

2020

Bồi dưỡng HSG THCS và ôn thi vào 10 chuyên

=== NGUYỄN TÀI CHUNG ===

Bài giảng toán 9

Căn bậc hai



Căn bậc ba

$$\sqrt{4} = 2$$

Pleiku 07/07/2020

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1	Căn bậc hai, căn bậc ba	5
1	Căn bậc hai	5
	A Tóm tắt lý thuyết	5
	B Bài tập	5
	C Lời giải	7
2	Căn bậc hai và đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	8
	A Tóm tắt lý thuyết	8
	B Bài tập	8
	C Lời giải	10
3	Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương	11
	A Tóm tắt lý thuyết	11
	B Bài tập	11
	C Lời giải	13
4	Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương	14
	A Tóm tắt lý thuyết	14
	B Bài tập	14
	C Lời giải	18
5	Bảng căn bậc hai	19
	A Tóm tắt lý thuyết	19
	B Bài tập	19
6	Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai	20
	A Tóm tắt lý thuyết	20

B	Bài tập	20
C	Lời giải	22
7	Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai	23
A	Tóm tắt lý thuyết	23
B	Bài tập	23
C	Lời giải	26
8	Căn bậc ba	27
A	Tóm tắt lý thuyết	27
B	Bài tập	27
C	Lời giải	29
	Ôn tập chương I	30
D	Đề bài	30
E	Lời giải	37

CHƯƠNG 1

CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

BÀI 1. CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc hai số học.

- ☑ Căn bậc hai của số không âm a là số x sao cho $x^2 = a$.
- ☑ Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau. Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$, số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
- ☑ Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết: $\sqrt{0} = 0$.
- ☑ Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a . Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.
- ☑ Với $a \geq 0$ thì: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.

2. So sánh các căn bậc hai số học. Với a và b không âm, ta có:

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

B. BÀI TẬP

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra các căn bậc hai của chúng:

- a) 81; b) 225; c) 0,49; d) 441.

Bài 2. Tìm số x không âm, biết:

- a) $\sqrt{x} = 12$; b) $\sqrt{x} = \sqrt{7}$; c) $\sqrt{x} = -9$;
d) $3\sqrt{x} = 15$; e) $\sqrt{x} = 0$; f) $3\sqrt{x} = 2$.

Bài 3. Tìm số $x < 0$ biết rằng:

- a) $x^2 = 100$; b) $x^2 = 5$; c) $x^2 = 6$.

Bài 4. Tìm x biết:

- a) $x^4 - 9 = 0$; b) $x^4 - 100 = 0$; c) $4x^4 = 25$.

Bài 5 (Tuyển sinh 10, Đồng Tháp, 2019).

- ① Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{36} - \sqrt{4}$.
- ② Tìm x biết $\sqrt{x} = 3$.

Bài 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 5} + 2y^2 - 8y + 2019.$$

Bài 19. Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố thì $\sqrt{p}$ là số vô tỉ.

Bài 20. Chứng minh rằng nếu số nguyên dương a không phải là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.

Bài 21 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Nội, 2018).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}.$$

Bài 22 (Đề thi HSG 9, tỉnh Tiền Giang, năm 2018).

Tính giá trị của biểu thức

$$B = \sqrt{14^3 + 15^3 + 16^3 + \dots + 24^3 + 25^3}.$$

C. LỜI GIẢI

BÀI 2. CĂN BẬC HAI VÀ ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí. Với mọi số thực A , ta có: $\sqrt{A^2} = |A|$.

2. Chú ý.

☑ $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi và chỉ khi $A \geq 0$.

☑ $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $A > 0$.

☑ Với $A \geq 0$ thì:

$$|X| \leq A \Leftrightarrow -A \leq X \leq A; \quad |X| \geq A \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq A \\ X \leq -A. \end{cases}$$

☑ Với mọi số thực $a \geq 0$, ta có: $(\sqrt{a})^2 = a$.

B. BÀI TẬP

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{25} + \sqrt{9}$;

b) $B = \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{5}$.

Bài 2 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hưng Yên, 2017).

Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + 6$.

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{7}$;

b) $B = \sqrt{(2 - \sqrt{6})^2} - \sqrt{6}$.

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{36 - 12x + x^2}$

b) $B = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, với $x > 2$.

c) $C = \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$, với $x < -\frac{3}{2}$.

d) $D = \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} + 2 - x$, với $x \geq -\frac{1}{2}$.

e) $E = \sqrt{25x^2 - 60x + 36} + 6x - 2$, với $x < 1$.

Bài 5. Tìm x biết $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$.

2. Bài tập nâng cao, bồi dưỡng học sinh giỏi

Bài 6. Với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{2}$, rút gọn biểu thức:

$$Q = \frac{2}{2x-1} \sqrt{8x^2(1-4x+4x^2)}.$$

Bài 7 (Đề thi vào 10 chuyên toán, Chuyên Hùng Vương Gia Lai, 2016).

Tính giá trị của biểu thức $P = (5x^3 - 30x + 21)^{2016}$, với

$$x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Bài 8 (Đề thi vào 10 chuyên toán, THPT chuyên Hùng Vương Gia Lai, 2017-2018).

Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{2x-18}{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}} \quad (\text{với } x \geq 18).$$

Bài 9 (Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Vũng Tàu, 2016).

Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \sqrt{4x-3+4\sqrt{x-1}}, \text{ với } x \geq 1.$$

Bài 10. Cho x, y, z khác 0 và thỏa mãn: $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right|.$$

Bài 11. Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng biểu thức

$$A = \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}$$

là một số hữu tỉ.

Bài 12 (Đề thi HSG 9, tỉnh Đồng Nai, năm 2018).

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ac = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = a\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(1+a^2)}} + b\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+c^2)}{(1+b^2)}} + c\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1+c^2)}}$$

Bài 13. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Rút gọn biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}} + \sqrt{\frac{(b+ca)(c+ab)}{a+bc}} + \sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}.$$

Bài 14 (Đề thi vào 10, Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, 2017).

a) Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2017$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a^2 + 2017)(b^2 + 2017)(c^2 + 2017)}$$

là một số hữu tỉ.

b) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình $7x^2 + 3y^2 = 714$.

Bài 15. Xét các số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{x}{\sqrt{yz(1+x^2)}} + \frac{y}{\sqrt{zx(1+y^2)}} + \frac{z}{\sqrt{xy(1+z^2)}}.$$

Bài 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 10x + 25}.$$

Bài 17. Tìm giá trị của x, y để biểu thức:

$$M = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 11} + \sqrt{x^2 + 3y^2 + 2x + 6y + 4}$$

đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy.

Bài 18 (Đề thi HSG 9, tỉnh Bắc Ninh, năm 2018).

Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}}, x \geq 2.$$

Bài 19. Cho các số thực a, b thỏa mãn $ab \neq 0, a + b \neq 0$.

a) Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|.$

b) Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}} = \left| a + b - \frac{ab}{a+b} \right|.$

c) Sử dụng kết quả trên, hãy tính:

$$x = \sqrt{1 + \left(\underbrace{99\dots9}_{n \text{ số } 9} \right)^2 + \left(0, \underbrace{99\dots9}_{n \text{ số } 9} \right)^2}, n \geq 2.$$

C. LỜI GIẢI

BÀI 3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định lý.** Với hai số a và b không âm, ta có: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

2. **Áp dụng.**

a) **Quy tắc khai phương một tích.** Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

b) **Quy tắc nhân các căn bậc hai.** Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

Chú ý. Với $a \geq 0, b \geq 0$, ta có: $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

B. BÀI TẬP

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{45.80}$;

b) $\sqrt{90.6,4}$;

c) $\sqrt{2500.4,9.0,9}$.

Bài 2. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{98}$;

b) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$;

c) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Bài 3. Rút gọn rồi tính:

a) $\sqrt{41^2 - 40^2}$;

b) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$;

c) $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}}$.

Bài 4 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Ninh Bình, 2017).

Rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt{3} (\sqrt{12} - \sqrt{3}).$$

Bài 5. Rút gọn: $A = 2\sqrt{16} - 6\sqrt{9} + \sqrt{36}$.

Bài 6 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Đắk Lắk, 2017).

① Giải phương trình $5x - 18 = 3x + 24$.

② Rút gọn biểu thức $\sqrt{4x} + \sqrt{9x} - \sqrt{16x}$ với $x \geq 0$.

③ Tìm x để biểu thức $A = \sqrt{5 - 3x}$ có nghĩa.

Bài 7 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bắc Giang, 2017).

Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{25} + 3\sqrt{8} - 2\sqrt{18}$.

Bài 8. Rút gọn:

$$a) \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}};$$

$$b) \frac{\sqrt{15} + \sqrt{21}}{3\sqrt{5} + \sqrt{63}}.$$

Bài 9. Cho biểu thức:

$$P = \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}, \text{ với } x > 0, y > 0 \text{ và } x \neq y.$$

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tính giá trị biểu thức P tại $x = 2019, y = 2017$.

Bài 10. Rút gọn biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} + \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} \right) : \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}.$

Bài 11. Rút gọn biểu thức: $M = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - x},$ với $0 < x \neq 1.$

Bài 12. Chứng minh các đẳng thức sau với $b \geq 0, a \geq \sqrt{b}$:

$$a) \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - b})}. \quad (1)$$

$$b) \sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a - \sqrt{a^2 - b})}. \quad (2)$$

Bài 13. Chứng minh rằng với $x \geq 0$ và $y \geq 0$, ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy}.$

Bài 14 (Thi vào 10 chuyên, THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai 2018).
Rút gọn biểu thức

$$A = 2 : \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + 1} - 1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + 1} + 1} \right) \quad (x > 0).$$

Bài 15. Chứng minh rằng với $x < 0$ và $y < 0$, ta có: $x + y + 2\sqrt{xy} \leq 0.$

2. Bài tập nâng cao, bồi dưỡng học sinh giỏi

Bài 16. Cho các biểu thức: $A = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 4}$ và $A = \sqrt{(x - 1)(x + 4)}.$

a) Tìm x để A có nghĩa.

b) Tìm x để B có nghĩa.

c) Với giá trị nào của x thì $A = B$.

Bài 17. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}.$

Bài 18 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Gia Lai, 2017).

Phân tích

$$5x + 7\sqrt{xy} - 6y + \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$

thành nhân tử, với x, y là các số không âm.

Bài 19. Rút gọn biểu thức: $A = (4 + \sqrt{15}) (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \sqrt{4 - \sqrt{15}}.$

Bài 20 (Đề thi vào 10 chuyên Thái Nguyên, 2017).

Không dùng máy tính cầm tay hãy rút gọn: $A = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$.

Bài 21. Giả sử $|x| > 1$. Đặt $a = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

a) Chứng minh rằng $a \neq 0$ và $x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$.

b) Tính $4x^3 - 3x$ theo a .

Bài 22. Cho $a \geq 0, b \geq 0$ và $a \neq b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

Bài 23. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) \quad (a > 0, b > 0, a \neq b).$$

a) Rút gọn biểu thức $A - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$.

b) Tính giá trị của A khi $a = 7 - 4\sqrt{3}, b = 7 + 4\sqrt{3}$.

Bài 24 (Đề thi HSG 9, tỉnh Hà Giang, năm 2018).

Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$. Tính

$$A = \left(x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1 \right)^{2017}.$$

Bài 25 (Đề thi vào 10, Chuyên Hoàng Lê Kha Tây Ninh, 2017).

Rút gọn biểu thức

$$K = (2 - \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}} + (2 + \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Bài 26. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{x - 2\sqrt{x} + 3}{x\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}, \text{ với } x \geq 0.$$

Bài 27. Cho biểu thức:

$$P = \frac{3x - 2\sqrt{x} - 4}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}.$$

a) Tìm x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P .

b) Không dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị của P khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Bài 28 (Đề thi vào 10, Chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi, 2017).

Cho x, y là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| = |x| + |y|.$$

Đẳng thức trên còn đúng hay không trong trường hợp x, y là các số thực âm? Tại sao?

C. LỜI GIẢI

BÀI 4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí. Với $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2. Áp dụng.

a) Quy tắc khai phương một thương. Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó $a \geq 0$ và $b > 0$, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

b) Quy tắc chia hai căn bậc hai. Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho căn bậc hai của số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

B. BÀI TẬP

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\frac{25}{144}}$;

b) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$;

c) $\sqrt{\frac{4}{25} : \frac{49}{121}}$.

Bài 2. Tính

a) $A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - (\sqrt{144} : \sqrt{36})$;

b) $B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}} \ (y > 0)$;

b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}} \ (x > 0)$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}} \ (m > 0, n > 0)$;

b) $\frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}} \ (a < 0, b \neq 0)$.

Bài 5. Tính giá trị biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$;

b) $\frac{\sqrt{8 - 3\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}$.

Bài 6 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Khánh Hòa, 2017).

Tính giá trị biểu thức

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

Bài 7 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Nghệ an, 2017).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = (1 - \sqrt{7}) \frac{\sqrt{7} + 7}{2\sqrt{7}}$.

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x}}.$$

Bài 8. Với $x \geq 0$, rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{\frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{x + 4\sqrt{x} + 4}};$

b) $\sqrt{\frac{4x - 12\sqrt{x} + 9}{4x + 12\sqrt{x} + 9}}.$

Bài 9 (Thi vào 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định 2019).

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

① Rút gọn biểu thức P .

② Tính giá trị của P khi $a = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$.

Bài 10 (Tuyển sinh lớp 10, tỉnh Hải Dương 2019).

Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 2\sqrt{x} + 1} + 1, \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 1.$$

Bài 11. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3}{\sqrt{7} + 2} + \frac{4}{3 - \sqrt{7}} - \frac{21}{\sqrt{7}}.$

Bài 12. Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

① Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{4}$.

② Rút gọn biểu thức B .

③ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{A}{B}$.

Bài 13. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{6\sqrt{x} - 4}{x - 1}$ ($x \geq 0; x \neq 1$).

① Rút gọn biểu thức A .

② Tính giá trị của biểu thức khi $x = 7 - 2\sqrt{6}$.

③ Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Bài 14. Cho biểu thức

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3 - 11\sqrt{x}}{9 - x} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 9.$$

① Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 36$.

② Rút gọn A .

③ Tìm số nguyên x để tích $P = A \cdot B$ là số nguyên.

2. Bài tập nâng cao, bồi dưỡng học sinh giỏi

Bài 15. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3} + 1}.$$

Bài 16. Rút gọn: $A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}.$

Bài 17. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{8 + \sqrt{15}}{2}} + \sqrt{\frac{8 - \sqrt{15}}{2}}.$

Bài 18 (Đề thi HSG 9, tỉnh Tuyên Quang, năm 2018).

Cho

$$x = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}.$$

Tính $P = (1 + 5x^{2015} - x^{2017})^{2018}.$

Bài 19. Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} - \frac{10\sqrt{x}}{x - 25} - \frac{5}{\sqrt{x} + 5}.$

a) Rút gọn $A.$

b) Tìm các giá trị của x để $A < 0.$

Bài 20 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Nam Định, 2017).

Cho biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}, \text{ (với } x > 0 \text{ và } x \neq 1).$$

a) Rút gọn biểu thức $P.$

b) Tìm các giá trị x sao cho $3P = 1 + x.$

Bài 21 (Đề thi vào 10 môn Toán năm học 2018-2019, Bắc Giang).

Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \text{ (với } a > 0, a \neq 1).$$

① Rút gọn biểu thức $B.$

② Đặt $C = B(a - \sqrt{a} + 1).$ So sánh C và 1.

Bài 22. Cho biểu thức:

$$P = a - \left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} \right), \text{ với } a \geq 1.$$

Hãy rút gọn biểu thức P và chứng minh rằng $P \geq 0.$

Bài 23 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bắc Giang, 2017).

Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{1 - \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x-1}{2x + \sqrt{x} - 1} \quad \left(x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4} \right).$$

Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 0.$

Bài 24 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Nội, 2018).

Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1}, B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

① Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

② Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$.

③ Tìm tất cả giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$.

Bài 25 (Đề thi vào 10, Chuyên Đại Học Vinh, Vòng 1, 2017).

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b = 5, ab = 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right).$$

Bài 26 (Thi vào 10, THPT Năng Khiếu, ĐHQG thành phố Hồ Chí Minh 2017).

Biết a, b là các số dương $a \neq b$ và

$$\left(\frac{(a + 2b)^2 - (2a + b)^2}{a + b} \right) : \left(\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a - b} - 3ab \right) = 3.$$

Tính $S = \frac{1 + 2ab}{a^2 + b^2}$.

Bài 27 (Đề thi HSG 9, tỉnh Bắc Giang, năm 2018).

Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{3\sqrt{x} + 1}{1 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2}{x - 1} \right), \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

① Rút gọn biểu thức A .

② Tìm x để biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 28. Cho $a = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}, b = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$. Tính $S = \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}$.

Bài 29 (Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội năm học 2014-2015).

Cho các số thực dương a, b với $a \neq b$. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{\frac{(a - b)^3}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b - a} = 0.$$

Bài 30 (Đề thi vào Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, 2017).

Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{a + \sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a} + 1} + \frac{1}{a + 1} \right) : \frac{\sqrt{a} - 1}{a + 1}, \text{ với } a \geq 0, a \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các số tự nhiên a khác 1 sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 31 (Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Đồng Đa, Hà Nội).

Cho biểu thức

$$P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

① Rút gọn biểu thức P .

② So sánh P với $\sqrt{P}$ với điều kiện $\sqrt{P}$ có nghĩa.

③ Tìm x để $\frac{1}{P}$ nguyên.

Bài 32. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $b \neq c$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{c}$ và:

$$a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2.$$

Chứng minh rằng: $\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}.$

Bài 33 (Đề thi HSG 9, tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu, năm 2018).

Cho biểu thức

$$P = x - \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x - \sqrt{x} - 11}{x + \sqrt{x} - 2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{x - \sqrt{x} - 4}{x + \sqrt{x} - 2} \right).$$

với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 34. Với số tự nhiên $n \geq 3$, đặt:

$$S_n = \frac{1}{3(1 + \sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \cdots + \frac{1}{(2n + 1)(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1})}.$$

Chứng minh $S_n < \frac{1}{2}$.

C. LỜI GIẢI

BÀI 5. BẢNG CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

B. BÀI TẬP

- Bài tập cơ bản
- Bài tập nâng cao, bồi dưỡng học sinh giỏi

BÀI 6. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Với $B \geq 0$, ta có: $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \sqrt{B}$, hay:

- ☑ Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 \cdot B} = A\sqrt{B}$.
- ☑ Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 \cdot B} = -A\sqrt{B}$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn.

- ☑ Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 \cdot B}$.
- ☑ Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 \cdot B}$.

3. Trục căn thức ở mẫu.

- ☑ Với A, B mà $A \cdot B \geq 0$ và $B \neq 0$, ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$.
- ☑ Với A, B mà $B > 0$, ta có: $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.
- ☑ Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có: $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$.
- ☑ Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}.$$

B. BÀI TẬP

1. Bài tập cơ bản

Bài 1 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Cần Thơ 2016).

Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

Bài 2. Chứng minh:

$$a) \frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x - y, \text{ với } x > 0 \text{ và } y > 0.$$

$$b) \frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1} = x + \sqrt{x} + 1, \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

Bài 3. Cho biểu thức:

$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a^2 - a} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

a) Rút gọn biểu thức K.

b) Tìm a để $K = \sqrt{2017}$.

Bài 4 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Đồng Nai, 2017).

Cho $a > 0$ và $a \neq 4$. Rút gọn biểu thức

$$T = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right).$$

Bài 5. Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{7}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - 1 \right)$.

① Rút gọn M.

② Tính giá trị của M khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

③ Tìm x để $M < 2$.

Bài 6. Cho các biểu thức

$$A = \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \text{ và } B = \frac{x+7}{3\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 9).$$

① Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 25$.

② Rút gọn biểu thức A.

③ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A \cdot B$.

2. Bài tập nâng cao, bồi dưỡng học sinh giỏi

Bài 7 (Đề thi vào 10, Chuyên An Giang, 2017).

Cho $x = \frac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 - 8x + 15$.

Bài 8 (HSG Lớp 9 Bến Tre, 2018). Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

Bài 9. Cho biểu thức:

$$M = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x-1} \right) : \frac{2}{x+\sqrt{x}}.$$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M xác định?

b) Rút gọn biểu thức M.

c) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = \frac{1}{4}$.

d) Với $x > 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{M}$.

Bài 10 (Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hưng Yên, 2017).

Cho biểu thức

$$P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm các giá trị x để $P = \frac{3}{4}$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P$.

Bài 11 (Đề thi vào 10, Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, 2016 - V1).

Cho biểu thức

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các giá trị của x để có: $A \geq 0$.

Bài 12 (Thi vào 10 chuyên Toán, Chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum 2017).

Cho biểu thức

$$M = \frac{y}{\sqrt{xy}-x} + \frac{x}{\sqrt{xy}+y} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \quad (x > y > 0).$$

- Rút gọn M .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $N = x^2 - \frac{M}{y(x+y)}$, với $x > y > 0$.

Bài 13 (Đề thi HSG 9, Đà Nẵng, năm 2018).

Tính $A = \frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}}$

Bài 14 (Đề thi HSG 9, Đà Nẵng, năm 2018).

Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}, \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

Rút gọn A và chứng minh $A < \frac{2}{3}$.

C. LỜI GIẢI

BÀI 7. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các công thức sau:

$$\checkmark \sqrt{A^2} = |A|.$$

$$\checkmark \sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B} \text{ (với } A \geq 0 \text{ và } B \geq 0).$$

$$\checkmark \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \text{ (với } A \geq 0 \text{ và } B > 0).$$

$$\checkmark \sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \text{ (với } B \geq 0).$$

$$\checkmark A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \text{ (với } A \geq 0 \text{ và } B \geq 0).$$

$$\checkmark A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} \text{ (với } A < 0 \text{ và } B \geq 0).$$

$$\checkmark \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \text{ (với } AB \geq 0 \text{ và } B \neq 0).$$

$$\checkmark \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \text{ (với } B > 0).$$

$$\checkmark \frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} \text{ (với } A \geq 0 \text{ và } A \neq B^2).$$

$$\checkmark \frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ (với } A \geq 0, B \geq 0 \text{ và } A \neq B).$$

B. BÀI TẬP

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Cho $b > 0$ và $b \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+2} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-2} + \frac{4\sqrt{b}-1}{b-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{b}+2}.$

b) Tính giá trị của biểu thức B tại $b = 6 + 4\sqrt{2}$.

Bài 2. Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

c) Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Bài 3. Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-4} \right) (x-4), \text{ với } x \geq 0, x \neq 4.$$

- Rút gọn P .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

2. Bài tập nâng cao, bồi dưỡng học sinh giỏi

Bài 4. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A có giá trị là số nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức:

$$B = \frac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 16.$$

- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm x để giá trị của B là một số nguyên.

Bài 6. Cho biểu thức:

$$A = \frac{3(x+\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}.$$

- Tìm điều kiện để A có nghĩa và rút gọn biểu thức A .
- Tìm x nguyên để A là số nguyên.

Bài 7. Cho biểu thức:

$$M = \left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}.$$

- Tìm x để M có nghĩa.
- Rút gọn M .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Bài 8. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} - \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)$$

trong đó a, b là các số thực dương phân biệt.

Bài 9. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$.

Bài 10. Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+3\sqrt{x}-4}{(x^2-1)(\sqrt{x}+4)} \right) \cdot \frac{x^2\sqrt{x}+x^2-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

- Với giá trị nào của x thì Q xác định.
- Rút gọn Q .
- Tìm giá trị của x để $Q = 2012\sqrt{x} - 2012$.

Bài 11. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x\sqrt{x}-2x+28}{x-3\sqrt{x}-4} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+8}{4-\sqrt{x}} \quad (x \geq 0, x \neq 16).$$

Bài 12. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}} \left[\sqrt{(2+x)^3} - \sqrt{(2-x)^3} \right]}{4+\sqrt{4-x^2}}, \text{ với } -2 \leq x \leq 2.$$

Bài 13 (Đề thi HSG 9, tỉnh Vĩnh Long, năm 2018).

- Tính giá trị của biểu thức $A = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^3 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^3$.
- Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-2}{x-3\sqrt{x}+2}$. Tìm x để $P \geq 2$.

Bài 14 (Đề thi HSG 9, tỉnh Vĩnh Phúc, năm 2018).

Rút gọn biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2018}{a-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}.$$

Bài 15 (Đề thi HSG 9, tỉnh Hải Dương, năm 2018).

Cho

$$A = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}.$$

Rút gọn biểu thức $B = 1 - \sqrt{2 \cdot A - 4\sqrt{x} + 1}$, với $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

Bài 16 (Đề thi HSG 9, tỉnh Thừa Thiên Huế, năm 2018).

- Cho $x = \sqrt{48-24\sqrt{3}}$. Tính giá trị của $F = \frac{2x^4-25x^3+61x^2-36x+6078}{2x^4-25x^3+61x^2-36x+27}$.
- Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(1 - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$. Tìm các giá trị của x để $P < 1$.

Bài 17 (Đề thi HSG, Thanh Hóa, năm 2018).

Cho biểu thức

$$P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}, \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Bài 18 (Đề thi HSG, Thanh Hóa, năm 2018).

Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{4(x+1)x^{2018} - 2x^{2017} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}$$

tại $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Bài 19 (Đề thi HSG 9, tỉnh Hà Nam, năm 2018).

Cho biểu thức

$$P = \frac{1+2\sqrt{x}}{(1+x)(1-\sqrt{x})} : \left(\frac{2x+3\sqrt{x}+1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+3x+\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \text{ với } x \geq 0; x \neq 1.$$

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm x để P có giá trị nguyên.

C. LỜI GIẢI

BÀI 8. CĂN BẬC BA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa.** Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$, khi đó, ta kí hiệu: $x = \sqrt[3]{a}$.
 2. **Tính chất.**

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{a})^3 &= a; & \sqrt[3]{a^3} &= a; & a < b &\Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}; \\ \sqrt[3]{ab} &= \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}; & \sqrt[3]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0). \end{aligned}$$

B. BÀI TẬP

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, hãy tính:

$$\sqrt[3]{8}; \sqrt[3]{-27}; \sqrt[3]{0}; \sqrt[3]{-\frac{8}{125}}.$$

Bài 2. Tìm x biết:

$$\begin{aligned} a) \sqrt[3]{x} &= 4; & b) \sqrt[3]{x} &= -\frac{1}{3}; & c) \sqrt[3]{x-2} &= 1. \end{aligned}$$

Bài 3. So sánh:

$$\begin{aligned} a) 7 \text{ và } \sqrt[3]{345}; & & b) 2\sqrt[3]{6} \text{ và } 3\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Bài 4. Cho $a < 0$. Hỏi số nào lớn hơn trong hai số: $\sqrt[3]{4a}$ và $\sqrt[3]{5a}$.

2. Bài tập nâng cao, bồi dưỡng học sinh giỏi

Bài 5. Rút gọn biểu thức: $\sqrt[3]{x^5(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x)}$.

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức đó đã xác định):

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}; & b) C &= \frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}} - \frac{\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^{-1}}}; \\ c) B &= \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : & d) D &= \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{(x^2-xy)^2}} : \frac{\sqrt[3]{x^{-2}}\sqrt[3]{x-y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}. \\ & (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2; \end{aligned}$$

Bài 7. Cho biểu thức:

$$A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}.$$

Với $x \neq 8, x \neq -8, x \neq 0$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào x .

Bài 8 (Đề thi vào 10, Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, 2017).

Cho

$$P = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} + \frac{5\sqrt{a}+2}{4-a} \quad (a \geq 0, a \neq 4).$$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tính giá trị biểu thức P khi $a = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$.

Bài 9. Hãy tìm một đa thức bậc ba, hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{-5}$ làm nghiệm.

Bài 10. Hãy tìm một đa thức bậc ba, hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ làm nghiệm.

Bài 11. Hãy tìm một đa thức bậc ba, hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{2} - 1$ làm nghiệm.

Bài 12. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là số nguyên.

Bài 13. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{64}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{64}{27}}} = 1$.

Bài 14 (Malaysia National Olympiad 2010).

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên m, n ($n \neq 0$) sao cho

$$\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\sqrt{50}+7} - \sqrt[3]{\sqrt{50}-7}.$$

Bài 15. Cho x, y thỏa mãn: $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^4 x^2}} = a$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Bài 16. Chứng minh rằng nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Bài 17. Hãy tính $A = 2x^3 + 2x^2 + 1$, với:

$$x = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{23 + \sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23 - \sqrt{513}}{4}} - 1 \right).$$

Bài 18. Cho $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2018}$. Tính $f(x)$ tại

$$x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\frac{49}{8}}}.$$

Bài 19. Tính $x + y$ biết rằng x và y thỏa mãn:

$$(x + \sqrt{x^2 + 2017})(y + \sqrt{y^2 + 2017}) = 2017.$$

Bài 20. Cho x, y thỏa mãn: $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$.
 Tính giá trị biểu thức: $x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1$.

Bài 21 (Đề thi HSG 9, tỉnh Quảng Ninh, năm 2018).

Rút gọn biểu thức

$$\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt[3]{3\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2}} - 1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1}.$$

Bài 22 (Đề thi HSG 9, tỉnh Thái Bình, năm 2018).

Cho $x = \frac{(\sqrt{5} - 1)\sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$. Tính giá trị biểu thức $A = (77x^2 + 35x + 646)^{2017}$.

Bài 23. Hãy tìm một đa thức bậc ba, có hệ số nguyên nhận và số $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Bài 24. Tìm đa thức không đồng nhất không, bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

C. LỜI GIẢI

ÔN TẬP CHƯƠNG I

D. ĐỀ BÀI

Bài 1 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bình Thuận, 2017).

Cho biểu thức:

$$A = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{45} - \sqrt{500}, B = \sqrt{20}.$$

Tính tích $A.B$?

Bài 2. Thực hiện phép tính

$$a) \sqrt{12} - 2\sqrt{48} + \frac{7}{5}\sqrt{75}.$$

$$b) \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}.$$

Bài 3.

1) Thực hiện các phép tính:

$$A = 2\sqrt{50} - \sqrt{128} + 8\sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} - \frac{2}{\sqrt{5} - 1}.$$

2) Tìm x biết rằng $\sqrt{9x - 27} + \sqrt{x - 3} = 16$.

Bài 4. Tìm x biết $\sqrt{25x - 50} + \sqrt{x - 2} - \frac{3}{2}\sqrt{4x - 8} = 1$.

Bài 5 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Long An, 2017).

a) Rút gọn: $3\sqrt{75} - 12\sqrt{3} + \sqrt{12}$.

b) Rút gọn: $N = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$.

c) Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 9$.

Bài 6 (Thi vào 10 THPT Chuyên Hưng Yên 2019).

Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{20} + 20\sqrt{\frac{1}{5}}$.

Bài 7 (Đề thi vào 10, Sở GD-ĐT Bắc Ninh, 2017).

Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{x - 2}{x + 2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}, \text{ với } x > 0.$$

Bài 8 (Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Gia Lai, 2017).

Rút gọn biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right), \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

Bài 9 (Tuyển sinh 10, Hải Phòng 2019).

Cho hai biểu thức

$$A = \sqrt{3} (\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{27})$$

$$B = \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) \text{ (với } x > 0, x \neq 1).$$

- ① Rút gọn biểu thức A và B .
- ② Tìm các giá trị của x sao cho $A \cdot B \leq 0$.

Bài 10 (Toán 9 kỳ 1, Chu Văn An, Tây Hồ, Hà Nội, 2018-2019).

Giải các phương trình sau:

- ① $\sqrt{6x-2} = 4$.
- ② $\frac{1}{3}\sqrt{x-2} - \frac{2}{3}\sqrt{9x-18} + 6\sqrt{\frac{x-2}{81}} = -4$.
- ③ $\sqrt{9x^2+12x+4} = 4x$.
- ④ $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$.

Bài 11 (Thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hòa Bình, 2016 - 2017).

Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}; \quad B = \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} + \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

Bài 12. Cho biểu thức $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$.

- ① Rút gọn P .
- ② Tính giá trị của P khi $x = 25$.
- ③ Với $x > 9$, tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài 13. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}}$.

Bài 14. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

- ① Tính giá trị biểu thức A khi $x = \frac{1}{4}$.
- ② Rút gọn biểu thức B .
- ③ Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B < A$.

Bài 15 (Đề thi HSG 9, tỉnh Quảng Trị, năm 2018).

Rút gọn biểu thức

$$P = \sqrt{109-36\sqrt{7}} + \sqrt{109+36\sqrt{7}}.$$

Bài 16 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Quảng Ngãi, 2017).

Cho a là số thực dương lớn hơn 1 và

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}}.$$

Tính giá trị biểu thức

$$P = x^3 - 2x^2 - 2(a+1)x + 4a + 2021.$$

Bài 17. Rút gọn biểu thức:

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

Bài 18. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{6}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \text{ với } 0 < x \neq 9.$$

Bài 19 (Đề thi vào lớp 10 chuyên của Tp Hồ Chí Minh năm học 2013-2014).

Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

Bài 20. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{a}-1} + 1 \right) \cdot \left(2 - \frac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1} \right)$. Tìm giá trị của a để $P = \frac{1}{2}$.

Bài 21 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Lâm Đồng, 2017).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x - \sqrt{x-2017} + \frac{1}{4}.$$

Bài 22. Cho biểu thức $A = \frac{2x^2+4}{1-x^2} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, với $0 \leq x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x sao cho $A = -2$.

Bài 23. Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a} \right) (a\sqrt{b} - b\sqrt{a})$, với $a > 0, b > 0$ và $a \neq b$.

Bài 24. Với $x > 0$, cho hai biểu thức:

$$A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}.$$

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Bài 25 (Đề thi vào 10, Chuyên Bắc Ninh, 2017).

Cho các biểu thức

$$P = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}, Q = \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 4.$$

- ① Rút gọn các biểu thức P và Q .
- ② Tìm tất cả giá trị của x để $P = Q$.

Bài 26 (Đề thi HSG 9, tỉnh Lâm Đồng, năm 2018).

Rút gọn biểu thức

$$\sqrt{6 + \sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{24}}.$$

Bài 27 (Đề thi HSG 9, tỉnh Kon Tum, năm 2018).

Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{4 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}.$$

Bài 28. Cho biểu thức:

$$A = \frac{2\sqrt{x} + 13}{x + 5\sqrt{x} + 6} + \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3} \quad (\text{với } x \geq 0).$$

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tìm giá trị của x nguyên để A nhận giá trị nguyên.
- c) Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 29 (Đề thi HSG 9, tỉnh Phú Yên, năm 2018).

Tính giá trị của

$$P = \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2}} + \frac{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2}}.$$

Bài 30. Cho biểu thức: $P = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} - 1} + \frac{1}{\sqrt{a} + 2} - 1$.

- a) Rút gọn P .
- b) Tìm a nguyên để biểu thức P nguyên.

Bài 31. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x + \sqrt{9x} - 1}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{1}{x - 1} \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 1).$$

- ① Rút gọn biểu thức A .
- ② Tìm số tự nhiên x để $\frac{1}{A}$ là số tự nhiên.

Bài 32 (Thi vào 10 chuyên toán, THPT, ĐHSPTp HCM năm học 2013-2014).

Cho biểu thức:

$$P = \frac{3x + 5\sqrt{x} - 11}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} - 1, \quad \text{với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

- a) Rút gọn P .

b) Tìm x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 33. Cho biểu thức:

$$M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2\sqrt{2a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}.$$

a) Tìm điều kiện của a, b để M xác định và rút gọn M .

b) Tính giá trị của M khi $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$.

Bài 34. Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{3 + \sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right).$$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$.

Bài 35. Cho biểu thức:

$$M = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}} \right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \cdot \frac{2019}{x+1}.$$

Tìm x để M có nghĩa, khi đó hãy rút gọn biểu thức M và tìm giá trị lớn nhất của M .

Bài 36 (Thi vào 10 chuyên toán, Chuyên Trần Phú - Hải Phòng, 2013-2014).

Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-3}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{7\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-8} \right) : \frac{\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}+4}.$$

Bài 37 (Đề thi vào lớp 10 chuyên toán của tỉnh Yên Bái).

Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a + \sqrt{ab} + b}.$$

a) Tìm điều kiện của a, b để P có nghĩa rồi rút gọn P .

b) Tìm số nguyên dương a để $Q = P(3a+5)$ nhận giá trị nguyên.

Bài 38. Tìm x, y, z biết $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z)$.

Bài 39 (Đề thi HSG 9, tỉnh Lào Cai, năm 2018).

Cho

$$P(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}, \text{ với } x > 0.$$

a) Rút gọn biểu thức $P(x)$.

b) Với $x > 0$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{7\sqrt{x}}{P(x)}$.

Bài 40 (Đề thi HSG 9, Đà Nẵng, năm 2018).

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn A và chứng minh $A < \frac{2}{3}$.

Bài 41 (Đề thi HSG 9, tỉnh Ninh Bình, năm 2018).

Cho biểu thức

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}, \text{ với } a > 0, a \neq 1.$$

a) Rút gọn M .

b) Chứng minh rằng $M > 4$.

c) Tìm các giá trị của a để biểu thức $N = \frac{9}{M}$ có giá trị nguyên.

Bài 42 (Đề thi HSG 9, tỉnh Quảng Bình, năm 2018).

a) Rút gọn biểu thức

$$P = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right),$$

với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

b) Cho $a = \frac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}$. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{a^4 - 6a^3 - 2a^2 + 18a + 23}{a^2 - 8a + 15}.$$

Bài 43 (Đề HSG9, Quảng Nam, 2017-2018).

Cho biểu thức

$$A = \frac{x+8}{x\sqrt{x}+8} + \frac{1}{x-2\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}}{x-4}, \text{ với } 0 \leq x \leq 4.$$

Rút gọn biểu thức A . Tìm các số nguyên x để A là số nguyên.

Bài 44 (Đề thi HSG 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm 2018).

1. Cho biểu thức $C = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức C .

b) Tìm x để biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$D = \frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \cdots + \frac{1}{1+n^2+n^4} < 1.$$

Bài 45 (Đề thi HSG 9, tỉnh Sơn La, năm 2018).

1) Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 1$

a) Rút gọn P .

b) Biết $0 < x < 1$, hãy so sánh P với $|P|$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

2) Cho $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2018}$. Tính $f(x)$ tại $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\frac{49}{8}}}$.

Bài 46. Tìm số x nguyên để $\sqrt{x^2 + x + 3}$ là số hữu tỉ.

Bài 47. Tìm số x nguyên để $\sqrt{x^2 + x + 13}$ là số hữu tỉ.

Bài 48 (Đề thi HSG 9, tỉnh Hưng Yên, năm 2018).

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a-2018} + \sqrt{b-2018}.$$

Bài 49 (Đề thi HSG 9, tỉnh Kiên Giang, năm 2018).

Rút gọn biểu thức sau

$$X = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}}.$$

Bài 50 (Đề thi vào 10, Chuyên Hưng Yên Vòng 2, 2016).

① Đặt $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{2}$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{b} = a + b + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1.$$

② Cho $x = \sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1} + 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^3 - 6x^2 + 21x + 2016$.

Bài 51 (HSG 9-Tỉnh Hải Dương - 2019).

① Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{3\sqrt{z}}{\sqrt{xz} + 3\sqrt{z} + 3}$ và $xyz = 9$. Tính $\sqrt{10P-1}$.

② Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-z)(4-x)} + \sqrt{z(4-x)(4-y)} = 8 + \sqrt{xyz}.$$

Bài 52 (Đề thi vào 10, Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, 2017).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2018$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a + \sqrt{2018a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2018b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2018c + ab}}.$$

Bài 53. Cho x, y, z là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn:

$$(y - z) \sqrt[3]{1 - x^3} + (z - x) \sqrt[3]{1 - y^3} + (x - y) \sqrt[3]{1 - z^3} = 0.$$

Chứng minh rằng: $(1 - x^3)(1 - y^3)(1 - z^3) = (1 - xyz)^3$.

Bài 54 (Đề thi HSG 9, tỉnh Lâm Đồng, năm 2018).

Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh

$$\sqrt{a} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1 \right) \geq \sqrt{b} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$$

Bài 55. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, n ta có:

$$\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2 (\sqrt{3} + \sqrt{2})}. \quad (1)$$

Bài 56 (Đề thi vào 10 chuyên Thái Nguyên, 2017).

Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất. Ví dụ: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 2, a_6 = 2, a_7 = 3$. Tính giá trị của tổng

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2017}} + \frac{1}{a_{2018}}.$$

Bài 57 (Thi vào 10 chuyên Toán, Chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum 2017).

Xét 2020 số thực $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ chỉ nhận một trong hai giá trị $2 - \sqrt{3}$ và $2 + \sqrt{3}$. Hỏi biểu thức $\sum_{k=1}^{1010} x_{2k-1} x_{2k}$ có thể nhận bao nhiêu giá trị nguyên khác nhau?

Bài 58. Tìm một đa thức bậc bốn, hệ số nguyên nhận $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ làm một trong các nghiệm của nó.

Bài 59. Tìm một đa thức bậc sáu với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ là nghiệm.

Bài 60. Cho trước số hữu tỉ m sao cho $\sqrt[3]{m}$ là số vô tỉ. Tìm các số hữu tỉ a, b, c để

$$a \sqrt[3]{m^2} + b \sqrt[3]{m} + c = 0. \quad (1)$$

Bài 61. Chứng minh rằng nếu $u, v \in \mathbb{Q}$ và $s = u \sqrt[3]{3} + v \sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}$ thì $u = v = 0$.

E. LỜI GIẢI