



201 câu hỏi hay Phần 2

Câu hỏi

Câu 202. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong các số phức z dưới đây, số phức nào thỏa mãn $|z|=1$ và $|z^3 - z + 2|$ đạt giá trị lớn nhất?

- A. $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. B. $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. C. $z = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i$. D. $z = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i$.

Câu 203. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$.

Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc (S) sao cho $|z_1 - z_2|$ nhỏ nhất, giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng?

- A. 2. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 204. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét số phức z có phần thực dương và ba điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$. Biết tứ giác $OABC$ là một hình bình hành, giá trị nhỏ nhất của $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2$ bằng?

- A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. 4.

Câu 205. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Một trang giấy A4 kích thước 21 cm x 29,7 cm có thể viết được 50 dòng, mỗi dòng có 75 chữ số (chữ số trong hệ thập phân). Ngày 25/01/2013, người ta đã tìm được số nguyên tố Mersenne $2^{57885161} - 1$. Nếu viết số nguyên tố này theo hệ thập phân trên trang giấy A4 nói trên thì cần bao nhiêu tờ giấy A4, biết rằng mỗi tờ giấy tương ứng với 2 trang?

- A. 2324 tờ. B. 2315 tờ. C. 2323 tờ. D. 2316 tờ.

Câu 206. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $10u_n + u_{10} + \sqrt{u_n - 2u_{n-1}} = 20u_{n-1} + \sqrt{2u_{10} - 1}$, với mọi số nguyên $n \geq 2$. Tìm số tự nhiên n_0 nhỏ nhất để $u_{n_0} > 2019^{2019}$.

- A. $n_0 = 22168$. B. $n_0 = 22167$. C. $n_0 = 22178$. D. $n_0 = 22177$.

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2)$ và $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$ bằng?

- A. 100. B. 99. C. 101. D. 102.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{3}; u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$. Tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10}$ bằng?

- A. $\frac{3280}{6561}$. B. $\frac{29524}{59049}$. C. $\frac{25942}{59049}$. D. $\frac{1}{243}$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.

- A. 2587. B. 2590. C. 2593. D. 2584.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3 (2u_5 - 63) = 2 \log_4 (u_n - 8n + 8), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

- A. 18. B. 17. C. 16. D. 19.

Câu 207. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x(1-2m)y + 4mz - 4 = 0$ và $2x + my - (2m+1)z - 8 = 0$. Khi m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r = \sqrt{\frac{142}{15}}$. B. $r = \sqrt{\frac{92}{3}}$. C. $r = \sqrt{\frac{23}{3}}$. D. $r = \sqrt{\frac{586}{15}}$.

Câu 208. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;4), B(3;2;6), C(3;-2;6)$. Gọi M là điểm di động trên mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + |\overline{MB} + \overline{MC}|$ bằng?

- A. $2\sqrt{34}$. B. $6\sqrt{5}$. C. $4\sqrt{10}$. D. $2\sqrt{29}$.

Câu 209. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \int_0^2 (2f(x) + 3x) f(x) dx - \int_0^1 (4f(x) + x) \sqrt{xf(x)} dx$ bằng?

- A. $-\frac{1}{24}$. B. $-\frac{1}{8}$. C. $-\frac{1}{12}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 210. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf'(x) \cdot f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(2) = 1. \text{ Tích phân } \int_0^2 f^2(x) dx \text{ bằng?}$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 2.

D. 4.

Câu 211. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0$ và

$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên

(S_1) ; hai đỉnh C, D nằm trên (S_2) . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $6\sqrt{2}$.

Câu 212. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp các số phức z có phần thực và phần ảo đều là các số nguyên đồng thời thỏa mãn hai điều kiện: $|z - 3 - 4i| \leq 2$ và $|z + \bar{z}| \leq |z - \bar{z}|$. Số phần tử của tập S bằng?

A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 10.

Câu 213. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 11 = 0$. Xét điểm M di động trên (P) ; các điểm A, B, C phân biệt di động trên (S) sao cho AM, BM, CM là các tiếp tuyến của (S) . Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $(0; -1; 3)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$.

D. $(0; 3; -1)$.

Câu 214. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C) . Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp

tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. B. $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. C. $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. D. $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

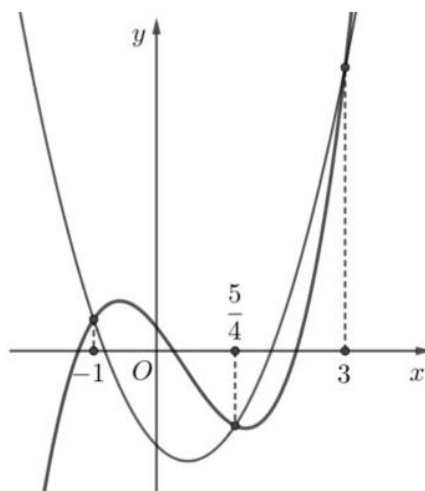
Câu 215. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét số phức z có phần thực dương và ba điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$. Biết tứ giác $OABC$ là một hình bình hành, giá trị nhỏ nhất của $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2$ bằng?

A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. 4.

Câu 216. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + 1$ với $a, b, c, d, e, m, n, p, q$ là các số thực. Đồ thị của hai hàm số $y = f'(x); y = g'(x)$ như hình vẽ bên. Tổng các nghiệm của phương trình $f(x) + q = g(x) + e$ bằng



A. $\frac{13}{3}$. B. $-\frac{13}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{4}{3}$.

Câu 217. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B , $AB = 6, BC = 8$. Biết $SA = 8$ và $SA \perp (ABC)$. Một khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của khối chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$. Tính khoảng cách d từ tâm của khối cầu đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = 6$. B. $d = \frac{4}{3}$. C. $d = \frac{3}{2}$. D. $d = \frac{12\sqrt{34}}{17}$.

Câu 218. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $ABC = 60^\circ$ cạnh bên $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $\overrightarrow{HD} = -3\overrightarrow{HB}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB .

- A. $\frac{a\sqrt{30}}{8}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. C. $\frac{30a}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Câu 219. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(0; -1; 3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

- A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$. B. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$. C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 220. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại C , có $\angle ABC = 60^\circ$;

$AB = 3\sqrt{2}$. Đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{x+8}{-4}$, đường thẳng AC nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + z - 1 = 0$. Biết điểm B là điểm có hoành độ dương, gọi (a, b, c) là tọa độ của điểm C . Giá trị $a + b + c$ bằng?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 7.

Câu 221. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là?

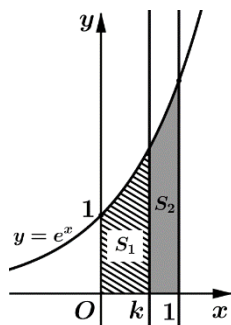
- A. 2163. B. 2170. C. 3003. D. 3843.

Câu 222. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Kí hiệu H là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$.

Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < 1$) chia H thành hai phần có diện tích tương ứng S_1, S_2

như hình vẽ bên, biết $S_1 > S_2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $e^k > \frac{e-1}{2}$. B. $e^k > \frac{e+1}{2}$. C. $e^k > \frac{e+2}{2}$. D. $e^k > \frac{e+3}{2}$.

Câu 223. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng?

- A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{1105}}{11}$. B. $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$. C. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{1105}}{13}$. D. $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}$.

Câu 224. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{4}; y = -\frac{x^2}{4}$, $x = -4, x = 4$ và hình (H_2) là hình gồm các điểm $(x; y)$ thỏa $x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + (y - 2)^2 \geq 4$. Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2 . Đẳng thức nào dưới đây đúng

- A. $V_1 = V_2$. B. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. C. $V_1 = 2V_2$. D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.

Câu 225. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a (0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

- A. $T = 99$. B. $T = 64$. C. $T = 32$. D. $T = 72$.

Câu 226. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với d . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

- A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$ C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$

Câu 227. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2 \cdot \frac{AD}{AN} = 4$. Ký hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{17}{14}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 228. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;2), B(2;-2;0)$. Gọi $I_1(1;1;-1)$ và $I_2(3;1;1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S) .

- A. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$ B. $R = 2\sqrt{2}$ C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$ D. $R = 2\sqrt{6}$

Câu 229. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - i| = 1$ và $|z - \sqrt{2}m| = 2$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để tồn tại hai số phức thỏa mãn các điều kiện trên là?

- A. $(-2;2) \setminus \{0\}$ B. $[-2;2]$ C. $[-2;2) \setminus 0$ D. $(-2;2)$

Câu 230. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m (m \leq 2018)$ để với mọi bộ ba số phân biệt $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

- A. 2011. B. 2012. C. 2010. D. 2018.

Câu 231. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ ngoại tiếp khối bát diện (H) được ghép từ hai khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ (đều có đáy là tứ giác $ABCD$). Biết rằng đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 8 = 0$. Tính thể tích khối bát diện (H) .

- A. $V_{(H)} = \frac{34}{9}$. B. $V_{(H)} = \frac{665}{81}$. C. $V_{(H)} = \frac{68}{9}$. D. $V_{(H)} = \frac{1330}{81}$.

Câu 232. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $m = \log_a(\sqrt[3]{ab})$ với $a > 1, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 2\sqrt{27} \log_b a + 4$. Biết rằng P đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \frac{c-d\sqrt{3}}{e} (c, d, e \in \mathbb{R})$. Tính $S = \frac{c-d}{e}$.

- A. Vô số giá trị. B. $S = 0$. C. $S = \frac{2}{3}$. D. $S = \frac{1}{3}$.

Câu 234. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{3}{\sqrt{3x+1}}$.

Giá trị $\int_0^2 (x+1) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng?

- A. $-\frac{8}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $-\frac{12}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 235. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$.

- A. $60 + 2\sqrt{10}$. B. $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$. C. $60 - 2\sqrt{10}$. D. $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$.

Câu 236. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 3z + 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = (z_1^2 + 2z_1 + 2)(z_2^2 + 2z_2 + 2)(z_3^2 + 2z_3 + 2)(z_4^2 + 2z_4 + 2)$

- A. $T = 102$. B. $T = 101$. C. $T = 99$. D. $T = 100$.

Câu 237. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Biết phương trình $x+1=2\log_2(2^x+3)-\log_2(1980-2^{-x})$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1 + x_2$.

- A. $\log_2 10$. B. $\log_2 11$. C. $\log_2 12$. D. $\log_2 13$.

Câu 238. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x - 7y + z + 25 = 0$ và đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi d_1' là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P) .

Đường thẳng d_2 nằm trên (P) tạo với d_1, d_1' các góc bằng nhau, d_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2(a; b; c)$. Tính $\frac{a+2b}{c}$

- A. $\frac{a+2b}{c} = \frac{2}{3}$. B. $\frac{a+2b}{c} = 0$. C. $\frac{a+2b}{c} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{a+2b}{c} = 1$.

Câu 239. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6; -3; 4), B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Tính giá trị của tổng $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 11$. B. $a + b + c = -11$. C. $a + b + c = 17$. D. $a + b + c = -17$.

Câu 240. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-2; 0; 0), B(0; 4; 2), C(2; 2; -2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) , S là điểm di động trên đường thẳng d , G và H lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$, trực tâm của $\triangle SBC$. Đường thẳng GH cắt đường thẳng d tại S' . Tính tích $SA.S'A$.

- A. $SA.S'A = \frac{3}{2}$. B. $SA.S'A = \frac{9}{2}$. C. $SA.S'A = 12$. D. $SA.S'A = 6$.

Câu 241. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V . Điểm M thay đổi trong tam giác BCD . Các đường thẳng qua M và song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt phẳng $(ACD), (ABD)$,

(ABC) tại N, P, Q . Giá trị lớn nhất của khối $MNPQ$ là:

- A. $\frac{V}{27}$. B. $\frac{V}{16}$. C. $\frac{V}{8}$. D. $\frac{V}{54}$.

Câu 242. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại C ,

$AB = 2a, CAB = 30^\circ$. Gọi H là hình chiếu của A trên SC , B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (SAC) . Thể tích của khối chóp $H.AB'B$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{7}$. B. $\frac{6a^3\sqrt{3}}{7}$. C. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{7}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{7}$.

Câu 243. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho

$BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Tính tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện $ABCD$ được phân chia bởi mặt phẳng (MNP) .

- A. $\frac{7}{13}$. B. $\frac{7}{15}$. C. $\frac{8}{15}$. D. $\frac{8}{13}$.

Câu 244. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Nhận xét nào sau đây luôn đúng?

- A. $|z| \geq \sqrt{2}a + b$. B. $|z| \geq \sqrt{2}|a| + |b|$. C. $|z|\sqrt{2} \leq |a| + |b|$. D. $|z|\sqrt{2} \geq |a| + |b|$.

Câu 245. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB = BC = 2a, SAB = SCB = 90^\circ$.

Và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ theo a .

- A. $6\pi a^2$. B. $3\pi a^2$. C. $4\pi a^2$. D. $12\pi a^2$.

Câu 246. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai đường thẳng a, b cố định, song song với nhau và khoảng cách giữa chúng bằng 4.

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ thay đổi vuông góc với nhau lần lượt chứa hai đường thẳng a, b . Gọi d là giao tuyến của $(P), (Q)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. d thuộc 1 mặt trụ cố định có khoảng cách giữa đường sinh và trục bằng 4.
B. d thuộc 1 mặt nón cố định

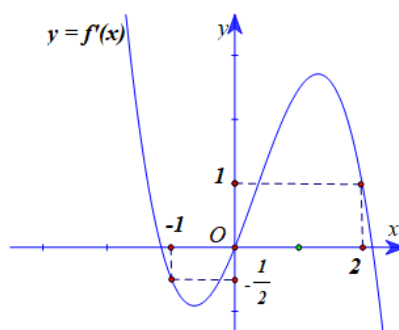
C. d thuộc 1 mặt trụ cố định có khoảng cách giữa đường sinh và trục bằng $2\sqrt{2}$.

D. d thuộc 1 mặt trụ cố định có khoảng cách giữa đường sinh và trục bằng 2.

Câu 247. [Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu



A. 3.

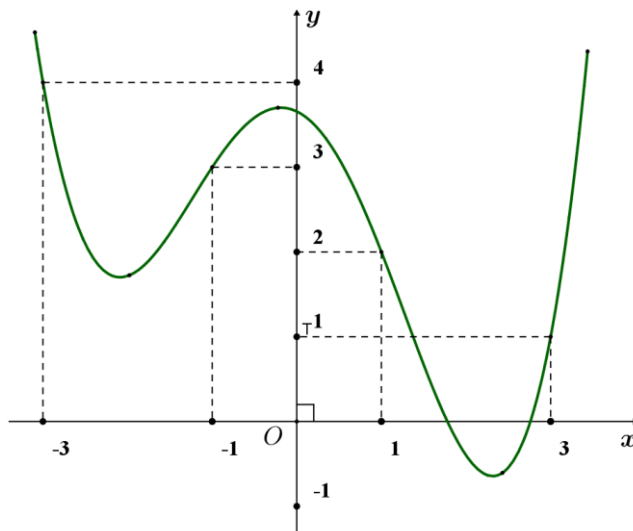
B. 5.

C. 4.

D. 2.

Câu 248. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc năm $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số $g(x) = f(7-2x) + (x-1)^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 0)$.

B. $(-3; -1)$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(2; 3)$.

Câu 249. [Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, SB = a$ và $SB \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD . Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACM) và (SAD) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.BCD$ bằng?

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 250. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + 8x + 6y. \text{ Tính } M + m.$$

- A. $60 + 2\sqrt{10}$. B. $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$. C. $60 - 2\sqrt{10}$. D. $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$.

Câu 251. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V . Điểm M thay đổi trong tam giác BCD . Các đường thẳng qua M và song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt phẳng $(ACD), (ABD), (ABC)$ tại N, P, Q . Giá trị lớn nhất của khối $MNPQ$ là:

- A. $\frac{V}{27}$. B. $\frac{V}{16}$. C. $\frac{V}{8}$. D. $\frac{V}{54}$.

Câu 252. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho tam giác ABC có $BC = a, \angle BAC = 135^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là M, N . Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là?

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .

Câu 253. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Tính thể tích V của khối đa diện $MBPA'B'N$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{7a^3\sqrt{3}}{96}$. D. $V = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 254. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng

$d: \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với d . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

- A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Câu 255. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x, \forall x > 0$ và $f(1) = -1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.
 B. Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$
 C. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.
 D. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

Câu 256. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

- A. $a + b = 13$. B. $a + b = 11$. C. $a + b = 16$. D. $a + b = 14$.

Câu 257. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5 - x - (y^2 + xy - 3y)$.

- A. 8. B. 5. C. 7. D. 6.

Câu 258. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	1	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2f(x) + m|) = 1$ có đúng 2 nghiệm trên $[-1; 1]$?

- A. 13. B. 9. C. 4. D. 5.

Câu 259. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho phương trình $4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m| + 2) = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng:

- A. 3. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 260. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |\sin^4 x + \cos 2x + m|$ bằng 2. Số phần tử của S là:

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 261. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Khi đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi:

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $\frac{1}{2} \leq m < 1$. C. $0 < m < 1$. D. $0 < m \leq 1$.

Câu 262. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z + 8 = 0$ và $(R): x - 2y + z - 4 = 0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại A , B , C .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = AB^2 + \frac{144}{AC}$

- A. $72\sqrt[3]{3}$. B. 96. C. 108. D. $72\sqrt[3]{4}$.

Câu 263. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a (0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

- A. $T = 99$. B. $T = 64$. C. $T = 32$. D. $T = 72$.

Câu 264. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho

$$\frac{AB}{AM} + 2 \cdot \frac{AD}{AN} = 4.$$

Ký hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và

$S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{17}{14}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 265. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;1;0)$, $B(2;0;-1)$, $C(0;2;-1)$, $D(0;0;-2)$. Với mỗi điểm M tùy ý, đặt $T = MA + MB + MC + MD$. Gọi $M_0(a;b;c)$ sao cho T đạt giá trị nhỏ nhất. Lúc đó, tổng $a + 5b + c$ bằng?

- A. 3. B. -13. C. 7. D. 4.

Câu 266. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - my + z + 6m + 3 = 0$ và $(\beta): mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ (với m là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng Oxy . Biết rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng Oxy . Tính giá trị biểu thức $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2$?

- A. $P = 56$. B. $P = 9$. C. $P = 41$. D. $P = 73$.

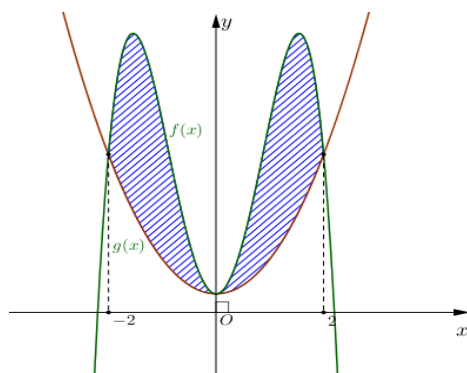
Câu 267. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2|z + 1| + 2|z - 1| + |z - \bar{z} - 4i|$ bằng:

- A. $4 + \frac{14}{\sqrt{15}}$. B. $2 + \frac{7}{\sqrt{15}}$. C. $4 + 2\sqrt{3}$. D. $2 + \sqrt{3}$.

Câu 268. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị và $y = g(x) = mx^2 + nx + p$ ($m, n, p \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



- A. $(4; 4, 1)$. B. $(4, 2; 4, 3)$. C. $(4, 3; 4, 4)$. D. $(4, 1; 4, 2)$.

Câu 269. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4| = 1$ và $|iz_2 - 2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 2z_2|$ bằng

- A. $4\sqrt{2} + 3$ B. $2\sqrt{5} - 2$ C. $4 - \sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2} - 3$

Câu 270. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $(Oxyz)$, cho hai điểm $A(0;8;2)$, $B(9;-7;23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b + c + d$ khi đó là

- A. $b + c + d = 2$. B. $b + c + d = 4$. C. $b + c + d = 3$. D. $b + c + d = 1$.

Câu 271. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$

trong đó a, b là các số nguyên. Tính $T = 2a + b$.

- A. 3. B. 8. C. 4. D. 5.

Câu 272. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

- A. 8. B. $8\sqrt{2}$. C. $16\sqrt{2}$. D. $24\sqrt{3}$.

Câu 273. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 274. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5) \geq 1$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - m = 0$.

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 275. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x \geq 0, y \geq 0, z \geq -1$ và $\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x - y$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3}$ tương ứng bằng:

- A. $4\sqrt{2}$. B. 6. C. $6\sqrt{3}$. D. 4.

Câu 276. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

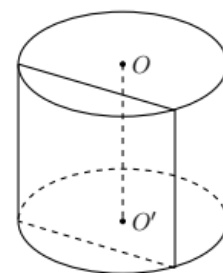
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F, M, N, P, Q lần lượt là tâm của các mặt $ABCD; A'B'C'D'; ADD'A'; DCC'D'; CBB'C'; ABB'A'$. Biết cạnh khối lập phương bằng a , khi đó thể tích của khối tám mặt đều nội tiếp khối lập phương trên là

- A. $\frac{a^3}{8}$. B. $\frac{a^3}{12}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 277. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho khối trụ T có trục OO' , bán kính r và thể tích V . Cắt khối trụ T thành hai phần bởi mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\frac{r}{2}$

(như hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích phần không chứa trục OO' . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.



- A. $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. B. $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2\pi}$. D. $\frac{V_1}{V} = \frac{4 - \sqrt{3}}{4\pi}$.

Câu 278. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất cả giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

- A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$. B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$. D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Câu 279. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

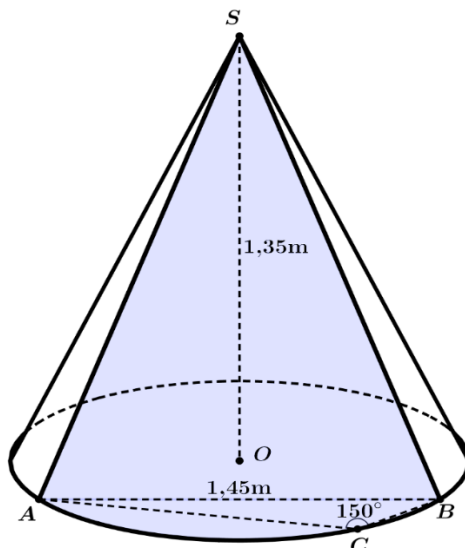
Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$, đặt $T = b^2 - a^2$ thì:

- A. $T = 36$. B. $T = 48$. C. $T = 64$. D. $T = 72$.

Câu 280. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Nhân dịp quảng bá chiếc nón lá Việt Nam, một cửa hàng có đặt trước sảnh một cái nón lớn với chiều cao $1,35m$. Cửa hàng có sơn cách điệu hoa văn trang trí một phần của hình nón

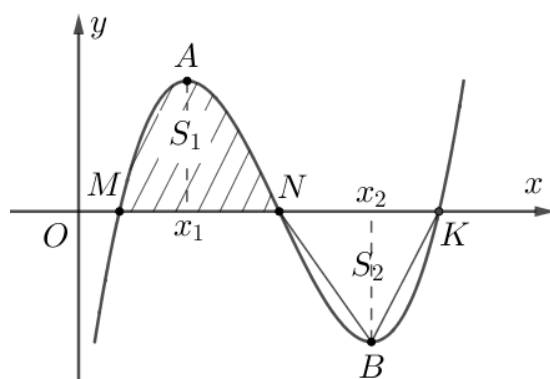
ứng với cung AB như hình vẽ. Biết $AB = 1,45\text{m}$, $ACB = 150^\circ$ và giá tiền để trang trí 1m^2 là 2.000.000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà cửa hàng cần dùng để trang trí mặt trước của nón là bao nhiêu?



- A. 4.510.000 đồng. B. 3.021.000 đồng. C. 3.010.000 đồng. D. 3.008.000 đồng.

Câu 281. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) ; M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK . Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



- A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

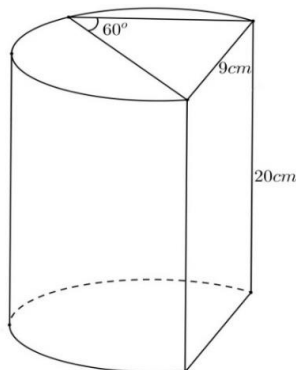
Câu 282. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \pm\sqrt{3}$, thỏa mãn $1 - x^3 = 2x^2 f(x) + x f^2(x) - f'(x)$ và $f(1) = 0$. Hàm số $g(x) = [f(2x-1)]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 283. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

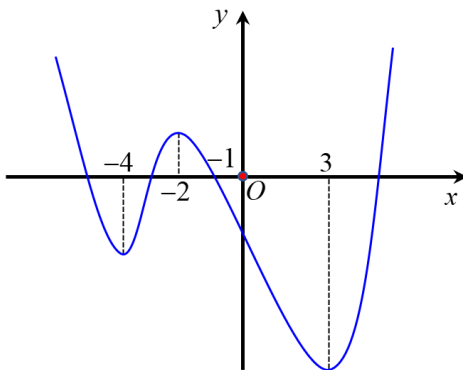
Một bác thợ hàn làm ra những chi tiết trang trí giống nhau có dạng là một phần của mặt xung quanh hình trụ như hình vẽ. Để làm ra sản phẩm đó bác thợ hàn cắt ra từ một tấm kim loại phẳng hình chữ nhật kích thước $120\text{cm} \times 240\text{cm}$ thành những miếng kim loại hình chữ nhật bằng nhau, một cạnh 20cm , cạnh còn lại có độ dài L . Sau đó bác thợ hàn uốn cong những miếng kim loại nhỏ đó thì được sản phẩm cần làm. Hỏi từ tấm kim loại ban đầu bác thợ hàn có thể làm được tối đa bao nhiêu sản phẩm như vậy. Giả sử hao phí nguyên vật liệu là không đáng kể.



- A. 60. B. 72. C. 66. D. 80.

Câu 284. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

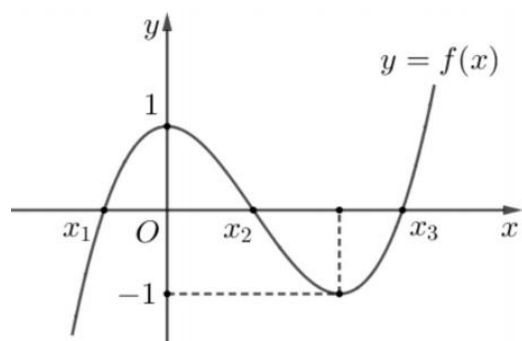
B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 285. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S , diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ bằng

A. $S + 2\sqrt{3}$.

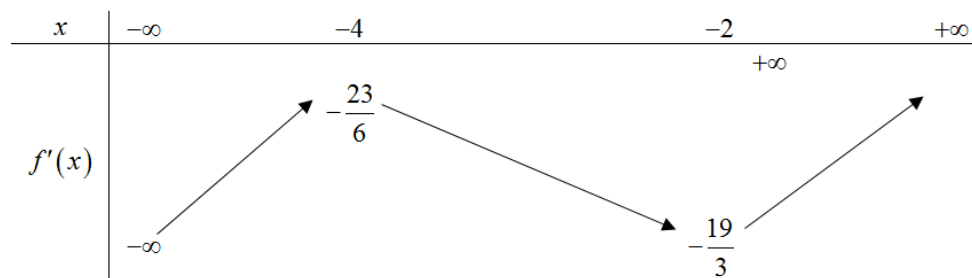
B. $S + 4\sqrt{3}$.

C. $4\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{3}$.

Câu 286. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm bậc bốn và $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hỏi hàm số $g(x) = \left| \frac{1}{3} f(x^3) - 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

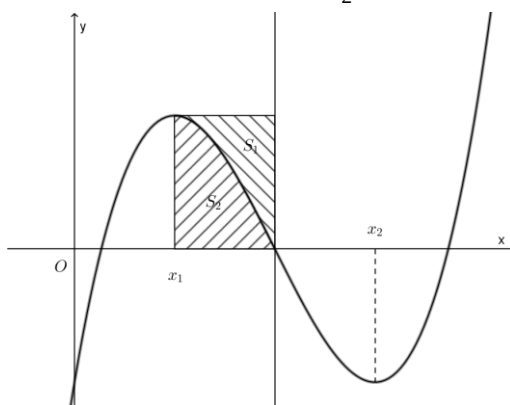
Câu 287. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thỏa mãn tính chất $(\log_y x)^{2021} = \log_y x^{2021}$, ở đó x là số thực dương, y là số nguyên dương nhỏ hơn 2021?

- A. 4038. B. 6057. C. 6060. D. 4040.

Câu 288. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $f(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng như trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 289. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2 - 3i|^2 + |z - 5i|^2$.

- A. $P_{\max} = 96$. B. $P_{\max} = 66$. C. $P_{\max} = 152$. D. $P_{\max} = 132$.

Câu 290. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

- A. 3. B. -3. C. 0. D. -2.

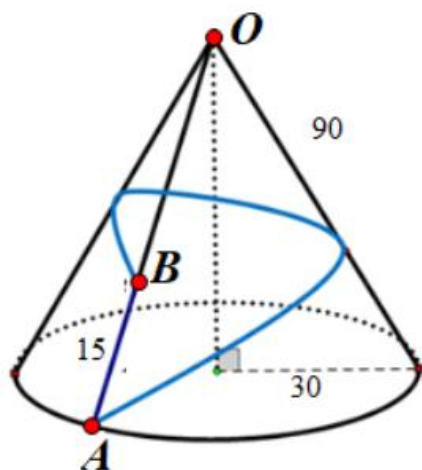
Câu 291. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 6 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đường thẳng d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Khi đó dạng phương trình tổng quát của (α) là $ax + by + z + d = 0$. Khi đó giá trị của $a + b + d$ bằng:

- A. 6. B. -7. C. 5. D. -3.

Câu 292. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

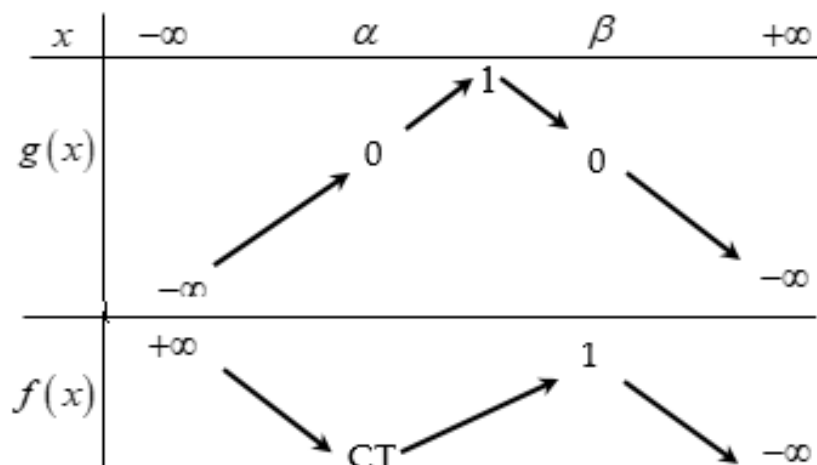
Hình vẽ dưới đây mô tả một ngọn núi có dạng hình nón. Nhà đầu tư du lịch dự định xây dựng một con đường nhằm phục vụ việc chuyên chở khách du lịch tham quan ngắm cảnh vòng quanh ngọn núi bắt đầu từ vị trí A và dừng ở vị trí B . Biết rằng người ta đã chọn xây dựng đường đi ngắn nhất vòng quanh núi từ A đến B , đoạn đường đầu là phần lên dốc từ A và đoạn sau sẽ xuống dốc đến B . Tính quãng đường xuống dốc khi đi từ A đến B .



- A. $\frac{400}{\sqrt{91}}$. B. 0. C. $\frac{600}{\sqrt{91}}$. D. $15\sqrt{91}$.

Câu 293. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ và $y = g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên dưới đây. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Giá trị của $P = 3a + b + c - 2d$ là



- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 294. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z$. Có bao giá trị nguyên của z để có đúng hai cặp (x, y) thỏa mãn đẳng thức trên ?

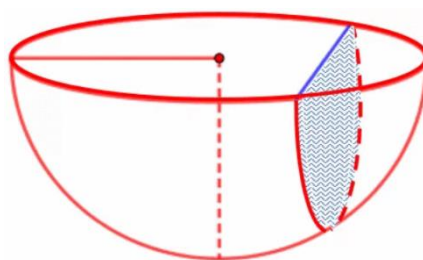
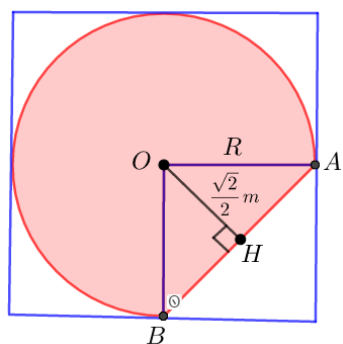
- A. 2. B. 211. C. 99. D. 4.

Câu 295. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Một gia đình có bồn tắm có bề mặt phẳng và lòng trong như hình vẽ, lòng trong của bồn tắm có hình dạng bán cầu, mất đi chỏm cầu. Biết thể tích khối chỏm cầu được tính bởi công thức

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \text{ với } R \text{ là bán kính khối cầu, } h \text{ là chiều cao của chỏm cầu và } OH = \frac{\sqrt{2}}{2} m.$$

Thể tích (m^3) lòng trong của bồn tắm là



A. $\frac{8+5\sqrt{2}}{24}\pi$.

B. $\frac{10+\sqrt{2}}{3}\pi$.

C. $\frac{5+\sqrt{2}}{12}\pi$.

D. $\frac{10-\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 296. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3;2;2)$ bán kính $R_1 = 2$, mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1;0;1)$ bán kính $R_2 = 1$. Phương trình mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với (S_1) và (S_2) và cắt đoạn I_1I_2 có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Tính $T = b + c + d$.

A. -5 .

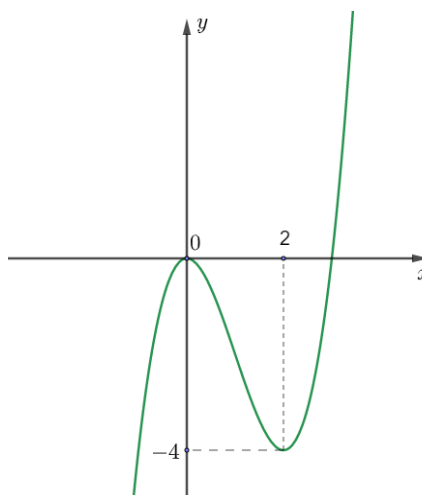
B. -1 .

C. -3 .

D. 2 .

Câu 297. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ sau.



Hàm số $y = g(x) = f(f(x)) + 1202$ có

A. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

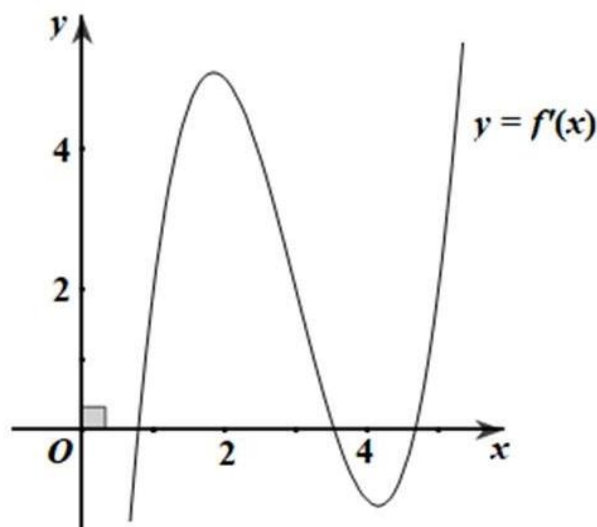
B. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 1 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu.

Câu 298. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Xét hàm số $y = g(x) = f(\alpha x^2) - x$ với $\alpha > 0$. Gọi m và n lần lượt là số điểm cực trị tối đa, số điểm cực trị tối thiểu của hàm số $y = g(x)$. Tính $m + n$.



- A. 10. B. 6. C. 4. D. 8.

Câu 299. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và điểm $A(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết rằng điểm B thuộc mặt cầu (S) , có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

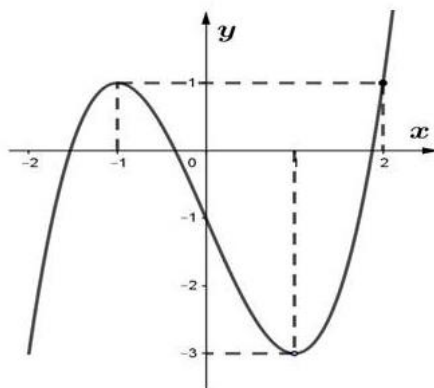
- A. $x - y - z = 0$. B. $x - y + z = 0$. C. $x - y - 2z = 0$. D. $x - y + 2z = 0$.

Câu 300. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như

hình vẽ bên. Gọi $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2019$. Biết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$.

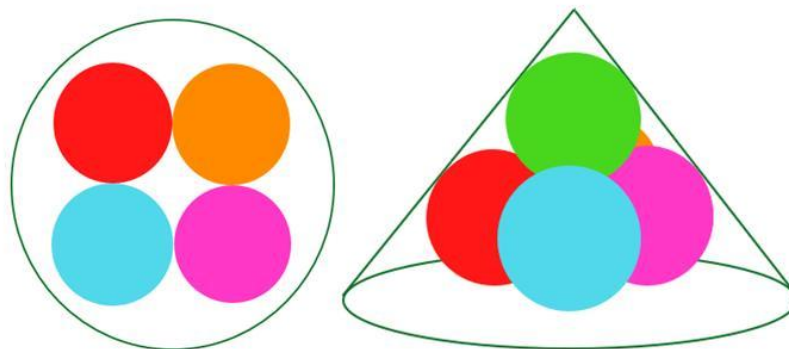
Với $x \in [-1; 2]$ thì $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng



- A. $g(2)$. B. $g(1)$. C. $g(-1)$. D. $g(0)$.

Câu 301. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

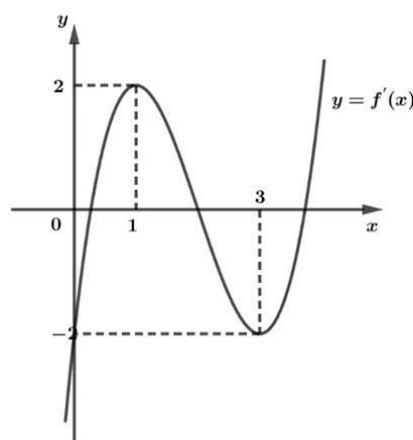
Cho hình nón chứa năm mặt cầu cùng có bán kính là 1, trong đó bốn mặt cầu tiếp xúc với đáy, tiếp xúc đôi một với nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón. Mặt cầu thứ năm tiếp xúc với bốn mặt cầu kia và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón. Tính bán kính đáy hình nón.



- A. $2\sqrt{3}+1$. B. $2\sqrt{2}+1$. C. $2\sqrt{2}-1$. D. $3\sqrt{2}+1$.

Câu 302. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(0) = 4$. Hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

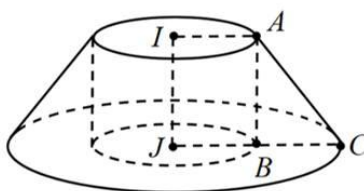


Hàm số $g(x) = \left| f(x+2) - \sqrt{2}^{x+2} - \frac{10}{3} \right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.

Câu 303. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

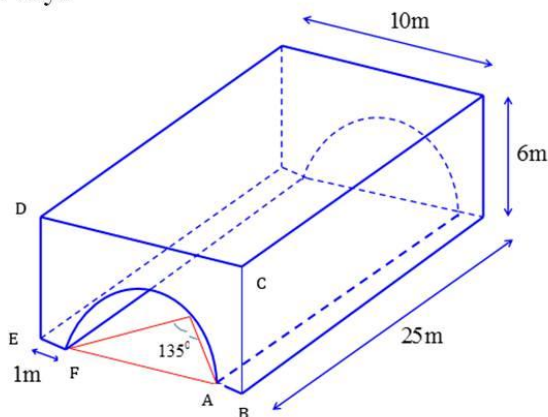
Người ta muốn xây một bể chứa nước hình nón cụt có bán kính đáy lớn là $3m$, góc tạo bởi đường sinh và mặt phẳng chứa đáy lớn là 60° . Trong đó phần không gian chứa nước bên trong là hình trụ có đáy là đáy nhỏ của hình nón cụt và chiều cao bằng chiều cao hình nón cụt. Tìm chiều cao của bể để khoảng không gian chứa nước có thể tích lớn nhất.



- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. 1.

Câu 304. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Viện Hải dương học dự định làm một bể cá phục vụ khách tham quan. Bể có dạng hình một khối hộp chữ nhật không nắp, trong đó lối đi hình vòng cung ở dưới là một phần của khối trụ tròn xoay (như hình vẽ). Biết rằng bể cá làm bằng chất liệu kính cường lực 12mm với đơn giá là 500.000 đồng $1m^2$ kính. Hỏi số tiền (đồng) để làm được bể cá đó gần nhất với số nào sau đây?



- A. 435.532.000. B. 436.632.000. C. 311.506.000. D. 336.940.000.

Câu 305. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$, $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x+1|) dx$$

- A. $I = 3$. B. $I = 5$. C. $I = 6$. D. $I = 4$.

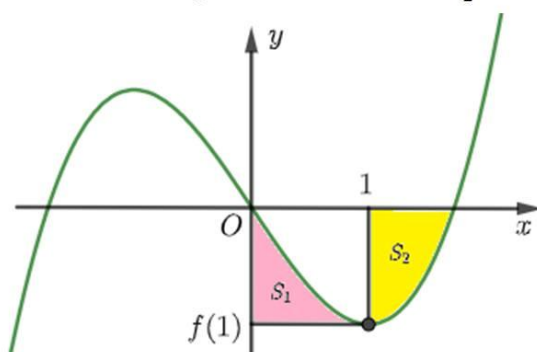
Câu 306. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Giả sử $(x_0; y_0)$ là cặp nghiệm nguyên không âm có tổng $S = x_0 + y_0$ lớn nhất của bất phương trình $4^x + 2^x \cdot 3^y - 9 \cdot 2^x + 3^y \leq 10$, giá trị của S bằng

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 307. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và thỏa mãn $[f(x) + 1]$ và $[f(x) - 1]$ lần lượt chia hết cho $(x - 1)^2$ và $(x + 1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2 + 8S_1$.



- A. 4. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 9.

Câu 308. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

- A. $6\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 1. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 309. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ và bán kính bằng 4, cho mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ và bán kính bằng 2. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1); (S_2)$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ O đến (P) . Giá trị $M + m$ bằng

- A. $8\sqrt{3}$. B. 8. C. 9. D. $\sqrt{15}$.

Câu 310. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x, y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ có diện tích là $S = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản.

Tính $I = a - b$.

A. $I = 66$.

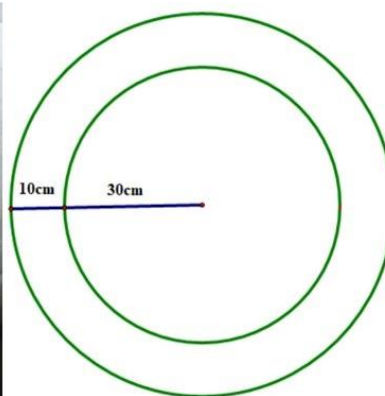
B. $I = 60$.

C. $I = 59$.

D. $I = 67$.

Câu 311. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Dự án công trình nông thôn mới, chủ đầu tư cần sản xuất khoảng 800 chiếc cống dẫn nước như nhau có dạng hình trụ từ bê tông. Mỗi chiếc cống có chiều cao 1m, bán kính trong bằng 30cm và độ dày của bê tông bằng 10cm (xem hình minh họa). Nếu giá bê tông là 1.000.000 đồng/ m^3 thì để sản xuất 800 chiếc cống trên thì chủ đầu tư cần hết bao nhiêu tiền bê tông? (Làm tròn đến hàng triệu đồng).



A. 176.000.000 đồng.

B. 175.000.000 đồng.

C. 177.000.000 đồng.

D. 178.000.000 đồng.

Câu 312. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{2x^2+y^2} = 3^{x+y}$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

Câu 313. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $SA = SB = a$; $SC = x (x > a)$. Tìm x sao cho thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

A. $x = 2a$.

B. $x = 4a$.

C. $x = 3a$.

D. $x = 6a$.

Câu 314. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Biết $ABB'A'$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{AA'B'} = 60^\circ$ và góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng 30° . Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Thể tích khối tứ diện $ACMC'$ bằng

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{48}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 315. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2 \text{ có nghiệm } x \in [-1; 2] \text{ là}$$

- A. 1746. B. 1750. C. 1747. D. 1748.

Câu 316. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay]_[ĐỀ BGD 2019-MĐ 101].

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M , N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

- A. $27\sqrt{3}$. B. $21\sqrt{3}$. C. $30\sqrt{3}$. D. $36\sqrt{3}$.

Câu 317. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay]_[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103].

Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2x + y^2 + 4y$.

- A. $\frac{33}{8}$. B. $\frac{9}{8}$. C. $\frac{21}{4}$. D. $\frac{41}{8}$.

Câu 318. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay]_[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-2	2		-3		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 15. B. 12. C. 14. D. 13.

Câu 319. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $x, y \in (0; 2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8) = ey(ey-11)$. Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{1 + \ln y}$ bằng:

- A. $\sqrt{1 + \ln 3 - \ln 2}$. B. $2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$. C. $1 + \sqrt{\ln 3 - \ln 2}$. D. $1 + \sqrt{\ln 2}$.

Câu 320. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết

$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng.

- A. $\frac{6}{\pi}$. B. $\frac{2}{\pi}$. C. $\frac{4}{\pi}$. D. $\frac{1}{\pi}$.

Câu 321. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{137}{16}$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$f'(x)$			$-\frac{11}{2}$		

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = e^{-x^2 + 4mx - 5} \cdot f(x)$ đồng biến trên $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

- A. 4040. B. 4041. C. 2019. D. 2020.

Câu 322. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0, b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$.

- A. 17. B. 14. C. 15. D. 16.

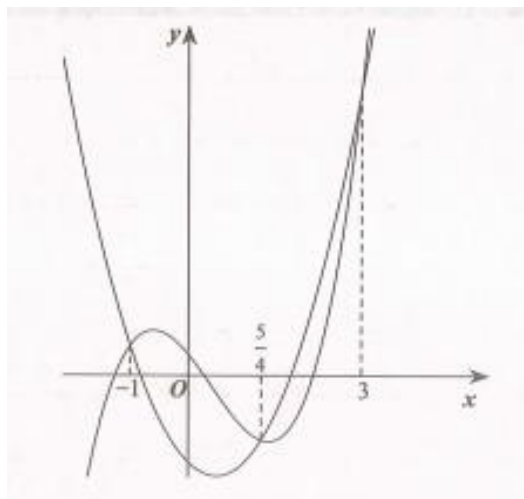
Câu 323. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

- A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. B. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Câu 324. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

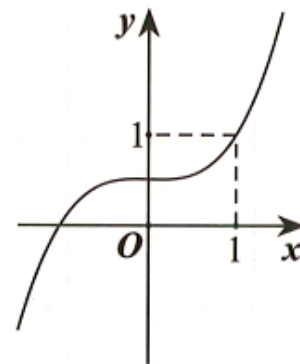
Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + 1$ với $a, b, c, d, e, m, n, p, q$ là các số thực. Đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$; $y = g'(x)$ như hình vẽ dưới. Tổng các nghiệm của phương trình $f(x) + q = g(x) + e$ bằng



- A. $\frac{13}{3}$. B. $-\frac{13}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{4}{3}$.

Câu 325. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của m ($m \in \mathbb{R}$) sao cho $(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là



- A. 2 B. 0
C. 3 D. 1

Câu 326. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là:

- A. $\sqrt{2} + 1$ B. $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 327. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho phương trình: $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1 - x^2})(1 + x\sqrt{1 - x^2})$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm.

- A. $\left[\frac{1}{2}\ln 2; +\infty\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\ln 2\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\ln 2\right]$. D. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$.

Câu 328. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x) - 2f(x))\ln x = x^3 - f(x)$, $\forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(12; \frac{25}{2}\right)$.

Câu 329. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{x + y - z}{x + y + z}$ bằng bao nhiêu, biết rằng x ,

y, z là các số thực thỏa mãn $\log_{16}\left(\frac{x + y + z}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1}\right) = x(x - 2) + y(y - 2) + z(z - 2)$.

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 330. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^{x^2 + y^2 - 1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3$. Biết giá trị lớn nhất

của biểu thức $S = |x - y| + |x^3 - y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $T = 2a + b$.

- A. $T = 25$. B. $T = 34$. C. $T = 32$. D. $T = 41$.

Câu 331. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ (khi a thay đổi) là:

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 6.

Câu 332. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt: $x^4 - 16x^2 + 8(1-m)x - m^2 + 2m - 1 = 0$.

- A. 4. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 333. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2-f(x)-2019} = 0$ và $f(0) = -2019$. Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $f(x) < 7$ là

- A. 91. B. 46. C. 45. D. 44.

Câu 334. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét số phức z có phần thực dương và ba điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$. Biết tứ giác $OABC$ là một hình bình hành, giá trị nhỏ nhất của

$\left| z + \frac{1}{z} \right|^2$ bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. 4.

Câu 335. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$. Gọi M, m lần

lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}$. Tính $T = 10M - m$.

A. $T = 60$.

B. $T = 94$.

C. $T = 104$.

D. $T = 50$.

Câu 336. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$.

B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$.

Câu 337. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ và phương trình $\|f(x) + m\| + m = n$ có 8 nghiệm phân biệt với $m \in (-6; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} -6 < m < -4 \\ 2 < n < -6 - 2m \end{cases}$.

B. $\begin{cases} -3 < m < -2 \\ 6 + 2m < n < 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} -3 < m < -2 \\ -m < n \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -3 < m < -2 \\ \begin{cases} 0 < n < 6 + 2m \\ 2 < n < -m \end{cases} \end{cases}$.

Câu 338. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1; 50]$ để z là số thuần ảo?

A. 25.

B. 50.

C. 26.

D. 24.

Câu 339. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

A. $m \geq -3$.

B. $m > -3$.

C. $m \geq -2$.

D. $m \leq -2$.

Câu 340. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các hàm số $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ biết:

$$f_0(x) = \ln x + |\ln x - 2019| - |\ln x + 2019|, f_{n+1}(x) = |f_n(x)| - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Số nghiệm của phương trình $f_{2020}(x) = 0$ là

- A. 6058. B. 6057. C. 6059. D. 6063.

Câu 341. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\sqrt{\log_2 \frac{x}{4}} + \sqrt{\log_3 \frac{y}{9}} + \sqrt{\log_5 \frac{z}{25}} = 3$. Tính giá trị nhỏ nhất của $S = \log_{2001} x \cdot \log_{2018} y \cdot \log_{2019} z$.

- A. $\min S = 27 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
 B. $\min S = 44 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
 C. $\min S = 88 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
 D. $\min S = \frac{289}{8} \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

Câu 342. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \leq 3 \int_0^1 f'(x) \cdot f^2(x) dx$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = 2(\sqrt{e} - 1)$. B. $I = 2(e^2 - 1)$. C. $I = \frac{\sqrt{e} - 1}{2}$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{2}$.

Câu 343. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Với a là tham số thực để bất phương trình $2^x + 3^x \geq ax + 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi đó

- A. $a \in (-\infty; 0)$. B. $a \in (1; 3)$. C. $a \in (3; +\infty)$. D. $a \in (0; 1)$

Câu 344. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm P, Q, R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} = \frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng d thay đổi nhưng

luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và cắt (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Diện tích lớn nhất của tam giác AOB là

- A. $\sqrt{15}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{17}$. D. $\sqrt{7}$.

Câu 345. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Cho hàm số

$y = f(x) = Mx$ với $M = \max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|; \left|\frac{c}{a}\right|\right\}$. Tìm các giá trị của tham số a sao cho hàm số

$g(x) = -f(x) + ax$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $a \leq \frac{x_0^2}{x_0 + 1}$. B. $a \leq -\frac{x_0 + 1}{x_0}$. C. $a \leq \frac{x_0^2}{|x_0| + 1}$. D. $a \leq -\frac{|x_0| + 1}{x_0}$.

Câu 346. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

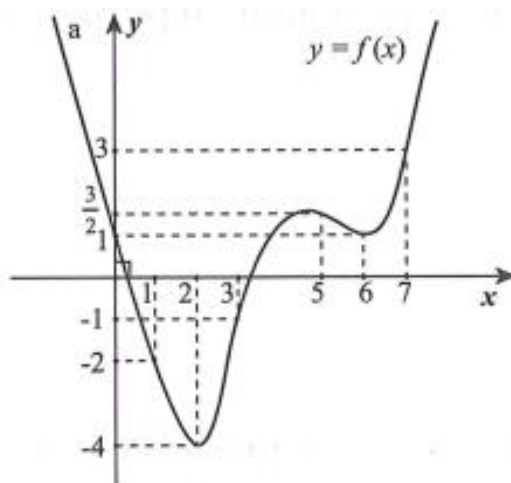
Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn

$f(1) = e \cdot f(0)$ và $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(1) = \sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. B. $f(1) = \frac{2(e-2)}{e-1}$. C. $f(1) = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. D. $f(1) = \sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$.

Câu 347. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = m$ có nghiệm.

- A. $-4 \leq m \leq -2$. B. $-4 < m < -2$. C. $2 < m < 4$. D. $2 \leq m \leq 4$.

Câu 348. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9 \cdot 3^{2x} - m \left(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3 \right) \cdot 3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

- A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 349. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = 60^\circ$, $BSC = 90^\circ$, $ASC = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC} = \frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

- A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$. B. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$. C. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

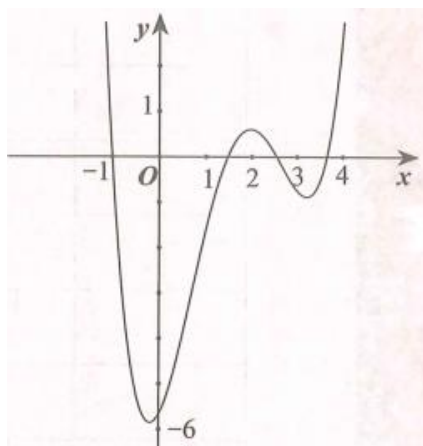
Câu 350. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho một đa giác đều (H) có 15 đỉnh. Người ta lập một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của (H) . Tính số tứ giác được lập thành mà không có cạnh nào là cạnh của (H) .

- A. 4950. B. 1800. C. 30. D. 450.

Câu 351. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số đa thức $f(x) = mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + hx + r$, $(m, n, p, q, h, r \in \mathbb{R})$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{11}{3}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - (m + n + p + q + h + r)|$ là



A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Câu 352. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{7+3x} - \sqrt[3]{7-3x} + 2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) + f(2x - 2x^2 - 5) < 0, \forall x \in (0;1)$. Số phần tử của S là?

A. 7.

B. 3.

C. 9.

D. 5.

Câu 353. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB < BC, BC = 3cm$. Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ hợp với nhau góc $\alpha \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Đường chéo $B'D$ hợp với mặt phẳng $(CDD'C')$ một góc $\beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Hai góc α, β thay đổi nhưng thỏa mãn hình hộp $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều. Giá trị lớn nhất của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\sqrt{3}cm^3$.

B. $2\sqrt{3}cm^3$.

C. $6\sqrt{3}cm^3$.

D. $12\sqrt{3}cm^3$.

Câu 354. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) \cdot f'(x)}{f(x)} dx$.

A. $I = -\frac{14}{3}$. B. $I = -\frac{32}{5}$. C. $I = -\frac{16}{3}$. D. $I = -\frac{16}{5}$.

Câu 355. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + (1 - 2m)y + 4mz - 4 = 0$ và $2x + my - (2m + 1) - 8 = 0$. Khi m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = \sqrt{\frac{142}{15}}$. B. $r = \sqrt{\frac{92}{3}}$. C. $r = \sqrt{\frac{23}{3}}$. D. $r = \sqrt{\frac{586}{15}}$.

Câu 356. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 4)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm D, E, F sao cho $OD = 2OE = (m^2 - 2m + 2)OF \neq 0$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để chỉ có đúng ba mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu trên.

Tập hợp S có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng?

A. 7. B. 3. C. 15. D. 4.

Câu 357. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - 3 - 2i| \leq 5$ và $\left| \frac{z + 4 + 3i}{z - 3 + 2i} \right| \leq 1$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 + 8x + 4y$. Tính $M + m$

A. -18. B. -4. C. -20. D. -2.

Bài tập tương tự

Cho $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$

A. $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$. B. $60 - 20\sqrt{10}$. C. $\frac{165}{5} + 20\sqrt{10}$. D. $60 + 20\sqrt{10}$.

Câu 358. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2 \cdot \frac{AD}{AN} = 4$. Ký hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{17}{14}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 359. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Từ hai chữ số 0 và 1 tạo ra được bao nhiêu số có 2018 chữ số chia hết cho 5, đồng thời tổng của các chữ số là một số chẵn

- A. 2^{2018} . B. 2^{2017} . C. 2^{2015} . D. 2^{2016} .

Câu 360. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Dựng mặt phẳng (P) cách đều năm điểm A, B, C, D và S . Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?

- A. 1 mặt phẳng. B. 2 mặt phẳng. C. 4 mặt phẳng. D. 5 mặt phẳng.

Câu 361. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$ thỏa mãn $f(3) = 0$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6}$

và $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = -\frac{7}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng:

- A. $-\frac{7}{3}$. B. $-\frac{97}{30}$. C. $\frac{7}{6}$. D. $-\frac{7}{6}$.

Câu 362. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;2)$ và $B(\sqrt{3};1;3)$ thỏa mãn $AB \perp BC$

$AB \perp AD; AD \perp BC$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB , đường thẳng CD di động và luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) . Gọi $E \in AB, F \in CD$ và EF là đoạn vuông góc chung của AB và CD . Biết rằng đường thẳng Δ là tiếp tuyến của mặt cầu (S) và thỏa mãn $(\Delta) \perp EF; (\Delta) \perp AB$ và $d(A;(\Delta)) = \sqrt{3}$. Khoảng cách giữa Δ và CD lớn nhất bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$. B. 2. C. $\frac{\sqrt{3}+3}{2}$. D. 3.

Câu 363. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét các số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - 3i, z_3 = 4 + i$ và số phức z thay đổi. Biết rằng tồn tại số phức z_4, z_5, z_6 mà $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}, \frac{z_5 - z_3}{z_5 - z_1}, \frac{z_6 - z_1}{z_6 - z_2}$ là các số thực, còn $\frac{z - z_4}{z_2 - z_3}, \frac{z - z_5}{z_3 - z_1}, \frac{z - z_6}{z_1 - z_2}$ thuần ảo. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |z - z_4|^2 + |z - z_5|^2 + |z - z_6|^2$.

- A. $\frac{72}{5}$. B. 3. C. $\frac{72}{25}$. D. $\frac{18}{25}$.

Câu 364. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Gọi P là tích ba số ở ba lần tung (mỗi số là số chấm trên mặt xuất hiện ở mỗi lần tung), tính xác suất sao cho P không chia hết cho 6.

- A. $\frac{82}{216}$. B. $\frac{90}{216}$. C. $\frac{83}{216}$. D. $\frac{60}{216}$.

Câu 365. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + 2w| = 3, |2z + 3w| = 6$ và $|z + 4w| = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = z\bar{w} + \bar{z}w$.

- A. $P = -14i$. B. $P = -28i$. C. $P = -14$. D. $P = -28$.

Câu 366. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

- A. $T = 2 + 9 \ln 2$. B. $T = 9$. C. $T = \frac{1}{2} + 9 \ln 2$. D. $T = 2 - 9 \ln 2$.

Câu 367. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $4 - \sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. 3. D. $4 + \sqrt{3}$.

Câu 368. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n + 2)C_n^n = 1600$.

- A. $n = 5$. B. $n = 7$. C. $n = 10$. D. $n = 8$.

Câu 369. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\log \left(\frac{(m-1) \cdot 16^x + 2 \cdot 25^x}{5 \cdot 20^x} \right) - 5^{x+1} \cdot 4^x = (1-m)4^{2x} - 2 \cdot 25^x$$

có hai nghiệm thực phân biệt. Số phần tử của S bằng

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 370. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có 8 nghiệm dương phân biệt không nguyên, phương trình $f(2x^3 - 3x^2 + 1) = 0$ có 20 nghiệm phân biệt, phương trình $f(x^4 - 2x^2 + 2) = 0$ có 8 nghiệm phân biệt. Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 371. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C) , biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và đường thẳng pháp tuyến của hai tiếp tuyến đó tạo thành một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi các tiếp tuyến và pháp tuyến tại A, B . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{125}{768}$. D. $\frac{125}{128}$.

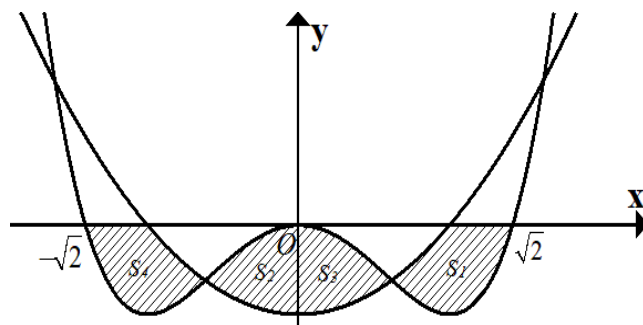
Câu 372. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức z thỏa $|z_1 + 1| + |z_1 - 1| + |z_1 - \overline{z_1} - 4| \leq 6$ và $|z_2 - 5i| \leq 2$ thì giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2| = m$. Khẳng định đúng là

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (4; 5)$. D. $m \in (5; 7)$.

Câu 373. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ và hàm số $y = g(x) = x^2 - m^2$, với $0 < m < \sqrt{2}$ là tham số thực. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Ta có diện tích $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$ tại m_0 . Chọn mệnh đề đúng.



- A. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$. B. $m_0 \in \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{6}\right)$. C. $m_0 \in \left(\frac{7}{6}; \frac{5}{4}\right)$. D. $m_0 \in \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 374. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Giả sử z là số phức thỏa mãn $|iz - 2 - i| = 3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$2|z - 4 - i| + |z + 5 + 8i|$ có dạng $\sqrt{abc}$. Khi đó $a + b + c$ bằng

- A. 6. B. 9. C. 12. D. 15.

Câu 375. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x - 2020 \leq 0 \\ x^2 - (m+2)x - m^2 + 3 \geq 0 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$
 Gọi S là

tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm.

Tính tổng các phần tử của S .

- A. 10. B. 15. C. 6. D. 3.

Câu 376. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w = z_1 + z_2$ là

- A. $|w| = 2\sqrt{2}$. B. $|w| = 2$. C. $|w| = \sqrt{2}$. D. $|w| = 1 + \sqrt{2}$.

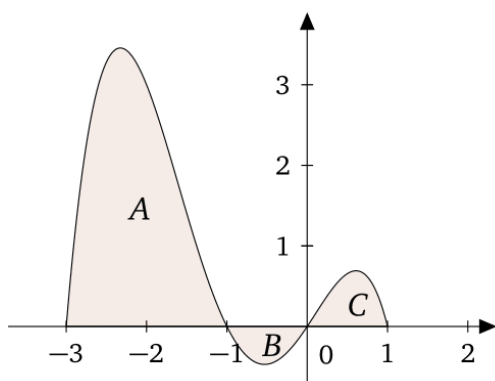
Câu 377. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$. Diện tích của tam giác ABC bằng

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $9\sqrt{3}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 378. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

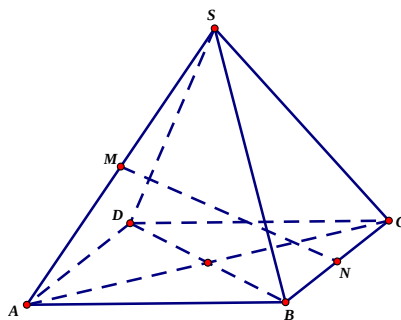
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;1]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Biết diện tích các hình A, B, C lần lượt là 27, 2 và 3. Tính tích phân $I = \int_0^2 (x^3 + x)f'(x^2 - 3)dx$.



- A. -14. B. -32. C. 32. D. 28.

Câu 379. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, CD . Biết góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD) bằng 30° (như hình vẽ).



Thể tích của khối chóp đều $S.ABCD$ là:

- A. $V = \frac{\sqrt{30}a^3}{18}$. B. $V = \frac{\sqrt{21}a^3}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{22}a^3}{6}$.

Câu 380. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x+4)^2 + y^2 + z^2 = 16$, $(S_2): (x+4)^2 + y^2 + z^2 = 36$ và điểm $A(4;0;0)$. Đường thẳng Δ đi động nhưng luôn tiếp xúc với (S_1) , đồng thời cắt (S_2) tại hai điểm B, C . Tam giác ABC có thể có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

- A. $24\sqrt{5}$. B. 48. C. 72. D. $28\sqrt{5}$.

Câu 381. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = |2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 1 - m|$ (m là tham số). Biết rằng khi m thay đổi thì số điểm cực trị của hàm số có thể là a hoặc b hoặc c . Giá trị $a + b + c$ bằng

- A. 12. B. 16. C. 15. D. 13.

Câu 382. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-6) < 0$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = |3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 7. B. 4. C. 1. D. 5.

Câu 383. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + mx + 3$ và đường thẳng $d: y = ax$ với m, a là các tham số và $a > 0$. Biết rằng A, B là hai điểm cực trị của (C) và d cắt (C) tại hai điểm C, D sao cho $CD = 4\sqrt{2}$ và $ACBD$ là hình bình hành. Tính diện tích của $ACBD$.

- A. 12. B. 16. C. 9. D. $4\sqrt{10}$.

Câu 384. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0		3		0	$+\infty$

Có bao nhiêu số tự nhiên n sao cho $\ln\left(f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + m\right) > n$ có nghiệm với $x \in (-1; 3)$ và $m \in [0; 13]$

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 7.

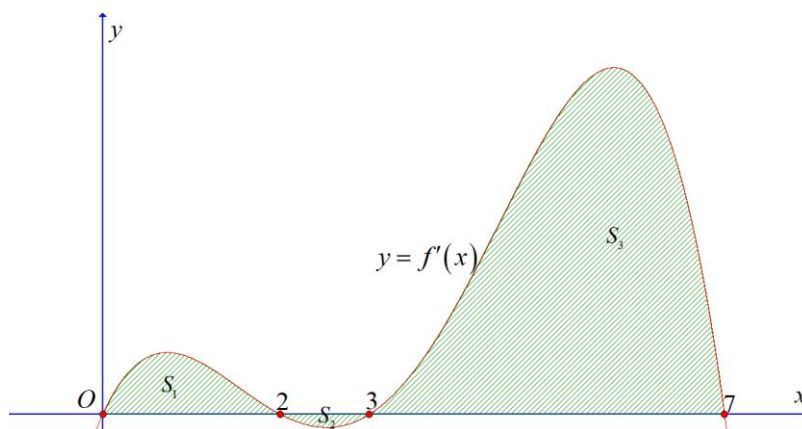
Câu 385. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên n có 4 chữ số thỏa mãn $(2^n + 3^n)^{2020} < (2^{2020} + 3^{2020})^n$.
Số phần tử của S là

- A. 8999. B. 2019. C. 1010. D. 7979.

Câu 386. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 7]$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 7]$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(2x-1)$, biết rằng diện tích các hình phẳng trong hình vẽ lần lượt là

$$S_1 = \frac{244}{15}, S_2 = \frac{28}{15}, S_3 = \frac{2528}{15} \text{ và } f(0) = 1, \text{ tính } g(4).$$

A. $\frac{2759}{15}$. B. $\frac{2744}{15}$. C. $\frac{5518}{15}$. D. $\frac{563}{3}$.

Câu 387. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $M.ABCD$ có đỉnh M thay đổi luôn nằm trên mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 1$, đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm $H(1;2;3)$, $A(3;2;1)$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $M.ABCD$ bằng

A. 64. B. $\frac{32}{3}$. C. $\frac{128}{3}$. D. $\frac{64}{3}$.

Câu 388. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y để phương trình

$\ln(\log_5 y + \ln(\log_5 y + \sin x)) = \sin x$ có nghiệm?

A. 10. B. 11. C. 42. D. 43.

Câu 389. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét hai số phức z_1, z_2 , thỏa mãn $|z_1 + 1| = 1, |z_2 + 2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2 - 1| = \sqrt{6}$. Giá trị lớn nhất của $|5z_1 + z_2 + 7 - 3i|$ bằng

A. $3\sqrt{2} + 3$. B. $2\sqrt{2} - 3$. C. $3 - \sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3} + 2$.

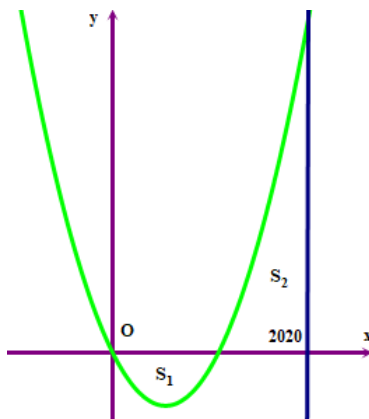
Câu 390. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 75$ và mặt phẳng $(P): (m^2 + 2m)x - (m^2 + 4m - 1)y + 2(3m - 1)z + m^2 + 1 = 0$. A là điểm thuộc mặt cầu (S) . Khi khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất thì khối nón có đỉnh là A , đường tròn đáy là giao tuyến của (P) và (S) có thể tích bằng bao nhiêu?

A. $128\pi\sqrt{3}$. B. $75\pi\sqrt{3}$. C. $32\pi\sqrt{3}$. D. $64\pi\sqrt{3}$.

Câu 391. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = x^2 - mx$ ($0 < m < 2020$) có đồ thị (C) . Gọi $S_1 + S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2020$. Giá trị của m sao cho $S_2 = S_1$ là



A. $m = \frac{4040}{3}$

B. $m = \frac{4041}{3}$

C. $m = \frac{2021}{3}$

D. $m = \frac{2020}{3}$

Câu 392. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2000; 2000)$ để $4a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 3$ với mọi $a, b \in (1; +\infty)$

A. 2199.

B. 2000.

C. 2001.

D. 1999.

Câu 393. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON = 2020$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng đi qua $D(0;202;10)$ cắt (S) theo một dây cung EF , khi đó EF có độ dài ngắn nhất là.

A. $4\sqrt{10226}$.

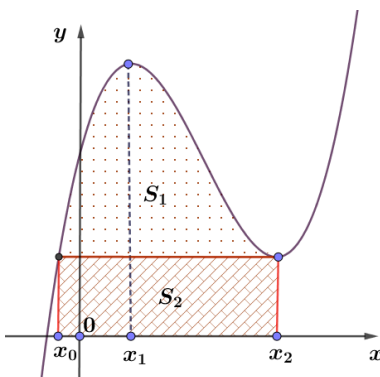
B. $2\sqrt{10226}$.

C. $3\sqrt{10226}$.

D. $5\sqrt{10226}$.

Câu 394. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{27}{8}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Câu 395. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;-1); B(1;3;-2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0$. Xét khối nón (N) có đỉnh là tâm I của mặt cầu và đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S) . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) và đi qua hai điểm A, B có phương trình dạng $2x + by + cz + d = 0$ và $y + mz + e = 0$. Giá trị của $b + c + d + e$ bằng

A. 15.

B. -12.

C. -14.

D. -13.

Câu 396. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3} + \sqrt[3]{m-3x} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 45.

B. 34.

C. 27.

D. 38.

Câu 397. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho biểu thức $P = 2^x + 2^{\sqrt{1-4y^2}}$ trong đó x, y là 2 số thực thỏa mãn

$$26y^3 + 3(2y - x) - x^3 = 3xy(x + y).$$

Biết rằng giá trị lớn nhất của P có dạng $a.b^{\frac{1}{\sqrt{c}}}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Giá trị của biểu thức $a + b - c$ là?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 398. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong một hình tứ diện ta tô màu các đỉnh, trung điểm các cạnh, trọng tâm các mặt và trọng tâm tứ diện. Chọn ngẫu nhiên 4 điểm trong số các điểm đã tô màu, xác suất để 4 điểm được chọn có thể tạo thành bốn đỉnh của một tứ diện là

- A. $\frac{188}{273}$. B. $\frac{1009}{1365}$. C. $\frac{245}{273}$. D. $\frac{136}{195}$.

Câu 399. [#Mỗi ngày 3 hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, biết rằng với mọi tham số thực a thay đổi thì mặt phẳng (P) : $(2\sin a - \cos a)x + (2\sin a + \cos a)y + \sqrt{6}\cos az + \sin a + 3\cos a - 2 = 0$ luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có bán kính R là?

- A. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $R = 2$. C. $R = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $R = \frac{1}{2}$.

Câu 400. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên M và có đồ thị (C) . Biết hai tiếp tuyến với (C) tại điểm $x_0 = 1$ tạo với nhau một góc 45° , hai tiếp tuyến này cùng với trục hoành tạo thành một tam giác nhọn có số đo ba góc lập thành một cấp số cộng. Biết rằng biểu thức

$A = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(2-x)}{x-1}$ dương. Khi đó giá trị của A bằng

- A. 2. B. $2 + 2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{3} + 2$. D. $\sqrt{3} + 1$.

Câu 401. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;0)$, bán kính bằng 3 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(0;1;0)$, bán kính bằng 2. Đường thẳng Δ thay đổi tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) , (S_2) . Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm $A(1;1;1)$ đến đường thẳng Δ . Giá trị tổng $M + m$ bằng

- A. 5. B. $5\sqrt{2}$. C. 6. D. $6\sqrt{2}$.

Câu 402. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x) \cdot f(x) = 1 \\ f(x) \neq -1 \end{cases}$ với mọi

$x \in [0; 3]$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1 + f(3-x)]^2 \cdot f^2(x)} dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

-----THE END-----



201 câu hỏi hay Phần 2

Đáp án

Câu 202. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong các số phức z dưới đây, số phức nào thỏa mãn $|z|=1$ và $|z^3 - z + 2|$ đạt giá trị lớn nhất?

A. $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. B. $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. C. $z = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i$. D. $z = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i$.

Giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $z^3 - z + 2 = 4x^3 - 4x + 2 + y(4x^2 - 2)i$ (do $|z|=1$).

$$\Rightarrow |z^3 - z + 2| = (4x^3 - 4x + 2)^2 + (4x^2 - 2)^2(1 - x^2) = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8.$$

Xét hàm số $f(x) = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$, $x \in [-1; 1]$.

Ta có: $f'(x) = 48x^2 - 8x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ hay $x = -\frac{1}{2}$.

Tính $f(-1) = 4$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 13$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$, $f(1) = 4$.

Dựa vào kết quả trên ta thấy $\max_{|z|=1} |z^3 - z + 2| = \sqrt{13} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Đáp án A.

Câu 203. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-1| = \sqrt{34}$ và $|z+1+mi| = |z+m+2i|$.

Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc (S) sao cho $|z_1 - z_2|$ nhỏ nhất, giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng?

A. 2. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.

Giải

Đặt $z = x + yi$ theo giả thiết có:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 34 \\ (x+1)^2 + (y+m)^2 = (x+m)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 34(1) \\ (2m-2)x - (2m-4)y + 3 = 0(2) \end{cases}$$

Ta có (1) là đường tròn (C) có tâm $I(1; 0)$, $R = \sqrt{34}$; (2) là đường thẳng Δ .

Vì vậy có tối đa 2 số phức z thỏa mãn và gọi $A(z_1), B(z_2)$ ta có

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I, \Delta)} = 2\sqrt{34 - d^2(I, \Delta)} \Rightarrow AB_{\min} \Leftrightarrow d(I, \Delta)_{\max}.$$

Ta có $d(I, \Delta) = \frac{|1(2m-2)+3|}{\sqrt{(2m-2)^2+(2m-4)^2}} \Rightarrow d(I, \Delta)_{\max} = \frac{\sqrt{34}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{13}{8}$.

Khi đó $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 34, \\ \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow |z_1 + z_2| = 3\sqrt{2}.$

Đáp án D.

Câu 204. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét số phức z có phần thực dương và ba điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$. Biết tứ giác $OABC$ là một hình bình hành, giá trị nhỏ nhất của $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2$ bằng?

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 4.

Giải

Ta có $OA = |z|, AB = \left|\frac{1}{z} - z\right|, BC = \left|\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\right| = |z|, OC = \left|z + \frac{1}{z}\right|.$

Vì $OABC$ là một hình bình hành nên

$$\begin{cases} OA = BC \\ AB = OC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z| \\ \left|\frac{1}{z} - z\right| = \left|z + \frac{1}{z}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z} - z\right| = \left|z + \frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{1-z^2}{z}\right| = \left|\frac{1+z^2}{z}\right| \Leftrightarrow |1-z^2| = |1+z^2|$$

Đặt $z = x + yi \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. vậy điều kiện trở thành:

$$|1-z^2| = |1+z^2| \Leftrightarrow |(x^2 - y^2 - 1) + 2xyi| = |(x^2 - y^2 + 1) + 2xyi|$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 1)^2 = (x^2 - y^2 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = x^2 - y^2 + 1 \\ x^2 - y^2 - 1 = -(x^2 - y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2$$

Khi đó

$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left|\frac{1+z^2}{z}\right|^2 = \left|\frac{(x^2 - y^2 + 1) + 2xyi}{x + yi}\right|^2 = \frac{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 + 4x^4}{2x^2} = 2x^2 + \frac{1}{2x^2} \geq 2\sqrt{2x^2 \cdot \frac{1}{2x^2}} = 2.$$

$$\text{Đầu bằng đạt tại } \begin{cases} 2x^2 = \frac{1}{2x^2} \\ y^2 = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Đáp án B.**Câu 205. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].**

Một trang giấy A4 kích thước 21 cm x 29,7 cm có thể viết được 50 dòng, mỗi dòng có 75 chữ số (chữ số trong hệ thập phân). Ngày 25/01/2013, người ta đã tìm được số nguyên tố Mersenne $2^{57885161} - 1$. Nếu viết số nguyên tố này theo hệ thập phân trên trang giấy A4 nói trên thì cần bao nhiêu tờ giấy A4, biết rằng mỗi tờ giấy tương ứng với 2 trang?

- A. 2324 tờ. B. 2315 tờ. C. 2323 tờ. D. 2316 tờ.

Giải

Đặt $p = 2^{57885161} - 1$ thì $p + 1 = 2^{57885161}$

Suy ra: $\log(p + 1) = 57.885.161 \log 2 \approx 17.425.169,76$

Hay $p + 1 \approx 10^{1742516976} \Rightarrow 10^{17425169} < p + 1 < 10^{17425170}$

Do đó, viết trong hệ thập phân thì p có 17425170 chữ số.

Ta có: $\frac{17.425.170}{50.75.2} = 2323,356$ nên số tờ giấy A4 cần dùng để viết số nguyên tố đã cho là 2324.

Đáp án A.**Câu 206. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].**

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $10u_n + u_{10} + \sqrt{u_n - 2u_{n-1}} = 20u_{n-1} + \sqrt{2u_{10} - 1}$, với mọi số nguyên $n \geq 2$. Tìm số tự nhiên n_0 nhỏ nhất để $u_{n_0} > 2019^{2019}$.

- A. $n_0 = 22168$. B. $n_0 = 22167$. C. $n_0 = 22178$. D. $n_0 = 22177$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} u_n - 2u_{n-1} \geq 0 \\ 2u_{10} - 1 \geq 0 \end{cases}$.

Từ giả thiết ta có: $10u_n + u_{10} + \sqrt{u_n - 2u_{n-1}} = 20u_{n-1} + \sqrt{2u_{10} - 1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u_n - 2u_{n-1}} (20\sqrt{u_n - 2u_{n-1}} + 2) + (\sqrt{2u_{10} - 1} - 1)^2 = 0$$

Vì $\sqrt{u_n - 2u_{n-1}} \geq 0; 20\sqrt{u_n - 2u_{n-1}} + 2 > 0; (\sqrt{2u_{10} - 1} - 1)^2 \geq 0$ nên suy ra:

$$u_{10} = 1; u_n = 2u_{n-1}, \forall n \geq 2$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân công bội $q = 2$.

$$l = u_{10} = 2^9 \cdot u_1 \Rightarrow u_1 = 2^{-9} \Rightarrow u_n = 2^{-9} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-10}$$

$$u_n > 2019^{2019} \Leftrightarrow 2^{n-10} > 2019^{2019} \Leftrightarrow n-10 > 2019 \log_2 2019$$

$$\Rightarrow n \approx 22167,45947 \Rightarrow n_0 = 22178$$

Đáp án D.

Bài tập tương tự

Câu 1. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2)$ và $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$ bằng?

- A. 100. B. 99. C. 101. D. 102.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{3}; u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$. Tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10}$ bằng?

- A. $\frac{3280}{6561}$. B. $\frac{29524}{59049}$. C. $\frac{25942}{59049}$. D. $\frac{1}{243}$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.

- A. 2587. B. 2590. C. 2593. D. 2584.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2 \log_4(u_n - 8n + 8), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \text{ Tìm số nguyên dương lớn nhất } n \text{ thỏa mãn } \frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}.$$

- A. 18. B. 17. C. 16. D. 19.

Đáp án: 1D; 2B; 3C; 4A.

Câu 207. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x(1-2m)y + 4mz - 4 = 0$ và $2x + my - (2m+1)z - 8 = 0$. Khi m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = \sqrt{\frac{142}{15}}$.

B. $r = \sqrt{\frac{92}{3}}$.

C. $r = \sqrt{\frac{23}{3}}$.

D. $r = \sqrt{\frac{586}{15}}$.

Giải

(S) có tâm $I(2; -2; 1)$, bán kính $R = 4$.

Các điểm d_m có tọa độ thỏa mãn $x + (1 - 2m)y + 4mz - 4 = 0$ và $2x + my - (2m + 1)z - 8 = 0$

Do đó:

$$[x + (1 - 2m)y + 4mz - 4] + 2[2x + my - (2m + 1)z - 8] = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + y - 2z - 20 = 0$$

Suy ra d_m luôn nằm trong mp (P): $5x + y - 2z - 20 = 0$ cố định khi m thay đổi.

Mà $d(I, (P)) = \frac{14}{\sqrt{30}} < 4 \Rightarrow (P)$ cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm H bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{16 - \frac{196}{225}} = \sqrt{\frac{142}{15}}$$

Đáp án A.

Note:

Với hai mặt phẳng (P): $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; (Q): $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Khi đó, giao tuyến của (P), (Q) luôn nằm trên mặt phẳng có phương trình:

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \text{ với } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Câu 208. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(0; 0; 4), B(3; 2; 6), C(3; -2; 6)$. Gọi M là điểm di động trên mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + |\vec{MB} + \vec{MC}|$ bằng?

A. $2\sqrt{34}$.

B. $6\sqrt{5}$.

C. $4\sqrt{10}$.

D. $2\sqrt{29}$.

Giải

Với điểm $M(x; y; z) \in (S)$ thì $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ và điểm $I(3; 0; 6)$ là trung điểm BC và

$$MA + |\vec{MB} + \vec{MC}| = MA + 2|\vec{MI}| = MA + 2MI$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 4)^2} + 2\sqrt{(x - 3)^2 + y^2 + (z - 6)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 4)^2 + 3[x^2 + y^2 + z^2 - 4]} + 2\sqrt{(x - 3)^2 + y^2 + (z - 6)^2}$$

$$= 2 \left[\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z-6)^2} \right]$$

$$\geq 2\sqrt{(x+3-x)^2 + (y-y)^2 + (z-1+6-z)^2} = 2\sqrt{34}$$

Dấu bằng đạt tại:
$$\begin{cases} \frac{x}{3-x} = \frac{z-1}{6-z} = k > 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(\frac{3\sqrt{127}-15}{34}; 0; \frac{9+5\sqrt{127}}{34} \right)$$

Đáp án A.

Câu 209. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \int_0^2 (2f(x) + 3x) f(x) dx - \int_0^1 (4f(x) + x) \sqrt{xf(x)} dx$ bằng?

A. $-\frac{1}{24}$.

B. $-\frac{1}{8}$.

C. $-\frac{1}{12}$.

D. $-\frac{1}{6}$.

Giải

Để cho đơn giản đặt $a = f(x)$ ta có:

$$M = \int_0^1 (2f(x) + 3x) f(x) dx - \int_0^1 (4f(x) + x) \sqrt{xf(x)} dx$$

$$= \int_0^1 [(2a + 3x)a] dx - \int_0^1 (4a + x) \sqrt{xa} dx$$

$$= \int_0^1 (2a^2 - 4a\sqrt{xa} + 3ax - x\sqrt{xa}) dx \geq \int_0^1 -\frac{x^2}{8} dx = -\frac{1}{24}.$$

$$\text{Vì } 2a^2 + 3ax - 4a\sqrt{ax} - x\sqrt{ax} + \frac{x^2}{8} = \frac{1}{8} (2\sqrt{a} - \sqrt{x})^4 \geq 0.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại: } 2\sqrt{a} = \sqrt{x} \Leftrightarrow 4a = x \Leftrightarrow a = \frac{x}{4} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{4}.$$

Đáp án A.

Câu 210. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$xf'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(2) = 1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x) dx$ bằng?

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 2.

D. 4.

Giải

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[0; 2]$ có $\int_0^2 xf'(x) dx = \int_0^2 f^2(x) dx - \int_0^2 x dx$.

Tích phân từng phần có:

$$\int_0^2 xf'(x) dx = \int_0^2 x d\left(\frac{1}{2} f^2(x)\right) = \frac{x}{2} f^2(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2} f^2(x) dx = f^2(2) - \frac{1}{2} \int_0^2 f^2(x) dx.$$

$$\text{Vậy } f^2(2) - \frac{1}{2} \int_0^2 f^2(x) dx = \int_0^2 f^2(x) dx - \int_0^2 x dx \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x) dx = \frac{f^2(2) + \int_0^2 x dx}{\frac{3}{2}} = \frac{1^2 + 2}{\frac{3}{2}} = 2.$$

Đáp án C.

Câu 211. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $\left| (S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \right|$ và $\left| (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0 \right|$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) ; hai đỉnh C, D nằm trên (S_2) . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $6\sqrt{2}$.

Giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1; -2; 1)$, $R_1 = 2$. Mặt cầu (S_2) có tâm $I(1; -2; 1)$, $R_2 = \sqrt{10}$.

Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng AB, CD .

$$\text{Ta có: } AB = 2\sqrt{R_1^2 - a^2} = 2\sqrt{4 - a^2}; CD = 2\sqrt{R_2^2 - b^2} = 2\sqrt{10 - b^2}$$

$$\text{và } d(AB, CD) \leq d(I, AB) + d(I, CD) = a + b \text{ và } \sin(AB, CD) \leq 1.$$

Do đó theo công thức tính thể tích tứ diện cho trường hợp đặc biệt có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) \leq \frac{2}{3} (a + b) \sqrt{4 - a^2} \cdot \sqrt{10 - b^2} \leq 6\sqrt{2}.$$

Dấu bằng đạt tại $(a; b) = (1; 2)$.

Đáp án D.

Câu 212. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp các số phức z có phần thực và phần ảo đều là các số nguyên đồng thời thoả mãn hai điều kiện: $|z - 3 - 4i| \leq 2$ và $|z + \bar{z}| \leq |z - \bar{z}|$. Số phần tử của tập S bằng?

A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 10.

Giải

$$\text{Đặt: } z = a + bi \text{ theo giả thiết có } \begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 \leq 4 \\ |2a| \leq |2b| \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 \leq 4 \\ a^2 \leq b^2 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ta phải có: $(a-3)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq a-3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 5$.

$$+) \text{ Nếu } a = 1 \Rightarrow \begin{cases} 4 + (b-4)^2 \leq 4 \\ 1 \leq b^2 \end{cases} \Leftrightarrow b = 4 \Rightarrow (a; b) = (1; 4);$$

$$+) \text{ Nếu } a = 2 \Rightarrow \begin{cases} 4 + (b-4)^2 \leq 4 \\ 4 \leq b^2 \end{cases} \Leftrightarrow b \in \{3; 4; 5\} \Rightarrow (a; b) = (2; 3); (2; 4); (2; 5);$$

$$+) \text{ Nếu } a = 3 \Rightarrow \begin{cases} 4 + (b-4)^2 \leq 4 \\ 9 \leq b^2 \end{cases} \Leftrightarrow b \in \{3; 4; 5; 6\} \Rightarrow (a; b) = (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6).$$

$$+) \text{ Nếu } a = 4 \Rightarrow \begin{cases} 4 + (b-4)^2 \leq 4 \\ 16 \leq b^2 \end{cases} \Leftrightarrow b \in \{4; 5\} \Rightarrow (a; b) = (4; 4); (4; 5)$$

$$+) \text{ Nếu } a = 5 \Rightarrow \begin{cases} 4 + (b-4)^2 \leq 4 \\ 25 \leq b^2 \end{cases} \text{ (VN).}$$

Vậy có tất cả 10 số phức thoả mãn.

Đáp án D.

Câu 213. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 11 = 0$. Xét điểm M di động trên (P) ; các điểm A, B, C phân biệt di động trên (S) sao cho AM, BM, CM là các tiếp tuyến của (S) . Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$

B. $(0; -1; 3).$

C. $\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right).$

D. $(0; 3; -1).$

Giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Xét điểm $M(a;b;c)$ và $A(x;y;z)$ ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} A \in (S) \\ IAM = 90^\circ \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 \\ AI^2 + AM^2 = IM^2 \\ a - 2b + 2c + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 & (1) \\ 12 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 & (2) \\ a - 2b + 2c + 11 = 0 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) theo về có:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (12 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2) &= 12 - [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \\ \Leftrightarrow (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Vậy mặt phẳng qua ba tiếp điểm là

$$(Q): (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 = 0.$$

Kết hợp với (3) suy ra mặt phẳng này luôn đi qua điểm cố định $(0;3;-1)$.

Đáp án D.

Câu 214. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$

B. $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right).$

C. $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$

D. $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right).$

Giải

Điều kiện để đường cong (C) có tiệm cận ngang khi và chỉ khi:

$$a > 0 \Rightarrow TCN : y = \frac{1}{\sqrt{a}}; y = -\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Ta có: $y' = \frac{\sqrt{ax^2+1} - (x+1)\frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}}{ax^2+1} = \frac{1-ax}{\sqrt{(ax^2+1)^3}}$.

Đề tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với tiệm cận ngang thì:

$$y'(x_M) = 0 \Leftrightarrow 1 - ax_M = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{a} \Rightarrow M\left(\frac{1}{a}; \sqrt{1 + \frac{1}{a}}\right).$$

Khi đó $d(t_M; TCN) = d(M, TCN) = \begin{cases} \left| \sqrt{1 + \frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = 3 \\ \left| \sqrt{1 + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{9}{16}.$

Đáp án A.

Câu 215. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét số phức z có phần thực dương và ba điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$. Biết tứ giác $OABC$ là một hình bình hành, giá trị nhỏ nhất của $\left| z + \frac{1}{z} \right|^2$ bằng?

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 4.

Giải

Ta có: $OA = |z|, AB = \left| \frac{1}{z} - z \right|, BC = \left| \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \right| = |z|, OC = \left| z + \frac{1}{z} \right|.$

Vì $OABC$ là một hình bình hành nên

$$\begin{cases} OA = BC \\ AB = OC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z| \\ \left| \frac{1}{z} - z \right| = \left| z + \frac{1}{z} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} - z \right| = \left| z + \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1-z^2}{z} \right| = \left| \frac{1+z^2}{z} \right| \Leftrightarrow |1-z^2| = |1+z^2|$$

Đặt $z = x + yi \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, vậy điều kiện trở thành:

$$\begin{aligned} |1-z^2| &= |1+z^2| \Leftrightarrow |(x^2 - y^2 - 1) + 2xyi| = |(x^2 - y^2 + 1) + 2xyi| \\ \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 &= (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 1)^2 = (x^2 - y^2 + 1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = x^2 - y^2 + 1 \\ x^2 - y^2 - 1 = -(x^2 - y^2 + 1) \end{cases} &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \end{aligned}$$

Khi đó:

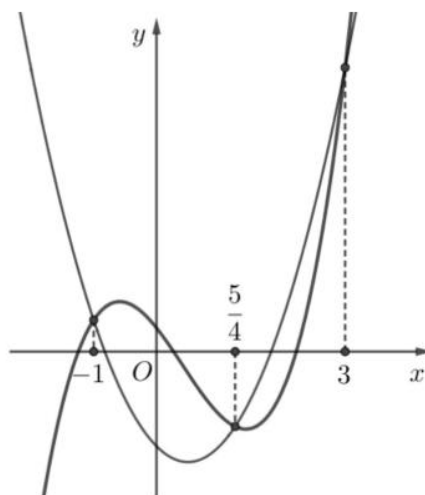
$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left|\frac{1+z^2}{z}\right|^2 = \left|\frac{(x^2 - y^2 + 1) + 2xyi}{x + yi}\right|^2 = \frac{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 + 4x^4}{2x^2} = 2x^2 + \frac{1}{2x^2} \geq 2\sqrt{2x^2 \cdot \frac{1}{2x^2}} = 2.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại: } \begin{cases} 2x^2 = \frac{1}{2x^2} \\ y^2 = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Đáp án B.

Câu 216. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + 1$ với $a, b, c, d, e, m, n, p, q$ là các số thực. Đồ thị của hai hàm số $y = f'(x); y = g'(x)$ như hình vẽ bên. Tổng các nghiệm của phương trình $f(x) + q = g(x) + e$ bằng



A. $\frac{13}{3}$.

B. $-\frac{13}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $-\frac{4}{3}$.

Giải

Đặt: $h(x) = f(x) - g(x)$ có:

$$h'(x) = k(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) \quad (k \neq 0); h(0) = f(0) - g(0) = e - q.$$

Do đó

$$\begin{aligned} h(x) &= (h(x) - h(0)) + h(0) = \int_0^x h'(x) dx - e + q = k \int_0^x (x+1) \left(x - \frac{5}{4}\right) (x-3) dx + e - q. \\ &= \frac{k}{4} \int_0^x (x+1)(4x-5)(x-3) dx + e - q = \frac{k}{4} \int_0^x (4x^3 - 13x^2 - 2x + 15) dx + e - q. \\ &= \frac{k}{4} \left(x^4 - \frac{13}{3} x^3 - x^2 + 15x \right) + e - q. \end{aligned}$$

Phương trình tương đương với:

$$h(x) = e - q \Leftrightarrow x^4 - \frac{13}{3} x^3 - x^2 + 15x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Tổng các nghiệm của phương trình bằng $-\frac{5}{3} + 0 + 3 = \frac{4}{3}$.

Đáp án C.

Câu 217. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B , $AB = 6$, $BC = 8$. Biết $SA = 8$ và $SA \perp (ABC)$. Một khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của khối chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$. Tính khoảng cách d từ tâm của khối cầu đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = 6$.

B. $d = \frac{4}{3}$.

C. $d = \frac{3}{2}$.

D. $d = \frac{12\sqrt{34}}{17}$.

Giải

Phân tích hướng giải:

Chúng ta thấy thật khó khăn khi dựng được tâm của mặt cầu như giả thiết! Vậy có cách nào khác mà ta có thể tính được khoảng cách này mà không cần xác định tâm của mặt cầu?

Nhận xét: Khoảng cách cần tìm là bán kính của mặt cầu và là đường cao của khối chóp có đỉnh là tâm của mặt cầu và đáy là một mặt của khối chóp đã cho.

Các mặt của hình chóp đã cho đều là các tam giác vuông.

Hướng dẫn giải.

Gọi I , r lần lượt là tâm và bán kính của khối cầu trên.

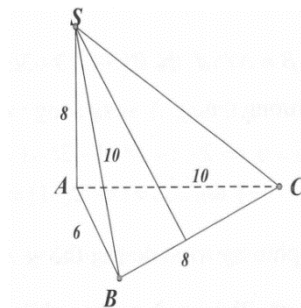
Ta có: $r = d(I; (SBC)) = d(I; (ABC)) = d(I; (SAB)) = d(I; (SAC))$.

$$V = V_{S.ABC} = V_{I.ABC} + V_{I.ASB} + V_{I.ASC} + V_{I.SBC} = \frac{1}{3} r \cdot (S_{ABC} + S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SBC}) = \frac{1}{3} r \cdot S_{tp}$$

$$\Rightarrow r = d(I, (SBC)) = \frac{3V}{S_{tp}}$$

$$\text{Mà: } V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 24 = 64 \text{ và } S_{tp} = 24 + 24 + 40 + 40 = 128$$

$$\text{Vậy } r = d(I, (SBC)) = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{3 \cdot 64}{128} = \frac{3}{2}.$$



Đáp án C.

Câu 218. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $ABC = 60^\circ$ cạnh bên $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $\overrightarrow{HD} = -3\overrightarrow{HB}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB .

A. $\frac{a\sqrt{30}}{8}$.

B. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

C. $\frac{30a}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Giải

Phân tích hướng giải:

Ta thấy CM và SB là hai đường thẳng chéo nhau và không vuông góc.

Ta tìm mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Khi đó bài toán trở thành tính khoảng cách từ đường thẳng và mặt phẳng song song.

Hướng khác: phương pháp tọa độ trong không gian.

Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$.

Đường thẳng d' đi qua A' và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'$.

$$\text{Khoảng cách giữa } d \text{ và } d' \text{ là } d(d; d') = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot [\vec{a}, \vec{a}']|}{|[\vec{a}, \vec{a}']|}$$

Hướng dẫn giải.

Cách 1: Sử dụng thể tích

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \text{ (tam giác } \triangle ABC \text{ đều)}$$

$$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{27}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{4} \left(HD = \frac{3}{2}OD = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{24}$$

Ta lại có:

$$SB // OM \Rightarrow SB // (MAC) \Rightarrow d(SB; CM) = d(SB; (MAC)) = d(S; (MAC)) = d(D; (MAC))$$

$$V_{M.ACD} = \frac{1}{3} d(M; (ABCD)) \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S; (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{96}.$$

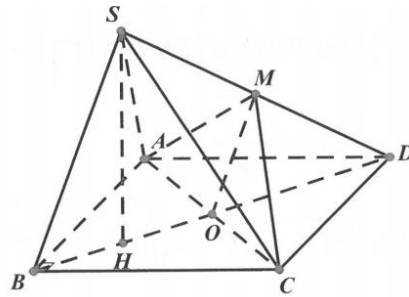
$$\text{Mặt khác: } V_{M.ACD} = \frac{1}{3} d(D; (MAC)) \cdot S_{\Delta MAC} \Rightarrow d(D; (MAC)) = \frac{3V_{M.ACD}}{S_{\Delta MAC}} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{15}}{96}}{\frac{a^2 \sqrt{2}}{8}} = \frac{a \sqrt{30}}{8}.$$

Đáp án A.

Cách 2: Tính trực tiếp

Dựng $MI // SH$ và $IK \perp OM$. Ta có:

$$\left. \begin{aligned} (MAC) &\perp (MIO) \quad (AC \perp OI; AC \perp MI) \\ (MAC) \cap (MIO) &= OM \\ IK &\perp OM \end{aligned} \right\} \Rightarrow IK \perp (MAC)$$



$$SB // OM \Rightarrow SB // (MAC)$$

$$\Rightarrow d(SB; CM) = d(SB; (MAC)) = d(S; (MAC)) = d(D; (MAC)) = 4d(I; (MAC)) = 4IK$$

$$OI = \frac{1}{4} OD = \frac{a\sqrt{3}}{8}$$

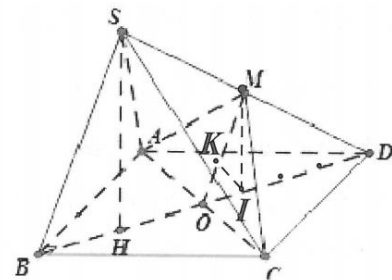
$$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{27}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{4} \Rightarrow IM = \frac{1}{2} SH = \frac{a\sqrt{5}}{8}$$

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IO^2} + \frac{1}{IM^2} = \frac{64}{3a^2} + \frac{64}{5a^2} = \frac{512}{15a^2} \Rightarrow IK = \frac{\sqrt{30}a}{32} \Rightarrow d(SB; CM) = 4IK = 4 \cdot \frac{a\sqrt{30}}{32} = \frac{a\sqrt{30}}{8}.$$

Cách 3: Phương pháp tọa độ (Cách này tính toán khá phức tạp nên chỉ nêu ra để học sinh thấy không phải bài toán nào cũng dùng phương pháp tọa độ cũng nhanh nhất).

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ và chọn $a = 1$.

$$\text{Ta có: } S\left(\frac{\sqrt{5}}{4}; 0; 0\right); B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right); C\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right); M\left(0; \frac{-3\sqrt{3}}{8}; \frac{\sqrt{5}}{8}\right).$$



Câu 219. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(0; -1; 3)$.

Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

B. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Giải

Phân tích hướng giải:

Ta tìm tọa độ của điểm M thỏa hệ phương trình: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải.

Gọi $M(x; y; z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = (x; y+1; z-2), \overrightarrow{MB} = (x-2; y+3; z), \overrightarrow{MC} = (x+2; y-1; z-1), \overrightarrow{MD} = (x; y+1; z-3)$$

$$\text{Từ giả thiết: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$$

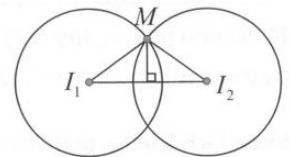
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Cách 1: Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm

$$I_1(1; -2; 1), R_1 = 2 \text{ và mặt cầu tâm } I_2(-1; 0; 2), R_2 = 2$$

Ta có: $I_1I_2 = 3$;

$$\text{Dễ thấy: } r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$



Đáp án B.

$$\text{Cách 2: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \text{ (S)} \\ 4x - 4y - 2z - 1 = 0 \text{ (P)} \end{cases}$$

$$(S) \text{ có tâm } I(1; -2; 1); R = 2; d(I; (P)) = \frac{|4+8-2-1|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{3}{2}.$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Đáp án B.

Câu 220. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC vuông tại C, có $\angle ABC = 60^\circ$;

$AB = 3\sqrt{2}$. Đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+8}{-4}$, đường thẳng AC nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + z - 1 = 0$. Biết điểm B là điểm có hoành độ dương, gọi (a, b, c) là tọa độ của điểm C . Giá trị $a + b + c$ bằng?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 7.

Giải

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+8}{-4} \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2; 0).$$

Gọi $B(3+m; 4+m; -8-4m) \in AB$. Vì $x_B > 0 \Rightarrow m > -3$.

Từ $AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 18 \Leftrightarrow 18(m+2)^2 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 (\text{loại}) \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow B(2; 3; -4).$

Ta có:
$$\begin{cases} C \in (\alpha) \\ AC = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c - 1 = 0 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = \frac{27}{2} \\ (a-2)(a-1) + (b-3)(b-2) + c(c+4) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = \frac{7}{2}$; $b = 3$; $c = -\frac{5}{2}$. Vậy $a + b + c = 4$.

Đáp án C.

Câu 221. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là?

A. 2163.

B. 2170.

C. 3003.

D. 3843.

Giải

Số cách chọn 5 viên bi bất kì trong hộp là: C_{15}^5 cách.

Khi chọn bất kỳ thì bao gồm các trường hợp sau:

Chỉ có một màu	Chỉ có hai màu	Có đủ ba màu
----------------	----------------	--------------

Xanh:	C_6^5 cách.	Xanh – Đỏ:	$C_{11}^5 - C_6^5 - C_5^5$ cách.	
Đỏ:	C_5^5 cách.	Đỏ - Vàng:	$C_9^5 - C_5^5$ cách.	
		Xanh – Vàng:	$C_{10}^5 - C_6^5$ cách.	

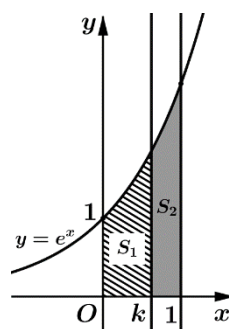
Suy ra số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán (có đủ ba màu) là:

$$C_{15}^5 - (C_6^5 + C_5^5) - [(C_{11}^5 - C_6^5 - C_5^5) + (C_9^5 - C_5^5) + (C_{10}^5 - C_6^5)] = 2170.$$

Đáp án B.

Câu 222. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Kí hiệu H là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < 1$) chia H thành hai phần có diện tích tương ứng S_1 , S_2 như hình vẽ bên, biết $S_1 > S_2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $e^k > \frac{e-1}{2}$.

B. $e^k > \frac{e+1}{2}$.

C. $e^k > \frac{e+2}{2}$.

D. $e^k > \frac{e+3}{2}$.

Giải

Ta có: $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1$ và $S_2 = \int_k^1 e^x dx = e^x \Big|_k^1 = e - e^k$.

Theo giả thiết: $S_1 > S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 > e - e^k \Leftrightarrow e^k > \frac{e+1}{2}$.

Đáp án B.

Câu 223. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng?

A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{1105}}{11}$. B. $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$. C. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{1105}}{13}$. D. $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}$.

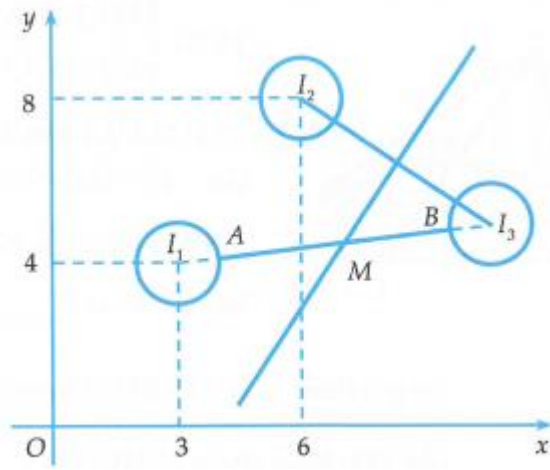
Giải

Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1, 2z_2, z$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Do $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ nên quỹ tích điểm M_1 là đường tròn (C_1) có tâm $I_1(3;4)$ và bán kính $R = 1$

Do $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2z_2 - 6 - 8i| = 1$ nên quỹ tích điểm M_2 là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(6;8)$ và bán kính $R = 1$

Ta có điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $3a - 2b = 12$ nên quỹ tích điểm M là đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$



Khi đó $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2 = MM_1 + MM_2 + 2$

Gọi (C_3) là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_2) qua đường thẳng d . Ta tìm được

tâm của (C_3) là $I_3\left(\frac{138}{13}; \frac{64}{13}\right)$ và bán kính $R = 1$

Khi đó $P = MM_1 + MM_2 + 2 \geq MM_1 + MM_3 + 2 \geq AB + 2$ với $M_3 \in (C_3)$ và A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng I_1I_3 với hai đường tròn $(C_1), (C_3)$ (quan sát hình vẽ).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M_1 \equiv A$ và $M_3 \equiv B$

$$\text{Vậy } P_{\min} = AB + 2 = I_1 I_3 - 2R + 2 = I_1 I_3 = \frac{3\sqrt{1105}}{13}.$$

Đáp án C.

Note:

* Số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn trên hệ trục tọa độ Oxy là $M(x; y)$.

* Nếu số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = k (k \in \mathbb{R})$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = k$.

Câu 224. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{4}; y = -\frac{x^2}{4}$,

$x = -4, x = 4$ và hình (H_2) là hình gồm các điểm $(x; y)$ thỏa $x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + (y - 2)^2 \geq 4$.

Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2 .

Đẳng thức nào dưới đây đúng

A. $V_1 = V_2$.

B. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$.

C. $V_1 = 2V_2$.

D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.

Giải

* Hình phẳng (H_1) được biểu diễn bằng miền tô đậm trong hình vẽ bên.

Thể tích khối trụ bán kính $r = 4$, chiều cao $h = 8$ là

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi \text{ (đvtt)}.$$

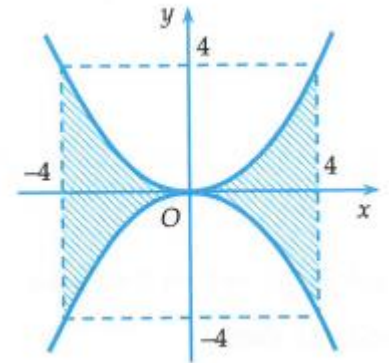
Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{4}$, trục hoành, đường thẳng $y = 4$ xung quanh trục

$$\text{tung là: } V_{(P)} = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y dy = 2\pi y^2 \Big|_0^4 = 32\pi \text{ (đvtt)}.$$

Suy ra thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H_1) quanh trục Oy là:

$$V_1 = V - 2V_{(P)} = 128\pi - 2 \cdot 32\pi = 64\pi \text{ (đvtt)}.$$

* Hình phẳng (H_2) được biểu diễn bằng miền tô đậm trong hình vẽ bên.



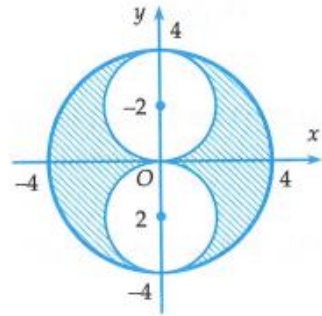
Thể tích khối cầu lớn bán kính $R = 4$ là $V_L = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3}$ (đvtt)

Thể tích khối cầu nhỏ bán kính $r = 2$ là $V_N = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$

Suy ra thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H_2) quanh trục Oy là

$$V_2 = V_L - 2V_N = \frac{256\pi}{3} - 2 \cdot \frac{32\pi}{3} = 64\pi \text{ (đvtt)}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{64\pi}{64\pi} = 1 \Rightarrow V_1 = V_2.$$



Đáp án A.

Câu 225. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho parabol (P_1): $y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$.

B. $T = 64$.

C. $T = 32$.

D. $T = 72$.

Giải

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị. Khi đó, phương trình các parabol mới là

$$(P_1): y = -x^2 + 4, \quad (P_2): y = -\frac{a}{4}x^2 + a.$$

Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục

$Ox \Rightarrow A(-2;0), B(2;0) \Rightarrow AB = 4$. Gọi M, N là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M(-\sqrt{4-a}; a), N(\sqrt{4-a}; a)$.

$$\text{Ta có } S_1 = 2 \int_a^4 \sqrt{4-y} \cdot dy = -\frac{4}{3} \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_a^4 = \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a}.$$

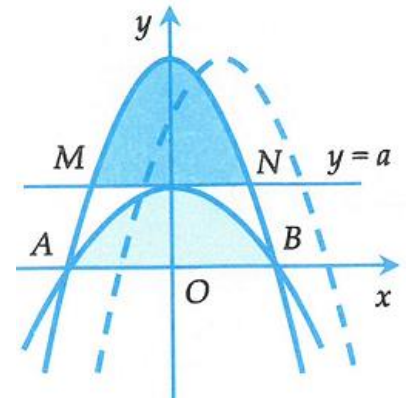
$$S_2 = 2 \left(-\frac{a}{4} x^2 + a \right) \cdot dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{12} + ax \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3}$$

$$\text{Theo giả thiết } S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64.$$

Vậy $T = 64$.

Đáp án B.

Câu 226. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].



Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với d . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

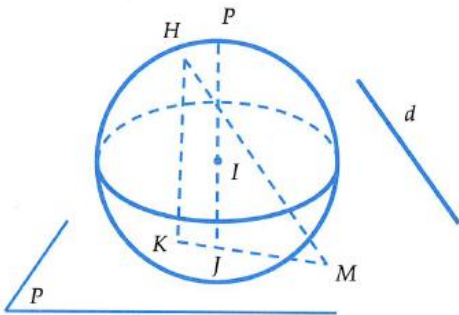
A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$

B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$

C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$

D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$

Giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 3; -2)$ và bán kính $R = 5$

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH \perp AB$ và

$$IH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 3$$

Gọi M là trung điểm của $A'B'$, do $AA' \parallel BB' \parallel d$ nên tứ giác $AA'B'B'$ là hình thang và $AA' + BB' = 2HM$ (tính chất đường trung bình của hình thang),

$M \in (P)$

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 2)$

$$\text{Suy ra: } \sin(d, (P)) = \sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}, \vec{u}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Gọi } K \text{ là hình chiếu của } H \text{ lên } (P) \text{ thì } HK = HM \cdot \sin \alpha \Rightarrow HM = \frac{3\sqrt{3}}{5} HK$$

$$\text{Khi đó: } AA' + BB' = 2HM = \frac{6\sqrt{3}}{5} HK$$

Để $AA' + BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất

$$\Leftrightarrow HK \text{ đi qua } I \text{ hay } HK_{\max} = IH + d(I; (P)) = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } AA' + BB' \text{ lớn nhất bằng } \frac{6\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24+18\sqrt{3}}{5}.$$

Đáp án B.

Câu 227. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2 \cdot \frac{AD}{AN} = 4$. Ký hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$

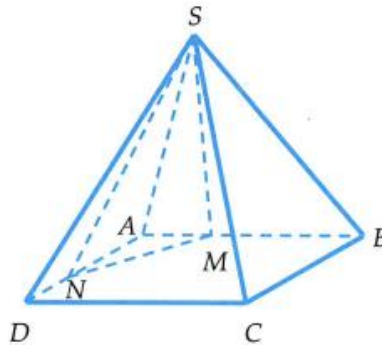
A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{17}{14}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Giải



Đặt $\frac{AB}{AM} = x$ và $\frac{AD}{AN} = y$ ($x, y \geq 1$). Từ giả thiết ta có $x + 2y = 4$ (1)

Suy ra: $\begin{cases} 2y = 4 - x \geq 2 \\ x = 4 - 2y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

Ta có: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(S; (ABCD)) \cdot S_{\triangle AMN}}{\frac{1}{3} \cdot d(S; (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin DAB}{AB \cdot AD \cdot \sin DAB}$

$\Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2xy} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.MBCDN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABCD} - V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = 1 - \frac{1}{2xy}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{V_1}{V} = 1 - \frac{1}{x(4-x)}$.

Áp dụng bất đẳng thức cho hai số dương x và $4 - x$ ta có:

$$x(4-x) \leq \left(\frac{x+4-x}{2} \right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{1}{x(4-x)} \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 4 - x \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Đáp án A.

Câu 228. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;2), B(2;-2;0)$. Gọi $I_1(1;1;-1)$ và $I_2(3;1;1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S) .

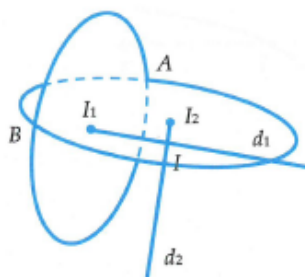
A. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$.

B. $R = 2\sqrt{2}$.

C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$.

D. $R = 2\sqrt{6}$.

Giải



Gọi d_1 là đường thẳng đi qua I_1 vuông góc với mặt phẳng (I_1AB) , khi đó d_1 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_1 ; d_2 là đường thẳng đi qua I_2 và vuông góc với mặt phẳng (I_2AB) , khi đó d_2 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_2 . Do đó, mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn tâm (I_1) và (I_2) có tâm I là giao điểm của d_1 và d_2 và bán kính $R = IA$.

Ta có $\overrightarrow{I_1A} = (-1;1;3), \overrightarrow{I_1B} = (1;-3;1) \Rightarrow [\overrightarrow{I_1A}; \overrightarrow{I_1B}] = (10;4;2)$ nên đường thẳng d_1 có vec tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (5;2;1)$ cùng phương với vec tơ $[\overrightarrow{I_1A}; \overrightarrow{I_1B}]$

Phương trình đường thẳng d_1 là
$$\begin{cases} x = 1 + 5t_1 \\ y = 1 + 2t_1 \\ z = -1 + t_1 \end{cases} (t_1 \in \mathbb{R})$$

Ta có $\overrightarrow{I_2A} = (-3;1;1), \overrightarrow{I_2B} = (-1;-3;-1) \Rightarrow [\overrightarrow{I_2A}; \overrightarrow{I_2B}] = (2;-4;10)$. Đường thẳng d_2 có vec tơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1;-2;5)$ cùng phương với vector $[\overrightarrow{I_2A}; \overrightarrow{I_2B}]$

Phương trình đường thẳng d_2 là
$$\begin{cases} x = 3 + t_2 \\ y = 1 - 2t_2 \\ z = 1 + 5t_2 \end{cases} (t_2 \in \mathbb{R})$$

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 1 + 5t_1 = 3 + t_2 \\ 1 + 2t_1 = 1 - 2t_2 \\ -1 + t_1 = 1 + 5t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{3} \\ t_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Suy ra } I\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Bán kính mặt cầu } (S) \text{ là } R = IA = \sqrt{\left(0 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 + \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{129}}{3}.$$

Đáp án C.

Câu 229. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - i| = 1$ và $|z - \sqrt{2}m| = 2$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để tồn tại hai số phức thỏa mãn các điều kiện trên là?

- A. $(-2; 2) \setminus \{0\}$. B. $[-2; 2]$. C. $[-2; 2) \setminus 0$. D. $(-2; 2)$.

Giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) trên mặt phẳng phức.

Từ $|z - i| = 1 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow M$ đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0; 1)$, bán kính $R_1 = 1$. Từ $|z - \sqrt{2}m| = 2 \Rightarrow (x - \sqrt{2}m)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow M$ đường tròn (C_2) có tâm $I_2(\sqrt{2}m; 0)$, bán kính $R_2 = 2$.

Để tồn tại hai số phức thỏa mãn các điều kiện đã cho khi và chỉ khi tồn tại hai điểm M , tức là (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi:

$$|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{(\sqrt{2}m)^2 + 1} < 3 \Leftrightarrow 0 < m^2 < 4 \Leftrightarrow m \in (-2; 2) \setminus \{0\}.$$

Đáp án A.

Câu 230. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($m \leq 2018$) để với mọi bộ ba số phân biệt $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

- A. 2011. B. 2012. C. 2010. D. 2018.

Giải

Do $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $f(a) + f(b) > f(c)$

$$\Rightarrow (a^3 - 3a^2 + m) + (b^3 - 3b^2 + m) > c^3 - 3c^2 + m \text{ với mọi } a, b, c \in [1; 3]$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 3a^2) + (b^3 - 3b^2) - (c^3 - 3c^2) > -m \text{ với mọi } a, b, c \in [1; 3]$$

$$\text{Do đó } \min[(a^3 - 3a^2) + (b^3 - 3b^2) - (c^3 - 3c^2)] > -m \text{ với mọi } a, b, c \in [1; 3]$$

$$\text{Ta cần tìm } \min[(a^3 - 3a^2) + (b^3 - 3b^2)] \text{ và } \max(c^3 - 3c^2) \text{ với mọi } a, b, c \in [1; 3]$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$ trên $[1; 3]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do $x \in [1; 3]$ nên $x = 2$.

Ta có: $f(1) = -2, f(2) = -4, f(3) = 0$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \max_{[1;3]} f(x) = f(3) = 0 \\ \min_{[1;3]} f(x) = f(2) = -4 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \min \left[(a^3 - 3a^2) + (b^3 - 3b^2) - (c^3 - 3c^2) \right] = (-4) + (-4) - 0 = -8$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2, c = 3$ hoặc $a = c = 2, b = 3$ hoặc $b = c = 2, a = 3$.

Do đó $-8 > -m \Leftrightarrow m > 8$. Mà $m \leq 2018$ và m nguyên nên $m \in \{9; \dots; 2018\}$

Vậy có $2018 - 9 + 1 = 2010$ giá trị m thỏa mãn.

Đáp án C.

Câu 231. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ ngoại tiếp khối bát diện (H) được ghép từ hai khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ (đều có đáy là tứ giác $ABCD$). Biết rằng đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 8 = 0$. Tính thể tích khối bát diện (H) .

$$\text{A. } V_{(H)} = \frac{34}{9}. \quad \text{B. } V_{(H)} = \frac{665}{81}. \quad \text{C. } V_{(H)} = \frac{68}{9}. \quad \text{D. } V_{(H)} = \frac{1330}{81}.$$

Giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 2)$, bán kính $R = 3$. Nhận xét thấy S, I, S' thẳng hàng và $SS' \perp (ABCD)$. Khi đó $SS' = 2R = 6$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } V_{(H)} &= V_{S.ABCD} + V_{S'.ABCD} = \frac{1}{3} d(S; (ABCD)) \cdot S_{ABCD} + \frac{1}{3} d(S'; (ABCD)) \cdot S_{ABCD} \\ &= \frac{1}{3} [d(S; (ABCD)) + d(S'; (ABCD))] \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SS' \cdot S_{ABCD} = 2S_{ABCD}. \end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra $ABCD$ là hình vuông, gọi a là cạnh của hình vuông đó.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

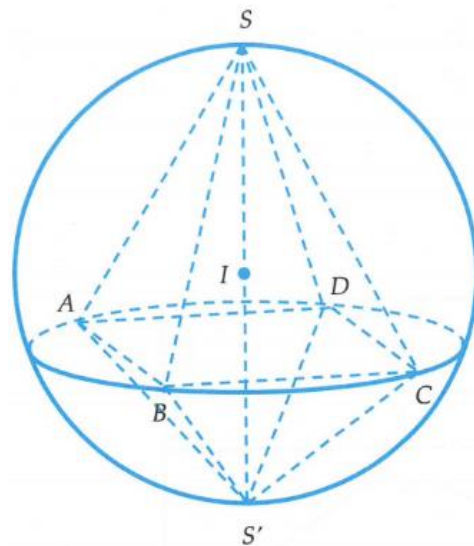
$$\text{Suy ra } 2r = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Từ } [d(I;(P))]^2 + r^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{R^2 - [d(I;(P))]^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } V_{(H)} = 2S_{ABCD} = 2a^2 = 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{68}{9}.$$



Đáp án C.

Câu 232. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $m = \log_a(\sqrt[3]{ab})$ với $a > 1, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 2\sqrt{27} \log_b a + 4$. Biết rằng P đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \frac{c-d\sqrt{3}}{e}$ ($c, d, e \in \mathbb{R}$). Tính $S = \frac{c-d}{e}$.

A. Vô số giá trị.

B. $S = 0$.

C. $S = \frac{2}{3}$.

D. $S = \frac{1}{3}$.

Giải

Phân tích: Ta có thể biểu thức $P = \log_a^2 b + 2\sqrt{27} \log_b a + 4$ theo $\log_a b$

Vậy cần tính $\log_a b$ theo m .

Hướng dẫn giải.

$$\text{Theo giả thiết ta có } m = \frac{1}{3} \log_a(ab) = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) \Rightarrow \log_a b = 3m - 1.$$

$$\text{Suy ra: } P = \log_a^2 b + \frac{2\sqrt{27}}{\log_a b} + 4 \Leftrightarrow P = (3m - 1)^2 + \frac{2\sqrt{27}}{3m - 1} + 4$$

$$\Leftrightarrow P = (3m - 1)^2 + \frac{\sqrt{27}}{3m - 1} + \frac{\sqrt{27}}{3m - 1} + 4. \text{ Vì } a > 1, b > 1 \text{ nên } \log_a b = 3m - 1 > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có:

$$P = (3m-1)^2 + \frac{\sqrt{27}}{3m-1} + \frac{\sqrt{27}}{3m-1} + 4 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(3m-1)^2 \cdot \frac{27}{(3m-1)^2}} + 4 \Leftrightarrow P \geq 13.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$(3m-1)^2 = \frac{\sqrt{27}}{3m-1} \Leftrightarrow (3m-1)^3 = \sqrt{27} \Leftrightarrow 3m-1 = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1+\sqrt{3}}{3} = \frac{1-(-1)\sqrt{3}}{3} = \frac{1.k-(-1).k\sqrt{3}}{3.k} \quad (k \neq 0)$$

Có vô số các số c, d, e thỏa bài toán đó là: $a = k; d = -k; e = 3k \quad (k \neq 0)$

Nhưng $S = \frac{c-d}{e}$ có giá trị duy nhất là $S = \frac{c-d}{e} = \frac{k+k}{3k} = \frac{2}{3}$.

Đáp án C.

Câu 234. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{3}{\sqrt{3x+1}}$.

Giá trị $\int_0^2 (x+1) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng?

A. $-\frac{8}{5}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. $-\frac{12}{5}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Giải

Phân tích: Đây là bài toán tổng hợp về tích phân. Học sinh cần lưu ý một số điểm nhận dạng phương pháp sau:

- ✓ Xuất hiện tích phân $\int g(x) \cdot f'(x) dx$, ta nghĩ đến phương pháp từng phần.
- ✓ Xuất hiện tích phân $\int f(x) dx$, ta nghĩ đến phương pháp đổi biến số.

Trên đây, chính là hai phương pháp để tính tích phân.

Nhắc lại công thức.

Công thức đổi biến số $\int_{x_1}^{x_2} f(u) dx = \int_{u(x_1)}^{u(x_2)} f(u) \frac{du}{u'}$.

Công thức từng phần $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Hướng dẫn giải:

Biến đổi theo phương pháp tích phân từng phần kết hợp đổi biến ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (x+1) f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 (x+1) 2 f\left(\frac{x}{2}\right) = 2(x+1) f\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^2 - \int_0^2 2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= 6f(1) - 2f(0) - \int_0^1 2 f(u) \frac{du}{\frac{1}{2}} = 6f(1) - 2f(0) - 4 \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

Sử dụng kỹ thuật đổi biến số xử lý dữ liệu $f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ để xuất hiện

$\int_0^1 f(x) dx$, ta cần lấy tích phân hai vế. Khi đó:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx = \int_0^1 6x^2 f(u) \frac{du}{3x^2} + 4 = 2 \int_0^1 f(x) dx + 4 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -4$$

Để tính $f(0)$, $f(1)$ ta thay lần lượt $x=1, x=0$ vào đẳng thức

$$f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}. \text{ Ta được: } \begin{cases} f(1) = 6f(1) + 3 \\ f(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = -\frac{3}{5} \\ f(0) = 6 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I = 6f(1) - 2f(0) - 4 \int_0^1 f(x) dx = -\frac{18}{5} - 12 + 16 = \frac{2}{5}.$$

Đáp án D.

Câu 235. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$.

- A. $60 + 2\sqrt{10}$. B. $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$. C. $60 - 2\sqrt{10}$. D. $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$.

Giải

Phân tích:

Từ giả thiết $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$ ta biến đổi $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$

- Gọi $A(2; -6)$, $B(-2; 2)$ là các giao điểm của đường thẳng $2x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C'): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Ta có: $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = P + 25.$$

Gọi (C) là đường tròn tâm $J(-4; -3)$, bán kính $R = \sqrt{P + 25}$.

Hướng dẫn giải.

- Theo bài ra: $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (-y-3)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền mặt phẳng (T) thỏa mãn: $\begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$

- Gọi $A(2; -6)$, $B(-2; 2)$ là các giao điểm của đường thẳng $2x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C'): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

- Ta có: $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = P + 25$.

Gọi (C) là đường tròn tâm $J(-4; -3)$, bán kính $R = \sqrt{P + 25}$.

- Đường tròn (C) cắt miền (T) khi và chỉ khi:

$$JK \leq R \leq JA \Leftrightarrow IJ - IK \leq R \leq IA \Leftrightarrow 2\sqrt{10} - 5 \leq \sqrt{25 + P} \leq 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 40 - 20\sqrt{10} \leq P \leq 20$$

$$\Rightarrow M = 20 \text{ và } m = 40 - 20\sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy } M + m = 60 - 20\sqrt{10}.$$

Đáp án C.

Câu 236. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

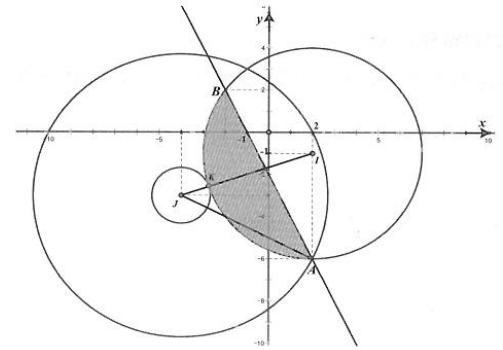
Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 3z + 3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = (z_1^2 + 2z_1 + 2)(z_2^2 + 2z_2 + 2)(z_3^2 + 2z_3 + 2)(z_4^2 + 2z_4 + 2)$

A. $T = 102$.

B. $T = 101$.

C. $T = 99$.

D. $T = 100$.



Giải

$$\text{Đặt } f(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 3z + 3 \Rightarrow f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

$$\text{Do } z_1^2 + 2z_1 + 2 = (z_1 + 1 - i)(z_1 + 1 + i) \text{ nên}$$

$$T = (z_1^2 + 2z_1 + 2)(z_2^2 + 2z_2 + 2)(z_3^2 + 2z_3 + 2)(z_4^2 + 2z_4 + 2) = f(-1+i)f(-1-i) = (10-i)(10+i) = 101$$

Đáp án D.

Câu 237. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Biết phương trình $x+1 = 2\log_2(2^x+3) - \log_2(1980-2^{-x})$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1 + x_2$.

A. $\log_2 10$.

B. $\log_2 11$.

C. $\log_2 12$.

D. $\log_2 13$.

Giải

Đặt $2^x = t, t > 0$. Suy ra $x = \log_2 t$.

$$\text{Ta có: } x+1 = \log_2 \frac{(2^x+3)^2}{1980-2^{-x}} \Rightarrow \frac{(t+2)^2}{1980-\frac{1}{t}} = 2t \Leftrightarrow t^2 - 3954t + 11 = 0 (*)$$

Vì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 nên phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 .

Theo Viète: $t_1 t_2 = 11 \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = \log_2 (t_1 t_2) = \log_2 11$.

Đáp án B.

Câu 238. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $4x - 7y + z + 25 = 0$ và đường

thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi d'_1 là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d_2 nằm trên (P) tạo với d_1, d'_1 các góc bằng nhau, d_2 có vector chỉ phương

$\vec{u}_2(a; b; c)$. Tính $\frac{a+2b}{c}$

A. $\frac{a+2b}{c} = \frac{2}{3}$.

B. $\frac{a+2b}{c} = 0$.

C. $\frac{a+2b}{c} = \frac{1}{3}$.

D. $\frac{a+2b}{c} = 1$.

Giải

Cách 1:

Gọi $(Q) = (d, d'_1)$ khi đó (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_Q = [\vec{n}_P, \vec{u}_1] = (5; 5; 15)$.

Đường thẳng d'_1 có vector chỉ phương $\vec{u}'_1 = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (22; 11; -11)$ hay một vector chỉ phương khác $\vec{u}'(2; 1; -1)$.

Vì $\vec{n}_p, \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow 4a - 7b + c = 0 \Rightarrow c = 7b - 4a \Rightarrow \vec{u}_2(a; b; 7b - 4a)$.

Ta lại có $(d_1, d_2) = (d_1', d_2') \Leftrightarrow |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = |\cos(\vec{u}_1', \vec{u}_2')|$.

$$\Leftrightarrow |a + 2b + 4a - 7b| = |2a + b + 4a - 7b| \Leftrightarrow |5a - 5b| = |6a - 6b| \Leftrightarrow |a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = 1, c = 3 \Rightarrow \frac{a + 2b}{c} = 1$

Cách 2:

Gọi $(Q) = (d, d_3')$ khi đó $(P) \perp (Q)$. Các đường thẳng nằm trong (P) mà vuông góc với (Q) thì vuông góc với tất cả các đường thẳng trong (Q) hay chúng cùng tạo với d_1, d_1' các góc 90° . Do đó, các đường thẳng này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chúng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_Q(1; 1; 3) \Rightarrow \frac{a + 2b}{c} = 1$.

Đáp án D.

Câu 239. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6; -3; 4), B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Tính giá trị của tổng $a + b + c$.

A. $a + b + c = 11$. **B.** $a + b + c = -11$. **C.** $a + b + c = 17$. **D.** $a + b + c = -17$.

Giải

Các phương trình $(Oxy): z = 0; (Oyz): x = 0; (Oxz): y = 0$. Giả sử $M(x_M; y_M; 0)$,

$N(x_N; 0; z_N), P(0; y_P; z_P)$. Theo giả thiết ta có M là trung điểm của AN nên ta có:

$$M\left(\frac{6 + x_N}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{4 + z_N}{2}\right).$$

Do $z_M = 0$ nên $\frac{4 + z_N}{2} = 0 \Leftrightarrow z_N = -4 \Rightarrow M\left(x_M; -\frac{3}{2}; 0\right)$ và $N(x_N; 0; -4)$.

Lại có N là trung điểm của MP nên $N\left(\frac{x_M}{2}; \frac{2y_P - 3}{4}; \frac{z_P}{2}\right)$.

$$\text{Mà } \begin{cases} y_N = 0 \\ z_N = -4 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \frac{2y_P - 3}{4} = 0 \\ \frac{z_P}{2} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_P = \frac{3}{2} \\ z_P = -8 \end{cases} \text{ Khi đó } P\left(0; \frac{3}{2}; -8\right).$$

$$\text{Từ } \begin{cases} x_M = \frac{6 + x_N}{2} \\ x_N = \frac{x_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_M - x_N = 6 \\ x_M - 2x_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 \\ x_N = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } M\left(4; -\frac{3}{2}; 0\right), N(2; 0; -4).$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 6 = 2(2 - 6) \\ y_B + 3 = 2(0 + 3) \\ z_B - 4 = 2(-4 - 4) \end{cases} \Rightarrow B(-2; 3; -12) \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -12 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = -2 + 3 - 12 = -11.$$

Đáp án B.

Câu 240. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 4; 2)$, $C(2; 2; -2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) , S là điểm di động trên đường thẳng d , G và H lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$, trực tâm của $\triangle SBC$. Đường thẳng GH cắt đường thẳng d tại S' . Tính tích $SA.S'A$.

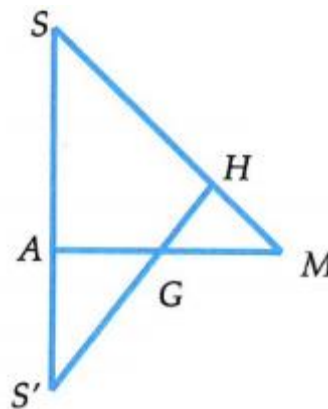
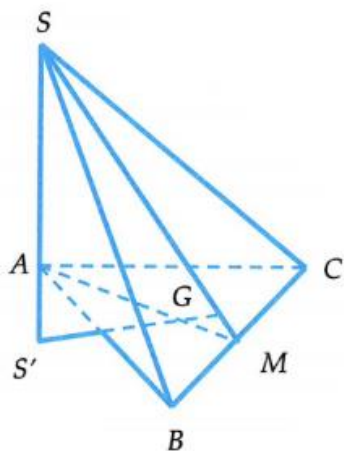
A. $SA.S'A = \frac{3}{2}$.

B. $SA.S'A = \frac{9}{2}$.

C. $SA.S'A = 12$.

D. $SA.S'A = 6$.

Giải



Nhận thấy $AB = BC = CA = 2\sqrt{6}$ nên $\triangle ABC$ đều. Do G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $CG \perp AB$, mà $CG \perp SA \Rightarrow CG \perp (SAB) \Rightarrow CG \perp SB$. Lại có $CH \perp SB$ (H là trực tâm của $\triangle SBC$) nên $SB \perp (CHG)$. Suy ra $SB \perp GH$.

Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $BC \perp SA$, $BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$.

Như vậy $GH \perp (SBC) \Rightarrow GH \perp SM$ hay $S'H \perp SM \Rightarrow SS'H = SMA$.

Suy ra $\triangle AS'G \sim \triangle AMS \Rightarrow \frac{AS'}{AM} = \frac{AG}{AS}$

$$\Rightarrow AS' \cdot AS = AM \cdot AG = AM \cdot \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{AB\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2 = 12.$$

Đáp án C.

Câu 241. [Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V . Điểm M thay đổi trong tam giác BCD . Các đường thẳng qua M và song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt phẳng (ACD) , (ABD) , (ABC) tại N, P, Q . Giá trị lớn nhất của khối $MNPQ$ là:

A. $\frac{V}{27}$.

B. $\frac{V}{16}$.

C. $\frac{V}{8}$.

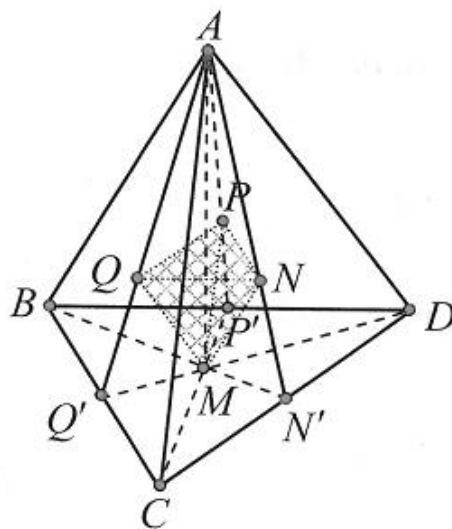
D. $\frac{V}{54}$.

Giải

○ Tam giác ABN' có $MN \parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{N'M}{N'B}$.

○ Tam giác ACP' có $MP \parallel AC \Rightarrow \frac{MP}{AC} = \frac{P'M}{P'C}$.

○ Tam giác ADQ' có $QM \parallel AD \Rightarrow \frac{MQ}{AD} = \frac{Q'M}{Q'D}$.



Khi đó: $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} = \frac{N'M}{N'B} + \frac{P'M}{P'C} + \frac{Q'M}{Q'D}$

Mà $\frac{N'M}{N'B} + \frac{P'M}{P'C} + \frac{Q'M}{Q'D} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MBC}}{S_{BCD}} = 1$ nên $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} = 1$

Lại có $1^3 = \left(\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} \right)^3 \geq \left(3 \sqrt[3]{\frac{MN}{AB} \cdot \frac{MP}{AC} \cdot \frac{MQ}{AD}} \right)^3$ (Cauchy)

$\Leftrightarrow MN \cdot MP \cdot MQ \leq \frac{1}{27} AB \cdot AC \cdot AD \Rightarrow MN \cdot MP \cdot MQ$ lớn nhất khi $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{MQ}{AD}$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác $BCD \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{MQ}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow (NPQ) \parallel (BCD)$,

$\frac{S_{NPQ}}{S_{N'P'Q'}} = \left(\frac{2}{3} \right)^2$, Mà $S_{N'P'Q'} = \frac{1}{4} S_{BCD}$ nên $S_{NPQ} = \frac{1}{9} S_{BCD}$ và $d(M, (NPQ)) = \frac{1}{2} d(A, (BCD))$

Vậy giá trị lớn nhất của khối tứ diện $MNPQ$ là $V_{MNPQ} = \frac{1}{3} S_{NPQ} \cdot d(M, (NPQ))$

$\Leftrightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} S_{BCD} \cdot \frac{1}{3} d(A, (BCD)) = \frac{V}{27}$, với $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot d(A, (BCD)) = V$

Đáp án A.

Câu 242. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại C ,

$AB = 2a, \angle CAB = 30^\circ$. Gọi H là hình chiếu của A trên SC , B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (SAC) . Thể tích của khối chóp $H.AB'B$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{7}$.

B. $\frac{6a^3\sqrt{3}}{7}$.

C. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{7}$.

D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{7}$.

Giải

Xét tam giác ABC , ta có: $\cos CAB = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$ và

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a.$$

Xét tam giác SAC có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{7}$ và

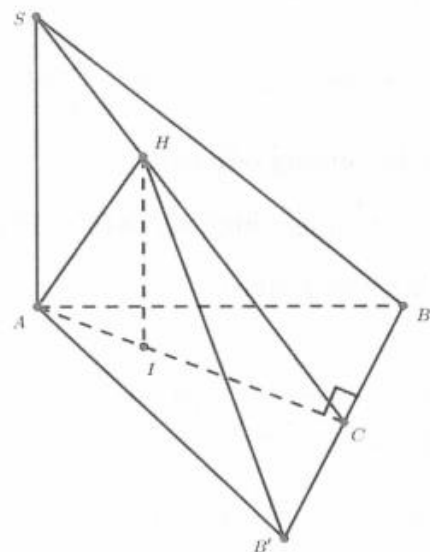
$$HC \cdot SC = AC^2 \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{SC} = \frac{3\sqrt{7}a}{7}$$

Xét tam giác SAC ta có $\sin SCA = \frac{SA}{SC}$ (1)

Xét tam giác HIC ta có $\sin HCI = \frac{HI}{HC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $HI = \frac{SA \cdot HC}{SC} = \frac{6a}{7}$.

Ta có: $V_{H.AB'B} = \frac{1}{3} HI \cdot S_{AB'B} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a}{7} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BB' = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a = \frac{2\sqrt{3}}{7} a^3$.



Đáp án D.

Câu 243. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM$, $AC = 3AP$, $BD = 2BN$. Tính tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện $ABCD$ được phân chia bởi mặt phẳng (MNP) .

A. $\frac{7}{13}$.

B. $\frac{7}{15}$.

C. $\frac{8}{15}$.

D. $\frac{8}{13}$.

Giải

Trong mặt phẳng (DBC) vẽ MN cắt CD tại K .

Trong mặt phẳng (ACD) vẽ PK cắt AD tại Q .

Theo định lí Menelaus cho tam giác $\triangle BCD$ cắt tuyến

$$MNK \text{ ta có } \frac{KC}{KD} \cdot \frac{ND}{NB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1 \Rightarrow \frac{KC}{KD} = 3.$$

Theo định lí Mennelaus cho tam giác $\triangle ACD$ cắt tuyến

$$PKQ \text{ ta có } \frac{KC}{KD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{PA}{PC} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{QD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{QA}{AD} = \frac{3}{5}.$$

Đặt $V = V_{ABCD}$, ta có

$$\frac{V_{B.APQ}}{V_{B.ACD}} = \frac{S_{APQ}}{S_{ACD}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD} = \frac{1}{5} \Rightarrow V_{B.APQ} = \frac{1}{5} V_{B.ACD} \Rightarrow V_{B.PQDC} = \frac{4}{5} V.$$

$$\frac{V_{P.BMN}}{V_{P.BCD}} = \frac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BN}{BD} = \frac{1}{8} \text{ và } \frac{V_{P.BCD}}{V} = \frac{S_{CPD}}{S_{ACD}} = \frac{CP}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{P.BMN} = \frac{1}{12} V.$$

$$\frac{V_{Q.PBN}}{V_{Q.PBD}} = \frac{S_{PBN}}{S_{PBD}} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{V_{BQPD}}{V} = \frac{S_{DQP}}{S_{ACD}} = \frac{S_{DQP}}{S_{DAP}} \cdot \frac{S_{ADP}}{S_{ACD}} = \frac{2}{15} \Rightarrow V_{Q.PBN} = \frac{1}{15} V.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{AB.MNPQ}}{V} = \frac{V_{A.BPQ} + V_{P.BNM} + V_{Q.PBN}}{V} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{V_{AB.MNPQ}}{V_{CD.MNPQ}} = \frac{7}{13}.$$

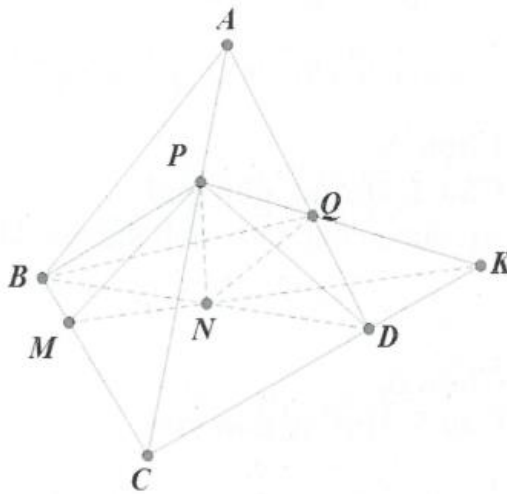
Đáp án A.

Câu 244. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Nhận xét nào sau đây luôn đúng?

- A. $|z| \geq \sqrt{2}a + b$. B. $|z| \geq \sqrt{2}|a| + |b|$. C. $|z|\sqrt{2} \leq |a| + |b|$. D. $|z|\sqrt{2} \geq |a| + |b|$.

Giải



$$\begin{aligned} (|a| - |b|)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2|ab| \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + b^2 + 2|ab| \\ &\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2(a^2 + b^2)} \geq |a| + |b| \Leftrightarrow |z|\sqrt{2} \geq |a| + |b| \end{aligned}$$

Đáp án D.

Câu 245. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$, $SAB = SCB = 90^\circ$.

Và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ theo a .

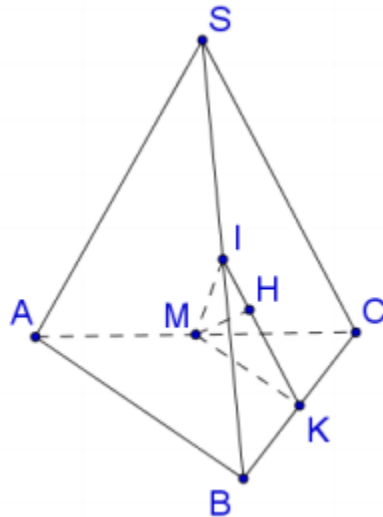
A. $6\pi a^2$.

B. $3\pi a^2$.

C. $4\pi a^2$.

D. $12\pi a^2$.

Giải



Gọi K là trung điểm của BC .

Do $SCB = SAB = 90^\circ$ nên dễ dàng nhận thấy trung điểm I của SB là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $SABC$.

Gọi M là trung điểm của AC . Tam giác ABC vuông tại B , ta có $MA = MB = MC$, mặt khác $IA = IB = IC$, do đó IM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay $IM \perp (ABC)$

$$\text{Ta có } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Trong tam giác IMK , kẻ $MH \perp IK$ (1).

$$\begin{cases} BC \perp IM \\ BC \perp MK \end{cases} \Rightarrow BC \perp (IMK) \Rightarrow BC \perp MH(2)$$

Từ (1),(2) suy ra $MH \perp (SBC)$.

Xét tam giác vuông IMK , ta có:

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MI^2} + \frac{1}{MK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{MI^2} + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{MI^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow MI^2 = a$$

Xét tam giác vuông IMA , ta có:

$$IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 2a}{2}\right)^2} = \sqrt{3}a$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp chóp $SABC$ là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi(\sqrt{3}a)^2 = 12\pi a^2$.

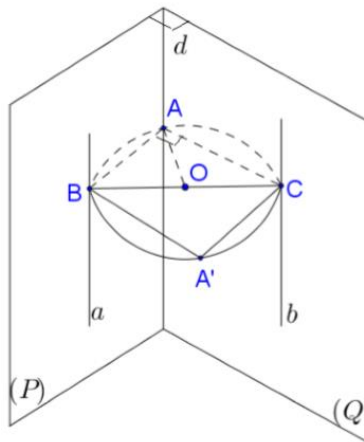
Đáp án D.

Câu 246. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai đường thẳng a, b cố định, song song với nhau và khoảng cách giữa chúng bằng 4. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ thay đổi vuông góc với nhau lần lượt chứa hai đường thẳng a, b . Gọi d là giao tuyến của $(P), (Q)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. d thuộc 1 mặt trụ cố định có khoảng cách giữa đường sinh và trục bằng 4.
- B. d thuộc 1 mặt nón cố định
- C. d thuộc 1 mặt trụ cố định có khoảng cách giữa đường sinh và trục bằng $2\sqrt{2}$.
- D. d thuộc 1 mặt trụ cố định có khoảng cách giữa đường sinh và trục bằng 2.

Giải



Lấy A là 1 điểm bất kì thuộc d . Từ A kẻ $\begin{cases} AB \perp d, B \in a \\ AC \perp d, C \in b \end{cases}$

Vì $(P) \perp (Q) \Rightarrow BAC = 90^\circ (1)$

Ta đi chứng minh BC chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b , $BC = 4$:

Ta có $\begin{cases} AB \perp d \\ AC \perp d \end{cases} \Rightarrow d \perp (ABC) \Rightarrow d \perp BC$

Mà $a // b // d$, suy ra $BC \perp a, b \Rightarrow BC = 4 (2)$

Từ (1)(2) suy ra A thuộc đường tròn đường kính BC bằng 4 không đổi

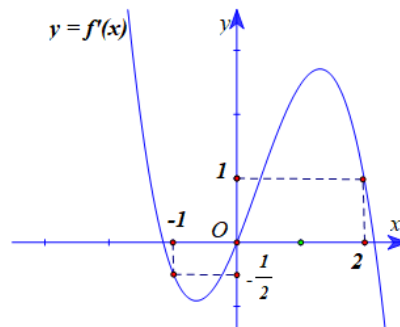
Do đó d thuộc mặt trụ có khoảng cách giữa đường sinh và trục bằng 2.

Đáp án D.

Câu 247. [Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu



A. 3.

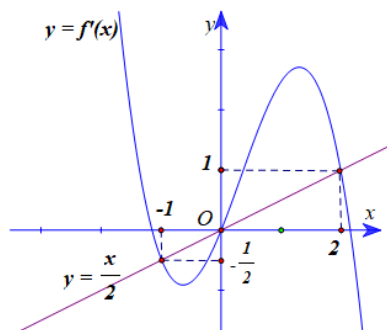
B. 5.

C. 4.

D. 2.

Giải

Đặt $g(x) = 4f(x) - x^2$. Ta có: $g'(x) = 4f'(x) - 2x = 2(2f'(x) - x)$.



Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{2}$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = \frac{x}{2}$ suy

$$\text{ra } f'(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Theo hình vẽ ta có $a < 0$, mà $ae < 0 \Rightarrow e > 0$ suy ra $g(0) = 4f(0) = 4e > 0$.

Bảng biến thiên của $y = |g(x)|$ như sau:

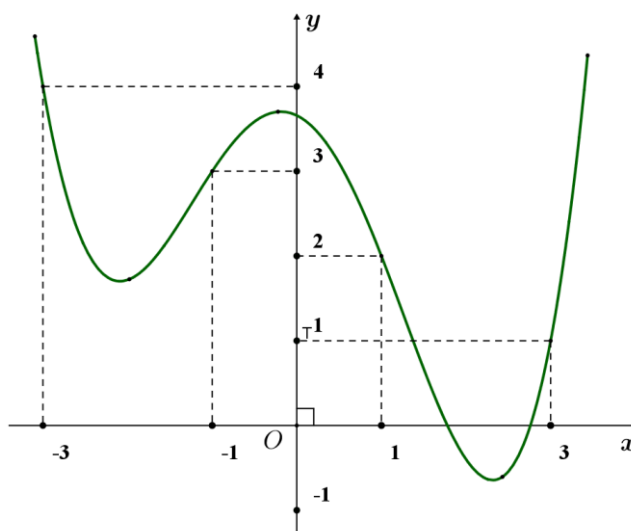
x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(2)$	$-\infty$	
$ g(x) $	$+\infty$	0	$g(0)$	0	$+\infty$	

Dựa vào đồ thị $y = |g(x)|$ suy ra hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có 3 điểm cực tiểu.

Đáp án A.

Câu 248. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc năm $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số $g(x) = f(7-2x) + (x-1)^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;0)$. B. $(-3;-1)$. C. $(3;+\infty)$. D. $(2;3)$.

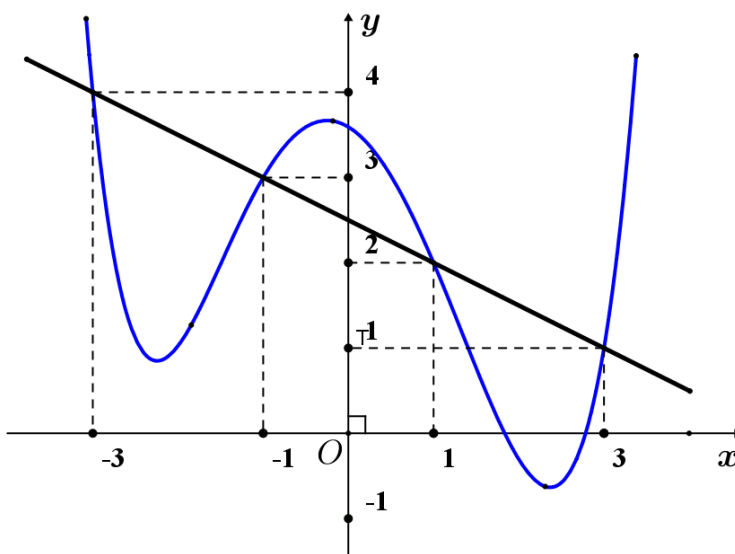
Giải

Ta có: $g(x) = f(7-2x) + (x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = -2f'(7-2x) + 2(x-1)$.

Hàm số $g(x) = f(7-2x) + (x-1)^2$ đồng biến khi và chỉ khi:

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2f'(7-2x) + 2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow f'(7-2x) \leq x-1 \quad (1).$$

Đặt $t = 7-2x \Rightarrow x-1 = \frac{7-t}{2} - 1 = \frac{5-t}{2}$. Suy ra: (1): $f'(t) \leq -\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}$.



Từ đồ thị suy ra: $\begin{cases} -3 \leq t \leq -1 \\ 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 7-2x \leq -1 \\ 1 \leq 7-2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

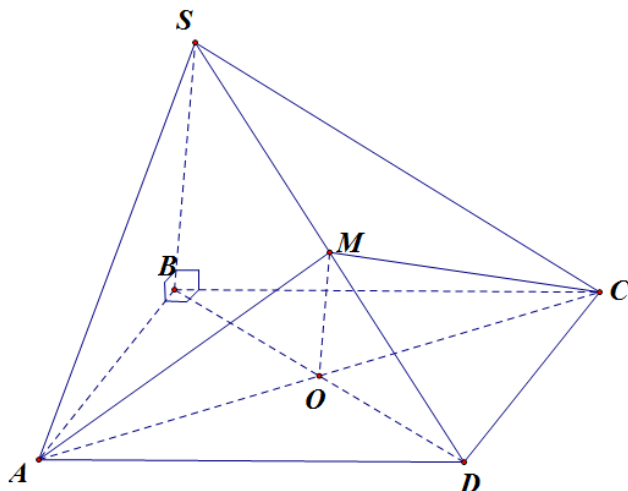
Đáp án D.

Câu 249. [Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, SB = a$ và $SB \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD . Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACM) và (SAD) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.BCD$ bằng?

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Giải



Đặt $AD = x$.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv BA$; $Oy \equiv BC$; $Oz \equiv BS$ khi đó

$$A(a;0;0), S(0;0;a), C(0;x;0) \Rightarrow D(a;x;0), M\left(\frac{a}{2}; \frac{x}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SA} = (a;0;-a); \overrightarrow{AD} = (0;x;0) \Rightarrow \vec{n}_{(SAD)} = [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AD}] = (ax;0;ax).$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{MA} = \left(\frac{a}{2}; -\frac{x}{2}; -\frac{a}{2}\right); \overrightarrow{AC} = (-a;x;0) \Rightarrow \vec{n}_{(CAM)} = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AC}] = \left(-\frac{1}{2}ax; \frac{1}{2}a^2; 0\right).$$

$$\text{Khi đó: } \cos((SAD);(CAM)) = \left| \cos(\vec{n}_{(SAD)}, \vec{n}_{(CAM)}) \right| = \frac{\left| \frac{1}{2}a^2x^2 \right|}{\sqrt{2a^2x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{1}{4}a^4}} = \cos 60^\circ.$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}a^2x^2 \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}a^4x^4 + \frac{1}{2}a^6x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow x = a.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.BCD \text{ là: } V = \frac{1}{3} \cdot SB \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{6}a^3.$$

Đáp án C.**Câu 250. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].**Cho $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$.Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$.

A. $60 + 2\sqrt{10}$.

B. $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$.

C. $60 - 2\sqrt{10}$.

D. $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$.

Giải**Phân tích:**

Từ giả thiết $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$ ta biến đổi $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$

- Gọi $A(2; -6)$, $B(-2; 2)$ là các giao điểm của đường thẳng $2x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C'): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Ta có: $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = P + 25.$$

Gọi (C) là đường tròn tâm $J(-4; -3)$, bán kính $R = \sqrt{P + 25}$.**Hướng dẫn giải.**- Theo bài ra: $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$

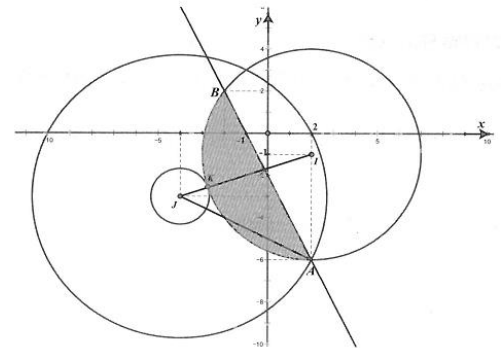
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (-y-3)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$$

 $\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền mặt phẳng (T) thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$$

- Gọi $A(2; -6)$, $B(-2; 2)$ là các giao điểm của đường thẳng $2x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C'): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

- Ta có: $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = P + 25$.

Gọi (C) là đường tròn tâm $J(-4; -3)$, bán kính $R = \sqrt{P+25}$.

- Đường tròn (C) cắt miền (T) khi và chỉ khi:

$$JK \leq R \leq JA \Leftrightarrow IJ - IK \leq R \leq IA \Leftrightarrow 2\sqrt{10} - 5 \leq \sqrt{25+P} \leq 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 40 - 20\sqrt{10} \leq P \leq 20$$

$$\Rightarrow M = 20 \text{ và } m = 40 - 20\sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy } M + m = 60 - 20\sqrt{10}.$$

Đáp án C.

Câu 251. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V . Điểm M thay đổi trong tam giác BCD . Các đường thẳng qua M và song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt phẳng (ACD) , (ABD) , (ABC) tại N, P, Q . Giá trị lớn nhất của khối $MNPQ$ là:

A. $\frac{V}{27}$.

B. $\frac{V}{16}$.

C. $\frac{V}{8}$.

D. $\frac{V}{54}$.

Giải

○ Tam giác ABN' có $MN \parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{N'M}{N'B}$.

○ Tam giác ACP' có $MP \parallel AC \Rightarrow \frac{MP}{AC} = \frac{P'M}{P'C}$.

○ Tam giác ADQ' có $QM \parallel AD \Rightarrow \frac{MQ}{AD} = \frac{Q'M}{Q'D}$.

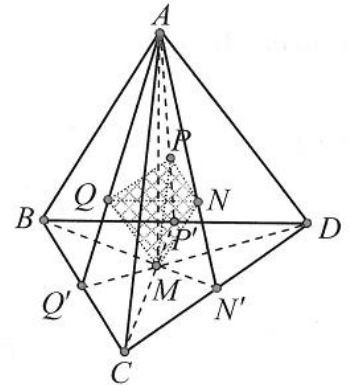
Khi đó: $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} = \frac{N'M}{N'B} + \frac{P'M}{P'C} + \frac{Q'M}{Q'D}$

Mà $\frac{N'M}{N'B} + \frac{P'M}{P'C} + \frac{Q'M}{Q'D} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MBC}}{S_{BCD}} = 1$ nên $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} = 1$

Lại có $1^3 = \left(\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{AC} + \frac{MQ}{AD} \right)^3 \geq \left(3 \sqrt[3]{\frac{MN}{AB} \cdot \frac{MP}{AC} \cdot \frac{MQ}{AD}} \right)^3$ (Cauchy)

$\Leftrightarrow MN \cdot MP \cdot MQ \leq \frac{1}{27} AB \cdot AC \cdot AD \Rightarrow MN \cdot MP \cdot MQ$ lớn nhất khi $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{MQ}{AD}$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác $BCD \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{MQ}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow (NPQ) \parallel (BCD)$,



$$\frac{S_{NPQ}}{S_{N'P'Q'}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \text{ Mà } S_{N'P'Q'} = \frac{1}{4} S_{BCD} \text{ nên } S_{NPQ} = \frac{1}{9} S_{BCD} \text{ và}$$

$$d(M, (NPQ)) = \frac{1}{2} d(A, (BCD))$$

Vậy giá trị lớn nhất của khối tứ diện $MNPQ$ là $V_{MNPQ} = \frac{1}{3} S_{NPQ} \cdot d(M, (NPQ))$

$$\Leftrightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} S_{BCD} \cdot \frac{1}{3} d(A, (BCD)) = \frac{V}{27}, \text{ với } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot d(A, (BCD)) = V.$$

Đáp án A.

Câu 252. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $BAC = 135^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB , SC lần lượt là M , N . Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là?

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .

Giải

Hướng dẫn giải.

Gọi AD là đường kính của đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC .

Khi đó, ta có: $\begin{cases} SA \perp DC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC)$

$\Rightarrow \begin{cases} DC \perp AN \\ SC \perp AN \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SDC) \Rightarrow AN \perp SD \text{ (1).}$

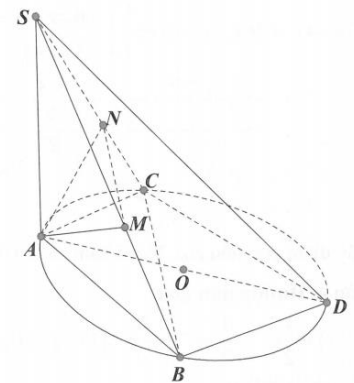
Tương tự: $\begin{cases} SA \perp DB \\ AB \perp DB \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB)$

$\Rightarrow \begin{cases} DB \perp AM \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD \text{ (2).}$

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AMN)$.

Suy ra $((ABC); (AMN)) = (SA; SD) = ASD$.

Ta có: $AD = 2R = \frac{BC}{\sin A} = a\sqrt{2}$.



$$\Delta ASD \text{ có: } \tan ASD = \frac{AD}{SA} = 1 \Rightarrow ASD = 45^\circ.$$

Đáp án B.

Câu 253. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Tính thể tích V của khối đa diện $MBPA'B'N$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{7a^3\sqrt{3}}{96}$. D. $V = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}$.

Giải

Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $h = AA' = a$ và diện tích đáy

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi I là trung điểm của BC và P là trung điểm của BI
 $\Rightarrow MP \parallel A'N$.

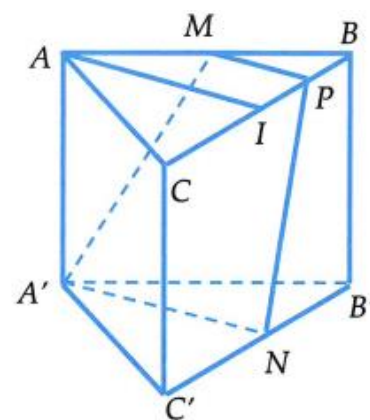
Suy ra, P là giao điểm của BC và $(A'MN)$.

Ta có $\Delta MBP \sim \Delta A'B'N$ nên khối đa diện $MBPA'B'N$ là một khối chóp cắt.

$$\text{Ta có: } S_{\Delta MBP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8} B$$

$$S_{\Delta A'B'N} = \frac{1}{2} \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} B$$

$$\text{Do đó: } V_{MBP.A'B'N} = \frac{h}{3} \left(\frac{1}{8} B + \frac{1}{2} B + \sqrt{\frac{1}{8} B \cdot \frac{1}{2} B} \right) = \frac{h}{3} \cdot \frac{7B}{8} = \frac{a \cdot 7 \cdot a^2 \sqrt{3}}{3 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{7a^3 \sqrt{3}}{96}.$$



Đáp án C.

Study tips:

Thể tích khối chóp cắt có chiều cao h và diện tích hai đáy là B và B' :

$$V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'}).$$

Câu 254. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng

$d: \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với d . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

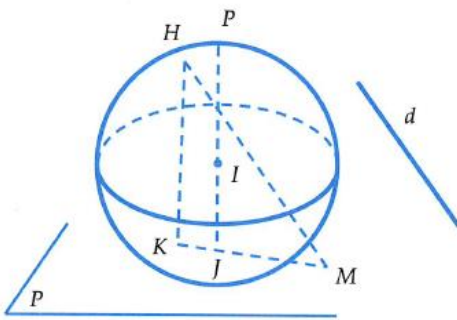
A. $\frac{8+30\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{24+18\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{12+9\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$ và bán kính $R = 5$

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH \perp AB$ và

$$IH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 3$$

Gọi M là trung điểm của $A'B'$, do $AA' \parallel BB' \parallel d$ nên tứ giác $AA'BB'$ là hình thang và $AA' + BB' = 2HM$ (tính chất đường trung bình của hình thang),

$M \in (P)$

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;1)$ và đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;2)$

$$\text{Suy ra: } \sin(d, (P)) = \sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}, \vec{u}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Gọi } K \text{ là hình chiếu của } H \text{ lên } (P) \text{ thì } HK = HM \cdot \sin \alpha \Rightarrow HM = \frac{3\sqrt{3}}{5} HK$$

$$\text{Khi đó: } AA' + BB' = 2HM = \frac{6\sqrt{3}}{5} HK$$

Để $AA' + BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất

$$\Leftrightarrow HK \text{ đi qua } I \text{ hay } HK_{\max} = IH + d(I; (P)) = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } AA' + BB' \text{ lớn nhất bằng } \frac{6\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24+18\sqrt{3}}{5}.$$

Đáp án B.

Study tips:

Đường thẳng d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) thì $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u}, \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Câu 255. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x, \forall x > 0$ và

$f(1) = -1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0; 1)$.
- B. Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm trên $(0; +\infty)$
- C. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1; 2)$.
- D. Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2; 5)$.

Giải

Ta có: $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x = \frac{x^6 - 2x^3 + 2}{x^2} = \frac{(x^3 - 1)^2 + 1}{x^2} > 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$ (1)

Từ $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x > 0, \forall x > 0$ suy ra $\int_1^2 f'(x) dx \geq \int_1^2 \left(x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \right) dx = \frac{21}{5}$

$\Rightarrow f(2) - f(1) \geq \frac{21}{5} \Leftrightarrow f(2) \geq f(1) + \frac{21}{5} = -1 + \frac{21}{5} \Rightarrow f(2) \geq \frac{17}{5}$

Kết hợp giả thiết ta có hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$ và $f(2) \cdot f(1) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(1; 2)$.

Đáp án C.

Study tips:

Để giải được bài toán ở câu 41, ta cần lưu ý đến các kiến thức đã học sau đây:

1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên D thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên D
2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$

$$3. \text{ Nếu } f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Câu 256. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

- A. $a + b = 13$. B. $a + b = 11$. C. $a + b = 16$. D. $a + b = 14$.

Giải

Điều kiện: $x > 0, n \neq 0$.

Ta có: $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7 (2x) + 2x$.

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \forall t > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó ta có: $4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.

$x_1 + 2x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} + 2 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{5})$ hoặc $x_1 + 2x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + 2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{5})$.

Vậy $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$. Do đó $a = 9; b = 5$ và $a + b = 9 + 5 = 14$.

Đáp án D.

Câu 257. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5 - x - (y^2 + xy - 3y)$.

- A. 8. B. 5. C. 7. D. 6.

Giải

Điều kiện: $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow x+y > 0$.

Ta có $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) + 2 - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy+2-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y) + (3x+3y) = 2\log_3(x^2+y^2+xy+3) + x^2+y^2+xy+2 \quad (*).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2\log_3 t + t, t \in (0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{2}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2 = 3x+3y$$

$$\Leftrightarrow y^2+xy-3y = -x^2+3x-2$$

$$P = 5 + x - (y^2+xy-3y) = x^2-2x+7 = (x-1)^2+6 \geq 6$$

Đáp án D.

Câu 258. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2f(x)+m|) = 1$ có đúng 2 nghiệm trên $[-1;1]$?

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	1	$+\infty$

A. 13.

B. 9.

C. 4.

D. 5.

Giải

$$\text{Ta có: } f(|2f(x)+m|) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |2f(x)+m| = -1 \text{ (VN)} \\ |2f(x)+m| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x)+m = 2 \\ 2f(x)+m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{2-m}{2} \\ f(x) = \frac{-2-m}{2} \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra: ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq \frac{2-m}{2} \leq 1 \\ -3 \leq \frac{-2-m}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 8 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Đáp án D.

Câu 259. [Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho phương trình $4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng:

- A. 3. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{3}{2}$.

Giải

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Xét phương trình } 4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2^{-2|x-m|+1} \cdot \log_{\sqrt{2}}[(x^2 - 2x + 1) + 2] = 2^{-(x^2-2x+1)} \cdot \log_2(2|x-m|+2) \\ &\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1} \cdot \log_{\sqrt{2}}[(x^2 - 2x + 1) + 2] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m|+2) \end{aligned} \quad (2)$$

Xét hàm số: $f(t) = 2^t \log_2(t+2), t > 2$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + 2^t \cdot \frac{1}{(t+2) \ln 2} > 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Mà $f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

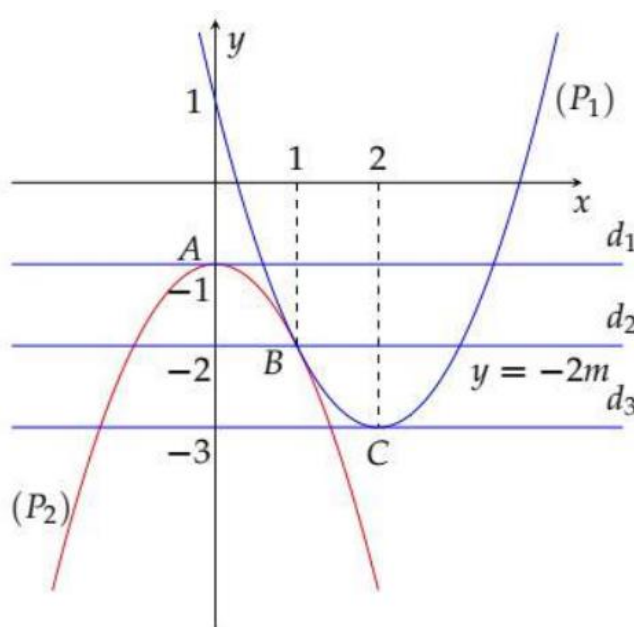
Phương trình (2) có dạng $f(x^2 - 2x + 1) = f(2|x-m|)$ và

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0; 2|x-m| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } (2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(x-m) \\ x^2 - 2x + 1 = 2(m-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = -2m & (*) \\ -x^2 - 1 = -2m & (**) \end{cases}$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Dựng các parabol: $y = x^2 - 4x + 1$ (P_1) và $y = -x^2 - 1$ (P_2) trên cùng 1 hệ trục tọa độ.



Số lượng nghiệm của (*) và (**) bằng số giao điểm của đường thẳng $d : y = -2m$ lần lượt với các đồ thị (P_1) và (P_2). Dựa vào đồ thị có thể thấy phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt thì d phải nằm ở các vị trí của d_1, d_2, d_3 .

Tương ứng khi đó:

$$-2m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$-2m = -2 \Leftrightarrow m = 1$$

$$-2m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Do đó có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu: $m = \frac{1}{2}; m = 1; m = \frac{3}{2}$.

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}.$$

Đáp án A.

Câu 260. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm

số $y = |\sin^4 x + \cos 2x + m|$ bằng 2. Số phần tử của S là:

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Giải

Ta có: $y = |\sin^4 x + \cos 2x + m| = |\sin^4 x - 2\sin^2 x + m + 1|$.

Đặt $t = \sin^2 x, t \in [0;1]$, hàm số trở thành $y = |t^2 - 2t + m + 1|$.

Xét hàm $f(t) = t^2 - 2t + m + 1$, với $t \in [0;1]$. Ta có $f'(t) = 2t - 2 \leq 0$, với $\forall t \in [0;1]$, suy ra hàm số nghịch biến trên $[0;1]$. Do đó $f(1) \leq f(t) \leq f(0) \Leftrightarrow m \leq f(t) \leq m + 1$.

Xét các trường hợp sau:

+ $m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$. Khi đó, $y = -m - 1$. Theo giả thiết $-m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn).

+ $-1 < m \leq 0$. Khi đó, $\min y = 0$ (loại).

+ $m > 0$. Khi đó, $\min y = m$. Theo giả thiết $m = 2$ (thỏa mãn).

Vậy tập hợp S có 2 phần tử.

Đáp án D.

Câu 261. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Khi đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi:

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $\frac{1}{2} \leq m < 1$. C. $0 < m < 1$. D. $0 < m \leq 1$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Như vậy $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$

Do đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

Đáp án B.

Câu 262. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z + 8 = 0$ và $(R): x - 2y + z - 4 = 0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại A , B , C . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = AB^2 + \frac{144}{AC}$$

A. $72\sqrt[3]{3}$.

B. 96.

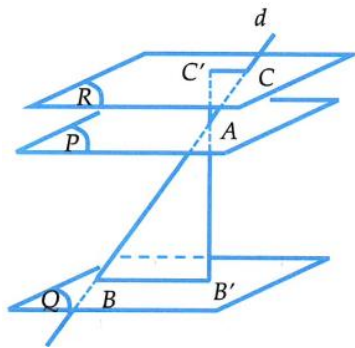
C. 108.

D. $72\sqrt[3]{4}$.

Giải

Dễ thấy mặt phẳng (P) nằm giữa hai mặt phẳng (Q) và (R) ; ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) đôi một song song với nhau.

Trên mặt phẳng (P) lấy điểm $M(1;0;0)$.



Gọi B' , C' , lần lượt là hình chiếu của A trên hai mặt phẳng (Q) và (R) . Ta có:

$$AB' = d(A; (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{|1 - 2 \cdot 0 + 0 + 8|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

$$AC' = d(A; (R)) = d(M; (R)) = \frac{|1 - 2 \cdot 0 + 0 - 4|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } AB' = 3AC' \Rightarrow \frac{AB'}{AC'} = 3 = \frac{BB'}{CC'}.$$

$$\text{Đặt: } CC' = x (x > 0) \Rightarrow BB' = 3x.$$

$$AB^2 = AB'^2 + BB'^2 = \frac{27}{2} + 9x^2 \text{ và } AC = \sqrt{AC'^2 + CC'^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + x^2}.$$

$$\text{Khi đó: } T = AB^2 + \frac{144}{AC} = \frac{27}{2} + 9x^2 + \frac{144}{\sqrt{\frac{3}{2} + x^2}} = 9\left(\frac{3}{2} + x^2\right) + \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + x^2}} + \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + x^2}}$$

$$\Rightarrow T \geq 3 \cdot \sqrt[3]{9\left(\frac{3}{2} + x^2\right) \cdot \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + x^2}} \cdot \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + x^2}}} = 108.$$

Giải thích: Ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $9\left(\frac{3}{2} + x^2\right), \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + x^2}}, \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + x^2}}$

$$\text{Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi } 9\left(\frac{3}{2} + x^2\right) = \frac{72}{\sqrt{\frac{3}{2} + x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Đáp án C.

Câu 263. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a (0 < a < 4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

A. $T = 99$.

B. $T = 64$.

C. $T = 32$.

D. $T = 72$.

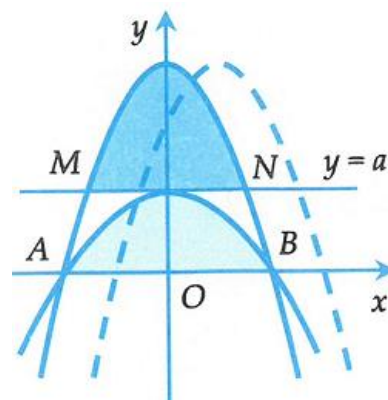
Giải

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị. Khi đó, phương trình các parabol mới là

$$(P_1): y = -x^2 + 4, \quad (P_2): y = -\frac{a}{4}x^2 + a.$$

Gọi A, B là các giao điểm của (P_1) và trục

$Ox \Rightarrow A(-2; 0), B(2; 0) \Rightarrow AB = 4$. Gọi M, N là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d \Rightarrow M(-\sqrt{4-a}; a), N(\sqrt{4-a}; a)$.



$$\text{Ta có } S_1 = 2 \int_a^4 \sqrt{4-y} \cdot dy = -\frac{4}{3} \left((4-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_a^4 = \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a}.$$

$$S_2 = 2 \left(-\frac{a}{4} x^2 + a \right) \cdot dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{12} + ax \right) \Big|_0^2 = \frac{8a}{3}$$

$$\text{Theo giả thiết } S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3} (4-a) \sqrt{4-a} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow (4-a)^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64.$$

Vậy $T = 64$.

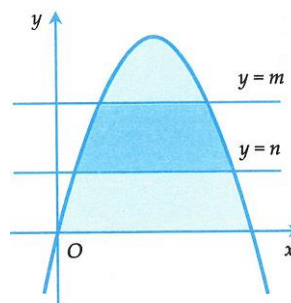
Đáp án B.

Note: Bài toán được lấy ý tưởng từ bài toán vô cùng quen thuộc:

Bài tập tương tự

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau. Tính giá trị của biểu thức

$$T = (4-m)^3 + (4-n)^3.$$



A. $T = \frac{320}{9}$.

B. $T = \frac{512}{15}$.

C. $T = 405$.

D. $T = \frac{75}{2}$.

Đáp án A.

Câu 264. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho

$$\frac{AB}{AM} + 2 \cdot \frac{AD}{AN} = 4. \text{ Ký hiệu } V, V_1 \text{ lần lượt là thể tích của các khối chóp } S.ABCD \text{ và}$$

$S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$

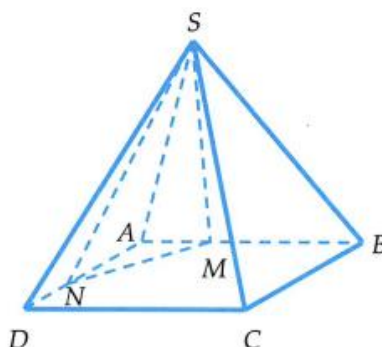
A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{17}{14}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Giải



Đặt $\frac{AB}{AM} = x$ và $\frac{AD}{AN} = y$ ($x, y \geq 1$).

Từ giả thiết ta có $x + 2y = 4$ (1)

Suy ra: $\begin{cases} 2y = 4 - x \geq 2 \\ x = 4 - 2y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq \frac{2}{3} \end{cases}$

Ta có: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(S; (ABCD)) \cdot S_{\triangle AMN}}{\frac{1}{3} \cdot d(S; (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin DAB}{AB \cdot AD \cdot \sin DAB}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2xy} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.MBCDN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABCD} - V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = 1 - \frac{1}{2xy} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{V_1}{V} = 1 - \frac{1}{x(4-x)}$.

Áp dụng bất đẳng thức cho hai số dương x và $4-x$ ta có:

$$x(4-x) \leq \left(\frac{x+4-x}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{1}{x(4-x)} \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 4-x \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Đáp án A.

Note: Bất đẳng thức Cauchy áp dụng cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)

$$\text{là } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \text{ hay } a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Câu 265. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;1;0)$, $B(2;0;-1)$, $C(0;2;-1)$, $D(0;0;-2)$. Với mỗi điểm M tùy ý, đặt $T = MA + MB + MC + MD$. Gọi $M_0(a;b;c)$ sao cho T đạt giá trị nhỏ nhất. Lúc đó, tổng $a+5b+c$ bằng?

A. 3.

B. -13.

C. 7.

D. 4.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; -1)$; $\overrightarrow{AC} = (-3; 1; -1)$ và $\overrightarrow{AD} = (-3; -1; -2)$.

Mà $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ nên A, B, C, D đồng phẳng và tạo thành tứ giác $ABCD$ có hai

$$\text{đường chéo } AD: \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \text{ và } BC: \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -t' \\ z = -1 \end{cases} \text{ cắt nhau tại điểm } I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -1\right).$$

Mặt khác, $MA + MD \geq AD$ và $MB + MC \geq BC$ nên $T = MA + MB + MC + MD \geq AD + BC$.

Do đó $T_{\min} = AD + BC = \sqrt{14} + 2\sqrt{2}$ khi $M \equiv I$. Suy ra $M_0\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Vậy $a + 5b + c = 3$.

Đáp án A.

Câu 266. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - my + z + 6m + 3 = 0$ và

$(\beta): mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ (với m là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng Oxy . Biết rằng

khi m thay đổi thì đường thẳng Δ' luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng Oxy . Tính giá trị biểu thức $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2$?

A. $P = 56$.

B. $P = 9$.

C. $P = 41$.

D. $P = 73$.

Giải

Mặt phẳng $(\alpha): x - my + z + 6m + 3 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -m; 1)$, và mặt phẳng $(\beta): mx + y - mz + 3m - 8 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (m; 1; -m)$

Ta có: $M\left(-3m + \frac{4}{m} - 3; 0; -3m - \frac{4}{m}\right) \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta)$

Δ có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (m^2 - 1; 2m; m^2 + 1)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) . Khi đó (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{k}] = (2m; 1 - m^2; 0)$ (với $\vec{k} = (0; 0; 1)$).

Phương trình mặt phẳng (P) là $2mx + (1 - m^2)y + 6m^2 + 6m - 8 = 0$.

Vì $I(a; b; c) \in (Oxy)$ nên $I(a; b; 0)$

Theo giả thiết ta suy ra (P) là tiếp diện của mặt cầu $(S) \Rightarrow d(I; (P)) = R$ (cố định)

$$\Leftrightarrow \frac{|2ma + (1 - m^2)b + 6m^2 + 6m - 8|}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = R > 0 \text{ (cố định)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m(a + 3) + (6 - b)m^2 + b - 8|}{m^2 + 1} = R > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m(a + 3) + (6 - b)m^2 + b - 8 = R(m^2 + 1) \\ 2m(a + 3) + (6 - b)m^2 + b - 8 = -R(m^2 + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2(a + 3) = 0 \\ 6 - b = R \\ b - 8 = R \\ R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ 6 - b = b - 8 \\ R = 6 - b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2(a + 3) = 0 \\ 6 - b = -R \\ b - 8 = -R \\ R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ 6 - b = b - 8 \\ -R = 6 - b < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$. Vậy $I(-3; 7; 0)$, do đó $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2 = 41$.

Đáp án C.

Câu 267. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2|z+1| + 2|z-1| + |z-\bar{z}-4i|$ bằng:

- A. $4 + \frac{14}{\sqrt{15}}$. B. $2 + \frac{7}{\sqrt{15}}$. C. $4 + 2\sqrt{3}$. D. $2 + \sqrt{3}$.

Giải

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết, ta có: $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$. Suy ra $-2 \leq x, y \leq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= 2|z+1| + 2|z-1| + |z-\bar{z}-4i| = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + |y-2|\right) \\ &\Leftrightarrow P = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + |y-2|\right) \geq 2\left(2\sqrt{1+y^2} + 2-y\right) \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2-y$ trên đoạn $[-2; 2]$, ta có:

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ta có: } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3}; f(-2) = 4 + 2\sqrt{5}; f(2) = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra: } \min_{[-2; 2]} f(y) = 2 + \sqrt{3} \text{ khi } y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

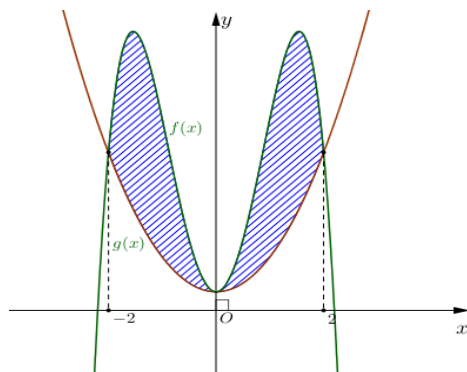
$$\text{Do đó: } P \geq 2(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}. \text{ Vậy } P_{\min} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ khi } z = \frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

Đáp án C.

Câu 268. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị và $y = g(x) = mx^2 + nx + p$

($m, n, p \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. (4;4,1).

B. (4,2;4,3).

C. (4,3;4,4).

D. (4,1;4,2)

Giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P): $S = \int_{-2}^2 [f(x) - g(x)] dx$.

$h(x) = f(x) - g(x)$ là hàm bậc bốn có hệ số bậc bốn bằng $-\frac{1}{2}$, có hai nghiệm đơn

$x = 2$, $x = -2$ và một nghiệm kép $x=0$

$$\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}x^2(x-2)(x+2) \Rightarrow$$

$$S = \int_{-2}^2 -\frac{1}{2}x^2(x-2)(x+2)dx = \frac{64}{15} = 4,266..$$

Đáp án B.

Câu 269. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4| = 1$ và $|iz_2 - 2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 2z_2|$ bằng

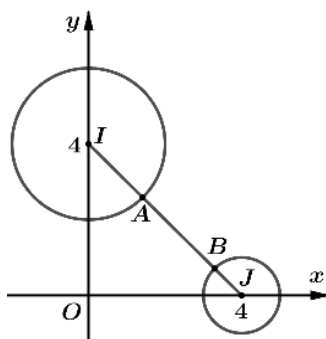
A. $4\sqrt{2} + 3$

B. $2\sqrt{5} - 2$

C. $4 - \sqrt{2}$

D. $4\sqrt{2} - 3$

Giải



Đặt $z_3 = -2z_2$, suy ra $P = |z_1 + 2z_2| = |z_1 - (-2z_2)| = |z_1 - z_3|$.

Và $z_2 = -\frac{1}{2}z_3$ thế vào $|iz_2 - 2| = 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{2}iz_3 - 2 \right| = 1 \Leftrightarrow |z_3 - 4i| = 2$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z_3, z_1 .

• $|z_3 - 4i| = 2 \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm $I(0; 4)$, $R_3 = 2$.

• $|z_1 - 4| = 1 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $J(4; 0)$, $R_1 = 1$.

$$\Rightarrow P = |z_1 - z_3| = AB \Rightarrow \begin{cases} P_{\min} = |IJ - R_1 - R_3| = 4\sqrt{2} - 3 \\ P_{\max} = IJ + R_1 + R_3 = 4\sqrt{2} + 3 \end{cases}$$

Đáp án D.

Câu 270. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $(Oxyz)$, cho hai điểm $A(0; 8; 2)$, $B(9; -7; 23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b + c + d$ khi đó là

A. $b + c + d = 2$. **B.** $b + c + d = 4$. **C.** $b + c + d = 3$. **D.** $b + c + d = 1$.

Giải

Vì $A \in (P)$ nên ta $8b + 2c + d = 0 \Leftrightarrow d = -8b - 2c \Rightarrow (P): x + by + cz - (8b + 2c) = 0$.

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5 - 11b + 5c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có: } d(B; (P)) = \frac{|9 - 7b + 23c - 8b - 2c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = \frac{|(5 - 11b + 5c) + 4(1 - b + 4c)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow d(B; (P)) \leq \frac{|5 - 11b + 5c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} + 4 \frac{|1 - b + 4c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} \Leftrightarrow d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{|1 - b + 4c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}}$$

$$\stackrel{\text{Così-Svac}}{\Leftrightarrow} d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{(1+1+16)(1+b^2+c^2)}}{\sqrt{1+b^2+c^2}} \Leftrightarrow d(B; (P)) \leq 18\sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 1 = -b = \frac{c}{4} \\ \frac{|5 - 11b + 5c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 4 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy $P_{\max} = 18\sqrt{2}$ khi $b + c + d = 3$.

Đáp án C.

Câu 271. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $T = 2a + b$.

A. 3.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Giải

$$\text{Ta có: } \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right)$$

Điều kiện xác định: $x > 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) + 2\log_3 2\sqrt{x} = \log_5 x + 2\log_3 (x-1) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + 2\log_3 (t-1)$ với $t > 1$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + \frac{2}{(t-1) \ln 3} > 0$ với $t > 1$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Từ (*) ta có $f(2\sqrt{x}+1) = f(x)$ nên suy ra

$$2\sqrt{x}+1 = x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \quad (\text{do } x > 1)$$

Suy ra $x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3; b = 2 \Rightarrow 2a + b = 8$.

Đáp án B.

Câu 272. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

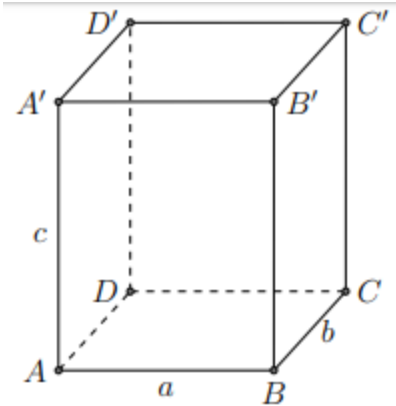
A. 8.

B. $8\sqrt{2}$.

C. $16\sqrt{2}$.

D. $24\sqrt{3}$.

Giải



Gọi độ dài $AB = a, BC = b, AA' = c$.

Khi đó theo đề ta có
$$\begin{cases} ab + bc + ca = 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 36 \end{cases}$$

Suy ra $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 72$.

Hay $a + b + c = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow b + c = 6\sqrt{2} - a$.

Ta có: $b^2 + c^2 + a^2 = 36 \Leftrightarrow (b + c)^2 - 2bc + a^2 = 36$.

Hay $(6\sqrt{2} - a)^2 - 2bc + a^2 = 36 \Rightarrow bc = \frac{(6\sqrt{2} - a)^2 + a^2 - 36}{2}$.

Từ đó ta có $V = abc = a \cdot \frac{(6\sqrt{2} - a)^2 + a^2 - 36}{2} = \frac{2a^3 - 12\sqrt{2}a^2 + 36a}{2}$

Không mất tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, khi đó $6\sqrt{2} = a + b + c \leq 3a \Rightarrow a \geq 2\sqrt{2}$.

Lại có $36 = a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + \frac{(b + c)^2}{2} = a^2 + \frac{(6\sqrt{2} - a)^2}{2} \Rightarrow 3a^2 - 12\sqrt{2}a \leq 0 \Rightarrow a \leq 4\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(a) = \frac{2a^3 - 12\sqrt{2}a^2 + 36a}{2}$ với $a \in [2\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$.

Ta có $f'(a) = \frac{6a^2 - 24\sqrt{2}a + 36}{2}$, $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} (L) \\ a = 3\sqrt{2} (N) \end{cases}$.

Ta có
$$\begin{cases} f(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \\ f(3\sqrt{2}) = 0 \\ f(4\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $V_{\max} = 8\sqrt{2}$ khi $a = 4\sqrt{2}, b = c = \sqrt{2}$.

Đáp án B.

Câu 273. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{m}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1 &\Leftrightarrow \log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 2(2x+m) - 1 \\ &\Leftrightarrow \log_2(2x+m) + 2(2x+m) + 1 = \log_2 x^2 + x^2 \Leftrightarrow \log_2(2x+m) + 2(2x+m) = \log_2 x^2 + x^2 \\ &\Leftrightarrow f(u) = f(v) \end{aligned}$$

Xét $f(u) = \log_2 u + u, (u > 0)$; ta có: $f'(u) = \frac{1}{u \ln 2} + 1 > 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x, (x > 0)$.

x	0	2	$+\infty$
y'		-	0
y	0	$\searrow$	$\nearrow$
		-4	$-\infty$

Phương trình có 2 nghiệm dương khi $-4 < 2m < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0$ suy ra có 1 giá trị nguyên.

Đáp án C.

Câu 274. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5) \geq 1$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - m = 0$.

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Giải

Ta có: $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+2y+5 \geq x^2+y^2+3 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-2 \leq 0 \quad (1)$

$\Rightarrow$ Tập hợp các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5) \geq 1$ là hình tròn

$(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ (tính cả biên).

Xét $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - m = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = m$.

TH1: $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$, không thỏa mãn (1).

TH2: $m > 0$, khi đó tập hợp các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn

$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - m = 0$ là đường tròn $(C_2): x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - m = 0$.

Để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau hoặc hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong và đường tròn (C_2) có bán kính lớn hơn đường tròn (C_1) . (C_1) có tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1 = 2$.

(C_2) có tâm $I_2(-2;-3)$, bán kính $R_2 = \sqrt{m} (m > 0)$.

Để (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài thì $I_1I_2 = R_1 + R_2$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 2 + \sqrt{m} \Leftrightarrow 5 = 2 + \sqrt{m} \Leftrightarrow m = 9 (tm)$$

Để đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong và đường tròn (C_2) có bán kính lớn hơn đường tròn (C_1) . $\Rightarrow R_2 - R_1 = I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} - 2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \Leftrightarrow m = 49 (tm)$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C.

Câu 275. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x \geq 0, y \geq 0, z \geq -1$ và $\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3}$ tương ứng bằng:

A. $4\sqrt{2}$.

B. 6.

C. $6\sqrt{3}$.

D. 4.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y \Leftrightarrow 1 + \log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y+1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+2y+2}{4x+y+3} = (4x+y+3) - (2x+2y+2)$$

$$\Leftrightarrow f(2x+2y+2) = f(4x+y+3) \Leftrightarrow 2x+2y+2 = 4x+y+3 \Leftrightarrow y = 2x+1$$

(Với hàm $f(t) = \log_2 t + t$ là đơn điệu trên $(0; +\infty)$)

$$\text{Thay vào biểu thức } T \text{ ta được: } T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3} = \frac{(x+z+1)^2}{5x+y} + \frac{(2x+3)^2}{x+2z+3}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } T = \frac{(x+z+1)^2}{5x+y} + \frac{(2x+3)^2}{x+2z+3} \geq \frac{(3x+z+4)^2}{6x+2z+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x+z+4)^2}{3x+z+2}$$

$$\text{Đặt } t = 3x+z+2 \Rightarrow T \geq \frac{1}{2} \left(t + \frac{4}{t} + 4 \right) \geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} + 4 \right) = 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} y = 2x+1 \\ t = 2 = 3x+z+2 \\ \frac{x+z+1}{5x+1} = \frac{2x+3}{x+2z+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = 1 \end{cases} : \begin{cases} y = 2x+1 \\ t = 2 = 3x+z+2 \\ \frac{x+z+1}{5x+1} = \frac{2x+3}{x+2z+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 4$.

Đáp án D.

Câu 276. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

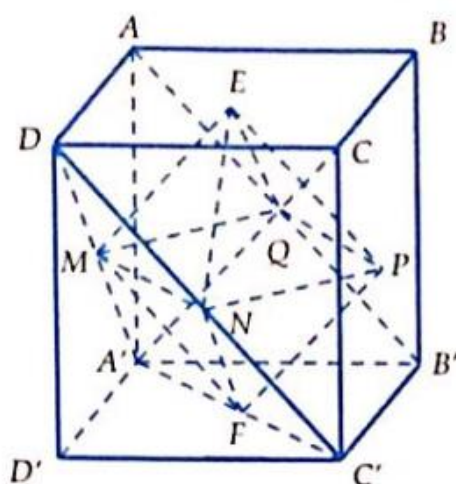
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F, M, N, P, Q lần lượt là tâm của các mặt $ABCD; A'B'C'D'; ADD'A'; DCC'D'; CBB'C'; ABB'A'$. Biết cạnh khối lập phương bằng a , khi đó thể tích của khối tám mặt đều nội tiếp khối lập phương trên là

- A. $\frac{a^3}{8}$. B. $\frac{a^3}{12}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Giải

Ta thấy khối tám mặt đều đó thực chất là 2 khối chóp có chung đáy $EMNPQF$ được đánh dấu như hình trên.

Xét $\triangle A'DC'$ có: M, N lần lượt là trung điểm của DA' và $DC' \Rightarrow MN = \frac{1}{2}A'C'$



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là khối lập phương cạnh a .

$\Rightarrow A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh a .

$\Rightarrow A'C' = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. Do vậy $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

+) Nhận thấy $MNPQ$ là một hình vuông cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2}$

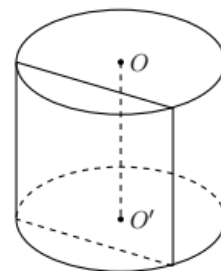
$$+) d(E; (MNPQ)) = \frac{1}{2} \cdot EF = \frac{1}{2} a$$

$$\Rightarrow V_{EMNPQF} = 2 \cdot V_{E.MNPQ} = 2 \cdot \frac{1}{3} d(E, (MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

Đáp án D.

Câu 277. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho khối trụ T có trục OO' , bán kính r và thể tích V . Cắt khối trụ T thành hai phần bởi mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\frac{r}{2}$ (như hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích phần không chứa trục OO' . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.



A. $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. B. $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{V_1}{V} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2\pi}$. D. $\frac{V_1}{V} = \frac{4 - \sqrt{3}}{4\pi}$.

Giải

Gọi h là chiều cao của khối trụ (T) . Thể tích khối trụ đã cho là $V = h \cdot \pi r^2$.

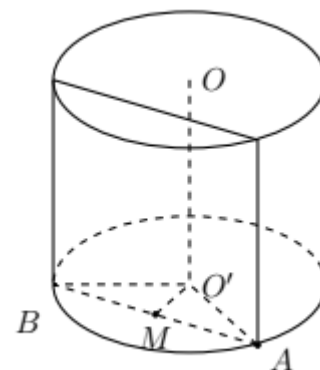
Gọi A và B là giao điểm của mặt phẳng (P) với đường tròn đáy tâm O' và M là trung điểm của AB .

Ta có: $O'M = \frac{r}{2} \Rightarrow AB = 2AM = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3} \Rightarrow \angle AO'B = 120^\circ$.

Diện tích đáy phần khối trụ không chứa trục là

$$S_1 = S_q - S_{\Delta AO'B} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \sqrt{3} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\Rightarrow V_1 = h \cdot \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \right). \text{ Suy ra } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}.$$



Đáp án A.

Câu 278. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$. B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$. D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Giải

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z , $F_1(-2;1)$, $F_2(4;7)$ và $N(1;-1)$.

Từ $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $F_1F_2=6\sqrt{2}$ nên ta có A là đoạn thẳng F_1F_2 . Gọi H là hình chiếu của N lên F_1F_2 , ta có $H\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Suy ra $P = NH + NF_2 = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

Đáp án B.

Câu 279. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a;b)$, đặt $T = b^2 - a^2$ thì:

A. $T = 36$. B. $T = 48$. C. $T = 64$. D. $T = 72$.

Giải

Ta có: $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-2)^3 + 8 + m - 3x = 2^3 + 2^{2-x}$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3$.

Xét hàm $f(t) = 2^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) suy ra $m - 3x = (2-x)^3 \Leftrightarrow m = 8 - 9x + 6x^2 - x^3$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				8		$-\infty$

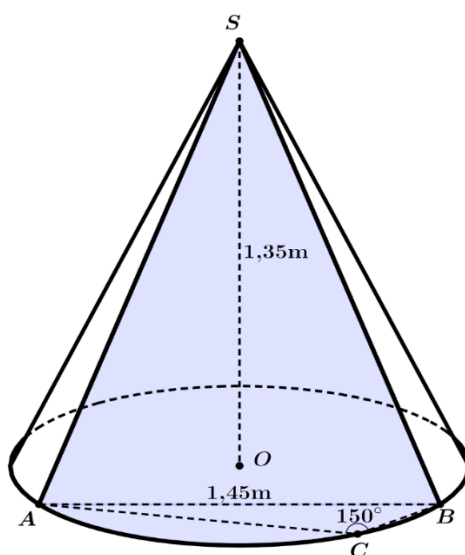
Dựa vào bảng biến thiên ta có, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4 < m < 8$.

Suy ra $a = 4$; $b = 8 \Rightarrow T = b^2 - a^2 = 48$.

Đáp án B.

Câu 280. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Nhân dịp quảng bá chiếc nón lá Việt Nam, một cửa hàng có đặt trước sảnh một cái nón lớn với chiều cao $1,35m$. Cửa hàng có sơn cách điệu hoa văn trang trí một phần của hình nón ứng với cung AB như hình vẽ. Biết $AB = 1,45m$, $ACB = 150^\circ$ và giá tiền để trang trí $1m^2$ là $2.000.000$ đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà cửa hàng cần dùng để trang trí mặt trước của nón là bao nhiêu?



- A. 4.510.000 đồng. B. 3.021.000 đồng. C. 3.010.000 đồng. D. 3.008.000 đồng.

Giải

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón.

Áp dụng định lý sin ta có $\frac{1,45}{\sin 150^\circ} = 2r \Rightarrow r = 1,45(\text{m})$.

Suy ra góc ở tâm của hình nón ứng với cung AB là 60° .

Diện tích phần mặt nón mà cửa hàng cần sơn và trang trí là

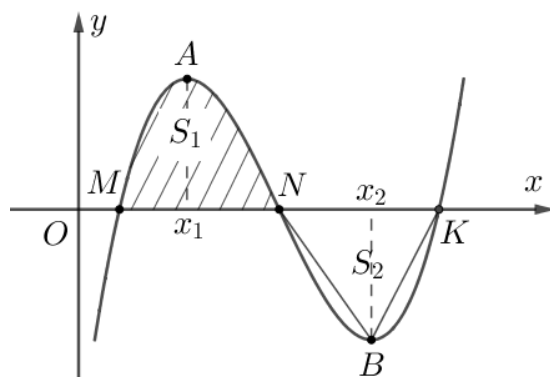
$$\frac{\pi r l \cdot 60}{360} = \frac{\pi r l}{6} = \frac{\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}{6} = \frac{\pi \cdot 1,45 \sqrt{\frac{157}{40}}}{6}.$$

Số tiền cửa hàng cần bỏ ra để trang trí là $\frac{\pi \cdot 1,45 \sqrt{\frac{157}{40}}}{6} \cdot 2000000 \approx 3.008.000$ đồng.

Đáp án D.

Câu 281. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) ; M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK . Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

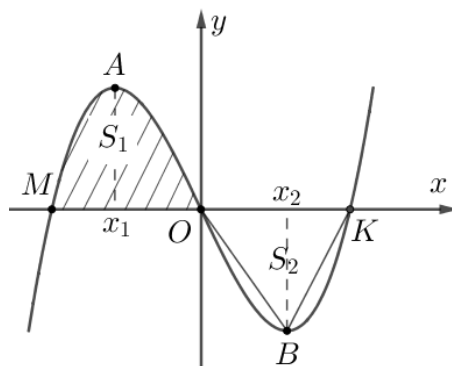
B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Giải

Kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị đồ thị (C) sang trái sao cho điểm uốn trùng với gốc tọa độ O . (như hình dưới)



Do $f(x)$ là hàm số bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng ($O \equiv N$).

Đặt $x_1 = -a$, $x_2 = a$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = k(x^2 - a^2)$ với $k > 0$

$$\Rightarrow f(x) = k\left(\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right) \Rightarrow x_M = -a\sqrt{3}, x_K = a\sqrt{3}$$

Có $MAKB$ nội tiếp đường tròn tâm $O \Rightarrow OA = OM = a\sqrt{3}$

$$\text{Có } f(x_1) = \sqrt{OA^2 - x_1^2} \Leftrightarrow f(-a) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k\left(-\frac{1}{3}a^3 + a^3\right) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}\left(\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right)$$

$$S_1 = \int_{-a\sqrt{3}}^0 f(x) dx = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{a^2}{2}x^2 \right) \Big|_{-a\sqrt{3}}^0 = \frac{9\sqrt{2}}{8}a^2$$

$$S_2 = S_{\triangle AMO} = \frac{1}{2} f(-a) \cdot MO = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Đáp án D.

Câu 282. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \pm\sqrt{3}$, thỏa mãn $1 - x^3 = 2x^2 f(x) + x f^2(x) - f'(x)$

và $f(1) = 0$. Hàm số $g(x) = [f(2x-1)]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Giải

Ta có:

$$1 - x^3 = 2x^2 f(x) + x f^2(x) - f'(x) \Leftrightarrow 1 + f'(x) = x \left[x^2 + 2x f(x) + f^2(x) \right] = x \left[x + f(x) \right]^2$$

$$\Rightarrow \frac{1 + f'(x)}{[x + f(x)]^2} = x \Rightarrow \int \frac{1 + f'(x)}{[x + f(x)]^2} dx = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{x + f(x)} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Do } f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{1 + f(1)} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Khi đó: } -\frac{1}{x + f(x)} = \frac{x^2 - 3}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{x^2 - 3} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{x^2 - 3} - 1$$

Suy ra:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2 - 3} = x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = x^2 - 3 \Leftrightarrow 4x = x^4 - 6x^2 + 9 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 - 4x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = a > 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } g'(x) = 4f'(2x - 1) \cdot f(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -2 \\ 2x - 1 = 1 \\ 2x - 1 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{a + 1}{2} > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta có: $f(x)$ không xác định khi $x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow g(x)$ không xác định khi

$$2x - 1 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{3} + 1}{2}$$

Mặt khác: $g'(x) - 1 = 4f'(x) - 3 \cdot f(x) - 3 = 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{8}{3} < 0$ và

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-} g(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Ta có bảng biến thiên:

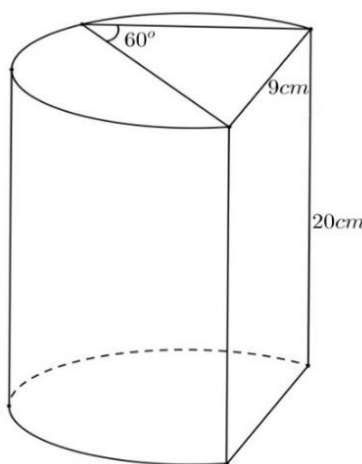
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{a+1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Đáp án D.

Câu 283. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Một bác thợ hàn làm ra những chi tiết trang trí giống nhau có dạng là một phần của mặt xung quanh hình trụ như hình vẽ. Để làm ra sản phẩm đó bác thợ hàn cắt ra từ một tấm kim loại phẳng hình chữ nhật kích thước $120\text{cm} \times 240\text{cm}$ thành những miếng kim loại hình chữ nhật bằng nhau, một cạnh 20cm , cạnh còn lại có độ dài L . Sau đó bác thợ hàn uốn cong những miếng kim loại nhỏ đó thì được sản phẩm cần làm. Hỏi từ tấm kim loại ban đầu bác thợ hàn có thể làm được tối đa bao nhiêu sản phẩm như vậy. Giả sử hao phí nguyên vật liệu là không đáng kể.



A. 60.

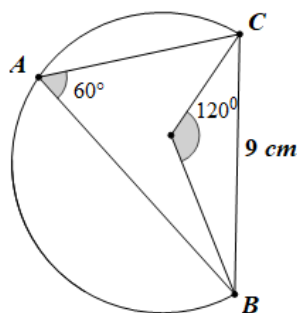
B. 72.

C. 66.

D. 80.

Giải

Sản phẩm bác thợ hàn làm ra là một phần của mặt xung quanh hình trụ có đáy là một phần của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC như hình vẽ.



Gọi R là bán kính đường tròn đó, áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{9}{2 \sin 60^\circ} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

Gọi L là độ dài phần cung tròn đó.

Dễ thấy góc ở tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 120° nên ta có

$$L = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R = 4\pi\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Do đó diện tích xung quanh của sản phẩm đó là $S_{xq} = 20 \cdot L = 20 \cdot 4\pi\sqrt{3} = 80\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2$

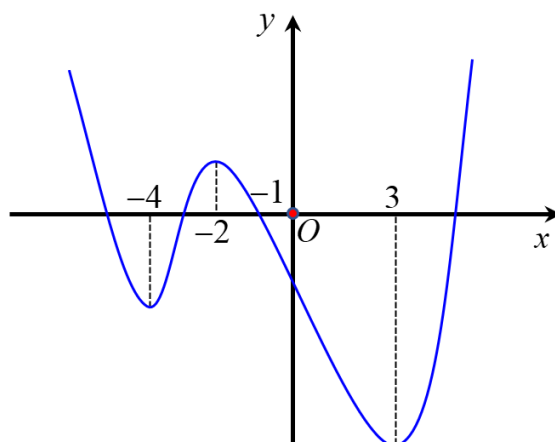
Số sản phẩm tối đa bác thợ hàn có thể làm được là $\frac{240 \cdot 120}{80\pi\sqrt{3}} = 66,16$

Vậy tối đa bác thợ hàn có thể làm được 66 sản phẩm.

Đáp án C.

Câu 284. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Giải

Ta có: $g'(x) = (2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x) - 2x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2 + 2x) = \frac{x}{x+1}$, do $x = -1$ không phải là nghiệm phương trình.

Xét hàm số: $y = f'(x^2 + 2x)$.

$$y' = (2x + 2) f''(x^2 + 2x).$$

$$\text{Khi đó, } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -4 \\ x^2 + 2x = -2 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		$f'(3)$		0		$f'(3)$		$+\infty$	

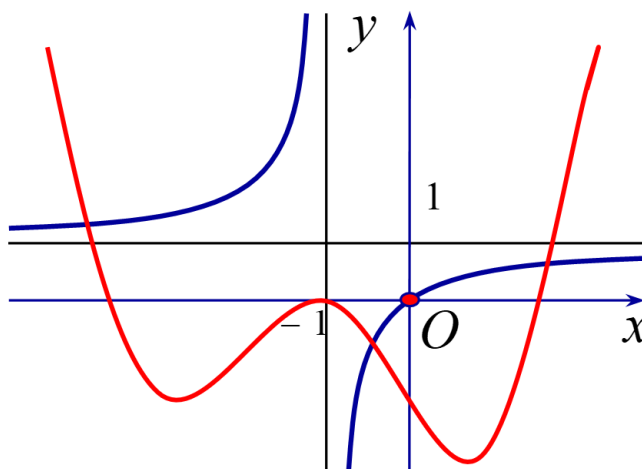
Xét hàm số: $y = \frac{x}{x+1}$.

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$ $-\infty$	1

Số nghiệm của phương trình: $f'(x^2 + 2x) = \frac{x}{x+1}$ chính bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(x^2 + 2x)$ và $y = \frac{x}{x+1}$.

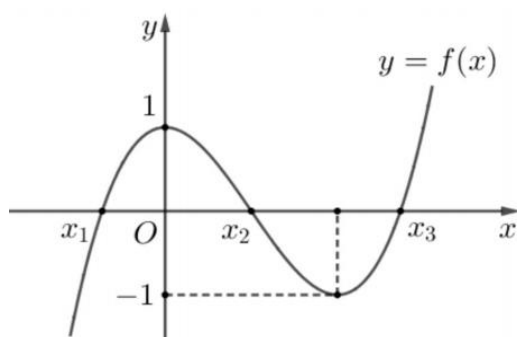


Từ đồ thị suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn, nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Đáp án A.

Câu 285. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S , diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ bằng

A. $S + 2\sqrt{3}$.

B. $S + 4\sqrt{3}$.

C. $4\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{3}$.

Giải

Ta có: “ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng” $\Rightarrow x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$

Ta có: “Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S ”

Vậy dựa vào hình ảnh, ta có: $S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$

Do $f(x)$ là hàm số bậc 3 nên ta có: $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$ (1)

Ta có: “diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ ”

$$\Rightarrow S_1 = \int_{x_1}^{x_3} |f(x) + 1 - (-f(x) - 1)| dx = \int_{x_1}^{x_3} |2f(x) + 2| dx = 2 \cdot \int_{x_1}^{x_3} |f(x) + 1| dx = 2 \cdot \int_{x_1}^{x_3} |f(x) - (-1)| dx$$

Dựa vào đồ thị ta có thể thấy rằng, khi $x \in (x_1; x_3)$ thì đồ thị $y = f(x)$ nằm phía trên đồ thị $y = -1$

$$\Rightarrow S_1 = 2 \cdot \int_{x_1}^{x_3} |f(x) - (-1)| dx = 2 \cdot \int_{x_1}^{x_3} [f(x) - (-1)] dx = 2 \left[\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_3} 1 dx \right]$$

Trong đó: $\int_{x_1}^{x_3} 1 dx = x \Big|_{x_1}^{x_3} = x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$

Trong đó: $\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$

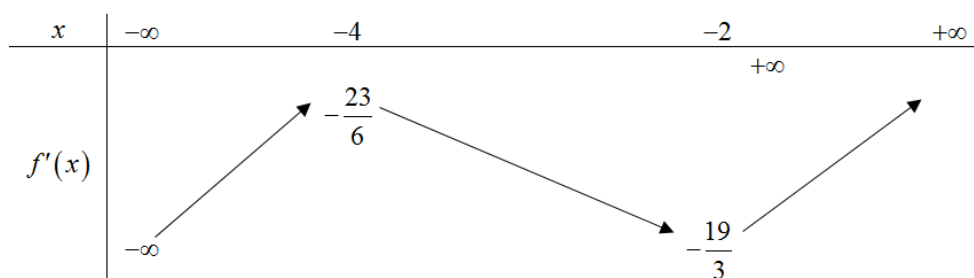
Mà theo (1) thì ta có: $\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = -\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = 0$

Vậy ta có: $S_1 = 2 \left[\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_3} 1 dx \right] = 2 \cdot (0 + 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}.$

Đáp án C.

Câu 286. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm bậc bốn và $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hỏi hàm số $g(x) = \left| \frac{1}{3} f(x^3) - 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 1.

B. 2.

C. 3.

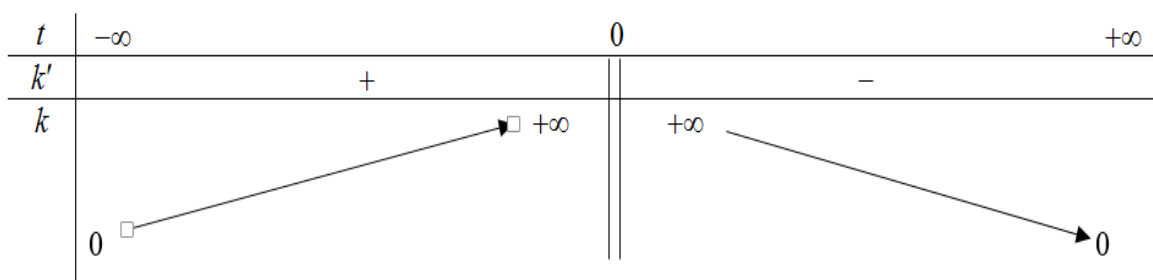
D. 4.

Giải

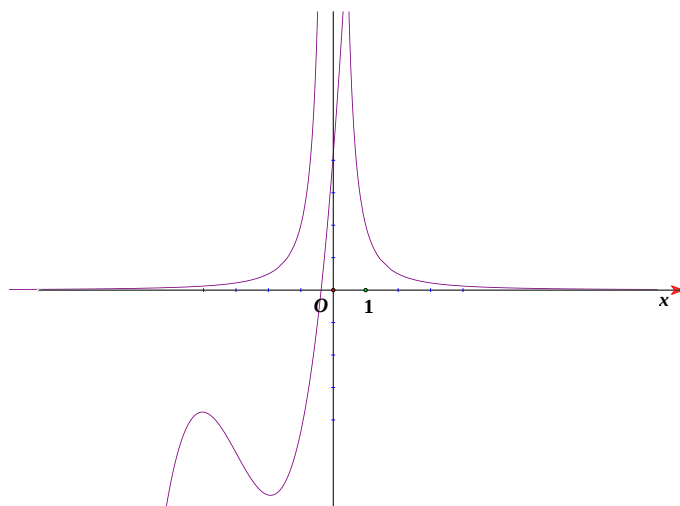
Xét hàm số

$$h(x) = \frac{1}{3} f(x^3) - 2x \Rightarrow h'(x) = x^2 f'(x^3) - 2 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{2}{x^2}, \forall x \neq 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^3 \Rightarrow f'(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}$. Ta xét hàm số $k(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow k'(t) = -\frac{4}{3\sqrt[3]{t^5}}$



Ta có đồ thị hàm số



Từ đồ thị hàm số ta thấy $f'(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}$ tại $a > 0 \Rightarrow a = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{a} > 0$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	$h(\sqrt[3]{a})$	$+\infty$
$ h(x) $	$+\infty$	0	$ h(\sqrt[3]{a}) $	$+\infty$

(Vì $h(0) = \frac{1}{3} f(0) - 2.0 = 0 - 0 = 0$). Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Đáp án C.

Câu 287. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thỏa mãn tính chất $(\log_y x)^{2021} = \log_y x^{2021}$, ở đó x là số thực dương, y là số nguyên dương nhỏ hơn 2021?

A. 4038 .

B. 6057 .

C. 6060 .

D. 4040 .

Giải

♦ Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbb{N}^*, 2 \leq y \leq 2020 \end{cases}$

$$(\log_y x)^{2021} = \log_y x^{2021} \Leftrightarrow (\log_y x)^{2021} - 2021 \cdot \log_y x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x = 0 \\ (\log_y x)^{2020} = 2021 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_y x = \pm \sqrt[2020]{2021} = \pm a \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = y^{\pm a} \end{cases}$$

♦ Với $x = 1 \Rightarrow y \in \{2; 3; 4; \dots; 2020\} \Rightarrow$ có 2019 cặp $(x; y)$

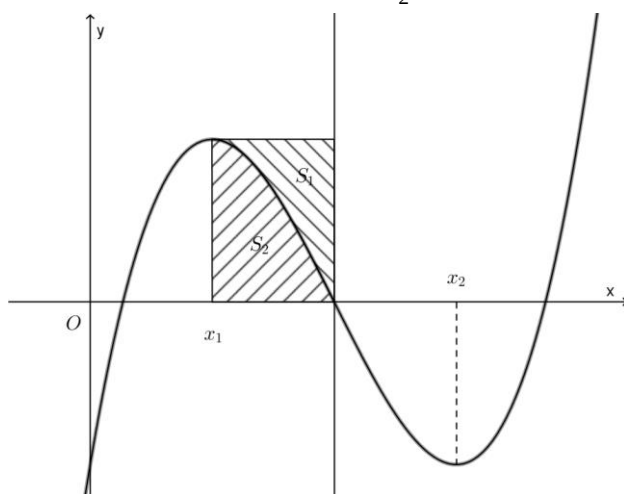
♦ $x = y^{\pm a}$, có $2 \leq y \leq 2020 \Rightarrow$ có $2019 \cdot 2 = 4038$ cặp $(x; y)$

♦ Vậy có 6057.

Đáp án B.

Câu 288. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $f(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng như trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



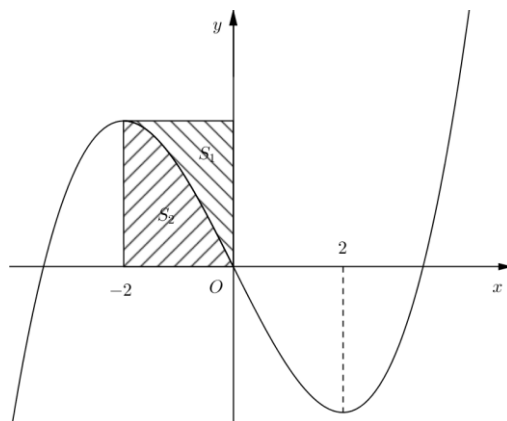
A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Giải



Gọi I là điểm uốn của đồ thị hàm số

Tính tiền đồ thị theo vector $\overrightarrow{IO}$ ta được đồ thị hàm số $y = g(x)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3 = -2$, $x_4 = 1$.

$$\Rightarrow g'(x) = 3a(x+2)(x-2) = 3a(x^2 - 4) \text{ với } a \neq 0.$$

$$\text{Từ đó ta có } g(x) = a(x^3 - 12x) + d.$$

$$\text{Do } g(x) \text{ đi qua gốc tọa độ } O \text{ nên } d = 0 \Rightarrow g(x) = a(x^3 - 12x).$$

$$\text{Ta có } S_2 = \int_{-2}^0 a(x^3 - 12x) dx = a \left(\frac{x^4}{4} - 6x^2 \right) \Big|_{-2}^0 = 20a.$$

$$\text{Lại có: } S_1 + S_2 \text{ bằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh là } 2 \text{ và } g(-2) = 16a$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 32a. \text{ Do đó } S_1 = 32a - 20a = 12a.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{12a}{20a} = \frac{3}{5}.$$

Đáp án A.

Câu 289. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2 - 3i|^2 + |z - 5i|^2$.

A. $P_{\max} = 96$.

B. $P_{\max} = 66$.

C. $P_{\max} = 152$.

D. $P_{\max} = 132$.

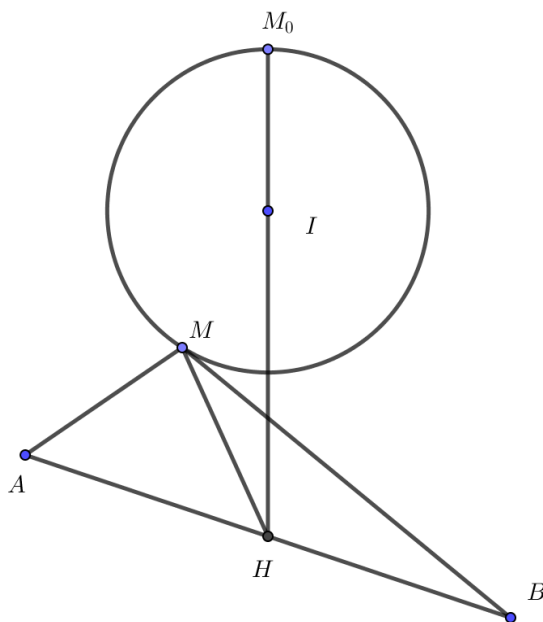
Giải

Gọi $M(x; y)$; $I(1; -2)$ lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z và $1 - 2i$.

$|z - 1 + 2i| = 2 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm I , bán kính $R = 2$.

Gọi $A(2; 3)$; $B(0; 5)$ lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $2 + 3i$ và $5i$.

$P = |z - 2 - 3i|^2 + |z - 5i|^2 = MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$ (với $H(1; 4)$ là trung điểm của AB).



$$P_{\max} \Leftrightarrow HM_{\max} \Leftrightarrow HM = HI + R = 8 \Rightarrow P_{\max} = 2 \cdot 8^2 + 4 = 132.$$

Đáp án D.

Câu 290. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

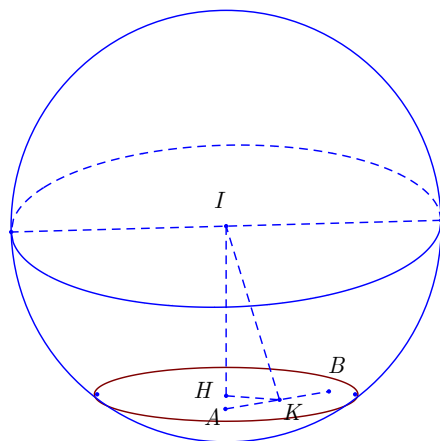
A. 3.

B. -3.

C. 0.

D. -2.

Giải



Mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ bán kính là $R = 4$.

Ta có A, B nằm trong mặt cầu. Gọi K là hình chiếu của I trên AB và H là hình chiếu của I lên thiết diện.

Ta có diện tích thiết diện bằng $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - IH^2)$.

Do đó diện tích thiết diện nhỏ nhất khi IH lớn nhất.

Mà $IH \leq IK$ suy ra (P) qua A, B và vuông góc với IK .

Ta có $IA = IB = \sqrt{5}$ suy ra K là trung điểm của AB . Vậy $K(0;1;2)$ và $\overline{KI} = (1;1;1)$.

Vậy $(P): (x-1) + y + (z-2) = 0 \Leftrightarrow -x - y - z + 3 = 0$.

Vậy $T = -3$.

Đáp án B.

Câu 291. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 6 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đường thẳng d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Khi đó dạng phương trình tổng quát của (α) là $ax + by + z + d = 0$. Khi đó giá trị của $a + b + d$ bằng:

A. 6.

B. -7.

C. 5.

D. -3.

Giải

VTPT của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (a; b; 1)$.

Do đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (α) suy ra $a + 2b - 2 = 0 \quad (1)$

Góc tạo bởi (α) và (P) lớn nhất $\Leftrightarrow \left| \cos(\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(\alpha)}}) \right| = \frac{|a+b-1|}{\sqrt{3(a^2+b^2+1)}}$ đạt GTNN.

Từ (1) suy ra $a = 2 - 2b$ thế vào: $\left| \cos(\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(\alpha)}}) \right| = \frac{|1-b|}{\sqrt{3(5b^2-8b+5)}}$.

$$\Leftrightarrow \left| \cos(\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(\alpha)}}) \right| = \sqrt{\frac{(1-b)^2}{3(5b^2-8b+5)}} = \sqrt{\frac{1-2b+b^2}{15b^2-24b+15}}.$$

$$\Rightarrow \min \left| \cos(\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(\alpha)}}) \right| = \frac{\sqrt{6}}{9} \Leftrightarrow b = -1.$$

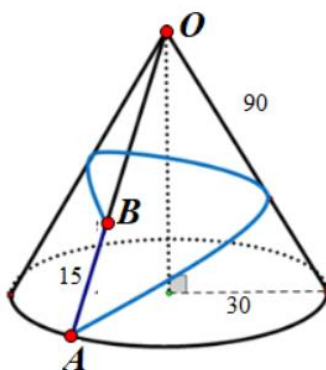
Suy ra mặt phẳng $(\alpha): 4x - y + z + d = 0$. Vì $M(2;1;-1) \in (d) \Rightarrow d = -6$.

$$\Rightarrow a + b + d = -3.$$

Đáp án D.

Câu 292. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Hình vẽ dưới đây mô tả một ngọn núi có dạng hình nón. Nhà đầu tư du lịch dự định xây dựng một con đường nhằm phục vụ việc chuyên chở khách du lịch tham quan ngắm cảnh vòng quanh ngọn núi bắt đầu từ vị trí A và dừng ở vị trí B . Biết rằng người ta đã chọn xây dựng đường đi ngắn nhất vòng quanh núi từ A đến B , đoạn đường đầu là phần lên dốc từ A và đoạn sau sẽ xuống dốc đến B . Tính quãng đường xuống dốc khi đi từ A đến B .



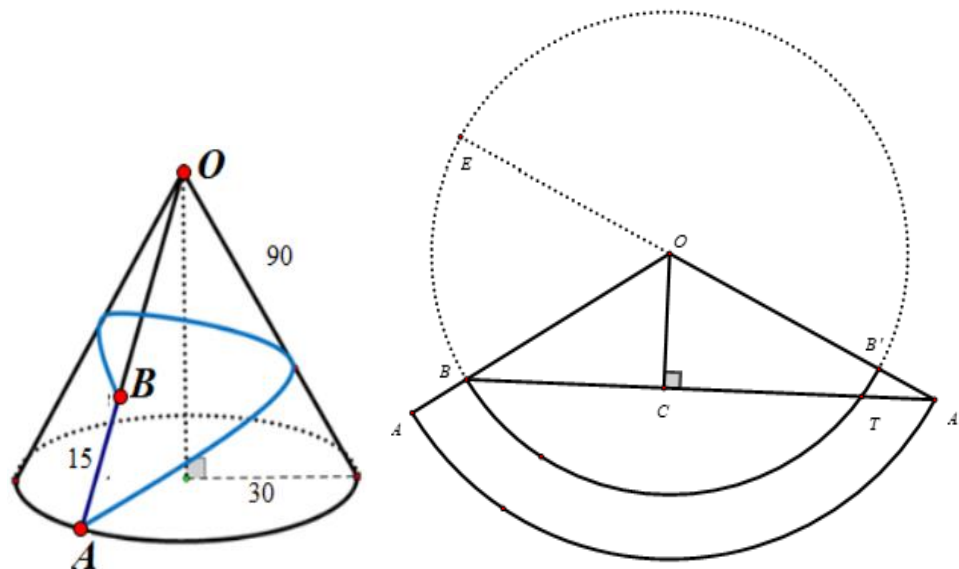
A. $\frac{400}{\sqrt{91}}$.

B. 0.

C. $\frac{600}{\sqrt{91}}$.

D. $15\sqrt{91}$.

Giải



Trải phẳng: Cắt mặt nón theo đường sinh đi qua điểm A , trải phẳng như hình vẽ.

Gọi C là đỉnh dốc, do người ta đã chọn xây dựng đường đi ngắn nhất vòng quanh núi từ A đến B nên B, C, A' thẳng hàng.

Ta có $OA = 90$, $OB' = 75$, $B'A' = 15$, bán kính đường tròn đáy hình nón $R = 30$.

Chu vi đường tròn chân núi $l = 2\pi.R = 2\pi.30 = 60\pi$.

Đường tròn tâm O , bán kính $OA = 90$ có chiều dài cung AA' là 60π .

Góc ở đỉnh của đường tròn tâm O , khi trải phẳng

$$\text{Có } \angle AOB' = \frac{60\pi}{90} = \frac{2\pi}{3} \text{ (công thức tính chiều dài cung } l = R\alpha).$$

$$\triangle A'OB \text{ có } OB = 75, OA' = 90, \angle A'OB = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow A'B^2 = OA'^2 + OB^2 - 2OA'.OB.\cos \angle A'OB = 20475$$

$$\Rightarrow A'B = 15\sqrt{91}.$$

Điểm $C \in A'B$, C là đỉnh cao nhất của dốc khi OC ngắn nhất $\Leftrightarrow OC \perp A'B$.

Đoạn xuống dốc là CB .

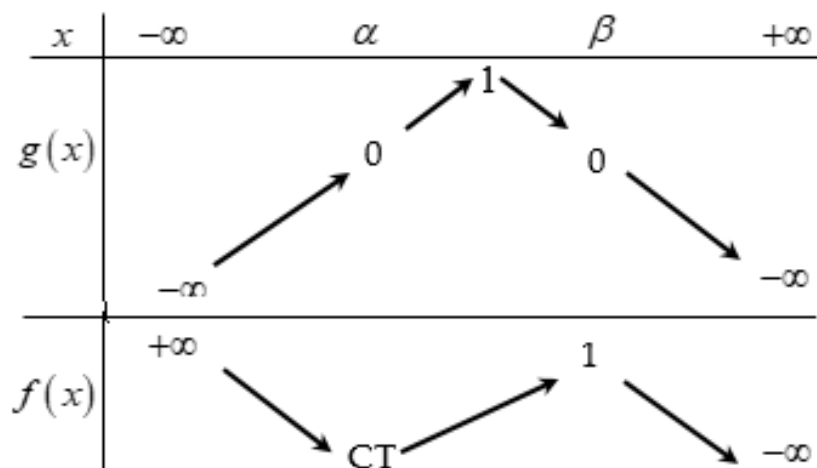
$$\text{Ta có } OC^2 = OA'^2 - CA'^2 = OB^2 - BC^2 \Leftrightarrow CA'^2 - CB^2 = OA'^2 - OB^2 = 2475$$

$$\Rightarrow (CA' + CB)(CA' - CB) = 2475 \Rightarrow \begin{cases} CA' + CB = 15\sqrt{91} \\ CA' - CB = \frac{165\sqrt{91}}{91} \end{cases} \Rightarrow CB = \frac{600}{\sqrt{91}}.$$

Đáp án C.

Câu 293. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ và $y = g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên dưới đây. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Giá trị của $P = 3a + b + c - 2d$ là



A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Giải

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 4x + b$ là hàm số bậc hai, cùng bậc với $g(x)$.

Mà từ đồ thị ta có hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ nên $f'(x) = k \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{R} (k \neq 0)$.

$$\Leftrightarrow 3ax^2 + 4x + b = k(cx^2 + 4x + d), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = kc \\ 4 = 4k \\ b = kd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ 3a = c \\ b = d \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Đồ thị hàm số } g(x) \text{ có tung độ đỉnh bằng } 1 \text{ nên } g\left(-\frac{2}{c}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{c} - \frac{8}{c} + d = 1 \Leftrightarrow d = \frac{4}{c} + 1 \quad (2).$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$:

$$ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = cx^2 + 4x + d \Leftrightarrow ax^3 + (2-c)x^2 + (b-4)x + 1-d = 0 \quad (*).$$

Theo giả thiết, phương trình (*) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ nên theo

$$\text{định lí Viète cho phương trình bậc ba, ta có } \frac{c-2}{a} = 9 \Leftrightarrow c-2 = 9a \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3a = c \\ b = d \\ d = \frac{4}{c} + 1 \\ c - 2 = 9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = c \\ b = d \\ d = \frac{4}{c} + 1 \\ c - 2 = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -3 \\ c = -1 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Với các giá trị trên thay vào (*) thì thỏa mãn phương trình có 3 nghiệm phân biệt có tổng bằng 9.

Vậy $P = 3a + b + c - 2d = 3 \cdot \frac{-1}{3} - 3 - 1 + 6 = 1.$

Đáp án A.

Câu 294. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z$. Có bao giá trị nguyên của z để có đúng hai cặp (x, y) thỏa mãn đẳng thức trên ?

A. 2.

B. 211.

C. 99.

D. 4.

Giải

Ta có: $\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z = t \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3^t & (1) \\ x^3 + 2y^3 = 7^t & (2) \\ z = 10^t & (3) \end{cases}.$

+ Nếu $y = 0$ (2) $\Rightarrow x = 7^{\frac{t}{3}}$ thay vào (1) ta được $2 \cdot 7^{\frac{2t}{3}} = 3^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{49}} 2$ do đó $z = 10^{\log_{\frac{3}{49}} 2}$.

+ Nếu $y \neq 0$

Từ (1) & (2) suy ra $\begin{cases} (2x^2 + y^2)^3 = 27^t \\ (x^3 + 2y^3)^2 = 49^t \end{cases} \Rightarrow \frac{(x^3 + 2y^3)^2}{(2x^2 + y^2)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t \Leftrightarrow \frac{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\right)^2}{\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t, (*)$.

Đặt $\frac{x}{y} = u, u \neq -\sqrt[3]{2}$.

$$\text{Xét } f(u) = \frac{(u^3 + 2)^2}{(2u^2 + 1)^3} \Rightarrow f'(u) = \frac{6u(u^3 + 2)(u - 4)}{(2u^2 + 1)^4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -\sqrt[3]{2} \\ u = 4 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

u	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$			0	4			$+\infty$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(u)$	$\frac{1}{8}$				0				4
									$\frac{4}{33}$
									$\frac{1}{8}$

Nhận xét với mỗi giá trị u tương ứng với duy nhất 1 cặp (x, y) thỏa mãn bài toán do đó

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương } \begin{cases} \frac{1}{8} \leq \left(\frac{49}{27}\right)^t < 4 \\ 0 < \left(\frac{49}{27}\right)^t < \frac{4}{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^{\frac{\log_{49} \left(\frac{1}{8}\right)}{27}} \leq z < 10^{\frac{\log_{49} 4}{27}} \\ 0 < z < 10^{\frac{\log_{49} \left(\frac{4}{33}\right)}{27}} \end{cases}$$

Vì z là số nguyên nên có 211 giá trị thỏa mãn.

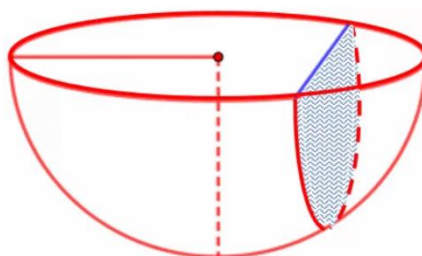
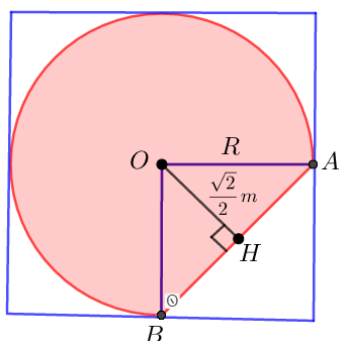
Đáp án B.

Câu 295. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Một gia đình có bồn tắm có bề mặt phẳng và lòng trong như hình vẽ, lòng trong của bồn tắm có hình dạng bán cầu, mất đi chòm cầu. Biết thể tích khối chòm cầu được tính bởi công thức

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) \text{ với } R \text{ là bán kính khối cầu, } h \text{ là chiều cao của chòm cầu và } OH = \frac{\sqrt{2}}{2} m.$$

Thể tích (m^3) lòng trong của bồn tắm là



A. $\frac{8+5\sqrt{2}}{24}\pi$.

B. $\frac{10+\sqrt{2}}{3}\pi$.

C. $\frac{5+\sqrt{2}}{12}\pi$.

D. $\frac{10-\sqrt{2}}{3}\pi$.

Giải

Khối cầu (S) có tâm là O và bán kính là $R = OH \cdot \sqrt{2} = 1(\text{m})$.

Suy ra chiều cao chỏm cầu là $h = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{m})$.

Vậy thể tích bồn tắm là $\frac{1}{2} \left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \right] = \frac{8+5\sqrt{2}}{24}\pi$.

Đáp án A.

Câu 296. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3; 2; 2)$ bán kính $R_1 = 2$, mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1; 0; 1)$ bán kính $R_2 = 1$. Phương trình mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với (S_1) và (S_2) và cắt đoạn I_1I_2 có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Tính $T = b + c + d$.

A. -5.

B. -1.

C. -3.

D. 2.

Giải

Ta có $\overrightarrow{I_1I_2} = (-2; -2; -1) \Rightarrow I_1I_2 = 3 = R_1 + R_2$ nên hai mặt cầu (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại M nằm trên đoạn I_1I_2 ($MI_1 = R_1 = 2; MI_2 = R_2 = 1$) và thỏa mãn $\overrightarrow{MI_1} = -2\overrightarrow{MI_2}$ (1).

Gọi M(x; y; z). Ta có $\overrightarrow{MI_1} = (3 - x; 2 - y; 2 - z)$ và $\overrightarrow{MI_2} = (1 - x; -y; 1 - z)$

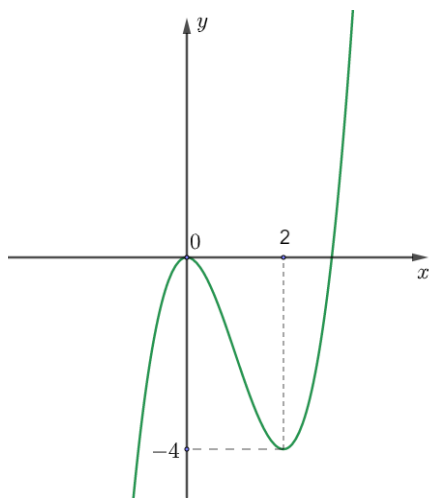
$$\text{Từ (1) ta có hệ } \begin{cases} 3 - x = -2 + 2x \\ 2 - y = 2y \\ 2 - z = -2 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Mặt phẳng (P) cần tìm tiếp xúc với (S_1) và (S_2) đồng thời cắt đoạn I_1I_2 tại N
 $\Rightarrow I_1N + I_2N = I_1I_2$ mà $NI_1 = R_1 = 2; NI_2 = R_2 = 1$ nên $N \equiv M$. Khi ấy, $I_1I_2 \perp (P)$ nên
 (P) nhận $\overrightarrow{I_1I_2} = (-2; -2; -1)$ làm vectơ pháp tuyến và (P) đi qua $M\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Vậy (P)
 có phương trình: $-2\left(x - \frac{5}{3}\right) - 2\left(y - \frac{2}{3}\right) - 1\left(z - \frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y - z + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x + 2y + z - 6 = 0 \Rightarrow b = 2; c = 1; d = -6 \Rightarrow T = b + c + d = -3$.

Đáp án C.

Câu 297. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ sau. Hàm số $y = g(x) = f(f(x)) + 1202$ có



A. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

D. 1 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu.

Giải

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ có dạng:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			0			$+\infty$
	$-\infty$			-4		

Xét $g(x) = f(f(x)) + 1202$.

Suy ra $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$.

$$\text{Với } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = c > 2 \\ x = a > c > 2 \end{cases}.$$

Với $x = 0$ là nghiệm bội 3.

Với $x < 0$, $f'(x) > 0$.

Với $0 < x < 2$ thì $f'(x) < 0$.

Với $x > 2$, $f'(x) > 0$.

Với $x < 0$ thì $f(x) < 0$, suy ra $f'(f(x)) > 0$.

Với $0 < x < c$ thì $f(x) < 0$ suy ra $f'(f(x)) > 0$.

Với $c < x < a$ thì $0 < f(x) < 2$ suy ra $f'(f(x)) < 0$.

Với $x > a$ thì $f(x) > 2$ suy ra $f'(f(x)) > 0$.

Nên, ta có bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$ như sau:

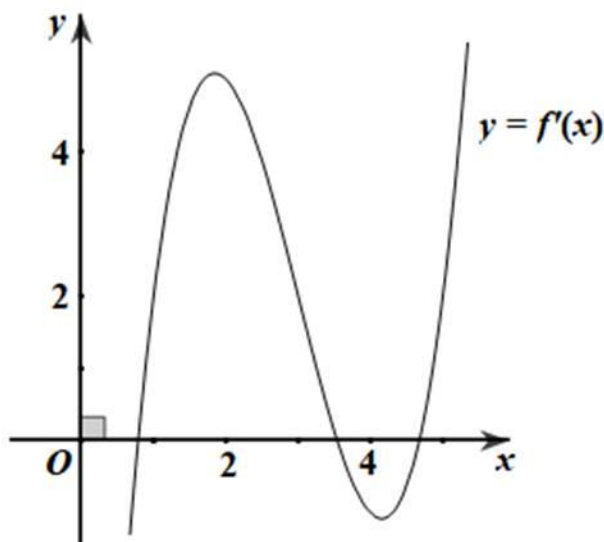
x	$-\infty$	0	2	c	a	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f'(f(x))$	$+$	0	$+$	0	$-$	0
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Vậy hàm số có 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Đáp án C.

Câu 298. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Xét hàm số $y = g(x) = f(\alpha x^2) - x$ với $\alpha > 0$. Gọi m và n lần lượt là số điểm cực trị tối đa, số điểm cực trị tối thiểu của hàm số $y = g(x)$. Tính $m + n$.



- A. 10. B. 6. C. 4. D. 8.

Giải

$$g'(x) = 2\alpha x f'(\alpha x^2) - 1.$$

Với $x = 0$ ta có $g'(0) = -1 \neq 0$.

$$\text{Với } x \neq 0, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(\alpha x^2) = \frac{1}{2\alpha x}. \quad (1)$$

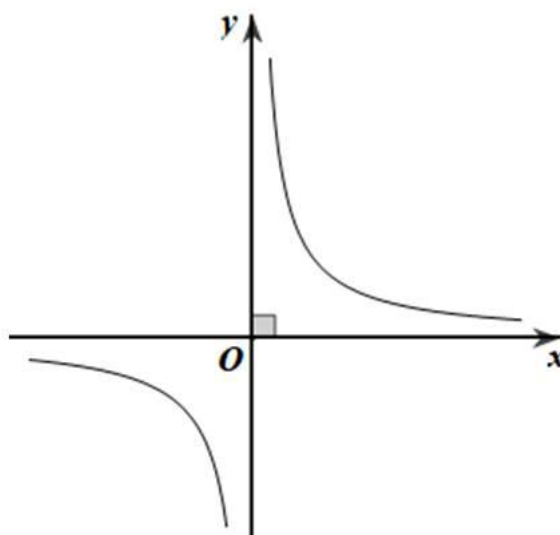
+) Xét hàm số $y = h(x) = f'(\alpha x^2)$ với $\alpha > 0$. Đặt $u(x) = \alpha x^2$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, gọi hai điểm cực trị hàm số là $x = a, x = b$ với $b > a > 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$u(x) = \alpha x^2$	$+\infty$	b	a	0	a	b	$+\infty$
$f'(u)$	$+\infty$	$f'(b) < 0$		$f'(a) > 0$		$f'(b) < 0$	$+\infty$
				$f'(0) < 0$			

+) Đồ thị hàm số $y = k(x) = \frac{1}{2\alpha x}$ với $\alpha > 0$ có dạng

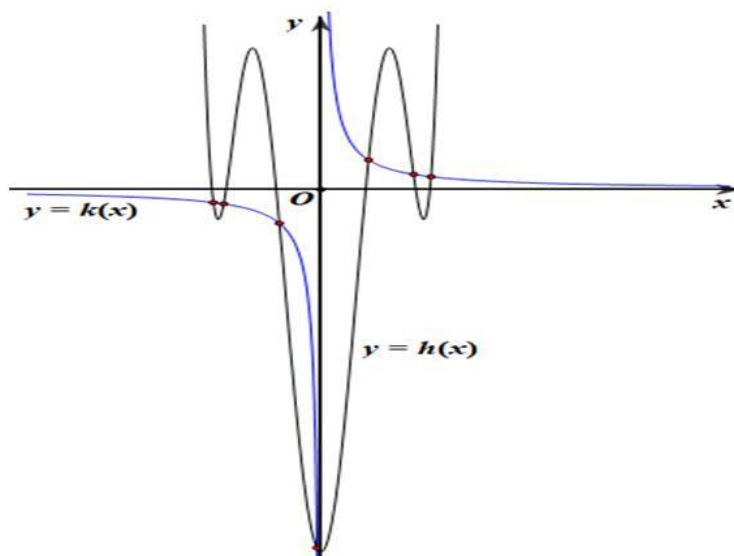


Dựa vào bảng biến thiên của hàm $h(x) = f'(\alpha x^2)$ và dạng đồ thị của hàm $y = \frac{1}{2\alpha x}$ ta được:

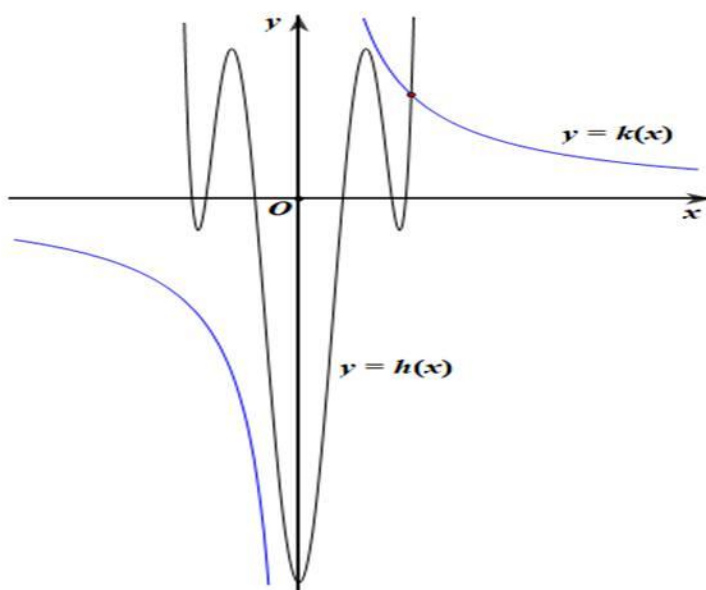
Đồ thị hàm số $y = k(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tối đa 7 điểm và tối thiểu là 1 điểm.

Hình minh họa đồ thị hàm số $y = k(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 7 điểm:

Xem thêm hình bên dưới:



Hình minh họa đồ thị hàm số $y = k(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm:



Suy ra phương trình (1) có tối đa 7 và có tối thiểu 1 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có tối đa 7 cực trị và tối thiểu 1 cực trị.

Suy ra $m = 7, n = 1$ và $m + n = 8$.

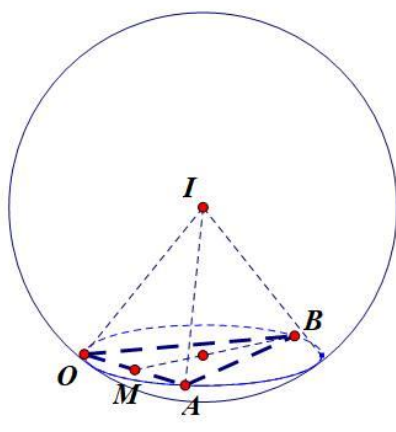
Đáp án D.

Câu 299. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và điểm $A(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết rằng điểm B thuộc mặt cầu (S) , có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

- A. $x - y - z = 0$. B. $x - y + z = 0$. C. $x - y - 2z = 0$. D. $x - y + 2z = 0$.

Giải



Gọi điểm $B(x; y; z)$, với $x > 0$. Ta có $B \in (S)$ (1)

Ta thấy O và A cũng nằm trên mặt cầu (S) .

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn OA . Suy ra $(\alpha): x + y - 2 = 0$.

Do OAB là tam giác đều nên $B \in (\alpha)$ (2).

Mà $OA = OB \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 2(x + y) - 2z = 0 \\ x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 0; 2) \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

Suy ra $[\overline{OA}, \overline{OB}] = 4(1; -1; -1)$

Mặt phẳng (OAB) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; -1)$ nên có phương trình là $x - y - z = 0$.

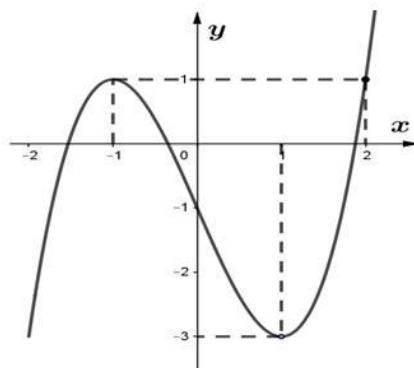
Đáp án A.

Câu 300. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như

hình vẽ bên. Gọi $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2019$. Biết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$.

Với $x \in [-1; 2]$ thì $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng



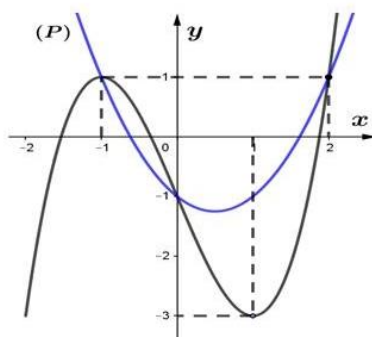
- A. $g(2)$. B. $g(1)$. C. $g(-1)$. D. $g(0)$.

Giải

+ Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2019$ trên đoạn $[-1; 2]$.

+ Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 + x + 1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và Parabol $(P): y = x^2 - x - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



+ Ta thấy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

+ Bảng biến thiên :

x	-1	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-	-
$g(x)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$

+ Từ giả thiết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$

$$\Leftrightarrow g(-1) - g(2) > g(0) - g(1)$$

$$\Rightarrow g(-1) - g(2) > 0 \text{ (vì } g(0) > g(1))$$

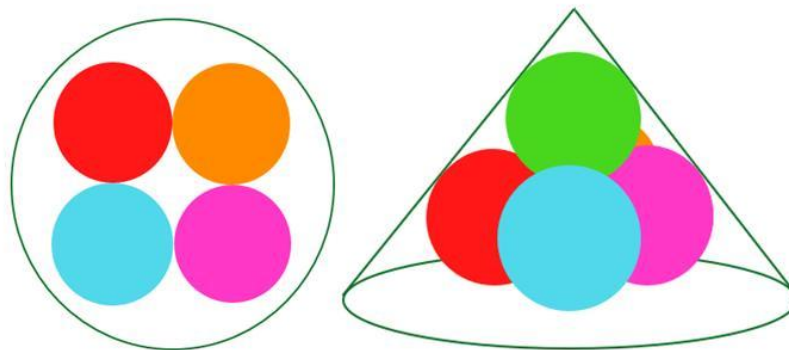
$$\Leftrightarrow g(-1) > g(2).$$

Vậy $\min_{[-1;2]} g(x) = g(2)$.

Đáp án A.

Câu 301. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình nón chứa năm mặt cầu cùng có bán kính là 1, trong đó bốn mặt cầu tiếp xúc với đáy, tiếp xúc đôi một với nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón. Mặt cầu thứ năm tiếp xúc với bốn mặt cầu kia và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón. Tính bán kính đáy hình nón.



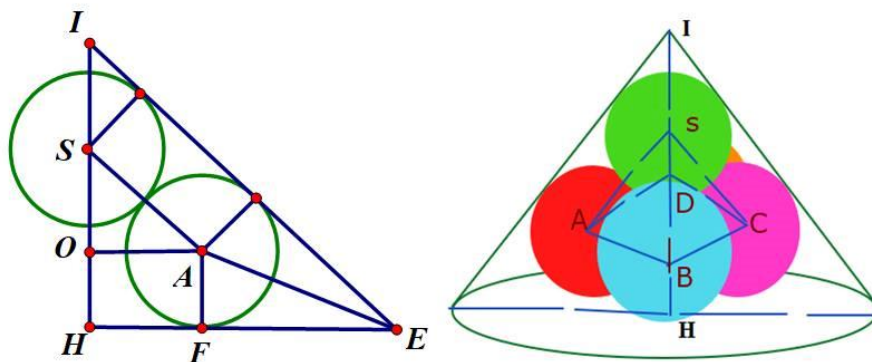
A. $2\sqrt{3} + 1$.

B. $2\sqrt{2} + 1$.

C. $2\sqrt{2} - 1$.

D. $3\sqrt{2} + 1$.

Hướng dẫn giải



Gọi S, A, B, C, D lần lượt là tâm 5 mặt cầu như hình vẽ.

Suy ra $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng 2, đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O .

Ta có $OA = \sqrt{2}$, $\widehat{SAO} = \widehat{IEH} = 2\widehat{AEH} = \alpha$.

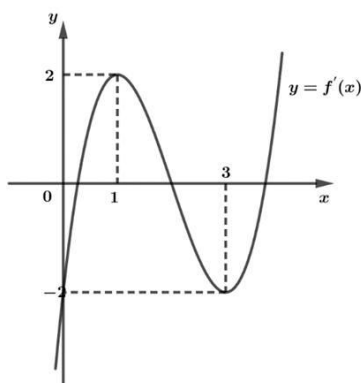
$$\cos \alpha = \frac{OA}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} = 22,5^\circ$$

$$\Rightarrow EF = \frac{AF}{\tan \widehat{AEH}} = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow R = HE = HF + FE = 2\sqrt{2} + 1.$$

Đáp án B.

Câu 302. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(0) = 4$. Hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $g(x) = \left| f(x+2) - \sqrt{2}^{x+2} - \frac{10}{3} \right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Giải

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có:

$$f''(x) = m(x-1)(x-3) = m(x^2 - 4x + 3) \Rightarrow f'(x) = m\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right) + C.$$

$$\text{Mặt khác: } f'(0) = -2, f'(1) = 2 \Rightarrow C = -2, m = 3 \Rightarrow f'(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2.$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} - 2x + C_1, \text{ ta có}$$

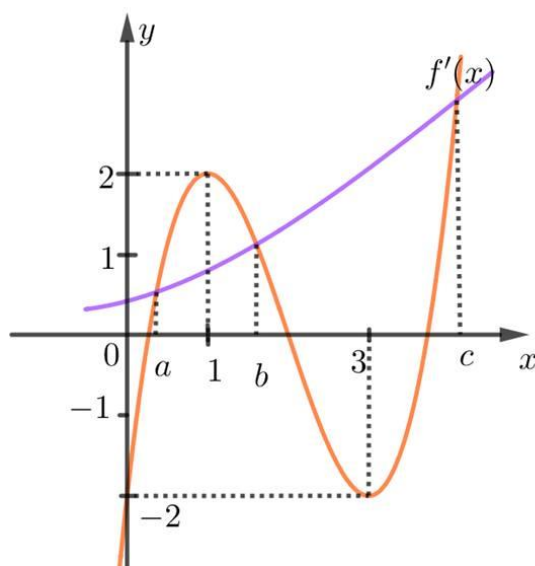
$$f(0) = 4 \Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} - 2x + 4.$$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x+2) - \sqrt{2}^{x+2} - \frac{10}{3} \Rightarrow h'(x) = f'(x+2) - \sqrt{2}^{x+2} \cdot \ln \sqrt{2}.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = \sqrt{2}^{x+2} \cdot \ln \sqrt{2} \text{ hay } f'(t) = \sqrt{2}^t \cdot \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a; (2 - \sqrt{3} < a < 1) \\ t = b; (1 < b < 2) \\ t = c; (2 + \sqrt{3} < c) \end{cases}.$$

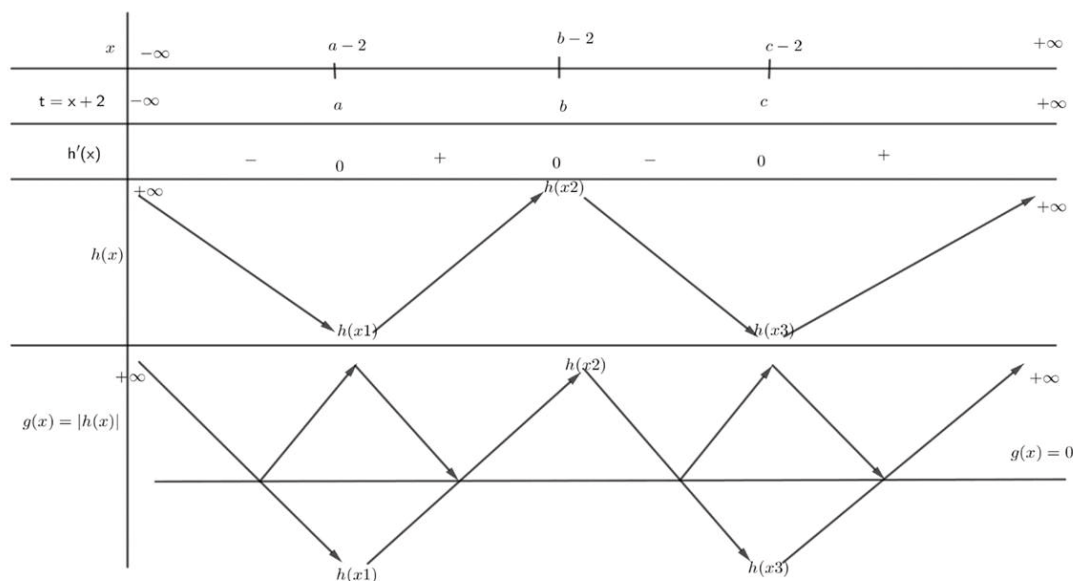
$$(\text{Các nghiệm trên ta chỉ ra được như vậy là do phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ và}$$

tính tương giao của 2 đồ thị ở hình sau).



$$\text{Do đó } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a-2 \\ x_2 = b-2 \\ x_3 = c-2 \end{cases} \text{ Có } \begin{cases} h(x_1) = f(a) - \sqrt{2}^a - \frac{10}{3} < 0 \\ h(x_2) = f(b) - \sqrt{2}^b - \frac{10}{3} > 0 \\ h(x_3) = f(c) - \sqrt{2}^c - \frac{10}{3} < 0 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

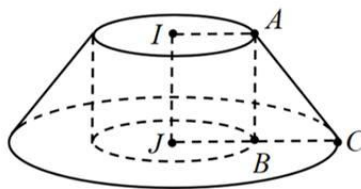


Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Đáp án D.

Câu 303. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Người ta muốn xây một bể chứa nước hình nón cụt có bán kính đáy lớn là $3m$, góc tạo bởi đường sinh và mặt phẳng chứa đáy lớn là 60° . Trong đó phần không gian chứa nước bên trong là hình trụ có đáy là đáy nhỏ của hình nón cụt và chiều cao bằng chiều cao hình nón cụt. Tìm chiều cao của bể để khoảng không gian chứa nước có thể tích lớn nhất.



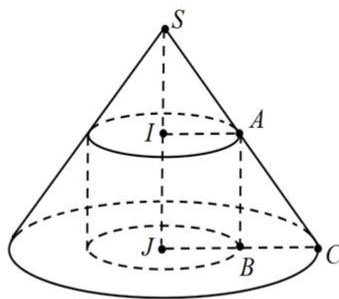
A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. 1.

Giải



Gọi S là đỉnh của hình nón. Đặt $IJ = x$ là chiều cao của hình nón cụt.

Theo định lý Talet ta có $\frac{SI}{SJ} = \frac{IA}{JC}$.

Suy ra

$$IA = \frac{SI \cdot JC}{SJ} = \frac{(SJ - x) \cdot JC}{SJ} = \frac{(JC \cdot \tan 60^\circ - x) \cdot JC}{JC \cdot \tan 60^\circ} = \frac{(3\sqrt{3} - x) \cdot 3}{3\sqrt{3}} = 3 - \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Thể tích của phần không gian hình trụ là:

$$V = \pi \cdot IA^2 \cdot IJ = \pi \cdot \left(3 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot x = \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \cdot \left(3 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

Ta thấy rằng $0 < x < SJ$ hay $0 < x < 3\sqrt{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương $3 - \frac{x}{\sqrt{3}}, 3 - \frac{x}{\sqrt{3}}, \frac{2x}{\sqrt{3}}$ ta được

$$\left(3 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \left(3 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x}{\sqrt{3}} \geq 3 \sqrt[3]{\left(3 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \left(3 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \frac{2x}{\sqrt{3}}}.$$

$$\text{Do đó } 6 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2}{\pi \sqrt{3}}} V \Rightarrow V \leq 4\sqrt{3}\pi.$$

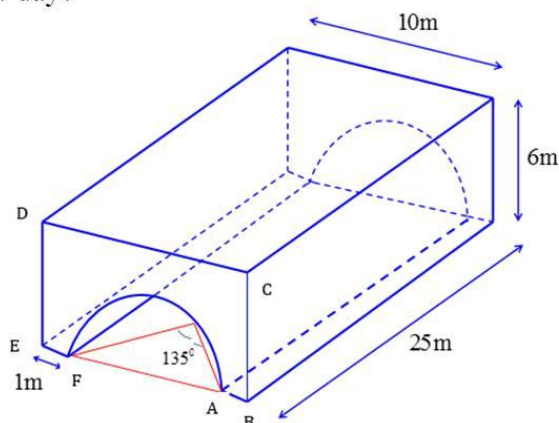
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{3}$.

Như vậy phần không gian hình trụ đạt thể tích lớn nhất là $4\sqrt{3}\pi$ khi $x = \sqrt{3}(m)$.

Đáp án A.

Câu 304. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

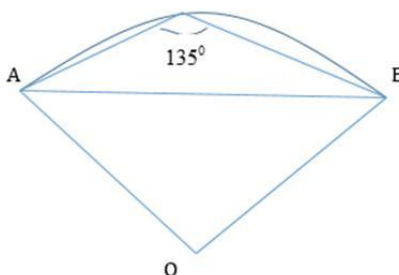
Viện Hải dương học dự định làm một bể cá phục vụ khách tham quan. Bể có dạng hình một khối hộp chữ nhật không nắp, trong đó lối đi hình vòng cung ở dưới là một phần của khối trụ tròn xoay (như hình vẽ). Biết rằng bể cá làm bằng chất liệu kính cường lực 12mm với đơn giá là 500.000 đồng $1m^2$ kính. Hỏi số tiền (đồng) để làm được bể cá đó gần nhất với số nào sau đây?



- A. 435.532.000. B. 436.632.000. C. 311.506.000. D. 336.940.000.

Giải

*) Tính diện tích vòng cung:



Lối đi hình vòng cung ở dưới là một phần của khối trụ tròn xoay. Gọi R là bán kính của khối trụ. Áp dụng định lý sin ta có: $\frac{8}{\sin 135^\circ} = 2R \Leftrightarrow R = 4\sqrt{2}$.

Vậy nên cung tròn chắn bởi dây cung AB có độ lớn $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Vậy độ dài của cung AB là $l_{AB} = \alpha R = \frac{\pi}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$.

Diện tích vòng cung là: $S_1 = l_{AB} \cdot 25 = 50\sqrt{2}\pi$

*) Tính diện tích của miền $ABCDEF$ $S_{ABCDEF} = 60 - \left(\frac{1}{4}\pi R^2 - S_{OAB} \right) = 76 - 8\pi$

Vậy diện tích xung quanh của bể cá là:

$$S_{xq} = S_1 + 2S_{ABCDEF} + 2.25.6 + 2.25 \approx 673,879 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vậy số tiền làm bể cá là: $673,879 \times 500.000 = 336.939.500$ đồng.

Đáp án D.

Câu 305. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$, $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x+1|) dx$$

A. $I = 3$.

B. $I = 5$.

C. $I = 6$.

D. $I = 4$.

Giải

Đặt $u = 2x+1 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$. Khi $x = -1$ thì $u = -1$. Khi $x = 1$ thì $u = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Nên } I &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 f(|u|) du = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(|u|) du + \int_0^3 f(|u|) du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du \right). \end{aligned}$$

Xét $\int_0^1 f(x) dx = 4$. Đặt $x = -u \Rightarrow dx = -du$.

Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = 1$ thì $u = -1$.

$$\text{Nên } 4 = \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^{-1} f(-u) du = \int_{-1}^0 f(-u) du.$$

$$\text{Ta có } \int_0^3 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_0^3 f(u) du = 6.$$

$$\text{Nên } I = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du \right) = \frac{1}{2} (4 + 6) = 5.$$

Đáp án B.

Câu 306. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Giả sử $(x_0; y_0)$ là cặp nghiệm nguyên không âm có tổng $S = x_0 + y_0$ lớn nhất của bất phương trình $4^x + 2^x \cdot 3^y - 9 \cdot 2^x + 3^y \leq 10$, giá trị của S bằng

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Giải

Ta có $4^x + 2^x \cdot 3^y - 9 \cdot 2^x + 3^y \leq 10 \Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 3^y - 10) \leq 0$.

Vì $2^x + 1 > 0$ nên bất phương trình tương đương với $2^x + 3^y - 10 \leq 0$.

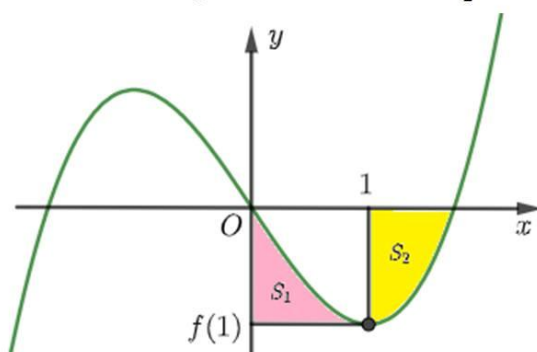
Với cặp số (x, y) nguyên không âm thì (x, y) chỉ có thể là: $(0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (2; 0), (2; 1), (3; 0)$.

Vậy tổng $S = 3$.

Đáp án C.

Câu 307. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và thỏa mãn $[f(x) + 1]$ và $[f(x) - 1]$ lần lượt chia hết cho $(x - 1)^2$ và $(x + 1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2 + 8S_1$.



- A. 4. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 9.

Giải:

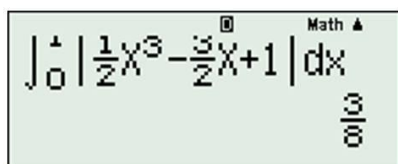
Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ theo giả thiết có
$$\begin{cases} f(x) + 1 = a(x-1)^2(x+m) \\ f(x) - 1 = a(x+1)^2(x+n) \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} f(1) + 1 = 0 \\ f(-1) - 1 = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d + 1 = 0 \\ -a + b - c + d - 1 = 0 \\ d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $y = -1$, $x = 0$, $x = 1$

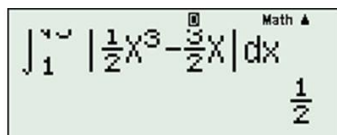
$$\Rightarrow S_1 = \int_0^1 \left| \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 \right| dx = \frac{3}{8} \quad (1)$$



A screenshot of a digital math tool showing the integral $\int_0^1 \left| \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 \right| dx$ with the result $\frac{3}{8}$.

S_2 là diện tích giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right| dx = \frac{1}{2} \quad (2)$$



A screenshot of a digital math tool showing the integral $\int_1^{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right| dx$ with the result $\frac{1}{2}$.

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow 2S_2 + 8S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{3}{8} = 4.$$

Đáp án A.

Câu 308. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

- A. $6\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 1. D. $2\sqrt{2}$.

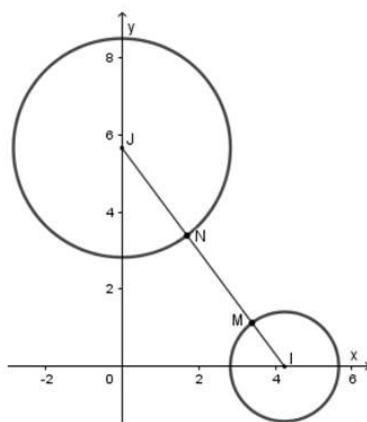
Giải

Ta có: $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

$|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z - w| = \min MN$.

$$+ IJ = 5\sqrt{2}; IM = r = \sqrt{2}; NJ = R = 2\sqrt{2}.$$



Mặt khác $IM + MN + NJ \geq IJ \Rightarrow MN \geq IJ - IM - NJ$ hay $MN \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J (Hình vẽ).

Khi đó ta có: $|3z_0 - w_0| = |3\overline{OM} - \overline{ON}|$ và $IN = 3\sqrt{2} \Rightarrow \overline{IM} = \frac{1}{5}\overline{IJ}; \overline{IN} = \frac{3}{5}\overline{IJ}$.

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}; \quad 3\overrightarrow{OM} = 3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = 3\left(\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right) = 3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}.$$

$$\text{Suy ra } |3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = \left|3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} - \left(\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right| = |2\overrightarrow{OI}| = 6\sqrt{2}.$$

Câu 309. [Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ và bán kính bằng 4, cho mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ và bán kính bằng 2. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1); (S_2)$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ O đến (P) . Giá trị $M + m$ bằng

A. $8\sqrt{3}$.

B. 8.

C. 9.

D. $\sqrt{15}$.

Giải

Mặt phẳng (P) để đạt min, max khi (P) vuông góc với (OIJ) .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{n_{OIJ}} = \begin{bmatrix} (2;1;1) \\ (2;1;5) \end{bmatrix} = (4; -8; 0) = 4(1; -2; 0) \text{ nên } \overrightarrow{n_{(P)}} = (2a; a; b) \text{ thì.}$$

Gọi mặt $(P): 2ax + ay + bz + c = 0$. Ta có

$$\begin{cases} d(I; (P)) = 4 \\ d(J; (P)) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|5a + b + c|}{\sqrt{5a^2 + b^2}} = 4 \\ \frac{|5a + 5b + c|}{\sqrt{5a^2 + b^2}} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b + c = 10a + 10b + 2c \Rightarrow c = -5a - 9b \\ 5a + b + c = -10a - 10b - 2c \Rightarrow c = \frac{1}{3}(-15a - 11b) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } c = -5a - 9b \Rightarrow \frac{|-8b|}{\sqrt{5a^2 + b^2}} = 4 \Rightarrow 80a^2 + 16b^2 = 64b^2 \Leftrightarrow 80a^2 = 48b^2 \Leftrightarrow 5a^2 = 3b^2$$

$3b^2 = 5a^2$, ta chọn

$$b = 5; a = \sqrt{15}; b = 5; a = -\sqrt{15}$$

$$(P_1): 2\sqrt{15}(x-2) + \sqrt{15}(y-1) + 5(z-9) = 0$$

$$(P_2): -2\sqrt{15}(x-2) - \sqrt{15}(y-1) + 5(z-9) = 0$$

$$d(O; (P_1)) = \frac{|-5\sqrt{15} - 45|}{10} = \frac{45 + 5\sqrt{15}}{10}$$

$$d(O; (P_2)) = \frac{|5\sqrt{15} - 45|}{10} = \frac{45 - 5\sqrt{15}}{10}$$

Suy ra $M + m = 9$.

Đáp án C.

Câu 310. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x, y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ có diện tích là $S = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản.

Tính $I = a - b$.

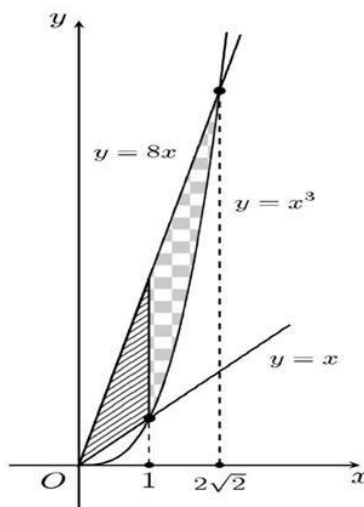
A. $I = 66$.

B. $I = 60$.

C. $I = 59$.

D. $I = 67$.

Giải



Đồ thị của ba hàm số đã cho được minh họa như hình vẽ bên.

Trong góc phần tư thứ nhất, xét các phương trình hoành độ giao điểm:

$$+ x^3 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

$$+ x^3 = 8x \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2\sqrt{2}$$

Hình phẳng cần tính diện tích là phần gạch sọc, được chia ra làm hai vùng. Theo hình vẽ ta có

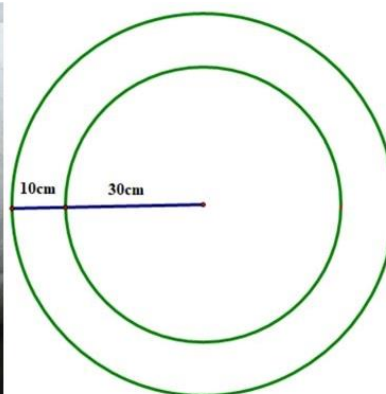
$$S = \int_0^1 (8x - x) dx + \int_1^{2\sqrt{2}} (8x - x^3) dx = \frac{63}{4}.$$

Suy ra $a = 63$, $b = 4$. Vậy $I = a - b = 59$.

Đáp án C.

Câu 311. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Dự án công trình nông thôn mới, chủ đầu tư cần sản xuất khoảng 800 chiếc cống dẫn nước như nhau có dạng hình trụ tròn bê tông. Mỗi chiếc cống có chiều cao 1m, bán kính trong bằng 30cm và độ dày của bê tông bằng 10cm (xem hình minh họa). Nếu giá bê tông là 1.000.000 đồng/ m^3 thì để sản xuất 800 chiếc cống trên thì chủ đầu tư cần hết bao nhiêu tiền bê tông? (Làm tròn đến hàng triệu đồng).



A. 176.000.000 đồng.

B. 175.000.000 đồng.

C. 177.000.000 đồng.

D. 178.000.000 đồng.

Giải

Đổi $10\text{cm} = 0,1\text{m}$; $30\text{cm} = 0,3\text{m}$.

Gọi V_1 là thể tích khối trụ với hai đáy là hình tròn lớn (đường tròn giới hạn bởi vành ngoài cống nước)

V_1 là thể tích khối trụ với hai đáy là hình tròn nhỏ (đường tròn giới hạn bởi vành trong cống nước).

Ta có: $V_1 = \pi R_1^2 h = \pi (0,1 + 0,3)^2 \cdot 1 = 0,16\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

$V_2 = \pi R_2^2 h = \pi \cdot 0,3^2 \cdot 1 = 0,09\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Thể tích khối bê tông cho một chiếc cống là $V = V_1 - V_2 = 0,16\pi - 0,09\pi = 0,07\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Thể tích khối bê tông cho 800 chiếc cống là $800 \cdot 0,07\pi = 56\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Số tiền cần để sản xuất 800 chiếc cống là $56\pi \cdot 1000000 \approx 176000000 \text{ (đồng)}.$

Đáp án A.

Câu 312. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{2x^2+y^2} = 3^{x+y}$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Giải

Đặt $2^{2x^2+y^2} = 3^{x+y} = t$, suy ra $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = \log_2 t \\ x + y = \log_3 t \end{cases}$.

Ta có $(x+y)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}x + 1 \cdot y\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 1\right)(2x^2 + y^2)$ nên suy ra:

$$\log_3^2 t \leq \frac{3}{2} \log_2 t = \frac{3}{2} \log_2 3 \cdot \log_3 t \Rightarrow \log_3 t \leq \frac{3}{2} \log_2 3 \approx 2,37.$$

Do đó $2x^2 + y^2 = \log_2 t = \log_2 3 \cdot \log_3 t \leq 3,7$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1\}$.

+ Với $x = 0$, ta có $\begin{cases} y^2 = \log_2 t = \log_2 3 \cdot \log_3 t \\ y = \log_3 t \end{cases}$, suy ra $y^2 = y \cdot \log_2 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \log_2 3 \end{cases}$.

+ với $x = 1$, ta có $\begin{cases} 2 + y^2 = \log_2 t = \log_2 3 \cdot \log_3 t \\ 1 + y = \log_3 t \end{cases}$, suy ra

$2 + y^2 = \log_2 3 \cdot (1 + y) \Leftrightarrow y^2 - \log_2 3 \cdot y + 2 - \log_2 3 = 0$ phương trình có nghiệm.

+ Với $x = -1$, ta có $\begin{cases} 2 + y^2 = \log_2 t = \log_2 3 \cdot \log_3 t \\ -1 + y = \log_3 t \end{cases}$, suy ra

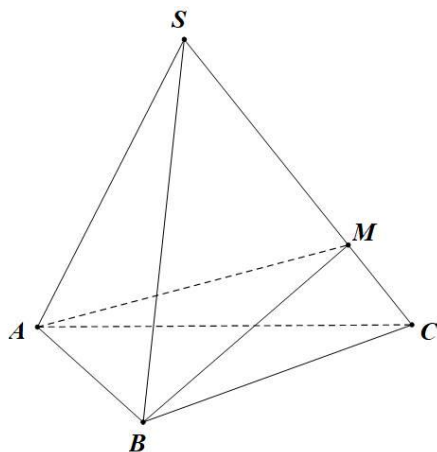
$2 + y^2 = \log_2 3 \cdot (-1 + y) \Leftrightarrow y^2 - \log_2 3 \cdot y + 2 + \log_2 3 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Đáp án C.

Câu 313. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $SA = SB = a$; $SC = x (x > a)$. Tìm x sao cho thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

- A. $x = 2a$. B. $x = 4a$. C. $x = 3a$. D. $x = 6a$.



Chọn M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = a$.

$\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 60^\circ; SA = SB = SM = a \Rightarrow S.AMB$ là tứ diện đều cạnh a .

$$\Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Ta lại có:
$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}}{\frac{a^3 \sqrt{2}}{4}} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3a.$$

Đáp án C.

Câu 314. [Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Biết $ABB'A'$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{AA'B'} = 60^\circ$ và góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng 30° . Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Thể tích khối tứ diện $ACMC'$ bằng

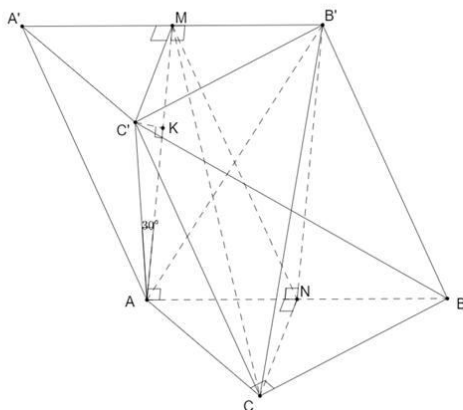
A. $\frac{a^3}{6}$.

B. $\frac{a^3}{48}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Giải



- Gọi N là trung điểm của cạnh AB .

Do tam giác ABC vuông cân tại C nên $CN \perp AB$ và $MN = 2a$.

Mặt khác do $ABB'A'$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{AA'B'} = 60^\circ$ nên $AB' = MN = 2a$.

Suy ra $MANB'$ là hình chữ nhật.

- Ta có: $CN \parallel C'M$.

Nên $C'M \perp A'B'$ và $MANB'$ là hình chữ nhật nên $AM \perp A'B'$.

Suy ra $A'B' \perp (C'AM)$.

Trong $(C'AM)$ kẻ $C'K \perp AM$ suy ra $C'K \perp (A'ABB')$.

Vậy $\widehat{C'AM} = 30^\circ$.

- Xét tam giác $A'MA$ vuông tại M ta có: $AM = \sqrt{A'A^2 - A'M^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác $A'B'C'$ vuông tại C' ta có: $C'M = \frac{1}{2} A'B' = a$.

Xét tam giác $C'AM$ ta có: $C'M^2 = AM^2 + C'A^2 - 2.C'A.AM.\cos \widehat{C'AM}$

Đặt $C'A = x$, ta có:

$$a^2 = 3a^2 + x^2 - 2a\sqrt{3}.x.\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3a.x + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 2a \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x = 2a$.

Nên $AC' = 2a$, $AM = a\sqrt{3}$, $C'M = a \Rightarrow \Delta C'AM$ vuông tại M .

Nên $C'M \perp AM$, $A'B' \perp AM$.

Suy ra $AM \perp (A'B'C')$.

Xét tam giác ABC vuông cân tại C với $AB = 2a$ nên $CA = CB = a\sqrt{2}$.

Ta có: $V_{C'.AMC} = V_{A'MC'.ANC} - V_{M.ANC} - V_{A.A'MC'}$

$$V_{C'.AMC} = \frac{1}{2}.V_{ABC.A'B'C'} - V_{M.ANC} - V_{A.A'MC'}$$

$$V_{C'.AMC} = \frac{1}{2}.AM.S_{ABC} - \frac{1}{3}.AM.S_{ANC} - \frac{1}{3}.AM.A'MC'$$

$$V_{C'.AMC} = \frac{1}{2}.AM.S_{ABC} - \frac{2}{3}.AM.S_{ANC}$$

$$V_{C'.AMC} = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.\frac{(a\sqrt{2})^2}{2} - \frac{2}{3}.a\sqrt{3}.\frac{(a\sqrt{2})^2}{4}$$

$$V_{C'.AMC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Trường hợp 2: $x = a$.

Trong tam giác $C'KA$ vuông tại K : $d(C', (A'ABB')) = C'K = C'A \cdot \sin \widehat{C'AK}$
 $= a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Lại có $A'ABB'$ là hình thoi cạnh a có góc $\widehat{AA'B'} = 60^\circ$ nên
 $AB' = 2a$; $A'B = 2 \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

$$\text{Suy ra } V_{C'.A'ABB'} = \frac{1}{3} \cdot C'K \cdot S_{A'ABB'} = \frac{1}{3} \cdot C'K \cdot \frac{1}{2} \cdot A'B \cdot AB' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Mặt khác } V_{C'.A'ABB'} = \frac{2}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2} \cdot V_{C'.A'ABB'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Lại có: } V_{B'.ACC'} = \frac{1}{2} V_{B'.A'C'CA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 315. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2 \text{ có nghiệm } x \in [-1; 2] \text{ là}$$

A. 1746.

B. 1750.

C. 1747.

D. 1748.

Giải

• Đặt $u = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + 2}$ ta được:

$$f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2 \Leftrightarrow f(u) = (-x)^3 + (-x) + 2$$

$$\Leftrightarrow u^3 + u + 2 = (-x)^3 + (-x) + 2. \Leftrightarrow f(u) = f(-x)$$

• Xét $f(t) = t^3 + t + 2$

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Do đó $f(u) = f(-x) \Leftrightarrow u = -x \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + m = -x^3 \Leftrightarrow m = -x^3 - f^3(x) - f(x)$.

Đặt $g(x) = -x^3 - f^3(x) - f(x)$

$\Rightarrow g'(x) = -3x^2 - 3f'(x) \cdot f^2(x) - f'(x)$.

Ta có: $f(x) = x^3 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $g'(x) = -3x^2 - 3(3x^2 + 1)(x^3 + x + 2)^2 - (3x^2 + 1) < 0, \forall x \in [-1; 2]$.

Mặt khác: $g(-1) = 1, g(2) = -1748$.

Suy ra $g(x) \in [-1748; 1]$ khi $x \in [-1; 2]$.

Vậy có 1750 giá trị $m \in \{-1748; -1747; \dots; 1\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 316. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay] [ĐỀ BGD 2019-MĐ 101].

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $27\sqrt{3}$.

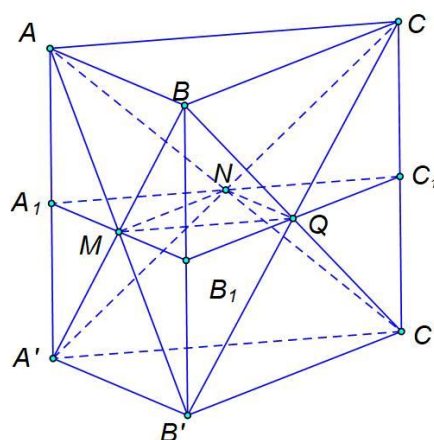
B. $21\sqrt{3}$.

C. $30\sqrt{3}$.

D. $36\sqrt{3}$.

Giải

Cách 1:



Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \frac{8 \cdot 6^2 \sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}$.

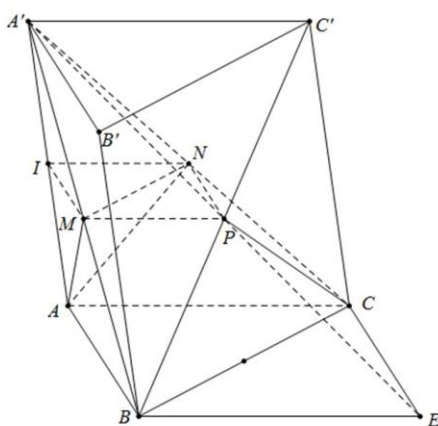
Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm của AA', BB', CC' .

Thể tích khối đa diện cần tính là thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$, trừ đi thể tích các khối chóp $AA_1MN; BB_1MP; CC_1NP$.

Thể tích khối chóp AA_1MN bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{V}{24}$.

Vậy thể tích khối đa diện cần tính là $V_{ABCMNP} = \frac{V}{2} - 3 \frac{V}{24} = \frac{3V}{8} = 27\sqrt{3}$.

Cách 2:



Diện tích của đáy $S = 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, chiều cao lăng trụ $h = 8$.

Gọi I là trung điểm AA' . Ta có $(MINP) \parallel (ABC)$.

Gọi E là giao điểm của $A'P$ và (ABC) , suy ra $BE \parallel AC$ và $BE = 2MP = AC$, hay E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABEC$.

Ta có $V = V_{A'.ABEC} - V_{P.BEC} - V_{A'.IMP} - V_{A.IMN}$.

Trong đó:

$$V_{A'.ABEC} = \frac{1}{3} \cdot 2S \cdot h = \frac{2}{3} Sh.$$

$$V_{P.BEC} = \frac{1}{3} \cdot S_{BEC} \cdot d(P, (ABC)) = \frac{1}{3} S \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{6} Sh.$$

$$V_{A'.IMPV} = \frac{1}{3} S_{IMPV} \cdot d(A', (IMPV)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{12} Sh.$$

$$V_{A.IMV} = \frac{1}{3} S_{IMV} \cdot d(A, (IMV)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{24} Sh.$$

$$\text{Vậy } V = V_{A'.ABEC} - V_{P.BEC} - V_{A'.IMPV} - V_{A.IMV} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) Sh = \frac{3}{8} Sh = 27\sqrt{3}.$$

Đáp án A.

Câu 317. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay]_ [ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103].

Xét các số thực không âm x, y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2x + y^2 + 4y$.

A. $\frac{33}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{21}{4}$.

D. $\frac{41}{8}$.

Giải

Cách 1:

$$\text{Ta có } 2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow 2x - 3 + 2y \cdot 2^{2x+2y-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - 3 + 2y \cdot (2^{2x+2y-3} - 1) \geq 0 \quad (1)$$

Nếu $2x + 2y - 3 < 0$ thì VT(1) < 0, vô lý, nên từ (1) suy ra $2x + 2y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq \frac{3}{2}$

$$P = (x+1)^2 + (y+2)^2 - 5 = \frac{1}{2}(1+1) \left[(x+1)^2 + (y+2)^2 \right] - 5$$

$$\geq \frac{1}{2}(x+1+y+2)^2 - 5 \geq \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{2} \right)^2 - 5 = \frac{41}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } \min P = \frac{41}{8}.$$

Cách 2:

$$\square \text{ Ta có } 2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow y \cdot 4^y \cdot 4^{x-1} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow y \cdot 2^{2y} \geq (3 - 2x) \cdot 2^{2-2x}$$

$$\Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3 - 2x) \cdot 2^{3-2x}. (*)$$

Nếu $3 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ thì với mọi $x \geq \frac{3}{2}, y \geq 0$ đều thỏa mãn (*) và khi đó

$$P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \geq \frac{21}{4}.$$

Nếu $3 - 2x > 0$.

□ Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t \in (0; +\infty)$.

□ Ta có $f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

□ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Từ (*) suy ra $2y \geq 3 - 2x \Leftrightarrow 2x + 2y \geq 3$.

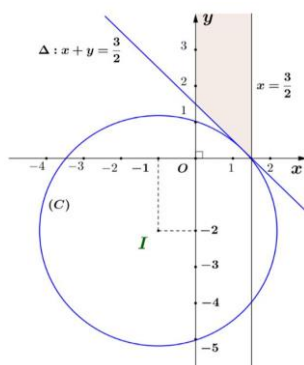
□ Xét $P = (x+1)^2 + (y+2)^2 - 5 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = P+5$.

□ Ta có hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{3}{2} & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ 2x + 2y - 3 \geq 0 & (3) \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = P+5 & (4) \end{cases}$$

□ Hệ điều kiện (1), (2), (3) là phần tô màu trên hình vẽ.

□ (4) coi như là đường tròn tâm $I(-1; -2), R = \sqrt{P+5}$.



□ Để hệ có nghiệm thì $d(I; \Delta) \leq R = \sqrt{P+5}$, ở đó $\Delta: 2x + 2y - 3 = 0$.

□ Suy ra $\frac{|2(-1) + 2(-2) - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \leq \sqrt{P+5} \Leftrightarrow P \geq \frac{41}{8}$.

□ Dấu bằng xảy ra khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = \frac{41}{8} + 5 \end{cases}$$

□ Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

□ Vậy $\text{Min} P = \frac{41}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Cách 3:

Giả thiết $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$ (1) $\Leftrightarrow 2x - 2 + y \cdot 2^{2x+2y-2} \geq 1$.

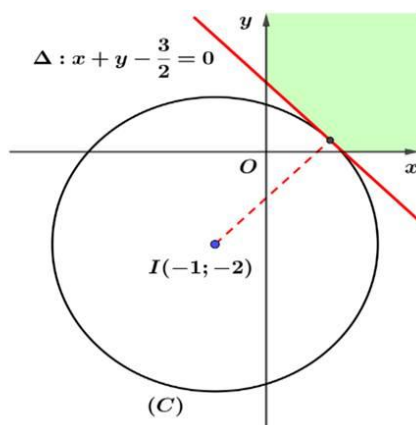
Đặt $a = 2x + 2y - 2$; $b = 2x - 2 \Rightarrow a \geq b$ và $y = \frac{a-b}{2}$.

(1) viết lại: $b + \frac{a-b}{2} \cdot 2^a \geq 1 \Leftrightarrow 2(b-a) + (a-b)2^a \geq 2 - 2a \Leftrightarrow (a-b)(2^a - 2) \geq 2 - 2a$ (*)

• Nếu $a < 1$ thì $VT(*) \leq 0 < VP(*)$. Vậy không xảy ra $a < 1$.

• Nếu $a \geq 1$ thì $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 2y \geq 3 \end{cases}$ (D).

Biểu diễn được $P + 5 = (x+1)^2 + (y+2)^2$, xem như là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1; -2)$, bán kính $\sqrt{P+5}$.



Ta cần tìm $\text{min} P$ trên miền (D). Khi đó (C) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất chạm miền (D) $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = \sqrt{P+5}$ (trong đó, $\Delta: 2x + 2y - 3 = 0$).

Do đó ta có được một biểu thức tương đương dưới đây:

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2\sqrt{2}} = \sqrt{P+5} \Leftrightarrow P = \frac{41}{8}. \text{ Khi đó } \Delta \text{ tiếp xúc } (C) \text{ tại điểm } \left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

Vậy min $P = \frac{41}{8}$, đạt được khi $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Cách 4:

$$\text{Ta có } 2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow 2x + 2y \cdot 2^{2x+2y-3} \geq 3.$$

Nếu $2x + 2y - 3 < 0$ thì $3 \leq 2x + 2y \cdot 2^{2x+2y-3} < 2x + 2y \cdot 2^0 = 2x + 2y$. Suy ra $2x + 2y - 3 > 0$.

Mâu thuẫn.

Nếu $2x + 2y - 3 \geq 0$ (1). Ta có (1) $\Leftrightarrow x + y \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x + (y+1) \geq \frac{5}{2}$. Đặt $t = y+1$ ($t \geq 1$). Ta

có $x+t \geq \frac{5}{2}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} P &= x^2 + 2x + y^2 + 4y = x^2 + (y+1)^2 + 2x + 2y + 2 - 3 = x^2 + t^2 + 2(x+t) - 3 \\ &\geq \frac{1}{2}(x+t)^2 + 2(x+t) - 3 \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) - 3 = \frac{41}{8}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = t = \frac{5}{4}$ hay $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Nhận xét: Thông qua đặt $t = y+1$ ta đưa được về giả thiết và kết luận đều có biểu thức

đối xứng đối với x và t , vì thế thí sinh có thể dễ dàng phán đoán P đạt min khi $x = t = \frac{5}{4}$

Đáp án D.

Câu 318. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay]_[ĐỀ BGD 2020-L1-MĐ 103].

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-2	2	-3	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 15.

B. 12.

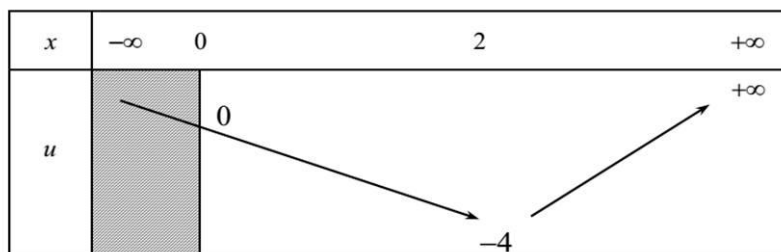
C. 14.

D. 13.

Giải

Đặt $u = x^2 - 4x$ (1)

Ta có bảng biến thiên sau:



Ta thấy:

+ Với $u < -4$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $u = -4$, phương trình (1) có một nghiệm $x = 2 > 0$.

+ Với $-4 < u < 0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x > 0$.

+ Với $u \geq 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x > 0$

Khi đó $3f(x^2 - 4x) = m \Rightarrow f(u) = \frac{m}{3}$ (2), ta thấy:

+ Nếu $\frac{m}{3} = -3 \Leftrightarrow m = -9$, phương trình (2) có một nghiệm $u = 0$ nên phương trình đã cho

có một nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-3 < \frac{m}{3} < -2 \Leftrightarrow -9 < m < -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u > 0$ và một nghiệm $u \in (-2; 0)$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = -2 \Leftrightarrow m = -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u = -4$, một nghiệm $u \in (-2; 0)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-2 < \frac{m}{3} < 2 \Leftrightarrow -6 < m < 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, hai nghiệm $u \in (-4; 0)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, một nghiệm $u = -2$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-2 < \frac{m}{3} < 2 \Leftrightarrow -6 < m < 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, hai nghiệm $u \in (-4; 0)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, một nghiệm $u = -2$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.

Câu 319. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $x, y \in (0; 2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8) = ey(ey-11)$. Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{1 + \ln y}$ bằng:

A. $\sqrt{1 + \ln 3 - \ln 2}$.

B. $2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$.

C. $1 + \sqrt{\ln 3 - \ln 2}$.

D. $1 + \sqrt{\ln 2}$.

Giải

Điều kiện: $x \geq 1, y \geq \frac{1}{e}$.

Phương trình tương đương với: $x^2 + 5x - 24 = e^2 y^2 - 11ey \Leftrightarrow e^2 y^2 - 11ey - (x^2 + 5x - 24) = 0 \quad (*)$

Ta có: $\Delta = (2x+5)^2 > 0, \forall x \geq 1$.

$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} ey = \frac{11 + (2x+5)}{2} \\ ey = \frac{11 - (2x+5)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ey = x+8 \\ ey = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+8}{e} \\ y = \frac{3-x}{e} \end{cases}$$

+ Với $y = \frac{x+8}{e} \notin (0; 2)$ (vì $\frac{x+8}{e} > \frac{9}{e} > 2$).

+ Với $y = \frac{3-x}{e} \in (0; 2)$ (vì $1 \leq x < 2$).

Cách 1:

Khi đó, ta được: $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)}$ trên $[1; 2)$.

$$\text{Ta có: } P' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}} = 0 \Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} = x\sqrt{\ln x} \quad (**).$$

Xét hàm $f(t) = t\sqrt{\ln t}$ trên $[1; +\infty)$, có $f'(t) = \sqrt{\ln t} + \frac{1}{2\sqrt{\ln t}} > 0, \forall t \in (1; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (**) \Leftrightarrow f(3-x) = f(x) \Leftrightarrow 3-x = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3}{2}$	2
P'	+	0	-
P		$2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $P_{\max} = 2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$ khi $x = \frac{3}{2}; y = \frac{3}{2e}$.

Cách 2:

Khi đó, ta được: $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)}$ trên $[1; 2)$.

$$P^2 = \left[\sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)} \right]^2 \leq 2[\ln x + \ln(3-x)] = 2\ln[x(3-x)] \leq 2\ln\left(\frac{x+3-x}{2}\right)^2 = 4(\ln 3 - \ln 2), \forall x \in [1; 2).$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln(3-x)} \\ x = 3-x \\ x \in [1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$

Vậy từ đó $P_{\max} = 2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$ khi $x = \frac{3}{2}; y = \frac{3}{2e}$.

Đáp án B.

Câu 320. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2} \text{ và } \int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng.}$$

A. $\frac{6}{\pi}.$

B. $\frac{2}{\pi}.$

C. $\frac{4}{\pi}.$

D. $\frac{1}{\pi}.$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos \frac{\pi x}{2} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } \int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx &= \cos \frac{\pi x}{2} f(x) \Big|_0^1 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ &= f(1) \cdot \cos \frac{\pi}{2} - f(0) \cdot \cos 0 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{Xét tích phân } \int_0^1 \left[f(x) + k \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f^2(x) + 2kf(x) \sin \frac{\pi x}{2} + k^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx + 2k \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx + k^2 \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi x}{2} dx = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} + 2k \frac{3}{2} + \frac{1}{2} k^2 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

$$\text{Khi đó ta có: } \int_0^1 \left[f(x) - 3 \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) - 3 \sin \frac{\pi x}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{2}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = 3 \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} dx = -3 \cdot \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}} \Big|_0^1 = \frac{-6}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \Big|_0^1 = -\frac{6}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{6}{\pi}.$$

Đáp án A.

Chú ý:

Sử dụng phương pháp từng phần đối với tích phân $\int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}.$

Xét $\int_0^1 \left[f(x) + k \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0$, tìm k , từ đó suy ra $f(x) = -k \sin \frac{\pi x}{2}$. $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 -k \sin \frac{\pi x}{2} dx$.

Câu 321. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x)$ và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{137}{16}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$
$f'(x)$					$\frac{11}{2}$				

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = e^{-x^2+4mx-5} \cdot f(x)$ đồng biến trên $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

A. 4040.

B. 4041.

C. 2019.

D. 2020.

Giải

Ta có: $g'(x) = (-2x + 4m) \cdot e^{-x^2+4mx-5} \cdot f(x) + e^{-x^2+4mx-5} \cdot f'(x)$
 $\Leftrightarrow g'(x) = [(-2x + 4m) \cdot f(x) + f'(x)] \cdot e^{-x^2+4mx-5}.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $g'(x) = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow (-2x + 4m) \cdot f(x) + f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \text{ (vì } e^{-x^2+4mx-5} > 0)$$

$$\Leftrightarrow -2x + 4m \geq -\frac{f'(x)}{f(x)}, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right), \text{ (vì } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow 4m \geq 2x - \frac{f'(x)}{f(x)}, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \quad (*).$$

Xét $h(x) = 2x - \frac{f'(x)}{f(x)}, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right).$

Ta có $h'(x) = 2 - \frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}.$

Mà $\begin{cases} f''(x) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} < 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right).$

Từ đó suy ra $h'(x) > 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{1}{2}$
$h'(x)$		+
$h(x)$	$h(-1)$	$h\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\text{Vậy điều kiện } (*) \Leftrightarrow 4m \geq h\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4m \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow 4m \geq \frac{225}{137} \Leftrightarrow m \geq \frac{225}{548}.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2020; 2020] \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 2020\}.$$

Vậy có 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án D.

Câu 322. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0, b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$.

A. 17.

B. 14.

C. 15.

D. 16.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; +\infty) \\ x = -1 \notin [0; +\infty) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $[0; +\infty)$ như sau:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-2	$+\infty$

Vì $a_2 > 0$ nên $f(a_2) \geq -2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) + 2 \geq 0$ (1).

Giả sử $a_1 \geq 1$, vì $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ nên $f(a_2) > f(a_1)$ suy ra $f(a_2) + 2 > f(a_1)$ vô lý.

Vậy $a_1 \in [0; 1)$ do đó $-2 \leq f(a_1) \leq 0$ (2).

Từ (1), (2) ta có: $\begin{cases} f(a_1) = 0 \\ f(a_2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases}$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy cấp số cộng (a_n) là: $a_n = n - 1$.

Đặt $\begin{cases} t_1 = \log_2 b_1 \\ t_2 = \log_2 b_2 \end{cases}$, suy ra: $f(t_1) = f(t_2) + 2$, vì $1 \leq b_1 < b_2$ nên $0 \leq t_1 < t_2$, theo lập luận trên ta có:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b_1 = 0 \\ \log_2 b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy cấp số nhân (b_n) là $b_n = 2^{n-1}$.

Do đó $b_n > 2019a_n \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2019(n-1)$ (*).

Trong 4 đáp án $n = 16$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn (*).

Đáp án D.

Câu 323. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

- A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. B. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Giải

Đặt $DM = x$, $BN = y$ ta có

$$\tan 45^\circ = \tan(DAM + BAN) = \frac{\tan DAM + \tan BAN}{1 - \tan DAM \cdot \tan BAN} = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Suy ra $y = \frac{1-x}{1+x}$ và $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2 + 1}$,

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2(x^2 + 1)}}{x+1}.$$

Vì vậy $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle AMN} = \frac{1}{6} SA \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 45^\circ = \frac{x^2 + 1}{6(x+1)}.$

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{6(x+1)}.$

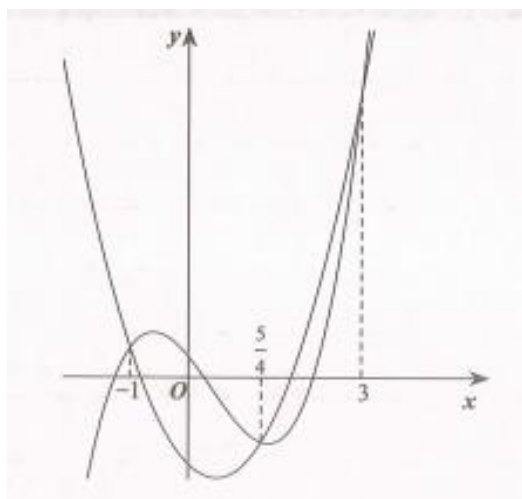
Khảo sát ta có $f(x) \leq f(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}.$

Đáp án B.

Câu 324. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + 1$ với $a, b, c, d, e, m, n, p, q$ là các số thực. Đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$; $y = g'(x)$ như hình vẽ dưới.

Tổng các nghiệm của phương trình $f(x) + q = g(x) + e$ bằng



A. $\frac{13}{3}$.

B. $-\frac{13}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $-\frac{4}{3}$.

Giải

Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$ có $h'(x) = k(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3)$ (với $k \neq 0$) và

$$h(0) = f(0) - g(0) = e - q.$$

$$\text{Do đó } h(x) = (h(x) - h(0)) + h(0) = \int_0^x h'(x) dx - e + q = k \int_0^x (x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) dx + e - q$$

$$= \frac{k}{4} \int_0^x (x+1)(4x-5)(x-3) dx + e - q = \frac{k}{4} \int_0^x (4x^3 - 13x^2 - 2x + 15) dx + e - q$$

$$= \frac{k}{4} \left(x^4 - \frac{13}{2} x^3 - x^2 + 15x \right) + e - q.$$

$$\text{Phương trình tương đương với: } h(x) = e - q \Leftrightarrow x^4 - \frac{13}{2} x^3 - x^2 + 15x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Tổng các nghiệm của phương trình bằng } -\frac{5}{3} + 0 + 3 = \frac{4}{3}.$$

Đáp án C.

Câu 325. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

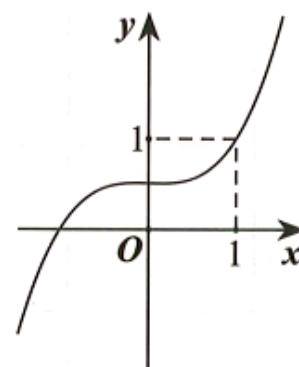
Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của m ($m \in \mathbb{R}$) sao cho $(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

A. 2

B. 0

C. 3

D. 1



Giải

Từ giả thiết suy ra: $g(1) = 0 \Leftrightarrow m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Với $m = 0$ ta có: $(x-1)[f(x)-1] \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (đúng)

Với $m = 1$ ta có: $\frac{1}{2}[(2x-1)-1][f(2x-1)-1] \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (đúng)

Với $m = -1$.

Xét $x > 1$ ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x-1)+1}{2f(x)} = 4$

$\Rightarrow \exists \alpha > 1, \alpha$ đủ lớn sao cho $f(2\alpha-1)+1 \geq 2f(\alpha)$

$\Rightarrow (\alpha-1) - f[(2\alpha-1)-1+2f(\alpha)] < 0$ (mâu thuẫn (*)) $\Rightarrow m = -1$ (loại).

Vậy $m \in \{0;1\}$.

Đáp án A.

Câu 326. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=2$ và $z(\bar{z}+2)-(z+\bar{z})-m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là:

A. $\sqrt{2}+1$ B. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

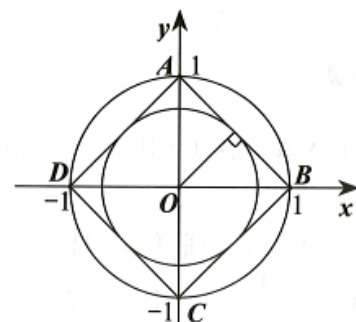
Giải

Gọi $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Ta có: $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=2$

$\Leftrightarrow |x+yi+x-yi|+|x+yi-x-yi|=2$

$\Leftrightarrow |2x|+|2yi|=2 \Leftrightarrow |x|+|y|=1$ (*)



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \text{ khi } x \geq 0, y \geq 0 \text{ } (d_1) \\ x-y=1 \text{ khi } x \geq 0, y < 0 \text{ } (d_2) \\ -x+y=1 \text{ khi } x < 0, y \geq 0 \text{ } (d_3) \\ x+y=-1 \text{ khi } x < 0, y < 0 \text{ } (d_4) \end{cases}$$

Ta lại có $z(\bar{z}+2)-(z+\bar{z})-m=(x+yi)(x-yi+2)-(x+yi+x-yi)-m$

$$=x(x+2)+y^2+(-xy+xy+2y)i-2x-m$$

$$=x^2+y^2-m+2yi \text{ là số thuần ảo } \Rightarrow x^2+y^2-m=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=m \text{ (C)}$$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn (*) là hình vuông

Để tồn tại 4 số phức z thì (C) phải cắt cả 4 cạnh của hình vuông $ABCD$ tại 4 điểm phân biệt.

$$\text{Ta có } d(O; d_1) = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Để (C) cắt ở 4 cạnh của hình vuông } ABCD \text{ tại 4 điểm phân biệt thì } \begin{cases} R_C = m = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ R_C = m = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right\} \Rightarrow \text{Tổng các phần tử của } S \text{ là } \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}.$$

Đáp án B.

Câu 327. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho phương trình: $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm.

A. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty \right).$

B. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2 \right).$

C. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2 \right].$

D. $\left(0; \frac{1}{e} \right).$

Giải

Điều kiện: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

$$\text{Đặt } x + \sqrt{1-x^2} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 - x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-1}{2}.$$

Ta có: $t(x) = x + \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 1]$.

$$\Rightarrow t'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$t'(x)$	+	0	-
$t(x)$	-1	$\sqrt{2}$	1

Từ bảng biến thiên ta có: $t \in [-1; \sqrt{2}]$.

Khi đó phương trình trở thành: $e^m + e^{3m} = 2t \left(1 + \frac{t^2-1}{2} \right) = t(t^2+1) = t^3 + t \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-1; \sqrt{2})$.

Từ $(*) \Rightarrow f(e^m) = f(t) \Leftrightarrow e^m = t \Leftrightarrow m = \ln t \Rightarrow m \in (0; \ln \sqrt{2}) = \left(0; \frac{1}{2} \ln 2 \right)$.

Đáp án B.

Câu 328. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$ và thỏa mãn

$(xf'(x) - 2f(x)) \ln x = x^3 - f(x), \forall x \in (1; +\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e}) = 3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(12; \frac{25}{2} \right)$. B. $\left(13; \frac{27}{2} \right)$. C. $\left(\frac{23}{2}; 12 \right)$. D. $\left(14; \frac{29}{2} \right)$.

Giải

Vì $x \in (1; +\infty)$ nên ta có $(x^2 f'(x) - 2xf(x)) \ln x = x^4 - xf(x)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} \right) \ln x = 1 - \frac{f(x)}{x^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' \ln x = 1 - \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \int \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' \ln x dx = \int \left(1 - \frac{f(x)}{x^3} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} - \int \frac{f(x)}{x^3} dx = x - \int \frac{f(x)}{x^3} dx + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow \frac{f(x) \ln x}{x^2} = x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2(x+C)}{\ln x}.$$

Theo đề bài $f(\sqrt[3]{e}) = 3e \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{\ln x} \quad f(2) = \frac{8}{\ln 2} \in \left(\frac{23}{2}; 12 \right).$

Đáp án C.

Câu 329. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng bao nhiêu, biết rằng x ,

y, z là các số thực thỏa mãn $\log_{16} \left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1} \right) = x(x-2) + y(y-2) + z(z-2).$

A. $-\frac{1}{3}.$

B. $\frac{2}{3}.$

C. $-\frac{2}{3}.$

D. $\frac{1}{3}.$

Giải

Ta có: $\log_{16} \left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1} \right) = x(x-2) + y(y-2) + z(z-2)$

$$\Leftrightarrow \log_{16} (x+y+z) + 2(x+y+z) = \log_{16} (2x^2+2y^2+2z^2+1) + (2x^2+2y^2+2z^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_4 4(x+y+z) + 4(x+y+z) = \log_4 (2x^2+2y^2+2z^2+1) + (2x^2+2y^2+2z^2+1)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_4 t + t \quad (t > 0).$

Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

Suy ra: $f(4(x+y+z)) = f(2x^2+2y^2+2z^2+1)$

$$\Rightarrow 4(x+y+z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + \frac{1}{2} = 0 \quad (S).$$

Ta có mặt cầu (S) có tọa độ tâm và bán kính là: $I(1;1;1)$, $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

$$\text{Ta có: } F = \frac{x+y-z}{x+y+z} \Leftrightarrow (F-1)x + (F-1)y + (F+1)z = 0 \quad (P).$$

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có điểm chung điều kiện cần và đủ là

$$d(I, (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|F-1+F-1+F+1|}{\sqrt{2(F-1)^2 + (F+1)^2}} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3F^2 - 2F - 13 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\sqrt{10}}{3} \leq F \leq \frac{1+2\sqrt{10}}{3}.$$

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng $\frac{2}{3}$.

Đáp án B.

Câu 330. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = |x-y| + |x^3 - y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $T = 2a + b$.

A. $T = 25$.

B. $T = 34$.

C. $T = 32$.

D. $T = 41$.

Giải

Nhận xét hàm số $f(t) = 2^{t-1} + \log_3(t+1)$ đồng biến và $f(2) = 3$, từ đó

$$2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$S = |x-y| + |x^3 - y^3| = |x-y|(1+x^2+y^2+xy)$$

$$\Leftrightarrow S^2 = (x-y)^2(3+xy)^2 = (2-2xy)(3+xy)^2.$$

Đặt $t = xy$ do $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = 1$ nên $t \in [-1;1]$.

Xét hàm số $g(t) = (2 - 2t)(3 + t)^2$ trên $[-1; 1]$ được $\max_{t \in [-1; 1]} g(t) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{512}{27}$.

Do $S > 0$ nên $S^2 \leq \frac{512}{27} \Leftrightarrow S \leq \frac{16\sqrt{6}}{9}$.

Vậy $T = 34$.

Đáp án B.

Câu 331. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\frac{z}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{i - a}{1 - a(a - 2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm M và $I(-3; 4)$ (khi a thay đổi) là:

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Giải

Ta có:

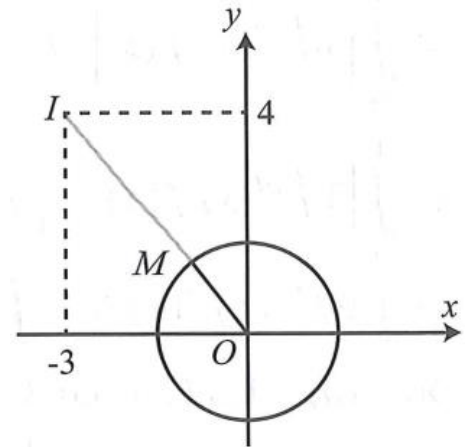
$$\begin{aligned} \frac{z}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \frac{i - a}{1 - a(a - 2i)} \Leftrightarrow z = \frac{i - a}{1 - a^2 + 2ai} \sqrt{a^2 + 1} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{i - a}{-(a - i)^2} \sqrt{a^2 + 1} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a - i} = \frac{\sqrt{a^2 + 1}(a + i)}{a^2 - i^2} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{\sqrt{a^2 + 1}(a + i)}{a^2 + 1} \Leftrightarrow z = \frac{a + i}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}i \end{aligned}$$

M là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)$.

Ta có: $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^2 = \frac{a^2 + 1}{a^2 + 1} = 1$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ có tâm $O(0; 0)$ bán kính $R = 1$.

Khi đó $IM_{\min} = IO - R = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} - 1 = 5 - 1 = 4$.



Đáp án A.

Câu 332. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt: $x^4 - 16x^2 + 8(1-m)x - m^2 + 2m - 1 = 0$.

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Giải

Ta có: $x^4 - 16x^2 + 8(1-m)x - m^2 + 2m - 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow x^4 - 16x^2 + 8(1-m)x - (1-m)^2 = 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 - 8x(1-m) - x^4 + 16x^2 = 0.$$

Đặt $1-m = M$, phương trình trở thành: $M^2 - 8xM - x^4 + 16x^2 = 0$ (*).

$$\Delta_M' = (4x)^2 + x^4 - 16x^2 = x^4 \geq 0.$$

TH1: $x = 0$, Phương trình (*) có nghiệm kép $M = 4x = 0 \Leftrightarrow 1-m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

$$\text{Khi đó phương trình ban đầu trở thành: } x^4 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 4 \end{cases}.$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow m = 1$ không thỏa mãn.

TH2: $x \neq 0 \Rightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} M = 4x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - M = 0 & (1) \\ M = 4x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + M = 0 & (2) \end{cases} \quad (1), (2) \text{ là phương trình bậc hai nên có tối đa 2 nghiệm.}$$

Do đó, để phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt thì (1), (2) đều có 2 nghiệm phân biệt, và 4 nghiệm này phân biệt nhau

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + M > 0 \\ 4 - M > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M > -4 \\ M < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < M < 4$$

$$\Leftrightarrow -4 < m - m < 4 \Leftrightarrow -5 < -m < 3 \Leftrightarrow -3 < m < 5.$$

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2, -1, 0, 2, 3, 4\}$.

Thử lại $m = -2 \Rightarrow x \in \{-2 \pm \sqrt{2}; 2 \pm \sqrt{6}\}$ (thỏa mãn).

$$m = -1 \Rightarrow x \in \{-2 \pm \sqrt{6}; 2 \pm \sqrt{2}\} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$m = 0 \Rightarrow x \in \{-2 \pm \sqrt{5}; 2 \pm \sqrt{3}\} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$m = 2 \Rightarrow x \in \{-2 \pm \sqrt{3}; 2 \pm \sqrt{5}\} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$m = 3 \Rightarrow x \in \{-2 \pm \sqrt{2}; 2 \pm \sqrt{6}\} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$m = 4 \Rightarrow x \in \{-1; -3; 2 \pm \sqrt{7}\} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C.

Câu 333. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2-f(x)-2019} = 0$ và $f(0) = -2019$. Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $f(x) < 7$ là

A. 91.

B. 46.

C. 45.

D. 44.

Giải

Cách 1:

Theo giả thiết

$$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2-f(x)-2019} = 0 \Leftrightarrow 6x(1 - e^{x^2-f(x)-2019}) = 2x - f'(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

TH1: Nếu $1 - e^{x^2-f(x)-2019} = 0$ thì $x^2 - f(x) - 2019 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2019$ ta có (1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } f(x) < 7 \Leftrightarrow x^2 - 2019 < 7 \Leftrightarrow x^2 < 2026 \Leftrightarrow -\sqrt{2026} < x < \sqrt{2026}.$$

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1; 2; 3; \dots; 45\}$.

Trong trường hợp này có 45 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn yêu cầu đề bài.

TH2: Nếu $1 - e^{x^2-f(x)-2019} \neq 0$ thì ta có thể giả sử rằng tồn tại hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó, tại $x = 0$ ta có $f(0) = -2019$ nên $1 - e^{x^2 - f(x) - 2019} = 0$ (mâu thuẫn).

Vậy có tất cả 45 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Theo giả thiết

$$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2 - f(x) - 2019} = 0 \Leftrightarrow [f'(x) + 4x]e^{f(x) + 2x^2} = 6x.e^{3x^2 - 2019}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } \int [f'(x) + 4x].e^{f(x) + 2x^2} dx = \int 6x.e^{3x^2 - 2019} dx \Leftrightarrow e^{f(x) + 2x^2} = e^{3x^2 - 2019} + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = -2019 \text{ nên } \Leftrightarrow e^{f(0)} = e^{-2019} + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } e^{f(x) + 2x^2} = e^{3x^2 - 2019} \text{ hay } f(x) = x^2 - 2019.$$

$$\text{Khi đó } f(x) < 7 \Leftrightarrow x^2 - 2019 < 7 \Leftrightarrow x^2 < 2026 \Leftrightarrow -\sqrt{2026} < x < \sqrt{2026}.$$

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1; 2; 3; \dots; 45\}$.

Vậy có 45 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án C.

Câu 334. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Xét số phức z có phần thực dương và ba điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \frac{1}{z}$ và $z + \frac{1}{z}$. Biết tứ giác $OABC$ là một hình bình hành, giá trị nhỏ nhất của

$$\left| z + \frac{1}{z} \right|^2 \text{ bằng}$$

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 4.

Giải

$$\text{Ta có } OA = |z|, AB = \left| \frac{1}{z} - z \right|, BC = \left| \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \right| = |z|, OC = \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

Vì $OABC$ là một hình bình hành nên

$$\begin{cases} OA = BC \\ AB = OC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z| \\ \left| \frac{1}{z} - z \right| = \left| z + \frac{1}{z} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{z} - z \right| = \left| z + \frac{1}{z} \right| \\ \left| \frac{1-z^2}{z} \right| = \left| \frac{1+z^2}{z} \right| \end{cases} \Leftrightarrow |1-z^2| = |1+z^2|$$

Đặt $z = x + yi \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ vậy điều kiện trở thành:

$$\begin{aligned} |1-z^2| &= |1+z^2| \Leftrightarrow |(x^2 - y^2 - 1) + 2xyi| = |(x^2 - y^2 + 1) + 2xyi| \\ \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 &= (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 1)^2 = (x^2 - y^2 + 1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = x^2 - y^2 + 1 \\ x^2 - y^2 - 1 = -(x^2 - y^2 + 1) \end{cases} &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 = \left| \frac{1+z^2}{z} \right|^2 = \left| \frac{(x^2 - y^2 + 1) + 2xyi}{x + yi} \right|^2 = \frac{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= 2x^2 + \frac{1}{2x^2} \geq 2\sqrt{2x^2 \cdot \frac{1}{2x^2}} = 2$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra tại } \begin{cases} 2x^2 = \frac{1}{2x^2} \\ y^2 = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Đáp án B.

Câu 335. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$. Gọi M, m lần

lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2}$. Tính $T = 10M - m$.

A. $T = 60$.

B. $T = 94$.

C. $T = 104$.

D. $T = 50$.

Giải

Bắt phương trình tương đương với:

$$\log_2(x^2 + 5y^2) - \log_2(x^2 + 10xy + y^2) + \log_2 2 + 2(x^2 + 5y^2) - (x^2 + 10xy + y^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 10y^2) + 2(x^2 + 5y^2) \leq \log_2(x^2 + 10xy + y^2) + (x^2 + 10xy + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10y^2 \leq x^2 + 10xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{y}\right) + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 9$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 9}{\frac{x}{y} + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \text{ (với } 1 \leq t \leq 9).$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{t^2 + t + 9}{t + 1}.$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 8}{(t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta lại có: } f(1) = \frac{11}{2}; f(2) = 5; f(9) = \frac{99}{10}.$$

$$\text{Nên } M = \frac{99}{10}, m = 5.$$

$$\text{Vậy } T = 10M - m = 94.$$

Đáp án B.

Câu 336. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}.$

B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}.$

C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}.$

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}.$

Giải

Gọi G, K lần lượt là tâm các hình chữ nhật $ABB'A'$ và $AA'C'C$.

Ta có: $\frac{AM}{AB'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$ (do G là trung điểm AB').

Xét tam giác ABA' có AG là trung tuyến và $\frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$.

Suy ra M là trọng tâm tam giác ABA' .

Do đó BM đi qua trung điểm I của AA' .

Ta có: $\frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$ (do K là trung điểm $A'C$).

Xét tam giác $AA'C'$ có $A'K$ là trung tuyến và $\frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$, suy ra N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$.

Do đó $C'N$ đi qua trung điểm I của AA' .

Từ M là trọng tâm tam giác ABA' và N trọng tâm của tam giác $AA'C'$, suy ra:

$$\frac{IM}{IB} = \frac{IN}{IC'} = \frac{1}{3}.$$

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $IMNC$; $IBCC'$.

Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{IM}{IB} \cdot \frac{IN}{IC'} \cdot \frac{IC}{IC} = \frac{1}{9}$.

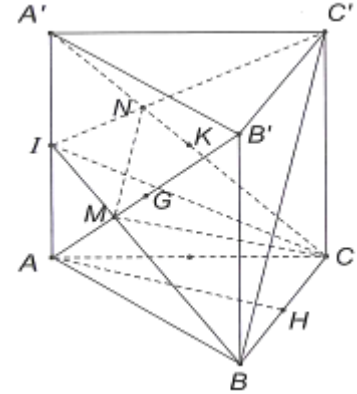
$$\text{Mà } V_1 + V_2 = V \Rightarrow V = \frac{8}{9}V_2.$$

Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC .

Ta được AH vuông góc với mặt phẳng $(BB'C'C)$, AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng khoảng cách từ A đến $(BB'C'C)$ và bằng AH .

$$\text{Ta có: } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, V_2 = \frac{1}{3}d(I; (BB'C'C)) \cdot S_{\Delta BCC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

$$\text{Suy ra: } V = \frac{8}{9}V_2 = \frac{2a^3\sqrt{6}}{27}.$$



Đáp án B.

Câu 337. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ và phương trình $\|f(x) + m\| + m = n$ có 8 nghiệm phân biệt với $m \in (-6; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} -6 < m < -4 \\ 2 < n < -6 - 2m \end{cases}$

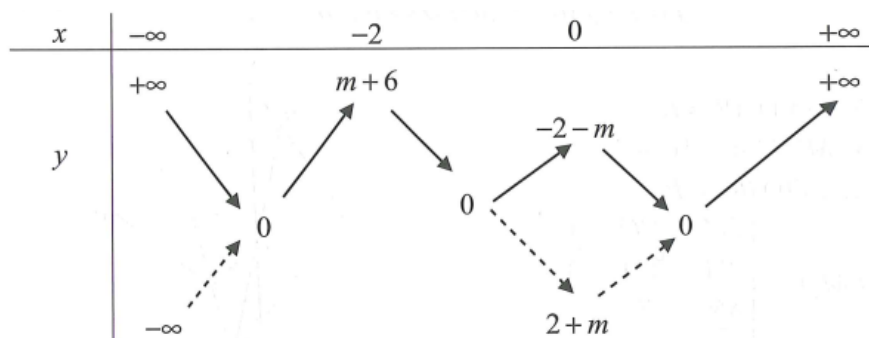
B. $\begin{cases} -3 < m < -2 \\ 6 + 2m < n < 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} -3 < m < -2 \\ -m < n \end{cases}$

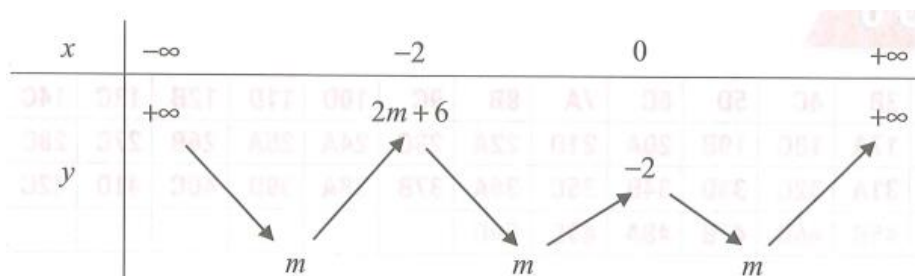
D. $\begin{cases} -3 < m < -2 \\ 0 < n < 6 + 2m \\ 2 < n < -m \end{cases}$

Giải

Ta có bảng biến thiên của $y = |f(x) + m|$



Bảng biến thiên của $y = |f(x) + m| + m$



TH1: $2m + 6 > 0 \Rightarrow m > -3$

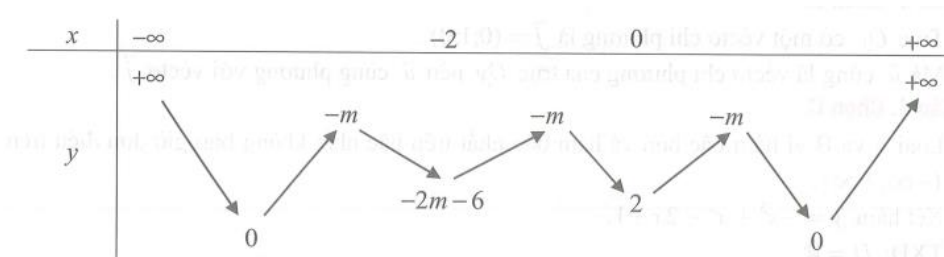
Ta có: $\|f(x) + m\| + m = n \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 0 \\ \begin{cases} |f(x) + m| + m = n \\ |f(x) + m| + m = -n \end{cases} \end{cases}$

Suy ra phương trình $\|f(x) + m\| + m = n$ có 8 nghiệm phân biệt khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < -2 \\ 0 < n < 2m + 6 \\ n > 2m + 6 \\ m < -n < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < -2 \\ 0 < n < 2m + 6 \\ n > 2m + 6 \\ 2 < n < -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < -2 \\ 0 < n < 2m + 6 \\ 2 < n < -m \end{cases}$$

TH2: $2m + 6 \leq 0 \Rightarrow m \leq -3$

Ta có bảng biến thiên của $y = \|f(x) + m\| + m$ như sau:



+ Nếu $-2m - 6 < 2 \Leftrightarrow -4 < m \leq -3$ thì $\|f(x) + m\| + m = n$ có 8 nghiệm phân biệt khi

$$2 < n < -m \text{ hay } \begin{cases} -4 < m \leq -3 \\ 2 < n < -m \end{cases}.$$

+ Nếu $-2m - 6 > 2 \Leftrightarrow -6 < m < -4$ thì $\|f(x) + m\| + m = n$ có 8 nghiệm phân biệt khi

$$-2m - 6 < n < -m \Leftrightarrow 0 < n < -m \text{ hay } \begin{cases} -6 < m < -4 \\ 0 < n < -m \end{cases}.$$

Đáp án D.

Câu 338. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1; 50]$ để z là số thuần ảo?

A. 25.

B. 50.

C. 26.

D. 24.

Giải

$$\text{Ta có: } z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m = \left(\frac{(2+6i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}\right)^m = (2i)^m = 2^m \cdot i^m$$

+ Với $m = 4k (k \in \mathbb{Z})$ thì $z = 2^m$

+ Với $m = 4k + 2 (k \in \mathbb{Z})$ thì $z = -2^m$

+ Với $m = 4k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ thì $z = 2^m \cdot i$

+ Với $m = 4k + 3 (k \in \mathbb{Z})$ thì $z = -2^m \cdot i$

Vậy để z là số thuần ảo thì $\begin{cases} m = 4k + 1 \\ m = 4k + 3 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ mà $1 \leq m \leq 50$

$$\text{Nên } \begin{cases} 1 \leq 4k + 1 \leq 50 \\ 1 \leq 4k + 3 \leq 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 4k \leq 49 \\ -2 \leq 4k \leq 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq k \leq 12,25 \\ -0,5 \leq k \leq 11,75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 12\} \\ k \in \{0; 1; 2; \dots; 11\} \end{cases}$$

Vậy có tất cả $13 + 12 = 25$ giá trị của k thỏa mãn điều kiện, tức cũng có 25 giá trị của m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Đáp án A.

Câu 339. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

A. $m \geq -3$.

B. $m > -3$.

C. $m \geq -2$.

D. $m \leq -2$.

Giải

Điều kiện: $x \geq -1$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^{\sqrt{x+1}} - 3^2 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017 - 2017x \Leftrightarrow (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$.

TH1: $-1 \leq x < 1$ thì $\begin{cases} VT = (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} < 0 \\ VP = 2017(1-x) > 0 \end{cases}$.

Suy ra $(9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$ có nghiệm với $-1 \leq x < 1$.

TH2: $x = 1$ thì $VT = VP$.

TH3: $x > 1$ thì $\begin{cases} VT = (9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} > 0 \\ VP = 2017(1-x) < 0 \end{cases}$.

Suy ra $(9^x - 9)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$ vô nghiệm. Vậy (1) có nghiệm với: $-1 \leq x \leq 1$.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$ (với $-1 \leq x \leq 1$).

Để bất phương trình có nghiệm trên $[-1; 1]$ thì: $m \geq \min_{[-1; 1]} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} = -2$. Vậy $m \geq -2$.

Đáp án C.

Câu 340. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các hàm số $f_o(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ biết:

$$f_o(x) = \ln x + |\ln x - 2019| - |\ln x + 2019|, f_{n+1}(x) = |f_n(x)| - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Số nghiệm của phương trình $f_{2020}(x) = 0$ là

A. 6058.

B. 6057.

C. 6059.

D. 6063.

Giải

Ta có:

$$f_{2020}(x) = 0 \Leftrightarrow f_{2019}(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f_{2018}(x) = 0 \\ f_{2018}(x) = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_{2017}(x) = \pm 1 \\ f_{2017}(x) = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_o(x) = 0 \\ f_o(x) = \pm 2 \\ \dots \\ f_o(x) = \pm 2020 \end{cases}$$

Xét hàm số $y = f_o(x) = \begin{cases} \ln x + 4038; 0 < x < e^{-2019} \\ -\ln x; e^{-2019} \leq x < e^{2019} \\ \ln x - 4038; x \geq e^{2019} \end{cases}$, ta có: $y' = \begin{cases} \frac{1}{x}; 0 < x < e^{-2019} \\ -\frac{1}{x}; e^{-2019} \leq x < e^{2019} \\ \frac{1}{x}; x \geq e^{2019} \end{cases}$

BBT hàm số $y = f_o(x)$

x	0	e^{-2019}	e^{2019}	$+\infty$
y'	+	-	+	
y				$+\infty$

$-\infty \nearrow 2019 \searrow -2019 \nearrow +\infty$

Vậy số nghiệm của phương trình là: $2019.3 + 2 = 6059$.

Đáp án C.

Câu 341. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\sqrt{\log_2 \frac{x}{4}} + \sqrt{\log_3 \frac{y}{9}} + \sqrt{\log_5 \frac{z}{25}} = 3$. Tính giá trị nhỏ nhất của $S = \log_{2001} x \cdot \log_{2018} y \cdot \log_{2019} z$.

- A. $\min S = 27 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
- B. $\min S = 44 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
- C. $\min S = 88 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
- D. $\min S = \frac{289}{8} \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

Giải

Điều kiện: $x \geq 4; y \geq 9; z \geq 25$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{\log_2 \frac{x}{4}} \Rightarrow a^2 = \log_2 \frac{x}{4} \Rightarrow a^2 = \log_2 x - 2 \Rightarrow \log_2 x = a^2 + 2 \\ b = \sqrt{\log_3 \frac{y}{9}} \Rightarrow \log_3 y = b^2 + 2 \\ c = \sqrt{\log_5 \frac{z}{25}} \Rightarrow \log_5 z = c^2 + 2 \end{cases}$$

Khi đó $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \log_{2001} x = \log_{2001} 2 \cdot \log_2 x = (a^2 + 2) \cdot \log_{2001} 2 \\ \log_{2018} y = (b^2 + 2) \cdot \log_{2018} 3 \\ \log_{2019} z = (c^2 + 2) \cdot \log_{2019} 5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = \underbrace{(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2)}_P \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5.$$

$$\text{Ta có: } (a^2 + 2)(b^2 + 2) = (a^2 + 1)(1 + b^2) + a^2 + b^2 + 3 \geq (a + b)^2 + \frac{(a + b)^2}{2} + 3$$

(Bunhiacopxki)

$$\Rightarrow (a^2 + 2)(b^2 + 2) \geq \frac{3}{2}(a + b)^2 + 3 = 3 \left[\frac{1}{2}(a + b)^2 + 1 \right]$$

$$\Rightarrow P = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3 \left[\frac{1}{2}(a + b)^2 + 1 \right] (c^2 + 2)$$

$$= 3 \left[1 + \frac{(a + b)^2}{4} + \frac{(a + b)^2}{4} \right] (c^2 + 1 + 1) \geq 3 \left(c + \frac{a + b}{2} + \frac{a + b}{2} \right)^2 = 3(a + b + c)^2 = 27$$

$$P = 27 \text{ khi } a = b = c = 1 \text{ hay } x = 8, y = 27, z = 125$$

$$\text{Suy ra } S_{\min} = 27 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$$

Đáp án A.

Câu 342. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0; 1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0; 1]$,

thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \leq 3 \int_0^1 f'(x) \cdot f^2(x) dx$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

$$\text{A. } I = 2(\sqrt{e} - 1). \quad \text{B. } I = 2(e^2 - 1). \quad \text{C. } I = \frac{\sqrt{e} - 1}{2}. \quad \text{D. } I = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta có

$$f^3(x) + 4[f'(x)]^3 = 4[f'(x)]^3 + \frac{f^3(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{2} \geq 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3 \cdot \frac{f^3(x)}{2} \cdot \frac{f^3(x)}{2}}$$

$$= 3f'(x) \cdot f^2(x)$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \geq 3 \int_0^1 f'(x) \cdot f^2(x) dx.$$

Mà $\int_0^1 \{f^3(x) + 4[f'(x)]^3\} dx \leq 3 \int_0^1 f'(x) \cdot f^2(x) dx$ nên dấu “=” xảy ra, tức là

$$4[f'(x)]^3 = \frac{f^3(x)}{2} = \frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} f(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \int dx \Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x+C}$$

$$\text{Theo giả thiết } f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2(\sqrt{e} - 1).$$

Đáp án A.

Câu 343. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Với a là tham số thực để bất phương trình $2^x + 3^x \geq ax + 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi đó

- A. $a \in (-\infty; 0)$. B. $a \in (1; 3)$. C. $a \in (3; +\infty)$. D. $a \in (0; 1)$

Giải

Xét trường hợp $a \leq 0$, phương trình không nhận các giá trị âm của x làm nghiệm.

Thật vậy, khi đó $2^x + 3^x < 2$ mà $ax + 2 \geq 2$.

Suy ra loại $a \leq 0$.

Xét trường hợp $a > 0$

$$2^x + 3^x \geq ax + 2 \Leftrightarrow 2^x + 3^x - ax - 2 \geq 0.$$

Đặt $f(x) = 2^x + 3^x - ax - 2, x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - a, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 = a \quad (1).$$

Đặt $g(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2^x \ln^2 2 + 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Suy ra với mỗi giá trị $a > 0$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất là x_0 .

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là x_0 .

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -a < 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x > x_0$ và $f'(x) < 0, \forall x < x_0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(x_0)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 , ta kết hợp với điều kiện đề bài là $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$ suy ra $x_0 = 0$ và $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f(x) = 0$.

Suy ra $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f'(x_0) = 0$

$$\Rightarrow f'(0) = \ln 2 + \ln 3 - a = 0.$$

Suy ra $a = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$.

Như vậy a là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra mệnh đề đúng là $a \in (1; 3)$.

Đáp án C.