frac{1-\sqrt{7}}{6} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{6} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $m = -\frac{1}{2}$

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + m^4$ có 3 cực trị mà 3 điểm cực trị tạo thành tam giác

a. Đều

b. Vuông cân

c. Có diện tích bằng 32

d. Tạo với O tứ giác OBAC là hình thoi

e. Bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2

f. Nhận $H(0; -1)$ làm trực tâm.

1.2. Điều kiện đồng biến, nghịch biến

a. Hàm bậc 3

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx - 1$. Tìm m để hàm số:

1) Đồng biến trên tập xác định

Đáp số: $m \geq 1$ 2) Nghịch biến trên tập $(0; 3)$ Đáp số: $m \leq -3$ 3) Đồng biến trên tập $(2; +\infty)$ Đáp số: $m \geq 0$

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

Đáp số: $m \geq \frac{2}{3}$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2-4)x + 9$. Tìm m để hàm số luôn luôn đồng biến trên tập xác định.

Đáp số:
$$\begin{cases} m \geq \frac{-1+3\sqrt{3}}{2} \\ m \leq \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên tập có độ dài bằng 1

Đáp số: $m = \frac{9}{4}$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - 2m + 1$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$.

Đáp số: $m \leq 2$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$

Đáp số: $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$

Ví dụ 7: Tìm m để hàm số $y = mx^3 - mx^2 + (m+1)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đáp số: $m \geq 0$

Ví dụ 8: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + (3m^2 + 6m)x + 5$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$

Đáp số: $1 \leq m \leq 2$

b. Hàm bậc nhất trên bậc nhất

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định.

Đáp số: $1 < m < 2$

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

Đáp số: $-1 < m < 1$

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+1}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Đáp số: $0 \leq m < 1$

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên $(-\infty; \frac{3}{2})$

Đáp số: $1 < m \leq \frac{3}{2}$

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\sin x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Đáp số: $0 \leq m < 1$

Ví dụ 6: Tìm m để hàm số $y = \frac{\cot x - m}{m \cot x - 1}$ đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$

Đáp số: $-1 < m < 1$

c. Hàm khác

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đáp số: $m \leq -1$

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \sin x + mx + 3$ nghịch biến trên tập xác định

Đáp số: $m \leq -1$

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = \sin x - \cos x + (m - 2)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đáp số: $m \geq 2 + \sqrt{2}$

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $y = x + m \tan x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

Đáp số: $m \leq -1$

1.3. GTLN – GTNN

a. Hàm chứa tham số

Ví dụ 1: Hàm số $y = \frac{2x - m}{x + 1}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng 1 khi m bằng bao nhiêu?

Đáp số: $m = 0$

Ví dụ 2: Với giá trị nào của m thì trên $[0; 2]$ hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có giá trị nhỏ nhất bằng -4 .

Đáp số: $m = -4$

Ví dụ 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng mấy?

Đáp số: $\frac{23}{27}$

Ví dụ 4: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ theo thứ tự là bao nhiêu?

Đáp số: $Max = 6.5$, $Min = -7$

Ví dụ 5: Hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$ có GTNN là bao nhiêu?

Đáp số: $GTNN = -2$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ nhỏ nhất là:

A. 0. B. ± 1 . C. $\emptyset$. D. $\pm \frac{1}{2}$.

Phương trình $\Delta: y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $A(1; -1); B(-1; -1)$

Tổng khoảng cách từ A, B đến $\Delta: T = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|m+1|+|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$. Bây giờ tìm GTNN

của hàm $f(m) = \frac{|m+1|+|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$ bằng 2 cách:

- Cách 1: Chia trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối.

- Cách 2: Dùng MTCT chức năng table.

Đáp số $x = \pm 1$ và giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Ví dụ 7: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$ là

A. $\max P = 8$. B. $\max P = 4$. C. $\max P = 12$. D. $\max P = 16$.

Giải: Với $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow P = 4$

Với $y \neq 0$ Đặt $x = ky \Rightarrow y^2(k^2 + 2k + 3) = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{k^2 + 2k + 3}$. Khi đó

$$P = y^2(k-1)^2 = \frac{4(k-1)^2}{k^2 + 2k + 3} = \frac{4k^2 - 8k + 4}{k^2 + 2k + 3}. \text{ Có } P'(k) = \frac{16k^2 + 16k - 32}{(k^2 + 2k + 3)^2} = \frac{16(k-1)(k+2)}{(k^2 + 2k + 3)^2}$$

Từ bảng biến thiên tìm được $\max P = 12$.

b. Bài toán ứng dụng

Ví dụ 1: Trong hệ toạ độ Oxy cho parabol (P): $y = 1 - x^2$. Một tiếp tuyến của (P) di động có hoành độ dương cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A và B. Diện tích tam giác OAB nhỏ nhất khi hoành độ của điểm M gần nhất với số nào dưới đây:

A. 0,9

B. 0,7

C. 0,6

D. 0,8

Ví dụ 2: Cho tam giác đều cạnh a ; Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AB và AC. Xác định vị trí điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó

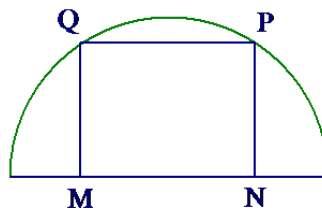
A. $BM = \frac{a}{2}$ và $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

B. $BM = \frac{a}{4}$ và $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

C. $BM = \frac{3a}{4}$ và $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

D. Một kết quả khác

Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R. Chu vi hình chữ nhật lớn nhất khi tỉ số $\frac{MN}{MQ}$ bằng:



A. 2

B. 4

C. 1

D. 0,5

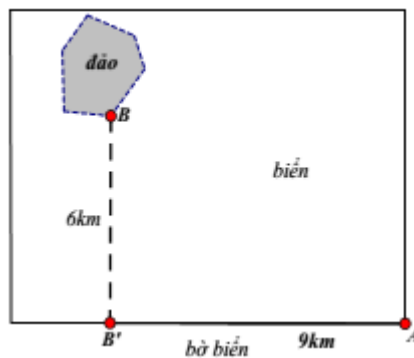
Ví dụ 4: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Đáp số: 12

Ví dụ 5: Một chủ hộ kinh doanh có 50 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2.000.000đ/1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ thêm 50.000đ/tháng, thì sẽ có 1 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh sẽ cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

Đáp số: 2.250.000đ

Ví dụ 6: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:



Đáp số: 6.5km

Ví dụ 7: Cho điểm M di chuyển trên Parabol (P): $y = x^2$. Khoảng cách ngắn nhất từ M đến A(3;0) bằng bao nhiêu?

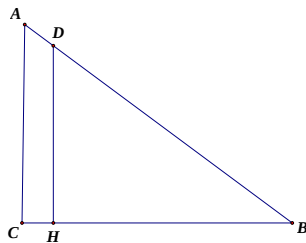
Đáp số: $d = \sqrt{5}$

Ví dụ 8: Một màn hình lớn TV cao 1.4m tại phòng chờ nhà ga được treo trên tường cách mặt đất 2.2m. Một hành khách cao 1.78 đang đứng đọc thông tin trên màn hình. Hỏi hành khách

này phải đứng cách tường bao xa để góc nhìn lớn nhất biết rằng khoảng cách từ mắt đến đỉnh đầu anh ta là 8cm.

Đáp số: $x = \frac{\sqrt{95}}{10}$

Ví dụ 9: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC , ngang qua một cột đỡ DH cao $4m$ song song và cách tường $CH = 0,5m$ là bao nhiêu ?



Đáp số:

Ví dụ 10: Một nạn nhân đuối nước ở vị trí cách bờ hồ 200m. Một người phát hiện tai nạn đang đứng trên bờ cách nạn nhân 500m. Anh ta phải chọn vị trí cách vị trí hiện tại bao xa để xuống hồ bơi ra cứu nạn nhân sao cho mất ít thời gian nhất, biết rằng vận tốc chạy bộ kéo theo chiếc thuyền nhỏ của anh ta là 20km/h và vận tốc chèo thuyền là 10km/h.

1.4. Suy đồ thị

Ví dụ 1: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$

Hướng dẫn:

- Giữ nguyên đồ thị của $y = f(x)$ ở phần nằm trên trục Ox
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ lên trên qua Ox

Ví dụ 2: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$

- Giữ nguyên phần đồ thị của $y = f(x)$ bên phải Oy và xoá bên trái.
- Lấy đối xứng phần này sang trái qua Oy

Ví dụ 3: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = -f(x)$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$

- Lấy đối xứng qua Ox

Ví dụ 4: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{|x-1|}$ từ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$

- Giữ nguyên đồ thị của $y = \frac{x+1}{x-1}$ ở bên phải đường thẳng $x=1$ (tiệm cận đứng)

- Lấy đối xứng đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$ ở bên trái đường $x=1$ qua Oy

Ví dụ 5: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{|x-2|}{x+1}$ từ đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ ở phần bên phải đường thẳng $x=2$

- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = \frac{x-2}{x+1}$ ở bên trái đường $x=2$ qua Oy

Ví dụ 6: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = |x|(x^2 - 4)$ từ đồ thị hàm số $y = x(x^2 - 4)$

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = x(x^2 - 4)$ ở bên phải Oy

- Lấy đối xứng phần đồ thị của $y = x(x^2 - 4)$ ở bên trái Oy qua Oy

1.5. Tương giao

a. Xét phương trình hoành độ giao điểm

Ví dụ 1: Xác định số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 6x + \ln(2x+3) + 4$ với trục hoành.

Đáp số: 1

Ví dụ 2: Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

Đáp số: 3

Ví dụ 3: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x+3}(x^2 - 2x - 4) - \frac{1}{20}$ và trục Oy là bao nhiêu?

Đáp số: 3

b. Tương giao khi cô lập tham số

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình $2x^3 + 3x^2 - 12x + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

Đáp số: $-\frac{19}{2} < m < 4$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $0 < m < \frac{1}{2}$

Ví dụ 3: Giá trị m để phương trình $\left| \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1 \right| = 3^m$ có 8 nghiệm phân biệt

Đáp số: $m < 0$

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $|x^3 - 3x + 1| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $0 < m < 1$

Ví dụ 5: Tìm m để phương trình $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| - m + 1 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $1 < m < 5$

Ví dụ 6: Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 - m + 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Đáp số: $1 < m < 2$

Ví dụ 7: Tìm m để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất.

Đáp số: $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$

Ví dụ 8: Tìm m để phương trình $2\ln(x+1) - \ln(mx) = -x^2 + (m-2)x - 1$ có nghiệm

Đáp số: $\begin{cases} m \geq 4 \\ m < 0 \end{cases}$

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình $3^{\sqrt{x^2+mx+1}} = 9^{x-1}$ có nghiệm.

Đáp số: $m \geq -2$

Ví dụ 10: Tìm m để phương trình $|x-1|(x^2-4) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $-0.8... < m < 0$

Ví dụ 11: Có bao nhiêu số nguyên m sao cho bất phương trình sau đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$$\log 5 + \log(x^2 + 1) \geq \log(mx^2 + 4x + m)$$

Đáp số: $2 < m \leq 3$

Ví dụ 12: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\frac{|x|-2}{|x|+1} = m$ có

đúng 2 nghiệm phân biệt là:

A. $[1;2] \cup \{0\}$.

B. $[1;2) \cup \{0\}$.

C. $[0;2)$.

D. $[1;2)$.

2. MŨ – LOGARIT

a. Đồ thị của hàm mũ, logarit

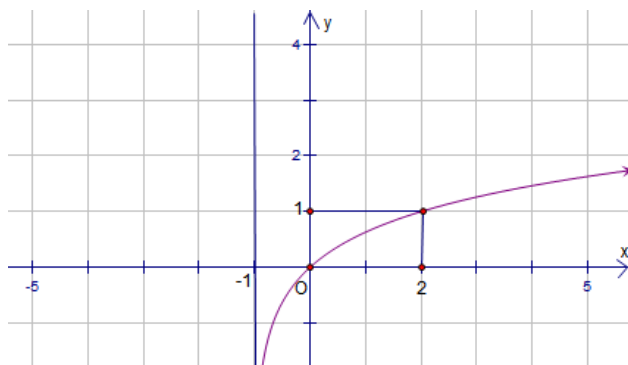
Ví dụ 1: Đồ thị hình bên là của hàm số nào ?

A. $y = \log_2(x+1)$

B. $y = \log_2 x + 1$

C. $y = \log_3 x$

D. $y = \log_3(x+1)$



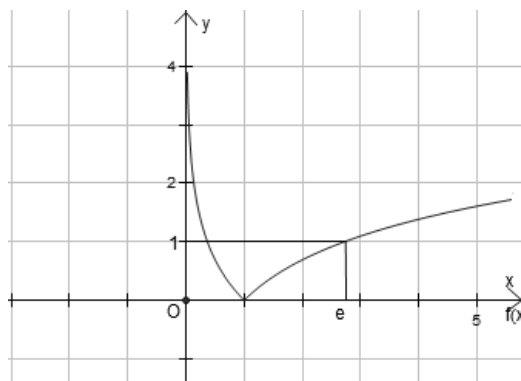
Ví dụ 2: Đồ thị bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \ln|x|$

B. $y = |\ln x|$

C. $y = |\ln(x+1)|$

D. $y = \ln|x+1|$



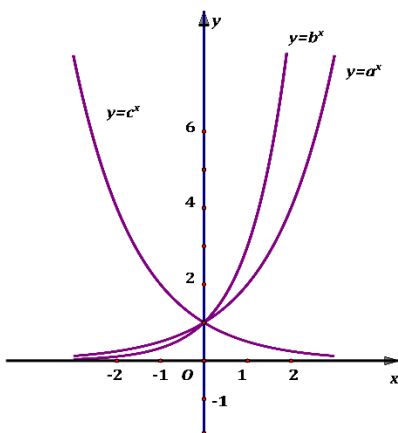
Ví dụ 3: Cho đồ thị của các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ (a, b, c dương và khác 1). Chọn đáp án đúng:

A. $a > b > c$

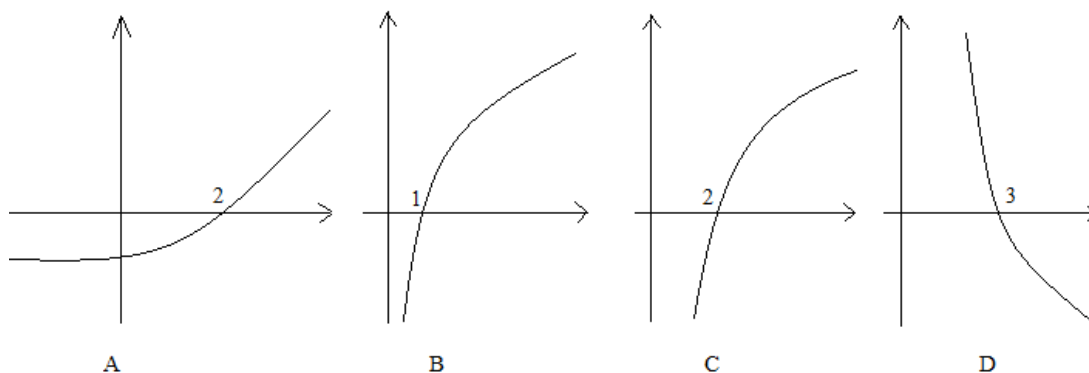
B. $b > c > a$

C. $b > a > c$

D. $c > b > a$



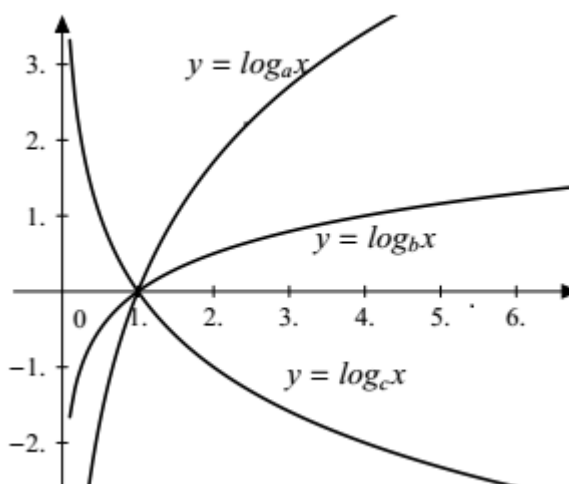
Ví dụ 4: Đây là đồ thị hàm số $y = \ln(x-1)$



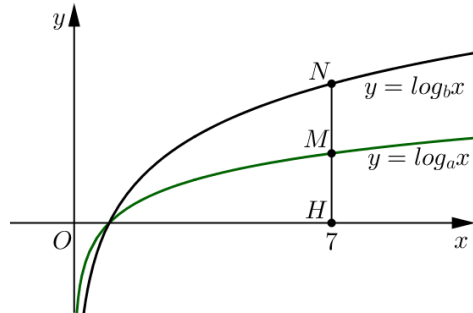
Đáp số: C

Ví dụ 5: Cho đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ (với a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) như hình vẽ bên. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa hãy so sánh các số a, b, c .

- A. $a > b > c$.
- B. $c > a > b$.
- C. $c > b > a$.
- D. $b > a > c$.



Ví dụ 5: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại H, M và N . Biết rằng $HM = MN$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a = b^7$.

B. $a = b^2$.

C. $a = 2b$.

D. $a = 7b$.

b. Phương trình dạng chứa tham số

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 3$

Đáp số: $m = 4$

Ví dụ 2: Tìm nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm.

Đáp số: $5 + \frac{1}{3} \leq m \leq 25 + \frac{1}{23}$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m-1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 27$.

Đáp số: $m = 1$

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $\log_2(4^x - m) = x+1$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $-1 < m < 0$

Ví dụ 5: Tìm m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-2) = \log_2(mx)$ có 1 nghiệm duy nhất.

Đáp số: $m > 0$

Ví dụ 6: Tìm m để bất phương trình $\sqrt{2^x + 7} + \sqrt{2^x - 2} \leq m$ có nghiệm

Đáp số: $m \geq 3$

Ví dụ 7: Tìm m để bất phương trình $\sqrt{3^x + 3} + \sqrt{5 - 3^x} \leq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Đáp số: $m \geq 4$

Ví dụ 8: Tìm m để bất phương trình $4^x + 2^x - m \geq 0$ có nghiệm $x \in [1; 2]$

Đáp số: $m \leq 20$

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $2^{x^2-3x+m} - 2^{x-3} + x^2 - 4x + m + 3 = 0$

Đáp số: $m \leq 1$

Ví dụ 10: Tìm m để phương trình sau có đúng 1 nghiệm

$$2017^{\sqrt{x^2-3mx+1}} - 2017^{x-2} + \sqrt{x^2-3mx} - x + 3 = 0$$

Đáp số: $1 \leq m < 2$

Ví dụ 11: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{mx-1} - 2^{x^2-x} < x^2 - (m+1)x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Đáp số: $-3 < m < 1$

Ví dụ 12: Tập nghiệm của bất phương trình $(x+4).9^x - (x+5).3^x + 1 < 0$ là?

Hướng dẫn: Xét phương trình $(x+4).9^x - (x+5).3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{x+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Xét dấu $f(x) = (x+4).9^x - (x+5).3^x + 1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy $S = (-1; 0)$

Ví dụ 13: Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x^2} + (x^2 - 7).2^{x^2} + 12 - 4x^2 < 0$

Hướng dẫn: Giải phương trình $4^{x^2} + (x^2 - 7).2^{x^2} + 12 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} = 4 \\ 2^{x^2} = 3 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Tập nghiệm $S = (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$

c. Bài toán thực tế

Ví dụ 1. Anh Việt muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Vậy ngay từ bây giờ Việt phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép là bao nhiêu tiền để có đủ tiền mua nhà, biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm và lãi suất được tính theo kỳ hạn một năm? (kết quả làm tròn đến hàng triệu)

A. 397 triệu đồng. B. 396 triệu đồng. C. 395 triệu đồng. D. 394 triệu đồng.

Ví dụ 2. Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng Vietcombank. Lãi suất hàng năm không thay đổi là 7,5%/năm và được tính theo kỳ hạn một năm. Nếu anh Nam hàng năm không rút lãi thì sau 5 năm số tiền anh Nam nhận được cả vốn lẫn tiền lãi là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng ngàn)

A. 143562000 đồng.

B. 1641308000 đồng.

C. 137500000 đồng.

D. 133547000 đồng.

Ví dụ 3. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $f(x) = A.e^{rx}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), x (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 25 lần?

A. 50 giờ.

B. 25 giờ.

C. 15 giờ.

D. 20 giờ.

Ví dụ 4. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng Cục Thống Kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

A. 107232573 người.

B. 107232574 người.

C. 105971355 người.

D. 106118331 người.

Ví dụ 5: Một công nhân làm việc cho một công ty được tăng lương cứ 3 năm tăng 10% so với mức lương trước. Anh ta mỗi tháng trích ra 20% lương của mình hàng tháng để gửi tiết kiệm theo hình thức lãi kép 6%/tháng thì sau 48 tháng anh ta thu được 100 triệu tiền lãi từ ngân hàng. Hỏi lương khởi điểm của anh ấy là bao nhiêu?

Ví dụ 6: Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền là bao nhiêu?

Ví dụ 7: Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất ban đầu 4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Cứ sau một năm lãi suất tăng 0,3%. Hỏi sau 4 năm tổng số tiền người đó nhận được bao nhiêu?

Ví dụ 8: Một người đi mua chiếc xe máy với giá 90 triệu đồng. Biết rằng cứ sau một năm giá trị của chiếc xe chỉ còn 60%. Hỏi sau bao nhiêu năm thì giá trị chiếc xe chỉ còn 10 triệu.

Ví dụ 9: Độ chấn động M của một cơn địa chấn được đo bằng thang Richter xác định bởi công thức: $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, trong đó I là biên độ tối đa được đo bằng địa kế chấn, I_0 là biên độ chuẩn. Tính độ chấn động theo thang Richter trận động đất ở California (Mỹ) năm 1992 có biên độ tối đa $I = 3,16 \cdot 10^7 I_0$ (tính chính xác tới hàng phần trăm).

Ví dụ 10: Anh Nam mong muốn rằng sau 6 năm sẽ có 2 tỷ để mua nhà. Hỏi anh Nam phải gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiền tiết kiệm như nhau hàng năm gần nhất với giá trị nào sau đây, biết rằng lãi suất của ngân hàng là 8% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn.

Ví dụ 11: Một người muốn sau 4 tháng có 1 tỷ đồng để xây nhà. Hỏi người đó phải gửi mỗi tháng là bao nhiêu tiền (như nhau). Biết lãi suất 1 tháng là 1%.

Ví dụ 12: Bà Nguyễn vay ngân hàng 50 triệu đồng và trả góp trong vòng 4 năm với lãi suất 1,15% mỗi tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bà sẽ hoàn nợ cho ngân hàng và số tiền hoàn nợ mỗi tháng là như nhau. Hỏi mỗi tháng bà phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng?

3. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

a. Đổi biến số đặc biệt

- Áp dụng công thức hàm hợp bậc nhất: $I = \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

Ví dụ 1: Cho $\int_1^3 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(2x+1)dx$

Đáp số: 1

Ví dụ 2: Cho $\int_0^1 f(5x)dx = 2$. Tính $I = \int_0^5 f(x)dx$

Đáp số: 10

Ví dụ 3: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$

Đáp số: 1

Ví dụ 4: Cho $\int_0^{\ln 2} f(e^x)e^x dx = 4$. Tính $I = \int_1^2 f(x)dx$

Đáp số: 4

Ví dụ 5: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^3 f(x)dx = 5$. Tính $I = \int_1^3 f(x)dx$

Đáp số: 3

Ví dụ 6: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(2x-1)dx = 2$. Tính $I = \int_0^5 f(x)dx$

Đáp số: 6

Ví dụ 7: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx = 1$ và $\int_1^3 f(-x+1)dx = 2$. Tính $I = \int_{-2}^1 f(x)dx$

Đáp số: 4

- Áp dụng công thức từng phần: $\int_a^b u.v' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v.u' dx$

Ví dụ 1: Cho $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$

Đáp số: $I = -8$

Ví dụ 2: Cho $\int_0^1 (5x+1) f'(x) dx = 6$ và $6f(1) - f(0) = 3$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$

Đáp số: $I = -\frac{3}{5}$

Ví dụ 3: Cho $\int_0^1 (5x+1) f'(2x) dx = 6$ và $3f(2) - \frac{1}{2}f(0) = 3$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$

Đáp số: $I = -\frac{12}{5}$

Ví dụ 4: Cho $\int_0^1 e^x \cdot f'(x) dx = 5$ và $e \cdot f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 e^x \cdot f(x) dx$

Đáp số: $I = -3$

Ví dụ 5: Cho $\int_0^1 e^{3x} \cdot f'(2x) dx = 5$ và $\frac{1}{2}(e^3 \cdot f(2) - f(0)) = 1$. Tính $I = \int_0^1 e^{3x} f(2x) dx$

Đáp số: $I = -\frac{8}{3}$

Ví dụ 6: Cho $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm $g(x)$ và $3G(1) - G(0) = 3$. Biết

$\int_0^1 (2x+1) \cdot g(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^1 G(x) dx$.

Đáp số: $I = -1$

- Áp dụng công thức $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \Rightarrow G'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$

Ví dụ 1: Cho $G(x) = \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$. Tính $G'(x)$

Đáp số: $G'(x) = \sin \sqrt{x^2} \cdot (x^2)' = \sin |x| \cdot 2x = 2x \sin |x|$

Ví dụ 2: Xác định cực trị của hàm số $G(x) = \int_x^{2x} t \ln t dt$ với $x \in (0; +\infty)$

Đáp số: cực tiểu tại $x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

Hướng dẫn: Có $G'(x) = 2x \ln 2x \cdot 2 - x \ln x = x(4 \ln 2x - \ln x)$. $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (l)} \\ x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \end{cases}$.

Để dàng kiểm tra thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

- Áp dụng công thức đặc biệt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

Đáp số: $I = \frac{2}{3}$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

Đáp số: $I = 6$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

Đáp số: $I = \frac{\ln 2}{4}$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + 2f(5-x) = x\sqrt{25-x^2}$. Tính

$$I = \int_0^5 f(x)dx$$

Đáp số: $I = \frac{125}{9}$

Ví dụ 5: Cho $f(x)$ là hàm chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$

Đáp số: $I = 4$

Ví dụ 6: Cho $f(x)$ là hàm chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)dx = 3$. Tính $I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx$

Đáp số: $I = 3$

Ví dụ 7: Cho $f(x)$ là hàm chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx = 10$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$

Đáp số: $I = 10$

Ví dụ 8: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2017} x}{\sin^{2017} x + \cos^{2017} x} dx$

Đáp số: $I = \frac{\pi}{4}$

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x)dx$

Đáp số: $I = \frac{5\pi}{2}$

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 5$. Tính

$$I = \int_0^{\pi} (2x+1) \cdot f(\sin x)dx$$

Đáp số: $I = 5(\pi+1)$

Ví dụ 11: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;3]$ và $f(x)f(3-x)=1$ với mọi $x \in [0;3]$. Tính

$$K = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)}$$

Đáp số: $K = \frac{3}{2}$

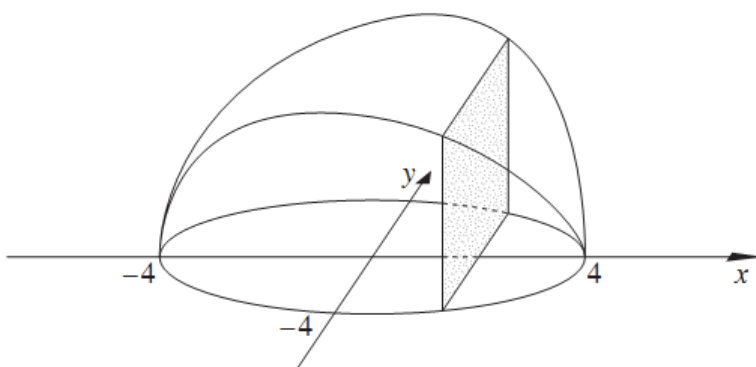
b. Ứng dụng

- Thể tích biết diện tích thiết diện

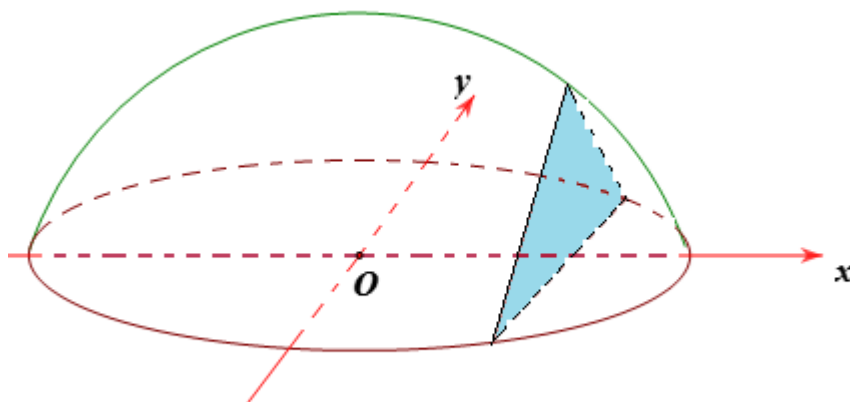
Ví dụ 1: Tính thể tích khối giới hạn bởi 2 mặt phẳng $x = 0, x = \pi$ và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox là đường tròn bán kính $\sqrt{\sin x}$.

Ví dụ 2: Tính thể tích khối giới hạn bởi 2 mặt phẳng $x = 0, x = 4$ và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox là hình vuông có cạnh là $x.e^x$.

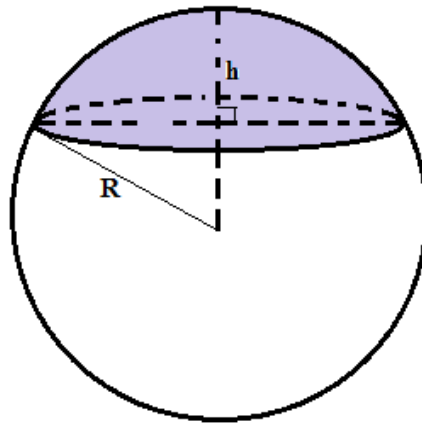
Ví dụ 3: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đây là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là hình vuông. Tính thể tích của vật thể.



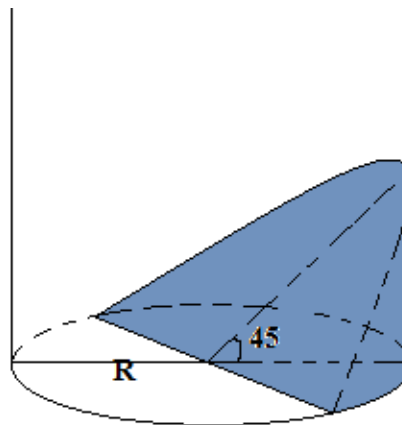
Ví dụ 4: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đây là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Tính thể tích của vật thể



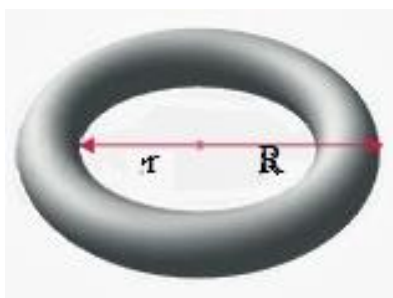
Ví dụ 5: Tính thể tích phần bôi đậm trong hình vẽ



Ví dụ 6: Tính thể tích khối in đậm trong hình vẽ sau



Ví dụ 7: Hình chiếc phao bơi hình xuyến với bán kính vòng trong là $r = 25$ cm, bán kính vòng ngoài $R = 50$ cm. Tính thể tích của chiếc phao bơi



- Vật tròn xoay

Ví dụ 1: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường: $y = x \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi H quay quanh Ox .

Ví dụ 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = \frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành

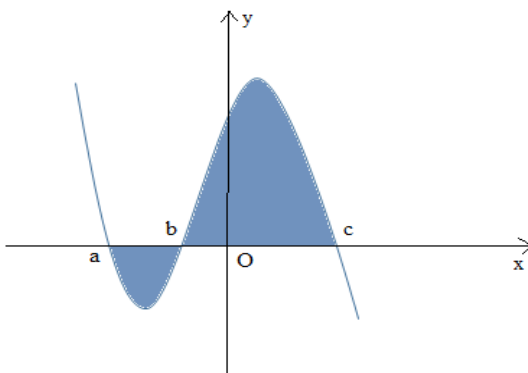
Ví dụ 3: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = -x^2 + 4x$, $y = x + 2$. Tính thể tích khối tròn xoay có được khi xoay (H) quanh Ox .

Ví dụ 4: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay có được khi xoay (H) quanh Ox .

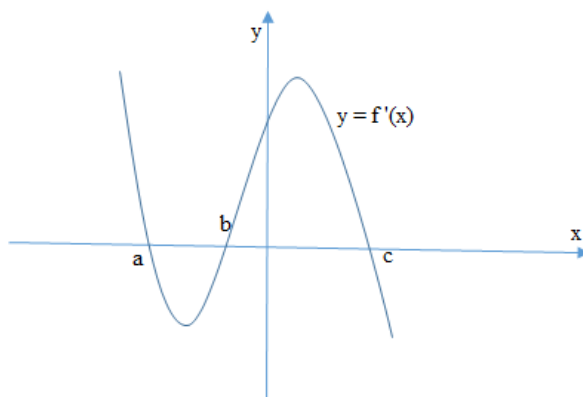
Ví dụ 5: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{9-(x-1)^2}$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh Ox .

- Hình dạng đồ thị và diện tích

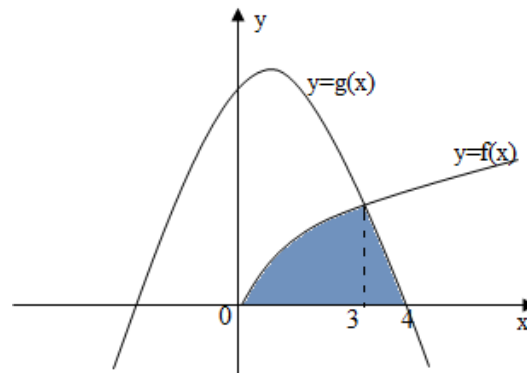
Ví dụ 1: Xác định công thức tính diện tích phần bôi đen trong phần đồ thị sau



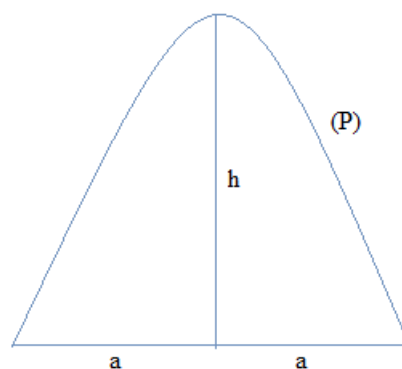
Ví dụ 2: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy so sánh $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$



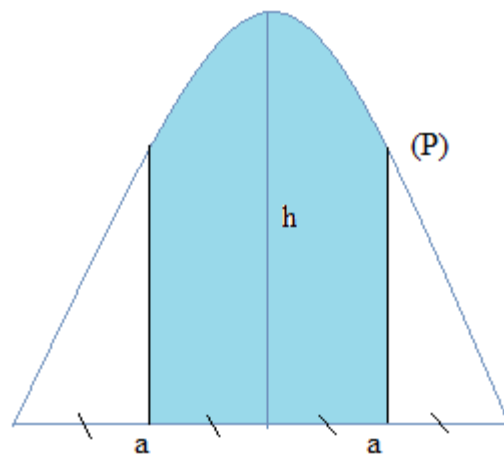
Ví dụ 3: Xác định công thức tính diện tích phần tô đậm trong hình sau



Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol có kích thước như hình sau



Ví dụ 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi phần tô đậm trong hình sau



- Bài toán ứng dụng

Ví dụ 1: Một vật đang chuyển động đều với vận tốc $30m/s$ thì chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-70m/s^2$. Hỏi từ lúc giảm tốc đến khi dừng hẳn thì vật di chuyển được quãng đường bao xa?

Ví dụ 2: Vật A chuyển động đều từ D với vận tốc 30 m/s được 10 s thì chuyển động chậm dần với gia tốc -10 m/s^2 . Sau khi vật A khởi hành được 8 s thì vật B bắt đầu xuất phát cùng chiều từ D nhanh dần đều với gia tốc 50 m/s^2 . Hỏi sau bao lâu kể từ lúc B khởi hành hai vật gặp nhau? Khi gặp nhau thì vật A đã dừng lại chưa?

Ví dụ 3: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được 5 (s) người lái xe gặp chướng ngại vật nên phải phanh gấp cho xe chạy chậm dần đều với gia tốc $-70 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường đi được của ô tô từ lúc chuyển bánh đến khi dừng hẳn.

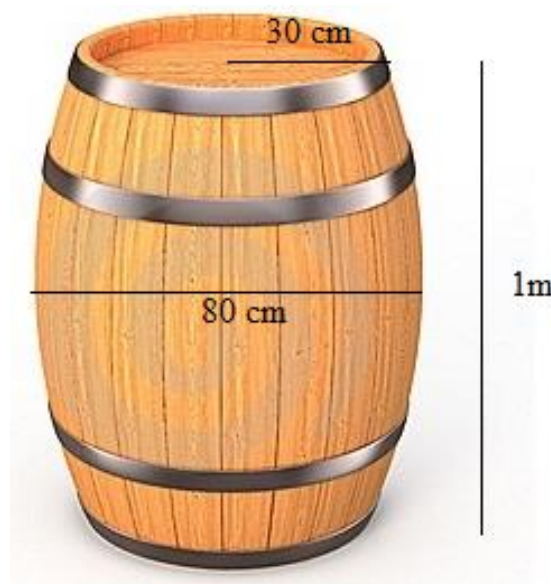
Ví dụ 4: Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian $v(t) = 3t + 2 \text{ (m/s)}$. Tại thời điểm $t = 2 \text{ (s)}$ vật đã đi được quãng đường là 10 (m) . Hỏi tại thời điểm $t = 30 \text{ (s)}$ thì vật đã đi được quãng đường bao nhiêu?

Ví dụ 5: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 (m/s) thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Hỏi sau 10 (s) kể từ thời điểm tăng tốc, vật đã di chuyển được quãng đường bao nhiêu?

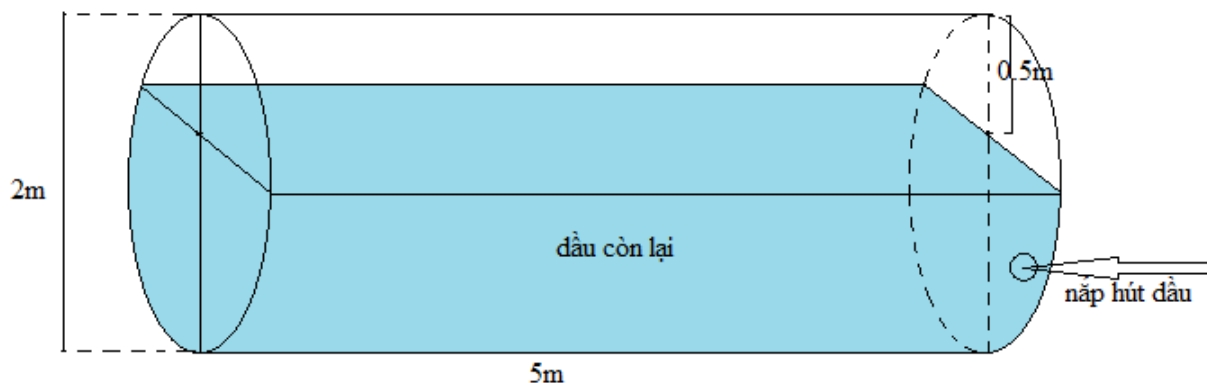
Ví dụ 6: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 (m/s) thì giảm tốc với gia tốc $a(t) = 4 - t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng vật đi được thì khi thay đổi chuyển động đến khi vật tốc đạt giá trị lớn nhất?

Ví dụ 7: Một đám vi trùng ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1 + 0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250.000 con. Sau 10 ngày số lượng vi trùng là (lấy xấp xỉ hàng đơn vị).

Ví dụ 8: Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30 cm , thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40 cm , chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) xấp xỉ bao nhiêu?



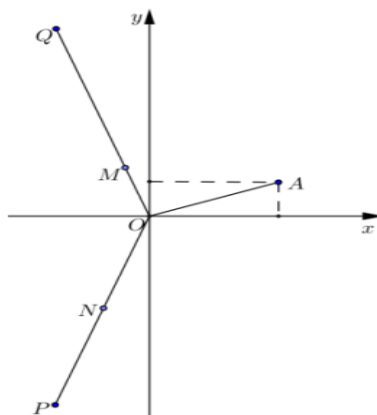
Ví dụ 9: Một Chi đoàn thanh niên đi dự trại ở một đơn vị bạn, họ dự định dựng một lều trại có dạng parabol (nhìn từ mặt trước, lều trại được căng thẳng từ trước ra sau, mặt sau trại cũng là parabol có kích thước giống như mặt trước) với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía trong trại theo m^3 .



4. SỐ PHỨC

a. Điểm biểu diễn số phức

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn : $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ là một điểm biểu diễn số phức z . Hỏi điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1}{iz}$ là điểm nào



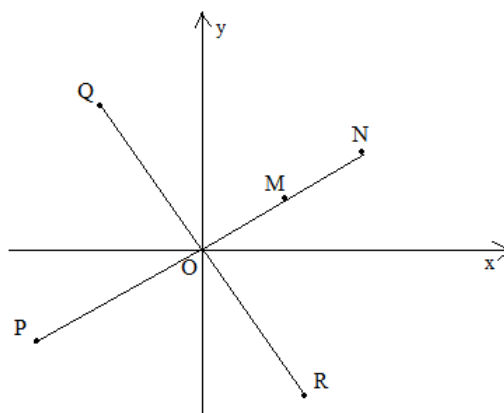
A. Điểm Q

B. Điểm M

C. Điểm N

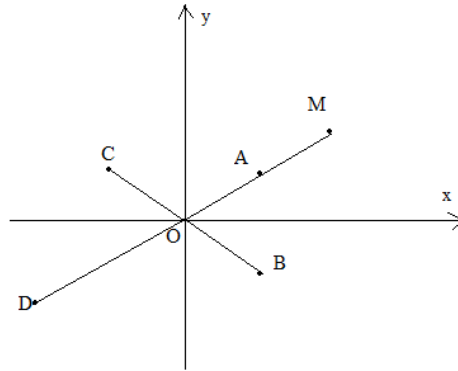
D. Điểm P

Ví dụ 2: Số phức z được biểu diễn bởi điểm M . Hỏi số phức $2z$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm N, P, Q, R .



Đáp số: N

Ví dụ 3: Cho số phức z có $|z| = 2$ được biểu diễn bởi điểm M . Điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1}{z}$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm A, B, C, D ?



Đáp số: B

Ví dụ 4: Cho số phức z thay đổi, luôn có $|z| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 - 2i)\bar{z} + 3i$ là:

A. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 2\sqrt{5}$.

B. Đường tròn $x^2 + (y + 3)^2 = 20$.

C. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 20$.

D. Đường tròn $(x - 3)^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$.

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Hãy tính bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{5}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $3\sqrt{7}$.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng phức, Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + i - 1$. Tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm I, bán kính R. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R.

A. $I(3; -4), R = 2$

B. $I(5; -7), R = 4$

C. $I(4; -5), R = 4$

D.

$I(7; -9), R = 4$

Ví dụ 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích:

A. $S = 9\pi$.

B. $S = 12\pi$.

C. $S = 16\pi$.

D. $S = 25\pi$.

Ví dụ 8: Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3 - 4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I, bán kính R. Khi đó.

A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$.

B. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$.

C. $I(-1; 2), R = 5$.

D. $I(1; -2), R = 5$.

b. Tổng bậc cao của số phức

Ví dụ 1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình phức $3z^2 - 4z + 3 = 0$ với z_2 có phần ảo âm. Tính $P = z_1^{2017} \cdot z_2^{2016}$

Hướng dẫn: $P = z_1^{2017} \cdot z_2^{2016} = (z_1 z_2)^{2016} \cdot z_1 = z_1$

Ví dụ 2: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình phức $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tính $P = z_1^{2017} + z_2^{2017}$.

Hướng dẫn: $z_1, z_2 = 1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow z_1^3 = z_2^3 = -8$. Vậy $P = 8^{672} (z_1 + z_2) = 8^{672} \cdot 2 = 2^{2017}$

Ví dụ 3: Tìm phần phần ảo của số phức sau: $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{200}$

A. $-2^{10} - 1$ **B.** $2^{10} - 1$ **C.** $-2^{100} + 1$ **D.** $2^{10} + 1$

Hướng dẫn: Dùng công thức tổng n số hạng đầu của cấp số nhân. $S_n = u_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
 $= \frac{(1+i)^{201} - 1}{i}$. Chú ý: $(1+i)^2 = 2i$

Ví dụ 4: Mô đun của số phức $z = 1 + (1-i) + (1-i)^2 + (1-i)^3 + \dots + (1-i)^{19}$ bằng:

A. $|z| = 20$ **B.** $|z| = 2^{10} + 1$ **C.** $|z| = 1$ **D.** $|z| = 2^{10} - 1$

Hướng dẫn: Tương tự Ví dụ 3.

Ví dụ 5: Tính $S = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017}$

Hướng dẫn: Có $iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \dots + 2016i^{2017} + 2017i^{2018} \Rightarrow S - iS$

$= i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017} - 2017i^{2018} = i \frac{i^{2017} - 1}{i - 1} - 2017i^{2018} = i - 2017 \cdot (-1) = 2017 + i$. Vậy

$$S = \frac{2017 + i}{1 - i}$$

c. GTLN – GTNN của mô đun số phức

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn: $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Đáp số: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Đáp số: 1

Ví dụ 3: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5, |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$

Hướng dẫn: Gọi M, N biểu diễn z_1, z_2 ta có:

M thuộc đường tròn tâm $I(-5;0)$ bán kính $R=5$. N thuộc đường trung trực của AB với $A(-1;3)$ và $B(3;6)$. Vậy MN nhỏ nhất bằng $d(I, AB) - R$

Đáp số: $\frac{5}{2}$

Ví dụ 4: Xét số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z\sqrt{3z\bar{z}+1} = |z|(2+6iz)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2} < |z| < 1$. **D.** $|z| < \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn: Cô lập z để lấy được mô đun 2 vế. Từ đó tính được $|z|$.

Ví dụ 5 Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính modun của số phức $w = M + mi$

- A.** $|w| = 2\sqrt{314}$ **B.** $|w| = 2\sqrt{309}$ **C.** $|w| = \sqrt{1258}$ **D.** $|w| = 3\sqrt{137}$

Hướng dẫn: Biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 \Leftrightarrow ax + by + c - P = 0$ (d). Đường thẳng (d) có điểm chung với đường tròn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow d(I, d) \leq R \Leftrightarrow m \leq P \leq M$

Ví dụ 6: Trong các số phức z thỏa mãn $|z + (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của z_1 và z_2 bằng:

- A.** $8i$. **B.** 4 . **C.** -8 . **D.** 8 .

Ví dụ 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$.

- A.** $\max T = 8\sqrt{2}$. **B.** $\max T = 4$. **C.** $\max T = 4\sqrt{2}$. **D.** $\max T = 8$.

Hướng dẫn: Gọi I là tâm đường tròn $|z-1| = \sqrt{2}$. Biểu thức T hiểu dưới dạng $T = MA + MB$ thì

I là trung điểm của AB. Theo công thức trung tuyến: $MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = k > 0$ (không đổi). Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovski
 $(MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2)$ tìm được giá trị lớn nhất của $T = MA + MB$

Ví dụ 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z-1}{2+iz}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|A| < 1$. B. $|A| \leq 1$. C. $|A| \geq 1$. D. $|A| > 1$.

Hướng dẫn: Rút z theo A được $z = \frac{2A+1}{2-Ai} \Rightarrow |2A+1| \leq |2-Ai|$. Gọi $A = x + yi$ ta được:

$\Rightarrow |2A+1| \leq |2-Ai|$ là phương trình hình tròn. Bài toán trở thành bài toán tìm GTLN, GTNN của $T = |A|$ với điểm biểu diễn A nằm trong hình tròn.

Ví dụ 9: Cho số phức z , tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện

$$\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$$

- A. 3. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Ví dụ 10: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 4 - 3i| = 2$ và $|z_2 + 2 - 3i| = |z_2 - 1 + 2i|$. Tìm GTNN của $P = |z_1 - z_2|$

Hướng dẫn: Tương tự ví dụ 3.

Đáp số: $\frac{\sqrt{34}}{2} - 2$

Ví dụ 11: Biết rằng số phức z thỏa mãn $u = (z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Hướng dẫn: Gọi $z = x + yi$ thay vào u . Cho phần ảo của u bằng 0 ta được (x, y) thỏa mãn phương trình đường thẳng. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là khoảng cách từ O đến đường thẳng đó.

Đáp số: $2\sqrt{2}$

Ví dụ 12: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{4i}{z}\right| = 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$?

A. $2\sqrt{5}$.

B. 2.

C. $\sqrt{5}$.D. $\sqrt{13}$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức: $\|z_1| - |z_2|\| \leq |z_1 + z_2|$. Dấu “=” xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k < 0$.

Ta có: $\left|z| - \frac{4}{|z|}\right| \leq \left|z + \frac{4i}{z}\right| = 2 \Rightarrow -2 \leq |z| - \frac{4}{|z|} \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \\ |z|^2 + 2|z| + 4 \geq 0 \end{cases}$. Giải hệ bất phương trình

này được $-1 + \sqrt{5} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{5}$. Do bất đẳng thức đánh giá 1 lần nên đảm bảo dấu bằng xảy ra. Vậy $M + m = 2\sqrt{5}$.

Ví dụ 13: Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ và $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$. Biết

z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Tính góc ACB ?

A. 60° B. 90° C. 150° D. 120° .

Hướng dẫn: Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn z_1, z_2, z_3 thì A, B, C nằm trong đường

tròn tâm O bán kính 3 (không quan trọng bán kính). Từ $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3} \Rightarrow \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2}$

$\Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_3}$, hay $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC'}$ (với A', B', C' là điểm đối xứng của A, B, C qua Ox).

Có A', B', C' cùng thuộc đường tròn O mà $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC'}$ nên $OA'C'B'$ là hình bình hành và do đó là hình thoi. Mà đường chéo OC' bằng cạnh hình thoi nên đây là hình thoi đặc biệt với $A'C'B' = 120^\circ$. Vậy $ACB = 120^\circ$.

Ví dụ 14: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 2i| + |z - 1 + 2i| = 6$. Tìm GTLN, GTNN của $P = |z|$

Hướng dẫn: Ta có $z_0 = 0$; $z_1 = -1 + 2i$; $z_2 = 1 - 2i$. Nên $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Tính $a = 6/2 = 3$; $2c = |z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5}$. Vậy có ngay $b = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$.

Vậy $\max P = 3$ và $\min P = 2$

Ví dụ 15: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2|+|z-2|=6$. Tìm GTLN, GTNN của $P=|z-1+i|$

Đáp số: Đang chờ bấm máy...

Hướng dẫn: $|z+2|+|z-2|=6$ là phương trình Elip dạng chính tắc với $a=3, c=2 \Rightarrow b=\sqrt{5}$

Vậy phương trình chính tắc của Elip là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{9-x^2}$

$$\text{Có } P^2=(x-1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{9-x^2}+1\right)^2=f_{1,2}(x)$$

Bấm TABLE trên máy Casio trên đoạn $[-3;2]$ cho cả hai hàm $f_{1,2}(x)$ tìm được GTLN, GTNN của P^2 .

Ví dụ 16: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z+1-2i|+|(1+i)z-1+2i|=2\sqrt{5}$. Tìm GTLN, GTNN của $P=|z|$

$$\text{Đáp số: } \min P=0 \text{ và } \max P=OF_1=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Hướng dẫn: Điều kiện giả thiết tương đương với $\left|z-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|+\left|z+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{10} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Tương tự Ví dụ 14 tính được $c=\frac{\sqrt{10}}{2}$. Vậy đây không phải Elip mà là đoạn thẳng F_1F_2 . Mà O

lại là trung điểm của F_1F_2 . Vậy $\min P=0$ và $\max P=OF_1=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ví dụ 17: Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$ và $|z_1-z_2|=|z_2|$. Tính giá trị

$$P=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Vì biểu thức P chứa ẩn phụ là $z = \frac{z_1}{z_2}$ nên không nhất thiết phải tìm từng số z_1, z_2

(thực tế không tìm được) mà chỉ cần tìm $\frac{z_1}{z_2}$.

Từ giả thiết ta có: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$ và $\left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| = 1$. Gọi $z = \frac{z_1}{z_2} = x + yi$, ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Rất dễ giải được hệ phương trình này, ta được $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$\text{Vậy } P = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 = 1$$

Ví dụ 18: Trong các cặp số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1 - (2 + 3i)z_2| = |z_2|$. Tìm số thực $k > 0$ lớn nhất sao cho $|z_1| = k|z_2|$.

Đáp số: $\sqrt{13} + 1$

Hướng dẫn: Đặt $z = \frac{z_1}{z_2}$. Bài toán tương đương với $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$P = |z|$. Dễ dàng giải được giá trị lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{13} + 1$, với I là tâm đường tròn $|z - 2 - 3i| = 1$.

Ví dụ 19: Cho số phức z thoả mãn điều kiện $3|z + 2| + 4|z - 2| = 10$. Tìm GTNN của $|z|$

Đáp số: 1

Hướng dẫn:

Bài toán trở thành $3MA + 4MB = 10$, tìm GTLN, GTNN của OM . Trong đó, $A(-2;0)$, $B(2;0)$ và O là gốc toạ độ. Thấy rằng O là trung điểm của AB .

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có: $OM^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$. Áp dụng BĐT

bunhiakovski, ta có: $100 = (3MA + 4MB)^2 \leq (3^2 + 4^2)(MA^2 + MB^2) = 25(MA^2 + MB^2)$. Vậy

$MA^2 + MB^2 \geq 4$. Thay vào công thức trung tuyến được $OM^2 \geq 2 - 1 = 1$. Vậy $OM \geq 1$. Do đánh giá BDT một lần nên đảm bảo dấu “=” xảy ra. Vậy GTNN của $|z|$ bằng 1.

Ví dụ 20: Cho số phức z thoả mãn điều kiện $3|z + i| + 4|z - i| = 10$. Tìm GTNN của $|z|$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Tương tự ví dụ 19.

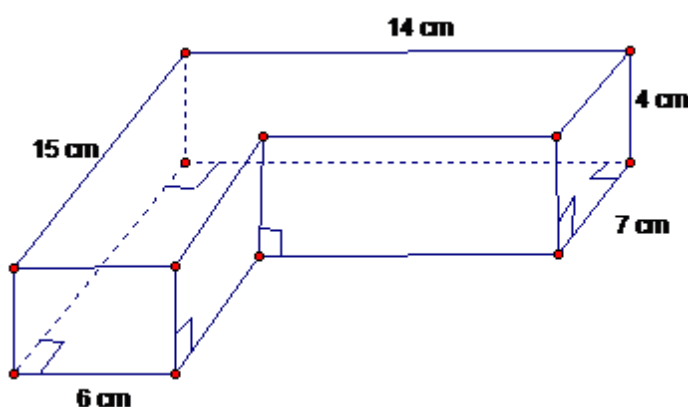
5. KHỐI ĐA DIỆN

a. Thể tích:

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCDEF$ có $ABCDEF$ là hình lục giác đều tâm O và có thể tích V . Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Mặt phẳng (AMF) cắt các cạnh SB, SC, SE lần lượt tại H, K, N . Tính thể tích của hình chóp $S.AHKMNF$ theo V .

- A. $\frac{1}{3}V$ B. $\frac{1}{9}V$ C. $\frac{13}{36}V$ D. $\frac{14}{27}V$

Ví dụ 2: Thể tích của khối đa diện tạo bởi hình sau là:



- A. 328cm^3 . B. 456cm^3 . C. 584cm^3 . D. 712cm^3 .

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O , $AB = a\sqrt{5}$, $AC = 4a$, $SO = 2\sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm SC . Biết SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $M.OBC$.

- A. $2\sqrt{2}a^3$. B. $\sqrt{2}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $4a^3$.

Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của CC' . Gọi khối đa diện (H) là phần còn lại của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ sau khi cắt bỏ đi khối chóp $M.ABC$. Tỷ số thể tích của (H) và khối chóp $M.ABC$ là:

- A. $\frac{1}{6}$. B. 6. C. $\frac{1}{5}$. D. 5.

b. Tỷ số thể tích

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $SA \perp AB$, $SB \perp SC$, $SC \perp SA$, $SA = SB = SC = a$. Gọi B' , C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên AB và AC . Thể tích của khối chóp $S.AB'C'$ là:

- A. $\frac{1}{6}a^3$ B. $\frac{1}{24}a^3$ C. $\frac{1}{12}a^3$ D. $\frac{1}{48}a^3$

Ví dụ 2: Cho khối chóp $S.ABC$. Trên 3 cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy 3 điểm A', B', C' sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$; $SB' = \frac{1}{4}SB$; $SC' = \frac{1}{2}SC$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Khi đó tỷ số $\frac{V'}{V}$ là:

- A. 12 B. $\frac{1}{12}$ C. 24 D. $\frac{1}{24}$

Ví dụ 3: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng $(B'C'M)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỷ số thể tích của hai phần đó:

- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{8}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, có thể tích bằng V . Gọi I là trọng tâm tam giác SBD . Một mặt phẳng chứa AI và song song với BD cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng:

- A. $\frac{V}{18}$. B. $\frac{V}{9}$. C. $\frac{V}{27}$. D. $\frac{V}{3}$.

Ví dụ 5: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng chứa AB đi qua điểm C' nằm trên SC chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SC'}{SC}$.

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{4}{5}$.

Ví dụ 6: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng $(B'C'M)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỷ số thể tích của hai phần đó:

- A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{8}$

Ví dụ 7: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC . Mặt phẳng chứa AB và đi qua G cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M và N . Biết mặt bên của hình chóp tạo với đáy một góc bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABMN$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Ví dụ 8: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$

B. Khối $GA'B'C'$

C. Khối $ABB'C'$

D. Khối $BB'MN$

Ví dụ 9: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB' . Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích khối

$C'.MNB'A'$ và V_2 là thể tích khối $ABC.MNC'$. Khi đó tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M là điểm đối xứng với C qua D ; N là trung điểm của SC , mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần đó.

A. $\frac{9}{5}$

B. $\frac{8}{5}$

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{7}{5}$

6. KHỐI TRÒN XOAY

a. Thể tích 1 phần khối tròn xoay

Ví dụ 1: Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Khi đó diện tích đáy của cái lọ hình trụ là:

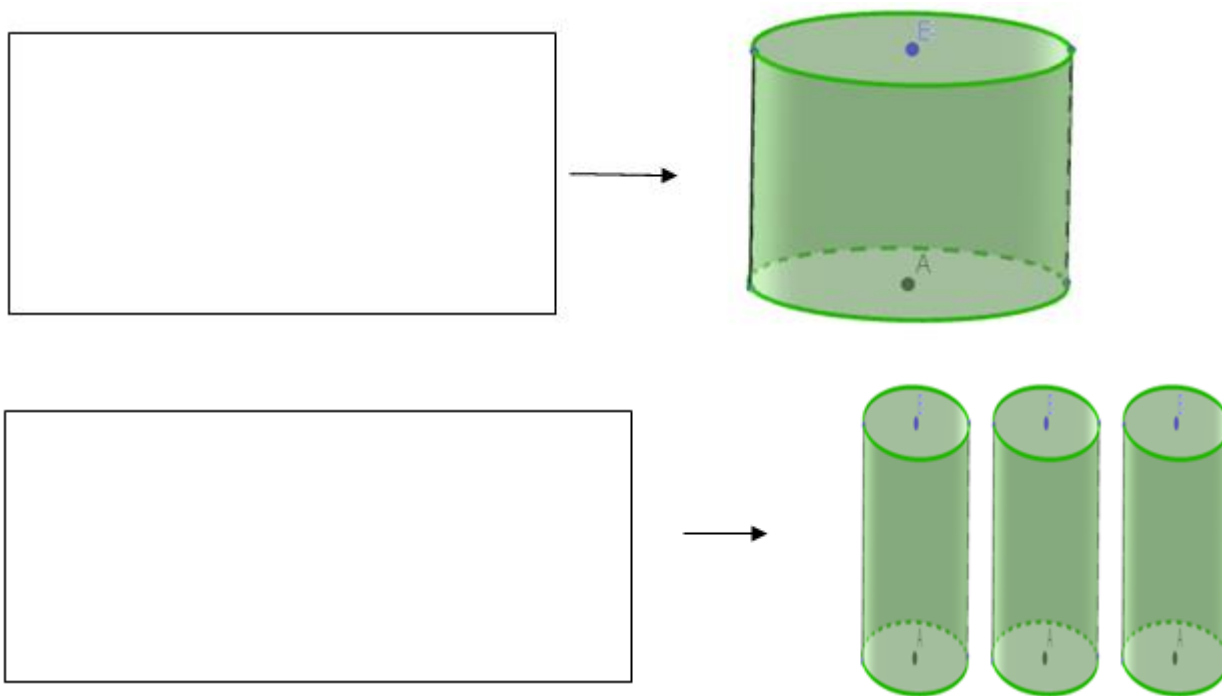
A. $16\pi r^2$

B. $18\pi r^2$

C. $9\pi r^2$

D. $36\pi r^2$

Ví dụ 2: Từ tấm tôn hình chữ nhật cạnh $90\text{cm} \times 180\text{cm}$ người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 80cm theo 2 cách (Xem hình minh họa dưới)



Cách 1. Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng

Cách 2. Cắt tấm tôn ban đầu thành 3 tấm bằng nhau và gò các tấm đó thành mặt xung quanh của thùng.

Ký hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách thứ nhất và V_2 là tổng thể tích của ba thùng gò được theo cách thứ 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. 3B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$

D. 12

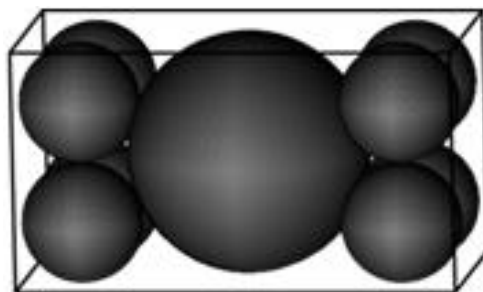
Ví dụ 3: Một hình trụ tròn xoay có diện tích toàn phần là S_1 , diện tích đáy là S . Cắt đôi hình trụ này bằng 1 mặt phẳng vuông góc và đi qua trung điểm của đường sinh, ta được 2 hình trụ nhỏ có diện tích toàn phần là S_2 . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_2 = \frac{1}{2}S_1 + S$.B. $S_2 = \frac{1}{2}S_1$.C. $S_2 = 2S_1$.D. $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S)$.

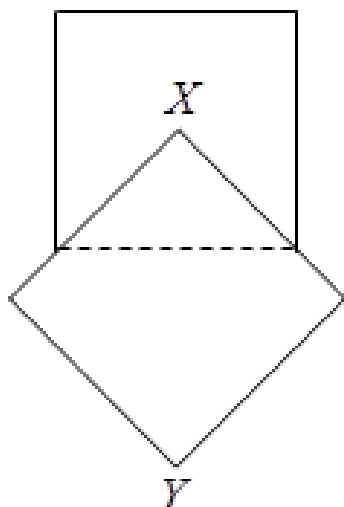
Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Kẻ $EK \perp SD$ tại K . Bán kính mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K bằng:

A. $\frac{1}{2}a$ B. a C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Ví dụ 5: Một hình hộp chữ nhật kích thước $6 \times 6 \times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 3 và 8 khối cầu nhỏ bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng các khối cầu đều tiếp xúc nhau và tiếp xúc với các mặt của hình hộp (như hình vẽ). Thể tích của hình hộp là:

A. $64 + 32\sqrt{7}$.B. $108 + 36\sqrt{7}$.C. $108 + 108\sqrt{7}$.D. $32 + 32\sqrt{7}$.

Ví dụ 6: hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY .



A. $V = \frac{125(1 + \sqrt{2})\pi}{6}$.

B. $V = \frac{125(5 + 2\sqrt{2})\pi}{12}$.

C. $V = \frac{125(5 + 4\sqrt{2})\pi}{24}$.

D. $V = \frac{125(2 + \sqrt{2})\pi}{4}$.

Ví dụ 7: Người ta bỏ 3 quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 3 lần đường kính của quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của 3 quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số S_1 / S_2 bằng:

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{6}{5}$.

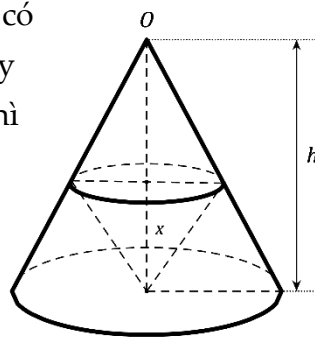
Ví dụ 8: Cho khối nón đỉnh O , chiều cao là h . Một khối nón khác có đỉnh là tâm I của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Để thể tích của khối nón đỉnh I lớn nhất thì

A. $\frac{h}{2}$

B. $\frac{h}{3}$

C. $\frac{2h}{3}$

D. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$

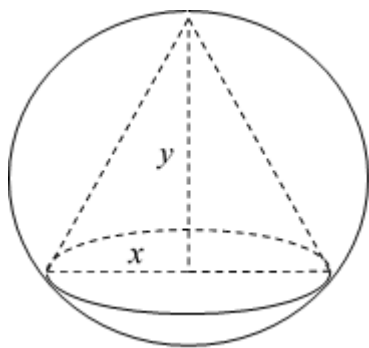


Ví dụ 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=a$, biết $SA=2a$ và $SA \perp (ABC)$, gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên các cạnh SB và SC. Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu qua các điểm A, B, C, H, K.

- A. I là trung điểm của AC, $R=a\sqrt{2}$.
 B. I là trung điểm của AC, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 C. I là trung điểm của AB, $R = a$.
 D. I là trung điểm của AB, $R = \frac{a}{2}$.

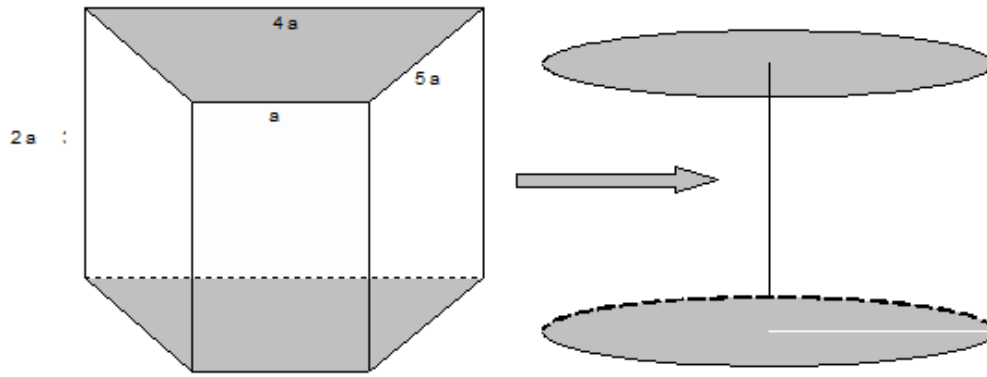
b. GTLN – GTNN của thể tích

Ví dụ 1: Cho hình nón có bán kính x , chiều cao y nội tiếp mặt cầu bán kính $R = \frac{a}{2}$. Xác định x, y sao cho khối nón có thể tích lớn nhất? (Xem hình vẽ bên)



- A. $x = \frac{2a\sqrt{2}}{3}, y = \frac{4a}{3}$.
 B. $x = y = \frac{a}{2}$.
 C. $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, y = \frac{2a}{3}$.
 D. $x = y = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 2: Một khúc gỗ có dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình thang cân, đáy nhỏ bằng a , đáy lớn bằng $4a$, cạnh bên bằng $\frac{5a}{2}$; có chiều cao bằng $2a\sqrt{3}$. Người ta chế tác khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình trụ (hình vẽ dưới đây). Thể tích V lớn nhất của khúc gỗ sau khi được chế tác là bao nhiêu?



A. $V = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{2\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$. C. $V = 4\pi a^3 \sqrt{3}$. D. $V = 2\pi a^3 \sqrt{3}$.

Ví dụ 3: Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Thể tích của hình lăng trụ là V . Để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ là:

A. $\sqrt[3]{4V}$ B. $\sqrt[3]{V}$ C. $\sqrt[3]{2V}$ D. $\sqrt[3]{6V}$

Ví dụ 4: Một hành lang giữa hai nhà có hình dạng của một lăng trụ đứng. Hai mặt bên $ABA'B'$ và $ACA'C'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20 m , rộng 5 m . Gọi $x(\text{m})$ là độ dài của cạnh BC . Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. Thể tích lớn nhất $V = 250(\text{m}^3)$ B. Thể tích lớn nhất $V = 5\sqrt{2}(\text{m}^3)$
C. Thể tích lớn nhất $V = 50(\text{m}^3)$ D. Thể tích lớn nhất $V = 2500(\text{m}^3)$

Ví dụ 5: Một xí nghiệp chế biến thực phẩm muốn sản xuất những loại hộp hình trụ có thể tích V cho trước để đựng thịt bò. Gọi $x, h (x > 0, h > 0)$ lần lượt là độ dài bán kính đáy và chiều cao của hình trụ. Để sản xuất hộp hình trụ tốn ít vật liệu nhất thì giá trị của tổng $x + h$ là:

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. B. $\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$. C. $2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. D. $3\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Ví dụ 6: Khi sản xuất vỏ hộp sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ hộp là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng:

A. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. B. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. C. $R = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$. D. $R = \sqrt{\frac{V}{\pi}}$.

Ví dụ 7: Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi và có chiều rộng là a , chiều dài là b , người ta gấp lại để tạo thành một hình trụ có chiều cao bằng a . Khối trụ được tạo thành có thể tích lớn nhất khi:

A. $b = a\sqrt{3}$

B. $b = a$

C. $b = a\sqrt{5}$

D. $b = 2a$

Ví dụ 8: Trong các hình trụ có thể tích V không đổi, người ta tìm được hình trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Hãy so sánh chiều cao h và bán kính đáy của hình trụ này.

A. $h = \frac{R}{2}$

B. $h = R\sqrt{2}$

C. $h = 2R$

D. $h = R$

Ví dụ 9: Một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài 98cm , chiều rộng 30cm được uốn lại thành mặt xung quanh của một thùng đựng nước. Biết rằng chỗ mỗi ghép mất 2cm . Hỏi thùng đựng tối đa được bao nhiêu lít nước?

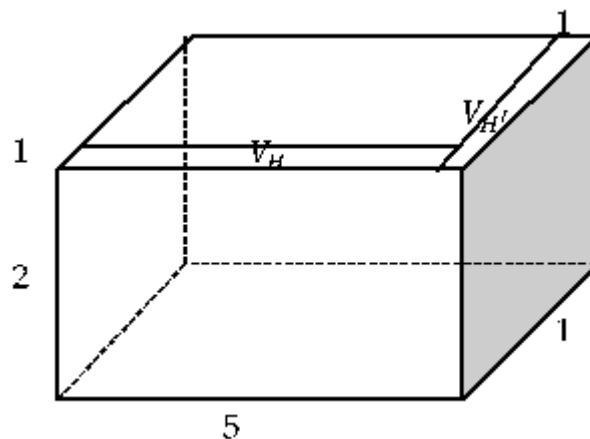
A. 22 lít

B. 20 lít

C. 25 lít

D. 30 lít.

Ví dụ 10: Người ta muốn xây dựng một bồn chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 5m , 1m , 2m (như hình vẽ). Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20cm , chiều rộng 10cm , chiều cao 5cm . Hỏi người ta cần sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây hai bức tường phía bên ngoài của bồn. Bồn chứa được bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể)



A. 1180 viên; 8800 lít

B. 1182 viên; 8820 lít

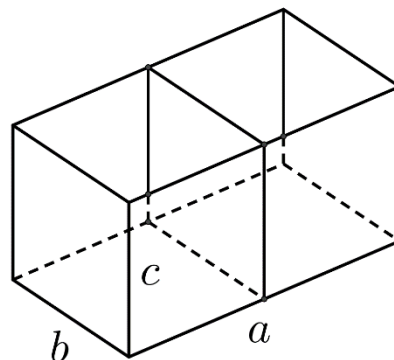
C. 1180 viên; 8820 lít

D. 1182 viên; 8800 lít

Ví dụ 11: Người thợ cần làm một cái bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296\text{ m}^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước a , b , c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a , b , c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dày của kính không đáng kể.

A. $a = 3,6\text{ m}$, $b = 0,6\text{ m}$, $c = 0,6\text{ m}$.

B. $a = 2,4\text{ m}$, $b = 0,9\text{ m}$, $c = 0,6\text{ m}$.



C. $a = 1,8 \text{ m}, b = 1,2 \text{ m}, c = 0,6 \text{ m}$.

D. $a = 1,2 \text{ m}, b = 1,2 \text{ m}, c = 0,9 \text{ m}$.

Ví dụ 12: Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt ra thành 2 đoạn. Đoạn dây thứ nhất có độ dài x được uốn thành một hình vuông. Đoạn dây còn lại được uốn thành một vòng tròn. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì giá trị x xấp xỉ bao nhiêu centimet?

A. 28,2

B. 33,6

C. 30

D. 36

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Một đường thẳng đi qua trung điểm I của AB và song song với BC cắt AC tại J . Mặt phẳng $(A'IJ)$ chia khối lăng trụ thành 2 khối. Tính tỉ số thể tích giữa 2 khối đó (số bé chia cho số lớn).

A. $\frac{1}{11}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

Ví dụ 14: Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Thể tích của hình lăng trụ là V . Để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ là:

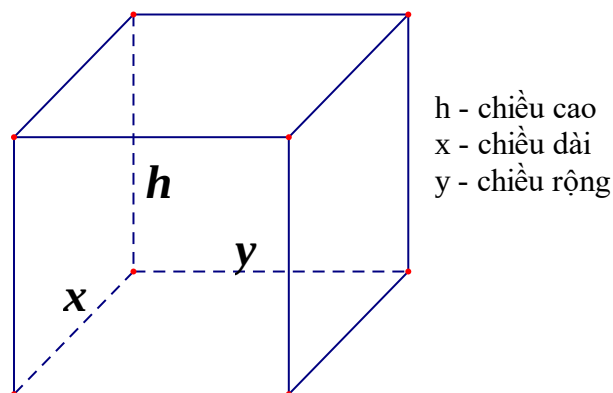
A. $\sqrt[3]{4V}$

B. $\sqrt[3]{V}$

C. $\sqrt[3]{2V}$

D. $\sqrt[3]{6V}$

Ví dụ 15: Phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3(m^3)$. Tỉ số giữa chiều cao của hố (h) và chiều rộng của đáy (y) bằng 4. Biết rằng hố ga chỉ có các mặt bên và mặt đáy (tức không có mặt trên). Chiều dài của đáy (x) gần nhất với giá trị nào ở dưới để người thợ tốn ít nguyên vật liệu để xây hố ga.



A. 1

B. 1,5

C. 2

D. 3

Ví dụ 16: Cho mặt cầu tâm O , bán kính R . Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) . Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h(h > R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h = \sqrt{3}R$.

B. $h = \sqrt{2}R$.

C. $h = \frac{4R}{3}$.

D. $h = \frac{3R}{2}$.

7. TOẠ ĐỘ OXYZ

a. GTLN- GTNN khoảng cách

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$; $B(5; 4; 4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 6 = 0$. Tọa độ điểm M nằm trên (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất là:

- A. $M(3; 3; 3)$ B. $M(2; 1; 9)$ C. $M(-1; 1; 5)$ D. $M(1; -1; 7)$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$, $B(5; 4; 4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 6 = 0$. Tọa độ điểm M nằm trên (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất là:

- A. $M(-1; 1; 5)$ B. $M(0; 0; 6)$ C. $M(1; 1; 9)$ D. $M(0; -5; 1)$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 0; 1)$, $(P): x - y + z + 1 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$. B. $N(3; 5; 1)$. C. $N(-2; 0; 1)$. D. $N\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -2\right)$.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$, $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in (S)$ sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

- A. $M(0; 0; 2)$ B. $M(-1; -1; -3)$. C. $M(3; -3; 1)$. D. $M(1; 0; 2)$.

Ví dụ 5: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; -1; -5)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là lớn nhất. Phương trình của d là:

- A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$. B. $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. D. $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

- A. $MN = 3$. B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $MN = 3\sqrt{2}$. D. $MN = 14$.

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.

- A. $2x - y + z + 6 = 0$ B. $2x - y + z \pm 6 = 0$
 C. $2x + y + z - 6 = 0$ D. $2x - y + z - 6 = 0$

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(10; 2; -1)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

- A. $7x - y - 5z - 77 = 0$ B. $7x - y - 5z + 77 = 0$
C. $7x + y - 5z - 77 = 0$ D. $7x + y - 5z + 77 = 0$

Ví dụ 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (d) có phương trình tham số $\{x = -2 + t; y = -2t; z = 2 + 2t\}$. Gọi Δ là đường thẳng qua điểm $A(4; 0; -1)$ song song với (d) và $I(-2; 0; 2)$ là hình chiếu vuông góc của A trên (d). Viết phương trình của mặt phẳng chứa Δ và có khoảng cách đến (d) là lớn nhất.

- A. $2x - z - 9 = 0$ B. $2x - y - 9 = 0$
 C. $2x - z + 9 = 0$ D. $2x - y + 9 = 0$

Ví dụ 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $A(2; 5; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

- A. $x + 4y + z - 3 = 0$ B. $x - 4y + z - 3 = 0$
 C. $x - 4y + z + 3 = 0$ D. $x - 4y - z - 3 = 0$

Ví dụ 11: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0; -1; 2)$ và $N(-1; 1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0; 0; 2)$ đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

- A. $x - y \diamond z + 3 = 0$ B. $x + y \diamond 2z + 3 = 0$
C. $x + y - z + 3 = 0$ D. $x + y \diamond z - 3 = 0$

Ví dụ 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện OABC có giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$

C. $\frac{x}{27} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ D. $\frac{x}{27} + \frac{y}{3} - \frac{z}{3} = 1$

Ví dụ 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P): x + 2y + 3z + 14 = 0$ B. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$

C. $(P): x + 2y - 3z - 14 = 0$ D. $(P): x - 2y + 3z + 14 = 0$

Ví dụ 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;5;3)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $OA + OB + OC$ có giá trị nhỏ nhất

A. $(P): \frac{x}{2 + \sqrt{6} - \sqrt{10}} + \frac{y}{5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}} + \frac{z}{3 + \sqrt{6} + \sqrt{15}} = 1$

B. $(P): \frac{x}{2 + \sqrt{6} + \sqrt{10}} + \frac{y}{5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}} + \frac{z}{3 + \sqrt{6} + \sqrt{15}} = 1$

C. $(P): \frac{x}{2 + \sqrt{6} + \sqrt{10}} + \frac{y}{5 - \sqrt{10} + \sqrt{15}} + \frac{z}{3 + \sqrt{6} + \sqrt{15}} = 1$

D. $(P): \frac{x}{2 + \sqrt{6} + \sqrt{10}} + \frac{y}{5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}} + \frac{z}{3 + \sqrt{6} - \sqrt{15}} = 1$

b. GTLN-GTNN góc

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q): $x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.

A. $y - z + 4 = 0$ B. $x - z + 4 = 0$ C. $y - z - 4 = 0$ D. $x - z - 4 = 0$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $M(-1; -1; 3)$, $N(1; 0; 4)$ và mặt phẳng (Q): $x + 2y - z + 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N và tạo với (Q) một góc nhỏ nhất.

A. (P): $x - z + 4 = 0$ B. (P): $y + z + 4 = 0$
 C. (P): $y - z - 4 = 0$ D. (P): $y - z + 4 = 0$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$. Viết phương

trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với trục Oy một góc lớn nhất.

A. $x + 5y - 2z - 9 = 0$ B. $x + 5y + 2z + 9 = 0$
C. $x + 5y - 2z + 9 = 0$ D. $x - 5y - 2z + 9 = 0$

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất.

A. $7x - y + 5z + 9 = 0$ B. $7x - y - 5z - 9 = 0$
 C. $7x - y + 5z + 9 = 0$ D. $7x - y + 5z - 9 = 0$

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(2; -1; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất.

A. (P): $x + y + 2z + 1 = 0$ B. (P): $x - y + 2z - 1 = 0$
 C. (P): $x - y - 2z - 1 = 0$ D. (P): $x + y + 2z - 1 = 0$

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $2x - y + z + 2 = 0$ và điểm $A(1; 1; -1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A, vuông góc với mặt phẳng (Q) và tạo với trục Oy một góc lớn nhất.

A. $(P): y + z = 0$ hoặc $(P): 2x + 5y + z - 6 = 0$

B. $(P): y - z = 0$ hoặc $(P): 2x + 5y + z - 6 = 0$

C. $(P): x + z = 0$ hoặc $(P): 2x + 5y + 6 = 0$

D. $(P): y + z = 0$ hoặc $(P): 2x + 5y - z - 6 = 0$