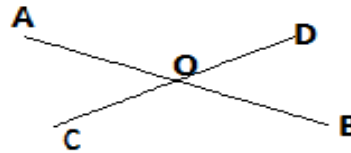


Chuyên đề 1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A. Kiến thức cần nhớ

- Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia (hình 1.1).
- Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau:

$$\angle AOC = \angle BOD; \angle AOD = \angle BOC$$

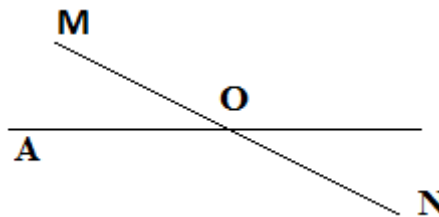


Hình 1.1

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho góc bẹt AOB. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB vẽ hai tia OM và ON sao cho $\angle AOM = \angle BON$. Chứng minh rằng hai góc AON và BOM là hai góc đối đỉnh

Giải (h1.2)



H1.2

* *Tìm cách giải*

Để chứng tỏ hai góc AON và BOM là hai góc đối đỉnh, ta cần chứng tỏ mỗi cạnh của góc này là tia đối một cạnh của góc kia. Vì đã có hai tia OA và OB đối nhau nên chỉ còn phải chứng tỏ hai tia OM, ON đối nhau bằng cách chứng tỏ MON là góc bẹt.

* *Trình bày lời giải:*

Góc AOB là góc bẹt nên hai tia OA, OB đối nhau. Hai góc AOM và BOM kề bù nhau nên $\angle AOM + \angle BOM = 180^\circ$.

Mặt khác $\angle AOM = \angle BON$ (đề bài cho) nên $\angle BON + \angle BOM = 180^\circ$.

Suy ra $\angle MON = 180^\circ$.

Hai góc AON và BOM có mỗi cạnh của góc này là tia đối một cạnh của góc kia nên chúng là 2 góc đối đỉnh.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng EF và GH cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết tổng $\angle EOG + \angle GOF + \angle FOH = 250^\circ$. Tính số đo của bốn góc tạo thành.

Giải (h.1.3)

* *Tìm cách giải:*

Để tính được số đo của bốn góc tạo thành, trước tiên ta phải tính được số đo của một trong bốn góc đó.

* *Trình bày lời giải:*

Ta có $\angle EOG + \angle GOF + \angle FOH = 250^\circ$ (đề bài cho),

Mà $\angle EOG + \angle GOF = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên

$$\angle FOH = 250^\circ - 180^\circ$$

$$\angle FOH + \angle GOF = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)} \Rightarrow \angle GOF = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Vậy $\angle EOG = \angle FOH = 70^\circ$ (hai góc đối đỉnh); $\angle HOE = \angle GOF = 110^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

* *Nhận xét:* Sau khi tính được số đo một góc ta tính được số đo ba góc còn lại nhờ vận dụng tính chất góc kề bù và góc đối đỉnh.

Ví dụ 3. Cho bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Xét các góc không có điểm trong chung, chứng tỏ rằng tồn tại hai góc nhỏ hơn 45° .

Giải (h1.4)

* *Tìm cách giải:*

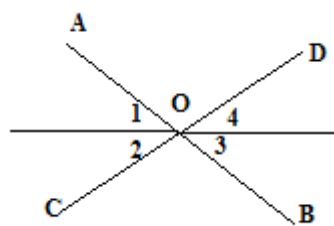
Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Do đó để chứng tỏ tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° , ta chỉ cần chứng minh tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° .

* *Trình bày lời giải:*

Bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo ra 8 góc không có điểm trong chung. Nếu tất cả các góc này đều lớn hơn 45° thì tổng của chúng lớn hơn $45^\circ \times 8 = 360^\circ$. Điều này vô lý vì tổng của 8 góc này đúng bằng 360° .

Vậy phải tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° . Góc này và góc đối đỉnh nó bằng nhau. Do đó tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° .

Ví dụ 4. Trong hình 1.5, hai góc AOC và BOD là hai góc đối đỉnh. Hai tia OE và OF là hai tia đối nhau. Biết OE là tia phân giác của góc AOC, chứng tỏ rằng OF là tia phân giác của góc BOD



H 1.5

Giải.

* *Tìm cách giải :* Ta cần chứng tỏ $\angle O_3 = \angle O_4$. Muốn vậy ta phải sử dụng tính chất của hai góc đối đỉnh.

* *Trình bày lời giải :*

Hai góc AOC và BOD là hai góc đối đỉnh nên các tia OA, OB đối nhau. Ngoài ra hai tia OE, OF cũng đối nhau nên ta có $\angle O_1 = \angle O_3$; $\angle O_2 = \angle O_4$

Vì $\angle O_1 = \angle O_2$ nên $\angle O_3 = \angle O_4$ (1)

Mặt khác tia OF nằm giữa hai tia OB, OD (2)

Nên từ (1), (2) suy ra OF là tia phân giác của góc BOD.

C. Bài tập vận dụng.

• Tính số đo góc.

- 1.1 Hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết $\angle AOC + \angle BOD = 100^\circ$. Tính số đo mỗi góc tạo thành.
- 1.2 Cho hai đường thẳng MN, PQ cắt nhau tại O tạo thành bốn góc khác góc bẹt biết $\angle NOP = \frac{2}{3} \angle MOP$. Tính số đo mỗi góc tạo thành.
- 1.3 Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại O. Vẽ tia OM là tia phân giác góc AOC. Biết $\angle BOD = a^\circ$ ($0 < a < 180$). Tìm giá trị của a để $\angle BOM = 155^\circ$
- 1.4 Cho hai đường thẳng EF, GH cắt nhau tại O. Vẽ tia phân giác OK của góc EOG. Biết $\angle FOK = m^\circ$ ($0 < m < 180$). Tìm giá trị của m để $\angle FOH = 110^\circ$.
- 1.5 Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại O, $\angle BOC = 60^\circ$. Một tia Ox có thể trùng với tia OB hoặc OC hoặc nằm giữa hai tia này. Vẽ tia Oy là tia đối của tia Ox. Tìm số đo lớn nhất của góc Aoy.
- 1.6 Cho ba đường thẳng AB, CD, MN cắt nhau tại O.
 - a) Trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc.
 - b) Chứng tỏ rằng trong các góc trên tồn tại hai góc tù.

• Chứng tỏ hai tia đối nhau:

- 1.7 Chứng tỏ hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.
- 1.8 Cho hai đường thẳng AB và MN cắt nhau tại O sao cho $\angle AOM < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa tia OM, vẽ tia OC sao cho tia OM là tia phân giác của góc AOC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa tia ON vẽ tia OD sao cho ON là tia phân giác góc BOD. Chứng tỏ rằng hai tia OC và OD đối nhau.

• Chứng tỏ một tia là phân giác:

- 1.9 Cho hai góc AOB và AOC là hai góc kề bằng nhau, mỗi góc đều là góc tù. Vẽ tia OB' là tia đối của tia OB, tia OC' là tia đối của tia OC. Chứng tỏ rằng OA là tia phân giác góc B'OC'.
- 1.10 Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia OC và OD sao cho $\angle AOC = \angle BOD = 150^\circ$. Vẽ tia OE là tia đối của tia OD. Chứng tỏ rằng tia OB là tia phân giác góc COE.

• Đếm góc, đếm tia:

- 1.11 Cho bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Tìm số cặp góc đối đỉnh được tạo thành (không kể góc bẹt).
 - a) Bằng cách liệt kê.
 - b) Bằng cách tính toán.
- 1.12 Cho n đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chúng tạo thành:

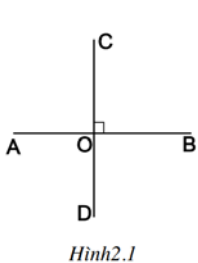
- a) 20 cặp góc đối đỉnh. (không kể góc bẹt)
 b) 90 cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt)
 Tính giá trị của n trong mỗi trường hợp trên.

Chuyên đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

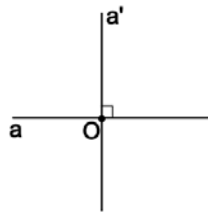
A. Kiến thức cần nhớ

1. Hai đường thẳng AB, CD cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc. Trong hình 2.1 ta có $AB \perp CD$.

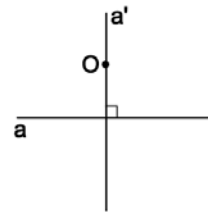
2. Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua O và vuông góc với đường thẳng a cho trước (h.2.2).



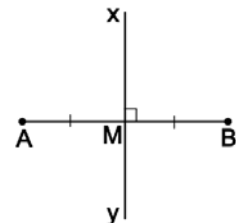
Hình 2.1



Hình 2.2a



Hình 2.2b



Hình 2.3

3. Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy. Trong hình 2.3, đường thẳng xy là đường trung trực của AB .

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho góc bẹt AOB và tia OM sao cho $\widehat{AOM} = 60^\circ$. Vẽ tia ON nằm trong góc BOM sao cho $ON \perp OM$. Chứng tỏ rằng $\widehat{BON} = \frac{1}{2} \widehat{AOM}$.

Giải (h.2.4)

Muốn so sánh hai góc BON và AOM ta cần tính số đo của chúng.

Đã biết số đo của góc AOM nên chỉ cần tính số đo của góc BON

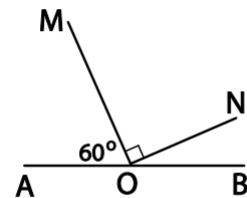
*** Trình bày lời giải:**

Hai góc AOM và BOM kề bù nên $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BOM} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \text{ Vì } OM \perp ON \text{ nên } \widehat{MON} = 90^\circ$$

Tia ON nằm trong góc BOM nên $\widehat{BON} + \widehat{MON} = \widehat{BOM}$

$$\Rightarrow \widehat{BON} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ. \text{ Vì } 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ \text{ nên } \widehat{BON} = \frac{1}{2} \widehat{AOM}$$



Hình 2.4

Ví dụ 2: Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia OE, OF sao cho $\widehat{AOE} = \widehat{BOF} < 90^\circ$. Vẽ tia phân giác OM của góc EOF. Chứng tỏ rằng $OM \perp AB$

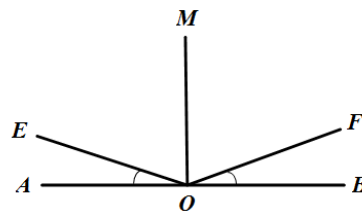
Giải (h.2.5)

**Tìm cách giải*

Để chứng minh $OM \perp AB$ ta cần chứng tỏ góc AOM (hoặc góc BOM) có số đo bằng 90° .

**Trình bày lời giải:*

Ta có: $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$; $\widehat{MOE} = \widehat{MOF}$ (đề bài cho)



Hình 2.5

$$1. \Rightarrow \widehat{AOE} + \widehat{MOE} = \widehat{BOF} + \widehat{MOF} (1)$$

Tia OE nằm giữa hai tia OA, OM. Tia OF nằm giữa hai tia OB, OM nên từ (1) suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$. Mặt khác $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{AOM} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$, suy ra $OM \perp OA$. Do đó $OM \perp AB$

Ví dụ 3: Cho góc tù AOB. Vẽ vào trong góc này các tia OM, ON sao cho $OM \perp OA$, $ON \perp OB$. Vẽ tia OK là tia phân giác của góc MON. Chứng tỏ rằng tia OK cũng là tia phân giác của góc AOB

Giải (h.2.6)

2. *Tìm cách giải:

Muốn chứng tỏ tia OK là tia phân giác của góc AOB ta cần chứng tỏ $\widehat{AOK} = \widehat{BOK}$. Muốn vậy cần chứng tỏ

$$\widehat{AON} + \widehat{NOK} = \widehat{BOM} + \widehat{MOK}$$

**Trình bày lời giải:*

$$\text{Ta có } OM \perp OA \Rightarrow \widehat{AOM} = 90^\circ ; ON \perp OB \Rightarrow \widehat{BON} = 90^\circ$$

$$\text{Tia ON nằm giữa hai tia OA, OM nên } \widehat{AON} + \widehat{NOM} = \widehat{AOM} = 90^\circ$$

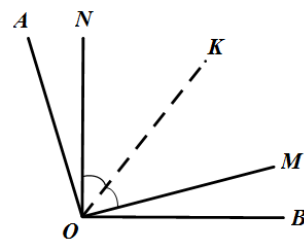
$$\text{Tia OM nằm giữa hai tia OB, ON nên } \widehat{BOM} + \widehat{MON} = \widehat{BON} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{AON} = \widehat{BOM} \text{ (cùng phụ với } \widehat{MON} \text{)}$$

$$\text{Tia OK là tia phân giác của góc MON nên } \widehat{NOK} = \widehat{MOK}$$

$$\text{Do đó } \widehat{AON} + \widehat{NOK} = \widehat{BOM} + \widehat{MOK} . (1)$$

Vì tia ON nằm giữa hai tia OA, OK và tia OM nằm giữa hai tia OB, OK nên từ (1) suy ra $\widehat{AOK} = \widehat{BOK}$. Mặt khác, tia OK nằm giữa hai tia OA, OB nên tia OK cũng là tia phân giác của góc AOB.



Hình 2.6

C. Bài tập vận dụng:

• Tính số đo góc

2.1. Cho hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau tại O. Vẽ tia OK là tia phân giác của góc AOC. Tính số đo góc KOD và KOB.

2.2. Cho góc AOB và tia OC nằm trong góc đó sao cho $\widehat{AOC} = 4\widehat{BOC}$. Vẽ tia phân giác OM của góc AOC. Tính số đo của góc AOB nếu $OM \perp OB$

2.3. Cho góc tù AOB, $\angle AOB = m^\circ$. Vẽ vào trong góc này các tia OC, OD sao cho $OC \perp OA; OD \perp OB$

a) Chứng tỏ rằng $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$

b) Tìm giá trị của m để $\widehat{AOD} = \widehat{DOC} = \widehat{COB}$

• **Chứng tỏ hai đường thẳng vuông góc:**

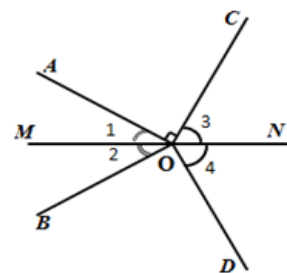
2.4. Trong hình 2.7 có góc MON là góc bẹt, góc AOC là góc vuông. Các tia OM, ON lần lượt là các tia phân giác của các góc AOB và COD. Chứng tỏ rằng $OB \perp OD$

2.5. Cho góc nhọn AOB. Trên nửa mặt phẳng bờ OA có chứa tia OB, vẽ tia $OC \perp OA$. Trên nửa mặt phẳng bờ OB có chứa tia OA vẽ tia $OD \perp OB$. Gọi OM và ON lần lượt là các tia phân giác của các góc AOD và BOC. Chứng tỏ rằng $OM \perp ON$

2.6. Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia OM và ON sao cho $\widehat{AOM} = \widehat{BON} = m^\circ (90 < m < 180)$. Vẽ tia phân giác OC của góc MON.

a) Chứng tỏ rằng $OC \perp AB$

b) Xác định giá trị của m để $OM \perp ON$



Hình 2.7

Chuyên đề 3. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

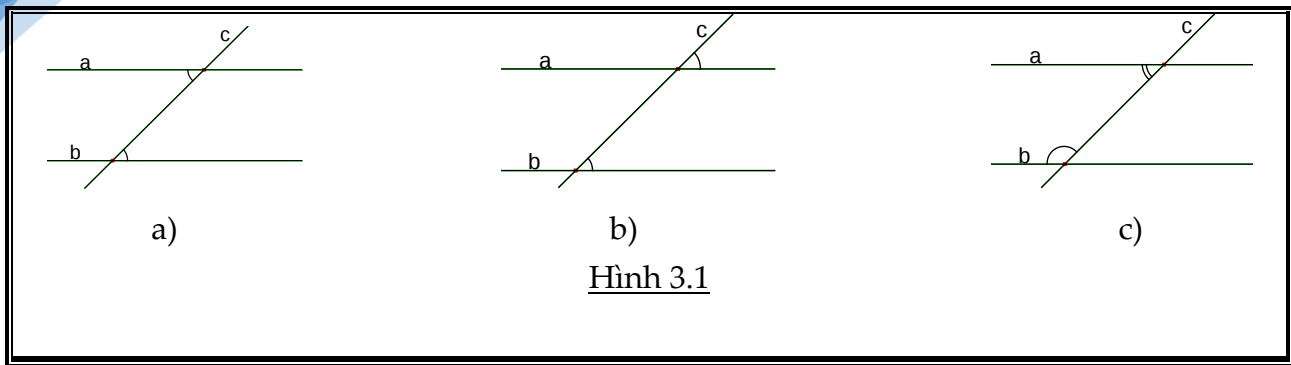
A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa:

- * Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.
- * Hai đường thẳng phân biệt thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

2. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

- * Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì $a \parallel b$ (h.3.1.a).
- * Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau thì $a \parallel b$ (h.3.1.b).
- * Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì $a \parallel b$ (h.3.1.c).



Hình 3.1

B. Một số ví dụ

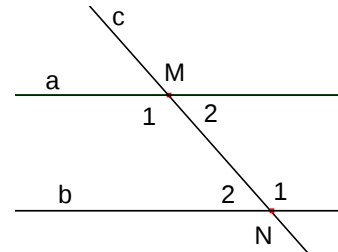
Ví dụ 1. Cho hình 3.2 có $\widehat{M}_1 = 3\widehat{M}_2$; $\widehat{N}_1 = 3\widehat{N}_2$. Chứng tỏ rằng $a \parallel b$.

Lời giải

* Tìm cách giải:

Hai đường thẳng a và b tạo với cát tuyến c một cặp góc so le trong là $\widehat{M}_1$ và $\widehat{N}_1$ hoặc $\widehat{M}_2$ và $\widehat{N}_2$. Do đó chỉ cần chứng tỏ

$$\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 \text{ hoặc } \widehat{M}_2 = \widehat{N}_2$$



Hình 3.2

* Trình bày lời giải:

$$\text{Ta có: } \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ$$

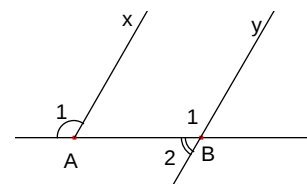
$$\text{Mặt khác: } \widehat{M}_1 = 3\widehat{M}_2 \text{ nên } \widehat{M}_2 = 180^\circ : 4 = 45^\circ$$

$$\text{Tương tự } \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 180^\circ \text{ và } \widehat{N}_1 = 3\widehat{N}_2 \Rightarrow \widehat{N}_2 = 45^\circ$$

Vậy $\widehat{M}_2 = \widehat{N}_2 (= 45^\circ)$ suy ra : $a \parallel b$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau)

Ví dụ 2. Hình 3.3 có : $\widehat{A}_1 = a^\circ$; $\widehat{B}_2 = b^\circ$. Biết

$$a^\circ + b^\circ = 180^\circ, \text{ chứng tỏ rằng } Ax \parallel By.$$



Hình 3.3

* Tìm cách giải:

Hai tia Ax và By tạo với cát tuyến là đường thẳng AB cặp góc $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$ ở vị trí đồng vị .

Muốn chứng tỏ $Ax \parallel By$, chỉ cần chứng tỏ $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

* Trình bày lời giải:

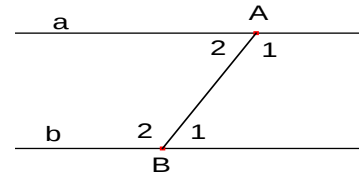
$$\text{Ta có: } \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ \text{ (2 góc kề bù). Suy ra: } \widehat{B}_1 = 180^\circ - \widehat{B}_2 = 180^\circ - b^\circ \text{ (1)}$$

Mặt khác: $\widehat{A}_1 = a^\circ = 180^\circ - b^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$. Do đó $Ax \parallel By$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ví dụ 3. Hình 3.4 có: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{B}_2$.

Chứng tỏ rằng $a \parallel b$.



Hình 3.4

* Tìm cách giải:

Các góc $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$ hoặc $\widehat{A}_2$ và $\widehat{B}_2$ là cặp góc trong cùng phía của hai đường thẳng a và b (đối với cát tuyến AB). Muốn chứng tỏ $a \parallel b$ ta cần chứng tỏ $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (Hoặc $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$)

* Trình bày lời giải:

Ta có: $(\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1) + (\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2) = (\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) + (\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2) = 360^\circ$

Mà: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{B}_2$ (đề bài cho) nên $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 360^\circ : 2 = 180^\circ$

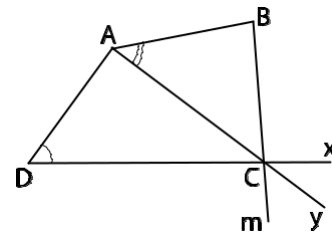
Suy ra: $a \parallel b$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau)

C. Bài tập vận dụng

• Xác định các cặp góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía

3.1. Xem hình 3.5 rồi cho biết góc nào so le trong, đồng vị, trong cùng phía:

- Với góc ADC;
- Với góc BAC.

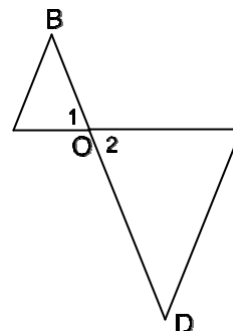


Hình 3.5

• Vận dụng cặp góc so le trong

3.2. Hình 3.6 có: $\widehat{A} = \widehat{O}_1$; $\widehat{C} = \widehat{O}_2$.

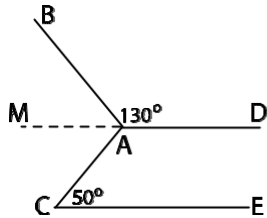
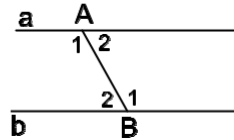
Chứng tỏ rằng $AB \parallel CD$.



Hình 3.6

3.3. Cho tam giác ABC , $\widehat{A} = 70^\circ$; $\widehat{C} = 40^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tia Ax sao cho $\widehat{BAx} = 110^\circ$. Chứng tỏ $Ax \parallel BC$.

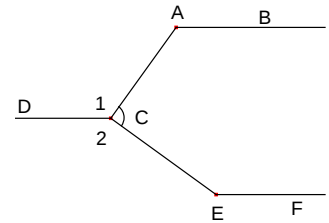
3.4. Hình 3.7 có: $\widehat{BAD} = 130^\circ$; $\widehat{C} = 50^\circ$. Vẽ tia AM là tia đối của tia AD . Biết tia AM là tia phân giác của góc BAC . Chứng tỏ rằng $AD \parallel CE$.

Hình 3.7Hình 3.8

3.5. Hình 3.8 có $\widehat{A}_1 - 2\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 - 2\widehat{B}_2$. Chứng tỏ rằng $a \parallel b$

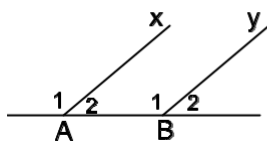
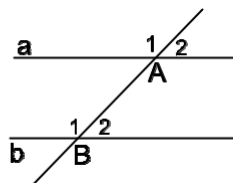
3.6. Trong hình 3.9, góc ACE bằng trung bình cộng của hai góc C_1 và C_2 , đồng thời cũng bằng trung bình cộng của hai góc A và E .

Biết $\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2 = \widehat{A} - \widehat{E} = 20^\circ$. Chứng tỏ rằng $AB \parallel CD$ và $CD \parallel EF$.

Hình 3.9

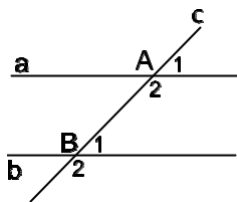
• Vận dụng cặp góc đồng vị

3.7. Trong hình 3.10 có $\widehat{A}_2 = \frac{2}{7}\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_1 - \widehat{B}_2 = 100^\circ$. Hỏi Ax và By có song song với nhau không?

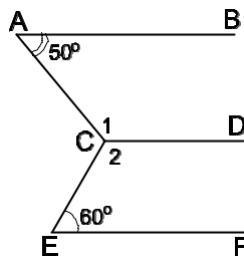
Hình 3.10Hình 3.11

3.8. Trong hình 3.11 $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 = a^\circ$; $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{A}_1 = b^\circ$, trong đó $180^\circ < a^\circ < 360^\circ$; $180^\circ < b^\circ < 360^\circ$ và $a^\circ + b^\circ = 540^\circ$. Chứng tỏ rằng: $a \parallel b$

3.9. Hình 3.12 có $\widehat{A}_2 - \widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 - \widehat{B}_1$. Chứng tỏ rằng $a \parallel b$



Hình 3.12



Hình 3.13

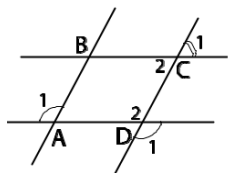
3.10. Hình 3.13 có $\hat{A} = 50^\circ$, $\hat{E} = 60^\circ$, góc $\hat{C}_1$ hơn góc $\hat{C}_2$ là 10° , góc $\hat{C}_2$ hơn góc $\widehat{ACE}$ là 10° .

Chứng tỏ rằng: $AB \parallel CD$; $CD \parallel EF$

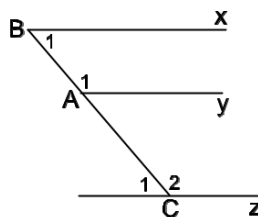
• Vận dụng nhiều dấu hiệu song song

3.11. Trong hình 3.14 có $\hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 105^\circ$, $\hat{C}_1 = 75^\circ$. Chứng tỏ rằng $AB \parallel CD$ và $BC \parallel AD$.

3.12. Trong hình 3.15 có: $\hat{A}_1 = 3\hat{B}_1$; $\hat{A}_1 = 3\hat{C}_1$ và $\hat{C}_1 = 45^\circ$. Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song.



Hình 3.14



Hình 3.15

3.13. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 70^\circ$; $\hat{B} = 55^\circ$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M. Vẽ tia Mx trên nửa mặt phẳng bờ MB không chứa C sao cho $\widehat{BMx} = 55^\circ$. Vẽ tia Ay là tia phân giác của góc CAM.

Chứng tỏ rằng $Mx \parallel BC$ và $Ay \parallel BC$.

Chuyên đề 4.

TIÊN ĐỀ O-CLÍT.

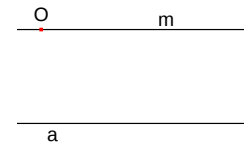
TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tiên đề O – clit:

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Trong hình 4.1, đường thẳng m đi qua O và song song với a là duy nhất.



Hình 4.1

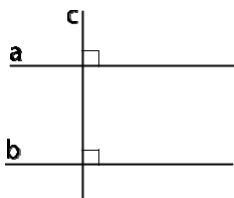
2. Tính chất của hai đường thẳng song song:

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

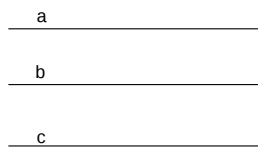
- Hai góc so le trong bằng nhau;
- Hai góc đồng vị bằng nhau;
- Hai góc trong cùng phía bù nhau.

3. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau (h.4.2);
- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia (h.4.3);



Hình 4.2



Hình 4.3

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau (h.4.3)

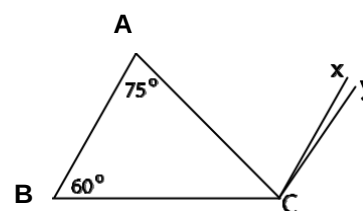
B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 75^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ các tia Cx và Cy sao cho $\widehat{ACx} = 75^\circ$; $\widehat{BCy} = 120^\circ$. Chứng tỏ rằng các tia Cx và Cy trùng nhau.

Giải (H 4.4)

* *Tìm hướng giải:*

Để chứng tỏ hai tia Cx và Cy trùng nhau ta chứng tỏ hai đường thẳng chứa hai tia đó trùng nhau, đồng thời hai tia này cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BC .



Hình 4.4

* Trình bày lời giải :

Ta có: $\widehat{ACx} = \widehat{A} = 75^\circ \Rightarrow Cx \parallel AB$ (Vì có cặp góc so le trong bằng nhau) (1)

Ta có: $\widehat{BCy} + \widehat{B} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow Cy \parallel AB$ (Vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau) (2)

Từ (1) và (2), theo tiên đề O-clít, ta có hai đường thẳng Cx và Cy trùng nhau. Mặt khác, hai tia Cx và Cy cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A nên hai tia này trùng nhau.

Ví dụ 2: Hình 4.5 có $a \parallel b$ và $\widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$

Giải:

* Tìm hướng giải:

Vì $a \parallel b$ và $\widehat{A_2}, \widehat{B_2}$ so le trong với các góc $\widehat{A_1}, \widehat{B_1}$ nên chỉ cần tính $\widehat{A_1}, \widehat{B_1}$ thì có thể suy ra $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$

* Trình bày lời giải :

Ta có: $a \parallel b$ nên $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía)

Mặt khác $\widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 30^\circ$ (theo đề bài) nên

$$\widehat{A_1} = (180^\circ + 30^\circ) : 2 = 105^\circ$$

$$\text{Và } \widehat{B_1} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

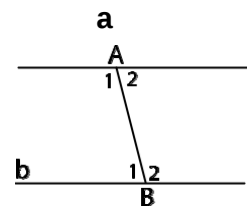
Suy ra: $\widehat{A_2} = \widehat{B_1} = 75^\circ$ (cặp góc so le trong),

$$\widehat{B_2} = \widehat{A_1} = 105^\circ \text{ (cặp góc so le trong)}$$

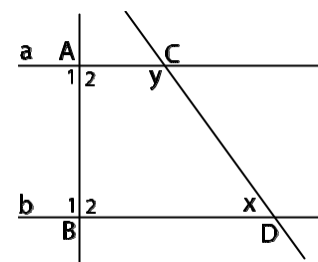
Ví dụ 3:

Tính các số đo x, y trong hình 4.6, biết $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ và

$$x = \frac{3}{7}y$$



Hình 4.5



Hình 4.6

Giải:

* Tìm hướng giải:

Nếu chứng minh được $a \parallel b$ thì sẽ tìm được x và y (đây là bài toán tìm 2 số khi biết tổng và tỉ số).

* Trình bày lời giải :

Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$ (hai góc kề bù), mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (đề bài) nên $\widehat{A_1} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$

Suy ra: $AB \perp a$

Tương tự: $AB \perp b$

Do đó $a \parallel b$ (cùng vuông góc với AB)

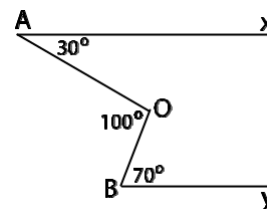
Ta có: $x + y = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía) , mà $x = \frac{3}{7}y$

$$\text{Nên } x = \frac{180 \cdot 3}{10} = 54^\circ; y = 126^\circ$$

Ví dụ 4:

Hình 4.7 có $\widehat{A} = 30^\circ$; $\widehat{B} = 70^\circ$; $\widehat{AOB} = 100^\circ$

Chứng tỏ rằng: $Ax \parallel By$



Hình 4.7

Giải:

* Tìm hướng giải:

Ta phải chứng minh hai đường thẳng Ax và By song song. Giữa hai đường thẳng này chưa có một đường thẳng thứ ba cắt chúng nên chưa thể vận dụng dấu hiệu nhận biết nào để chứng minh chúng song song.

Ta sẽ vẽ thêm một đường thẳng thứ ba làm trung gian rồi dùng dấu hiệu: hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ

* Trình bày lời giải(Hình 4.8):

Trong góc AOB, vẽ tia Ot // Ox . Khi đó

$$\widehat{AOt} = \widehat{A} = 30^\circ \text{ (cặp góc so le trong)}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{BOt} = 100^\circ - 30^\circ = 70^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{B} = \widehat{BOt} = 70^\circ$$

Do đó $By \parallel Ot$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau)

Từ đó $Ax \parallel By$ (vì cùng song song với Ot)

Hình 4.8

C. Bài tập vận dụng

• Tiên đềƠ-clit

4.1. Cho tam giác ABC. Vẽ điểm M sao cho góc BAM bằng và so le trong với góc B. Vẽ điểm N sao cho góc CAN bằng và so le trong với góc C. Chứng tỏ rằng ba điểm M, A, N thẳng hàng.

4.2. Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ 101 đường thẳng. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng có 100 đường thẳng cắt a.

4.3. Cho điểm O ở ngoài đường thẳng xy. Qua O vẽ n đường thẳng. Xác định giá trị nhỏ nhất của n để trong số các đường thẳng đã vẽ, ít nhất cũng có 10 đường thẳng cắt xy.

• **Tính chất hai đường thẳng song song**

4.4. Cho tam giác ABC. Từ điểm D trên cạnh BC vẽ $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ ($E \in AC$, $F \in AB$).

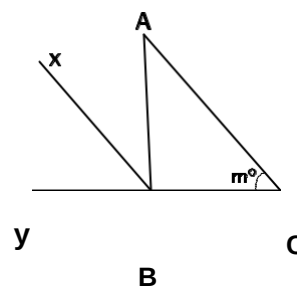
a) Kể tên những góc ở trong hình vẽ bằng góc A;

b) giả sử $\widehat{B} + \widehat{C} = 110^\circ$, tính số đo góc A

4.5. Cho tam giác ABC. Từ điểm M trên cạnh BC vẽ $MD \parallel AB$, $ME \parallel AC$ ($D \in AC$, $E \in AB$). Xác định vị trí của điểm M để tia MA là tia phân giác của góc DME.

4.6. Hình 4.9 có $\widehat{C} = m^\circ$ ($m < 90^\circ$)

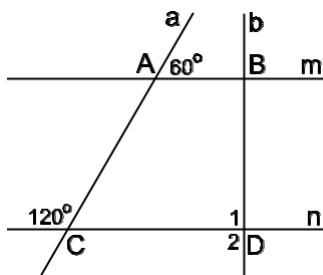
$\widehat{ABC} = 180^\circ - 2m^\circ$ và $Bx \parallel AC$. Chứng minh rằng tia Bx là tia phân giác của góc ABy.



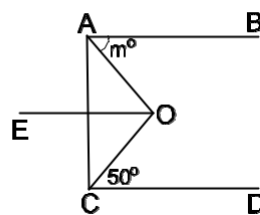
Hình 4.9

• **Vận dụng dấu hiệu nhận biết và tính chất của hai đường thẳng song song**

4.7. Hình 4.10, ngoài những số đo đã ghi còn biết $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$. Chứng tỏ rằng $b \perp n$



Hình 4.10

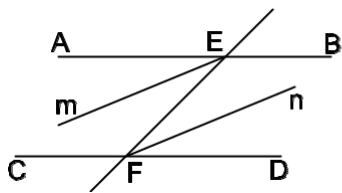


Hình 4.11

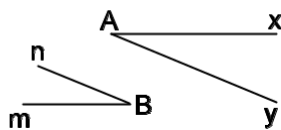
4.8. Hình 4.11 có $AB \perp AC$, $CD \perp AC$ và $OE \perp AC$. Biết $\widehat{OAB} = m^\circ$, $\widehat{OCD} = 50^\circ$.

Tìm giá trị m để tia OE là tia phân giác của góc AOC

4.9. Hình 4.12 có $\widehat{AEF} = 45^\circ$, $\widehat{EFC} = 3\widehat{AEF}$. Các tia Em và Fn lần lượt là các tia phân giác của các góc AEF và EFD. Chứng tỏ rằng Em // Fn.



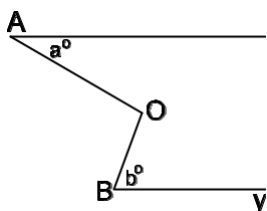
Hình 4.12



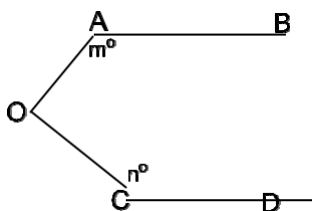
Hình 4.13

4.10. Hình 4.13 có $\widehat{A} = \widehat{B}$ và $Ax // Bm$. Chứng tỏ rằng $Ay // Bn$.

4.11. Hình 4.14 có $\widehat{A} = a^\circ$, $\widehat{B} = b^\circ$ ($a, b < 90^\circ$). Chứng tỏ rằng $Ax // By$.



Hình 4.14

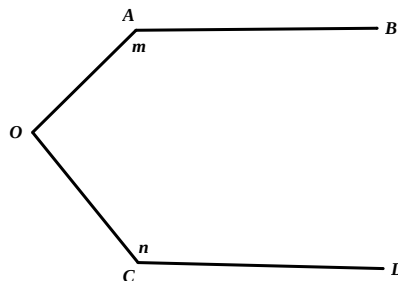


Hình 4.15

4.12:

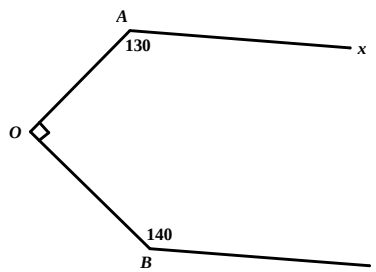
Hình 4.15 có $\widehat{A} = m^\circ$, $\widehat{C} = n^\circ$ ($90^\circ < m^\circ, n^\circ < 180^\circ$);

$\widehat{AOC} = 180^\circ - (m^\circ + n^\circ)$. Chứng tỏ rằng $AB // CD$.



Hình 4.15

4.13: Hình 4.16 có $\widehat{A} = 130^\circ$, $\widehat{C} = 140^\circ$ và $OA \perp OB$. Chứng tỏ rằng $AB // CD$.

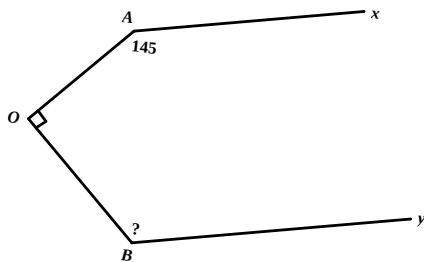


Hình 4.16

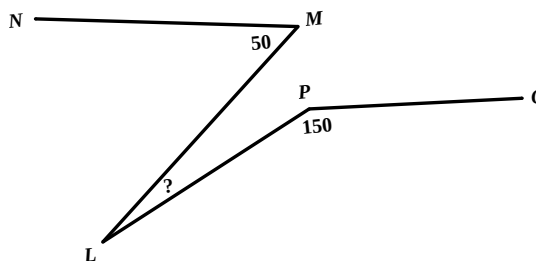
4.14: Cho góc AOB. Trên tia OA lấy điểm M, trên tia OB lấy điểm N. Vẽ ra ngoài góc AOB các tia Mx và Ny song song với nhau.

Cho biết $\widehat{AMx} = 140^\circ$, $\widehat{BNy} = 150^\circ$. Tính số đo góc AOB.

4.15: Hình 4.17 có $Ax // By$, $OA \perp OB$ và $\widehat{A} = 145^\circ$. Tính số đo góc B.



Hình 4.17



Hình 4.18

4.16: Hình 4.18 có $Ax // By$. Tính số đo góc AOB.

Chuyên đề 5. ĐỊNH LÝ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định lý :

- Định lý là 1 khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.
- Mỗi định lý đều phải có 2 phần:
 - + Phần đã cho gọi là giả thiết của định lý
 - + Phần phải suy ra gọi là kết luận của định lý

Khi định lý được phát biểu dưới dạng “Nếu A thì B” thì A là giả thiết còn B là kết luận .

2. Chứng minh định lý là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận .

3. Hệ quả là 1 định lý được suy ra trực tiếp từ 1 định lý hoặc từ 1 tính chất được thừa nhận.

4. Xét định lý “Nếu A thì B” có mệnh đề đảo là “Nếu B thì A”. Nếu mệnh đề đảo này đúng thì mệnh đề đảo được gọi là *định lý đảo* của định lý đã cho và định lý đã cho được gọi là *định lý thuận*

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Định lý “hai góc đối đỉnh thì bằng nhau” có định lý đảo không ?

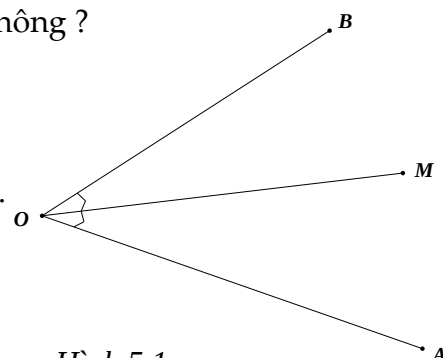
Giải

Định lý : “Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau” có mệnh đề đảo là “ Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh” là mệnh đề sai .

Ví dụ , Xét góc AOB , tia phân giác OM .(h5.1)

Rõ ràng góc AOM và BOM bằng nhau nhưng không đối đỉnh vì mỗi cạnh của góc này không là tia đối của mỗi cạnh góc kia .

Vậy định lý “Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau” không có định lý đảo .



Hình 5.1

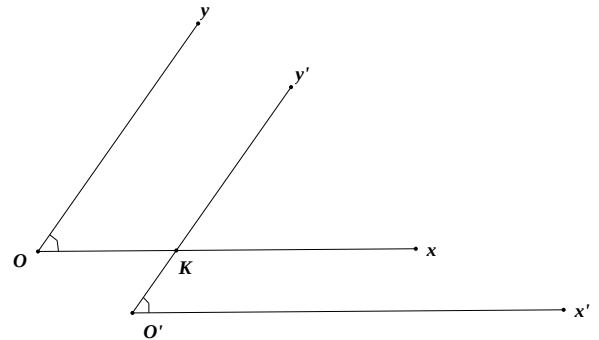
Nhận xét : Một ví dụ chứng tỏ 1 mệnh đề nào đó là sai gọi là 1 phản ví dụ. Như vậy ta đã dùng phương pháp một phản ví dụ để chứng tỏ mệnh đề “Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh”.

Ví dụ 2: Chứng minh định lý : “ Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù”

Giải (h5.2)

**Tìm cách giải :*

Để chứng minh $\widehat{O} = \widehat{O'}$ ta chứng minh chúng cùng bằng 1 góc thứ 3. Dựa vào giả thiết có các cặp đường thẳng song song, ta nghĩ đến việc vận dụng tính chất của hai đường thẳng song song để tìm ra các cặp góc bằng nhau .



Hình 5.2

**Trình bày lời giải:*

Gọi K là giao điểm của các đường thẳng Ox và O'y'

Vì $Oy // O'y'$ nên $\widehat{O} = \widehat{xKy'}$ (cặp góc đồng vị)

Vì $Ox // O'x'$ nên $\widehat{O'} = \widehat{xKy'}$ (cặp góc đồng vị)

Do đó : $\widehat{O} = \widehat{O'}$ (cùng bằng $\widehat{xKy'}$)

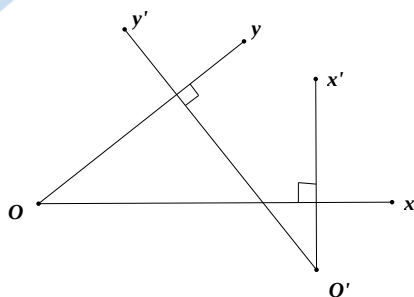
Nhận xét : Người ta cũng chứng minh được rằng:

Nếu hai góc có các cạnh tương ứng song song thì:

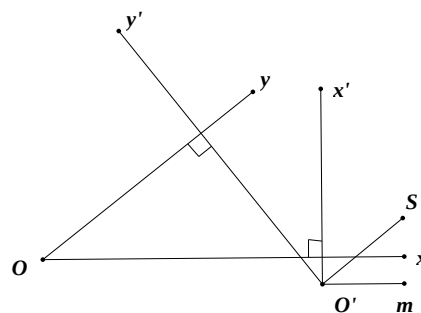
- Chúng bù nhau nếu góc này nhọn , góc kia tù.
- Góc này vuông thì góc kia vuông .

Ví dụ 3: Chứng minh định lý : “Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù”

Giải (h5.3)



Hình 5.3



Hình 5.4

*Tìm cách giải :

Để chứng minh $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$ ta chứng minh chúng cùng bằng một góc thứ 3. Để tạo ra góc thứ 3 này ta vẽ $O'm // Ox$ và $O'n // Oy$, hai tia này cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ $O'x'$ (h5.4)

Khi đó theo định lý : “ Nếu hai góc có các cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù ” ta được $\widehat{xOy} = \widehat{mOn'}$ Ta chỉ còn phải chứng minh $\widehat{x'O'y'} = \widehat{mOn'}$

*Trình bày lời giải :

- Trường hợp hai góc đều nhọn

Vẽ $O'm // Ox$ và $O'n // Oy$. Vì $O'x'$ vuông góc với Ox nên $O'x'$ vuông góc với $O'm$ do đó $\widehat{mO'x'} = 90^\circ$ (1)

Vì $O'y'$ vuông góc với Oy nên $O'y'$ vuông góc với $O'n$ do đó : $\widehat{nO'y'} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{x'O'y'} = \widehat{mOn'}$ (3)

Mặt khác $\widehat{xOy} = \widehat{mOn'}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

- Trường hợp hai góc đều nhọn (cmтт)

Nhận xét : Người ta cũng chứng minh được rằng:

Nếu hai góc có các cạnh tương ứng vuông góc thì :

- Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù.
- Góc kia vuông thì góc này vuông

C. Bài tập vận dụng

5.1: Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng vẽ các tia OC và OD sao cho

$\widehat{AOC} = \widehat{BOD} < 90^\circ$. Vẽ tia OM trong góc COD. Chứng minh rằng OM vuông góc với AB khi và chỉ khi OM là tia phân giác của COD.

5.2: Cho định lý: “ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì chúng song song với nhau”. Hãy phát biểu định lý đảo và chứng minh .

5.3: Cho định lý : “ Hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau”.Hãy viết giả thiết , kết luận của định lý đảo của định lý này và chứng minh .

5.4: Bác bỏ các mệnh đề sau bằng cách đưa ra phản ví dụ :

a) Tổng số đo của hai góc nhọn bằng số đo của một góc tù .

b) tổng số đo của một góc nhọn và một góc tù là một góc bẹt .

5.5: Điền vào chỗ trống:

a) Cho $\hat{A} + \hat{O} = 90^\circ$ và $\hat{B} + \hat{O} = 90^\circ$. Suy ra(vì)

b) Cho $\hat{A} = \hat{A}'$ và $\hat{B} = \hat{B}'$. Suy ra $\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow$ (vì)

5.6: Điền vào chỗ trống :

a) Cho $AB=CD$. Suy ra $3AB \dots 3CD$ (vì)

b) Cho $AB=CD$ và $MN=PQ$. Suy ra $AB+MN \dots CD+PQ$ (vì.....)

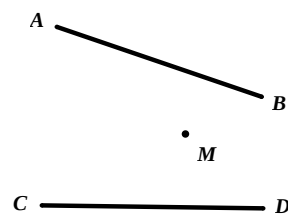
5.7: Chứng minh định lý : “Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai góc so le trong bằng nhau”.

5.8: Cho góc A và B là hai góc có cạnh tương ứng song song.Tính số đo của các góc A và B biết

a) $\hat{A} + \hat{B} = 130^\circ$

b) $\hat{A} - \hat{B} = 100^\circ$

5.9: Cho hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn hoặc cùng tù . Biết hai tia phân giác của chúng không cùng nằm trên một đường thẳng . Chứng minh hai tia phân giác này song song với nhau .



Hình 5.5

5.10: Cho điểm M và hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O nằm ngoài phạm vi tờ giấy (h.5.5). Hãy nêu cách vẽ một đường thẳng qua M và vuông góc với tia phân giác của góc AOC.

5.11: Cho 10 đường thẳng mà không có hai đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng 18°

Chuyên đề 6. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

A. Kiến thức cần nhớ

Khi giải bài 5.7 trong chuyên đề 5 ta dùng phương pháp chứng minh phản chứng. Phương pháp này thuộc loại chứng minh gián tiếp. Để chứng minh mệnh đề A là đúng ta chứng minh phủ định của A là sai. Nội dung chứng minh phản chứng gồm 3 bước:

- ✚ **Bước 1** (Phủ nhận kết luận): Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.
- ✚ **Bước 2** (Đi đến mâu thuẫn): Từ điều giả sử ở trên và từ các điều đã biết (giả thiết, tiên đề, định lý,...) ta suy ra một điều vô lý (trái với giả thiết, trái với kiến thức đã học hoặc mâu thuẫn với nhau).
- ✚ **Bước 3** (Khẳng định kết luận): Vậy điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

Chú ý:

Trong bước 1 ta phải phủ định điều phải chứng minh.

- ✚ Phủ định của “có A” là “không có A”.
- ✚ Phủ định của “không có B” là “có B”.

Ví dụ:

Phủ định của “3 điểm A, B, C thẳng hàng” là “3 điểm A, B, C không thẳng hàng”.

Phủ định của $m > n$ là $m \leq n$ (Tức là $m < n$ hoặc $m = n$).

Trong bước 2 nhất thiết phải suy ra được một điều mâu thuẫn với điều đã cho, đã biết. Nếu không thì chưa thể khẳng định được điều giả sử ở bước 1 là sai.

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Cho 12 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành một số góc không có điểm chung. Chứng minh rằng trong các góc đó có ít nhất 2 góc có số đo không vượt quá 15° .

Giải (h.6.1)

*Tìm cách giải:

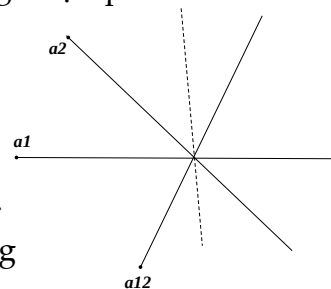
Dễ thấy tổng số đo các góc không có điểm chung đúng bằng 360° . Vì vậy ta chỉ cần biết có bao nhiêu góc không có điểm chung được tạo thành.

*Trình bày lời giải:

12 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 24 góc đỉnh O không có điểm chung. Tổng số đo các góc bằng 360° nên phải tồn tại 1 góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ : 24 = 15^\circ$.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng:

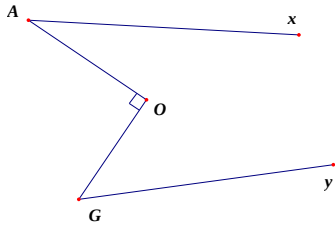
Giả sử mỗi góc đó lớn hơn 15° thì tổng của chúng lớn hơn $15 \cdot 24 = 360^\circ$ (Vô lý)



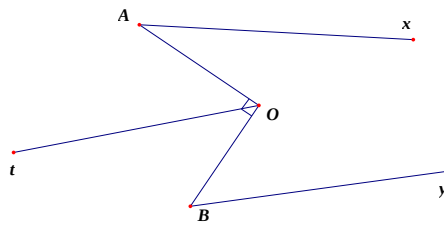
Hình 6.1

Vậy trong số các góc đó tồn tại một góc không vượt quá 15° . Góc này bằng góc đối đỉnh với nó nên tồn tại 2 góc không vượt quá 15° .

Ví dụ 2: Hình 6.2 có OA vuông góc với OB, $\widehat{A} = m^\circ$, $\widehat{B} = n^\circ$, với $m+n < 90^\circ$. Chứng minh rằng Ax và By.



Hình 6.2



Hình 6.3

**Tìm cách giải:*

Bài toán yêu cầu chứng minh Ax và By không song song. Nếu ta dùng phương pháp phản chứng giả sử Ax//By thì có thể vận dụng định lý về tính chất của 2 đường thẳng song song để giải. Tuy nhiên giữa Ax và By chưa có một cát tuyến nào nên ta vẽ tia Ot ở trong góc AOB sao cho Ot//Ax; Ot//By. Khi đó các góc A và góc B lần lượt bằng góc O_1 , góc O_2 rất thuận lợi trong việc liên hệ với góc AOB cho trước.

**Trình bày lời giải:*

Giả sử Ax//By. Trong góc AOB vẽ tia Ot//Ax//By.

Ta có: $\widehat{O_1} = \widehat{A} = m^\circ$ (Hai góc so le trong)

$\widehat{O_2} = \widehat{B} = n^\circ$ (Hai góc so le trong)

Do đó $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = m^\circ + n^\circ$

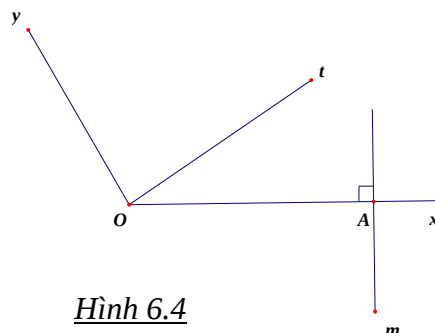
Mặt khác $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{AOB}$; $m^\circ + n^\circ < 90^\circ$.

Điều này mâu thuẫn với góc AOB bằng 90° (Vì OA vuông góc với OB)

Vậy điều giả sử là sai, suy ra Ax và By không song song.

Ví dụ 3: Cho góc tù xOy, tia Ot trong góc đó sao cho góc xOt nhỏ hơn góc yOt. Trên tia Ox lấy điểm A. Qua A vẽ đường thẳng m vuông góc với Ox. Chứng minh rằng các đường thẳng Ot và m cắt nhau.

Giải(h.6.4)



Hình 6.4

**Tìm cách giải:*

Điều phải chứng minh là các đường thẳng Ot và m cắt nhau. Muốn chứng minh bằng phản chứng ta giả sử $Ot \parallel m$, từ đó suy ra Ot vuông góc với Ox do đó góc xOt bằng 90° . Để đưa đến mâu thuẫn ta chỉ cần chứng minh góc xOt nhỏ hơn 90° .

**Trình bày lời giải:*

Giả sử các đường thẳng Ot và m không cắt nhau $\Rightarrow Ot \parallel m$.

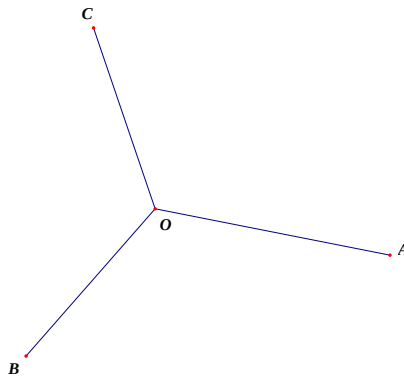
Mặt khác $Ox \perp m$ (GT) nên $Ox \perp Ot$ do đó góc $xOt = 90^\circ$ (*)

Ta có: $\widehat{xOt} + \widehat{yOt} = \widehat{xOy} < 180^\circ$ mà $\widehat{xOt} < \widehat{yOt}$ nên $\widehat{xOt} < 90^\circ$, mâu thuẫn với (*)

Vậy điều giả sử là sai, do đó các đường thẳng Ot và m cắt nhau.

Ví dụ 4: Cho 3 tia phân biệt OA, OB, OC sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$. Chứng minh rằng trong 3 tia đã cho không có tia nào nằm giữa 2 tia còn lại.

Giải(h.6.5)



Hình 6.5

**Tìm cách giải:*

Để giải ví dụ này bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử trong ba tia đã cho có 1 tia nằm giữa 2 tia còn lại rồi dùng tính chất cộng số đo các góc dẫn đến kết quả có 2 tia trùng nhau trái với giả thiết.

**Trình bày lời giải:*

Giả sử trong 3 tia OA, OB, OC có 1 tia nằm giữa 2 tia còn lại. Không làm giảm tính tổng quát, ta giả sử tia OB nằm giữa 2 tia OA và OC . Khi đó ta có $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$.

Nhưng do $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ mà $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ do đó $\widehat{AOB} = 0^\circ$

Suy ra OA trùng với OB , trái với giả thiết.

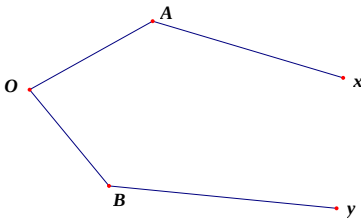
Vậy điều giả sử là sai, suy ra trong ba tia đã cho không có tia nào nằm giữa 2 tia còn lại.

C. Bài tập vận dụng

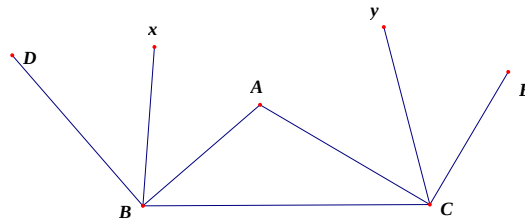
• Chứng minh hai đường thẳng cắt nhau

6.1: Chứng minh định lý: Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng cắt đường kia.

- 6.2: Cho 2 đường thẳng a và b vuông góc với nhau tại O . Chứng minh đường thẳng c không vuông góc với b thì hai đường thẳng a và c cắt nhau.
- 6.3: Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B . Từ A vẽ đường thẳng $a \perp Ox$, từ B vẽ đường thẳng $b \perp Oy$. Chứng minh rằng 2 đường thẳng a và b cắt nhau.
- 6.4: Hình 6.6 có góc AOB nhọn, $\widehat{A} = 134^\circ$, $\widehat{B} = 135^\circ$. Chứng minh rằng a và b không song song.



Hình 6.6

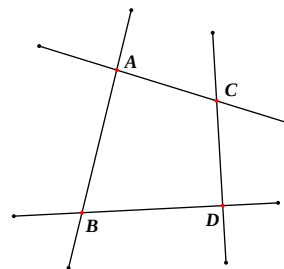


Hình 6.7

- 6.5: Hình 6.7 có góc A tù, $AB \perp BD$, $AC \perp CE$. Vẽ tia Bx và Cy lần lượt là tia phân giác của các góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACE}$. Chứng minh rằng Bx và Cy cắt nhau.
- 6.6: Cho 2 điểm A và B nằm ngoài đường thẳng m . Qua A vẽ 50 đường thẳng trong đó có đường thẳng qua B . Qua B vẽ 50 đường thẳng trong đó có đường thẳng qua A . Hỏi có ít nhất cũng có bao nhiêu giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ?

• Chứng minh 2 góc không bằng nhau. Tính số đo góc

- 6.7: Trong hình 6.8, cho biết $\widehat{A_1} \neq \widehat{B_1}$. Chứng minh $\widehat{C_1} \neq \widehat{D_1}$



Hình 6.8

- 6.8: Cho 9 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành một số góc không có điểm chung. Chứng minh rằng trong các góc đó tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 20° và tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 20° .
- 6.9: Qua điểm O nằm ngoài đường thẳng a vẽ một số đường thẳng không phải tất cả đều cắt a . Những đường thẳng cắt a được 78 tam giác chung đỉnh O . Chứng minh rằng trong các đường thẳng đã vẽ qua O cũng có 2 đường thẳng cắt nhau theo một góc nhỏ hơn 13°

• Các dạng khác

6.10: Chứng minh định lí: Trên tia Ox có OM = a, ON = b. Nếu $a < b$ thì điểm M nằm giữa 2 điểm O và N.

6.11: Chứng minh rằng nếu 2 tia Ox và Oy thuộc 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia Oz sao cho $\widehat{zOx} + \widehat{zOy} = 180^\circ$ thì 2 tia Ox, Oy đối nhau.

6.12: Vẽ 9 đoạn thẳng trên mặt phẳng. Hỏi có thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác không?

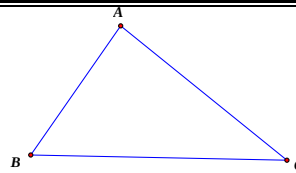
Chuyên đề 7. TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tổng ba góc của một tam giác (Hình a)

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180°

$$\Delta ABC \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



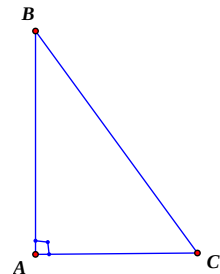
Hình a

2. Áp dụng vào tam giác vuông (Hình b)

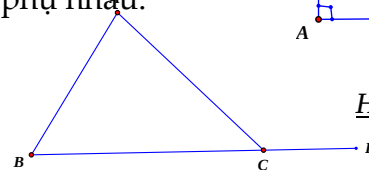
a) Định nghĩa: Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

b) Tính chất: Trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau.

$$\begin{cases} \Delta ABC \\ \hat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ.$$



Hình b



Hình c

3. Góc ngoài của tam giác (Hình c)

a) Định nghĩa: Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác.

b) Tính chất:

*Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

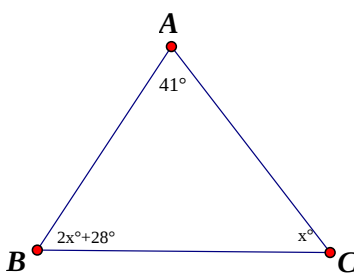
$$\widehat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}$$

*Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

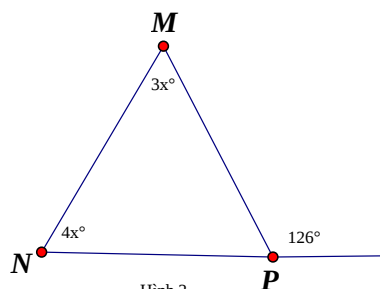
$$\widehat{ACD} > \hat{A}, \widehat{ACD} > \hat{B}$$

B. Một số ví dụ:

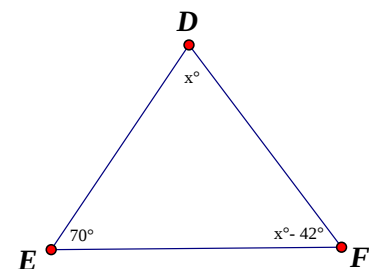
Ví dụ 1. Tìm x, trong hình vẽ bên:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Giải

- *Tìm cách giải.* Để tìm số đo x , chúng ta vận dụng:
 - Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .
 - Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

• *Trình bày lời giải.*

+ Hình 1. $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tính chất)

$$41^\circ + 2x^\circ + 28^\circ + x^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 37^\circ$$

+ Hình 2. $\triangle MNP$ có $\widehat{MPx} = \widehat{M} + \widehat{N}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$$3x^\circ + 4x^\circ = 126^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 18^\circ$$

+ Hình 3. $\triangle DEF$ có $\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 180^\circ$ (tính chất)

$$x^\circ + 70^\circ + x^\circ - 42^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 76^\circ$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 80^\circ$; $\widehat{B} = 60^\circ$. Hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I . Vẽ tia phân giác ngoài tại đỉnh B cắt tia CI tại D . Chứng minh $\widehat{BDC} = \widehat{C}$

Giải

• *Tìm cách giải:*

Đề bài cho số đo góc A và góc B nên hiển nhiên tính được số đo góc C . Dựa theo kết luận của bài toán thì chúng ta chỉ cần tính số đo góc BDC . Khi tính toán số đo góc, chúng ta lưu ý giả thiết có yếu tố tia phân giác.

• *Trình bày lời giải.*

$\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tính chất)

$$80^\circ + 60^\circ + \widehat{C} = 180^\circ; \widehat{C} = 40^\circ.$$

$\triangle ABC$ có $\widehat{ABx} = \widehat{A} + \widehat{C} = 120^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2} \widehat{ABx} = 60^\circ$$

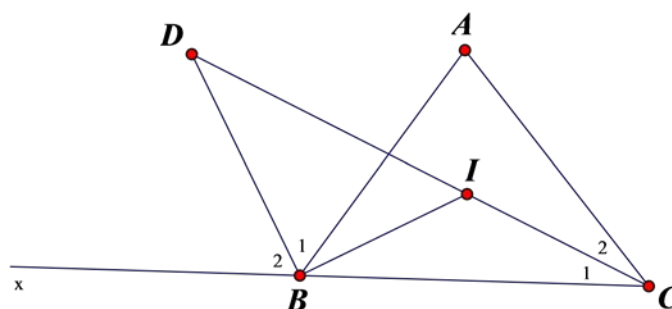
$$\text{Ta có: } \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \frac{1}{2} \widehat{C} = 20^\circ$$

$\triangle BCD$ có

$$\widehat{BDC} + \widehat{C_1} + \widehat{CBD} = 180^\circ$$

$$\widehat{BDC} + 20^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 40^\circ.$$

Do đó $\widehat{BDC} = \widehat{C}$.



Ví dụ 3. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E . Các tia phân giác $\widehat{ACE}$; $\widehat{DBE}$ cắt nhau ở K . Chứng minh: $\widehat{BKC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BDC}}{2}$.

Giải

• *Tìm cách giải.*

Chúng ta nhận thấy góc BKC là góc của tam giác BKG; CKH nên cần phải ghép vào hai tam giác ấy. Khai thác yêu cầu của bài toán (liên quan đến $\widehat{A}; \widehat{C}$) đồng thời để vận dụng yếu tố tia phân giác của giả thiết, chúng ta cần xét các cặp tam giác $\Delta KGB, \Delta AGC$ và cặp tam giác $\Delta KHC, \Delta DHB$.

• *Trình bày lời giải*

Gọi G là giao điểm của CK và AE và H là giao điểm của BK và DE.

Xét ΔKGB và ΔAGC có:

$$\widehat{KGB} = \widehat{AGC} \text{ (đối đỉnh)}$$

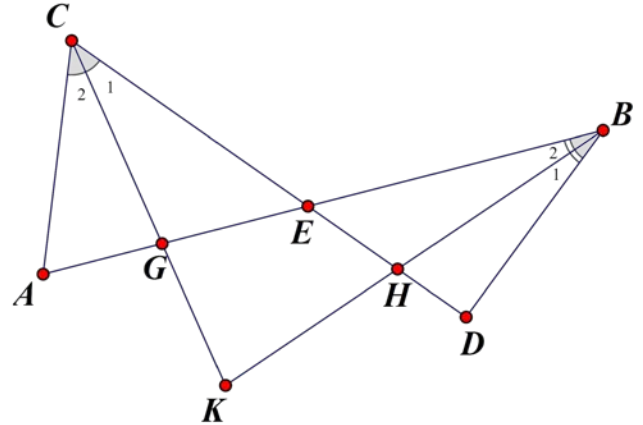
$$\Rightarrow \widehat{K} + \widehat{B}_1 = \widehat{A} + \widehat{C}_1 \quad (1)$$

Xét ΔKHC và ΔDHB có:

$$\widehat{KHC} = \widehat{BHD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \widehat{K} + \widehat{C}_2 = \widehat{D} + \widehat{B}_2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) kết hợp với $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2; \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow 2\widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{D} \Rightarrow \widehat{K} = \frac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2}$.



Ví dụ 4. Cho hình vẽ bên, biết rằng BD và CE là các tia phân giác của góc B và góc C.

a) Nếu $\widehat{A} = 80^\circ$ tính $\widehat{BIC}$

b) Nếu $\widehat{BDC} = 84^\circ; \widehat{BEC} = 96^\circ$. Tính $\widehat{A}$.

Giải

a) ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 100^\circ$.

$$\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{C}$$

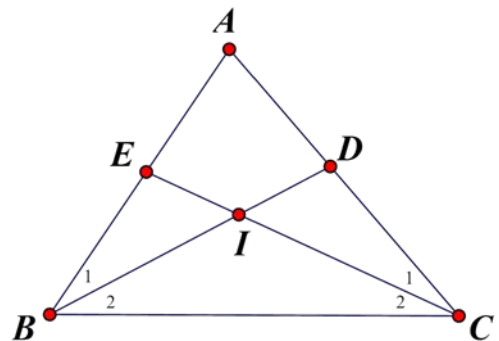
$$\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 = 50^\circ. \Delta BIC \text{ có } \widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 + \widehat{BIC} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{BIC} = 130^\circ$$

b) ΔBDC có $\widehat{BDC} + \widehat{B}_2 + \widehat{C} = 180^\circ$ mà $\widehat{BDC} = 84^\circ$ nên $\widehat{B}_2 + \widehat{C} = 96^\circ$.

$$\Delta BEC \text{ có } \widehat{BEC} + \widehat{B} + \widehat{C}_2 = 180^\circ \text{ mà } \widehat{BEC} = 96^\circ \text{ nên } \widehat{B} + \widehat{C}_2 = 84^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{B}_2 + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{C}_2 = 96^\circ + 84^\circ$$

$$\text{Do đó } \frac{3}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ \text{ nên } \widehat{A} = 60^\circ$$



Nhận xét

- Nếu $\widehat{A} \neq 80^\circ$ thì ta luôn chứng tỏ được $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ (*)
- Để tính $\widehat{A}$ chúng ta cần tìm góc $\widehat{B} + \widehat{C}$ hoặc $\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2$ mà không cần tính từng góc B và góc C. Ngoài ra dựa vào công thức (*) ta có thể tính $\widehat{BIC}$ bằng cách xét $\triangle BIE$ và $\triangle CID$ để tìm được:

$$\widehat{B}_1 + \widehat{EIB} + \widehat{DIC} + \widehat{C}_1 = 84^\circ + 96^\circ$$

Và lưu ý: $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = \widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 = \widehat{EIB} = \widehat{DIC}$ ta tính được $\widehat{EIB}$

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Các tia phân giác góc C và BAH cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $AK \perp CK$.

Giải

$\triangle ABH$; $\triangle ABC$ vuông nên $\widehat{BAH} = \widehat{HCA}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$).

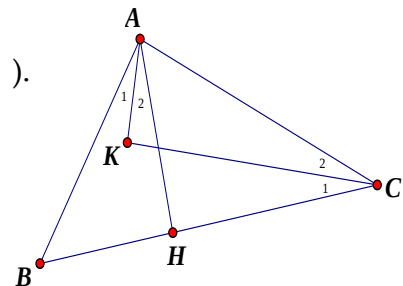
Mặt khác $\widehat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BAH}$; $\widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{HAC}$ do đó $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$

Ta có $\widehat{A}_1 + \widehat{KAC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{KAC} = 90^\circ$$

Suy ra tam giác KAC vuông tại K

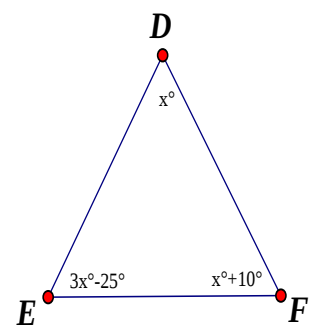
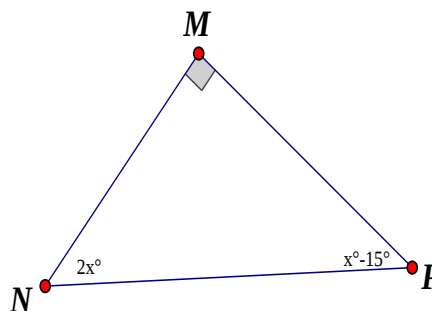
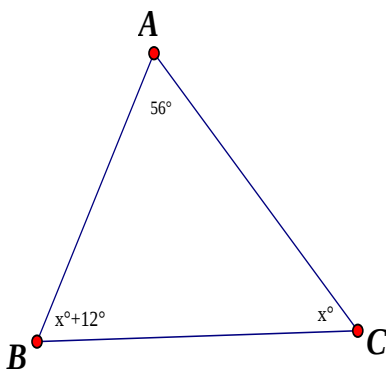
Vậy $AK \perp CK$



Nhận xét: Qua bài ta nhận thấy có thêm một dấu hiệu nhận biết tam giác vuông là chứng minh tam giác có tổng hai góc bằng 90° .

C. Bài tập vận dụng

7.1. Tìm x, trong các hình vẽ sau:



7.2. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $\widehat{A} = 45^\circ$. $\widehat{B}_1 = 130^\circ$. Tính $\widehat{C}_1$?

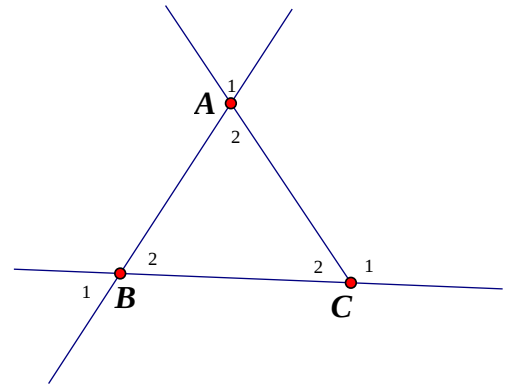
7.3. Các góc ngoài đỉnh A, B, C tỉ lệ với 2; 3; 4.

Tính tỉ lệ ba góc trong của tam giác đó.

7.4. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$ và $\hat{B} = 3\hat{C}$.

a) Tính góc A; B; C?

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng AB với tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh C. Tính góc AEC?



7.5. Tam giác ABC có $\hat{B} > \hat{C}$. Tia phân giác góc BAC cắt BC tại D.

a) Chứng minh $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \hat{B} - \hat{C}$.

b) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài ở đỉnh A của tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$.

7.6. Cho tam giác ABC có $\hat{B} - \hat{C} = 18^\circ$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Tính số đo góc ADC? góc ADB?

7.7. Cho tam giác ABC. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Biết $\widehat{ADB} = 85^\circ$.

a) Tính $\hat{B} - \hat{C}$.

b) Tính các góc của tam giác ABC nếu $4\hat{B} = 5\hat{C}$.

7.8. Cho tam giác ABC, O là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BOC} = \hat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

b) Biết $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ và tia BO là tia phân giác của góc B. Chứng minh rằng CO là tia phân giác của góc C.

7.9. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 180^\circ - 3\hat{C}$

a) Chứng minh rằng $\hat{B} = 2\hat{C}$

b) Từ một điểm D trên cạnh AC vẽ $DE \parallel BC$ ($E \in AB$). Hãy xác định vị trí của D sao cho tia DE là tia phân giác của góc $\widehat{ADB}$.

7.10. Chứng minh với mỗi tam giác bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài không lớn hơn 120°

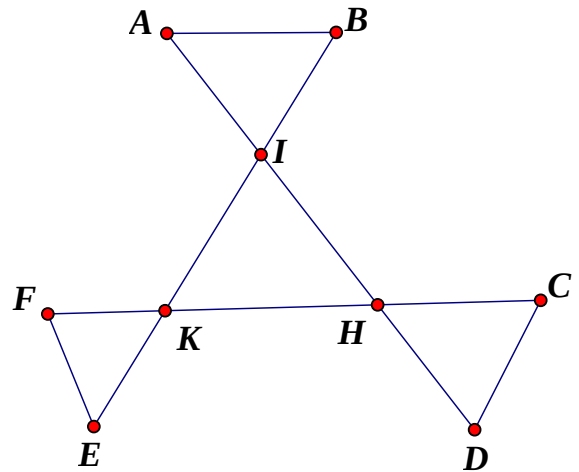
7.11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của $\hat{C}$ cắt AB tại D.

a) Chứng minh rằng góc BDC là góc tù.

b) Giả sử $\widehat{BDC} = 105^\circ$. Tính số đo góc B

7.12. Cho hình vẽ bên.

Tính tổng $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F}$?

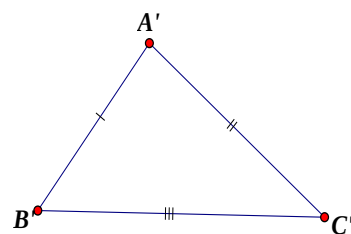
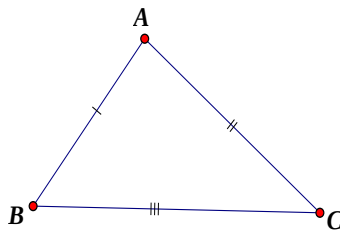


Chuyên đề 8. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa: Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

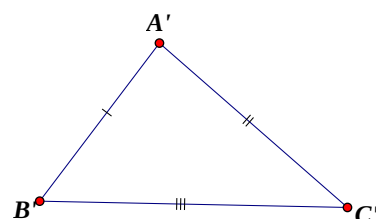
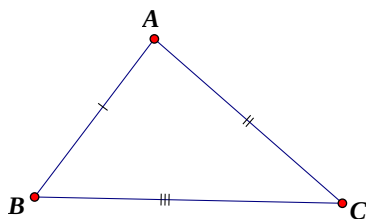
$$\triangle ABC = \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'} \\ AB = A'B'; AC = A'C'; BC = B'C' \end{cases}$$



2. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

- Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

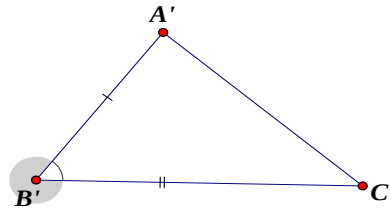
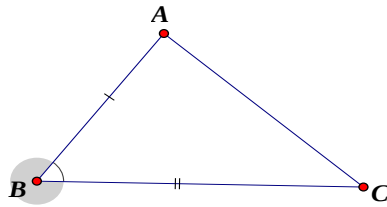
$$\left. \begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' (c.c.c)$$



- Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của

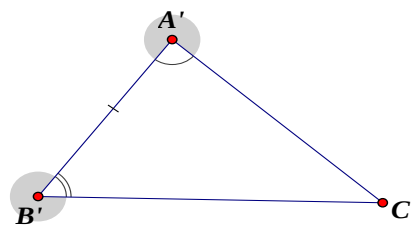
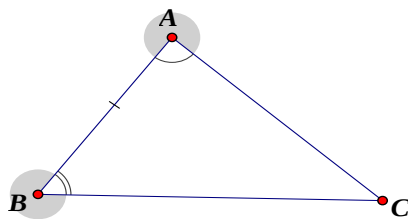
tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (c.g.c)$$



- Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

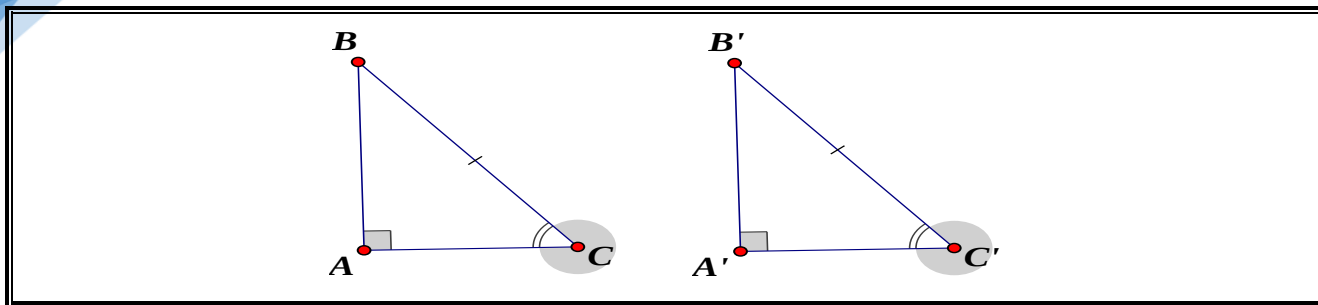
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{AB} = \widehat{A'B'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (g.c.g)$$



3. Hệ quả

- Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.
- Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.
- Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (Cạnh huyền = góc nhọn)}$$



B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$

- Viết ký hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác bằng nhau bằng ba cách.
- Cho $AB = 5\text{cm}$; $AC = 6\text{cm}$; $NP = 7\text{cm}$. Tính chu vi mỗi tam giác? Hãy nêu nhận xét?

Giải

- Tìm cách giải:** Khi viết hai tam giác bằng nhau thì các đỉnh tương ứng phải viết theo cùng một thứ tự. Viết như vậy, thì việc suy ra các cặp cạnh tương ứng bằng nhau mới chính xác.
- Trình bày lời giải**
 - $\triangle ABC = \triangle MNP$; $\triangle CBA = \triangle PNM$; $\triangle BAC = \triangle NMP$.
 - $\triangle ABC = \triangle MNP$ suy ra $AB = MN = 5\text{cm}$; $AC = MP = 6\text{cm}$; $BC = NP = 7\text{cm}$.
Chu vi $\triangle ABC$ bằng $AB + BC + AC = 5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$
Chu vi $\triangle MNP$ bằng $MN + MP + NP = 5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$
- Nhận xét.** Hai tam giác bằng nhau thì có chu vi bằng nhau.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC = \triangle HIK$, biết $\hat{A} + \hat{B} = 124^\circ$; $\hat{H} - \hat{I} = 16^\circ$. Tính các góc của mỗi tam giác.

Giải

- Tìm cách giải.** Bài toán yêu cầu tính số đo góc của tam giác nên từ $\triangle ABC = \triangle HIK$, chúng ta chỉ quan tâm tới cặp góc tương ứng bằng nhau.
- Trình bày lời giải.**

$$\triangle ABC = \triangle HIK \Rightarrow \hat{A} = \hat{H}; \hat{B} = \hat{I}; \hat{C} = \hat{K} \text{ (cặp góc tương ứng).}$$

Vì $\hat{A} + \hat{B} = 124^\circ \Rightarrow \hat{H} + \hat{I} = 124^\circ$; $\hat{H} - \hat{I} = 16^\circ$, nên

$$\hat{H} = (124^\circ + 16^\circ) : 2 = 70^\circ$$

$$\hat{I} = (124^\circ - 16^\circ) : 2 = 54^\circ$$

$\triangle HIK$ có $\hat{H} + \hat{I} + \hat{K} = 180^\circ$; $70^\circ + 54^\circ + \hat{K} = 180^\circ \Rightarrow \hat{K} = 56^\circ$

Vì $\triangle ABC = \triangle HIK$ nên $\hat{A} = \hat{H} = 70^\circ$; $\hat{B} = \hat{I} = 54^\circ$; $\hat{C} = \hat{K} = 56^\circ$.

Ví dụ 3. Cho góc nhọn xOy , lấy điểm A thuộc Ox , điểm B thuộc Oy sao cho $OA = OB$. Vẽ hai cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính nhỏ hơn OA sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm C và D . Chứng minh rằng:

- $\triangle AOC = \triangle BOC$.
- Ba điểm O, C, D thẳng hàng.

Giải

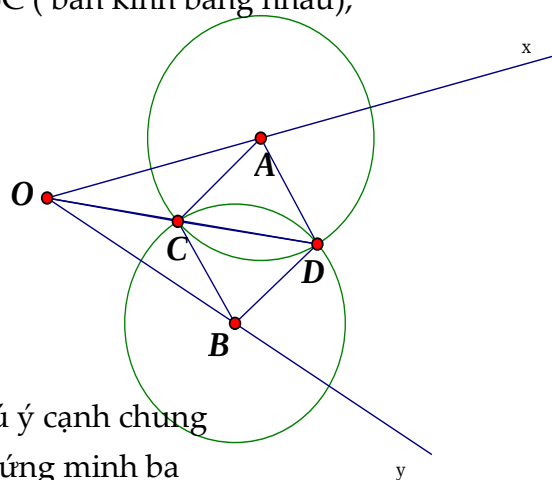
a) Xét $\triangle OAC = \triangle OBC$ có $OA = OB$ (giả thiết), $AC = BC$ (bán kính bằng nhau), OC cạnh chung.

$$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC (c.c.c)$$

b) $\triangle OAC = \triangle OBC (c.c.c)$ nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$

Tương tự $\triangle OAD = \triangle OBD (c.c.c) \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{BOD}$.

Nên C, D cùng thuộc tia phân giác góc xOy hay O, C, D thẳng hàng.



• Nhận xét

~ Khi chứng minh hai tam giác bằng nhau bạn nên chú ý cạnh chung

~ Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chứng minh ba điểm đó cùng nằm trên tia phân giác của một góc.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Lấy M thuộc cạnh AB ; lấy N thuộc tia đối của tia CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là một điểm sao cho $IB = IC$; $IM = IN$. Chứng minh rằng $IC \perp AN$.

Giải

Ta có $\triangle ABC = \triangle ACI (c.c.c) \Rightarrow \widehat{ACI} = \widehat{ABI}$. $\triangle MBI = \triangle NCI (c.c.c) \Rightarrow \widehat{NCI} = \widehat{ABI}$.

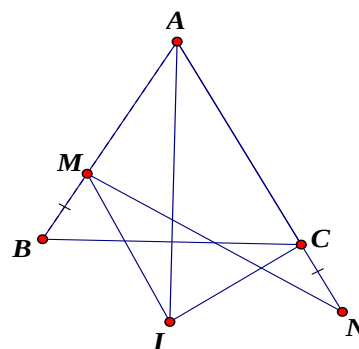
Suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{NCI}$, mà đó là hai góc kề bù, nên

$$\widehat{ACI} = \widehat{NCI} = 90^\circ, \text{ hay } IC \perp AN.$$

• Nhận xét

Đây là bài toán khó. Để chứng minh $IC \perp AN$

chúng ta suy nghĩ và chứng minh $\widehat{ICA} = \widehat{ICN}$ là điều cần thiết. Sau đó chúng ta hãy tìm các tam giác bằng nhau mà trong các tam giác ấy có chứa $\widehat{ICA}$ và $\widehat{ICN}$.



Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$. Kẻ đường phân giác góc B cắt AC tại D . Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $MA = MB$.

a) Chứng minh $MD \perp BC$.

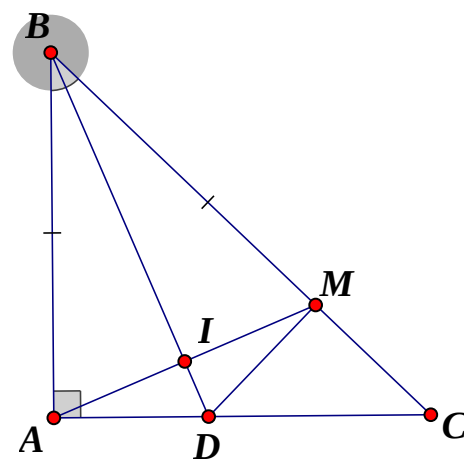
b) Chứng minh $AM \perp BD$.

c) Nếu biết $\widehat{AMD} = 36^\circ$.

Tính số đo góc B , góc C của tam giác ABC .

Giải

a) $\triangle ABD$ và $\triangle MBD$ có $BA = BM$; $\widehat{ABD} = \widehat{MBD}$; BD



là cạnh chung $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle MBD(c.g.c)$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BMD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DM \perp BC$$

b) Gọi I là giao điểm của AM và BD. Xét $\triangle ABI$ và $\triangle MBI$ có $AB = MB$; $\widehat{ABI} = \widehat{MBI}$; BI là

cạnh chung $\Rightarrow \triangle ABI = \triangle MBI(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{MIB}$

$$\text{Mà } \widehat{AIB} + \widehat{MIB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{MIB} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BD.$$

$$\text{c) } \widehat{AMD} = 36^\circ \text{ nên } \widehat{IMB} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

$$\triangle BIM \text{ vuông nên } \widehat{IBM} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{B} = 36^\circ \cdot 2 = 72^\circ \text{ do đó } \widehat{C} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ.$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có ba góc

nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$;

$AM = AB$ sao cho M và C khác

phía đối với đường thẳng AB. Vẽ

đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$

sao cho N và B khác phía đối với

đường thẳng AC. Gọi I, K lần lượt là

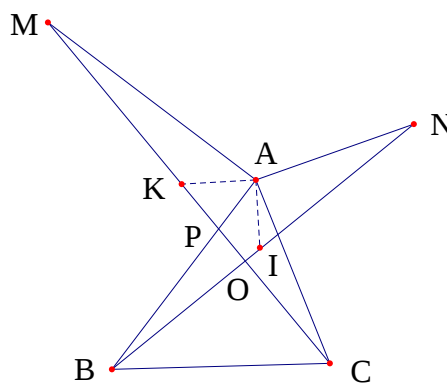
trung điểm BN và CM. Chứng minh

rằng:

$$\text{a) } \triangle AMC = \triangle ABN.$$

$$\text{b) } MC = BN \text{ và } MC \perp BN ;$$

$$\text{c) } AI = AK \text{ và } AI \perp AK .$$



Giải

$$\text{a) } \widehat{MAC} = \widehat{BAN} (= 90^\circ + \widehat{BAC}) \text{ nên } \triangle AMC = \triangle ABN (c.g.c)$$

$$\text{b) } \triangle AMC = \triangle ABN \Rightarrow BN = CM \text{ và } \widehat{AMC} = \widehat{ABN} .$$

Gọi P là giao điểm của AB và CM

$$\text{Ta có: } \widehat{AMC} + \widehat{APM} = 90^\circ \text{ (Vì } \triangle AMP \text{ vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABN} + \widehat{BPO} = 90^\circ \Rightarrow MC \perp BN$$

$$CM = BN \Rightarrow MK = BI , \text{ mà } \widehat{AMK} = \widehat{ABN}; AM = AB$$

$$\text{nên } \triangle AMK = \triangle ABI (c.g.c) \Rightarrow AK = AI.$$

$$\Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{BAI} ; \text{ mà } \widehat{MAK} + \widehat{KAB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAI} + \widehat{KAB} = 90^\circ \text{ hay } AI \perp AK.$$

Ví dụ 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2 \cdot AB$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D

$$\text{a) Chứng minh rằng } BD = CD .$$

$$\text{b) Tính góc B và góc C của tam giác ABC.}$$

Giải

a) Gọi E là trung điểm của BC.

Suy ra $BE = CE = AB (= \frac{1}{2}BC)$

$\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có

$BA = BE$

$\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$ (giả thiết);

BD là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ$

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle CDE$ có: $\widehat{BED} = \widehat{CED} = 90^\circ$; $BE = CE$; DE chung

$\Rightarrow \triangle BDE = \triangle CDE$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = CD$.

b) $\triangle BDE = \triangle CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B} = 2\widehat{C}$

Mặt khác: $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông tại A)

$\Rightarrow 2\widehat{C} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ, \widehat{B} = 60^\circ$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Các tia phân giác góc B, góc C cắt nhau tại O và cắt AC; AB theo thứ tự D; E. Chứng minh rằng: $OD = OE$.

Giải

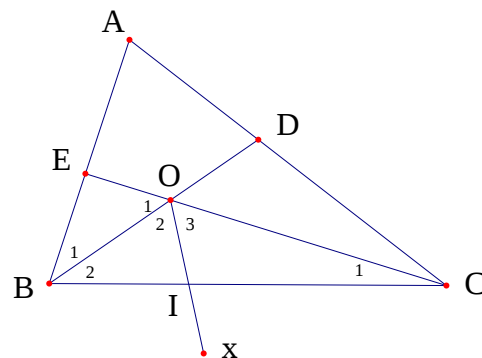
$\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

Mà $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$

Ta có $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{C} = 60^\circ$

$\triangle BOC$ có $\widehat{BOC} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ$

Nên $\widehat{BOC} = 120^\circ, \widehat{O}_1 = 60^\circ$



Kẻ Ox là tia phân giác góc BOC, cắt BC tại I nên $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 = 60^\circ$

Xét $\triangle BEO$ và $\triangle BIO$ có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (giả thiết); $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 (= 60^\circ)$

BO là cạnh chung do đó $\triangle BEO = \triangle BIO$ (c.g.c). Suy ra $OE = OI$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle COD = \triangle COI$ nên $OD = OI$

Vậy $OE = OD (= OI)$

* Nhận xét

- Để chứng minh $OE = OD$, ta chưa thể ghép chúng vào hai tam giác nào bằng nhau được. Do vậy ta nghĩ đến cách kẻ đường phụ. Cho số đo góc A ta liên hệ với bài đã biết nên tính được số đo góc BOC và góc BOE nên dựng được điểm I.

- Bài toán còn có cách khác, là lấy điểm I trên BC sao cho $BI = BE$, sau đó chứng minh $\triangle BOE = \triangle BOI$ rồi chứng minh $\triangle COD = \triangle COL$

- Từ cách trên ta còn suy ra kết quả đẹp là $BE + CD = BC$

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC. Từ B kẻ $BD \perp AC$, $CE \perp AB$. Gọi H là giao điểm của BD và CE. Biết rằng $HD = HE$.

a) Chứng minh rằng $\triangle BHE = \triangle CHD$;

b) Chứng minh rằng $\triangle ABD = \triangle ACE$.

c) Chứng minh AH là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

d) Gọi I là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng $AI \perp BC$.

Giải

a) $\triangle BHE$ và $\triangle CHD$ có $\widehat{BEH} = \widehat{CDH}$ ($= 90^\circ$); $HD = HE$;

$\widehat{BHE} = \widehat{CHD} \Rightarrow \triangle BHE = \triangle CHD$ (g.c.g)

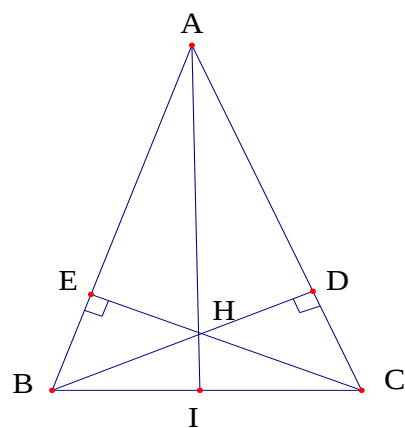
b) $\triangle BHE = \triangle CHD \Rightarrow BH = CH$; mà $HD = HE$

$\Rightarrow BD = CE$

$\triangle ADB$ và $\triangle AEC$ có $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$ ($= 90^\circ$); $BD = CE$;

$\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle AEC$ (cạnh huyền, góc nhọn)



c) $\triangle ABD = \triangle ACE \Rightarrow AB = AC$.

$\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có $AB = AC$; AH là cạnh chung; $BH = CH$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH$ (c.c.c)

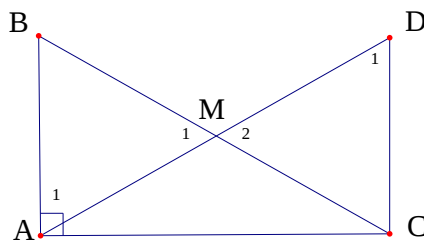
$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{CAH} \Rightarrow AH$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

d) $\triangle ABI$ và $\triangle ACI$ có $AB = AC$; $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$; AI là cạnh chung $\Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AIC}$; mà $\widehat{AIB} + \widehat{AIC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AIC} = 90^\circ$, hay $AI \perp BC$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng

$$AM = \frac{1}{2} BC.$$

Giải

*Tìm cách giải. Để chứng minh $AM = \frac{1}{2} BC$

ta cần chứng minh $BC = 2.AM$.

Về mặt suy luận ta cần dựng một đoạn thẳng bằng $2.AM$, rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC .

* Trình bày lời giải. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. Suy ra $AD = 2.AM$.

$\triangle AMB$ và $\triangle DMC$ có $AM = MD$; $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, $MB = MC$ nên $\triangle AMB = \triangle DMC$. Suy ra $AB = DC$;

3. $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ nên $AB // CD \Rightarrow DC \perp AC$

$\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có $AB = CD$; $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} (=90^\circ)$, AC chung $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$ (c.g.c)

$\Rightarrow BC = DA \Rightarrow BC = 2AM$ hay $AM = \frac{1}{2} BC$

* Nhận xét: Bài này là một tính chất thú vị của tam giác vuông, thường được sử dụng trong những bài nổi trung điểm của cạnh huyền với đỉnh góc vuông.

Ví dụ 11. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB // CD$, $AD // BC$. Chứng minh rằng: $AB = CD$, $AD = BC$

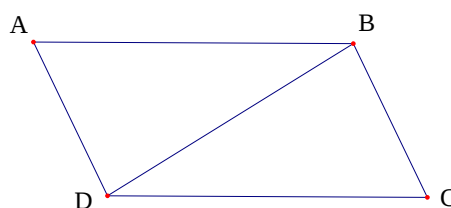
Giải

$AB // CD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ (cặp so le trong)

$AD // BC \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ (cặp so le trong)

$\triangle ABD$ và $\triangle CDB$ có $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$, BD là cạnh chung, $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$, Suy ra $\triangle ABD = \triangle CDB$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = CD$, $AD = BC$.



Nhận xét. Đây là một tính chất thú vị, gọi là tính chất đoạn đoạn chắn song song. Tính chất này được vận dụng trong nhiều bài tập, đem lại hiệu quả cao.

C. Bài tập vận dụng

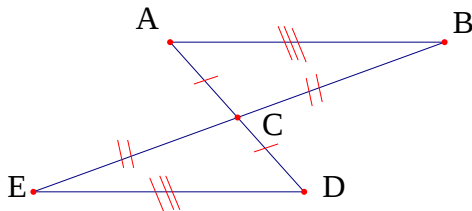
• **Định nghĩa tam giác bằng nhau**

8.1. Điền vào chỗ trống (....) trong các phát biểu sau:

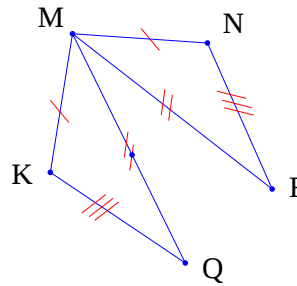
a) Nếu $\triangle ABC = \triangle MNP$ thì $AB = \dots$; $\dots = MP$; $BC = \dots$

b) Nếu $\triangle IHK = \triangle DEF$ thì $\hat{I} = \dots$; $\dots = \hat{F}$; $\hat{H} = \dots$

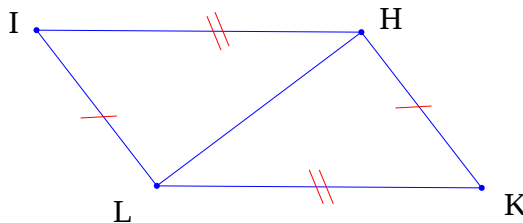
8.2. Điền vào ô trống:



$\triangle ABC = \dots$



$\triangle MNP = \dots$



$\triangle IHL = \dots$

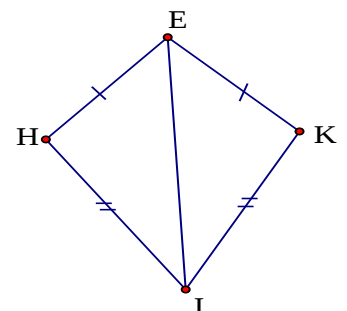
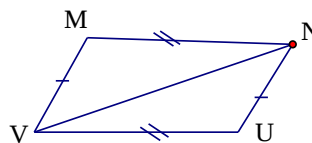
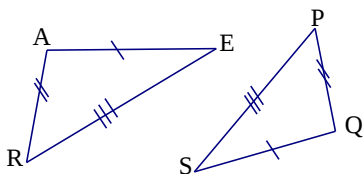
8.3. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$ biết $\hat{B} - \hat{C} = 10^\circ$; $\hat{N} + \hat{P} = 120^\circ$. Tính số đo các góc của mỗi tam giác.

8.4. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết $AB + AC = 9\text{cm}$; $MN - NP = 3\text{cm}$; $NP = 5\text{cm}$. Tính chu vi của mỗi tam giác.

8.5. Cho $\triangle ABC = \triangle RST$, biết $\frac{BC}{5} = \frac{AB}{3}$ và $ST - RS = 8\text{cm}$; $AC = 18\text{cm}$. Tính mỗi cạnh của mỗi tam giác.

• **Trường hợp c.c.c**

8.6. Điền vào ô trống:

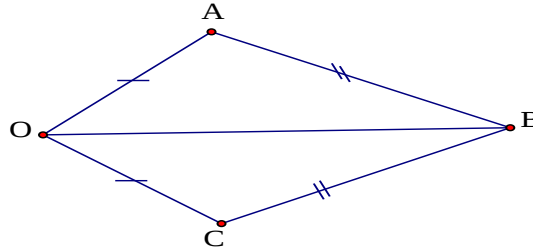


PQS =

$\triangle NUV = \dots\dots\dots$

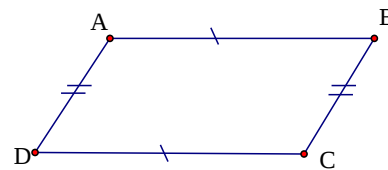
$\triangle EKI = \dots\dots\dots$

8.7. Cho hình vẽ bên. Chứng minh rằng OB là tia phân giác của $\widehat{AOC}$.



8.8. Trong hình vẽ bên biết $AB = CD$, $AD = BC$.

Chứng minh: $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$.



8.9. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 50^\circ$; $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính các góc của $\triangle ABM$; $\triangle ACM$.

• Trường hợp c.g.c

8.10. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC ở D; E là một điểm trên cạnh BC sao cho $BE = BA$.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ABD = \triangle EBD$.

b) Chứng minh rằng: $DE \perp BC$.

c) Gọi F là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng $DC = DF$.

8.11. Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$). Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh:

a) $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$;

b) $AH = AK$.

8.12. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D. Trên tia đối BD lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Trên tia đối CB lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh rằng: $AE = AK$

8.13. Cho $\triangle ABC$. Gọi D; E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho $EF = ED$. Chứng minh:

a) $BD = CF$; $AB \parallel CF$.

b) $\triangle BCD = \triangle FDC$.

c) $DE \parallel BC$.

8.14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB < AC$. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại D. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh rằng $AD = ED$.

b) Chứng minh rằng $AH \parallel DE$.

c) Trên tia DE lấy điểm I sao cho $DI = AH$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng DH. Chứng minh rằng ba điểm A, O, I thẳng hàng.

8.15. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A. Vẽ tia Bx vuông góc với BC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C vẽ tia By vuông góc với BA. Trên tia By lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $AD = CE$.

b) $AD \perp CE$.

8.16. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} < 90^\circ$; Gọi M là trung điểm cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C kẻ tia Ax vuông góc với AB, trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B kẻ tia Ay vuông góc với AC. Trên tia Ay lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Trên tia đối tia MA lấy $MN = MA$. Chứng minh rằng:

a) $BN = AE$;

b) $AM = \frac{DE}{2}$

c) $AM \perp DE$.

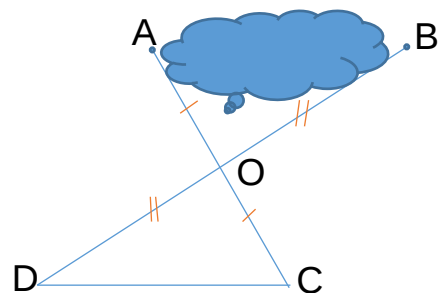
8.17. Để đo khoảng cách AB mà không đo trực tiếp, người ta đã thực hiện như sau:

- Chọn vị trí điểm O.

- Lấy điểm C trên tia đối tia OA sao cho $OC = OA$.

- Lấy điểm D trên tia đối tia OB sao cho $OD = OB$.

- Đo độ dài đoạn thẳng CD, đó chính là khoảng cách AB.



Hãy giải thích tại sao?

• **Trường hợp g.c.g**

8.18. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$. Các tia phân giác BE, CF của $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ cắt nhau tại I (E, F lần lượt thuộc cạnh AC, AB). Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho

$$\widehat{BIM} = \widehat{CIN} = 30^\circ$$

a) Tính số đo của $\widehat{MIN}$;

b) Chứng minh $CE + BF < BC$.

8.19. Cho tam giác ABC có $\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ$, tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D. Trên AD lấy điểm O, trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = \widehat{ACO}$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

8.20. Cho tam giác ABC có $BC = 5\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm K và D sao cho $AK = BD$.

Vẽ $KI \parallel BC$; $DE \parallel BC$ ($I, E \in AC$).

a) Chứng minh $AI = CE$.

b) Tính độ dài $DE + KI$.

8.21. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = AC$. Lấy M thuộc BC ($BM > MC$). Kẻ BD và CE vuông góc với đường thẳng AM. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABD = \Delta CAE$.

b) $BD - CE = DE$.

Chuyên đề 9. TAM GIÁC CÂN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tam giác cân

a) *Định nghĩa*: Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

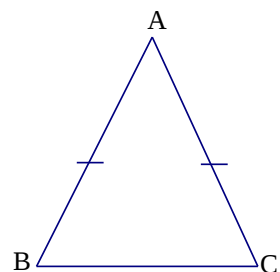
$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = AC \end{cases}$$

b) *Tính chất*. Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

c) *Dấu hiệu nhận biết*

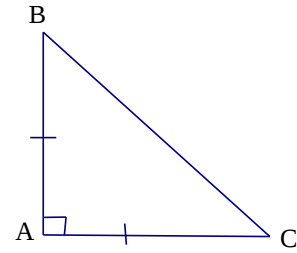
- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.



2. Tam giác vuông cân

a) *Định nghĩa*: Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ \hat{A} = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases}$$



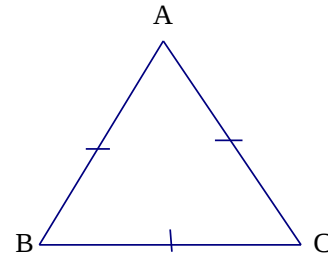
b) *Tính chất*: mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45°

$$\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$$

3. Tam giác đều

a) *Định nghĩa*: Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = BC = CA \end{cases}$$



b) *Tính chất*. Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60° .

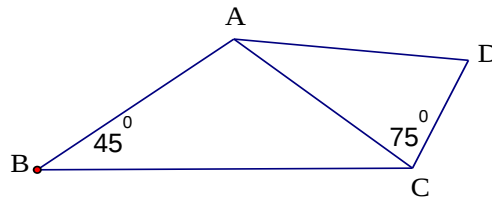
c) *Dấu hiệu nhận biết*

- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
- Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB = AC = AD$

$\widehat{ABC} = 45^\circ$; $\widehat{ACD} = 75^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{BAD}$



Giải

* *Tìm cách giải.* Chúng ta lưu ý rằng: trong một tam giác cân, nếu biết một góc thì tính được hai góc còn lại. Chẳng hạn: nếu ΔABC cân tại A thì: $\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C}$ hoặc

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$$

* *Trình bày lời giải*

ΔABC cân tại A nên $\widehat{BAC} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{ABC} = 90^\circ$

ΔADC cân tại A nên $\widehat{CAD} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{ACD} = 30^\circ$

Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 120^\circ$

Ví dụ 2.

- a) Một tam giác cân có một góc là 80° . Số đo của hai góc còn lại là bao nhiêu?
 b) Một tam giác cân có một góc là 100° . Số đo của hai góc còn lại là bao nhiêu?

Giải

- a) Nếu góc ở đỉnh tam giác cân là 80° , thì mỗi góc ở đáy tam giác cân là: $\frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$
 - Nếu mỗi góc ở đáy tam giác cân là 80° thì góc ở đỉnh tam giác cân là: $180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$.
 b) Nếu góc ở đáy tam giác cân là 100° ; thì tổng hai góc ở đáy là: $100^\circ + 100^\circ + 200^\circ > 180^\circ$ (không xảy ra)

Do đó góc ở đỉnh tam giác cân là 100° thì mỗi góc ở đáy tam giác cân là

$$\frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$$

* **Nhận xét:** Bài toán này dễ bỏ sót các trường hợp. Khi đề bài chưa cho cụ thể số đo là số đo ở đỉnh hay ở đáy, ta cần xét cả hai trường hợp.

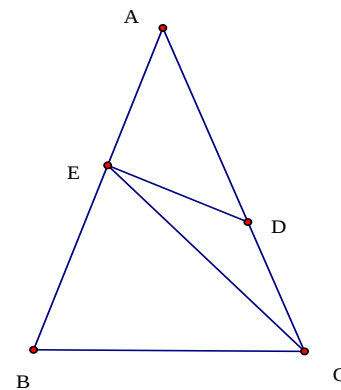
Ví dụ 3. Cho hình vẽ bên. Biết $AB = AC$; $AE = DE = CD$ và $BC = CE$. Tính số đo $\widehat{BAC}$

Giải

* *Tìm cách giải.* bài toán xuất hiện nhiều tam giác cân, nên có nhiều góc bằng nhau. Để lời giải đơn giản, không bị nhầm lẫn, chúng ta nên đặt góc nhỏ nhất trong hình vẽ là x .

Sau đó biểu diễn các góc khác theo x . Trong quá trình giải,

lưu ý tính chất góc của tam giác cân và tính chất góc ngoài của tam giác.



* *Trình bày lời giải*

$\triangle DEC$ cân tại D. Đặt $\widehat{DCE} = \widehat{DEC} = x$

$\triangle DEC$ có $\widehat{ADE} = \widehat{DCE} + \widehat{DEC} = 2x$ (góc ngoài tam giác)

$\triangle AED$ cân tại E nên $\widehat{EAD} = \widehat{ADE} = 2x$

$\triangle AEC$ có $\widehat{BEC} = \widehat{CAE} + \widehat{ECA} = 3x$ (góc ngoài tam giác)

$\triangle BCE$ cân tại C nên $\widehat{B} = \widehat{BEC} = 3x$

$\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{BCA} = 3x$

$\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

Suy ra $2x + 3x + 3x = 180 \Leftrightarrow x = 22,5^\circ$

Do đó $\widehat{BAC} = 2.22,5^\circ = 45^\circ$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho

$\widehat{EBC} = 2.\widehat{ABE}$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$. So sánh

$\widehat{MBC}$ và $\widehat{BMC}$.

Giải

*, **Cách 1.** Trên tia BE lấy điểm K sao cho $BK = BC \Rightarrow \triangle BKC$ cân tại B

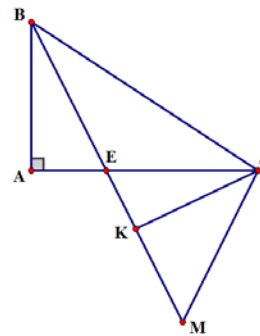
$$\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{BKC} = \frac{180^\circ - \widehat{KBC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABE} = \widehat{AEB}$$

$\triangle CEK$ cân tại C $\Rightarrow CE = CK$;

$\widehat{CEK} = \widehat{CKE} \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{CKM}$ mà

$BK = EM \Rightarrow BE = KM$

$\Rightarrow \triangle CEB = \triangle CKM$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{MBC} = \widehat{BMC}$



*, **Cách 2.** Kẻ $MH \perp AC$ ($H \in AC$)

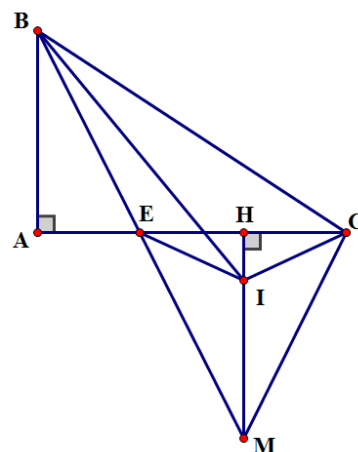
Gọi MH cắt tia phân giác $\widehat{BCE}$ tại I.

Ta có: $\widehat{ABE} = \widehat{EBI} = \widehat{IBC} \left(= \frac{1}{2} \widehat{EBC} \right)$

mà $\widehat{ABE} = \widehat{EMI}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{CBI} \left(= \widehat{ABE} \right)$

$\triangle BIM$ có $\widehat{IBM} = \widehat{IMB} \Rightarrow \triangle BIM$ cân tại I $\Rightarrow IB = IM$



Từ đó suy ra $\triangle IBC = \triangle IME$ (c.g.c)

$\Rightarrow IE = IC \Rightarrow \triangle IEC$ cân tại I, mà $IH \perp EC$

Nên để có $\triangle EMH = \triangle CMH$ (c.g.c)

$\Rightarrow EM = CM \Rightarrow BC = CM$

$\Rightarrow \triangle BCM$ cân tại C suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{BMC}$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm của CD và BE, K là giao điểm của AB và CD.

a) Chứng minh rằng $\triangle ADC = \triangle ABE$

b) Chứng minh rằng $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

e) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc DIE.

Giải

a) $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có

$$AD = AB \quad \widehat{DAC} = \widehat{BAE} (= 60^\circ + \widehat{BAC}); AC = AE$$

$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

b) $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABE}$

$$\triangle ADK \text{ có } \widehat{KAD} = 60^\circ \text{ nên } \widehat{ADC} + \widehat{AKD} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{BKI} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BKI} = 60^\circ \text{ hay}$$

$$\widehat{DIB} = 60^\circ$$

c) $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow DC = BE \Rightarrow DM = BN$

$$\triangle ADM \text{ và } \triangle ABN \text{ có } AD = AB; \widehat{ADK} = \widehat{ABN}; DM = BN$$

$$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle ABN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN \text{ cân}$$

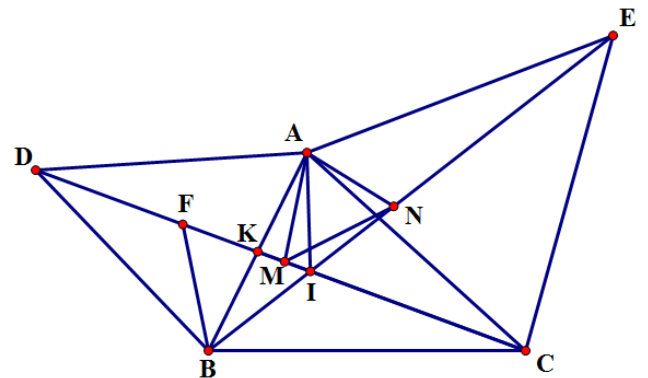
$$\widehat{DAM} = \widehat{BAN} \Rightarrow \widehat{DAM} + \widehat{MAB} = \widehat{MAB} + \widehat{BAN} \Rightarrow \widehat{MAN} = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle AMN$ đều

d) Trên tia ID lấy IF = IB.

Ta có $\widehat{BIF} = 60^\circ$ nên $\triangle BIF$ là tam giác đều.

Xét $\triangle BFD$ và $\triangle BIA$ có $BD = BA, \widehat{DBF} = \widehat{ABI} (= 60^\circ - \widehat{FBA}), BF = BI$



Suy ra $\triangle BFD = \triangle BIA (c.g.c) \Rightarrow DF = IA$

Do đó $IA + IB = DF + FI = ID$

e) $\triangle BIF$ đều nên $\widehat{BFI} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BFD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BIA} = 120^\circ$

Mà $\widehat{BID} = 60^\circ$ nên $\widehat{DIA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AIE} = 60^\circ \widehat{DIA} = \widehat{AIE} (= 60^\circ)$

Hay IA là tia phân giác của góc DIE

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn thẳng AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = 2 \cdot MH$. Chứng minh $BN = AC$.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội, năm 2015)

Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán chưa hề ghép BN và AC vào hai tam giác bằng nhau trực tiếp được. mặt khác $MNB = MC$, do vậy rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc trên tia đối của tia MA lấy $MD = MA$ bởi đây là giả thiết quen thuộc, để suy ra $AC = BD$. Sau đó chỉ việc chứng minh $BD = BN$

* *Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia MA lấy $MD = MA$,

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle DBM$ có

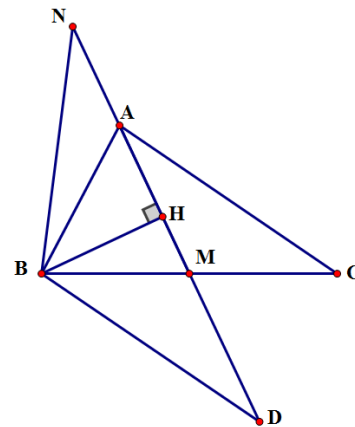
$$AM = MD, \widehat{AMC} = \widehat{DMB}, BM = CM$$

$$\text{Suy ra } \triangle ACM = \triangle DBM (c.g.c) \Rightarrow BD = AC$$

$$\text{Ta có } HN = HA + AN = HA + 2 \cdot HM = AM + HM$$

$$HD = MD + HM = AM + HM \Rightarrow HN = HD$$

$$\triangle DBN \text{ có } BH \perp DN; HD = HN \Rightarrow \triangle DBN \text{ cân tại B} \Rightarrow BN = BD \text{ Vậy } BN = AC.$$



Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Lấy điểm D thuộc nửa mặt

phẳng bờ AB không chứa C sao cho tam giác DAB vuông cân tại D;

điểm E (khác A) thuộc đoạn AD. Đường thẳng qua E, vuông góc với BE

cắt AC tại F. Chứng minh rằng $EF = EB$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $EF = EB$, thông thường chúng ta nghĩ tới việc ghép vào hai tam giác, sau đó chứng minh hai tam giác đó bằng nhau. Tuy nhiên, với hình vẽ này chúng ta chưa thể ghép được. Phân tích đề bài, chúng ta có nhiều góc vuông, góc 45°

cũng như các cặp cạnh bằng nhau $DA = DB$, $AB = AC$. Với sự phân tích trên, chúng ta nghĩ tới việc kẻ thêm đường phụ nhằm kết hợp được giả thiết với nhau cũng như ghép EF và EB là hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau.

* Từ đó chúng ta có hướng giải sau:

- Cách 1. Có thể ghép EF vào $\triangle AEF$ có $\widehat{EAF} = 135^\circ$ nên cần ghép EB vào tam giác có góc đối diện với nó cũng bằng 135° . Khai thác yếu tố tam giác vuông cân ADB, lấy điểm K trên BD sao cho $\triangle DEK$ vuông cân.
- Cách 2. Nhận thấy $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên, tia AD là tia phân giác góc ngoài đỉnh A của $\triangle ABC$, nên có thể kẻ thêm EM, EN vuông góc với các đường thẳng AC, AB. Để chứng minh được $EM = EN$. Từ đó cũng có lời giải.

* Trình bày lời giải

Cách 1. Trên đoạn BD lấy điểm K sao cho $BK = EA$ (1).

Vì tam giác DAB vuông cân tại D
nên $\triangle DKE$ vuông cân tại D, suy ra
 $\widehat{DKE} = 45^\circ$

$$\text{do đó : } \widehat{BKE} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\text{mà } \widehat{EAF} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

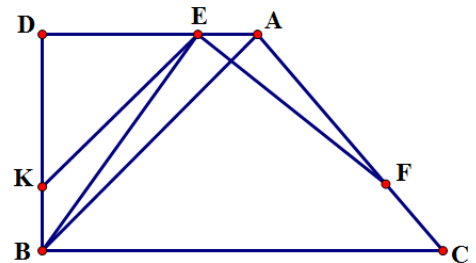
$$\text{nên } \widehat{BKE} = \widehat{EAF} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{KBE} = 90^\circ - \widehat{DEB} = \widehat{AEF} \quad (3) \quad (\text{do } \widehat{BEF} = 90^\circ)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra : } \triangle BKE = \triangle EAF \quad (g.c.g)$$

$$\text{Từ đó } EF = EB$$

Cách 2. Vẽ EM, EN vuông góc với các đường thẳng AC, AB



Xét $\triangle AME$ và $\triangle ANE$ có

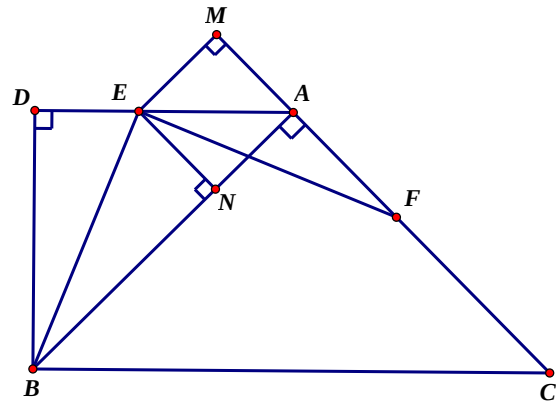
$$\widehat{AME} = \widehat{ANE} (= 90^\circ);$$

$$\widehat{MAE} = \widehat{NAE} (= 45^\circ), AE \text{ là cạnh chung}$$

$$\Rightarrow \triangle AME = \triangle ANE \text{ (cạnh huyền góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow EM = EN$$

Mặt khác, $\triangle AME$ và $\triangle ANE$ là tam giác vuông cân, suy ra $\widehat{MEN} = 90^\circ$



$\triangle BNE$ và $\triangle FME$ có :

$$\widehat{ENB} = \widehat{EMF} (= 90^\circ); \widehat{BEN} = \widehat{FEM} (= 90^\circ - \widehat{FEN}); EN = EM$$

$$\triangle BNE = \triangle FME \text{ (cạnh huyền góc nhọn)} \Rightarrow EF = EB$$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Chứng minh rằng $AC = \frac{1}{2}.BC$

Giải

* *Tìm cách giải.* Từ đề bài, suy ra được. Gọi cho chúng ta liên tưởng tới góc của tam giác đều. Phân tích kết luận $AC = \frac{1}{2}.BC$, dễ dàng cho chúng ta hai hướng suy luận :

- *Hướng 1.* Tạo ra một đoạn thẳng bằng $2.AC$, sau đó chứng minh đoạn thẳng ấy bằng BC . Chú ý $\widehat{ACB} = 60^\circ$, nên chúng ta dựng điểm D trên tia CA sao cho $CD = 2.AC$. Sau đó chứng minh $BC = CD$. Bài toán được giải quyết.

- *Hướng 2.* Tạo ra một đoạn thẳng bằng $\frac{1}{2}.BC$, sau đó chứng minh đoạn

thẳng ấy bằng AC . Chú ý $\widehat{ACB} = 60^\circ$, nên chúng ta gọi trung điểm M của BC.

Sau đó chứng minh $CM = AC$. Bài toán được giải quyết.

* Trình bày lời giải

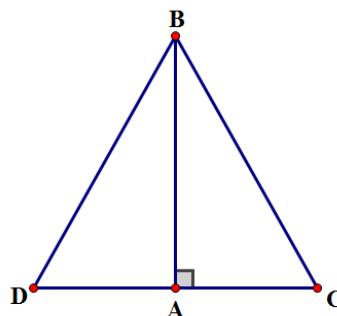
Cách 1. Dựng điểm D trên tia đối của tia AC sao cho $AD = AC$.

$$\triangle ABC \text{ và } \triangle ABD \text{ có } AD = AC$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90^\circ, AB \text{ là cạnh chung, do đó}$$

$$\triangle ABC = \triangle ABD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BC = BD$$

$$\triangle BCD \text{ có } \widehat{ACB} = 60^\circ, BC = BD \Rightarrow \triangle BCD \text{ đều}$$



$$\Rightarrow BC = CD$$

$$\text{Vậy } AC = \frac{1}{2}BC$$

Cách 2. Gọi M là trung điểm của BC

$\triangle ABC$ vuông tại A có M là trung điểm của BC, suy ra;

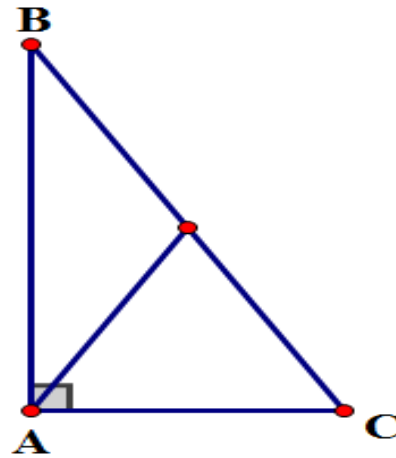
$MA = MB = MC$ (theo ví dụ 10, chuyên đề 8)

$\triangle MAC$ có $MA = MC$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ nên

$\triangle MAC$ là tam

giác đều, suy ra $AC = MC$. Vậy

$$AC = \frac{1}{2}.BC$$



* **Nhận xét.** Đây là một tính chất thú vị về tam giác vuông đặc biệt.

Tính chất được phát biểu như sau; Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° , thì cạnh đối diện với góc 30° bằng nửa cạnh huyền.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh BC. Biết rằng $AM = \frac{1}{2}.BC$, chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Giải

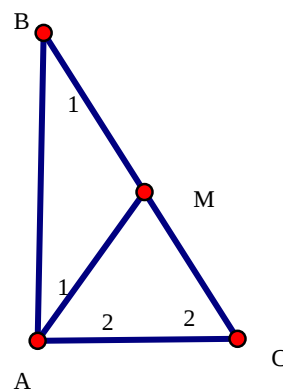
$\triangle AMC$ có $AM = CM$ nên $\triangle AMC$ cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{B_1}$$

$$\triangle ABC \text{ có } \widehat{A} + \widehat{B_2} + \widehat{C_1} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{A_2} + \widehat{A_1} = 180^\circ \Rightarrow 2.\widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$$

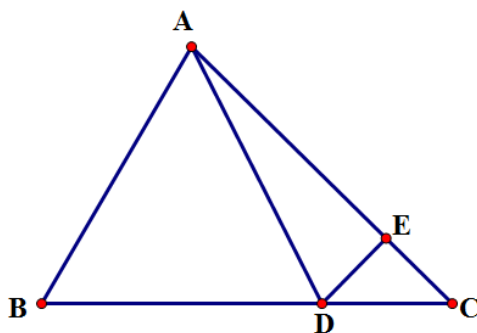
Vậy tam giác ABC vuông tại A



* **Nhận xét.** Đây là một tính chất thú vị để nhận biết tam giác vuông.

C. Bài tập vận dụng

9.1 Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB = AC$; $AD = AE$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{CDE}$



9.2 Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 80^\circ$ và điểm D trên cạnh AC. Lấy E thuộc AB, F thuộc BC sao cho $AE = AD$ và $CF = CD$. Tính số đo $\widehat{EDF}$.

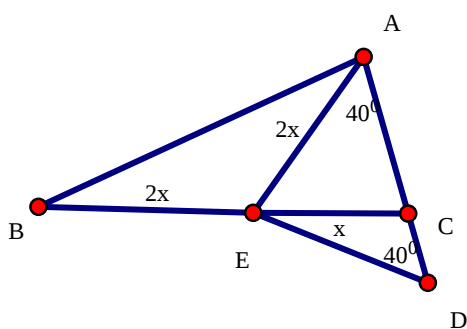
9.3. Cho tam giác ABC vuông tại B ($AB > BC$). Đường trung tuyến của đoạn thẳng AC cắt AC và AB lần lượt tại D và E. Biết rằng $\frac{\widehat{DCE}}{5} = \frac{\widehat{BCE}}{2}$. Tính số đo $\widehat{ACB}$.

9.4. Cho tam giác ABC có đường phân giác góc A cắt BC tại D. Biết rằng $\widehat{BAC} = 114^\circ$; $AB + BD = AC$. Tính số đo góc $\widehat{ACB}$.

9.5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA$, $CN = CA$. Tính góc MAN.

9.6. Cho tam giác ABC nhọn. Lấy D thuộc cạnh AC sao cho $AB = BD$, lấy điểm E thuộc AB sao cho $AC = CE$. Gọi F là giao điểm của BD và CE. Biết $\widehat{BFC} = 150^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

9.7. Tìm x trong hình vẽ sau:



9.8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$.

a) Chứng minh rằng tam giác ADE là tam giác cân.

b) Kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$), kẻ $CK \perp AE$ ($K \in AE$). Chứng minh rằng $BH = CK$.

c) Gọi O là giao điểm của BH và CK. Tam giác OBC là tam giác gì? Vì sao?

9.9. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên tia đối của tia BA lấy BE = BH. Đường thẳng EH cắt AC tại F. Chứng minh:

a) $FH = FA = FC$.

b) $AE = HC$.

9.10. Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} < 90^\circ$), đường cao AH, kẻ HI vuông góc với AB, kẻ HK vuông góc với AC. Gọi E, F lần lượt là điểm sao cho I; K lần lượt là trung điểm của HE và HF. Đường thẳng EF cắt AB; AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$;

b) HA là phân giác của $\widehat{MHN}$.

9.11. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tam giác đều ACD và BCE. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BD. Chứng minh rằng:

a) $AE = BD$

b) $\triangle CME = \triangle CNB$.

c) Tam giác MNC là tam giác đều.

9.12. Cho tam giác LMN có 3 góc đều nhọn. Dựng ra phía ngoài tam giác ấy ba tam giác đều LMA; MNB và NLC. Chứng minh rằng: $LB = MC = NA$.

9.13. Cho $\widehat{xOz} = 120^\circ$. Oy là tia phân giác của $\widehat{xOz}$; Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. M là điểm miền trong góc yOz. Vẽ MA vuông góc Ox, MB vuông góc Oy, MC vuông góc Ot. Chứng minh rằng: $OC = MA - MB$.

9.14. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Các đường thẳng vuông góc kẻ từ A và E với CD cắt BC ở G và H. Đường thẳng EH và đường thẳng AB cắt nhau ở M. Đường thẳng kẻ từ A song song với BC cắt MH ở I.

Chứng minh rằng:

a) $\triangle ACD = \triangle AME$

b) $\triangle AGB = \triangle MIA$

c) $BG = GH$

9.15. Cho tam giác ABC với $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^\circ$. Trên tia phân giác của góc ABC lấy điểm N sao cho $\widehat{BCN} = 12^\circ$. So sánh độ dài của CN và CA.

9.16. Cho $\triangle ABC$ có các tia phân giác trong của góc B và C cắt nhau tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại D và E. Chứng minh $BD + CE = DE$.

- 9.17.** Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC . Biết rằng AM là tia phân giác của góc BAC . Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân
- 9.18.** Cho M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đều $\triangle ABC$. Chứng minh rằng từ ba đoạn MA, MB, MC ta có thể dựng được một tam giác

Chuyên đề 10. ĐỊNH LÝ PYTAGO

A. Kiến thức cần nhớ

Trong toán học, định lý Pi-ta-go là một liên hệ giữa hình học phẳng giữa ba cạnh tam giác của một tam giác vuông.

- Pythagoras (sinh khoảng năm 580 đến 572 TCN – mất khoảng năm 500 đến 490 TCN) là một nhà triết học người Hy Lạp và là người sáng lập ra phong trào tín ngưỡng có tên học thuyết Pythagoras. Ông thường được biết đến như một nhà khoa học và toán học vĩ đại. Trong tiếng Việt, tên của ông thường được phiên âm từ tiếng Pháp (Pythagore) thành Py-ta-go.

- Pythagoras đã thành công trong việc chứng minh tổng 3 góc của một tam giác bằng 180° và nổi tiếng nhất nhờ định lý toán học mang tên ông. Ông cũng được biết đến là “cha đẻ của số học”. Ông đã có nhiều đóng góp quan trọng cho triết học và tín ngưỡng vào cuối thế kỷ 7 TCN. Về cuộc đời và sự nghiệp của ông, có quá nhiều các huyền thoại khiến việc tìm lại sự thật lịch sử không dễ dàng. Pythagoras và các học trò của ông tin rằng mọi sự vật đều liên hệ đến toán học, và mọi sự việc đều có thể tiên đoán trước qua các chu kỳ.

1. Định lý Py-ta-go

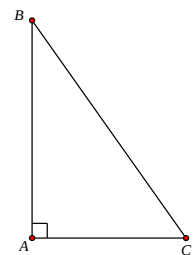
Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

2. Định lý Py-ta-go đảo

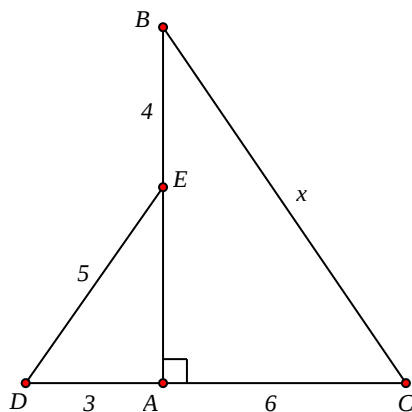
Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$$



B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho hình vẽ sau. Tìm x :



Giải.

- **Tìm cách giải:** Trong một tam giác vuông nếu biết độ dài hai cạnh thì tìm được độ dài cạnh thứ ba.

Xét $\triangle ADE$ ta tính được AE từ đó xét $\triangle ABC$, tính được BC .

- **Trình bày lời giải**

$\triangle ADE$ vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AD^2 + AE^2 = DE^2 \Rightarrow 3^2 + AE^2 = 5^2 \Rightarrow AE = 4$$

Từ đó suy ra $AB = 8$.

$\triangle ABC$ vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 10.$$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $3AB = 4AC$ và $BC = 20\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh AB và AC .

Giải.

- **Tìm cách giải.** Bài toán biết độ dài cạnh huyền tam giác vuông, tính độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông ấy, tất yếu suy nghĩ tới việc dùng định lý Py-ta-go.

Bài toán cho $3AB = 4AC$. Khai thác yếu tố này, chúng ta có thể giải bài toán theo ba cách.

- **Trình bày lời giải**

Cách 1. $\triangle ABC$ vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 100$$

$$\text{Từ đề bài: } 3AB = 4AC \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{AC}{3} \Rightarrow \frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{9}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{9} = \frac{AB^2 + AC^2}{16 + 9} = \frac{100}{25} = 4$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4 \cdot 16 \Rightarrow AB = 8\text{cm}.$$

$$AC^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow AC = 6\text{cm}.$$

Cách 2. $\triangle ABC$ vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$$

Từ đề bài, đặt: $3AB = 4AC = k (k > 0) \Rightarrow AB = \frac{k}{3}; AC = \frac{k}{4} \Rightarrow AB^2 = \frac{k^2}{9}; AC^2 = \frac{k^2}{16}$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} = 400 \Rightarrow 25k^2 = 57600 \Rightarrow k^2 = 2304$$

Với $k > 0 \Rightarrow k = 48$. Từ đó suy ra $AB = 16\text{cm}, AC = 12\text{cm}$.

Cách 3. $\triangle ABC$ vuông tại A. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$$

Từ đề bài ta đặt: $3 \cdot AB = 4 \cdot AC \Rightarrow AB = \frac{4 \cdot AC}{3} \Rightarrow AB^2 = \frac{16 \cdot AC^2}{9}$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{16AC^2}{9} + AC^2 = 400 \Rightarrow \frac{25 \cdot AC^2}{9} = 400 \Rightarrow AC^2 = 144$$

Từ đó suy ra $AB = 16\text{cm}, AC = 12\text{cm}$.

Ví dụ 3. Gấp một mảnh giấy hình chữ nhật như hình dưới đây sao cho điểm D trùng với điểm E là một điểm nằm trên cạnh BC. Biết rằng $AD = 10\text{cm}, AB = 8\text{cm}$. Tính độ dài của CE.

Giải.

• **Tìm cách giải.** Khi gấp hình, chúng ta lưu ý các yếu tố bằng nhau. Suy ra được $AE = AD$.
Để tính CE, chúng ta chỉ cần tính BE. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

• **Trình bày lời giải**

Ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ADF} = 90^\circ, AD = AE = 10\text{cm}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABE, ta có:

$$BE^2 = AE^2 - AB^2 \Rightarrow BE^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow BE = 6\text{cm}.$$

Suy ra $CE = 10 - 6 = 4\text{cm}$.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A; $\widehat{A} = 30^\circ; BC = a$. Lấy điểm D trên cạnh AC sao cho $\widehat{CBD} = 60^\circ$. Tính độ dài AD theo a.

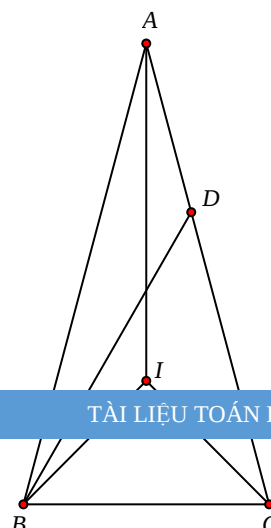
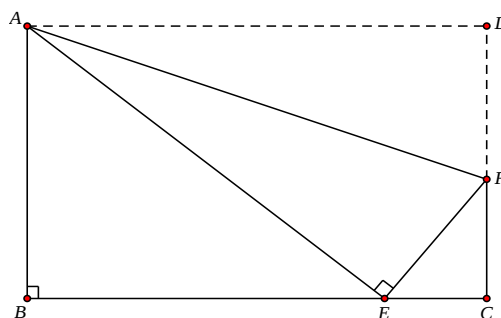
Giải.

Cách 1. $\triangle ABC$ cân tại A; $\widehat{A} = 30^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 75^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A vẽ $\triangle BIC$ vuông cân tại I thì I nằm trong $\triangle ABC$. Ta có:

$$\widehat{CBI} = 45^\circ; \widehat{IBA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{IBD} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} = 15^\circ$$

$\triangle IAB$ và $\triangle IAC$ có $AB = AC, IB = IC, AI$ là cạnh chung. Do đó $\triangle IAB = \triangle IAC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IAC} = 15^\circ.$$



$\triangle IAB$ và $\triangle DBA$ có $\widehat{IAB} = \widehat{DBA} (= 15^\circ)$; AB là cạnh chung; $\widehat{ABI} = \widehat{BAD} (= 30^\circ)$.

Do đó $\triangle IAB = \triangle DBA$ (g.c.g) $\Rightarrow IB = AD$.

$\triangle IBC$ vuông cân tại I , theo định lý Py-ta-go, ta có:

$$BI^2 + IC^2 = BC^2 = a^2 \Rightarrow 2.BI^2 = a^2 \Rightarrow BI = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Suy ra $AD = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Cách 2. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B , dựng tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = 45^\circ$. Trên Ax lấy điểm E sao cho $AE = BC$. Suy ra $\widehat{BAE} = 75^\circ$.

$\triangle ABC$ và $\triangle BAE$ có AB là cạnh chung;
 $\widehat{ABC} = \widehat{BAE} (= 75^\circ)$; $AE = BC$. Do đó $\triangle ABC = \triangle BAE$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AC = BE; \widehat{ABE} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{ABE} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{DBE} = 15^\circ$$

$\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có $AB = EB (= AC)$, $\widehat{ABD} = \widehat{EBD} (= 15^\circ)$, BD là cạnh chung. Do đó $\triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = ED \Rightarrow \triangle AED$ vuông cân tại D .

$\triangle AED$ vuông cân tại D , theo định lý Py-ta-go, ta có:

$$AD^2 + ED^2 = AE^2 = a^2 \Rightarrow 2.AD^2 = a^2 \Rightarrow AD = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy D là trung điểm của AB . Từ D kẻ DE vuông góc với BC . Chứng minh rằng: $EC^2 - EB^2 = AC^2$.

Giải.

• **Tìm cách giải.** Để chứng minh đẳng thức chỉ chứa các bình phương độ dài đoạn thẳng, chúng ta sử dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông, chú ý tạo ra vế trái, rồi biến đổi đại số tạo ra vế phải.

• **Trình bày lời giải.**

Vận dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông, ta có:

$$EC^2 = DC^2 - DE^2;$$

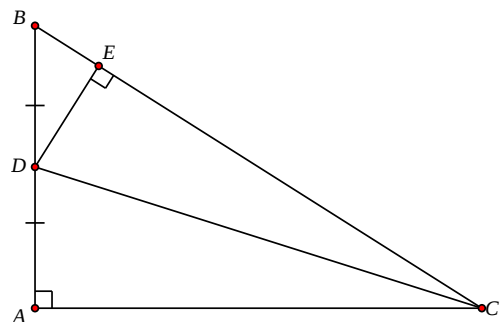
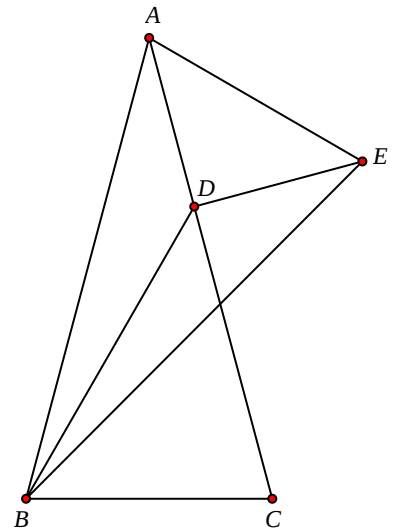
$$BE^2 = BD^2 - DE^2;$$

$$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = (DC^2 - DE^2) - (BD^2 - DE^2)$$

$$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = DC^2 - BD^2$$

$$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = DC^2 - AD^2 \text{ (Vì } BD=AD)$$

$$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = AC^2$$



Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Qua A kẻ đường thẳng xy không cắt đoạn thẳng BC . Kẻ BM và CN vuông góc với xy . Chứng minh:

- a) $\triangle ACN = \triangle BAM$.
- b) $CN + BM = MN$.
- c) $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí xy.
- d) Tìm điều kiện xy để A là trung điểm của MN.

Giải.

• **Tìm cách giải.**

Để chứng minh một biểu thức hình học không phụ thuộc vào vị trí của yếu tố hình học nào đó, ta biến đổi, chứng tỏ biểu thức đó bằng kết quả chỉ chứa yếu tố cố định.

Để tìm điều kiện hình học thỏa mãn yêu cầu nào đó, ta coi yêu cầu đó là giả thiết từ đó suy ra điều kiện cần tìm.

• **Trình bày lời giải**

- a) Ta có $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ; \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$.

$\triangle BAM$ và $\triangle ACN$ có:

$$\widehat{M} = \widehat{N} (= 90^\circ); \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1; AB = AC$$

Nên $\triangle BAM = \triangle ACN$ (ch – g.nh).

- b) $\triangle BAM = \triangle ACN$ nên $BM = AN; AM = CN$

Suy ra $BM + CN = AN + AM = MN$.

- c) Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông BAM:

$$BM^2 + AM^2 = AB^2 \text{ hay } BM^2 + CN^2 = AB^2$$

Suy ra $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí xy.

- d) $\triangle BAM = \triangle ACN$ nên $AM = CN$

$$AM = AN \Leftrightarrow AN = CN \text{ hay } \triangle ACN \text{ vuông cân tại } N \Leftrightarrow \widehat{A}_1 = 45^\circ \Leftrightarrow xy \parallel BC.$$

• **Nhận xét:**

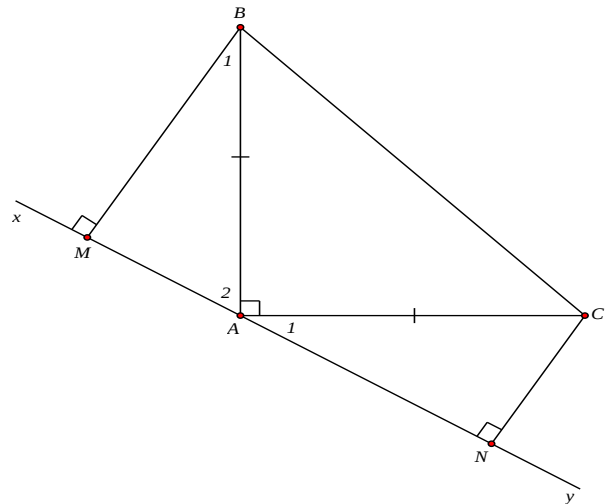
Nếu gọi I là trung điểm của BC ta còn có kết quả đẹp: $\triangle IMN$ vuông cân.

Ví dụ 7. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 50^\circ; \widehat{B} = 20^\circ$. Trên đường phân giác BE của góc ABC lấy điểm F sao cho $\widehat{FAB} = 20^\circ$. Gọi I là trung điểm của AF, K là giao điểm của tia EI với AB; M là giao điểm của CK với EB. Chứng minh rằng: $AI^2 + EI^2 = AF \cdot \left(MF + \frac{1}{2} KE \right)$.

Giải.

• **Tìm cách giải.** Phân tích kết luận $AI^2 + EI^2$ gợi cho chúng ta dùng định lý Py-ta-go.

Dựa vào hình vẽ, chúng ta phán đoán tam giác AIE vuông tại I. Sau đó chứng minh dự đoán này.



Phân tích từ giả thiết, với các yếu tố về góc, chúng ta tính được $\widehat{C}; \widehat{FAE} = 30^\circ; \widehat{ABE} = \widehat{CBE} = 10^\circ$. Từ đó tính được $\widehat{BEC} = 60^\circ$. Từ phân tích đó, chúng ta có lời giải sau:

• **Trình bày lời giải**

$\triangle ABF$ có $\widehat{AFE} = \widehat{BAF} + \widehat{ABF} = 30^\circ$ (Tính chất góc ngoài của tam giác).

Suy ra $\widehat{EAF} = \widehat{EFA} \Rightarrow \triangle EAF$ cân đỉnh E $\Rightarrow EA = EF$.

$\triangle EAI$ và $\triangle EFI$ có $IA = IF, EA = EF, EI$ là cạnh chung
 $\Rightarrow \triangle EAI = \triangle EFI$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{FEI}; \widehat{AIE} = \widehat{FIE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{FEI} = \frac{1}{2} \widehat{AEF} = 60^\circ.$$

Từ đó suy ra $\triangle CEB = \triangle KEB$ (g.c.g)

$$\Rightarrow EC = EK; BC = BK; \widehat{BEC} = \widehat{BEK} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle EKM = \triangle ECM$$
 (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{EMK} = \widehat{EMC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow EM = \frac{1}{2} EK \text{ (theo ví dụ 8, chuyên đề 9).}$$

$\triangle AIE$ vuông tại I suy ra:

$$AI^2 + EI^2 = AE^2 = AE \cdot EF = AE(MF + EM) = AE \left(MF + \frac{1}{2} EK \right).$$

Ví dụ 8. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC. Biết $AB = 2\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$ và $AM = \sqrt{3}\text{cm}$. Hãy tính số đo góc BAC và độ dài BC.

Giải.

Trên tia AM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của AD $\Rightarrow AD = 2\sqrt{3}\text{cm}$.

$\triangle AMB$ và $\triangle DMC$ có

$$MB = MC, \widehat{AMB} = \widehat{DMC}, MA = MD$$

$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle DMC$$
 (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = DC = 2\text{cm}.$$

$\triangle ADC$ có

$$DC^2 + AD^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16; AC^2 = 16 \Rightarrow DC^2 + AD^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow \triangle ADC \text{ vuông tại D (định lý Py-ta-go)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MBA} = 90^\circ.$$

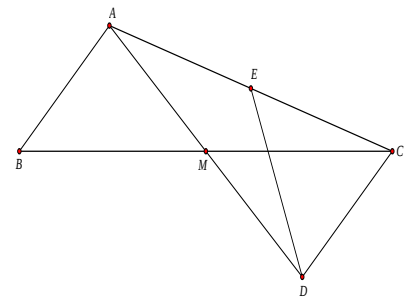
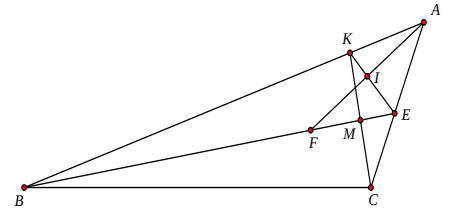
Gọi E là trung điểm của AC $\Rightarrow DE = 2\text{cm} = CE = DC$ (theo ví dụ 10, chuyên đề 8)

$$\Rightarrow \triangle DCE \text{ là tam giác đều.}$$

$$\Rightarrow \widehat{DCI} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

$$\triangle ABM \text{ vuông tại A nên } MB^2 = AB^2 + AM^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$$

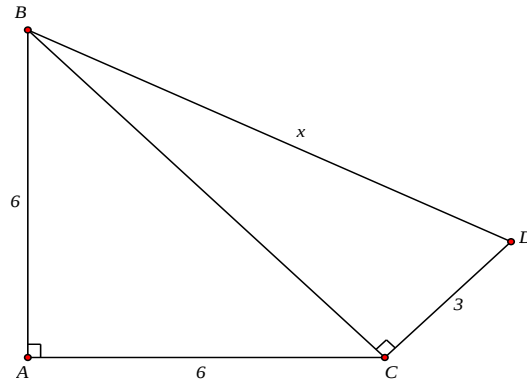
$$\Rightarrow MB = \sqrt{7}\text{cm} \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}\text{cm}.$$



C. Bài tập vận dụng

10.1. Cho tam giác ABC nhọn, kẻ AH vuông góc với BC tại H. Biết $AB = 10\text{cm}$; $AH = 8\text{cm}$; $HC = 15\text{cm}$. Tính chu vi tam giác ABC.

10.2. Tìm x trong hình vẽ sau:



10.3. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABM, CAN vuông cân tại A. BN và MC cắt nhau tại D.

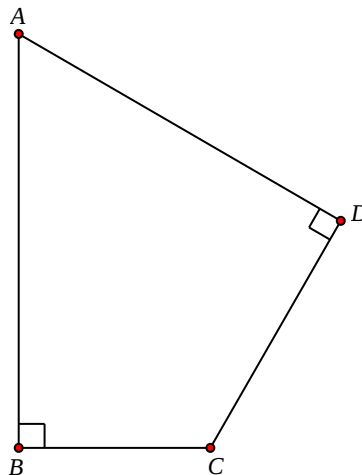
a) Chứng minh: $\triangle AMC = \triangle ABN$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

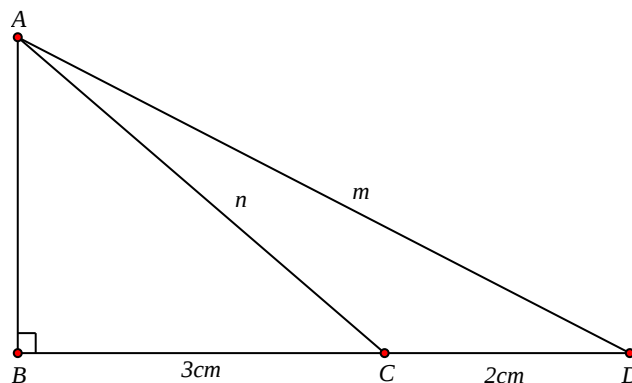
c) Cho $MB = 3\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $CN = 4\text{cm}$. Tính MN.

d) Chứng minh rằng DA là tia phân giác góc MDN.

10.4. Cho hình vẽ sau. Biết rằng $\hat{A} = 60^\circ$; $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$, $BC = 4\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AB?



10.5. Trong tam giác vuông dưới đây, biết $BC = 3\text{cm}$; $CD = 2\text{cm}$, $AC = n$, $AD = m$. Tính giá trị của $m^2 - n^2$.



10.6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Chứng minh rằng:
 $BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BC^2$.

10.7. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ $AH \perp BC$. Vẽ $HM \perp AB$, $HN \perp AC$. Chứng minh:

a) $\triangle AMN$ cân;

b) Chứng minh $MN \parallel BC$.

c) Chứng minh $AH^2 + BM^2 = AN^2 + BH^2$.

10.8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh:

$$BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}AC^2$$

10.9. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} < 90^\circ$. Kẻ BH vuông góc với AC. Chứng minh rằng:
 $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3BH^2 + 2AH^2 + CH^2$.

10.10. Cho tam giác ABC. Từ điểm M nằm bên trong tam giác kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$.

10.11. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng
 $AH^2 + BC^2 = CH^2 + AB^2$.

10.12. Cho đoạn thẳng BC cố định, M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Vẽ góc CBx sao cho $\widehat{CBx} = 45^\circ$, trên tia Bx lấy điểm A sao cho độ dài đoạn thẳng BM và BA tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm D bất kì thuộc đoạn thẳng BM. Vẽ BH và CI vuông góc với đường thẳng AD. Đường thẳng AM cắt CI tại N. Chứng minh rằng:

a) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi khi D di chuyển trên đoạn thẳng BM.

b) Tia phân giác của góc HIC luôn đi qua một điểm cố định.

10.13. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH, trên đó lấy điểm D. Trên tia đối HA lấy E sao cho $HE = AD$. Đường vuông góc với AH tại D cắt AC tại F. Chứng minh rằng EB vuông góc với EF.

10.14. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ$. Dựng bên ngoài tam giác ABC tam giác đều BCD. Chứng minh rằng $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

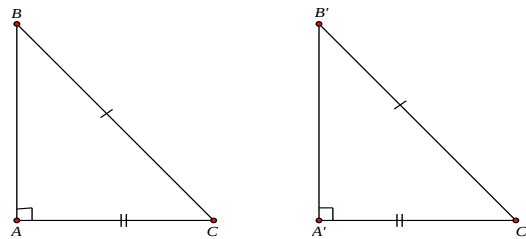
Chuyên đề 11. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. Kiến thức cần nhớ

Ngoài các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông, còn có trường hợp bằng nhau theo cạnh huyền – cạnh góc vuông.

- Nếu một cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c.h – c.g.v)}$$



B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc BAC.

Giải

* *Tìm cách giải:* Để chứng minh AD là tia phân giác của góc BAC, chúng ta cần chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. Do đó hiển nhiên cần chứng minh $\Delta BAD = \Delta CAD$

* *Trình bày lời giải:*

Xét ΔBAD và ΔCAD có: $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ ($=90^\circ$); AD là cạnh chung;

$AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

Do đó $\Delta BAD = \Delta CAD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (cặp góc tương ứng)

Vậy AD là tia phân giác góc BAC

* *Nhận xét:* Chúng ta còn có DA là tia phân giác của góc BDC, tam giác DBC cân tại D.

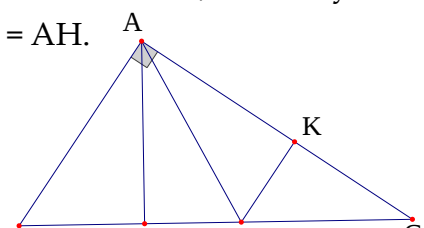
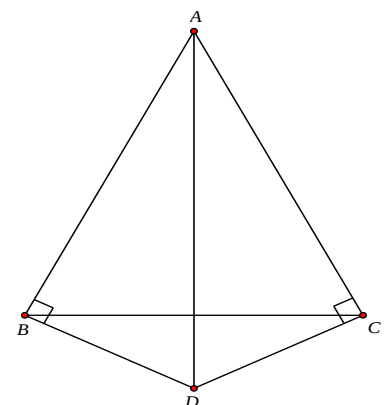
AD vuông góc với BC

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ AH vuông góc với BC. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BA. Kẻ $EK \perp AC$ ($K \in AC$). Chứng minh $AK = AH$.

Giải:

* *Trình bày lời giải:* ΔABE cân tại B nên $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$

$EK \parallel AB$ (vì cùng vuông góc với AC)



$$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{AEK} \text{ (so le trong)} \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AEK}$$

$$\Rightarrow \triangle AEH = \triangle AEK \text{ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra } AK = AH$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), M là trung điểm của BC. Đường trung trực của BC cắt tia phân giác của góc BAC tại điểm P. vẽ PH và PK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng AC

a) Chứng minh: $PB = PC$ và $BH = CK$

b) Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của PA và HK. Chứng minh: $OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = PA^2$

Giải

a) $\triangle PMB$ và $\triangle PMC$ có $\widehat{PMB} = \widehat{PMC}$ ($=90^\circ$), $MB = MC$, MP là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle PMB = \triangle PMC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow PB = PC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$\triangle PHA$ và $\triangle PKA$ có $\widehat{PHA} = \widehat{PKA}$ ($=90^\circ$), $\widehat{PAH} = \widehat{PAK}$, AP là cạnh chung.

$$\Rightarrow \triangle PHA = \triangle PKA \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow PH = PK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$\triangle PHB$ và $\triangle PKC$ có $\widehat{PHB} = \widehat{PKC} = 90^\circ$, $PB = PC$, $PH = PK$

$$\Rightarrow \triangle PHB = \triangle PKC \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow BH = CK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Kẻ $BE \parallel AC$ ($E \in HK$) $\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{AKH}$ (hai góc đồng vị) (1)

Mà $\triangle PHA = \triangle PKA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AH = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \triangle AHK \text{ cân tại } A \Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{AKH} \text{ (tính chất tam giác cân)} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{AHK}$ hay $\widehat{BEH} = \widehat{BHE}$

$$\Rightarrow \triangle BEH \text{ cân tại } B \Rightarrow BH = BE$$

b) Mà $BH = CK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BE = CK$

$\triangle BEM$ và $\triangle CKM$ có $MB = MC$, $\widehat{EBM} = \widehat{KCM}$, $BE = CK$

$$\Rightarrow \triangle BEM = \triangle CKM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{CMK} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà $\widehat{BME} + \widehat{EMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{CMK} + \widehat{EMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EMK} = 180^\circ \Rightarrow E, M, K \text{ thẳng hàng}$$

Mà $E \in HK \Rightarrow H, M, K$ thẳng hàng.

c) $\triangle AOH$ và $\triangle AOK$ có $AH = AK$, $\widehat{OAH} = \widehat{OAK}$, AO là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle AOH = \triangle AOK, \text{ suy ra } \widehat{AOH} = \widehat{AOK}, \text{ mà hai góc này kề bù nên } \widehat{AOH} = \widehat{AOK} = 90^\circ$$

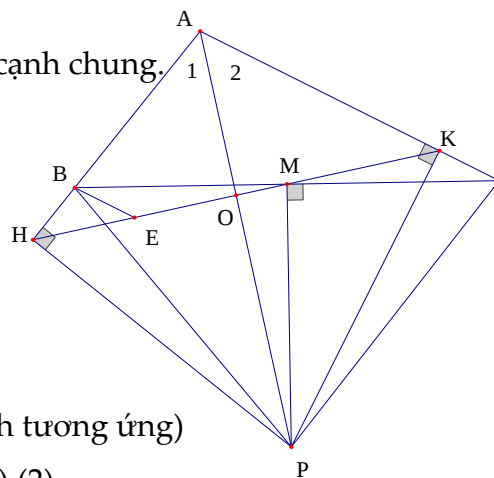
$$\Rightarrow PA \perp HK \text{ tại } O$$

Áp dụng định lý Pitago vào các tam giác vuông tại O là OAH, OAK, OPH, OPK ta có :

$$OA^2 + OH^2 = AH^2; \quad OA^2 + OK^2 = AK^2$$

$$OP^2 + OH^2 = PH^2; \quad OP^2 + OK^2 = PK^2$$

$$\Rightarrow 2(OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2) = 2(AH^2 + PH^2) \text{ (vì } AH = AK \text{ và } PH = PK)$$



$$\Rightarrow OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = AH^2 + PH^2$$

Mà tam giác PAH vuông tại H $\Rightarrow AH^2 + PH^2 = PA^2$ (định lý Pi ta go)

$$\Rightarrow OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = PA^2$$

C. Bài tập vận dụng

11.1. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy D, E (D nằm giữa B và E sao cho BD = CE. Vẽ DM $\perp$ AB tại M, EN $\perp$ AC tại N. Gọi K là giao điểm của MD và NE. Chứng minh rằng:

a) $\triangle MBD = \triangle NCE$

b) $\triangle MAK = \triangle NAK$

11.2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE. Kẻ BH $\perp$ AD tại H, kẻ CK $\perp$ AE tại K. Chứng minh rằng:

a) $\triangle BHD = \triangle CKE$

b) $\triangle AHB = \triangle AKC$

c) BC // HK

11.3. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, AM là tia phân giác góc A. Kẻ MH vuông góc với AB, MK vuông góc với AC. Chứng minh rằng:

a) MH = MK

b) Tam giác ABC cân

11.4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 30^\circ$, đường cao AH. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho HD = HB. Từ C kẻ CE $\perp$ AD. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABD là tam giác đều

b) EH song song với AC

11.5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BD = BA. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E. Chứng minh rằng AE = DE.

Đường phân giác góc ngoài tại C cắt đường thẳng BE tại K. Tính $\widehat{BAK}$?

11.6. Cho tam giác ABC có AB = AC, $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D. Kẻ BK vuông góc với đường thẳng AD tại K. Chứng minh rằng KM là tia phân giác của $\widehat{BKD}$.

11.7. Cho tam giác DEF vuông tại D và DF > DE. Kẻ DH vuông góc với EF (H thuộc cạnh EF) Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $\widehat{MDH} = \widehat{E} - \widehat{F}$

11.8. Cho tam giác ABC vuông cân đáy BC. Gọi M, N là trung điểm của AB, AC. Kẻ NH $\perp$ CM tại H, kẻ HE $\perp$ AB tại E. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABH cân

b) HM là tia phân giác góc BHE

Chuyên đề 12. VẼ THÊM HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN

A. Kiến thức cần nhớ

Trong một số bài toán ở các chuyên đề trước, chúng ta đã phải vẽ thêm hình phụ thì mới giải được. Trong chuyên đề này, chúng ta hệ thống một vài kỹ thuật vẽ hình phụ để giải toán.

1. Mục đích của việc vẽ thêm hình phụ

Khi vẽ thêm đường phụ, chúng ta thường nhằm các mục đích sau đây:

Đem những điều kiện đã cho của bài toán và những hình có liên quan đến chứng minh tập hợp (ở một hình mới) làm cho chúng có liên quan đến nhau,

Tạo nên đoạn thẳng (hay góc) bằng tổng, hiệu gấp đôi hay bằng $\frac{1}{2}$ đoạn thẳng (hay góc) cho trước để đạt được chứng minh của bài tập hình học.

Tạo nên những đại lượng mới (đoạn thẳng hay góc) bằng nhau, thêm vào những đại lượng bằng nhau mà đề bài đã cho để giúp cho việc chứng minh.

Tạo nên một hình mới, để có thể áp dụng một định lý nào đó.

Biến đổi kết luận, hình vẽ làm cho bài toán trở lên dễ chứng minh hơn.

2. Các loại đường phụ thường vẽ:

- Kéo dài một đoạn thẳng cho trước với một độ dài tùy ý hoặc cắt một đường thẳng khác.
- Nối hai điểm cho trước hoặc cố định
- Từ một điểm cho trước dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước
- Dựng đường phân giác của một góc cho trước
- Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước hợp thành với đường thẳng khác một góc bằng một góc cho trước.

* **Chú ý:** Khi vẽ đường phụ phải có mục đích không vẽ tùy tiện

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh $BC = AD + BD$

Giải

* **Tìm cách giải:** Đây là bài toán khó tuy nhiên nếu bạn biết lưu tâm đến giả thiết của bài toán và phương pháp kẻ đường phụ thì bài toán trở nên đơn giản. Phân tích kết luận, chúng ta có hai hướng vẽ đường phụ cho bài toán này.

- Vì A, D, B không thẳng hàng, mà kết luận $AD + BD = BC$, do vậy chúng ta vẽ thêm hình phụ sao cho $AD + BD$ bằng một đoạn thẳng. Sau đó chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC.

- Phân tích kết luận chúng ta cũng có thể nghĩ tới việc tách BC thành tổng hai đoạn thẳng mà trong đó có một đoạn thẳng bằng BD (hoặc AD) và chứng minh đoạn thẳng còn lại bằng AD (hoặc BD).

- Trong hai hướng suy nghĩ trên, chúng ta lưu ý đến giả thiết là tam giác cân và biết số đo góc để tính tất cả các góc có thể.

* **Trình bày lời giải:**

Cách vẽ 1: Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$

$\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$ nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$.

Ta có $\triangle ABD = \triangle EBD (c.g.c) \Rightarrow AD = DE$.

$\widehat{BED} = \widehat{BAD} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \widehat{D_3} = 60^\circ$.

Mà BD là phân giác của góc B nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = 20^\circ$

Mặt khác: $\widehat{BDC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{D_4} = 60^\circ$

Từ đó ta có :

$\triangle KDC = \triangle EDC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{DKC} = \widehat{DEC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow \widehat{KCB} = 80^\circ \Rightarrow \triangle BKC$ cân tại B $\Rightarrow BC = BK = BD + DK = BD + AD$

Vậy $BC = BD + AD$

Cách vẽ 2: Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$, lấy điểm N sao cho $BN = BD$

Ta có: $\triangle ABD = \triangle MBD (c.g.c) \Rightarrow AD = DM (*)$,

$\widehat{A} = \widehat{BMD} = 100^\circ$

Do $\widehat{BMD} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{DNM} = 80^\circ (1)$

Mặt khác $\triangle BDN$ cân tại B nên

$\widehat{BDN} = \widehat{BND} = 80^\circ (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\triangle MDN$ cân tại D nên

$DM = DN (**)$

Ta có: $\widehat{NDC} = \widehat{NCD} = 40^\circ$

$\Rightarrow \triangle DNC$ cân tại N, nên $NC = ND (***)$

Từ (*) (**) (***) $\Rightarrow AD = NC \Rightarrow BC = BN + NC \Rightarrow BC = BD + AD$

Cách vẽ 3:

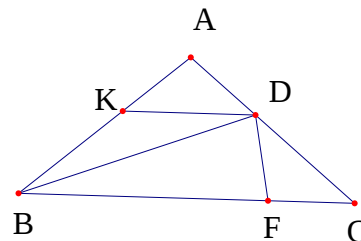
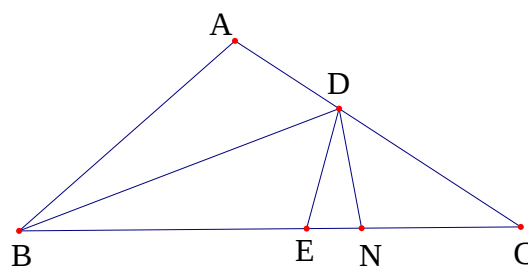
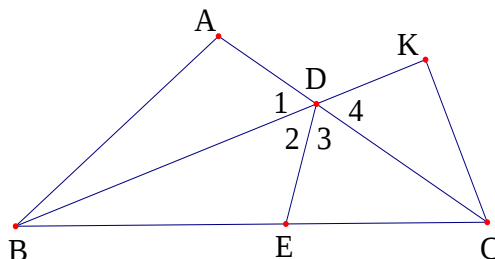
Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BD$, trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $AK = AD$. Ta sẽ chứng minh được

tam giác BKD cân tại K nên $KB = KD$, mà $KB = DC$ nên

$KD = DC$ do đó $\triangle AKD = \triangle FDC (g.c.g) \Rightarrow AD = FC$

$\Rightarrow BC = BF + FC = BD + AD$

Vậy $BC = BD + AD$



Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D và E thuộc BC sao cho $\widehat{DAE} = 45^\circ$ (D nằm giữa B và E). Chứng minh rằng: $BD^2 + CE^2 = DE^2$

Giải

***Tìm cách giải:**

Từ kết luận dễ nhận thấy BD, CE, DE thỏa mãn định lý Pitago. Do vậy ta sẽ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng BD, CE, DE trong đó DE là độ dài cạnh huyền. Do BD, CE, DE cùng nằm trên một đường thẳng. Do vậy cần kẻ thêm đường phụ. Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC). Chỉ cần chứng minh $KE = DE$

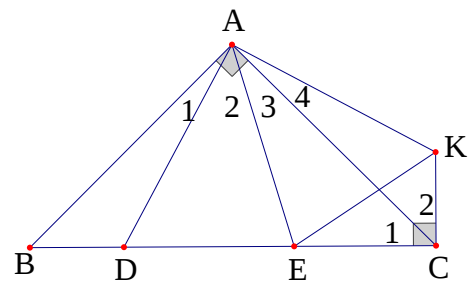
*** Trình bày lời giải:**

Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC)

Ta có $\widehat{C_2} = 90^\circ - \widehat{C_1} = 90^\circ - 45^\circ = \widehat{B}$, $CK = BD$ (theo cách dựng), $AC = AB$ (giả thiết)

Do đó $\triangle ACK = \triangle ABD$ (c.g.c) suy ra $AK = AD$,
 $\widehat{A_4} = \widehat{A_1}$

Ta lại có $\widehat{A_2} = 45^\circ$ (giả thiết) nên $\widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 45^\circ$ suy ra
 $\widehat{EAK} = \widehat{A_4} + \widehat{A_3} = 45^\circ = \widehat{EAD}$



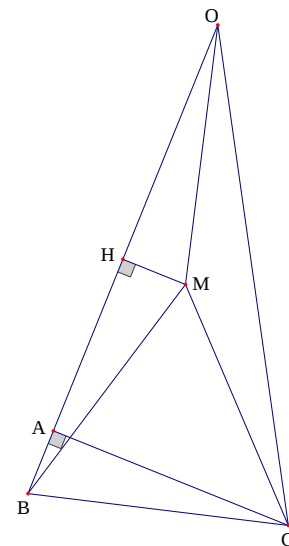
Xét $\triangle EAK$ và $\triangle EAD$ có $AD = AK$, AE là cạnh chung,
 $\widehat{EAK} = \widehat{EAD} (=45^\circ) \Rightarrow \triangle EAK = \triangle EAD$ (c.g.c) $\Rightarrow KE = DE$

Từ đây, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A,

$\widehat{C} = 15^\circ$. Trên tia BA lấy điểm O sao cho

$BO = 2 AC$. Chứng minh OBC cân.



Giải

*** Tìm cách giải:**

Trong bài toán trên vì phát hiện thấy $\widehat{C} = 15^\circ$ suy ra $\widehat{B} = 75^\circ$ mà

$75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$ là số đo của mỗi góc trong tam giác đều. Điều này gợi ý cho chúng ta vẽ tam giác đều BCM như hình vẽ. Nhờ các cạnh của tam giác đều bằng nhau, các góc của tam giác đều bằng 60° , chúng ta chứng minh được $\triangle HMB = \triangle ABC$ (c.g.c); $\triangle MOB = \triangle MOC$ (c.g.c)

dẫn tới $\triangle OBC$ cân tại O. Do đó nên nghĩ tới việc vận dụng vẽ thêm tam giác đều vào giải toán.

*** Trình bày lời giải**

Ta có $\triangle ABC$: $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{C} = 15^\circ$ (gt); $\Rightarrow \hat{B} = 75^\circ$

Vẽ tam giác đều BCM (M và A thuộc nửa mặt phẳng bờ BC)

Ta có: $\widehat{OBM} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$

Gọi H là trung điểm của OB $\Rightarrow HO = HB = \frac{1}{2} OB$

Mặt khác $BO = 2 AC$ (gt) nên $AC = \frac{1}{2} OB$, từ đó ta có $AC = BH$

Xét $\triangle HMB$ và $\triangle ABC$ có: $BH = AC$ (cmt) $\widehat{HBM} = \widehat{ACB} (=15^\circ)$

$MB = BC$ (cạnh tam giác đều BMC)

Do đó $\triangle HMB = \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{H} = \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow MH \perp OB$

$\triangle HMB$ và $\triangle MOH$ có $\widehat{MHB} = \widehat{MHO} = 90^\circ$; $BH = HO$; MH chung

$\Rightarrow \triangle MBH = \triangle MOH \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{BOM} \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{BOM} = 15^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BMO} = 180^\circ - 2.15^\circ = 150^\circ$

Từ đó $MB = MC$, $\widehat{CMO} = \widehat{BMO} (=150^\circ)$, OM là cạnh chung

Do đó $\triangle MOB = \triangle MOC$ (c.g.c) $\Rightarrow OB = OC$

Vậy tam giác OBC cân tại O (điều phải chứng minh)

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE = 2CD$. Chứng minh rằng: $\widehat{EDB} = 90^\circ$

Giải

*** Tìm cách giải:**

Từ giả thiết $BE = 2CD$, gợi ý cho chúng ta vẽ trung điểm F của BE. Muốn chứng minh $\widehat{EDB} = 90^\circ$ mà $FB = FE$, nên chúng ta chỉ cần chứng minh $BF = FD = FE$.

*** Trình bày lời giải**

Cách 1: Gọi F là trung điểm của BE thì $FB = CD$ (cùng bằng $\frac{1}{2} BE$). Mà $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A) nên $AF = AD \Rightarrow \triangle AFD$ cân tại A.

Từ đó $\widehat{AFD} = \widehat{ABC}$ (cùng bằng $\frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$).

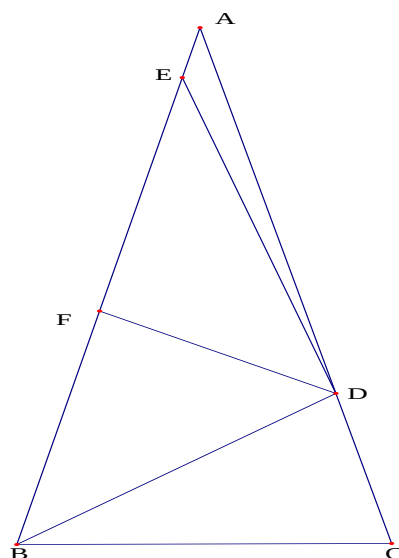
Suy ra $DF \parallel BC$ (hai góc đồng vị bằng nhau). Nên

$\widehat{FBD} = \widehat{FDB}$ (cùng bằng $\widehat{DBC}$). Điều này dẫn đến

$\triangle FBD$ cân tại F, hay $FD = FB = \frac{1}{2}BE$

$\triangle BDE$ có F là trung điểm cạnh BE và $FD = \frac{1}{2}BE$ nên

$\triangle BDE$ vuông tại D hay $\widehat{EDB} = 90^\circ$ (điều phải chứng minh)



Cách 2: Từ D kẻ $DF \parallel BC$ ($F \in AB$). Suy ra $\widehat{FDB} = \widehat{CDB}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{FBD} = \widehat{FDB} \Rightarrow \triangle FBD$ cân tại F $\Rightarrow BF = FD$.

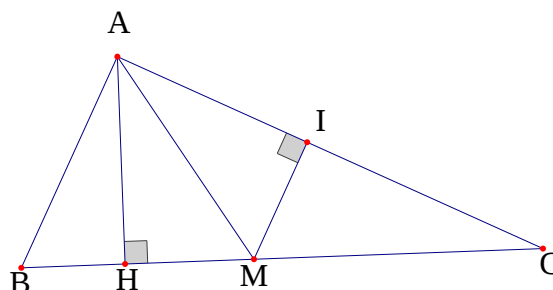
Mặt khác, $\triangle AFD$ và $\triangle ABC$ cân tại A, suy ra $AF = AD$, $AB = AC \Rightarrow BF = CD$.

Từ đó suy ra $BF = FD = FE \Rightarrow \triangle BDE$ vuông tại D hay $\widehat{EDB} = 90^\circ$ (điều phải chứng minh)

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$), kẻ $AH \perp BC$ tại

H. Gọi M là trung điểm của BC. Biết rằng AM chia góc A thành 3 góc bằng nhau. Chứng minh rằng:

- $\triangle ABC$ là vuông.
- $\triangle ABM$ là đều.



Giải

* Tìm cách giải. Muốn chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại A ta cần kẻ thêm đường thẳng vuông góc với AC và chứng minh đường thẳng đó song song với AB, từ đó suy ra $AB \perp AC$ và suy ra $\widehat{A} = 90^\circ$

* Trình bày lời giải.

a) Vẽ MI vuông góc với AC.

$\triangle AHM$ và $\triangle AIM$ có $\widehat{AHM} = \widehat{AIM} = 90^\circ$, AM là cạnh chung, $\widehat{HAM} = \widehat{IAM}$
 $\Rightarrow \triangle AHM = \triangle AIM$ (c.h - g.n) $\Rightarrow MI = MH$.

$\triangle AHM$ và $\triangle AHB$ có $\widehat{AHM} = \widehat{AHB} = 90^\circ$, AH là cạnh chung, $\widehat{HAM} = \widehat{HAB}$

$$\Rightarrow \triangle AHM = \triangle AHB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BH = MH.$$

$$\Rightarrow BH = MH = \frac{1}{2}BM \Rightarrow MI = \frac{1}{2}MC \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ; \widehat{HAC} = 60^\circ.$$

Vậy $\widehat{BAC} = (60^\circ.3):2 = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ là vuông tại A.

b) Ta có : $\widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$; $AM = MB = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle ABM$ cân có một góc bằng $60^\circ \Rightarrow \triangle ABM$ đều.

Ví dụ 6*. Cho $\triangle ABC$ với $\widehat{BAC} = 40^\circ$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi D và E theo thứ tự là các điểm nằm trên cạnh AB và AC sao cho $\widehat{DCB} = 70^\circ$ và $\widehat{EBC} = 40^\circ$; F là giao điểm của DC và EB. Chứng minh rằng : AF vuông góc với BC.

Giải

Trên AC lấy điểm N sao cho $\widehat{ABN} = 40^\circ$. Ta có:

$\widehat{ABN} = \widehat{BAN} = 40^\circ$ nên $\triangle ABN$ cân tại N, suy ra

$\widehat{BNC} = 80^\circ$ (tính chất góc ngoài của tam giác). Do

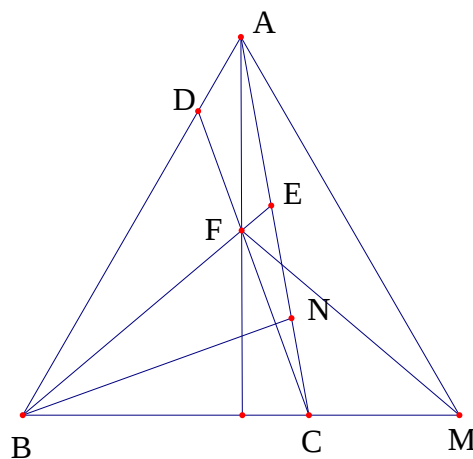
đó $\widehat{BNC} = \widehat{BCN} = 80^\circ$, suy ra $\triangle BFC$ cân tại B

$$\Rightarrow BN = BC(1)$$

$\triangle BFC$ có $\widehat{FBC} = 40^\circ, \widehat{FCB} = 70^\circ$ nên $\widehat{BFC} = 70^\circ$

Vậy $\triangle BFC$ cân tại B $\Rightarrow BC = BF(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BN = BF(3)$. Kéo dài BC lấy điểm M sao cho $BM = BA \Rightarrow \triangle ABM$ đều.



Xét $\triangle ABN$ và tam giác $\triangle MBF$ có $AB = MB; BN = BF$ (do(3)), $\widehat{ABN} = \widehat{FBM} = 48^\circ$

Do đó $\triangle ABN = \triangle MBF$ (c.g.c). Mà $\triangle ABN$ cân tại N, suy ra $\triangle MBF$ cân tại F. Từ $AB = AM$ (do

$\triangle ABM$ đều), $FB = FM \Rightarrow \triangle ABF = \triangle AMF$ (c.c.c) suy ra $\widehat{BAF} = \widehat{MAF}$

Mặt khác, $\triangle ABM$ đều nên AF vuông góc với BC.

Nhận xét:

- Bài toán này tương đối khó vì phải vẽ thêm nhiều đường phụ.

-Ngoài cách giải trên đây, có thể dựng thêm tam giác đều BCK hoặc tam giác đều AFH, cũng đi đến kết luận của bài toán

C. Bài tập vận dụng

12.1 Cho $\triangle ABC$ ($AB = BC$), trên cạnh AB lấy điểm D, Trên phần kéo dài của cạnh AC lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi F là giao điểm của DE và BC. Chứng minh $DF = FE$

12.2 Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 45^\circ$; $\widehat{A} = 15^\circ$. Trên tia đối của CB lấy D sao cho $CD = 2.CB$. Tính $\widehat{ADB}$

12.3 Ở trong góc nhọn $\widehat{xOy}$ vẽ tia Oz sao cho $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$. Qua điểm A thuộc Oy vẽ AH vuông góc Ox cắt Oz ở B . Trên tia Bz lấy D sao cho $BD=OA$. Chứng minh tam giác AOD cân

12.4 Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC}=50^\circ$; $\widehat{BAC}=70^\circ$. Tia phân giác góc ABC cắt AB tại M . Trên MC lấy điểm N sao cho $\widehat{MBN}=40^\circ$. Chứng minh rằng $BN=MC$

12.5 Cho tam giác đều ABC . Trên tia đối của tia CB , lấy điểm D sao cho $\widehat{CAD}=15^\circ$. Đường cong góc với BC tại C cắt AD ở E . Tia phân giác của góc B cắt AD ở K . Chứng minh rằng $AK=ED$.

12.6 Cho tam giác ABC với trung điểm M của BC . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB kẻ đoạn thẳng AE vuông góc với AB sao cho $AB=AE$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC kẻ đoạn thẳng $AF=AC$ và AF vuông góc với AC . Chứng minh rằng $EF=2AM$ và $EF \perp AC$

12.7 Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi E là trung điểm của cạnh AC . Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE tại D . Chứng minh rằng $AD=2ED$

12.8. Về phía ngoài của tam giác ABC , dựng tam giác XBC cân tại X có góc XBC bằng 120° và các tam giác YCA , ZAB đều. Chứng minh XA vuông góc với YZ .

12.9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=54^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng AM của và đường phân giác trong CD của tam giác cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $CE=AB$

12.10. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB < AC$. Vẽ AH vuông góc với BC . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD=AB$. Gọi I là trung điểm của BD . Chứng minh rằng $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$

Chuyên đề 13. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

A. Kiến thức cần nhớ

Ba điểm thẳng hàng là ba điểm cùng thuộc một đường thẳng. Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, chúng ta có thể sử dụng một số phương pháp sau đây:

1. Phương pháp 1

Nếu $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} + \widehat{CBD} = 180^\circ$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng

2. Phương pháp 2

Nếu $AB \parallel a$ và $AC \parallel a$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng

(Cơ sở của phương pháp này là : tiên đề O-clit)

4. 3 Phương pháp 3.

5. Nếu $AB \perp a$; $AC \perp a$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng

(cơ sở của phương pháp này là : có một và chỉ một)

4. Phương pháp 4.

Nếu hai tia OA và OB là tia phân giác của góc xoy thì ba điểm O, A, B thẳng hàng

(cơ sở của phương pháp này là mỗi góc khác góc bẹt có một và chỉ một tia phân giác

Hoặc: hai tia OA và OB cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, mà $\widehat{xOA} = \widehat{xOB}$ thì ba điểm O, A, B thẳng hàng)

5. Phương pháp 5

Nếu K là trung điểm của BD, K' là giao điểm của BD, AC. Nếu K' là trung điểm của BD thì $K \equiv K'$ và K, B, D thẳng hàng

(cơ sở của phương pháp này là: mỗi đoạn thẳng chỉ có một trung điểm)

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông ở A, M là trung điểm AC. Kẻ tia Cx vuông góc với CA (tia Cx và điểm B ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC). Trên tia Cx lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Chứng minh ba điểm B, M, D thẳng hàng.

Giải

Tìm cách giải: Muốn B, M, D thẳng hàng thì $\widehat{AMB} + \widehat{BMD} = 180^\circ$. Nên cần chứng minh $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$

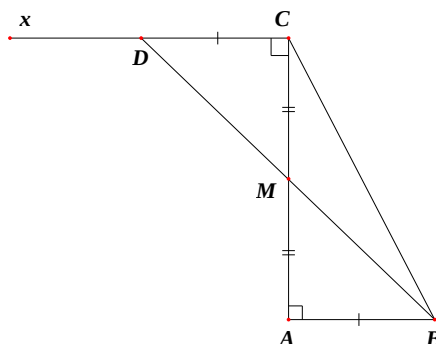
Trình bày lời giải:

$\triangle AMB$ và $\triangle DMC$ có :

$AB = DC$ (gt), $\widehat{BAM} = \widehat{DCM} = 90^\circ$

$MA = MC$ (M là trung điểm của AC)

Do đó $\triangle AMD = \triangle CMD$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{DCM}$



Mà $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} = 180^\circ$ kề bù nên $\widehat{BMC} + \widehat{CMD} = 180^\circ$

Vậy ba điểm B; M; D thẳng hàng

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm của AM. Trên tia AC lấy điểm N sao cho C là trung điểm của AN. Chứng minh ba điểm M, C, N thẳng hàng.

Giải

Tìm cách giải. Chứng minh $CM \parallel BD$ và $CN \parallel BD$ từ đó suy ra M, N, C thẳng hàng

Trình bày lời giải:

$\triangle AOD$ và $\triangle COB$ có $OA = OC$

(vì O là trung điểm của AC)

$\widehat{AOD} = \widehat{COB}$ (hai góc đối đỉnh) $OD = OB$

(Vì O là trung điểm BD)

Do đó $\triangle AOD = \triangle COB$

Suy ra: $\widehat{DAO} = \widehat{OCB}$ Mà hai góc ở vị trí so le trong, do đó $AD \parallel BC$, nên $\widehat{DAB} = \widehat{CBM}$ (ở vị trí đồng vị)

$\triangle DAB$ và $\triangle CBM$ có: $AD = BC$ (do $\triangle AOD = \triangle COB$), $\widehat{DAB} = \widehat{CBM}$

$AB = BM$ (B là trung điểm của AM). Vậy $\triangle DAB = \triangle CBM$ (c.g.c) suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{BMC}$. Do đó $DC \parallel CM$ (1)

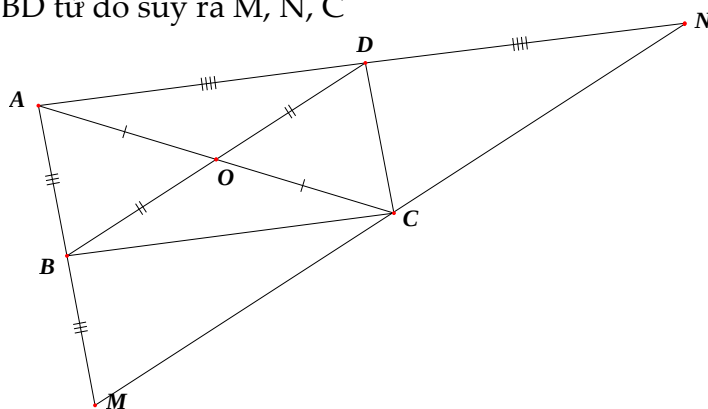
Lập luận tương tự ta có $BD \parallel CN$. (2)

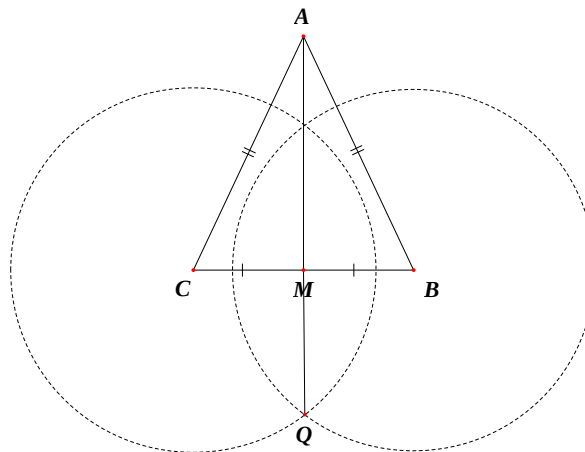
Từ (1) và (2), theo tiên đề Ơ Clit suy ra ba điểm M, N, C thẳng hàng

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC

a) Chứng minh $AM \perp BC$

b) vẽ đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm P và Q. Chứng minh rằng ba điểm A, P, Q thẳng hàng





Tìm cách giải : Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng. Chúng ta có thể chứng minh AM, BM, QM cùng vuông góc với BC

Hoặc AP và AQ là tia phân giác của góc BAC

Trình bày lời giải:

a) Tam giác ABM và ACM, có $AB=AC$ (giả thiết) AM chung, $MB=MC$ (M là trung điểm của BC)

Vậy tam giác ABM và ACM (c.c.c) do đó $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng) mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ hai góc kề bù nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$

Do đó $AM \perp BC$ (điều phải chứng minh)

b) Chứng minh tương tự ta được $\triangle BFM = \triangle CPM$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{PMC} = \widehat{PMB}$ mà $\widehat{PMC} + \widehat{PMB} = 180^\circ$ nên $\widehat{PMC} = \widehat{PMB} = 90^\circ$

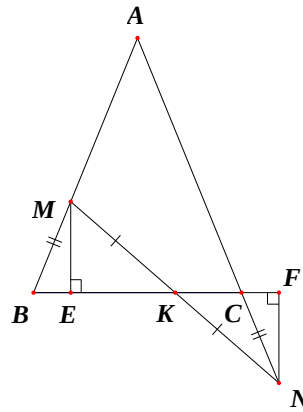
Do đó $PM \perp BC$

Lập luận tương tự : $QM \perp BC$

Từ điểm M trên BC có $AM \perp BC, PM \perp BC, QM \perp PC$ nên ba điểm M, P, Q thẳng hàng

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối CA lấy điểm N sao cho $MB=CN$. Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh ba điểm B, K, C thẳng hàng

Giai



Cách 1: Kẻ $ME \perp BC$, $NF \perp BC$ tam giác BME và CNF vuông tại E và F có $BM = CN$
 $\widehat{MBE} = \widehat{NCF}$. Do đó $\triangle BME = \triangle CNF$ suy ra $ME = NF$. Gọi K là giao điểm BC và MN.

Xét $\triangle MEK$ và $\triangle NFK$ vuông góc ở E và F có $ME = NF$ góc EMK bằng góc ENK (so le trong của ME và FN). Vậy $\triangle MEK = \triangle NFK$ do đó $MK = NK$. Vậy K' là trung điểm MN nên $K \equiv K'$
 Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng

Cách 2: kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in BC$)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{MEB}$ (hai góc đồng vị)

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{BME} = \widehat{MEB}$

Vậy tam giác MBE cân tại M

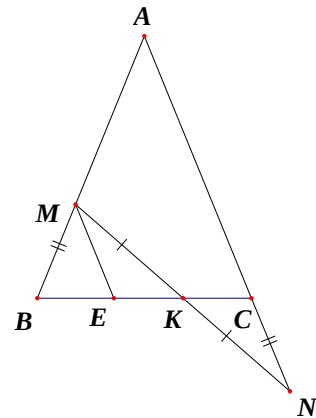
Do đó $MB = ME$ kết hợp với giả thiết $MB = NC$ ta được $ME = CN$.

Gọi k là giao điểm của BC và MN tam giác MEK và NCK có $\widehat{KME} = \widehat{KNC}$ (so le trong của $ME \parallel AC$)

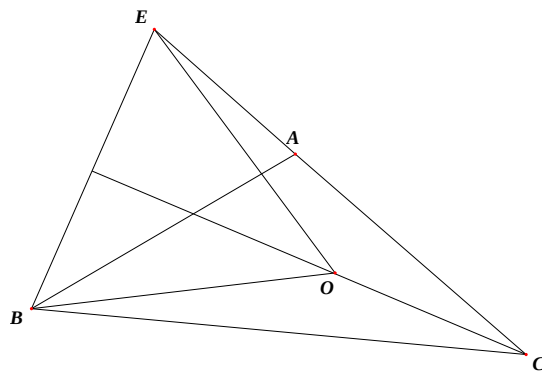
$ME = CN$ (chứng minh trên), $\widehat{MEK} = \widehat{NCK}$

Do đó $\triangle NCK = \triangle MEK \Rightarrow NK = MK$

Vậy k là trung điểm MN nên $K \equiv K'$ Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng



Ví dụ 5: Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{BAC} = 108^\circ$. Gọi O là điểm nằm trên tia phân giác của góc C sao cho $\widehat{COB} = 12^\circ$. Vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ O). Chứng minh ba điểm M, A, C thẳng hàng.



Giải

Tìm cách giải: Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{OCM}$ Từ đó suy ra CA và CM là hai tia trùng nhau

Trình bày lời giải: Tam giác ABC cân tại A nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ \text{ (tính chất tam giác cân)}$$

Mà CO là tia phân giác $\widehat{ACB}$

Nên $\widehat{ACO} = \widehat{BCO} = 18^\circ$. Do đó $\widehat{BCO} = 150^\circ$

$\triangle BOM$ đều nên $\widehat{BOM} = 60^\circ$

Vậy $\widehat{MOC} = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$

$\triangle BOC$ và $\triangle MOC$ có $OB = OM$ (vì $\triangle BOC$ đều) $\widehat{BOC} = \widehat{MOC} = 150^\circ$

OC chung, do đó $\triangle BOC = \triangle MOC$

Suy ra $\widehat{OCB} = \widehat{OCM}$ mà $\widehat{OCB} = \widehat{OCA}$ nên $\widehat{OCM} = \widehat{OCA}$

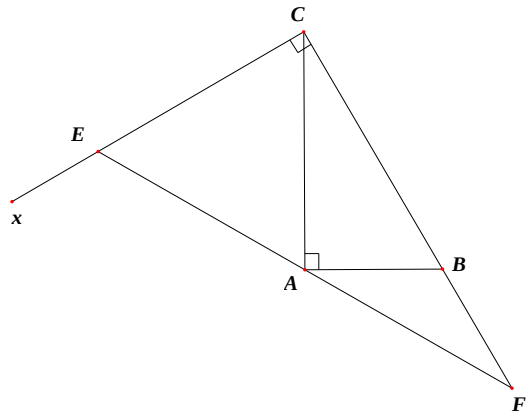
Hai tia CA và CM cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ CO và $\widehat{OCM} = \widehat{OCA}$ nên tia CA và CM là hai tia trùng nhau. Vậy ba điểm C, A, M thẳng hàng

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 60^\circ$. Vẽ tia $Cx \perp BC$ và lấy $CE = CA$ (CE và CA cùng phía với BC). Trên tia đối tia BC và lấy F sao cho $BF = BA$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ACE$ đều

b) E, A, F thẳng hàng

Giải



Tìm cách giải: Nhận thấy tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B}=60^\circ$ nên $\widehat{ACB}=30^\circ$ suy ra $\widehat{ACE}=60^\circ$ nên tam giác ACE đều. Do đó muốn chứng tỏ E, A, F thẳng hàng thì ta chỉ cần chứng tỏ $\widehat{BAF}=30^\circ$

Trình bày lời giải:

a) ABC vuông tại A, $\widehat{B}=60^\circ$ nên $\widehat{ACB}=30^\circ$ suy ra $\widehat{ACE}=60^\circ$ nên tam giác ACE đều

b) ta có $BA=BF \Rightarrow \triangle BFA$ cân $\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{BAF}$ suy ra $\widehat{BAF}=30^\circ$

Vậy ba điểm E, A, F thẳng hàng

C. Bài tập vận dụng

Bài 13.1 Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của MA lấy điểm E sao cho $MA=ME$

a, Chứng minh rằng $AC=EB$, $AC \parallel EB$

b, Gọi I là một điểm trên AC, K là một điểm trên EB sao cho $AI=EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng

Bài 13.2 Cho tam giác ABC cân tại A, có góc $A < 90^\circ$. Kẻ BD vuông góc với AC, kẻ CE vuông góc với AB, gọi K là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng

a, $\triangle BCE = \triangle CBD$

b, $\triangle BEK = \triangle CDK$

c, AK là phân giác góc BAC

d, Ba điểm A, K, I thẳng hàng (với I là trung điểm BC)

Bài 13.3 Cho tam giác ABC có $AB < AC$, kẻ tia phân giác AD của góc BAC. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE=AB$. Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF=AC$. Chứng minh rằng

a, $\triangle ADF = \triangle EDC$

b, F, E, D thẳng hàng

c, $AD \perp FC$

Bài 13.4 Cho tam giác ABC vuông cân tại A. vẽ ra phía ngoài tam giác ABC tam giác BCM cân tại M có góc ở đáy là 15° . Trên nửa mặt phẳng AB chứa điểm C, vẽ tam giác đều ABN. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng

Bài 13.5 Cho tam giác ABC. vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông tại A là $\triangle ADB; \triangle ACE$ có $AD=AB; AC=AE$, kẻ AH vuông góc với BC; DM vuông góc với AH và EN vuông góc AH. Chứng minh rằng

a, $DM=AH$

b, Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng D, I, E thẳng hàng

Bài 13.6 Cho góc xoy. Trên hai cạnh ox và oy lần lượt là hai điểm B và C sao cho $OB=OC$. Vẽ đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm A và D

Nằm trong góc xoy. Chứng minh rằng ba điểm O, A, D thẳng hàng

Bài 13.7: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A. Vẽ các điểm D và E sao cho BD vuông góc và bằng BA, vuông góc và bằng BC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh A, D, M thẳng hàng.

Bài 13.8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $BC=2AB$ gọi D là điểm nằm trên cạnh AC sao cho

$$\widehat{ADB} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}. \text{ Lấy E là một điểm nằm trên cạnh AB sao cho } \widehat{ACE} = \frac{1}{3}, \text{ BD cắt CE tại F, I}$$

và K theo thứ tự lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ F đến BC và AC. Vẽ các điểm G và H sao cho I là trung điểm của FG, K là trung điểm của FH. Chứng minh rằng 3 điểm H, D, G thẳng hàng.

Bài 13.9: Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC tại H, $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Dựng tam giác ACD đều (D và B nằm khác phía đối với cạnh AC). Kẻ HK vuông góc với AC tại K. Đường thẳng qua H và song song với AD cắt AB kéo dài tại M. Chứng minh 3 điểm M, K, D thẳng hàng.

Chuyên đề 14. TÍNH SỐ ĐO GÓC

A. Kiến thức cần nhớ

Để giải tốt bài toán tính số đo góc thì chúng ta phải nắm vững kiến thức cơ bản sau:

***Trong tam giác:**

- Tổng ba góc trong bằng 180°
- Biết hai góc chúng ta xác định được góc còn lại

***Trong tam giác cân:**

- Biết một góc chúng ta xác định được góc còn lại.

***Trong tam giác vuông:**

- Biết một góc nhọn chúng ta xác định được góc nhọn còn lại
- Cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó thì bằng 30°

***Trong tam giác đều:**

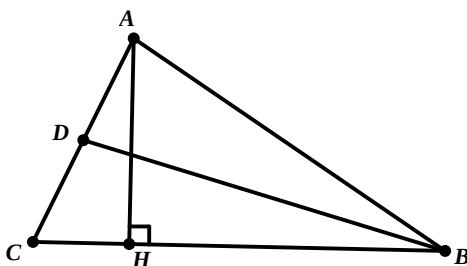
- Các góc có số đo bằng 60°
- Đường phân giác của một góc chia góc đó ra thành hai góc bằng nhau.

***Một số tính chất cần nhớ:**

- Hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.
- Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau
- Tính chất của góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía của một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song.
- Trong thực tế, để giải bài toán tính số đo góc ta thường xét các góc đó nằm trong mối quan hệ với các góc có trong hình đặc biệt đã nêu ở trên hoặc xét các góc tương ứng bằng nhaurồi suy ra kết quả.

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$, $\widehat{C} = 30^\circ$, kẻ AH vuông góc với BC tại H, biết rằng $AH = \frac{1}{2}BC$. Gọi D là trung điểm của AB. Tính số đo $\widehat{ACD}$?

Giải

**Tìm cách giải:* Xuất phát từ $\triangle AHC$ vuông có $\widehat{C} = 30^\circ$ và $AH = \frac{1}{2}BC$. Với hai yếu tố này giúp ta nghĩ tới việc chứng minh tam giác vuông có một góc bằng 30° . Với lập luận đó chúng ta nghĩ tới việc chứng minh $\triangle ABC$ cân.

**Trình bày lời giải:*

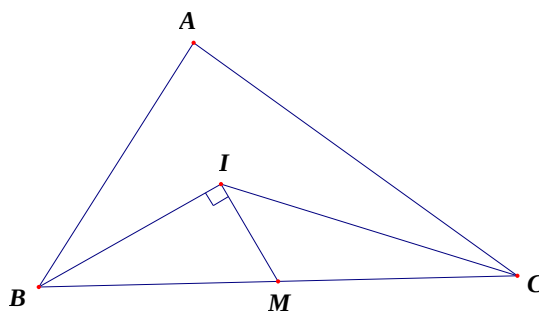
$$\text{Xét } \triangle AHC \text{ có } \widehat{C} = 30^\circ, \widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC$$

$$\text{Mà } AH = \frac{1}{2}BC (GT) \Rightarrow BC = AC$$

$$\Rightarrow \triangle ACB \text{ cân tại } C \Rightarrow CD \text{ là đường phân giác của } \widehat{C} \Rightarrow \widehat{ACD} = 15^\circ.$$

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ có tia phân giác góc B và góc C cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của BC. Biết rằng $BI = 2IM$ và $\widehat{BIM} = 90^\circ$. Tính số đo góc A.

Giải



Tìm cách giải* : Dựa vào **Ví dụ 4 chuyên đề 7 chúng ta biết rằng $\widehat{BIC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$. Do vậy chúng ta chỉ cần tính $\widehat{BIC}$. Mặt khác, theo giả thiết $\widehat{BIM} = 90^\circ$ nên chúng ta chỉ cần tính $\widehat{MIC}$. Do $MB=MC$ và $BI=2.IM$ nên dễ dàng suy luận được tạo ra điểm D sao cho M là trung điểm ID. Từ đó chúng ta có lời giải sau.

* *Trình bày lời giải*

Trên tia đối của tia MI lấy $MD = MI$. $\widehat{BIM} = \widehat{CMD}$; $IM = DM \Rightarrow \triangle BIM = \triangle CDM (c.g.c)$

$$\Rightarrow BI = CD; \widehat{BIM} = \widehat{CMD} \Rightarrow \widehat{CDI} = 90^\circ$$

$$\text{Từ } \Rightarrow BI = 2.IM \Rightarrow BI = ID (= 2.IM)$$

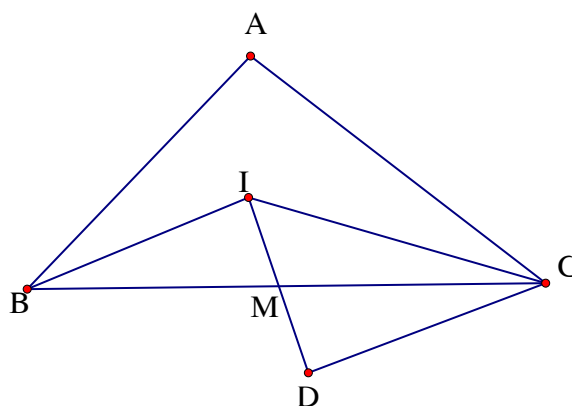
$$\Rightarrow CD = ID \Rightarrow \triangle CDI \text{ vuông cân tại } D$$

$$\Rightarrow \widehat{CID} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 135^\circ$$

$$\triangle BIC \text{ có } \widehat{BIC} = 135^\circ \text{ nên } \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 45^\circ$$

BI và CI là phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nên

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$$



Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A với $\widehat{BAC} < 90^\circ$ kẻ BD, AH lần lượt vuông góc với AC, BC.

Trên tia BD lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Tính số đo góc HAK

Cách vẽ 1. Vì tam giác ABC cân tại A có AH vuông góc với BC để chứng minh được AH là đường phân giác của góc $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{A_3}$

Mặt khác $BA = BK$ (giả thiết) nên $\triangle ABK$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{BKA}$ hay $\widehat{BKA} = \widehat{A_1} + 2\widehat{A_2} \quad (1)$

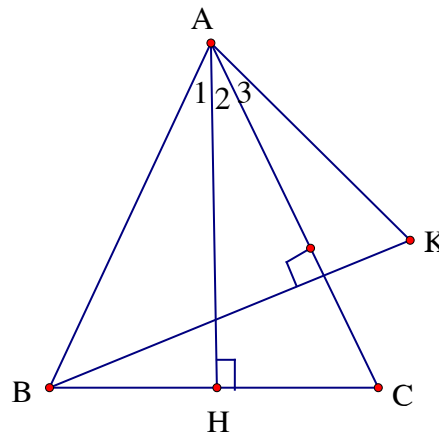
Trong tam giác ADK có :

$$\widehat{K} + \widehat{A_1} = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$2\widehat{A_1} + 2\widehat{A_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{HAK} = 45^\circ$$



Cách vẽ 2. Gọi I là giao điểm của AK và BC

$\triangle BIK$ có $\widehat{AKB} = \widehat{I} + \widehat{CBD}$ (góc ngoài tam giác)

Mà $\widehat{CBD} = \widehat{A_2}$ ($= 90^\circ - \widehat{ACB}$) nên $\widehat{AKB} = \widehat{I} + \widehat{A_2}$ (1)

$$\widehat{KAB} = \widehat{IAH} + \widehat{A_3} \quad (2)$$

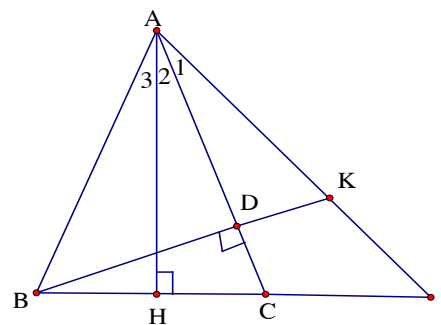
Mặt khác $\widehat{AKB} = \widehat{KAB}$ (3)

Từ (1) (2) và (3) suy ra

$$\widehat{IAH} + \widehat{A_3} = \widehat{I} + \widehat{A_2}$$

Lại có $\widehat{A_2} = \widehat{A_3} \Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{I}$

$$\Rightarrow \triangle AIH \text{ cân tại H} \Rightarrow \widehat{HAK} = 45^\circ$$



* Nhận xét

*Bài toán này có nhiều cách giải. Ngoài cách giải trên đây chúng ta còn có thể hạ $KJ \perp AH (J \in AH)$ rồi chứng minh tam giác AK vuông cân tại J

Nếu $\widehat{BAC} > 90^\circ$ ta có kết quả $\widehat{HAK} = 135^\circ$ (bạn đọc tự chứng minh theo ý trên)

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia AC lấy điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = 15^\circ$ và $CE = CF$. Tính số đo góc CBF

Giải:

Trên nửa mặt phẳng bờ BE chứa điểm F dựng tam giác đều BED. Ta có

$$\widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 30^\circ$$

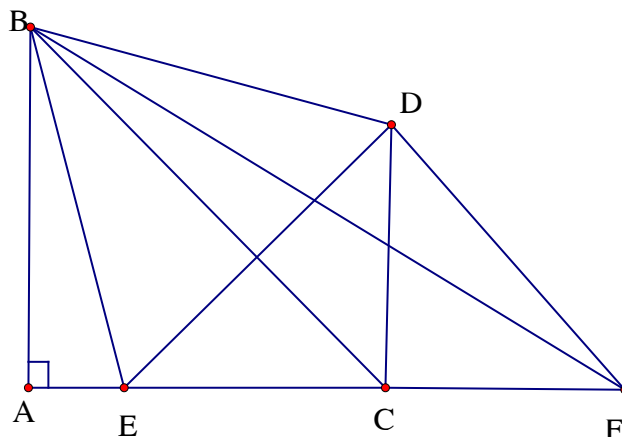
Khi đó BC là tia phân giác của góc EBD nên

$$\triangle ABCD = \triangle BCE \text{ (c.c.c)} \Rightarrow CD = CE = CF$$

$\Rightarrow \triangle DEF$ vuông tại D. Ta có

$$\widehat{DEF} = 180^\circ - \widehat{AEB} - \widehat{BED} = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$$

Vậy $\triangle DEF$ vuông cân tại D



Lại có

$$\widehat{DFE} = 45^\circ; \widehat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{ACB} \text{ do đó } BC \text{ song song với } DF$$

Ta lại có tam giác BDF cân tại D (vì $DB=DF=DE$) và $\widehat{BDF} = \widehat{BDE} + \widehat{EDF} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

nên $\widehat{DFB} = \widehat{DBF} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{CBF} = \widehat{DFB} = 15^\circ$. Vậy $\widehat{CBF} = 15^\circ$

*** Nhận xét**. Dựa vào kỹ thuật trên, chúng ta có thể giải được bài toán đảo

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $\widehat{CBF} = 15^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE=CF$. Tính số đo góc CBE.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD=BC$. Tính $\widehat{ACD}$

Giải:

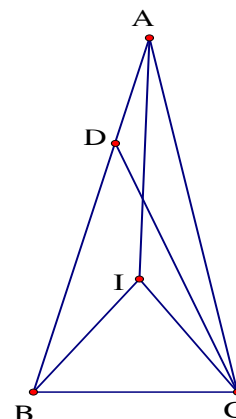
*** Tìm cách giải.** Từ đề bài ta tính được $\widehat{B} = \widehat{C} = 80^\circ$. Do đó $\widehat{B} - \widehat{A} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Do đó có thể nghĩ đến phương pháp để vẽ đường phụ là tam giác đều.

Khi vẽ đường phụ chúng ta chú ý vẽ xuất phát điểm luôn luôn xuất hiện mối liên hệ giữa $20^\circ; 60^\circ; 80^\circ$. Sau đây là một vài cách giải.

*** Trình bày lời giải**

Cách vẽ 1. Dựng điểm I nằm trong tam giác sao cho tam giác BIC là tam giác đều

Ta có $\triangle ABI$ và $\triangle ACI$ có $AB = AC$, $IB = IC$, AI là cạnh chung $\Rightarrow$



$$\triangle ABI = \triangle ACI \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI} = 10^\circ \text{ (1)}$$

Mặt khác $\triangle ADC$ và $\triangle CIA$ có $AD = CI (= BC)$, $\widehat{DAC} = \widehat{ICA} (= 20^\circ)$, AC là cạnh chung nên

$$\triangle ADC = \triangle CIA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CAI} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{ACD} = 10^\circ$$

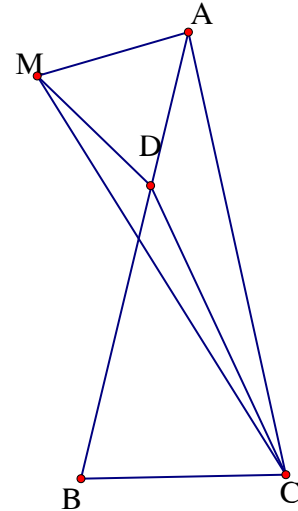
Cách vẽ 2. Dựng tam giác đều ADM (M và C nằm khác phía với so với AB) $\Rightarrow \widehat{CAM} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$

$\triangle ABC$ và $\triangle CAM$ có $MA = BC$, $\widehat{ABC} = \widehat{CAM} (= 80^\circ)$, AC là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CMA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ACM} = 20^\circ \text{ và } CM = AC$$

$\triangle ADC$ và $\triangle MDC$ có $AD = MD$, $AC = MC$, CD là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle MDC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{MCD} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$



Cách vẽ 3. Dựng tam giác đều CAN (B, N khác phía so với AC)

$$\widehat{DAN} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle NAD$ có $AD = BC$; $\widehat{ABC} = \widehat{NAD} (= 80^\circ)$

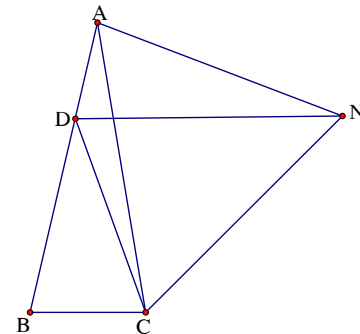
$$AB = AN (= AC) \Rightarrow \triangle ABC = \triangle NAD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AC = ND \text{ và } \widehat{AND} = 20^\circ$$

Xét $\triangle DNC$ có $ND = NC$ (cùng bằng AC) $\Rightarrow \triangle DNC$ cân tại N mà

$$\widehat{CND} = 60^\circ - \widehat{AND} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

$$\widehat{NCD} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$$



Cách vẽ 4. Dựng tam giác đều ABK (K, C cùng phía so với AB)

Ta có $\triangle ACK$ cân tại A mà

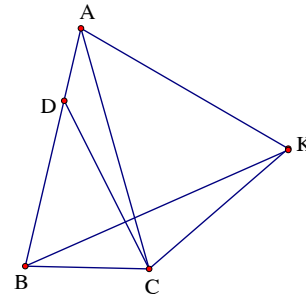
$$\widehat{CAK} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ \Rightarrow \widehat{AKC} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

Mặt khác $\triangle ADC$ và $\triangle BCK$

có $AD = BC$; $\widehat{DAC} = \widehat{CBK} (= 20^\circ)$; $AC = AK (= AB)$

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle BCK (\text{c.g.c}) \Rightarrow$$

$$\widehat{ACD} = \widehat{BKC} = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$$



* **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC, $\widehat{BAM} = 30^\circ$; $\widehat{MAC} = 15^\circ$. Tính số đo góc BCA ?

Giải:

* *Tìm cách giải.* Do $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nên chúng ta nghĩ tới dựng tam giác vuông cân. Do vậy chúng ta giải như sau :

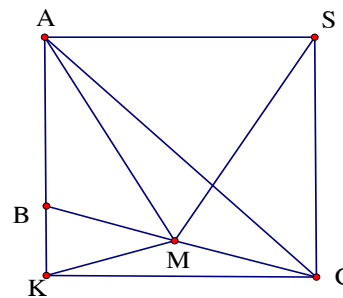
* *Trình bày cách giải.*

Kẻ $CK \perp AB$. Ta có $\triangle AKC$ vuông cân tại K

$$(\text{vì } \widehat{BAC} = 45^\circ) \Rightarrow KA = KC$$

Vẽ $\triangle ASC$ vuông cân tại S (K, S khác phía với AC)

$$\text{Do } \triangle BKC \text{ vuông tại K} \Rightarrow KM = \frac{1}{2}BC = MC$$



$\triangle KMC$ cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{MKC} = \widehat{MCK} \Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{SCM}$$

Dễ dàng chứng minh được $\triangle KAC = \triangle SAC \Rightarrow AK = KC = CS = SA$

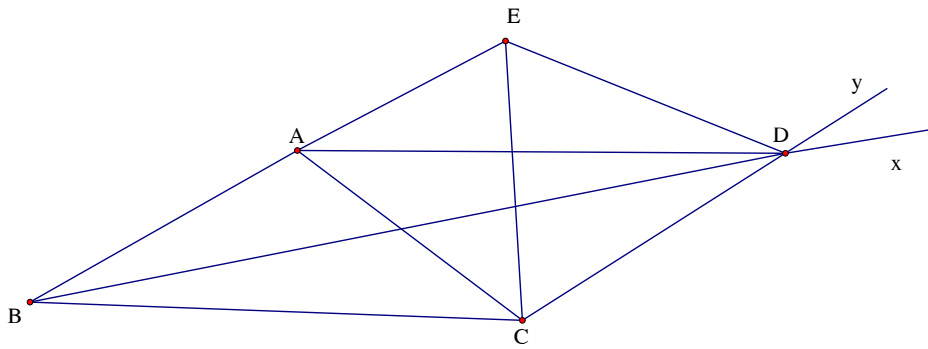
$\triangle KAM$ và $\triangle CSM$ có $KM = CM$, $\widehat{AKM} = \widehat{SCM}$, $KA = KS \Rightarrow \triangle KAM = \triangle CSM (\text{c.g.c})$

$\Rightarrow \widehat{CSM} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ASM} = 60^\circ$ và $\widehat{SAM} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ASM$ đều $\Rightarrow AS = SM = AK \Rightarrow \triangle AKM$ cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{MKC} = \widehat{MCK} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ \Rightarrow \widehat{BCA} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 3\widehat{B}$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A, vẽ tia Cy sao cho cắt tia phân giác Bx của góc B tại D. Tính số đo góc ADB

Giải



Từ giả thiết $\triangle ABC$ cân tại A và $\widehat{A} = 3\widehat{B} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 36^\circ$. Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$ (E nằm ngoài đoạn AB). Khi đó tia Bx là tia phân giác của $\widehat{ABC}$, từ đó dễ dàng chứng minh được BD vuông góc với CE

$\triangle EBC$ cân tại B có $\widehat{EAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 72^\circ$

$$\widehat{AEC} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ. \text{ Do đó } \widehat{AEC} = \widehat{CAE} \Rightarrow \triangle ACE \text{ cân tại C nên } CA = CE \quad (1)$$

Ta lại có $\triangle DEC$ cân tại D và $\widehat{ECD} = 132^\circ - 72^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle DEC$ là tam giác đều (2)

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \triangle ACD \text{ cân tại C, có } \widehat{ACD} = 132^\circ - 36^\circ = 96^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = 42^\circ$$

Trong tam giác BCD có $\widehat{BDC} = 180^\circ - 130^\circ - 18^\circ = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC} - \widehat{BDC} = 42^\circ - 30^\circ - 18^\circ = 12^\circ$$

Vậy $\widehat{ADB} = 12^\circ$

C. Bài tập áp dụng

14.1. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 80^\circ$, điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $\widehat{DBC} = 10^\circ$; $\widehat{DCB} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{ADB}$

14.2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $\widehat{ADC} = 150^\circ$ và tam giác DAC cân tại D. Tính số đo góc $\widehat{ADB}$.

14.3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ$; $\widehat{A} = 15^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2BC$. Vẽ $DE \perp AC$ ($E \in AC$)

a) Chứng minh rằng $EB = ED$

b) Tính số đo góc $\widehat{ADB}$

14.4. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$. Qua B dựng tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = 30^\circ$. Tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$ cắt tia Bx tại D.

a) So sánh CD và CA.

b) Tính số đo góc $\widehat{BDA}$

14.5. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 40^\circ$. Trên tia phân giác AD của góc A lấy điểm E sao cho , trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $\widehat{CBF} = 30^\circ$

a) Chứng minh rằng :AE =AF

b) Tính số đo góc $\widehat{BEF}$

14.6. Cho tam giác ABC cân (AB=AC) với $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 50^\circ$, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{BCE} = 60^\circ$. Tính góc $\widehat{CED}$.

14.7. Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 20^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{AMB}$

14.8. Cho tam giác ABC với góc $\widehat{BAC} = 55^\circ$; $\widehat{ABC} = 115^\circ$. Trên tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$ lấy điểm M sao cho $\widehat{MAC} = 25^\circ$. Tính số đo góc BMC

14.9. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 10^\circ$. Tính số đo góc AMB.

14.10. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. M là điểm nằm ngoài tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 10^\circ$; $\widehat{MCB} = 30^\circ$. Tính số đo các góc $\widehat{AMB}$; $\widehat{AMC}$

14.11. Cho tam giác đều ABC, điểm D nằm giữa A và B. Đường thẳng vẽ từ D vuông góc với AC cắt đường thẳng vẽ từ B vuông góc với BC tại điểm M. Gọi N là trung điểm của AD. Tính số đo góc MCN.

Chuyên đề 15. QUAN HỆ GIỮA CẠNH VÀ GÓC ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

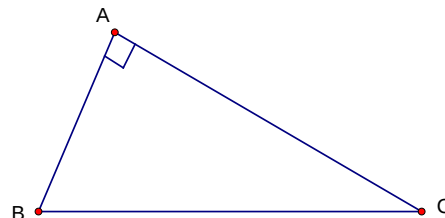
A. Kiến thức cần nhớ

* **Định lý 1.** Trong một tam giác

- Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Đảo lại, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn

Trong hình 15.1

$$\Delta ABC: AB > AC \Leftrightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$$



(Hình 15.1)

Suy ra trong một tam giác

- Góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhỏ nhất
- Cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất

*** Định lý 2.** Hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau

- Nếu cạnh thứ ba không bằng nhau thì góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Đảo lại nếu, hai góc xen giữa không bằng nhau thì cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu một tam giác vuông có một góc nhọn lớn hơn 30° thì cạnh đối diện với góc ấy lớn hơn cạnh huyền

Giải (H.15.2)

**Tìm cách giải*

Giả sử tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} > 30^\circ$, ta phải chứng minh $AC > \frac{1}{2}BC$. Muốn vậy

ta chứng minh $2AC > BC$

Tạo ra đoạn thẳng $2AC$ bằng cách lấy điểm D

trên tia đối của tia AC sao cho

$AD = AC$, khi đó xét $\triangle BDC$ chỉ cần chứng minh

$DC > BC$

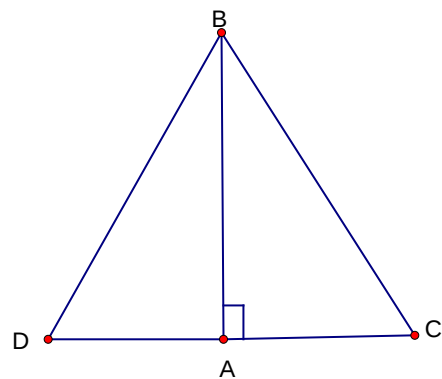
**Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD

$= AC$

$\triangle ABD = \triangle ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = DC$ và

$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} > 30^\circ \Rightarrow \widehat{DBC} > 60^\circ$



(Hình 15.2)

$\triangle BCD$ cân có góc ở đỉnh lớn hơn 60° nên các góc ở đáy nhỏ hơn 60°

Xét $\triangle BCD$ có $\widehat{DBC} > \widehat{D}$ nên $DC > BC$ (Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện)

Do đó $2AC > BC \Rightarrow AC > \frac{BC}{2}$

Ví dụ 2. $\triangle ABC$ có góc B, góc C là những góc nhọn, $\widehat{B} > 45^\circ; \widehat{C} < 45^\circ$. Vẽ đường cao AH.

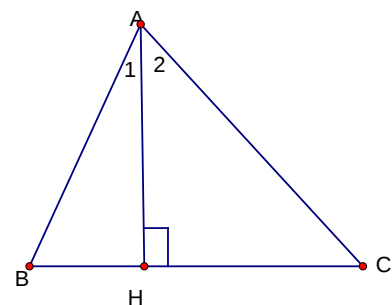
Hãy so sánh HA, HB, HC.

Giải

* *Tìm cách giải.*

Ta thấy HA, HB, HC không phải là ba cạnh của một tam giác. HA, HB là hai cạnh của tam giác HAB còn HA và HC là hai cạnh của tam giác HAC.

Vì vậy ta dùng HA làm trung gian để so sánh HA, HB, HC.



(Hình 15.3)

* Trình bày lời giải

Xét $\triangle ABH$ có $\widehat{H} = 90^\circ$; $\widehat{B} > 45^\circ$ nên $\widehat{A_1} < 45^\circ$

Vậy $\widehat{A_1} < \widehat{B} \Rightarrow HA < HB$ (1) (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện)

Xét $\triangle ACH$ có $\widehat{H} = 90^\circ$; $\widehat{C} < 45^\circ$ nên $\widehat{A_2} > 45^\circ$ (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện)

Vậy $\widehat{C} < \widehat{A_2} \Rightarrow HA < HC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HB < HA < HC$

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của AB. Chứng minh rằng nếu $AC > BC$ thì $BD > AD$

Giải

* Tìm lời giải

$\triangle BDO$ và $\triangle ADO$ có hai cặp cạnh bằng nhau do đó để chứng minh $BD > AD$ ta cần chứng minh $\widehat{BOD} > \widehat{AOD}$

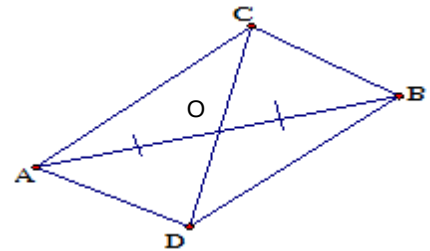
* Trình bày lời giải:

$\triangle AOC$ và $\triangle BOC$ có $OA = OB$, OC chung, $AC > BC$

$\Rightarrow \widehat{AOC} > \widehat{BOC}$ (Định lý 2) do đó $\widehat{BOD} > \widehat{AOD}$

$\triangle BOD$ và $\triangle AOD$ có $OB = OA$; OD chung; $\widehat{BOD} > \widehat{AOD}$

$BD > AD$ (Theo định lý 2)



(Hình 15.4)

Ví dụ 4:

Tam giác ABC có $\widehat{B} > 90^\circ$ và $AB = \frac{1}{2}AC$. Hãy sắp xếp ba cạnh của tam giác theo thứ tự tăng dần

Giải (H.15.5)

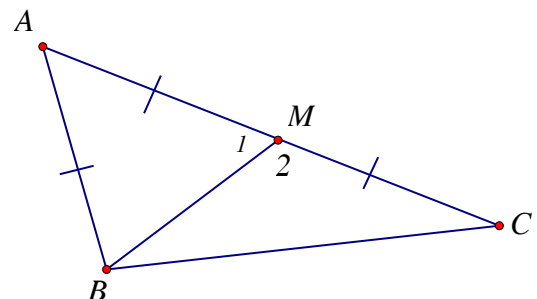
* Tìm cách giải.

Vì góc B là góc tù nên cạnh AC là cạnh lớn nhất.

Khai thác điều kiện $AB = \frac{1}{2}AC$ ta làm xuất hiện

yếu tố $\frac{1}{2}AC$ bằng cách vẽ trung điểm M của AC.

Khi đó AB và BC là hai cạnh của hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau, do đó ta có thể chứng minh định lý 2.



(Hình 15.5)

**Trình bày lời giải:*

Xét tam giác ABC có $\widehat{B} > 90^\circ$ nên cạnh AC là cạnh lớn nhất, do đó $BC < AC$ (1)

Gọi M là trung điểm của AC. Xét tam giác ABM có $AB = AM$ ($= \frac{1}{2} AC$) nên tam giác ABM

cân $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{M}_1 < 90^\circ$, do đó $\widehat{M}_2 > 90^\circ$. Vậy $\widehat{M}_1 < \widehat{M}_2$

$\triangle AMB$ và $\triangle CMB$ có $MA = MC$, MB chung và $\widehat{M}_1 < \widehat{M}_2$ nên $AB < BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB < BC < CA$

C. Bài tập vận dụng.

* Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác

15.1. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là một điểm trên đường thẳng BC. Hãy so sánh AM và AB.

15.2. Cho tam giác ABC. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Cho biết góc ADB là nhọn. Hãy so sánh AB và AC.

15.3. Tam giác ABC có $AB < AC$. Trên cạnh AB lấy điểm M ($M \neq B$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia Mx song song với AC và trên tia này lấy điểm N sao cho $MN = MB$. Chứng minh $BC < NC$

15.4. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B} = 75^\circ$. Trong tam giác lấy điểm O sao cho $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 15^\circ$. Chứng minh $OA \perp OB$

15.5. Cho tam giác ABC. Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$) và $BK \perp AC$ ($K \in AC$). Biết $AH \geq BC$; $BK \geq AC$

Tính số đo các góc của tam giác ABC.

15.6. Trong tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AD. Hãy so sánh MB và MC.

15.7. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên BC lấy E và F sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{EAF} = \widehat{FAC}$. Chứng minh rằng đoạn thẳng EF có độ dài nhỏ nhất trong ba đoạn thẳng BE, EF, FC.

15.8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy M và N sao cho $BM = MN = NC$. Chứng minh góc MAN là góc lớn nhất trong ba góc $\widehat{BAM}$; $\widehat{MAN}$; $\widehat{NAC}$

15.9. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một góc lớn hơn 60° thì cạnh đối diện với góc ấy lớn hơn trung bình cộng của hai cạnh còn lại.

15.10. Cho tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{BMC} > 105^\circ$. Chứng minh $MA > \frac{MB + MC}{2}$

* Hai tam giác bằng nhau

15.11. Tam giác ABC có $AB < AC$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E ($E \neq B$). Trên tia đối của tia CA lấy điểm F ($F \neq C$) sao cho $BE = CF$. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh $\widehat{DEF} > \widehat{DFE}$.

15.12. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho

$\widehat{ABM} < \widehat{ACM}$. Hãy so sánh các góc $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$

15.13. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm M nằm giữa A và B . Gọi O là trung điểm của CM . Tia AO cắt BC tại D . Chứng minh rằng $BD > CD$.

15.14. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$. Tia AM cắt BC tại D . Chứng minh rằng $MD < MB$.

15.15. Cho tam giác ABC , $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm D nằm giữa A và C sao cho $\widehat{AMD} > 90^\circ$. Chứng minh $MD < MB$.

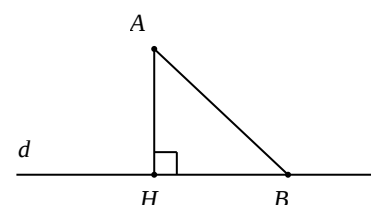
15.16. Cho tam giác ABC , $\hat{A} = 60^\circ$, tổng $AB + AC = 10$ cm. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC .

Chuyên đề 16. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

A. Kiến thức cần nhớ

• **Khái niệm:** Trong hình 16.1

- Điểm H gọi là hình chiếu của A trên đường thẳng d .
- Đoạn thẳng AH gọi là đường vuông góc, đoạn thẳng AB gọi là đường xiên.
- Đoạn thẳng HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB trên đường thẳng d .



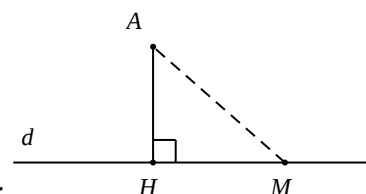
Hình 16.1

• **Định lý 1:** Trong các đường xiên, đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

- Trong hình 16.1 ta có $AH < AB$.

Bổ sung: Trong hình 16.2: $A \notin d$; $M \in d$; $AH \perp d$.

Ta có $AM \geq AH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$).



Hình 16.2

• **Định lý 2:** Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó:

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn;
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn;
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau. Ngược nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Cho hai đoạn thẳng AB và DC song song và bằng nhau. Một đường thẳng xy không song song, không vuông góc với hai đoạn thẳng đó. Hãy so sánh các hình chiếu của AB và DC trên đường thẳng xy .

Giải (h.16.3)

* *Tìm cách giải*

Muốn có hình chiếu của AB và DC trên xy ta vẽ AA', BB', CC', DD' cùng vuông góc với xy . Ta phải chứng minh $A'B' = C'D'$. Muốn vậy ta tạo hai tam giác bằng nhau bằng cách vẽ đường phụ.

* *Trình bày lời giải.*

Vẽ $AA' \perp xy, BB' \perp xy, CC' \perp xy, DD' \perp xy$.

Khi đó $A'B'$ và $C'D'$ lần lượt là hình chiếu của AB và CD trên xy .

Vẽ $A'M \parallel AB, C'N \parallel CD$ theo tính chất đoạn chắn song song ta có $A'M = AB; C'N = CD$. Mặt khác do $AB = CD$ nên $A'M = C'N$.

$\triangle MA'B' = \triangle NC'D'$ có $\widehat{B'} = \widehat{D'} (= 90^\circ)$; $A'M = C'N$ và $\widehat{M} = \widehat{N}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn).

Do đó $\triangle MA'B' = \triangle NC'D'$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra: $A'B' = C'D'$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, M, E . Chứng minh $MD + ME \geq a$.

Giải (h16.4)

* *Tìm cách giải.*

Ta thấy giữa các độ dài a và $a\sqrt{2}$ có sự liên hệ với nhau: $a\sqrt{2}$ là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông có độ dài là a . Ta phải chứng minh $MD + ME \geq AB$. Vì MD, ME là các đường xiên kẻ từ M đến các cạnh góc vuông AB, AC nên ta vẽ thêm các đường vuông góc từ M đến AB, AC để có thể dùng định lý về mối quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

* *Trình bày lời giải*

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 2AB^2 = (a\sqrt{2})^2 \Rightarrow AB = a$.

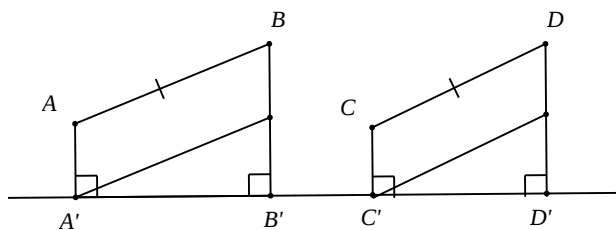
Vẽ $MH \perp AB; MK \perp AC$, khi đó $MH \parallel AC; MK \parallel AB$ suy ra $MK = AB$ (tính chất đoạn chắn song song)

$\triangle HBM$ vuông cân $\Rightarrow MH = BH$.

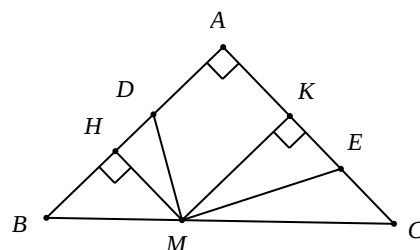
Ta có $MD \geq MH; ME \geq MK$ (dấu "=" xảy ra khi $D \equiv H$) (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên). Do đó:

$MD + ME \geq MH + MK = BH + AH = a$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB < AC$. Đường trung trực của BC cắt BC tại M , cắt AC tại N . Lấy điểm K trên đoạn thẳng CN . Hãy so sánh BK và CN .



Hình 16.3



Hình 16.4

Giải (h16.5)

* *Tìm cách giải.*

Ta có thể dễ dàng so sánh đường xiên BK và BN nhờ so sánh các hình chiếu của chúng. Vậy chỉ còn phải so sánh BN với CN mà thôi.

* *Trình bày lời giải*

Ta có BK và CN là các đường xiên vẽ từ B tới đường thẳng AC , còn AK và AN là các hình chiếu của chúng trên AC .

Vì $AK > AN$ nên $BK > BN$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu)
(1)

Mặt khác, $MN \perp BC$ và $MB = MC$ nên $NB = NC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BK > NC$.

C. Bài tập vận dụng

• Đường vuông góc và đường xiên

16.1. Cho tam giác ABC . Vẽ $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ ($D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$). Chứng minh rằng $AD + BE + CF$ nhỏ hơn chi vi tam giác ABC .

16.2. Cho tam giác ABC , góc A tù. Qua A vẽ đường thẳng d cắt cạnh BC tại O . Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ B và C đến đường thẳng d luôn nhỏ hơn hoặc bằng BC .

16.3. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là trung điểm của AC . Chứng minh rằng trung bình cộng các hình chiếu của AB và BC trên đường thẳng BM thì lớn hơn AB .

16.4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Qua A vẽ đường thẳng xy không cắt cạnh BC . Gọi D và E theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên xy . Xác định vị trí của xy để $BD + CE = BC$.

16.5. Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác. Biết đường trung trực của CM đi qua A . Hãy so sánh AB và AC .

16.6. Cho ABC cân tại A . Trên các tia đối của tia BA và CA lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng:

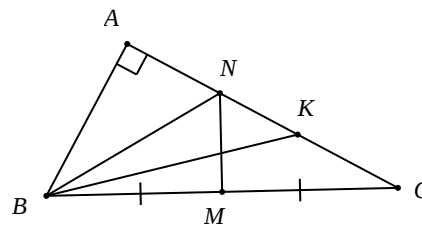
a) $BN > \frac{MN + BC}{2}$.

b) $BM > \frac{MN - BC}{2}$.

16.7. Cho đoạn thẳng $BC = 5\text{cm}$ và trung điểm M của nó. Vẽ điểm A sao cho $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Qua M vẽ một đoạn thẳng vuông góc với AM cắt các tia AB , AC lần lượt tại E và F . Xác định vị trí của điểm A để EF có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất đó.

• Đường xiên và hình chiếu.

16.8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).



Hình 16.5

Cho biết $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$. Hãy so sánh HB với HC .

16.9. Cho tam giác ABC , $B < C < 90^\circ$. Chứng minh rằng với mọi vị trí của điểm M nằm giữa B và C ta luôn có $AM < AB$.

16.10. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 5\text{cm}$; $AC = 12\text{cm}$. Vẽ $AH \perp BC$. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AH . Chứng minh rằng: $13 \leq MB + MC \leq 17$.

16.11. Cho tam giác ABC . Vẽ $AH \perp BC$ (H nằm giữa B và C). Lấy điểm M nằm trên AH . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC . Chứng minh rằng nếu $BD = CE$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

Chuyên đề 17. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

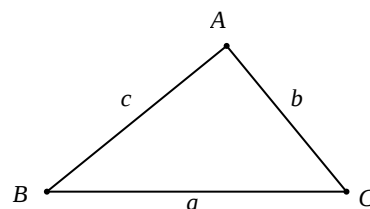
A. Kiến thức cần nhớ

1. Bất đẳng thức tam giác:

Trong một tam giác độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Trong hình 17.1 ta có: $|b - c| < a < |b + c|$.

Đảo lại nếu $|b - c| < a < |b + c|$ thì a, b, c có thể là độ dài ba cạnh của một tam giác.



Hình 17.1

2. Bất đẳng thức tam giác mở rộng:

Với ba điểm M, A, B bất kì ta luôn có: $MA + MB \geq AB$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng AB .

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm O nằm giữa hai đầu mỗi đoạn thẳng. Biết $AB = 3\text{cm}$; $CD = 5\text{cm}$. Chứng minh rằng trong hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 4cm .

Giải:

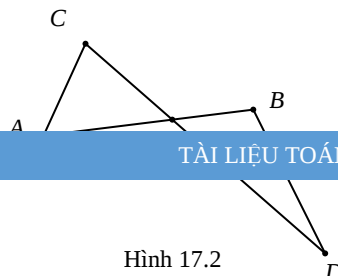
* *Tìm cách giải:*

Muốn chứng minh hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 4cm ta chứng minh tổng $AC + BD < 8\text{cm}$.

Ta thấy AC là một cạnh của tam giác AOC , BD là một cạnh của tam giác BOD . Vậy cần vận dụng quan hệ giữa ba cạnh của tam giác để đánh giá AC và BD .

* *Trình bày lời giải:*

Xét $\triangle AOC$ có: $AC < OA + OC$. Xét $\triangle BOD$ có:



Hình 17.2

$$BD < OB + OD.$$

Cộng từng vế bất đẳng thức trên ta được:

$$AC + BD < OA + OC + OB + OD$$

$$\Rightarrow AC + BD < AB + CD = 3 + 5 = 8 \text{ (cm)}$$

Suy ra trong hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng nhỏ hơn 4 cm.

* *Nhận xét:* Trong lời giải trên ta đã dùng một tính chất của hai bất đẳng thức cùng chiều: Nếu $a < b$ và $c < d$ thì $a + c < b + d$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng trong một tam giác, mỗi cạnh bao giờ cũng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

Giải (h.17.3)

* *Tìm cách giải.*

Ta phải chứng minh $a < \frac{a+b+c}{2}$. Muốn vậy

ta phải chứng minh $2a < a + b + c$. Trừ a vào

hai vế của bất đẳng thức ta được $2a - a < a + b + c - a$
dẫn tới $a < b + c$.

Bất đẳng thức này đúng nên ta có thể xuất phát từ đây rồi chứng minh “ngược” lên.

* *Trình bày lời giải.*

Gọi a là độ dài của một cạnh bất kì của tam giác. Gọi b và c là độ dài hai cạnh còn lại. Theo quan hệ giữa ba cạnh còn lại của tam giác ta có: $a < b + c$.

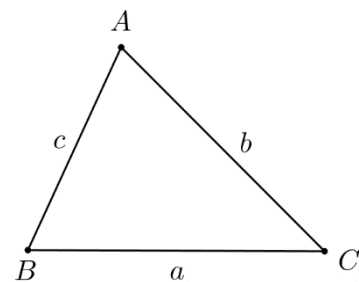
Cộng a vào hai vế của bất đẳng thức này ta được: $a + a < a + b + c$ dẫn tới $2a < a + b + c$

$$\text{Suy ra } a < \frac{a+b+c}{2}.$$

* *Nhận xét:* Trong lời giải trên ta đã dùng các tính chất sau của bất đẳng thức:

- Cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức thì được một bất đẳng thức cùng chiều.

- Nhân (hay chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương thì được một bất đẳng thức cùng chiều.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Chứng minh rằng ba đoạn thẳng AD, AE, AF có thể là ba cạnh của một tam giác.

Giải (h.17.4)

**Tìm cách giải.*

Muốn chứng minh ba đoạn thẳng AD, BE, CF

Có thể là ba cạnh của một tam giác, ta chứng minh ba đoạn thẳng đó thỏa mãn bất đẳng thức tam giác hoặc chứng minh chúng lần lượt bằng ba cạnh của một tam giác nào đó.

**Trình bày lời giải:*

Trên tia đối của tia EA lấy điểm K sao cho $EK = EA$.

$$\triangle ABE = \triangle KCE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = CK.$$

Xét $\triangle ACK$, theo bất đẳng thức tam giác ta có: $|CA - CK| < AK < CA + CK$

$$\text{Do đó } |2AF - 2AD| < 2AE < 2AF + 2AD$$

$$(\text{vì } AC = 2AF, AB = 2AD)$$

$$\text{Suy ra } |AF - AD| < AE < AF + AD$$

Ba đoạn thẳng AD, AE, AF thỏa mãn bất đẳng thức tam giác nên chúng có thể là ba cạnh của một tam giác.

C. Bài tập áp dụng

• Tính độ dài

17.1. Một tam giác cân có chu vi là 40cm và một cạnh có độ dài 10cm. Tính độ dài hai cạnh còn lại.

17.2. Tính chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó bằng:

a) 11cm và 20cm

b) 11cm và 23cm.

17.3. Ba cạnh của một tam giác có số đo là ba số chẵn liên tiếp (tính bằng xen-ti-mét). Tam giác đó có chu vi nhỏ nhất là bao nhiêu?

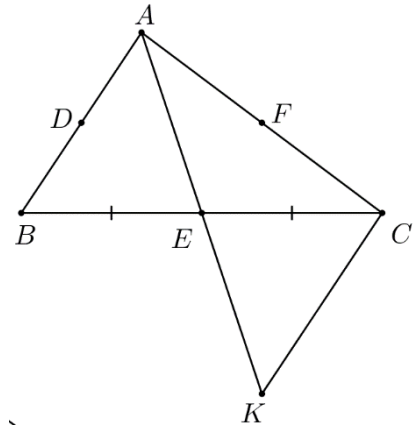
17.4. Một đoạn dây thép có độ dài 25cm.

Hỏi có thể uốn nó thành một hình tam giác có một cạnh là:

a) 13cm

12cm?

• So sánh một độ dài với chu vi của tam giác.



17.5. Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Hãy so sánh độ dài BC với chu vi tam giác AMN .

17.6. Chứng minh rằng cạnh lớn nhất của một tam giác thì:

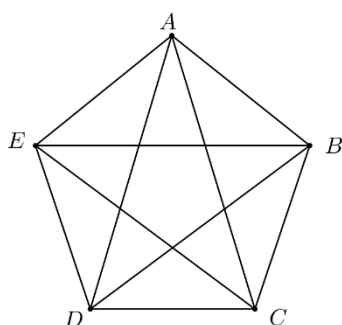
a) Nhỏ hơn nửa chu vi tam giác;

b) Lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ chu vi của tam giác.

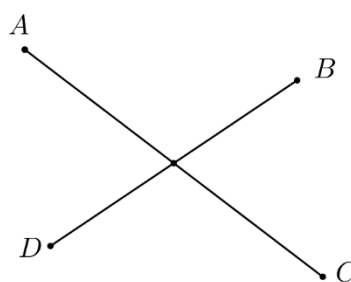
17.7. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB . Chứng minh rằng tổng $AD + BE + CF$ lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi tam giác.

17.8. Cho hình 17.5. Chứng minh rằng:

$$AB + BC + CD + DE + EA < AD + DB + BE + EC + CA$$



Hình 17.5



Hình 17.6

17.9. Cho hình 17.6.

a) Tìm điểm O sao cho tổng các khoảng cách từ O đến A, B, C, D có độ dài nhỏ nhất.

b) Chứng minh rằng $AC + BD > \frac{AB + BC + CD + DA}{2}$

17.10. Cho tam giác ABC có chu vi là $2p$. Lấy điểm M bất kì nằm trong tam giác.

Chứng minh rằng $p < MA + MB + MC < 2p$

• Chứng minh bất đẳng thức hình học

17.11. Cho tam giác ABC . Vẽ đường thẳng xy chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A . Trên xy lấy điểm M khác A . Chứng minh rằng: $AB + AC < MB + MC$

17.12. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Chứng minh rằng không thể xảy ra đồng thời $BN < \frac{1}{2}AC$ và $CM < \frac{1}{2}AB$.

17.13. Cho đoạn thẳng AB và ba điểm M, N, P không có điểm nào nằm trên đường thẳng AB . Cho biết $MA + NA + PA = MB + NB + PB = s$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm O thỏa mãn $MO + NO + PO < s$

17.14. Cho tam giác đều ABC . Trên các cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, N, K không trùng với các đỉnh của tam giác sao cho $AM = AN$. Chứng minh rằng $KM + KN \geq KA$

17.15. Tam giác ABC không có hai cạnh nào bằng nhau. Độ dài mỗi cạnh có số đo là một số nguyên (tính bằng xen-ti-mét). Biết $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm. Vẽ đường trung trực xy của BC , trên đó lấy một điểm M . Xác định vị trí của điểm M để tổng $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

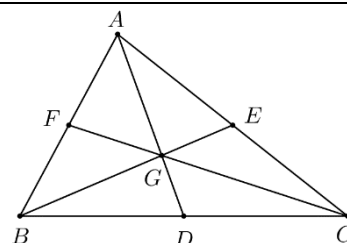
Chuyên đề 18. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đường trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng nối một đỉnh của tam giác với trung điểm của cạnh đối diện.

2. Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (điểm này gọi là trọng tâm của tam giác).

Trọng tâm cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua điểm đó (hình 18.1).



Hình 18.1

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Trên tia GB và GC lấy các điểm F và E sao cho G là trung điểm của FM đồng thời là trung điểm của EN. Chứng minh rằng ba đường thẳng AG, BE và CF đồng quy.

Giải (hình 18.2)

* *Tìm cách giải.*

Để chứng minh ba đường thẳng AG, BE và CF đồng quy ta có thể chứng minh chúng là ba đường trung tuyến của tam giác GBC.

* *Trình bày lời giải.*

Gọi D là giao điểm của AG và BC. Vì

G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên AD là đường trung tuyến, suy ra $DB = DC$.

Ta có $GF = GM = \frac{1}{3}BM$, $GE = GN = \frac{1}{3}CN$.

Do đó: $GF = GB \left(= \frac{1}{3}BM \right)$; $GE = EC \left(= \frac{1}{3}CN \right)$

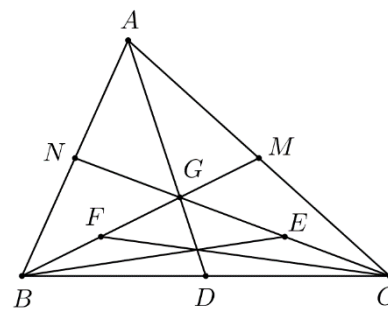
Xét $\triangle GBC$ có GD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy suy ra ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C vẽ tia Bx // AC.

Lấy điểm D $\in$ Bx và điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có cùng một trọng tâm.

Giải

* *Tìm cách giải.*



Hình 18.2

$\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có chung đỉnh A nên muốn chứng minh chúng có cùng một trọng tâm, chỉ cần chứng minh có chung một đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A.

* *Trình bày lời giải.*

Vì $Bx \parallel AC$ nên $\widehat{CBx} = \widehat{BCE}$ (so le trong).

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\triangle BMD = \triangle CME$ (c.g.c)

Suy ra $MD = ME$ (1) và $\widehat{BMD} = \widehat{CME}$

Ta có: $\widehat{BME} + \widehat{CME} = 180^\circ$ (kề bù)

Do đó: $\widehat{BME} + \widehat{BMD} = 180^\circ \Rightarrow D, M, E$ thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là trung điểm của DE.

$\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có chung đỉnh A, chung đường trung tuyến AM nên trọng tâm G của hai tam giác này trùng nhau.

* *Nhận xét:* Để chứng minh hai tam giác có cùng trọng tâm ta có thể chứng minh chúng có chung một đỉnh và chung đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho $DK = \frac{1}{3}AD$. Qua B vẽ một đường thẳng song song với CK cắt AC tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm của AC.

Giải

* *Tìm cách giải.*

Để chứng minh M là trung điểm của AC ta chứng minh BM là đường trung tuyến.

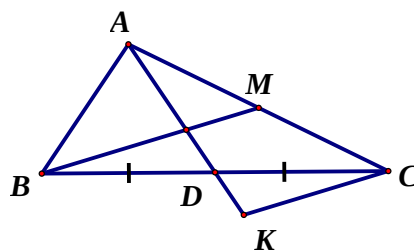
Muốn vậy, chỉ cần chứng minh BM đi qua trọng tâm G.

* *Trình bày lời giải*

Gọi G là giao điểm của BM và AD. Ta có:

$\triangle BDG = \triangle CDK$ (g.c.g)

Suy ra $DG = DK = \frac{1}{3}AD$



$\triangle ABC$ có điểm G nằm trên đường trung tuyến AD

mà $GD = \frac{1}{3}AD$ nên G là trọng tâm. Suy ra BM là

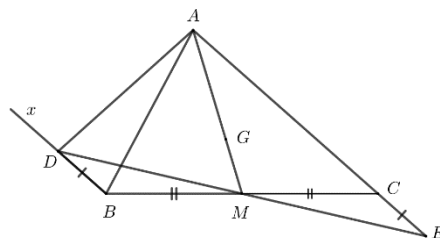
đường trung tuyến do đó $MA = MC$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng ba đường trung tuyến của một tam giác có thể là ba cạnh của một tam giác khác.

Giải (h.18.5)

* *Tìm cách giải*

Để chứng minh ba đường trung tuyến của một tam giác này có thể là ba cạnh của một tam giác khác, ta chứng minh ba đường trung tuyến đó tỉ lệ với ba cạnh của một tam giác.



**Trình bày lời giải*

Gọi AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của $\triangle ABC$. Ba đường trung tuyến cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia DG lấy điểm H sao cho $DH = DG$.

Ta có: $\triangle CDG = \triangle BDH$ (c.g.c) $\Rightarrow GC \parallel HB$
Theo tính chất của ba đường trung tuyến của $\triangle ABC$ ta có:

$$AD = \frac{3}{2}GA = \frac{3}{2}GH; BE = \frac{3}{2}GB; CF = \frac{3}{2}GC = \frac{3}{2}BH$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AD}{GH} = \frac{BE}{GB} = \frac{CF}{BH} = \frac{3}{2}$$

Vậy ba đường trung tuyến AD, BE, CF tỉ lệ với ba cạnh của tam giác GHB , do đó ba đường trung tuyến này có thể là ba cạnh của một tam giác.

C. Bài tập vận dụng

• Chứng minh đồng quy, thẳng hàng.

18.1. Chứng minh rằng trong tam giác có hai cạnh không bằng nhau thì đường trung tuyến ứng với cạnh lớn sẽ nhỏ hơn đường trung tuyến ứng với cạnh bé.

18.2. Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ AH vuông góc BC . Cho biết

$AB = \sqrt{10} \text{ cm}, AC = \sqrt{13} \text{ cm}, AH = 3 \text{ cm}$. Gọi O là một điểm trên AH sao cho $AO = 2 \text{ cm}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và HC . Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng.

• Chứng minh trọng tâm

18.3. Cho tam giác ABC . Gọi D và E là 2 điểm trên cạnh BC sao cho $AD = DE = EC$. Vẽ đường trung tuyến AO của tam giác ABC . Trên tia đối của tia OA lấy điểm F sao cho $OF = OA$.

a) Chứng minh D là trọng tâm tam giác BAF ; E là trọng tâm tam giác CAF .

b) Tia AD cắt BF tại N , tia FE cắt AC tại M . Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác AMN có cùng một trọng tâm.

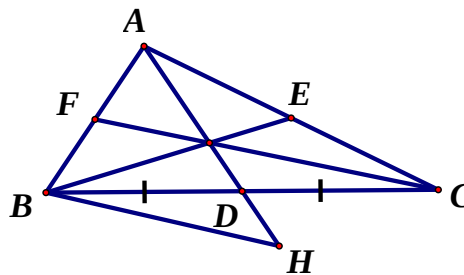
18.4. Cho tam giác ABC . Qua A vẽ đường thẳng $a \parallel BC$. Qua B vẽ đường thẳng $b \parallel AC$ và qua C vẽ đường thẳng $c \parallel AB$. Các đường thẳng b và c cắt nhau tại A' và cắt đường thẳng a lần lượt tại C' và B' .

Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng một trọng tâm.

18.5. Cho góc xOy và một điểm G ở trong góc đó. Hãy xác định $A \in Ox, B \in Oy$ sao cho G là trọng tâm của tam giác AOB .

• Tính độ dài các đường trung tuyến

18.6. Cho tam giác ABC cân tại $A, AB = 3\sqrt{41} \text{ cm}, BC = 24 \text{ cm}$. Tính độ dài đường trung tuyến BM .



18.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các đường trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G. Biết $GB = 4\sqrt{61} \text{ cm}$, $GC = 2\sqrt{601} \text{ cm}$. Tính chu vi tam giác ABC.

18.8. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB^2 = 2AC^2$.

Chứng minh rằng các đường trung tuyến AM và CN vuông góc với nhau.

18.9. Chứng minh rằng tổng ba đường trung tuyến của một tam giác thì lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi của tam giác đó.

• Chứng minh trung tuyến, trung điểm

18.10. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến là BE và CF bằng nhau. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh AG vuông góc với BC.

18.11. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = \frac{2}{3}AC$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CB$. Tia BD cắt AE tại điểm M. Trên tia CM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của NC. Chứng minh rằng $AN = BC$.

18.12. Cho tam giác ABC và trọng tâm G của nó. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân khi và chỉ khi $AB + GB = AC + GC$.

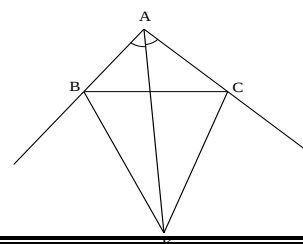
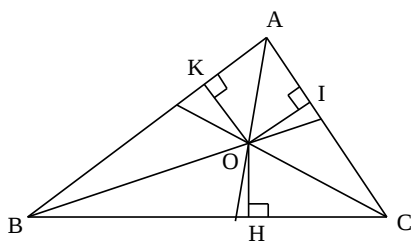
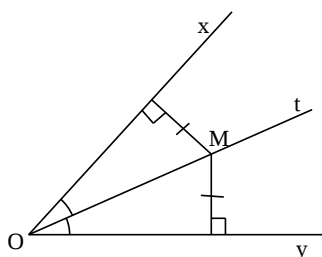
18.13. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Chứng minh rằng $AM > \frac{1}{2}BC$ khi và chỉ khi $\hat{A} < 90^\circ$.

18.14. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Chứng minh rằng nếu $\widehat{BGC} < 90^\circ$ thì $AB + AC > 3BC$.

Chuyên đề 19. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

- Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó (h.19.1).
- Đảo lại, điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.
- Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó (h.19.2).



Hình 19.1

Hình 19.2

Hình 19.3

4. Trong một tam giác, hai đường phân giác của hai góc ngoài và đường phân giác của góc trong không kẻ cùng đi qua một điểm (h.19.3).

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B vẽ tia Ax // BC. Lấy điểm O trên tia Ax, điểm M trên AB và điểm N trên AC sao cho $\widehat{AMO} = \widehat{ANO}$. Chứng minh rằng $\triangle OMN$ là tam giác cân.

Giải (h.19.4)

* *Tìm cách giải.*

Ta có Ax // BC nên dễ thấy Ax là tia phân giác của góc ngoài đỉnh A của tam giác ABC. Vì điểm O nằm trên tia phân giác này nên ta vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp AC$ để vận dụng tính chất cách đều hai cạnh của điểm O. Từ đó dùng phương pháp tam giác bằng nhau để chứng minh $OM = ON$.

* *Trình bày lời giải.*

Ta có Ax // BC nên $\widehat{A_1} = \widehat{B}$ (cặp góc đồng vị); $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ (cặp góc so le trong).

Mặt khác, $\widehat{B} = \widehat{C}$ (hai góc này ở đáy của tam giác cân) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp AC$ ta được $OH = OK$ (tính chất điểm nằm trên tia phân giác).

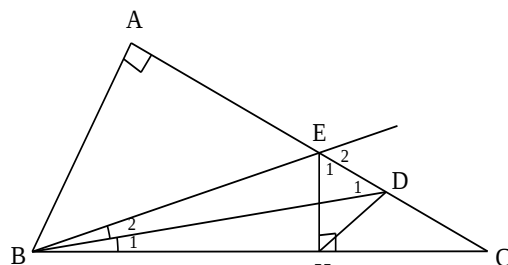
Ta chứng minh được $\triangle HOM = \triangle KON$ (g.c.g). Suy ra $OM = ON$, do đó $\triangle OMN$ cân.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Gọi E là một điểm nằm giữa A và D sao cho tia BD là tia phân giác của góc CBE. Vẽ $EH \perp BC$. Tính số đo của góc CHD.

Giải (h.19.5)

* *Tìm cách giải.*

Vẽ hình chính xác, ta dự đoán $\widehat{CHD} = 45^\circ$. Do đó cần chứng minh HD là đường phân giác của góc CHE. Muốn vậy phải chứng minh EC là đường phân giác ngoài tại đỉnh E của tam giác EBH.



**Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{E} = \widehat{ABC}$ (cung phụ với góc C). Do đó $\widehat{E}_1 = \widehat{ABD} + \widehat{B}$. (1)

Lại có $\widehat{E}_2 = \widehat{D}_1 + \widehat{B}_2$ (2) (tính chất góc ngoài của $\triangle EBD$).

Mặt khác, $\widehat{ABD} = \widehat{D}_1 (= 45^\circ)$ và $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$

Xét $\triangle EBH$ có D là giao điểm của đường phân giác góc B với đường phân giác góc ngoài tại đỉnh E nên HD là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh H.

Suy ra $\widehat{CHD} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $AH \perp BC$. Tia phân giác góc HAC cắt BC tại K. Các đường phân giác của góc BAH và góc BHA cắt nhau tại O. Gọi M là trung điểm của AK. Chứng minh 3 điểm B, O, M thẳng hàng.

Giải (h.19.6)

**Tìm cách giải*

Xét tam giác ABH có O là giao điểm của hai đường phân giác nên O nằm trên đường phân giác của góc B. Để chứng minh 2 điểm B, O, M thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh M cũng nằm trên đường phân giác của góc B. Muốn thế ta phải chứng minh tam giác BAK cân tại B.

**Trình bày lời giải*

Ta có: $\widehat{BAK} + \widehat{KAC} = 90^\circ$; vì $\widehat{BAC} = 90^\circ$

$$\widehat{BKA} + \widehat{KAH} = 90^\circ \text{ vì } \widehat{AHK} = 90^\circ$$

Mặt khác, $\widehat{KAC} = \widehat{KAH}$ nên $\widehat{BAK} = \widehat{BKA}$, suy ra $\triangle BAK$ cân tại B

Xét $\triangle ABH$ có O là giao điểm của hai đường phân giác của góc A và góc H.

Suy ra BO là đường phân giác của góc B.

Xét $\triangle BAK$ cân tại B có BO là đường phân giác nên đồng thời là đường trung tuyến, do đó BO đi qua trung điểm M của AK.

Vậy 3 điểm B, O, M thẳng hàng.

C. Bài tập vận dụng

*** Tính góc đo, tính độ dài**

19.1. Cho tam giác ABC. Gọi K là giao điểm của đường phân giác của góc B với đường phân giác góc ngoài tại đỉnh C.

Cho biết $\widehat{AKC} = 65^\circ$, tính số đo của góc ABC.

19.2. Cho tam giác ABC, ba đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại O.

Cho biết, $\widehat{BOC} = 150^\circ$, tính số đo của góc EDF.

19.3. Cho tam giác ABC vuông tại A, Các tia phân giác của góc B, góc C cắt nhau tại O. Cho biết $OA = \sqrt{8} \text{ cm}$

Tính khoảng cách từ O đến ba cạnh của tam giác.

19.4. Cho tam giác ABC. $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$. Gọi O là giao điểm các đường phân giác của góc B, góc C. Vẽ $OH \perp BC$

Tính các độ dài HB và HC.

***Chứng minh tại phân giác**

19.5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ tam giác OBC vuông tại O sao cho O và A thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BC.

Chứng minh rằng tia OA là tia phân giác của góc BOC.

19.6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm N nằm giữa M và C. Vẽ $BH \perp AN$. Chứng minh rằng khi điểm N di động thì tia phân giác của góc BHN luôn đi qua một điểm cố định.

19.7. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $MB = BA$ và $CN = CA$. Vẽ $BH \perp AM$, $CK \perp AN$. Hai đường thẳng BH và CK cắt nhau tại O. Chứng minh rằng tia AO là tia phân giác của góc BAC.

19.8. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 120^\circ$. Các đường phân giác của góc B, góc C cắt nhau tại O. Vẽ tia Bx sao cho BA là tia phân giác của góc OBx. Vẽ tia Cy sao cho CA là tia phân giác góc OCy. Hai tia Bx và CA cắt nhau tại E, hai tia Cy và BA cắt nhau tại D. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ODE là tam giác đều;

b) Tia OA là tia phân giác của góc DOE.

19.9. Cho tam giác ABC. Nêu cách vẽ đoạn thẳng $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$) sao cho $BM + CN = BC$.

19.10. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 105^\circ, \hat{B} = 40^\circ$. Vẽ điểm D, điểm M trên cạnh BC sao cho $AD \perp AC$ và AD là đường phân giác của góc BAM.

Chứng minh rằng $AB + AM = BC$

*** Chứng minh thẳng hàng, đồng quy**

19.11. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB sao cho $BF = BD$ và $CE = CD$. Đường thẳng qua B và vuông góc với DF cắt đường thẳng qua C và vuông

góc với DE tại I. Đường thẳng qua B và song song với DF cắt đường thẳng qua C và song song với DE tại K. Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

19.12. Cho tam giác ABC vuông tại A, tam giác DBC vuông tại D trong đó D và A nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC. Vẽ tia Ax sao cho AC là phân giác của góc Dax. Vẽ tia Dy sao cho DB là tia phân giác của góc Ady. Hai tia Ax và Dy cắt nhau tại K. Chứng minh ba điểm B, K, C thẳng hàng.

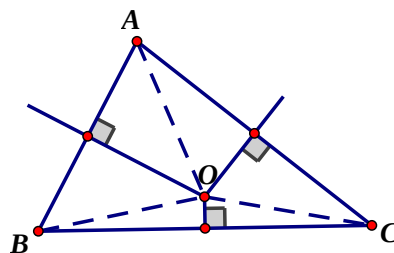
19.13. Hãy nêu cách vẽ một đường thẳng chứa tia phân giác của một góc có đỉnh nằm ngoài tờ giấy.

19.14. Cho tam giác ABC cân tại A. Qua A vẽ đường thẳng $xy \parallel BC$. Các đường phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại O và cắt xy lần lượt tại D và E. Chứng minh các đường BE, CD và AO cùng đi qua một điểm

Chuyên đề 20. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

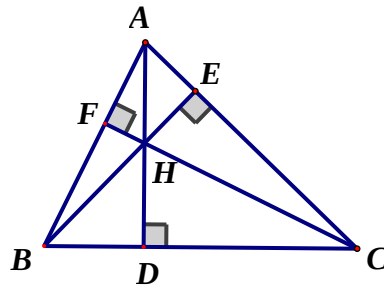
A. Kiến thức cần nhớ

1. Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.
2. Điểm cách đều hai mút của đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.
3. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác và là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác (gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác)



hình 20.1

4. Trong một tam giác, đoạn thẳng vuông góc vẽ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.
5. Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm (hình 20.2). Điểm này gọi là trực tâm của tam giác.



6. Bổ sung tính chất của tam giác cân

- Trong một tam giác cân đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến, đường cao xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.
- Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = AB$. Vẽ đường trung trực của AC, cắt đường phân giác của góc A tại điểm O. Chứng minh rằng O nằm trên trung trực của BM

Giải (h.20.3)

*Tìm cách giải

Muốn chứng minh điểm O nằm trên đường trung trực của BM ta cần chứng minh điểm O cách đều hai đầu đoạn thẳng BM, nghĩa là phải chứng minh $OB = OM$. Muốn vậy phải chứng minh $\triangle ABO = \triangle CMO$

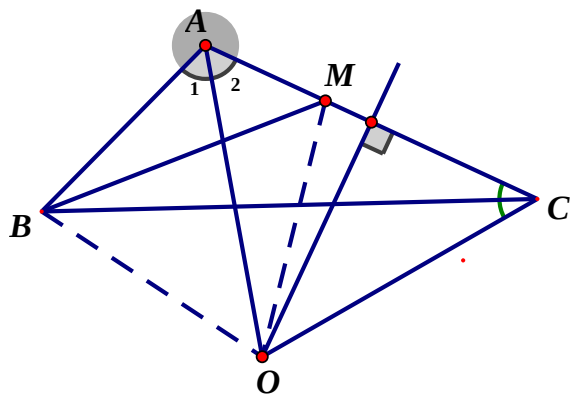
Dễ thấy hai tam giác này có hai cặp cạnh bằng nhau nên chỉ cần chứng minh cặp góc xen giữa bằng nhau là đủ

* Trình bày lời giải:

Điểm O nằm trên đường trung trực của AC nên $OA = OC$.

Do đó $\triangle OAC$ cân tại O, suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{OCA}$; $OA = OC$ nên $\triangle ABO = \triangle CMO (c.g.c)$. Suy ra $OB = OM$.

Điểm O cách đều hai đầu của đoạn thẳng BM nên O nằm trên đường trung trực của BM.



Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của góc HAB và HAC cắt BC lần lượt tại M và N . Các đường phân giác của góc B và C cắt nhau tại O . Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

Giải (h20.4)

* *Tìm cách giải:*

Muốn chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN , ta phải chứng minh O là giao điểm các đường trung trực của các cạnh AM và AN .

Xét $\triangle ABN$ có BO là các đường phân giác góc B nên để chứng minh BO là đường trung trực của AN thì chỉ cần chứng minh $\triangle ABN$ là tam giác cân tại B .

**Trình bày lời giải:*

Ta có $\widehat{BAN} + \widehat{CAN} = 90^\circ$ (vì $\widehat{BAC} = 90^\circ$) (1)

$\widehat{BNA} + \widehat{NAH} = 90^\circ$ (vì $\widehat{H} = 90^\circ$) (2)

Mặt khác, $\widehat{CAN} = \widehat{NAH}$ nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAN} = \widehat{BNA}$ do đó $\triangle ABN$ cân tại B .

Xét $\triangle ABN$ cân tại B có BO là đường phân giác của góc B nên BO cũng là đường trung trực của cạnh AN .

Chứng minh tương tự ta được CO là đường trung trực của cạnh AM .

Xét $\triangle AMN$ có O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh AN và AM nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$.

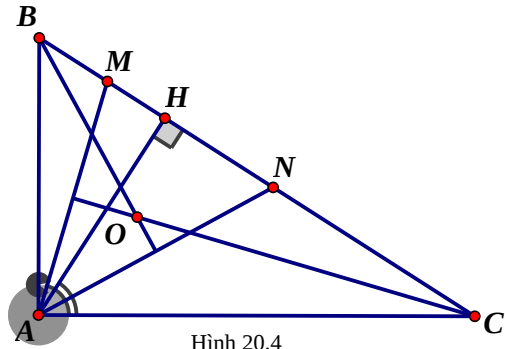
Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường trung tuyến BM . Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại D . Vẽ điểm E sao cho M là trung điểm của DE . Chứng minh rằng $AE \perp BM$.

Giải (hình 20.5)

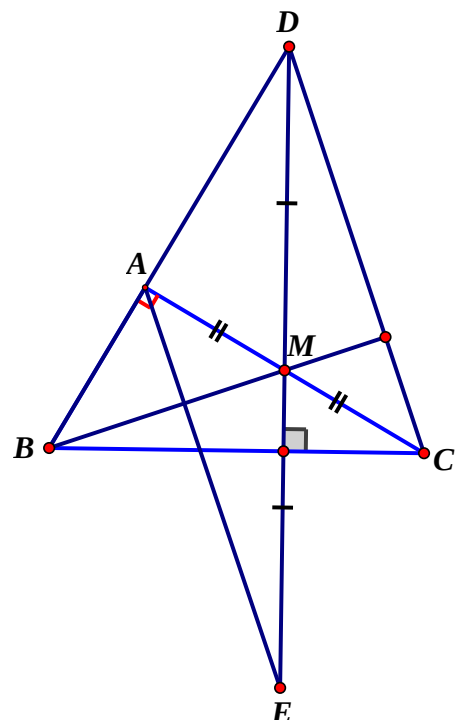
**Tìm cách giải*

Xét $\triangle DBC$, dễ thấy M là trực tâm, suy ra $BM \perp CD$. Do đó muốn chứng minh $BM \perp AE$ ta chỉ cần chứng minh $CD \parallel AE$

* *Trình bày lời giải:*



Hình 20.4



Hình 20.5

Xét $\triangle DBC$ có CA và DM là hai đường cao cắt nhau tại M nên M là trực tâm. Suy ra BM là đường cao thứ ba, do đó $BM \perp CD$ (1)

Ta có $\triangle MEA = \triangle MDC$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{MEA} = \widehat{MDC}$. Do đó $AE \parallel CD$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $AE \perp BM$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 45^\circ$. Vẽ đường trung tuyến AM , đường trung trực của cạnh AC cắt AB tại D . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BE, CD đồng quy.

Giải (hình 20.6)

* *Tìm cách giải:*

Vẽ hình chính xác ta dự đoán ba đường thẳng AM, BE, CD là ba đường cao của tam giác ABC nên chúng đồng quy. Do đó ta cần chứng minh $AM \perp BC, CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.

* *Trình bày lời giải:*

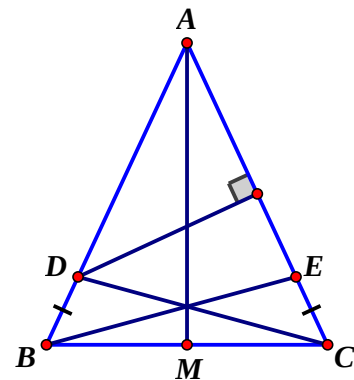
Điểm D nằm trên đường trung trực của AC nên $DA = DC$.

Do đó $\triangle DAC$ cân suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{CAD} = 45^\circ$.

Xét $\triangle DAC$ có $\widehat{ADC} = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$. Vậy $CD \perp AB$.

Ta lại có $\triangle BCD = \triangle CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{E} = \hat{D} = 90^\circ$. Do đó $BE \perp AC$.

Mặt khác, AM là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy của tam giác cân nên $AM \perp BC$. Xét $\triangle ABC$ có AM, BE và CD là ba đường cao nên chúng đồng quy.



Hình 20.6

C. Bài tập vận dụng

• Tính chất đường trung trực

20.1. Cho tam giác ABC , góc A tù. Các đường trung trực của AB và AC cắt BC lần lượt tại D và E . Biết góc DAE có số đo bằng 30° , tính số đo của góc BAC .

20.2. Cho tam giác ABC . Trên các tia BA và CA lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $BD + CE = BC$. Chứng minh rằng khi D và E di động thì đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định ở trong tam giác ABC .

20.3. Cho góc vuông Oxy và một điểm A cố định ở trong góc đó. Vẽ góc BAC bằng 90° sao cho $B \in Ox, C \in Oy$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng M nằm trên một đường thẳng cố định.

20.4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì. Vẽ các điểm D và E sao cho AB là đường trung trực của MD , AC là đường trung trực của ME . Xác định vị trí của điểm M để cho đoạn thẳng DE có độ dài ngắn nhất.

20.5. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên cạnh AB lấy điểm M , trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $\widehat{MHN} = 90^\circ$.

a) Gọi O là trung điểm của MN . Chứng minh rằng khi M và N di động thì điểm O di động trên một đường thẳng cố định.

b) Xác định vị trí của M và N để MN có độ dài nhỏ nhất.

20.6. Cho góc xOy khác góc bẹt. Lấy điểm M trên tia Ox , điểm N trên tia Oy sao cho $OM + ON = a$ không đổi. Chứng minh rằng khi M và N di động trên các tia Ox, Oy thì đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

20.7. Cho tam giác ABC sao cho $\hat{B} < 90^\circ$ và $\hat{C} > \frac{1}{2}\hat{B}$. hãy tìm điểm M trên cạnh AB , điểm N trên cạnh BC sao cho $BM = MN = NC$.

• Chứng minh đồng quy thẳng hàng

20.8. Cho tam giác ABC $AB < AC$. Trên các tia BA và CA lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $BM = CN$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Chứng minh rằng các đường trung trực của AD, BC và MN cùng đi qua một điểm.

20.9. Cho các tam giác ABC vuông tại A , tam giác DBC vuông tại D trong đó A và D cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Vẽ $AE \perp DN; DF \perp AN$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, DF, MN cùng đi qua một điểm.

20.10. Cho tam giác nhọn ABC , đường cao AD . Trên tia DA lấy điểm H sao cho $DH = DB$. Trên tia DC lấy điểm K sao cho $DK = DA$.

Chứng minh rằng $KH \perp AB$.

20.11. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh AB lấy điểm H , trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{AHD} + \widehat{ACD} = 180^\circ$. Đường thẳng DH cắt đường thẳng AC tại O .

Chứng minh rằng hai đường thẳng OB và CH vuông góc với nhau.

20.12. Cho tam giác nhọn $ABC, \hat{A} = 60^\circ$. Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Đường trung trực của HB cắt AB tại M , đường trung trực của HC cắt AC tại N . Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.

20.13. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và H là trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng $\widehat{BOC} + 2\widehat{BHC} = 360^\circ$.

• Tam giác cân

20.14. Cho tam giác ABC , đường phân giác AD . Một đường thẳng song song với AD cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng đường trung trực của EF luôn đi qua một điểm cố định.

20.15. Cho tam giác nhọn ABC , đường cao AH , đường trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại ba điểm phân biệt E, F, G . Hỏi tam giác EFG có thể là tam giác đều không?

Chuyên đề 21. CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG CÙNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM (ĐỒNG QUY)

A. Kiến thức cần nhớ

- ✚ Trong các chuyên đề trước ta gặp một số bài toán về chứng minh ba đường thẳng đồng quy.
- ✚ Phương pháp giải các bài toán này là vận dụng định lý về các đường đồng quy của tam giác:
 - Ba đường trung tuyến của một tam giác đồng quy;
 - Ba đường phân giác của một tam giác đồng quy;
 - Ba đường trung trực của một tam giác đồng quy;
 - Ba đường cao của một tam giác đồng quy.
- ✚ Nếu ba đường thẳng a, b, c đã cho không phải là các đường chủ yếu của tam giác thì để chứng minh a, b, c đồng quy, ta có thể gọi giao điểm của a và b là O rồi chứng minh đường thẳng c đi qua O hay chứng minh O nằm trên đường thẳng c .
- ✚ Một số trường hợp có thể đưa bài toán chứng minh 3 đường đồng quy về chứng minh ba điểm thẳng hàng.

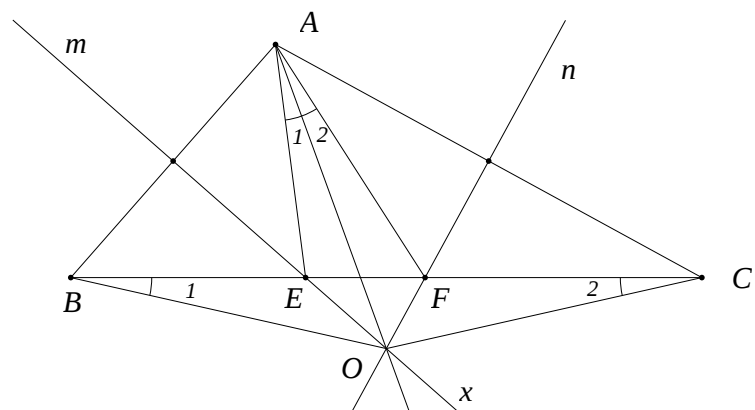
B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC , góc A tù. Vẽ các đường thẳng m và n lần lượt là đường trung trực của AB và AC , cắt BC theo thứ tự tại E và F . Vẽ tia phân giác Ax của góc EAF . Chứng minh rằng các đường thẳng m, n và Ax đồng quy.

Giải (h.21.1)

- Tìm cách giải:

Gọi O là giao điểm của m và n . Ta phải chứng minh tia Ax đi qua O . Muốn vậy phải chứng minh $\widehat{OAE} = \widehat{OAF}$.



- Trình bày lời giải:

Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng m và n .

Ta có: $OB = OC = OA$

$\triangle AOE = \triangle BOE$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

$\triangle AOF = \triangle COF$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$

Mặt khác $\widehat{B_1} = \widehat{C_2}$ (vì $\triangle BOC$ cân tại O) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Do đó AO là tia phân giác của góc EAF .

Suy ra ba đường thẳng m, n và Ax đồng quy tại O .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = AE$. Gọi M là trung điểm của BC .

Chứng minh rằng ba đường AM, BE, CD đồng quy.

Giải (h.21.2)

- Tìm cách giải:

Gọi O là giao điểm của BE và CD . Ta phải chứng minh tia AM đi qua O tức là phải chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.

- Trình bày lời giải:

Ta có $AB = AC, AD = AE$, suy ra $BD = CE$.

$\triangle EBC = \triangle DCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Gọi O là giao điểm của BE và CD .

Vì $\triangle BOC$ cân tại O nên $OB = OC$. (1)

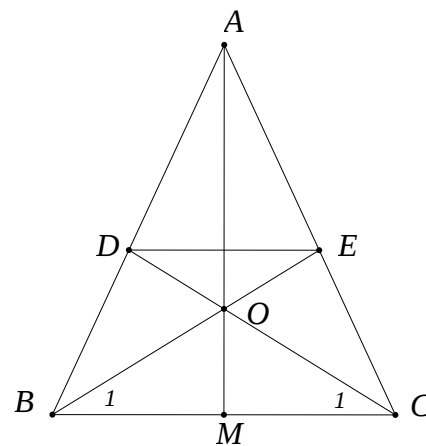
Mặt khác $AB = AC$ (giả thiết) (2)

và $MB = MC$ (giả thiết) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm A, O, M thẳng hàng

(vì cùng nằm trên đường trung trực của BC).

Do đó ba đường thẳng AM, BE, CD đồng quy.



Hình 21.2

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Các đường phân giác các góc ngoài của tam giác cắt nhau tại D, E, F (D nằm trong góc A , E nằm trong góc B , F nằm trong góc C).

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm O .

b) Điểm O có vị trí như thế nào đối với tam giác ABC ?

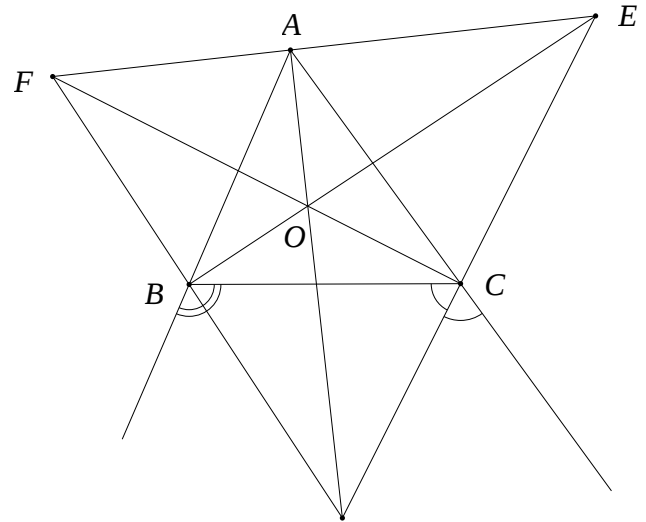
Giải (h.21.3)

- *Tìm cách giải:*

Từ giả thiết các đường phân giác ngoài cắt nhau ta nghĩ đến định lý ba đường phân giác của tam giác đồng quy. Vì vậy để chứng minh AD, BE, CF đồng quy ta chỉ cần chứng minh AD, BE, CF là ba đường phân giác của tam giác ABC .

- *Trình bày lời giải:*

Xét tam giác ABC , các đường phân giác ngoài đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại D . Suy ra AD là đường phân giác trong đỉnh A .



Hình 21.3

Chứng minh tương tự ta được BE, CF lần lượt là các đường phân giác trong tại đỉnh B, C của tam giác ABC

Do đó ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm O .

b) Ba điểm F, B, D thẳng hàng, ba điểm E, C, D thẳng hàng, ba điểm F, A, E thẳng hàng.

Xét $\triangle DEF$ có $AD \perp EF$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù).

Tương tự $BE \perp DF, CF \perp DE$ nên AD, BE, CF là ba đường cao gặp nhau tại O . Do đó O là trực tâm của tam giác DEF .

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 135^\circ$. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác ADB, EAC vuông cân tại D và E . Vẽ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng ba đường AH, BD, CE đồng quy.

Giải (h.21.4)

- *Tìm cách giải:*

Trong đề bài có yếu tố góc vuông, có yếu tố đường cao nên ta có thể dùng định lý ba đường cao trong tam giác đồng quy.

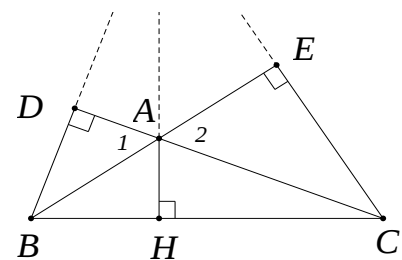
- *Trình bày lời giải:*

Tam giác DAB vuông cân tại $D \Rightarrow \hat{A}_1 = 45^\circ$.

Tam giác ECA vuông cân tại $E \Rightarrow \hat{A}_2 = 45^\circ$

Ta có: $\widehat{BAD} + \widehat{BAC} = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$, suy ra ba điểm D, A, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta được ba điểm B, A, E thẳng



Hình 21.4

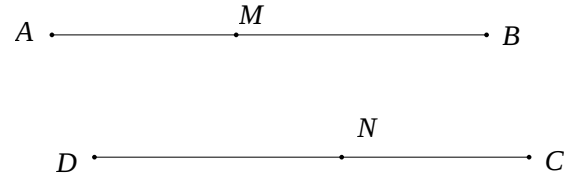
hàng.

Xét tam giác ABC có AH, BD, CE là ba đường cao nên chúng đồng quy.

C. Bài tập vận dụng

• Đưa chứng minh đồng quy về chứng minh thẳng hàng

21.1. Trong hình 21.5 có $AB \parallel CD, AB = CD, AM = CN$. Chứng minh ba đường thẳng AC, BD, MN đồng quy.

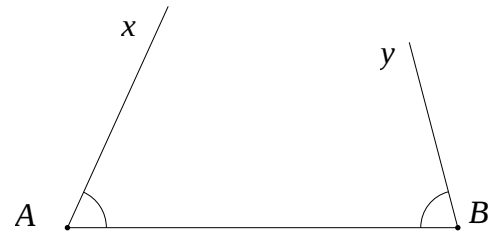


Hình 21.5

21.2. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{B} = 60^\circ$. Gọi M là một điểm ở trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 40^\circ, \widehat{MCB} = 20^\circ$. Vẽ điểm D và E sao cho đường thẳng BC là trung trực của MD và đường thẳng AC là trung trực của ME . Chứng minh ba đường thẳng BM, AC và DE đồng quy.

21.3. Cho tam giác nhọn ABC và điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 120^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ các tia Bx, Cy sao cho $\widehat{CBx} = \widehat{BCy} = 60^\circ$. Chứng minh ba đường thẳng AM, Bx, Cy đồng quy.

21.4. Hình 21.6 có $\widehat{ABx} = \widehat{AB y} < 90^\circ$. Gọi d là đường trung trực của AB . Chứng minh rằng các đường thẳng Ax, By và d đồng quy.



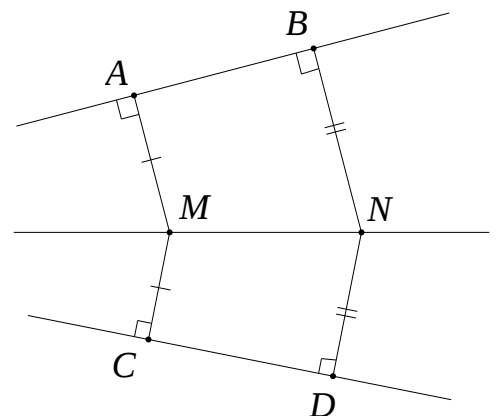
Hình 21.6

21.5. Cho tam giác ABC và một điểm O ở trong tam giác. Gọi F, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác AOB, AOC . Chứng minh ba đường thẳng AO, BF, CG đồng quy.

• Ba đường phân giác đồng quy

21.7. Trong hình 21.7, hai đường thẳng AB và CD không song song. Chứng minh rằng ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy.

21.8. Cho tam giác ABC , $\widehat{A} = 120^\circ$. Vẽ các đường phân giác AD, CE cắt nhau tại O . Từ B vẽ các đường thẳng $xy \perp BO$. Chứng minh rằng ba đường thẳng xy, DE, AC đồng quy.



Hình 21.7

21.9. Cho tam giác nhọn ABC , đường cao AD . Vẽ các điểm M, N sao cho AB, AC theo thứ tự là các đường trung trực của DM, DN . Gọi giao điểm của MN với AB, AC theo thứ tự là F và E .

Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

• **Ba đường cao đồng quy**

21.10. Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH . Gọi O và K lần lượt là giao điểm của các đường phân giác của tam giác ABH, ACH . Vẽ $AD \perp OK$. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BO, CK đồng quy.

21.11. Cho tam giác ABC , đường AD . Trên nửa mặt phẳng bờ là AB không chứa C vẽ đoạn thẳng $BF \perp BA, BF = BA$. Trên nửa mặt phẳng bờ là AC không chứa B vẽ đoạn thẳng CE sao cho $CE \perp CA$ và $CE = CA$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

21.12. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác AD . Từ A, B, C vẽ các đường d_1, d_2, d_3 vuông góc với AD . Các đường thẳng d_2, d_3 lần lượt cắt AD tại E, F . Chứng minh rằng ba đường thẳng d_1, BF, CE đồng quy.

• **Ba đường trung trực đồng quy, ba đường trung tuyến đồng quy.**

21.13. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ các đường phân giác của góc BAH và góc CAH cắt BC tại E, F . Gọi M là trung điểm của EF . Qua M vẽ đường thẳng $d \parallel AH$. Chứng minh rằng các đường phân giác trong góc B , góc C và đường thẳng d đồng quy.

21.14. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 4cm, AC = 6cm$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{CAD} = \widehat{ACD}$. Trên cạnh AC lấy điểm E , trên cạnh AB lấy điểm F sao cho $BE = 5cm, CF = \sqrt{40}cm$. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

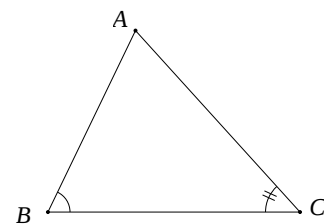
21.15. Cho tam giác nhọn ABC , đường cao AH , đường phân giác AD , đường trung tuyến AM . Cho biết tam giác HDM là tam giác đều. Chứng minh rằng các đường thẳng AH, BD, CM đồng quy.

Chuyên đề 22. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

• Để chứng minh hai đoạn thẳng, hai góc không bằng nhau ta có thể:

1. Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác (h22.1)



Hình 22.1

$\triangle ABC$

$$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

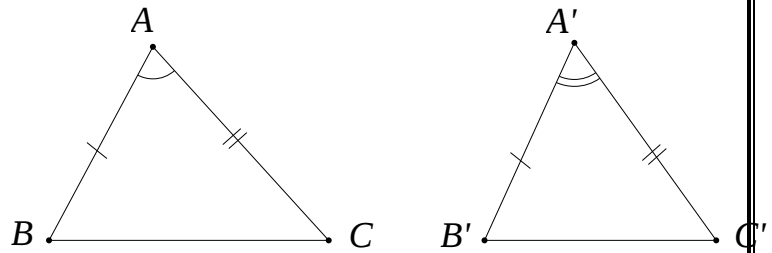
Suy ra trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông) thì cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.

2. Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau (h.22.2)

 $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$AB = A'B'; AC = A'C'$$

$$\text{Khi đó } BC > B'C' \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{A}'$$

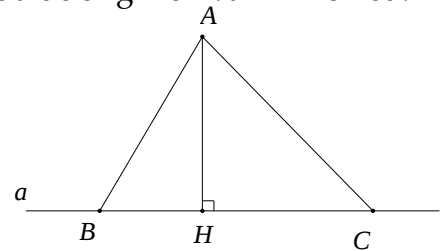


Hình 22.2

3. Dùng quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, giữa đường xiên và hình chiếu.

 $AH \perp a; B, M \in a$ (h.22.3). Khi đó:

- $AM \geq AH$ (dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$)
- $AM \geq AB \Leftrightarrow HM \geq HB$

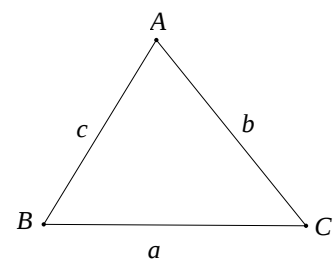


Hình 22.3

4. Dùng bất đẳng thức tam giác (h.22.4)

 $\triangle ABC$:

$$|b - c| < a < b + c$$



Hình 22.4

Mở rộng: Với ba điểm A, B, C bất kì bao giờ cũng có $AB \leq AC + BC$ (dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow C$ thuộc đoạn thẳng AB).

• **Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AB thay đổi**

Ta phải đi chứng minh $AB \leq a$ (số a không đổi) và chỉ rõ khi nào dấu “=” xảy ra. Khi đó giá trị lớn nhất của độ dài AB bằng a . Ta viết $\max AB = a$.

• **Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB thay đổi**

Ta phải đi chứng minh $AB \geq b$ (số b không đổi) và chỉ rõ khi nào dấu “=” xảy ra. Khi đó giá trị nhỏ nhất của độ dài AB bằng b . Ta viết $\min AB = b$.

B. Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Tam giác ABC có $\widehat{C} < \widehat{B}$. Vẽ đường trung tuyến AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D . Chứng minh rằng $AB + CD < AC + BD$.

Giải (h.22.5)

- *Tìm cách giải:*

Để chứng minh $AB + CD < AC + BD$ ta có thể chứng minh $AB < AC$ và $CD < BD$. Sau đó cộng từng vế hai bất đẳng thức.

- *Trình bày lời giải:*

Tam giác ABC có $\widehat{CAB} < \widehat{ABC}$ suy ra $AB < AC$ (1).

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có: $MB = MC$, AM chung, $AB = AC$ nên $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$.

Suy ra $\widehat{CMD} > \widehat{BMD}$

Xét $\triangle CMD$ và $\triangle BMD$ có $MB = MC$, MD chung, nên $CD < BD$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $AB + CD < AC + BD$.

❖ **Nhận xét:** Nếu $a < b$ và $c < d$ thì $a + c < b + d$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > 90^\circ$. Gọi O là trung điểm của BC . Vẽ $BD \perp AO$; $CE \perp AO$ (D, E thuộc đường thẳng AO). Chứng minh rằng $AB < \frac{AD + AE}{2}$.

Giải (h.22.6)

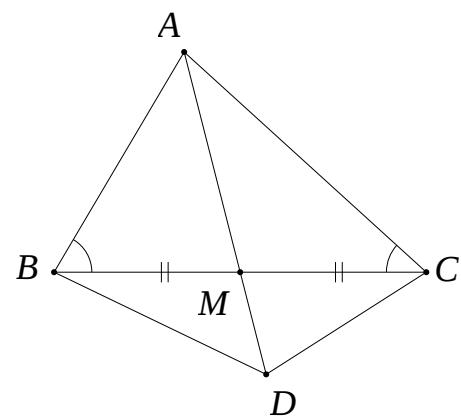
- *Tìm cách giải:*

Ta có $AB < \frac{AD + AE}{2} \Leftrightarrow 2AB < AD + AE$.

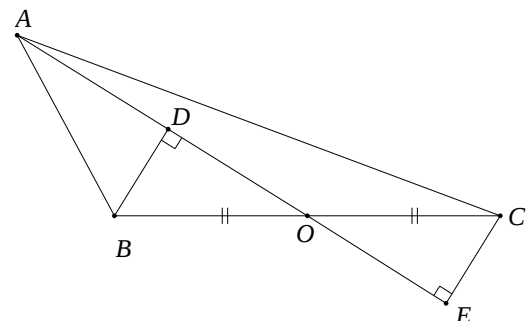
Để chứng minh $2AB < AD + AE$ ta biểu diễn AB theo hai cách khác nhau rồi dùng tính chất cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều sẽ có được $2AB$.

- *Trình bày lời giải:*

Ta có $\triangle BOD = \triangle COE$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow OD = OE$.



Hình 22.5



Hình 22.6

Xét tam giác AOB có $\widehat{B} \geq 90^\circ$ nên OA là cạnh lớn nhất, do đó $AB < OA$. (*)

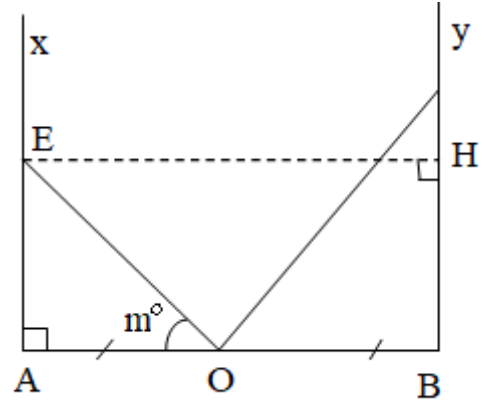
Suy ra $AB < AD + OD$. (1)

Từ (*) ta được $AB < AE - OE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2AB < AD + AE$ (vì $OD = OE$)

Vậy $AB < \frac{AD + AE}{2}$.

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của nó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là AB vẽ các tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Lấy điểm $E \in Ax$, điểm $F \in By$ sao cho $\widehat{EOF} = 90^\circ$. Đặt $\widehat{AOE} = m^\circ$. Xác định giá trị của m để EF có độ dài ngắn nhất.



Giải (.22.7)

**Tìm cách giải*

Vẽ $EH \perp By$. Dễ thấy $AF \geq IH = AB$ (không đổi)

Ta cần tìm giá trị của m để dấu “=” xảy ra.

Khi đó $\min EF = AB$

**Trình bày lời giải*

Vẽ $EH \perp By$. Theo tính chất đoạn chắn song song ta được $EH = AB$ và $AE = BH$.

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $AF \geq IH$ do đó $EF \geq AB$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow FF \equiv H \Leftrightarrow AE = BF \Leftrightarrow \Delta AOE = \Delta BOF$
 $\Leftrightarrow \widehat{AOE} = \widehat{BOF} = 45^\circ$ (vì $\widehat{AOE} + \widehat{BOF} = 90^\circ$).

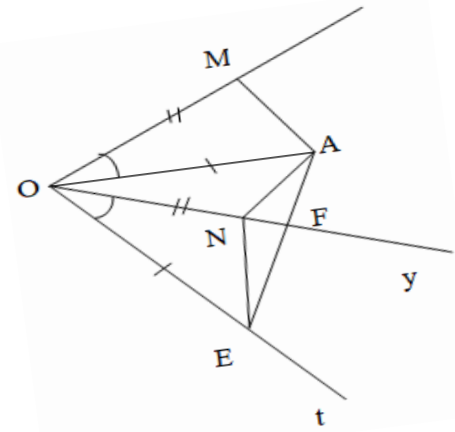
Vậy EF có độ dài ngắn nhất (bằng độ dài AB) khi và chỉ khi $\widehat{AOE} = 45^\circ$, tức là khi và chỉ khi $m = 45$.

Ví dụ 4. Cho góc nhọn xOy và một điểm A ở trong góc đó. Xác định điểm M trên tia Ox , điểm N trên tia Oy sao cho $OM = ON$ và Tổng $AM + AN$ nhỏ nhất.

giải(h.22.8)

**Tìm cách giải*

Xét 3 điểm A, M, N ta có $AM + AN \geq MN$ nhưng độ dài MN lại thay đổi. Do đó không thể kết luận Tổng $AM + AN$ có giá trị nhỏ nhất bằng độ dài MN được. Ta phải thay thế Tổng $AM + AN$ bằng tổng của hai đoạn thẳng có tổng lớn hơn hoặc bằng độ dài của một đoạn thẳng cố định. Muốn vậy ta cần vẽ thêm hình phụ để tạo thêm một điểm E cố định.



**Trình bày lời giải*

Trên nửa mặt phẳng bờ Oy không chứa A vẽ tia Ot sao cho $\widehat{yOt} = \widehat{AOx}$. Trên tia Ot lấy điểm E sao cho $OE = OA$. Như vậy hai điểm A và E cố định đoạn thẳng AE có độ dài không đổi.

Ta có $\triangle AOM = \triangle EON$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = EN$. Do đó $AM + AN = EN + AN$.

Gọi F là giao điểm của AE với tia Oy.

Xét ba điểm N, A, E ta có: $EN + AN \geq AE$ (dấu "=" xảy ra tương đương N trùng F).

Vậy min $AM + AN = AE$ khi $N \equiv F$. Điểm M $\in Ox$ sao cho $OM = ON$.

C. Bài tập vận dụng

• Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác

22.1. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 60^\circ$. Chứng minh rằng $BC^3 < AB^3 + AC^3$.

22.2. Cho tam giác ABC, $AB < AC$. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF. Gọi D là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng $DE < DF$.

22.3. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 90^\circ$ và $AB = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng $\hat{C} > \frac{B}{2}$.

22.4. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM.

Chứng minh rằng $AM > \frac{BC}{2}$ khi và chỉ khi góc A nhọn.

22.5. Cho tam giác ABC và một điểm D nằm trong tam giác. Chứng minh rằng trong 4 điểm A, B, C, D tồn tại 3 điểm là ba đỉnh của một tam giác có một góc lớn hơn 29° .

• Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

22.6. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng a. lấy điểm B $\in a$. Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt đường thẳng a tại C.

Xác định vị trí của điểm B để BC có độ dài nhỏ nhất.

22.7. Cho tam giác ABC cân tại A, $BC = a$. Gọi O là một điểm trên đáy BC. Qua O vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh bên, cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Tìm độ dài nhỏ nhất của MN.

22.8. Cho tam giác đều ABC cạnh dài 4cm. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = CE$. Tính độ dài nhỏ nhất của DE.

22.9. Cho tam giác ABC, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$ và $AC = 52\text{cm}$. Điểm M nằm giữa B và C. Tính giá trị lớn nhất của tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

22.10. Chứng minh rằng trong các tam giác có một góc bằng α và tổng hai cạnh kề góc ấy bằng $2a$ thì tam giác cân có góc ở đỉnh bằng α là tam giác có chu vi nhỏ nhất.

• **Bất đẳng thức tam giác**

22.11. Cho tam giác ABC. Gọi xy là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh C. Tìm trên xy một điểm M sao cho tổng $MA + MB$ ngắn nhất.

22.12. Cho tam giác ABC có $AM = 12$, $AC = 16$. Gọi M là một điểm trong mặt phẳng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 7MA + 3MB + 4MC$.

22.13. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng tổng $HA + HB + HC$ nhỏ hơn $\frac{2}{3}$ chu vi của tam giác ABC.

22.14. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = a$. Tìm một điểm M sao cho tam giác MAC cân tại M, đồng thời tổng $MA + MB$ nhỏ nhất.

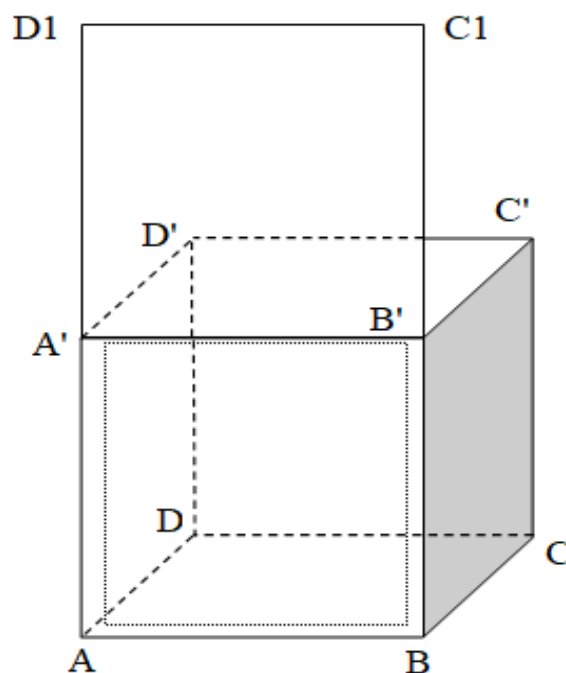
Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

22.15. Cho đường thẳng xy và tam giác ABC có cạnh AB nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xy còn đỉnh C di động trên xy. Biết $AB = 13\text{cm}$, khoảng cách từ A và B đến xy lần lượt bằng 2cm và 7cm.

Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC.

22.16. Một hộp gỗ hình lập phương mỗi cạnh dài 20cm. Đáy ABCD đặt áp sát mặt bàn.

Nắp hộp A'B'C'D' có thể mở dựng đứng lên trên (h.22.9). Một con kiến ở đỉnh A muốn bò tới đỉnh C' bằng cách vượt qua cạnh A'B' thì phải bò một quãng đường ngắn nhất là bao nhiêu?



Hình 22.9

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

1.1. (h.1.6)

Ta có : $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (Hai góc đối nhau)

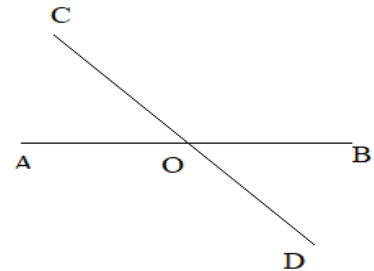
mà $\widehat{AOC} + \widehat{BOD} = 100^\circ$ nên

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 100^\circ : 2 = 50^\circ.$$

Hai góc AOC và BOC kề bù nên

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

Do đó $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 130^\circ$ (Hai góc đối đỉnh)



Hình 1.6

1.2. (h.1.7)

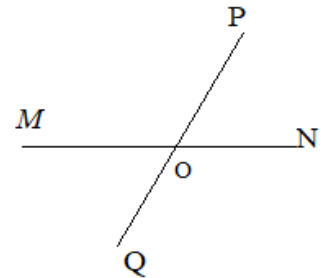
Hai góc NOP và MOP kề bù nên $\widehat{NOP} + \widehat{MOP} = 180^\circ$

Mà $\widehat{NOP} = \frac{2}{3} \widehat{MOP}$ nên

$$\widehat{NOP} = \frac{180^\circ \cdot 2}{2+3} = 72^\circ; \widehat{MOP} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Suy ra $\widehat{MOQ} = \widehat{NOP} = 72^\circ$ (Hai góc đối đỉnh)

$\widehat{NOQ} = \widehat{MOP} = 108^\circ$ (Hai góc đối đỉnh).



Hình 1.7

1.3. (h.1.8)

Ta có $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = a^\circ$ (Hai góc đối đỉnh)

Tia OM là tia phân giác của góc AOC nên

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOC} = \frac{a^\circ}{2}.$$

Hai góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ kề bù nên

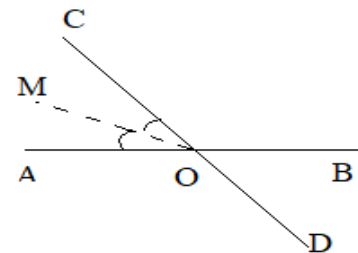
$$\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ \text{ suy ra } \widehat{BOM} = 180^\circ - \frac{a^\circ}{2}.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BOM} = 155^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \frac{a^\circ}{2} = 155^\circ \Leftrightarrow \frac{a^\circ}{2} = 180^\circ - 155^\circ \Leftrightarrow \frac{a^\circ}{2} = 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow a^\circ = 50^\circ. \text{ Vậy } a = 50.$$

Lưu ý : Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là “ khi và chỉ khi ”

Khi viết $A \Leftrightarrow B$ ta hiểu từ A suy được ra B và ngược lại , từ B suy được ra A



Hình 1.8

1.4 (h. 1.9)

Hai góc EOK và FOK kề bù nên $\widehat{EOK} + \widehat{FOK} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EOK} = 180^\circ - m^\circ.$$

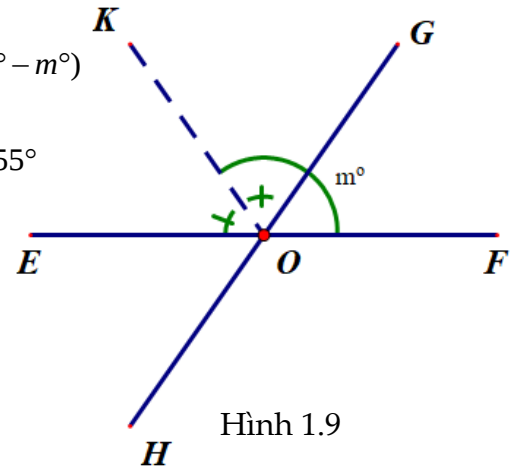
Tia OK là tia phân giác của góc EOG

$$\text{Nên } \widehat{EOG} = 2(180^\circ - m^\circ)$$

$$\text{Vì } \widehat{FOH} \text{ đối đỉnh với } \widehat{EOG} \text{ nên } \widehat{FOH} = \widehat{EOG} = 2(180^\circ - m^\circ)$$

$$\text{Ta có } \widehat{FOH} = 110^\circ \Leftrightarrow 2(180^\circ - m^\circ) = 110^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - m^\circ = 55^\circ$$

$$\Leftrightarrow m^\circ = 180^\circ - 55^\circ \Leftrightarrow m^\circ = 125^\circ. \text{ Vậy } m = 125$$



Hình 1.9

1.5 (h. 1.10)

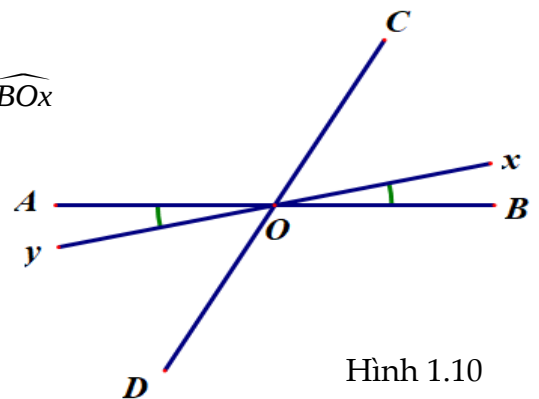
Hai góc Aoy và Box là hai góc đối đỉnh nên $\widehat{AOy} = \widehat{BOx}$

Ta có $\widehat{BOx} \leq \widehat{BOC}$ nên $\widehat{AOy} \leq 60^\circ$;

dấu " $=$ " xảy ra khi tia Ox trùng với tia OC.

Vậy số đo lớn nhất của góc Aoy là bằng 60°

khi tia Ox trùng với tia OC



Hình 1.10

1.6

a) Ba đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 6 tia. Số đo 6 tia tạo thành là : $\frac{6.5}{2} = 15$ (góc).

b) Xét hai đường thẳng AB và CD trong ba đường đã cho (h.1.11).

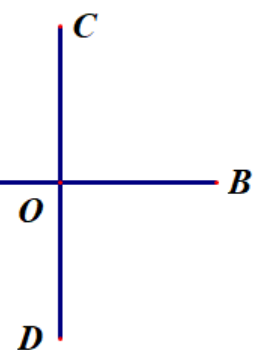
Hai đường thẳng này tạo thành bốn góc không có điểm trong chung.

Tổng bốn góc này bằng 360° nên trong bốn góc đó phải tồn tại

một góc lớn hơn hoặc bằng 90° .

Thật vậy , nếu mỗi góc đều nhỏ hơn 90° thì

tổng của chúng nhỏ hơn $90^\circ.4 = 360^\circ$, vô lí.



Hình 1.11

Giả sử góc tồn tại nói trên là góc BOD.

Nếu $\widehat{BOD} > 90^\circ$ thì $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} > 90^\circ$, bài toán đã giải xong.

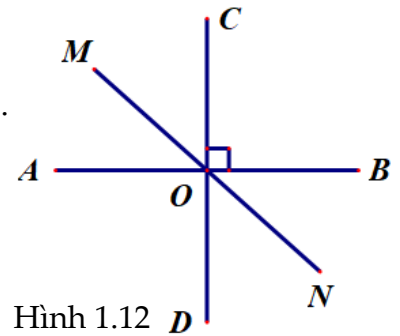
Nếu $\widehat{BOD} = 90^\circ$ thì ta xét tiếp đường thẳng thứ ba MN đi qua O (h.1.12).

Giả sử tia ON nằm trong góc BOD. Khi đó góc BON là góc nhọn

do đó $\widehat{AON}$ là góc tù (vì $\widehat{BON}$ và $\widehat{AON}$ là hai góc kề bù).

Góc AON là góc tù thì góc BOM là góc tù (vì $\widehat{BOM} = \widehat{AON}$).

Vậy luôn tồn tại hai góc tù trong số 15 góc được tạo thành



Hình 1.12

1.7 (h.1.13)

Xét hai góc đối đỉnh AOC và BOD. Gọi tia OM là tia phân giác của góc AOC, Tia ON là tia phân giác của góc BOD. Ta phải chứng tỏ hai tia OM, ON đối nhau.

Ta có $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (hai góc đối đỉnh)

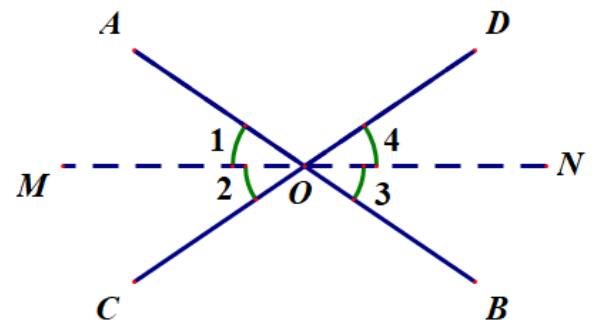
mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$ (một nửa của

hai góc bằng nhau).

Vì $\widehat{AOB} = 180^\circ$ nên $\widehat{AOD} + \widehat{DOB} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{O_4} + \widehat{O_3} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{O_4} + \widehat{O_1} = 180^\circ \text{ (vì } \widehat{O_1} = \widehat{O_3} \text{)}$$



Hình 1.13

1.8. (h.1.14)

Theo đề bài ta có $\widehat{AOM} = \widehat{MOC}, \widehat{BON} = \widehat{DON}$,

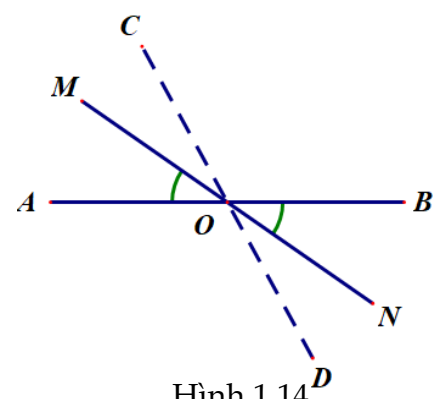
mà $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{MOC} = \widehat{DON}$.

Ta có $\widehat{MOD} + \widehat{DON} = 180^\circ$ (hai góc kề bù),

suy ra $\widehat{MOD} + \widehat{MOC} = 180^\circ$.

Hai góc MOD và MOC là hai góc kề, có tổng bằng 180°

nên hai tia OC, OD đối nhau.



Hình 1.14

1.9. (h.1.15)

Ta có $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ (đề bài cho)

mà $\widehat{BOC}' = \widehat{COB}'$ nên $\widehat{AOB} - \widehat{BOC}' = \widehat{AOC} - \widehat{COB}'$.

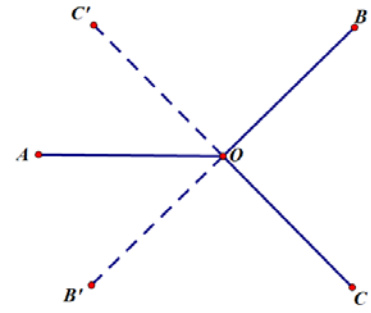
Do đó $\widehat{AOC}' = \widehat{AOB}'$. (1)

Mặt khác , tia OA nằm giữa hai tia OB'

và OC' (2)

Nên từ (1) và (2) ta có được tia OA là tia phân giác của góc $B'OC'$.

Hình 15



1.10 (h.1.16)

Hai góc AOC và BOC kề bù nên $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$

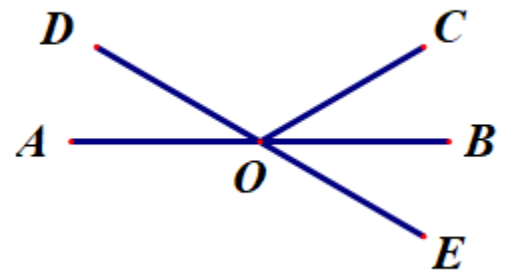
Tương tự , ta tính được $\widehat{AOD} = 30^\circ$

Ta có $\widehat{BOE} = \widehat{AOD} = 30^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{BOC} = \widehat{BOE} = 30^\circ$ (1)

Tia OB nằm giữa hai tia OC và OE . (2)

Từ (1) và (2) ta được tia OB là tia phân giác của góc COE.



Hình 1.16

1.11. (h.1.17)

a) Liệt kê các cặp góc đối đỉnh

Xét các cặp góc “đơn” :

Góc 1 đối đỉnh với góc 5 ; Góc 2 đối đỉnh

với góc 6 ; Góc 3 đối đỉnh với góc ; Góc 4 đối

đỉnh với góc 8 . Có tất cả 4 cặp góc “đơn” đối đỉnh.

1.17

Xét các cặp góc “ghép đôi” (ghép hai góc đơn kề nhau thành một góc “ghép đôi”):

Góc 12 đối đỉnh với góc 56 ; Góc 23 đối đỉnh với góc 67; Góc 34 đối đỉnh với góc 78 ;

Góc 45 đối đỉnh với góc 81. Có tất cả 4 góc “ghép đôi” đối đỉnh.

Xét các cặp góc “ghép ba” (ghép ba góc đơn kề nhau thành một góc “ghép ba”):

Góc 123 đối đỉnh với góc 567 ; Góc 234 đối đỉnh với góc 678; Góc 345 đối đỉnh với góc

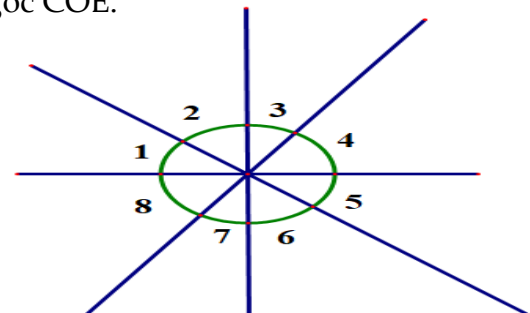
781 ; Góc 456 đối đỉnh với góc 812. Có tất cả 4 góc “ghép ba” đối đỉnh.

Vậy tổng cộng có $4 \cdot 3 = 12$ cặp góc đối đỉnh.

b) Xây dựng công thức tính số cặp góc đối đỉnh

có 4 đường thẳng cắt nhau tại một điểm nên có : $4 \cdot 2 = 8$ (tia).

Số góc do 8 tia tạo ra là $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ (góc).



Hình

Không kể số góc bẹt thì số góc còn lại là : $28 - 4 = 24$ (góc).

Mỗi góc trong 24 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó nên số cặp góc đối đỉnh tạo thành là

$$24 : 2 = 12 \text{ (cặp)}.$$

Nhận xét : Nếu có n đường thẳng cắt nhau tại một điểm thì số cặp góc đối đỉnh (không kể góc

bẹt) được tạo thành là $n(n-1)$.

Thật vậy, số tia do n đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo ra là $2n$ (tia)

$$\text{Số góc do } 2n \text{ tia tạo ra là : } \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1).$$

Không kể n góc bẹt thì số góc còn lại là :

$$n(2n-1) - n = 2n^2 - n - n = 2n^2 - 2n = 2n(n-1).$$

$$\text{Số cặp góc đối đỉnh là } \frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1).$$

1.12

$$\text{a) Ta có : } n(n-1) = 20$$

$$\text{b) Ta có : } n(n-1) = 90$$

$$n(n-1) = 5 \cdot 4 \Rightarrow n = 5.$$

$$n(n-1) = 10 \cdot 9 \Rightarrow n = 10.$$

$$\text{Vậy } n=5.$$

$$\text{Vậy } n=10.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

2.1. (h.2.9)

Vì $AB \perp CD$ nên $\widehat{AOC} = 90^\circ$.

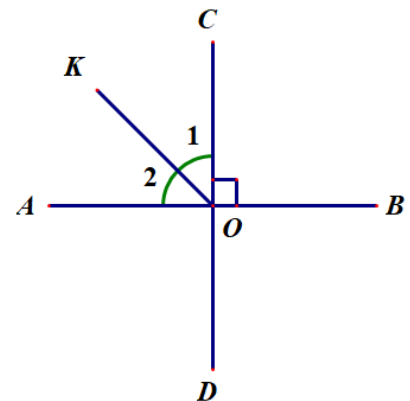
Vì tia OK là tia phân giác của góc AOC nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = 45^\circ$.

Ta có $\widehat{KOD} + \widehat{O_1} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{KOD} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

$\widehat{KOB} + \widehat{O_2} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{KOB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

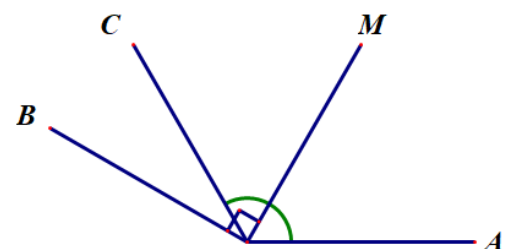


Hình 2.9

2.2. (h.2.10)

Tia OM là tia phân giác của góc AOC

$$\text{Nên } \widehat{MOC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} \text{ mà } \widehat{AOC} = 4 \widehat{BOC}$$



Nên $\widehat{MOC} = 2\widehat{BOC}$.

Nếu $OM \perp OB$ thì $\widehat{MOB} = 90^\circ$

Hình 2.10

Ta có $\widehat{MOC} + \widehat{BOC} = 90^\circ$ do đó $2\widehat{BOC} + \widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{AOC} = 4.30^\circ = 120^\circ$.

Tia OC nằm trong góc AOB nên $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 120^\circ + 30^\circ = 150^\circ$.

2.3. (h.2.11)

a) Ta có $OC \perp OA$ nên $\widehat{AOC} = 90^\circ$;

$OD \perp OB$ nên $\widehat{BOD} = 90^\circ$.

Tia OD nằm trong góc AOB nên

$$\widehat{AOD} + \widehat{BOD} = \widehat{AOB}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{AOB} - \widehat{BOD} = m^\circ - 90^\circ. \quad (1)$$

Tia OC nằm trong góc AOB nên $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = \widehat{AOB}$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = m^\circ - 90^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} (= m^\circ - 90^\circ)$.

Tia OC nằm giữa hai tia OB và OD. Suy ra $\widehat{BOC} + \widehat{DOC} = \widehat{BOD} = 90^\circ$.

Nếu $\widehat{BOC} = \widehat{DOC}$ thì $\widehat{DOC} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Do đó $\widehat{AOD} = \widehat{DOC} = \widehat{COB} \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 3.\widehat{DOC} = 3.45^\circ = 135^\circ \Leftrightarrow m = 135$.

2.4. (h.2.7)

Vì $\widehat{MON}$ là góc bẹt nên $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} + \widehat{AOC} = 180^\circ. \quad (1)$

$$\widehat{O_2} + \widehat{O_4} + \widehat{BOD} = 180^\circ. \quad (2)$$

Mặt khác, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$ (đề bài cho) nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$.

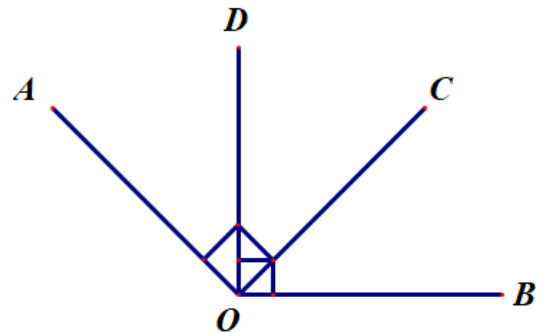
Vì $\widehat{AOC} = 90^\circ$ nên $\widehat{BOD} = 90^\circ \Rightarrow OB \perp OD$.

2.5. (h.2.12)

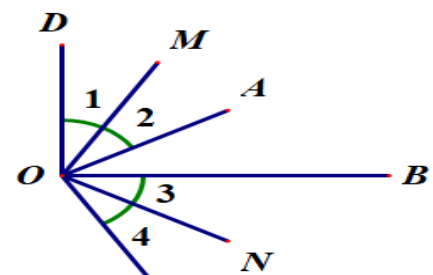
Ta có $OC \perp OA \Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ. OD \perp OB \Rightarrow \widehat{BOD} = 90^\circ$.

Tia OB nằm giữa hai tia OA và OC.

Do đó $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 90^\circ. \quad (1)$



Hình 2.11



Tương tự, ta có $\widehat{AOB} + \widehat{AOD} = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ (cùng phụ với $\widehat{AOB}$).

Hình 2.12

Tia OM là tia phân giác của AOD $\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \frac{\widehat{AOD}}{2}$.

Tia ON là tia phân giác của BOC $\Rightarrow \widehat{O_3} = \widehat{O_4} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$.

Vì $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$.

Ta có $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{O_3} + \widehat{O_2} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{MON} = 90^\circ \Rightarrow OM \perp ON$.

2.6. (h.2.13)

a) Ta có $\widehat{AON} + \widehat{BON} = 180^\circ$; $\widehat{BOM} + \widehat{AOM} = 180^\circ$

(hai góc kề bù)

mà $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ (đề bài cho) nên $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$.

Mặt khác, tia OC là tia phân giác của góc MON

Nên $\widehat{CON} = \widehat{COM}$.

$OC \perp OB \Rightarrow$ Do đó $\widehat{AON} + \widehat{CON} = \widehat{BOM} + \widehat{COM}$ (1)

Ta có tia ON nằm giữa hai tia OA, OC; tia OM nằm giữa hai tia OB, nên từ (1) suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. Vậy $OC \perp AB$.

b) Tia OM nằm giữa hai tia OB và ON nên $\widehat{BOM} + \widehat{MON} = \widehat{BON} = m^\circ$. (1)

Mặt khác $\widehat{BOM} = 180^\circ - \widehat{AOM} = 180^\circ - m^\circ$ (2)

2.7 (h.2.14)

a) Tia OM là tia phân giác của góc AOB nên

$$\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = 120^\circ : 2 = 60^\circ$$

Ta có $OC \perp OB \Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ$ nên

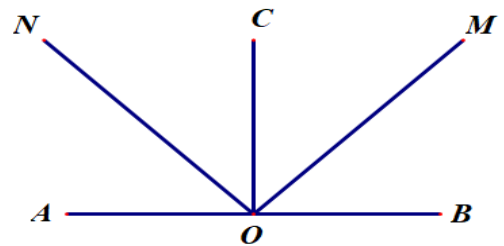
$$\widehat{BOM} + \widehat{COM} = \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{COM} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Tia OC nằm giữa hai tia OA, OB nên

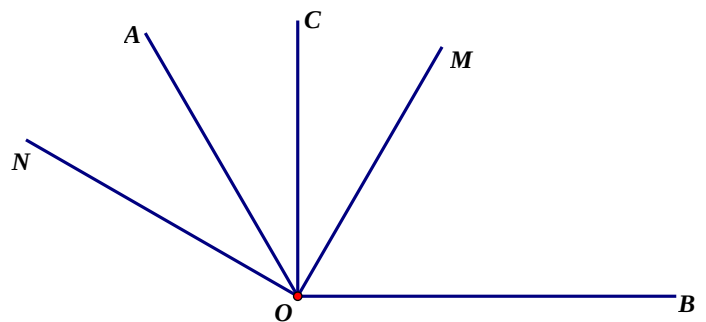
ON $\perp$ OB

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

Vậy $\widehat{AOC} = \widehat{COM} (= 30^\circ)$ (1)



Hình 2.13



h.2.14

Tia OC nằm giữa hai tia OA, OM

nên từ (1) suy ra tia OC là tia phân giác của $\widehat{AOM}$.

b) Ta có $OM \perp ON \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$.

Tia OA nằm giữa hai tia ON, OM nên $\widehat{AON} + \widehat{AOM} = \widehat{MON}$.

Suy ra $\widehat{AON} = \widehat{MON} - \widehat{AOM} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{AON} = \widehat{AOC} (= 30^\circ)$ (2)

Tia OA nằm giữa hai tia ON, OC nên từ (2) suy ra tia OA là tia phân giác của $\widehat{CON}$.

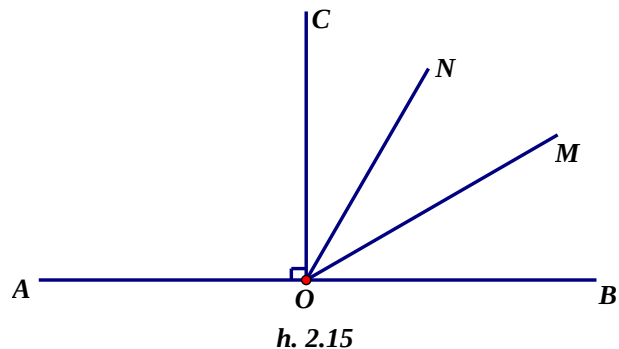
2.8 (h.2.15)

Ta có $OC \perp AB$ nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 90^\circ$ (1)

Tia OC nằm giữa hai tia OA, OB. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tia OC là tia phân giác của $\widehat{AOB}$.

Ta có $\widehat{BOM} = \widehat{CON} = \frac{1}{3}\widehat{BOC} = 30^\circ$.



Tia ON nằm trong $\widehat{BOC}$ nên

$$\widehat{BON} + \widehat{CON} = \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BON} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Tia OM nằm giữa hai tia OB, ON. (3)

Do đó $\widehat{BOM} + \widehat{MON} = \widehat{BON} \Rightarrow \widehat{MON} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{BOM} = \widehat{MON} = \widehat{CON} = 30^\circ$. (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ tia OM là tia phân giác của $\widehat{COM}$.

Tóm lại, các tia OC, OM, ON lần lượt là các tia phân giác của các góc AOB, BON và COM.

2.9. (h.2.16)

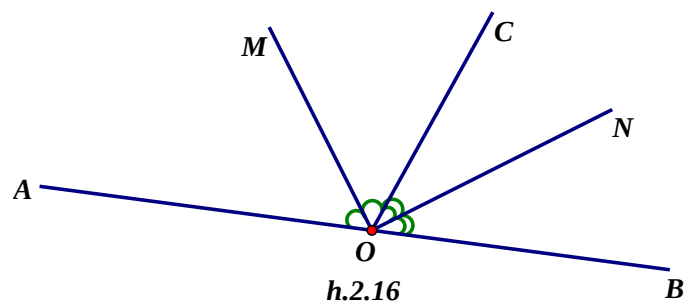
Ta có $OM \perp ON \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$.

Tia OM là tia phân giác của $\widehat{AOC}$ nên

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOC}.$$

Xét tổng

$$\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 2\widehat{MOC} + 2\widehat{NOC} = 2(\widehat{MOC} + \widehat{NOC})$$



$$= 2\widehat{MON} = 2.90^0 = 180^0.$$

Hai góc kề AOC và BOC có tổng bằng 180^0 nên hai tia OA, OB đối nhau.

2.10. (h.2.17)

Trường hợp $AE = BF < a$:

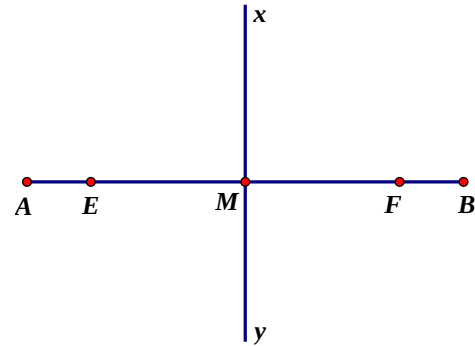
Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $MA = MB = a$

Điểm E nằm giữa hai điểm A và M, điểm F nằm giữa hai điểm B và M.

Do đó $ME = MA - AE = a - AE$;

$$MF = MB - BF = a - BF.$$

Vì $AE = BF$ nên $ME = MF$. Vậy M là trung điểm chung của hai đoạn thẳng AB và EF. Qua M vẽ $xy \perp AB$ thì xy là đường trung trực chung của AB và EF.



h.1.17

Trường hợp $AE = BF > a$: Chứng minh tương tự.

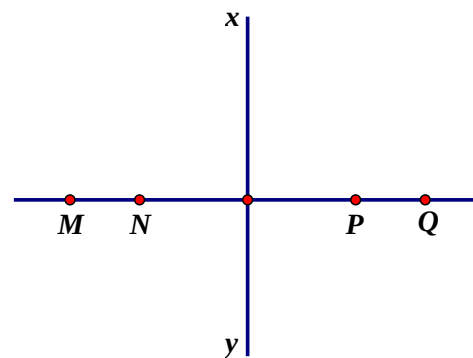
2.11. (h.2.18)

Ta có $MN \perp xy$; $NP \perp xy$ (vì xy là đường trung trực của NP).

Qua điểm N chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với xy, suy ra ba điểm M, N, P thẳng hàng. (1)

Ta có $NP \perp xy$, $PQ \perp xy$. Qua điểm P chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với xy, suy ra ba điểm N, P, Q thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra các điểm M, N, P, Q thẳng hàng vì chúng cùng thuộc đường thẳng NP.



h.2.18

2.12. Trên hình 2.8a) có $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$ nên các góc có cạnh tương ứng vuông góc là $\widehat{HAK}$ và $\widehat{xOy}$; $\widehat{HAx}$ và $\widehat{xOy}$.

Trên hình 2.8b) có $AB \perp AC$ và $AH \perp BC$ nên các góc có cạnh tương ứng vuông góc là: $\widehat{BAH}$ và $\widehat{C}$; $\widehat{CAH}$ và $\widehat{B}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 3. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

3.1. (h.3.5)

a) Xét hai đường thẳng AD và Bm, đối với cát tuyến Dx thì:

- Góc D_{Cm} so le trong với góc ADC;
- Góc BC_x đồng vị với góc ADC;
- Góc DCB trong cùng phía với góc ADC.

b) Xét hai đường thẳng AB và Dx, đối với cát tuyến Ay thì:

- Góc ACD so le trong với góc BAC;
- Góc xCy đồng vị với góc BAC;
- Góc ACx trong cùng phía với góc BAC.

3.2. (h.3.6)

* Tìm cách giải:

Để chứng tỏ $AB // CD$ ta chứng tỏ một cặp góc so le trong bằng nhau. Ta nghĩ đến việc chứng tỏ $\hat{A} = \hat{C}$ vì có thể dùng các góc O_1 và O_2 làm trung gian.

* Trình bày lời giải:

Ta có $\hat{A} = \hat{O}_1; \hat{C} = \hat{O}_2$ (đề bài cho) mà $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (đối đỉnh) nên $\hat{A} = \hat{C}$.

Suy ra $AB // CD$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.3. (h.3.16)

Tia AC nằm giữa hai tia AB và Ax nên

$$\widehat{BAC} + \widehat{CAx} = \widehat{BAx}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAx} = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ.$$

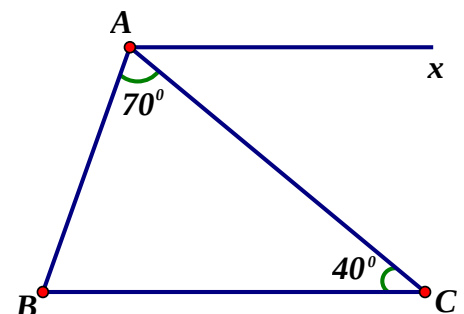
$$\text{Do đó } \widehat{CAx} = \hat{C} (= 40^\circ).$$

Suy ra $Ax // BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

$$\widehat{MAC} = \widehat{MAB} = 50^\circ.$$

3.4. (h.3.7)

* Tìm các giải:



Đề bài có cho hai tia đối nhau nên ta vận dụng tính chất của hai góc kề bù. Ngoài ra đề bài còn có tia phân giác nên trong hình vẽ có hai góc bằng nhau.

* *Trình bày lời giải:*

Hai góc MAB và BAD kề bù nên $\widehat{MAB} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Do đó $\widehat{MAC} = \widehat{C} (= 50^\circ) \Rightarrow AD // CE$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.5. (h.3.8)

Ta có: $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 (= 180^\circ) \Rightarrow 2\widehat{A}_1 + 2\widehat{A}_2 = 2\widehat{B}_1 + 2\widehat{B}_2$ (1).

Mặt khác: $\widehat{A}_1 - 2\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 - 2\widehat{B}_2$. (2)

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1) và (2) được $3\widehat{A}_1 = 3\widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

$\Rightarrow a // b$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.6. (h.3.9)

* *Tìm cách giải:*

Trong hình vẽ đã có các cặp góc so le trong là: $\widehat{A}$ và $\widehat{C}_1$; $\widehat{E}$ và $\widehat{C}_2$. Muốn chứng tỏ $AB // CD$ và $CD // EF$ chỉ cần chứng tỏ $\widehat{A} = \widehat{C}_1$ và $\widehat{E} = \widehat{C}_2$.

* *Trình bày lời giải:*

Ta có: $\widehat{ACE} = \frac{\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2}{2} \Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 2\widehat{ACE}$.

Mặt khác $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 + \widehat{ACE} = 360^\circ$ nên $2\widehat{ACE} + \widehat{ACE} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = 120^\circ$.

Do đó $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ mà $\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2 = 20^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 = 130^\circ, \widehat{C}_2 = 110^\circ$.

Ta có: $\widehat{A} = \widehat{C}_1 (= 130^\circ) \Rightarrow AB // CD; \widehat{E} = \widehat{C}_2 (= 110^\circ) \Rightarrow CD // EF$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.7. (h.3.10)

Ta có $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ$ mà $\widehat{A}_2 = \frac{2}{7}\widehat{A}_1$ nên $\widehat{A}_2 = \frac{180^\circ \cdot 2}{9} = 40^\circ$.

$\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ mà $\widehat{B}_1 - \widehat{B}_2 = 100^\circ$ nên $\widehat{B}_2 = 40^\circ$.

Vậy $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 = 40^\circ \Rightarrow Ax // By$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.8. (h.3.11)

Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{B_2} = a^\circ \Rightarrow \widehat{B_2} = a^\circ - 180^\circ. (1)$

$$\widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{A_1} = b^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} = b^\circ - 180^\circ. (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{B_2} + \widehat{A_1} = (a^\circ + b^\circ) - 360^\circ = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ.$

Mặt khác $\widehat{A_2} + \widehat{A_1} = 180^\circ$ (kề bù) nên $\widehat{B_2} + \widehat{A_1} = \widehat{A_2} + \widehat{A_1} (=180^\circ).$

Suy ra $\widehat{B_2} = \widehat{A_2} \Rightarrow a // b$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.9. (h.3.12)

* *Tìm cách giải*

Trong hình vẽ đã có những cặp góc đồng vị, cặp góc trong cùng phía, điều kiện trong đề bài, ta có thể suy ra được tổng của hai góc trong cùng phía bù nhau, từ đó suy ra được hai đường thẳng song song.

* *Trình bày lời giải*

$$\text{Ta có } \widehat{A_2} - \widehat{A_1} = \widehat{B_2} - \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{B_1} = \widehat{B_2} + \widehat{A_1}.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{A_2} + \widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{A_1} = 360^\circ \text{ nên } \widehat{A_2} + \widehat{B_1} = 180^\circ.$$

Suy ra $a // b$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

3.10. (h.3.13)

$$\text{Đặt } \widehat{ACE} = m^\circ \text{ thì } \widehat{C_2} = m^\circ + 10^\circ \text{ và } \widehat{C_1} = m^\circ + 20^\circ.$$

$$\text{Ta có } \widehat{ACE} + \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 360^\circ \text{ do đó}$$

$$m^\circ + (m^\circ + 10^\circ) + (m^\circ + 20^\circ) = 360^\circ \Rightarrow 3m^\circ + 30^\circ = 360^\circ \Rightarrow m^\circ = 110^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{C_2} = 120^\circ; \widehat{C_1} = 130^\circ.$$

$$\text{Ta có: } \widehat{A} + \widehat{C_1} = 50^\circ + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow AB // CD; \widehat{E} + \widehat{C_2} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow CD // EF \text{ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.}$$

3.11. (h.3.14)

$$\text{Ta có } \widehat{D_1} = \widehat{D_2} = 105^\circ \text{ (đối đỉnh); } \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = 75^\circ \text{ (đối đỉnh).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{A_1} = \widehat{D_2} (=105^\circ) \Rightarrow AB // CD \text{ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.}$$

3.12. (h.3.15)

* Ta có: $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \frac{1}{3}\widehat{A}_1 \Rightarrow Bx // Cz$ Vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

* Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = 135^\circ$. Vậy $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow Bx // Ay$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

* Ta có $\widehat{C}_1$ và $\widehat{C}_2$ kề bù $\Rightarrow \widehat{C}_2 = 180^\circ - \widehat{C}_1 = 135^\circ$. Vậy $\widehat{C}_2 = \widehat{A}_1 = 135^\circ \Rightarrow Ay // Cz$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.13. (h.3.17)

* Ta có $\widehat{BMx} = \widehat{B} = 55^\circ \Rightarrow Mx // BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

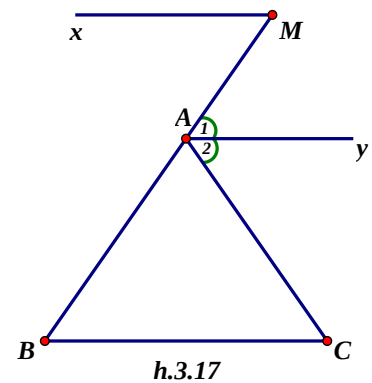
* Ta có $\widehat{CAM} + \widehat{CAB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{CAM} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Tia Ay là tia phân giác của $\widehat{CAM}$

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 55^\circ$, do đó $\widehat{A}_1 = \widehat{B} = 55^\circ$.

Suy ra $Ay // BC$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 4. TIỀN ĐỀ Ơ-CLIT

TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

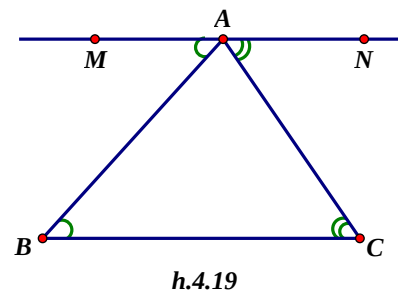
4.1. (h.4.19)

Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{B} \Rightarrow AM // BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

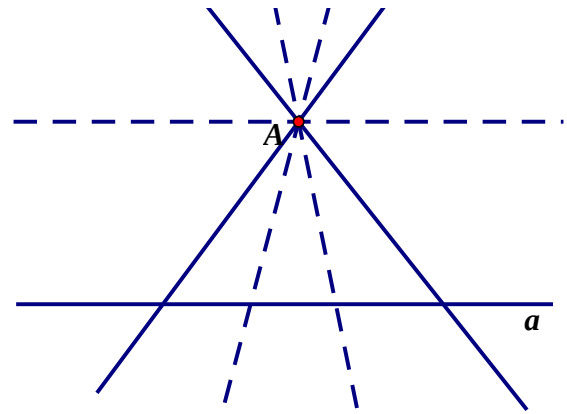
$\widehat{CAN} = \widehat{C} \Rightarrow AN // BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

Theo tiên đề Ơ-clit qua điểm A chỉ có một đường thẳng song song với BC, do đó ba điểm M, A, N thẳng hàng.

4.2. (h.4.20)



Giả sử trong số 101 đường thẳng vẽ qua A có chưa đến 100 đường thẳng cắt a. Suy ra ít nhất còn hai đường thẳng không cắt a. Hai đường thẳng này cùng đi qua a và cùng song song với a. Điều này trái với tiên đề O-clit. Vậy điều giả sử là sai, do đó qua A có ít nhất 100 đường thẳng cắt a.



h.4.20

4.3. Trong số n đường thẳng đã vẽ, nhiều nhất là có một và chỉ một đường thẳng song song với xy. Do đó muốn có ít nhất 10 đường thẳng cắt xy thì số đường thẳng phải vẽ ít nhất là 11. Vậy $n = 11$.

4.4. (h.4.21)

a) Ta có $DE \parallel AB$ nên $\widehat{DEC} = \widehat{A}$ (hai góc đồng vị)

$DF \parallel AC$ nên $\widehat{BFD} = \widehat{A}$ (hai góc đồng vị).

Mặt khác $\widehat{BFD} = \widehat{FDE}$ (hai góc so le trong của $DE \parallel AB$)

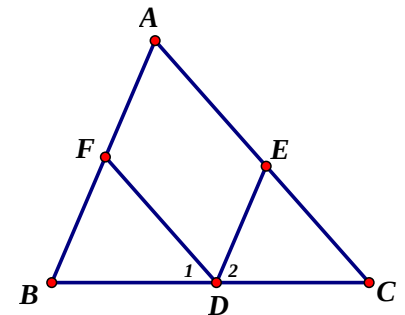
Suy ra $\widehat{A} = \widehat{DEC} = \widehat{BFD} = \widehat{FDE}$.

b) Ta có $\widehat{D_2} = \widehat{B}$ (hai góc đồng vị của $DE \parallel AB$)

$\widehat{D_1} = \widehat{C}$ (hai góc so le trong của $DF \parallel AC$);

Do đó $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \widehat{B} + \widehat{C} = 110^\circ$. Suy ra $\widehat{FDE} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Vậy $\widehat{A} = 70^\circ$ (vì $\widehat{A} = \widehat{FDE}$).



h.4.21

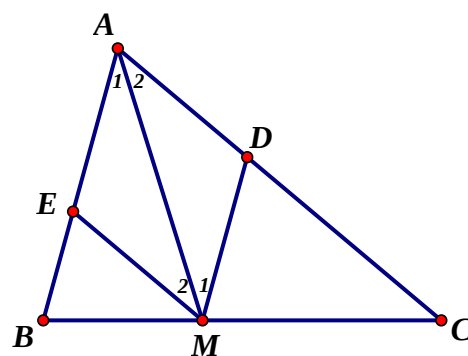
4.5. (h.4.22)

Ta có $MD \parallel AC$ suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (cặp góc so le trong)

$ME \parallel AC$ suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (cặp góc so le trong)

Tia MA nằm giữa hai tia MD và ME, do đó tia MA là tia phân giác của góc DME

$\widehat{EOC} = \widehat{OCD} = 50^\circ$ M là giao điểm của BC với tia phân giác góc A



h.4.22

4.6. (h.4.9)

Ta có $\widehat{ABC} = 180^\circ - 2m^\circ$ nên $\widehat{ABx} = 180^\circ - (180^\circ - 2m^\circ) = 2m^\circ$

Mặt khác $Bx \parallel AC$ nên $\widehat{xBy} = \widehat{C} = m^\circ$ (hai góc đồng vị);

suy ra $\widehat{xBy} = \widehat{C} = m^\circ$. Vậy $\widehat{ABx} = \widehat{xBy} = m^\circ$ (1)

Tia Bx nằm giữa hai tia BA và By (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia Bx là tia phân giác của góc Aby.

4.7. (h.4.10)

Ta có $\widehat{ACD} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Vậy $\widehat{ACD} = \widehat{BAa} = 60^\circ$

Suy ra $m \parallel n$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau)

Ta có $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 180^\circ$ mà $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên $\widehat{D_1} = 90^\circ$

Suy ra $b \perp n$ do đó $b \perp m$ (vì $m \parallel n$)

4.8. (h.4.11)

Ta có $AB \perp AC; CD \perp AC; OE \perp AC$ (đề bài)

Suy ra $AB \parallel CD \parallel OE$ (cùng vuông góc với AC)

Do đó $\widehat{AOE} = \widehat{OAB} = m^\circ$ (hai góc so le trong);

$\widehat{EOC} = \widehat{OCD} = 50^\circ$ (hai góc so le trong).

Tia OE nằm giữa hai tia OA và OC nên tia OE là tia phân giác của góc AOC

$\Leftrightarrow \widehat{AOE} = \widehat{EOC} \Leftrightarrow m = 50$.

4.9. (h.4.12)

Ta có $\widehat{AEF} + \widehat{EFC} = 45^\circ + 45^\circ \cdot 3 = 180^\circ$.

Suy ra $AB \parallel CD$ (vì có hai góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $\widehat{AEF} = \widehat{EFD}$ (hai góc so le trong)

Mặt khác $\widehat{E_1} = \frac{1}{2} \widehat{AEF}; \widehat{F_1} = \frac{1}{2} \widehat{EFD}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$ dẫn tới $Em \parallel Fn$ (vì có hai góc so le trong bằng nhau).

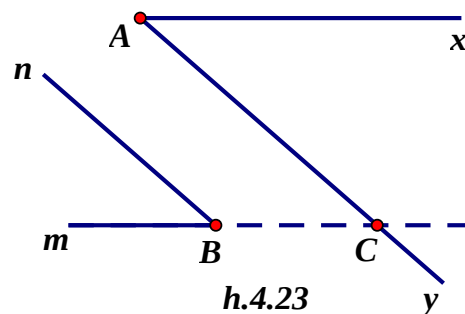
4.10. (h.4.23)

Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng Ay và Bm (h.4.23)

Ta có $Ax \parallel Bm$ nên $\widehat{A} = \widehat{ACm}$ (hai góc so le trong).

Mặt khác, $\widehat{A} = \widehat{mBn}$ nên $\widehat{ACm} = \widehat{mBn} (= \widehat{A})$.

Do đó $Ay \parallel Bn$ (vì có hai góc đồng vị bằng nhau).

4.11. (h.4.24)

Ở trong góc AOB vẽ tia $Ot // Ax$. Khi đó $\widehat{AOt} = \hat{A} = a^0$ (hai góc so le trong).

Suy ra $\widehat{BOt} = b^0$. Vậy $\widehat{BOt} = \hat{B} (= b^0)$.

Do đó $By // Ot$ (vì có hai góc so le trong bằng nhau).

Vậy $Ax // By$ (vì cùng song song với Ot).

4.12. (h.4.25)

Trong góc AOC vẽ tia Ot sao cho $Ot // AB$.

Khi đó $\hat{A} + \widehat{AOt} = 180^0$ (hai góc trong cùng phía)

Suy ra $\widehat{AOt} = 180^0 - m^0$.

Do đó $\widehat{COt} = \widehat{AOC} - \widehat{AOt} =$
 $= 360^0 - (m^0 + n^0) - (180^0 - m^0) = 180^0 - n^0$.

Vậy $\hat{C} + \widehat{COt} = n^0 + (180^0 - n^0) = 180^0$.

Suy ra $CD // Ot$ (vì có hai góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $AB // CD$ (vì cùng song song với Ot).

4.13. (h.4.26)

Vì $OA \perp OC$ nên $\widehat{AOC} = 90^0$. Trong góc AOC vẽ tia Ot sao cho $Ot // AB$. Khi đó $\hat{A} + \widehat{AOt} = 180^0$ (hai góc trong cùng phía).

Suy ra $\widehat{AOt} = 180^0 - 130^0 = 50^0$.

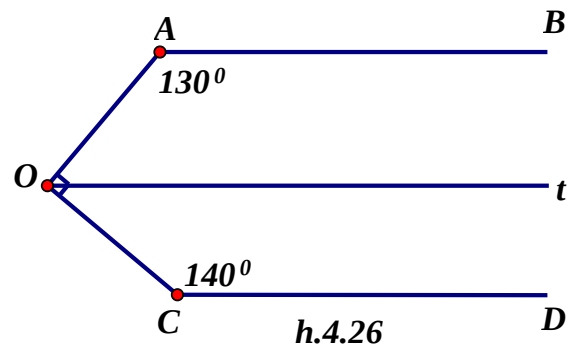
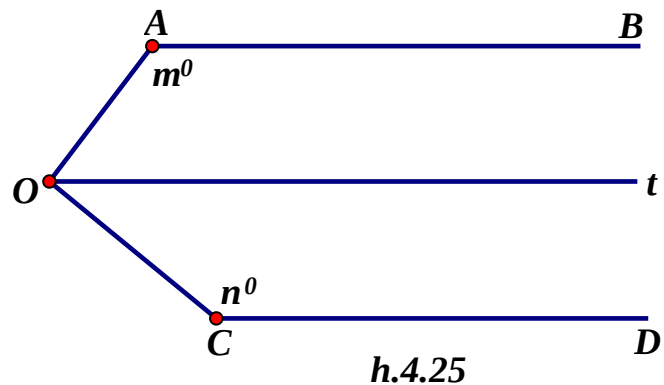
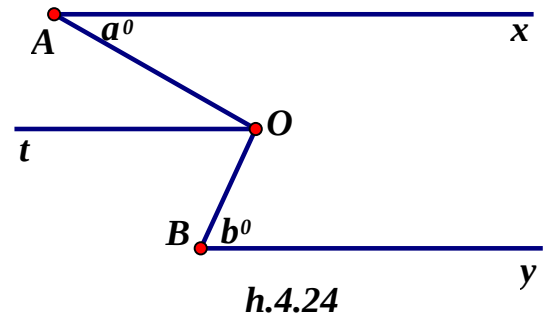
Vì $\widehat{AOC} = 90^0$ nên $\widehat{COt} = 40^0$.

Ta có $\hat{C} + \widehat{COt} = 140^0 + 40^0 = 180^0$.

Do đó $CD // Ot$ (vì có hai góc trong cùng phía bù nhau).

Suy ra $AB // CD$ (vì cùng song song với Ot).

4.14. (h.4.27)



Vì $\widehat{AMx} = 140^\circ$ nên $\widehat{M_1} = 40^\circ$.

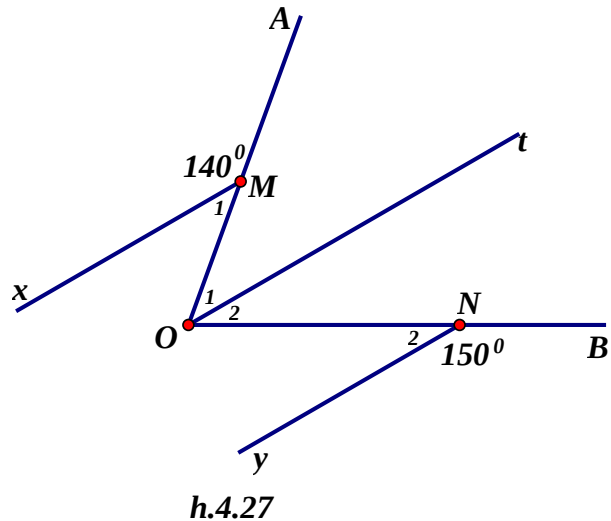
Vì $\widehat{BNy} = 150^\circ$ nên $\widehat{N_2} = 30^\circ$.

Ở trong góc AOB vẽ tia $Ot // Mx$, khi đó $Ot // Ny$ (vì $Mx // Ny$).

Ta có $\widehat{O_1} = \widehat{M_1} = 40^\circ$ (hai góc so le trong);

$\widehat{O_2} = \widehat{N_2} = 30^\circ$ (hai góc so le trong).

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$.



4.15. (h.4.28)

Ở trong góc AOB vẽ tia $Ot // Ax$.

Khi đó $Ot // By$ (vì $Ax // By$).

Ta có $OA \perp OB$ nên $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

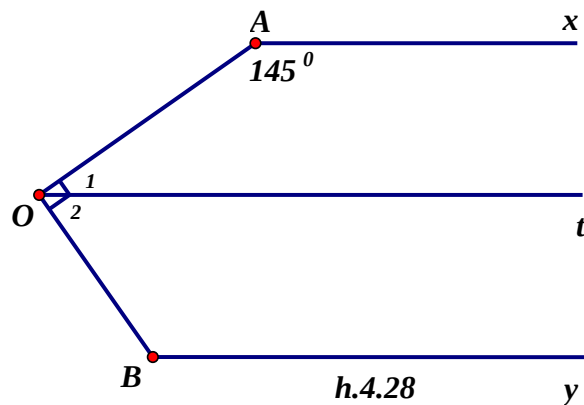
Mặt khác $\widehat{A} + \widehat{O_1} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

Nên $\widehat{O_1} = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$.

Suy ra $\widehat{O_2} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Ta có $\widehat{O_2} + \widehat{B} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

Do đó $\widehat{B} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.



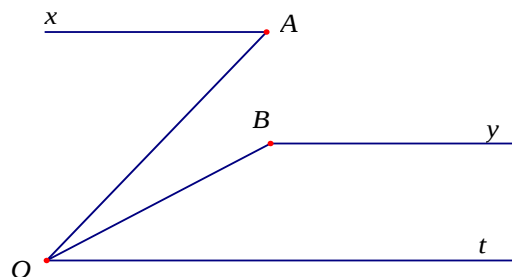
4.16. (h.4.29)

Trên nửa mặt phẳng bờ OB có chứa tia By vẽ tia $Ot // By$. Khi đó $Ot // Ax$ (vì $Ax // By$). Ta có $\widehat{OBy} + \widehat{BOT} = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra $\widehat{BOT} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Ta có

$\widehat{AOt} = \widehat{AOx} = 50^\circ$ (Cặp góc so le trong).

Từ đó $\widehat{AOB} = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$.



Hình 4.29

HƯỚNG DẪN GIẢI**Chuyên đề 5. ĐỊNH LÝ****5.1. (h.5.6)**

- Tìm cách giải

Với cấu trúc khi và chỉ khi ta phải chứng minh hai mệnh đề thuận và đảo sau :

- Mệnh đề thuận : Nếu $OM \perp AB$ thì OM là tia phân giác $\widehat{COD}$.
- Mệnh đề đảo : Nếu OM là tia phân giác của

$\widehat{COD}$ thì $OM \perp AB$.

- Trình bày lời giải

- Chứng minh mệnh đề thuận : $OM \perp AB$ (gt) suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{AOC} + \widehat{COM} = \widehat{BOD} + \widehat{DOM}$ (vì tia OC nằm giữa hai tia OA, OM ; tia OD nằm giữa hai tia OB và OM).

Mặt khác $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (gt) nên $\widehat{COM} = \widehat{DOM}$. (1)

Tia OM nằm giữa hai tia OC và OD . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia OM là tia phân giác của góc COD .

- Chứng minh mệnh đề đảo :

OM là tia phân giác của góc COD (gt). Suy ra $\widehat{COM} = \widehat{DOM}$.

Mặt khác $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (gt) nên $\widehat{AOC} + \widehat{COM} = \widehat{BOD} + \widehat{DOM}$.

Do đó $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (vì tia OC nằm giữa hai tia OA, OM ; tia OD nằm giữa hai tia

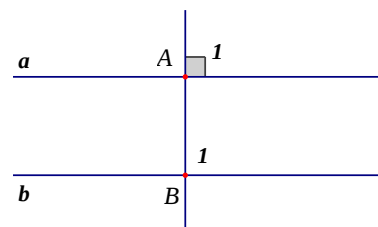
Lại có $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{AOM} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

Suy ra $OM \perp AB$.

5.2. (h.5.7)

Phát biểu định lý đảo: Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường thẳng kia.

	$a // b$
GT	$c \perp a$
KL	$c \perp b$

**Hình 5.7**

Chứng minh

Ta có $a // b$ (gt) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (cặp góc đồng vị).

Mặt khác, $c \perp a$ (gt) nên $\widehat{A_1} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{B_1} = 90^\circ$. Suy ra $c \perp b$.

- Nhận xét: Ta có thể viết gộp cả định lý thuận và định lý đảo của định lý trên như sau:

$$\begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp c \Leftrightarrow a \parallel b \end{array}$$

Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là “khi và chỉ khi”. Kí hiệu này có nghĩa là mệnh đề ở bên trái suy ra được mệnh đề ở bên phải và ngược lại.

5.3. (h.5.8)

GT	$\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù
	OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$
	ON nằm trong góc BOC
	$OM \perp ON$.
KL	ON là tia phân giác của $\widehat{BOC}$.

Chứng minh

Ta có $OM \perp ON$ (gt) nên $\widehat{MON} = 90^\circ$.

Tia OB nằm giữa hai tia OM và ON nên $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \widehat{MON} = 90^\circ$.

Vì $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù nên $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^\circ$.

Do đó $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$ (chứng minh trên) nên $\widehat{O_1} + \widehat{O_4} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \widehat{O_1} + \widehat{O_4}$ mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (gt) nên $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$.

Tia ON nằm giữa hai tia OB và OC . (2)

Từ (1) và (2) suy ra ON là tia phân giác của góc BOC.

5.4.

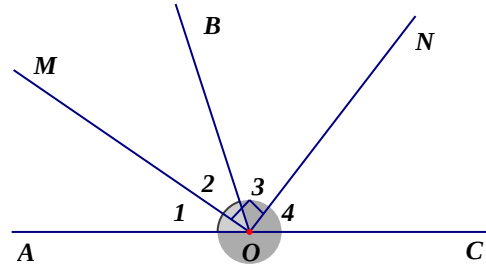
a) $\widehat{A} = 30^\circ; \widehat{B} = 40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 70^\circ < 90^\circ$ (không phải là số đo của một góc tù).

b) $\widehat{C} = 30^\circ; \widehat{D} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{D} = 130^\circ \neq 180^\circ$.

5.5.

a) Suy ra $\widehat{A} = \widehat{B}$ (vì cùng phụ với góc O).



Hình 5.8

b) $\widehat{A}' = \widehat{B}'$ (vì cùng bằng hai góc bằng nhau).

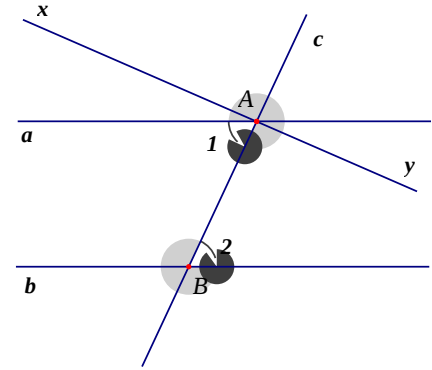
5.6.

a) “=” (vì gấp ba lần hai đoạn thẳng bằng nhau thì được hai đoạn thẳng bằng nhau).

b) “=” (vì thêm những đoạn thẳng bằng nhau vào những đoạn thẳng bằng nhau thì tổng bằng nhau).

5.7. (h.5.9)

	$a // b$
	$\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$ là cặp góc so le
GT	trong
KL	$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$



Hình 5.9

Chứng minh

Giả sử các góc $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$ không bằng nhau.

Qua A vẽ đường thẳng xy tạo với đường thẳng c góc $\widehat{xAB} = \widehat{B}_1$.

Khi đó theo dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song ta được $xy // b$.

Mặt khác, $a // b$ (gt) nên qua A có hai đường thẳng song song với b trái với tiên đềƠ-clit. Do đó xy phải trùng với đường thẳng a.

Suy ra $\widehat{xAB} = \widehat{B}_1$ hay $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

5.8. Hai góc có cạnh tương ứng song song thì bằng nhau hoặc bù nhau.

a) Nếu $\widehat{A} + \widehat{B} = 130^\circ \neq 180^\circ$ thì hai góc A và B phải bằng nhau.

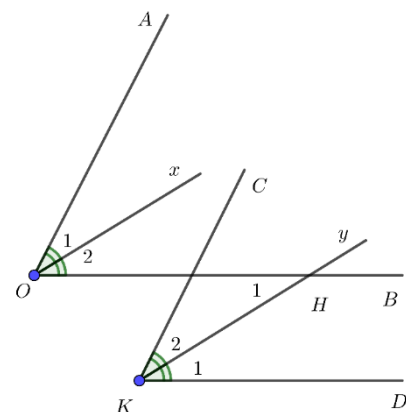
Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = 130^\circ : 2 = 65^\circ$,

b) Nếu $\widehat{A} - \widehat{B} = 100^\circ$ thì $\widehat{A} \neq \widehat{B}$, do đó $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{A} = (180^\circ + 100^\circ) : 2 = 140^\circ$; $\widehat{B} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

5.9 (h.5.10)

GT	$\widehat{AOB}$ và $\widehat{CKD}$ cùng nhọn (tù)
	$OA // KC$; $OB // KD$
	$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$; $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$



KL $\mid Ox // Ky$

Chứng minh

Hình 5.10

Hai góc AOB và CKD là hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn hoặc cùng tù nên $\widehat{AOB} = \widehat{CKD}$.

Tia Ox là tia phân giác của góc AOB , tia Ky là tia phân giác của góc CKD nên

$$\widehat{O_1} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}; \widehat{K_1} = \frac{1}{2}\widehat{CKD}$$

Suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{K_1}$ (một nửa của hai góc bằng nhau)

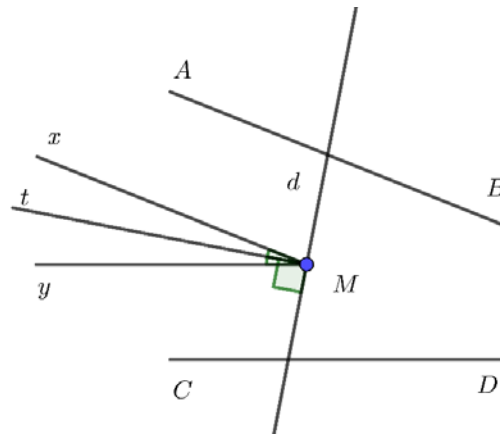
Mặt khác $\widehat{H_1} = \widehat{K_1}$ (cặp góc so le trong của $OB // KD$) nên $\widehat{O_1} = \widehat{H_1} (= \widehat{K_1})$. Do đó $Ox // Ky$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau)

5.10 (h.5.11)

Từ M vẽ các tia $Mx // AB$, $My // CD$ và tia Mt là tia phân giác của góc xMy .

Qua M vẽ đường thẳng $d \perp Mt$, khi đó d vuông góc tia phân giác của góc AOC .

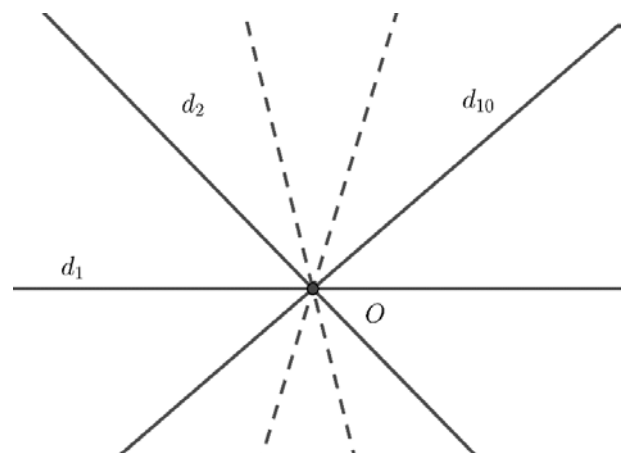
Thật vậy, các góc xMy và AOC là các góc có các cạnh tương ứng song song, cùng nhọn nên các tia phân giác của chúng song song với nhau. Mặt khác $d \perp Mt$ nên d vuông góc tia phân giác của góc AOC .



Hình 5.11

5.11 (h.5.12)

Gọi 10 đường thẳng đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Từ một điểm O bất kì vẽ 10 đường thẳng $d_1, d_2, \dots, d_{10}$ tương ứng song song với 10 đường thẳng đã cho. Vì trong 10 đường thẳng đã cho không có hai đường thẳng nào song song nên 10 đường thẳng $d_1, d_2, \dots, d_{10}$ không có hai đường thẳng nào trùng nhau. 10 đường thẳng này cắt nhau tại O tạo thành 20 góc không có điểm trong chung nên tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ : 20 = 18^\circ$. Góc này bằng góc có cạnh tương ứng song song với nó. Vậy trong 10 đường thẳng đã cho, tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng 18° .



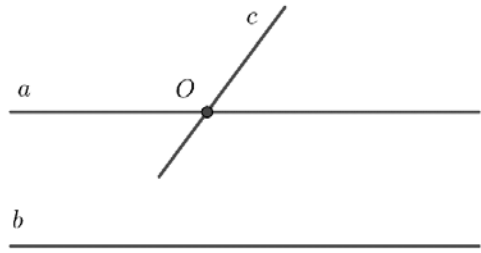
Hình 5.12

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 6. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

6.1 (h.6.9)

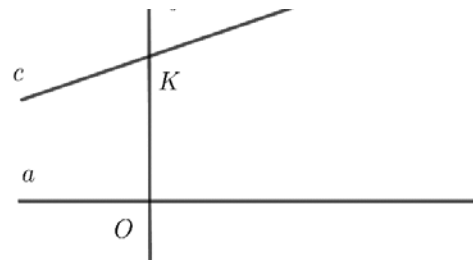
Cho $a // b$, c cắt a tại O . Ta phải chứng minh c cắt b . Giả sử c không cắt b thì $c // b$. Như vậy qua điểm O có hai đường thẳng là a và c cùng song song với b , trái với tiên đề Ocolit. Vậy điều giả sử là sai, suy ra c cắt b .



Hình 6.9

6.2 (h.6.10)

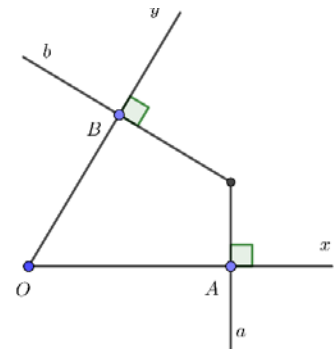
- Trường hợp đường thẳng c đi qua O thì c và a cắt nhau tại O .
- Trường hợp đường thẳng c cắt b tại $K \neq O$. Giả sử c và a không cắt nhau thì chúng song song với nhau. Vì $b \perp a$ nên $b \perp c$, trái với giả thiết. Vậy c và a phải cắt nhau.



Hình 6.10

6.3 (h.6.11)

- Giả sử a và b trùng nhau. Như vậy, qua O có hai đường thẳng là Ox và Oy cùng vuông góc với đường thẳng a (hoặc b), vô lí. Vậy a và b không trùng nhau. (1)
- Giả sử $a // b$. Ta có $Ox \perp a$ nên $Ox \perp b$. Mặt khác $Oy \perp b$ (gt), như vậy qua điểm O có hai đường thẳng là Ox và Oy cùng vuông góc với đường thẳng b , vô lí. Vậy điều giả sử là sai, suy ra a và b không song song (2).



Hình 6.11

Từ (1) và (2) suy ra a cắt b .

6.4 (h.6.12)

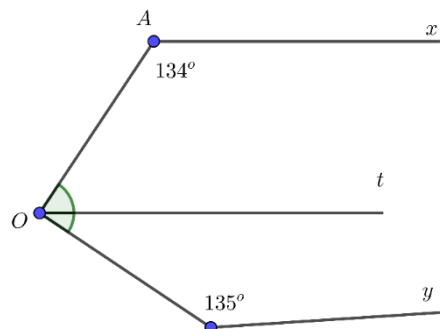
Giả sử $Ax // By$. Trong góc AOB vẽ tia $Ot // Ax$ thì $Ot // By$ (vì $Ax // By$).

$$\text{Ta có } \widehat{O_1} + \widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$$

$$\widehat{O_2} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

$$\text{Do đó } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 46^\circ + 45^\circ \text{ hay } \widehat{AOB} = 91^\circ > 90^\circ.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là góc AOB là góc nhọn. Vậy



Hình 6.12

điều giả sử là sai, suy ra Ax và By không song song.

6.5 (h.6.13)

Ta có $AB \perp BD$,

$$AC \perp CE \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^\circ.$$

$$\text{Do đó } \widehat{ABx} = \widehat{ACy} = 45^\circ.$$

Ta chứng minh Bx và Cy cắt nhau bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $Bx \parallel Cy$. Ở trong góc A ta vẽ

$$At \parallel Bx \text{ thì } At \parallel Cy \text{ (Vì } Bx \parallel Cy)$$

$$\text{Ta có } \widehat{A_1} = \widehat{ABx} = 45^\circ \text{ (cặp góc so le trong)}$$

$$\widehat{A_2} = \widehat{ACy} = 45^\circ \text{ (cặp góc so le trong)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{BAC} = 90^\circ \text{ trái với giả thiết là } \widehat{A} \text{ tù.}$$

Vậy điều giả sử là sai, suy ra hai đường thẳng Bx và Cy cắt nhau.

6.6 (h.6.14)

Trong số 50 đường thẳng vẽ qua A ít nhất cũng có 49 đường thẳng cắt m .

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử có chưa đến 49 đường thẳng cắt m , suy ra ít nhất cũng còn 2 đường thẳng không cắt m . Hai đường thẳng này cùng đi qua điểm A và cùng song song với m . Điều này vô lý vì nó trái với tiên đề Oclit. Vậy điều giả sử là sai, do đó có ít nhất cũng có 49 đường thẳng cắt m .

Nếu đường thẳng $AB \parallel m$ thì số giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ ít nhất cũng là $49 + 49 = 98$ (điểm).

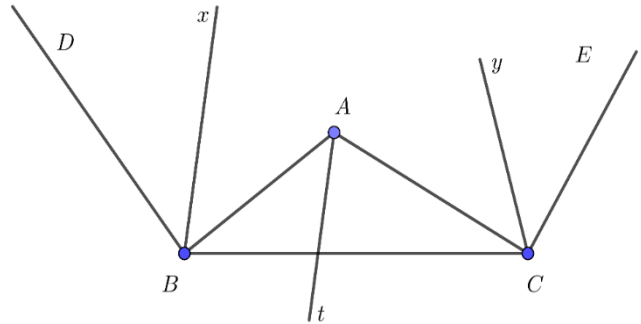
• Nếu đường thẳng AB và đường thẳng m không song song thì giao điểm của đường thẳng AB với đường thẳng m cũng là giao điểm của đường thẳng BA với đường thẳng m . Do đó số giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ ít nhất cũng là $49 + 49 - 1 = 97$ (điểm).

6.7. (h.6.8)

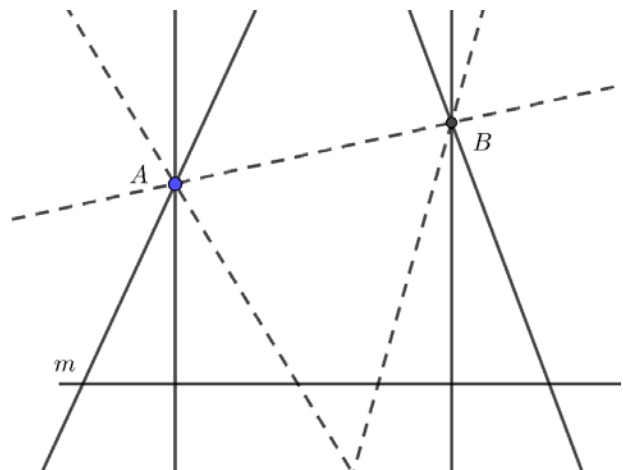
Giả sử $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$, suy ra $AC \parallel BD$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

$$\text{Do đó } \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \text{ (cặp góc so le trong).}$$

Điều này trái giả thiết.



Hình 6.13



Hình 6.14

Vậy điều giả sử là sai, do đó $\widehat{C}_1 \neq \widehat{D}_1$.

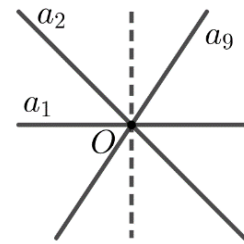
6.8. (h.6.15)

9 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 18 góc không có điểm trong chung.

Tổng của 18 góc này bằng 360° (*)

• Nếu tất cả các góc đều nhỏ hơn 20° thì tổng của chúng nhỏ hơn $20^\circ \cdot 18 = 360^\circ$, mâu thuẫn với (*). Vậy tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 20° .

• Nếu tất cả các góc đều lớn hơn 20° thì tổng của chúng lớn hơn $20^\circ \cdot 18 = 360^\circ$, mâu thuẫn với (*). Vậy tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 20° .



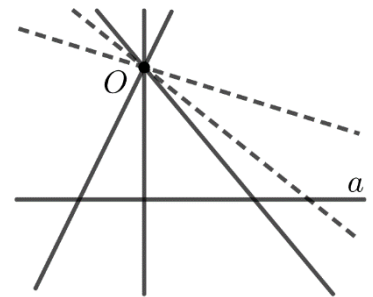
Hình 6.15

6.9. (h.6.16)

Gọi số đường thẳng vẽ qua O và cắt đường thẳng a là n . Số tam giác đỉnh O có cạnh đối diện nằm trên đường thẳng a được tính theo công thức $\frac{n(n-1)}{2}$.

Theo đề bài ta có $\frac{n(n-1)}{2} = 78$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 156 = 13 \cdot 12 \Rightarrow n = 13.$$



Hình 6.16

Vậy có 13 đường thẳng đi qua O và cắt đường thẳng a . Theo đề bài, qua O còn có đường thẳng không cắt a . Theo tiên đề O-clít chỉ có một đường thẳng như thế. Vậy số đường thẳng đã vẽ qua O là 14.

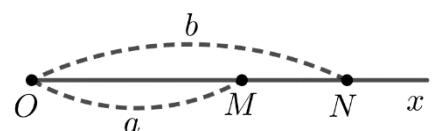
14 đường thẳng này tạo nên 28 góc đỉnh O không có điểm trong chung và có tổng số đo bằng 360° . (*)

Vậy ít nhất phải có một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ : 28 = 12^\circ 51' < 13^\circ$ vì nếu không có góc nào nhỏ hơn 13° thì tổng của 28 góc này sẽ lớn hơn hoặc bằng $13^\circ \cdot 28 = 364^\circ$, mâu thuẫn với (*).

6.10. (h.6.17)

• Điểm O không nằm giữa hai điểm M và N (1) vì M và N nằm trên tia Ox .

• Giả sử điểm N nằm giữa hai điểm O và M thì $ON = NM = OM$ do đó $b + NM = a$.



Hình 6.17

Suy ra $NM = a - b < 0$ (vì $a < b$). Điều này vô lí vì $NM > 0$.

Vậy điều giả sử là sai, do đó điểm N không nằm giữa hai điểm O và M . (2)

Trong ba điểm O, M, N thẳng hàng phải có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại nên từ (1) và (2) suy ra điểm M nằm giữa O và N .

6.11. (h.6.18)

Giả sử hai tia Ox, Oy không đối nhau.

Ta vẽ tia Oy' là tia đối của tia Ox .

Khi đó $\widehat{zOx} + \widehat{zOy'} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

Mặt khác, $\widehat{zOx} + \widehat{zOy} = 180^\circ$ (gt).

Suy ra $\widehat{zOy'} = \widehat{zOy}$ (cùng bù với $\widehat{zOx}$). Điều này vô lí vì trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Oz bao giờ cũng có một và chỉ một tia Oy sao cho $\widehat{zOy} = m^\circ$.

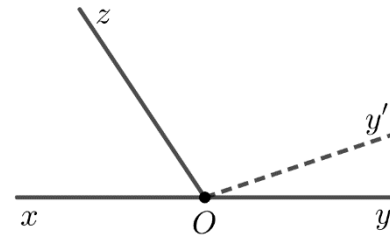
Vậy điều giả sử là sai, do đó hai tia Ox, Oy đối nhau.

6.12. Không thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác.

Như vậy với cả 9 đoạn thẳng ta được $9 \cdot 5 = 45$ trường hợp hai đoạn thẳng cắt nhau. Nhưng như thế thì mỗi trường hợp đã được tính hai lần (vì đoạn thẳng AB cắt đoạn thẳng CD thì ngược lại, đoạn thẳng CD cũng cắt đoạn thẳng AB) do đó thực sự chỉ có $\frac{45}{2}$ trường hợp hai đoạn thẳng cắt nhau. Vì $\frac{45}{2} \notin \mathbb{N}$ nên điều giả sử là sai.

Do đó không thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác.



Hình 6.18

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 7. TỔNG BA GÓC TRONG MỘT TAM GIÁC

7.1.

- **Hình 1.** $\triangle ABC$ có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

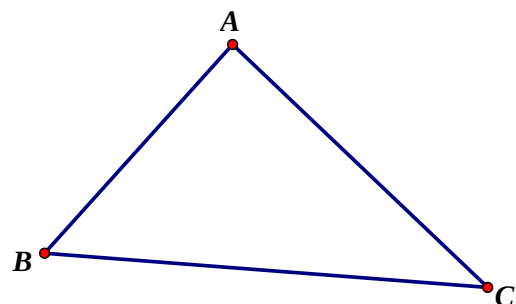
$$56^\circ + x^\circ + 12^\circ + x^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 56^\circ.$$

- **Hình 2.** $\triangle MNP$ vuông tại $M \Rightarrow \hat{N} + \hat{P} = 90^\circ$

$$2x^\circ + x^\circ - 15^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 35^\circ.$$

- **Hình 3.** $\triangle DEF$ có $\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$

$$x^\circ + 3x^\circ - 25^\circ + x^\circ + 10^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 39^\circ.$$



7.2. Ta có $\hat{A}_2 = \hat{A}_1 = 45^\circ$ (đối đỉnh).

Ta có $\hat{B}_2 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 = 50^\circ$.

$\triangle ABC$ có $\hat{C}_1 = \hat{A}_2 + \hat{B}_2$ (góc ngoài của tam giác) suy ra: $\hat{C}_2 = 95^\circ$.

7.3. Đặt số đo góc ngoài đỉnh $A; B; C$ lần lượt là $x; y; z$. Theo đầu bài ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ và } x + y + z = 360^\circ.$$

Giải ra, ta được: $x = 80^\circ; y = 120^\circ; z = 160^\circ$.

Từ đó ta suy ra các góc trong đỉnh A, B, C tương ứng là $100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$.

Do đó tỉ lệ ba góc trong là: $5:3:1$.

7.4.

a) Ta có $\hat{A} = 2\hat{B}; \hat{B} = 3\hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 6\hat{C}$.

$\triangle ABC$ có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 6\hat{C} + 3\hat{C} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 18^\circ; \hat{B} = 54^\circ; \hat{A} = 108^\circ.$$

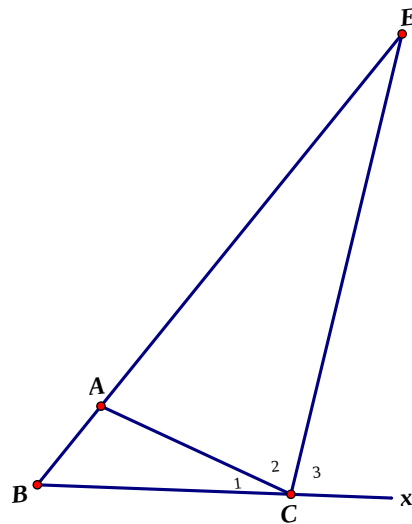
b) Ta có $\widehat{ACx} + \hat{C}_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\widehat{ACx} + 18^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACx} = 162^\circ$$

$$\text{Ta có: } \hat{C}_2 = \hat{C}_3 = \frac{1}{2}\widehat{ACx} = 81^\circ$$

$$\triangle BCE \text{ có } \hat{E} + \hat{B} + \widehat{BCE} = 180^\circ$$

$$\hat{E} + 54^\circ + 18^\circ + 81^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{E} = 27^\circ \text{ hay } \widehat{AEC} = 27^\circ.$$



7.5.

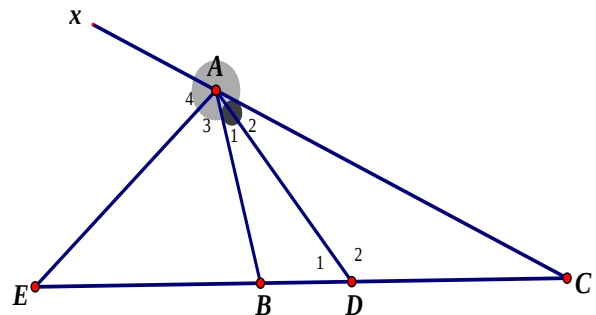
a) $\triangle ABD$ có $\hat{A}_1 + \hat{B} + \widehat{ADB} = 180^\circ$;

$$\triangle ACD \text{ có } \hat{A}_2 + \hat{C} + \widehat{ADC} = 180^\circ;$$

Mà $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ nên

$$\hat{C} + \widehat{ADC} = \hat{B} + \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \hat{B} - \hat{C};$$

b) $\triangle ABC$ có $\widehat{BAx} = \hat{B} + \hat{C}$ (góc ngoài tam giác)



$$\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{A_4} = \frac{1}{2} \widehat{BAx} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$$

$$\Delta ACE \text{ có } \widehat{A_4} = \widehat{E} + \widehat{C} \text{ (góc ngoài tam giác)} \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{A_4} - \widehat{C} \Rightarrow \widehat{AEB} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} - \widehat{C} \text{ hay } \widehat{AEB} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}.$$

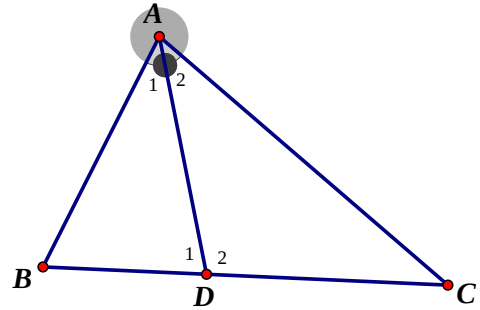
7.6. ΔACD có $\widehat{D_2} = \widehat{B} + \widehat{A_1}$ (góc ngoài tam giác)

ΔABD có $\widehat{D_1} = \widehat{C} + \widehat{A_2}$ (góc ngoài tam giác)

mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{D_2} - \widehat{D_1} = \widehat{B} - \widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{D_2} - \widehat{D_1} = 18^\circ$ mà $\widehat{D_2} + \widehat{D_1} = 180^\circ$ nên

$$\widehat{D_2} = \frac{180^\circ + 18^\circ}{2} = 99^\circ; \widehat{D_1} = \frac{180^\circ - 18^\circ}{2} = 81^\circ.$$



7.7.

a) Ta có $\widehat{ADB} = 85^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 95^\circ$.

ΔABD có $\widehat{A_1} + \widehat{B} + \widehat{ADB} = 180^\circ$;

ΔACD có $\widehat{A_2} + \widehat{C} + \widehat{ADC} = 180^\circ$;

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{C} + \widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{ADB}$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C}.$$

Vậy $\widehat{B} - \widehat{C} = 95^\circ - 85^\circ = 10^\circ$.

$$\text{b) } 4\widehat{B} = 5\widehat{C} \Rightarrow \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{4}$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: } \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{4} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{5 - 4} = \frac{10^\circ}{1} = 10^\circ$$

Suy ra: $\widehat{B} = 50^\circ$; $\widehat{C} = 40^\circ$.

7.8.

a) ΔABO có $\widehat{O_1} = \widehat{A_1} + \widehat{ABO}$ (góc ngoài tam giác).

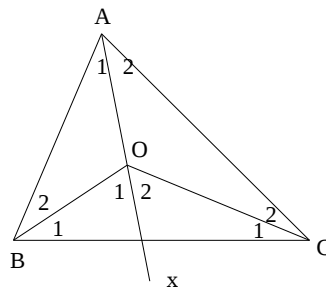
ΔACO có $\widehat{O_2} = \widehat{A_2} + \widehat{ACO}$ (góc ngoài tam giác).

$$\Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO} \text{ Hay } \widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}.$$

$$\text{b) Từ } \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \frac{180 - \widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} \text{ mà BO là tia phân}$$



giác của $\widehat{B}$ nên $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2}$ suy ra $\widehat{C}_2 = \frac{\widehat{C}}{2}$; hay CO là tia phân giác của góc $\widehat{C}$.

7.9.

a) Từ : $\widehat{A} = 180^\circ - 3\widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 3\widehat{C}$

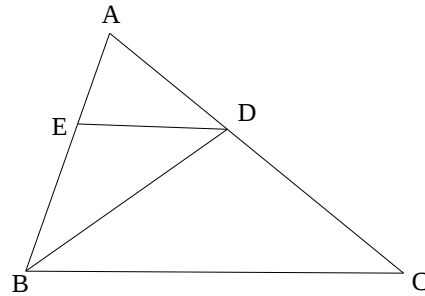
suy ra $\widehat{B} = 2\widehat{C}$

b) $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{C}$ (góc đồng vị) và

$\widehat{EDB} = \widehat{DBC}$ (góc so le trong).

Tia DE là tia phân giác của $\widehat{ADB}$

$\Leftrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{EDB} \Leftrightarrow \widehat{C} = \widehat{DBC}$



mà $\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ nên $\widehat{DBC} = \frac{1}{2}\widehat{B} \Leftrightarrow BD$ là tia phân giác của $\widehat{ABC}$.

Vậy khi D là giao điểm của tia phân giác $\widehat{B}$ và AC thì DE là tia phân giác của $\widehat{ADB}$.

7.10. Giả sử cả ba góc ngoài ở ba đỉnh đều lớn hơn 120° suy ra mỗi góc trong đều nhỏ hơn 60° .

Vậy tổng ba góc trong của tam giác nhỏ hơn 180° , vô lí. Do đó tồn tại một góc ngoài có số đo không lớn hơn 120° .

7.11.

a) Góc BDC là góc ngoài tại đỉnh D của

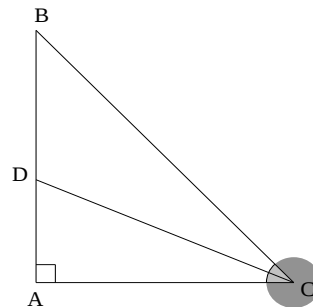
tam giác ACD nên $\widehat{BDC} > \widehat{A} = 90^\circ$;

$90^\circ < \widehat{BDC} < 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDC}$ là góc tù.

b) $\widehat{BDC} = \widehat{A} + \widehat{ACD}$ (góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = 15^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$.



7.12. Xét $\triangle ABI$ có $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{AIB}$

Xét $\triangle CDH$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ - \widehat{CHD}$

Xét $\triangle EFK$ có $\widehat{E} + \widehat{F} = 180^\circ - \widehat{EKF}$

Suy ra : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 540^\circ - (\widehat{AIB} + \widehat{CHD} + \widehat{EKF}) =$

$540^\circ - (\widehat{KIH} + \widehat{IHK} + \widehat{IKH}) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 8. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC

• Định nghĩa tam giác bằng nhau

8.1. Đáp số:

a) $AB = MN$; $AC = MP$; $BC = NP$.

b) $\widehat{I} = \widehat{D}$; $\widehat{K} = \widehat{F}$; $\widehat{H} = \widehat{E}$.

8.2. Đáp số: $\triangle ABC = \triangle DEC$; $\triangle MNP = \triangle MKQ$; $\triangle IHL = \triangle KHL$.

8.3. $\triangle ABC = \triangle MNP$ suy ra: $\widehat{B} = \widehat{N}$; $\widehat{C} = \widehat{P}$ mà $\widehat{N} + \widehat{P} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$$

Ta có: $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$ nên $\widehat{B} = (120^\circ + 10^\circ) : 2 = 65^\circ$

$$\widehat{C} = (120^\circ - 10^\circ) : 2 = 55^\circ$$

$\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

$$\widehat{A} + 120^\circ = 180^\circ; \widehat{A} = 60^\circ$$

Vậy $\widehat{M} = \widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{N} = \widehat{B} = 65^\circ$; $\widehat{P} = \widehat{C} = 55^\circ$.

8.4. $\triangle ABC = \triangle MNP \Rightarrow AB = MN$; $BC = NP$; $AC = MP$ (cặp cạnh tương ứng).

Vì $AB + AC = 9\text{cm} \Rightarrow MN + MP = 9\text{cm}$, mà $MN - NP = 3\text{cm}$ nên

$$MN = (9 + 3) : 2 = 6(\text{cm})$$

$$MP = (9 - 3) : 2 = 3(\text{cm})$$

Do đó chu vi $\triangle MNP$ là: $MN + NP + MP = 6 + 5 + 3 = 14\text{cm}$

Vì $\triangle ABC = \triangle MNP$ nên chu vi $\triangle ABC$ bằng chu vi $\triangle MNP$ và bằng 14cm .

8.5. $\triangle ABC = \triangle RST \Rightarrow AB = RS$; $BC = ST$; $AC = RT$ (cặp cạnh tương ứng).

Vì $ST - RS = 8\text{cm} \Rightarrow BC - AB = 8\text{cm}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{BC}{5} = \frac{AB}{3} = \frac{BC - AB}{5 - 3} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow BC = 4 \cdot 5 = 20\text{cm}; AB = 4 \cdot 3 = 12\text{cm}.$$

Vậy : $AB = RS = 12\text{cm}$; $AC = RT = 18\text{cm}$; $BC = ST = 20\text{cm}$.

• Trường hợp c.c.c

8.6. Đáp số: $\triangle PQS = \triangle RAE$; $\triangle NUV = \triangle VMN$; $\triangle EKI = \triangle EHI$.

8.7. $\triangle OAB$ và $\triangle OCB$ có $OA = OC$; $AB = CB$; OB chung

$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OCB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COB}$ (cặp góc tương ứng), hay OB là tia phân giác của $\widehat{AOC}$.

8.8. Nối AC .

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có :

$AB = CD$; $AD = BC$

AC cạnh chung

Nên $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có :

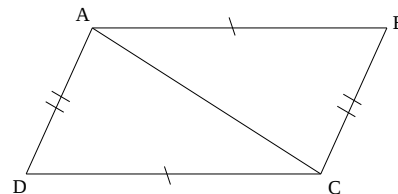
$AB = CD$; $AD = BC$; AC cạnh chung

Nên $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$ mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AD \parallel BC$

$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AB \parallel DC$.

8.9. $\triangle AMN$ và $\triangle AMC$ có AM chung; $AB = AC$; $BM = CM$



$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM} \text{ (góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ.$$

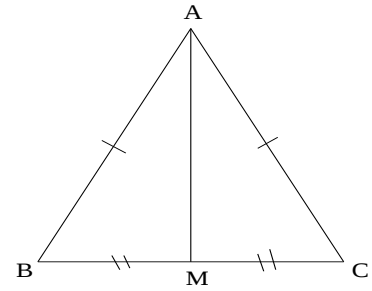
$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} \text{ (góc tương ứng)}.$$

$$\text{Mà } \widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$$

$$\triangle AMB \text{ có } \widehat{ABM} + \widehat{BAM} + \widehat{AMB} = 180^\circ.$$

$$\widehat{ABM} + 25^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABM} = 65^\circ \text{ suy ra } \widehat{ACM} = 65^\circ.$$

• Trường hợp c.g.c



8.10. a) $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có $AB = BE$;

$$\widehat{ABD} = \widehat{EBD}; BD \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD \text{ (c.g.c)}.$$

b) $\triangle ABD = \triangle EBD \Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BAD}$

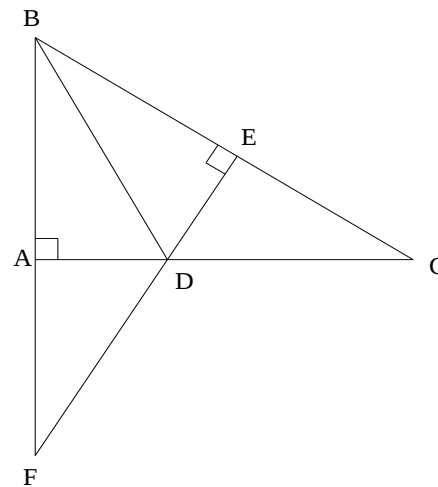
$$\Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AB.$$

c) $\triangle ABD = \triangle EBD \Rightarrow AD = ED$

$$\triangle ADF \text{ và } \triangle EDC \text{ có } \widehat{ADF} = \widehat{EDC};$$

$$AD = ED; \widehat{FAD} = \widehat{DEC} (= 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle ADF = \triangle EDC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow DC = DF$$



8.11.

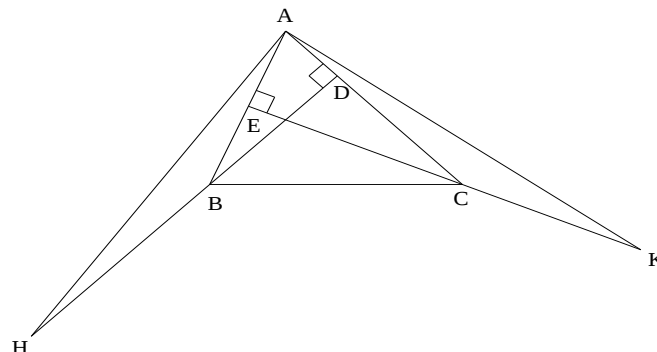
a) $\triangle ABD$ có $\widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{BAC} = 90^\circ \quad (1)$

$\triangle ACE$ có $\widehat{AEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{BAC} = 90^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ do đó $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$.

b) $\triangle ABH$ và $\triangle KCA$ có $AB = CK; \widehat{ABD} = \widehat{ACE};$

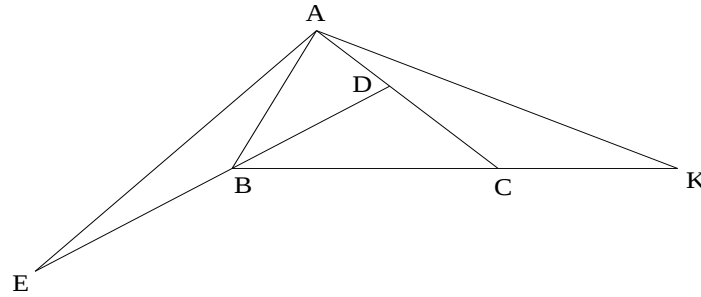
$$BH = AC \Rightarrow \triangle ABH = \triangle KCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AH = AK.$$



8.12. Ta có: $\widehat{ABE} + \widehat{ABD} = 180^\circ; \widehat{ACK} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (cặp góc kề bù)

$$\text{Mà } \widehat{ABD} = \widehat{ACB} \left(= \frac{1}{2} \widehat{ABC} \right) \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACK}.$$

$\triangle ABE$ và $\triangle ACK$ có : $AB = CK$; $\widehat{ABD} = \widehat{ACK}$; $BE = AC$
 $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACK$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = KA$.



8.13.

a) Ta dễ chứng minh được $\triangle ADE = \triangle CFE$ (c.g.c)

Suy ra $AD = CF \Rightarrow BD = CF$

Và $\widehat{A} = \widehat{FCE}$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên $CF \parallel AB$.

b) Xét $\triangle BDC$ và $\triangle FCD$ có : $BD = FC$

(chứng minh trên)

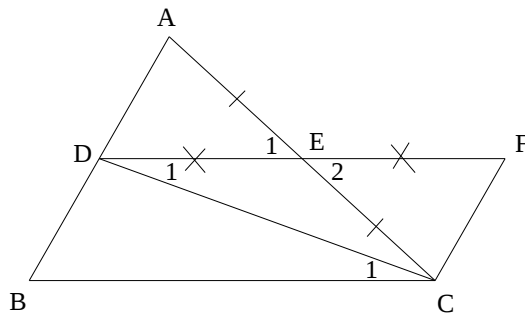
$\widehat{BDC} = \widehat{FCD}$ (so le trong ; $AB \parallel CF$) ;

CD là cạnh chung do đó:

$\triangle BDC = \triangle FCD$ (c.g.c)

c) $\triangle BDC = \triangle FCD$ (chứng minh trên)

nên $\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$, mà hai góc ở vị trí so le trong suy ra $DE \parallel BC$.



• *Nhận xét* . Từ kết luận $\triangle BDC = \triangle FCD$, chúng ta còn suy ra được $DE = \frac{1}{2}.BC$.

8.14. a) $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có $\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$ (giả thiết) ;

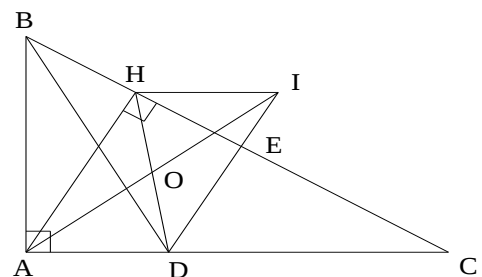
$BE = BA$; BD là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = ED$.

b) $\triangle ABD = \triangle EBD \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED}$

$\Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp BC$, mà

$AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel DE$



c) $AH \parallel DE \Rightarrow \widehat{AHO} = \widehat{IDO}$ (cặp góc so le trong).

$\triangle AHO$ và $\triangle IDO$ có $\widehat{AHO} = \widehat{IDO}$; $OH = OD$; $AH = ID \Rightarrow \triangle AHO = \triangle IDO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{IOD}$.

Mà $\widehat{AOH} + \widehat{AOD} = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{IOD} + \widehat{AOD} = 180^\circ$.

Suy ra A, O, I thẳng hàng.

8.15.

$$a) \widehat{CBD} = \widehat{ABE} (= 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = \widehat{CBA} + \widehat{CBE}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBE}.$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBC$ có $AB = EB$;

$$\widehat{ABD} = \widehat{CBE} \text{ (cùng phụ với góc } \angle ABC)$$

$$BD = BC \Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBC \text{ (c.g.c)}$$

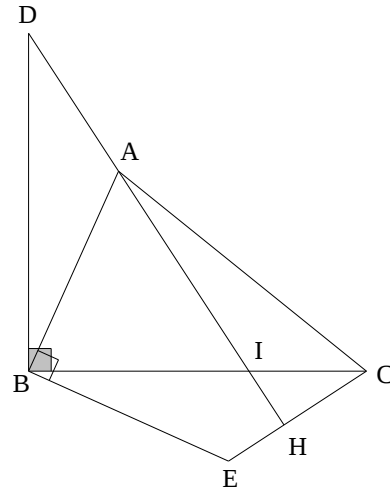
$$\Rightarrow AD = CE.$$

b) Gọi H, I là giao điểm của đường thẳng AD với CE và BC .

$$\triangle ABD = \triangle EBC \text{ suy ra: } \widehat{BDA} = \widehat{BCE} \text{ mà}$$

$$\widehat{BDA} + \widehat{BIA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCE} + \widehat{CIH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CIH \text{ vuông, hay } AD \perp CE.$$



8.16.

a) $\triangle AMC$ và $\triangle NMB$ có $AM = MN$;

$$\widehat{AMC} = \widehat{NMB}; BM = CM$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle NMB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AC = BN, \text{ mà } AC = AE$$

$$\Rightarrow BN = AE.$$

b) Ta có $\widehat{BAD} = 90^\circ; \widehat{CAE} = 90^\circ$

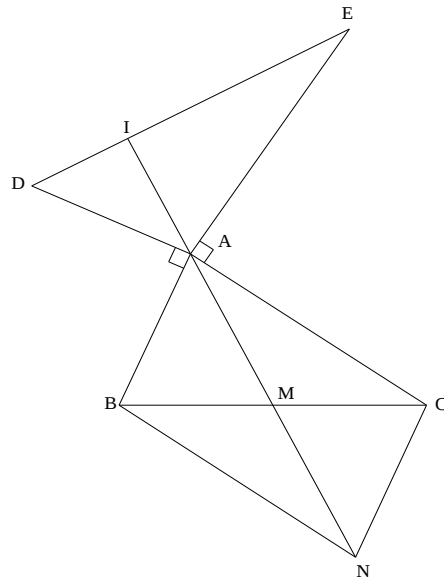
$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^\circ \quad (1)$$

$\triangle AMC = \triangle NMB$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MNB} \Rightarrow BN \parallel AC$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ABN} = 180^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{DAE} = \widehat{ABN}$



Xét $\triangle ABN$ và $\triangle DAE$ có $AD = BA; \widehat{DAE} = \widehat{ABN}; AE = BN$

$$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle DAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AN = DE; \text{ mà } AN = 2 \cdot AM \Rightarrow AM = \frac{DE}{2}.$$

c) Gọi C là giao điểm của đường thẳng AM và DE .

$$\triangle ABN = \triangle DAE \text{ (chứng minh trên)} \Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{NAB} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \widehat{DAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAI} + \widehat{NAB} = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{EDA} + \widehat{DAI} = 90^\circ$, hay $AM \perp DE$.

$$8.17. \triangle OAB = \triangle OCD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = CD.$$

• Trường hợp g.c.g

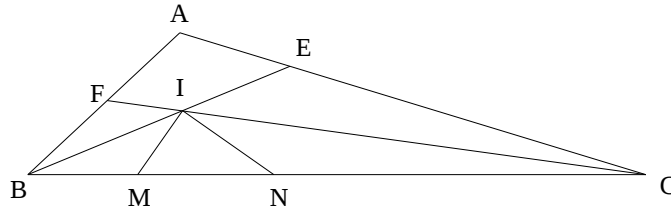
8.18.

a) $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$.

Ta có: $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{C} = 30^\circ$.

$\triangle BIC$ có $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} + \widehat{BIC} = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + \widehat{BIC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 150^\circ$.

Từ đó $\widehat{MIN} = \widehat{BIC} - \widehat{BIM} - \widehat{CIN} \Rightarrow \widehat{MIN} = 150^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.



b) $\widehat{BIC} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{CIE} = 30^\circ$.

$\triangle CIN$ và $\triangle CIE$ có $\widehat{ECI} = \widehat{NCI}$; CI là cạnh chung

$\widehat{EIC} = \widehat{NCI} = (30^\circ) \Rightarrow \triangle CIN = \triangle CIE$ (g.c.g) $\Rightarrow CE = CN$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle BFI = \triangle BMI$ (g.c.g) $\Rightarrow BM = BF$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $CE + BF = CN + BM < BC$

8.19. $\triangle ABC$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$.

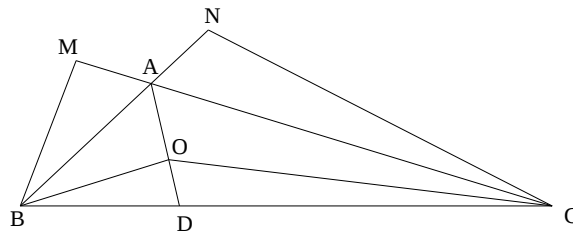
Ta có AD là tia phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^\circ$.

$\triangle ABO$ và $\triangle ABM$ có $\widehat{BAO} = \widehat{BAM} (= 60^\circ)$; AB chung; $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$

$\Rightarrow \triangle ABO = \triangle ABM$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = AO$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle ACO = \triangle CAN$ (g.c.g) $\Rightarrow AN = AO$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AM = AN$.



8.20.

a) Kẻ $EM \parallel AB$ ($M \in BC$)

Tam giác DEM và tam giác MBD có

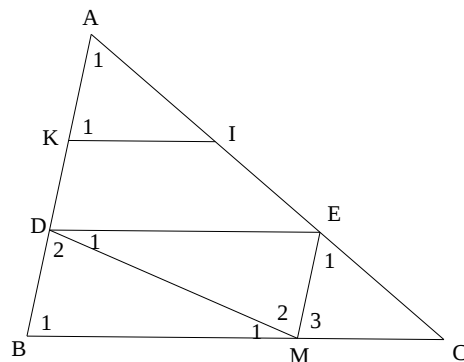
$\widehat{D}_1 = \widehat{M}_1$; DM chung; $\widehat{D}_2 = \widehat{M}_2$

nên $\triangle DEM = \triangle MBD$ (g.c.g) suy ra

$BD = ME$; $DE = BM$.

Ta có $AB \parallel EM$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$; $\widehat{B}_1 = \widehat{M}_3$

Lại có $KI \parallel BC$ nên $\widehat{K}_1 = \widehat{B}_1$.



Tam giác AKI và tam giác EMC có $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$; $AK = EM (= BD)$

$\widehat{M_3} = \widehat{K_1} (= \widehat{B_1})$ nên $\triangle AKI = \triangle EMC$ (g.c.g)

Suy ra $AI = EC$ và $KI = MC$.

b) Ta có $KI = MC$; $DE = BM$ suy ra $KI + DE = MC + BM = BC = 5\text{cm}$.

8.21.

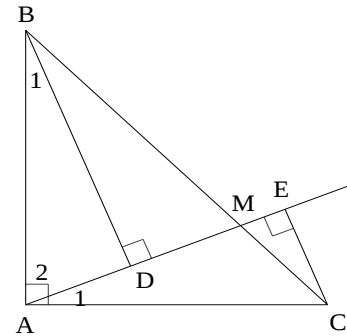
a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CAE$ có $\widehat{BDA} = \widehat{AEC} = 90^\circ$.

$AB = AC$ (giả thiết) $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$)
do đó $\triangle ABD = \triangle CAE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) $\triangle ABD = \triangle CAE$ nên $BD = AE$; $AD = CE$

do đó $BD - CE = AE - AD$

Vậy $BD - CE = DE$



* **Nhận xét:** Để chứng minh một đoạn thẳng bằng tổng hay một hiệu hai đoạn thẳng ta thường biến đổi đoạn thẳng đó thành hai đoạn cùng nằm trên một đường thẳng và sử dụng cộng, trừ đoạn thẳng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 9. TAM GIÁC CÂN

9.1. $\triangle ABC$ ($AB = AC$) cân. Đặt $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$

$\triangle ABD$ có $\widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{BAD} = \alpha + 60^\circ$

$\triangle ADE$ ($AD = AE$) cân nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$

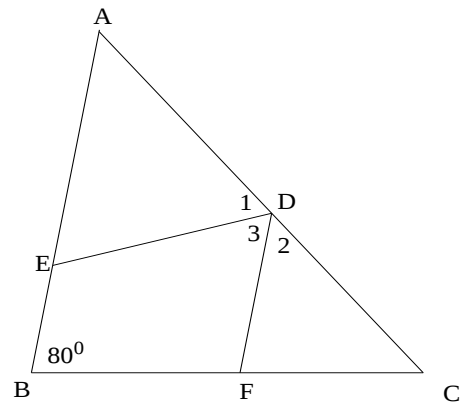
$\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{CDE} = \widehat{ADE} + \widehat{CDE} = \widehat{ADC} = \alpha + 60^\circ$

$\triangle CED$ có $\widehat{AED} = \widehat{C} + \widehat{CDE}$

Từ đó suy ra:

$\widehat{C} + \widehat{CDE} + \widehat{CDE} = \widehat{AED} + \widehat{CDE} + \widehat{ADC} = \alpha + 60^\circ$

$\Rightarrow \alpha + 2.\widehat{CDE} = \alpha + 60^\circ \Rightarrow \widehat{CDE} = 30^\circ$



9.2. $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ mà $\widehat{B} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 100^\circ$

$\triangle AED$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{D_1} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$.

$\triangle CDF$ cân tại C $\Rightarrow \widehat{D_2} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$.

Suy ra $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \frac{360^\circ - \widehat{A} - \widehat{C}}{2} = 130^\circ$.

Do vậy $\widehat{D_3} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = 50^\circ$.

9.3. $\triangle AEC$ có ED là đường trung trực của AC nên dễ dàng chứng minh được $\triangle AEC$ cân tại E

$$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{BAC} \text{ mà } \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DCE} + \widehat{ACB} = 90^\circ$$

$$\text{Đặt } \frac{\widehat{DCE}}{5} = \frac{\widehat{BCE}}{2} = x^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DCE} = 5x^\circ; \widehat{BCE} = 2x^\circ$$

$$\text{Suy ra: } 5x^\circ + 5x^\circ + 2x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x^\circ = 7,5^\circ$$

$$\text{Do vậy } \widehat{DCE} = 5.7,5^\circ = 37,5^\circ; \widehat{BCE} = 2.7,5^\circ = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 37,5^\circ + 15^\circ = 52,5^\circ$$

9.4. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$

Từ giả thiết suy ra $MC = BD$ (1)

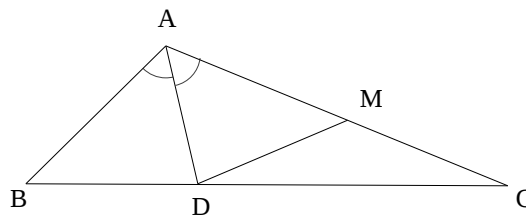
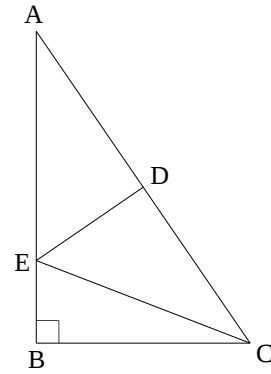
$\triangle ABD$ và $\triangle AMD$ có $AB = AM$; $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$; AD là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AMD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BD = MD; \widehat{ABD} = \widehat{AMD} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $MD = MC \Rightarrow \triangle MCD$ cân $\Rightarrow \widehat{AMD} = 2.\widehat{ACB}$ (góc ngoài của tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2.\widehat{ACB}$$

$$\text{mà } \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ \text{ nên } \widehat{ACB} = 66^\circ : 3 = 22^\circ$$



9.5 $\triangle ABM$ ($BA = BM$) cân tại B

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}$$

$\triangle CAN$ ($CA = CN$) cân tại C

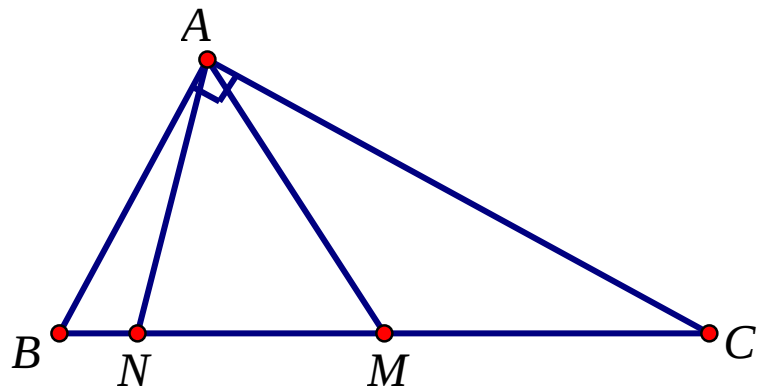
$$\widehat{ANC} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$$

Suy ra:

$$\widehat{AMB} + \widehat{ANC} = \frac{180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{C}}{2} = 135^\circ$$

$\triangle AMN$ có $\widehat{AMB} + \widehat{ANC} + \widehat{MAN} = 180^\circ$

$$\text{Suy ra: } 135^\circ + \widehat{MAN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 45^\circ$$



9.6 Theo tính chất góc ngoài tam giác, ta có:

$$\widehat{BFC} = \widehat{BEF} + \widehat{ABD};$$

$$\widehat{BEF} = \widehat{BAC} + \widehat{ACE};$$

$$\Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{ABD} + \widehat{ACE} + \widehat{BAC} (1)$$

$$\Delta ABD \text{ cân tại B nên: } \widehat{ABD} = 180^\circ - 2.\widehat{BAC}$$

$$\Delta ACE \text{ cân tại C nên: } \widehat{ACE} = 180^\circ - 2.\widehat{BAC}$$

Thay vào (1) ta có:

$$\widehat{BFC} = 180^\circ - 2.\widehat{BAC} + 180^\circ - 2.\widehat{BAC} + \widehat{BAC}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{BAC} = 70^\circ.$$

9.7 ΔADE có $\widehat{EAD} = \widehat{EDA} = 40^\circ$, nên nó là tam giác cân.

$$\text{Suy ra: } \widehat{AED} = 180^\circ - 2.40^\circ = 100^\circ.$$

ΔAEB cân tại E, theo tính chất góc ngoài của tam giác: $\widehat{AEC} = 2.\widehat{B} = 4x$.

$$\text{Suy ra: } 4x + x = 100^\circ. \text{ Do đó: } x = 20^\circ$$

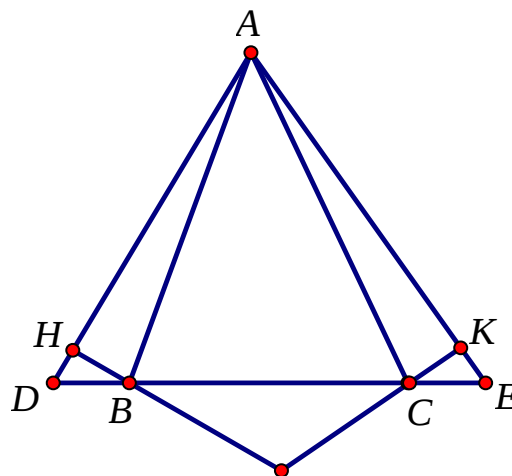
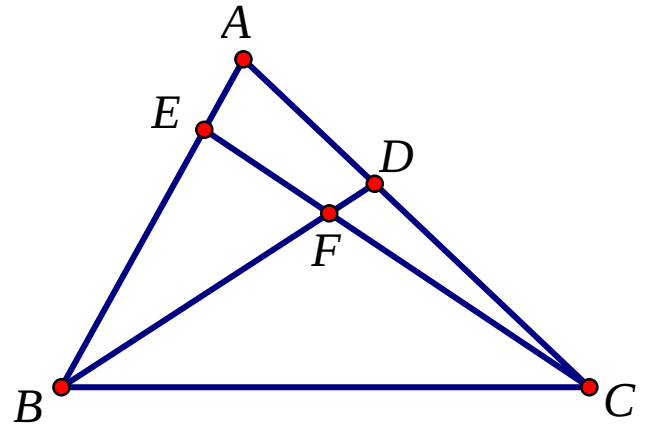
9.8

$$a) \widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^\circ; \widehat{ACE} + \widehat{ACB} = 180^\circ \text{ (cặp góc kề bù)}$$

$$\text{Mà: } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$$

$$\Delta ABD \text{ và } \Delta ACE \text{ có: } AB = AC; \widehat{ABD} = \widehat{ACE}; BD = CE$$

$$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACE (c.g.c) \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta AED \text{ cân.}$$



$$b) \Delta BHD = \Delta CKE$$

$$\widehat{BHD} = \widehat{CKE}; \widehat{ADB} = \widehat{AEC}; BD = CE \\ \Rightarrow \Delta BHD = \Delta CKE \Rightarrow BH = CK$$

$$c) \Delta BHD = \Delta CKE \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{KCE} \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \Rightarrow \Delta OBC \text{ cân tại } O.$$

9.9

a) ΔBHE ($BH = BE$) cân tại B.

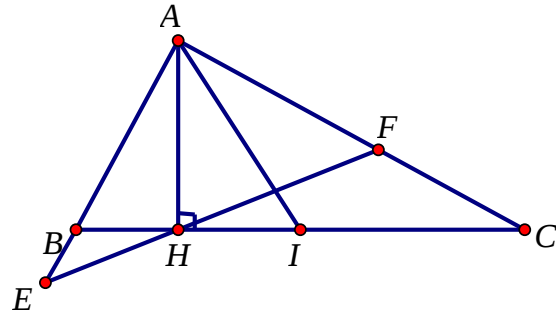
$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2.\widehat{BHE}$$

Mà:

$$\widehat{ABC} = 2.\widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{BHE} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{FHC}$$

$$\Rightarrow \Delta CHF \text{ cân tại } F$$

$$\Rightarrow FH = FC(1)$$



$$\text{Ta có: } \widehat{FHC} + \widehat{FHA} = 90^\circ; \widehat{CAH} + \widehat{C} = 90^\circ \text{ mà } \widehat{FHC} + \widehat{C} = 90^\circ; \widehat{FHC} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{FHA} = \widehat{CAH}$$

$$\Rightarrow \Delta FHA \text{ cân tại } F \Rightarrow FA = FH(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $FH = FA = FC$

b) Trên tia HC lấy $HI = HB$

$$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AHI(\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AB = AI; \widehat{ABH} = \widehat{AIH} = 2.\widehat{C}(1)$$

$$\text{Mà } \Delta AIC \text{ có } \widehat{AIH} = \widehat{C} + \widehat{IAC}(2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } \widehat{C} + \widehat{IAC} = 2.\widehat{C} \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \Delta IAC \text{ cân tại } I \Rightarrow AI = IC$$

Từ đó suy ra $AB = IC$. Mặt khác $BE = HI (=BH)$

$$\Rightarrow AB + BE = IC + HI \text{ hay } AE = HC$$

9.10

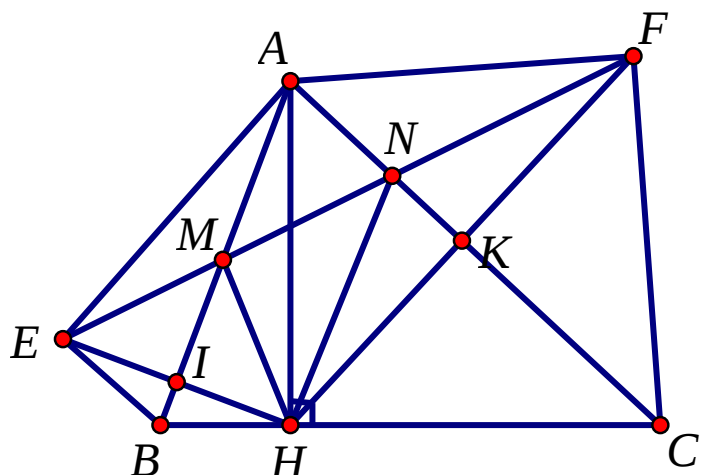
a) ΔAIE và ΔAIH , có:

$$\widehat{AIH} = \widehat{AIE}(=90^\circ); IE = IH; AI \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \Delta AIE = \Delta AIH(\text{c.g.c}) \Rightarrow AE = AH$$

Tương tự, ta có: $\Delta AKF = \Delta AKH$

$$\Rightarrow AF = AH \Rightarrow AE = AF$$



$$b) \Delta AIE = \Delta AIH \Leftrightarrow \widehat{EAI} = \widehat{HAI}$$

ΔAEM và ΔAHM có: $AE = AH$; $\widehat{EAM} = \widehat{HAM}$; AM chung

$$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta AHM (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AHM}$$

Tương tự, ta có: $\Delta AHN = \Delta AFN$

$$\Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{AFN}$$

Mà ΔAEF cân tại A nên:

$$\widehat{AEM} = \widehat{AFN} \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{AHN}$$

Suy ra: HA là tia phân giác $\widehat{MHN}$

9.11

a) ΔACE và ΔDBC có: $AC = DC$; $\widehat{ACE} = \widehat{DBC} (= 120^\circ)$; $EC = BC$

$$\Rightarrow \Delta ACE = \Delta DBC (c.g.c) \Rightarrow AE = BD$$

b) $\Delta ACE = \Delta DCB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{CBN}$.

ΔCME và ΔCNB có $CE = CB$;

$$\widehat{CEM} = \widehat{CBN} ;$$

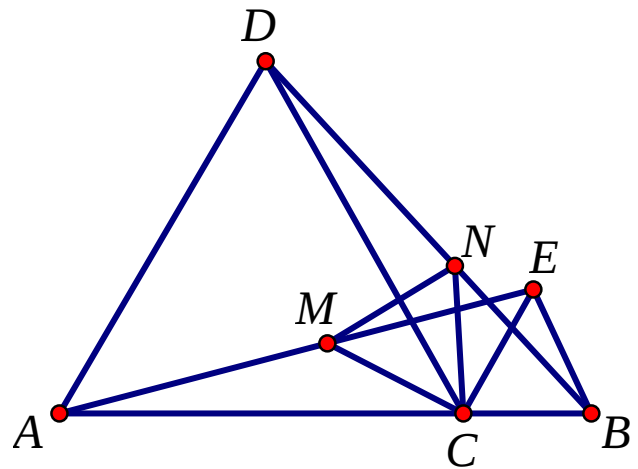
$$EM = BN \Rightarrow \Delta CME = \Delta CNB (c.g.c)$$

$$\Delta CME = \Delta CNB$$

c) $\Rightarrow CM = CN$; $\widehat{MCE} = \widehat{NCB}$

$$\Rightarrow \widehat{MCE} - \widehat{NCE} = \widehat{NCB} - \widehat{NCE} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MCN} = 60^\circ \Rightarrow \Delta MNC \text{ là tam giác đều.}$$



9.12

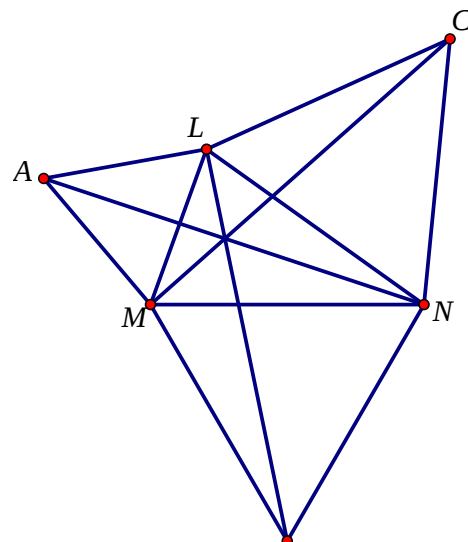
ΔMLC và ΔALN có $AL = LM$;

$$\widehat{ALN} = \widehat{MLC} (= 60^\circ + \widehat{MLN})$$

$$LN = LC \Rightarrow \Delta MLC = \Delta ALN (c.g.c)$$

$$\Rightarrow MC = AN.$$

Chứng minh tương tự, ta có:



$$\Delta \text{MAN} = \Delta \text{MLB}(\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \mathbf{AN} = \mathbf{BL}$$

$$\Rightarrow \text{LB} = \text{MC} = \text{NA}$$

9.13

Gọi E, I là giao điểm của MC với Oy, Ox.

$\Rightarrow \Delta EOI$ đều. Từ đó dễ dàng chứng minh được $\Delta OCE = \Delta EKO$

$$\Rightarrow OC = EK$$

$$\text{Vẽ } EH \perp MA; EK \perp OI$$

Dễ dàng chứng minh được:

$$\Delta\text{MBE} = \Delta\text{MHE}$$

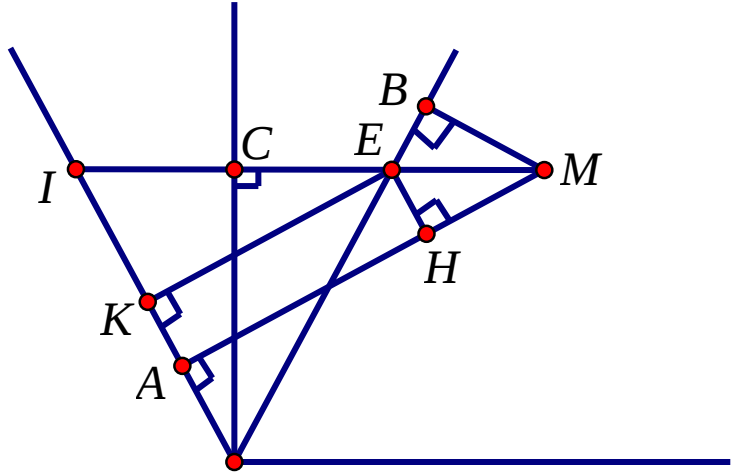
$$\Rightarrow MH = MB;$$

$$\Delta \text{OCE} = \Delta \text{EKO}$$

$$\Rightarrow EK = OC$$

$$MA - MB = MA - MH$$

$$= \text{HA} = \text{EK} = \text{OC}$$



9.14

a) Ta có:

$$\widehat{\text{ACD}} = \widehat{\text{AME}}(90^\circ - \widehat{\text{ADC}}); \widehat{\text{CAD}} = \widehat{\text{MAE}}$$

$$AD = AE \Rightarrow \triangle ACD = \triangle AEM \text{ (c.g.c)}$$

$$\text{b) } \triangle ACD = \triangle AME \Rightarrow AC = AM$$

$$\Rightarrow AB = AM$$

$\triangle AGB$ và $\triangle MIA$ có: $\widehat{ABG} = \widehat{MAI}$

(đồng vị); $AB = AM$; $\widehat{BAG} = \widehat{AMI}$

(đồng vị)

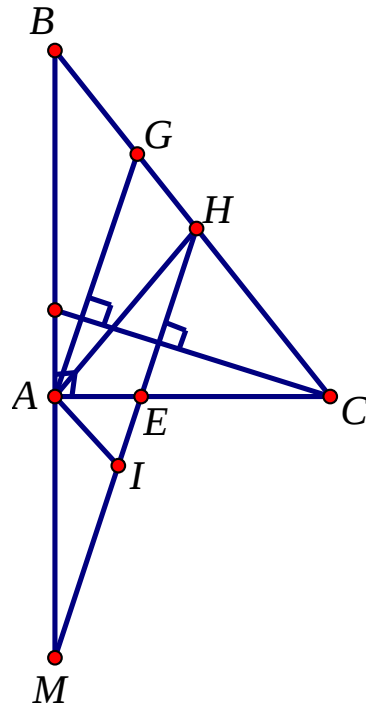
$$\Rightarrow \Delta \text{AGB} = \Delta \text{MIA}(\text{c.g.c})$$

c) AG//MH (cùng vuông góc với CD)

$$\Rightarrow \widehat{\text{GAH}} = \widehat{\text{IHA}} \text{ (so le trong)}$$

AH chung, suy ra: $\Delta AGH = \Delta HIA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow HG = AI \text{ . Mặt khác: } \triangle AGB = \triangle MIA$$



$\Rightarrow AI = BG$. Từ đó suy ra: $BG = HG$

9.15

Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$.

Ta có tam giác BCD cân tại B.

$$\text{Vì } \widehat{ABC} = 36^\circ \text{ nên } \widehat{BCD} = \widehat{BDC} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

Ta lại có: $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$ (Tính chất của góc ngoài)

$$\widehat{BDC} = \widehat{DAC} (= 72^\circ)$$

Suy ra tam giác ACD cân tại C, do đó: $CA = CD$ (1)

Xét tam giác BDN và BCN ta có:

BN chung, $BD = BC$ và $\widehat{CBN} = \widehat{DBN}$

nên suy ra: $\triangle BDN = \triangle BCN$ (c.g.c)

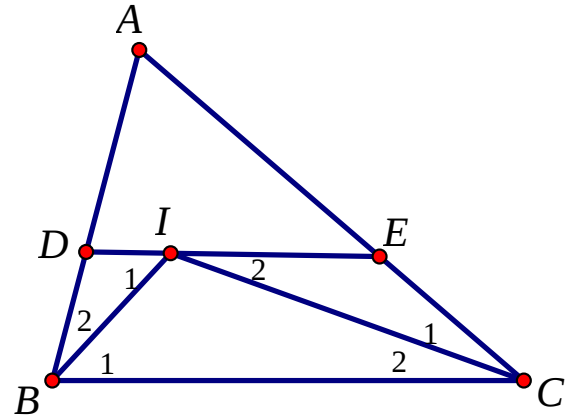
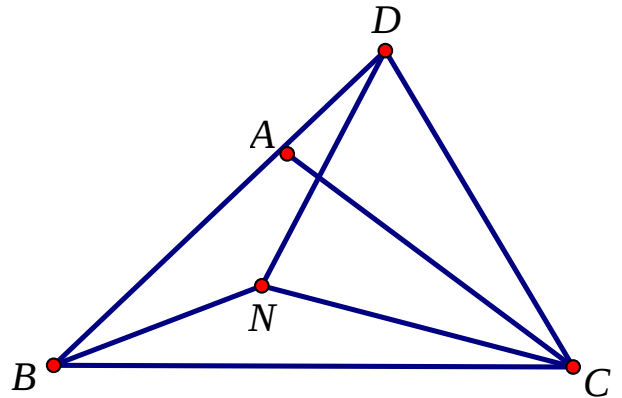
$\Rightarrow CN = DN \Rightarrow \triangle NCD$ cân tại N, lại có:

$$\widehat{NCD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCN} = 72^\circ - 12^\circ = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle NCD$ là tam giác đều

$\Rightarrow CN = CD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $CA = CN$.



9.16

$DE \parallel BC$ nên: $\widehat{I}_1 = \widehat{B}_2; \widehat{I}_2 = \widehat{C}_1$.

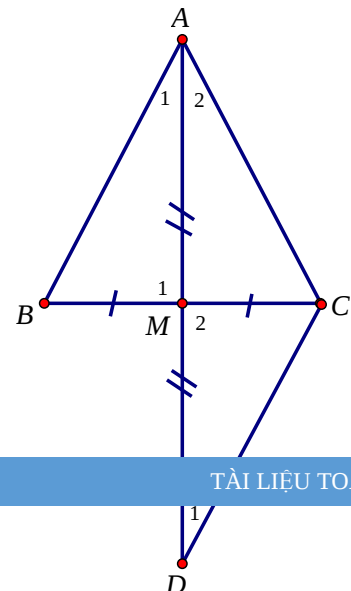
Mà $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (theo giả thiết)

$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (giả thiết) suy ra:

$$\widehat{I}_1 = \widehat{B}_2; \widehat{I}_2 = \widehat{C}_1$$

Do đó, $\triangle DIB, \triangle EIC$ là các tam giác cân đỉnh D và E.

Nên $DI = BD, EI = CE$. Vậy $DE = DI + IE = BD + CE$



9.17

Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho $MD = MA$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DMC$ có: $MB = MC$ (giả thiết)

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh) $AM = MD$, do đó:

$\triangle AMB = \triangle DMC$ (c.g.c) nên $AB = DC$; $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$

Mặt khác: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{A}_2$ hay $\triangle ACD$ cân tại C

$\Rightarrow AC = CD \Rightarrow AC = AB$

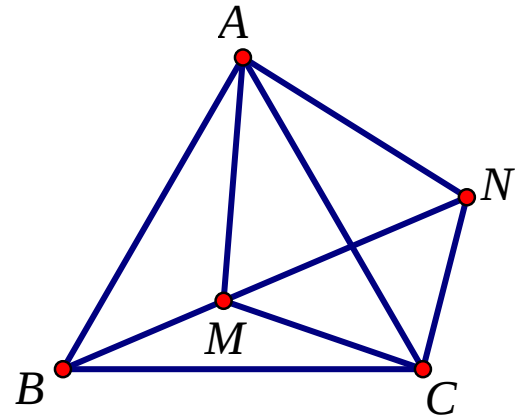
Vậy, $\triangle ABC$ cân.

* Nhận xét: Để chứng minh $\triangle ABC$ cân ta chưa tìm được cách nào trực tiếp để chứng minh cặp cạnh bằng nhau hoặc cặp góc bằng nhau, cũng như vận dụng $BM = CM$. Vì vậy, việc kẻ thêm đường phụ là điều cần thiết.

9.18

Dựng tam giác đều AMN (N và B khác phía đối với AC)
. Ta có $MA = MN$.

Mặt khác $\widehat{CAN} = \widehat{BAM} = 60^\circ - \widehat{MAC}$. Suy ra
 $\triangle MAB = \triangle NAC$ (c.g.c) dẫn đến $MB = NC$. Rõ ràng, tam giác MCN có các cạnh tương ứng bằng MA, MB, MC .



HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 10. ĐỊNH LÝ PYTAGO

10.1 Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$\triangle ABH$ vuông, nên $AH^2 + BH^2 = AB^2$

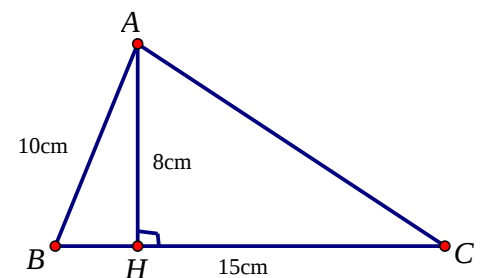
$64 + BH^2 = 100 \Rightarrow BH = 6\text{cm}$

$\triangle AHC$ vuông, nên $AC^2 = 64 + 125 \Rightarrow AC = 17\text{cm}$

Chu vi $\triangle ABC$ là: $AB + BC + AC = 10 + 17 + 6 + 15 = 48$ (cm)

10.2

Tam giác ABC vuông tại A. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 6^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 72.$$

Tam giác BCD vuông tại C. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow 72 + 3^2 = BD^2 = 81 \Rightarrow BD = 9$$

Từ đó suy ra: $x = 9$.

10.3

a) Ta có: $\widehat{MAC} = \widehat{BAN}$ (cùng bằng $90^\circ + \widehat{BAC}$)

$MA = AB$ ($\triangle MAB$ vuông cân tại A)

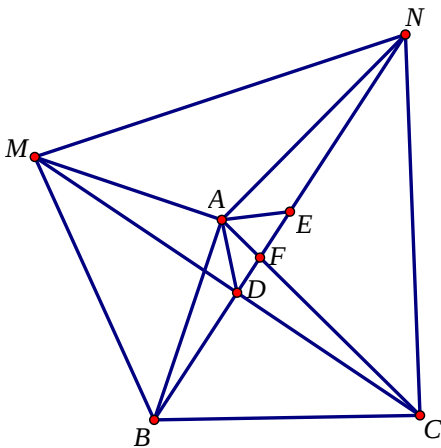
$AC = AN$ ($\triangle NAC$ vuông cân tại A)

$\triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c)

b) Gọi giao điểm của BN với AC là F.

$\widehat{ANF} = \widehat{FCD}$ (vì $\triangle AMC = \triangle ABN$), $\widehat{AFN} = \widehat{CFD}$ (đối đỉnh)

Từ đó suy ra: $\widehat{FDC} = \widehat{FAN}$. Do đó $BN \perp CM$



a) Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông MDN, BDC, MDE, NDC, ta có:

$$MN^2 + BC^2 = MD^2 + ND^2 + BD^2 + CD^2$$

$$BM^2 + CN^2 = MD^2 + BD^2 + ND^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow MN^2 + BC^2 = BM^2 + CN^2$$

$$\Rightarrow MN^2 = BM^2 + CN^2 - BC^2$$

Thay $MB = 3\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $CN = 4\text{cm}$ vào đẳng thức trên, ta được $MN = \sqrt{21}\text{ cm}$

b) Trên tia BN lấy điểm E, sao cho $BE = MD$

$\triangle AMD = \triangle ABE$ (c.g.c)

Suy ra $AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A (1)

$$\Delta AMD = \Delta ABE \Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{MAB} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \Delta ADE$ vuông tại A (2)

$$\text{Từ (1) và (2) } \widehat{ADE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = \frac{1}{2} \widehat{MDN}$$

Suy ra: DA là phân giác $\widehat{MDN}$

10.4

Ta kéo dài AD và BC sao cho chúng cắt nhau tại E. Suy ra $\widehat{E} = 30^\circ$

ΔCDE vuông tại D có $\widehat{E} = 30^\circ$ nên $CE = 2.CD = 12 \text{ cm}$. (theo ví dụ 8, chuyên đề 9)

$$\Rightarrow BE = 4 + 12 = 16 \text{ cm}$$

Đặt $AB = x$, ΔABE vuông tại B có $\widehat{E} = 30^\circ$ nên $AE = 2.AB = 2x$.
(theo ví dụ 8, chuyên đề 9)

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

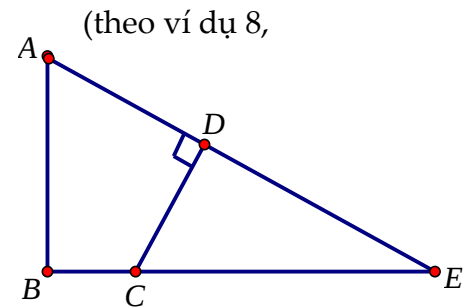
$$BE^2 + AB^2 = AE^2$$

$$BE^2 = 16^2 - 256$$

$$\text{Ta có: } AB^2 = x^2; AE^2 = 4x^2$$

$$256 + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 256 = 3x^2$$

$$\text{Nên } \Leftrightarrow x^2 = \frac{256}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$



10.5

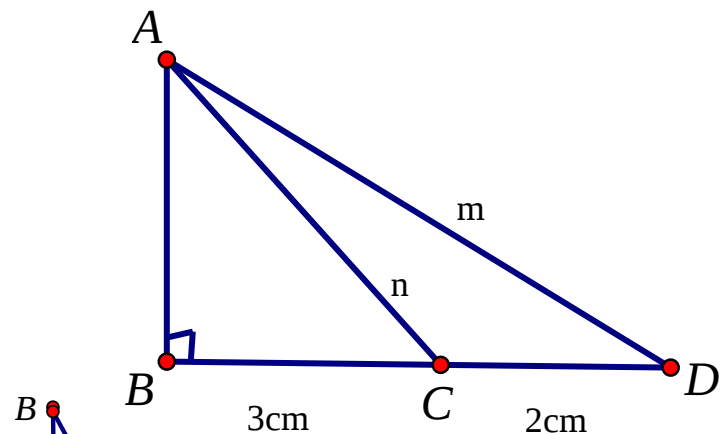
ΔABC vuông suy ra:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

ΔABD vuông suy ra:

$$AB^2 = AD^2 - BD^2$$

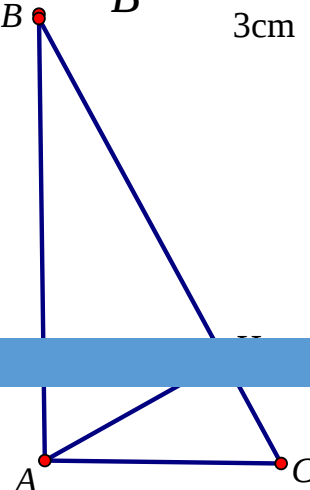
$$\text{Do đó: } AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2 \\ \Rightarrow m^2 - n^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$



10.6

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông

ABC, AHB, AHC, ta có:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2.AH^2$$

(Điều phải chứng minh)

10.7

a) $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có $AB = AC$;

$$\widehat{AHB} = \widehat{AHC} (= 90^\circ); \widehat{B} = \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHC \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

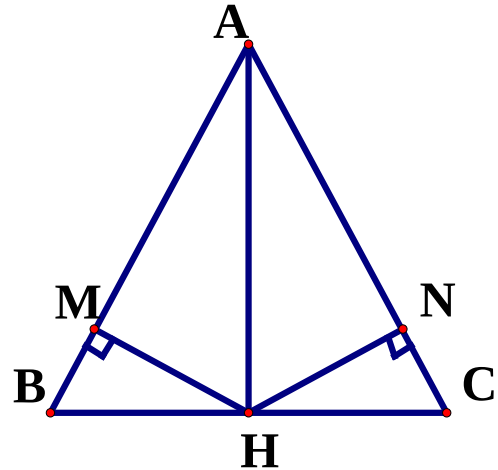
$$\Rightarrow BH = CH; \widehat{BAH} = \widehat{CAH}.$$

$$\triangle AMH \text{ và } \triangle ANH \text{ có } \widehat{AMH} = \widehat{CAH} (= 90^\circ);$$

$$\widehat{MAH} = \widehat{NAH}, AH \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle AMH = \triangle ANH \text{ (cạnh huyền góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN \text{ cân.}$$



$$\text{b) } \triangle ABC \text{ cân tại A} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

$$\triangle AMN \text{ cân tại A} \Rightarrow \widehat{AMN} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel BC$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông, ta có:

$$AH^2 + BM^2 = AN^2 + HN^2 - HM^2 = AN^2 + BH^2 \text{ (vì HM = HN)}$$

10.8

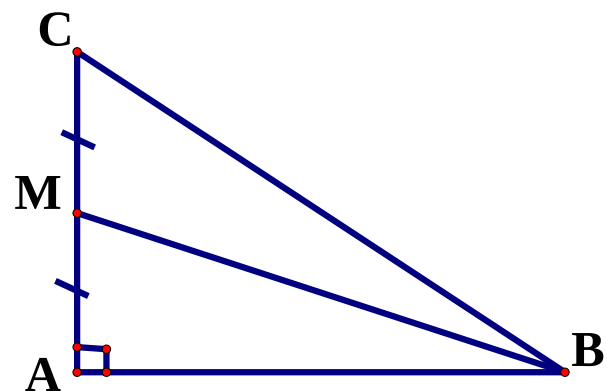
Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2$$

$$BM^2 = BC^2 - AC^2 + AM^2$$

$$BM^2 = BC^2 - AC^2 + \frac{AC^2}{4}$$

$$\text{hay } BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}AC^2$$



10.9

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

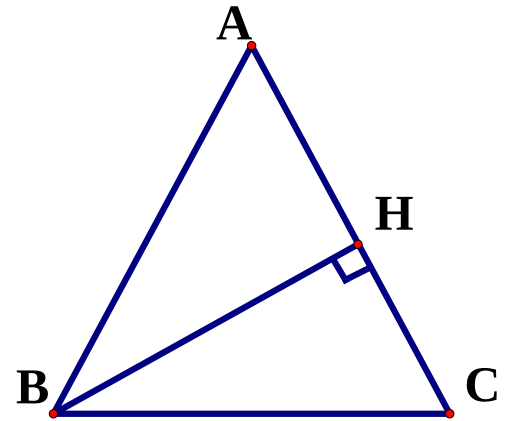
$$AB^2 = BH^2 + AH^2 (1)$$

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 (2)$$

$$AC^2 = BH^2 + AH^2 (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) ta có:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$$



10.10

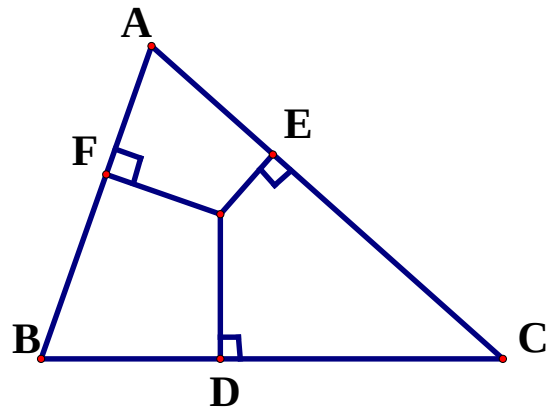
Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$$AF^2 = AM^2 - MF^2$$

$$BD^2 = BM^2 - MD^2$$

$$CE^2 = CM^2 - ME^2$$

Suy ra:



$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = AM^2 + BM^2$$

$$+ CM^2 - MF^2 - MD^2 - ME^2$$

$$= (AM^2 - ME^2) + (BM^2 - MF^2) + (CM^2 - MD^2) = AE^2 + BF^2 + CD^2$$

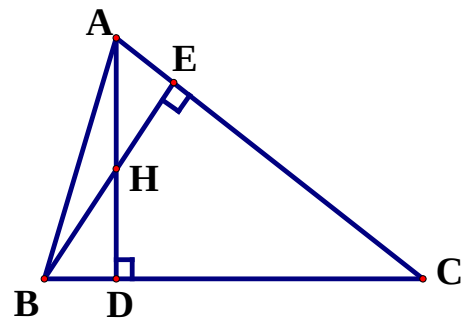
10.11

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$$AH^2 = AE^2 + HE^2; BC^2 = BE^2 + CE^2.$$

$$\Rightarrow AH^2 + BC^2 = AE^2 + BE^2 + HE^2$$

$$+ CE^2 = AB^2 + CH^2$$



10.12

a) Từ kẻ tia My vuông góc với BC và cắt tia Bx tại A'

Tam giác BMA vuông cân tại M nên MB, MA = 1: $\sqrt{2}$

Suy ra A $\equiv$ A' nên AM vuông góc với BC.

Ta có: $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.g.c) nên $AB = AC$

và $\widehat{ACB} = 45^\circ$

Tam giác ABC vuông cân tại A và có

$$\widehat{BAH} = \widehat{CAI} = 90^\circ - \widehat{CAH}$$

H, I là hình chiếu của B và C trên AD

nên $\widehat{H} = \widehat{I} = 90^\circ$

Suy ra: $\triangle AIC = \triangle BHA$ (ch.gn)

$$\Rightarrow CI = AH$$

Ta có: $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$ (Không đổi)

b) $\triangle BHM = \triangle AIM$ (c.g.c) $\Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BHM} = \widehat{IMA}$

Mà $\widehat{IMA} + \widehat{BMI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle HMI \text{ vuông cân} \Rightarrow \widehat{HIM} = 45^\circ \text{ mà } \widehat{HIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^\circ$$

$\Rightarrow IM$ là tia phân giác của góc $\widehat{HIC}$

Vậy tia phân giác của $\widehat{HIC}$ luôn đi qua điểm cố định M

10.13

Vì $AD = HE$ (gt) nên $AH = DE$

Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông

ABF ; ABH ; ADF ; BHE ; DEF ta được:

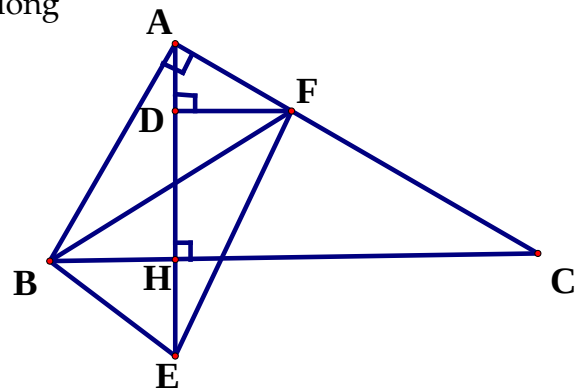
$$\begin{aligned} BF^2 &= AB^2 + AF^2 = \\ &= (BH^2 + AH^2) + (AD^2 + DF^2) \\ &= BH^2 + DE^2 + HE^2 + DF^2 \\ &= (BH^2 + HE^2) + (DE^2 + DF^2) \\ &\Rightarrow BF^2 = BE^2 + EF^2 \end{aligned}$$

Suy ra, tam giác BEF vuông tại E (định lý Py-ta-go đảo) $\Rightarrow BE \perp EF$.

10.14

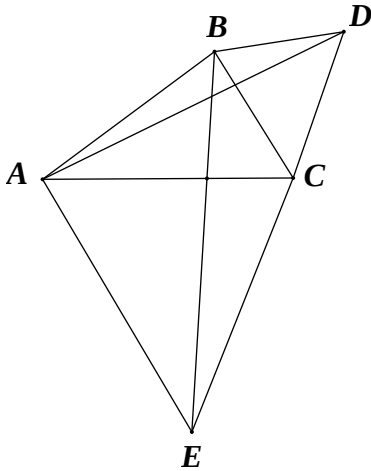
Dựng ra phía ngoài tam giác ABC tam giác đều ACE

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 90^\circ \text{ và } AC = AE = CE$$



$\triangle ABE$ có $\widehat{BAE} = 90^\circ$

Theo định lý Py-ta-go ta có: $AB^2 + AE^2 = BE^2$



$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BE^2 \quad (1)$$

$\triangle CAD$ và $\triangle CEB$ có $CA = CE$;

$\widehat{CAD}$ và $\widehat{ECB} = 60^\circ + \widehat{ACB}$ $CA = CE$.

$$\Rightarrow \triangle CAD = \triangle CEB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AB^2 + AC^2 = AD^2.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 11. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

11.1.

a) Xét $\triangle MBD$ và $\triangle NCE$ có: $\widehat{BMD} = \widehat{CNE} (= 90^\circ)$

$\widehat{B} = \widehat{C}$; $BD = CE$. Do đó $\triangle MBD = \triangle NCE$

(cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MB = NC$

b) $\triangle MBD = \triangle NCE$ (chứng minh trên)

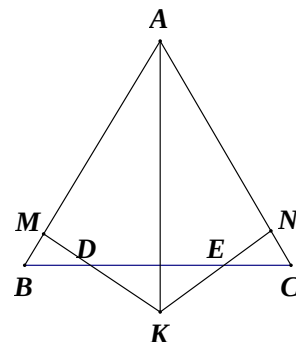
$$\Rightarrow MB = NC$$

$AM + MB = AN + NC$ nên $AM = AN$

Xét $\triangle MAK$ và $\triangle NAK$ có: $\widehat{AMK} = \widehat{ANK} (= 90^\circ)$;

AK là cạnh chung; $AM = AN$.

Do đó $\triangle MAK = \triangle NAK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).



11.2.

a) Ta có $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^\circ$; $\widehat{ACE} + \widehat{ACB} = 180^\circ$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABD}$.

$\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có $AB = AC$;

$\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$; $BD = CE$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEC}$

$\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có $\widehat{BHD} = \widehat{CKE} (= 90^\circ)$; $\widehat{HDB} = \widehat{KEC}$;

$BD = CE \Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE$ (cạnh huyền- góc nhọn).

b) Ta có $\triangle AHB$ và $\triangle AKC$ có $\widehat{AHB} = \widehat{AKC} (= 90^\circ)$;

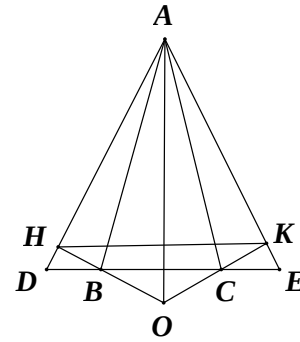
$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AKC$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông).

c) $\triangle AHB = \triangle AKC \Rightarrow AH = AK$

$\Rightarrow \triangle AHK$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AHK} = \frac{180^\circ - \widehat{HAK}}{2}$

$\triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ADE} = \frac{180^\circ - \widehat{DAE}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{ADE} \Rightarrow BC \parallel HK$



11.3

a) $\triangle AHM$ và $\triangle AKM$ có: $\widehat{AHM} = \widehat{AKM} = 90^\circ$

AM chung: $\widehat{HAM} = \widehat{KAM}$

$\Rightarrow \triangle AHM = \triangle AKM$ (cạnh huyền góc nhọn)

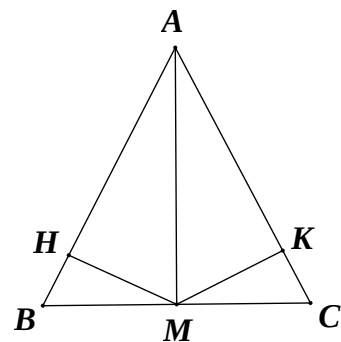
$\Rightarrow MH = MK$

b) $\triangle BHM$ và $\triangle CKM$ có $\widehat{BHM} = \widehat{CKM} (90^\circ)$;

$BM = MC$; $MH = MK$

$\Rightarrow \triangle BHM = \triangle CKM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.



11.4

a) $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c.g.c), suy ra $AB = AD$.

$\triangle ABC$ vuông tại A, có $\widehat{C} = 30^\circ$ có $\widehat{B} = 60^\circ$

Tam giác ABD cân, có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ là tam giác đều.

b)

$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle CEA \text{ (cạnh huyền- góc nhọn)}$$

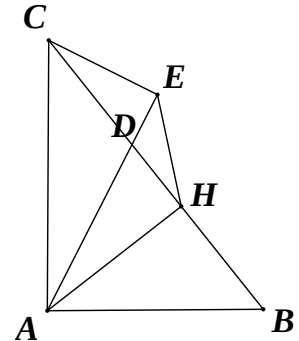
Suy ra $CH = AE$.

$\triangle ADC$ cân tại D vì $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ nên $DA = DC$.

Suy ra $AE - AD = CH - CD$ hay $DE = DH$. Do đó $\triangle DEH$ cân tại D.

Hai tam giác cân DAC và DEH có góc ở đỉnh

$$\widehat{ADC} = \widehat{EHD} \Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{AEH} \Rightarrow EH \parallel AC.$$



11.5

a) $\triangle ABE$ và $\triangle DBE$ có:

$\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ (Vì $AE \perp AB, AD \perp BC$) $AB = AD$ (giả thiết), BE: cạnh chung.

Vậy $\triangle ABE = \triangle DBE$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

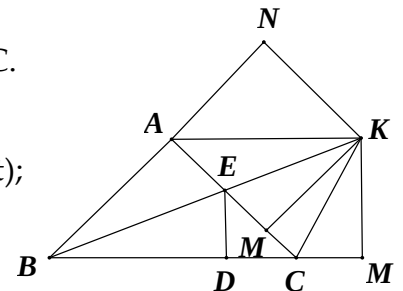
$$\Rightarrow AE = DE.$$

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{DBE}$, do đó BK là phân giác của góc ABC.

Vẽ $KN \perp BA, KH \perp AC, KM \perp BC$.

Tam giác vuông KMC và tam giác vuông KHC có: $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (giả thiết);

CK cạnh chung



Do đó $\triangle KMC = \triangle KHC$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra $KM = KH$ (1)

Ta lại có $\triangle AKH = \triangle AKN$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAK} = 135^\circ.$$

11.6. Kẻ $MH \perp BK, MI \perp KD$

$\triangle ABC$ vuông cân tại A có $MB = MC$ nên dễ dàng suy ra $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.c.c) từ đó suy ra

$$AM \perp BC, \widehat{BMA} = \widehat{CAM} \Rightarrow AM = MB; \widehat{MAC} = 45^\circ$$

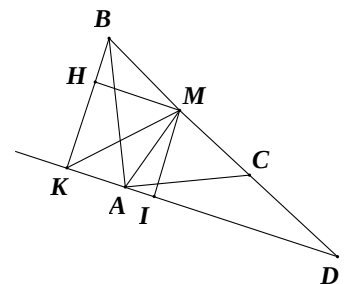
$$\text{Ta có: } \widehat{KBA} = \widehat{CAD} (= 90^\circ - \widehat{BAK}) \Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{MAI}$$

$\triangle BMH$ và $\triangle AMI$ có $\widehat{AIM} = \widehat{BHM} = 90^\circ$; $BM = AM$.

$$\widehat{MBH} = \widehat{MAI} \Rightarrow \triangle AMI \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow MH = MI.$$

$\triangle MHK$ và $\triangle MIL$ có $\widehat{MHK} = \widehat{MIK} = 90^\circ$; MK chung; MK = MI.

$$\Rightarrow \triangle MHK = \triangle MIK \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)} \Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{IKM}.$$



Vậy KM là tia phân giác $\widehat{BKD}$

11.7 Áp dụng ví dụ 10 chuyên đề 8, ta có: ME = MD

$\Rightarrow \triangle MDE$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{E}$.

Mặt khác, ta có: $\widehat{HDE} = \widehat{F}$ (cùng phụ với góc HDF).

Ta có: $\widehat{MDH} = \widehat{MDE} - \widehat{HDE} = \widehat{E} = \widehat{F}$.

11.8

a) Từ A kẻ $AK \perp MC$ tại K và $AQ \perp HN$ tại Q.

Hai tam giác vuông MAK và NCH có

$MA = NC (= \frac{1}{2}AB)$, $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với góc AMC)

$\Rightarrow \triangle MAK = \triangle NCH \Rightarrow AK = HC$ (1)

$\triangle BAK$ và $\triangle ACH$ có $AK = CH$, $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$, $AB = CA$

$\Rightarrow \triangle BAK = \triangle ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{AHC}$.

$\triangle AQN$ và $\triangle CHN$ có $AN = NC$.

$\widehat{ANQ} = \widehat{CNH} \Rightarrow \triangle ANQ = \triangle CNH$ (ch-gn) $\Rightarrow AQ = CH$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AK = AQ$.

$\triangle AKH$ và $\triangle AQH$ (ch-cgv) $\widehat{KHA} = \widehat{QHA} \Rightarrow HA$ tia phân giác của góc

$\widehat{KHQ} \Rightarrow \widehat{AHQ} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AHC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{BKA} = 135^\circ$.

Từ $\widehat{BKA} + \widehat{BKH} + \widehat{AKH} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BKH} = 135^\circ$.

Tam giác AKH có $\widehat{KHA} = 45^\circ$ nên nó vuông cân tại K, suy ra $KA = KH$.

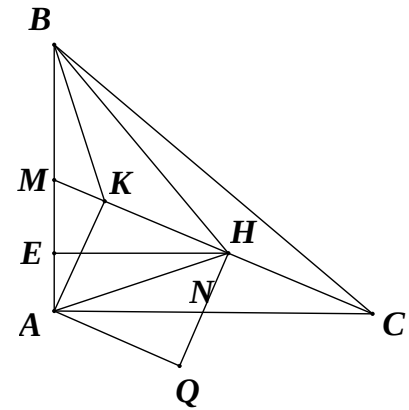
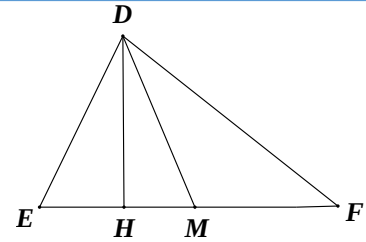
$\triangle BKA = \triangle BKH$ có BK chung, $\widehat{BKA} = \widehat{BKH} = 135^\circ$, $KA = KH$

$\Rightarrow \triangle BKA = \triangle BKH$ (c.g.c) $\Rightarrow BA = BH$ hay $\triangle ABH$ cân tại B

b) Để chứng minh được $\triangle AKB$ và $\triangle HKB$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{H_1}$.

Mà $HE \parallel CA \Rightarrow \widehat{H_2} = \widehat{C_1}$ (góc đồng vị) vì $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{H_2}$.

Hay HM là tia phân giác góc BHE



HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 12. VỀ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN

12.1. Cách 1. Từ D kẻ $DH \parallel AC$ ($H \in BC$) suy ra $\widehat{DHB} = \widehat{ACB}$, mà

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{DHB} = \widehat{ABC} \Rightarrow \triangle DHB$ cân tại D $\Rightarrow DH = DB \Rightarrow DH = CE$.

$\triangle DHF$ và $\triangle ECF$ có $\widehat{DHF} = \widehat{ECF}$, $DH = CE$, $\widehat{HDF} = \widehat{CEF}$

Suy ra $\triangle DHE = \triangle ECF$ (c.g.c) $\Rightarrow DF = FE$

Cách 2. Từ E kẻ $EK \parallel AB$ ($K \in BC$)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CKE} \text{ mà } \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

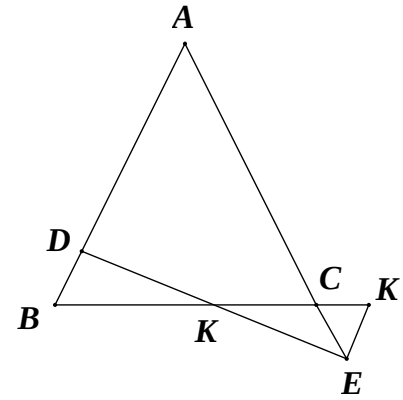
$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{CKE} \Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{CKE}$$

$$\Rightarrow \triangle ECK \text{ cân tại E} \Rightarrow CE = KE \Rightarrow BD = KE$$

$$\triangle BDF \text{ và } \triangle KEF \text{ có } \widehat{DBF} = \widehat{EKF}, BD = KE, \widehat{BDF} = \widehat{KEF}$$

Suy ra $\triangle BDF$ và $\triangle KEF$ (c.g.c)

Cách 3. Hạ $DH \perp CE, EK \perp BC$ ($H, K \in BC$)



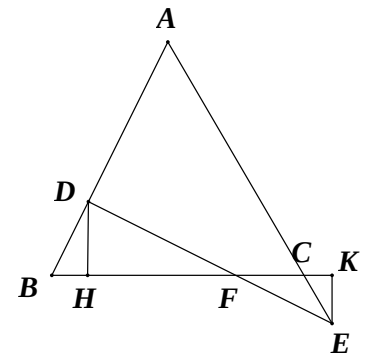
$$\triangle BDH \text{ và } \triangle CEK \text{ có } \widehat{BHD} = \widehat{CKE} = 90^\circ, BD = CE, \widehat{DBH} = \widehat{KCE}$$

Suy ra $\triangle DBH = \triangle ECK$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$$\Rightarrow DH = EK$$

$$\triangle DHF \text{ và } \triangle KEF \text{ có } \widehat{DHF} = \widehat{EKF} = 90^\circ, DH = EK, \widehat{DFH} = \widehat{KFE}$$

$$\text{Suy ra } \triangle DHF = \triangle KEF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow DF = FE.$$



Tóm lại: Chứng minh $DF = EF$ dựa vào cặp tam giác bằng nhau, do đó cần tìm ra cặp tam giác bằng nhau.

12.2 Tìm cách giải.

Ta thấy $\widehat{DCA} = 60^\circ$ mà $CD = 2BC$, nên ta nghĩ tới tam giác vuông có góc nhọn 60°

Ta hạ $DE \perp AC \Rightarrow CD = 2CE \Rightarrow CE = CB$

Dễ thấy $\triangle BED$ và $\triangle BEA$ cân tại E

$$\Rightarrow \triangle EAD \text{ cân tại E.}$$

Từ đó tính được:

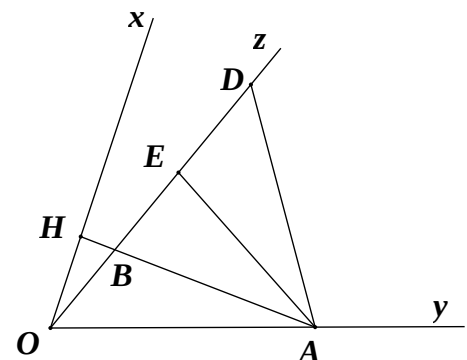
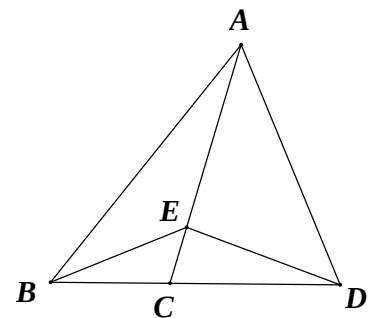
$$\widehat{ADE} = 45^\circ, \widehat{EDB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 75^\circ.$$

12.3. Đặt $\widehat{xOy} = \alpha \Rightarrow \widehat{yOz} = 2\alpha$

Lấy điểm E trên Bz sao cho $OE = OA$, $\triangle AEO$ cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{AEB} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2}$$

$$\widehat{AEB} = 90^\circ - \alpha; \widehat{ABE} = \widehat{OBH} = 90^\circ - \alpha$$



$$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ABE}$$

$$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABO}; OB = ED; AE = AB$$

$$\Delta AOB = \Delta ADE (\text{c.g.c}) \Rightarrow AO = AD$$

$$\Rightarrow \Delta AOD \text{ cân.}$$

$$12.4. \Delta ABC \text{ có } \hat{A} = 50^\circ; \hat{B} = 70^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ.$$

CM là tia phân giác của $\hat{C}$ nên $\widehat{MCA} = \widehat{MCB} = 30^\circ$.

$$\text{Có } \widehat{NBC} = \hat{B} - \widehat{MBN} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ.$$

$$\text{Ta có } \widehat{MNB} = \widehat{MCB} + \widehat{NBC} = 30^\circ + 10^\circ = 40^\circ \text{ (góc ngoài của } \Delta NBC)$$

$$\Rightarrow \Delta MNB \text{ cân tại M}$$

$$\text{Từ M vẽ } MH \perp BC \text{ ta có } MH = \frac{1}{2} MC (1)$$

$$\text{Từ M vẽ } MK \perp BN \Rightarrow BK = \frac{1}{2} BN (2)$$

Xét ΔMKB và ΔBHM có $\widehat{BHM} = \widehat{BKM} (= 90^\circ)$, BM là cạnh chung

$$\widehat{MBK} = \widehat{BMH} = 40^\circ \Rightarrow \Delta BHM \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow MH = KB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow BN = MC \text{ (điều phải chứng minh).}$$

12.5.

Kẻ $BH \perp AD; CI \perp AD$.

$$\Delta ABK \text{ có } \widehat{AKB} = \widehat{KBD} + \widehat{KDB} = 30^\circ + 45^\circ \Rightarrow \widehat{AKB} = 75^\circ.$$

$$\Delta ABK \text{ có } \widehat{BAK} = \widehat{AKB} (= 75^\circ), BH \perp AK \text{ nên } AH = KH.$$

$$BH \text{ là tia phân giác của } \widehat{ABK} \text{ nên } \widehat{ABK} = \frac{1}{2} \widehat{ABK} = 15^\circ.$$

$$\Delta CDE \text{ có } \widehat{ECD} = 90^\circ; \widehat{CDE} = 45^\circ \text{ nên } \Delta CDE \text{ vuông cân tại}$$

$$\text{Kẻ } CI \perp ED \text{ suy ra } EI = ID = CI \text{ suy ra } ED = 2.CI.$$

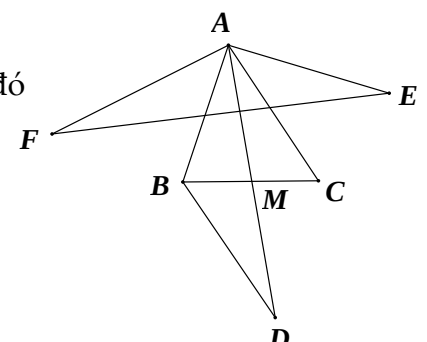
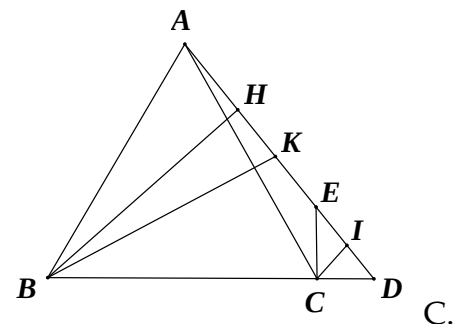
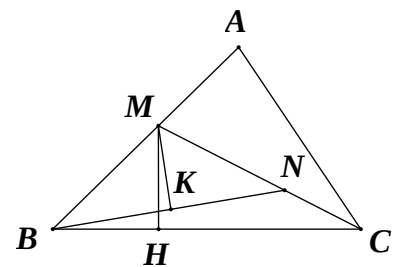
$$\Delta AHB \text{ và } \Delta CIA \text{ có } \widehat{AHB} = \widehat{CIA} (= 90^\circ); AB = AC; \widehat{ABH} = \widehat{CAI} (= 15^\circ)$$

$$\text{Nên } \Delta AHB = \Delta CIA \text{ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra } AH = CI. \text{ Từ đó}$$

$$\text{suy ra}$$

$$AK = ED.$$

12.6.



Trường hợp $\widehat{BAC} = 90^\circ$, kết quả là hiển nhiên.

Ta chứng minh cho trường hợp $\widehat{BAC} < 90^\circ$

Trường hợp $\widehat{BAC} > 90^\circ$, chứng minh hoàn toàn tương tự.

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MA = MD$.

Nối B với D. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AD tại G.

Xét hai tam giác AMC VÀ DMB có $AM = MD$;

$$\widehat{AMC} = \widehat{DMB}; BM = MC$$

Nên $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c), suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{BDM}$ (1) và $BD = AC$.

Ta có $AE \perp AB; BG \perp AB$ nên $BG \parallel AE$ suy ra $\widehat{EAM} = \widehat{BGA}$ (so le trong)(2)

$$\text{Mà } \widehat{BGA} = \widehat{GBD} + \widehat{BDM} \quad \text{và} \quad \widehat{EAM} = \widehat{EAC} + \widehat{CAM} \quad (3)$$

Nên từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{EAC} = \widehat{GBD}$

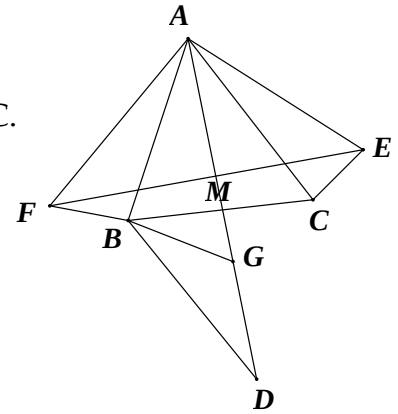
Ta có $AE = AB$; $\widehat{EAF} = \widehat{ABD} = 180^0 - \widehat{BAC}$; $BD = AF (= AC)$.

Do đó $\triangle EAF = \triangle ABD$ (c.g.c) suy ra $EF = AD$.

Mà $AD = 2.AM$ (cách vẽ) nên $EF = 2.AM$.

Do $\triangle EAF = \triangle ABD$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{BAD}$ mà $\widehat{BAD} + \widehat{DAE} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEF} + \widehat{DAE} = 90^\circ$

Suy ra $AM \perp EF$ (điều phải chứng minh).



12.7.

Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia AD ở F. Do $AB = AC$.

$$\widehat{ABE} = \widehat{CAF} \text{ (cùng phụ với góc AEB)}$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{ACF} = 90^\circ \text{ nên}$$

$$\Delta BAE = \Delta ACF \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AE = CF \Rightarrow CE = CF.$$

Suy ra $\Delta \text{CED} = \Delta \text{CFD}$ (c.g.c)

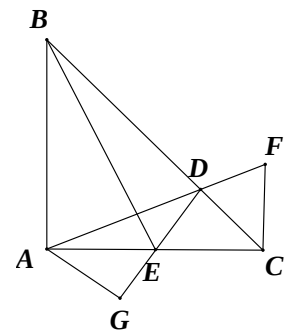
Trên tia DE lấy điểm G sao cho $EG = ED$.

$\triangle AEG$ và $\triangle CED$ có $AE = CE$.

$$\widehat{AEG} = \widehat{CED}, EG = ED \text{ suy ra } \triangle AEG = \triangle CED (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{AGE}$$

và $AG \parallel DC$, do đó $\widehat{DAG} = \widehat{FDC}$ (đồng vị) suy ra $\widehat{DAG} = \widehat{DGA}$.

Vậy $\triangle DAG$ cân tại D, hay $DA = DG = 2DE$ (điều phải chứng minh).



12.8.

Gọi E là giao điểm của XA với YZ. Trên nửa mặt phẳng bờ XC không chứa A lấy điểm K sao cho $\Delta XCK = \Delta XBA$.

Ta có $XK = XA$ và $\widehat{KXC} = \widehat{AXB}$ suy ra $\widehat{AXK} = \widehat{BXC} = 120^\circ$

Do đó $\widehat{XAK} = 30^\circ$. Mặt khác, ta có $CK = AZ$ (vì $\Delta XCK = \Delta XBA$ và ΔABZ đều); $CA = AY$ (vì ΔYCA đều);

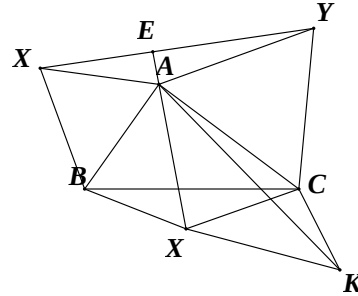
$$\begin{aligned}\widehat{ACK} &= \widehat{ACB} + \widehat{BCX} + \widehat{XCK} = \widehat{C} + 30^\circ + \widehat{XBA} \\ &= \widehat{C} + 30^\circ + 30^\circ + \widehat{B} = 60^\circ + (180^\circ - \widehat{A}) \\ &= 240^\circ - (360^\circ - \widehat{YAC} - \widehat{ZAB} - \widehat{YAZ}) = \widehat{YAZ};\end{aligned}$$

Suy ra $\Delta CAK = \Delta AYZ$ (c.g.c)

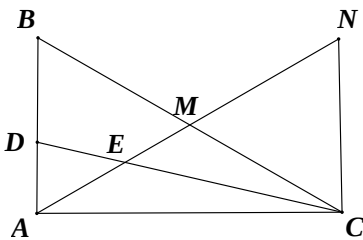
Do đó $\widehat{CAK} = \widehat{AYZ} = \widehat{EYZ}$

Ta có: $\widehat{EAY} + \widehat{CAK} = 180^\circ - (\widehat{YAC} + \widehat{XAK}) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$

ΔEAY có $\widehat{EAY} + \widehat{EYA} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AEY} = 90^\circ$. Vậy $XA \perp YZ$



12.9.



Trên tia đối của tia MA lấy A' sao cho $MA' = MA$.

Khi đó $\Delta MCA' = \Delta MBA$ (c.g.c),

Suy ra $CA' = AB$ (1)

$$\widehat{MCA'} = \widehat{ACB} + \widehat{BCA'} = 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ.$$

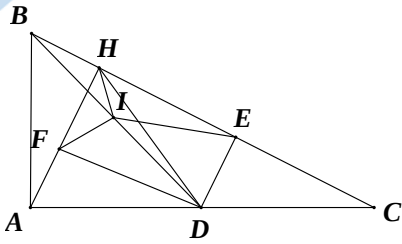
Từ $\Delta ABC = \Delta CA'A$ (c.g.c) $\Rightarrow AA' = BC$; $MC = MA = \frac{1}{2} BC$, $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 36^\circ$.

Mặt khác, CD là phân giác $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ECA} = 18^\circ$, $\widehat{A'EC}$ là góc ngoài của tam giác AEC nên $\widehat{A'EC} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ = \widehat{EA'C}$,

Suy ra tam giác ECA' cân tại C, nên $CE = CA'$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $CE = AB$.

12.10.



Kẻ $DE \perp BC$ tại E, $DF \perp AH$ tại F.

Xét các tam giác vuông ABD và EBD có $IB = ID$ nên $AI = EI = \frac{BD}{2}$.

Ta có $\triangle ABH = \triangle DAF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = DF$ (1)

$\triangle HED = \triangle DFH$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow HE = DF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH = HE$. Từ đó $\triangle IHA = \triangle IHE$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IHE} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$. Ta có $\widehat{BIH} + \widehat{IHB} = \widehat{IHE} = 45^\circ$

Mà $\widehat{IBH} = \widehat{FDI}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{ADF}$. Lại có $\widehat{ADF} = \widehat{ACB}$ (đồng vị)

Suy ra $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$ điều phải chứng minh).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 13. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

13.1.

a) $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có $MA = ME$,

$$\widehat{AMC} = \widehat{EMC}; MB = MC$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AC = EB; \widehat{CAM} = \widehat{MEB}$$

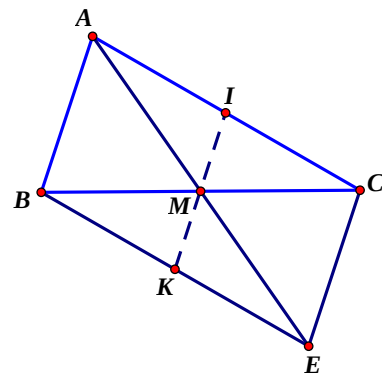
$$\Rightarrow AC \parallel BD$$

b) $\triangle AIM$ và $\triangle EKM$ có $AM = EM$;

$$\widehat{CAM} = \widehat{MEB}; AI = EK \Rightarrow \triangle AIM = \triangle EKM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK} \text{ mà } \widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow I, M, K \text{ thẳng hàng}$$



13.2

a) $\triangle BCE$ và $\triangle CBD$ có $\widehat{BEC} = \widehat{CDB} = 90^\circ$; $\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$; BC là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle BCE = \triangle CBD$ (cạnh huyền , góc nhọn)

b) $\triangle BCE = \triangle CBD \Rightarrow BE = CD$

$\triangle BKE$ và $\triangle CKD$ có :

$\widehat{BEK} = \widehat{CDK} = 90^\circ$; $BE = CD$; $\widehat{BKE} = \widehat{CKD}$

$\Rightarrow \triangle BKE = \triangle CKD$ (góc nhọn , cạnh góc vuông)

c) $\triangle BKE = \triangle CKD \Rightarrow KE = KD$.

$\triangle AEK$ và $\triangle ADK$ có $\widehat{AEK} = \widehat{ADK} = 90^\circ$;

AI chung; $KE = KD \Rightarrow \triangle AED = \triangle ADK \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{DAK}$

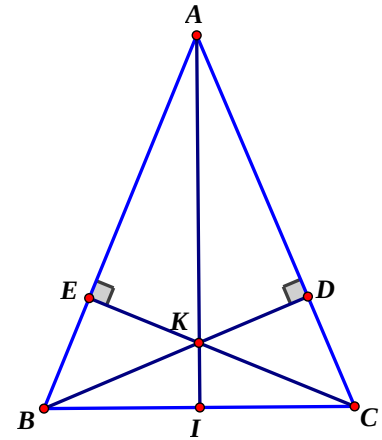
Hay AK là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (1)

d) $\triangle ABI$ và $\triangle ACI$ có $AB = AC$ là cạnh chung ; $BI = CD$

$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI}$ hay AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A; K; I$ thẳng hàng.



13.3.

a) $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có $AB = AE$; $\widehat{BAD} = \widehat{EAD}$; AD là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = ED$; $\widehat{ABD} = \widehat{AED}$

Mặt khác $\widehat{ABD} + \widehat{DBF} = 180^\circ$; $\widehat{AED} + \widehat{DEC} = 180^\circ$ nên $\widehat{DBF} = \widehat{DEC}$

Ta có $AF = AC$; $AB = AE \Rightarrow BF = EC$.

$\triangle DBF$ và có $DB = DE$

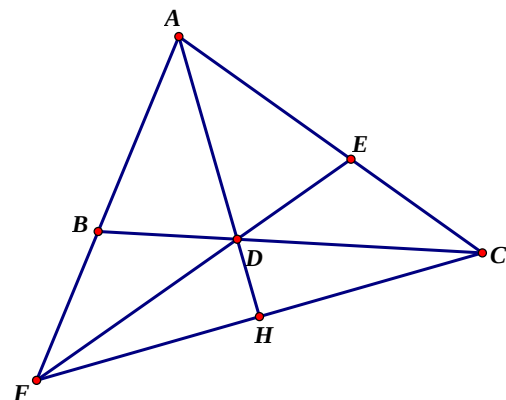
$\Rightarrow \triangle BDF = \triangle EDC$ (c.g.c)

b) $\triangle BDF = \triangle EDC$

$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{EDC}$ mà $\widehat{BDF} + \widehat{FDC} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EDC} + \widehat{FDC} = 180^\circ$

$\Rightarrow F, D, E$ thẳng hàng .



c) Gọi H là giao điểm của AD và CF .

$\triangle AHE$ và $\triangle AHC$ có $AF = AC$; $\widehat{FAH} = \widehat{CAH}$; AH chung

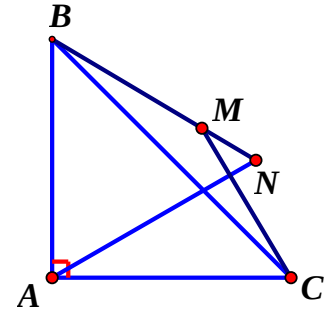
$\triangle AHE = \triangle AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AHC}$ mà $\widehat{AHF} + \widehat{AHC} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

Vậy $AH \perp FC$ hay $AD \perp FC$

13.4. Gọi ý : Tính góc $\widehat{ABN} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ABC} + \widehat{CBM} = 60^\circ$ mà $BN; BM$ thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB nên tia BM trùng với tia BN Vậy B, M, N thẳng hàng.



13.5.

a) Ta có $\triangle DMA$ vuông tại M nên $\widehat{MDA} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAH} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (vì $\widehat{BAD} = 90^\circ$) $\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{BAH}$.

Xét $\triangle DMA$ và $\triangle AHB$ có $\widehat{DMA} = \widehat{AHB} = 90^\circ$;

$\widehat{MDA} = \widehat{BAH}$; $AD = AB$ nên $\triangle DMA = \triangle AHB$

(cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow DM = AH$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có :

$\triangle ANE = \triangle CHA$, suy ra $AH = EN$

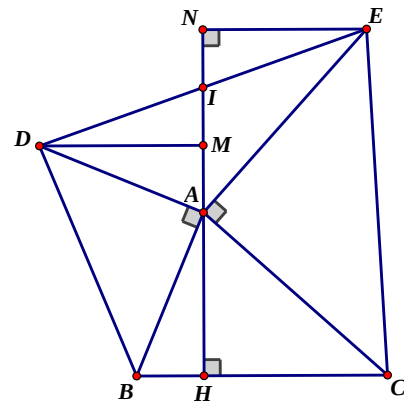
Xét $\triangle MID$ và $\triangle NIE$ có $\widehat{IMD} = \widehat{INE} (= 90^\circ)$,

$IM = IN, DM = DN (= AH)$, suy ra

$\triangle MID = \triangle NIE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{NIE}$

Mặt khác $\widehat{MID} + \widehat{NID} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{NIE} + \widehat{NID} = 180^\circ$

Vậy D, I, E thẳng hàng.

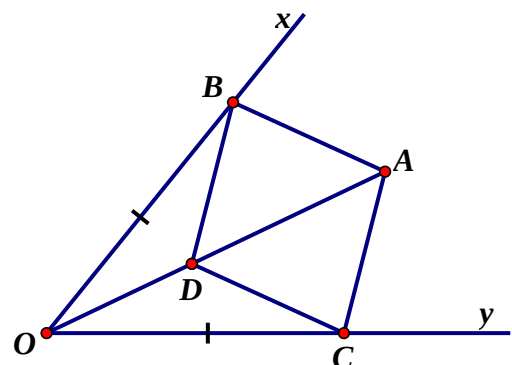


13.6. $\triangle BOD$ và $\triangle COD$ có $OB = OC$ (gt); OD cạnh chung.

$BD = CD$ (D là giao điểm của hai đường tròn tâm B và tâm C cùng bán kính). Vậy $\triangle BOD = \triangle COD$ (c.c.c), suy ra $\widehat{BOD} = \widehat{COD}$.

Điểm D nằm trong góc $\widehat{xOy}$ nên tia OD nằm giữa hai tia Ox và Oy .

Do đó OD là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.



Chứng minh tương tự ta được OA là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Góc xOy chỉ có một tia phân giác nên hai tia OD và OA trùng nhau.

Vậy ba điểm O, D, A thẳng hàng.

13.7. Kẻ $MK \perp AB; MH \perp AC$;

Ta có M là trung điểm của CE nên $\triangle BME = \triangle BMC (c.c.c)$

$$\Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{CBM} = 45^\circ$$

Mặt khác $\widehat{EBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KBE} + \widehat{ABC} = 90^\circ$.

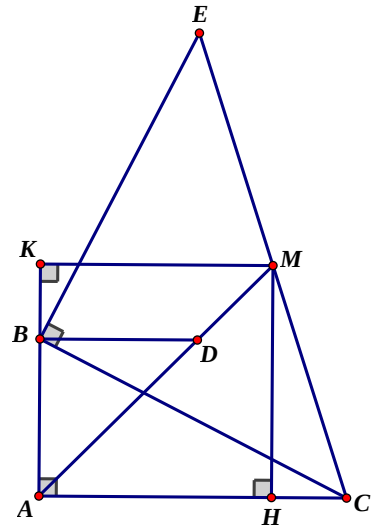
Mà $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{KBE} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{KBM} = \widehat{HCM}$.

Lại có $BM = MC \Rightarrow \triangle KBM = \triangle HCM$

(cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow MK = MH$

$\Rightarrow \triangle AKM = \triangle AHM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{HAM} \Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc A .



Mặt khác, $\triangle BAD$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{BAD} = 45^\circ \Rightarrow AD$ là tia phân giác của góc A

$\Rightarrow A; D; M$ thẳng hàng (vì $A; D; M$ cùng thuộc tia phân giác của góc A)

13.8. Theo đề bài $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2AB$ nên

$$\widehat{ABC} = 60^\circ; \widehat{ACB} = 30^\circ.$$

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{3} \widehat{ABC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{DBC} = 40^\circ$$

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{3} \widehat{ABC} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{DBC} = 20^\circ$$

$\triangle CIF$ và $\triangle CIG$ có $IF = IG (gt)$

$$\widehat{CIF} = \widehat{CIG} = 90^\circ; IC \text{ cạnh chung}$$

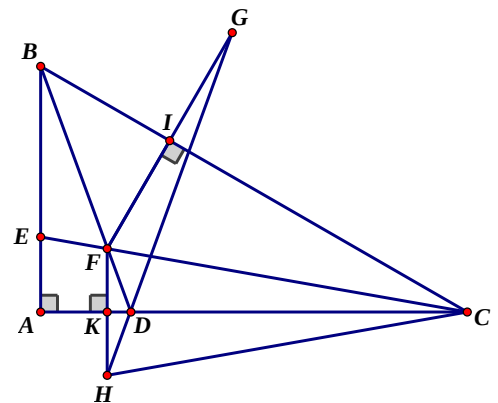
$$\Rightarrow \triangle CIF = \triangle CIG (c.g.c)$$

$$\Rightarrow CG = CF \text{ và } \widehat{KCH} = \widehat{KCF} = 10^\circ$$

Từ đó suy ra $CG = CH$ và $\widehat{GCF} + \widehat{FCH} = 2\widehat{ACB} = 60^\circ$, do đó $\widehat{CHG} = 60^\circ$ (1)

$\triangle DKF = \triangle DKH$ vì có $KF = KH$ (giả thiết), $\widehat{DKF} = \widehat{DKH} = 90^\circ$, KD cạnh chung, do đó $DF = DH$, vì thế $\triangle CDF = \triangle CDH (c.c.c)$

Suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{CFD}$



$\triangle ABD$ vuông tại A có $\widehat{ABD} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{DB} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{CDF} = 110^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CFD} = 180^\circ - \widehat{CDF} - \widehat{FCD} = 180^\circ - 110^\circ - 10^\circ = 60^\circ$ vì thế $\widehat{CHD} = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CHD} = 60^\circ = \widehat{CHG}$ mà hai tia HD, HG cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng HC nên HD trùng với HG , nghĩa là ba điểm H, D, G thẳng hàng.

13.9. Gọi F là trung điểm của AC

$\Rightarrow AH = \frac{AC}{2} \Rightarrow \triangle AHF$ đều

$\Rightarrow HF \parallel AD \Rightarrow M, H, F$ thẳng hàng

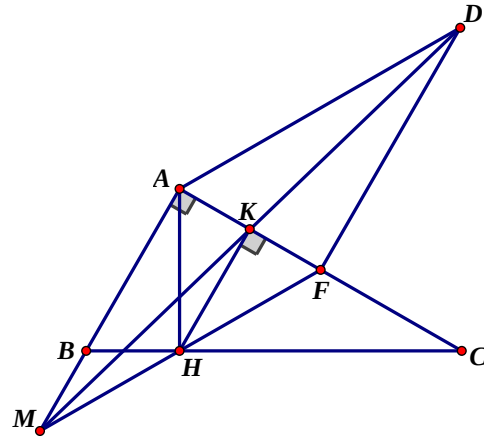
Mà $AK = KF$; $\triangle AMF = \triangle FDA$ (g.c.g)

$\Rightarrow AM = DF$

$\Rightarrow \triangle AMK = \triangle FDK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{DKF}$

$\Rightarrow M, K, D$ thẳng hàng.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 14. TÍNH SỐ ĐO GÓC

14.1. Tìm cách giải: Đây là bài toán khó bởi chúng ta khó nhận ra mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận để tìm cách giải quyết bài toán. Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{DBC} = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Từ đó chúng ta có thể vẽ để tạo ra tam giác đều theo các hướng sau:

- **Cách 1.** Dựng tam giác đều BCM ($A; M$ cùng phía so với BC).

$\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có $AB = AC$; $MB = MC$; MA là cạnh chung.

Suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c)

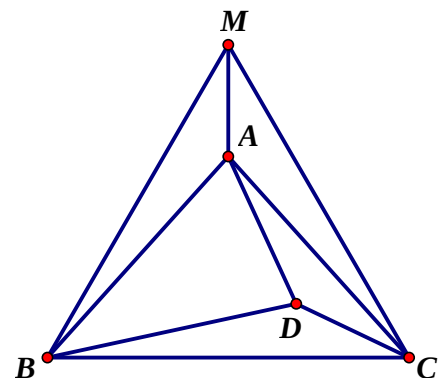
$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 30^\circ$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBC$ có $BM = BC$,

$\widehat{AMB} = \widehat{DCB} = 30^\circ$; $\widehat{ABM} = \widehat{DBC} = 10^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBC$ (g.c.g) $\Rightarrow AB = DB$

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B



$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

- **Cách 2.** Dựng tam giác đều ABE (C và E cùng phía so với AB)

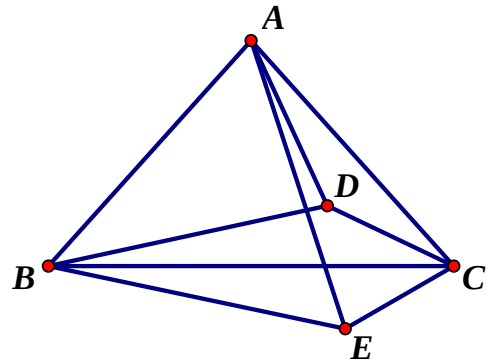
Ta có $\triangle ACE$ cân tại A , mà

$$\widehat{CAE} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCE} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ \Rightarrow \triangle BDC = \triangle BEC \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BD = BE = BA \Rightarrow \triangle BAD \text{ cân tại } B$$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



Cách 3: Dựng tam giác đều ACK (B ; K cùng phía so với AC)

Ta có $\triangle ABK$ cân tại K ,

$$\text{mà } \widehat{BAK} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ABK} = 80^\circ.$$

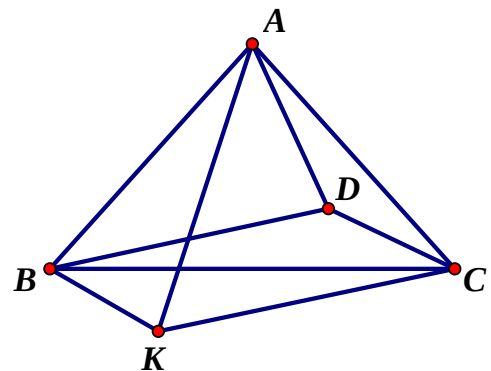
$$\Rightarrow \widehat{CBK} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BDC = \triangle CKB \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BD = CK \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } B$$

$$\text{Mà } \widehat{ABD} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



Cách 4:

Kẻ tia phân giác của góc $\widehat{ADB}$ cắt CD kéo dài tại M

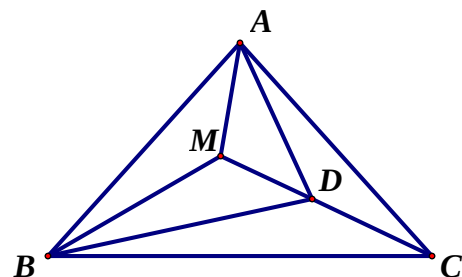
$$\text{Ta có } \widehat{MBC} = \widehat{MCB} = 30^\circ \Rightarrow \triangle BMC \text{ cân tại } M$$

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = 120^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \triangle AMB = \triangle AMC = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AB = DB \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } B,$$



Mà $\widehat{ABD} = 40^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

14.2. Nhận xét . Để tính được góc ADB ta cần chứng minh tam giác ABD cân tại B . Ta có $150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Do vậy trong bài toán này ta phải tìm cách vẽ kẻ để tạo ra tam giác đều từ đó tìm cách tính góc ADB . Có thể vẽ đường phụ theo các cách sau:

Cách 1: Dựng Δ đều ADF (B, F cùng phía so với AC)

Ta có : ΔADC cân tại D mà $\widehat{ADC} = 150^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAF} = 90^\circ - (15^\circ + 60^\circ) = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta AFB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AFB} = 150^\circ$$

$$\text{Và } \widehat{ABF} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{DFB} = 360^\circ - (60^\circ + 150^\circ) = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta AFB = \Delta DFB (c.g.c) \Rightarrow AB = DB \Rightarrow \Delta ABD \text{ cân tại } B \text{ mà}$$

$$\widehat{ABD} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Cách 2: Dựng tam giác đều ACE (E, B khác phía so với AC)

ΔADE và ΔCDE có $AD = CD, AE = CE$,

DE là cạnh chung, suy ra $\Delta ADE = \Delta CDE (c.c.c)$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CDE} = 75^\circ.$$

ΔADE và ΔADB có $AB = AE$,

$\widehat{BAD} = \widehat{EAD} (= 75^\circ)$, AD là cạnh chung,

Suy $\Delta ADE = \Delta ADB (c.g.c)$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADB} = 75^\circ$$

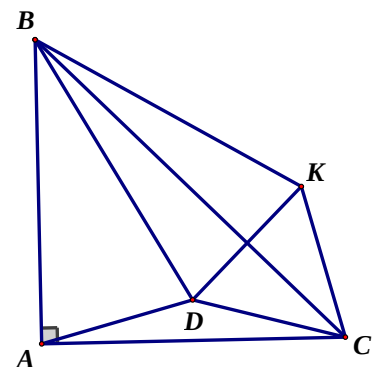
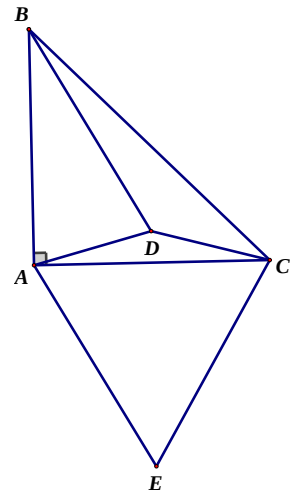
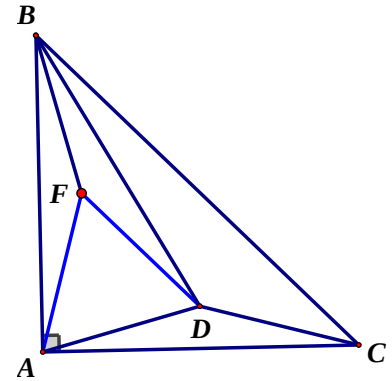
Vậy $\widehat{ADB} = 75^\circ$

Cách 3 : Dựng tam giác đều CDK (K, B cùng phía so với AC) suy ra $\widehat{DCB} = \widehat{KCB} = 30^\circ$

ΔDCB và ΔKCB có $CD = CK$,

$\widehat{DCB} = \widehat{KCB} = 30^\circ$; BC là cạnh chung,

Suy ra $\Delta DCB = \Delta KCB (c.g.c)$



$$\Rightarrow DB = KB(*)$$

$\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ có $DK = DC$,

$$\widehat{ADK} = \widehat{ADC} = 150^\circ, AD \text{ cạnh chung}$$

$$\text{Suy ra } \triangle ADC = \triangle ADK (c.g.c) \Rightarrow AC = AK; AC = AB \Rightarrow AK = AB \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{CAD} = \widehat{KAD} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{KAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \triangle ABK \text{ là tam giác đều } \Rightarrow BK = BA(**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) } \Rightarrow DB = BA \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } B$$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BDC} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{ADB} = 75^\circ.$$

Cách 4: Dựng tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = 15^\circ$ (Bx và C nằm cùng phía so với AB).

Tia Bx cắt tia CD tại I

$$\text{Ta có } \triangle BIC \text{ cân tại } I \left(\widehat{IBC} = \widehat{ICB} = 30^\circ \right)$$

$$\Rightarrow BI = CI \Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI (c.c.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI} = 45^\circ \text{ do } \triangle BIC \text{ cân tại } I$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 150^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

Mặt khác, $\triangle ACI$ có :

$$\widehat{ACI} = 15^\circ; \widehat{CAI} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 180^\circ - (15^\circ + 45^\circ) = 120^\circ$$

$$\text{Từ đó ta có : } \widehat{AIB} = 360^\circ - (120^\circ + 120^\circ) = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{AIB} = \widehat{DIB} = 120^\circ \quad (*)$$

Xét tam giác AID có $\widehat{AID} = \widehat{ACD} + \widehat{CAD} = 30^\circ$ (góc ngoài tam giác)

$$\widehat{DAI} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow \triangle AID \text{ cân tại } I \Rightarrow IA = ID \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) } \Rightarrow \triangle AIB = \triangle DIB (c.g.c) \Rightarrow AB = DB \text{ và } \widehat{ABI} = \widehat{DBI} = 15^\circ$$

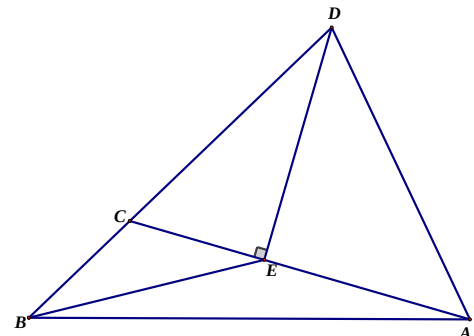
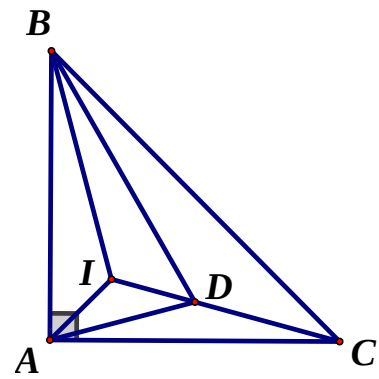
$$\Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } B$$

$$\Rightarrow \widehat{ABI} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

14.3.

$$\text{a) Ta có } \widehat{ACD} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$$

Từ đó trong tam giác ECD vuông tại E , có $\widehat{CDE} = 30^\circ$ nên $CD = 2CE$ (theo *ví dụ 8, chuyên đề 9*), ta lại có $CD = 2BC$ nên $CE = BC$, suy ra $\widehat{CBE} = 30^\circ = \widehat{CDE}$.



$\triangle EBD$ cân tại E suy ra $EB = ED$

b) ta có $\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{CBE} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ = \widehat{EAB} \Rightarrow \triangle EAB$ cân tại E
ta lại có $EA = EB = ED \Rightarrow \triangle EAD$ vuông cân tại E $\Rightarrow \widehat{EDA} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDB} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

14.4.

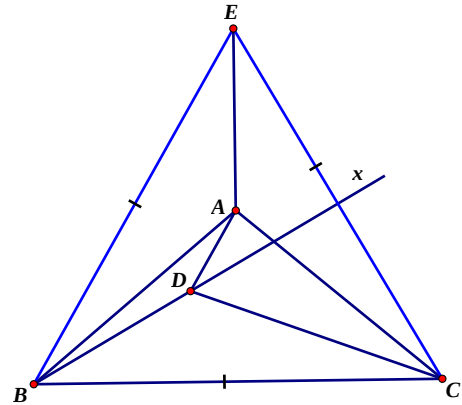
a) Dựng tam giác đều BEC sao cho E và A nằm cùng trên nửa mặt phẳng bờ BC.

Ta có $BA = CA, BE = CE, AE$ 1 cạnh chung $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACE$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 30^\circ$

$\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$ nên suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{ECA} = \widehat{ACD} = \widehat{DCB} = 20^\circ$

Suy ra $\triangle DBC = \triangle AEC$ (c.g.c) $\Rightarrow CD = CA$



b) Ta có $\widehat{BDA} = 180^\circ - (\widehat{ABD} + \widehat{BAD})$ (1)

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DCB} = 10^\circ$ (2)

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} - \widehat{DAC} = \widehat{BAC} - \left(\frac{180^\circ - \widehat{ACD}}{2} \right) = 100^\circ - \left(\frac{180^\circ - 20^\circ}{2} \right) = 20^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$\widehat{BDA} = 180^\circ - (\widehat{ABD} + \widehat{BAD}) = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ$$

***Mở rộng bài toán :** Có thể thay kết luận bằng yêu cầu : Tính số đo các góc $ADC; BAD$.

14.5.

a) Ta có $\widehat{FBA} = 40^\circ = \widehat{BAC} \Rightarrow \triangle BFA$ cân tại F $\Rightarrow FA = FB$ (1)

AH là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAE} = 20^\circ$

Dựng tam giác đều ABD sao cho D

nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC

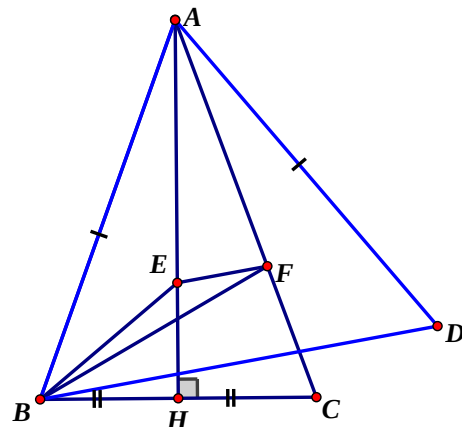
không chứa điểm B thì $DA = DB$,

$$\widehat{FAD} = 20^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ADF = \triangle BDF$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{BDF} = 30^\circ.$$

Từ đó dễ dàng suy ra $\triangle FAD = \triangle EAB$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AF$



b) Ta có $\widehat{DFA} = 180^\circ - \widehat{ADF} - \widehat{DAF} = 180^\circ - 30^\circ - 20^\circ = 130^\circ$

Ta có $\widehat{DFA} = \widehat{DFB} = 130^\circ$; $\widehat{EFA} = 80^\circ$ nên suy ra $\widehat{EFB} = 20^\circ$, $\widehat{EBF} = 10^\circ$

Trong $\triangle BFE$ thì $\widehat{BEF} = 180^\circ - (\widehat{EBF} + \widehat{EFB}) = 150^\circ$

14.6.

- **Cách 1.** Vẽ tam giác đều ACF sao cho F nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C

Gọi giao điểm của CF và AB là K

Ta có $\widehat{BCK} = 20^\circ$; $\widehat{ECK} = 40^\circ$;

$\widehat{BKC} = 180^\circ - (\widehat{CBK} + \widehat{BCK}) = 80^\circ$

$\Rightarrow \triangle CBK$ cân tại $C \Rightarrow CK = BC$ (1)

$\widehat{BDC} = 180^\circ - (\widehat{CBD} + \widehat{BCD}) = 50^\circ$

$\Rightarrow \triangle CBD$ cân tại $C \Rightarrow CD = BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow CD = CK$

$\Rightarrow \triangle KCD$ cân tại C và $\widehat{DCK} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle KCD$ là tam giác đều $\Rightarrow CK = DK$ (3)

$\triangle CKE$ có $\widehat{KCE} = \widehat{KEC} = 40^\circ$ nên $\triangle CKE$ cân tại $K \Rightarrow CK = EK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $EK = DK \Rightarrow \triangle EKD$ cân tại K và có

$\widehat{EKD} = 180^\circ - (\widehat{CKD} + \widehat{BKC}) = 40^\circ$ nên $\widehat{KED} = 70^\circ$ mà $\widehat{BEC} = 40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CED} = 30^\circ$

- **Cách 2:** Vẽ $EF \parallel BC$ (F thuộc AC). Gọi P là giao điểm của BF và CE , do $\widehat{BCE} = 60^\circ$ nên $\triangle BPC$ đều $\Rightarrow CP = CB$ (1)

Do $\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 50^\circ$ nên $\triangle BCD$ cân tại

C , dẫn đến $CD = CB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DCP$ cân tại C nên $\widehat{CPD} = 80^\circ$; $\widehat{DPF} = 40^\circ$.

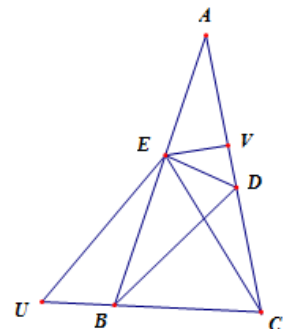
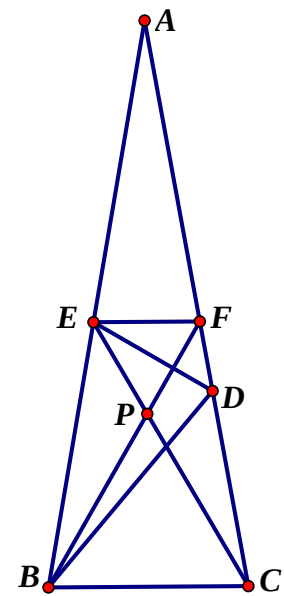
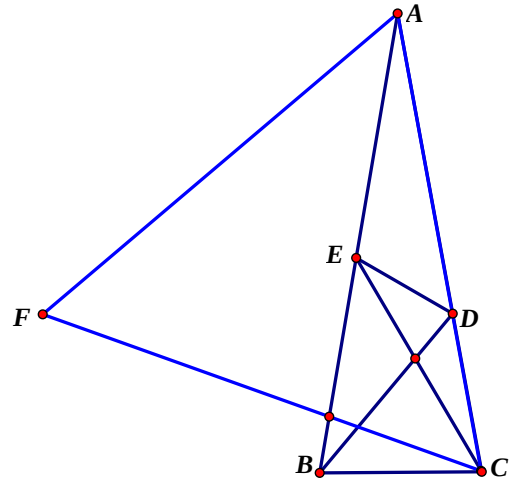
Mà $\widehat{DFP} = 40^\circ$ nên

$\triangle DPF$ cân $DP = DF$,

Từ đó $\triangle DPF = \triangle DFE$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{PED} = \widehat{FED} = 30^\circ$. Hay $\widehat{CED} = 30^\circ$

- **Cách 3:** trên tia CA ; CB lấy V và U sao cho $CV = CU = CE$.



Ta có : $CE = CU$ và $\widehat{BCE} = 60^\circ$ nên $\triangle CEU$ đều, do đó $EU = EC$, $\widehat{CEU} = 60^\circ$. Vì $\widehat{CEB} = 40^\circ$ nên $\widehat{BEU} = 20^\circ$. Lại có $\triangle ACE$ cân nên $AE = CE$ do đó $AE = EU$. Có $\triangle AEU = \triangle EUB$ ($AE = EU$), $\widehat{EAV} = \widehat{UEB} = 20^\circ$, $AV = AC - CV = AB - EC = AC - AE = EB$ nên $EV = BU$ và $\widehat{AVE} = \widehat{EBU} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Mặt khác, $BU = CU - BC = CV - CD = DV$ nên $EV = DV$. Do đó $\triangle EVD$ cân tại V, suy ra $\widehat{DEV} = \frac{1}{2} \widehat{AVE} = 50^\circ$.

Ta có: $\triangle CVE$ cân tại C có $\widehat{ECV} = 20^\circ$, suy ra $\widehat{CEV} = \widehat{CVE} = 80^\circ$. Từ đó:
 $\widehat{CED} = \widehat{CEV} - \widehat{DEV} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$.

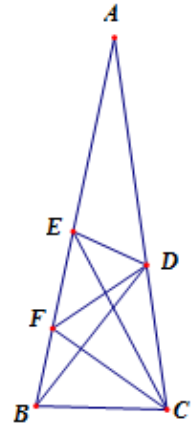
-Cách 4: Lấy F trên AB sao cho $\widehat{DCF} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{FCB} = 20^\circ \Rightarrow \triangle BCF$ cân ($\widehat{CFB} = \widehat{CBF} = 80^\circ$),

Nên $CF = CB$. Ta có $\triangle BCD$ cân ($\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 50^\circ$) suy ra $CB = CD$

Từ đó $CF = CD$ mà $\widehat{DCF} = 60^\circ$ nên $\triangle CDF$ đều, do đó $\widehat{FCE} = 40^\circ = \widehat{FEC}$ nên $FE = FC$, suy ra $FE = FD$.

Vậy $\triangle FED$ cân tại F. Vì $\widehat{EFD} = 40^\circ$, suy ra $\widehat{FED} = 70^\circ$.

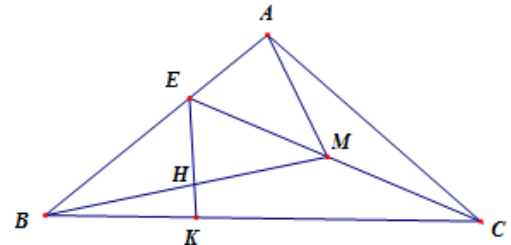
Ta có: $\widehat{CED} = \widehat{FED} - \widehat{FEC} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.



14.7. Giả sử CM cắt AB tại E, tia phân giác góc BEC cắt BM, BC lần lượt tại H và K. Ta có tam giác MAC cân tại M, nên $\widehat{AME} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$. Lại có $\widehat{CEA} = \widehat{CEK} = \widehat{BEK} = 60^\circ$, suy ra $\triangle CEA = \triangle CEK$ (g.c.g) $\Rightarrow \triangle MEA = \triangle MEK$ (c.g.c)

.Suy ra $\widehat{AME} = \widehat{KME} = 40^\circ$. Vì $\widehat{EBK} = 40^\circ$ nên $\triangle EKB = \triangle EKM$ (g.c.g) suy ra $\triangle EHB = \triangle EHM$ (c.g.c), do đó $\widehat{EHM} = 90^\circ$.

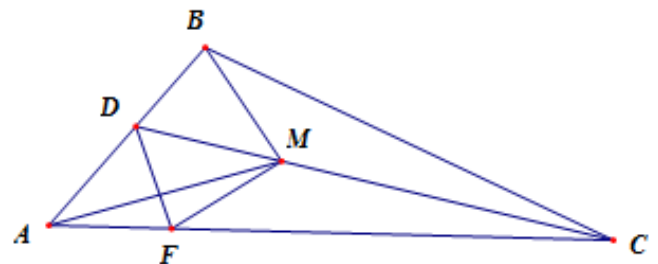
Xét tam giác HEM có $\widehat{EHM} = 90^\circ$, $\widehat{HEM} = 60^\circ$, nên $\widehat{EMH} = 30^\circ$. Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{BME} + \widehat{EMA} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$.



14.8. Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (55^\circ + 115^\circ) = 10^\circ$

Kẻ $DE \perp AM$ ($E \in AC$).

Ta có $\widehat{DAM} = \widehat{DMA} = 30^\circ \Rightarrow \triangle DAM$ cân tại D từ đó suy ra $\widehat{ADM} = 120^\circ$, và DE là đường phân giác của góc ADM nên $\widehat{EDM} = \widehat{BDM} = 60^\circ$. Do đó $\triangle EDC = \triangle BDC$ (g.c.g) $\Rightarrow BC = EC$.



Xét $\triangle BMC$ và $\triangle EMC$ có $BC = EC$; $\widehat{MCB} = \widehat{MCE} = 5^\circ$, MC chung.

Do đó: $\triangle BMC = \triangle EMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{EMC} = 180^\circ - \widehat{DME} = 180^\circ - \widehat{DAE} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ.$$

14.9. Vẽ tam giác AME đều với E và B cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AM .

Ta có $\widehat{BAE} = 80^\circ - 10^\circ - 60^\circ = 10^\circ$, $\triangle BAE$ và $\triangle CAM$ có

$$AB = AC, \widehat{BAE} = \widehat{MAC} (= 10^\circ), AE = AM$$

$$\text{suy ra } \triangle BAE = \triangle CAM \text{ (c.g.c)}, \widehat{ABE} = \widehat{ACM} = 10^\circ.$$

$$\text{Do đó } \widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{AEB} = 160^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BEM} = 360^\circ - 60^\circ - 160^\circ = 140^\circ$$

Xét tam giác BEM có $BE = AE = EM$

$$\text{nên } \widehat{EBM} = \widehat{EMB} = (180^\circ - 140^\circ) : 2 = 20^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{AMB} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ.$$

14.10. Dựng tam giác BCD đều với A, D cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BC . Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 50^\circ$, suy ra $\widehat{ABD} = 10^\circ$.

$$\text{Từ } \triangle ADB = \triangle ADC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 30^\circ.$$

Từ đó $\triangle BAD = \triangle BMC$ (g.c.g), suy ra $BA = BM$, dẫn đến tam giác BAM đều, suy ra $\widehat{AMB} = 60^\circ$ và $\widehat{AMC} = (180^\circ - 10^\circ - 30^\circ) - 60^\circ = 80^\circ$.

14.11. Vẽ tam giác đều MCE (N và E thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ CM).

$$\text{Ta có } \widehat{ACE} = \widehat{BCE} \text{ (cùng } + \widehat{MCA} = 60^\circ).$$

$\triangle ACE$ và $\triangle BCM$ có :

$$BC = AC, \widehat{ACE} = \widehat{BCM}, MC = EC$$

$$\Rightarrow \triangle ACE = \triangle BCM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CBM} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AE \parallel DM \text{ (cùng } \perp AC) \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{MDN} \text{ (so le trong)}$$

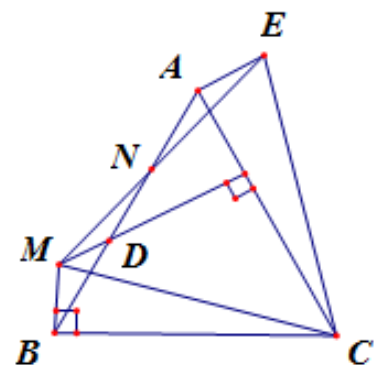
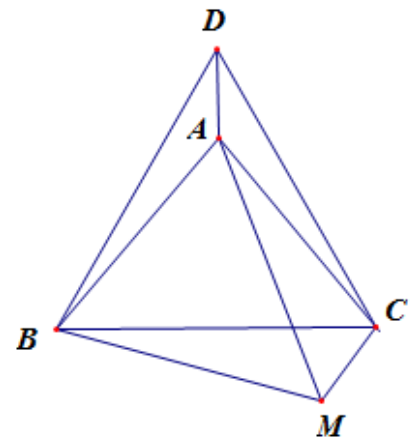
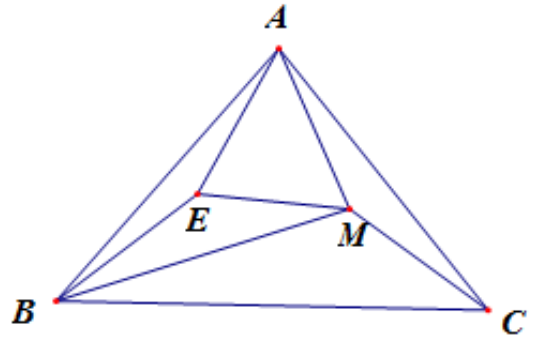
$$\text{Ta có } \widehat{MBD} = \widehat{MDB} = 30^\circ \Rightarrow \triangle MBD \text{ cân tại } M \Rightarrow MB = MD.$$

$$\text{Mà } MB = AE \text{ (vì } \triangle ACE = \triangle BCM) \Rightarrow MD = AE.$$

$$\triangle AEN \text{ và } \triangle DMN \text{ có : } MD = AE, \widehat{MDN} = \widehat{EAN} = 150^\circ \Rightarrow \triangle AEN = \triangle DMN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MN = NE$$

$\triangle MCN$ và $\triangle ECN$ có :

$$MC = EC, MN = EN, CN \text{ là cạnh chung} \Rightarrow \triangle MCN = \triangle ECN \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{NCE}.$$



$$\text{Mà } \widehat{MCN} + \widehat{NCE} = \widehat{MCE} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MCN} = \frac{1}{2} \widehat{MCE} = 30^\circ.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

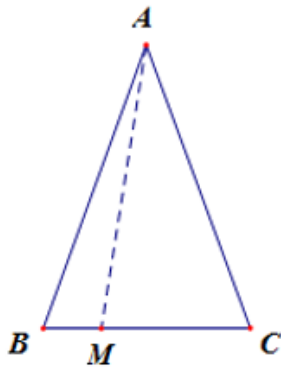
Chuyên đề 15. QUAN HỆ GIỮA CẠNH VÀ GÓC ĐỐI DIỆN TRONG TAM GIÁC

15.1.

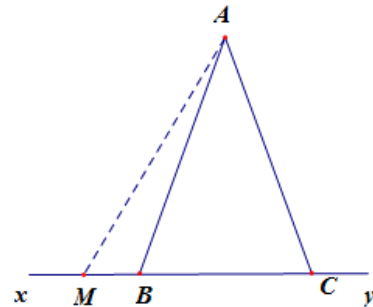
- Trường hợp $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$: Khi đó $AM = AB$.
- Trường hợp M nằm giữa B và C (h.15.6)

Ta có $\widehat{AMB} > \widehat{ACB}$ (tính chất góc ngoài tam giác). Do đó $\widehat{AMB} > \widehat{ABC}$ (vì $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$).

Xét $\triangle AMB$ có: $\widehat{ABM} > \widehat{AMB}$. Suy ra $AM < AB$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện).



Hình 15.6



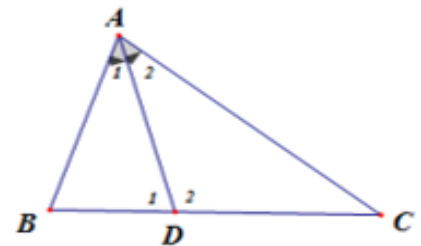
Hình 15.7

- Trường hợp $M \in$ tia Bx là tia đối của tia BC và $M \neq B$ (h.15.7)

Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} < 90^\circ$ (tính chất của tam giác cân). Do đó $\widehat{ABM} > 90^\circ$.

Xét $\triangle ABM$ có: $\widehat{ABM}$ là góc tù nên AM là cạnh lớn nhất. Vậy $AM > AB$.

Chứng minh tương tự, nếu $M \in$ tia Cy là tia đối của tia CB và $M \neq C$ thì $AM > AB$.



Hình 15.8

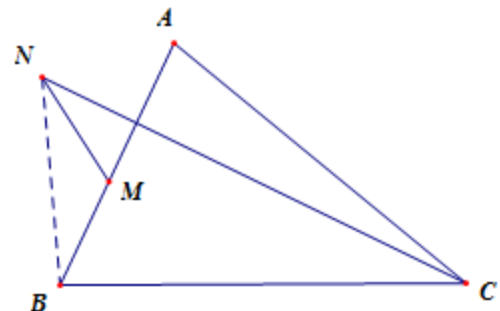
15.2.(h.15.8)

Góc ADB là góc nhọn nên góc ADC là góc tù.

$\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$; $\widehat{D_1} < \widehat{D_2}$ nên $\widehat{B} > \widehat{C}$.

$\triangle ABC$ có $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AB$ (định lý 1).

15.3. (h.15.9)



Hình 15.9

Ta có $MN \parallel AC \Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{ACN}$ (so le trong). Mặt khác, $\widehat{ACN} < \widehat{ACB}$ nên $\widehat{MNC} < \widehat{ACB}$ (1)

$\triangle ABC$ có: $AB < AC$ nên $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{MNC} < \widehat{ABC}$ (3)

Tam giác MNB cân $\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{MBN}$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{MNC} + \widehat{MNB} < \widehat{ABC} < \widehat{MBN}$.

Do đó $\widehat{BNC} < \widehat{NBC} \Rightarrow BC < NC$ (định lí 1).

15.4. (h.15.10)

Ta có $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 = 15^\circ$ (giả thiết) nên

$$\widehat{A}_2 = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ, \widehat{C}_2 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$

Giả sử OA và OB không vuông góc với nhau, tức là $\widehat{AOB} \neq 90^\circ$.

- Xét trường hợp $\widehat{AOB} < 90^\circ$

Ta có $\widehat{B}_2 = 180^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{A}_2) = 180^\circ - (\widehat{AOB} + 45^\circ) > 45^\circ$.

Vậy $\widehat{B}_2 > \widehat{A}_2 \Rightarrow OA > OB$ (định lí 1)

Mặt khác, $\triangle AOC$ cân nên $OA = OC$ suy ra $OC > OB \Rightarrow \widehat{B}_1 > \widehat{C}_2$ (định lí 1). Từ đó ta được $\widehat{B}_2 + \widehat{B}_1 > \widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 = 45^\circ + 30^\circ$ hay $\widehat{ABC} > 75^\circ$ (trái giả thiết).

- Xét trường hợp $\widehat{AOB} > 90^\circ$, chứng minh tương tự ta được $\widehat{ABC} < 75^\circ$ (trái giả thiết).
Vậy $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp OB$.

15.5. (h.15.11)

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , $\triangle BKC$ vuông tại K . Ta có:

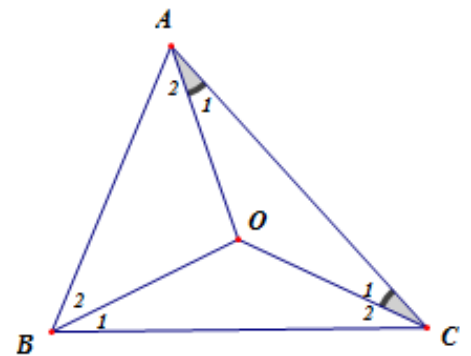
$$AH \leq AC; BK \leq BC \quad (1)$$

Mặt khác: $BC \leq AH; AC \leq BK$ (giả thiết) (2). Từ (1) và (2), suy ra $BC \leq AH \leq AC \leq BK \leq BC$.

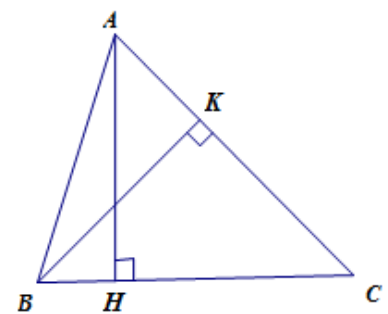
Do đó $BC = AH = AC = BK$. Vậy $\triangle ABC$ phải là tam giác vuông cân tại C . Suy ra $\widehat{C} = 90^\circ, \widehat{A} = \widehat{B} = 45^\circ$.

15.6. (H.15.12)

Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Vì $AE < AC$ nên điểm E nằm giữa A và C .



Hình 15.10



Hình 15.11

$$\triangle ABM = \triangle AEM (c.g.c) \Rightarrow MB = ME \text{ và } \widehat{M}_2 = \widehat{M}_1.$$

Xét $\triangle AME$ có $\widehat{MEC}$ là góc ngoài nên $\widehat{MEC} > \widehat{M}_1$ do đó $\widehat{MEC} > \widehat{M}_2; \widehat{M}_2 > \widehat{D}_1; \widehat{D}_1 > \widehat{ACD}; \widehat{ACD} > \widehat{ECM}$.

Xét $\triangle MEC$ có $\widehat{MEC} > \widehat{ECM} \Rightarrow MC > ME$ (định lí 1). Do đó $MC > MB$ (vì $MB = ME$).

15.7.(h.15.13)

$$\triangle ABE = \triangle ACF (g.c.g) \Rightarrow AE = AF \text{ và } BE = CF \quad (1)$$

$\triangle AEF$ cân $\Rightarrow \widehat{AEF} < 90^\circ$ nên $AB > AE$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AE$

$$\triangle ADE = \triangle AFE (c.g.c) \Rightarrow ED = EF.$$

$\triangle ADE$ cân $\Rightarrow \widehat{ADE}$ là góc nhọn $\Rightarrow \widehat{BDE}$ là góc tù.

Xét $\triangle BDE$ có $\widehat{BDE}$ là góc tù $\Rightarrow BE$ là cạnh lớn nhất.

Do đó $BE > DE \Rightarrow BE > EF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra EF có độ dài nhỏ nhất trong 3 đoạn thẳng BE, EF và FC .

15.8. (h.15.14)

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

$$\triangle AMN = \triangle DMB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{D} \text{ và } AN = BD$$

Ta có $\widehat{ANC} > \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ANC} > \widehat{C}$. Do đó $AC > AN$ (định lí 1). Suy ra $AC > BD \Rightarrow \widehat{D} > \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{A}_2 > \widehat{A}_1$.

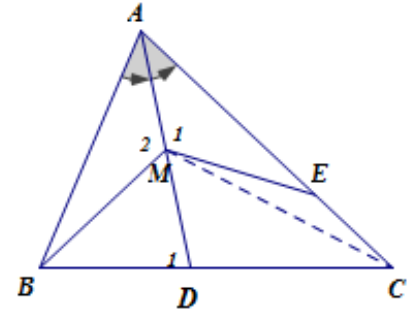
Dễ thấy $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$ do đó $\widehat{A}_2$ là góc lớn nhất trong ba góc $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \widehat{A}_3$.

15.9. (h.15.15)

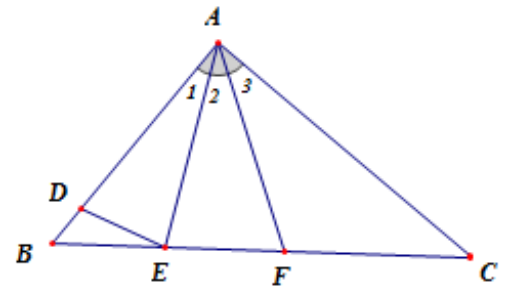
Giả sử tam giác ABC có $\widehat{ABC} > 60^\circ$, ta phải chứng minh $AC > \frac{AB + BC}{2}$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm

D sao cho $BD = BA$. Vẽ $CH \perp AD$

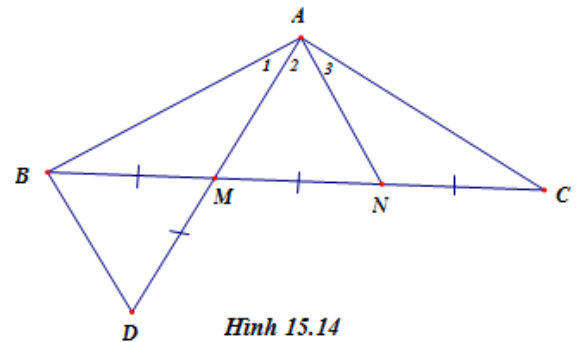
Tam giác ABD cân tại $B \Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{D} \Rightarrow \widehat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$.



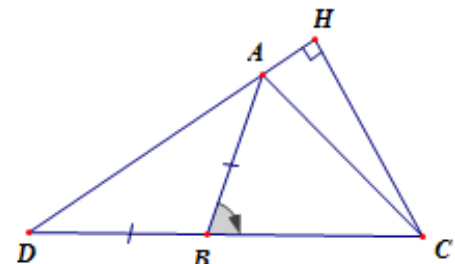
Hình 15.12



Hình 15.13



Hình 15.14



Hình 15.15

Vì $\widehat{ABC} > 60^\circ$ nên $\widehat{D} > 30^\circ$.

Xét $\triangle HCD$ tại H có $\widehat{D} > 30^\circ$ nên $CH > \frac{1}{2}CD$ (xem ví dụ 1).

Mặt khác $AC \geq CH$ nên

$$AC > \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(DB + BC) = \frac{1}{2}(AB + BC).$$

15.10. (h.15.16)

Trên nửa mặt phẳng bờ MB không chứa C , vẽ tam giác BDM vuông cân tại B .

$$\triangle ABD = \triangle CBM (c.g.c) \Rightarrow AD = CM \text{ và}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{BMC} > 105^\circ$$

$$\triangle BDM \text{ vuông cân tại } B \Rightarrow \widehat{BDM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADM} > 60^\circ.$$

Xét $\triangle ADM$ có $\widehat{ADM} > 60^\circ$ nên $MA > \frac{AD + DM}{2}$ (xem bài 15.9)

Mặt khác, $DM > MB$ (vì $\triangle BDM$ vuông) suy ra

$$MA > \frac{MC + MB}{2}$$

15.11. (h.15.17)

$$\triangle ABC \text{ có } AB < AC \Rightarrow \widehat{ACB} < \widehat{ABC}. \text{ Do đó } \widehat{FCB} < \widehat{EBC}.$$

$\triangle FCD$ và $\triangle EBD$ có: $CF = BE, CD = BD, \widehat{FCB} > \widehat{EBC}$ nên $DF > DE$ (định lý 2).

Xét $\triangle DEF$ có $DF > DE$ nên $\widehat{DEF} > \widehat{DFE}$ (định lý 1).

15.12. (h.15.18)

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

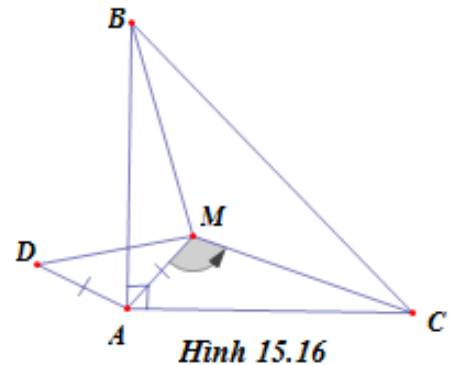
Ta có $\widehat{B}_1 < \widehat{C}_1$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{B}_2 > \widehat{C}_2 \Rightarrow MC > MB$ (định lý 1). Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$$AB = AC, AM \text{ chung}, MB < MC \Rightarrow \widehat{MAB} < \widehat{MAC} \text{ (định lý 2).}$$

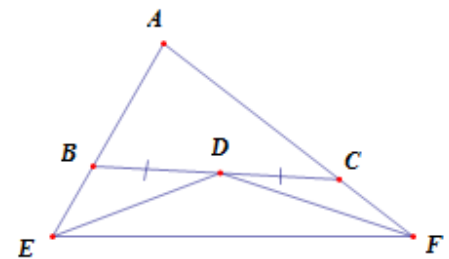
Mặt khác $\widehat{B}_1 < \widehat{C}_1$ nên $\widehat{MAB} + \widehat{B}_1 < \widehat{MAC} + \widehat{C}_1$. Do đó $\widehat{M}_1 < \widehat{M}_2$.

15.13. (H. 15.19)

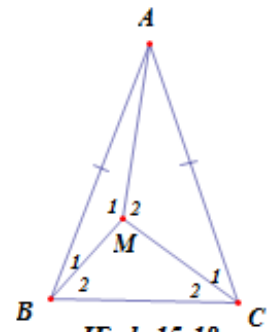
Trên tia đối của tia OA lấy điểm N sao cho $ON = OA$.



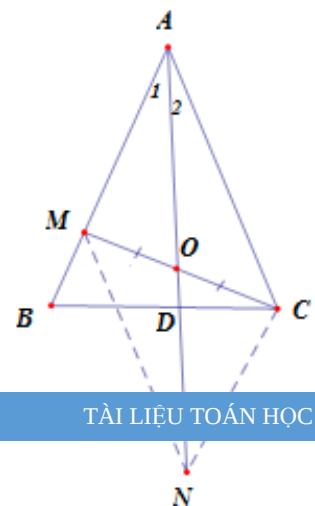
Hình 15.16



Hình 15.17



Hình 15.18



Hình 15.19

$\triangle AMO = \triangle NCO(c.g.c) \Rightarrow AM = NC$ và $\widehat{A_1} = \widehat{N_1}$. Ta có $AB > AM \Rightarrow AC > NC$.

Xét $\triangle ACN$ có $AC > NC \Rightarrow \widehat{N_1} > \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{A_1} > \widehat{A_2}$.

$\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có: $AB = AC, AD$ chung, $\widehat{A_1} < \widehat{A_2}$ nên $BD > CD$ (định lý 2).

15.14. (h.15.20)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B , vẽ tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAM}$.

Trên tia Ax lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

$\triangle AMB = \triangle ANC(c.g.c) \Rightarrow BM = CN$ và $\widehat{AMB} = \widehat{ANC}$.

Mặt khác, $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$ nên $\widehat{ANC} > \widehat{AMC}$ (1)

$\triangle AMN$ cân tại A nên $\widehat{ANM} = \widehat{AMN}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{MNC} > \widehat{NMC} \Rightarrow MC > NC$.

$\triangle AMC$ và $\triangle ANC$ có: $AM = AN, AC$ chung và $MC > NC$ nên $\widehat{MAC} > \widehat{NAC}$ (định lý 2)

do đó $\widehat{MAC} > \widehat{MAB}$.

$\triangle DAC$ và $\triangle DAB$ có: $AC = AB, AD$ chung, $\widehat{DAC} > \widehat{DAB}$ nên $DC > DB$ (định lý 2).

15.15. (h.15.21)

$\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có: $MB = MC, MA$ chung, $AB < AC$ nên

$\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$ (định lý 2). $\Rightarrow \widehat{M_2}$ là góc nhọn

$\Rightarrow \widehat{M_2} < \widehat{AMD}$

Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có: $\widehat{MDC} > \widehat{M_1}$.

Mặt khác, $\widehat{M_1} > \widehat{M_2}, \widehat{M_2} > \widehat{C}$ nên $\widehat{MDC} > \widehat{C}$.

Xét $\triangle MDC$ có $\widehat{MDC} > \widehat{C} \Rightarrow MC > MD$ (định lý 1).

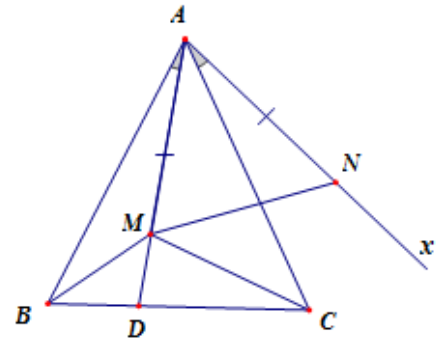
Lại do $MC = MB$ nên $MB > MD$ hay $MD < MB$.

15.16. (H15.22)

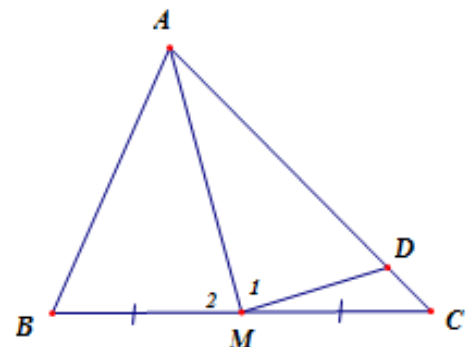
- Xét trường hợp $AB = AC$

$\triangle ABC$ là tam giác cân, có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

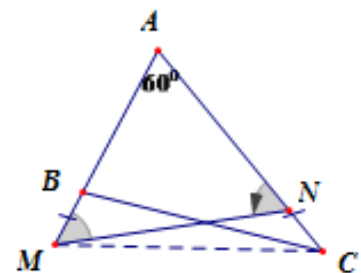
Suy ra $AB = BC = CA = 5\text{cm}$.



Hình 15.20



Hình 15.21



Hình 15.22

Chu vi tam giác ABC là $5 \times 3 = 15(cm)$. (1)

- Xét trường hợp $AB \neq AC$

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$ (h.15.22).

Trên các tia AB, AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = AN = 5cm$. Khi đó $\triangle AMN$ là tam giác đều $\Rightarrow MN = 5cm$.

Vì $AM + AN = AB + AC (=10cm)$ nên $AB + BM + AN = AB + AN + CN \Rightarrow BM = CN$.

Ta có $\widehat{BMC} > \widehat{BMN}$; $\widehat{BMN} = \widehat{ANM}$; $\widehat{ANM} > \widehat{NCM}$ (Tính chất góc ngoài tam giác) suy ra $\widehat{BMC} > \widehat{NCM}$.

$\triangle BMC$ và $\triangle NCM$ có: $BM = CN, MC$ chung, $\widehat{BMC} > \widehat{NCM}$ suy ra $BC > MN$ (định lý 2).

Chu vi $\triangle ABC = AB + BC + CA = 10 + BC > 10 + MN = 15(cm)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất là $15cm$, khi $AB = AC = 5cm$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 16. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU.

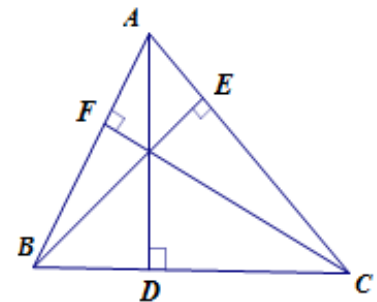
16.1. (h.16.6)

Vì $AD \perp BC$ nên $AD \leq AB$ (dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$).

Vì $BE \perp AC$ nên $BE \leq BC$ (dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$).

Vì $CF \perp AB$ nên $CF \leq CA$ (dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$).

Do các dấu " $=$ " không thể xảy ra đồng thời nên $AD + BE + CF < AB + BC + CA = \text{chu vi } \triangle ABC$.



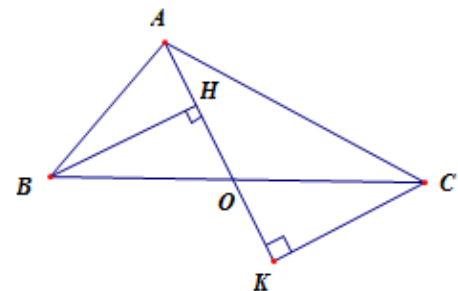
Hình 16.6

16.2. (h.16.7)

Vẽ $BH \perp d$; $CK \perp d$. Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $BH \leq BO$; $CK \leq CO$. Do đó $BH + CK \leq BO + CO = BC$.

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O$ và $K \equiv O \Leftrightarrow d \perp BC$.

Vì góc A tù nên d luôn cắt BC .



Hình 16.7

16.3. (h.16.8)

Vẽ $AH \perp BM, CK \perp BM$ thì BH và CK lần lượt là hình chiếu của AB và BC trên đường thẳng BM .

Ta có $\triangle HAM = \triangle KCM$ (cạnh huyền, góc nhọn)
 $\Rightarrow MH = MK$.

Ta có $AB < BM$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

Do đó $AB < BH + HM$. (1)

Mặt khác cũng do $AB < BM$ nên $AB < BK - MK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $2AB < (BH + HM) + (BK - MK)$.

Lại có $MH = MK$ nên $2AB < BH + BK$ hay $AB < \frac{BH + BK}{2}$.

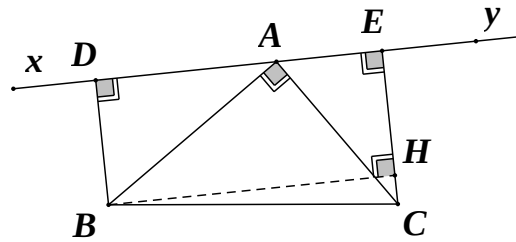
16.4. (h.16.9)

$\triangle ABD$ và $\triangle CAE$ có: $\widehat{D} = \widehat{E} (= 90^\circ)$.

$AB = AC, \widehat{ABD} = \widehat{CAE}$ (cùng phụ với góc BAD)

Do đó $\triangle ABD = \triangle CAE$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra $BD = AE$ và $AD = CE$.

Ta có $BD + CE = AE + AD = DE$.



Hình 16.9

Vẽ $BH \perp CE$ thì $DE = BH$ (tính chất đoạn thẳng song song).

Vì $BK \leq BC$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên) nên $DE \leq BC$ (dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow C \equiv H$ hay $xy \parallel BC$). Vậy khi $xy \parallel BC$ thì $BD + CE = BC$.

16.5. (h.16.10)

Gọi N là giao điểm của AB và tia CM .

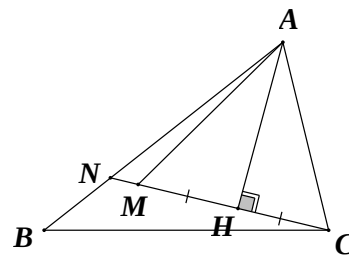
Vì M nằm trong tam giác ABC nên tia CM cắt cạnh AB tại điểm N nằm giữa A và B , do đó $AB > AN$. (1)

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, từ $HN > HM$

Suy ra $AN > AM$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $AB > AM$.

Mặt khác $AM = AC$ (vì $HM = HC$) nên $AB > AC$.



Hình 16.10

16.6. (h.16.11)

a) Ta có $AB = AC$, $BM = CN \Rightarrow AM = AN$.

$\triangle ABC$ và $\triangle AMN$ cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AMN} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

$\Rightarrow BC \parallel MN$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Vẽ $AH \perp BC$ thì $AH \perp MN$ (tại K).

$$\text{Ta có } BH = \frac{1}{2}BC; KN = \frac{1}{2}MN.$$

Gọi O là giao điểm của BN với AK.

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có :

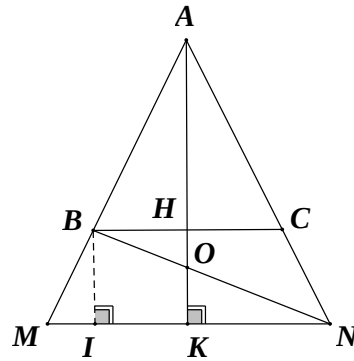
$$BO > BH = \frac{1}{2}BC; ON > KN = \frac{1}{2}MN.$$

$$\text{Do } BN = BO + ON \text{ nên } BN > \frac{BC}{2} + \frac{MN}{2} = \frac{MN + BC}{2}.$$

b) Vẽ $BI \perp MN \Rightarrow BI \parallel HK$. Do đó $IK = BH$ (tính chất đoạn chắn song song).

$$\text{Ta có } MI = MK - IK = \frac{1}{2}MN - \frac{1}{2}BC = \frac{MN - BC}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } BM > MI \text{ nên } BM > \frac{MN - BC}{2}.$$

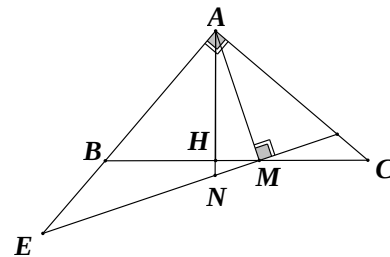


16.7. (h.16.12)

Gọi N là trung điểm của EF. Các tam giác ABC và AEF là những tam giác vuông, M và N là trung điểm của cạnh huyền nên

$$AM = \frac{1}{2}BC, AN = \frac{1}{2}EF. \quad (1)$$

Suy ra $BC = 2AM$; $EF = 2AN$.



Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $AN \geq AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $EF \geq BC = 5\text{cm}$.

Để xác định khi đó dấu "=" xảy ra, ta gọi H là giao điểm của AN với BC. Ta có $AH \perp BC$ (bạn đọc tự chứng minh).

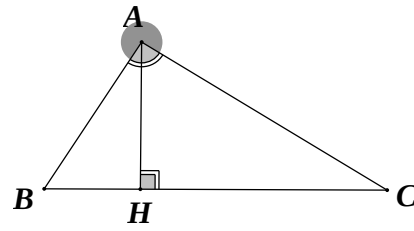
$$\text{Ta có } EF = BC \Leftrightarrow AN = AM \Leftrightarrow N \equiv M \Leftrightarrow H \equiv M.$$

Khi đó tam giác ABC có $MB = MC$, $AM \perp BC$ (vì $M \equiv H$) nên là tam giác vuông cân. Do đó độ dài ngắn nhất của EF là 5cm khi và chỉ khi A là đỉnh của một tam giác vuông cân có cạnh huyền là BC.

16.8. (h.16.13)

Ta có $\widehat{C} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ $\widehat{B}$);
 $\widehat{B} = \widehat{HAC}$. (cùng phụ với $\widehat{C}$)

Mà $\widehat{BAH} < \widehat{HAC}$ (giả thiết) nên
 $\widehat{C} < \widehat{B}$.



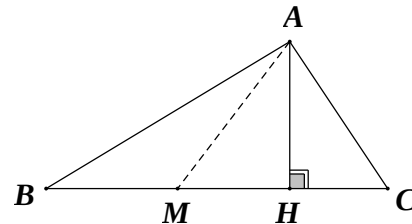
Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{C} < \widehat{B}$ nên $AB < AC$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác). Suy ra $HB < HC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu)

16.9. (h.16.14)

Vẽ $AH \perp BC$.

Vì các góc B và C nhọn nên H nằm giữa B và C.

Ta có $\widehat{B} < \widehat{C} \Rightarrow AC < AB$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác).



- Nếu $M \equiv H$ thì $AM < AB$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

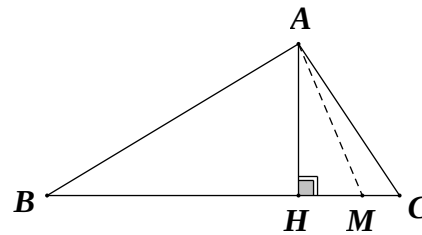
- Nếu M nằm giữa B và H thì $HM < HB$
 $\Rightarrow AM < AB$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

- Nếu M nằm giữa H và C (h.16.15)

Ta có $HM < HC$

$\Rightarrow AM < AC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu)

mà $AC < AB$ nên $AM < AB$.



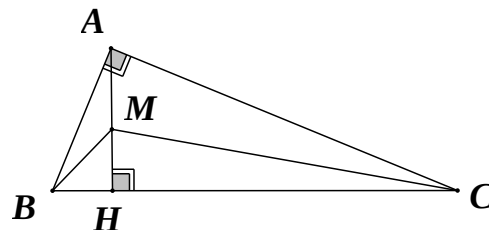
16.10. (h.16.16)

Theo định lý Py-ta-go ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BC = 13.$$

Ta có $BM \geq BH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$);

$$CM \geq CH \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow M \equiv H \text{)}.$$



Do đó $BM + CM \geq BH + CH = 13$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$). (1)

Ta có $HM \leq HA$ nên $BM \leq BA$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$).

Tương tự $CM \leq CA$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$)

Do đó $BM + CM \leq BA + CA = 5 + 12 = 17$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$) (2)

Từ (1) và (2), suy ra $13 \leq MB + MC \leq 17$.

16.11. (h.16.17)

Giả sử $AB < AC$ theo quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta có $HB < HC$, do đó $MB < MC$.

Từ điều kiện $AB < AC$ và $BD = CE$ suy ra $AD < AE$.

Theo định lý Py-ta-go, ta có:

$$MD^2 = AM^2 - AD^2; ME^2 = AM^2 - AE^2$$

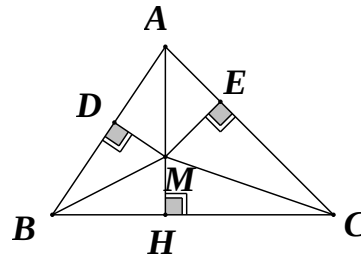
Do đó $MD^2 > ME^2$.

Ta có

$$MB^2 = MD^2 + BD^2; MC^2 = ME^2 + CE^2.$$

Vì $MD^2 > ME^2, BD^2 = CE^2$ nên

$$MB^2 > MC^2 \text{ suy ra } MB > MC.$$



Theo quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta suy ra $HB > HC$, do đó $AB > AC$ (trái giả thiết).

Chứng minh tương tự, nếu $AB > AC$ thì cũng suy ra mâu thuẫn.

Vậy $AB = AC$ hay tam giác ABC là tam giác cân.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 17. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC.

17.1.

- Nếu cạnh đáy dài 10 cm thì mỗi cạnh bên dài là $(40-10):2=15(\text{cm})$.

Ba độ dài 10, 15, 15 là thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|15-15| < 10 < 15+15$.

Vậy độ dài hai cạnh còn lại là: 15cm, 15cm.

- Nếu cạnh bên dài 10cm thì cạnh đáy dài là $40 - 2 \cdot 10 = 20(\text{cm})$

Ba độ dài 10, 10, 20 không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy trường hợp này bị loại

17.2. a)

Nếu cạnh đáy dài 11cm thì cạnh bên dài 20cm.

Bộ ba dài 11, 20, 20 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|20-20| < 11 < 20+20$.

Chu vi của tam giác cân là: $11 + 20 + 20 = 51(\text{cm})$

- Nếu cạnh đáy là 20cm thì cạnh bên dài 11cm

Bộ ba dài 20, 11, 11 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|11-11| < 20 < 11+11$.

Chu vi của tam giác cân là: $20 + 11 + 11 = 42(\text{cm})$

b) - Nếu cạnh đáy dài 11 thì cạnh bên dài 23cm.

Bộ ba dài 11, 23, 23 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|23 - 23| < 11 < 23 + 23$.

Chu vi của tam giác cân là: $11 + 23 + 23 = 57(\text{cm})$.

- Nếu cạnh đáy dài 23 thì cạnh bên dài 11cm.

Bộ ba dài 23, 11, 11 không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy trường hợp này bị loại.

17.3. Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là n , $n+2$ và $n+4$ (n là số tự nhiên chẵn).

Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác là $n + (n+2) > n+4 \Rightarrow n > 2$.

Số chẵn nhỏ nhất lớn hơn 2 là 4.

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác đó là 4, 6, 8(cm)

Chu vi nhỏ nhất của tam giác là $4 + 6 + 8 = 18(\text{cm})$.

17.4.a) Nếu một cạnh dài 13cm thì tổng hai cạnh còn lại là : $25 - 13 = 12(\text{cm})$.

Ta thấy một cạnh lớn hơn tổng của hai cạnh còn lại, không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy không thể uốn đoạn dây thép trên thành một hình tam giác có một cạnh là 13cm.

b) Nếu một cạnh dài 12cm thì tổng hai cạnh còn lại là : $25 - 12 = 13(\text{cm})$.

Đoạn dây thép 13cm này có thể uốn thành hai đoạn chẳng hạn 8cm và 5cm. Rõ ràng $8 - 5 < 12 < 8 + 5$ thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Vậy có thể uốn đoạn dây thép 25cm thành một tam giác có một cạnh 12cm.

17.5. (h.17.17)

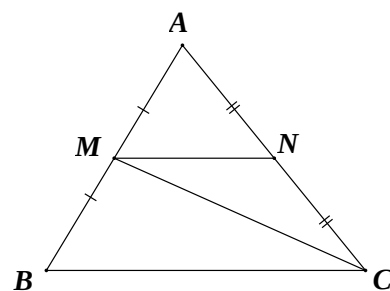
Xét $\triangle MBC$ ta có : $BC < MB + MC$. (1)

Xét $\triangle MNC$ ta có : $MC < MN + NC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC < MB + MN + NC$.

Do đó $BC < MA + MN + NA$ (vì $MA = MB$ và $NA = NC$)

Suy ra $BC < \text{chu vi}$ Xét $\triangle AMN$.



17.6. Gọi a , b , c là ba cạnh của tam giác ABC.

Giả sử a là cạnh lớn nhất: $a \geq b$; $a \geq c$.

a) Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có $a < b + c$.

Cộng a vào hai vế của bất đẳng thức này ta được: $a + a < a + b + c$.

Do đó $2a < a + b + c$, suy ra $a < \frac{a + b + c}{2}$

b) Vì $a \geq b$; $a \geq c$ nên $2a \geq b + c$.

Cộng a vào hai vế ta được $3a \geq a + b + c$. Suy ra $a \geq \frac{a+b+c}{3}$

17.7. (h.17.8)

* Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$, ta có: $AD + BD > AB$; $AD + CD > AC$.

Suy ra $2AD + BC > AB + AC \Rightarrow 2AD > AB + AC - BC$. (1)

Tương tự. $2BE > BC + BA - AC$. (2)

$2CF > CA + CB - AB$ (3)

Cộng từng vế của các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$2(AD + BE + CF) > (AB + AC - BC) + (BC + BA - AC) + (CA + CB - AB) = AB + BC + CA$$

$$\text{Do đó: } AD + BE + CF > \frac{AB + BC + CA}{2} \quad (*)$$

* Trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho $DK = DA$.

$\triangle ACK = \triangle KCD$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CK$.

Xét $\triangle ACK$ có $AK < AC + CK = AC + AB \Rightarrow 2AD < AB + AC$

Chứng minh tương tự ta được:

$$2BE < BA + BC; \quad 2CF < CB + CA.$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$2(AD + BE + CF) < 2(AB + BC + CA).$$

Do đó $AD + BE + CF < AB + BC + CA = \text{chu vi } \triangle ABC$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra điều phải chứng minh.

17.8. (h.17.9)

Gọi các điểm A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 là các điểm như trong hình 17.9.

Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có:

$$AB < A_1A + A_1B; \quad BC < B_1B + B_1C; \quad CD < C_1C + C_1D;$$

$$DE < D_1D + D_1E; \quad EA < E_1E + E_1A.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức ta được:

$$AB + BC + CD + DE + EA < (A_1A + B_1C) + (A_1B + E_1E) +$$

$$(B_1B + C_1D) + (C_1C + D_1E) + (D_1D + E_1A)$$

$$< AC + BE + BD + CE + DA.$$

17.9. (h17.10)

a) Gọi M là điểm bất kì, ta có: $MA + MC \geq AC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AC]$).

$MB + MD \geq BD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [BD]$).

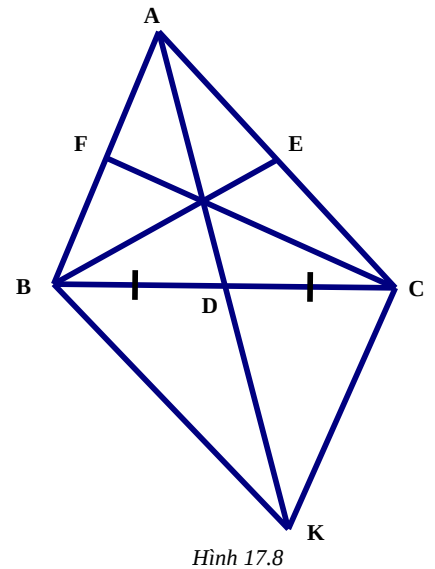
Suy ra $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$ (không đổi).

Do đó tổng $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất bằng $AC + BD$

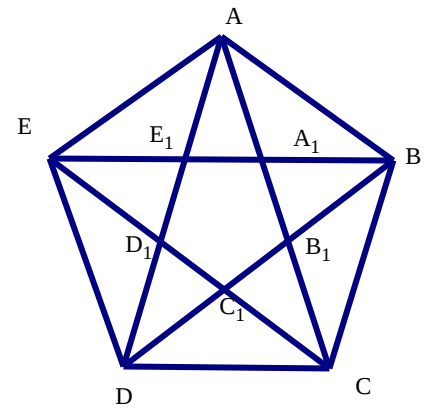
khi và chỉ khi M

là giao điểm O của AC và BD.

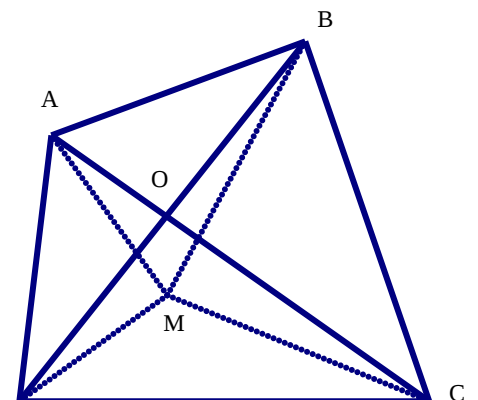
b) Xét các tam giác AOB, BOC, COD, DOA ta có:



Hình 17.8



Hình 17.9



Hình 17.10

$$OA + OB > AB; OB + OC > BC;$$

$$OC + OD > CD; OD + OA > DA.$$

Cộng từng vế của bốn bất đẳng thức trên ta được:

$$2(OA + OB + OC + OD) > AB + BC + CD + DA.$$

$$\text{Suy ra } 2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA.$$

$$\text{Do đó } AC + BD > \frac{AB + BC + CD + DA}{2}.$$

17.10. (h.17.11)

* Chứng minh $MA + MB + MC > p$

Xét các tam giác MAB , MBC , MCA ta có:

$$MA + MB > AB; MB + MC > BC; MC + MA > CA.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$2(MA + MB + MC) > AB + BC + CA.$$

$$\text{Suy ra } MA + MB + MC > \frac{AB + BC + CA}{2} = p \quad (*)$$

* Chứng minh $MA + MB + MC < 2p$

Gọi D là giao điểm của tia CM với cạnh AB .

Xét $\triangle MBD$ có $MB < MD + DB$. Cộng thêm MC vào hai vế ta được

$$MB + MC < MC + MD + DB.$$

$$\text{Suy ra } MB + MC < CD + DB. \quad (1)$$

Xét $\triangle ADC$ có $CD < AD + AC$.

Cộng thêm DB vào hai vế ta được $CD + DB < DB + AD + AC$.

$$\text{Suy ra } CD + DB < AB + AC \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $MB + MC < AB + AC$.

Chứng minh tương tự ta được: $MC + MA < BC + BA$; $MA + MB < CA + CB$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$2(MA + MB + MC) < 2(AB + BC + CA) \Rightarrow MA + MB + MC < AB + BC + CA = 2p \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $p < MA + MB + MC < 2p$

17.11. (h. 17.12)

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

$\triangle AMD = \triangle AMC$ (c.g.c). Suy ra $MD = MC$.

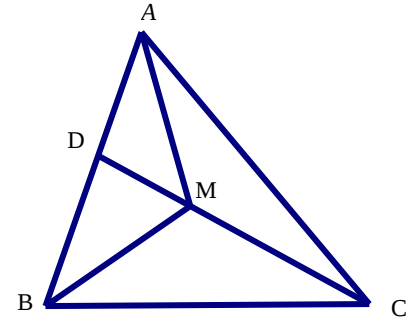
$$\text{Ta có: } AB + AC = AB + AD = BD \quad (1)$$

$$MB + MC = MB + MD > BD \quad (2)$$

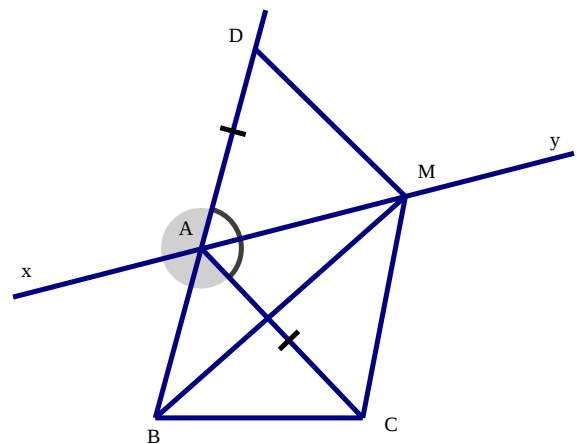
Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC < MB + MC$.

17.12. (h17.13)

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.



Hình 17.11



Hình 17.12

Giả sử đồng thời xảy ra $BN < \frac{1}{2}AC$ và $CM < \frac{1}{2}AB$.

Khi đó $BN + CM < \frac{1}{2}(AB + AC)$. (1)

Gọi G là giao điểm của BN và CM.

Xét $\triangle MBG$ và $\triangle NCG$, theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có:
 $BM < GB + GM$; $CN < GC + GN$.

Suy ra $BM + CN < GB + GM + GC + GN$ hay $BM + CN < BN + CM$

Do đó $BN + CM > BM + CN = \frac{1}{2}(AB + AC)$. (2)

(1) và (2) mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai.

Do đó không thể xảy ra đồng thời $BN < \frac{1}{2}AC$ và $CM < \frac{1}{2}AB$.

17.13. (h17.14)

Gọi O là trung điểm của AB.

Ta chứng minh được (xem bài 17.7):

$$MO < \frac{1}{2}(MA + MB);$$

$$NO < \frac{1}{2}(NA + NB); PO < \frac{1}{2}(PA + PB).$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$MO + NO + PO < \frac{1}{2}(MA + NA + PA) + \frac{1}{2}(MB + NB + PB) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s = s.$$

17.14. (h17.15)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B

ta vẽ tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAK}$.

Trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AK$.

$\triangle AMK = \triangle AND$ (c.g.c) $\Rightarrow KM = DN$.

Ta có: $\widehat{KAD} = \widehat{KAC} + \widehat{CAD} = \widehat{KAC} + \widehat{BAK} = 60^\circ$

$\triangle AKD$ có $AK = AD$ và $\widehat{KAD} = 60^\circ$ nên là tam giác đều

$\Rightarrow KA = KD$.

Gọi O là giao điểm của AC và KD.

Xét ba điểm N, K, D ta có: $KN + DN \geq KD$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv O$).

Do đó $KN + DN \geq KA$ (vì $KA = KD$).

17.15. (h17.16)

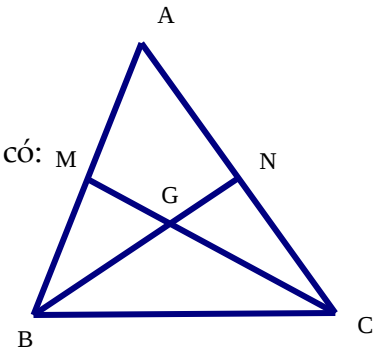
Đặt $AB = b$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$3 - 2 < b < 3 + 2 \text{ hay } 1 < b < 5.$$

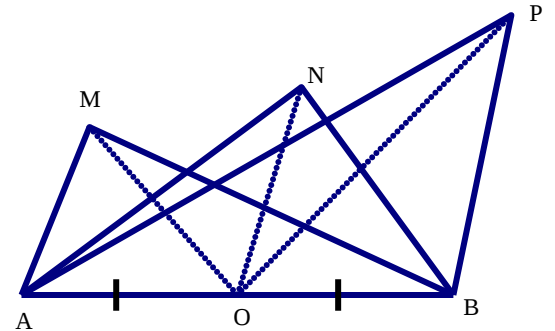
Vì b nguyên nên $b \in \{2; 3; 4\}$.

Mặt khác $\triangle ABC$ không có hai cạnh nào bằng nhau nên $b = 4cm$.

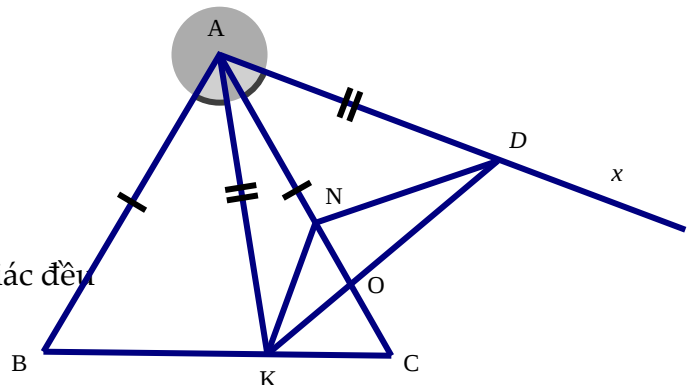
Vì $M \in xy$ nên ta chứng minh được $MB = MC$.



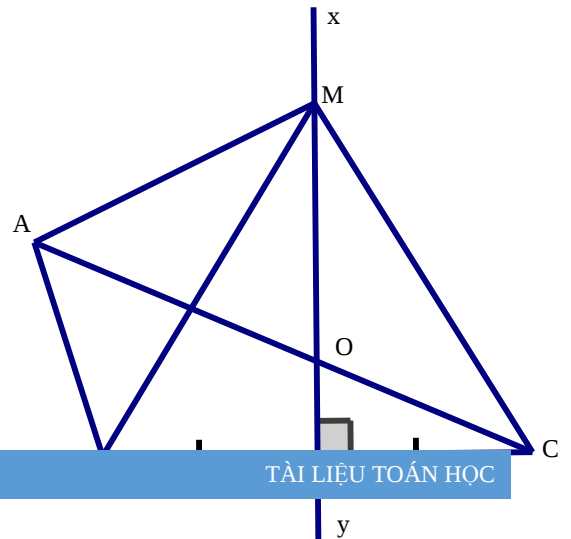
Hình 17.13



Hình 17.14



Hình 17.15



Hình 17.16

Ta có: $MA + MB = MA + MC$.

Xét ba điểm M, A, C ta có $MA + MC \geq AC = 4\text{cm}$

(dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O$ với O là giao điểm của xy với AC).

Suy ra $MA + MB \geq 4\text{cm}$.

Do đó tổng $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất là 4cm khi và chỉ khi M là giao điểm của xy với AC .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 18. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC.

18.1. (h.18.6)

Xét $\triangle ABC$ có BE và CF là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G .

Giả sử $AB > AC$, ta phải chứng minh $BE < CF$.

Ta vẽ thêm đường trung tuyến AD , theo tính chất ba đường trung tuyến ta có AD đi qua G .

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ có:

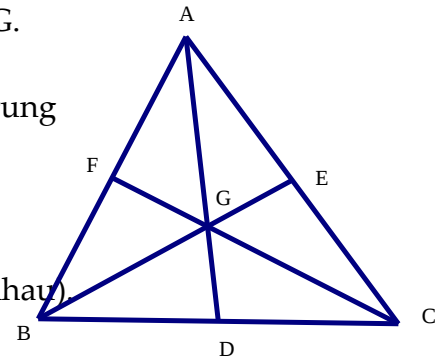
$DB = DC$, AD chung và $AB < AC$

Nên $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ (định lý hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau)

Xét $\triangle GDB$ và $\triangle GDC$ có:

$DB = DC$, GD chung và $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ (chứng minh trên)

nên $GB < GC$, suy ra $\frac{2}{3}BE < \frac{2}{3}CF$, do đó $BE < CF$



Hình 18.6

18.2. (h.18.7)

Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông ABH và AHC ta tính được $HB = 1\text{cm}$, $HC = 2\text{cm}$.

Vì N là trung điểm của HC nên $HN = NC = 1\text{cm}$.

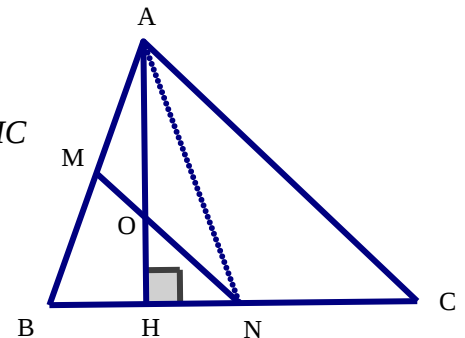
Do đó $HN = HB = 1\text{cm}$.

Vậy AH là trung tuyến của $\triangle ABN$.

Mặt khác $AH = 3\text{cm}$, $AO = 2\text{cm}$ nên $AO = \frac{2}{3}AH$,

suy ra O là trọng tâm của $\triangle ABN$.

Ta có NM là một đường trung tuyến của $\triangle ABN$ do đó NM phải đi qua trọng tâm O . Vậy ba điểm N, M, O thẳng hàng.



Hình 18.7

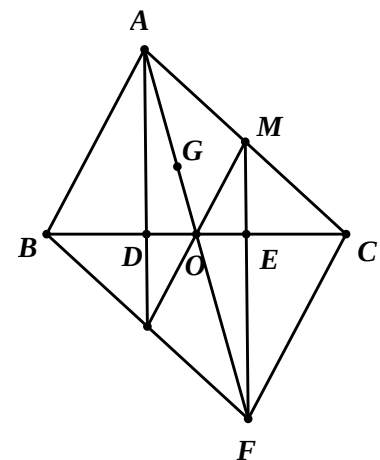
18.3. (h. 18.8)

a) Xét $\triangle BAF$ có $OA = OF$ nên BO là đường trung tuyến.

Điểm D nằm trên đường trung tuyến BO mà $BD = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}BO$ (vì $BC = 2BO$) nên D là trọng tâm của $\triangle BAF$.

$\triangle BAF$.

Chứng minh tương tự ta được E là trọng tâm của $\triangle CAF$.



Hình 18.8

b) Vì D là trọng tâm của $\triangle BAF$ nên đường thẳng AD là một

đường trung tuyến

Vì AD cắt BF tại N nên $FN = BN = \frac{1}{2}BF$ (1)

Chúng minh tương tự ta được $AM = MC = \frac{1}{2}AC$ (2)

Ta có $\triangle OFB = \triangle OAC$ (c.g.c)

Suy ra $BF = AC$ (3) và $\widehat{OFB} = \widehat{OAC}$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $AM = FN$.

$\triangle AOM = \triangle FON$ (c - g - c), suy ra $OM = ON$ (4) và $\widehat{AOM} = \widehat{FON}$

Ta có $\widehat{AOM} + \widehat{FOM} = 180^\circ$ (kề bù)

Suy ra $\widehat{FON} + \widehat{FOM} = 180^\circ$, do đó ba điểm M, O, N thẳng hàng (5)

Từ (4) và (5) suy ra O là trung điểm của MN do đó AO là đường trung tuyến của $\triangle AMN$.

$\triangle ABC$ và $\triangle AMN$ có chung đỉnh A , chung đường trung tuyến AO nên có cùng trọng tâm G .

18.4 (h.18.9)

Theo tính chất đoạn chắn song song ta có

$AB' = BC, AC' = BC$ suy ra $AB' = AC'$

Chúng minh tương tự ta được: $BA' = BC'; CA' = CB'$

Xét $\triangle A'B'C'$ ba đường thẳng $A'A; B'B; C'C$ là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy tại một điểm G .

Gọi M là giao điểm của $A'A$ với BC ; N là giao điểm của BB' với AC ; P là giao điểm của CC' với AB

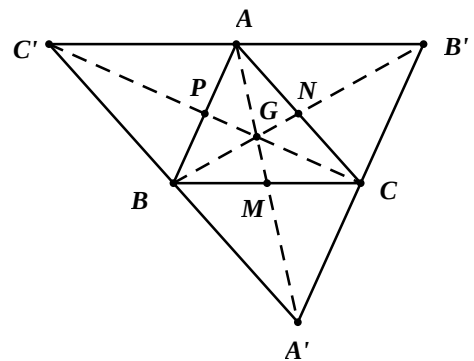
Ta có $\triangle AMC = \triangle A'MB$ (c.g.c) suy ra $CM = MB$

Vậy AM là đường trung tuyến ứng với cạnh BC của $\triangle ABC$

Chúng minh tương tự ta được BN, CP là đường trung tuyến ứng với cạnh AC, AB của $\triangle ABC$.

Ba đường trung tuyến AM, BN, CP của $\triangle ANC$ gặp nhau tại một điểm. Mặt khác ba đường thẳng AM, BN, CP cũng là ba đường thẳng $A'A; B'B; C'C$. Do đó trọng tâm G của $\triangle A'B'C'$ cũng là trọng tâm của $\triangle ABC$.

18.5 (h.18.10)



Hình 18.9

- *Tìm cách giải*

Giả sử đã vẽ được $\triangle AOB$ sao cho G là trọng tâm của nó. Tia OG cắt AB tại trung điểm M . Trên tia OG lấy điểm K sao cho $OK = 3OG$. Ta chứng minh được

$$\triangle AMK = \triangle BMO \quad (c - g - c); \quad \triangle AMO = \triangle BMK \quad (c - g - c).$$

Suy ra $KA \parallel Oy$; $KB \parallel Ox$. Do đó xác định được A và B .

- *Trình bày lời giải*

. Vẽ tia OG , trên đó lấy điểm K sao cho $OK = 3OG$.

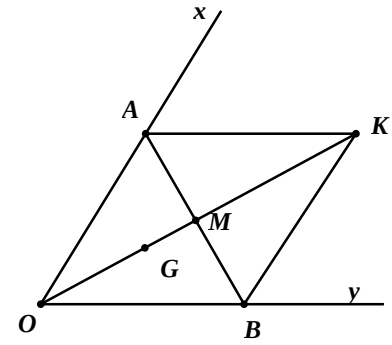
. Từ K vẽ $KA \parallel Oy$ ($A \in Ox$); $KB \parallel Ox$ ($B \in Oy$)

. Vẽ đoạn thẳng AB cắt OK tại M . Khi đó G là trọng tâm của $\triangle AOB$. Thực vậy, ta có $AK = OB$ (tính chất đoạn chắn song song).

$$\triangle AMK = \triangle BMO \quad (c - g - c), \text{ suy ra } MA = MB \quad (1) \text{ và } MK = MO.$$

$$\text{Vì } OK = 3OG \text{ nên } OM = \frac{3}{2}OG \text{ hay } OG = \frac{2}{3}OM. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm của $\triangle AOB$



Hình 18.10

18.6(h.18.11)

Vẽ các đường trung tuyến AD , BM cắt nhau tại G .

Ta có $\triangle ADB = \triangle ADC$ ($c - c - c$). Suy ra $DB = DC = 12\text{cm}$;

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABD$ vuông tại D ta được

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (3\sqrt{41})^2 - 12^2 = 225 \Rightarrow AD = 15(\text{cm})$$

Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $GD = \frac{1}{3}AD = 5\text{cm}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle GBD$ vuông tại D ta được

$$GB^2 = GD^2 + BD^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow GB = 13(\text{cm})$$

$$\text{Suy ra } BM = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2} \cdot 13 = 19,5(\text{cm})$$

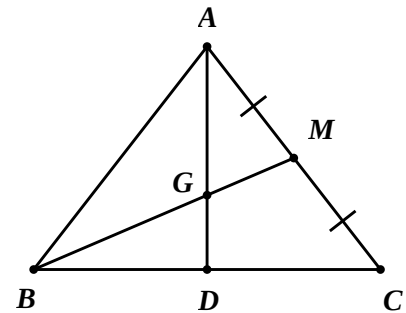
18.7(h.18.12)

Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $BE =$

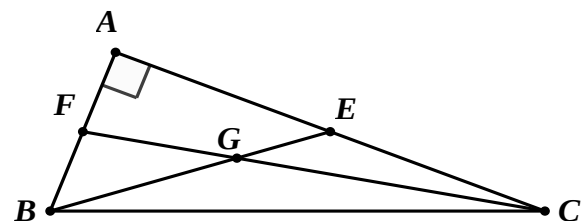
$$\frac{3}{2}BG = \frac{3}{2} \cdot 4\sqrt{61} = 6\sqrt{61}(\text{cm});$$

$$CF = \frac{3}{2}CG = \frac{3}{2} \cdot 4\sqrt{601} = 6\sqrt{601}(\text{cm})$$

- Xét $\triangle ABE$ vuông tại A ta có:



Hình 18.11



Hình 18.12

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4} = (6\sqrt{61})^2 = 2196. \quad (1)$$

• Xét $\triangle ACF$ vuông tại A ta có:

$$CF^2 = AF^2 + AC^2 = \frac{AB^2}{4} + AC^2 = (3\sqrt{601})^2 = 5409. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{5}{4}(AB^2 + AC^2) = 7605$, mặt khác $AB^2 + AC^2 = BC^2$. (3)

Suy ra $\frac{5}{4}BC^2 = 7605 \Rightarrow BC^2 = 6084 \Rightarrow BC = 78(cm)$.

Ta viết (3) thành $AB^2 + \frac{AC^2}{4} + \frac{3AC^2}{4} = 6084$. (*)

Mà theo (1) thì $AB^2 + \frac{AC^2}{4} = 2196$. (**)

So sánh (*) và (**) ta được $\frac{3}{4}AC^2 = 6084 - 2196 = 3888$

$$\Rightarrow AC^2 = 5184 \Rightarrow AC = 72(cm)$$

Từ đó ta tính được $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 6084 - 5184 = 900 \Rightarrow AB = 30cm$.

Vậy chu vi $\triangle ABC$ là: $78 + 72 + 30 = 180 (cm)$

18.8 (h18.13)

Đặt $AC = b$. Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\triangle ABC$ vuông tại A ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AC^2 + AC^2 = 3AC^2 = 3b^2 = (\sqrt{3}b)^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}b \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

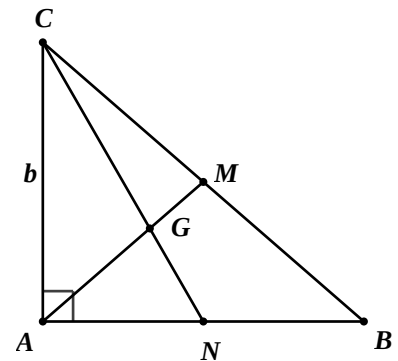
Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\triangle ACN$ vuông tại A ta có:

$$CN^2 = AC^2 + AN^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4} = AC^2 + \frac{2AC^2}{4} = \frac{6b^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}b\right)^2 \Rightarrow CN = \frac{\sqrt{6}}{2}b$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có:

$$CG = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}b = \frac{\sqrt{6}}{3}b \Rightarrow CG^2 = \frac{2}{3}b^2$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{3}b \Rightarrow AG^2 = \frac{1}{3}b^2$$



Hình 18.13

Xét $\triangle GAC$ có $CG^2 + AG^2 = \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}b^2 = b^2$

mà $AC^2 = b^2$ nên $AC^2 = CG^2 + AG^2$

Do đó theo định lí Py-ta-go đảo ta được $\triangle GAC$ vuông tại G . Suy ra $AM \perp CN$

18.9 (h18.14)

Xét $\triangle ABC$ có các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G .

Xét $\triangle GBC$ ta có $GB + GC > BC \Rightarrow \frac{2}{3}(BE + CF) > BC$

$$\Rightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC \quad (1)$$

Tương tự, ta có $AD + CF > \frac{3}{2}AC \quad (2)$

$$BE + AD > \frac{3}{2}AB \quad (3)$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1); (2); (3) ta được:

$$2(BE + CF + AD) > \frac{3}{2}(BC + CA + AB)$$

$$\text{Suy ra } BE + CF + AD > \frac{3}{4}(BC + CA + AB).$$

* *Nhận xét*: Trong bài 17.7 ta đã chứng minh được $AD + BE + CF$ lớn hơn chu vi tam giác. Như vậy kết quả bài này mạnh hơn kết quả ở bài 17.7.

18.10. (h 18.15)

Xét $\triangle ABC$ có BE và CF là hai đường trung tuyến và $BE = CF$.

Vì G là trọng tâm nên $GB = \frac{2}{3}BE$; $GC = \frac{2}{3}CF$.

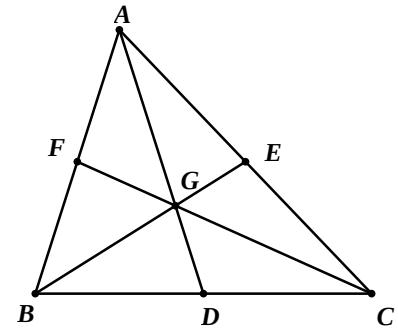
Do đó, $GB = GC$; $GE = GF$.

Ta có: $\triangle GBE = \triangle GCE$ (c.g.c)

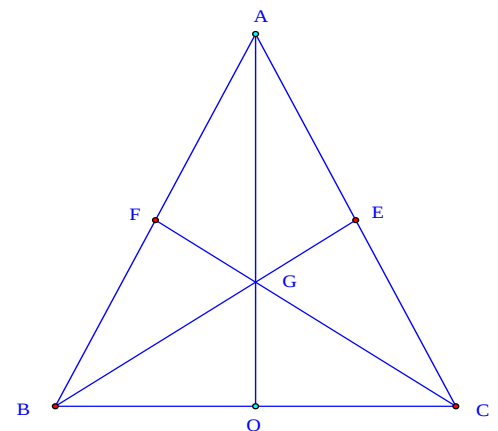
$\Rightarrow BE = CF$ dẫn tới $AB = AC$.

Gọi D là giao điểm của đường thẳng AG với BC .

Do G là trọng tâm nên AG là đường trung tuyến.



Hình 18.14



Suy ra $DB = DC$.

Ta có : $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c),

do đó $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 180^\circ : 2 = 90^\circ \Rightarrow AG \perp BC$.

Hình 18.15

18.11 (H 18.16)

Xét $\triangle ABE$ có AC là đường trung tuyến.

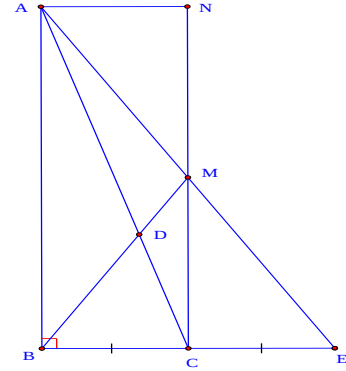
Mặt khác $D \in AC$ và $AD = \frac{2}{3}AC$

Nên D là trọng tâm của $\triangle ABE$.

Suy ra đường thẳng BD chứa đường trung tuyến ứng với cạnh AE Do đó $MA = ME$.

Ta có $\triangle AMN = \triangle EMC$ (c.c.c) $\Rightarrow AN = EC$.

Do đó, $AN = BC$ (vì $BC = EC$)



Hình 18.16

18.12 (h 18.17)

*Chứng minh mệnh đề nếu $AB + GB = AC + GC$ thì $\triangle ABC$ cân tại A .

Ta chứng minh bằng phản chứng

Giả sử $AB < AC$ (1)

Vẽ tia AG cắt BC tại D .

Khi đó AD là đường trung tuyến nên $DB = DC$

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ có :

AD chung ; $DB = DC$; $AB = AC$

Nên $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ (định lí 2 tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau)

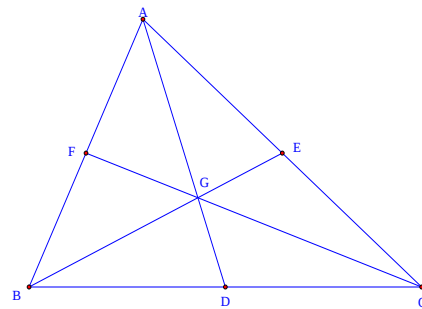
Xét $\triangle GDB$ và $\triangle GDC$ có GD chung, $\widehat{GDB} = \widehat{GDC}$ và $DB = DC \Rightarrow \triangle GDB = \triangle GDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow GB = GC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB + GB < AC + GC$ (trái giả thiết)

Vậy điều giả sử $AB < AC$ là sai (*)

Nếu $AB > AC$ ta cũng đi đến mâu thuẫn $AB > AC$ là sai (**)



Hình 18.17

Từ (*) và (**) suy ra $AB = AC$ do đó $\triangle ABC$ cân tại A .

Chứng minh mệnh đề nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì $AB + GB = AC + GC$.

Gọi E là giao điểm của BG với AC ; F là giao điểm của CG với AB .

Khi đó, $EA = EC$, $FA = FB$.

$\triangle ABE = \triangle ACF$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CF$, do đó $\frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$ dẫn tới $GB = GC$

Suy ra $AB + GB = AC + GC$.

18.13. (H 18.8)

*Chứng minh mệnh đề nếu $\hat{A} < 90^\circ$ thì $AM > \frac{1}{2}BC$

Ta chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử $AM = \frac{1}{2}BC$, khi đó $\hat{A} = 90^\circ$, trái giả thiết.

Giả sử $AM < \frac{1}{2}BC$, tức là $AM < BM$ và $AM < MC$

Xét $\triangle ABM$ có $AM < BM \Rightarrow \hat{B} < \hat{A}_1$.

Xét $\triangle ACM$ có $AM < MC \Rightarrow \hat{C} < \hat{A}_2$.

Do đó, $\hat{B} + \hat{C} < \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \widehat{BAC}$.

Suy ra $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} > \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, trái giả thiết.

Vậy nếu $\hat{A} < 90^\circ$ thì $AM > \frac{1}{2}BC$

*Chứng minh mệnh đề nếu $AM > \frac{1}{2}BC$ thì $\hat{A} < 90^\circ$.

Ta có $AM > \frac{1}{2}BC$ tức là $AM > BM$ và $AM > CM$.

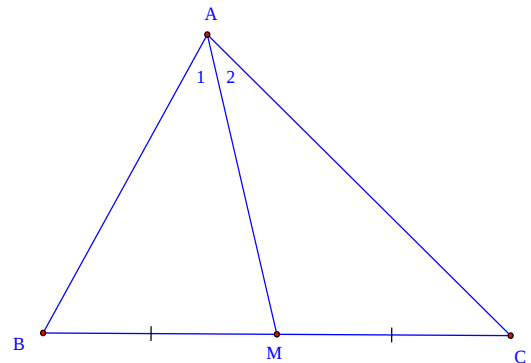
Xét $\triangle ABM$ có $AM > BM \Rightarrow \hat{B} > \hat{A}_1$. Xét $\triangle ACM$ có:

$AM > CM \Rightarrow \hat{C} > \hat{A}_2$. Do đó, $\hat{B} + \hat{C} > \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \widehat{BAC}$.

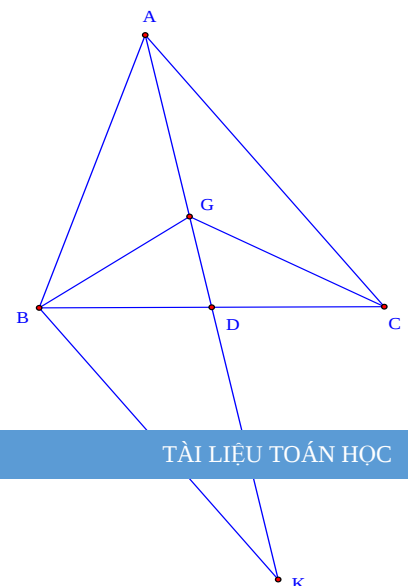
Suy ra $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} < \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

18.14 (H 18.19)

Gọi D là giao điểm của AG với BC .



Hình 18.18



Ta có: $DB = DC$ do đó GD là đường trung tuyến của $\triangle GBC$.

Xét $\triangle GBC$ có $\widehat{GBC} < 90^\circ$ (gt)

Suy ra $GD > \frac{1}{2}BC$ (xem bài 17.13)

Do đó $AD > \frac{3}{2}BC$ (1)

Trên tia AD lấy điểm K sao cho $DK = DA$.

$\triangle ACD = \triangle KBD$ (c.g.c). Suy ra $AC = BK$.

Xét $\triangle ABK$ có $AB + BK > AK$.

Do đó: $AB + AC > 2AD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AB + AC > 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot BC = 3BC$.

Hình 18.19

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 19. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC.

19.1. (h. 19.7)

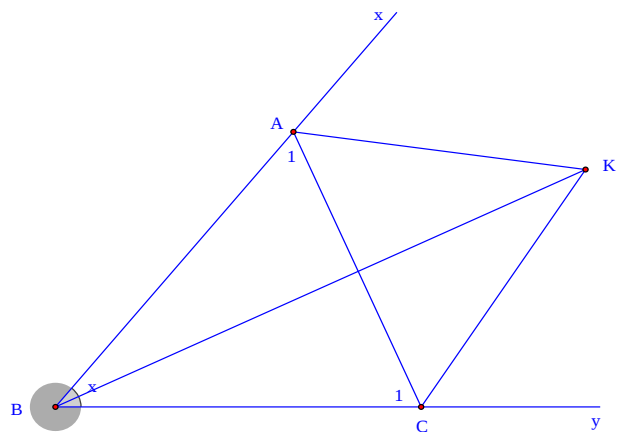
Xét $\triangle ABC$ có đường phân giác của $\widehat{B}$ và đường phân giác ngoài tại đỉnh C cắt nhau tại K .
Suy ra AK là đường phân giác ngoài tại đỉnh A .

Ta đặt $\widehat{ABC} = x$ (độ) thì $\widehat{CAx} = x + \widehat{C}_1$;

$$\widehat{ACy} = x + \widehat{A}_1.$$

Do đó: $\widehat{CAx} + \widehat{ACy} = x + \widehat{C}_1 + x + \widehat{A}_1 = x + 180^\circ$.

$$\text{Suy ra } \frac{\widehat{CAx} + \widehat{ACy}}{2} = 90^\circ + \frac{x}{2}$$



Hình 19.7

$$\text{Xét } \triangle AKC \text{ có } \widehat{AKC} = 180^\circ - \frac{\widehat{CAx} + \widehat{ACy}}{2} = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{x}{2}\right) = 90^\circ - \frac{x}{2}$$

$$\text{Vì } \widehat{AKC} = 65^\circ \text{ nên } 90^\circ - \frac{x}{2} = 65^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$$

19.2 (h 19.8)

Xét $\triangle BOC$ có $\widehat{BOC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Mà $\widehat{BOC} = 150^\circ$ nên

$$90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$$

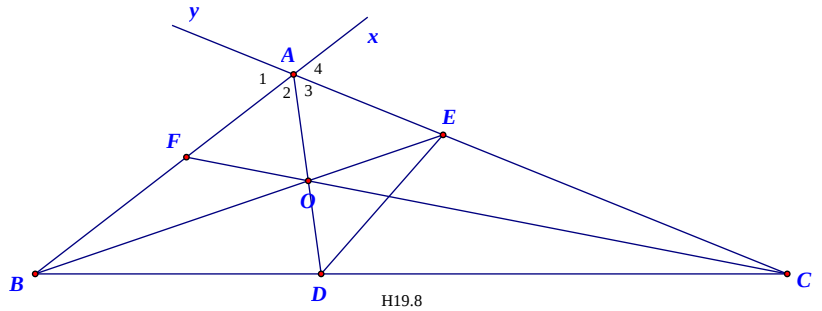
Vẽ các tia Ax, Ay lần lượt là tia đối của các tia AB, AC

Dễ thấy $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = \widehat{A_4} = 60^\circ$

Xét $\triangle ABD$ có AC là đường phân giác ngoài tại đỉnh A , BO là đường phân giác trong không kề. Hai đường phân giác này cắt nhau tại E , suy ra DE là đường phân giác ngoài tại đỉnh D của $\triangle ABD$

Chứng minh tương tự ta được DF là đường phân giác ngoài tại đỉnh D của $\triangle ACD$

Suy ra $DE \perp DF$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù) do đó $\widehat{EDF} = 90^\circ$

**19.3 (h19.9)**

Vì O là giao điểm các đường phân giác của góc B , góc C nên AO là đường phân giác góc A , do đó $\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = 45^\circ$

Vẽ $OH \perp AC$ thì $\triangle HAO$ vuông cân tại H , suy ra $AH \perp OH$

Áp dụng định lý Pytago ta có:

$$AH^2 + OH^2 = OA^2 \Rightarrow 2OH^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$$

$$\Rightarrow OH^2 = 4 \Rightarrow OH = 2$$

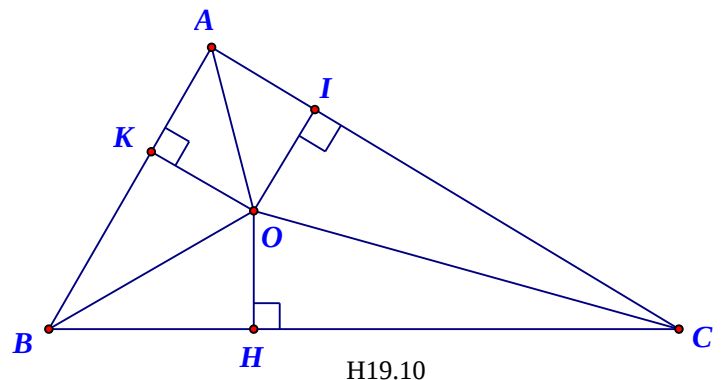
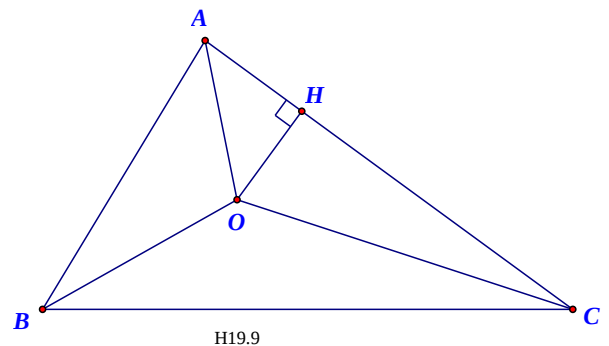
Vậy khoảng cách từ O tới mỗi cạnh của tam giác là $2cm$

19.4 (h 19.10)

Vẽ thêm $OK \perp AB; OI \perp AC$

$\triangle AOK = \triangle AOI$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$$\Rightarrow AK = AI$$



Chúng minh tương tự ta được $BK = BH; CI = CH$

Suy ra $BK + CI = BH + CH = BC = 6cm$

Do đó $AK + AI = (3+5) - 6 = 2cm$ mà $AK = AI$ nên $AK = AI = 1cm$

Vậy $BK = 3 - 1 = 2cm \Rightarrow BH = 2cm$ và $CH = 6 - 2 = 4cm$

19.5 (h 19.11)

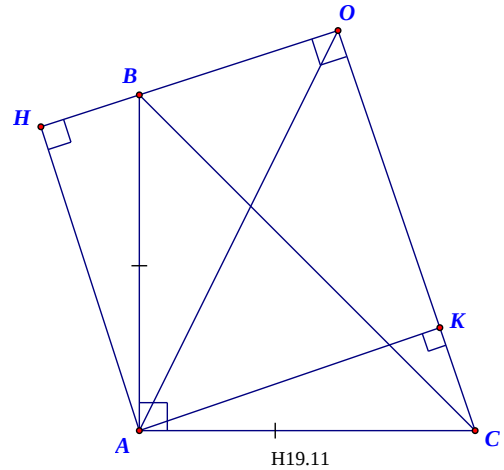
Vẽ $AH \perp OB; AK \perp OC$ ta được $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\triangle ABH = \triangle ACK$ (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra $AH = AK$

Điểm A ở trong góc BOC và cách đều hai cạnh của góc này nên A nằm trên tia phân giác của góc đó.

Như vậy tia OA là tia phân giác của góc BOC



19.6 (h 19.12)

Vẽ $MD \perp BH; ME \perp AN$

$\triangle DBM$ và $\triangle EAM$ có

$$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$$

$$BM = AM \left(= \frac{1}{2} BC \right)$$

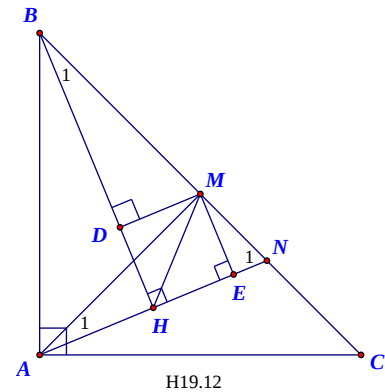
$$\widehat{B_1} = \widehat{A_1} \text{ (cùng phụ với } \widehat{N_1} \text{)}$$

Do đó $\triangle DBM = \triangle EAM$ (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra $MD = ME$

Điểm M cách đều hai cạnh của góc BHN nên HM là tia phân giác của góc BHM .

Nói cách khác tia phân giác của góc BHM luôn đi qua một điểm cố định là điểm M .

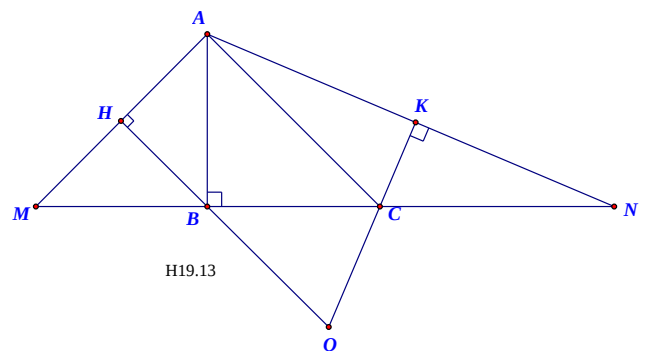


19.7 (h 19.13)

$\triangle ABH = \triangle MBH$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

Suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{MBH}$

Chúng minh tương tự ta được $\widehat{ACK} = \widehat{NCK}$



Xét $\triangle ABC$ có BH và CK là hai đường phân giác ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại O nên AO là đường phân giác của góc BAC

19.8 (h 19.14)

Xét $\triangle ABC$ có hai đường phân giác góc B , góc C cắt nhau tại O

Suy ra tia AO là đường phân giác thứ ba

Từ đó ta được $\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = \widehat{CAD} = \widehat{BAE} = 60^\circ$

$$\triangle BAE = \triangle BAO (g.c.g) \Rightarrow BE = BO$$

$$\triangle CAD = \triangle CAO (g.c.g) \Rightarrow CD = CO$$

Do đó $\triangle BDE = \triangle BDO (c.g.c)$

$$\Rightarrow DE = DO (1)$$

$$\triangle CED = \triangle CEO (c.g.c) \Rightarrow DE = OE (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = DE$ nên $\triangle ODE$ đều

b) ta có $\widehat{BDE} = \widehat{BDO}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

$\widehat{CED} = \widehat{CEO}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

Xét $\triangle ODE$ có hai đường phân giác của góc D , góc E cắt nhau tại A , suy ra OA là đường phân giác của góc DOE

19.9 (h 19.15)

Tìm cách giải

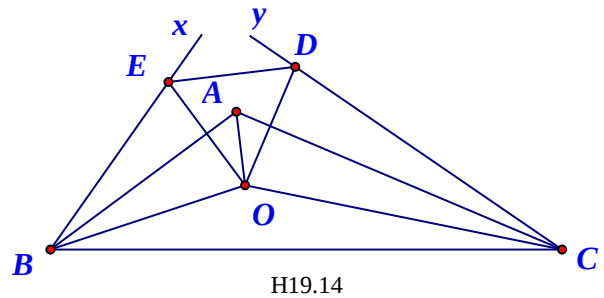
Giả sử vẽ được $MN \parallel BC$ sao cho $BM + CN = BC$

Lấy điểm $D \in BC$ sao cho $BD = BM$, khi đó $CD = CN$

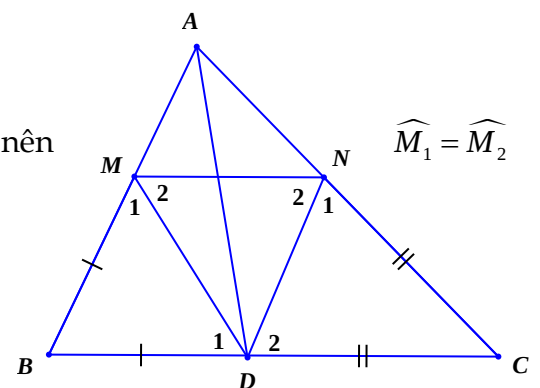
$\triangle BMD$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{D}_1$ mà $\widehat{M}_2 = \widehat{D}_2$ (cặp góc so le trong) nên

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$.

Xét $\triangle AMN$ có D là giao điểm hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh M và N , suy ra AD là đường phân giác của góc A .



H19.14



Hình 19.15

- Cách vẽ MN
- Vẽ đường phân giác AD của $\triangle ABC$;

- Trên cạnh BA lấy điểm M sao cho $BM = BD$;
- Từ M vẽ $MN \parallel BC$ ($N \in AC$).

Khi đó MN là đoạn thẳng cần vẽ.

• Chứng minh

Theo cách vẽ ta có $MN \parallel BC$. Do đó $\widehat{M}_2 = \widehat{D}_1$ (so le trong)

Mà $\widehat{M}_1 = \widehat{D}_1$ (hai góc ở đáy của tam giác cân) nên $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_1$.

Xét $\triangle AMN$ có D là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác góc ngoài tại đỉnh M nên ND là đường phân giác ngoài tại đỉnh N do đó $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$.

Mặt khác, $\widehat{D}_2 = \widehat{N}_2$ (so le trong) nên $\widehat{N}_1 = \widehat{D}_2$, suy ra $\triangle CND$ cân, dẫn tới $CN = CD$.

Vậy $BM + CN = BD + CD = BC$.

19.10. (h19.16)

Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

Xét $\triangle ABM$ có $AD \perp AC$ mà AD là đường phân giác trong của góc A nên AC là đường phân giác ngoài tại đỉnh A .

Từ đó suy ra $\triangle ANC = \triangle AMC$ (c.g.c)

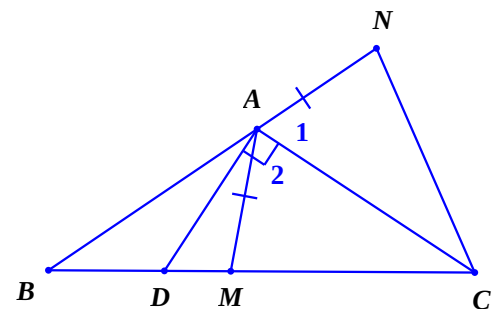
$\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{AMC}$.

Ta có $\widehat{BAD} = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ$, do đó $\widehat{BAM} = 30^\circ$.

Xét $\triangle ABM$ có góc AMC là góc ngoài nên

$\widehat{AMC} = \widehat{BAM} + \widehat{B} = 70^\circ$

Suy ra $\widehat{N} = 70^\circ$.



Hình 19.16

Xét $\triangle BCN$ có $\widehat{BCN} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{N}) = 180^\circ - (40^\circ + 70^\circ) = 70^\circ$.

Vậy $\widehat{BCN} = \widehat{N} (= 70^\circ)$, suy ra $\triangle BCN$ cân tại B .

Do đó $BN = BC$, dẫn tới $AB + AN = BC$ hay $AB + AM = BC$.

19.11. (h19.17)

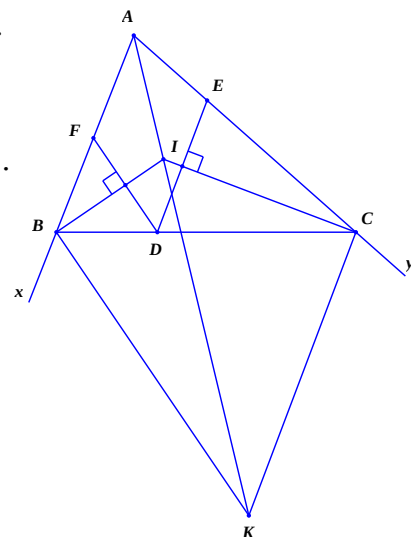
$\triangle BDF$ và $\triangle CDE$ là những tam giác cân.

Mặt khác, $BI \perp DF, CI \perp DE$ nên ta có

BI và CI lần lượt là các đường phân giác của góc B và C . Suy ra I nằm trên đường phân giác của góc A . (1)

Ta có $BK \parallel DF$ mà $BI \perp DF$ nên $BI \perp BK$, do đó BK là đường phân giác ngoài tại đỉnh B của $\triangle ABC$.

Chứng minh tương tự ta có CK là phân giác ngoài tại đỉnh C của $\triangle ABC$. Do đó K nằm trên



Hình 19.17

đường phân giác của góc A , (2)

Từ (1) và (2). Suy ra ba điểm A, I, K thẳng hàng.

19.12. (h.19.18)

Xét $\triangle ADK$ có AC là đường phân giác của góc trong tại đỉnh A . Mặt khác, $AB \perp AC$ nên AB là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh A . Xét $\triangle ADK$

có B là giao điểm của một đường phân giác trong và phân giác ngoài không kề nên tia KB là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh K .

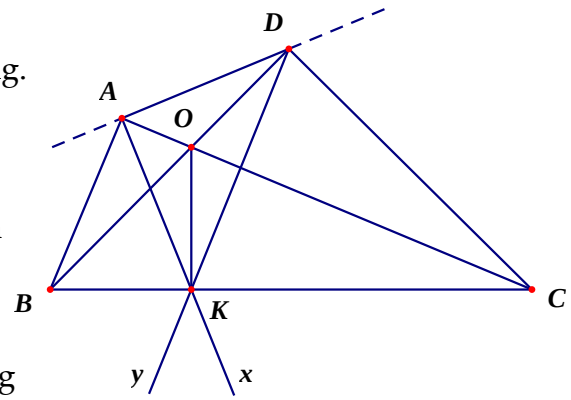
Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Xét $\triangle ADK$ có O là giao điểm của hai đường phân giác nên KO là đường phân giác của góc K .

$\Rightarrow KO \perp KB$ (tính chất 2 đường phân giác của hai góc kề bù). (1)

Chứng minh tương tự ta được $KO \perp KC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm B, K, C thẳng hàng.

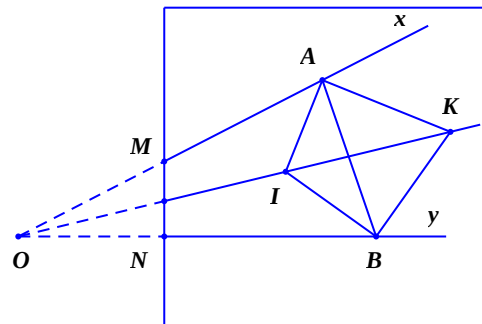


Hình 19.18

19.13. (h.19.19)

Giả sử góc xOy có đỉnh O nằm ngoài tờ giấy, còn lại một phần của hai cạnh nằm trong tờ giấy. ta vẽ đường thẳng chứa tia phân giác của góc xOy như sau:

- Lấy $A \in Mx$ và $B \in Ny$;
- Vẽ các tia phân giác của góc MAB và NBA , chúng cắt nhau tại I ;
- Vẽ đường thẳng IK , đường thẳng này chứa tia phân giác của góc xOy .



Hình 19.19

Thật vậy, xét $\triangle OAB$ có I là giao điểm của các

đường phân giác của góc A , góc B , còn K là giao điểm của các đường phân giác ngoài tại đỉnh A , đỉnh B . Do đó I, K cùng nằm trên đường phân giác của góc xOy , tức là đường thẳng IK chứa tia phân giác của góc xOy .

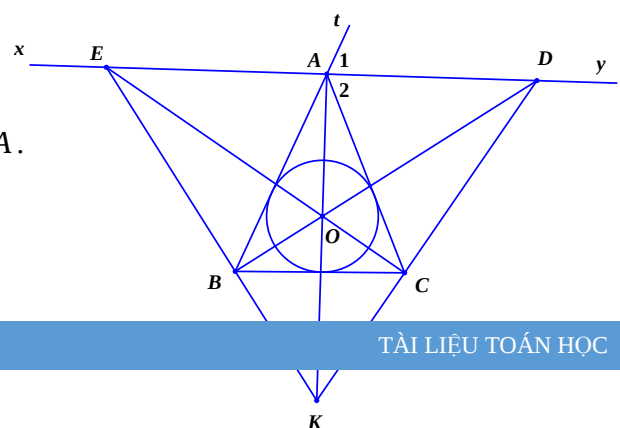
19.14. (h.19.20)

Điểm O là giao điểm hai đường phân giác của góc B

và góc C nên AO là đường phân giác của góc A .

Vẽ tia At là tia đối của tia AB .

$\widehat{A_1} = \widehat{ABC}$ (cặp góc đồng vị);



Hình 19.20

$$\widehat{A_2} = \widehat{ACB} \text{ (cặp góc so le trong)}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \text{ nên } \widehat{A_1} = \widehat{A_2}.$$

Xét $\triangle ABC$ có D là giao điểm của phân giác góc B và đường phân giác góc ngoài tại đỉnh A nên CD là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh C .

Chứng minh tương tự ta được BE là phân giác góc ngoài tại đỉnh B .

Ba đường phân giác BE, CD, AO là hai đường phân giác góc ngoài và đường phân giác của góc trong không kề nên chúng cùng đi qua một điểm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 20. TÍNH CHẤT CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC.

20.1. (h.20.7)

Điểm D nằm trên đường trung trực của AB nên $DA = DB$.

Suy ra $\triangle DAB$ cân, do đó $\widehat{A_1} = \widehat{B}$

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{A_2} = \widehat{C}$.

$$\text{Ta có } \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{BAC}.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{A_3} = \widehat{BAC} - (\widehat{A_1} + \widehat{A_2})$$

$$\text{nên } 30^\circ = \widehat{BAC} - (180^\circ - \widehat{BAC}).$$

$$\text{Suy ra } 2\widehat{BAC} - 180^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 105^\circ$$

20.2. (h.20.8)

Vẽ tia phân giác của góc B , góc C , chúng cắt nhau tại điểm O ở trong tam giác ABC .

Đó là một điểm cố định.

Trên cạnh BC lấy một điểm M

sao cho $BM = BD$, khi đó $CM = CE$.

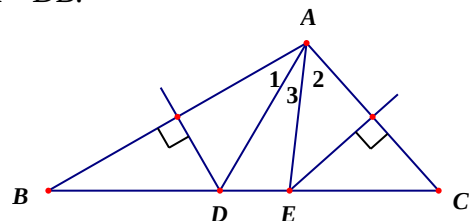
$$\triangle BOD = \triangle BOM (c \cdot g \cdot c) \Rightarrow OD = OM. (1)$$

$$\triangle COE = \triangle COM (c \cdot g \cdot c) \Rightarrow OE = OM. (2)$$

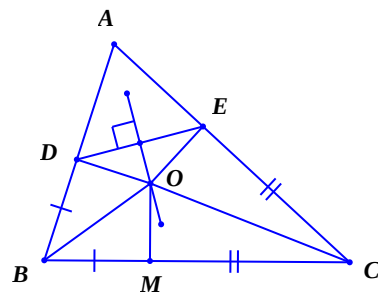
Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE$. Điểm O cách đều hai đầu đoạn thẳng DE nên O nằm trên đường trung trực của DE . Nói cách khác, đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định là điểm O .

20.3. (h.20.9)

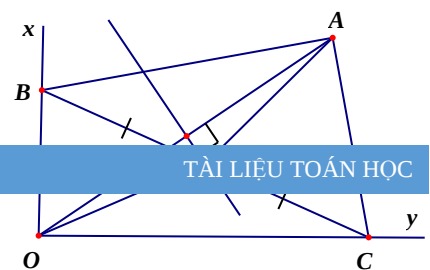
Tam giác ABC vuông tại A , tam giác OBC vuông ở O có là các đường trung tuyến ứng



Hình 20.7



Hình 20.8



Hình 20.9

với cạnh huyền nên $MA = MO = \frac{1}{2}BC$.

Điểm M cách đều hai đầu đoạn thẳng OA cố định nên M nằm trên đường trung trực của OA . Do đó M nằm trên một đường thẳng cố định.

20.4. (h.20.10)

Vì AB, AC là đường trung trực của MD, ME nên

$$AD = AM; AE = AM.$$

$\triangle AMD$ và $\triangle AME$ cân tại A , suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$.

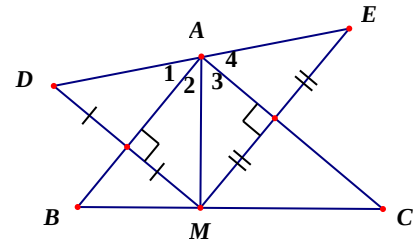
Do đó $\widehat{MAD} = 2\widehat{A_2}; \widehat{MAE} = 2\widehat{A_3}$.

Ta có $\widehat{DAE} = \widehat{MAD} + \widehat{MAE} = 2(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}) = 2\widehat{BAC} = 2.90^\circ = 180^\circ$.

Suy ra ba điểm D, A, E thẳng hàng và $DE = AD + AE = 2AM$.

DE ngắn nhất $\Leftrightarrow AM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow AM \perp BC$

Vậy khi M là hình chiếu của A trên BC thì DE ngắn nhất hay khi MA là đường cao xuất phát từ đỉnh A của $\triangle ABC$ thì DE ngắn nhất.



Hình 20.10

20.5. (h.20.11)

a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có:

$$OA = \frac{1}{2}MN; OH = \frac{1}{2}MN$$

vậy $OA = OH$.

Điểm O cách đều hai đầu đoạn thẳng AH nên O di động trên đường trung trực xy cố định.

b) Ta có $MN = OM + ON = OA + OH \geq AH$

(bất đẳng thức tam giác mở rộng).

Dấu "=" xảy ra

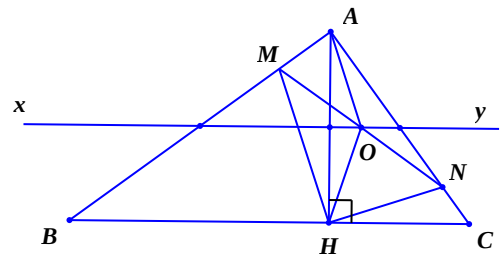
$\Leftrightarrow O$ nằm giữa A và H và $OA = OH$

$\Leftrightarrow O$ là trung điểm của AH

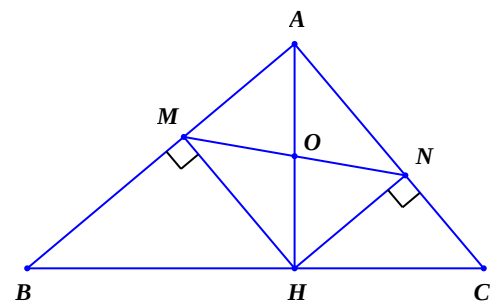
$\Leftrightarrow MO$ là đường trung tuyến ứng với AH của

$\triangle AMH$ và $MO = \frac{1}{2}AH \Leftrightarrow HM \perp AB; HN \perp AC$

Vậy có độ dài nhỏ nhất là bằng AH khi M và N lần lượt là hình chiếu của A trên AB và AC (hình 20.12).

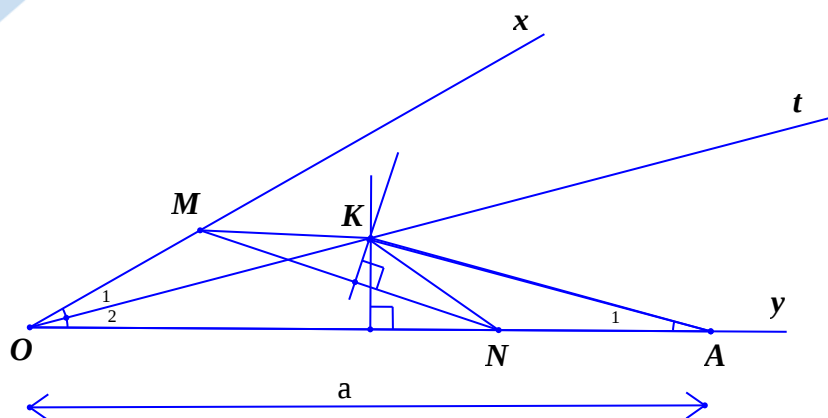


Hình 20.11

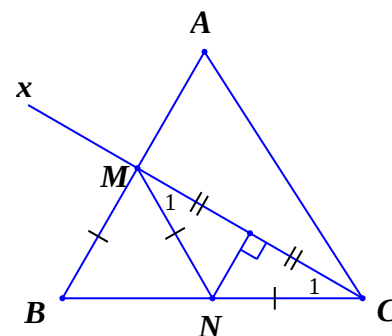


hình 20.12

20.6. (h.20.13)



Hình 20.13



Hình 20.14

Trên tia Oy lấy điểm A sao cho $OA = a$. Vì $OM + ON = a$
nên $OM = NA$. Vẽ đường phân giác Ot của góc xOy và vẽ đường trung trực của OA
chúng cắt nhau tại K . Ta phải chứng minh K là một điểm cố định và đường trung trực
của MN đi qua K .

Ta có OA trên tia Oy mà $OA = a$ không đổi nên A là một điểm cố định, do đó đường trung trực của OA cũng cố định. Tia Ot là tia phân giác của góc xOy nên Ot cũng cố định. Điểm K là giao điểm của hai đường thẳng cố định nên K cố định.

Điểm K nằm trên đường trung trực của OA nên $KO = KA$, do đó $\triangle KOA$ cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{O_2}$.
 Mặt khác $\widehat{O_1} = \widehat{O}$, nên $\widehat{A_1} = \widehat{O_1}$.

ΔKMO và ΔKNA có: $OM = NA$; $\widehat{O_1} = \widehat{A_1}$ và $KO = KA$. Do đó $\Delta KMO = \Delta KNA \Rightarrow KM = KN$.
 Vậy K nằm trên đường trung trực của MN , nói cách khác đường trung trực của MN đi qua điểm cố định là điểm K .

20.7. (h.20.14)

- *Tìm cách giải*

Giả sử đã xác định được điểm $M \in AB$,

điểm $N \in BC$ sao cho $BM = MN = NC$.

Ta có $\triangle MBN$ cân tại M nên $\widehat{B} = \widehat{N_1}$.

ΔMNC cân tại N nên $\widehat{M}_1 = \widehat{C}_1$.

Xét $\triangle MNC$ có $\widehat{N}_1$ là góc ngoài nên $\widehat{N}_1 = \widehat{C}_1 + \widehat{M}_1 = 2\widehat{C}_1$.

$$\Rightarrow \hat{C}_1 = \frac{1}{2} \hat{N}_1 = \frac{1}{2} \hat{B} .$$

Do đó xác định được điểm M rồi điểm N .

- Cách xác định điểm M , điểm N

- Ở trong góc C , vẽ tia Cx sao cho $\widehat{BCx} = \frac{1}{2}\widehat{B}$. Tia Cx cắt AB tại M .
- Vẽ đường trung trực của MC cắt BC tại N . Khi đó ta có $BM = MN = NC$.

• *Chứng minh*

Điểm N nằm trên đường trung trực của MC nên $NM = NC$. (1)

$\triangle MNC$ cân tại $N \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{C_1}$. Do đó $\widehat{N_1} = 2\widehat{C_1} = 2 \cdot \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{B}$.

$\Rightarrow \triangle MBN$ là tam giác cân $\Rightarrow MB = MN$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MB = MN = NC$.

20.8. (h.20.15)

Vẽ các đường trung trực của AD và BC , chúng cắt nhau tại O . Điểm O nằm trên đường trung trực của AD nên $OA = OD$.

Ta có $\triangle OBA = \triangle OCD$ (c.c.c).

$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCD}$.

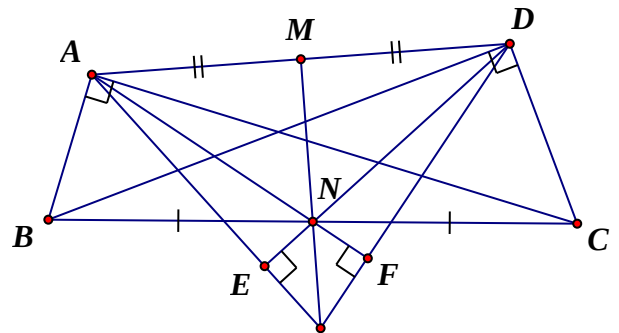
Do đó $\triangle OBM = \triangle OCN$ (c.g.c)

$\Rightarrow OM = ON$

Điểm O nằm cách đều hai đầu đoạn thẳng MN nên O nằm trên đường trung trực của MN .

Vậy ba đường trung trực của AD , BC và MN cùng đi qua điểm O .

Hình 20.15



Hình 20.16

20.9. (h.20.16)

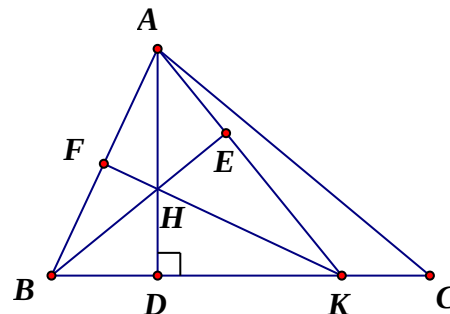
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , $\triangle DBC$ vuông tại D có AN và DN là các đường trung tuyến ứng với cạnh

huyền BC nên $AN = DN = \frac{1}{2}BC$.

$\Rightarrow \triangle NAD$ cân tại N , do

Đó đường trung tuyến NM cũng là đường cao.

Ba đường thẳng AE , DF , MN là ba đường cao của $\triangle NAD$ nên cùng đi qua một điểm.



Hình 20.17

20.10. (h.20.17)

Gọi E là giao điểm của BH và AK .

$\triangle DBH$ vuông cân tại D nên $\widehat{DBH} = 45^\circ$

$\triangle DKA$ vuông cân tại D nên $\widehat{DAK} = 45^\circ$

Xét $\triangle EBK$ có $\widehat{DBE} + \widehat{BKE} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BEK} = 90^\circ$, do đó $BE \perp AK$.

Xét $\triangle ABK$ có AD và BE là hai đường cao cắt nhau tại H .

$\Rightarrow KH$ là đường cao thứ ba, do đó $KH \perp AB$.

20.11. (H.20.18)

Ta có $\widehat{AHD} + \widehat{ACD} = 180^\circ$ (giả thiết)

(1)

và $\widehat{AHD} + \widehat{BHD} = 180^\circ$ (kề bù)

(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BHD}$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{ABC} + \widehat{BHD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BDH} = 90^\circ$.

Vậy $HD \perp BC$.

Xét $\triangle OBC$ có OD và BA là hai đường cao cắt nhau tại H ,

$\Rightarrow CH$ là đường cao thứ 3. Do đó $CH \perp OB$

20.12. (h.20.19)

$\widehat{BAC}$ và $\widehat{BHC}$ là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, một góc nhọn, một góc tù nên chúng bù nhau:

$\widehat{A} + \widehat{BHC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BHC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Điểm M nằm trên đường trung trực của HB

Nên $MH = MB$. Do đó $\triangle MHB$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{MBH} = 30^\circ$. Chứng minh tương tự ta được: $\widehat{CHN} = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{MHB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHN} = 30^\circ + 120^\circ + 30^\circ \Rightarrow \widehat{MHN} = 180^\circ$.

20.13. (h.20.20)

Vì $\triangle ABC$ nhọn nên O và H nằm trong tam giác.

Điểm O cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$ nên

$OA = OB = OC$.

do đó $\triangle AOB, \triangle AOC$ cân tại O .

$\Rightarrow \widehat{O_1} = 2\widehat{A_1}; \widehat{O_2} = 2\widehat{A_2}$.

Do đó: $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 2(\widehat{A_1} + \widehat{A_2})$ hay

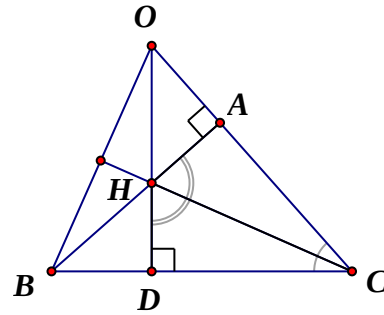
$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

Điểm H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên $BH \perp AC, CH \perp AB$.

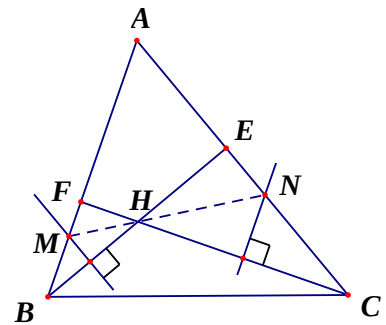
Hai góc BAC và BHC là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, một góc nhọn, một góc tù nên:

$\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$,

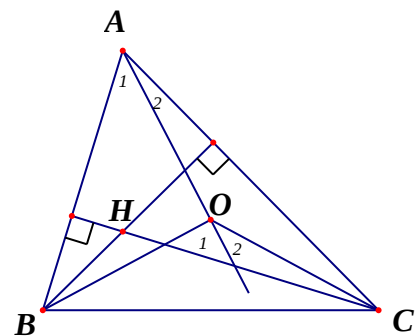
Do đó $2\widehat{BHC} = 360^\circ - 2\widehat{BAC}$.



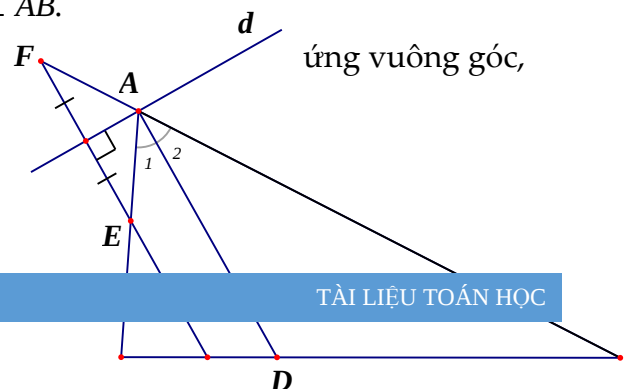
Hình 20.18



Hình 20.19



Hình 20.20



Hình 20.21

$$\text{Vậy } \widehat{BOC} + 2\widehat{BHC} = 2\widehat{BAC} + (360^\circ - 2\widehat{BAC}) = 360^\circ.$$

20.14. (h.20.21)

Ta có $EF \parallel AD$ nên $\widehat{FEA} = \widehat{A_1}$; $\widehat{F} = \widehat{A_2}$.

Mặt khác: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{FEA} = \widehat{F}$.

$\Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A .

Trong tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường phân giác của góc ở đỉnh nên đường trung trực d của EF đi qua đỉnh A , Đó là một định lý cố định.

20.15. (h.20.22)

Giải sử $\triangle EFG$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{CEH} = 60^\circ$
nên $\widehat{C_1} = 30^\circ$, $\widehat{C_2} = 30^\circ$. Ta còn có $\widehat{CMG} = \widehat{EGF} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{CMG} = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$.

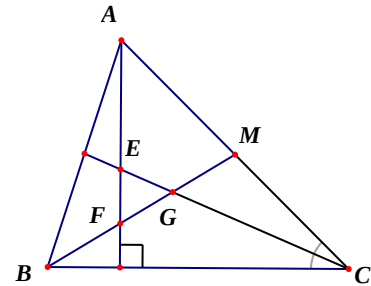
$\Rightarrow BM \perp AC$.

Xét $\triangle ABC$ có đường trung tuyến BM đồng thời là đường cao nên $\triangle ABC$ cân.

Mặt khác: $\widehat{ACB} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$

Là tam giác đều.

Do đó ba đường AH, BM, CD phải đồng quy, tức là ba điểm E, F, G trùng nhau trái giả thiết. Vậy $\triangle EFG$ không thể là tam giác đều.



Hình 20.22

HƯỚNG DẪN GIẢI**Chuyên đề 21. CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG CÙNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM (ĐỒNG QUY).****21.1. (h.21.8)**

Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta phải chứng minh MN đi qua O , tức là phải chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Ta có: $\triangle AOB = \triangle COD$ (g.c.g)

$\Rightarrow OA = OC$ và $\widehat{A} = \widehat{C}$.

$\triangle MOA = \triangle NOC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{NOC}$.

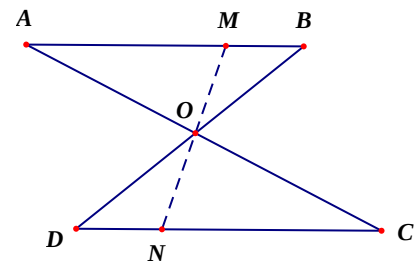
Ta có $\widehat{MOA} + \widehat{MOC} = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{NOC} + \widehat{MOC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MON}$ là góc bẹt.

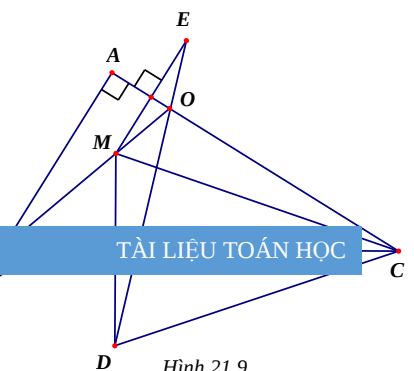
Do đó ba điểm M, O, N thẳng hàng, dẫn tới ba đường thẳng AC, BD và MN đồng quy.

21.2. (h.21.9)

Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng BM và AC .



Hình 21.8



Hình 21.9

Ta phải chứng minh DE đi qua O .

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , $\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$.

Ta có: $\widehat{BOC} = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$.

Do đó: $\widehat{CMO} = 180^\circ - (110^\circ + 10^\circ) = 60^\circ$.

Điểm C nằm trên đường trung trực của MD và ME nên $CD = CM = CE$.

Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = \widehat{A_4} = 60^\circ$. $\triangle CEO = \triangle CMO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{CEO} = \widehat{CMO} = 60^\circ$

Xét tam giác CDE cân tại C có

$$\widehat{DCE} = \widehat{DCM} + \widehat{ECM} = 2(\widehat{BCM} + \widehat{ACM}) = 2\widehat{ACB} = 60^\circ$$

Vậy tam giác CDE là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{CED} = 60^\circ$

Vậy $\widehat{CED} = 60^\circ = \widehat{CEO}$ ($= 60^\circ$), hai tia ED và EO trùng nhau dẫn tới ba điểm D, O, E thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng BM, AC , và DE đồng quy.

21.3

Gọi O là giao điểm của các tia Bx và Cy .

Ta phải chứng minh đường thẳng AM đi qua O . Vẽ

Tam giác BOC là tam giác đều nên $\widehat{BOC} = 60^\circ$. (1)

Ta có tổng $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} + \widehat{BMC} = 360^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = 360^\circ - (120^\circ + 120^\circ) = 120^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tính được $\widehat{MBO} + \widehat{MCO} = 180^\circ$.

Mặt khác $\widehat{MBO} + \widehat{HBO} = 180^\circ$.

Nên $\widehat{MCO} = \widehat{HBO}$ (cùng bù với $\widehat{MBO}$)

Ta có $\triangle KCO = \triangle HBO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow OK = OH$$

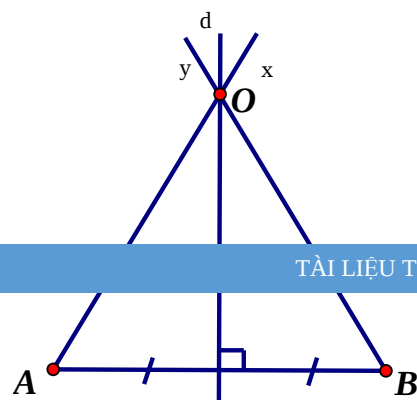
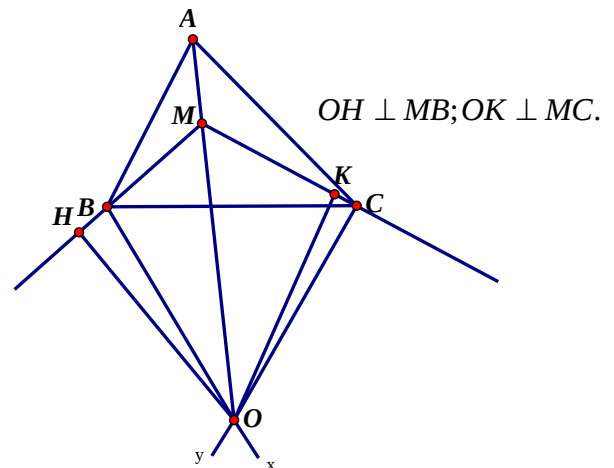
$\triangle MOK = \triangle MOH$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{KMO} = \widehat{HMO} = 120^\circ : 2 = 60^\circ$$

Do đó $\widehat{AMC} + \widehat{KMO} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.

Suy ra ba điểm A, M, O thẳng hàng,

dẫn tới ba đường thẳng AM, Bx, Cy đồng quy.



21.4

Gọi O là giao điểm của hai tia Ax và By .

Xét $\triangle ABO$ có $\widehat{A} = \widehat{B}$ nên $OA = OB$,

suy ra điểm O nằm trên đường trung trực d của AB .

Vậy các đường thẳng Ax , By và d đồng quy.

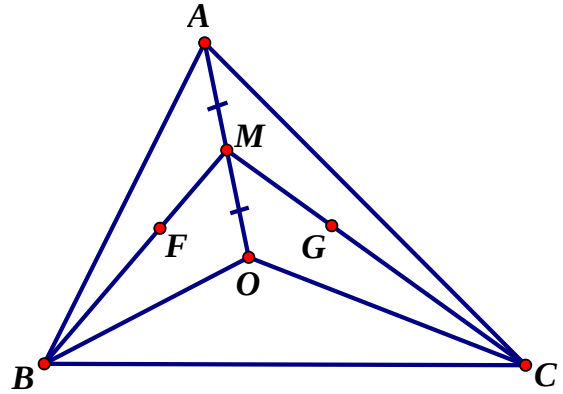
21.5

Gọi M là trung điểm của OA .

Xét tam giác AOB có F là trọng tâm nên đường thẳng BF đi qua trung điểm M của AO .

Xét tam giác AOC có G là trọng tâm nên đường thẳng CG đi qua trung điểm M của AO .

Do đó ba đường thẳng AO , BF , CG đồng quy tại trung điểm M của AO .



21.6

Hai đường thẳng AB và CD không song song nên chúng cắt nhau tạo thành một góc. Hai điểm M và N nằm trong góc đó, cùng cách đều hai đường thẳng này nên chúng nằm trên tia phân giác của góc này. Suy ra ba đường thẳng AB , CD , và MN đồng quy tại đỉnh của góc.

21.7

Xét tam giác ABC có hai đường phân giác AD , CE cắt nhau tại O nên BO là phân giác của góc ABC .

Đường thẳng xy đi qua B và vuông góc với BO nên xy là đường phân giác ngoài tại đỉnh B của góc ABD .

Gọi Ax là tia đối của tia AD .

Vì $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên dễ thấy $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = \widehat{A_4} = 60^\circ$.

Xét tam giác ADC có AE là đường phân giác ngoài tại đỉnh A , CE là phân giác trong tại đỉnh C nên DE là phân giác ngoài tại đỉnh D .

Xét tam giác ABD có đường thẳng AC là đường phân giác ngoài tại đỉnh A , đường thẳng xy là đường phân giác ngoài tại đỉnh B , đường thẳng DE là đường phân giác trong tại đỉnh D . Do đó ba đường thẳng xy , DE , và AC đồng quy.

21.8

Điểm F nằm trên đường trung trực của DM nên $FD = FM$

Suy ra tam giác FDM cân tại F do đó FB là đường phân giác ngoài tại đỉnh của tam giác DEF.

Chứng minh tương tự ta được EC là đường phân giác ngoài tại đỉnh của tam giác DEF.

Xét tam giác DEF có hai đường phân giác ngoài cắt nhau tại A nên DA là đường phân giác của EDF (1)

Mặt khác $\widehat{AFB} = \widehat{FAC} + \widehat{FCA} = \widehat{FAH} + \widehat{BAH} = \widehat{FAB}$ $DB \perp DA$ nên DB là đường phân giác ngoài của góc D

Điểm B là giao điểm của hai đường phân giác ngoài tại đỉnh F và D của tam giác DEF nên EB là đường phân giác của góc DEF (2)

Chứng minh tương tự ta được FC là đường phân giác của góc DEF (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra AD, BE, CF đồng quy.

- Lưu ý: Nếu bỏ điều kiện nhọn của tam giác ABC thì bài toán vẫn đúng.

21.9 Xét tam giác ABC vuông tại A, $AH \perp BC$ nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với góc ABC)

Gọi M là giao điểm của AO và CK, N là giao điểm của AK và BO.

Vì K là giao điểm của các đường phân giác của tam giác ACH nên $\widehat{ACK} = \widehat{BCK}$

Xét tam giác AMC có

$$\widehat{MAC} + \widehat{MCA} = \widehat{MAC} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{MAC} + \frac{\widehat{BAH}}{2} = \widehat{MAC} + \widehat{MAB} = \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp AO$$

Chứng minh tương tự ta được $BN \perp AK$

Xét tam giác AOK có AD, BO và CK là ba đường cao nên đồng quy.

21.10

Trên tia đối của tia AD lấy điểm K sao cho $AK = BC$

Xét tam giác ADC có góc KAC là góc ngoài nên $\widehat{KAC} = \widehat{D} + \widehat{ACB} = 90^\circ + \widehat{ACB}$

Mặt khác $\widehat{BCE} = 90^\circ + \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{BCE}$

Ta có $\triangle KAC = \triangle BCE (c.g.c) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E}$

Vì $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} + \widehat{C_2} = 90^\circ$

Gọi G là giao điểm của BE và CK

Xét tam giác GCE có $\widehat{E} + \widehat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{G} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp CK$

Chứng minh tương tự, ta có $CF \perp AB$

Xét tam giác KBC có AD, BE, CF là ba đường cao nên chúng đồng quy.

21.11

Tam giác EAB vuông tại E, $\widehat{A}_1 = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

Suy ra $EA = EB$, Tương tự ta có $FA = FC$

Từ F vẽ một đường thẳng vuông góc với CE cắt d tại G

Gọi K là giao điểm của đường thẳng EG với BF

Ta có $\widehat{AFG} = \widehat{FCE}$ (Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$$\Delta AFG = \Delta FCE (g.c.g) \Rightarrow AG = FE$$

$$\Delta AGE = \Delta EFB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AGE} = \widehat{EFB}$$

$$\text{Ta có } \widehat{AGE} + \widehat{AEG} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EFB} + \widehat{KEF} = 90^\circ \Rightarrow EK \perp BF$$

Xét tam giác EFG có CE, BF và d_1 là ba đường cao do đó ba đường thẳng này đồng quy.

21.12

Tam giác ABC vuông tại A, $AH \perp BC$ nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với góc ABC)

Ta có $\widehat{CAH} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc ACB)

$$\text{Xét tam giác AFC có góc AFB là góc ngoài nên } \widehat{AFB} = \widehat{FAC} + \widehat{FCA} = \widehat{FAH} + \widehat{BAH} = \widehat{FAB}$$

Suy ra tam giác BAF cân tại B do đó đường phân giác của góc B đồng thời là đường trung trực của AF

Chứng minh tương tự ta được tam giác CAE cân tại C do đó đường phân giác của góc C cũng là đường trung trực của AE

Ta có $d // AH$ mà AH vuông góc với EF nên d vuông góc với EF.

Xét tam giác AEF có các đường phân giác của góc B, góc C cùng với đường thẳng d là ba đường trung trực nên chúng đồng quy.

21.13

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow E \equiv F \Leftrightarrow DH = EK \Leftrightarrow \Delta HBD = \Delta KCE \Leftrightarrow BD = CE \Leftrightarrow BD = AD \Leftrightarrow D$$

$$\widehat{CAD} = \widehat{ACD} \Rightarrow \Delta DAC \text{ cân} \Rightarrow DC = DA (1)$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại A} \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$$

Mặt khác, $\widehat{BAD} + \widehat{CAD} = 90^\circ$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$

Do đó, $\triangle DAB$ cân $\Rightarrow DB = DA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DB = DC$. Vậy D là trung điểm của BC

Xét tam giác ABE vuông tại A có $AE^2 = BE^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AE = 3(cm)$

$\Rightarrow E$ là trung điểm của AC

Xét tam giác AFC vuông tại A có $AF^2 = CF^2 - AC^2 = (\sqrt{40})^2 - 6^2 = 4 \Rightarrow AF = 2(cm)$

Suy ra F là trung điểm của AB

Xét tam giác ABC có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy.

21.14

Tam giác ABH vuông tại H, có HM là đường trung tuyến nên $HM = \frac{1}{2}AB$

Suy ra $DM = \frac{1}{2}AB$ (vì $HM = DM$)

Do đó tam giác DAB vuông tại D.

Tam giác ABC có BD vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân tại B

$\Rightarrow BA = BC$ (1) $\Rightarrow DA = DC$

Xét $\triangle HAC$ và $\triangle HAB$ vuông tại H có $HD = \frac{1}{2}AC$; $HM = \frac{1}{2}AB$ mà $HD = HM$ nên $AC = AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB = BC = CA$ do đó tam giác ABC đều.

Trong tam giác đều ABC đường cao AH, đường trung tuyến CM cũng là đường phân giác. Suy ra AH, BD, CM đồng quy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chuyên đề 22. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC.

22.1

* Nếu $\widehat{B} = \widehat{C}$ thì tam giác ABC cân, $\widehat{A} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều. Do đó $AB = BC = CA$

Suy ra $AB^2 = BC^2 = CA^2$. Vậy $BC^2 < AB^2 + CA^2$

- Nếu $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì $\widehat{B} > 60^\circ$ (vì $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$)
Do đó $\widehat{A} < \widehat{B} \Rightarrow BC < AC \Rightarrow BC^2 < AB^2 + AC^2$
- Nếu $\widehat{B} < \widehat{C}$, cũng chứng minh tương tự ta được $BC^2 < AB^2 + CA^2$

22.2

Theo định lý Pytago ta có $BE^2 = 2AB^2, CF^2 = 2AC^2$ mà $AB < AC$ nên $BE < CF$,

Để thấy $\triangle ABF = \triangle AEC$ (c.g.c) $\Rightarrow BF = CE$

Xét $\triangle CBE$ và $\triangle BCF$ có : BC chung, CE = BF, BE < CF

$\Rightarrow \widehat{ECB} < \widehat{FBC}$ hay $\widehat{ECD} < \widehat{FBD}$

Xét $\triangle ECD$ và $\triangle FBD$ có CE = BF, DC = DB và $\widehat{ECD} < \widehat{FBD} \Rightarrow DE < DF$ (Định lý hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau)

22.3

Vẽ đường trung trực của BC cắt BC tại M, cắt AC tại N.

Ta có NB = NC; tam giác NBC cân $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{NBC}$

Tam giác BAM có BA = BM $\left(= \frac{1}{2} BC \right)$ nên là tam giác cân

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ mà $\widehat{BAN} > 90^\circ, \widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} > \widehat{AMN} \Rightarrow MN > AN$ (Quan hệ giữa cạnh đối diện trong một tam giác)

$\triangle MHN$ và $\triangle ABN$ có BM = BA, BN chung, MN > AN

Do đó $\widehat{MBN} > \widehat{ABN}$ (định lý hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau)

Suy ra $\widehat{MBN} + \widehat{MBN} > \widehat{ABN} + \widehat{MBN}$

Do đó $2\widehat{MBN} > \widehat{ABC} \Rightarrow 2\widehat{C} > \widehat{B}$ (vì $\widehat{C} = \widehat{MBN}$) $\Rightarrow \widehat{C} > \frac{\widehat{B}}{2}$

22.4

Trên tia đối của tia AM lấy điểm D sao cho MD = MA

$\triangle ABM = \triangle DCM$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CD; \widehat{A_1} = \widehat{D}$

Do đó AB // CD

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{DCA} = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía) (*)

- Chứng minh mệnh đề “ Nếu góc A nhọn thì $AM > \frac{BC}{2}$ ”

Nếu $AM = \frac{BC}{2}$ thì $2AM = BC$ do đó $AD = BC$.

$$\triangle ABC = \triangle DCA (c.c.c) \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DCA} = 180^\circ : 2 = 90^\circ, \text{ trái GT}$$

Nếu $AM < \frac{BC}{2}$ thì $2AM < BC$ do đó $AD < BC$

$\triangle BAC$ và $\triangle DCA$ có $AB = CD$; AC chung và $BC > AD$

Do đó $\widehat{BAC} > \widehat{DCA}$

Từ (*) suy ra $\widehat{BAC} > 90^\circ$, trái GT

Vậy nếu góc A nhọn thì $AM > \frac{BC}{2}$

- Chứng minh mệnh đề “ Nếu $AM > \frac{BC}{2}$ thì góc A nhọn ”

Nếu $\hat{A} = 90^\circ$ thì từ (*) suy ra $\widehat{DAC} = 90^\circ$

$$\triangle BAC = \triangle DCA (c.g.c) \Rightarrow BC = AD \text{ hay } AM = \frac{BC}{2}, \text{ trái GT}$$

Nếu $\hat{A} > 90^\circ$ thì từ (*) suy ra $\widehat{DCA} < 90^\circ$. Vậy $\widehat{BAC} > \widehat{DCA}$

$\triangle BAC$ và $\triangle DCA$ có: $AB = CD$; AC chung và $\widehat{BAC} > \widehat{DCA}$

Do đó $BC > AD$ hay $BC > 2AM$ tức là $AM < \frac{BC}{2}$, trái GT

Vậy nếu $AM > \frac{BC}{2}$ thì góc A nhọn.

22.5

Vẽ các đoạn thẳng DA, DB, DC. Ta có $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDA} = 360^\circ$

Suy ra tồn tại ít nhất một góc có số đo nhỏ hơn hoặc bằng 120° (vì nếu cả ba góc đều lớn hơn 120° thì tổng của chúng lớn hơn 360° , vô lý)

Giả sử góc đó là góc BDC

Xét tam giác BDC có $\widehat{BDC} \leq 120^\circ$, suy ra $\widehat{DBC} + \widehat{DCB} \geq 60^\circ$

Do đó tồn tại ít nhất một góc lớn hơn hoặc bằng $30^\circ > 29^\circ$

Vậy ba điểm cần tìm là B, C, D.

22.6

Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên đường thẳng a. Khi đó AH có độ dài không đổi. Ta có tam giác ABC vuông tại A nên $AM = \frac{1}{2}BC$ hay $BC = 2AM \geq 2AH$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

Do đó BC có độ dài nhỏ nhất là $2AH \Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow \Delta ABH$ vuông cân.

Ta xác định điểm B như sau:

- Dựng $AH \perp BC$;
- Trên đường thẳng a đặt $HB = HA$.

22.7

Vẽ $MH \perp BC; NK \perp BC; NI \perp MH$ khi đó $IN = HK$ và $IH = NK$ (tính chất đoạn chắn song song)

Ta có $OM \parallel AC \Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{C} = \widehat{B}$

Do đó ΔMBO cân tại M, từ đó ta được $HB = HO$

Tương tự ta có $KC = KO$. Suy ra $HK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $MN \geq IN = HK = \frac{a}{2}$

Dấu “=” xảy ra

$\Leftrightarrow M \equiv I \Leftrightarrow MH = NK \Leftrightarrow \Delta MHB = \Delta NKC \Leftrightarrow BH = CK \Leftrightarrow OH = OK \Leftrightarrow OB = OC \Leftrightarrow O$ là trung điểm của BC.

Vậy $\min MN = \frac{a}{2}$ khi O là trung điểm của BC.

22.8

Vẽ $DH \perp BC; EK \perp BC; DF \perp EK$, ta có $DF = HK$ (tính chất đoạn chắn song song)

Các tam giác vuông HBD và KCE có $\widehat{D} = \widehat{E} = 30^\circ$ nên $BH = \frac{1}{2}BD$; $CK = \frac{1}{2}CE$. Do đó

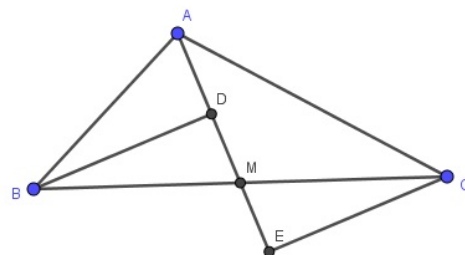
$$BH + CK = \frac{1}{2}(BD + CE) = \frac{1}{2}(BD + AD) = \frac{1}{2}AB = 2\text{cm}$$

Suy ra HK = 2cm.

Dấu “=” xảy ra

$\Leftrightarrow E \equiv F \Leftrightarrow DH = EK \Leftrightarrow \Delta HBD = \Delta KCE \Leftrightarrow BD = CE \Leftrightarrow B$
 là trung điểm của AB (Khi đó E là trung điểm của
 AC)

Vậy độ dài nhỏ nhất của DE là 2cm khi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC



22.9. (h.22.20)

$$\text{Vẽ } BD \perp AM, CE \perp AM (D, E \in AM).$$

Ta có $BD \leq BM, CE \leq CM$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên). Do đó $BD + CE \leq BM + CM = BC$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D$ và E trùng với $M \Leftrightarrow AM \perp BC$).

• **Tính độ dài BC** (h.22.21)

Vẽ $AH \perp BC$, $\triangle AHC$ vuông tại H có $\widehat{C} = 30^\circ$ nên $AH = \frac{1}{2}AC = 52 : 2 = 26(cm)$

Ta có $HC^2 = AC^2 - AH^2 = 52^2 - 26^2 = 2028 \Rightarrow HC = 45(cm)$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , có $\widehat{B} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

$\Rightarrow BH = AH = 26cm$. Do đó $BC = 26 + 45 = 71(cm)$.

Vậy giá trị lớn nhất của tổng $BD + CE$ là 71 cm khi M là hình chiếu của A trên BC .

22.10. (h.22.22)

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \alpha$ và $AB + AC = 2a$.

Ta phải chứng minh rằng khi $AB = AC = a$ thì $\triangle ABC$ chu vi sẽ nhỏ nhất.

Thật vậy, giả sử $AB < AC$.

Trên tia AB lấy điểm B' , trên tia AC lấy điểm C' sao cho $AB' = AC' = a$.

Khi đó B' và C' là các điểm cố định và $B'C'$ có độ dài không đổi.

Ta có $AB + AC = AB' + AC' = 2a$.

Do đó $AB + (AC' + C'C) = (AB + BB') + AC' \Rightarrow CC' = BB'$

Vẽ $BH \perp B'C$ và $CK \perp B'C'$.

$\triangle BB'H = \triangle CC'H$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow HB' = KC'$ do đó $HK = B'C'$. (1)

Gọi M là giao điểm của BC và $B'C'$.

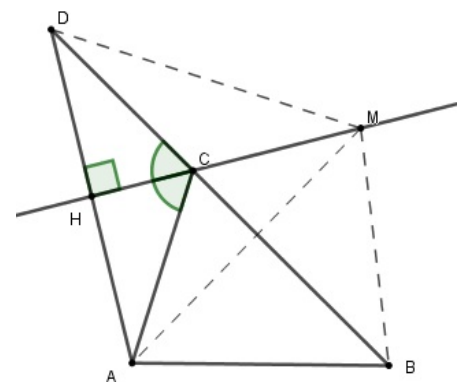
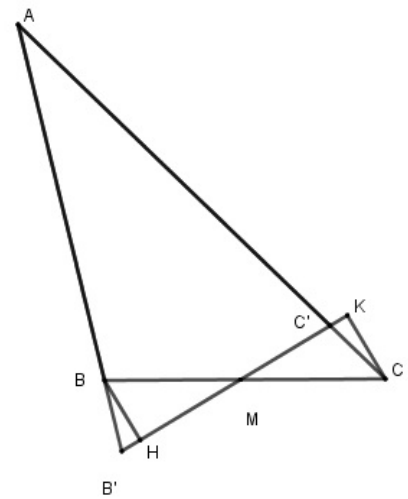
Ta có $MH \leq MD, MK \leq MC \Rightarrow MH + MK \leq MB + MC$ hay $HK \leq BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \geq B'C'$.

Ta có chu vi $\triangle ABC = AB + BC + CA \geq 2a + B'C'$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B' \equiv B$ và $C' \equiv C$.

Vậy chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất khi $AB = AC = a$, tức là khi $\triangle ABC$ cân tại A .



22.11. (h.22.23)

Vẽ $AH \perp xy$, tia AH cắt đường thẳng BC tại D . Khi đó BD không đổi.

$\triangle CHA = \triangle CHD$ (g.c.g) $\Rightarrow HA = HD \Rightarrow xy$ là đường trung

trục của AD .

Gọi M là một điểm bất kì trên xy .

Ta có $MA = MD$ (Tính chất điểm nằm trên đường trung trực).

$MA + MB = MD + MB \geq BD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv C$).

Vậy tổng $MA + MB$ ngắn nhất là bằng BD khi và chỉ khi $M \equiv C$.

22.12. (h.22.24)

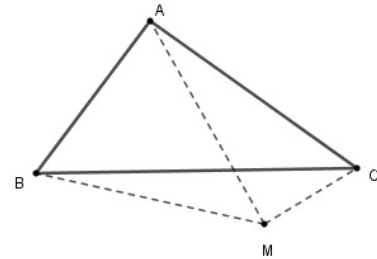
Ta có: $S = 7MA + 3MB + 4MC$

$$= 3(MA + MB) = 3.12 + 4.16 = 100$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng AB và AC

$\Leftrightarrow M \equiv A$.

Vậy $\min S = 100$ khi $M \equiv A$.



22.13. (h.22.25)

Từ H vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại D ;
đường thẳng song song với AC cắt AB tại E . Theo tính
chất đoạn thẳng song song ta có $AD = HE$, $AE = HD$.

Vì $HB \perp AC$ nên $HB \perp HE \Rightarrow HB < HE$ (quan hệ giữa
đường vuông góc và đường xiên).

Chứng minh tương tự ta được $HC < HD$.

Xét $\triangle AHD$ có $HA < AD + DH$ (bất đẳng thức tam giác). Suy ra:

$$HA + HB + HC < (AD + DH) + BE + CD = (AD + AE) + BE + CD$$

$$= (AD + CD) + (AE + BE) < AC + AB. \quad (1)$$

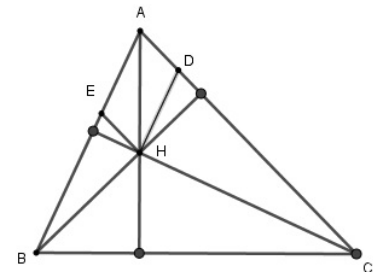
Chứng minh tương tự, ta được:

$$HA + HB + HC < AB + BC. \quad (2)$$

$$HA + HB + HC < BC + CA \quad (3)$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được: $3(HA + HB + HC) < 2(AB + BC + CA)$

$$\text{Do đó: } HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA)$$



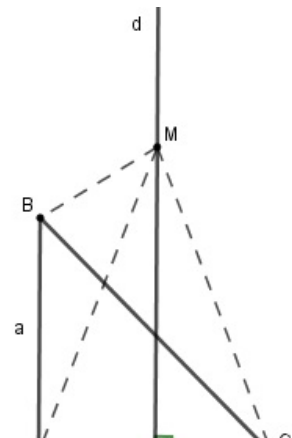
22.14. (h.22.26)

Tam giác ABC vuông cân tại A nên theo định lý Py – ta – go ta
tính được $BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác MAC cân tại $M \Rightarrow MA = MC$, do đó M nằm trên
đường trung trực d của AC .

Xét tổng $MA + MB = MC + MB \geq BC = a\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv O$ với O là giao điểm của d với cạnh
 BC .



Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB$ là $a\sqrt{2}$ khi $M \equiv O$.

- *Nhận xét:* Ta thấy $MA + MB \geq AB = a$ nhưng không có vị trí nào của M để dấu " $=$ " xảy ra. Vì thế không thể kết luận $\min(MA + MB) = a$.

22.15. (h.22.27)

- *Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất*

Chu vi của $\triangle ABC$ là $CA + CB + AB$.

Do AB cố định nên chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow CA + CB$ nhỏ nhất.

Vẽ $AH \perp xy$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$.

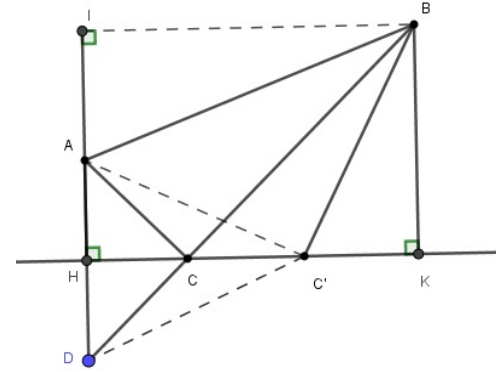
Khi đó BD là một đoạn thẳng cố định. Gọi C' là một điểm trên xy .

$$\triangle AHC' = \triangle DHC' \text{ (c.g.c)} \Rightarrow C'A = C'D.$$

Xét ba điểm BDC' ta có $C'B + C'D \geq BD$ (Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow C' \equiv C$ với C là giao điểm của BD với xy)

Do đó $C'B + C'D$ nhỏ nhất là bằng BD khi $C' \equiv C$.

Suy ra khi C là giao điểm của BD với xy thì chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.



- *Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC*

Vẽ $BK \perp xy$, $BI \perp AH$ ta tính được $HI = 7\text{cm}$; $IA = 5\text{cm}$ và $ID = 9\text{cm}$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle IAB$ vuông tại I ta có: $BI^2 = AB^2 - IA^2 = 13^2 - 5^2 = 144$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông IDB ta được:

$$BD^2 = IB^2 + ID^2 = 144 + 9^2 = 225 \Rightarrow BD = 15(\text{cm})$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC là:

$$CA + CB + AB = BD + AB = 15 + 13 = 28(\text{cm})$$

22.16 (h.22.28)

Gọi M là điểm trên cạnh $A'B'$ mà con kiến phải qua khi bò từ A đến C .

Mở nắp hộp $A'B'C'D'$ đứng lên đến vị trí $A'B'C_1D_1$

Xét ba điểm A, M, C_1 ta có $MA + MC_1 \geq AC_1$

Dấu “=” xảy ra

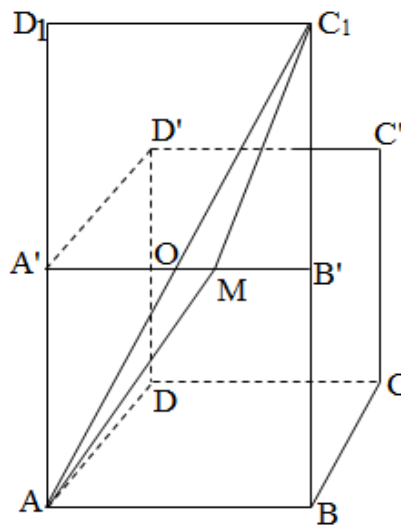
$\Leftrightarrow M$ trùng với giao điểm O của AC_1 với cạnh $A'B'$

$\Leftrightarrow \Delta A'AM = \Delta B'C_1M$ (g.c.g) $\Leftrightarrow MA' = MB'$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm của $A'B'$

Ta có: $AC_1^2 = AB^2 + BC_1^2 = 20^2 + 40^2 = 2000 \Rightarrow AC_1 = \sqrt{2000} \approx 44,7 \text{ cm}$

Vậy quãng đường ngắn nhất mà kiến phải bò là 44,7 cm khi kiến bò qua trung điểm M của cạnh $A'B'$ theo hành trình đoạn thẳng AM rồi đoạn thẳng MC'



Hình 22.28

MỤC LỤC

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG

Chương I: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

<i>Chuyên đề 1:</i> Hai góc đối đỉnh.....	3
<i>Chuyên đề 2:</i> Hai đường thẳng vuông góc.....	7
<i>Chuyên đề 3:</i> Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.....	11
<i>Chuyên đề 4:</i> Tiên đề Ô-clit. Tính chất của hai đường thẳng song song.....	15
<i>Chuyên đề 5:</i> Định lí.....	20
<i>Chuyên đề 6:</i> Chứng minh phản chứng.....	24

Chương II: TAM GIÁC

<i>Chuyên đề 7:</i> Tổng ba góc của một tam giác.....	29
<i>Chuyên đề 8:</i> Hai tam giác bằng nhau. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác.....	35
<i>Chuyên đề 9:</i> Tam giác cân.....	48
<i>Chuyên đề 10:</i> Định lý Pytago.....	60
<i>Chuyên đề 11:</i> Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông.....	69
<i>Chuyên đề 12:</i> Vẽ hình phụ để giải bài toán.....	73
<i>Chuyên đề 13:</i> Chứng minh ba điểm thẳng hàng.....	81
<i>Chuyên đề 14:</i> Tính số đo góc.....	88

Chương III: QUAN HỆ CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC.

<i>Chuyên đề 15:</i> Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác.....	96
<i>Chuyên đề 16:</i> Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu..	100
<i>Chuyên đề 17:</i> Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác.....	104
<i>Chuyên đề 18:</i> Tính chất đường trung tuyến của tam giác.....	108
<i>Chuyên đề 19:</i> Tính chất tia phân giác của một góc. Tính chất ba đường phân giác của tam giác.	112
<i>Chuyên đề 20:</i> Tính chất ba đường trung trực, ba đường cao của tam giác.....	116

<i>Chuyên đề 21: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy</i>	122
<i>Chuyên đề 22: Bất đẳng thức và cực trị hình học</i>	127

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Chương I: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

<i>Chuyên đề 1: Hai góc đối đỉnh</i>	133
<i>Chuyên đề 2: Hai đường thẳng vuông góc</i>	138
<i>Chuyên đề 3: Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song</i>	142
<i>Chuyên đề 4: Tiên đề Ô-clit. Tính chất của hai đường thẳng song song</i>	146
<i>Chuyên đề 5: Định lí</i>	150
<i>Chuyên đề 6: Chứng minh phản chứng</i>	154

Chương II: TAM GIÁC

<i>Chuyên đề 7: Tổng ba góc của một tam giác</i>	158
<i>Chuyên đề 8: Hai tam giác bằng nhau. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác</i>	162
<i>Chuyên đề 9: Tam giác cân</i>	168
<i>Chuyên đề 10: Định lý Pytago</i>	175
<i>Chuyên đề 11: Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông</i>	180
<i>Chuyên đề 12: Vẽ hình phụ để giải bài toán</i>	185
<i>Chuyên đề 13: Chứng minh ba điểm thẳng hàng</i>	190
<i>Chuyên đề 14: Tính số đo góc</i>	194

Chương III: QUAN HỆ CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC.

<i>Chuyên đề 15: Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác</i>	203
<i>Chuyên đề 16: Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu</i> ..	209
<i>Chuyên đề 17: Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác</i>	213
<i>Chuyên đề 18: Tính chất đường trung tuyến của tam giác</i>	219
<i>Chuyên đề 19: Tính chất tia phân giác của một góc. Tính chất ba đường phân giác của tam giác.</i>	226

<i>Chuyên đề 20: Tính chất ba đường trung trực, ba đường cao của tam giác.....</i>	<i>232</i>
<i>Chuyên đề 21: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy.....</i>	<i>239</i>
<i>Chuyên đề 22: Bất đẳng thức và cực trị hình học</i>	<i>245</i>