



201 câu hỏi hay

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Câu hỏi

Câu 1. [#NTAD].

Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + 3(2m-3)x + m \text{ tại ba điểm phân biệt } A(0;m), B, C \text{ sao cho đường}$$

thẳng OA là phân giác của góc BOC .

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Câu 2. [#NTAD].

Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 399.

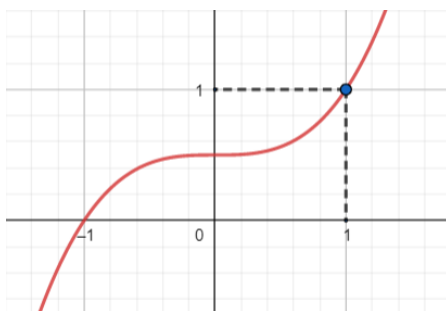
B. 199.

C. 200.

D. 398.

Câu 3. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp các giá trị của m ($m \in \mathbb{R}$) sao cho $(x-1)[m^3 f(2x-1) - m \cdot f(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Số phần tử của tập S là?

A. 2.

B. 0.

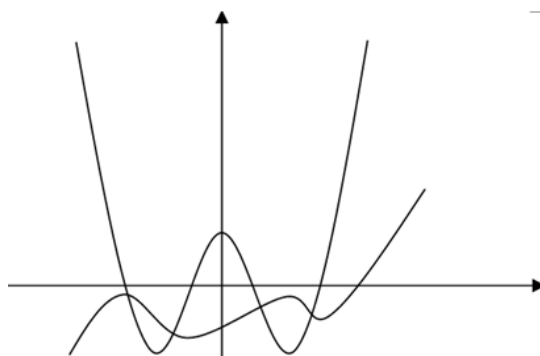
C. 3.

D. 1.

Câu 4. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Biết rằng đồ thị đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(-1;0)$ và điểm $B(1;0)$ thuộc trục hoành. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $f'(-1) \geq f''(1)$.

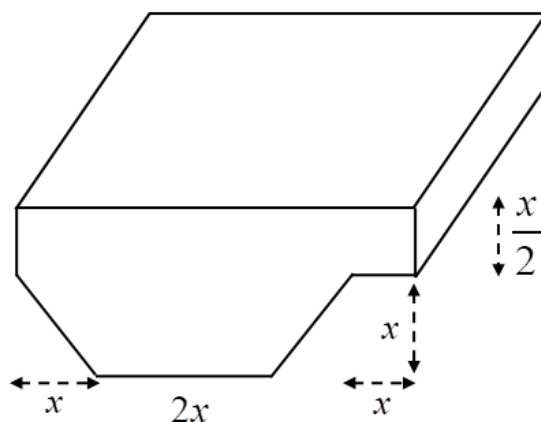
B. $f'(-1) > f''(1)$.

C. $f'(-1) < f''(1)$.

D. $f'(-1) = f''(1)$.

Câu 5. [#NTAD].

Người ta muốn xây dựng một bể bơi (hình vẽ bên dưới) có thể tích là $V = \frac{968}{4 + 2\sqrt{2}} (m^3)$.



Khi đó giá trị thực của x để diện tích xung quanh của bể bơi là nhỏ nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 3)$.

B. $(3; 5)$.

C. $(5; 6)$.

D. $(2; 4)$.

Câu 6. [#NTAD].

Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $c = 8ab$ thì biểu thức $P = \frac{1}{4a + 2b + 3} + \frac{c}{4bc + 3c + 2} + \frac{c}{2ac + 3c + 4}$

đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $2m^2 + n$?

A. 9.

B. 4.

C. 8.

D. 3.

Câu 7. [#NTAD].

Ở loài Ong, Ong đực chỉ có mẹ, còn Ong cái có cả bố và mẹ. Hỏi một con Ong đực có tổ tiên ở đời thứ n tuân theo quy luật dãy số nào trong các dãy số sau?

A. $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} (n \geq 2) \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} (n \geq 2) \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} (n \geq 2) \end{cases}$.

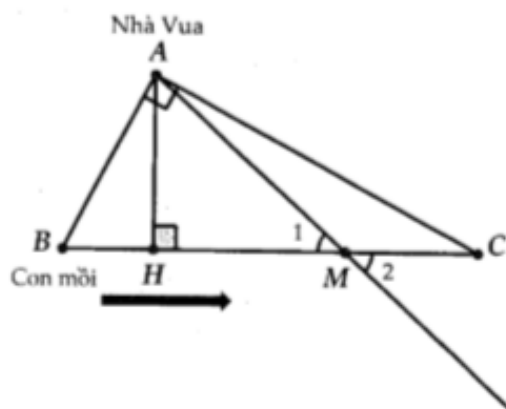
D. $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1}u_{n-2} (n \geq 2) \end{cases}$.

Câu 8. [#NTAD].

Nhân một ngày Thứ năm đẹp trời nhà Vua đến thăm phủ Hoài Đức và dự lễ hội săn bắn. Trường bắn được xây dựng đặc biệt có dạng một tam giác vuông tại A và $AB = 1(km)$ như hình vẽ.

Con mồi chạy trên cạnh huyền theo hướng từ B đến C . Nhà Vua đứng ở vị trí đỉnh A của tam giác vuông và giương cung bắn. Mũi tên trúng con mồi tại điểm M . Tại đó, người hầu xác định được tích vô hướng giữa chiều mũi tên và hướng chạy con mồi thỏa mãn $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{7}{4}$ và

$$AM = \frac{3}{4}BC.$$



Diện tích trường bắn gần số nào nhất trong các số sau?

A. $0,7km^2$.

B. $0,8km^2$.

C. $0,9km^2$.

D. $1km^2$.

Câu 9. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $(2; m)$ có phương trình là $y = 4x - 6$. Tiếp tuyến của các đồ thị hàm số

$y = f[f(x)]$ và $y = f(3x^2 - 10)$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình lần lượt là $y = ax + b$ và $y = cx + d$. Tính giá trị của biểu thức $S = bd^{ac}$ có bao nhiêu chữ số?

A. 2048.

B. 2004.

C. 2022.

D. 2650.

Câu 10. [#NTAD].

Gọi $(a_1; b_1)$ và $(a_2; b_2)$ là hai cặp nghiệm nguyên của phương trình:

$$(y - 2020)(y + 2020) = (2020 - x) - 2x(2020 + y).$$

Tính giá trị của biểu thức $S = (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2)$?

A. 2020.

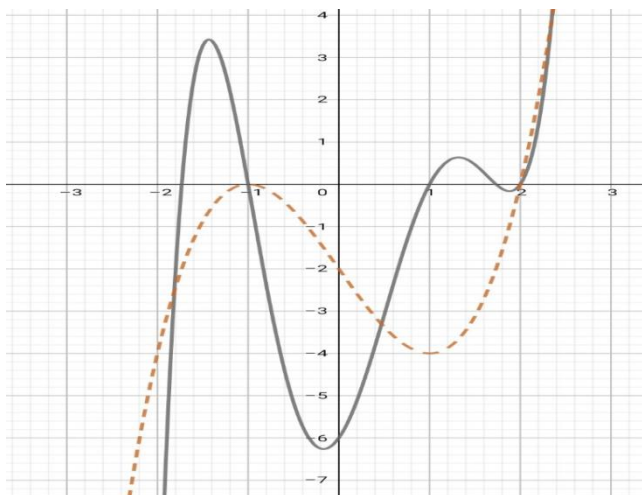
B. 2020^2 .

C. 0.

D. 1.

Câu 11. [#NTAD].

Cho hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ (đường liền nét) và $y = g(x)$ (đường nét đứt) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi N_0 là tổng nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$. Khi đó $N_0 = ?$

- A. $N_0 = 15$. B. $N_0 = 30$. C. $N_0 = 20$. D. $N_0 = 25$.

Câu 12. [#NTAD].

Cho hàm số: $y = f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + m}, m \neq 0$.

Tính tổng: $S = f(e^{-2022m}) + f(e^{-2020m}) + \dots + f(1) + f(e^{2m}) + \dots + f(e^{2020m})$.

- A. $S = 2021$. B. $S = 2020$. C. $S = 0$. D. $S = 1$.

Câu 13. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$. Cho điểm $M(a; b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của

đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua M , đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

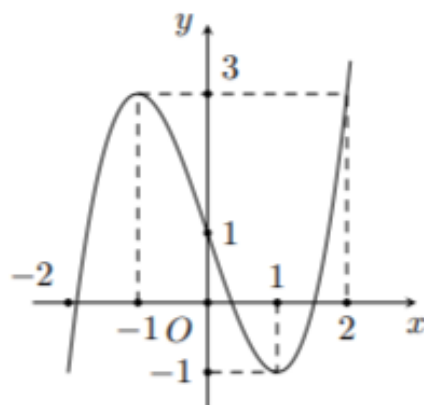
Biết điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là?

- A. 2. B. 4. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Câu 14. [#NTAD]

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để phương trình:

$$\log_3(f(x)+1) - \log_{\sqrt{2}}(f(x)+1) + (2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1} + 2m = 0 \text{ có nghiệm } x \in (-1; 1)?$$



A. 7.

B. 5.

C. Vô số.

D. 6.

Câu 15. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 8?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 16. [#NTAD].

Cho biết $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+12} = \frac{1}{f(x)} + C$, trong đó C là hằng số thực và $f(x)$

có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Khi đó mệnh đề phát biểu nào dưới đây đúng nhất về hàm $f(x)$?

A. Hàm số $y = f(x)$ là một hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.B. Hàm số $y = f(x)$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.C. Hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.**Câu 17. [#NTAD].**

Cho biết $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^3 - 3x \tan^2 x - 2 \tan^3 x}{x^2 - \tan^2 x} dx = \frac{a\pi^2}{b} + 2 \ln \frac{c}{d} + 2 \ln \frac{3\sqrt{3} - \pi}{4 - \pi}$.

Trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$, Phân số $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là những phân số tối giản. Khi đó tổng $a + b + c$ bằng?

A. 251.

B. 296.

C. 283.

D. 299.

Câu 18. [#NTAD].

Biết tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} = \frac{\sqrt{a}}{b}, a, b \in \mathbb{R}$. Tính $S = \frac{b}{a}$?

A. 1.

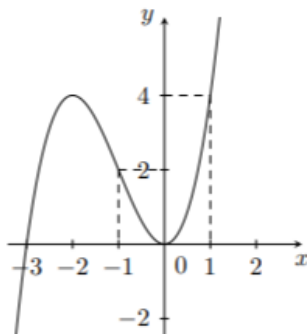
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 19. [#NTAD].

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{m - x^3}$ có hai nghiệm thực phân biệt.



A. $-1 \leq m \leq 1$.

B. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$.

D. $m \geq 1$.

Câu 20. [#NTAD].

Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$ đúng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $\log(x + y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng?

A. $\frac{31}{2}$.

B. $\frac{29}{2}$.

C. $-\frac{31}{2}$.

D. $-\frac{25}{2}$.

Câu 21. [#NTAD].

Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2 \cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thực?

A. 9.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 22. [#NTAD].

Biết phương trình $z^2 - a^3 z + (a + b)^2 = 0 (a, b \in \mathbb{Z}^+)$ có một nghiệm là $z = 2a - bi$.

Tính $a + b$?

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Câu 23. [#NTAD].

Biết đồ thị hàm số $y = (x-1)(x+1)(x^2-7) - m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3, x_4 . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{1-x_3} + \frac{1}{1-x_4} > 1?$$

A. 9.

B. 8.

C. 6.

D. 7.

Câu 24. [#NTAD].

Cho hàm số $y = \left| x^2 - 2x - 4\sqrt{(x+1)(3-x)} + m - 3 \right|$. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max y = 2021$?

A. 4048.

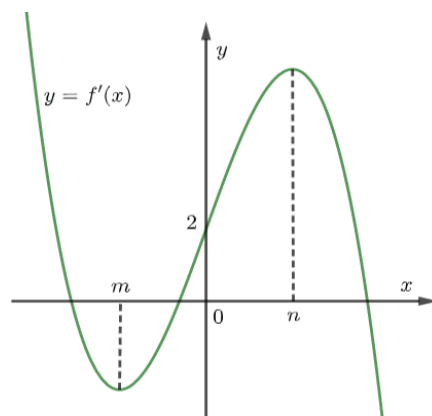
B. 24.

C. 0.

D. 12.

Câu 25. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'[f(x) - 2x]$ bằng

A. 10.

B. 14.

C. 7.

D. 6.

Câu 26. [#NTAD].

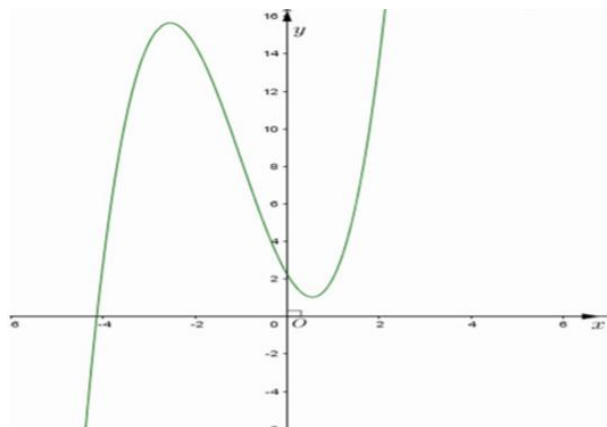
Cho các số thực x, y thỏa mãn $4^{x^2+4y^2} - 2^{x^2+4y^2+1} = 2^{3-x^2-4y^2} - 4^{2-x-4y^2}$. Gọi m, M lần

lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{x-2y-1}{x+y+4}$. Tổng $M + m$ bằng

A. $-\frac{36}{59}$.B. $-\frac{18}{59}$.C. $\frac{18}{59}$.D. $\frac{36}{59}$.

Câu 27. [#NTAD].

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Hỏi phương trình $f(f(x)) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 28. [#NTAD].

Tìm m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$?

A. $2 < m \leq \frac{5}{2}$.B. $\frac{11}{5} < m < 4$.C. $\frac{7}{5} \leq m < 3$.D. $0 < m < \frac{9}{4}$.**Câu 29. [#NTAD].**

Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ với m, n là các tham số thực thỏa mãn $m + n > 0$ và $7 + 2(2m + n) < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$.

A. 9.

B. 5.

C. 11.

D. 2.

Câu 30. [#NTAD].

Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc m ($m > 0$) cắt đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C . Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(5;8)$.B. $(-5;0)$.C. $(0;2)$.D. $(1;5)$.**Câu 31. [#NTAD].**

Biết giá trị của tích phân $I = \int_0^{\pi} \max\{\sin x, \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}\} dx = a + \frac{a\pi\sqrt{a+1}}{b}$. Tính $a^b + b^a$?

A. 15.

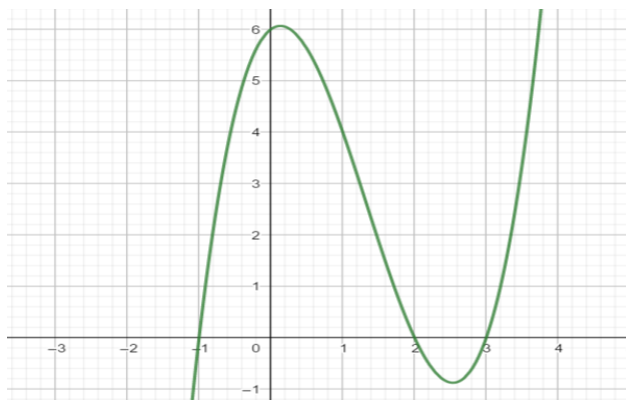
B. 16.

C. 17.

D. 18.

Câu 32. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số với trục hoành ($S_1 > S_2$).



Biết rằng: $\int_{-1}^3 |f(x)| dx = \frac{71}{6}$ và $\frac{S_1}{S_2} = \frac{135}{7}$.

Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arctan 3} (\sin^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x) \cdot f(\tan x) dx$?

- A. $\frac{32}{3}$. B. $\frac{23}{3}$. C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Câu 33. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(mx) = n \cdot f(x) + p, \forall x \in \mathbb{R}, (m \neq 0)$.

Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = q, (q \neq 0)$. Tính tích phân $I = \int_1^m f(x) dx$?

- A. $mn + np - q$. B. $nmq + mp - q$.
C. $pqm - pn + q$. D. $pn + qm - mnpq$.

Câu 34. [#NTAD].

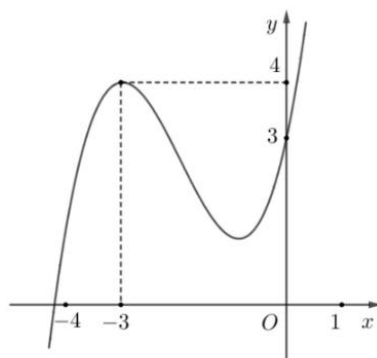
Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|2^{x+1} - 8| = \frac{1}{2}x^2 + m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

- A. 8. B. 9. C. 6. D. 7.

Câu 35. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên

$m \in [-10; 10]$ để bất phương trình $f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0$ có nghiệm.



A. 9.

B. 10.

C. 12.

D. 11.

Câu 36. [#NTAD].

Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hai bạn A, B mỗi người chọn ngẫu nhiên một tập con của S . Xác suất để tập con của A và B chọn được có đúng 2 phần tử chung gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 15,08%.

B. 29,66%.

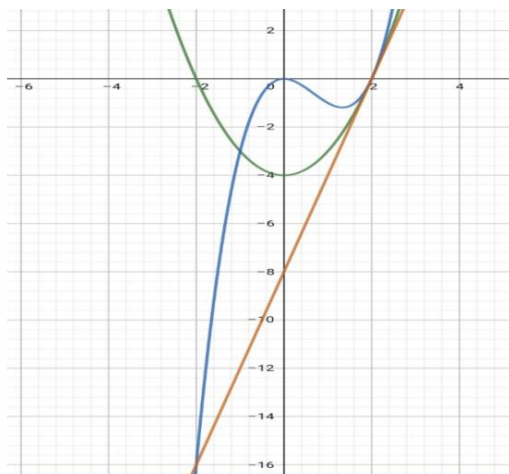
C. 30,16%.

D. 14,83%.

Câu 37. [#NTAD].

Cho hai đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = g(x) = ex^2 + fx + g$ ($a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Gọi (d) là tiếp tuyến chung của hai đồ thị trên và S_0 là phần diện tích giới hạn bởi 3 đường $y = f(x), y = g(x), (d)$. Biết

$S_0 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{p}{q}$ với m, n, p, q là những số nguyên tố. Tính tổng $S = m + n + p + q$?

A. $S = 17$.B. $S = 16$.C. $S = 18$.D. $S = 19$.

Câu 38. [#NTAD].

Cho hàm số $y = x^3 + (3 - 2m)x^2 + (9m - 31)x + 27 - 7m$ có đồ thị là (C) . Biết rằng ứng với giá trị nguyên $m = m_1$ thì hàm số (C) cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số cộng có các phân tử đều nguyên dương và ứng với giá trị nguyên $m = m_2$ thì hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số nhân có các phân tử đều nguyên dương. Tính $S = m_1 - m_2$?

- A. 11. B. -1. C. 1. D. 0.

Câu 39. [#NTAD].

Cho đa thức bậc bốn $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = 2$ và hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ là hàm số lẻ. Biết rằng:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2029x}{x} = 2021.$$

Giá trị của biểu thức: $S = |f(0) - f(-2)| + |f(0) - f(2)| = ?$

- A. $S = 16$. B. $S = 8$. C. $S = 4$. D. $S = 0$.

Câu 40. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = 2019$. Tính giá trị

của tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx$ là?

- A. 2019. B. 4038. C. -2019. D. -4038.

Câu 41. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên toàn tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức:

$$f(x+1) + f(x+2) = x^2 + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính giá trị của tích phân } \int_1^5 f(x) dx = ?$$

- A. $\frac{43}{3}$ B. 12 C. $\frac{44}{3}$ D. $\frac{37}{3}$

Câu 42. [#NTAD].

Biết $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{11}}} \right) dx = \frac{a}{b} \sqrt[3]{c}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $c < a$.

Tính $S = a + b - c$?

- A. $S = 51$. B. $S = 39$. C. $S = 67$. D. $S = 75$.

Câu 43. [#NTAD].

Gọi a, b là các số nguyên thoả mãn $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 43^\circ) = 2^a (1 + \tan b^\circ)$ đồng thời $a, b \in [0; 90]$. Tính $P = a + b$?

- A. 46. B. 22. C. 44. D. 27.

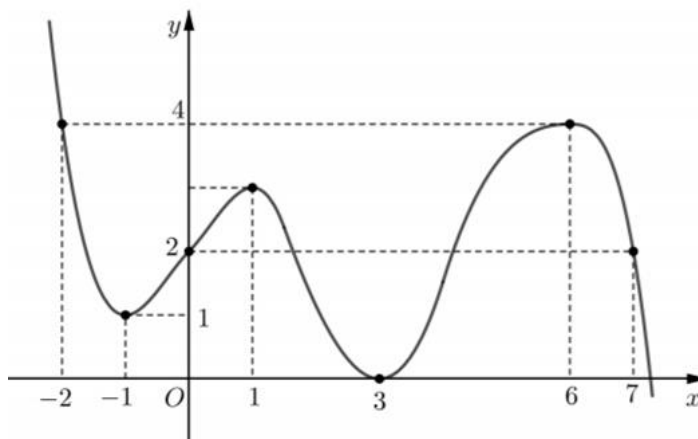
Câu 44. [#NTAD].

Một cửa hàng kem có bán bốn loại kem: kem socola, kem sữa, kem đậu xanh và kem thập cẩm. Một người vào cửa hàng kem mua 8 cốc kem. Xác suất trong 8 cốc kem đó có đủ cả bốn loại kem bằng

- A. $\frac{5}{14}$. B. $\frac{5}{13}$. C. $\frac{7}{33}$. D. $\frac{5}{12}$.

Câu 45. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây:



Số nghiệm của phương trình $f(3\sin x) = 3|\cos x|$ trên khoảng $\left(0; \frac{9\pi}{2}\right)$ là?

- A. 16. B. 17. C. 15. D. 18.

Câu 46. [#NTAD].

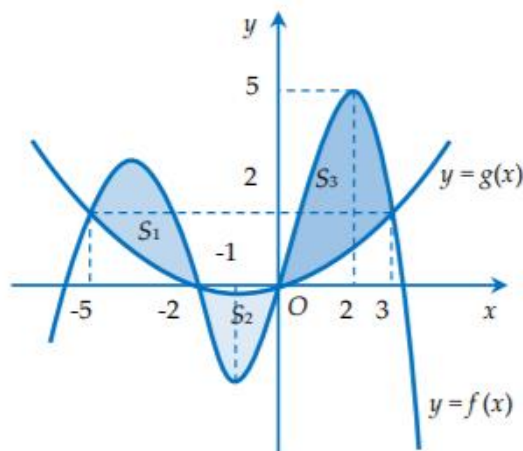
Xét trong tập hợp các khối nón tròn xoay có cùng góc ở đỉnh $2\beta = 90^\circ$ và có độ dài đường sinh bằng nhau. Có thể sắp xếp được tối đa bao nhiêu khối nón thoả mãn cứ hai khối nón bất kì thì chúng chỉ có đỉnh chung hoặc ngoài đỉnh chung đó ra chúng có thể có chung một đường sinh duy nhất?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Câu 47. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường Parabol

$y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p .



Giá trị của tích phân $\int_{-5}^3 f(x) dx$ bằng?

A. $-m + n - p - \frac{208}{45}$

B. $m - n + p + \frac{208}{45}$

C. $m - n + p - \frac{208}{45}$

D. $-m + n - p + \frac{208}{45}$

Câu 48. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức

$P = 2M - m$ có dạng $a\sqrt{11} - b\sqrt{3} + c, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $a + b + c$?

A. $a + b + c = 4$.

B. $a + b + c = 7$.

C. $a + b + c = 6$.

D. $a + b + c = 5$.

Câu 49. [#NTAD]

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn:

$$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x f'(x) dx = \int_0^1 e^x f''(x) dx \neq 0.$$

Giá trị của biểu thức $\frac{e \cdot f'(1) - f'(0)}{e \cdot f(1) - f(0)}$ bằng?

A. -2 .

B. -1 .

C. 2 .

D. 1 .

Câu 50. [#NTAD].

Cho hàm số: $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện:

$$\begin{cases} -6x^2 \left[2[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) \right] = [3x \cdot f'(x) - f(x)] \cdot f(x) \\ f(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ -216 \cdot [f'(1)]^3 = f^3(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tính giá trị của $A = \int_1^{e^2} f^3(x) dx$?

A. $4 - \frac{6}{\sqrt{e}}$.

B. $6 - \frac{4}{\sqrt{e}}$.

C. $e - 1$.

D. $e^{6 - \frac{4}{\sqrt{e}}}$.

Câu 51. [#NTAD].

Tính tích phân: $I = \int_0^2 \frac{1}{3 - 3t + t^2 + \sqrt{5 - 10t + 9t^2 - 4t^3 + t^4}} dt$?

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{6} - 2$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $1 - \frac{\pi}{4}$.

Câu 52. [#NTAD].

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|2|x| - 6| = m||x| - 1|$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (0; 1) \cup (6; +\infty)$.

B. $m \in (0; 2) \cup (6; +\infty)$.

C. $m \in (0; 3) \cup (5; +\infty)$.

D. $m \in (0; 1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 53. [#NTAD].

Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

I) $\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8$;

II) $\left(\frac{2}{a} + b + c\right) \left(\frac{2}{b} + c + a\right) \left(\frac{2}{c} + a + b\right) \geq 64$;

III) $a + b + c < abc$.

Bất đẳng thức nào đúng?

A. Cả ba đều đúng.

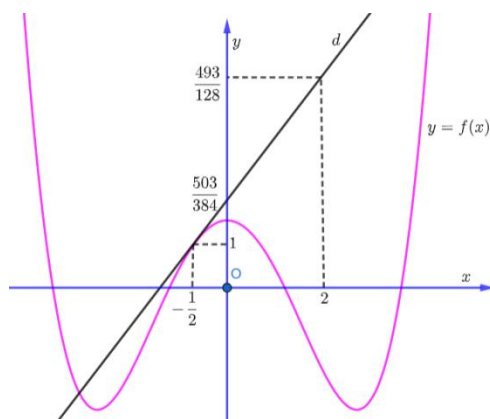
C. Chỉ II) đúng.

B. Chỉ I) đúng.

D. Chỉ I) và II) đúng.

Câu 54. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Biết đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$. Tính

giá trị của tích phân: $I = \int_{-2}^{-1} f''\left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$.

A. $I = \frac{61}{24}$.

B. $I = -\frac{61}{24}$.

C. $I = -\frac{109}{24}$.

D. $I = \frac{109}{24}$.

Câu 55. [#NTAD].

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_m = n \\ u_n = m \end{cases}$. Tính u_{2021} ?

A. $u_{2021} = \frac{1}{2}(m + n + 2021)$.

B. $u_{2021} = \frac{1}{2}(m + n - 2021)$.

C. $u_{2021} = m + n - 2021$.

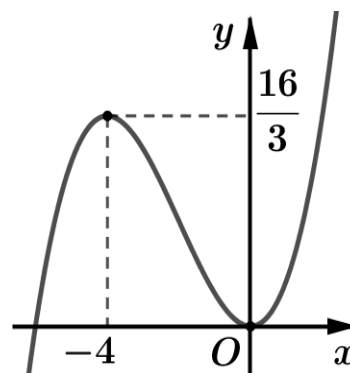
D. $u_{2021} = m + n + 2021$.

Câu 56. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Với m là tham số bất kì thuộc $[0;1]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x^2) = 3\sqrt{m} + 4\sqrt{1-m}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 2. B. 3.
C. 5. D. 9.

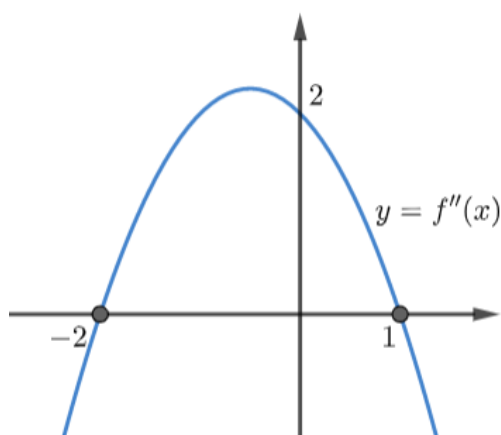
**Câu 57. [#NTAD].**

Hai chuồng nhốt thỏ, mỗi con thỏ có lông chỉ mang màu trắng hoặc màu đen. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng một con thỏ. Biết tổng số thỏ trong hai chuồng là 35 và xác suất để bắt được hai con thỏ lông màu đen là $\frac{247}{300}$. Xác suất để bắt được hai con thỏ lông màu trắng bằng

- A. $\frac{1}{75}$. B. $\frac{7}{75}$. C. $\frac{1}{150}$. D. $\frac{7}{150}$.

Câu 58. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(-2) = -8$, $f'(1) = 4$ và đồ thị của của hàm số $f''(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = 2f(x-3) + 16x + 1$ đạt giá trị lớn nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?



- A. $(0;4)$. B. $(4;+\infty)$. C. $(-\infty;1)$. D. $(-2;1)$.

Câu 59. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2 - f(x) - 2019} = 0 \text{ và } f(0) = -2019.$$

Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $f(x) < 7$ là?

- A. 91. B. 46. C. 45. D. 44.

Câu 60. [#NTAD].

Biết rằng có số thực $a > 0$ sao cho $a^{3\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Chọn mệnh đề **đúng**.

- A. $a \in \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$. B. $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. C. $a \in \left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$. D. $a \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 61. [#NTAD].

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 365 \\ 10u_3 + u_7 = 9u_1 + 10u_5 \end{cases}$. Tính u_5 ?

- A. $u_5 = 1000$. B. $u_5 = 504$. C. $u_5 = 405$. D. $u_5 = 250$.

Câu 62. [#NTAD].

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ có được lập từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để chọn được một số tự nhiên có tích các chữ số bằng 7875.

- A. $\frac{1}{5000}$. B. $\frac{1}{15000}$. C. $\frac{18}{5^{10}}$. D. $\frac{4}{3 \cdot 10^4}$.

Câu 63. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + (m-2)x + 2-m}{x-1} \right|$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập

hợp tất cả các giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;3]} f(x) + 2 \max_{[2;3]} f(x) = \frac{7}{4}$. Số tập con của tập S là?

- A. 1. B. 2. C. 8. D. 4.

Câu 64. [#NTAD].

Giả sử hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$ có hai nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.

Tích $S = x_1 x_2 y_1 y_2$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $-0,26$.B. $0,25$.C. $-0,25$.D. $0,26$.**Câu 65. [#NTAD].**

Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ và có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d) . Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $|x_1^3 - x_2^3|$ là?

A. -2 .B. 2 .C. -4 .D. 4 .**Câu 66. [#NTAD].**

Biết phương trình: $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt có dạng $x_1 = \tan^2(a^0)$, $x_2 = \tan^2(b^0)$, $x_3 = \tan^2(c^0)$. Nhận xét nào sau đây là đúng về a, b, c ?

A. Bộ ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.B. Bộ ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.C. Bộ ba số a, b, c theo thứ tự vừa lập thành một cấp số cộng, đồng thời lập thành một cấp số nhân.

D. Không có quy luật nào.

Câu 67. [#NTAD].

Cho Parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích hình phẳng bị giới hạn bởi đường thẳng AB và Parabol trên đạt giá trị lớn nhất bằng?

A. $\frac{4}{3}$ B. 4 C. $\frac{6}{5}$ D. 1 **Câu 68. [#NTAD].**

Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{13} x dx = \frac{\ln 2}{c} - \frac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tổng $a + b + c$?

A. 157 B. 159 C. 43 D. 45 **Câu 69. [#NTAD].**

Biết tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} = \sqrt{b^2 - 1} - \sqrt{a}$. Tính $S = a - |b|$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 70. [#NTAD].

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f^2(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2 \cdot g(x) + 36x = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } A = 3f(2) + 4f'(2)?$$

- A. 11. B. 13. C. 14. D. 10.

Câu 71. [#NTAD].

Cho phương trình $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x)} - 9$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

- A. 1. B. 2021. C. 4043. D. 0.

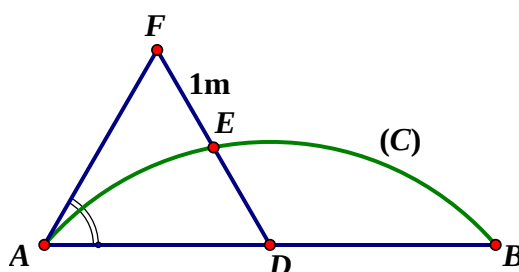
Câu 72. [#NTAD].

Có bao nhiêu cách phân tích số 15^9 thành tích của ba số nguyên dương, biết rằng các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính một lần?

- A. 517. B. 516. C. 493. D. 492.

Câu 73. [#NTAD].

Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vương cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây lan can là cung tròn đi qua điểm E cách D một khoảng là $1m$ (D là trung điểm của AB). Biết $AF = 2m$, $DAF = 60^\circ$ và lan can cao $1m$ làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/ m^2 . Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng ngàn).



- A. 8,124,000. B. 9,977,000. C. 10,405,000. D. 7,568,000.

Câu 74. [#NTAD].

Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2021}(x+y) \leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1$.

- A. $m = -\frac{1}{3}$. B. $m = 2$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = 0$.

Câu 75. [#NTAD].

Hai bạn Hùng và Chương cùng dự thi trong kì thi THPT Quốc Gia năm 2021 và ở hai phòng thi khác nhau. Mỗi phòng thi có 24 thí sinh, mỗi môn thi có 24 mã đề khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho thí sinh một cách ngẫu nhiên. Xác suất để trong hai môn thi Toán và Tiếng Anh, Hùng và Chương có chung đúng một mã đề thi bằng

- A. $\frac{32}{235}$. B. $\frac{46}{2209}$. C. $\frac{23}{288}$. D. $\frac{23}{576}$.

Câu 76. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 1$ và các số thực m, n thỏa mãn:

$m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f\left(\frac{m-2\sqrt{2}}{n}\right)$ bằng?

- A. 4. B. -99. C. 5. D. -100.

Câu 77. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} + (a^2 - 2a - 2)\sqrt{a^4 - 10a^2 + 10 - x}$ với a là tham số. Có bao nhiêu giá trị a để f là hàm số chẵn?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 78. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = \log_2 \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$. Giá trị của biểu thức

$f(f(1)) + f(f(2)) + \dots + f(f(2021))$ bằng?

- A. 2021. B. 2022. C. 2021.2022. D. $\frac{2021.2022}{2}$.

Câu 79. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Đặt $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^6(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?

- A. 365. B. 1092. C. 1094. D. 363.

Câu 80. [#NTAD].

Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã được ghi sẵn địa chỉ cần gửi. Tính xác suất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

A. $\frac{5}{8}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{7}{8}$.

Câu 81. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = f(x) + x^2 \cdot e^x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Tính $f(3)$.

A. $6e^3 + 3$.

B. $6e^2 + 2$.

C. $3e^2 - 1$.

D. $9e^3 - 1$.

Câu 82. [#NTAD].

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 1, BC = 2$.

Góc $CBB' = 90^\circ, ABB' = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' . Biết $d(AB', CM) = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $2\sqrt{2}$.

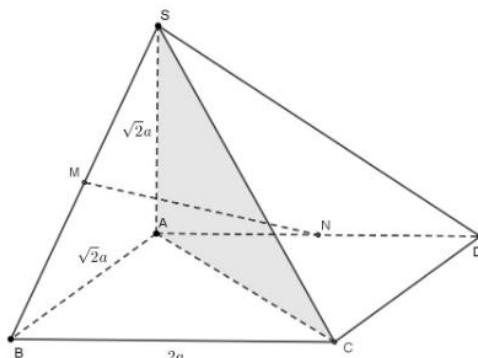
B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 83. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = \sqrt{2}a, AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và AD (tham khảo hình vẽ). Cosin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) bằng?



A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 84. [#NTAD].

Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành,

$AD = 4a, SA = SB = SC = SD = \sqrt{6}a$ Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích đạt giá trị lớn nhất, sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng?

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 85. [#NTAD].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $(C): y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Không tồn tại.

Câu 86. [#NTAD].

Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đặt $AM = x; AN = y$. Tìm $x; y$ để diện tích toàn phần của tứ diện $DAMN$ nhỏ nhất.

A. $x = y = \frac{2}{3}$.

B. $x = y = \frac{1}{3}$.

C. $x = y = \frac{7}{4}$.

D. $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$.

Câu 87. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $4\pi(dm^2)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $\frac{2}{7}dm$.

B. $\frac{3}{7}dm$.

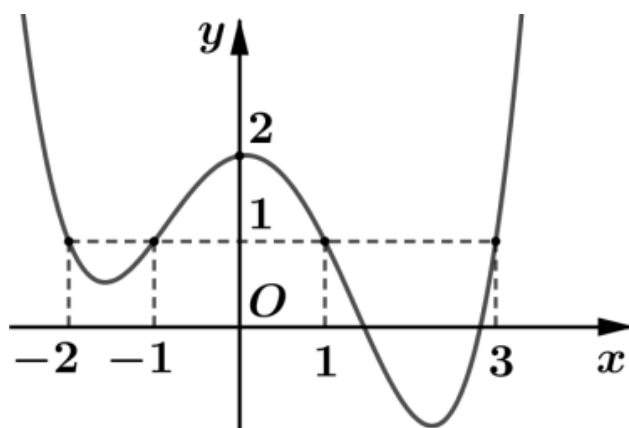
C. $\frac{4}{7}dm$.

D. $\frac{6}{7}dm$.

Câu 88. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Đặt

$$K = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx, \text{ khi đó } K \text{ thuộc khoảng nào sau đây?}$$



- A. $(-3; -2)$. B. $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$. D. $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.

Câu 89. [#NTAD].

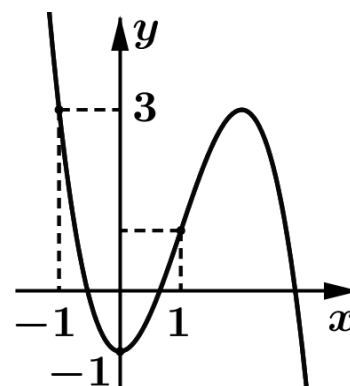
Tại trạm xe buýt có 5 hành khách đang chờ xe đón, không ai quen nhau trong đó có anh A và chị B. Khi đó có 1 chiếc xe ghé trạm đón khách, biết rằng lúc đó trên xe chỉ còn đúng 5 ghế trống mỗi ghế trống chỉ 1 người ngồi gồm có 1 dãy ghế trống 3 chỗ và 2 chỗ ghế đơn để chở 5 người. Tham khảo hình vẽ bên các ghế trống được ghi là (1), (2), (3), (4), (5) và 5 hành khách lên ngồi ngẫu nhiên vào 5 chỗ trống. Xác suất để anh A và chị B ngồi cạnh nhau bằng ?

Tài xế					
X	X	①	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	②	X
X	X	X	X	X	X
③	④	⑤	X	X	X

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 90. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là?



- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 91. [#NTAD].

Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, trả lời sai thì bị trừ 0,5 điểm. Một thí sinh do không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là?

- A. $\frac{7}{10}$. B. $C_{10}^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2$. C. $A_{10}^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2$. D. $\frac{109}{262144}$.

Câu 92. [#NTAD].

Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n = P_{2021}$, với P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử.

- A. $2021 \cdot \frac{2021 \cdot 2022}{2}$. B. 2021. C. 2020. D. 2022.

Câu 93. [#NTAD].

Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ và thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Giá trị lớn nhất của a bằng?

- A. 1. B. $\log(2^e - 1)$. C. $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$. D. $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$.

Câu 94. [#NTAD].

Xét các hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn các điều kiện: đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng a . Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất V_0 khi cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\sqrt{\frac{p}{q}}$, trong đó p, q là các số nguyên dương và phân số $\frac{p}{q}$ là tối giản. Tính $T = (p + q) \cdot V_0$.

- A. $T = 3\sqrt{3}a^3$. B. $T = \sqrt{6}a^3$. C. $T = 2\sqrt{3}a^3$. D. $T = \frac{5\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 95. [#NTAD].

Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Gọi I là trung điểm của cạnh SA và J là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SJ = 2JB$. Mặt phẳng chứa IJ và song song với SC cắt các cạnh BC, CA lần lượt tại K và L . Thể tích khối đa diện $SCLKJI$ bằng?

- A. $\frac{11}{18}$. B. $\frac{7}{18}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{5}{9}$.

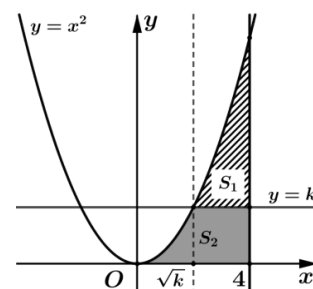
Câu 96. [#NTAD].

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O ; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) . Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCD) lần lượt là 1; 2; $\sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD) .

- A. $d = \sqrt{\frac{20}{19}}$. B. $d = \sqrt{\frac{19}{20}}$. C. $d = \sqrt{2}$. D. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 97. [#NTAD].

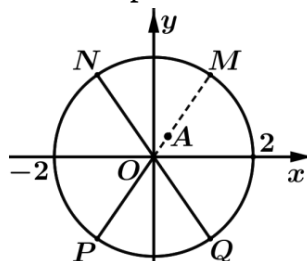
Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 16$) chia hình H thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1 = S_2$.



- A. $k = 3$. B. $k = 4$.
C. $k = 5$. D. $k = 8$.

Câu 98. [#NTAD].

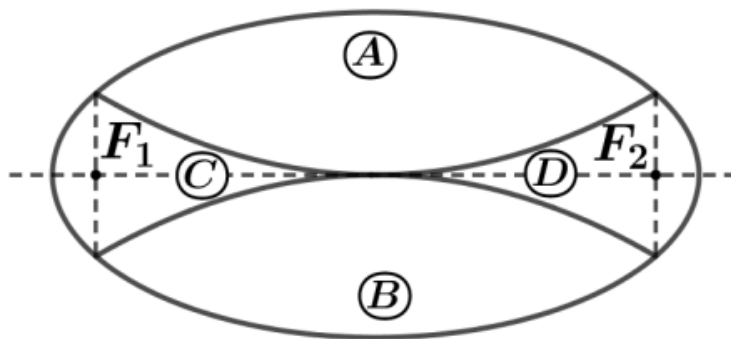
Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{1}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{z}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là?



- A. Điểm M . B. Điểm Q . C. Điểm N . D. Điểm P .

Câu 99. [#NTAD].

Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình Elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường Parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của Elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của Elip lần lượt là 8 m và 4 m; F_1, F_2 là hai tiêu điểm của Elip.



Phần A, B dùng để trồng hoa; phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông trồng hoa và trồng cỏ lần lượt là 250000 đồng và 150000 đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 4656000 đồng.

B. 4766000 đồng.

C. 5455000 đồng.

D. 5676000 đồng.

Câu 100. [#NTAD].

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Biết $AB = a$ và $C'A$ hợp với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 45° , gọi V là thể tích khối lăng trụ. Tỉ số $\frac{V}{a^3}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.B. $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.D. $\left(\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$.**Câu 101. [#NTAD].**

Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = CD = BD = 2a$, $AC = AD = a\sqrt{2}$, $AB = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) có số đo là?

A. 90° .B. 60° .C. 45° .D. 30° .**Câu 102. [#NTAD].**

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V . Tính V .

A. $\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.B. $\frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$.C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.D. $\frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$.

Câu 103. [#NTAD].

Một hôm anh Nhân lội bộ sang East Anglia thấy di nê, người ta á, sau khi thu hoạch lúa xong, rơm được cuộn thành những cuộn hình trụ và được xếp chở về nhà. Mỗi đồng rơm thường được xếp thành 5 chồng sao cho các cuộn rơm tiếp xúc với nhau (tham khảo hình vẽ).



Giả sử bán kính của mỗi cuộn rơm là 1m. Tính chiều cao SH của đồng rơm?

- A. $(4\sqrt{3} + 2)m$. B. $5\sqrt{3}m$. C. $4\sqrt{3}m$. D. $(2\sqrt{3} + 1)m$.

Câu 104. [#NTAD].

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $\frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$.

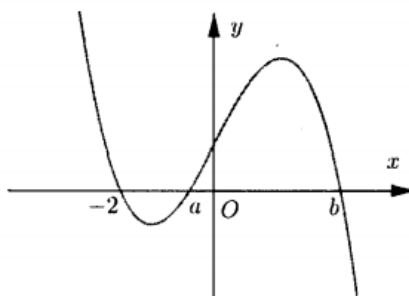
- A. $n = 101$. B. $n = 98$. C. $n = 99$. D. $n = 100$.

Câu 105. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox hoành tại ba điểm có hoành độ $-2 < a < b$ như hình vẽ. Biết rằng

$$f(-2) + f(1) = f(a) + f(b).$$

Đề hàm số $y = |f(x+m)|$ có 7 điểm cực trị thì mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(a) > 0 > f(-2)$.

B. $f(-2) > f(a) > 0$.

C. $f(b) > 0 > f(a)$.

D. $f(b) > 0 > f(-2)$.

Câu 106. [#NTAD].

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng?

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a}{6}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Câu 107. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = 4\text{cm}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Lấy M thuộc SC sao cho $CM = 2MS$. Khoảng cách giữa hai đường AC và BM là?

A. $\frac{4\sqrt{21}}{7}\text{cm}$.

B. $\frac{8}{\sqrt{13}}\text{cm}$.

C. $\frac{9\sqrt{21}}{4}\text{cm}$.

D. $\frac{2\sqrt{10}}{3}\text{cm}$.

Câu 108. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) .

A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{10}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

D. $\frac{3}{2\sqrt{10}}$.

Câu 109. [#NTAD].

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $f(ab + bc + ca + 3) + f(2 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2) = 1$ với

hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 4}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{a + b + c + 3}$ bằng?

A. $\frac{17}{6}$.

B. 3.

C. $\frac{13}{6}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Câu 110. [#NTAD].

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

B. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

C. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

D. $y = -\frac{1}{4}x + 3$ và $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Câu 111. [#NTAD].

Cho phương trình $(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})\left(m\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 16\sqrt[4]{x^2+x}\right) = 1$ với m là tham số thực.

Tìm số các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 112. [#NTAD].

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $BAC = 135^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB , SC lần lượt là M , N . Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là?

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 75° .

Câu 113. [#NTAD].

Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(2) = 4$.

Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx$?

A. $J = 1 + \ln 4$.

B. $J = 4 - \ln 2$.

C. $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

D. $J = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Câu 114. [#NTAD].

Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và

$g(x) = f(mx^2 + nx + p)$ ($m, n, p \in \mathbb{Q}$) có đồ thị như hình dưới

(đường nét đậm là đồ thị của hàm $g(x)$, đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$

là trục đối xứng của đồ thị hàm số $g(x)$). Giá trị của biểu thức

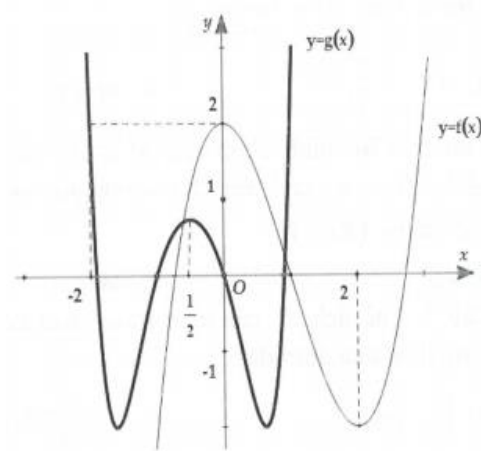
$P = (n+m)(m+p)(p+2n)$ bằng bao nhiêu?

A. 12.

B. 16.

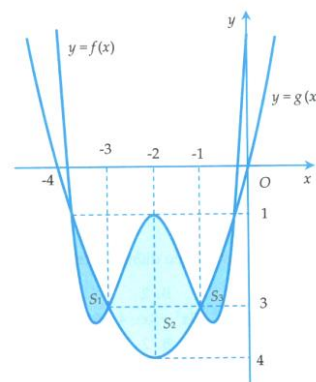
C. 24.

D. 6.



Câu 115. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 20x + 3$ và hàm số $y = g(x) = a(x+2)^2 + b$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường cong $y = g(x)$ lần lượt là m, n, p . Tính $M = a - b + m - p + n$.



- A. $M = \frac{2456}{15}$. B. $M = \frac{2531}{15}$. C. $M = \frac{2411}{15}$. D. $M = \frac{2501}{15}$.

Câu 116. [#NTAD].

Cho bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 5$. Biết $[a; b]$ tập tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình thỏa mãn với mọi x thuộc $[0; 2]$. Tính $a + b$?

- A. $a + b = 6$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = 0$. D. $a + b = 0$.

Câu 117. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$, tính $f^2(2)$.

- A. $f^2(2) = \ln 2 + 1$. B. $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.
C. $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$. D. $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$.

Câu 118. [#NTAD].

Cho hàm số $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ với $x > 0$. Tính $g'(e^2)$.

- A. $g'(e^2) = \frac{e^2 - 1}{2}$. B. $g'(e^2) = \frac{1 - e^2}{2}$. C. $g'(e^2) = \frac{1}{2}$. D. $g'(e^2) = 2$.

Câu 119. [#NTAD].

Cho khai triển $(2018x^2 + x + 6055)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}$. Tính tổng sau:

$$S = a_0 - 3a_2 + 3^2a_4 - \dots + 3^{2018}a_{4036}$$

- A. -2^{2017} . B. 2^{2017} . C. -2^{2018} . D. 2^{2018} .

Câu 120. [#NTAD].

Cho tứ diện $OPQR$ có OP, OQ, OR đôi một vuông góc. Gọi A, B, C lần lượt là trung điểm các cạnh RQ, PR, PQ . Biết rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC) , tính giá trị của biểu thức $\tan ABC \cdot \tan ACB$.

A. $\tan ABC \cdot \tan ACB = \frac{1}{2}$.

B. $\tan ABC \cdot \tan ACB = 2$.

C. $\tan ABC \cdot \tan ACB = 1$.

D. $\tan ABC \cdot \tan ACB = 3$.

Câu 121. [#NTAD].

Ba cầu thủ sút phạt đến $11m$, mỗi người đá một lần với xác suất ghi bàn tương ứng là x, y và $0,6$ ($x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là $0,976$ và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là $0,336$. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

A. $P = 0,452$.

B. $P = 0,435$.

C. $P = 0,4525$.

D. $P = 0,4245$.

Câu 122. [#NTAD].

Phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2018\pi)$?

A. 2018 nghiệm.

B. 1008 nghiệm.

C. 2017 nghiệm.

D. 1009 nghiệm.

Câu 123. [#NTAD].

Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0; b \neq 0$) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số

$$y = g(x) = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^2 - 2(6ax^2 + 3bx + c)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu điểm?

A. 6.

B. 0.

C. 4.

D. 2.

Câu 124. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 2 - e$.

B. $I = e - 2$.

C. $I = \frac{e}{2}$.

D. $I = \frac{e-1}{2}$.

Câu 125. [#NTAD].

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ và $\log(11-2x-y) = 2y+4x-1$. Xét biểu thức $P = 16yx^2 - 2x(3y+2) - y + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P . Khi đó giá trị của $T = m + 4M$ bằng bao nhiêu?

- A. 16. B. 18. C. 17. D. 19.

Câu 126. [#NTAD].

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để các chữ số của số đó đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 0 và 1.

- A. $\frac{7}{125}$. B. $\frac{7}{150}$. C. $\frac{189}{1250}$. D. $\frac{7}{375}$.

Câu 127. [#NTAD].

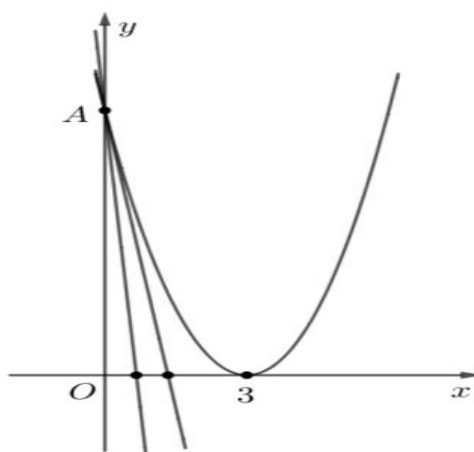
Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)f'(x) = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_1^2 f(x)dx = a$ và

$f(1) = b, f(2) = c$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x}{f(x)} dx$ bằng?

- A. $2c - b - a$. B. $2a - b - c$. C. $2c - b + a$. D. $2a - b + c$

Câu 128. [#NTAD].

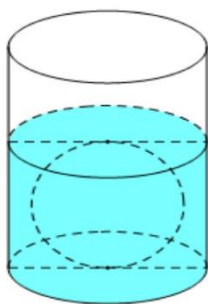
Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = (x-3)^2$, trục hoành và trục tung. Gọi $k_1, k_2 (k_1 > k_2)$ lần lượt là hệ số góc của đường thẳng qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) thành ba hình mặt phẳng có diện tích bằng nhau(tham khảo hình vẽ bên). Giá trị của $k_1 - k_2$ bằng?



- A. $\frac{13}{2}$. B. 7. C. $\frac{25}{4}$. D. $\frac{27}{4}$.

Câu 129. [#NTAD].

Người ta thả một viên bi sắt có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn $4,5\text{cm}$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên bi sắt đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\text{cm}$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong lòng cốc bằng $4,5\text{cm}$. Bán kính của viên bi sắt đó bằng

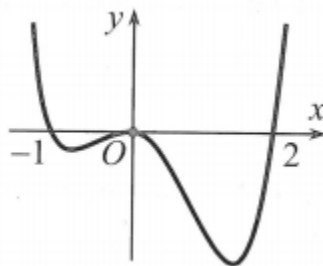
A. $4,2\text{cm}$.B. $3,6\text{cm}$.C. $2,6\text{cm}$.D. $2,7\text{cm}$.**Câu 130. [#NTAD].**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho sáu điểm

$A(0;1;2), B(2;-1;-2); C(3;1;2)$, A', B', C' thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ thì G' có tọa độ là?

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.B. $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.C. $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.D. $(5;1;2)$.**Câu 131. [#NTAD].**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây sai?



A. $\int_{-1}^0 f(x)dx < \int_0^2 f(x)dx$.

B. $\int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx < 0$.

C. $-\int_0^2 f(x)dx > 0$.

D. $\int_{-1}^0 f(x)dx < 0$.

Câu 132. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD , đặt $CM = x$, $CN = y$. Xác định hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau.

A. $2a^2 = 2a(x+y) - xy$.

B. $2a = x + y$.

C. $a^2 = a(x+y) - 2xy$.

D. $a(x-y) = (x+y)^2$.

Câu 133. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in [4;8]$. Biết

rằng $\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}, f(8) = \frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $f(6) = \frac{5}{8}$.

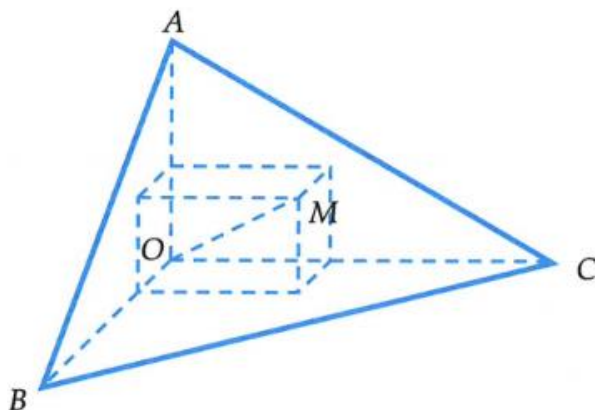
B. $f(6) = \frac{2}{3}$.

C. $f(6) = \frac{3}{8}$.

D. $f(6) = \frac{1}{3}$.

Câu 134. [#NTAD].

Có một khối gỗ dạng hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = 3cm, OB = 6cm, OC = 12cm$. Trên mặt phẳng (ABC) người ta đánh dấu một điểm M , sau đó người ta cắt gọt khối gỗ để thu được một hình hộp chữ nhật có OM là một đường chéo đồng thời hình hộp có 3 mặt nằm trên 3 mặt của tứ diện (xem hình vẽ).



Thể tích lớn nhất của khối gỗ hình hộp chữ nhật bằng

A. 8 cm^3 .

B. 24 cm^3 .

C. 12 cm^3 .

D. 36 cm^3 .

Câu 135. [#NTAD].

Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $A(2;4)$, $B(3;9)$, $C(4;16)$. Các đường thẳng AB , AC , BC cắt đồ thị hàm số lần lượt tại các điểm D , E , F (D khác A và B ; E khác A và C ; F khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của D , E , F bằng 24. Tính $f(0)$.

- A. $f(0) = -2$. B. $f(0) = 0$. C. $f(0) = \frac{24}{5}$. D. $f(0) = 2$.

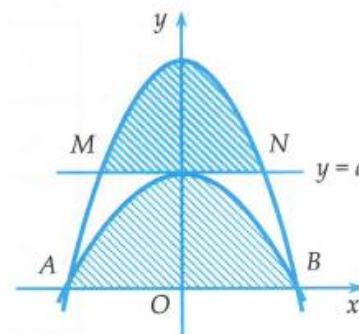
Câu 136. [#NTAD].

Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}$ có đồ thị là (C). Gọi $M(0; m)$ là điểm nằm trên trục tung mà từ đó kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C). Biết tập hợp các giá trị của m là nửa khoảng $(a; b]$. Giá trị của $a + b$ bằng ?

- A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. -1.

Câu 137. [#NTAD].

Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d ; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.



- A. $T = 99$. B. $T = 64$. C. $T = 32$. D. $T = 72$.

Câu 138. [#NTAD].

Cho khai triển

$$\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \right)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + \dots + \frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}}$$

với $x \neq -1$. Tính tổng $S = \sum_{k=1}^{2018} b_k$.

- A. $S = 2^{2018}$. B. $S = 2^{2017} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.
C. $S = 2^{2017} + \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$. D. $S = 2^{2018} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

Câu 139. [#NTAD].

Tìm số cặp có thứ tự $(a; b)$ sao cho $(a + bi)^{2018} = a - bi (a, b \in \mathbb{R})$.

- A. 2018. B. 2020. C. 2017. D. 2019.

Câu 140. [#NTAD].

Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện, mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh bằng 20 cm; sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa vào xung quanh), mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 42 cm. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 m. Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 64000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột?

- A. 22 bao. B. 17 bao. C. 18 bao. D. 25 bao.

Câu 141. [#NTAD].

Cho hàm số $y = |x+3| + \frac{1}{x+1}$, gọi S là tổng tất cả các giá trị cực trị của hàm số. Giá trị của S bằng?

- A. $S = \frac{9}{2}$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = \frac{7}{2}$. D. $S = 4$.

Câu 142. [#NTAD].

Trong không gian với hệ tọa độ O , cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho từ M có thể kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\angle AMB = 60^\circ$, $\angle BMC = 90^\circ$; $\angle CMA = 120^\circ$ có dạng $M(a; b; c)$ với $a < 0$. Giá trị $T = a + b + c$ bằng:

- A. $T = 1$. B. $T = \frac{10}{3}$. C. $T = 2$. D. $T = -2$.

Câu 143. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

- A. $T = 2 + 9\ln 2$. B. $T = 9$. C. $T = \frac{1}{2} + 9\ln 2$. D. $T = 2 - 9\ln 2$.

Câu 144. [#NTAD].

Có bao nhiêu số nguyên m trong đoạn $[-2000; 2000]$ sao cho bất phương trình

$$(10x)^{m+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x} \text{ có nghiệm đúng với mọi } x \in (1; 100).$$

- A. 2000. B. 4000. C. 2001. D. 4001.

Câu 145. [#NTAD].

Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$ là?

- A. $125\sqrt{3}$. B. $48\sqrt{3}$. C. 48. D. 125.

Câu 146. [#NTAD].

Cho hai góc $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}, \cot y = \frac{1}{7}$. Giá trị của $x + y$ bằng?

- A. $\frac{7\pi}{8}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{5\pi}{6}$. D. $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 147. [#NTAD].

Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho

$$S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$$

là một số có 1000 chữ số.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 148. [#NTAD].

Biết $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c + \frac{1}{2} \ln(3\sqrt{2}-3)$ với a, b, c là các số hữu tỷ.

Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -1$. C. $P = -\frac{1}{2}$. D. $P = \frac{5}{2}$.

Câu 149. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$ và

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx \text{ bằng?}$$

A. 1.

B. 8.

C. 10.

D. 80.

Câu 150. [#NTAD].

Có bao nhiêu số có 5 chữ số tận cùng là 1 và chia hết cho 7.

A. 12855.

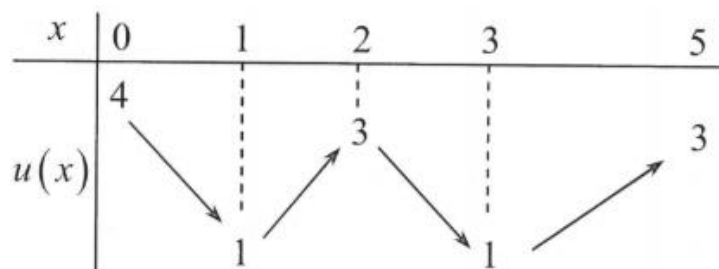
B. 12856.

C. 1285.

D. 1286.

Câu 151. [#NTAD].

Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5]$?



A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Câu 152. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$g(x) = f(x^2 + x - 1) + \frac{480}{m(x^2 + x + 2)}$$

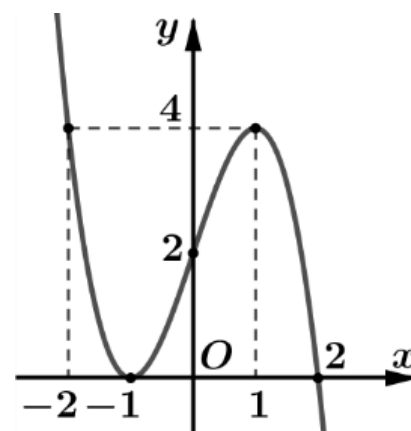
ngược biến trên $(0;1)$?

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

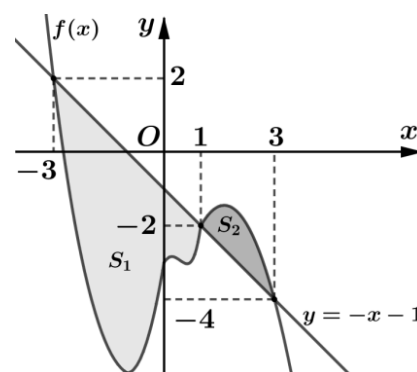

Câu 153. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là $M; m$. Tích phân

$$\int_{-3}^3 f(x) dx$$

bằng?



A. $6 + m - M$.

B. $6 - m - M$.

C. $M - m + 6$.

D. $m - M - 6$.

Câu 154. [#NTAD].

Tìm tất cả các giá trị thực k để phương trình $\left| -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{k}{2} - 1 \right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

A. $k \in \emptyset$.

B. $k \in \left(-2; -\frac{3}{4} \right) \cup \left(\frac{19}{4}; 6 \right)$.

C. $k \in \left(\frac{19}{4}; 5 \right)$.

D. $k \in (-2; -1) \cup \left(1; \frac{19}{4} \right)$.

Câu 155. [#NTAD].

Phương trình $(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 156. [#NTAD].

Cho phương trình $\sqrt[3]{(\sin x + m)^2} + \sqrt[3]{\sin^2 x - m^2} = 2\sqrt[3]{(\sin x - m)^2}$.

Gọi $S = [a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình trên có nghiệm thực. Tìm giá trị của $P = a^2 + b^2$?

A. $P = \frac{162}{49}$.

B. $P = \frac{49}{162}$.

C. $P = 4$.

D. $P = 2$.

Câu 157. [#NTAD].

Cho $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $g(x) = f(dx + e)$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

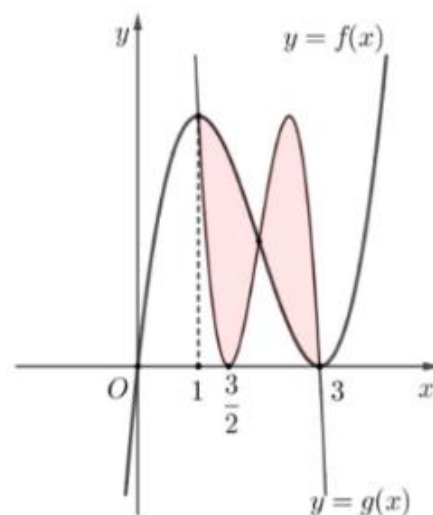
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 4,5.

B. 4,25.

C. 3,63.

D. 3,67.



Câu 158. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].

Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{b}{x} + \sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản.

Giá trị của $a+b+c+d$ bằng?

- A. 12. B. 10. C. 18. D. 15.

Câu 159. [#NTAD].

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ với $a, b \in (0; 10)$ để phương trình bậc bốn

$$(x^2 + ax + b)^2 + a(x^2 + ax + b) + b = x$$

có bốn nghiệm thực phân biệt.

- A. 33. B. 32. C. 34. D. 31.

Câu 160. [#NTAD].

Cho tam giác $\triangle OAB$ đều cạnh a . Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB . Gọi N là giao điểm của EF và d . Tìm x để thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. $x = a\sqrt{2}$. B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $x = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 161. [#NTAD].

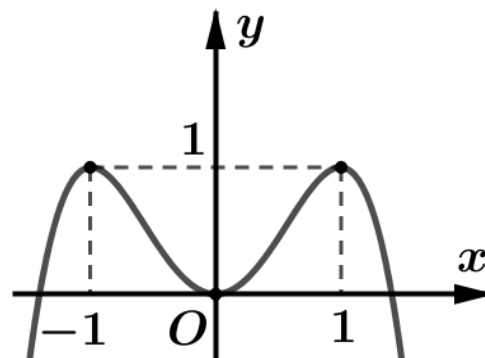
Cho phương trình $(m-1)\sqrt{(x^2+2)^3} + (x+4)(11x^2-8x+8) = 0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có bốn nghiệm thực phân biệt?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 162. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f[f(\cos 2x)] = 0$?

- A. 1 điểm. B. 3 điểm.
C. 4 điểm. D. Vô số.



Câu 163. [#NTAD].

Cho hàm số $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 7$. Tồn tại bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\sqrt{g(g(x)-3)+m} = 2g(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

- A. 25. B. 11. C. 13. D. 14.

Câu 164. [#NTAD].

Biết các hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{f(x)+5}{f^2(x)+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} f(x) > -1+3\sqrt{2} \\ f(x) < -1-3\sqrt{2} \end{cases}$ B. $\begin{cases} f(x) > -5+\sqrt{26} \\ f(x) < -5-\sqrt{26} \end{cases}$
C. $-5-\sqrt{26} \leq f(x) \leq -5+\sqrt{26}$ D. $-1-3\sqrt{2} \leq f(x) \leq -1+3\sqrt{2}$.

Câu 165. [#NTAD].

Cho phương trình

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{\cos^3 x + m + 2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 166. [#NTAD].

Cho hình nón đỉnh N , đáy là hình tròn tâm O , góc ở đỉnh bằng 120° . Trên đường tròn đáy lấy một điểm A cố định và một điểm M di động. Gọi S là diện tích của tam giác $\triangle NAM$. Có bao nhiêu vị trí của điểm M để S đạt giá trị lớn nhất

- A. Vô số vị trí. B. Hai vị trí. C. Ba vị trí. D. Một vị trí.

Câu 167. [#NTAD].

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a$ và $SAB = \frac{11\pi}{24}$. Gọi Q là trung điểm của cạnh SA . Trên các cạnh SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm M, N, P không trùng với các đỉnh của hình chóp. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $AM + MN + NP + PQ$ theo a ?

- A. $\frac{a\sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{24}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{3} \sin \frac{11\pi}{12}}{3}$.

Câu 168. [#NTAD].

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn

$x_1 \in (-1; 0); x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 169. [#NTAD].

Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm

$A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lần lượt nằm trên các cạnh B_iC_i, A_iC_i, A_iB_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) sao cho

$A_{i+1}C_i = 3A_{i+1}B_i, B_{i+1}A_i = 3B_{i+1}C_i, C_{i+1}B_i = 3C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả diện tích của n

tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$, biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng $\frac{9}{16}$.

Tìm số nguyên dương n sao cho $S = \frac{16^{29} - 7^{29}}{16^{29}}$.

A. $n = 30$.

B. $n = 29$.

C. $n = 28$.

D. $n = 2018$.

Câu 170. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) \in [-1; 1]$ với

$\forall x \in (0; 2)$. Biết $f(0) = f(2) = 1$. Đặt $I = \int_0^2 f(x) dx$, phát biểu nào dưới đây **đúng**?

A. $I \in (-\infty; 0]$.

B. $I \in (0; 1]$.

C. $I \in [1; +\infty)$.

D. $I \in (0; 1)$.

Câu 171. [#NTAD].

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M là một điểm thuộc miền trong của khối tứ diện tương ứng. Giá trị lớn nhất của tích các khoảng cách từ điểm M đến bốn mặt phẳng của tứ diện đã cho là

A. $\frac{a^4}{521}$.

B. $\frac{a^4}{576}$.

C. $\frac{a^4 \sqrt{6}}{81}$.

D. $\frac{a^4 \sqrt{6}}{324}$.

Câu 172. [#NTAD].

Tính giá trị biểu thức: $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{9\pi}{12} + \cos \frac{9\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12}$.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. 1. D. -1.

Câu 173. [#NTAD].

Cho $b \neq 0$, giả sử phương trình:

$$x^3 + ax^2 + x + b = 0$$

có ba nghiệm là x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị biểu thức:

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right) + \left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right).$$

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 174. [#NTAD].

Với mọi a, b, c , cho ba bất đẳng thức sau:

$$(i) a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b; \quad (ii) a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b);$$

$$(iii) \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc;$$

Có bao nhiêu bất đẳng thức có thể xảy ra?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 175. [#NTAD].

Cho hàm số $y = \frac{\ln(2x-a) - 2m}{\ln(2x-a) + 2}$ (m là tham số thực), trong đó x, a là các số thực thỏa

mãn đẳng thức

$$\log_2(x^2 + a^2) + \log_{\sqrt{2}}(x^2 + a^2) + \log_{\sqrt[3]{2}}(x^2 + a^2) + \dots + \log_{\sqrt[n]{2}}(x^2 + a^2) - (2^{n+1} - 1)(\log_2 xa + 1) = 0$$

(với n là số nguyên dương). Gọi S là tập hợp các giá trị của m thỏa mãn $\max_{[1, e^2]} y = 1$.

Số phần tử của S là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 176. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $4\pi(dm^2)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. $\frac{2}{7}dm$. B. $\frac{3}{7}dm$. C. $\frac{4}{7}dm$. D. $\frac{6}{7}dm$.

Câu 177. [#NTAD].

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; 0 \leq a \leq 4, b \geq 0$). Đặt hàm số $f(x) = ax^2 + bx - 2$. Biết

$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4}$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ thuộc khoảng nào dưới đây

- A. $(4; 4,3)$. B. $(4,3; 4,5)$. C. $(4,5; 4,7)$. D. $(4,7; 5)$.

Câu 178. [#NTAD].

Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

- A. $S_{100} = -14650$. B. $S_{100} = -14400$. C. $S_{100} = -14250$. D. $S_{100} = -15450$.

Câu 179. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x (8 \cos^3 x + 1)}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \text{ được biểu}$$

diễn dưới dạng $I = \frac{a}{b} \ln \frac{c}{d}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và các phân số $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản.

Tính $S = a^3 + ab - c + d$.

- A. $S = 6$. B. $S = 3$. C. $S = 5$. D. $S = 7$.

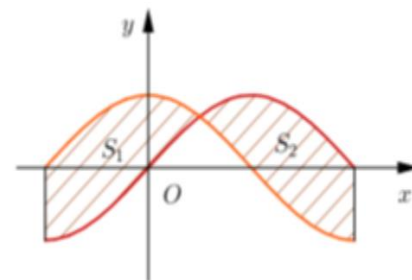
Câu 180. [#NTAD].

Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-3)^8}{(2x+1)^{10}} dx$ ta được

A. $\frac{3^{18} + 2^9}{63 \cdot 3^9}$. B. $-\frac{3^{18} + 2^9}{63 \cdot 3^9}$. C. $\frac{3^{18} - 2^9}{63 \cdot 3^9}$. D. $\frac{-3^{18} + 2^9}{63 \cdot 3^9}$.

Câu 181. [#NTAD].

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$ và S_1 , S_2 là diện tích của các phần được gạch chéo như hình vẽ. Tính $S_1^2 + S_2^2$.



A. $S_1^2 + S_2^2 = 6 + 4\sqrt{2}$. B. $S_1^2 + S_2^2 = 11 + 2\sqrt{2}$.
C. $S_1^2 + S_2^2 = 11 - 2\sqrt{2}$. D. $S_1^2 + S_2^2 = 6 + 2\sqrt{2}$.

Câu 182. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $\int_0^1 (1-x)^2 f'(x) dx = \frac{1}{3}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân bằng $\int_0^1 f^2(x) dx$ bằng?

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{6}$. D. Đáp án khác.

Câu 183. [#NTAD].

Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại số nguyên $k (1 \leq k \leq n-1)$ sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$. Tính $n = ?$.

A. 10. B. 11. C. 20. D. 22.

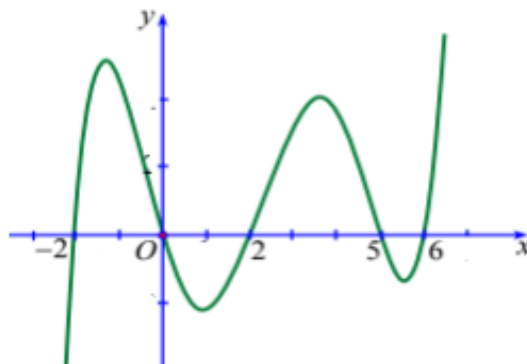
Câu 184. [#NTAD].

Biết rằng tồn tại các số nguyên a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất đều là các số nguyên và tập giá trị của hàm số đã cho chỉ có đúng 6 số nguyên. Giá trị của $a^2 + 2b^2$ bằng

A. 36. B. 34. C. 41. D. 25.

Câu 185. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Phương trình $f(x) = f(0)$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$.



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 186. [#NTAD].

Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = m^2 \left(\frac{x^5}{5} - 16x \right) + 3m \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) - 7x^2 + 28x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $-\frac{3}{8}$.B. -2 .C. $-\frac{7}{8}$.D. $\frac{1}{2}$.**Câu 187. [#NTAD].**

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$ tính $f^2(2)$

A. $f^2(2) = \ln 2 + 1$.B. $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.C. $f^2(2) = 2 \ln 2 + 2$.D. $f^2(2) = \sqrt{2 \ln 2 + 2}$.**Câu 188. [#NTAD].**

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn

$x_1 \in (-1; 0); x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 189. [#NTAD].

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 4. Nếu các điểm có cùng xác suất được chọn như nhau thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là

- A. $\frac{13}{81}$. B. $\frac{15}{81}$. C. $\frac{13}{32}$. D. $\frac{11}{16}$.

Câu 190. [#NTAD].

Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng

- A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{1105}}{11}$ B. $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$ C. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{1105}}{13}$ D. $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}$

Câu 191. [#NTAD].

Cho $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$?

- A. $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$. B. $60 - 20\sqrt{10}$. C. $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$. D. $60 + 20\sqrt{10}$.

Câu 192. [#NTAD].

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| + |\bar{z} + 5 + i| = 2\sqrt{65}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$ đạt được khi $z = a + bi$ với a, b là các số thực dương. Giá trị của $2b + 3a$ bằng?

- A. 19. B. 16. C. 24. D. 13.

Câu 193. [#NTAD].

Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$.

- A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$. B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$.
C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$. D. $\int f(x)dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$.

Câu 194. [#NTAD].

Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ có tọa độ là các số nguyên thỏa mãn $0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4$. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm thuộc S . Xác suất để ba điểm được chọn là ba đỉnh một tam giác bằng?

- A. $\frac{129}{140}$. B. $\frac{217}{230}$. C. $\frac{537}{575}$. D. $\frac{37}{40}$.

Câu 195. [#NTAD].

Cho $a > 1$. Biết khi $a = a_0$ thì bất phương trình $x^a \leq a^x$ đúng với mọi $x \in (1; +\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $1 < a_0 < 2$. B. $e < a_0 < e^2$. C. $2 < a_0 < 3$. D. $e^2 < a_0 < e^3$.

Câu 196. [#NTAD].

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a; b; c)$ ($a > 0$) nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\angle AMB = 60^\circ, \angle BMC = 90^\circ, \angle CMA = 120^\circ$. Tính $a^3 + b^3 + c^3$

- A. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$. B. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{173}{9}$.
C. $a^3 + b^3 + c^3 = -8$. D. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{23}{9}$.

Câu 197. [#NTAD].

Cho a, b, x, y, z là các số phức thỏa mãn: $a^2 - 4b = 16 + 12i, x^2 + ax + b + z = 0, y^2 + ay + b + z = 0, |x - y| = 2\sqrt{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$.

- A. $M + m = 10$. B. $M + m = 28$. C. $M + m = 28$. D. $M + m = 6\sqrt{3}$.

Câu 198. [#NTAD].

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| -x^2 + x + 4 + \sqrt{4-x^2} - \sqrt{(x+1)(y+1)} + a \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10; 10]$ để $M \leq 2m$.

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 199. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và đồ thị là (C) . Để tính độ dài l đường cong (C) thì người ta sử dụng công thức $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Hãy tính độ dài đường cong có phương trình $y = \frac{1}{8}x^2 - \ln x$ trên đoạn $[1; 2]$.

- A. $\frac{3}{8} - \ln 2$. B. $\frac{31}{24} - 2 \ln 2$. C. $\frac{3}{8} + \ln 2$. D. $\frac{31}{24} + 2 \ln 2$.

Câu 200. [#NTAD].

Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \frac{(2x^2 + x)\sin x - (x-1)\cos x}{x \sin x + \cos x}$, trục hoành

và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\frac{\pi}{4}$. Biết rằng diện tích của hình phẳng D bằng

$\frac{\pi^2 + 4\pi}{16} + a \ln 2 + b \ln(\pi + 4)$, với a, b là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2a + b = 12$. B. $2a - b = -6$. C. $2a - b = -12$. D. $2a + b = 6$.

Câu 201. [#NTAD].

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $C(3; 2; 3)$, đường cao AH nằm trên đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và đường phân giác trong BD của góc B nằm trên

đường thẳng d_2 có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Diện tích tam giác ABC bằng

- A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $4\sqrt{3}$. D. 8.

-----THE END-----



201 câu hỏi hay

NHÓM TOÁN ANH DÚI

Đáp án chi tiết

Câu 1. [#NTAD].

Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + 3(2m-3)x + m \text{ tại ba điểm phân biệt } A(0;m), B, C \text{ sao cho đường}$$

thẳng OA là phân giác của góc BOC .

A. 1.**B. 3.****C. 2.****D. 0.**Giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + 3(2m-3)x + m = -x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{3}x^2 + (2-m)x + 6m - 8 = 0 (*) \end{cases}$$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác $x = 0$

Hay:

$$\begin{cases} (2-m)^2 - \frac{4}{3}(6m-8) > 0 \\ 6m-8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 12m + \frac{44}{3} > 0 \\ m \neq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{18+8\sqrt{3}}{3} \\ m < \frac{18-8\sqrt{3}}{3} \\ m \neq \frac{4}{3} \end{cases} (1).$$

Suy ra: Tọa độ các điểm B, C lần lượt là: $B(x_1, -x_1 + m), C(x_2, -x_2 + m)$.

Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3(m-2) \\ x_1 x_2 = 3(6m-8) \end{cases}$.

Đề ý: $OA \equiv Oy$ (Do $\begin{cases} O(0;0) \in Oy \\ A(0;m) \in Oy \end{cases}$) có vectơ chỉ phương $\vec{j}(0;1)$.

Vậy để đường thẳng OA là phân giác của góc BOC .

$$\left| \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OB}) \right| = \left| \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OC}) \right| \Leftrightarrow \frac{|m-x_1|}{\sqrt{x_1^2 + (m-x_1)^2}} = \frac{|m-x_2|}{\sqrt{x_2^2 + (m-x_2)^2}} (2).$$

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow |m - x_1| \sqrt{x_2^2 + (m - x_2)^2} = |m - x_2| \sqrt{x_1^2 + (m - x_1)^2} \\
&\Leftrightarrow (m - x_1)^2 [x_2^2 + (m - x_2)^2] = (m - x_2)^2 [x_1^2 + (m - x_1)^2] \\
&\Leftrightarrow (m - x_1)^2 x_2^2 + (m - x_1)^2 \cdot (m - x_2)^2 = (m - x_2)^2 x_1^2 + (m - x_2)^2 (m - x_1)^2 \\
&\Leftrightarrow x_2^2 (m - x_1)^2 = x_1^2 (m - x_2)^2 \Leftrightarrow x_2^2 m^2 - 2mx_1 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = x_1^2 m^2 - 2mx_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^2 \\
&\Leftrightarrow m^2 (x_1^2 - x_2^2) - 2mx_1 x_2 (x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow m^2 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2mx_1 x_2 (x_1 - x_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow m(x_1 - x_2) [m(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx_1 = mx_2 \\ m(x_1 + x_2) = 2x_1 x_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 3m(m - 2) = 6(6m - 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 3m^2 - 42m + 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 7 + \sqrt{33} \\ m = 7 - \sqrt{33} \end{cases}
\end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện (1) và $A \neq O(0;0)$ nên ta nhận $m = 7 \pm \sqrt{33}$.

Đáp án C.

Câu 2. [#NTAD].

Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 399.

B. 199.

C. 200.

D. 398.

Giải

Do: $e^x + e^{x+a} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó trước tiên phải có: $\ln(1+x) > \ln(1+x+a) \Leftrightarrow 1+x > 1+x+a \Leftrightarrow a < 0$.

Vậy điều kiện của phương trình là: $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1+x+a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1-a, \forall a < 0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $e^x + e^{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1) = 0$.

Xét hàm số: $f(x) = e^x + e^{x+a} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1)$.

Ta có: $f'(x) = e^x + e^{x+a} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+a+1} = e^x + e^{x+a} - \frac{a}{(x+1)(x+a+1)} > 0, \forall a < 0, \forall x > -a-1$.

Và: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -(a+1)^+} f(x) = -\infty \end{cases}$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thực duy nhất với mọi $a < 0$.

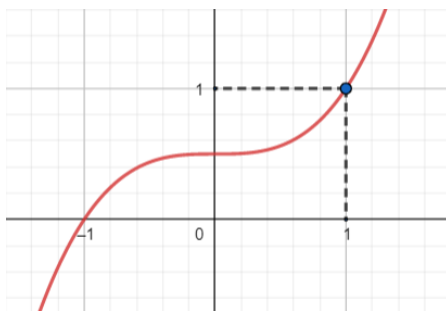
Hay: $m = \{-199; -198; \dots; -1\}$.

Vậy có tất cả 199 giá trị nguyên của m để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ luôn có một nghiệm duy nhất.

Đáp án B.

Câu 3. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp các giá trị của m ($m \in \mathbb{R}$) sao cho $(x-1)[m^3 f(2x-1) - m \cdot f(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Số phần tử của tập S là?

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Giải

Xét phương trình: $g(x) = (x-1)[m^3 f(2x-1) - m \cdot f(x) + f(x) - 1] = 0 (*)$.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ m^3 f(2x-1) - m \cdot f(x) + f(x) - 1 = 0 \end{cases}$

Đặt $h(x) = m^3 f(2x-1) - m \cdot f(x) + f(x) - 1$.

Vì $x=1$ là một nghiệm bội lẻ của phương trình

$$(x-1)[m^3 f(2x-1) - m \cdot f(x) + f(x) - 1] = 0.$$

Suy ra: Điều kiện lỏng để $(x-1)[m^3 f(2x-1) - m \cdot f(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là $x=1$ là một nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$. Hay $h(1) = 0$.

$$\text{Khi đó ta có: } h(1) = 0 \Leftrightarrow m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \quad (\text{Do: } f(1) = 1) \\ m = -1 \end{cases}$$

Thử lại (Điều kiện chặt).

+) Với $m = 0$, ta có: $g(x) = (x-1)[f(x)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Thỏa mãn).

Thật vậy! Do
$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \forall x \geq 1 \\ f(x)-1 \geq 0, \forall x \geq 1 \\ x-1 < 0, \forall x < 1 \\ f(x)-1 < 0, \forall x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot f(x) \geq 0, \forall x \geq 1 \\ (x-1) \cdot f(x) > 0, \forall x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$\Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

+) Với $m = 1$, ta có:

$g(x) = (x-1)[f(2x-1)-1] = \frac{1}{2}[(2x-1)-1][f(2x-1)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Thật vậy! Do
$$\begin{cases} (2x-1)-1 \geq 0, \forall x \geq 1 \\ f(2x-1)-1 \geq f(1)-1=0, \forall x \geq 1 \\ (2x-1)-1 < 0, \forall x < 1 \\ f(2x-1)-1 < f(1)-1=0, \forall x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [(2x-1)-1] \cdot f(x) \geq 0, \forall x \geq 1 \\ [(2x-1)-1] \cdot f(x) > 0, \forall x < 1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow m = 1$ thỏa mãn.

+) Với $m = -1$, ta có: $g(x) = (x-1)[-f(2x-1)-1+2f(x)], \forall x \in \mathbb{R}.$ (Thỏa mãn).

Xét $x > 1$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x-1)+1}{2f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(2x-1)^3 + b(2x-1)^2 + c(2x-1) + d + 1}{2(ax^3 + bx^2 + cx + d)} = \frac{8a}{2a} = 4.$$

$\Rightarrow \exists \alpha > 1, \alpha$ đủ lớn sao cho $f(2\alpha-1)+1 \geq 2f(\alpha).$

$\Rightarrow (\alpha-1)[-f(2\alpha-1)-1+2f(\alpha)] < 0$ (Mâu thuẫn) $\Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

Vậy $m \in \{0;1\}.$

Đáp án A.

Câu 4. [#NTAD].

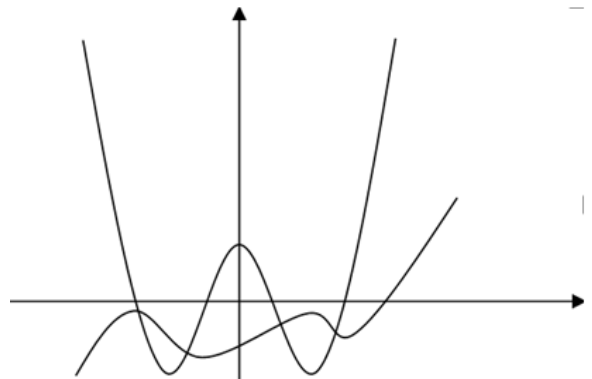
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Biết rằng đồ thị đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(-1;0)$ và điểm $B(1;0)$ thuộc trục hoành. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f'(-1) \geq f''(1).$ B. $f'(-1) > f''(1).$

C. $f'(-1) < f''(1).$ D. $f'(-1) = f''(1).$

Giải



Phương pháp:

Từ hình vẽ ta xác định được đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$.

Từ đồ thị hàm số suy ra hàm số đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$, hàm số đạt cực đại tại $x_0 \Rightarrow f''(x_0) < 0$ để so sánh.

Cách giải:

Từ hình vẽ ta xác định được đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương (do đồ thị $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị và đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt).

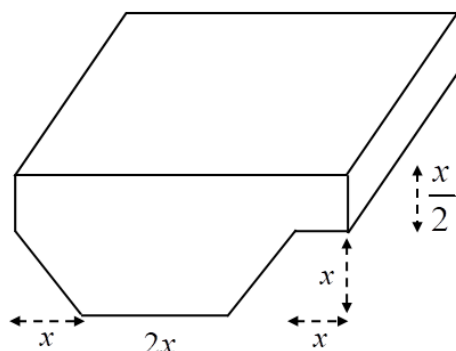
Từ đồ thị, ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$.

Lại thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0; f''(1) < 0$.

Từ đó ta có $f'(-1) > f''(1)$.

Đáp án B.**Câu 5. [#NTAD].**

Người ta muốn xây dựng một bể bơi (hình vẽ bên dưới) có thể tích là $V = \frac{968}{4 + 2\sqrt{2}} (m^3)$.



Khi đó giá trị thực của x để diện tích xung quanh của bể bơi là nhỏ nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 3)$.

B. $(3; 5)$.

C. $(5; 6)$.

D. $(2; 4)$.

Giải**Phương pháp:**

Nhận xét rằng bể bơi có dạng khối lăng trụ có đáy là hình chữ nhật bị cắt đi một tam giác vuông cân và một hình thang vuông. Từ đó tính được diện tích xung quanh của bể bơi chính là diện tích toàn phần trừ đi diện tích hình chữ nhật là mặt bể bơi

Sau đó dùng bất đẳng thức Cauchy cho ba số a, b, c không âm $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ để tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh.

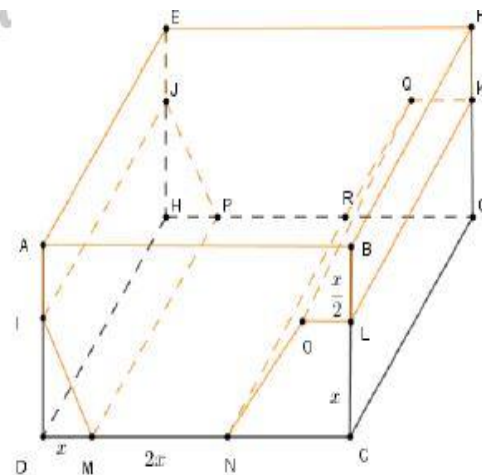
Cách giải:

Gọi “chiều cao” CG của khối lăng trụ bể bơi là $h (h > 0)$, ta có:

$$V = S \cdot h = \left(5x \cdot \frac{3x}{2} - \frac{x \cdot x}{2} - \frac{2x + x}{2} \right) \cdot h = \frac{11x^2}{2} h \Leftrightarrow h = \frac{2V}{11x^2}$$

Diện tích xung quanh của bể bơi là

$$\begin{aligned} S_{xq} &= S_{AIJE} + S_{IMPJ} + S_{MNRP} + S_{NOQR} + S_{OLKQ} + S_{BLKF} + 2 \cdot S_{MNIABLON} \\ &= \frac{x}{2} \cdot h + x\sqrt{2} \cdot h + 2 \cdot x \cdot h + x\sqrt{2} \cdot h + x \cdot h + \frac{x}{2} \cdot h + 2 \cdot \frac{11x^2}{2} \\ &= (4 + 2\sqrt{2})x \cdot h + 2 \cdot \frac{11x^2}{2} = (4 + 2\sqrt{2})x \cdot \frac{2V}{11x^2} + 11x^2 \\ &= (4 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{2V}{11x} + 11x^2 \end{aligned}$$



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bộ ba số $(4 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{V}{11x}$; $(4 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{V}{11x}$; $11x^2$, ta có:

$$S_{xq} = \frac{(4 + 2\sqrt{2}) \cdot V}{11x} + \frac{(4 + 2\sqrt{2}) \cdot V}{11x} + 11x^2 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(4 + 2\sqrt{2})^2 \cdot V^2}{11}} = 132 (m^2).$$

Vậy $\min S_{xq} = 132 (m^2)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{(4 + 2\sqrt{2})V}{11x} = 11x^2 \Rightarrow x^3 = \frac{(4 + 2\sqrt{2})V}{121} = 8 \Rightarrow x = 2$.

Đáp án A.

Câu 6. [#NTAD].

Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $c = 8ab$ thì biểu thức $P = \frac{1}{4a + 2b + 3} + \frac{c}{4bc + 3c + 2} + \frac{c}{2ac + 3c + 4}$

đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $2m^2 + n$?

A. 9.

B. 4.

C. 8.

D. 3.

Giải

Phương pháp:

Chia cả tử và mẫu của hai phân số thứ hai và thứ ba trong biểu thức P cho $c \neq 0$.

Đặt $2a = x$; $2b = y$; $\frac{2}{c} = z$ từ đó suy ra mối quan hệ của xyz và biến đổi P theo x, y, z .

Sử dụng thích hợp bất đẳng thức Cauchy cho từng mẫu số rồi biến đổi để tìm GTLN của P .

Cách giải:

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{4a + 2b + 3} + \frac{c}{4bc + 3c + 2} + \frac{c}{2ac + 3c + 4} = \frac{1}{4a + 2b + 3} + \frac{1}{4b + 3 + \frac{2}{c}} + \frac{1}{2a + 3 + \frac{4}{c}}$$

Đặt $2a = x; 2b = y; \frac{2}{c} = z \Rightarrow xyz = 2a \cdot 2b \cdot \frac{2}{c} = \frac{8ab}{c} = 1$ (vì $c = 8ab$)

Khi đó ta có: $P = \frac{1}{2x+y+3} + \frac{1}{2y+z+3} + \frac{1}{2z+x+3}$.

Lại có: $2x+y+3 = x+x+y+1+2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{x} + 2 = 2(\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1)$.

Tương tự: $2y+z+3 \geq 2(\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1)$; $2z+x+3 \geq 2(\sqrt{xz} + \sqrt{z} + 1)$, do đó ta có:

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{1}{\sqrt{xz} + \sqrt{z} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + 1} \right) \quad (\text{do } xyz = 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow P \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Do đó: $\max P = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow 2m^2 + n = 4$.

Đáp án B.

Câu 7. [#NTAD].

Ở loài Ong, Ong đực chỉ có mẹ, còn Ong cái có cả bố và mẹ. Hỏi một con Ong đực có tổ tiên ở đời thứ n tuân theo quy luật dãy số nào trong các dãy số sau?

A. $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} (n \geq 2) \end{cases}$

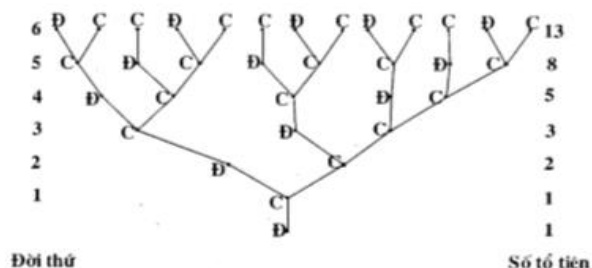
B. $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} (n \geq 2) \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} (n \geq 2) \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1}u_{n-2} (n \geq 2) \end{cases}$

Giải

Sơ đồ cây các đời của loài ong và viết số tổ tiên lên dòng ứng với đời thứ n .



Đời thứ nhất có 1 (mẹ), đời thứ hai có 2 (1 đực và 1 cái), đời thứ ba có 3 (vì đời thứ 2 có một Ong đực, một Ong cái. Ong đực thì có mẹ, còn Ong cái có cả bố và mẹ), đời thứ bốn có 5 (vì ở đời thứ ba có 1 ong đực và 2 ong cái)... Như vậy ta thấy rằng số ong ở đời thứ n bất kỳ bằng tổng số ong của 2 đời liền trước đó nên ta có dãy số: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 34, 55, 89, 144,...

Tổng quát, nếu gọi u_n là số tổ tiên của ong đực thì ở đời thứ n , $n \in \mathbb{N}^*$ (xem $u_0 = 1$ con ong đực), ta có: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$ là số lượng ong cần tính.

Dãy số u_n nhận các giá trị của dãy số trên (dãy số Fibonacci).

Vậy dãy số này được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 2) \end{cases}$$

Đáp án B.

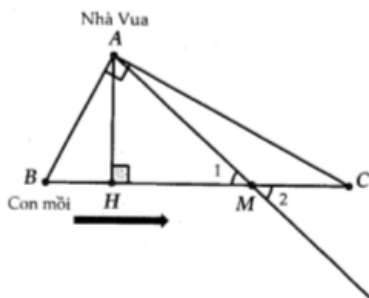
Câu 8. [#NTAD].

Nhân một ngày Thứ năm đẹp trời nhà Vua đến thăm phủ Hoài Đức và dự lễ hội săn bắn. Trường bắn được xây dựng đặc biệt có dạng một tam giác vuông tại A và $AB = 1(km)$ như hình vẽ.

Con mồi chạy trên cạnh huyền theo hướng từ B đến C . Nhà Vua đứng ở vị trí đỉnh A của tam giác vuông và giương cung bắn. Mũi tên trúng con mồi tại điểm M . Tại đó, người hầu xác định

được tích vô hướng giữa chiều mũi tên và hướng chạy con mồi thỏa mãn $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{7}{4}$ và

$$AM = \frac{3}{4} BC.$$



Diện tích trường bắn gần số nào nhất trong các số sau?

- A.** $0,7km^2$. **B.** $0,8km^2$. **C.** $0,9km^2$. **D.** $1km^2$.

Giải

$$\text{Đặt: } BC = x \Rightarrow AM = \frac{3}{4}x.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = AM \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}) = \cos M_2 = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}}{AM \cdot BC} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}x^2} = \frac{7}{3x^2}.$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow \sin M_1 = \sqrt{1 - \cos^2 M_2} = \sqrt{1 - \frac{49}{9x^4}}.$$

Kẻ đường cao AH .

$$\text{Ta có } AH = AM \cdot \sin M_1 = \frac{3}{4}x \sqrt{1 - \frac{49}{9x^4}} \quad (1). \text{ Mà } AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) (2)} \Rightarrow \frac{3}{4}x \sqrt{1 - \frac{49}{9x^4}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \Rightarrow \frac{9}{16}x^4 \left(1 - \frac{49}{9x^4}\right) = x^2 - 1 \Rightarrow 9x^4 - 16x^2 - 33 = 0.$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{2}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7km^2.$$

Đáp án A.

Câu 9. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $(2; m)$ có phương trình là $y = 4x - 6$. Tiếp tuyến của các đồ thị hàm số

$y = f[f(x)]$ và $y = f(3x^2 - 10)$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình lần lượt là $y = ax + b$ và $y = cx + d$. Tính giá trị của biểu thức $S = bd^{ac}$ có bao nhiêu chữ số?

- A.** 2048. **B.** 2004. **C.** 2022. **D.** 2650.

Giải

Ta có $f(2) = 4 \cdot 2 - 6 = 2$ nên tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 2)$ có phương trình là:
 $(d): y = f'(2)(x - 2) + 2 \equiv (d_1): y = 4x - 6$. Suy ra: $f'(2) = 4$.

Đặt: $g(x) = f[f(x)]$ và $h(x) = f(3x^2 - 10)$.

Khi đó: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$ và $h'(x) = 6x \cdot f'(3x^2 - 10)$.

Với $x = 2$, ta có:
$$\begin{cases} g(2) = f[f(2)] = f(2) = 2 \\ h(2) = f(2) = 2 \end{cases}$$

Và:
$$\begin{cases} g'(2) = f'(2) \cdot f'[f(2)] = f'(2) \cdot f'(2) = 16 \\ h'(2) = 12 \cdot f'(2) = 48 \end{cases}$$

Tiếp tuyến tại điểm $(2; 2)$ của $y = g(x)$ và $y = h(x)$ lần lượt là: $y = g'(x)(x - 2) + g(2)$
 và $y = h'(x)(x - 2) + h(2)$.

Vì thế tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm $(2; 2)$ có phương trình
 $y = 16x - 30$, còn tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại điểm $(2; 2)$ có phương trình

$y = 48x - 94$. Do đó:
$$\begin{cases} a = 16 \\ b = -30 \\ c = 48 \\ d = -94 \end{cases}$$
. Suy ra: $S = bd^{ac} = 2820^{768}$.

Vì thế số chữ số của biểu thức S là: $[\log 2820^{768}] + 1 = [768 \cdot \log 2820] + 1 = 2650$ số các chữ số.

Đáp án D.

Note: Lý giải tại sao số các chữ số của số A được tính theo công thức $N = [\log A] + 1$?

Với mọi số thực $x = 10^n \Rightarrow \log x = n$.

$\forall x \geq 1$ tùy ý, $x = 10^n$ được biểu diễn ở hệ thập phân là một số có số các chữ số đứng trước dấu phẩy "," của chính nó là $n + 1$, với $n = [\log x]$ hay ta còn gọi n là hàm phần nguyên của $\log x$.

Quả thật! Vì 10^n là số tự nhiên bé nhất có $n + 1$ chữ số nên số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x bằng $n + 1$ khi và chỉ khi: $10^n \leq x < 10^{n+1} \Leftrightarrow n \leq \log x < n + 1$.

Khi đó: $n = [\log x]$ (đpcm).

Câu 10. [#NTAD].

Gọi $(a_1; b_1)$ và $(a_2; b_2)$ là hai cặp nghiệm nguyên của phương trình:

$$(y - 2020)(y + 2020) = (2020 - x) - 2x(2020 + y).$$

Tính giá trị của biểu thức $S = (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2)$?

A. 2020.

B. 2020^2 .

C. 0.

D. 1.

Giải

Biến đổi phương trình: $(y - 2020)(y + 2020) = (2020 - x) - 2x(2020 + y)$ (*), ta được:

$$(*) \Leftrightarrow y^2 - 2020^2 = 2020 - x - 4040x - 2xy \Leftrightarrow y^2 + 2xy = 2020^2 + 2020 - 4041x.$$

Ta có: $y^2 + 2xy = 2020^2 + 2020 - 4041x$.

$$\Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 = x^2 - 4041x + 2020 + 2020^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = x^2 - (2020 + 2021)x + 2020(1 + 2020)$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = x^2 - (2020 + 2021)x + 2020 \cdot 2021 = (x - 2020)(x - 2021)$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = (x - 2020)(x - 2021)$$

Vì tích hai số nguyên liên tiếp thì không thể nào là số chính phương ngoài số 0 được:

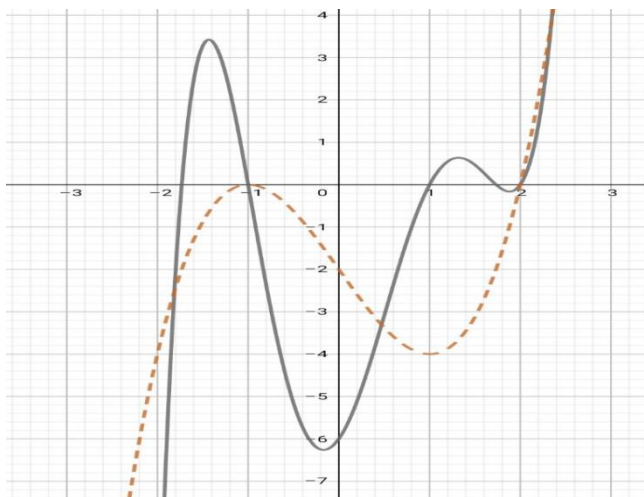
$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (x + y)^2 = 0 \\ (x - 2020)(x - 2021) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 2020 \\ x = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1; b_1) = (2020; -2020) \\ (a_2; b_2) = (2021; -2021) \end{cases}$$

$$\text{Nên: } S = (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) = (2020 - 2020)(2021 - 2021) = 0$$

Đáp án C.

Câu 11. [#NTAD].

Cho hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ (đường liền nét) và $y = g(x)$ (đường nét đứt) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi N_0 là tổng nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$. Khi đó $N_0=?$

A. $N_0=15$.

B. $N_0=30$.

C. $N_0=20$.

D. $N_0=25$.

Giải

$$\text{Ta có: } f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \in (-2;-1) \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=b \in (1;2) \\ x=2 \end{cases} \quad \text{và } g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

+) Ta xét phương trình: $f(g(x))=0$

$$f(g(x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=a \in (-2;-1) \\ g(x)=-1 \\ g(x)=1 \\ g(x)=b \in (1;2) \\ g(x)=2 \end{cases}$$

$$\text{Kẻ các đường thẳng: } \begin{cases} y=a \in (-2;-1) \quad (1) \\ y=-1 \quad (2) \\ y=1 \quad (3) \\ y=b \in (1;2) \quad (4) \\ y=2 \quad (5) \end{cases}$$

Khi đó ta nhận thấy: các đường thẳng (1),(2),(3),(4),(5) lần lượt cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ lần lượt tại 3,3,1,1,1 điểm phân biệt. Khi đó phương trình: $f(g(x))=0$ có 9 nghiệm thực phân biệt.

+) Ta xét phương trình: $g(f(x))=0$

$$g(f(x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-1 \\ f(x)=2 \end{cases}$$

$$\text{Kẻ các đường thẳng: } \begin{cases} y=-1 \quad (6) \\ y=2 \quad (7) \end{cases}$$

Khi đó ta nhận thấy: các đường thẳng (6),(7) lần lượt cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ lần lượt tại 3,3 điểm phân biệt. Khi đó phương trình: $g(f(x))=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

$$N_0=9+6=15.$$

Đáp án A.**Câu 12. [#NTAD].**

Cho hàm số: $y = f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + m}, m \neq 0$.

Tính tổng: $S = f(e^{-2022m}) + f(e^{-2020m}) + \dots + f(1) + f(e^{2m}) + \dots + f(e^{2020m})$.

A. $S = 2021$.

B. $S = 2020$.

C. $S = 0$.

D. $S = 1$.

Giải

Ta áp dụng kỹ thuật giải sau: chọn hai số thực dương a, b bất kỳ

$$\text{Ta có: } f(a) + f(b) = \frac{\ln(a)}{\ln(a) + m} + \frac{\ln(b)}{\ln(b) + m} = \frac{2\ln a \cdot \ln b + m \cdot \ln(a \cdot b)}{\ln a \cdot \ln b + m \cdot \ln(a \cdot b) + m^2} (*)$$

Ta cần phải tìm mối liên hệ giữa a, b sao cho (*) có thể đơn giản:

Ta để ý lượng $2\ln a \cdot \ln b$ ở tử số bằng 2 lần lượng $\ln a \cdot \ln b$ ở mẫu số. Nên muốn có thể đơn giản (*) thì:

$$\frac{m \cdot \ln(a \cdot b)}{m \cdot \ln(a \cdot b) + m^2} = 2 \Leftrightarrow m \cdot \ln(a \cdot b) = 2m \cdot \ln(a \cdot b) + 2m^2$$

$$\Rightarrow \ln(a \cdot b) = -2m \Rightarrow a \cdot b = e^{-2m}$$

Như thế: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn: $a \cdot b = e^{-2m}$ thì: $f(a) + f(b) = 2$

Dễ dàng có thể tính được giá trị S .

$$S = [f(e^{-2022m}) + f(e^{2020m})] + [f(e^{-2020m}) + f(e^{2018m})] + \dots + [f(e^{-2m}) + f(1)] = 2 + 2 + \dots + 2 = 2 \cdot 1010 = 2020$$

Đáp án B.**Câu 13. [#NTAD].**

Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$. Cho điểm $M(a; b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua M , đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Giải

Ta giả sử rằng điểm $A\left(t; \frac{t^2+1}{t}\right), (t \neq 0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Khi đó ta có: $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Như vậy ta dễ dàng viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(t; \frac{t^2+1}{t}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A\left(t; \frac{t^2+1}{t}\right)$:

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) \Leftrightarrow y = \frac{t^2-1}{t^2}(x-t) + \frac{t^2+1}{t} (*)$$

Tiếp tuyến (*) đi qua điểm $M(a; b)$ nên ta được phương trình:

$$b = \frac{t^2-1}{t^2}(a-t) + \frac{t^2+1}{t} \Leftrightarrow bt^2 = -t^3 + at^2 + t - a + t^3 + t \Leftrightarrow (a-b)t^2 + 2t - a = 0 (**)$$

Theo yêu cầu đề bài ta cần phải "Quy lạ về quen" yêu cầu đề bài:

+) Tồn tại hai tiếp tuyến hay nói cách khác ta cần tìm điều kiện của a, b sao cho phương trình (**) có hai nghiệm thực phân biệt và khác 0.

Mà đề (**) có hai nghiệm thực phân biệt khác 0 thì:

$$\begin{cases} a \neq b \\ a \neq 0 \\ \Delta' = 1 + a(a-b) = 1 + a^2 - ab > 0 \Leftrightarrow a^2 + 1 > ab (1) \end{cases}$$

+) Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau hay nói cách khác ta phải định điều kiện của a, b sao cho

$$f'(t_1) \cdot f'(t_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{t_1^2-1}{t_1^2} \cdot \frac{t_2^2-1}{t_2^2} = -1 \Leftrightarrow (t_1^2-1)(t_2^2-1) = -t_1^2 \cdot t_2^2 \Leftrightarrow 2(t_1 t_2)^2 + 2t_1 t_2 - (t_1 + t_2)^2 + 1 = 0 (2)$$

Mặt khác: Theo định lý Viète thì: $\begin{cases} t_1 + t_2 = -\frac{2}{a-b} \\ t_1 t_2 = -\frac{a}{a-b} \end{cases}$ thay vào (2), được:

$$\frac{2a^2}{(a-b)^2} - \frac{2a}{a-b} - \frac{4}{(a-b)^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a(a-b) - 4 + (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$$

Vì: $a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow |b| \leq 2$. Tuy nhiên, $a \neq 0 \Rightarrow a^2 + 2^2 > 4$ nên $|b| \neq 2 \rightarrow |b| < 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $a^2, 1$, được:

$$a^2 + 1 \geq 2|a| > |ab| \geq ab \text{ (Thoả mãn điều kiện (1))}.$$

Xét các khả năng còn lại: $\begin{cases} a = b \\ a = 0 \end{cases}$

+) Với $a = b, a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow D(\sqrt{2}; \sqrt{2}), E(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

+) Với $a = 0 \Rightarrow B(0; 2), C(0; -2)$.

Vậy: M luôn thuộc một đường tròn cố định $(C): x^2 + y^2 = 4$ bán kính $R = 2$.

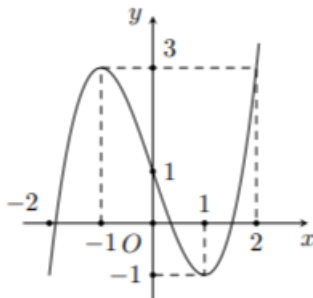
Đáp án A.

Câu 14. [#NTAD]

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để phương trình:

$$\log_2^3(f(x)+1) - \log_{\sqrt{2}}^2(f(x)+1) + (2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1} + 2m = 0 \text{ có nghiệm}$$

$$x \in (-1; 1)?$$



A. 7.

B. 5.

C. Vô số.

D. 6.

Giải

Ta có nhận xét: $\forall x \in (-1;1) \Rightarrow f(x) \in (-1;3) \Rightarrow f(x)+1 > 0$.

Đặt: $t = \log_2(f(x)+1)$, phương trình đã cho trở thành: $t^3 - 4t^2 - (m-4)t + 2m = 0$ (*)

Ta nhận thấy: $t = 2$ là một nghiệm của phương trình, thông qua lược đồ Hoocner, ta dễ dàng phân tích: $(*) \Leftrightarrow (t-2)(t^2 - 2t - m) = 0$.

Do: $x \in (-1;1) \Rightarrow [f(x)+1] \in (0;4) \Rightarrow t = \log_2[f(x)+1] \in (-\infty;2)$.

Ta có: $(t-2)(t^2 - 2t - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 & (L) \\ t^2 - 2t = m \end{cases}$.

Để phương trình: $\log_2^3(f(x)+1) - \log_{\sqrt{2}}^2(f(x)+1) + (2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1} + 2m = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ thì phương trình: $t^2 - 2t = m$ có nghiệm $\forall t \in (-\infty;2)$.

Ta lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2
y'	-	0	+
$t^2 - 2t$	$+\infty$	-1	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $m \geq -1$ mà $m \in [-5;5] \Rightarrow m = \{-1;0;1;2;3;4;5\}$.

Đáp án A.

Câu 15. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng 8?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Giải

Xét hàm số $y = f(x)$ ta phác hoạ được bảng biến thiên như sau:

x	-2	-1	1	2	3
y	7	2	-2	-1	2

Đặt: $u = f(f(x))$, từ bảng biến thiên ta thấy rằng: $u \in [-2; 7]$ vì:

$$f(x) \in [-2; 2], \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow f(f(x)) \in [-2; 7], \forall f(x) \in [-2; 2]$$

Suy ra: $g(u) = |u + m + 1|, u \in [-2; 7]$. Do đó:

$$\max g(u) = \max \{|m - 1|, |m + 8|\}, u \in [-2; 7]$$

TH1: $\max g(u) = |m - 1|, u \in [-2; 7]$. Suy ra:

$$\begin{cases} |m - 1| = 8 \\ |m - 1| \geq |m + 8| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -7 \\ |m - 1| \geq |m + 8| \end{cases} \Rightarrow m = -7$$

TH2: $\max g(u) = |m + 8|, u \in [-2; 7]$. Suy ra:

$$\begin{cases} |m + 8| = 8 \\ |m + 8| \geq |m - 1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -16 \\ |m - 1| \geq |m + 8| \end{cases} \Rightarrow m = 0$$

Như vậy tồn tại 2 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án D.

Câu 16. [#NTAD].

Cho biết $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+12} = \frac{1}{f(x)} + C$, trong đó C là hằng số thực và $f(x)$

có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Khi đó mệnh đề phát biểu nào dưới đây đúng nhất về hàm $f(x)$?

- A.** Hàm số $y = f(x)$ là một hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số $y = f(x)$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.

Giải

Lấy đạo hàm hai vế biểu thức $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+12} = \frac{1}{f(x)} + C$ theo biến x ,
ta được:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+12} = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{f^2(x)}{(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+12} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy: Hàm số $y = f(x)$ là một hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án A.

Note: Sở dĩ: $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+12 > 0$ là vì:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+12 &= [(x-1)(x+4)][(x+1)(x+2)]+12 \\ &= (x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+12 = [(x^2+3x-1)-3][(x^2+3x-1)+3]+12 \\ &= (x^2+3x-1)^2 - 9 + 12 = (x^2+3x-1)^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Câu 17. [#NTAD].

$$\text{Cho biết } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^3 - 3x \cdot \tan^2 x - 2 \tan^3 x}{x^2 - \tan^2 x} dx = \frac{a\pi^2}{b} + 2 \ln \frac{c}{d} + 2 \ln \frac{3\sqrt{3} - \pi}{4 - \pi}.$$

Trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$, Phân số $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là những phân số tối giản. Khi đó tổng $a + b + c$ bằng?

A. 251.

B. 296.

C. 283.

D. 299.

Giải

$$\text{Ta có: } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^3 - 3x \cdot \tan^2 x - 2 \tan^3 x}{x^2 - \tan^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(x^3 - x \cdot \tan^2 x) - (2x \cdot \tan^2 x + 2 \tan^3 x)}{x^2 - \tan^2 x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x(x^2 - \tan^2 x) - 2 \tan^2 x(x + \tan x)}{x^2 - \tan^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x dx - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \tan^2 x(x + \tan x)}{(x - \tan x)(x + \tan x)} dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x dx - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 x}{(x - \tan x)} dx = \frac{7\pi^2}{288} + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 x}{\tan x - x} dx = \frac{7\pi^2}{288} + A
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} t = \tan x - x \\ dt = \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan^2 x dx \\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \rightarrow \int_{1-\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}
A &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 x}{\tan x - x} dx = \int_{1-\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}} \frac{2dt}{t} = 2 \ln t \Big|_{1-\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}} = 2 \ln \frac{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}{1-\frac{\pi}{4}} \\
&= 2 \ln \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}-\pi}{4-\pi} \right) = 2 \ln \left(\frac{4}{3} \right) + 2 \ln \left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4-\pi} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } I = \frac{7\pi^2}{288} + 2 \ln \left(\frac{4}{3} \right) + 2 \ln \left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4-\pi} \right).$$

$$\text{Như thế: } \begin{cases} a = 7 \\ b = 288 \\ c = 4 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 299.$$

Đáp án D.

Câu 18. [#NTAD].

$$\text{Biết tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} = \frac{\sqrt{a}}{b}, a, b \in \mathbb{R}. \text{ Tính } S = \frac{b}{a} ?$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Giải**Phương pháp giải:**

Đối với dạng này ta phải phân tách tử số thành tổng/ hiệu của mẫu số và đạo hàm của mẫu số để đưa bài toán về dạng đơn giản.

Ta đặt: $\sin x = \alpha(\sin x + \sqrt{3} \cos x) + \beta(-\sqrt{3} \sin x + \cos x) = (\alpha - \beta\sqrt{3})\sin x + (\alpha\sqrt{3} + \beta)\cos x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta\sqrt{3} = 1 \\ \alpha\sqrt{3} + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Mặt khác:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{4}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) - \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos x - \sqrt{3} \sin x) dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3}.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{4}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos x - \sqrt{3} \sin x) dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3}$$

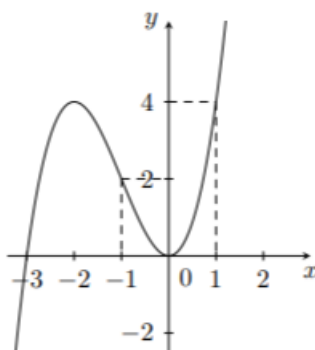
$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} = \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3}$$

$$= \frac{1}{16} \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{8(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Khi đó: } a = 3, b = 6 \Rightarrow S = \frac{b}{a} = 2.$$

Đáp án B.**Câu 19. [#NTAD].**

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{m - x^3}$ có hai nghiệm thực phân biệt.



A. $-1 \leq m \leq 1$.

B. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$.

D. $m \geq 1$.

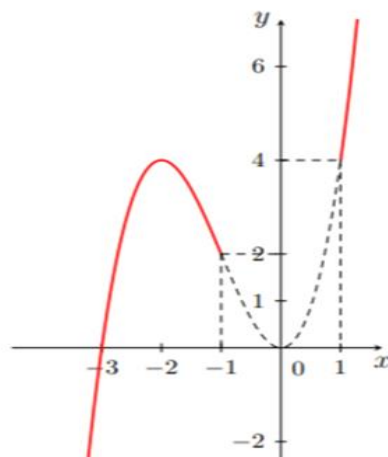
Giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{m - x^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ 3x^2 - 3 = m - x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x^3 + 3x^2 = m + 3 \end{cases}.$$

Ta xét hàm số: $y = x^3 + 3x^2, \forall x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ta vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2, \forall x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ bằng cách giữ nguyên bảng đồ thị $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ và xoá bỏ đoạn đồ thị trong khoảng $(-1; 1)$.

Minh hoạ bằng đồ thị bên dưới:



Phương trình $\sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{m - x^3}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi:
 $2 \leq m + 3 \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Đáp án A.

Câu 20. [#NTAD].

Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$ đúng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $\log(x + y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng?

- A. $\frac{31}{2}$. B. $\frac{29}{2}$. C. $-\frac{31}{2}$. D. $-\frac{25}{2}$.

Giải

Ta khai thác dữ kiện đầu bài:

$$\begin{cases} \log(x + y) = z \\ \log(x^2 + y^2) = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10^z \\ x^2 + y^2 = 10^{z+1} \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{2xy}{2} = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)] = \frac{10^{2z} - 10^{z+1}}{2}$$

$$\text{Khi đó ta có: } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 10^z \cdot \left(10^{z+1} - \frac{10^{2z} - 10^{z+1}}{2}\right).$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 10^{2z+1} - \frac{1}{2} \cdot 10^{3z} + \frac{1}{2} \cdot 10^{2z+1} = -\frac{1}{2} \cdot 10^{3z} + 15 \cdot 10^{2z}.$$

$$\text{Nhu thế dễ dàng chỉ ra được: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 15 \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{29}{2}.$$

Đáp án B.

Câu 21. [#NTAD].

Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thực?

- A. 9. B. 2. C. 3. D. 5.

Giải

$$\text{Ta có: } \sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 1 + |\sin x + \cos x| = 1 + \cos 2x + \sqrt{2\cos^2 x + m} + m$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x) + |\sin x + \cos x| = 1 + \cos 2x + \sqrt{2\cos^2 x + m} + m$$

$$\Leftrightarrow |\sin x + \cos x|^2 + |\sin x + \cos x| = 2\cos^2 x + m + \sqrt{2\cos^2 x + m} \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t^2 + t, (t \in [0; +\infty))$.

Ta có: $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$.

Khi đó: hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Phương trình (1) tương đương với phương trình: $f(|\sin x + \cos x|) = f(\sqrt{2\cos^2 x + m})$.

Vì hàm số: $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên:

$$\begin{aligned} f(|\sin x + \cos x|) &= f(\sqrt{2\cos^2 x + m}) \Leftrightarrow |\sin x + \cos x| = \sqrt{2\cos^2 x + m} \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 &= 2\cos^2 x + m \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = 2\cos^2 x + m \\ \Leftrightarrow m &= (1 - 2\cos^2 x) + \sin 2x = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{aligned}$$

Như thế để phương trình đã cho có nghiệm thì: $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Mà m là tham số thực nguyên nên $m = \{-1; 0; 1\}$.

Nên có tất cả ba giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án C.

Câu 22. [#NTAD].

Biết phương trình $z^2 - a^3z + (a+b)^2 = 0 (a, b \in \mathbb{Z}^+)$ có một nghiệm là $z = 2a - bi$.

Tính $a + b$?

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Giải

Phương trình bậc hai trên có một nghiệm là: $z = 2a - bi$ thì chắc chắn sẽ còn một nghiệm khác là $z = 2a + bi$. Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} S = x_1 + x_2 = a^3 \\ P = x_1 \cdot x_2 = (a+b)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = a^3 \\ 4a^2 + b^2 = (a+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \\ a = 2 \\ 3a^2 - 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \\ a = 2 \\ b = \frac{3a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a = -2 \\ b = -3 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \begin{matrix} (L) \\ (L) \\ (TM) \end{matrix} \end{aligned}$$

Khi đó: $a + b = 5$.

Đáp án A.

Câu 23. [#NTAD].

Biết đồ thị hàm số $y = (x-1)(x+1)(x^2-7) - m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3, x_4 . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{1-x_3} + \frac{1}{1-x_4} > 1?$$

A. 9.

B. 8.

C. 6.

D. 7.

Giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$(x-1)(x+1)(x^2-7) - m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 7 - m = 0 \quad (1)$$

Đặt: $t = x^2, (t \geq 0)$. Khi đó phương trình đã cho có dạng: $t^2 - 8t + 7 - m = 0 \quad (2)$

Vì đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 4 nghiệm thực phân biệt hay phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương. Điều đó tương đương

$$\text{với: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 7 + m > 0 \\ 8 > 0 \\ 7 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < m < 7.$$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm dương: $0 < t_1 < t_2$ thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 + t_2 + 8 \\ t_1 t_2 = 7 - m \end{cases}$.

Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm lần lượt là:

$$x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}.$$

$$\text{Nhu vậy: } \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{1-x_3} + \frac{1}{1-x_4} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{t_2}} + \frac{1}{1+\sqrt{t_1}} + \frac{1}{1-\sqrt{t_1}} + \frac{1}{1-\sqrt{t_2}} > 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{t_2}} + \frac{1}{1-\sqrt{t_2}} + \frac{1}{1+\sqrt{t_1}} + \frac{1}{1-\sqrt{t_1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1-t_2} + \frac{2}{1-t_1} > 1 \Leftrightarrow \frac{4-2(t_1+t_2)}{1-(t_1+t_2)+t_1 t_2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-2.8}{1-8+7-m} > 1 \Rightarrow \frac{12}{m} > 1 \Leftrightarrow \frac{12-m}{m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 12$$

Kết hợp điều kiện ta được: $0 < m < 7 \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Đáp án C.

Câu 24. [#NTAD].

Cho hàm số $y = \left| x^2 - 2x - 4\sqrt{(x+1)(3-x)} + m - 3 \right|$. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max y = 2021$?

A. 4048.

B. 24.

C. 0.

D. 12.

Giải

Xét $g(x) = x^2 - 2x - 4\sqrt{(x+1)(3-x)} + m - 3$.

TXĐ: $D = [-1; 3]$.

Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$.

Đặt: $t = \sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \Rightarrow t' = \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$

$t' = 0 \Leftrightarrow -x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (Nhận).

x	-1	1	3
t'		+	0
t	0	2	0

Vì: $x \in [-1; 3] \Rightarrow t \in [0; 2]$.

Khi đó: $g(t) = -t^2 - 4t + m, \forall t \in [0; 2] \Rightarrow g'(t) = -2t - 4$.

$g'(t) = 0 \Rightarrow t = -2$ (L).

t	0	2
$g(t')$		-
$g(t)$	m	$-12 + m$

Khi đó: $\max_{[-1;3]} y = \max_{[-1;3]} \{|m|; |m-12|\} = 2021$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} |m| > |m-12| \\ m = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2021$

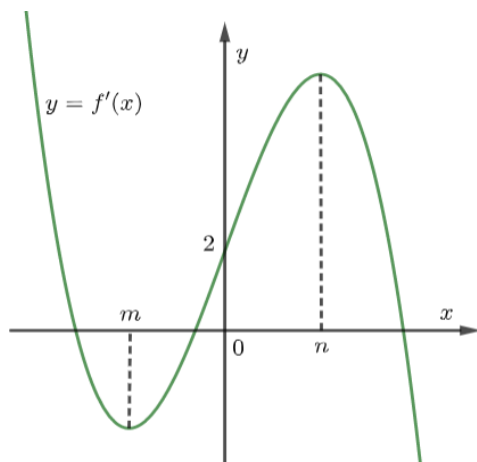
Trường hợp 2: $\begin{cases} |m| < |m-12| \\ |m-12| = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2021 + 12 = -2009$

Suy ra: $m_1 + m_2 = 12$.

Đáp án D.

Câu 25. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x) - 2x]$ bằng

A. 10.

B. 14.

C. 7.

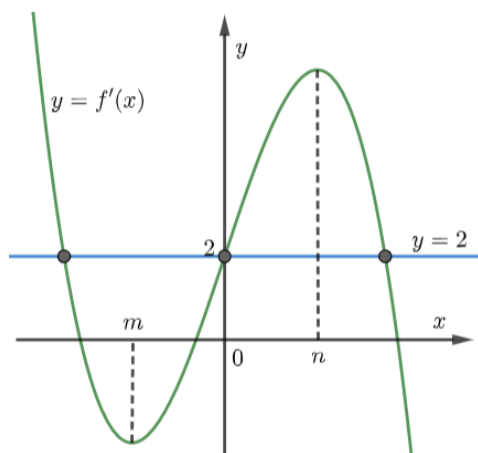
D. 6.

Giải

$$\text{Ta có: } y' = (f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - 2 = 0 & (1) \\ f''(f(x) - 2x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1)

Ta có: $(1) \Leftrightarrow f'(x) = 2$.



Từ đồ thị ta nhận thấy rằng (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 ($x_1 < m < x_2 = 0 < n < x_3$)

Xét phương trình (2).

Vì: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$.

Nên $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Ta có: $f'(0) = 2 \Rightarrow d = 2$

Suy ra: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x + e$

$$(2) \Leftrightarrow f'(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m \\ f(x) - 2x = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^4 + bx^3 + cx^2 + e = m \\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + e = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^4 + bx^3 + cx^2 = m - e (*) \\ ax^4 + bx^3 + cx^2 = n - e (**) \end{cases}$$

Số nghiệm của hai phương trình $(*)$ $(**)$ lần lượt bằng số giao điểm của hai đường thẳng

$y = m - e, y = n - e$ (trong đó: $m - e < n - e < 0$) với đồ thị hàm số:

$$y = g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

Ta có: $g'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = 0 \Leftrightarrow 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 2 = 2$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < 0 \\ x = x_2 = 0 \\ x = x_3 > 0 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta dễ dàng suy ra:

$$+) \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow a < 0 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của đồ thị hàm số: $y = g(x)$.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$					

Từ bảng biến thiên suy ra hai phương trình $(*)$ $(**)$ mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt và không trùng lẫn nhau và khác x_1, x_2, x_3 .

Suy ra: phương trình $(f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x) = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $y = f[f(x) - 2x]$ có 7 điểm cực trị.

Đáp án C.

Câu 26. [#NTAD].

Cho các số thực x, y thỏa mãn $4^{x^2+4y^2} - 2^{x^2+4y^2+1} = 2^{3-x^2-4y^2} - 4^{2-x-4y^2}$. Gọi m, M lần

lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $P = \frac{x-2y-1}{x+y+4}$. Tổng $M + m$ bằng

A. $-\frac{36}{59}$.

B. $-\frac{18}{59}$.

C. $\frac{18}{59}$.

D. $\frac{36}{59}$.

Giải

Ta đặt: $t = 2^{x^2+4y^2}, (t > 0)$.

Khi đó: $4^{x^2+4y^2} - 2^{x^2+4y^2+1} = 2^{3-x^2-4y^2} - 4^{2-x-4y^2}$ tương đương với:

$$t^2 - 2t = \frac{8}{t} - \frac{16}{t^2} \Leftrightarrow \left(t + \frac{4}{t}\right)^2 - 2\left(t + \frac{4}{t}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{4}{t} = 4 \\ t + \frac{4}{t} = -2(L) \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

Suy ra: $x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow$ luôn tồn tại một số a thỏa mãn: $0 \leq a < 2\pi$ để $\begin{cases} x = \sin a \\ 2y = \cos a \end{cases}$.

$$\text{Khi đó: } P = \frac{\sin a - \cos a - 1}{\sin a + \frac{1}{2}\cos a + 4} = \frac{2\sin a - 2\cos a - 2}{2\sin a + \cos a + 8}.$$

$$\Leftrightarrow (2P - 2)\sin a + (P + 2)\cos a = -2 - 8P \quad (1)$$

Điều kiện để tồn tại giá trị a thỏa mãn khi và chỉ khi (1) có nghiệm.

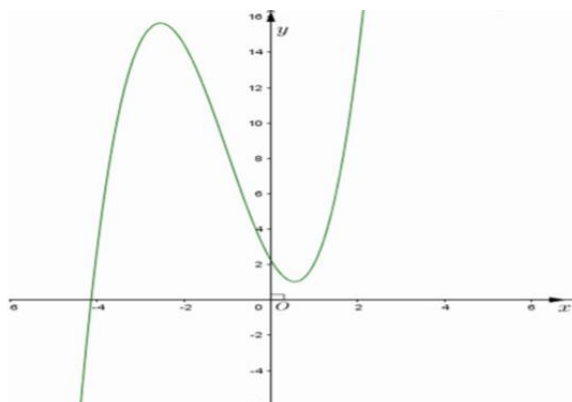
$$\text{Hay: } (2P - 2)^2 + (P + 2)^2 \geq (-2 - 8P)^2 \Leftrightarrow 59P^2 + 36P - 2 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-18 - \sqrt{442}}{59} \leq P \leq \frac{-18 + \sqrt{442}}{59} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-18 - \sqrt{442}}{59} \\ M = \frac{-18 + \sqrt{442}}{59} \end{cases} \rightarrow m + M = \frac{-36}{59}$$

Đáp án A.

Câu 27. [#NTAD].

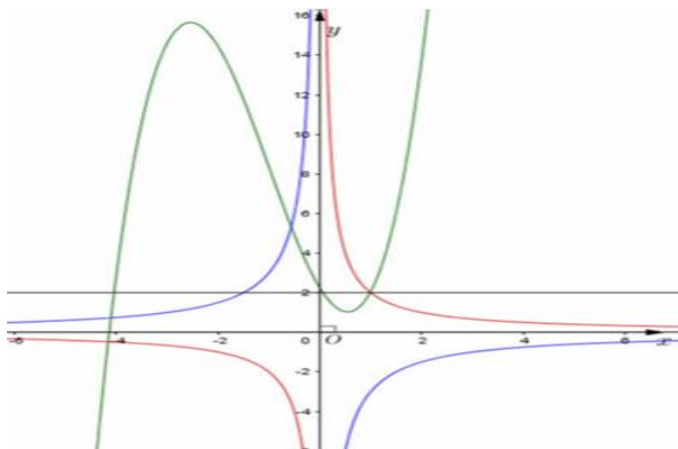
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Hỏi phương trình $f(xf(x)) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.Giải

Ta có phương trình: $f(xf(x)) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(xf(x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} xf(x) = 0 \\ xf(x) = b \in (0; 2) \\ xf(x) = a \in (-4; -2) \end{cases}$

+) Xét phương trình: $xf(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ f(x) = 0 (*) \end{cases}$

Ta thấy đồ thị $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất nên phương trình $(*)$ có nghiệm $x = x_2 < -4$

+) Xét phương trình: $xf(x) = b \Leftrightarrow f(x) = \frac{b}{x}, (x \neq 0)$ (vì khi $x = 0$ phương trình vô nghiệm)

Đặt: $g(x) = \frac{b}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{b}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$. Suy ra hàm số: $g(x) = \frac{b}{x}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Ta dễ thấy TCD: $x = 0$, TCN: $y = 0$

Phác hoạ đồ thị $y = g(x) = \frac{b}{x}$ như hình vẽ trên ta thấy có 2 giao điểm với đồ thị

$y = f(x)$, suy ra: $xf(x) = b$ có hai nghiệm phân biệt: $x = x_3; x = x_4$

+) Xét phương trình: $xf(x) = a \Leftrightarrow f(x) = \frac{a}{x}, (x \neq 0)$ (vì khi $x = 0$ phương trình vô nghiệm)

Đặt: $h(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{a}{x^2} > 0, \forall x \neq 0$. Suy ra hàm số: $g(x) = \frac{a}{x}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Ta dễ thấy TCD: $x = 0$, TCN: $y = 0$

Phác hoạ đồ thị $y = h(x) = \frac{a}{x}$ như hình vẽ trên ta thấy có 2 giao điểm với đồ thị

$y = f(x)$, suy ra: $xf(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt: $x = x_5; x = x_6$

Như vậy: $f(xf(x)) - 2 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Đáp án D.

Câu 28. [#NTAD].

Tìm m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$?

A. $2 < m \leq \frac{5}{2}$.

B. $\frac{11}{5} < m < 4$.

C. $\frac{7}{5} \leq m < 3$.

D. $0 < m < \frac{9}{4}$.

Giải

Phương trình: $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ tương đương với:

$$\begin{aligned} & (x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8) - (m^3x^3 + 3m^2x^2 + 3mx + 1) + (3x^2 - 3mx + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 2)^3 - (mx + 1)^3 + 3(x^2 - mx + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 2 - mx - 1) \left[(x^2 + 2)^2 + (x^2 + 2)(mx + 1) + (mx + 1)^2 \right] + 3(x^2 - mx + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - mx + 1) \left[(x^2 + 2)^2 + (x^2 + 2)(mx + 1) + (mx + 1)^2 \right] + 3(x^2 - mx + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - mx + 1) \left[(x^2 + 2)^2 + (x^2 + 2)(mx + 1) + (mx + 1)^2 + 3 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - mx + 1 = 0 & (1) \\ (x^2 + 2)^2 + (x^2 + 2)(mx + 1) + (mx + 1)^2 + 3 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình (2):

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 + (x^2 + 2)(mx + 1) + \frac{1}{4}(mx + 1)^2 + \frac{3}{4}(mx + 1)^2 + 3 \\ &= \left(x^2 + 2 + \frac{1}{2}mx + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(mx + 1)^2 + 3 > 0\end{aligned}$$

Nên phương trình (2) vô nghiệm.

Xét phương trình (1):

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = m, (x \neq 0).$

Ta xét hàm số: $y = f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1, \left(x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]\right).$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy rằng, để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thực phân biệt thì: $2 < m \leq \frac{5}{2}.$

Đáp án A.

Câu 29. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ với m, n là các tham số thực thỏa mãn $m + n > 0$ và $7 + 2(2m + n) < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$.

A. 9.

B. 5.

C. 11.

D. 2.

Giải

Theo giả thiết ta có:

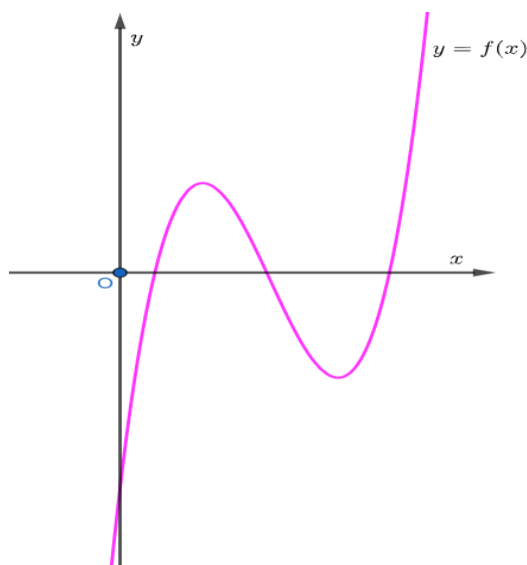
$$\begin{cases} f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1 \\ m + n > 0 \\ 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = m + n > 0 \\ f(2) = 4m + 2n + 7 = 7 + 2(2m + n) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) \cdot f(1) < 0 \\ f(1) \cdot f(2) < 0 \\ f(2) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Và hàm số $y = f(x)$ là một hàm liên tục trên toàn tập số thực.

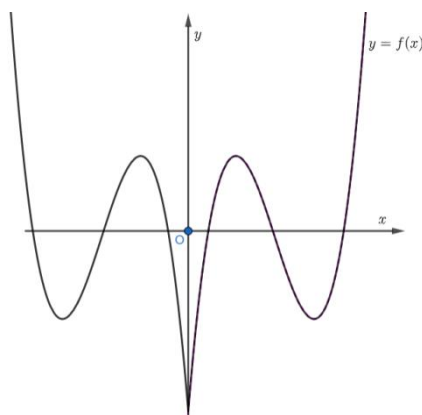
$$\text{Nên: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (0;1) \\ x = x_2 \in (1;2) \\ x = x_3 \in (2;+\infty) \end{cases} \quad (\text{Do } f(x) \text{ là đa thức bậc ba nên có tối đa 3 nghiệm}).$$

Như vậy đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị đều nằm bên phải trục tung.

Ta phác hoạ đồ thị $y = f(x)$ như sau:

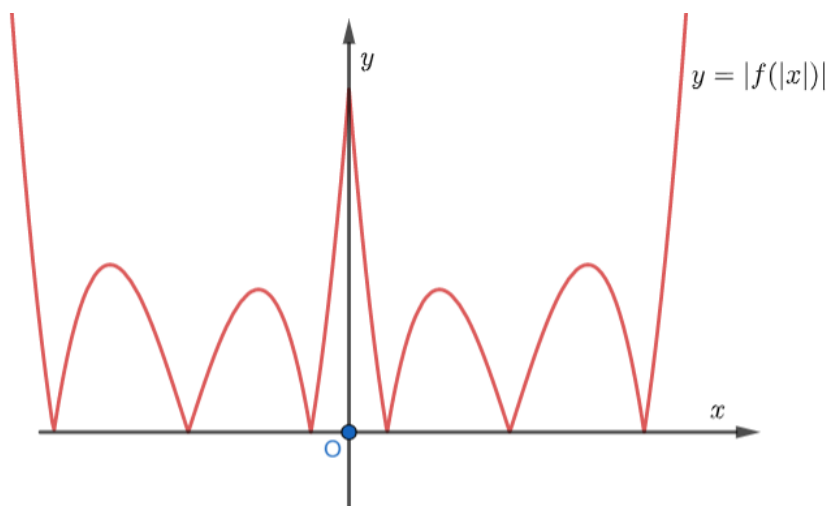


Từ đó ta dễ dàng suy ra được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ bên dưới



Note: Thực chất đồ thị $y = f(|x|)$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ ở bên phải và xoá đi phần đồ thị $y = f(x)$ nằm bên trái trục tung sau đó bằng một phép lấy đối xứng sang trái trục Oy ta sẽ thu được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

Cuối cùng ta phác hoạ đồ thị của hàm số $y = |f(|x|)|$ như sau:



Note: Thực chất đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y = f(|x|)$ ở phía trên trục hoành rồi lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(|x|)$ nằm phía dưới trục Ox lên trên sau đó bỏ đi phần đồ thị $y = f(|x|)$ nằm bên dưới trục hoành.

Như vậy đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ có tất cả 11 điểm cực trị.

Đáp án C.

Câu 30. [#NTAD].

Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc m ($m > 0$) cắt đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C . Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(5;8)$.

B. $(-5;0)$.

C. $(0;2)$.

D. $(1;5)$.

Giải

Cách 1:

Phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc m và đi qua điểm $A(2;0)$ là đường thẳng $y = mx - 2m$.

Hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình:

$$-x^3 + 6x^2 - 9x + 2 = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + m+1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

+) Với $x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(2;0)$. Vì (C) cắt (d) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1, x_2 \neq 2$).

Điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: x_1, x_2 ($x_1, x_2 \neq 2$) là:

$$\begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ 2^2 - 4 \cdot 2 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3.$$

Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}$ mà $m > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$

$$\text{Giả sử: } \begin{cases} B(x_1; mx_1 - 2m) \\ C(x_2; mx_2 - 2m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B'(0; mx_1 - 2m) \\ C'(0; mx_2 - 2m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B'C' = |m(x_1 - x_2)| = m|x_1 - x_2| \\ BB' = |x_1| = x_1 \\ CC' = |x_2| = x_2 \end{cases}.$$

Theo giả thuyết ta có:

$$\begin{aligned} S_{BB'C'C} &= \frac{1}{2} B'C' (BB' + CC') = 8 \Leftrightarrow B'C' (BB' + CC') = 16 \Leftrightarrow m|x_1 - x_2|(x_1 + x_2) = 16 \\ &\Leftrightarrow m|x_1 - x_2| = 4 \Leftrightarrow m^2(x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow m^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 16 \Leftrightarrow m^2(16 - 4m - 4) = 16 \\ &\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (L)} \\ m = 2 \text{ (N)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $0 < m < 3$. Nên $m = 2$.

Khi đó: $m \in (1; 5)$.

Đáp án D.

Cách 2:

Phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc m và đi qua điểm $A(2;0)$ là đường thẳng

có phương trình: $y = m(x - 2)$.

Xét hàm số: $y = f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ (C)

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

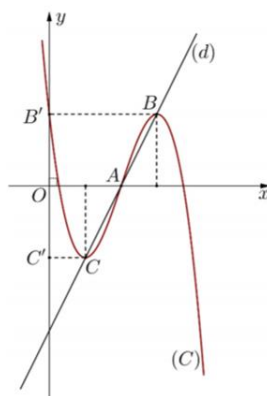
Ta có: $\begin{cases} y' = -3x^2 + 12x - 9 \\ y'' = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

Mà $y(2) = 0 \Rightarrow A(2; 0)$ được xem là điểm uốn của đồ thị hàm số (C).

Thế nên ta biết được B, C là hai điểm đối xứng nhau qua $A(2; 0)$.

Và B', C' là hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

Nên OA là đường trung bình của hình thang $BB'C'C \Rightarrow \frac{BB' + CC'}{2} = OA = 2$.



Diện tích của hình thang $BB'C'C$ bằng 8 $\Rightarrow B'C' = 4$.

Không mất tính tổng quát, giả sử:

$$y_B > 0 \Rightarrow y_B = 2 \Rightarrow -x_B^3 + 6x_B^2 - 9x_B + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 0 \\ x_B = 3 \end{cases}$$

$$+) x_B = 0 \Rightarrow B(0; 2) \Rightarrow (d): y = -x + 2 \Rightarrow m = -1 < 0 (L)$$

$$+) x_B = 3 \Rightarrow B(3; 2) \Rightarrow (d): y = 2x - 4 \Rightarrow m = 2 > 0 (TM)$$

Khi đó: $m \in (1; 5)$.

Đáp án D.

Câu 31. [#NTAD].

Biết giá trị của tích phân $I = \int_0^{\pi} \max\{\sin x, \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}\} dx = a + \frac{a\pi\sqrt{a+1}}{b}$.

Tính $a^b + b^a$?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Giải**Phương pháp giải:**

Đối với dạng toán này thì ta cần phải tìm trong khoảng $(0; \pi)$, thì $\sin x$, $\sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}$, biểu thức nào có giá trị lớn hơn.

Xét hiệu: $\sin x - \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} = 0$

Ta có:

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

Study tips: "Ta chỉ nhận nghiệm nằm trong đoạn cận của tích phân mà không chọn nghiệm nằm ngoài đoạn đó."

Việc còn lại là xét trên hai khoảng rời nhau ấy, biểu thức nào đạt max.

Ta chỉ việc CALC một giá trị nằm trong khoảng là có thể xác định dấu, vì: $x = \frac{2\pi}{3}$ là

một nghiệm đơn, sẽ đổi dấu qua nghiệm đó.

Dễ thấy rằng:

$$\forall x \in \left[0; \frac{2\pi}{3} \right], \max f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}$$

$$\forall x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right], \max f(x) = \sin x$$

Khi đó ta có:

$$I = \int_0^{\pi} \max \{ \sin x, \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} \} dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin x dx$$

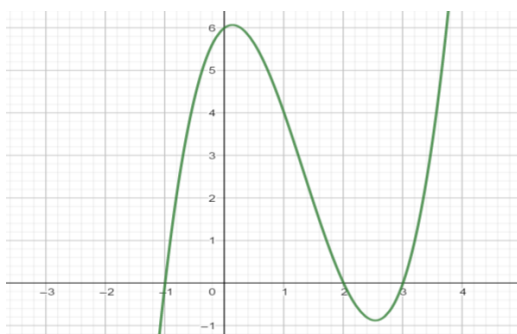
$$I = \left(\sqrt{3} \sin x + x\sqrt{3} \right) \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} - (\cos x) \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{3}{2} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

Vậy: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = 2^3 + 3^2 = 17.$

Đáp án C.

Câu 32. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số với trục hoành ($S_1 > S_2$).



Biết rằng: $\int_{-1}^3 |f(x)| dx = \frac{71}{6}$ và $\frac{S_1}{S_2} = \frac{135}{7}.$

Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arctan 3} (\sin^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x) \cdot f(\tan x) dx ?$

A. $\frac{32}{3}.$

B. $\frac{23}{3}.$

C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}.$

D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$

Giải

Ta có: $\int_{-1}^3 |f(x)| dx = \frac{71}{6} \Leftrightarrow S_1 + S_2 = \frac{71}{6} \quad (1).$

Mặt khác: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{135}{7} \quad (2).$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \begin{cases} S_1 + S_2 = \frac{71}{6} \\ 7S_1 - 135S_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{45}{4} \\ S_2 = \frac{7}{12} \end{cases}.$

Ta có: $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arctan 3} (\sin^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x) \cdot f(\tan x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arctan 3} (1 + \tan^2 x) \cdot f(\tan x) dx.$

Đặt: $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx.$

Khi đó: $I = \int_{-1}^3 f(t) dt = \int_{-1}^3 f(x) dx = S_1 - S_2 = \frac{45}{4} - \frac{7}{12} = \frac{32}{3}$.

Đáp án A.

Câu 33. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(mx) = n.f(x) + p, \forall x \in \mathbb{R}, (m \neq 0)$.

Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = q, (q \neq 0)$. Tính tích phân $I = \int_1^m f(x) dx$?

A. $mn + np - q$.

B. $nmq + mp - q$.

C. $pqm - pn + q$.

D. $pn + qm - mnpq$.

Giải

Lấy tích phân $\int_0^1$ hai vế, ta được: $\int_0^1 f(mx) dx = n \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 p dx$.

Ta xét các tích phân con:

+) $A = \int_0^1 f(mx) dx$.

Đặt: $t = mx \Rightarrow dt = m dx$ và $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=m \end{cases}$.

Khi đó:

$$A = \int_0^1 f(mx) dx = \frac{1}{m} \int_0^m f(t) dt = \frac{1}{m} \int_0^m f(x) dx = \frac{1}{m} \left(\int_0^1 f(x) dx + \int_1^m f(x) dx \right) = \frac{1}{m} (q + I) = \frac{q + I}{m} \quad (1)$$

+) $n \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 p dx = nq + p \quad (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{q + I}{m} = nq + p \Rightarrow q + I = nmq + mp \Rightarrow I = nmq + mp - q$.

Đáp án B.

Câu 34. [#NTAD].

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|2^{x+1} - 8| = \frac{1}{2}x^2 + m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 8.

B. 9.

C. 6.

D. 7.

Giải

Phương trình tương đương với: $m = f(x) = |2^{x+1} - 8| - \frac{1}{2}x^2$ (*).

Ta có:

$$f(x) = |2^{x+1} - 8| - \frac{1}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1} - 8 - \frac{1}{2}x^2, & (x \geq 2) \\ 8 - 2^{x+1} - \frac{1}{2}x^2, & (x < 2) \end{cases} \Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1} \ln 2 - x, & (x > 2) \\ h(x) = -2^{x+1} \ln 2 - x, & (x < 2) \end{cases}$$

Chú ý hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

Ta có: $g'(x) = 2^{x+1} \cdot \ln 2 - 1 > 2^{2+1} \cdot \ln 2 - 1 > 0, \forall x > 2 \Rightarrow g(x) > g(2) = 2^3 \ln 2 > 0, \forall x > 2$.

$$\text{Và } \begin{cases} h'(x) = -2^{x+1} \ln 2 - 1 < 0, \forall x < 2 \\ h(-1) = -\ln 2 + 1 > 0 \\ h(0) = -2 \ln 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow h(0) \cdot h(-1) < 0.$$

Do đó $h(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (-1; 0)$.

Dùng máy tính tìm được $x_0 \approx -0,797563$ lưu nghiệm này vào biến nhớ A , ta có

$$f(x_0) = f(A) \approx 6,53131.$$

Vậy ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \in (-1; 0)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_0)$	-2	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-2 < m < f(x_0) \approx 6,53131 \Rightarrow m \in \{-1, \dots, 6\}$.

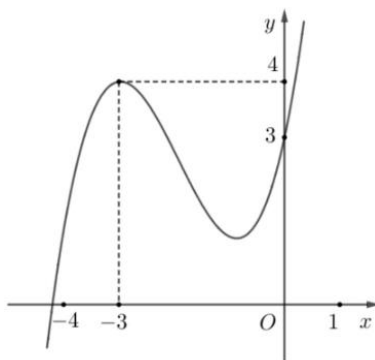
Có tất cả 8 số nguyên thỏa mãn.

Đáp án A.

Câu 35. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên

$m \in [-10; 10]$ để bất phương trình $f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0$ có nghiệm.



A. 9.

B. 10.

C. 12.

D. 11.Giải

Điều kiện của bất phương trình là: $-1 \leq x \leq 1$.

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$f\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0 \Leftrightarrow f(m) \geq g(x) = f\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} (*).$$

Ta có: $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} \Rightarrow \min_{[-1;1]} h(x) = h(-1) = 1$.

Và: $\min_{[-1;1]} f\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 3$.

Do đó: $\min_{[-1;1]} g(x) = \min_{[-1;1]} h(x) + \min_{[-1;1]} f\left(\sqrt{1-x^2}\right) = 1 + 3 = 4 = g(-1)$.

Vậy (*) có nghiệm trên đoạn $[-1;1] \Leftrightarrow f(m) \geq \min_{[-1;1]} g(x) \Leftrightarrow f(m) \geq 4$.

Quan sát đồ thị hàm số suy ra $m \in \{-3, 1, 2, \dots, 10\}$.

Có tất cả 11 số nguyên thoả mãn.

Đáp án D.

Câu 36. [#NTAD].

Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hai bạn A, B mỗi người chọn ngẫu nhiên một tập con của S .

Xác suất để tập con của A và B chọn được có đúng 2 phần tử chung gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 15,08%.

B. 29,66%.

C. 30,16%.

D. 14,83%.

Giải

Số tập con của S là: $2^6 = 64$. Mỗi người có 64 cách chọn tập con, do vậy số phần tử không gian mẫu là 64^2 .

Ta tìm số cách chọn tập con thoả mãn:

Vì tập con của A và B chọn được có chung 2 phần tử nên các tập con này phải có ít nhất 2 phần tử.

Giả sử tập con của A và B gồm $x, y (x, y \geq 2)$ phần tử khi đó:

A có C_6^x cách chọn tập con; lúc này S còn $6 - x$ phần tử.

Chọn ra 2 phần tử gọi là a, b có trong tập con của A để xuất hiện trong tập con của B có C_x^2 cách.

Lúc này tập con của B đã có hai phần tử chung với tập con của A là a, b ta cần chọn thêm $(y - 2)$ phần tử khác trong $(6 - x)$ phần tử còn lại sau khi A đã chọn tập con có C_{6-x}^{y-2} cách viết.

Vậy có tất cả $C_6^x C_x^2 C_{6-x}^{y-2}$ cách.

Ta có điều kiện: $\begin{cases} x, y \geq 2 \\ y - 2 \leq 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6 \\ 2 \leq y \leq 8 - x \end{cases}$.

Nếu:

$$\sum_{y=2}^6 C_6^2 C_6^2 C_{6-2}^{y-2} + \sum_{y=2}^5 C_6^3 C_3^2 C_{6-3}^{y-2} + \sum_{y=2}^4 C_6^4 C_4^2 C_{6-4}^{y-2} + \sum_{y=2}^3 C_6^5 C_5^2 C_{6-5}^{y-2} + \sum_{y=2}^2 C_6^6 C_6^2 C_{6-6}^{y-2} = 240 + 480 + 360 + 120 + 15 = 1215$$

cách chọn tập con thoả mãn.

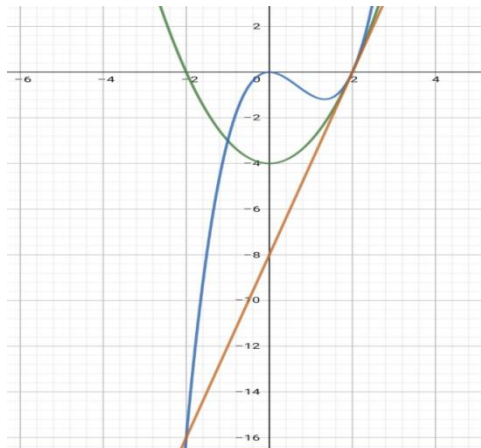
Xác suất cần tính bằng $\frac{1215}{64^2} \approx 29,66\%$.

Đáp án B.

Câu 37. [#NTAD].

Cho hai đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = g(x) = ex^2 + fx + g$ ($a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Gọi (d) là tiếp tuyến chung của hai đồ thị trên và S_0 là phần diện tích giới hạn bởi 3 đường $y = f(x), y = g(x), (d)$. Biết

$S_0 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{p}{q}$ với m, n, p, q là những số nguyên tố. Tính tổng $S = m + n + p + q$?



A. $S = 17$.B. $S = 16$.C. $S = 18$.D. $S = 19$.Giải

Trước hết để giải quyết được bài toán này ta cần phải tìm chính xác được đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

+) Đồ thị $y = f(x)$?

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Ta đề ý rằng: đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua 3 điểm đặc biệt:

$A(0;0); B(2;0); C(-2;-16)$ và nhận điểm $A(0;0)$ là điểm cực đại nên ta có hệ:

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow y = f(x) = x^3 - 2x^2$$

+) Đồ thị $y = g(x)$?

Ta đề ý rằng: Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đi qua 3 điểm đặc biệt:

$B(2;0); D(-2;0); E(0;-4)$.

Nên ta có thể lập được hệ sau:
$$\begin{cases} g = -4 \\ 4e + 2f + g = 0 \\ 4e - 2f + g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ f = 0 \\ g = -4 \end{cases} \Rightarrow y = g(x) = x^2 - 4.$$

+) Tiếp tuyến chung (d) của $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ và có dạng:

$y = ax + b$ khi đó: a, b phải thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) = y(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) = y'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 2x_0^2 = x_0^2 - 4 = ax_0 + b \\ 3x_0^2 - 4x_0 = 2x_0 = a \end{cases}.$$

Ta tìm nghiệm của hệ con sau:

$$\begin{cases} x_0^3 - 2x_0^2 = x_0^2 - 4 \\ 3x_0^2 - 4x_0 = 2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0 \\ 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \\ x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases} \rightarrow x_0 = 2.$$

Khi đó:
$$\begin{cases} ax_0 + b = x_0^2 - 4 \\ a = 2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 4x - 8.$$

Ta tìm giao điểm của các cặp đồ thị: $(f(x), g(x)) \& (f(x), (d))$.

*) Giao điểm của hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 2x^2 = x^2 - 4 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

*) Giao điểm của hai hàm số $f(x)$, (d) là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 2x^2 = 4x - 8 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vì: S_0 là phần diện tích giới hạn bởi 3 đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, (d) .

Nên:

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{-2}^2 |f(x) - d| dx - \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^2 [f(x) - d] dx - \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx \\ &\Rightarrow S_0 = \int_{-2}^2 [x^3 - 2x^2 - 4x + 8] dx - \int_{-1}^2 [x^3 - 2x^2 - x^2 + 4] dx = \frac{175}{12} = \frac{5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 3} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{7}{3} \\ &\Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 2 \\ p = 7 \\ q = 3 \end{cases} \Rightarrow S = m + n + p + q = 17 \end{aligned}$$

Đáp án A.

Câu 38. [#NTAD].

Cho hàm số $y = x^3 + (3 - 2m)x^2 + (9m - 31)x + 27 - 7m$ có đồ thị là (C) . Biết rằng ứng với giá trị nguyên $m = m_1$ thì hàm số (C) cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số cộng có các phần tử đều nguyên dương và ứng với giá trị nguyên $m = m_2$ thì hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số nhân có các phần tử đều nguyên dương. Tính $S = m_1 - m_2$?

A. 11.

B. -1.

C. 1.

D. 0.

Giải

Từ hàm số: $y = x^3 + (3 - 2m)x^2 + (9m - 31)x + 27 - 7m$.

Ta nhận thấy $x = 1$ luôn luôn là một nghiệm của phương trình $y = 0$.

Bằng phép chia Hoocner ta có: $y = (x - 1)(x^2 + (4 - 2m)x + 7m - 27)$.

Giao điểm của hàm số với trục hoành là nghiệm của: $\begin{cases} x = 1 \\ x^2 + (4 - 2m)x + 7m - 27 = 0 \end{cases}$.

Để hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì:

$$\begin{cases} \Delta' = (2-m)^2 - 7m + 27 > 0 \\ (1)^2 + (4-2m) \cdot 1 + 7m - 27 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \frac{22}{5}.$$

Giả sử 3 giao điểm của $y = f(x)$ với trục hoành lần lượt là: $1, x_1, x_2$.

Khi đó:

- 3 điểm trên lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = 1+d \\ x_2 = 1+2d \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-4 \\ x_1 \cdot x_2 = 7m-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3d = 2m-4 \\ 2d^2 + 3d + 1 = 7m-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3d = 2m-4 \\ 2d^2 + 3d + 1 = 7\left(\frac{3m}{2} + 3\right) - 27 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2+3d = 2m-4 \\ 2d^2 + 3d + 1 = \frac{21}{2}d - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3d}{2} + 3 \\ d = 2 \\ d = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (d; m) = (2; 6) \text{ (TM)} \\ (d; m) = \left(\frac{7}{4}; \frac{45}{8}\right) \text{ (L)} \end{cases} \end{aligned}$$

Hay: $m_1 = 6$.

- 3 điểm trên lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = d \\ x_2 = d^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-4 \\ x_1 \cdot x_2 = 7m-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d + d^2 = 2m-4 \\ d^3 = 7m-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d + d^2 = 2m-4 \\ d^3 = 7\left(\frac{d + d^2 + 4}{2}\right) - 27 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d + d^2 = 2m-4 \\ d^3 - \frac{7}{2}d^2 - \frac{7}{2}d + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{d + d^2 + 4}{2} \\ d = 2 \\ d = \frac{3 \pm \sqrt{113}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (d; m) = (2; 5) \text{ (TM)} \\ (L) \end{cases} \end{aligned}$$

Nên: $m_2 = 5$.

Vậy: $S = m_1 - m_2 = 1$.

Đáp án C.

Câu 39. [#NTAD].

Cho đa thức bậc bốn $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = 2$ và hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ là hàm số lẻ. Biết rằng:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2029x}{x} = 2021.$$

Giá trị của biểu thức: $S = |f(0) - f(-2)| + |f(0) - f(2)| = ?$

A. $S = 16.$

B. $S = 8.$

C. $S = 4.$

D. $S = 0.$

Giải

Theo đề bài ta có: đa thức bậc bốn $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = 2$ hay ta có: $f'(2) = 0.$

Nhưng ta lại có: Hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ là hàm số lẻ nên $f'(-2) = 0.$

Mặt khác ta xét: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2029x}{x} = 2021.$

$$\text{Nhận xét: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2029x}{x} = 2021 \end{cases}.$$

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow 0} (f'(x) + 2029x) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$

Vì: $y = f(x)$ là đa thức bậc bốn nên có tối đa 3 cực trị và ta tìm được

$x = -2; x = 0; x = 2$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó: $y = f'(x) = a(x+2).x.(x-2) = ax.(x^2 - 4).$

Ta thay vào: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2029x}{x} = 2021.$

Được: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax.(x^2 - 4) + 2029x}{x} = 2021.$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 - 4a + 2029) = 2021 \Rightarrow -4a + 2029 = 2021 \Rightarrow a = 2.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	
	$+\infty$								
		CT		CĐ		CT			

Như thế:

$$S = |f(0) - f(-2)| + |f(0) - f(2)| = (f(0) - f(-2)) + (f(0) - f(2)) = \int_{-2}^0 2x(x^2 - 4)dx - \int_0^2 2x(x^2 - 4)dx = 16$$

Đáp án A.

Câu 40. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = 2019$. Tính giá trị

của tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx$ là?

- A. 2019. B. 4038. C. -2019. D. -4038.

Giải

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos x) dx$.

Đặt: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ và $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$.

Khi đó:

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos x) dx = -2 \int_1^0 t f(t) dt = 2 \int_0^1 t f(t) dt = 2 \int_0^1 x f(x) dx = 2 \cdot 2019 = 4038.$$

Đáp án B.

Câu 41. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên toàn tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức:

$$f(x+1) + f(x+2) = x^2 + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính giá trị của tích phân } \int_1^5 f(x) dx = ?$$

- A. $\frac{43}{3}$ B. 12 C. $\frac{44}{3}$ D. $\frac{37}{3}$

Giải

Ta có: $f(x+1) + f(x+2) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

Lấy tích phân $\int_0^1$ hai vế, được: $\int_0^1 f(x+1) dx + \int_0^1 f(x+2) dx = \int_0^1 (x+1)^2 dx (*)$.

$$(*) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{7}{3}.$$

Tương tự:

$$\text{Lấy tích phân } \int_2^3 \text{ hai vế, được: } \int_2^3 f(x+1)dx + \int_2^3 f(x+2)dx = \int_2^3 (x+1)^2 dx \quad (*).$$

$$(*) \Leftrightarrow \int_3^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx = \frac{37}{3} \Leftrightarrow \int_3^5 f(x)dx = \frac{37}{3}.$$

$$\text{Từ đó dễ dàng tính được: } \int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = \frac{7}{3} + \frac{37}{3} = \frac{44}{3}.$$

Đáp án C.

Câu 42. [#NTAD].

$$\text{Biết } \int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{11}}} \right) dx = \frac{a}{b} \sqrt[3]{c}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+, \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản, } c < a.$$

Tính $S = a + b - c$?

A. $S = 51.$

B. $S = 39.$

C. $S = 67.$

D. $S = 75.$

Giải

Ta có:

$$I = \int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{11}}} \right) dx = \int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} \cdot \sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} \right) dx = \int_1^2 \sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^3} \right) dx$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} \Rightarrow t^3 = x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow 3t^2 dt = \left(1 + \frac{2}{x^3} \right) dx.$$

$$\text{Và: } \begin{cases} x=1 \rightarrow t=0 \\ x=2 \rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{7}{4}}. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}} t \cdot 3t^2 dt = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}} 3t^3 dt = \frac{3}{4} t^4 \Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}} = \frac{3}{4} t^4 \Big|_0^{\frac{\sqrt[3]{14}}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{14 \sqrt[3]{14}}{16} \right) = \frac{21}{32} \sqrt[3]{14}$$

Nên $a = 21, b = 32, c = 14.$

Dễ dàng ta tính được: $S = a + b - c = 39.$

Đáp án B.

Câu 43. [#NTAD].

Gọi a, b là các số nguyên thỏa mãn $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 43^\circ) = 2^a (1 + \tan b^\circ)$ đồng thời $a, b \in [0; 90]$. Tính $P = a + b$?

A. 46.

B. 22.

C. 44.

D. 27.

Giải

Ta có nhận xét như sau:

Nếu $A + B = 45^\circ$ ta có thể suy ra:

$$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = (1 + \tan A) \left[1 + \tan(45^\circ - A) \right] = (1 + \tan A) \cdot \left[1 + \frac{\tan 45^\circ - \tan A}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan A} \right]$$

$$\Leftrightarrow (1 + \tan A)(1 + \tan B) = (1 + \tan A) \left(1 + \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A} \right) = 1 + \tan A + 1 - \tan A = 2$$

Khi đó:

$$(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 43^\circ) = (1 + \tan 1^\circ) \left[(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 43^\circ) \right] \dots \left[(1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ) \right]$$

$$= (1 + \tan 1^\circ) \cdot 2^{21} = 2^a \cdot (1 + \tan b^\circ)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 22.$$

Đáp án B.

Câu 44. [#NTAD].

Một cửa hàng kem có bán bốn loại kem: kem socola, kem sữa, kem đậu xanh và kem thập cẩm. Một người vào cửa hàng kem mua 8 cốc kem. Xác suất trong 8 cốc kem đó có đủ cả bốn loại kem bằng

A. $\frac{5}{14}$.B. $\frac{5}{13}$.C. $\frac{7}{33}$.D. $\frac{5}{12}$.Giải

* Xét hai bài toán nổi tiếng sau:

+) **Bài toán 1:** Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n, \quad (n, k \in \mathbb{N}^*; n \geq k).$$

Đáp số: C_{n-1}^{k-1} .

Đáp số bài toán trên cho ta kết quả của bài toán "chia kẹo".

Giả sử có n cái kẹo và k em bé, (biết rằng số kẹo nhiều hơn hoặc bằng số em bé). Khi đó số nghiệm nguyên dương cần tìm chính là số cách phân phát n cái kẹo cho k em bé sao cho em bé nào cũng có ít nhất 1 cái kẹo.

+) **Bài toán 2:** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n, \quad (n, k \in \mathbb{N}^*).$$

Đáp số: C_{n+k-1}^{k-1} .

Đáp số bài toán trên cho ta kết quả của bài toán chia n cái kẹo cho k em bé. Nhưng khác bài toán trên một chỗ, có thể có một số em bé không có cái kẹo nào.

*** Áp dụng cho câu hỏi trên ta có:**

+) Số cách phân phối 8 que kem cho 4 loại là: $|\Omega| = C_{11}^3$.

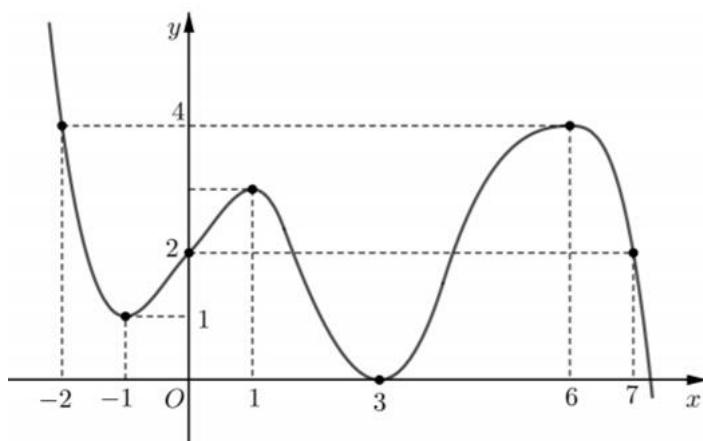
+) Số cách phân phối 8 que kem cho 4 loại mà sao cho loại nào cũng có: C_7^3 .

Do đó xác suất cần tìm là: $P = \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{7}{33}$.

Đáp án C.

Câu 45. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây:



Số nghiệm của phương trình $f(3\sin x) = 3|\cos x|$ trên khoảng $\left(0; \frac{9\pi}{2}\right)$ là?

A. 16.

B. 17.

C. 15.

D. 18.

Giải

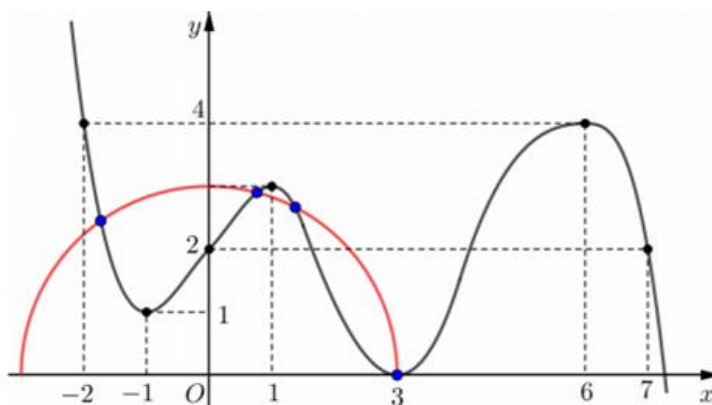
Ta có phương trình $f(3\sin x) = 3|\cos x|$ tương đương với:

$$f(3\sin x) = 3\sqrt{1 - \sin^2 x} \Leftrightarrow f(3\sin x) = \sqrt{9 - 9\sin^2 x} \quad (1).$$

Đặt: $t = 3\sin x$, ($t \in [-3; 3]$).

Phương trình (1) trở thành $f(t) = \sqrt{9 - t^2}$ (2).

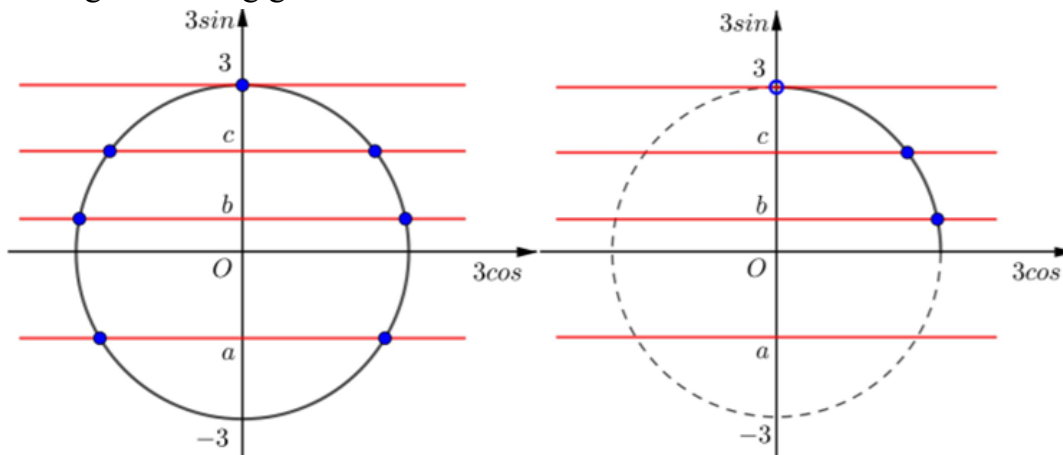
Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \sqrt{9 - t^2}$ suy ra (C) là nửa trên của đường tròn tâm O, bán kính $R = 3$.



Dựa vào đồ thị, ta có: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (-2; -1) \\ t = b \in (0; 1) \\ t = c \in (1; 3) \\ t = 3 \end{cases}.$

Ta có: $\left(0; \frac{9\pi}{2}\right) = \underbrace{(0; 4\pi]}_{\text{2 vòng lượng giác}} \cup \left(4\pi; \frac{9\pi}{2}\right).$

Ta xét đường tròn lượng giác như sau:



Dựa vào đường tròn lượng giác, ta thấy phương trình có $2.7 + 2 = 16$ (nghiệm).

Đáp án A.

Câu 46. [#NTAD].

Xét trong tập hợp các khối nón tròn xoay có cùng góc ở đỉnh $2\beta = 90^\circ$ và có độ dài đường sinh bằng nhau. Có thể sắp xếp được tối đa bao nhiêu khối nón thoả mãn cứ hai khối nón bất kì thì chúng chỉ có đỉnh chung hoặc ngoài đỉnh chung đó ra chúng có thể có chung một đường sinh duy nhất?

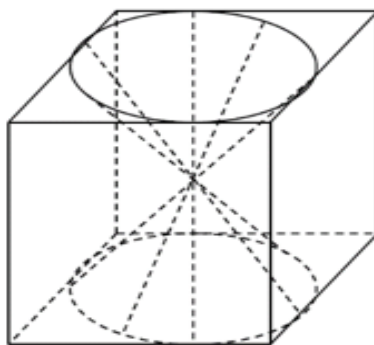
A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Giải



Bước 1: Ta sẽ sắp như hình vẽ với hai khối chóp đầu tiên.

Bước 2: Sắp 2 khối tiếp theo theo chiều ngang ở trái và phải.

Bước 3: Lắp 2 khối còn lại theo chiều ngang ở trước và sau.

Khi đó: Ta chỉ có thể sắp tối đa 6 khối nón thoả mãn yêu cầu đề bài.

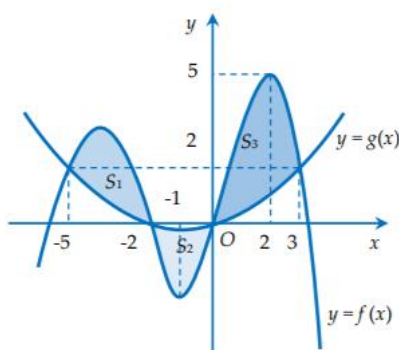
Lưu ý: 6 khối nón thoả mãn là 6 khối nón có cùng thể tích và có đường kính đáy bằng độ dài cạnh khối lập phương.

Đáp án B.

Câu 47. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường Parabol

$y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p .



Giá trị của tích phân $\int_{-5}^3 f(x)dx$ bằng?

A. $-m+n-p-\frac{208}{45}$

B. $m-n+p+\frac{208}{45}$

C. $m-n+p-\frac{208}{45}$

D. $-m+n-p+\frac{208}{45}$

Giải

Quan sát đồ thị hình vẽ, ta có:

$$\begin{cases} S_1 = \int_{-5}^{-2} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx - \int_{-5}^{-2} g(x) dx \Rightarrow \int_{-5}^{-2} f(x) dx = m + \int_{-5}^{-2} g(x) dx; \\ S_2 = \int_{-2}^0 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-2}^0 g(x) dx - \int_{-2}^0 f(x) dx \Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 g(x) dx - n; \\ S_3 = \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = p + \int_0^3 g(x) dx. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-5}^3 f(x) dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{-5}^3 f(x) dx = m - n + p + \int_{-5}^{-2} g(x) dx + \int_{-2}^0 g(x) dx + \int_0^3 g(x) dx = m - n + p + \int_{-5}^3 g(x) dx$$

Mặt khác, ta cần phải tính đúng giá trị $\int_{-5}^3 g(x) dx$.

Khi đó: ta cần tìm đồ thị hàm số $y = g(x)$

Vì: $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ và hàm số đã cho đi qua ba điểm có tọa độ:

$(-5; 2); (-2; 0); (0; 0)$.

Khi đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 25a - 5b + c = 2 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{15} \\ b = \frac{4}{15} \\ c = 0 \end{cases}.$$

Khi đó: $\int_{-5}^3 g(x) dx = \int_{-5}^3 \left(\frac{2}{15} x^2 + \frac{4}{15} x \right) dx = \frac{208}{45}.$

Vậy: $\int_{-5}^3 f(x) dx = m - n + p + \int_{-5}^3 g(x) dx = m - n + p + \frac{208}{45}.$

Đáp án B.

Câu 48. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức

$P = 2M - m$ có dạng $a\sqrt{11} - b\sqrt{3} + c, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $a + b + c$?

A. $a + b + c = 4.$

B. $a + b + c = 7.$

C. $a + b + c = 6.$

D. $a + b + c = 5.$

Giải

Từ $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int 2x dx \quad (1).$

Đặt: $\sqrt{f^2(x)+1} = t.$

$\Rightarrow f^2(x) = t^2 - 1 \Rightarrow 2f(x) \cdot f'(x) dx = 2t dt \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) dx = t dt$

$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{f(x) \cdot f'(x) dx}{\sqrt{f^2(x)+1}} = \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t + C_1 = \sqrt{f^2(x)+1} + C_1 \\ \int 2x dx = x^2 + C_2 \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} + C_1 = x^2 + C_2.$

Do $f(0) = 0 \rightarrow C_2 - C_1 = 1.$

Như vậy: $\sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + (C_2 - C_1) = x^2 + 1 \Rightarrow f^2(x) = (x^2 + 1)^2 - 1 = x^4 + 2x^2.$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2} = |x|\sqrt{x^2 + 2} = x\sqrt{x^2 + 2} \text{ (do } x \in [1; 3]).$$

Ta có: $f'(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 2}} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x^2 + 2}$ đồng biến trên toàn tập $\mathbb{R}$ nên cũng đồng biến trên $[1; 3]$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} M = \max_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3\sqrt{11} \\ m = \min_{[1;3]} f(x) = f(1) = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = 2M - m = 6\sqrt{11} - \sqrt{3} \Rightarrow a = 6; b = 1; c = 0 \Rightarrow a + b + c = 7.$$

Đáp án B.

Câu 49. [#NTAD]

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn:

$$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x f'(x) dx = \int_0^1 e^x f''(x) dx \neq 0.$$

Giá trị của biểu thức $\frac{e \cdot f'(1) - f'(0)}{e \cdot f(1) - f(0)}$ bằng?

A. -2.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Giải

$$* \text{ Đặt: } \int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x f'(x) dx = \int_0^1 e^x f''(x) dx = k \neq 0.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 e^x f'(x) dx = e^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f(x) dx$$

$$\Rightarrow k = e \cdot f(1) - f(0) - k \Rightarrow e \cdot f(1) - f(0) = 2k.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f''(x) dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 e^x f''(x) dx = e^x f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx$$

$$\Rightarrow k = e \cdot f'(1) - f'(0) - k \Rightarrow e \cdot f'(1) - f'(0) = 2k.$$

$$\text{Vậy: } \frac{e \cdot f'(1) - f'(0)}{e \cdot f(1) - f(0)} = \frac{2k}{2k} = 1.$$

Đáp án D.

Câu 50. [#NTAD].

Cho hàm số: $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện:

$$\begin{cases} -6x^2 \left[2[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) \right] = [3x \cdot f'(x) - f(x)] \cdot f(x) \\ f(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ -216 \cdot [f'(1)]^3 = f^3(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tính giá trị của $A = \int_1^{e^2} f^3(x) dx$?

A. $4 - \frac{6}{\sqrt{e}}.$

B. $6 - \frac{4}{\sqrt{e}}.$

C. $e - 1.$

D. $e^{6 - \frac{4}{\sqrt{e}}}.$

Giải

$$\text{Ta có: } -6x^2 \left[2[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) \right] = [3x \cdot f'(x) - f(x)] \cdot f(x).$$

Nhân cả hai vế với $-\frac{f(x)}{2x^2}$ được:

$$\begin{aligned}
6f(x)[f'(x)]^2 + 3f^2(x) \cdot f''(x) &= -\frac{6f^2(x) \cdot f(x) \cdot x - 2f^3(x)}{4x^2} \\
\Leftrightarrow 3[2f(x) \cdot f'(x)] \cdot f'(x) + 3f^2(x) \cdot [f'(x)]' &= -\frac{(3f^2(x) \cdot f'(x)) \cdot 2x - f^3(x) \cdot 2}{(2x)^2} \\
\Leftrightarrow 3[f^2(x)]' \cdot f'(x) + 3f^2(x) \cdot [f'(x)]' &= -\frac{[f^3(x)]' \cdot 2x - f^3(x) \cdot (2x)'}{(2x)^2} \\
\Leftrightarrow [3f^2(x) \cdot f'(x)]' &= -\left[\frac{f^3(x)}{2x}\right]' \\
\rightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) &= -\frac{f^3(x)}{2x} + C
\end{aligned}$$

Thay $x=1$ ta được: $3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{12}\right) = -\frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot 1} + C \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + C \Rightarrow C = 0.$

Từ đó ta có: $3f^2(x) \cdot f'(x) = -\frac{f^3(x)}{2x} \Rightarrow 6x \cdot f'(x) + f(x) = 0.$

Nhân hai vế cho: $\frac{e^{\frac{\ln x}{6}}}{6x}$ được:

$$e^{\frac{\ln x}{6}} \cdot f'(x) + \frac{e^{\frac{\ln x}{6}}}{6x} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[e^{\frac{\ln x}{6}} \cdot f(x) \right]' = 0 \Rightarrow e^{\frac{\ln x}{6}} \cdot f(x) = C_1.$$

Thay $x=1$ ta được: $C_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

Khi đó: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2} \cdot \left(e^{\frac{\ln x}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^{\frac{\ln x}{2}}}} \Rightarrow f^3(x) = \frac{1}{2e^{\frac{\ln x}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Ta có: $A = \int_1^{e^2} f(x) dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \Big|_1^{e^2} = e - 1.$

Đáp án C.**Câu 51. [#NTAD].**

Tính tích phân: $I = \int_0^2 \frac{1}{3-3t+t^2 + \sqrt{5-10t+9t^2-4t^3+t^4}} dt$?

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{6} - 2$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $1 - \frac{\pi}{4}$.

Giải

Thông thường ta có một phương pháp tính tích phân khó là đổi biến làm sau đưa hai cận về là hai số đối nhau. Để đưa $0; 2 \rightarrow -1; 1$ thì ta có phép đổi biến: $x = 1 - t$.

$$\text{Ta có: } 3 - 3t + t^2 = (t^2 - 2t + 1) + (1 - t) + 1 = (1 - t)^2 + (1 - t) + 1.$$

Tương tự:

$$5 - 10t + 9t^2 - 4t^3 + t^4 = (1 - 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4) + (3 - 6t + 3t^2) + 1 = (1 - t)^4 + 3(1 - t)^2 + 1.$$

$$\text{Đặt: } x = 1 - t \Rightarrow dx = -dt.$$

Ta được:

$$I = - \int_1^{-1} \frac{1}{1 + x + x^2 + \sqrt{1 + 3x^2 + x^4}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x + x^2 + \sqrt{1 + 3x^2 + x^4}} dx.$$

$$\text{Đặt: } f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + \sqrt{1 + 3x^2 + x^4}} = \frac{\sqrt{1 + 3x^2 + x^4} - x^2 - x - 1}{-2x^3 - 2x}.$$

$$\text{Suy ra: } f(-x) = \frac{1}{1 - x + x^2 + \sqrt{1 + 3x^2 + x^4}} = \frac{\sqrt{1 + 3x^2 + x^4} - x^2 + x - 1}{2x^3 + 2x}.$$

$$\text{Ta có: } f(x) + f(-x) = \frac{2x}{2x^3 + 2x} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx.$$

Xét riêng: $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Đặt: $u = -x \Rightarrow du = -dx$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = -\int_1^0 f(-x) dx = \int_0^1 f(-x) dx.$$

Như vậy:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(-x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [f(-x) + f(x)] dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Đáp án C.

Câu 52. [#NTAD].

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|2|x|-6| = m||x|-1|$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (0;1) \cup (6;+\infty)$.

B. $m \in (0;2) \cup (6;+\infty)$.

C. $m \in (0;3) \cup (5;+\infty)$.

D. $m \in (0;1) \cup (4;+\infty)$.

Giải

Ta có: $|2|x|-6| = m||x|-1| \Rightarrow \left| \frac{2|x|-6}{|x|-1} \right| = m$.

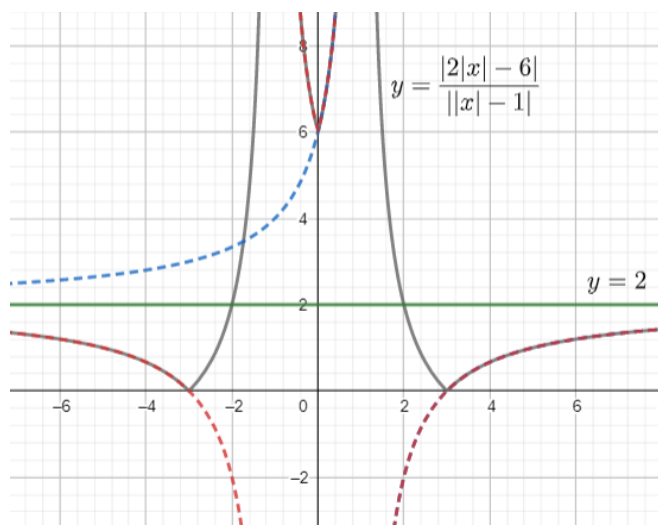
Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số

$y = \left| \frac{2|x|-6}{|x|-1} \right|$ tại 4 điểm phân biệt.

Vẽ đồ thị hàm số $y = \left| \frac{2|x|-6}{|x|-1} \right|$, ta dựa vào đồ thị hàm số $y = \frac{2x-6}{x-1}$.

+) Trước hết vẽ đồ thị hàm số $y = \left| \frac{2x-6}{x-1} \right|$ bằng cách từ đồ thị $y = \frac{2x-6}{x-1}$ bỏ phần phía dưới trục hoành, lấy đối xứng phần bị bỏ qua trục hoành.

+) Vẽ đồ thị hàm số $y = \left| \frac{2|x|-6}{|x|-1} \right|$ bằng cách từ đồ thị $y = \left| \frac{2x-6}{x-1} \right|$ ta lấy đối xứng qua trục tung.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = \frac{|2|x| - 6|}{|x| - 1}$ trong hình vẽ ta thấy để đường thẳng $y = m$ cắt đồ

thị hàm số $y = \frac{|2|x| - 6|}{|x| - 1}$ tại 4 điểm phân biệt thì: $\begin{cases} m > 6 \\ 0 < m < 2 \end{cases}$.

Vậy $m \in (0; 2) \cup (6; +\infty)$.

Đáp án B.

Câu 53. [#NTAD].

Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức:

$$I) \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8;$$

$$II) \left(\frac{2}{a} + b + c\right) \left(\frac{2}{b} + c + a\right) \left(\frac{2}{c} + a + b\right) \geq 64;$$

$$III) a + b + c < abc.$$

Bất đẳng thức nào đúng?

A. Cả ba đều đúng.

C. Chỉ II) đúng.

B. Chỉ I) đúng.

D. Chỉ I) và II) đúng.

Giải

$$+) \begin{cases} 1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}} \\ 1 + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \end{cases} \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 8 \Rightarrow (I) \text{ đúng.}$$

$$+) \begin{cases} \frac{1}{a} + b \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}} \\ \frac{1}{b} + c \geq 2\sqrt{\frac{c}{b}} \\ \frac{1}{c} + a \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{a} + b + c \geq 2\sqrt{4\sqrt{\frac{bc}{a^2}}} = 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}.$$

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} \frac{2}{b} + c + a \geq 4\sqrt[4]{\frac{ac}{b^2}} \\ \frac{2}{c} + a + b \geq 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}} \end{cases}.$$

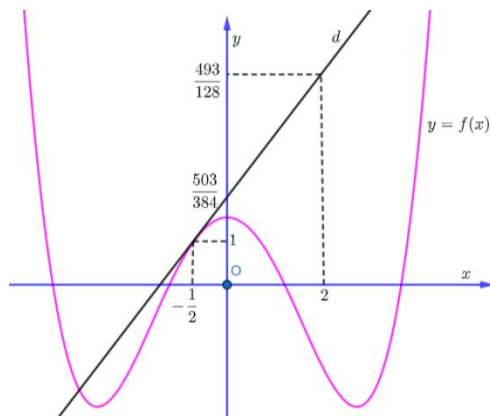
$$\text{Suy ra: } \left(\frac{2}{a} + b + c\right)\left(\frac{2}{b} + c + a\right)\left(\frac{2}{c} + a + b\right) \geq 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{ac}{b^2}} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}} = 64 \Rightarrow (II) \text{ đúng.}$$

$$+) \text{ Ta có: } 3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c \leq abc \Leftrightarrow \sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Leftrightarrow abc \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow (III) \text{ sai.}$$

Đáp án D.

Câu 54. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Biết đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$. Tính

$$\text{giá trị của tích phân: } I = \int_{-2}^{-1} f''\left(\frac{x}{2} + 1\right) dx.$$

A. $I = \frac{61}{24}$.

B. $I = -\frac{61}{24}$.

C. $I = -\frac{109}{24}$.

D. $I = \frac{109}{24}$.

Giải

Phương pháp:

Ta đổi biến tích phân cần tính và từ công thức $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ ta mở rộng

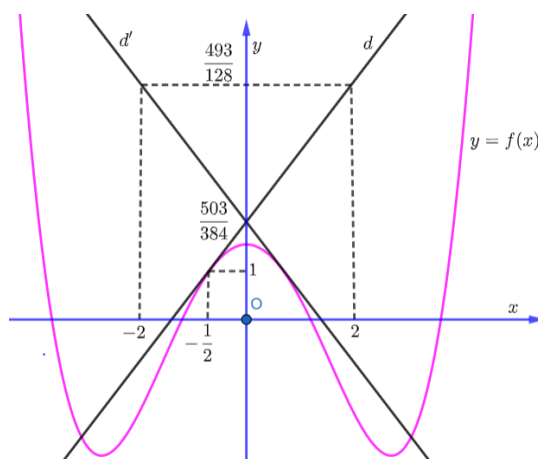
thành công thức $\int_a^b f''(x) dx = f'(b) - f'(a)$ vì hàm số có điểm cực trị và có thể tìm được hệ số góc của tiếp tuyến.

Hướng dẫn giải.

Đặt $t = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx \Rightarrow dx = 2dt$; $x = -2 \Rightarrow t = 0$; $x = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Ta có: $I = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f''(t) dt = 2 \left[f'\left(\frac{1}{2}\right) - f'(0) \right] = 2 f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Do tính đối xứng qua trục tung của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên đường thẳng d' đối xứng với d qua trục tung là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.



Ta có: $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ chính là hệ số góc của đường thẳng d' .

Đường thẳng d' đi qua hai điểm $A\left(0; \frac{503}{384}\right); B\left(-2; \frac{493}{128}\right)$.

Vectơ chỉ phương của d' là $\vec{a} = \left(-2; \frac{61}{24}\right) \Rightarrow k = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{61}{48} \Rightarrow I = 2f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{61}{24}$.

Đáp án B.

Câu 55. [#NTAD].

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_m = n \\ u_n = m \end{cases}$. Tính u_{2021} ?

A. $u_{2021} = \frac{1}{2}(m+n+2021)$.

B. $u_{2021} = \frac{1}{2}(m+n-2021)$.

C. $u_{2021} = m+n-2021$.

D. $u_{2021} = m+n+2021$.

Giải

Ta có: $\begin{cases} u_m = n \\ u_n = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (m-1)d = n \\ u_1 + (n-1)d = m \end{cases} \Rightarrow (m-n)d = n-m \Rightarrow d = -1$.

Mặt khác: $\begin{cases} u_1 + (m-1)d = n \\ u_1 + (n-1)d = m \end{cases} \Rightarrow 2u_1 + (m+n-2)d = m+n \Rightarrow u_1 = m+n-1$.

Vậy: $u_{2021} = u_1 + 2020d = m+n-2021$.

Đáp án C.

Câu 56. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Với m là tham số bất kì thuộc $[0;1]$.

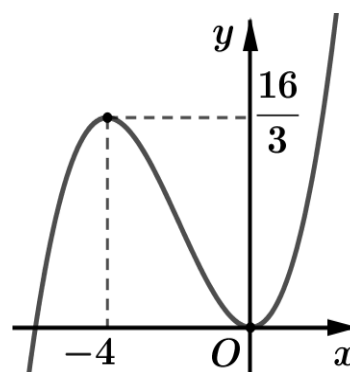
Phương trình $f(x^3 - 3x^2) = 3\sqrt{m} + 4\sqrt{1-m}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 9.



Giải

Đặt: $k = 3\sqrt{m} + 4\sqrt{1-m} \longrightarrow 3 \leq k \leq 5$.

Do: $k' = \frac{3}{2\sqrt{m}} - \frac{2}{\sqrt{1-m}} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{25}$.

Ta có:
$$\begin{cases} k(0) = 4 \\ k\left(\frac{9}{25}\right) = 5 = \max_{[0;1]} k \\ k(1) = 3 = \min_{[0;1]} k \end{cases}$$

Vì thế: $3 \leq k \leq 5$.

Đặt: $t(x) = x^3 - 3x^2$, khi đó: $t'(x) = 3x^2 - 6x$; $t'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		
t'	−	0	+	0	−
t					

Phương trình trở thành $f(t) = k$ với $k \in [3;5]$.

Đường thẳng $y = k \in [3;5]$ cắt đồ thị tại 3 điểm có hoành độ: $\begin{cases} t = a > 0 \\ t = b \in (-4;0) \\ t = c < -4 \end{cases}$.

Kết hợp với bảng biến thiên, ta suy ra ứng với: $\begin{cases} t = a > 0 \xrightarrow{\text{BBT}} 1 \text{ nghiệm } x \\ t = b \in (-4;0) \xrightarrow{\text{BBT}} 3 \text{ nghiệm } x \\ t = c < -4 \xrightarrow{\text{BBT}} 1 \text{ nghiệm } x \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm x .

Đáp án C.

Câu 57. [#NTAD].

Hai chuồng nhốt thỏ, mỗi con thỏ có lông chỉ mang màu trắng hoặc màu đen. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng một con thỏ. Biết tổng số thỏ trong hai chuồng là 35 và xác suất để bắt được hai con thỏ lông màu đen là $\frac{247}{300}$. Xác suất để bắt được hai con thỏ lông màu trắng bằng

A. $\frac{1}{75}$.

B. $\frac{7}{75}$.

C. $\frac{1}{150}$.

D. $\frac{7}{150}$.

Giải

Gọi số thỏ ở chuồng thứ nhất là x , khi đó số thỏ ở chuồng thứ hai là $35 - x$.

Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_x^1 \cdot C_{35-x}^1$.

Gọi a là số thỏ đen ở chuồng thứ nhất;

b là số thỏ đen ở chuồng thứ hai (a, b nguyên dương).

Không giảm tính tổng quát giả sử $a \geq b$.

Ta có xác suất bắt được hai con thỏ đen là:

$$\frac{C_a^1 C_b^1}{C_x^1 C_{35-x}^1} = \frac{247}{300} \Leftrightarrow \frac{ab}{x(35-x)} = \frac{247}{300}$$

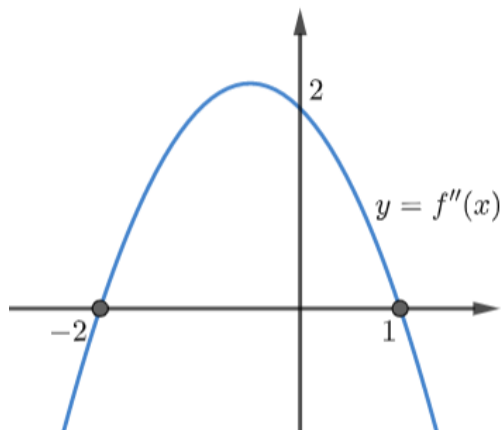
$$\Rightarrow \begin{cases} ab : 247 (= 19 \cdot 13 = 247 \cdot 1) \\ x(35-x) : 300 \\ a, b < 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 19 \\ b = 13 \\ x(35-x) = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 19 \\ b = 13 \\ x = 20 \end{cases}$$

Như vậy trong lồng thứ nhất có duy nhất $20 - 19 = 1$ con thỏ trắng và trong lồng thứ hai có $15 - 13 = 2$.

Vậy xác suất để bắt được hai con thỏ lông trắng là: $\frac{1 \cdot 2}{300} = \frac{1}{150}$.

Đáp án C.**Câu 58. [#NTAD].**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(-2) = -8$, $f'(1) = 4$ và đồ thị của hàm số $f''(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = 2f(x-3) + 16x + 1$ đạt giá trị lớn nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 4)$.B. $(4; +\infty)$.C. $(-\infty; 1)$.D. $(-2; 1)$.Giải

Từ đồ thị của hàm số $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+\infty$		-8		4	$-\infty$

Ta có: $y' = 2f'(x-3) + 16$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x-3) = -8$.

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $f'(x-3) = -8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = -2 \\ x-3 = x_0 \ (x_0 > 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = x_0 + 3 \end{cases}$.

Theo bảng biến thiên của $f'(x)$ ta có: $f'(x) \geq -8, \forall x \leq x_0$; $f'(x) < -8, \forall x > x_0$.

$\Rightarrow f'(x) \geq -8, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x \leq 3 + x_0$.

$f'(x) < -8, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $x > 3 + x_0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số: $y = 2f(x-3) + 16x + 1$.

$x - 3$	$-\infty$	-2	x_0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y					

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y = 2f(x-3) + 16x + 1$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = x_0 + 3 > 4$.

Đáp án B.

Câu 59. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2 - f(x) - 2019} = 0$ và $f(0) = -2019$. Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $f(x) < 7$ là?

A. 91.

B. 46.

C. 45.

D. 44.

Giải

Cách 1.

Theo giả thiết, ta có:

$$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2 - f(x) - 2019} = 0 \Leftrightarrow 6x.(1 - e^{x^2 - f(x) - 2019}) = 2x - f'(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

TH1: Nếu $1 - e^{x^2 - f(x) - 2019} = 0$ thì $x^2 - f(x) - 2019 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2019$ ta có (1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } f(x) < 7 \Leftrightarrow x^2 - 2019 < 7 \Leftrightarrow x^2 < 2026 \Leftrightarrow -\sqrt{2026} < x < \sqrt{2026}.$$

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1, 2, 3, \dots, 45\}$.

Trong trường hợp này có 45 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn yêu cầu đề bài.

TH2: Nếu $1 - e^{x^2 - f(x) - 2019} \neq 0$ thì ta có thể giả sử rằng tồn tại hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó, tại $x = 0$, ta có $f(0) = -2019$ nên $1 - e^{x^2 - f(x) - 2019} = 0$ (mâu thuẫn).

Vậy có tất cả 45 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2.

Theo giả thiết, ta có:

$$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2 - f(x) - 2019} = 0 \Leftrightarrow [f'(x) + 4x].e^{f(x) + 2x^2} = 6x.e^{3x^2 - 2019}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra: } \int [f'(x) + 4x].e^{f(x) + 2x^2} dx = \int 6x.e^{3x^2 - 2019} dx.$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x) + 2x^2} = e^{3x^2 - 2019} + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = -2019. \text{ Nên } \Leftrightarrow e^{f(0)} = e^{-2019} + C \Leftrightarrow C = 0. \text{ Do đó } e^{f(x) + 2x^2} = e^{3x^2 - 2019}.$$

$$\text{Hay: } f(x) = x^2 - 2019.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) < 7 \Leftrightarrow x^2 - 2019 < 7 \Leftrightarrow x^2 < 2026 \Leftrightarrow -\sqrt{2026} < x < \sqrt{2026}.$$

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1, 2, 3, \dots, 45\}$.

Vậy có 45 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đáp án C.

Câu 60. [#NTAD].

Biết rằng có số thực $a > 0$ sao cho $a^{3\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Chọn mệnh đề **đúng**.

$$\text{A. } a \in \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right). \quad \text{B. } a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right). \quad \text{C. } a \in \left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right). \quad \text{D. } a \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Giải

Cách 1.

$$\text{Ta có: } a^{3\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^{3\cos 2x} \geq 1 + \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

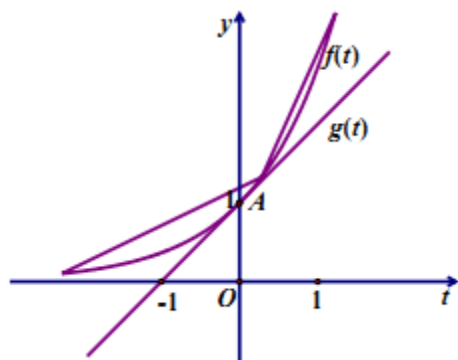
$$\text{Đặt: } t = \cos 2x, t \in [-1; 1]. \text{ Yêu cầu bài toán trở thành tìm } a \text{ để } a^{3t} \geq t + 1, \forall t \in [-1; 1] \quad (I).$$

Xét các khả năng:

TH1: Với $a = 1$, bất phương trình $a^{3t} \geq t + 1 \Leftrightarrow 1 \geq t + 1 \Leftrightarrow t \leq 0$, suy ra $a = 1$ không thỏa mãn.

TH2: Với $0 < a < 1$, khi đó $\forall t > 0$ ta luôn có $a^{3t} < a^0 = 1 < t + 1$, suy ra $0 < a < 1$ không thỏa mãn (1).

TH3: Với $a > 1$, xét các hàm số $f(t) = a^{3t}$ và $g(t) = t + 1$ (có đồ thị như hình vẽ bên dưới).



Nhận xét: Đoạn thẳng $f(t)$ và đoạn thẳng $g(t)$ luôn có điểm chung $A(0;1)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(t) \geq g(t) \forall t \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $g(t)$ tiếp xúc với $f(t)$ tại điểm $A(0;1)$.

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$ có nghiệm $t = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{3t} = t + 1 \\ 3a^{3t} \ln a = 1 \end{cases}$ có nghiệm $t = 0 \Leftrightarrow 3 \ln a = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e}$ (thỏa mãn $a > 1$).

Vậy $a = \sqrt[3]{e} \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Cách 2.

Ta có: $a^{3\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^{3\cos 2x} \geq 1 + \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt: $t = \cos 2x, t \in [-1;1]$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm a để:

$a^{3t} - t - 1 \geq 0 \forall t \in [-1;1] \quad (I).$

Xét hàm số: $f(t) = a^{3t} - t - 1$, có $f'(t) = 3a^{3t} \ln a - 1$.

Nhận xét: Phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm $t = 0 \in [-1;1]$, do đó để $f(t) \geq 0, \forall t \in [-1;1]$ thì điều kiện cần là: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3 \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e}$.

Điều kiện đủ: Với $a = \sqrt[3]{e}$ ta có: $f(t) = e^t - t - 1, f'(t) = e^t - 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Hàm $f(t)$ liên tục trên $[-1;1]$, có: $f(-1) = \frac{1}{e}, f(1) = e - 2, f(0) = 0$.

Do đó $\min_{[-1;1]} f(t) = 0$, tức là $f(t) \geq 0, \forall t \in [-1;1]$.

Suy ra: $a = \sqrt[3]{e}$ thỏa mãn.

Vậy: $a = \sqrt[3]{e} \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Đáp án B.

Câu 61. [#NTAD].

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 365 \\ 10u_3 + u_7 = 9u_1 + 10u_5 \end{cases}$. Tính u_5 ?

A. $u_5 = 1000$.

B. $u_5 = 504$.

C. $u_5 = 405$.

D. $u_5 = 250$.

Giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 365 \\ 10u_3 + u_7 = 9u_1 + 10u_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 365 \\ u_1 + u_7 = 10u_1 - 10u_3 + 10u_5 = 10(u_1 - u_3 + u_5) = 3650 \end{cases}$

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} u_1 \cdot (1 - q^2 + q^4) = 365 \\ u_1 \cdot (1 + q^6) = 3650 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot (1 + q^6) = 3650 \\ \frac{u_1 \cdot (1 + q^6)}{u_1 \cdot (1 - q^2 + q^4)} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot (1 + q^6) = 3650 \\ 1 + q^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ q = -3 \Leftrightarrow u_5 = 405 \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

Đáp án C.

Câu 62. [#NTAD].

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để chọn được một số tự nhiên có tích các chữ số bằng 7875.

A. $\frac{1}{5000}$.

B. $\frac{1}{15000}$.

C. $\frac{18}{5^{10}}$.

D. $\frac{4}{3 \cdot 10^4}$.

Giải

Số phần tử của không gian mẫu là số cách lập các số có 6 chữ số từ tập A có: $n(\Omega) = 9 \cdot 10^5$.

Gọi B là biến cố chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng: $7875 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.

Chọn 2 trong 6 vị trí xếp số 3 có C_6^2 cách.

Chọn 3 trong 4 vị trí còn lại để xếp số 5 có C_4^3 cách.

Còn lại 1 vị trí xếp số 7 có 1 cách.

Khi đó ta có $n(B) = C_6^2 \cdot C_4^3 = 60$.

Suy ra xác suất $P(B) = \frac{60}{9 \cdot 10^5} = \frac{1}{15000}$.

Đáp án B.

Câu 63. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + (m-2)x + 2 - m}{x-1} \right|$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;3]} f(x) + 2 \max_{[2;3]} f(x) = \frac{7}{4}$. Số tập con của tập S là?

A. 1.

B. 2.

C. 8.

D. 4.

Giải

Ta có: $f(x) = \left| \frac{x^2 + (m-2)x + 2 - m}{x-1} \right| = \left| \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} + m \right|$.

Xét hàm số: $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$, ta có

Ta có: $g'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \geq 0, \forall x \in [2;3]$ ($g'(x) = 0$ tại $x = 2$).

Suy ra, tập giá trị của $g(x)$ trên $[2;3]$ là đoạn $[g(2); g(3)] = \left[2; \frac{5}{2}\right]$.

Đặt $t = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$, hàm số $f(x)$ trên $[2;3]$ trở thành hàm số $h(t) = |t + m|$ xét trên

$\left[2; \frac{5}{2}\right]$. Khi đó: $\min_{[2;3]} f(x) = \min_{\left[2; \frac{5}{2}\right]} h(t)$;

Và:

$$\max_{[2;3]} f(x) = \max_{\left[2; \frac{5}{2}\right]} h(t) = \max \left\{ \left| m + 2 \right|; \left| m + \frac{5}{2} \right| \right\} = \frac{\left| (m+2) + \left(m + \frac{5}{2} \right) \right| + \left| (m+2) - \left(m + \frac{5}{2} \right) \right|}{2} = \left| m + \frac{9}{4} \right| + \frac{1}{4}$$

*) Xét $(m+2)\left(m + \frac{5}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{5}{2}; -2\right]$ (1)

Khi đó, $\min_{[2;3]} f(x) = 0$. Suy ra $\min_{[2;3]} f(x) + 2\max_{[2;3]} f(x) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \left|2m + \frac{9}{2}\right| + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$

$$\Leftrightarrow \left|2m + \frac{9}{2}\right| = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left|2m + \frac{9}{2}\right| = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{13}{8} \\ m = -\frac{23}{8} \end{cases} \text{ (Không thỏa mãn (1)).}$$

*) Xét $(m+2)\left(m+\frac{5}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{5}{2} \\ m > -2 \end{cases}$ (2). Khi đó:

$$\min_{[2;3]} f(x) = \min_{\left[1; \frac{5}{2}\right]} h(t) = \min \left\{ \left|m+2\right|; \left|m+\frac{5}{2}\right| \right\} = \frac{\left|(m+2) + \left(m+\frac{5}{2}\right)\right| - \left|(m+2) - \left(m+\frac{5}{2}\right)\right|}{2} = \left|m + \frac{9}{4}\right| - \frac{1}{4}$$

Suy ra: $\min_{[2;3]} f(x) + 2\max_{[2;3]} f(x) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \left|m + \frac{9}{4}\right| - \frac{1}{4} + 2\left|m + \frac{9}{4}\right| + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \left|m + \frac{9}{4}\right| = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{7}{4} \\ m = -\frac{11}{4} \end{cases} \text{ (Thỏa mãn (2)).}$$

$$\text{Vậy: } S = \left\{ -\frac{7}{4}; -\frac{11}{4} \right\}.$$

Suy ra, số phần tử của tập S bằng 2.

Số tập con của tập S là $n = 2^2 = 4$.

Đáp án D.

Câu 64. [#NTAD].

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$ có hai nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.

Tích $S = x_1 x_2 y_1 y_2$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. -0,26.

B. 0,25.

C. -0,25.

D. 0,26.

Giải

Đặt: $x + y = a$; $x - y = b$. Để cho tiện ta đặt: $3 = c^3$.

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có: $(ab)^3 = c^3 \Leftrightarrow ab = c$.

Từ $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$, suy ra $x^4 - y^4 = \frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{16} = \frac{8a^3b + 8ab^3}{16} = \frac{ab}{2}(a^2 + b^2)$.

Và: $2x - y = (a+b) - \frac{(a-b)}{2} = \frac{a+3b}{2} = \frac{a+c^3b}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành: $\frac{ab}{2}(a^2 + b^2) = \frac{a+c^3b}{2} \Leftrightarrow c(a^2 + b^2) = a + c^3b$.

Ta có hệ: $\begin{cases} c(a^2 + b^2) = a + c^3b \\ ab = c \end{cases}$, suy ra:

$$c\left(a^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) = a + \frac{c^4}{a} \Leftrightarrow ca^4 + c^3 = a^3 + ac^4 \Leftrightarrow (ca - 1)(a^3 - c^3) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{c} \vee a = c.$$

- Nếu $a = c, b = 1$, thì $x = \frac{c+1}{2} = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}, y = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$.

- Nếu $a = \frac{1}{c}, b = c^2$, thì $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + c^2\right) = \frac{1+c^3}{2c} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - c^2\right) = \frac{1-c^3}{2c} = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}; \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right), \left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}; \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Suy ra: $x_1x_2y_1y_2 = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \frac{1-\sqrt[3]{9}}{2\sqrt[3]{9}} \approx -0,26$.

Đáp án A.

Câu 65. [#NTAD].

Cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ và có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d) . Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $|x_1^3 - x_2^3|$ là?

A. -2.

B. 2.

C. -4.

D. 4.

Giải

Cho parabol $y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ và có hệ số góc là k .

Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d) . Giả sử A và B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 .

+ Đường thẳng (d) có phương trình: $y = kx - 1$.

+ Phương trình tương giao (d) và (P) : $-x^2 = kx - 1 \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0$ (*).

+ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt: $x_1; x_2$, vì: $\Delta = k^2 + 4 > 0, \forall k \in \mathbb{R}$.

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -k, x_1 x_2 = -1$.

Ta có: $|x_1^3 - x_2^3| = |(x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2]| = |x_1 - x_2| \cdot |(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2|$.

Ta có: $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2 + 4$.

$\Rightarrow |x_1^3 - x_2^3| = \sqrt{k^2 + 4} \cdot (k^2 + 1) \geq \sqrt{4} \cdot 1 = 2, \forall k \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi $k = 0$.

Đáp án B.**Câu 66. [#NTAD].**

Biết phương trình: $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt có dạng $x_1 = \tan^2(a^0), x_2 = \tan^2(b^0), x_3 = \tan^2(c^0)$. Nhận xét nào sau đây là đúng về a, b, c ?

A. Bộ ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

B. Bộ ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

C. Bộ ba số a, b, c theo thứ tự vừa lập thành một cấp số cộng, đồng thời lập thành một cấp số nhân.

D. Không có quy luật nào.

Giải

Chứng minh: $\tan^2 20^\circ; \tan^2 40^\circ; \tan^2 80^\circ$ là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0.$$

Ta có: $\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}.$

Với $a = 20^\circ$, ta có: $\tan 60^\circ = \frac{3 \tan 20^\circ - \tan^3 20^\circ}{1 - 3 \tan^2 20^\circ} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{3 \tan 20^\circ - \tan^3 20^\circ}{1 - 3 \tan^2 20^\circ}.$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{9 \tan^2 20^\circ - 6 \tan^4 20^\circ + \tan^6 20^\circ}{1 - 6 \tan^2 20^\circ + 9 \tan^4 20^\circ} \Leftrightarrow \tan^6 20^\circ - 33 \tan^4 20^\circ + 27 \tan^2 20^\circ - 3 = 0 (*).$$

Vậy: $x = \tan^2 20^\circ$ là nghiệm của phương trình (*).

Một cách tương tự, ta có: $x = \tan^2 40^\circ, x = \tan^2 80^\circ$ cũng là nghiệm của phương trình (*).

Như vậy: $\begin{cases} a = 20 \\ b = 40 \\ c = 80 \end{cases}$ là bộ ba số lập thành một cấp số nhân.

Đáp án A.

Câu 67. [#NTAD].

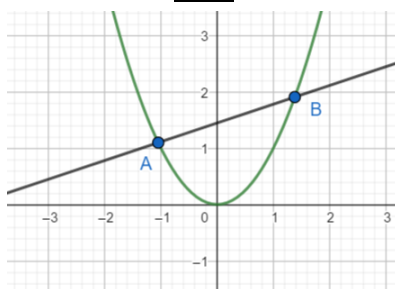
Cho Parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích hình phẳng bị giới hạn bởi đường thẳng AB và Parabol trên đạt giá trị lớn nhất bằng?

A. $\frac{4}{3}$

B. 4

C. $\frac{6}{5}$

D. 1

Giải

Ta có: $A(a; a^2); B(b; b^2)$

$$\text{Vì: } AB = 2 \Leftrightarrow AB^2 = 4 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 = 4.$$

$$\Leftrightarrow (b-a)^2 \left[1 + (a+b)^2 \right] = 4 \Rightarrow |b-a| = \frac{2}{\sqrt{1+(a+b)^2}} \leq 2$$

$\Rightarrow 0 \leq b-a \leq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $b = -a = 1$.

Phương trình đường thẳng AB :

+) Vectơ chỉ phương AB : $\overrightarrow{AB} = (b-a; b^2 - a^2) \equiv (1; a+b)$.

+) Vectơ pháp tuyến AB : $\overrightarrow{n_{AB}} = (a+b; -1)$.

+) Phương trình đường thẳng AB : $(a+b)x - y = ab \Rightarrow y = (a+b)x - ab$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi AB và (P) có độ lớn là:

$$\int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = \left(\frac{(a+b)x^2}{2} - abx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b = \frac{(a+b)(b^2 - a^2)}{2} - ab(b-a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$\Rightarrow \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = (b-a) \left[\frac{(a+b)^2}{2} - ab - \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right] = \frac{(b-a)^3}{6} \leq \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $b = -a = 1$.

Đáp án A.

Câu 68. [#NTAD].

Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{13} x dx = \frac{\ln 2}{c} - \frac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tổng $a + b + c$?

A. 157

B. 159

C. 43

D. 45

Giải

$$\text{Ta có: } \tan^{13} x = \frac{\sin^{13} x}{\cos^{13} x} = \frac{\sin^{12} x \cdot \sin x}{\cos^{13} x} = \frac{(\sin^2 x)^6 \cdot \sin x}{\cos^{13} x} = \frac{(1 - \cos^2 x)^6 \cdot \sin x}{\cos^{13} x}.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} t = \cos x \\ dt = -\sin x \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rightarrow \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{13} x dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)^6}{t^{13}} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{(1-t^2)^6}{t^{13}} dt.$$

$$\Leftrightarrow I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{(1-6t^2+15t^4-20t^6+15t^8-6t^{10}+t^{12})}{t^{13}} dt.$$

$$\Leftrightarrow I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(t^{-13} - 6t^{-11} + 15t^{-9} - 20t^{-7} + 15t^{-5} - 6t^{-3} + \frac{1}{t} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow I = \left(\frac{-13}{t^{14}} + \frac{66}{t^{12}} - \frac{135}{t^{10}} + \frac{140}{t^8} - \frac{75}{t^6} + \frac{18}{t^4} + \ln t \right) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{37}{120}$$

Khi đó: $a = 37, b = 120, c = 2 \Rightarrow S = a + b + c = 159$.

Đáp án B.

Câu 69. [#NTAD].

Biết tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} = \sqrt{b^2 - 1} - \sqrt{a}$. Tính $S = a - |b|$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Giải

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos x \cdot \cos x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + 1}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan^2 x + 2}}$

Đặt: $\begin{cases} t = \tan x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rightarrow \int_0^1 \end{cases}$

Khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} = \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + 2}} = \int_0^1 \frac{2t dt}{2\sqrt{t^2 + 2}} = \left(\sqrt{t^2 + 2} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Dễ dàng tìm được: $a = |b| = 2 \Rightarrow S = a - |b| = 0$.

Đáp án A.

Câu 70. [#NTAD].

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f^2(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2.g(x) + 36x = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } A = 3f(2) + 4f'(2)?$$

A. 11.

B. 13.

C. 14.

D. 10.

Giải

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ ta có: } f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2.g(x) + 36x = 0 \quad (1).$$

Đạo hàm hai vế của (1), ta được:

$$-3f^2(2-x).f'(2-x) - 12f(2+3x).f'(2+3x) + 2x.g(x) + x^2.g'(x) + 36 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), thay } x = 0, \text{ ta có: } \begin{cases} f^3(2) - 2f^2(2) = 0 & (3) \\ -3f^2(2).f'(2) - 12f(2).f'(2) + 36 = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (3), ta có: $f(2) = 0 \vee f(2) = 2$. Với $f(2) = 0$, thay vào (4), ta được: $36 = 0$ (Vô lí).

Với $f(2) = 2$, thay vào (4), ta được: $-36f'(2) + 36 = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 1$.

Vậy: $A = 3f(2) + 4f'(2) = 3.2 + 4.1 = 10$.

Đáp án D.

Câu 71. [#NTAD].

Cho phương trình $3^x = \sqrt{a.3^x \cos(\pi x) - 9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

A. 1.

B. 2021.

C. 4043.

D. 0.

Giải

$$\text{Ta có: } 3^x = \sqrt{a.3^x \cos(\pi x) - 9}.$$

$$\Leftrightarrow 9^x = a.3^x \cos(\pi x) - 9 \text{ (Do } 3^x > 0) \Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a.\cos(\pi x) \quad (*).$$

Điều kiện cần:

Nếu phương trình (*) có nghiệm $x = x_0$ duy nhất thì ta thấy rằng $x = 2 - x_0$ cũng là nghiệm của (*), do đó: $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Thay vào (*) ta được $a = -6$.

Điều kiện đủ:

Ngược lại, nếu $a = -6$, thì phương trình (*) trở thành: $3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x)$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $3^x + 3^{2-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{2-x}} = 6$.

Mà: $-6 \cdot \cos(\pi x) \leq 6$, do đó:

$$3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6 \\ -6 \cdot \cos(\pi x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^{2-x} \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy có duy nhất $a = -6$ thỏa yêu cầu bài toán.

Đáp án A.

Câu 72. [#NTAD].

Có bao nhiêu cách phân tích số 15^9 thành tích của ba số nguyên dương, biết rằng các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính một lần?

A. 517.

B. 516.

C. 493.

D. 492.

Giải

Phương pháp:

Chia làm ba trường hợp:

+) 3 số giống nhau.

+) 2 trong ba số giống nhau.

+) 3 số đôi một khác nhau.

Cách giải:

Ta có: $15^9 = 3^9 \cdot 5^9$.

Đặt $a = 3^m \cdot 5^x, b = 3^n \cdot 5^y, c = 3^p \cdot 5^z$.

$$\text{Khi đó } 15^9 = a \cdot b \cdot c = 3^{m+n+p} \cdot 5^{x+y+z} = 3^9 \cdot 5^9 \Rightarrow \begin{cases} m+n+p=9 \\ x+y+z=9 \end{cases}$$

+) **Trường hợp 1:**

3 số a, b, c giống nhau thì $m = n = p = 3, x = y = z = 3$ nên có 1 cách.

+) **Trường hợp 2:**

2 trong 3 số giống nhau và khác số còn lại, giả sử:

$$a = b \Rightarrow m = n, x = y \Rightarrow \begin{cases} 2m + p = 9 \\ 2x + z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 9 - 2m \\ z = 9 - 2x \end{cases}.$$

Do: $p \geq 0, z \geq 0$ nên $0 \leq m \leq 4, 0 \leq x \leq 4$ nên có 5 cách chọn m và 5 cách chọn x .

Ngoài ra: $m = x = n = y = p = z = 3$ trùng với **Trường hợp 1** nên trong trường hợp này ta chỉ có $5 \cdot 5 - 1 = 24$ cách chọn.

+) **Trường hợp 3:**

Số cách chọn ba số m, n, p phân biệt có tổng bằng 9 là C_{11}^2 và số cách chọn ba số x, y, z phân biệt có tổng bằng 9 là C_{11}^2 .

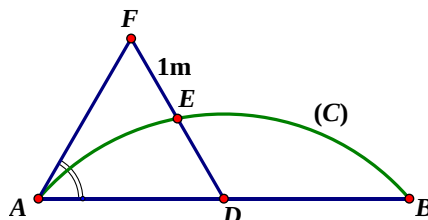
Suy ra: Số cách chọn ba số a, b, c phân biệt $C_{11}^2 \cdot C_{11}^2 - 24 \cdot 3 - 1 = 2592$ cách chọn.

Vậy số cách phân tích (ba số không phân biệt thứ tự) là: $\frac{2592}{3!} + 25 = 517$ cách.

Đáp án A.

Câu 73. [#NTAD].

Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vương cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây lan can là cung tròn đi qua điểm E cách D một khoảng là $1m$ (D là trung điểm của AB). Biết $AF = 2m$, $DAF = 60^\circ$ và lan can cao $1m$ làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/ m^2 . Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng ngàn).



A. 8,124,000.

B. 9,977,000.

C. 10,405,000.

D.

7,568,000.

Giải

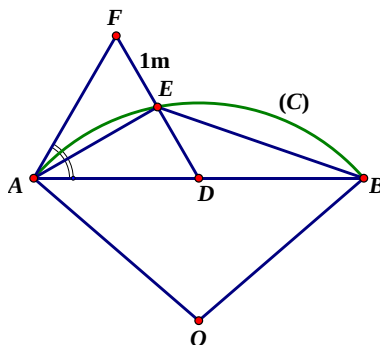
Theo giả thiết, ta có $\triangle AFD$ đều, nên $FD = 2m$.

Suy ra: $ED = 1m$, $EAD = 30^\circ$ và $EDB = 120^\circ$.

Trong tam giác $\triangle EDB$, có: $EB^2 = DE^2 + DB^2 - 2DE \cdot DB \cdot \cos 120^\circ = 7$.

Gọi R là bán kính của đường tròn (C) tâm O , áp dụng định lý $\sin$ trong tam giác

$\triangle AEB$ ta có $\frac{EB}{\sin EAD} = 2R$, suy ra $R = \sqrt{7}$.



Xét tam giác OAB có $R = OA = OB = \sqrt{7}$, $AB = 4$, suy ra

$$\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = -\frac{1}{7}.$$

Khi đó $AOB \approx 98,2^\circ$, suy ra độ dài cung (C) xấp xỉ $4,54m$.

Vì chiều cao của lan can là $1m$ và giá kính là $2,2$ triệu/ m^2 nên số tiền ông An phải trả xấp xỉ $9,977,000$ đ.

Đáp án B.

Câu 74. [#NTAD].

Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2021}(x+y) \leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1$.

A. $m = -\frac{1}{3}$.

B. $m = 2$.

C. $m = -\frac{1}{2}$.

D. $m = 0$.

Giải

Điều kiện cần: Xét hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \log_{2021}(x+y) \leq 0 & (1) \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1 & (2) \end{cases}$$

$(x; y)$ là nghiệm hệ bất phương trình thì $(y; x)$ cũng là nghiệm của hệ bất phương trình. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x = y$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow 0 < 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$.

Với: $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

$(2) \Leftrightarrow 2x + \sqrt{2x^2 + m} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + m} \geq 1 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 + m \geq 1 - 4x + 4x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 \leq m$

Đặt: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

$f(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, nên: $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Điều kiện đủ: Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \log_{2021}(x+y) \leq 0 & (1) \\ x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \geq 1 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq 1 \\ x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \geq 1 \end{cases}$$

Ta có: $1 \leq x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \leq x+y+\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{1}{2}} \leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Câu 75. [#NTAD].

Hai bạn Hùng và Chương cùng dự thi trong kì thi THPT Quốc Gia năm 2021 và ở hai phòng thi khác nhau. Mỗi phòng thi có 24 thí sinh, mỗi môn thi có 24 mã đề khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho thí sinh một cách ngẫu nhiên. Xác suất để trong hai môn thi Toán và Tiếng Anh, Hùng và Chương có chung đúng một mã đề thi bằng

A. $\frac{32}{235}$.

B. $\frac{46}{2209}$.

C. $\frac{23}{288}$.

D. $\frac{23}{576}$.

Giải

Xác suất của biến cố A: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Cách giải:

Số phần tử của không gian mẫu : $n(\Omega) = 24^4$.

A: “Hùng và Chương có chung đúng một mã đề thi”.

- Chọn một môn chung mã đề thi có : 2 cách.

- Chọn một mã chung có: 24 cách

- Chọn mã môn còn lại:

+) Cho Hùng: 24 cách.

+) Cho Chương: 23 cách.

$$\text{Xác suất: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 23}{24^4} = \frac{23}{288}.$$

Đáp án C.

Câu 76. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 1$ và các số thực m, n thỏa mãn:

$$m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } f\left(\frac{m - 2\sqrt{2}}{n}\right) \text{ bằng?}$$

A. 4.

B. -99.

C. 5.

D. -100.

Giải

$$\text{Đặt: } \frac{m - 2\sqrt{2}}{n} = t \Rightarrow m - 2\sqrt{2} = nt \Rightarrow m = nt + 2\sqrt{2} \text{ thay vào đẳng thức}$$

$$m^2 - 4mn + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1, \text{ ta có: } (nt + 2\sqrt{2})^2 - 4(nt + 2\sqrt{2})n + 5n^2 = 2\sqrt{2}n - 1 \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow (t^2 - 4t + 5)n^2 + 2(2\sqrt{2}t - 5\sqrt{2})n + 9 = 0 \quad (**)$$

$$\text{Ta có: } a = t^2 - 4t + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình (**) có nghiệm $n \neq 0$ khi và chỉ khi:

$$\Delta'_{(**)} = (2\sqrt{2}t - 5\sqrt{2})^2 - 9(t^2 - 4t + 5) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq t \leq 1.$$

Xét hàm số: $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 1$, $t \in [-5; 1]$, ta có:

$$f'(t) = 6t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Tính toán tại một số điểm cần thiết, ta được

$$\begin{cases} f(-5) = -99 = \min_{[-5;1]} f(t) = \min f\left(\frac{m-2\sqrt{2}}{n}\right) \\ f(-2) = 9 \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 9 \end{cases}$$

Đáp án B.

Câu 77. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} + (a^2 - 2a - 2)\sqrt{a^4 - 10a^2 + 10 - x}$ với a là tham số. Có bao nhiêu giá trị a để f là hàm số chẵn?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Giải

Hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} + (a^2 - 2a - 2)\sqrt{a^4 - 10a^2 + 10 - x}$ xác định khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ a^4 - 10a^2 + 10 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq a^4 - 10a^2 + 10 \end{cases}.$$

Điều kiện cần để f là hàm số chẵn là:

$$a^4 - 10a^2 + 10 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = -1 \\ a = 1 \\ a = 3 \end{cases}.$$

→ Với $a = -3, f(x) = \sqrt{1+x} + 13\sqrt{1-x}$. Đây không là hàm số chẵn.

→ Với $a = -1, f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$. Đây là hàm số chẵn.

→ Với $a = 1, f(x) = \sqrt{1+x} - 3\sqrt{1-x}$. Đây không là hàm số chẵn.

→ Với $a = 3, f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$. Đây là hàm số chẵn.

Đáp án A.

Câu 78. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = \log_2 \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$. Giá trị của biểu thức

$f(f(1)) + f(f(2)) + \dots + f(f(2021))$ bằng?

A. 2021.

B. 2022.

C. 2021.2022.

D. $\frac{2021.2022}{2}$.

Giải

Với $x > 0$, ta có:

$$f(f(x)) = \log_2 \frac{2^{\log_2 \frac{2^x + 1}{2^x - 1}} + 1}{2^{\log_2 \frac{2^x + 1}{2^x - 1}} - 1} = \log_2 \frac{\frac{2^x + 1}{2^x - 1} + 1}{\frac{2^x + 1}{2^x - 1} - 1} = \log_2 \frac{2^x + 1 + 2^x - 1}{2^x + 1 - 2^x + 1} = \log_2 \frac{2 \cdot 2^x}{2} = x$$

Suy ra: $\sum_{i=1}^{2021} f(f(x)) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2021 = \frac{2021.2022}{2}$.

Đáp án D.

Câu 79. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Đặt $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ với k là số nguyên lớn hơn

1. Hỏi phương trình $f^6(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 365.

B. 1092.

C. 1094.

D. 363.

Giải

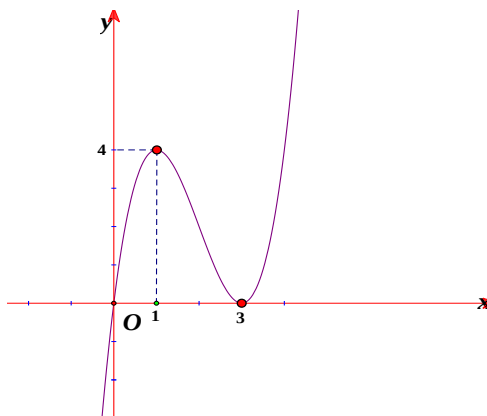
Nhận xét:

+ Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ như sau:

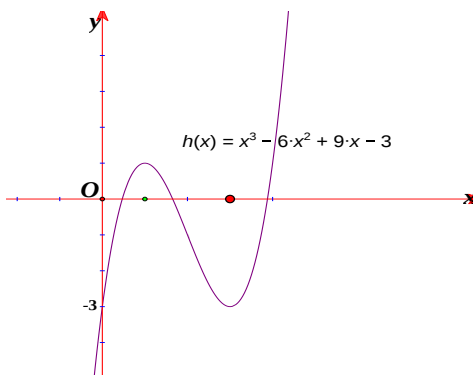
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = 0 \end{cases} \cdot \text{Lại có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(4) = 4 \end{cases}.$$

- Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ luôn đi qua gốc tọa độ.

- Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ luôn tiếp xúc với trục Ox tại điểm $(3; 0)$.



+ Xét hàm số $g(x) = f(x) - 3$ có $g'(x) = f'(x)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $g(0) = -3$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ xuống dưới 3 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = g(x)$. Suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$.



+ Tổng quát: xét hàm số $h(x) = f(x) - a$, với $0 < a < 4$.

Lập luận tương tự như trên:

- $h(0) = -a < 0$ và $h(1) > 0$; $h(4) < 4$.

- Tính tiến đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ xuống dưới a đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = h(x)$. Suy ra phương trình $h(x) = 0$ luôn có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Khi đó,

+ Ta có $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

+ $f^2(x) = f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 3 \end{cases}$. Theo trên, phương trình $f(x) = 3$ có có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Nên phương trình $f^2(x) = 0$ có $3 + 2$ nghiệm phân biệt.

+ $f^3(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) = 0 \\ f^2(x) = 3 \end{cases}$.

$f^2(x) = 0$ có $3 + 2$ nghiệm.

$f^2(x) = f(f(x)) = 3$ có ba nghiệm dương $f(x)$ phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Mỗi phương trình $f(x) = a$, với $a \in (0; 4)$ lại có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Do đó phương trình $f^2(x) = 3$ có tất cả 9 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình $f^3(x) = 0$ có $3^2 + 3 + 2$ nghiệm phân biệt.

+ $f^4(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^3(x) = 0 \\ f^3(x) = 3 \end{cases}$.

$f^3(x) = 0$ có $9 + 3 + 2$ nghiệm.

$f^3(x) = f(f^2(x)) = 3$ có ba nghiệm dương $f^2(x)$ phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Mỗi phương trình $f^2(x) = b$, với $b \in (0; 4)$ lại có 9 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Do đó phương trình $f^3(x) = 3$ có tất cả $9 \cdot 3$ nghiệm phân biệt.

$$+ f^5(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^4(x) = 0 \\ f^4(x) = 3 \end{cases}.$$

$f^4(x) = 0$ có $3^3 + 9 + 3 + 2$ nghiệm.

$f^4(x) = f(f^3(x)) = 3$ có ba nghiệm dương $f^3(x)$ phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Mỗi phương trình $f^3(x) = c$, với $c \in (0; 4)$ lại có 27 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Do đó phương trình $f^4(x) = 3$ có tất cả $27 \cdot 3$ nghiệm phân biệt. Vậy $f^5(x) = 0$ có $3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 2 = 122$ nghiệm.

$$+ f^6(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^5(x) = 0 \\ f^5(x) = 3 \end{cases}.$$

$f^5(x) = 0$ có $3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 2 = 122$ nghiệm.

$f^5(x) = f(f^4(x)) = 3$ có ba nghiệm dương $f^4(x)$ phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Mỗi phương trình $f^4(x) = c$, với $c \in (0; 4)$ lại có 81 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Do đó phương trình $f^5(x) = 3$ có tất cả $81 \cdot 3$ nghiệm phân biệt.

Vậy $f^6(x)$ có $3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 2 = 365$ nghiệm.

Đáp án A.

Câu 80. [#NTAD].

Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã được ghi sẵn địa chỉ cần gửi. Tính xác suất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

A. $\frac{5}{8}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{7}{8}$.

Giải**Phương pháp giải:** Áp dụng nguyên lý bù trừ trong bài toán xác suất.**Lời giải chi tiết :**

Ta tính xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ.

Mỗi phong bì có 4 cách bỏ thư vào nên có tất cả $4!$ cách bỏ thư.Gọi U là tập hợp các cách bỏ thư và A_m là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ.Khi đó, theo công thức về nguyên lý bù trừ, ta có $\overline{N} = 4! - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^4 N_4$.Trong đó $N_m (1 \leq m \leq 4)$ là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có m lá thư đúng địa chỉ.Nhận xét rằng, N_m là tổng theo mọi cách lấy m lá thư từ 4 lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có $(4-m)!$ cách bỏ m lá thư này đúng địa chỉ, ta nhận được: $N_m = C_4^m \cdot (4-m)! = \frac{4!}{m!}$ và

$$\overline{N} = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^4 \cdot \frac{1}{4!} \right).$$

Suy ra xác suất cần tìm cho việc không lá thư nào đúng địa chỉ là

$$\overline{P} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^4 \cdot \frac{1}{4!}.$$

Vậy xác suất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó là $P = 1 - \overline{P} = \frac{5}{8}$.**Đáp án A.****Câu 81. [#NTAD].**Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = f(x) + x^2 \cdot e^x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Tính $f(3)$.

A. $6e^3 + 3$.

B. $6e^2 + 2$.

C. $3e^2 - 1$.

D. $9e^3 - 1$.

Giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = f(x) + x^2 \cdot e^x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = e^x \left[f(x) \cdot e^{-x} + x^2 + e^{-x} \right]$$

$$\Leftrightarrow f'(x).e^{-x} = f(x).e^{-x} + x^2 + e^{-x} \Leftrightarrow f'(x).e^{-x} - f(x).e^{-x} = x^2 + e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow [f(x).e^{-x}]' = x^2 + e^{-x} \Rightarrow \int_0^3 [f(x).e^{-x}]' dx = \int_0^3 (x^2 + e^{-x}) dx$$

$$\Rightarrow [f(x).e^{-x}]_0^3 = \left(\frac{x^3}{3} - e^{-x} \right)_0^3 \Rightarrow e^{-3}.f(3) - f(0) = 10 - e^{-3}$$

$$\Rightarrow e^{-3}.f(3) + 1 = 10 - e^{-3} \Rightarrow f(3) = \frac{9 - e^{-3}}{e^{-3}} = (9 - e^{-3}).e^3 = 9e^3 - 1$$

Đáp án D.

Câu 82. [#NTAD].

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 1$, $BC = 2$.

Góc $CBB' = 90^\circ$, $ABB' = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' . Biết $d(AB', CM) = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

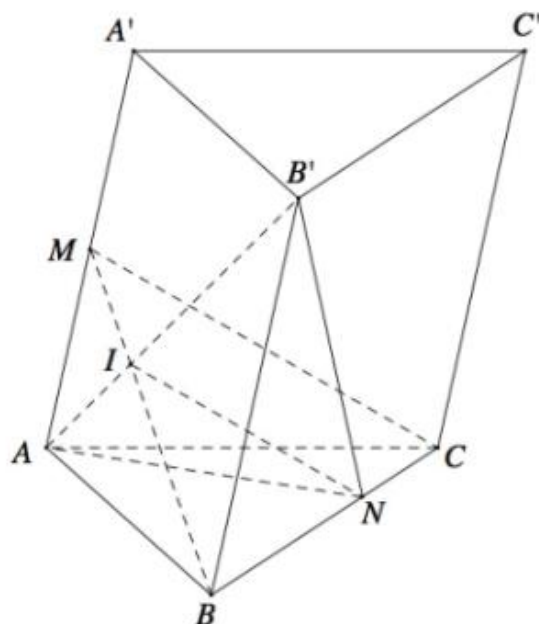
A. $2\sqrt{2}$.

B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Giải



Gọi: $I = BM \cap AN$; $IN \parallel CM$ ($N \in BC$), khi đó ta có:

$$CM \parallel (AB'N) \Rightarrow d(CM, A'B) = d(C, (AB'N)) = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{IM}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(B, (AB'N)) = 2d(C, AB'N) = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{Mặt khác, ta có: } \cos ABN = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}. \text{ Đặt } BB' = x, \text{ thì:}$$

$$V_{B.AB'N} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2} = \frac{x\sqrt{2}}{9}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB' = \sqrt{x^2 + x + 1} \\ BN = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NB' = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} \\ AN = \sqrt{AB^2 + BN^2 - 2AB \cdot BN \cdot \cos ABN} = \frac{\sqrt{13}}{3} \end{cases}.$$

$$\cos B'AN = \frac{x^2 + x + 1 + \frac{13}{9} - \left(x^2 + \frac{16}{9}\right)}{2 \cdot \frac{\sqrt{13}(x^2 + x + 1)}{3}} = \frac{3x + 2}{2\sqrt{13}(x^2 + x + 1)} \Rightarrow \sin B'AN = \sqrt{1 - \frac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}}$$

$$S_{AB'N} = \frac{\sqrt{13(x^2 + x + 1)}}{6} \sqrt{1 - \frac{(3x + 2)^2}{52(x^2 + x + 1)}} = \sqrt{\frac{43x^2 + 40x + 48}{12}}.$$

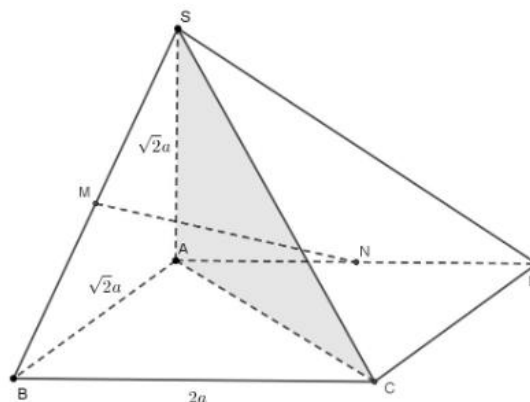
$$\text{Do đó: } d(B, (ANB')) = \frac{3V_{B.ANB'}}{S_{ANB'}} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{9}}{\frac{\sqrt{43x^2 + 40x + 48}}{12}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow x = 4 \ (x > 0).$$

$$\text{Vậy: } V_{B.ANB'} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ và } V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{B'.ABC} = 3\left(\frac{3}{2}V_{B.ANB'}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}.$$

Đáp án A.

Câu 83. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = \sqrt{2}a, AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và AD (tham khảo hình vẽ). Cosin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) bằng?



A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Giải

Chọn gốc tọa độ tại A. Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS, ta có

$$\text{tọa độ điểm là: } \begin{cases} A(0;0;0) \\ D(2;0;0) \\ B(0;\sqrt{2};0) \\ S(0;0;\sqrt{2}) \\ C(2;\sqrt{2};0) \\ M\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ N(1;0;0) \end{cases}.$$

$$\text{Do vậy: } \overrightarrow{MN} \left(1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \overrightarrow{n_{(SAC)}} = [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = (-2; 2\sqrt{2}; 0).$$

Và

$$\sin(MN, (SAC)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n_{(SAC)}}|}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{n_{(SAC)}}|} = \frac{|-2 - 2 - 0|}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{4 + 8 + 0}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos(MN, (SAC)) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đáp án B.

*Với các bài toán HKG (mức 8+) khó làm theo tư duy hình học thuần túy, nếu thuận lợi cho đặt trục tọa độ Oxyz (có ba đường thẳng đôi một vuông góc) các bạn cần thực hiện ngay và chỉ cần chú ý tính toán cẩn thận ta có ngay kết quả bài toán.

Câu 84. [#NTAD].

Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành,

$AD = 4a, SA = SB = SC = SD = \sqrt{6}a$ Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích đạt giá trị lớn nhất, sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng?

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

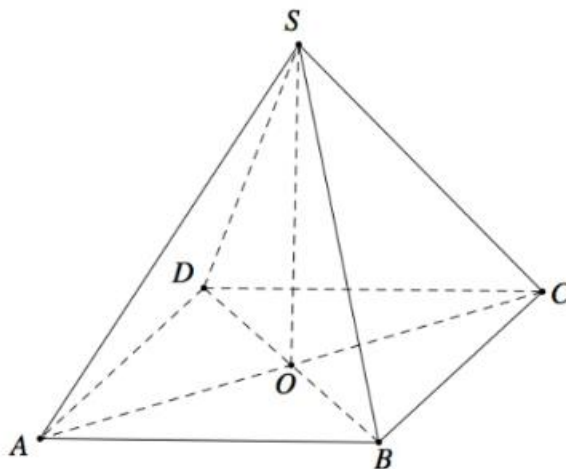
C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Giải

Vì $SA = SB = SC = SD \Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Kết hợp với $ABCD$ là hình bình hành suy ra $ABCD$ phải là hình chữ nhật tâm O và $SO \perp (ABCD)$.



$$\text{Đặt: } AB = x \Rightarrow R_{ABCD} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 16a^2}}{2}.$$

$$\text{Chiều cao khối chóp: } h = \sqrt{SB^2 - R_{ABCD}^2} = \sqrt{6a^2 - \frac{x^2 + 16a^2}{4}} = \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp: } V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{4ax \cdot \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}}{3} = \frac{2ax \cdot \sqrt{8a^2 - x^2}}{3} \leq \frac{2a}{3} \left(\frac{x^2 + 8a^2 - x^2}{2} \right) = \frac{8a^3}{3}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: } x = \sqrt{8a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = 2a.$$

$$\text{Khi đó: } \sin((SBC), (SCD)) = \frac{3SC \cdot V_{S.BCD}}{2S_{SBC} \cdot S_{SCD}} = \frac{3\sqrt{6} \cdot \frac{4a^3}{3}}{2\left(\frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{5} \cdot a\right)\left(\frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \sqrt{2}a\right)} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Đáp án B.**Câu 85. [#NTAD].**

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $(C): y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Không tồn tại.

Giải

Ta có: $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}.$$

Mặt khác ta có: $y = y'\left(\frac{1}{3}x - \frac{2m+1}{6}\right) - x + 2m^3 + 3m^2 + m + 1$.

Từ đó suy ra hai điểm cực trị có tọa độ là: $A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1), B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -1) \\ \overrightarrow{AM} = (2m^3 - m; -2m^3 - 3m^2 + m - 1) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} |-2m^3 - 3m^2 + m - 1 + 2m^3 - m| = \frac{1}{2} |3m^2 + 1| \geq \frac{1}{2}.$$

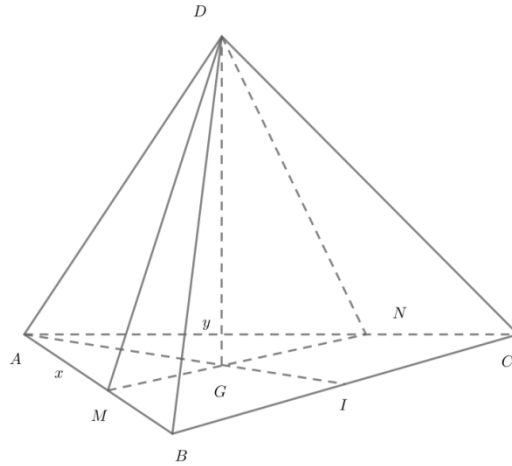
Dấu "=" xảy ra khi $m = 0$.

Vậy có duy nhất một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án B.**Câu 86. [#NTAD].**

Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đặt $AM = x; AN = y$. Tìm $x; y$ để diện tích toàn phần của tứ diện $DAMN$ nhỏ nhất.

- A. $x = y = \frac{2}{3}$. B. $x = y = \frac{1}{3}$. C. $x = y = \frac{7}{4}$. D. $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$.

Giải

Gọi G là tâm của $\triangle ABC$ ta có: $DG \perp (ABC)$. Do đó $G \in MN$.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{xy\sqrt{3}}{4}.$$

$$DG = \sqrt{DA^2 - AG^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$$

$$S_{\triangle DMN} = \frac{1}{2} MN \cdot DG = \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$$

$$S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} AM \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\triangle ADN} = \frac{1}{2} AN \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{y\sqrt{3}}{4}$$

Vậy diện tích toàn phần hình chóp $D.AMN$ là:

$$S = \frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{x^2 + y^2 - xy} + \frac{x\sqrt{3}}{4} + \frac{y\sqrt{3}}{4}.$$

Mặt khác: AG là đường phân giác của $\triangle AMN$ nên:

$$AG = \frac{2AM \cdot AN \cdot \cos 30^\circ}{AM + AN} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} (x + y) = xy\sqrt{3} \Leftrightarrow x + y = 3xy$$

$$\text{Suy ra: } S = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3(xy)^2 - xy} + xy\sqrt{3}.$$

Ta có: $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{9(xy)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq xy \geq \frac{4}{9}.$

Đặt: $t = xy, \frac{4}{9} \leq t \leq \frac{1}{2}$ ta có: $S(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3t^2 - t} + t\sqrt{3}.$

$S'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{6t-1}{\sqrt{3t^2-t}} + \sqrt{3} > 0, \forall t \in \left[\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right].$

Vậy $S(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = \frac{4}{9}$ hay $xy = \frac{4}{9}.$

Với điều kiện $x > 0; y > 0$ ta có: $\begin{cases} x+y=3xy \\ xy=\frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}.$

Đáp án A.

Câu 87. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $4\pi(dm^2)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $\frac{2}{7}dm.$

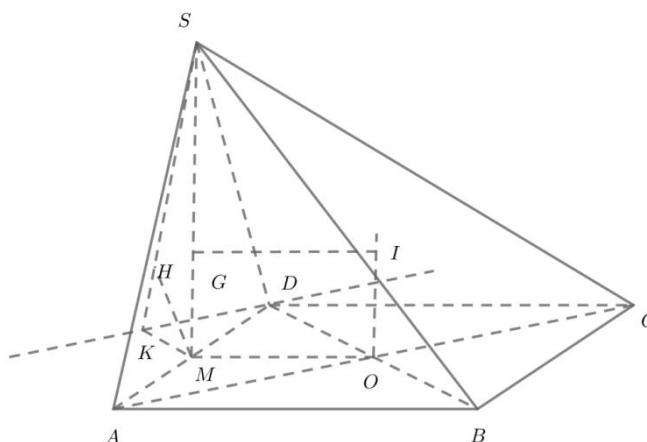
B. $\frac{3}{7}dm.$

C. $\frac{4}{7}dm.$

D. $\frac{6}{7}dm.$

Giải

Phương pháp: Xác định cạnh của đáy trước.



Cách giải: Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp là $4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 1$.

Gọi O là tâm của đáy, I là tâm mặt cầu, G là tâm tam giác SAD , M là trung điểm AD .

Để thấy I nằm đồng thời trên trục của tam giác SAD và trục của đáy.

Gọi cạnh đáy là x ta có: $SG = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ và $GI = \frac{x}{2}$, từ đó ta có phương trình:

$$IS^2 = IG^2 + GS^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{84}}{7}$$

Qua D dựng đường thẳng d song song với AC . Gọi K là hình chiếu của M trên d , H là hình chiếu của M trên SD . Suy ra $MH \perp (d, SD)$.

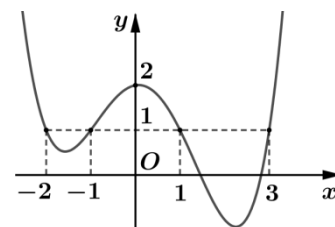
Ta có: $d(SD, AC) = d(AC, (d, SD)) = d(A, (d, SD)) = 2d(M, (d, SD)) = 2MH$

$$\Rightarrow d(SD, AC) = 2\sqrt{\frac{MK^2 \cdot MS^2}{MK^2 + MS^2}} = 2\sqrt{\frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{6}{7}.$$

Đáp án D.

Câu 88. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Đặt $K = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$, khi đó K thuộc khoảng nào sau đây?



- A. $(-3; -2)$. B. $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$. D. $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = f(x) \cdot f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f^2(x)}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } K = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{x f^2(x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx.$$

Từ đồ thị, ta thấy:

$$\bullet f(x) > 2 - x, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx > \int_0^1 \frac{(2-x)^2}{2} dx = \frac{7}{6} \Rightarrow K = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx < -\frac{2}{3}.$$

$$\bullet f(x) < 2, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx > \int_0^1 2 dx = 2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx > -\frac{3}{2}.$$

Đáp án C.

Câu 89. [#NTAD].

Tại trạm xe buýt có 5 hành khách đang chờ xe đón, không ai quen nhau trong đó có anh A và chị B. Khi đó có 1 chiếc xe ghé trạm đón khách, biết rằng lúc đó trên xe chỉ còn đúng 5 ghế trống mỗi ghế trống chỉ 1 người ngồi gồm có 1 dãy ghế trống 3 chỗ và 2 chỗ ghế đơn để chở 5 người. Tham khảo hình vẽ bên các ghế trống được ghi là (1), (2), (3), (4), (5) và 5 hành khách lên ngồi ngẫu nhiên vào 5 chỗ trống. Xác suất để anh A và chị B ngồi cạnh nhau bằng ?

Tài xế					
X	X	①	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	②	X
X	X	X	X	X	X
③	④	⑤	X	X	X

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Giải

Số phần tử không gian mẫu là: $|\Omega| = 5! = 120$.

Gọi X là biến cố: " Anh A và chị B ngồi cạnh nhau ".

- Chọn vị trí cho cặp A, B ngồi có 2 cách là: $\{③;④\}, \{④;⑤\}$.

Xếp A, B vào ghế có 2!.

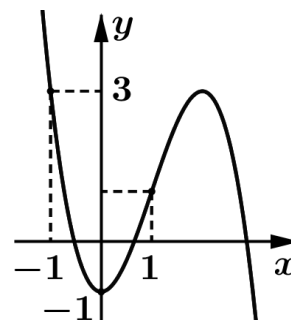
- Xếp 3 người còn lại vào 3 vị trí còn lại, có: 3! cách.

Suy ra số phần tử của biến cố: $|\Omega_X| = 2.2!.3! = 24$.

Vậy xác suất cần tính: $P(X) = \frac{1}{5}$.

Đáp án C.**Câu 90. [#NTAD].**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Giải

$$\text{Ta có: } f^2(\cos x) + (m - 2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2019 - m \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Với } f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = a > 1 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x_1 = \frac{\pi}{2}$ và $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

• Với $f(\cos x) = 2019 - m$ ta cần tìm điều kiện để phương trình này có 4 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 2\pi]$ khác x_1, x_2 .

Đặt: $t = \cos x \in [-1; 1]$ với mọi $x \in [0; 2\pi]$, ta được $f(t) = 2019 - m$ (1).

Với $t = -1$ phương trình (1) cho đúng một nghiệm $x = \pi$; với $t = 0$ phương trình cho hai nghiệm x_1, x_2 . Với mỗi $t \in (-1; 1] \setminus \{0\}$ phương trình cho hai nghiệm $x \in [0; 2\pi]$ khác x_1, x_2 . Vậy điều kiện cần tìm là phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $t \in (-1; 1] \setminus \{0\} \Leftrightarrow -1 < 2019 - m \leq 1 \Leftrightarrow 2018 \leq m < 2020$.

Đáp án B.**Câu 91. [#NTAD].**

Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, trả lời sai thì

bị trừ 0,5 điểm. Một thí sinh do không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là?

- A. $\frac{7}{10}$. B. $C_{10}^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2$. C. $A_{10}^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2$. D. $\frac{109}{262144}$.

Giải

Gọi x là số câu người đó trả lời đúng.

Theo đề bài ta có bất phương trình: $x - 0,5(10 - x) \geq 7 \Leftrightarrow x \geq 8$.

Khi đó xác suất cần tìm là: $P = C_{10}^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_{10}^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{109}{262144}$.

Đáp án D.

Câu 92. [#NTAD].

Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n = P_{2021}$, với P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử.

- A. $2021 \cdot \frac{2021 \cdot 2022}{2}$. B. 2021. C. 2020. D. 2022.

Giải

Ta có: $P_k - P_{k-1} = k! - (k-1)! = (k-1)! \cdot (k-1) = (k-1)P_{k-1}$ với $k = 1; 2; \dots$ (1).

Áp dụng (1) ta có:
$$\begin{cases} P_2 - P_1 = P_1 \\ P_3 - P_2 = 2P_2 \\ \dots \\ P_{n+1} - P_n = nP_n \end{cases} \quad (2).$$

Cộng các đẳng thức ở (2) ta được: $P_{n+1} - P_1 = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n$.

Do: $P_1 = 1 \longrightarrow P_{n+1} = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n$.

Theo đề, ta có: $P_{n+1} = P_{2021} \Leftrightarrow n+1 = 2021 \longrightarrow n = 2020$.

Đáp án C.**Câu 93. [#NTAD].**

Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ và thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Giá trị lớn nhất của a bằng?

- A. 1. B. $\log(2^e - 1)$. C. $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$. **D. $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$.**

Giải

Ta có: $\log_a x = \log(a^x) \Leftrightarrow \log_a x = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{\log a} = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = \log^2 a$.

Do: $\log^2 a \geq 0$ nên suy ra $x \geq 1$.

Xét hàm: $f(x) = \frac{\log x}{x}$ trên $[1; +\infty)$, ta có:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = 0 \Rightarrow \log x = \frac{1}{\ln 10} = \log e \Rightarrow x = e.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(e) = \frac{\log e}{e} = \max_{[1; +\infty)} f(x). \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \log^2 a = \frac{\log e}{e} \longrightarrow a = 10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}.$$

Đáp án D.**Câu 94. [#NTAD].**

Xét các hình chóp $S.ABCD$ thỏa mãn các điều kiện: đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng a . Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất V_0 khi cosin góc giữa đường thẳng SB và

mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\sqrt{\frac{p}{q}}$, trong đó p, q là các số nguyên dương và phân số $\frac{p}{q}$ là tối giản. Tính $T = (p + q) \cdot V_0$.

A. $T = 3\sqrt{3}a^3$.

B. $T = \sqrt{6}a^3$.

C. $T = 2\sqrt{3}a^3$.

D. $T = \frac{5\sqrt{3}}{2}a^3$.

Giải

Ta có: $BC \perp AB; BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$.

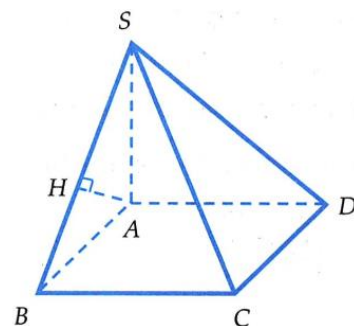
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB .

Khi đó: $AH \perp (SBC)$ và $d(A, (SBC)) = AH$.

Ta có: góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SBA .

Đặt: $SBA = \alpha$. Theo giả thiết, ta có: $AB = \frac{a}{\sin \alpha}; SA = \frac{a}{\cos \alpha}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} a^3$.



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot 2\cos^2 \alpha \leq \left(\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$.

Suy ra: $\sin^2 \alpha \cos \alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Do đó: $V \geq \frac{\sqrt{3}}{2} a^3$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2} a^3$ khi $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Suy ra: $V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3; p = 1, q = 3 \Rightarrow T = (p + q)V_0 = 2\sqrt{3}a^3$.

Đáp án C.

Câu 95. [#NTAD].

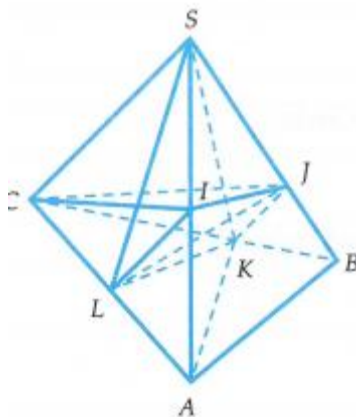
Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Gọi I là trung điểm của cạnh SA và J là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SJ = 2JB$. Mặt phẳng chứa IJ và song song với SC cắt các cạnh BC, CA lần lượt tại K và L . Thể tích khối đa diện $SCLKJI$ bằng?

A. $\frac{11}{18}$.

B. $\frac{7}{18}$.

C. $\frac{8}{9}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Giải

Do mặt phẳng (P) song song với SC nên giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAC) là $IL // SC, L \in AC$; giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SBC) là: $JK // SC, K \in BC$.

$$+) \text{ Ta có: } \frac{S_{CLK}}{S_{CAB}} = \frac{CL}{CA} \cdot \frac{CK}{CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{V_{S.CLK}}{V_{S.CAB}} = \frac{S_{CLK}}{S_{CAB}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.CLK} = \frac{1}{3} \text{ và } V_{S.ABKL} = \frac{2}{3}.$$

$$+) \text{ Ta có: } \frac{V_{S.JLK}}{V_{S.ALK}} = \frac{SI}{SA} = \frac{1}{2} \text{ và } V_{S.ALK} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \text{ nên } V_{S.ILK} = \frac{1}{6}.$$

$$+) \text{ Mặt khác: } \frac{V_{S.JLK}}{V_{S.ABK}} = \frac{SI}{SA} \cdot \frac{SJ}{SB} = \frac{1}{3} \text{ và } V_{S.ABK} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \text{ nên } V_{S.IJK} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Mà: } V_{S.CLKJI} = V_{S.CLK} + V_{S.ILK} + V_{S.IJK} \text{ nên } V_{S.CLKJI} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}.$$

Đáp án A.**Câu 96. [#NTAD].**

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O ; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) . Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCD) lần lượt là 1 ; 2 ; $\sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD) .

A. $d = \sqrt{\frac{20}{19}}$.

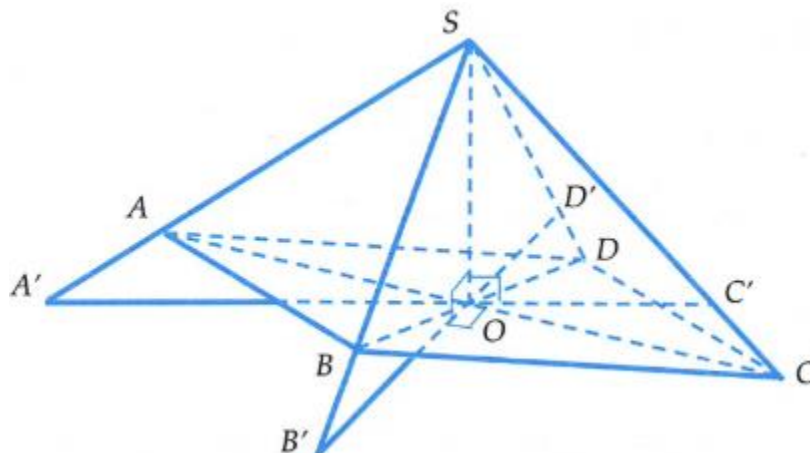
B. $d = \sqrt{\frac{19}{20}}$.

C. $d = \sqrt{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

Cách 1: Toán thuần túy.



Trong mặt phẳng (SAC) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SA, SC lần lượt tại A', C' .

Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SB, SD lần lượt tại B', D' .

Do $(SAC) \perp (SBD), (SAC) \cap (SBD) = SO, A'C' \perp SO \Rightarrow A'C' \perp (SBD) \Rightarrow A'C' \perp B'D'$.

Khi đó tứ diện $OSA'B'$ có OS, OA', OB' đôi một vuông góc nên ta chứng minh được:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} \quad (1)$$

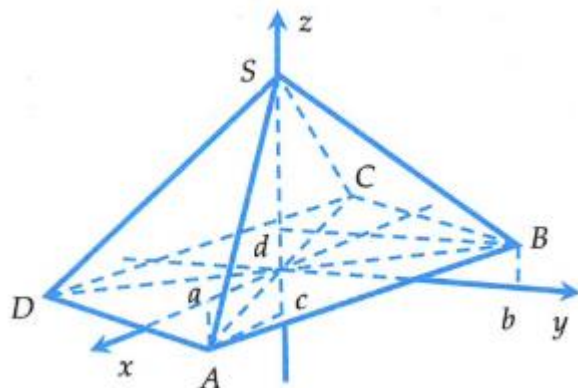
$$\text{Chứng minh tương tự: } \begin{cases} \frac{1}{q^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} & (2) \\ \frac{1}{u^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2} & (3); \\ \frac{1}{v^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2} & (4) \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3), (4), ta có: $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}$.

$$\text{Với: } p=1, q=2, u=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{19}{20} \Rightarrow d=v=\sqrt{\frac{20}{19}}.$$

Đáp án A.

Cách 2: Tọa độ hóa.



Lấy mặt phẳng (α) vuông góc với SO cắt (SAC) , (SBD) theo các giao tuyến $x'Ox$, $y'Oy$. Do $(SAC) \perp (SBD) \Rightarrow x'Ox \perp y'Oy$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Oz trùng với tia OS .

Ta có: $A(a; 0; c) \in (Oxz)$, $B(0; b; d) \in (Oyz)$; $S(0; 0; h) \in Oz$.

Điểm C , D lần lượt đối xứng với A , B qua O nên: $C(-a; 0; -c)$, $D(0; -b; -d)$.

Ta có: $\overrightarrow{SA}(a; 0; c-h)$, $\overrightarrow{SB}(0; b; d-h) \Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] = (b(c-h); a(d-h); ab)$.

Phương trình mặt phẳng (SAB) có dạng: $b(c-h)x + a(d-h)y + ab(z-h) = 0$.

$$p \equiv d(O; (SAB)) = \frac{|-abh|}{\sqrt{b^2(c-h)^2 + a^2(d-h)^2 + a^2b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{b^2(c-h)^2 + a^2(d-h)^2 + a^2b^2}{a^2b^2h^2}$$

$$\text{Tương tự} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{b^2(c+h)^2 + a^2(d+h)^2 + a^2b^2}{a^2b^2h^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{2(a^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + a^2h^2 + b^2h^2)}{a^2b^2h^2}.$$

Hoàn toàn tương tự:

$$\Rightarrow \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{2(a^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + a^2h^2 + b^2h^2)}{a^2b^2h^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}.$$

Với: $p=1, q=2, u=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{19}{20} \Rightarrow d=v=\sqrt{\frac{20}{19}}$.

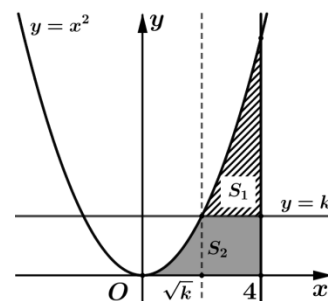
Note:

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O ; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) . Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$.

Khi đó: $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}$.

Câu 97. [#NTAD].

Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=0, x=0, x=4$. Đường thẳng $y=k$ ($0 < k < 16$) chia hình H thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1 = S_2$.



A. $k=3$.

B. $k=4$.

C. $k=5$.

D. $k=8$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = k \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{k}$.

Ta có:

$$\bullet S_1 + S_2 = \int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64}{3}.$$

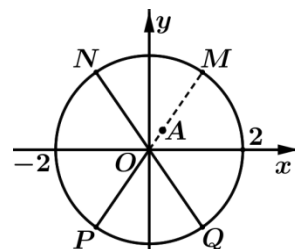
$$\bullet S_1 = \int_{\sqrt{k}}^4 (x^2 - k) dx = \left(\frac{x^3}{3} - kx \right) \Big|_{\sqrt{k}}^4 = -4k + \frac{2k\sqrt{k}}{3} + \frac{64}{3}.$$

Theo giả thiết: $S_1 = S_2 \longrightarrow S_1 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) \Leftrightarrow -4k + \frac{2k\sqrt{k}}{3} + \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$.

$$\Leftrightarrow 2k\sqrt{k} - 12k + 32 = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{k} \ (0 < t < 4)} 2t^3 - 12t^2 + 32 = 0 \rightarrow t = 2 \longrightarrow k = 4.$$

Đáp án B.**Câu 98. [#NTAD].**

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{1}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{z}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là?



- A. Điểm M . **B. Điểm Q .** C. Điểm N . D. Điểm P .

Giải

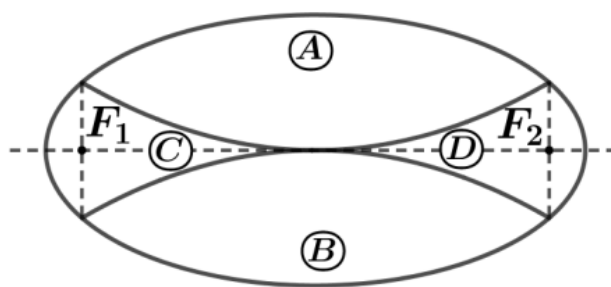
Gọi: $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Từ giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ x > 0; y > 0 \end{cases}$$

Ta có: $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = 4(x - yi) = 4\bar{z}$ suy ra điểm biểu diễn số phức w là điểm Q .

Đáp án B.**Câu 99. [#NTAD].**

Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình Elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường Parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của Elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của Elip lần lượt là 8 m và 4 m; F_1, F_2 là hai tiêu điểm của Elip.



Phần A, B dùng để trồng hoa; phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông trồng hoa và trồng cỏ lần lượt là 250000 đồng và 150000 đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

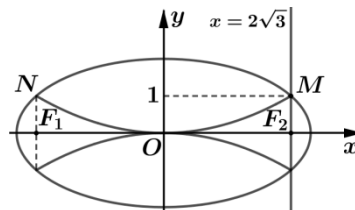
A. 4656000 đồng.

B. 4766000 đồng.

C. 5455000 đồng.

D. 5676000 đồng.GiảiDiện tích Elip: $S = \pi \cdot 4 \cdot 2 = 8\pi \text{ m}^2$.

Chọn hệ trục tọa độ và gọi các điểm như hình.

Phương trình Elip là: $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.Suy ra đường Elip nằm trên trục Ox là: $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{2}$.

Giao điểm của đường thẳng $d: x = 2\sqrt{3}$ đi qua tiêu điểm F_2 và nửa Elip nằm bên trên trục Ox là $M(2\sqrt{3}; 1) \longrightarrow N(-2\sqrt{3}; 1)$.

Parabol đi qua các điểm $M(2\sqrt{3}; 1)$, $O(0; 0)$, $N(-2\sqrt{3}; 1)$ có phương trình $(P): y = \frac{x^2}{12}$.

Khi đó diện tích $S_A = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{2} - \frac{x^2}{12} \right) dx = \frac{8\pi + 2\sqrt{3}}{3}$.

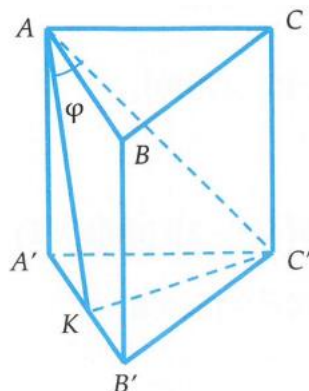
Vậy số tiền cần chi phí:

$$T = 2S_A \times 250000 + (S - 2S_A) \times 150000 \approx 5676000 \text{ đồng.}$$

Đáp án D.**Câu 100. [#NTAD].**

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Biết $AB = a$ và $C'A$ hợp với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 45° , gọi V là thể tích khối lăng trụ. Tỉ số $\frac{V}{a^3}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.B. $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.D. $\left(\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$.Giải



Gọi φ là góc hợp bởi $C'A$ với mặt phẳng $(ABA'B')$.

Gọi K là trung điểm của $A'B' \Rightarrow \begin{cases} C'K' \perp A'B' \\ C'K \perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'K \perp (A'AB').$

Suy ra $\varphi = C'AK = 45^\circ$.

Tam giác $A'AK$ vuông tại A' nên

$$A'A = \sqrt{AK^2 - A'K^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ } V = S_{A'B'C'} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{a^3} = \frac{\sqrt{6}}{8} \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Đáp án A.

Câu 101. [#NTAD].

Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = CD = BD = 2a$, $AC = AD = a\sqrt{2}$, $AB = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) có số đo là?

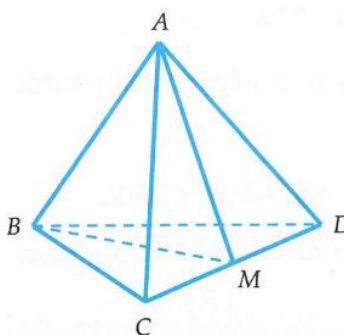
A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Giải



Gọi M là trung điểm của CD . Do $BC = CD = BD \Rightarrow \triangle BCD$ đều $\Rightarrow BM \perp CD$.

Lại có $AC = AD \Rightarrow \triangle ACD$ cân tại $A \Rightarrow AM \perp CD$.

Khi đó $((ACD), (BCD)) = (AM, BM)$.

AM là đường trung tuyến của $\triangle ACD \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{AC^2 + AD^2}{2} - \frac{CD^2}{4}} = a$.

BM là đường trung tuyến của $\triangle BCD \Rightarrow BM = \frac{CD \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Trong $\triangle ABM$, ta có: $\cos \angle ABM = \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2MA \cdot MB} = \frac{a^2 + (a\sqrt{3})^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \angle AMB = 30^\circ$ hoặc $\angle AMB = 150^\circ$

Do $0^\circ < ((ACD), (BCD)) < 90^\circ$ nên $((ACD), (BCD)) = (AM, BM) = 30^\circ$.

Đáp án D.

Note:

1. Cho $\triangle ABC$ có các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ và M là trung điểm BC . Ta có

$$MA^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

2. Nếu $\triangle ABC$ đều cạnh a thì $MA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3. Góc giữa hai mặt phẳng luôn có số đo thỏa mãn $0^\circ < ((P), (Q)) < 90^\circ$.

Câu 102. [#NTAD].

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V . Tính V .

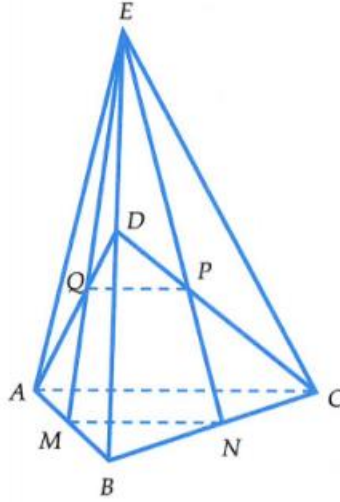
A. $\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

B. $\frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

D. $\frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$.

Giải



Gọi Q, P lần lượt là giao điểm của EM, EN với AD và CD . Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNE) là tứ giác $MNPQ$. Tức là mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện: Khối đa diện $ACMNPQ$ có thể tích V và khối đa diện $BDMNPQ$ có thể tích V' .

Đặt $V_1 = V_{ABCD}$. Ta có $V_{ACMNPQ} = V_{E.AMNC} - V_{E.ACPQ}$.

$$\text{Lại có: } \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot MB \cdot BN \cdot \sin MBN}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin ABC} = \frac{MB}{AB} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle MBN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MBN} = S_{\triangle ABC} - \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}.$$

$$\Rightarrow V_{E.AMNC} = \frac{1}{3} d(E; (ABC)) \cdot S_{\triangle AMNC} = \frac{1}{3} \cdot 2d(D; (ABC)) \cdot \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{2} V_{ABCD} = \frac{3}{2} V_1.$$

Trong tam giác EBC có D, N lần lượt là trung điểm của EB, BC và $CD \cap EN = P$ nên

$$P \text{ là trọng tâm của } \triangle EBC \Rightarrow \frac{DP}{DC} = \frac{1}{3}.$$

Tương tự, Q là trọng tâm của $\triangle EAB \Rightarrow \frac{DQ}{DA} = \frac{1}{3}.$

$$\text{Khi đó: } \frac{S_{\triangle DQP}}{S_{\triangle DAC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DQ \cdot DP \cdot \sin QDP}{\frac{1}{2} \cdot DA \cdot DC \cdot \sin ADC} = \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{DP}{DC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle DQP} = \frac{1}{9} S_{\triangle DAC}.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACPQ} = S_{\triangle DAC} - S_{\triangle DQP} = S_{\triangle DAC} - \frac{1}{9} S_{\triangle DAC} = \frac{8}{9} S_{\triangle DAC}.$$

$$\Rightarrow V_{E.ACPQ} = \frac{1}{3} \cdot d(E; (ACD)) \cdot S_{ACPQ} = \frac{1}{3} \cdot d(B; (ACD)) \cdot \frac{8}{9} S_{\triangle ADC} = \frac{8}{9} V_{ABCD} = \frac{8}{9} V_1.$$

$$\text{Suy ra: } V = V_{ACMNPQ} = V_{E.AMNC} - V_{E.ACPQ} = \frac{3}{2} V_1 - \frac{8}{9} V_1 = \frac{11}{18} V_1.$$

$$\text{Do } ABCD \text{ là tứ diện đều có cạnh bằng } a \text{ nên } V_{ABCD} = V_1 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{11}{18} V_1 = \frac{11}{18} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216} \text{ (đvdt).}$$

Đáp án A.

Câu 103. [#NTAD].

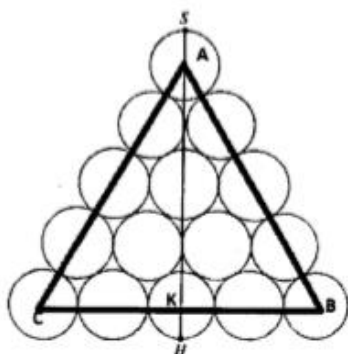
Một hôm anh Nhân lội bộ sang East Anglia thấy di nê, người ta á, sau khi thu hoạch lúa xong, rơm được cuộn thành những cuộn hình trụ và được xếp chờ về nhà. Mỗi đồng rơm thường được xếp thành 5 chồng sao cho các cuộn rơm tiếp xúc với nhau (tham khảo hình vẽ).



Giả sử bán kính của mỗi cuộn rơm là 1m. Tính chiều cao SH của đồng rơm?

- A. $(4\sqrt{3} + 2)m$. B. $5\sqrt{3} m$. C. $4\sqrt{3}m$. D. $(2\sqrt{3} + 1)m$.

Giải



Tam giác ABC là tam giác đều cạnh 8 m ; $AK = 4\sqrt{3}$.

$$SH = SA + AK + KH = 4\sqrt{3} + 2.$$

Đáp án A.

Câu 104. [#NTAD].

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $\frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$.

A. $n = 101$.

B. $n = 98$.

C. $n = 99$.

D. $n = 100$.

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)(k+2)} = \frac{(n+2)!}{(n-k)!(k+2)!(n+1)(n+2)} = \frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{Suy ra: } \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^n \frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \dots + C_{n+2}^{n+2}}{(n+1)(n+2)} (*).$$

Ta xét khai triển sau: $(1+x)^{n+2} = C_{n+2}^0 + x.C_{n+2}^1 + x^2.C_{n+2}^2 + x^3.C_{n+2}^3 + \dots + x^{n+2}.C_{n+2}^{n+2}$.

Chọn: $x=1 \Rightarrow 2^{n+2} = C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + \dots + C_{n+2}^{n+2}$.

$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+2} - C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow 2^{100} = 2^{n+2} \Leftrightarrow n = 98.$$

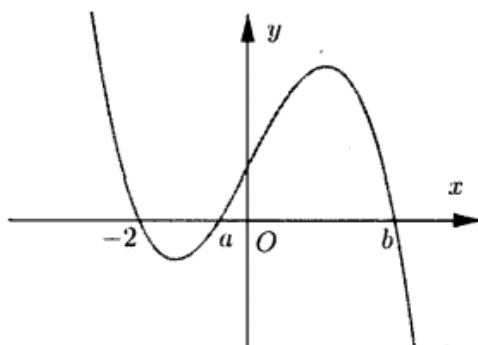
Đáp án B.

Câu 105. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox hoành tại ba điểm có hoành độ $-2 < a < b$ như hình vẽ. Biết rằng

$$f(-2) + f(1) = f(a) + f(b).$$

Đề hàm số $y = |f(x+m)|$ có 7 điểm cực trị thì mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(a) > 0 > f(-2)$.

B. $f(-2) > f(a) > 0$.

C. $f(b) > 0 > f(a)$.

D. $f(b) > 0 > f(-2)$.

Giải

Từ đồ thị của hàm số ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	a	b	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$f(-2)$		$f(b)$			
	$-\infty$		$f(a)$				$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(-2) > f(a)$; $f(b) > f(a)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ và $1 \in (a; b)$.

$$\Rightarrow f(a) < f(1) \Rightarrow f(-2) + f(a) < f(-2) + f(1) = f(a) + f(b) \Leftrightarrow f(-2) < f(b).$$

Suy ra: $f(b) > f(-2) > f(a)$.

Ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị nên để hàm số $y = |f(x+m)|$ có 7 điểm cực

trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Do đó: $f(b) > 0 > f(a)$.

Đáp án C.

Câu 106. [#NTAD].

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng?

- A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{6}$. D. $\frac{a}{3}$.

Giải

Phương pháp: Phương pháp tọa độ.

Cách giải: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, chọn $a = 1$.

Ta có:.

$$\begin{cases} [\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{CK}] \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \\ [\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{CK}] = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DA'} = (-1; 0; 1) \\ \overrightarrow{DC} = (0; 1; 0) \\ \overrightarrow{CK} = (0; -1; \frac{1}{2}) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{CK}] = \left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } d(CK, A'D) = \frac{|\overrightarrow{[\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{CK}] \cdot \overrightarrow{DC}}|}{|\overrightarrow{[\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{CK}]}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Đáp án D.

Câu 107. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = 4\text{cm}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Lấy M thuộc SC sao cho $CM = 2MS$. Khoảng cách giữa hai đường AC và BM là?

- A. $\frac{4\sqrt{21}}{7}\text{cm}$. B. $\frac{8}{\sqrt{13}}\text{cm}$. C. $\frac{9\sqrt{21}}{4}\text{cm}$. D. $\frac{2\sqrt{10}}{3}\text{cm}$.

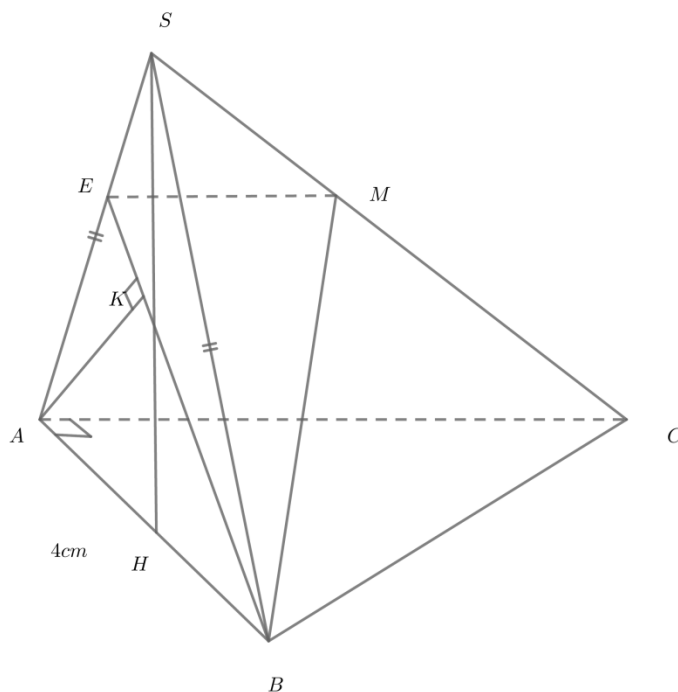
Giải

Phương pháp:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ đường thẳng này tới mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với đường thẳng này.

Cách giải:

Qua M dựng đường thẳng song song với AC cắt SA tại E .



Gọi H là trung điểm AB .

Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABC)$.

Gọi K là hình chiếu của A lên EB suy ra $AK \perp (EMB)$.

Vì $AC \parallel (EBM)$ nên $d(AC, BM) = d(A, (EBM)) = AK$.

Xét $\triangle ABE$, ta có $AE = \frac{2}{3}AS = \frac{8}{3}(cm)$.

$$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2 - 2AE \cdot AB \cdot \cos 60^\circ} = \frac{4\sqrt{7}}{3}(cm).$$

$$\text{Ta lại có: } AK \cdot BE = AE \cdot AB \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow AK = \frac{AE \cdot AB \cdot \sin 60^\circ}{BE} = \frac{4\sqrt{21}}{7}(cm).$$

Đáp án A.

Câu 108. [#NTAD].

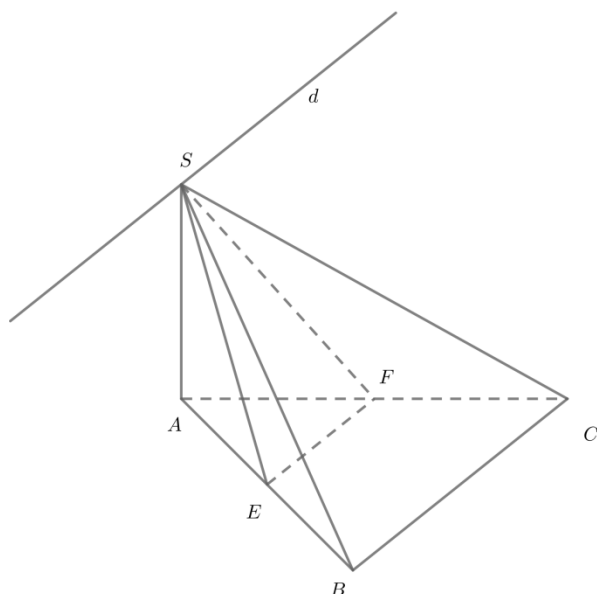
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) .

A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{10}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

D. $\frac{3}{2\sqrt{10}}$.

Giải**Phương pháp:** Xác định góc giữa hai mặt phẳng.**Cách giải:** Gọi d là giao tuyến của (SEF) và (SBC) suy ra d đi qua S và song song với BC và EF .Ta lại có $SB \perp d$, $SA \perp d$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là ESB .

$$\text{Ta có: } SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$EB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; \quad SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \cos ESB = \frac{SE^2 + SB^2 - EB^2}{2SE \cdot SB} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Đáp án A.**Câu 109. [#NTAD].**Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $f(ab + bc + ca + 3) + f(2 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2) = 1$ vớihàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 4}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{a + b + c + 3}$ bằng?

A. $\frac{17}{6}$.

B. 3.

C. $\frac{13}{6}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Giải

Phân tích: Quan sát nhanh thấy xuất hiện hàm $f(x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x} + a^m}$, ta nhớ đến tính chất:

$$f(u) + f(v) = 1 \Leftrightarrow u + v = m.$$

Đây là bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất kết hợp các kiến thức của chương trình 10 và 12. Bài toán thường có 2 mức độ như sau.

✓ **Mức độ 1.** Điều kiện đề bài sẽ giúp ta biến đổi ra được mối quan hệ $y = f(x)$ hoặc $x = f(y)$. Sau đó thay vào biểu thức P cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất để khảo sát hàm số.

✓ **Mức độ 2.** Ta phải đặt ẩn phụ t và sử dụng điều kiện cho trước kết hợp các **Bất đẳng thức** và hệ quả của **Bất đẳng thức** trong chương trình SGK phổ thông như Cauchy, Bunyakovsky để tìm điều kiện cho ẩn t và đưa biểu thức cần tính về một hàm số theo t . Khảo sát hàm một biến, ta giải quyết được bài toán.

Xu hướng **mức độ 2** là phù hợp với lộ trình thi năm 2022.

Một số bất đẳng thức sử dụng trong bài toán.

$$✓ \quad (a + b + c)^2 \geq 3ab + 3ac + 3bc.$$

$$✓ \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}.$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = ab + bc + ca + 3 \\ v = 2 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } f(u) + f(v) = 1 \Leftrightarrow \frac{4^u}{4^u + 4} + \frac{4^v}{4^v + 4} = 1 \Leftrightarrow u + v = 2.$$

$$\text{Ta được: } ab + bc + ca + 3 - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = ab + bc + ca + 3 \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} + 3.$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{(a + b + c)^2}{6} + \frac{3}{2}.$$

Ta lại có: $\frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{(a+b+c)^2}{6} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 9 \Leftrightarrow 0 < a+b+c \leq 3$.

Đặt $t = a+b+c$. Ta có: $P \leq \frac{t^2}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{t+3} = f(t), t \in (0; 3]$.

Khảo sát hàm $f(t)$, ta được: $\max_{(0;3]} f(t) = f(3) = \frac{17}{6}$.

Vậy $P \leq \frac{17}{6}$.

Đáp án A.

Câu 110. [#NTAD].

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

B. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

C. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

D. $y = -\frac{1}{4}x + 3$ và $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Giải

Phân tích

Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0; y_0) \in C$.

Tiếp tuyến Δ cắt tiệm cận đứng tại A và cắt tiệm cận ngang tại B .

Tâm đối xứng $I(1; 2)$, tính $IA, IB \Rightarrow IA \cdot IB = 4$.

Suy ra chu vi tam giác $p_{\Delta IAB} = AB + IA + IB = \sqrt{IA^2 + IB^2} + IA + IB$.

Mặt khác: $IA^2 + IB^2 \geq 2IA \cdot IB = 8; IA + IB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} = 4$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M :

$$y = \frac{-1}{(x_0 - 1)^2} (x - x_0) + \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}$$

Tiếp tuyến Δ cắt tiệm cận đứng tại $A\left(1; \frac{2x_0}{x_0-1}\right)$, cắt tiệm cận ngang tại $B(2x_0-1; 2)$.

Tâm đối xứng $I(1; 2)$.

$$\text{Suy ra: } IA = \frac{2}{|x_0-1|}, IB = 2|x_0-1| \Rightarrow IA \cdot IB = 4.$$

$$\text{Chu vi tam giác } p_{\Delta IAB} = AB + IA + IB = \sqrt{IA^2 + IB^2} + IA + IB.$$

$$\text{Mặt khác: } IA^2 + IB^2 \geq 2IA \cdot IB = 8; IA + IB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} = 4.$$

$$\text{Nên } p \geq 2\sqrt{2} + 4. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow IA = IB.$$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -1.$$

$$\text{Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: } y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \text{ và } y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Đáp án B.

Câu 111. [#NTAD].

Cho phương trình $(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})\left(m\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 16\sqrt[4]{x^2+x}\right) = 1$ với m là tham số thực.

Tìm số các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Phương trình tương đương với: } m\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 16\sqrt[4]{x^2+x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

$$\Leftrightarrow m + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} + \frac{16\sqrt[4]{x(x+1)}}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow m = -16\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} + 1.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}, \text{ khi } x > 0 \text{ thì } t \in (0, 1).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -16t - \frac{1}{t^2} + 1 \text{ trên khoảng } (0; 1), \text{ ta có: } f'(t) = -16 + \frac{2}{t^3};$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Tính toán tại một số điểm cần thiết:
$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -\infty \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -11 \\ f(1) = -16 \end{cases}.$$

Từ đó ta thấy, phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt khi $-16 < m < -11$.

Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án B.

Câu 112. [#NTAD].

Cho tam giác ABC có $BC = a, \angle BAC = 135^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là M, N . Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là?

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 75° .

Giải

Gọi AD là đường kính của đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} SA \perp DC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC).$

$\Rightarrow \begin{cases} DC \perp AN \\ SC \perp AN \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SDC) \Rightarrow AN \perp SD \quad (1).$

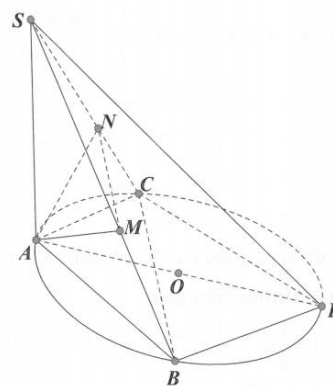
Tương tự: $\begin{cases} SA \perp DB \\ AB \perp DB \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB).$

$\Rightarrow \begin{cases} DB \perp AM \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AMN).$

Suy ra $((ABC); (AMN)) = (SA; SD) = \angle ASD.$

Ta có: $AD = 2R = \frac{BC}{\sin A} = a\sqrt{2}.$



$\triangle ASD$ có: $\tan ASD = \frac{AD}{SA} = 1 \Rightarrow ASD = 45^\circ$.

Đáp án B.

Câu 113. [#NTAD].

Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(2) = 4$.

Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx$?

- A. $J = 1 + \ln 4$. B. $J = 4 - \ln 2$. C. $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. D. $J = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Giải

Cách 1.

Ta có: $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} \cdot f(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\frac{1}{2} f(2) - f(1) + \left(2 \ln 2 + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4$$

Cách 2.

$$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\frac{f(x)}{x} + 2 \ln |x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4$$

Cách 3. (Trắc nghiệm)

Cho hàm số $f(x) = ax + b$. Vì: $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3x - 2$.

Vậy $J = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - \frac{3x-1}{x^2} \right) dx = \left(2 \ln |x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 4 + \frac{1}{2}$.

Đáp án D.**Câu 114. [#NTAD].**

Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và

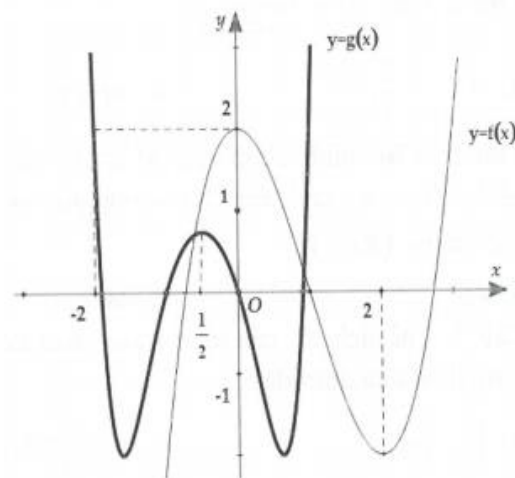
$$g(x) = f(mx^2 + nx + p) \quad (m, n, p \in \mathbb{Q}) \text{ có đồ thị như hình dưới}$$

(đường nét đậm là đồ thị của hàm $g(x)$, đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$

là trục đối xứng của đồ thị hàm số $g(x)$). Giá trị của biểu thức

$$P = (n+m)(m+p)(p+2n) \text{ bằng bao nhiêu?}$$

- A.** 12. **B.** 16. **C.** 24. **D.** 6.

**Giải**

- Đầu tiên thấy rằng đồ thị hàm bậc ba $f(x)$ có hai điểm cực trị $(0; 2), (2; -2)$ nên ta dễ dàng tìm được $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Ta thấy đồ thị $g(x)$ có một điểm cực trị cho dữ liệu là $x = -\frac{1}{2}$ nên ta nghĩ đến việc

phải tính đạo hàm $g'(x) = (2mx + n)f'(mx^2 + nx + p)$, tính ý ta nhận ra rằng $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình $2mx + n = 0$ (tại sao), điều này dẫn đến $m = n$.

- Lúc này $g(x) = f(mx^2 + mx + p) = (mx^2 + mx + p)^3 - 3(mx^2 + mx + p)^2 + 2$ có hệ số tự do là: $p^3 - 3p^2 + 2$, lại thấy khi $x = 0$ thì: $g(0) = 0 \Leftrightarrow p^3 - 3p^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow p = 1$ (do $p \in \mathbb{Q}$).

Tóm lại tới đây ta được: $g(x) = (mx^2 + mx + p)^3 - 3(mx^2 + mx + p)^2 + 2$.

- Thay $x = -2$ ta có phương trình $2 = (4m - 2m + 1)^3 - 3(4m - 2m + 1)^2 + 2 \Leftrightarrow m = 1$.

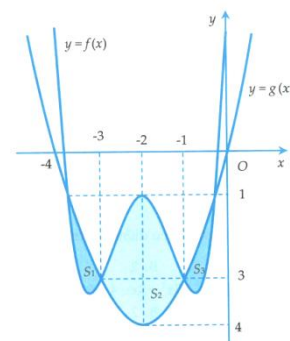
Vậy $m = n = 1$ và $p = 1$ do đó $P = (n+m)(m+p)(p+2n) = 12$.

Đáp án A.**Câu 115. [#NTAD].**

Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 20x + 3$ và hàm

số $y = g(x) = a(x+2)^2 + b$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng

diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số



$y = f(x)$ và đường cong $y = g(x)$ lần lượt là m, n, p .

Tính $M = a - b + m - p + n$.

A. $M = \frac{2456}{15}$. B. $M = \frac{2531}{15}$. C. $M = \frac{2411}{15}$. D. $M = \frac{2501}{15}$.

Giải

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0)$, $A(-2;-4)$ nên

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow g(x) = (x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x.$$

Nhận xét đồ thị hai hàm số nhận đường thẳng $x = -2$ là trục đối xứng nên: $m = p \Rightarrow m - p = 0$.

$$\text{Do đó: } a - b + n = 5 + \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx = 5 + \int_{-3}^{-1} (x^4 + 8x^3 + 20x^2 - 24x + 3) dx = \frac{2531}{15}.$$

Đáp án B.

Câu 116. [#NTAD].

Cho bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4 (x^2 - 2x + m)} \leq 5$. Biết $[a; b]$ tập tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình thỏa mãn với mọi x thuộc $[0; 2]$. Tính $a + b$?

A. $a + b = 6$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = 0$. D. $a + b = 0$.

Giải

$$\text{Bất phương trình: } \log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4 (x^2 - 2x + m)} \leq 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_4 (x^2 - 2x + m) + 4\sqrt{\log_4 (x^2 - 2x + m)} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq \sqrt{\log_4 (x^2 - 2x + m)} \leq 1.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \log_4 (x^2 - 2x + m) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m - 1 \leq 0 \\ x^2 - 2x + m - 4 \geq 0 \end{cases}.$$

Bất phương trình thỏa mãn với mọi x thuộc $[0; 2]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^2 + 2x + 1 \\ m \leq -x^2 + 2x + 4 \end{cases}, \forall x \in [0; 2] \Leftrightarrow \max_{[0; 2]} (-x^2 + 2x + 1) \leq m \leq \min_{[0; 2]} (-x^2 + 2x + 4).$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4.$$

Vậy: $a = 2, b = 4$ hay $a + b = 6$.

Đáp án A.

Câu 117. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$, tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \ln 2 + 1$.

B. $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

C. $f^2(2) = 2\ln 2 + 2$.

D. $f^2(2) = \sqrt{2\ln 2 + 2}$.

Giải

Ta có: $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)] \Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

$\Leftrightarrow [f(x)f'(x)]' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = x + \frac{1}{x} + C_1$.

Do $f(1) = f'(1) = 1$ nên ta có: $C_1 = -1$.

Do đó: $f'(x) \cdot f(x) = x + \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x - x\right)'$.

$\Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 2\ln x - 2x + C_2$.

Mà $f(1) = 1$ nên ta có: $C_2 = 2$.

Vậy $f^2(x) = x^2 + 2\ln x - 2x + 2 \Rightarrow f^2(x) = 2\ln x + 2$.

Đáp án C.

Note:

Tổng quát: Đặc điểm chung của các bài toán này là đi từ khai thác đạo hàm của một thương, tích các hàm hoặc đạo hàm của hàm hợp kết hợp với tính chất tích phân hàm lượng giác trên một chu kì. Ta có thể nêu một số dạng tổng quát sau:

1) Cho trước các hàm $g(x), u(x), v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$,

$g(x) \neq 0, \forall x \in [a; b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn:

$f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$. Khi đó,

$$(f(x)g'(x)) = (u(x)v(x))' \Rightarrow f(b) - f(a) = \frac{u(b)v(b)}{g(b)} - \frac{u(a)v(a)}{g(a)}$$

2) Cho trước các hàm $g(x), u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$, $g(x) \neq 0, \forall x \in [a; b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn:

$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = u'(x)g^2(x)$

Khi đó, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = u'(x) \Rightarrow f(b) - f(a) = u(b)g(b) - u(a)g(a)$

3) Cho trước các hàm $g(x)$, $u(x)$, $v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn: $u'(x)f'(x)f(u(x)) = v'(x)g'(x)g(v(x))$. Khi đó, $(f(u(x)))' = (g(v(x)))' \Rightarrow f(u(b)) - f(u(a)) = g(v(b)) - g(v(a))$.

Câu 118. [#NTAD].

Cho hàm số $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ với $x > 0$. Tính $g'(e^2)$.

A. $g'(e^2) = \frac{e^2 - 1}{2}$. **B.** $g'(e^2) = \frac{1 - e^2}{2}$. **C.** $g'(e^2) = \frac{1}{2}$. **D.** $g'(e^2) = 2$.

Giải

Giả sử: $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{\ln t}$.

Khi đó: $F'(t) = \frac{1}{\ln t}$ hay $F'(x) = \frac{1}{\ln x}$.

Ta có: $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = F(x^2) - F(x)$.

Suy ra: $g'(x) = (F(x^2) - F(x))' = F'(x^2) - F'(x) = \frac{1}{\ln x^2} \cdot 2x - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$

$$\Rightarrow g'(e^2) = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Đáp án A.

Note: Công thức tổng quát: $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt\right)' = v'(x) \cdot f[v(x)] - u'(x) \cdot f[u(x)]$.

Câu 119. [#NTAD].

Cho khai triển $(2018x^2 + x + 6055)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}$. Tính tổng sau:

$$S = a_0 - 3a_2 + 3^2a_4 - \dots + 3^{2018}a_{4036}$$

A. -2^{2017} .

B. 2^{2017} .

C. -2^{2018} .

D. 2^{2018} .

GiảiThay $x = i\sqrt{3}$, ta có:

$$(1+i\sqrt{3})^{2018} = a_0 + a_1 i\sqrt{3} + a_2 (i\sqrt{3})^2 + a_3 (i\sqrt{3})^3 + \dots + a_{4036} (i\sqrt{3})^{4036}$$

$$\Leftrightarrow \left[(1+i\sqrt{3})^3 \right]^{672} (1+i\sqrt{3})^2 = (a_0 - 3a_2 + 3^2 a_4 - \dots + 3^{2018} a_{4036}) + i\sqrt{3} (a_1 - 3a_3 + 3^2 a_5 - \dots - 3^{2017} a_{4035})$$

$$\Leftrightarrow 8^{672} (-2 + 2i\sqrt{3}) = (a_0 - 3a_2 + 3^2 a_4 - \dots + 3^{2018} a_{4036}) + i\sqrt{3} (a_1 - 3a_3 + 3^2 a_5 - \dots - 3^{2017} a_{4025})$$

$$\Rightarrow a_0 - 3a_2 + 3^2 a_4 - \dots + 3^{2018} a_{4036} = -2 \cdot 8^{672} = -2^{2017}.$$

Đáp án A.**Câu 120. [#NTAD].**

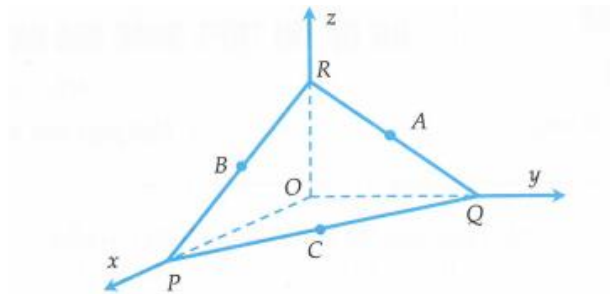
Cho tứ diện $OPQR$ có OP, OQ, OR đôi một vuông góc. Gọi A, B, C lần lượt là trung điểm các cạnh RQ, PR, PQ . Biết rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC) , tính giá trị của biểu thức $\tan \angle ABC \cdot \tan \angle ACB$.

A. $\tan \angle ABC \cdot \tan \angle ACB = \frac{1}{2}$.

B. $\tan \angle ABC \cdot \tan \angle ACB = 2$.

C. $\tan \angle ABC \cdot \tan \angle ACB = 1$.

D. $\tan \angle ABC \cdot \tan \angle ACB = 3$.

GiảiChọn hệ tọa độ $Oxyz$, với $P(a;0;0); Q(0;b;0); R(0;0;c)$.

Khi đó: $A\left(0; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right); B\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{c}{2}\right); C\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$.

$$\vec{n}_1 = [\vec{OA}; \vec{OB}] = \left(\frac{bc}{4}; \frac{ac}{4}; -\frac{ab}{4}\right); \vec{n}_2 = [\vec{OA}; \vec{OC}] = \left(-\frac{bc}{4}; \frac{ac}{4}; -\frac{ab}{4}\right)$$

Theo đề bài $(OAB) \perp (OAC)$ nên $b^2 c^2 = a^2 c^2 + a^2 b^2$.

$$\overrightarrow{BA} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right); \overrightarrow{BC} = \left(0; \frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) \Rightarrow \cos ABC = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}}.$$

$$\Rightarrow \tan^2 ABC = \frac{1}{\cos^2 BAC} - 1 = \frac{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{b^4} - 1 = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^4}.$$

$$\Rightarrow \tan^2 ABC = \frac{2b^2 c^2}{b^4} \Rightarrow \tan ACB = \sqrt{2} \cdot \frac{c}{b}.$$

$$\text{Tương tự: } \tan ACB = \sqrt{2} \cdot \frac{b}{c}.$$

$$\text{Vậy } \tan ABC \cdot \tan ACB = 2.$$

Đáp án B.

Câu 121. [#NTAD].

Ba cầu thủ sút phạt đến 11m, mỗi người đá một lần với xác suất ghi bàn tương ứng là x , y và 0,6 ($x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

- A.** $P = 0,452$. **B.** $P = 0,435$. **C.** $P = 0,4525$. **D.** $P = 0,4245$.

Giải

Gọi A_i là biến cố “cầu thủ thứ i ghi bàn” với $i \in \{1; 2; 3\}$. Các biến cố A_i độc lập với nhau và $P(A_1) = x$; $P(A_2) = y$; $P(A_3) = 0,6$.

* Gọi A là biến cố “Có ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn”: $P(A) = 0,976$.

Ta có là biến cố “không có cầu thủ nào ghi bàn”.

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,4 \cdot (1-x) \cdot (1-y) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

$$\text{Ta có phương trình } 0,976 = 1 - 0,4 \cdot (1-x) \cdot (1-y) \Leftrightarrow (1-x)(1-y) = \frac{3}{50} \quad (1).$$

* Gọi B là biến cố “Cả ba cầu thủ đều ghi bàn”: $P(B) = 0,336$.

$$\text{Mặt khác: } P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,6xy.$$

$$\text{Ta có phương trình: } 0,336 = 0,6xy \Leftrightarrow xy = \frac{14}{25} \quad (2).$$

* Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1-x)(1-y) = \frac{3}{50} \\ xy = \frac{14}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x-y+xy = \frac{3}{50} \\ xy = \frac{14}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3}{2} \\ xy = \frac{14}{25} \end{cases}.$$

Suy ra: x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{14}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{4}{5} \\ X = \frac{7}{10} \end{cases}.$

Do $x > y$ nên $x = \frac{4}{5} = 0,8$ và $y = \frac{7}{10} = 0,7$.

* Gọi C là biến cố “Có đúng hai cầu thủ ghi bàn”

Khi đó $P(C) = P(\bar{A}_1).P(A_2).P(A_3) + P(A_1).P(\bar{A}_2).P(A_3) + P(A_1).P(A_2).P(\bar{A}_3).$

$\Rightarrow P(C) = 0,2.0,7.0,6 + 0,8.0,3.0,6 + 0,8.0,7.0,4 = 0,452.$

Đáp án A.

Note:

* Với mọi biến cố A ta luôn có $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

* Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A).P(B).$

Câu 122. [#NTAD].

Phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2018\pi)$?

A. 2018 nghiệm. **B.** 1008 nghiệm. **C.** 2017 nghiệm. **D.** 1009 nghiệm.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < \cos x < 1.$

Phương trình đã cho tương đương với $\log_3(\cot^2 x) = \log_2(\cos x).$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}\right) = \log_2(\cos x)(1).$

Đặt $t = \log_2(\cos x) \Rightarrow \cos x = 2^t$. Do $0 < \cos x < 1$ nên $2^t < 1 \Leftrightarrow t < 0.$

Phương trình (1) trở thành $\log_3 \frac{2^{2t}}{1 - 2^{2t}} = t \Leftrightarrow \frac{4^t}{1 - 4^t} = 3^t \Leftrightarrow 4^t + 12^t = 3^t.$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t - 1 = 0.$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t - 1$ trên $(-\infty; 0)$.

Ta có $f'(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{3} + 4^t \cdot \ln 4 > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên

$(-\infty; 0) \Rightarrow$ phương trình $f(t) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(-\infty; 0)$.

Nhận xét thấy $f(-1) = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} + 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ đúng một nghiệm $t = -1$.

$$\text{Suy ra: } \log_2(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } x \in (0; 2018\pi) \text{ nên } \begin{cases} 0 < -\frac{\pi}{3} + k2\pi < 2018\pi \\ 0 < \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2018\pi \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} < k < \frac{6055}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{1; 2; \dots; 1009\} \\ -\frac{1}{6} < k < \frac{6053}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1; 2; \dots; 1008\} \end{cases}$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên trong $(0; 2018\pi)$ thì phương trình đã cho có 2018 nghiệm.

Đáp án A.

Câu 123. [#NTAD].

Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0; b \neq 0$) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số

$$y = g(x) = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^2 - 2(6ax^2 + 3bx + c)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu điểm?

A. 6.

B. 0.

C. 4.

D. 2.

Giải

Ta có: $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ và $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c = 2(6ax^2 + 3bx + c)$

Suy ra: $g(x) = [f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3, x_4 \Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4

Suy ra: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

$$\Rightarrow f'(x) = a[(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)]$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} = - \left[\left(\frac{1}{x - x_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{x - x_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{x - x_3} \right)^2 + \left(\frac{1}{x - x_4} \right)^2 \right] (*)$$

*Khi $x = x_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ thì: $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2 < 0$ nên $g(x) > 0$

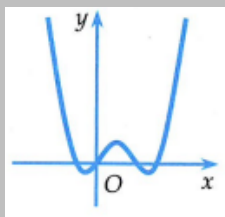
*Khi $x \neq x_i, (\forall i = 1, 2, 3, 4)$ thì: $\left(\frac{1}{x - x_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{x - x_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{x - x_3} \right)^2 + \left(\frac{1}{x - x_4} \right)^2 > 0$ và $f^2(x) > 0$.

Từ (*) suy ra $f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2 < 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$.

Đáp án B.

Note: Đề của bài toán này có thể được ra theo một cách khác như sau:

Biết rằng đồ thị hàm số bậc bốn được cho như hình vẽ dưới



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x)$ và trục hoành Ox .

A. 4.

B. 6.

C. 2.

D. 0.

Câu 124. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 2 - e.$

B. $I = e - 2.$

C. $I = \frac{e}{2}.$

D. $I = \frac{e-1}{2}.$

Giải

Xét: $A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx.$

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}.$

Khi đó: $A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}.$

Mặt khác: $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{4}.$

Ta có: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0.$

Suy ra: $f'(x) + xe^x = 0, \forall x \in [0;1]$ (do $(f'(x) + xe^x)^2 \geq 0, \forall x \in [0;1]$).

$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C.$

Do $f(1)=0$ nên $f(x) = (1-x)e^x.$

Vậy $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x \Big|_0^1 = e - 2.$

Đáp án B.

Câu 125. [#NTAD].

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ và $\log(11-2x-y) = 2y+4x-1$. Xét

biểu thức $P = 16yx^2 - 2x(3y+2) - y + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P . Khi đó giá trị của $T = m + 4M$ bằng bao nhiêu?

A. 16.**B.** 18.**C.** 17.**D.** 19.Giải

Ta có: $\log(11-2x-y) = 2y+4x-1 \Leftrightarrow 2(2x+y) - \log(11-(2x+y)) - 1 = 0$.

Đặt: $t = 2x+y$, $0 < t < 11$.

Phương trình trở thành: $2t - \log(11-t) - 1 = 0$ (1).

Xét hàm số: $f(t) = 2t - \log(11-t) - 1$ trên khoảng $(0;11)$.

Ta có: $y' = 2 + \frac{1}{(11-t)\ln 10} > 0, \forall t \in (0;11)$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ luôn đồng biến.

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow f(t) = f(1) \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow 2x+y=1 \Leftrightarrow 2x=1-y$.

Khi đó: $P = 16y \frac{(1-y)^2}{4} - (1-y)(3y+2) - y + 5 = 4y^3 - 5y^2 + 2y + 3$.

Xét hàm số: $g(y) = 4y^3 - 5y^2 + 2y + 3$ trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ta có: $g'(y) = 12y^2 - 10y + 2 > 0, \forall y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Vậy hàm số $g(y)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Do đó, $\min_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(y) = g(0) = 3, \max_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(y) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$ Suy ra: $m = 3, M = \frac{13}{4}$.

Vậy $T = 4 \cdot \frac{13}{4} + 3 = 16$.

Đáp án A.**Câu 126. [#NTAD].**

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để các chữ số của số đó đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 0 và 1.

A. $\frac{7}{125}$.**B.** $\frac{7}{150}$.**C.** $\frac{189}{1250}$.**D.** $\frac{7}{375}$.

Giải

Giả sử số chọn được có dạng: $\overline{a_1 a_2 \dots a_6}$.

Số phân tử của S bằng $9 \cdot 10^5$.

Số phân tử không gian mẫu $n(\Omega) = 9 \cdot 10^5$.

Gọi A là biến cố “Chọn được số có các chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 0 và 1”.

Ta có các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $a_1 = 1$.

Số cách chọn vị trí cho số 0 là 5 cách.

Số cách chọn 4 chữ số còn lại là A_8^4 cách.

Vậy trường hợp này có $1 \cdot 5 \cdot A_8^4$ số.

Trường hợp 2: $a_1 \neq 1 \Rightarrow a_1$ có 8 cách chọn.

Số cách chọn vị trí cho hai chữ số 0; 1 là A_5^2 .

Số cách chọn ba số còn lại là A_7^3 .

Vậy trường hợp này có $8 \cdot A_5^2 \cdot A_7^3$ số.

Xác suất cần tìm là: $P_A = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5 \cdot A_8^4 + 8 \cdot A_5^2 \cdot A_7^3}{9 \cdot 10^5} = \frac{7}{150}$.

Đáp án B.**Câu 127. [#NTAD].**

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)f'(x) = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_1^2 f(x) dx = a$ và

$f(1) = b, f(2) = c$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x}{f(x)} dx$ bằng?

A. $2c - b - a$.

B. $2a - b - c$.

C. $2c - b + a$.

D. $2a - b + c$

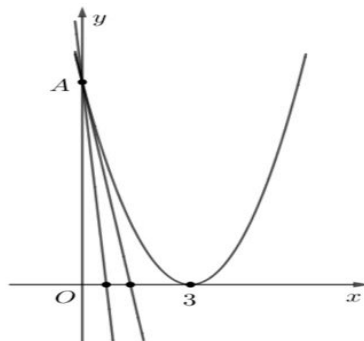
Giải

Vì $f(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = f'(x)$ nên tích phân cần tính bằng tích phân từng phần.

Ta có: $\int_1^2 \frac{x}{f(x)} dx = \int_1^2 x f'(x) dx = x f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) dx = 2f(2) - f(1) - \int_1^2 f(x) dx = 2c - b - a$.

Đáp án A.**Câu 128. [#NTAD].**

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = (x-3)^2$, trục hoành và trục tung. Gọi $k_1, k_2 (k_1 > k_2)$ lần lượt là hệ số góc của đường thẳng qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) thành ba hình mặt phẳng có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị của $k_1 - k_2$ bằng?



A. $\frac{13}{2}$.

B. 7.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{27}{4}$.

Giải

$$\text{Ta có: } (H): \begin{cases} y = (x-3)^2 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S_{(H)} = \int_0^3 (x-3)^2 dx = 9.$$

$$\text{Xét: } S_1: \begin{cases} y = (x-3)^2 \\ y = k_1 x + 9 \\ y = 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - \sqrt{y} \\ x = \frac{y-9}{k_1} \\ y = 0; y = 9 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \frac{S_{(H)}}{3} = 3 \Leftrightarrow \int_0^9 \left(3 - \sqrt{y} - \frac{y-9}{k_1} \right) dy = 3 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{27}{4}.$$

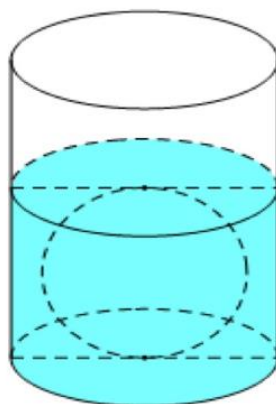
$$\text{Xét: } S_2: \begin{cases} y = (x-3)^2 \\ y = k_2 x + 9 \\ y = 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{y} \\ x = \frac{y-9}{k_2} \\ y = 0; y = 9 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{2S_{(H)}}{3} = 6 \Leftrightarrow \int_0^9 \left(3 - \sqrt{y} - \frac{y-9}{k_2} \right) dy = 6 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{27}{2}.$$

$$\text{Vậy } k_1 - k_2 = -\frac{27}{4} + \frac{27}{2} = \frac{27}{4}.$$

Đáp án D.

Câu 129. [#NTAD].

Người ta thả một viên bi sắt có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn $4,5\text{cm}$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên bi sắt đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\text{cm}$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong lòng cốc bằng $4,5\text{cm}$. Bán kính của viên bi sắt đó bằng

A. $4,2\text{cm}$.B. $3,6\text{cm}$.C. $2,6\text{cm}$.D. $2,7\text{cm}$.Giải

Thể tích khối nước trong cốc là: $V = h.S = 4,5.\pi.(5,4)^2 = \frac{6561}{50}\pi(\text{cm}^3)$.

Thể tích của khối cầu là $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Sau khi thả viên bi, chiều cao của mực nước bằng **đường kính** khối cầu nên tổng thể tích của nước và khối cầu là

$$\frac{6561}{50}\pi + \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi(5,4)^2 \cdot 2R \Rightarrow \begin{cases} R = 2,7 \\ R \approx -7,5. \\ R \approx 4,8 \end{cases}$$

Vậy $R = 2,7\text{cm}$.

Đáp án D.

Câu 130. [#NTAD].

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho sáu điểm

$A(0;1;2), B(2;-1;-2); C(3;1;2), A', B', C'$ thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ thì G' có tọa độ là?

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.B. $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.C. $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.D. $(5;1;2)$.

Giải

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên ta có: $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = 0$.

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{BB'}) + (\overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{CC'}) = 0.$$

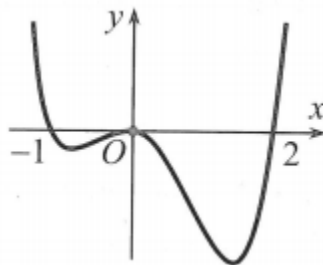
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = 0.$$

Do đó G' cũng là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Vậy } G' \left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Đáp án B.**Câu 131. [#NTAD].**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây sai?



A. $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^2 f(x) dx$.

B. $\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx < 0$.

C. $-\int_0^2 f(x) dx > 0$.

D. $\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$.

Giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $S_1 = \int_{-1}^0 |f(x)| dx < S_2 = \int_0^2 |f(x)| dx$ (1).

Mà $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-1; 0]$ và $x \in [0; 2]$.

$$\text{Do đó ta có: (1)} \Leftrightarrow -\int_{-1}^0 f(x) dx < -\int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^2 f(x) dx$$

Vậy A sai.

Đáp án A.**Câu 132. [#NTAD].**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD , đặt $CM = x$, $CN = y$. Xác định hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau.

A. $2a^2 = 2a(x+y) - xy$.

B. $2a = x + y$.

C. $a^2 = a(x+y) - 2xy$.

D. $a(x-y) = (x+y)^2$.

Giải

Ta có : $\begin{cases} AM \perp SA \\ AN \perp SA \\ (SAM) \cap (SAN) = SA \end{cases}$.

$\Rightarrow ((SAM), (SAN)) = MAN$.

Trong tam giác $\triangle AMN$, có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = a^2 + (a-x)^2 = 2a^2 - 2ax + x^2.$$

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 = a^2 + (a-y)^2 = 2a^2 - 2ay + y^2.$$

$$MN^2 = CM^2 + CN^2 = x^2 + y^2.$$

$$\cos MAN = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2 \cdot AM \cdot AN} = \frac{2a(2a - x - y)}{\sqrt{(2a^2 - 2ax + x^2)(2a^2 - 2ay + y^2)}}.$$

Để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau thì :

$$\frac{2a(2a - x - y)}{\sqrt{(2a^2 - 2ax + x^2)(2a^2 - 2ay + y^2)}} = 0 \Leftrightarrow 2a = x + y.$$

Đáp án B.

Câu 133. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in [4;8]$. Biết

rằng $\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}, f(8) = \frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

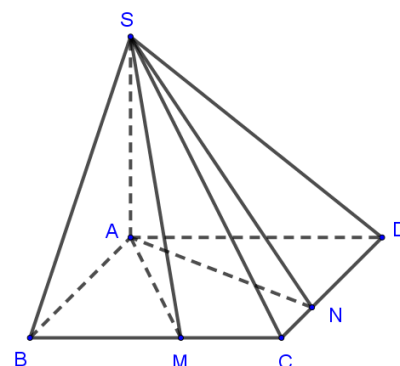
A. $f(6) = \frac{5}{8}$.

B. $f(6) = \frac{2}{3}$.

C. $f(6) = \frac{3}{8}$.

D. $f(6) = \frac{1}{3}$.

Giải



Đặt: $t = f(x) \Rightarrow f'(x)dx = dt$. Suy ra $\int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_{f(4)}^{f(8)} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_{f(4)}^{f(8)} = \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(8)} = 2$.

Xét số thực k với:

$$\int_4^8 \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k \right] dx = \int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx + 2k \int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx + k^2 \int_4^8 dx = 1 + 2k \cdot 2 + 4k^2 = (2k+1)^2$$

Chọn: $k = -\frac{1}{2}$ thì $\int_4^8 \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2} \right] dx = 0$, mà $\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2} \right]^2 \geq 0$ nên:

$$\int_4^8 \left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2} \right] dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{2} x + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2} x + C. \text{ Với } x=4, \text{ ta có: } -\frac{1}{f(4)} = 2 + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{f(4)} - 2 = -6.$$

$$\text{Vậy: } f(6) = -\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 6 - 6} = \frac{1}{3}.$$

Đáp án D.

Note: Bài toán bên được giải bằng cách sử dụng kỹ thuật đưa về bình phương. Để hiểu rõ hơn về kỹ thuật này, độc giả có thể nghiên cứu các ví dụ đề xuất ở bên dưới.

Bài tập đề xuất:

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}$$

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

A. $I = 0$.

B. $I = \frac{\pi}{4}$.

C. $I = 1$.

D. $I = \frac{\pi}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn

$$f(0) = 1; 3 \int_0^1 \left[f'(x) \cdot f^2(x) + \frac{1}{9} \right] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f^3(x) dx.$$

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = \frac{5}{4}$.

C. $I = \frac{5}{6}$.

D. $I = \frac{7}{6}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$

và $\int_0^1 f^2(x)dx = 4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng

A. 1.

B. 8.

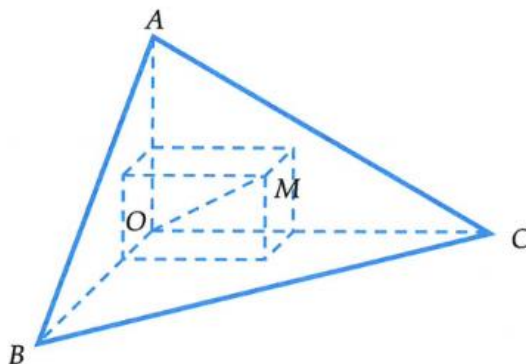
C. 10.

D. 80.

Đáp án: 1A; 2D; 3C

Câu 134. [#NTAD].

Có một khối gỗ dạng hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = 3cm, OB = 6cm, OC = 12cm$. Trên mặt phẳng (ABC) người ta đánh dấu một điểm M , sau đó người ta cắt gọt khối gỗ để thu được một hình hộp chữ nhật có OM là một đường chéo đồng thời hình hộp có 3 mặt nằm trên 3 mặt của tứ diện (xem hình vẽ).



Thể tích lớn nhất của khối gỗ hình hộp chữ nhật bằng

A. 8 cm^3 .

B. 24 cm^3 .

C. 12 cm^3 .

D. 36 cm^3 .

Giải

Gọi a, b, c lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng $(OAB), (OBC)$ và (OCA) , $(a, b, c > 0)$.

Ta có: $V_{O.ABC} = V_{M.OAB} + V_{M.OBC} + V_{M.OCA}$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB + \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC + \frac{1}{3} \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OA.$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 6 \cdot 12 = a \cdot 3 \cdot 6 + b \cdot 6 \cdot 12 + c \cdot 12 \cdot 3 \Leftrightarrow a + 4b + 2c = 12.$$

$$\text{Thể tích của khối gỗ là: } V = abc = \frac{1}{8} \cdot a \cdot 4b \cdot 2c \leq \frac{1}{8} \left(\frac{a + 4b + 2c}{3} \right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{12}{3} \right)^3 = 8 (\text{cm}^3).$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi khi: } a = 4b = 2c = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4(cm) \\ b = 1(cm) \\ c = 2(cm) \end{cases}.$$

Đáp án A.**Câu 135. [#NTAD].**

Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $A(2;4)$, $B(3;9)$, $C(4;16)$.

Các đường thẳng AB , AC , BC cắt đồ thị hàm số lần lượt tại các điểm D , E , F (D khác A và B ; E khác A và C ; F khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của D , E , F bằng 24.

Tính $f(0)$.

- A. $f(0) = -2$. B. $f(0) = 0$. C. $f(0) = \frac{24}{5}$. D. $f(0) = 2$.

Giải

Giả sử: $y = f(x) = a(x-2)(x-3)(x-4) + x^2$ ($a \neq 0$).

$$\text{Phương trình } AB: \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-4}{9-4} \Leftrightarrow 5(x-2) = y-4 \Leftrightarrow y = 5x-6.$$

Hoành độ điểm D là nghiệm của phương trình: $a(x-2)(x-3)(x-4) + x^2 = 5x-6$.

$$\Leftrightarrow a(x-2)(x-3)(x-4) + (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)[a(x-4)+1] = 0.$$

$$\Rightarrow a(x_D-4)+1=0 \Leftrightarrow x_D = 4 - \frac{1}{a}.$$

$$\text{Phương trình } AC: \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-4}{16-4} \Leftrightarrow 6(x-2) = y-4 \Leftrightarrow y = 6x-8.$$

Hoành độ điểm E là nghiệm của phương trình: $a(x-2)(x-3)(x-4) + x^2 = 6x-8$.

$$\Leftrightarrow a(x-2)(x-3)(x-4) + (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)[a(x-3)+1] = 0$$

$$\Rightarrow a(x_E-3)+1=0 \Leftrightarrow x_E = 3 - \frac{1}{a}.$$

$$\text{Phương trình } BC: \frac{x-3}{4-3} = \frac{y-9}{16-9} \Leftrightarrow 7(x-3) = y-9 \Leftrightarrow y = 7x-12$$

Hoành độ điểm F là nghiệm của phương trình: $a(x-2)(x-3)(x-4) + x^2 = 7x-12$.

$$\Leftrightarrow a(x-2)(x-3)(x-4) + (x-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4)[a(x-2)+1] = 0$$

$$\Rightarrow a(x_F-2)+1=0 \Leftrightarrow x_F = 2 - \frac{1}{a}.$$

Từ giả thiết ta có: $x_D + x_E + x_F = 24 \Rightarrow 9 - \frac{3}{a} = 24 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$.

Vậy: $f(0) = a(-2)(-3)(-4) = -\frac{24}{5}$.

Đáp án C.

Note: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ được viết theo công thức: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Câu 136. [#NTAD].

Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}$ có đồ thị là (C). Gọi $M(0; m)$ là điểm nằm trên trục tung mà từ đó kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C). Biết tập hợp các giá trị của m là nửa khoảng $(a; b]$. Giá trị của $a + b$ bằng ?

- A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. -1.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = \frac{1}{2} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $M(0; m)$ và có hệ số góc là k , phương trình đường thẳng $\Delta: y = kx + m$.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} = kx + m \\ k = \frac{1}{2} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \right) x + m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}} = m(*)$$

Hệ phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ trên $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = \frac{-3x}{4(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 1$ hay

$$m \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]. \text{ Vậy } a = -\frac{1}{2}; b = 1 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

Đáp án C.

Note:

Bài toán: Tìm điều kiện của tham số để từ điểm $M(x_0; y_0)$ cho trước có thể kẻ được 1, 2, 3, ... tiếp tuyến đến đồ thị $(C): y = f(x)$.

* **Bước 1:** Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và có hệ số góc k :
 $y = k(x - x_0) + y_0$.

* **Bước 2:** Δ tiếp xúc với (C) khi hệ phương trình dưới đây có nghiệm

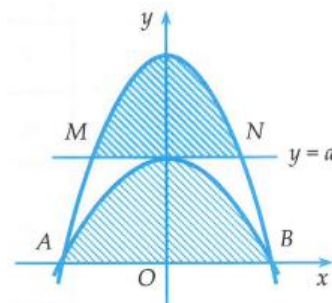
$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) + y_0$ (*).

* **Bước 3:** Số tiếp tuyến của đồ thị (C) kẻ từ M chính là số nghiệm của phương trình (*).

Câu 137. [#NTAD].

Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 4$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d ; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1 = S_2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.



A. $T = 99$.B. $T = 64$.C. $T = 32$.D. $T = 72$.Giải

Do A, B là giao điểm của (P_1) và trục hoành nên $A(-2;0)$ và $B(2;0)$.

Gọi M, N là giao điểm của (P_1) với đường thẳng d thì $M(-\sqrt{4-a}; a)$ và $N(\sqrt{4-a}; a)$.

Giả sử phương trình (P_2) có dạng $y = mx^2 + nx + p$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y(-2) = 0 \\ y(2) = 0 \\ y(0) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m - 2n + p = 0 \\ 4m + 2n + p = 0 \\ p = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{a}{4} \\ n = 0 \\ p = a \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{a}{4}x^2 + a.$$

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng, ta có:

$$S_1 = \int_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} (-x^2 + 4 - a) dx = \left[(4-a)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} = \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a} \text{ (đvdt)}$$

$$S_2 = \int_{-2}^2 \left(-\frac{a}{4}x^2 + a\right) dx = \left[\frac{ax^3}{12} + ax \right]_{-2}^2 = \frac{8a}{3} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Theo giả thiết } S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a} = \frac{8a}{3} \Rightarrow (4-a)^3 = 4a^2.$$

$$\Leftrightarrow 64 - 48a + 12a^2 - a^3 = 4a^2 \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 48a = 64. \text{ Vậy } T = 64.$$

Đáp án B.

Note: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a; x = b$. Diện tích của hình phẳng D được tính theo công

$$\text{thức: } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Câu 138. [#NTAD].

Cho khai triển

$$\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \right)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + \dots + \frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}}$$

$$\text{với } x \neq -1. \text{ Tính tổng } S = \sum_{k=1}^{2018} b_k.$$

A. $S = 2^{2018}$.

B. $S = 2^{2017} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

C. $S = 2^{2017} + \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

D. $S = 2^{2018} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

Giải

Ta có: $S = \sum_{k=1}^{2018} b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_{2018}$.

Đặt $f(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} \right)^{2018} \Rightarrow f(0) = 2^{2018}$.

Lại có: $f(0) = a_0 + (b_1 + b_2 + \dots + b_{2018}) = a_0 + S$, suy ra: $a_0 + S = 2^{2018} \Leftrightarrow S = 2^{2018} - a_0$.

Ta có: $f(x) = \left[\frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} \right]^{2018} = \left(x+1 + \frac{1}{x+1} \right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2018-k} \left(\frac{1}{x+1} \right)^k$.

$= \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2018-2k} = \sum_{k=0}^{1008} C_{2018}^k (x+1)^{2018-2k} + \sum_{k=1009}^{2018} \frac{C_{2018}^k}{(x+1)^{2k-2018}}$.

$= C_{2018}^0 (x+1)^{2018} + C_{2018}^1 (x+1)^{2016} + \dots + C_{2018}^{1008} (x+1)^2 + C_{2018}^{1009} + \frac{C_{2018}^{1010}}{(x+1)^2} + \frac{C_{2018}^{1011}}{(x+1)^4} + \dots + \frac{C_{2018}^{2018}}{(x+1)^{2018}}$.

Suy ra: $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = b_{2017} = 0 \Rightarrow S = b_2 + b_4 + \dots + b_{2018} = C_{2018}^{1010} + C_{2018}^{1011} + \dots + C_{2018}^{2018}$ và

$a_0 = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1008} + C_{2018}^{1009} = (C_{2018}^{2018} + C_{2018}^{2017} + \dots + C_{2018}^{1010}) + C_{2018}^{1009} = S + C_{2018}^{1009}$ do $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Vậy: $\begin{cases} a_0 + S = 2^{2018} \\ a_0 - S = C_{2018}^{1009} \end{cases} \Rightarrow 2S = 2^{2018} - C_{2018}^{1009} \Leftrightarrow S = 2^{2017} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$.

Đáp án B.

Câu 139. [#NTAD].

Tìm số cặp có thứ tự $(a; b)$ sao cho $(a + bi)^{2018} = a - bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

A. 2018.

B. 2020.

C. 2017.

D. 2019.

Giải

Đặt $Z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{Z} = a - bi$.

Từ giả thiết: $(a + bi)^{2018} = a - bi$.

Ta có: $z^{2018} = \bar{z} \Leftrightarrow z^{2018} = \frac{|z|^2}{z} \Leftrightarrow z^{2019} - |z|^2 = 0 \quad (*)$.

Phương trình $(*)$ (ẩn z) có bậc là 2019, nên phương trình $(*)$ có 2019 nghiệm phức dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Vậy có 2019 cặp có thứ tự $(a; b)$ thỏa mãn bài toán.

Đáp án D.

Note: Với mọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ta luôn có $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Câu 140. [#NTAD].

Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện, mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh bằng 20 cm; sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa vào xung quanh), mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 42 cm. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 m. Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 64000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột?

A. 22 bao.

B. 17 bao.

C. 18 bao.

D. 25 bao.

Giải

Trước khi hoàn thiện, mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ với đáy là

hình lục giác đều có diện tích là $S_1 = 6 \cdot \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} = 600\sqrt{3} (\text{cm}^2)$.

Thể tích mỗi khối lăng trụ lúc đầu là: $V_1 = S_1 \cdot h = 600\sqrt{3} \cdot 400 = 240000\sqrt{3} (\text{cm}^3)$.

Thể tích mỗi khối cột hình trụ sau khi hoàn thiện là:

$$V_2 = \pi \cdot 21^2 \cdot 400 = 176400\pi (\text{cm}^3).$$

Suy ra thể tích lượng vữa trát thêm vào cho cả 10 cây cột là:

$V = 10(V_2 - V_1) = 10 \cdot (176400\pi - 240000\sqrt{3}) \approx 1384847,503 (\text{cm}^3)$. Do lượng xi măng chiếm 80% lượng vữa nên lượng xi măng cần dùng để xây hệ thống cột là:

$$V_{xm} \approx 1384847,503 \cdot 80\% \approx 1107878,002 (\text{cm}^3).$$

Số bao xi măng loại 50kg cần dùng là: $\frac{V_{xm}}{64000} \approx 17,3106$.

Vậy cần ít nhất 18 bao xi măng để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột.

Đáp án C.

Note: Nhiều học sinh chọn đáp án B, tuy nhiên nếu chỉ sử dụng 17 bao xi măng thì vẫn còn thiếu một lượng nhỏ xi măng nữa mới có thể hoàn thiện hệ thống cột. Vì vậy ta nên chọn 18 bao xi măng và khi hoàn thiện xong toàn bộ hệ thống cột sẽ còn thừa lại một lượng xi măng.

Câu 141. [#NTAD].

Cho hàm số $y = |x+3| + \frac{1}{x+1}$, gọi S là tổng tất cả các giá trị cực trị của hàm số. Giá trị của S bằng?

A. $S = \frac{9}{2}$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = \frac{7}{2}$.

D. $S = 4$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Ta có: } y = |x+3| + \frac{1}{x+1} = \begin{cases} x+3 + \frac{1}{x+1} & \text{khi } -3 \leq x \neq -1 \\ -x-3 + \frac{1}{x+1} & \text{khi } x < -3 \end{cases}.$$

$$\text{Đạo hàm: } y' = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(x+1)^2} & \text{khi } -3 < x \neq -1 \\ -1 - \frac{1}{(x+1)^2} & \text{khi } x < -3 \end{cases}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$		0		$+\infty$	$+\infty$
		$-\frac{1}{2}$		$-\infty$	4	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị và tổng tất cả các giá trị cực trị của hàm số là $S = -\frac{1}{2} + 0 + 4 = \frac{7}{2}$.

Đáp án C.**Câu 142. [#NTAD].**

Trong không gian với hệ tọa độ O , cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho từ M có thể kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\angle AMB = 60^\circ$, $\angle BMC = 90^\circ$; $\angle CMA = 120^\circ$ có dạng $M(a; b; c)$ với $a < 0$. Giá trị $T = a + b + c$ bằng:

- A. $T = 1$. B. $T = \frac{10}{3}$. C. $T = 2$. D. $T = -2$.

Giải

Đặt $AM = x > 0$.

Ta có: $MA = MB = MC$ (Do $IA = IB = IC = R$).

Tam giác MAB đều nên $AB = MA = x$.

Tam giác MBC vuông cân tại $M \Rightarrow BC = MB\sqrt{2} = x\sqrt{2}$.

Tam giác $MAC \Rightarrow AC = \sqrt{MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cos 120^\circ}$
 $= \sqrt{x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos 120^\circ} = x\sqrt{3}$.

Nhận thấy: $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 3x^2$.

$\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại B .

Do đó: AC là đường kính của đường tròn (ABC) .

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$; $R = 3\sqrt{3}$.

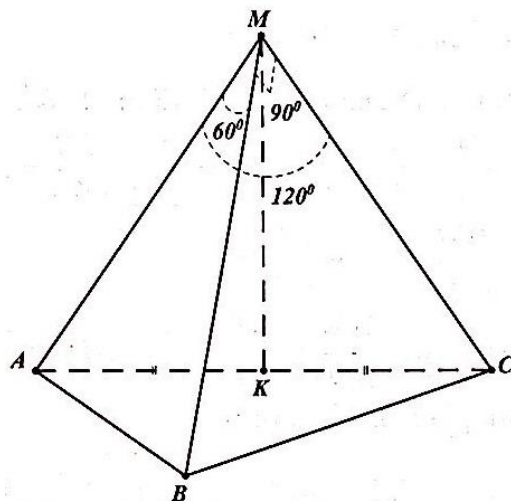
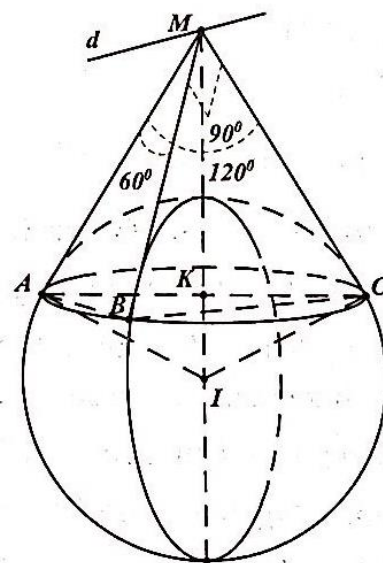
Xét tam giác AMI vuông tại A :

$$\sin \angle AMI = \frac{IA}{MI} \Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{MI} \Leftrightarrow MI = 6.$$

Ta có: $M \in d \Rightarrow M(-1+t; -2+t; 1+t)$ vì $x_M > 0 \Rightarrow t < 1$.

Khi đó: $MI = 6 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36$.

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases} (l).$$



$$\Rightarrow M(-1; -2; 1) \Rightarrow T = a + b + c = -1 - 2 + 1 = -2.$$

Đáp án D.

Câu 143. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

- A. $T = 2 + 9\ln 2$. B. $T = 9$. C. $T = \frac{1}{2} + 9\ln 2$. D. $T = 2 - 9\ln 2$.

Giải

$$\text{Ta có: } 9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9 \Rightarrow 9(f''(x) - 1) = -[f'(x) - x]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế: } -\int \frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} dx = \int \frac{1}{9} dx \Rightarrow \frac{1}{f'(x) - x} = \frac{x}{9} + C.$$

$$\text{Do } f'(0) = 9 \text{ nên } \Rightarrow \frac{1}{f'(x) - x} = \frac{x}{9} + C \Rightarrow \frac{1}{f'(0) - 0} = C \Rightarrow C = \frac{1}{9}.$$

$$\Rightarrow f'(x) - x = \frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{x+1} + x.$$

$$\text{Vậy: } T = f(1) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{9}{x+1} + x \right) dx = \left(9\ln|x+1| + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 9\ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Đáp án C.

Câu 144. [#NTAD].

Có bao nhiêu số nguyên m trong đoạn $[-2000; 2000]$ sao cho bất phương trình

$$(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x} \text{ có nghiệm đúng với mọi } x \in (1; 100).$$

- A. 2000. B. 4000. C. 2001. D. 4001.

Giải

$$\text{Ta có: } (10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x} \Leftrightarrow \left(m + \frac{\log x}{10} \right) (\log x + 1) \geq \frac{11}{10} \log x.$$

$$\Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11\log x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10\log x \geq 0.$$

$$\text{Do đó } \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1} (*).$$

$$\text{Đặt } t = \log x \Rightarrow t \in (0; 2). \text{ Do } x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2).$$

$$(*) \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10t - t^2}{t + 1}; \forall t \in (0; 2).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 10}{(t + 1)^2} > 0; \forall t \in (0; 2).$$

Bảng biến thiên:

t	0	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0	$\frac{16}{3}$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên thì: } 10m \geq \frac{16}{3} \Rightarrow m \geq \frac{8}{15}.$$

$$\text{Do } m \in [-2000; 2000] \Rightarrow m \in \left[\frac{8}{15}; 2000 \right] \text{ và } m \text{ nguyên.}$$

Vậy có 2000 giá trị m thỏa mãn.

Đáp án A.

Câu 145. [#NTAD].

Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$ là?

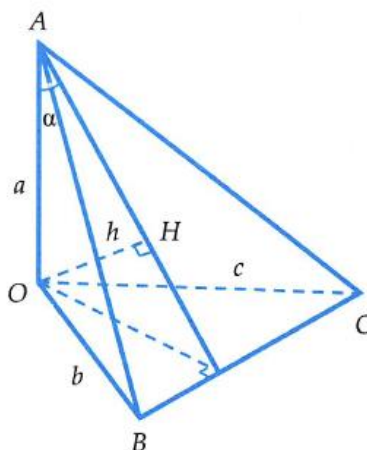
A. $125\sqrt{3}$.

B. $48\sqrt{3}$.

C. 48.

D. 125.

Giải



Gọi H là trực tâm của tam giác $\triangle ABC$. Vì tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên $OH \perp (ABC)$ và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \alpha = (OA, (ABC)) = OAH \\ \beta = (OB, (ABC)) = OBH \\ \gamma = (OC, (ABC)) = OCH \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \sin \alpha = \frac{OH}{OA}, \sin \beta = \frac{OH}{OB} \text{ và } \sin \gamma = \frac{OH}{OC}.$$

$$\text{Đặt: } OA = x, OB = y, OC = z \text{ và } OH = h \text{ thì: } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \text{ và}$$

$$M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma) = \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \beta}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right)$$

$$\Rightarrow M = \left(2 + \frac{x^2}{h^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{y^2}{h^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{z^2}{h^2}\right)$$

$$= 8 + 4(x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{1}{h^2} + 2(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) \cdot \frac{1}{h^4} + x^2 y^2 z^2 \cdot \frac{1}{h^6}$$

$$\text{Ta có: } (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{1}{h^2} = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 3\sqrt{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} \cdot 3\sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{z^2}} = 9;$$

$$(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) \cdot \frac{1}{h^4} = (x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2 \cdot y^2z^2 \cdot z^2x^2} \cdot \left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{z^2} \right)} \right)^2 = 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} \cdot 9\sqrt[3]{\frac{1}{x^4y^4z^4}} = 27$$

$$\text{Và } x^2y^2z^2 \cdot \frac{1}{h^6} = x^2y^2z^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)^3 \geq x^2y^2z^2 \cdot \left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{z^2} \right)} \right)^3 = 27$$

Do đó:

$$M = 8 + 4(x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{1}{h^2} + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \cdot \frac{1}{h^4} + x^2y^2z^2 \cdot \frac{1}{h^6} \geq 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 27 + 27 = 125$$

Vậy $\min M = 125$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay $OA = OB = OC$.

Đáp án D.

Note: Nếu tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, H là trực tâm của tam giác $\triangle ABC$ thì $OH \perp (ABC)$ và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Cho ba số thực dương a, b, c thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (bất đẳng thức Cauchy)

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 146. [#NTAD].

Cho hai góc $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}, \cot y = \frac{1}{7}$. Giá trị của $x + y$ bằng?

- A. $\frac{7\pi}{8}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{5\pi}{6}$. D. $\frac{3\pi}{4}$.

Giải

$$\text{Ta có: } \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{4}{3} + 7}{1 - \frac{4}{3} \cdot 7} = -1 \Rightarrow x + y = \frac{3\pi}{4}.$$

Đáp án D.

Câu 147. [#NTAD].

Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho

$$S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$$

là một số có 1000 chữ số.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Giải

Ta có: $S = 2 + (C_0^1 + C_1^1) + (C_2^0 + C_2^1 + C_2^2) + \dots + (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n)$.

Xét khai triển: $(1+x)^k = C_k^0 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \dots + C_k^{k-1} x^{k-1} + C_k^k x^k$.

Thay $x=1$ vào khai triển ta được $C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^{k-1} + C_k^k = 2^k$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} C_1^0 + C_1^1 = 2^1 \\ C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 2^2 \\ \dots \\ C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 2 + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) = 2 + \frac{2^1(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1}.$$

Số chữ số của S là $[\log S] + 1 = 1000 \Leftrightarrow [\log S] = 999$.

Ta có: $[\log S] \leq \log S \leq [\log S] + 1 \Leftrightarrow 999 \leq \log 2^{n+1} \leq 1000$.

$$\Leftrightarrow 999 \leq (n+1) \cdot \log 2 \leq 1000 \Leftrightarrow 3317,61 \leq n \leq 3320,93.$$

Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $n \in \{3318; 3319; 3320\}$. Vậy có 3 số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C.

Note: Xét số tự nhiên A được biểu diễn dưới dạng mũ (hay một dạng nào đó mà ta không thể đếm được số các chữ số của nó). Giả sử A có n chữ số thì n được tính theo công thức $n = [\log A] + 1$.

Kí hiệu $[x]$ (phần nguyên của x) là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , tức là $[x] \leq x \leq [x] + 1$.

Câu 148. [#NTAD].

Biết $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c + \frac{1}{2} \ln(3\sqrt{2}-3)$ với a, b, c là các số hữu tỷ.

Tính $P = a + b + c$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -1$.

C. $P = -\frac{1}{2}$.

D. $P = \frac{5}{2}$.

Giải

Bằng cách trục căn thức ở mẫu, ta thu được:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(1+x-\sqrt{1+x^2})dx}{2x} = \left(\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} x \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2}dx}{2x^2} = \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - I$$

Xét $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2}dx}{2x^2}$. Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow tdt = xdx$.

$$I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2 dt}{2(t^2-1)} = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \right] = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} \right] \Big|_{\sqrt{2}}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{2}-1)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[2 - \sqrt{2} - \ln \sqrt{3} - \ln (\sqrt{2}-1) \right]$$

Vậy $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1}{2} \left[2 - \sqrt{2} - \ln \sqrt{3} - \ln (\sqrt{2}-1) \right]$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln (3\sqrt{2}-3).$$

Vậy $P = a + b + c = -\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Câu 149. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$ và

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx \text{ bằng?}$$

A. 1.

B. 8.

C. 10.

D. 80.

Giải

$$\text{Xét } \int_0^1 [f(x) + (ax+b)]^2 dx = \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 [f(x) \cdot (ax+b)] dx + \int_0^1 (ax+b)^2 dx$$

$$= 4 + 2a \int_0^1 xf(x)dx + 2b \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{3a} (ax+b)^3 \Big|_0^1 = 4 + 2(a+b) + \frac{a^2}{3} + ab + b^2.$$

Cần xác định a, b để $\frac{a^2}{3} + (2+b)a + b^2 + 2b + 4 = 0$.

Ta có: $\Delta = b^2 + 4b + 4 - \frac{4}{3}(b^2 + 2b + 4) = \frac{-(b-2)^2}{3} \leq 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -6$.

Khi đó: $\int_0^1 [f(x) + (-6x + 2)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 6x - 2$

Suy ra: $\int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 (6x - 2)^3 dx = \frac{1}{24}(6x - 2)^4 \Big|_0^1 = 10$.

Đáp án C.

Câu 150. [#NTAD].

Có bao nhiêu số có 5 chữ số tận cùng là 1 và chia hết cho 7.

A. 12855.

B. 12856.

C. 1285.

D. 1286.

Giải

Giả sử: $\overline{abcd1} = 10.\overline{abcd} + 1 = 3.\overline{abcd} + 7.\overline{abcd} + 1$ là số tự nhiên có 5 chữ số thỏa mãn đề bài.

Ta có $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 khi $3.\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7.

Khi đó: $3.\overline{abcd} + 1 = 7k \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2k + \frac{k-1}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ là số nguyên khi $k = 3l + 1$.

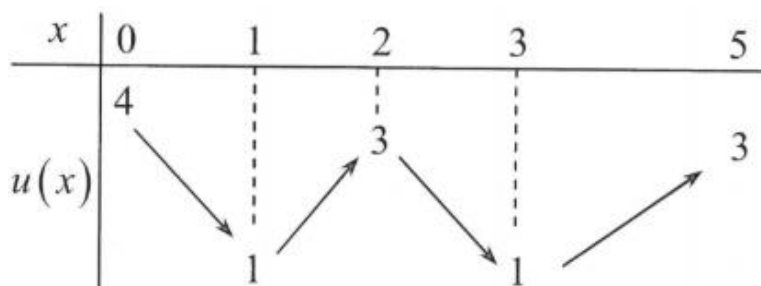
Suy ra $\overline{abcd} = 7l + 2 \Rightarrow 1000 \leq 7l + 2 \leq 9999 \Leftrightarrow \frac{998}{7} \leq l \leq \frac{9997}{7}$ có 1286 giá trị của l .

Vậy có 1286 số thỏa mãn bài toán.

Đáp án D.

Câu 151. [#NTAD].

Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10 - 2x} = m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 5]$?



A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Giải

Theo bảng biến thiên ta có trên $[0;5]$ thì $1 \leq u(x) \leq 4$ (1)

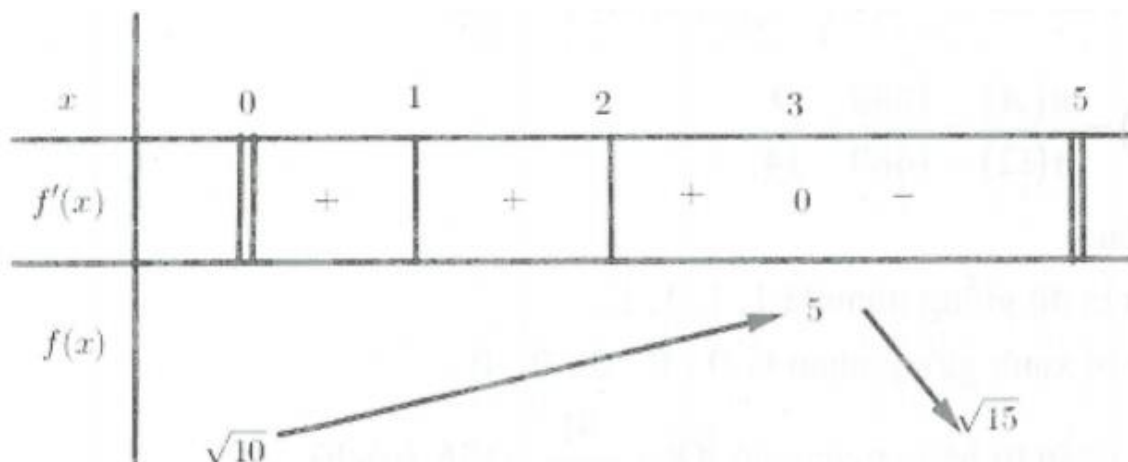
$$\text{Ta có: } \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m \cdot u(x) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} = m$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ trên $[0;5]$

Ta có:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{10-2x}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{10-2x} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 3(10-2x) = 4x \Leftrightarrow x = 3$$

Bảng biến thiên



Do đó ta có trên $[0;5]$ thì $\sqrt{10} \leq f(x) \leq 5$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} \max f(x) = f(3) = 5 \\ \min u(x) = u(3) = 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \min f(x) = f(0) = \sqrt{10} \\ \max u(x) = u(0) = 4 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \frac{\sqrt{10}}{4} \leq \frac{f(x)}{u(x)} \leq 5, \forall x \in [0;5].$$

Để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m \cdot u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5] \Leftrightarrow$ phương trình

$$\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} = m \text{ có nghiệm trên đoạn } [0;5] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{4} \leq m \leq 5$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

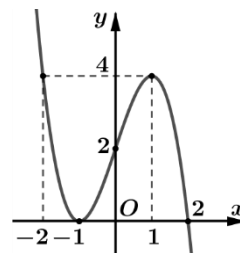
Đáp án C.

Câu 152. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm

số $g(x) = f(x^2 + x - 1) + \frac{480}{m(x^2 + x + 2)}$ nghịch biến

trên $(0; 1)$?



A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Giải

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ khi $g'(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow (2x+1) \left[f'(x^2+x-1) - \frac{480}{m(x^2+x+2)^2} \right] < 0, \forall x \in (0; 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{480}{m} > (x^2+x+2)^2 \cdot f'(x^2+x-1), \forall x \in (0; 1)$$

$$\xrightarrow{t=x^2+x-1} \frac{480}{m} > (t+3)^2 \cdot f'(t), \forall t \in (-1; 1).$$

Dựa vào đồ thị, ta có $\begin{cases} 0 < f'(t) < 4 \\ 2 < (t+3)^2 < 16 \end{cases}, \forall t \in (-1; 1) \longrightarrow (t+3)^2 \cdot f'(t) < 64, \forall t \in (-1; 1).$

Theo YCBT $\longrightarrow \frac{480}{m} \geq 64 \Leftrightarrow m \leq \frac{15}{2}$.

Đáp án C.

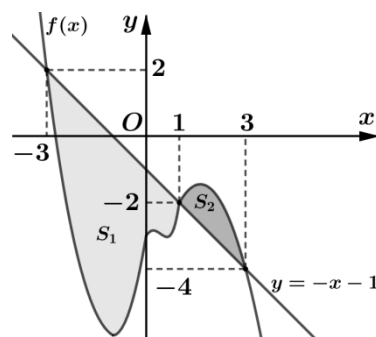
Câu 153. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ.

Biết rằng diện tích hình phẳng S_1 , S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là

M ; m . Tích phân $\int_{-3}^3 f(x) dx$ bằng?

- A. $6 + m - M$. B. $6 - m - M$.
C. $M - m + 6$. D. $m - M - 6$.



Giải

$$\text{Ta có } M = \int_{-3}^1 [-x - 1 - f(x)] dx = \int_{-3}^1 (-x - 1) dx - \int_{-3}^1 f(x) dx = 0 - \int_{-3}^1 f(x) dx;$$

$$m = \int_1^3 [f(x) - (-x - 1)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 (x + 1) dx = \int_1^3 f(x) dx + 6.$$

$$\text{Suy ra } m - M = \int_1^3 f(x) dx + 6 + \int_{-3}^1 f(x) dx = 6 + \int_{-3}^3 f(x) dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-3}^3 f(x) dx = m - M - 6.$$

Đáp án D.

Câu 154. [#NTAD].

Tìm tất cả các giá trị thực k để phương trình $\left| -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{k}{2} - 1 \right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

- A. $k \in \emptyset$. B. $k \in \left(-2; -\frac{3}{4} \right) \cup \left(\frac{19}{4}; 6 \right)$.
C. $k \in \left(\frac{19}{4}; 5 \right)$. D. $k \in (-2; -1) \cup \left(1; \frac{19}{4} \right)$.

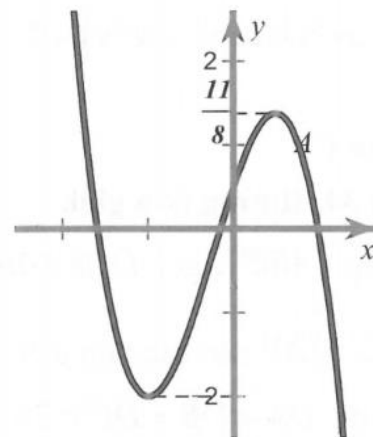
Giải

$$\text{Đặt } f(x) = -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = -6x^2 - 3x + 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$						



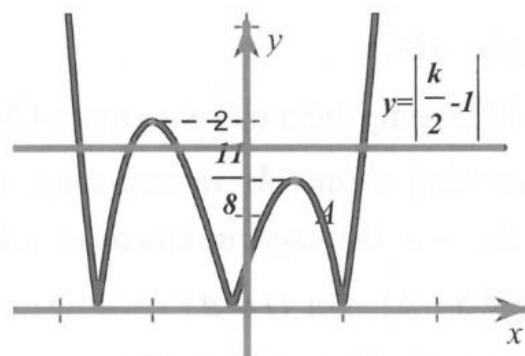
Suy ra đồ thị của hàm trị tuyệt đối $y = \left| -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right|$

bằng cách lấy đối xứng qua trục Ox .

Vậy để phương trình có đúng 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \frac{11}{8} < \left| \frac{k}{2} - 1 \right| < 2 \Leftrightarrow \frac{121}{64} < \frac{k^2}{4} - k + 1 < 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k^2}{4} - k - \frac{57}{64} > 0 \\ \frac{k^2}{4} - k - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -\frac{3}{4} \\ k > \frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < k < -\frac{3}{4} \\ \frac{19}{4} < k < 6 \end{cases}$$

**Đáp án B.****Câu 155. [#NTAD].**

Phương trình $(x+2)(\sqrt{x^2+4x+7}+1)+x(\sqrt{x^2+3}+1)=0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 0.**B.** 1.**C.** 2.**D.** 3.Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
& [(x+1)+1](\sqrt{x^2+4x+7}+1) + [(x+1)-1](\sqrt{x^2+3}+1) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+1)\left[(\sqrt{x^2+4x+7}+1) + (\sqrt{x^2+3}+1)\right] + (\sqrt{x^2+4x+7} - \sqrt{x^2+3}) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+1)\left[(\sqrt{x^2+4x+7}+1) + (\sqrt{x^2+3}+1)\right] + \frac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+4x+7} + \sqrt{x^2+3}} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x^2+4x+7} + \sqrt{x^2+3} + 2 + \frac{4}{\sqrt{x^2+4x+7} + \sqrt{x^2+3}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1
\end{aligned}$$

Đáp án A**Câu 156. [#NTAD].**

Cho phương trình $\sqrt[3]{(\sin x + m)^2} + \sqrt[3]{\sin^2 x - m^2} = 2\sqrt[3]{(\sin x - m)^2}$.

Gọi $S = [a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình trên có nghiệm thực. Tìm giá trị của $P = a^2 + b^2$?

A. $P = \frac{162}{49}$.

B. $P = \frac{49}{162}$.

C. $P = 4$.

D. $P = 2$.

Giải

TH1: $\sin x = m$, thì ta có: $\sqrt[3]{(2m)^2} = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Khi đó phương trình có nghiệm $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

TH2: $\sin x \neq m$, thì phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)} - 2 = 0.$$

Giải ra ta được:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{\sin x + m}{\sin x - m}} = 1 \\ \sqrt[3]{\frac{\sin x + m}{\sin x - m}} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x + m}{\sin x - m} = 1 \\ \frac{\sin x + m}{\sin x - m} = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 9\sin x = 7m \end{cases}$$

Do đó để phương trình có nghiệm thực thì:
$$\begin{cases} \frac{7m}{9} \neq m \\ -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{9}{7} \end{cases}$$

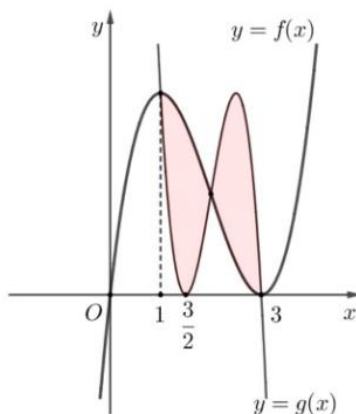
KL: Hợp hai trường hợp, suy ra tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m cần tìm là:

$$S = \left[-\frac{9}{7}; \frac{9}{7}\right] \Rightarrow P = a^2 + b^2 = \left(\frac{-9}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{162}{49}$$

Đáp án A.

Câu 157. [#NTAD].

Cho $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $g(x) = f(dx + e)$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?

**A.** 4,5.**B.** 4,25.**C.** 3,63.**D.** 3,67.**Giải**

Ta có: $f(x) = x(x-3)^2$ và $g(x) = k\left(x - \frac{3}{2}\right)^2(x-3)$.

Do đồ thị hàm số $y = f(x); y = g(x)$ có điểm chung $(1; 4)$ nên

$$g(1) = 4 \Leftrightarrow 4 = k\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2(1-3) \Leftrightarrow k = -8 \Rightarrow g(x) = -8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2(x-3).$$

$$\text{Vậy } S = \int_1^3 \left| x(x-3)^2 - \left(-8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2(x-3)\right) \right| dx = 4,5.$$

Đáp án A.**Câu 158. [#Mỗi ngày 3 câu hỏi hay].**

Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{b}{x} + \sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản.

Giá trị của $a + b + c + d$ bằng?

A. 12.

B. 10.

C. 18.

D. 15.

Giải

Ta có: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}} dx.$

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$. Đổi cận $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{8}; x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó: $I = \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{\frac{1}{3} dt}{\sqrt{t(t+1)}} = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{3} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right| \Big|_{\frac{1}{8}}^1 = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right).$

Vậy $a + b + c + d = 3 + 3 + 2 + 2 = 10$.

Đáp án B.**Câu 159. [#NTAD].**

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ với $a, b \in (0; 10)$ để phương trình bậc bốn

$(x^2 + ax + b)^2 + a(x^2 + ax + b) + b = x$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. 33.

B. 32.

C. 34.

D. 31.

Giải

Đặt: $y = x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 + ay + b \\ y = x^2 + ax + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = y^2 - x^2 + a(y - x) \\ y = x^2 + ax + b \end{cases}.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y + a + 1) = 0 \\ y = x^2 + ax + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = x \\ y = -x - a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (a - 1)x + b = 0 \\ x^2 + (a + 1)x + a + b + 1 = 0 \end{cases} \\ y = x^2 + ax + b \end{cases}$

Khi đó, ta có điều kiện để phương trình có bốn nghiệm thực phân biệt là

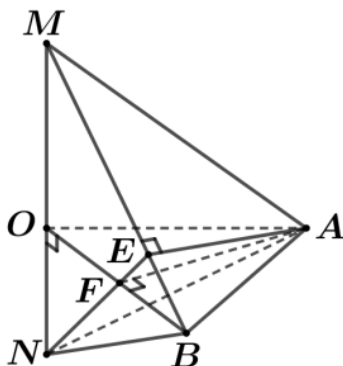
$\begin{cases} (a - 1)^2 - 4b > 0 \\ (a + 1)^2 - 4(a + b + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b < \frac{1}{4}(a^2 - 2a - 3).$

Từ đó suy ra có 33 cặp số nguyên dương $(a; b)$ với $a, b \in (0; 10)$.

Đáp án A.**Câu 160. [#NTAD].**

Cho tam giác $\triangle OAB$ đều cạnh a . Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB . Gọi N là giao điểm của EF và d . Tìm x để thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $x = a\sqrt{2}$. B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $x = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Giải

Do tam giác $\triangle OAB$ đều cạnh a , suy ra F là trung điểm $OB \Rightarrow OF = \frac{a}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp MO \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB$.

Lại có: $MB \perp AE$ nên suy ra $MB \perp (AEF) \Rightarrow MB \perp EF$.

Suy ra $\triangle OBM \sim \triangle ONF$ nên

$$\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OF} \longrightarrow ON = \frac{OB \cdot OF}{OM} = \frac{a^2}{2x}.$$

Ta có: $V_{ABMN} = V_{ABOM} + V_{ABON}$

$$= \frac{1}{3} S_{\triangle OAB} (OM + ON) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} \left(x + \frac{a^2}{2x} \right) \geq \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án B.

Câu 161. [#NTAD].

Cho phương trình $(m-1)\sqrt{(x^2+2)^3} + (x+4)(11x^2-8x+8) = 0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có bốn nghiệm thực phân biệt?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Giải

Ta có: $(x+4)(11x^2-8x+8) = 12(x+4)(x^2+2) - (x+4)^3$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $m = \left(\frac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}\right)^3 - 12\frac{x+4}{\sqrt{x^2+2}} + 1$. (1)

Đặt $t = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+2}} = f(x)$; $f'(x) = \frac{2-4x}{(\sqrt{x^2+2})^3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	+	0	-
f	-1	3	1

Ta được: $m = t^3 - 12t + 1 = g(t)$ với $t \in (-1; 3]$. (2)

Đạo hàm: $g'(t) = 3t^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	-1	1	2	3
g'	-		- 0 +	
g	12	-10	-15	-8

Đề phương trình đã cho có bốn nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc (1;3) $\xrightarrow{\text{BBT}}$ $-15 < m < -10 \longrightarrow$ có 4 giá trị nguyên m thỏa.

Đáp án A.

Câu 162. [#NTAD].

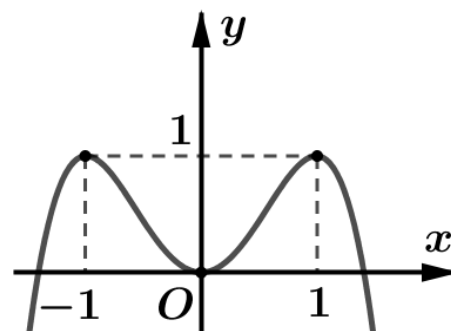
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f[f(\cos 2x)] = 0$?

A. 1 điểm.

B. 3 điểm.

C. 4 điểm.

D. Vô số.



Giải

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x \in [-1; 1]$ thì $y \in [0; 1]$.

Do đó nếu đặt: $t = \cos 2x$ thì $t \in [-1; 1]$, khi đó $f(\cos 2x) \in [0; 1]$.

Dựa vào đồ thị, ta có: $f[f(\cos 2x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos 2x) = 0 \\ f(\cos 2x) = a \ (a < -1) \text{ (loại)}. \\ f(\cos 2x) = b \ (b > 1) \text{ (loại)} \end{cases}$

Phương trình $f(\cos 2x) = 0 \longrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Đáp án C.

Câu 163. [#NTAD].

Cho hàm số $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 7$. Tồn tại bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\sqrt{g(g(x)-3)+m} = 2g(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 25.**B. 11.****C. 13.****D. 14.**Giải

Đặt $t = g(x) - 3 = 2x^3 + x^2 - 8x + 4$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	1	$+\infty$	
t'	$+$	0	$-$	0	$+$
t	$-\infty$	$\nearrow \frac{316}{27}$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

Từ cách đặt, ta có $\sqrt{g(g(x)-3)+m} = 2g(x)-5$ trở thành $\sqrt{g(t)+m} = 2t+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+1 \geq 0 \\ g(t)+m = (2t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ 2t^3 - 3t^2 - 12t + 6 = -m \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 6$:

t	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow 13$	$\searrow 11$	$\nearrow -14$	$+\infty$

Từ các bảng biến thiên trên, ta có:

Mỗi $t \in \left(-1; \frac{316}{27}\right)$ đều có 3 giá trị phân biệt của x .

Do $f\left(\frac{316}{27}\right) > 11$ nên phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương

trình $f(t) = -m$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{316}{27}\right)$
 $\Leftrightarrow -14 < -m \leq 11 \Leftrightarrow -11 \leq m < 14$. Do đó có 13 số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp án C.

Câu 164. [#NTAD].

Biết các hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{f(x)+5}{f^2(x)+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} f(x) > -1+3\sqrt{2} \\ f(x) < -1-3\sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} f(x) > -5+\sqrt{26} \\ f(x) < -5-\sqrt{26} \end{cases}$

C. $-5-\sqrt{26} \leq f(x) \leq -5+\sqrt{26}$.

D. $-1-3\sqrt{2} \leq f(x) \leq -1+3\sqrt{2}$.

Giải

Ta có: $y' = \left(\frac{f(x)+5}{f^2(x)+1} \right)' = \frac{f'(x) \cdot [f^2(x)+1] - [f(x)+5] \cdot 2f(x) \cdot f'(x)}{[f^2(x)+1]^2}$

$\Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot [-f^2(x) - 10f(x) + 1]}{[f^2(x)+1]^2}$

Do hai hàm số cùng đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $\begin{cases} \frac{f'(x) \cdot [-f^2(x) - 10f(x) + 1]}{[f^2(x)+1]^2} \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -f^2(x) - 10f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -5 - \sqrt{26} \leq f(x) \leq -5 + \sqrt{26}$.

Đáp án C.

Câu 165. [#NTAD].

Cho phương trình

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2\cos^3 x + m + 1)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{\cos^3 x + m + 2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Giải

$$\text{Ta có: } \sin x(2 - \cos 2x) - 2(2\cos^3 x + m + 1)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 + 2\sin^2 x) = 2(2\cos^3 x + m + 2)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} + \sqrt{2\cos^3 x + m + 2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3 x + \sin x = 2\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right)^3 + \sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$. Có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \quad (1)$$

$$\text{Với } x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right) \text{ thì } 0 \leq \sin x \leq 1 \text{ và } (1) \Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^2 x + m + 2$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 = m \quad (2)$$

Đặt $t = \cos x$. Xét hàm số $t(x) = \cos x$ trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Ta có $t'(x) = -\sin x \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ nên hàm số $t(x)$ nghịch biến trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $t(x)$ ta thấy $t\left(\frac{2\pi}{3}\right) < t(x) \leq 0$ hay $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Và với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Phương trình (2) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m \quad (3)$

Để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ thì phương trình (3) phải có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 - 1$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$\text{Ta có } g'(t) = -6t^2 - 2t, \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	-1	$-\frac{28}{27}$	-1	-4	

Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ khi và chỉ khi $-4 \leq m < -\frac{28}{27}$.

Vậy các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ là $m \in \{-4; -3; -2\}$.

Đáp án C.

Note: Trong quá trình giải bài toán này, ta sử dụng phương pháp hàm số để giải phương trình. Lý thuyết về phương pháp này đã được tác giả nêu ra tại phần lưu ý.

Lưu ý: Một số lý thuyết về “Phương pháp hàm số để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình”.

Định lý 1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên D thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên D .

Định lý 2: Nếu $f(x)$ liên tục, đồng biến trên D ; $g(x)$ liên tục, nghịch biến (hoặc là hàm hằng) trên D và ngược lại thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc D .

Định lý 3: Nếu $f'(x) = 0$ có một nghiệm trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên $(a; b)$. Tổng quát nếu $f^{(n)}(x) = 0$ có n nghiệm phân biệt trên $(a; b)$, thì $f^{(n-1)}(x)$ có nhiều nhất $n+1$ nghiệm trên $(a; b)$.

Định lý 4: Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v$. Ngược lại, nếu $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ thì $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v$ với mọi $u, v \in (a; b)$.

Định lý 5: Nếu $f(x)$ liên tục và đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên D thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ với mọi $u, v \in D$.

Câu 166. [#NTAD].

Cho hình nón đỉnh N , đáy là hình tròn tâm O , góc ở đỉnh bằng 120° . Trên đường tròn đáy lấy một điểm A cố định và một điểm M di động. Gọi S là diện tích của tam giác $\triangle NAM$. Có bao nhiêu vị trí của điểm M để S đạt giá trị lớn nhất

- A. Vô số vị trí. B. Hai vị trí. C. Ba vị trí. D. Một vị trí.

Giải

Gọi $l (l > 0)$ là độ dài đường sinh của hình nón. Vì góc ở đỉnh bằng 120°

nên $\angle ANO = 60^\circ$. Bán kính đường tròn đáy là

$$R = OA = NA \cdot \sin \angle ANO = l \cdot \sin 60^\circ = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Vì hình nón có góc ở đỉnh bằng 120° nên

$$0^\circ \leq \angle ANM \leq 120^\circ \Rightarrow 0 \leq \sin \angle ANM \leq 1$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{1}{2} \cdot NA \cdot NM \cdot \sin \angle ANM = \frac{l^2}{2} \sin \angle ANM \leq \frac{l^2}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\sin \angle ANM = 1 \Leftrightarrow \angle ANM = 90^\circ$, khi đó $\triangle ANM$ vuông cân tại $N \Rightarrow AM = l\sqrt{2}$. Do A cố định nên M nằm trên đường tròn $(A; l\sqrt{2})$

Mặt khác M thuộc đường tròn đáy $\left(O; \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$ nên M là giao điểm của đường tròn

$(A; l\sqrt{2})$ và đường tròn $\left(O; \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$

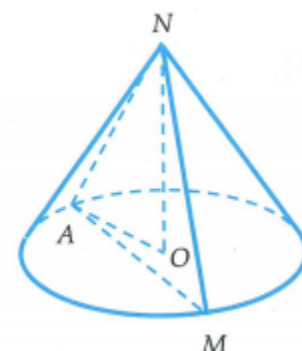
Vậy có hai vị trí của điểm M .

Đáp án B.

Câu 167. [#NTAD].

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a$ và $\angle SAB = \frac{11\pi}{24}$. Gọi Q là trung điểm của cạnh SA . Trên các cạnh SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm M, N, P không trùng với các đỉnh của hình chóp. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $AM + MN + NP + PQ$ theo a ?

- A. $\frac{a\sqrt{2} \sin \frac{11\pi}{24}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3} \sin \frac{11\pi}{12}}{3}$.



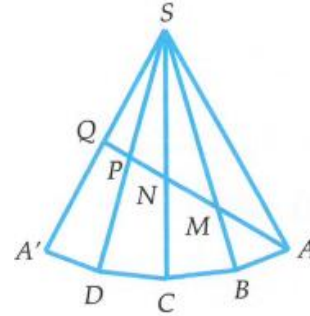
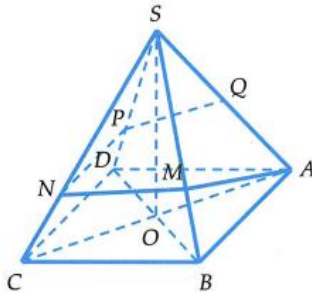
Giải

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên mỗi mặt bên là một tam giác cân tại đỉnh S .

Theo giả thiết ta có $SAB = \frac{11\pi}{24} \Rightarrow ASB = \pi - 2 \cdot \frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải các mặt bên thành một mặt phẳng ta được hình vẽ bên sao cho khi ghép lại thì $A \equiv A'$. Suy ra $ASA' = 4 \cdot ASB = \frac{\pi}{3}$ và $\triangle SAA'$ đều cạnh

$SA = a$.



Khi đó tổng $AM + MN + NP + PQ$ là tổng của các đường gấp khúc. Tổng này đạt nhỏ nhất bằng AQ nếu xảy ra trường hợp các điểm A, M, N, P, Q thẳng hàng.

Mà $\triangle SAA'$ đều có Q là trung điểm SA nên $AQ = \frac{SA\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\min(AM + MN + NP + PQ) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án B.**Câu 168. [#NTAD].**

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn

$x_1 \in (-1; 0); x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Giải

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ nên $a < 0$.

Vì $x_1 \in (-1; 0); x_2 \in (1; 2)$ nên $|x_2| > |x_1|$. Do đó ta có $x_1 x_2 < 0$ và

Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 x_2 < 0$ và

$$x_1 + x_2 > 0. \text{ Suy ra } S = -\frac{2b}{3a} > 0 \text{ và } P = \frac{c}{3a} < 0.$$

Do đó $b > 0$ và $c > 0$ (do $a < 0$).

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Đáp án A.

Note:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$.

+ Nếu $a > 0$, đồ thị hàm số có dạng “dấu ngã”, hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$;

+ Nếu $a < 0$, đồ thị hàm số có dạng “dấu đồng dạng”, hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$.

Câu 169. [#NTAD].

Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm

$A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lần lượt nằm trên các cạnh B_iC_i, A_iC_i, A_iB_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) sao cho

$A_{i+1}C_i = 3A_{i+1}B_i, B_{i+1}A_i = 3B_{i+1}C_i, C_{i+1}B_i = 3C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả diện tích của n

tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$, biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng $\frac{9}{16}$.

Tìm số nguyên dương n sao cho $S = \frac{16^{29} - 7^{29}}{16^{29}}$.

A. $n = 30$.

B. $n = 29$.

C. $n = 28$.

D. $n = 2018$.

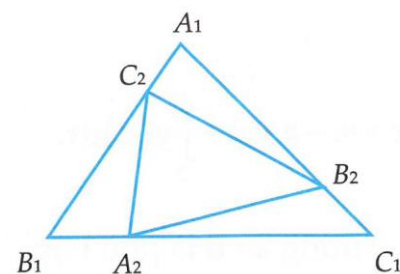
Giải

Gọi S_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) là diện tích của $\Delta A_iB_iC_i$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{\Delta A_2B_2C_2}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} A_1B_2 \cdot A_1C_2 \cdot \sin A_1}{\frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin A_1} = \frac{A_1B_2}{A_1C_1} \cdot \frac{A_1C_2}{A_1B_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{S_{\Delta A_2B_2C_1}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{S_{\Delta A_2B_1C_2}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{3}{16}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{S_{\Delta A_2B_2C_2}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1} - S_{\Delta A_1B_2C_2} - S_{\Delta A_2B_2C_1} - S_{\Delta A_2B_1C_2}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = 1 - 3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow S_2 = \frac{7}{16} S_1.$$



Tương tự ta có: $S_{i+1} = \frac{7}{16} S_i$ với $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Khi đó :

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = S_1 \left[1 + \frac{7}{16} + \left(\frac{7}{16}\right)^2 + \dots + \left(\frac{7}{16}\right)^{n-1} \right] = \frac{9}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{7}{16}\right)^n}{1 - \frac{7}{16}} = 1 - \left(\frac{7}{16}\right)^n.$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } S = 1 - \left(\frac{7}{16}\right)^{29} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{16}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{16}\right)^{29} \Leftrightarrow n = 29.$$

Đáp án B.

Note: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q

$$\text{được tính theo công thức: } S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Câu 170. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) \in [-1; 1]$ với

$\forall x \in (0; 2)$. Biết $f(0) = f(2) = 1$. Đặt $I = \int_0^2 f(x) dx$, phát biểu nào dưới đây **đúng**?

- A. $I \in (-\infty; 0]$. B. $I \in (0; 1]$. C. $I \in [1; +\infty)$. D. $I \in (0; 1)$.

Giải

$$\text{Ta có: } I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x - 1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int_0^1 f(x) dx = (x-1)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x) dx = 1 + \int_0^1 (1-x)f'(x) dx \geq 1 - \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\int_1^2 f(x) dx = (x-1)f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1)f'(x) dx = 1 + \int_1^2 (1-x)f'(x) dx \geq 1 - \int_1^2 (1-x) dx = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } I = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Đáp án C.

Câu 171. [#NTAD].

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M là một điểm thuộc miền trong của khối tứ diện tương ứng. Giá trị lớn nhất của tích các khoảng cách từ điểm M đến bốn mặt phẳng của tứ diện đã cho là

- A. $\frac{a^4}{521}$. B. $\frac{a^4}{576}$. C. $\frac{a^4\sqrt{6}}{81}$. D. $\frac{a^4\sqrt{6}}{324}$.

Giải

Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$.

Gọi S là diện tích một mặt của tứ diện đều thì $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích tứ diện đều $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $V_{ABCD} = V_{M.BCD} + V_{M.ACD} + V_{M.ABD} + V_{M.ABC}$

$$= \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_1 + \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_2 + \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_3 + \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_4$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{S}{3} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4).$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta có:

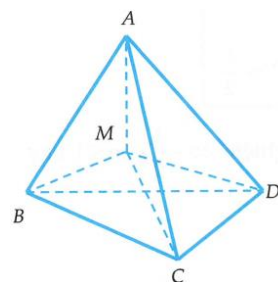
$$\frac{a\sqrt{6}}{3} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{r_1 r_2 r_3 r_4}$$

$$\Leftrightarrow r_1 r_2 r_3 r_4 \leq \left(\frac{a\sqrt{6}}{12} \right)^4 = \frac{a^4}{576}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Đáp án B.

Note: Thể tích của khối tứ diện đều cạnh a là $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.



Bất đẳng thức Cauchy áp dụng cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) là $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Câu 172. [#NTAD].

Tính giá trị biểu thức: $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{9\pi}{12} + \cos \frac{9\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12}$.

A. $\frac{3}{4}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. 1.

D. -1.

Giải

Áp dụng công thức nhân ba, ta có: $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

+) Với $x = \frac{\pi}{12}$, ta có: $4 \cos^3 \left(\frac{\pi}{12} \right) - 3 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (1)$.

Nên: $\cos \frac{\pi}{12}$ là nghiệm của phương trình: $4t^3 - 3t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Lập luận tương tự, ta có: $\cos \frac{9\pi}{12}$ và $\cos \frac{17\pi}{12}$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viète, ta có: $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{9\pi}{12} + \cos \frac{9\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{17\pi}{12} = -\frac{3}{4}$.

Đáp án B.

Câu 173. [#NTAD].

Cho $b \neq 0$, giả sử phương trình:

$$x^3 + ax^2 + x + b = 0$$

có ba nghiệm là x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị biểu thức:

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1} \right) \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right) \left(x_3 - \frac{1}{x_3} \right) + \left(x_3 - \frac{1}{x_3} \right) \left(x_1 - \frac{1}{x_1} \right).$$

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Giải

Theo định lý Viète, ta có:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1.$$

Đặt: $x_1 = \tan \alpha$; $x_2 = \tan \beta$; $x_3 = \tan \chi$, thế thì ta có:

$$\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \chi + \tan \alpha \tan \chi = 1.$$

Suy ra: $\alpha + \beta + \chi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$, suy ra: $2\alpha + 2\beta + 2\chi = \pi + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Vì: $2\alpha + 2\beta + 2\chi = \pi + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. Ta có:

$$\cot 2\alpha \cot 2\beta + \cot 2\beta \cot 2\chi + \cot 2\alpha \cot 2\chi = 1.$$

Đề ý rằng: $\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$.

Suy ra:

$$(\tan \alpha - \cot \alpha)(\tan \beta - \cot \beta) + (\tan \beta - \cot \beta)(\tan \chi - \cot \chi) + (\tan \alpha - \cot \alpha)(\tan \chi - \cot \chi) = 4$$

$$\text{Vậy: } \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right) + \left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = 4.$$

Đáp án A.**Câu 174. [#NTAD].**

Với mọi a, b, c , cho ba bất đẳng thức sau:

$$(i) \quad a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b;$$

$$(ii) \quad a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b);$$

$$(iii) \quad \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc;$$

Có bao nhiêu bất đẳng thức có thể xảy ra?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Giải

$$(i) a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R} \\ (a-1)^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R} \\ (b-1)^2 \geq 0, \forall b \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (1) \\ a^2 + 1 \geq 2a, \forall a \in \mathbb{R} \quad (2) \\ b^2 + 1 \geq 2b, \forall b \in \mathbb{R} \quad (3) \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức (1), (2), (3), ta được:

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2(ab + a + b), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Hay: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra ta có điều phải chứng minh.

Dễ thấy dấu "=" xảy ra khi dấu "=" xảy ra đồng thời tại ba bất đẳng thức (1), (2), (3).

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} a - b = 0 \\ a - 1 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

$$(ii) a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R} \\ (a-2)^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R} \\ (b-2)^2 \geq 0, \forall b \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (1) \\ a^2 + 4 \geq 4a, \forall a \in \mathbb{R} \quad (2) \\ b^2 + 4 \geq 4b, \forall b \in \mathbb{R} \quad (3) \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức (1), (2), (3), ta được:

$$2a^2 + 2b^2 + 8 \geq 2ab + 4(a + b), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Hay: $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b), \forall a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra ta có điều phải chứng minh.

Dễ thấy dấu "=" xảy ra khi dấu "=" xảy ra đồng thời tại ba bất đẳng thức (1), (2), (3).

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} a - b = 0 \\ a - 2 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2.$$

$$(iii) \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc.$$

Giả sử: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$ (*) đúng.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc \Leftrightarrow a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 4ac - 8bc \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + (2b)^2 + (2c)^2 + 2a \cdot (-2b) + 2ac + 2(-2b) \cdot 2c \geq 0 \Leftrightarrow (a - 2b + 2c)^2 \geq 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

(Luôn đúng).

Vậy: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a - 2b + 2c = 0 \Rightarrow a = 2(b - c).$

Đáp án B.

Câu 175. [#NTAD].

Cho hàm số $y = \frac{\ln(2x - a) - 2m}{\ln(2x - a) + 2}$ (m là tham số thực), trong đó x, a là các số thực thỏa

mãn đẳng thức

$$\log_2(x^2 + a^2) + \log_{\sqrt{2}}(x^2 + a^2) + \log_{\sqrt[3]{2}}(x^2 + a^2) + \dots + \log_{\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{n \text{ can}}}(x^2 + a^2) - (2^{n+1} - 1)(\log_2 xa + 1) = 0$$

(với n là số nguyên dương). Gọi S là tập hợp các giá trị của m thỏa mãn $\max_{[1, e^2]} y = 1$. Số

phần tử của S là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x^2 + a^2 > 0 \\ xa > 0 \end{cases}$$

$$\log_2(x^2 + a^2) + \log_{\sqrt{2}}(x^2 + a^2) + \log_{\sqrt[3]{2}}(x^2 + a^2) + \dots + \log_{\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{n \text{ can}}}(x^2 + a^2) - (2^{n+1} - 1)(\log_2 xa + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + a^2) + 2\log_2(x^2 + a^2) + 2^2\log_2(x^2 + a^2) + \dots + 2^n\log_2(x^2 + a^2) - (2^{n+1} - 1)(\log_2 xa + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) \log_2 (x^2 + a^2) - (2^{n+1} - 1)(\log_2 xa + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^{n+1} - 1) \log_2 (x^2 + a^2) - (2^{n+1} - 1)(\log_2 xa + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^{n+1} - 1) [\log_2 (x^2 + a^2) - (\log_2 xa + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + a^2) - \log_2 xa - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 + a^2}{xa} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + a^2 = 2xa$$

$$\Leftrightarrow x = a$$

$$\text{Xét } y = \frac{\ln x - 2m}{\ln x + 2}, x \in [1, e^2]$$

$$t = \ln x \Rightarrow t \in [0, 2] \Rightarrow y = \frac{t - 2m}{t + 2}, t \in [0, 2] \Rightarrow y' = \frac{2 + 2m}{(t + 2)^2}$$

$$\text{TH1: } 2 + 2m = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\text{Max}_{x \in [1, e^2]} y = \text{Max}_{t \in [0, 2]} y = 1$$

$$\Rightarrow m = -1 \text{ thỏa mãn}$$

$$\text{TH2: } 2 + 2m > 0 \Rightarrow m > -1 \Rightarrow \text{hàm số đồng biến}$$

$$\Rightarrow \text{Max}_{t \in [0, 2]} y = y(2) = \frac{2 - 2m}{4} = 1 \Rightarrow m = -1 (\text{Loại})$$

$$\text{TH2: } 2 + 2m < 0 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến}$$

$$\Rightarrow \text{Max}_{t \in [0, 2]} y = y(0) = -m = 1 \Rightarrow m = -1 (\text{Loại})$$

$$\text{Vậy } m = -1 \text{ thỏa mãn}$$

Đáp án B.

Câu 176. [#NTAD].

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối

chóp $S.ABCD$ là $4\pi(dm^2)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

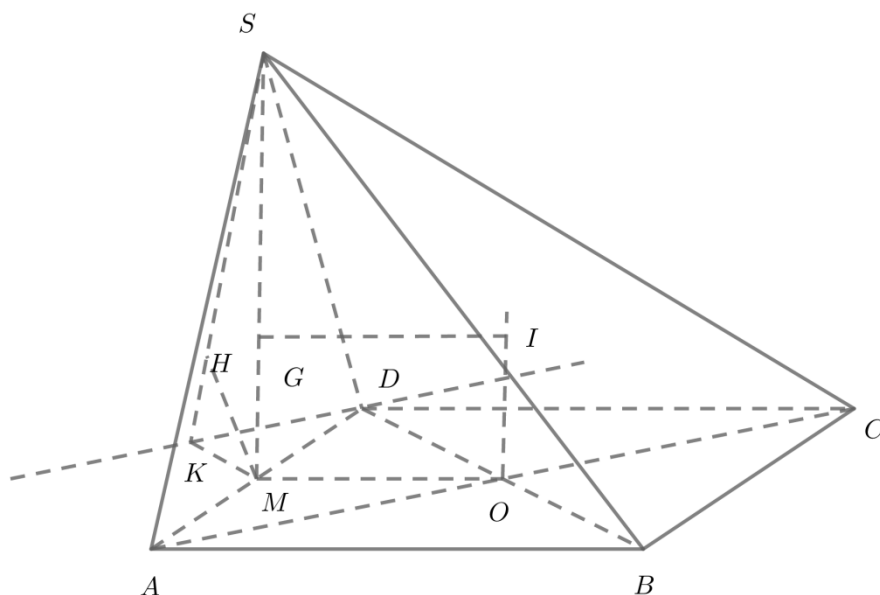
A. $\frac{2}{7}dm$.

B. $\frac{3}{7}dm$.

C. $\frac{4}{7}dm$.

D. $\frac{6}{7}dm$.

Phương pháp: Xác định cạnh của đáy trước.



Cách giải: Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp là $4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 1$

Gọi O là tâm của đáy, I là tâm mặt cầu, G là tâm tam giác SAD, M là trung điểm AD.

Để thấy I nằm đồng thời trên trục của tam giác SAD và trục của đáy.

Gọi cạnh đáy là x ta có $SG = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ và $GI = \frac{x}{2}$, từ đó ta có phương trình

$$IS^2 = IG^2 + GS^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{84}}{7}$$

Qua D dựng đường thẳng d song song với AC. Gọi K là hình chiếu của M trên d, H là hình chiếu của M trên SD. Suy ra $MH \perp (d, SD)$.

$$\text{Ta có: } d(SD, AC) = d(AC, (d, SD)) = d(A, (d, SD)) = 2d(M, (d, SD)) = 2MH = 2\sqrt{\frac{MK^2 \cdot MS^2}{MK^2 + MS^2}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{6}{7}$$

Đáp án D.**Câu 177. [#NTAD].**

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; 0 \leq a \leq 4, b \geq 0$). Đặt hàm số $f(x) = ax^2 + bx - 2$. Biết

$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4}$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ thuộc khoảng nào dưới đây

- A. (4; 4,3). B. (4,3; 4,5). C. (4,5; 4,7). D. (4,7; 5).

Giải**Phương pháp :** Đánh giá.

Cách giải : Ta có : $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{16} + \frac{b}{4} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow a + 4b \leq 12 \Leftrightarrow b \leq \frac{12-a}{4}$

$|z|^2 = a^2 + b^2 \leq a^2 + \left(\frac{12-a}{4}\right)^2 = \frac{17a^2 - 24a + 144}{16} \leq 20$. Dấu "=" xảy ra khi $a = 4; b = 2$.

Đáp án B.**Câu 178. [#NTAD].**

Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

- A. $S_{100} = -14650$. B. $S_{100} = -14400$. C. $S_{100} = -14250$. D. $S_{100} = -15450$.

Giải

Sử dụng tính chất của cấp số cộng và công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng

là $S_n = n.u_1 + \frac{n(n-1)}{2}.d$.

Cách giải :

Ta có : $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = u_2^2 + (u_2 - 3)^2 + (u_2 - 6)^2 = 3u_2^2 - 18u_2 + 45 = 3(u_2 - 3)^2 + 18 \geq 18$

Dấu "=" xảy ra khi $u_2 = 3 \Leftrightarrow u_1 = u_2 - d = 3 + 3 = 6$.

Vậy tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

$$S_{100} = 100.6 + \frac{100.99}{2} \cdot (-3) = -14250.$$

Đáp án C.

Câu 179. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x (8\cos^3 x + 1)}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \text{ được biểu}$$

diễn dưới dạng $I = \frac{a}{b} \ln \frac{c}{d}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và các phân số $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản.

Tính $S = a^3 + ab - c + d$.

A. $S = 6$.

B. $S = 3$.

C. $S = 5$.

D. $S = 7$.

Giải

Phương pháp: Lấy tích phân hai vế của:

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x (8\cos^3 x + 1)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cách giải: Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x (8\cos^3 x + 1)} dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx - \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sin x \cos^2 x}{\cos^3 x (8\cos^3 x + 1)} dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) d\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos^3 x)}{\cos^3 x (8\cos^3 x + 1)} \\ \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 f(t) dt - \frac{1}{6} \int_1^{\frac{1}{8}} \frac{dt}{t(8t+1)} \\ \Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= -\frac{1}{6} \int_1^{\frac{1}{8}} \frac{dt}{t(8t+1)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = -\frac{2}{3} \int_1^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{8t} - \frac{1}{8t+1} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = -\frac{1}{12} \left(\ln \frac{|t|}{|8t+1|} \right) \Big|_1^{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{12} \left(\ln \frac{1}{16} - \ln \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{12} \ln \frac{16}{9}$$

Suy ra: $a=1; b=12; c=16; d=9 \Rightarrow S = a^3 + ab - c + d = 6$.

Đáp án A.

Câu 180. [#NTAD].

Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-3)^8}{(2x+1)^{10}} dx$ ta được

A. $\frac{3^{18} + 2^9}{63 \cdot 3^9}.$

B. $-\frac{3^{18} + 2^9}{63 \cdot 3^9}.$

C. $\frac{3^{18} - 2^9}{63 \cdot 3^9}.$

D. $\frac{-3^{18} + 2^9}{63 \cdot 3^9}.$

Giải

Phương pháp: Phương pháp đổi biến.

Cách giải: Ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{(x-3)^8}{(2x+1)^{10}} dx = \int_0^1 \frac{(x-3)^8}{(2x+1)^8} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{7} \int_0^1 \left(\frac{x-3}{2x+1} \right)^8 \cdot \frac{7}{(2x+1)^2} dx$$

$$I = \frac{1}{7} \int_0^1 \left(\frac{x-3}{2x+1} \right)^8 d\left(\frac{x-3}{2x+1} \right) = \frac{1}{7} \frac{\left(\frac{x-3}{2x+1} \right)^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{63} \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^9 - (-3)^9 \right) = \frac{3^{18} - 2^9}{63 \cdot 3^9}$$

Đáp án C.

Câu 181. [#NTAD].

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$ và S_1, S_2 là diện tích của các phần được gạch chéo như hình vẽ.

Tính $S_1^2 + S_2^2$.

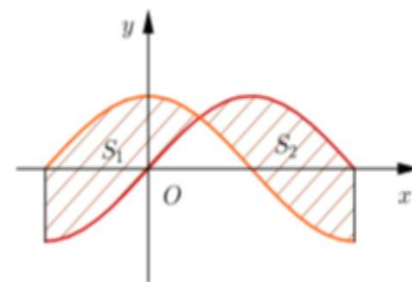
A. $S_1^2 + S_2^2 = 6 + 4\sqrt{2}.$

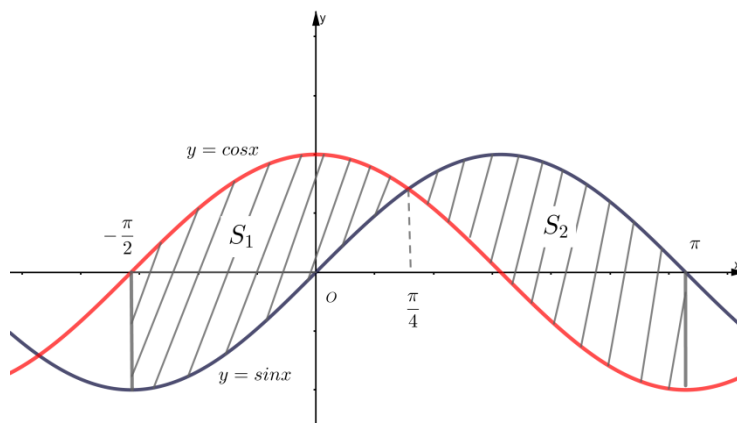
B. $S_1^2 + S_2^2 = 11 + 2\sqrt{2}.$

C. $S_1^2 + S_2^2 = 11 - 2\sqrt{2}.$

D. $S_1^2 + S_2^2 = 6 + 2\sqrt{2}.$

Giải





Phương pháp: Dùng kiến thức về đồ thị hàm $y = \sin x$, $y = \cos x$ suy ra các cận.

Cách giải: Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ ta có dữ liệu như hình vẽ.

$$\text{Vậy } S_1^2 + S_2^2 = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right)^2 + \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \right)^2 = 6 + 4\sqrt{2}.$$

Đáp án A.

Câu 182. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(0) = 1, \int_0^1 (1-x)^2 f'(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Giá trị nhỏ nhất của tích phân bằng } \int_0^1 f^2(x) dx \text{ bằng?}$$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. Đáp án khác.

Giải

Phương pháp: Áp dụng bất đẳng thức tích phân Holder.

$$\int_a^b |f \cdot g| dx \leq \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \text{ với } p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dấu = xảy ra khi tồn tại số thực m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m|f|^p = n|g|^q$.

Cách giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (1-x)^2 \\ v = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2(1-x) dx \\ v = f'(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 (1-x)^2 f'(x) dx = (1-x)^2 f(x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 (1-x) f(x) dx = -1 + 2 \int_0^1 (1-x) f(x) dx$$

$$\text{Do đó: } \int_0^1 (1-x) f(x) dx = \frac{2}{3}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức tích phân Holder với } p = q = 2: \left(\int_a^b f \cdot g dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 (1-x)^2 dx \geq \left(\int_0^1 (1-x) f(x) dx \right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \geq \frac{4}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi tồn tại số thực m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $mf^2(x) = n(1-x)^2$.

Đáp án D.

Câu 183. [#NTAD].

Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại số nguyên $k (1 \leq k \leq n-1)$ sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$. Tính $n = ?$.

A. 10.

B. 11.

C. 20.

D. 22.

Giải

Phương pháp: Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton.

Cách giải: Hệ số của số hạng tổng quát của khai triển trên là $a_k = C_n^k$

Vậy: $(0 < k < n)$

$$\begin{aligned} \frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24} &\Leftrightarrow \frac{C_n^{k-1}}{2} = \frac{C_n^k}{9} = \frac{C_n^{k+1}}{24} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}{2} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{9} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{24} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2(n-k+1)(n-k)} = \frac{1}{9k(n-k)} = \frac{1}{24k(k+1)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-k+1)(n-k) = 9k(n-k) \\ 9k(n-k) = 24k(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n-11k = -2 \\ 9n-33k = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=10 \\ k=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Đáp án A.**Câu 184. [#NTAD].**

Biết rằng tồn tại các số nguyên a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất đều là các số nguyên và tập giá trị của hàm số đã cho chỉ có đúng 6 số nguyên. Giá trị của $a^2 + 2b^2$ bằng

A. 36.

B. 34.

C. 41.

D. 25.

Giải

Bằng cách sử dụng điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình, chúng ta có: Khi $a = 0$ thì hàm số chỉ đạt giá trị lớn nhất (khi $b < 0$) hoặc chỉ đạt giá trị nhỏ nhất (khi $b > 0$). Còn

khi $a \neq 0$ thì $\frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \leq y \leq \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

Do đó, $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ và $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

Vì $\min_{\mathbb{R}} y; \max_{\mathbb{R}} y$ là các số nguyên nên tập giá trị của hàm số đã cho chỉ có đúng 6 số nguyên khi và chỉ khi $\max_{\mathbb{R}} y - \min_{\mathbb{R}} y = 5 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$.

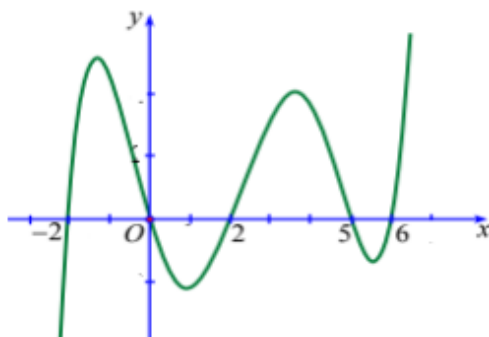
Suy ra, $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{b-5}{2}$ và $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{b+5}{2}$.

Theo giả thiết, thì b là số nguyên lẻ và $a \neq 0$ nên $a^2 = 16, b^2 = 9$.

Do đó, $a^2 + 2b^2 = 34$.

Đáp án B.**Câu 185. [#NTAD].**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Phương trình $f(x) = f(0)$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$.



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Giải

Phương pháp: Lập bảng biến thiên của $f(x)$ và sử dụng diện tích để đánh giá các giá trị của $f(x)$.

Cách giải:

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		2		5		6		
y'	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
y											

Ta có: $\int_0^5 f'(x)dx = f(5) - f(0) > 0 \Rightarrow f(5) > f(0)$.

$\int_0^6 f'(x)dx = f(6) - f(0) > 0 \Rightarrow f(6) > f(0)$

Vậy trên đoạn $[-2; 6]$ phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm

Đáp án B.

Câu 186. [#NTAD].

Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = m^2 \left(\frac{x^5}{5} - 16x \right) + 3m \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) - 7x^2 + 28x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $-\frac{3}{8}$.

B. -2 .

C. $-\frac{7}{8}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Giải

Cách giải: Ta có

$$\begin{aligned} y' &= m^2(x^4 - 16) + 3m(x^2 - 4) - 14(x - 2) \\ &= (x - 2)(m^2(x + 2)(x^2 + 4) + 3m(x + 2) - 14) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } g(x) = m^2(x + 2)(x^2 + 4) + 3m(x + 2) - 14$$

Ta thấy:

Nếu $g(x)$ có nghiệm khác 2 thì y' đổi dấu khi x đi qua $x = 2 \Rightarrow$ không thể có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó để $y' \geq 0, \forall x$ thì một điều kiện cần là $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 2$ hay $g(2) = 0$

$$\Leftrightarrow 32m^2 + 12m - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{-7}{8} \end{cases}$$

Thử lại:

$$+) m = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{4} \cdot (x-2)^2 (x^2 + 4x + 18) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (TM)}$$

$$+) m = \frac{-7}{8} \Rightarrow y' = \frac{1}{64} (x-2)^2 (49x^2 + 196x + 420) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow m = \frac{-7}{8} \text{ (TM)} \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-7}{8} \right\}$$

Suy ra: Tổng cần tìm là: $S = -\frac{3}{8}$.

Đáp án A.

Câu 187. [#NTAD].

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$ tính $f^2(2)$

A. $f^2(2) = \ln 2 + 1.$

B. $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}.$

C. $f^2(2) = 2 \ln 2 + 2.$

D. $f^2(2) = \sqrt{2 \ln 2 + 2}.$

Giải

$$\text{Ta có } [xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)] \Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f(x)f'(x)]' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f'(x).f(x) = x + \frac{1}{x} + C_1$$

Do $f(1) = f'(1) = 1$ nên ta có $C_1 = -1$.

$$\text{Do đó, } f'(x).f(x) = x + \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x - x\right)'$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 2 \ln x - 2x + C_2.$$

Mà $f(1) = 1$ nên ta có $C_2 = 2$.

$$\text{Vậy } f^2(x) = x^2 + 2 \ln x - 2x + 2 \Rightarrow f^2(x) = 2 \ln x + 2.$$

Đáp án C.

Tổng quát: Đặc điểm chung của các bài toán này là đi từ khai thác đạo hàm của một thương, tích các hàm hoặc đạo hàm của hàm hợp kết hợp với tính chất tích phân hàm lượng giác trên một chu kì. Ta có thể nêu một số dạng tổng quát sau:

1) Cho trước các hàm $g(x), u(x), v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$,

$g(x) \neq 0, \forall x \in [a; b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn:

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x). \text{ Khi đó,}$$

$$(f(x)g'(x)) = (u(x)v(x))' \Rightarrow f(b) - f(a) = \frac{u(b)v(b)}{g(b)} - \frac{u(a)v(a)}{g(a)}$$

2) Cho trước các hàm $g(x), u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$, $g(x) \neq 0, \forall x \in [a; b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn: $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = u'(x)g^2(x)$

$$\text{Khi đó, } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = u'(x) \Rightarrow f(b) - f(a) = u(b)g(b) - u(a)g(a)$$

3) Cho trước các hàm $g(x), u(x), v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thỏa mãn: $u'(x)f'(x)f(u(x)) = v'(x)g'(x)g(v(x))$. Khi đó,

$$(f(u(x)))' = (g(v(x)))' \Rightarrow f(u(b)) - f(u(a)) = g(v(b)) - g(v(a)).$$

Câu 188. [#NTAD].

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn

$x_1 \in (-1; 0); x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Giải

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ nên $a < 0$.

Vì $x_1 \in (-1; 0); x_2 \in (1; 2)$ nên $|x_2| > |x_1|$. Do đó ta có $x_1 x_2 < 0$ và

Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 x_2 < 0$ và

$$x_1 + x_2 > 0. \text{ Suy ra } S = -\frac{2b}{3a} > 0 \text{ và } P = \frac{c}{3a} < 0.$$

Do đó $b > 0$ và $c > 0$ (do $a < 0$).

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Đáp án A.

Note:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$.

+ Nếu $a > 0$, đồ thị hàm số có dạng “dấu ngã”, hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$;

+ Nếu $a < 0$, đồ thị hàm số có dạng “dấu đồng dạng”, hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$.

Câu 189. [#NTAD].

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 4. Nếu các điểm có cùng xác suất được chọn như nhau thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là

A. $\frac{13}{81}$.

B. $\frac{15}{81}$.

C. $\frac{13}{32}$.

D. $\frac{11}{16}$.

Giải

Gọi điểm $M(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in \mathbb{Z}; |x| \leq 4; |y| \leq 4$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \\ y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \end{cases}$$

Khi đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9 \cdot 9 = 81$.

Gọi A là biến cố “Chọn được một điểm có khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2”. Gọi điểm $N(a; b)$ là điểm thỏa mãn $a, b \in \mathbb{Z}; ON \leq 2$.

$$\text{Suy ra } \sqrt{a^2 + b^2} \leq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4. \text{ Từ đó ta có } \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ a \in \{0; \pm 1; \pm 2\} \\ b^2 \leq 4 - a^2 \end{cases}$$

+ Nếu $a = 0$ (có 1 cách chọn). Suy ra $b \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$ và có 5 cách chọn b . Có $1.5 = 5$ cách chọn điểm N thỏa mãn trường hợp này.

+ Nếu $a = \pm 1$ (có 2 cách chọn a). Suy ra $b^2 \leq 3$ hay $b \in \{0; \pm 1\}$, có 3 cách chọn b .

Từ đó có $2.3 = 6$ cách chọn điểm N thỏa mãn trường hợp này.

+ Nếu $a = \pm 2$ (có 2 cách chọn a). Suy ra $b^2 \leq 0 \Rightarrow b = 0$, có 1 cách chọn b . Từ đó có $2.1 = 2$ cách chọn điểm N thỏa mãn trường hợp này.

Vậy số phần tử thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 5 + 6 + 2 = 13$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{13}{81}.$$

Đáp án A.

Note: Do $a^2 + b^2 \leq 4 \Rightarrow a^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$. Mà $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$.

$$\text{Từ đó ta mới suy ra } \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ a \in \{0; \pm 1; \pm 2\} \\ b^2 \leq 4 - a^2 \end{cases}$$

Câu 190. [#NTAD].

Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần

thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2 \text{ bằng}$$

$$\text{A. } P_{\min} = \frac{3\sqrt{1105}}{11}$$

$$\text{B. } P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{C. } P_{\min} = \frac{3\sqrt{1105}}{13}$$

$$\text{D. } P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}$$

Giải

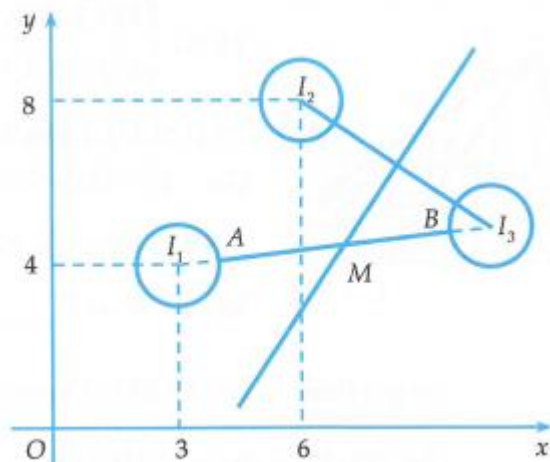
Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1, 2z_2, z$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Do $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ nên quỹ tích điểm M_1 là đường tròn (C_1) có tâm $I_1(3; 4)$ và bán kính

$$R = 1$$

Do $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2z_2 - 6 - 8i| = 1$ nên quỹ tích điểm M_2 là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(6;8)$ và bán kính $R=1$

Ta có điểm $M(a;b)$ thỏa mãn $3a - 2b = 12$ nên quỹ tích điểm M là đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$



Khi đó $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2 = MM_1 + MM_2 + 2$

Gọi (C_3) là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_2) qua đường thẳng d . Ta tìm được tâm của (C_3) là $I_3\left(\frac{138}{13}; \frac{64}{13}\right)$ và bán kính $R=1$

Khi đó $P = MM_1 + MM_2 + 2 \geq MM_1 + MM_3 + 2 \geq AB + 2$ với $M_3 \in (C_3)$ và A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng I_1I_3 với hai đường tròn $(C_1), (C_3)$ (quan sát hình vẽ).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M_1 \equiv A$ và $M_3 \equiv B$

Vậy $P_{\min} = AB + 2 = I_1I_3 - 2R + 2 = I_1I_3 = \frac{3\sqrt{1105}}{13}$.

Đáp án C.

Note:

*Số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn trên hệ trục tọa độ Oxy là $M(x; y)$.

* Nếu số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = k (k \in \mathbb{R})$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = k$.

Câu 191. [#NTAD].

Cho $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$?

- A. $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$. B. $60 - 20\sqrt{10}$. C. $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$. D. $60 + 20\sqrt{10}$.

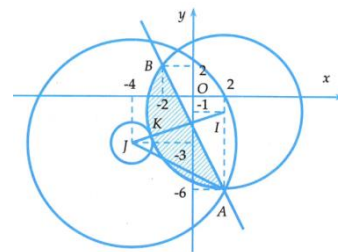
Giải

Từ giả thiết ta có:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền mặt phẳng (T)

thỏa mãn $\begin{cases} 2x + y + 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \end{cases}$ (miền tô đậm trong hình vẽ bên). Gọi



A, B là các giao điểm của đường thẳng $2x + y + 2 = 0$ và đường tròn (C') : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. Ta tìm được $A(2; -6)$ và $B(-2; 2)$.

Ta có :

$$P = x^2 + y^2 + 8x + 6y \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = P + 25.$$

Gọi (C) là đường tròn tâm $J(-4; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{P + 25}$

Đường tròn (C) cắt miền (T) khi và chỉ khi

$$JK \leq R \leq JA \Leftrightarrow IJ - IK \leq R \leq JA \Leftrightarrow 2\sqrt{10} - 5 \leq \sqrt{P + 25} \leq 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 40 - 20\sqrt{10} \leq P \leq 20. \text{ Vậy}$$

$$M = 20, m = 40 - 20\sqrt{10} \Rightarrow M + m = 60 - 20\sqrt{10}.$$

Đáp án B.

Note:

Tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn

$2x + y + 2 \leq 0$ là một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d: 2x + y + 2 = 0$ không chứa điểm $O(0; 0)$ (kể cả bờ là đường thẳng d). Tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25$ là hình tròn $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. Hợp của hai miền này chính là miền mặt phẳng (T) được tô đậm trong hình vẽ.

Câu 192. [#NTAD].

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| + |\bar{z} + 5 + i| = 2\sqrt{65}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$ đạt

được khi $z = a + bi$ với a, b là các số thực dương. Giá trị của $2b + 3a$ bằng

A. 19.

B. 16.

C. 24.

D. 13.

Giải

Cách 1: (Sử dụng kiến thức Hình học)

Ta có $|z - 1 + 3i| + |\bar{z} + 5 + i| = 8 \Leftrightarrow |z - (1 - 3i)| + |z - (-5 + i)| = 8$.

Gọi M, A, B, I lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z, 1 - 3i, -5 + i, -2 - i$.

Khi đó $A(1; -3), B(-5; 1)$ và $I(-2; -1)$.

Có I là trung điểm của đoạn thẳng AB và $MA + MB = 2\sqrt{65}$ và $MI = |z + 2 + i|$.

Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên

$$MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - 13.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$MA^2 + MB^2 \geq 2MA \cdot MB \Leftrightarrow 2(MA^2 + MB^2) \geq (MA + MB)^2$$

Kết hợp với giả thiết, suy ra $MA^2 + MB^2 \geq 130$.

Do đó $MI^2 \geq 65 - 13 = 52 \Leftrightarrow MI \geq 2\sqrt{13}$.

Đẳng thức xảy ra khi $MA = MB = \sqrt{65}$ hay MI là đường trung trực của đoạn AB và $MI = 2\sqrt{13}$. Dễ dàng tìm được $M(-6; -7)$ hoặc $M(2; 5)$. Theo giả thiết thì ta lấy $M(2; 5)$ ứng với $z = 2 + 5i$. Do đó $a = 2, b = 5$ và $2b + 3a = 16$.

Cách 2: (Sử dụng kiến thức Đại số)

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Từ giả thiết, ta có $|(x-1) + (y+3)i| + |(x+5) - (y-1)i| = 2\sqrt{65}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{65}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xky, ta có

$$2\sqrt{65} = 1 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} + 1 \cdot \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2}$$

$$\leq \sqrt{2[(x-1)^2 + (y+3)^2 + (x+5)^2 + (y-1)^2]}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{65} \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 18} = 2\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} + 13$$

$$\Leftrightarrow 52 \leq (x+2)^2 + (y+1)^2 \Rightarrow 2\sqrt{13} \leq |z + 2 + i|.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x-1)^2 + (y+3)^2 = (x+5)^2 + (y-1)^2 = 65$

$\Leftrightarrow (x; y) = (-6; -7)$ hoặc $(x; y) = (2; 5)$. Theo giả thiết, ta lấy $a = 2, b = 5$.

Đáp án B.

Note:

Từ cách làm của câu này, chúng ta có kết quả tổng quát sau:

Cho hai số phức z_1, z_2 khác nhau và các số phức z thỏa mãn: $|z - z_1| + |z - z_2| = d$, trong đó

$d > |z_1 - z_2|$. Khi đó $\left| z - \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2} \sqrt{d^2 - |z_1 - z_2|^2}$.

Trường hợp $d = |z_1 - z_2|$ tương tự

Câu 193. [#NTAD].

Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$.

A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C.$

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C.$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C.$

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C.$

Giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{dx}{x^9 + 3x^5} = \int \frac{dx}{x^5(x^4 + 3)} = \frac{1}{3} \int \frac{(x^4 + 3) - x^4}{x^5(x^4 + 3)} dx$

$$= \frac{1}{3} \left(\int \frac{dx}{x^5} - \int \frac{dx}{x(x^4 + 3)} \right) = \frac{1}{3} \left(\int \frac{dx}{x^5} - \frac{1}{3} \int \frac{(x^4 + 3) - x^4}{x(x^4 + 3)} dx \right)$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^5} - \frac{1}{9} \left[\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^3 dx}{(x^4 + 3)} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^5} - \frac{1}{9} \left[\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 + 3)}{(x^4 + 3)} \right]$$

$$= -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C.$$

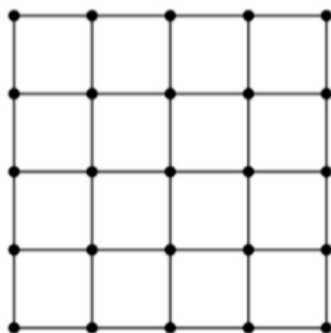
Đáp án B.**Câu 194. [#NTAD].**

Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ có tọa độ là các số nguyên thỏa mãn $0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4$. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm thuộc S . Xác suất để ba điểm được chọn là ba đỉnh một tam giác bằng?

- A. $\frac{129}{140}$. B. $\frac{217}{230}$. C. $\frac{537}{575}$. D. $\frac{37}{40}$.

Giải

Vì $0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4; x, y \in \mathbb{Z}$ do vậy mỗi số x, y có 5 cách chọn nên tập S có tất cả $5 \times 5 = 25$ điểm.



Số cách chọn 3 trong 25 điểm là C_{25}^3 .

Ba điểm được chọn là ba đỉnh một tam giác khi và chỉ khi chúng không thẳng hàng. Tìm tìm số cách chọn ra bộ ba điểm thẳng hàng.

TH1: Ba điểm này cùng thuộc đường kẻ ngang hoặc kẻ dọc có $C_5^1 C_5^3 + C_5^1 C_5^3$;

TH2: Ba điểm này cùng thuộc đường chéo qua 5 điểm có $C_2^1 C_5^3$;

TH3: Ba điểm này cùng thuộc đường chéo qua đúng 4 điểm có $C_4^1 C_4^3$;

TH4: Ba điểm này cùng thuộc đường chéo qua đúng 3 điểm $C_4^1 C_3^3$.

TH5: Ba điểm này cùng thuộc đường chéo hình chữ nhật kích thước 2×4 có 12 đoạn.

Vậy có tất cả $C_5^1 C_5^3 + C_5^1 C_5^3 + C_2^1 C_5^3 + C_4^1 C_4^3 + C_4^1 C_3^3 + 12 = 152$ cách chọn ra bộ ba điểm thẳng hàng.

Số cách chọn ra ba điểm không thẳng hàng là $C_{25}^3 - 152 = 2148$.

Xác suất cần tính bằng $\frac{2148}{C_{25}^3} = \frac{537}{575}$.

Đáp án C.

Câu 195. [#NTAD].

Cho $a > 1$. Biết khi $a = a_0$ thì bất phương trình $x^a \leq a^x$ đúng với mọi $x \in (1; +\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $1 < a_0 < 2$. **B.** $e < a_0 < e^2$. **C.** $2 < a_0 < 3$. **D.** $e^2 < a_0 < e^3$.

Giải

Ta có: $ycbt \Leftrightarrow x^a \leq a^x, \forall x > 1 \Leftrightarrow \ln(x^a) \leq \ln(a^x), \forall x > 1$

$$\Leftrightarrow a \ln x \leq x \ln a, \forall x > 1 \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln x}{x}, \forall x > 1 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ta có

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Vậy $(1) \Leftrightarrow f(a) \geq f(x), \forall x > 1 \Leftrightarrow f(a) = \frac{\ln a}{a} \geq \max_{(1; +\infty)} f(x) = f(e) = \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow a = e$.

Đáp án C.

Câu 196. [#NTAD].

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$

và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a; b; c)$ ($a > 0$) nằm trên đường thẳng d

sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\angle AMB = 60^\circ, \angle BMC = 90^\circ, \angle CMA = 120^\circ$. Tính $a^3 + b^3 + c^3$

A. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$.

B. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{173}{9}$.

C. $a^3 + b^3 + c^3 = -8$.

D. $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{23}{9}$.

Giải

Gọi O là tâm mặt cầu. Đặt $MA = x$.

Do A, B, C là các tiếp điểm kẻ từ M đến mặt cầu nên ta có $MA = MB = MC = x$.

Từ giả thiết ta có: $AB = x, BC = x\sqrt{2}, AC = x\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Gọi H là trung điểm AC , K là trung điểm AB . Ta có

$$\begin{cases} AB \perp MK \\ AB \perp HK \end{cases} \Rightarrow AB \perp MH; MH \perp AC \Rightarrow MH \perp (ABC)$$

Suy ra M, H, O thẳng hàng. MC là tiếp tuyến nên $MC \perp OC$.

$$\text{Khi đó: } CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OC = R = \sqrt{27}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $\triangle OMC$, ta có:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{27} = \frac{4}{3x^2} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow MO = 6$$

Mà $M \in d \Rightarrow M(t-1; t-2; t+1)$, $O(1; 2; -3)$ nên

$$(t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

Đáp án A.**Câu 197. [#NTAD].**

Cho a, b, x, y, z là các số phức thỏa mãn: $a^2 - 4b = 16 + 12i, x^2 + ax + b + z = 0$,

$y^2 + ay + b + z = 0, |x - y| = 2\sqrt{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$.

- A.** $M + m = 10$. **B.** $M + m = 28$. **C.** $M + m = 28$. **D.** $M + m = 6\sqrt{3}$.

Giải

$$\text{Từ } \begin{cases} x^2 + ax + b + z = 0 \\ y^2 + ay + b + z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^2 - y^2) + a(x - y) = 0 \Rightarrow x + y + a = 0 \text{ (do } x - y \neq 0).$$

Cũng từ trên suy ra,

$$x^2 + y^2 + a(x + y) + 2b + 2z = 0 \Rightarrow \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} - a^2 + 2b + 2z = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = a^2 - 4b - 4z \Rightarrow |x - y|^2 = |4z - (16 + 12i)| \Rightarrow |z - 4 + 3i| = 3.$$

Vậy điểm M_0 biểu diễn z nằm trên đường tròn tâm $I(4;3)$, bán kính $R=3$.

$$OM_0 - R \leq |z| = OM \leq OM_0 + R \Leftrightarrow 2 \leq |z| \leq 8 \Rightarrow M=8; m=2.$$

Vậy $M+m=10$.

Đáp án A.

Câu 198. [#NTAD].

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| -x^2 + x + 4 + \sqrt{4-x^2} - \sqrt{(x+1)(y+1)} + a \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10;10]$ để $M \leq 2m$.

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Giải

$$\text{Ta có: } x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3 + x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}, f'(t) = 3t^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình (1) trở thành } f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow x = \sqrt{(x+1)(y+1)}$$

$$\text{Khi đó: } P = \left| 4 - x^2 + \sqrt{4-x^2} + a \right|.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4-x^2}, \text{ điều kiện: } t \in [0;2].$$

$$\text{Xét } f(t) = t^2 + t + a \Rightarrow a \leq f(t) \leq a+6, P = |f(t)|$$

* Nếu $a > 0$ thì $M = a+6; m = a$

$$M \leq 2m \Leftrightarrow a+6 \leq 2a \Leftrightarrow a \geq 6 \Rightarrow a \in \{6;7;8;9;10\} \text{ do } a \in \mathbb{Z}, a \in [10;10]$$

* Nếu $a+6 < 0$ thì $M = -a; m = -(a+6)$

$$M \leq 2m \Leftrightarrow -a \leq -2(a+6) \Leftrightarrow a \leq 12 \text{ (loại).}$$

* Nếu $a \leq 0 \leq a+6$ thì $m = 0, M > 0$ không thỏa mãn điều kiện $M \leq 2m$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện.

Đáp án B.

Câu 199. [#NTAD].

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và đồ thị là (C) . Để tính độ dài l đường cong (C) thì người ta sử dụng công thức $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Hãy tính độ dài đường cong có phương trình $y = \frac{1}{8}x^2 - \ln x$ trên đoạn $[1; 2]$.

- A. $\frac{3}{8} - \ln 2$. B. $\frac{31}{24} - 2 \ln 2$. C. $\frac{3}{8} + \ln 2$. D. $\frac{31}{24} + 2 \ln 2$.

Giải

Ta có: $y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x}$.

Do đó độ dài đường cong cần tính là:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{8}x^2 + \ln x\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

Đáp án C.**Câu 200. [#NTAD].**

Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \frac{(2x^2 + x)\sin x - (x-1)\cos x}{x \sin x + \cos x}$, trục hoành

và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\frac{\pi}{4}$. Biết rằng diện tích của hình phẳng D bằng

$\frac{\pi^2 + 4\pi}{16} + a \ln 2 + b \ln(\pi + 4)$, với a, b là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2a + b = 12$. B. $2a - b = -6$. C. $2a - b = -12$. D. $2a + b = 6$.

Giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2x^2 + x)\sin x - (x-1)\cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2x+1)(x \sin x + \cos x) - 3x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(x \sin x + \cos x)}{x \sin x + \cos x} = \left(x^2 + x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 3 \ln(x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi^2 + 4\pi}{16} + \frac{15}{2} \ln 2 - 3 \ln(\pi + 4). \text{ Suy ra, } a = \frac{15}{2}; b = -3. \text{ Do đó } 2a + b = 12.$$

Đáp án A.**Câu 201. [#NTAD].**

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $C(3;2;3)$, đường cao AH nằm trên đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và đường phân giác trong BD của góc B nằm trên đường thẳng d_2 có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Diện tích tam giác ABC bằng

- A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $4\sqrt{3}$. D. 8.

Giải

+) Do $B \in d_2$ nên $B(1+b; 4-2b; 3+b)$. Suy ra $\overrightarrow{CB} = (b-2; 2-2b; b)$.

d_1 có 1 vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 1; -2)$.

$CB \perp AH \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow B(1; 4; 3)$. Suy ra $\overrightarrow{BC} = (2; -2; 0)$.

+) Do $A \in d_1$ nên $A(2+a; 3+a; 3-2a)$. Suy ra $\overrightarrow{BA} = (a+1; a-1; -2a)$.

d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$.

Vì BD là phân giác trong góc B nên $\cos(\overrightarrow{BC}, \vec{u}_2) = \cos(\vec{u}_2, \overrightarrow{BA})$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \vec{u}_2}{BC} = \frac{\vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{BA}}{BA} \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (a-1)^2 + (-2a)^2} = \sqrt{2}(1-a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ 6a^2 + 2 = 2(1-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ a^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \end{cases}.$$

+) Với $a = 0$ thì $\overrightarrow{BA} = (1; -1; 0) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ nên trường hợp này bị loại.

Với $a = -1$ thì $\overrightarrow{BA} = (0; -2; 2)$ không cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ nên tồn tại tam giác ABC .

Dễ thấy $\overrightarrow{AC} = (2; 0; -2)$ và $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}$ nên diện tích tam giác ABC bằng

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}.$$

Đáp án B.

-----THE END-----