15 DẠNG TOÁN
VD – VDC
ÔN THI THPT MÔN TOÁN

TÍNH XÁC SUẤT BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Câu 1. Cho tập $X=\{0;1;2;4;6;7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số được lập X. Tính xác suất để số được chọn có một chữ số xuất hiện đúng hai lần và các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần.

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{5}{11}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ $X=\{0;1;2;4;6;7\}$. Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega|=5.6^3=1080$.

Gọi A là biến cố cần tìm xác suất. Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Chữ số 0 xuất hiện 2 lần.

Có C_3^2 cách chọn 2 vị trí cho chữ số 0.

Có A_5^2 cách xếp 2 chữ số trong 5 chữ số vào 2 vị trí còn lại.

Suy ra trường hợp này có: $C_3^2.A_5^2=60$ số thỏa mãn.

Trường hợp 2: Chữ số x (khác 0) xuất hiện 2 lần và x ở vị trí hàng nghìn.

Có 5 cách chọn x từ tập X.

Có 3 cách chọn thêm một vị trí nữa cho x.

Có A_5^2 cách xếp 2 chữ số trong 5 chữ số vào 2 vị trí còn lại.

Suy ra trường hợp này có $5.3.A_5^2=300$ số thỏa mãn.

Trường hợp 3: Chữ số x (khác 0) xuất hiện 2 lần và x không nằm ở vị trí hàng nghìn.

Có 5 cách chọn x.

Có C_3^2 cách chọn vị trí cho chữ số x.

Có 4 cách chọn một chữ số (khác 0 và khác x)vào vị trí hàng nghìn.

Có 4 cách chọn một chữ số vào vị trí còn lại.

Suy ra: trường hợp này có $5.4.4.C_3^2=240$ số thỏa mãn.

Do đó, theo quy tắc cộng có $|\Omega_A|=60+300+240=600$.

Vậy xác suất của biến cố A: $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{600}{1080}=\frac{5}{9}$.

Câu 2. Từ một hộp có 4 bút bi màu xanh, 5 bút bi màu đen và 6 bút bi màu đỏ, chọn ngẫu nhiên 5 bút. Xác suất để 5 bút được chọn chỉ có đúng hai màu là

A. $\frac{118}{429}$. **B.** $\frac{460}{1001}$. **C.** $\frac{119}{429}$. **D.** $\frac{272}{1001}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố: " 5 bút được chọn có đúng hai màu".

Ta có $n(\Omega)=C_{15}^5$.

Vì 5 bút được chọn có đúng hai màu nên có 3 trường hợp:

TH1: Có đúng hai màu xanh và đen:

- Chọn 5 bút trong hai màu xanh, đen (có 9 bút), có C_9^5 cách chọn.

- Trong C_9^5 cách chọn 5 bút trên, có C_5^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đen và không có cách chọn nào để cả 5 bút đều màu xanh.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu xanh và đen bằng $C_9^5-C_5^5$.

TH2: Có đúng hai màu đen và đỏ:

- Chọn 5 bút trong hai màu đen, đỏ (có 11 bút), có C_{11}^5 cách chọn.

- Trong C_{11}^5 cách chọn 5 bút trên, có C_5^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đen và C_6^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đỏ.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu đỏ và đen bằng $C_{11}^5 - C_5^5 - C_6^5$.

TH3: Có đúng hai màu đỏ và xanh:

- Chọn 5 bút trong hai màu đỏ, xanh (có 10 bút), có C_{10}^5 cách chọn.

- Trong C_{10}^5 cách chọn 5 bút trên, có C_6^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đỏ và không có cách chọn cả 5 bút đều màu xanh.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu đỏ và xanh bằng $C_{10}^5 - C_6^5$.

Vậy $P(A) = \dfrac{\left(C_9^5 - C_5^5\right) + \left(C_{11}^5 - C_5^5 - C_6^5\right) + \left(C_{10}^5 - C_6^5\right)}{C_{15}^5} = \dfrac{118}{429}$.

Câu 3. Một hộp đựng thẻ được đánh số từ 1, 2, 3,…, 8. Rút ngẫu nhiên hai lần, mỗi lần một thẻ và nhân số ghi trên hai thẻ với nhau, xác suất để tích nhận được là số chẵn là

A. $\dfrac{3}{14}$. **B.** $\dfrac{25}{36}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{14}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 8 \times 7 = 56$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố: "tích nhận được là số lẻ".

$n\left(\overline{A}\right) = 4 \times 3 = 12$.

$\Rightarrow n(A) = 56 - 12 = 44$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{44}{56} = \dfrac{11}{14}$.

Câu 4. Đội thanh niên tình nguyện của một trường THPT gồm 15 HS, trong đó có 4 HS khối 12, 5 HS khối 11 và 6 HS khối 10. Chọn ngẫu nhiên 6 HS đi thực hiện nhiệm vụ. Tính xác suất để 6 HS được chọn có đủ 3 khối.

A. $\dfrac{4248}{5005}$. **B.** $\dfrac{757}{5005}$. **C.** $\dfrac{151}{1001}$. **D.** $\dfrac{850}{1001}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{15}^6 = 5005$.

Gọi A là biến cố: "6 HS được chọn có đủ 3 khối".

Xét các trường hợp của biến cố $\overline{A}$

+ Số cách chọn được 6 HS bao gồm cả khối 10 và 11: $C_{11}^6 - C_6^6$

+ Số cách chọn được 6 HS bao gồm cả khối 10 và 12: $C_{10}^6 - C_6^6$

+ Số cách chọn được 6 HS bao gồm cả khối 11 và 12: C_9^6

+ Số cách chọn được 6 HS khối 10: C_6^6

Vậy $n\left(\overline{A}\right) = C_{11}^6 + C_{10}^6 + C_9^6 - C_6^6 = 755 \Rightarrow n(A) = 5005 - 755 = 4250$

Vậy xác suất cần tìm là: $P(A) = \dfrac{4250}{5005} = \dfrac{850}{1001}$.

Câu 5. Từ một hộp chứa 12 quả cầu, trong đó có 8 quả màu đỏ, 3 quả màu xanh và 1 quả màu vàng, lấy ngẫu nhiên 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả cầu có đúng hai màu bằng:

A. $\frac{23}{44}$. **B.** $\frac{21}{44}$. **C.** $\frac{139}{220}$. **D.** $\frac{81}{220}$

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$

Gọi A là biến cố: "Lấy được 3 quả cầu có đúng hai màu".

- Trường hợp 1: Lấy 1 quả màu vàng và 2 quả màu đỏ có: $C_8^2 = 28$ cách

- Trường hợp 2: Lấy 1 quả màu vàng và 2 quả màu xanh có: $C_3^2 = 3$ cách

- Trường hợp 3: Lấy 1 quả màu đỏ và 2 quả màu xanh có: $C_8^1.C_3^2 = 24$ cách

- Trường hợp 4: Lấy 1 quả màu xanh và 2 quả màu đỏ có: $C_3^1.C_8^2 = 84$ cách

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n(A) = 28 + 3 + 24 + 84 = 139$ cách

Xác suất cần tìm là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{139}{220}$

Cách 2: Lấy 3 quả bất kì trừ đi trường hợp 3 quả khác màu (1 Đ, 1X, 1 V), và 3 quả chung 1 màu (cùng đỏ hoặc cùng xanh). ĐS: (220-81)/220. Chọn C

Câu 6. Chọn ngẫu nhiên hai số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau. Tính xác suất chọn được ít nhất một số chẵn. (lấy kết quả ở hàng phần nghìn).

A. $0,652$. **B.** $0,256$. **C.** $0,756$. **D.** $0,922$.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là biến cố: "chọn được ít nhất một số chẵn."

- Số số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau là: $9.9.8.7 = 4536$.

$\Rightarrow$ Không gian mẫu: $|\Omega| = C_{4536}^2$.

- Số số tự nhiên lẻ có 4 chữ số khác nhau là: $5.8.8.7 = 2240$.

$\Rightarrow n(\overline{A}) = C_{2240}^2$.

$\Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{|\Omega|} = \frac{C_{2240}^2}{C_{4536}^2}$.

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{2240}^2}{C_{4536}^2} \approx 0,756$.

Câu 7. Chọn ngẫu nhiên hai số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau. Tính xác suất chọn được ít nhất một số chẵn. (lấy kết quả ở hàng phần nghìn).

A. $0,652$. **B.** $0,256$. **C.** $0,756$. **D.** $0,922$.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là biến cố: "chọn được ít nhất một số chẵn."

- Số số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau là: $9.9.8.7 = 4536$.

$\Rightarrow$ Không gian mẫu: $|\Omega| = C_{4536}^2$.

- Số số tự nhiên lẻ có 4 chữ số khác nhau là: $5.8.8.7=2240$.

$\Rightarrow n\left(\overline{A}\right)=C_{2240}^2$.

$\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{|\Omega|}=\dfrac{C_{2240}^2}{C_{4536}^2}$.

$\Rightarrow P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{C_{2240}^2}{C_{4536}^2}\approx 0,756$.

Câu 8. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất để số được chọn có hai chữ số giống nhau.

A. 0,1 **B.** 0,3 **C.** 0,7 **D.** 0,9

Lời giải:

Chọn A

Số phần tử trong không gian mẫu là $n(\Omega)=90$.

Gọi A là biến cố ‘‘ số được chọn có 2 chữ số giống nhau ’’ A= $\{11;22;33;44;55;66;77;88;99\}$; $n(\mathrm{A})=9$

Do đó xác suất để số được chọn có hai chữ số giống nhau là $P(\mathrm{A})=\dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{9}{90}=0,1$.

Câu 9. Một hộp đựng thẻ được đánh số từ 1, 2, 3,…, 9. Rút ngẫu nhiên hai lần, mỗi lần một thẻ và nhân số ghi trên hai thẻ với nhau, xác suất để tích nhận được là số chẵn là:

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{25}{36}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{18}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=9\times 8=72$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố: “tích nhận được là số lẻ”.

$n\left(\overline{A}\right)=5\times 4=20$.

$\Rightarrow n(A)=72-20=52$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{52}{72}=\dfrac{13}{18}$.

Câu 10. Một hộp kín có 5 bút bi màu xanh khác nhau và 10 bút bi màu đỏ khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 bút bi. Xác suất để lấy được 1 bút bi xanh và 2 bút bi đỏ là

A. $\dfrac{200}{273}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{45}{91}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu $n\left(\Omega\right)=C_{15}^3$.

Gọi A là biến cố lấy được 1 bút bi xanh và 2 bút bi đỏ $\Rightarrow n\left(A\right)=C_5^1.C_{10}^2$.

Xác suất của biến cố A là $P\left(A\right)=\dfrac{C_5^1.C_{10}^2}{C_{15}^3}=\dfrac{45}{91}$

Câu 11. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có năm chữ số khác nhau đôi một. Xác suất để số được chọn có ba chữ số chẵn và hai chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau?

A. $\dfrac{2}{75}$. **B.** $\dfrac{8}{147}$ **C.** $\dfrac{85}{567}$. **D.** $\dfrac{58}{567}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=9.A_9^4$.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn có ba chữ số chẵn và hai chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau".

Có C_5^3 cách chọn 3 chữ số chẵn, có A_5^2 cách chọn 2 chữ số lẻ và xếp chúng kề nhau, có 4! Cách xếp sao cho 2 chữ số lẻ đứng kề nhau. Suy ra có $C_5^3.A_5^2.4!$ cách xếp thoả mãn (kể cả chữ số 0 đứng đầu).

Ta tính số các số thoả mãn đề mà có số chữ số 0 đứng đầu, ta xét 4 chữ số cuối: Có C_4^2 cách chọn 2 chữ số trong 4 chữ số chẵn, có C_5^2 cách chọn 2 chữ số lẻ, coi 2 chữ số lẻ là một nhóm ta có số các số là $C_4^2.C_5^2.2!.3!$.

Suy ra số các số thoả mãn đề bài là: $n\left(A\right)=C_5^3.A_5^2.4!-C_4^2.C_5^2.2!.3!=4080$.

$$P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\frac{4080}{9.A_9^4}=\frac{85}{567}.$$

Câu 12. Một hộp đựng thẻ được đánh số từ 1, 2, 3,…, 9. Rút ngẫu nhiên hai lần, mỗi lần một thẻ và nhân số ghi trên hai thẻ với nhau, xác suất để tích nhận được là số chẵn là:

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{25}{36}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{13}{18}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=9\times 8=72$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố: "tích nhận được là số lẻ".

$n\left(\overline{A}\right)=5\times 4=20$.

$\Rightarrow n(A)=72-20=52$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{52}{72}=\frac{13}{18}$.

Câu 13. Từ một hộp có 4 bút bi màu xanh, 5 bút bi màu đen và 6 bút bi màu đỏ, chọn ngẫu nhiên 5 bút. Xác suất để 5 bút được chọn chỉ có đúng hai màu là

A. $\frac{118}{429}$. **B.** $\frac{460}{1001}$. **C.** $\frac{119}{429}$. **D.** $\frac{272}{1001}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố: " 5 bút được chọn có đúng hai màu".

Ta có $n\left(\Omega\right)=C_{15}^5$.

Vì 5 bút được chọn có đúng hai màu nên có 3 trường hợp:

TH1: Có đúng hai màu xanh và đen:

- Chọn 5 bút trong hai màu xanh, đen (có 9 bút), có C_9^5 cách chọn.

- Trong C_9^5 cách chọn 5 bút trên, có C_5^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đen và không có cách chọn nào để cả 5 bút đều màu xanh.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu xanh và đen bằng $C_9^5-C_5^5$.

TH2: Có đúng hai màu đen và đỏ:

- Chọn 5 bút trong hai màu đen, đỏ (có 11 bút), có C_{11}^5 cách chọn.

- Trong C_{11}^5 cách chọn 5 bút trên, có C_5^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đen và C_6^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đỏ.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu đỏ và đen bằng $C_{11}^5-C_5^5-C_6^5$.

TH3: Có đúng hai màu đỏ và xanh:

- Chọn 5 bút trong hai màu đỏ, xanh (có 10 bút), có C_{10}^5 cách chọn.

- Trong C_{10}^5 cách chọn 5 bút trên, có C_6^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đỏ và không có cách chọn cả 5 bút đều màu xanh.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu đỏ và xanh bằng $C_{10}^5 - C_6^5$.

Vậy $P(A) = \dfrac{\left(C_9^5 - C_5^5\right) + \left(C_{11}^5 - C_5^5 - C_6^5\right) + \left(C_{10}^5 - C_6^5\right)}{C_{15}^5} = \dfrac{118}{429}$.

Câu 14. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\dfrac{13}{27}$ **B.** $\dfrac{14}{27}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{365}{729}$

Lời giải

Chọn A

Gọi A là tập tất cả các số nguyên dương đầu tiên, $A = \{1;\ 2;\ 3; ......;\ 26;\ 27\}$

Chọn hai số khác nhau từ A có: $n(\Omega) = C_{27}^2 = 351$. Tổng hai số là số chẵn khi cả hai số đó đều chẵn hoặc đều lẻ. Do đó:

Chọn hai số chẵn khác nhau từ tập A có: $C_{13}^2 = 78$

Chọn hai số lẻ khác nhau từ tập A có: $C_{14}^2 = 91$

Số cách chọn là: $78 + 91 = 169$

Xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{169}{351} = \dfrac{13}{27}$

Câu 15. Cho tập hợp $A = \{1;2;...;100\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của A. Xác suất để 3 phần tử được chọn lập thành một cấp số cộng bằng

A. $\dfrac{1}{132}$. **B.** $\dfrac{1}{66}$. **C.** $\dfrac{1}{33}$. **D.** $\dfrac{1}{11}$.

Lời giải

ChọnB.

Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử từ tập $A \Rightarrow$ Không gian mẫu là $|\Omega| = C_{100}^3$.

Gọi biến cố A:"Ba phần tử được chọn lập thành một cấp số cộng".

Cách 1. Giả sử 3 phần tử đó là $x; x+d; x+2d$ với $x, d \in \mathbb{N}^*$.

Với $x = 1$ thì ta có $x + 2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{99}{2} \Rightarrow d \in \{1;2;...;49\} \Rightarrow$ có 49 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x = 2$ thì ta có $x + 2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{98}{2} \Rightarrow d \in \{1;2;...;49\} \Rightarrow$ có 49 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x = 3$ thì ta có $x + 2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{97}{2} \Rightarrow d \in \{1;2;...;48\} \Rightarrow$ có 48 bộ ba số thỏa mãn.

… Với $x = 97$ thì ta có $x + 2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{3}{2} \Rightarrow d \in \{1\} \Rightarrow$ có 1 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=98$ thì ta có $x+2d\le 100\Leftrightarrow d\le 1\Rightarrow d\in\{1\}\Rightarrow$ có 1 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=99$ thì ta có $x+2d\le 100\Leftrightarrow d\le\frac{1}{2}\Rightarrow d\in\varnothing\Rightarrow$ không có bộ ba số thỏa mãn.

Do đó ta thấy có tất cả $2(49+48+47+...+2+1)=2.\frac{49(49+1)}{2}=2450$ bộ ba số thỏa mãn.

Cách 2. Giả sử 3 phần tử đó là $a;b;c$ với $a,b,c\in A$.

Trong tập A có 50 số lẻ, 50 số chẵn.

Do a,b,c lập thành một CSC nên $a+c=2b$ là một số chẵn.

Do đó hai số a,c cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Đồng thời ứng với 1 cách chọn hai số a,c thì xác định được duy nhất 1 số b.

Tổng số bộ ba số a,b,c là $C_{50}^2+C_{50}^2=2450$ (bộ ba).

Vậy xác suất của biến cố A là $P=\frac{2450}{C_{100}^3}=\frac{1}{66}$.

Câu 16. Cho tập $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Tính xác suất biến cố chọn được số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lập từ tập A, sao cho tổng 3 chữ số bằng 9.

A. $\frac{1}{20}$. **B.** $\frac{7}{20}$. **C.** $\frac{9}{20}$. **D.** $\frac{3}{20}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là biến cố: " số tự nhiên 3 chữ số khác nhau, có tổng 3 chữ số bằng 9."

- Số số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau có thể lập được là: $A_6^3=120$.

$\Rightarrow$ Không gian mẫu: $|\Omega|=120$.

- Ta có $1+2+6=9;1+3+5=9;2+3+4=9$.

$\Rightarrow$ Số số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau có tổng bằng 9 là: $3!+3!+3!=18$.

$\Rightarrow n(A)=18$.

$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{|\Omega|}=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$.

Câu 17. Có 60 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3.

A. $\frac{11}{171}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{9}{89}$. **D.** $\frac{409}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega|=C_{50}^3=19600$.

Gọi A là tập các thẻ đánh số a sao cho $1\le a\le 50$ và a chia hết cho 3. $A=\{3;6;...;48\}\Rightarrow|A|=16$.

Gọi B là tập các thẻ đánh số b sao cho $1\le b\le 50$ và b chia 3 dư 1. $B=\{1;4;...;49\}\Rightarrow|B|=17$.

Gọi C là tập các thẻ đánh số c sao cho $1\le c\le 50$ và c chia 3 dư 2. $C=\{2;5;...;59\}\Rightarrow|C|=17$.

Với D là biến cố: "Rút ngẫu nhiên 3 thẻ được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3". Ta có 4 trường hợp xảy ra:

▪**Trường hợp 1:** Rút 3 thẻ từ A: Có C_{16}^3 (*cách*).

▪**Trường hợp 2:** Rút 3 thẻ từ B: Có C_{17}^3 $(cách)$.

▪**Trường hợp 3:** Rút 3 thẻ từ C: Có C_{17}^3 $(cách)$.

▪**Trường hợp 4:** Rút mỗi tập 1 thẻ: Có $16.17.17 = 4624$ $(cách)$.

Suy ra $|D| = 2.C_{17}^3 + C_{16}^3 + 4624 = 6544$.

Vậy xác suất cần tìm $P = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{6544}{19600} = \frac{409}{1225}$.

Câu 18. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp A. Tính xác suất để số đó chia hết cho 5.

A. $\frac{9}{41}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{10}{41}$ **D.** $\frac{9}{50}$

Lời giải

Chọn A

Gọi số tự nhiên có 3 chữ số có dạng $\overline{abc}$

Vì $\overline{abc}$ là số tự nhiên chẵn nên $c \in \{0,2,4,6,8\}$

TH1: $c = 0$. Ta có $A_9^2 = 72$ số tự nhiên chẵn

TH2: $c = 2,4,6,8$. Ta có $4\left(A_9^2 - A_8^1\right) = 256$ số tự nhiên chẵn.

Vậy, số phần tử trong tập hợp A là: 328 số tự nhiên chẵn, suy ra $|\Omega| = 328$

Gọi X là biến cố số lấy ngẫu nhiên ra từ A chia hết cho 5, suy ra $|\Omega_A| = 72$

Vậy, xác suất xảy ra biến cố A là $P_A = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{72}{328} = \frac{9}{41}$

Câu 19. Một người đang đứng tại gốc O của trục tọa độ Oxy. Do say rượu nên người này bước ngẫu nhiên sang trái hoặc sang phải trên trục tọa độ với độ dài mỗi bước bằng 1 đơn vị. Xác suất để sau 10 bước người này quay lại đúng gốc tọa độ O bằng

A. $\frac{15}{128}$. **B.** $\frac{63}{100}$. **C.** $\frac{63}{256}$. **D.** $\frac{3}{20}$.

Lời giải

Chọn C

Mỗi bước người này có 2 lựa chọn sang trái hoặc phải nên số phần tử không gian mẫu là 2^{10}.

Để sau đúng 10 bước người này quay lại đúng gốc tọa độ O thì người này phải sang trái 5 lần và sang phải 5 lần, do đó số cách bước trong 10 bước này là C_{10}^5.

Xác suất cần tính bằng $\frac{C_{10}^5}{2^{10}} = \frac{63}{256}$.

Câu 20. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng:

A. $\frac{41}{81}$. **B.** $\frac{40}{81}$. **C.** $\frac{16}{81}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 9 \times 9 \times 8 = 648$.

Gọi A là biến cố: "tổng các chữ số là số lẻ ".

Gọi số cần tìm là: $\overline{abc}$ $(a,b,c \in \mathbb{N})$.

Th1: ba chữ số a,b,c đều lẻ có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số.

Th 2: hai chữ số chẵn một chữ số lẻ có:

- a chẵn, b chẵn, c lẻ có $4\times4\times5=80$ số.
- a chẵn, b lẻ, c chẵn có $4\times5\times4=80$ số.
- a lẻ, b chẵn, c chẵn có $5\times5\times4=100$ số.

$\Rightarrow n(A)=60+80+80+100=320$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{320}{648}=\dfrac{40}{81}$.

Câu 21. Cho tập hợp $S=\{1;2;3;4;.....;17\}$ gồm 17 số. Chọn ngẫu nhiên một tập con có ba phần tử của tập S. Tính xác suất để tập hợp được chọn có tổng các phần tử chia hết cho 3.

A. $\dfrac{27}{34}$. **B.** $\dfrac{23}{68}$. **C.** $\dfrac{9}{34}$. **D.** $\dfrac{9}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Tập hợp các số từ tập S chia hết cho 3 là $\{3;6;9;12;15\}$.

Tập hợp các số từ tập S chia cho 3 dư 1 là $\{1;4;7;10;13;16\}$.

Tập hợp các số từ tập S chia cho 3 dư 2 là $\{2;5;8;11;14;17\}$.

*) TH1: Ba số lấy từ tập S đều chia hết cho 3: Có C_5^3 cách chọn.

*) TH2: Ba số lấy từ tập S đều chia 3 dư 1: Có C_6^3 cách chọn.

*) TH3: Ba số lấy từ tập S đều chia 3 dư 2: Có C_6^3 cách chọn.

*) TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2: Có $C_5^1.C_6^1.C_6^1$ cách chọn.

Vậy số phần tử của biến cố A: “ Chọn được ba số có tổng chia hết cho 3” là:

$n(A)=C_5^3+C_6^3+C_6^3+C_5^1.C_6^1.C_6^1=230$.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{17}^3$.

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{230}{C_{17}^3}=\dfrac{23}{68}$.

Câu 22. Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau và có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$.

A. $\dfrac{35}{34020}$ **B.** $\dfrac{37}{34020}$. **C.** $\dfrac{37}{3402}$. **D.** $\dfrac{74}{34020}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là biến cố “chọn ra được một số tự nhiên chẵn từ tập M đồng thời thỏa mãn $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$”. Khi đó: $n(M)=9.A_9^5$ (số có sáu chữ số đôi một khác nhau thì a_1 có chín cách chọn, $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử nên có A_9^5).

TH1: $a_6=0$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có C_9^5 cách chọn.

TH2: $a_6=2$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có C_7^5 cách chọn.

TH3: $a_6=4$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có C_5^5 cách chọn.

$n(A)=C_9^5+C_7^5+C_5^5=148$

Do đó $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{148}{9.A_9^5}=\dfrac{37}{34020}$.

Câu 23. Cho tập hợp $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập#A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{3}{25}$. **C.** $\frac{22}{25}$. **D.** $\frac{2}{25}$.

Lời giải

Đáp án B

Số phần tử của tập $n(S) = A_5^3 + A_5^4 + P_5 = 300$

Các bộ số có tổng 10: $\{(2,3,5);(1,4,5);(1,2,3,4)\}$

$n(B) = 2P_3 + P_4 = 36 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{36}{300} = \frac{3}{25}$

Câu 24. Có 60 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3.

A. $\frac{11}{171}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{9}{89}$. **D.** $\frac{409}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega| = C_{50}^3 = 19600$.

Gọi A là tập các thẻ đánh số a sao cho $1 \le a \le 50$ và a chia hết cho 3.

$A = \{3;6;...;48\} \Rightarrow |A| = 16$.

Gọi B là tập các thẻ đánh số b sao cho $1 \le b \le 50$ và b chia 3 dư 1. $B = \{1;4;...;49\} \Rightarrow |B| = 17$.

Gọi C là tập các thẻ đánh số c sao cho $1 \le c \le 50$ và c chia 3 dư 2. $C = \{2;5;...;59\} \Rightarrow |C| = 17$.

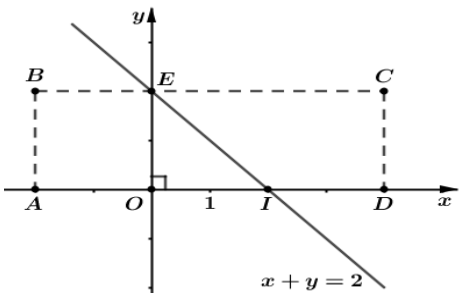
Với D là biến cố: "Rút ngẫu nhiên 3 thẻ được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3". Ta có 4 trường hợp xảy ra:

- **Trường hợp 1:** Rút 3 thẻ từ A: Có C_{16}^3 (*cách*).
- **Trường hợp 2:** Rút 3 thẻ từ B: Có C_{17}^3 (*cách*).
- **Trường hợp 3:** Rút 3 thẻ từ C: Có C_{17}^3 (*cách*).
- **Trường hợp 4:** Rút mỗi tập 1 thẻ: Có $16.17.17 = 4624$ (*cách*).

Suy ra $|D| = 2.C_{17}^3 + C_{16}^3 + 4624 = 6544$.

Vậy xác suất cần tìm $P = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{6544}{19600} = \frac{409}{1225}$.

Câu 25. Trên mặt phẳng Oxy, ta xét một hình chữ nhật $ABCD$ với các điểm $A(-2;0)$, $B(-2;2)$, $C(4;2)$, $D(4;0)$ (hình vẽ). Một con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật đó tính cả trên cạnh hình chữ nhật sao cho chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên (tức là điểm có cả hoành độ và tung độ đều nguyên). Tính xác suất để nó đáp xuống các điểm $M(x;y)$ mà $x + y < 2$.



A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{8}{21}$.

Lời giải

Chọn B

Số các điểm có tọa độ nguyên thuộc hình chữ nhật là $7.3=21$ điểm vì $\begin{cases} x\in\{-2;-1;0;1;2;3;4\} \\ y\in\{0;1;2\} \end{cases}$.

Để con châu chấu đáp xuống các điểm $M(x,y)$ có $x+y<2$ thì con châu chấu sẽ nhảy trong khu vực hình thang $BEIA$. Để $M(x,y)$ có tọa độ nguyên thì $\begin{cases} x\in\{-2;-1;0;1;2\} \\ y\in\{0;1;2\} \end{cases}$.

- Nếu $x\in\{-2;-1\}$ thì $y\in\{0;1;2\}\Rightarrow$ có $2.3=6$ điểm.
- Nếu $x=0$ thì $y\in\{0;1\}\Rightarrow$ có 2 điểm.
- Nếu $x=1\Rightarrow y=0\Rightarrow$ có 1 điểm.

$\longrightarrow$ có tất cả $6+2+1=9$ điểm thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính $P=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$. **Chọn B**

Câu 26. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tích các chữ số là chẵn bằng

A. $\frac{41}{81}$. **B.** $\frac{49}{54}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{98}{135}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=9\times9\times8=648$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố: "Số được chọn có tích các chữ số là lẻ"

$n(\overline{A})=5\times4\times3=60$.

$\Rightarrow n(A)=648-60=588$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{588}{648}=\frac{49}{54}$.

Câu 27. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là số lẻ bằng

A. $\frac{41}{81}$. **B.** $\frac{40}{81}$. **C.** $\frac{41}{648}$. **D.** $\frac{16}{81}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=9.9.8=648$

A: "Số được chọn có tổng các chữ số là số lẻ"

Trường hợp 1: Số được chọn có 3 chữ số lẻ

Số cách chọn ra và sắp xếp ba chữ số lẻ là A_5^3.

Trường hợp 2: Số được chọn gồm có 2 chữ số chẵn và 1 chữ số lẻ.

Số cách chọn ra và sắp xếp 2 chữ số là số chẵn và 1 chữ số là số lẻ là $C_5^2.C_5^1.3!$

Số cách chọn ra và sắp xếp 2 chữ số là số chẵn và 1 chữ số lẻ có số 0 đứng đầu là $C_4^1.C_5^1.2!$

Vậy nên số số thỏa biến cố A là: $C_5^2.C_5^1.3!-C_4^1.C_5^1.2!=260$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=60+260=320$

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{320}{648}=\dfrac{40}{81}$.

Câu 28. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số (không nhất thiết khác nhau) được lập từ các chữ số $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$. Chọn ngẫu nhiên một số $\overline{abc}$ từ S. Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn $a\le b\le c$.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{11}{60}$. **C.** $\dfrac{13}{60}$. **D.** $\dfrac{9}{11}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=9.10^2=900$.

Gọi biến cố A:“Chọn được một số thỏa mãn $a\le b\le c$”.

Vì $a\le b\le c$ mà $a\ne 0$ nên trong các chữ số sẽ không có số 0.

Trường hợp 1: Số được chọn có 3 chữ số giống nhau có 9 số.

Trường hợp 2: Số được chọn tạo bởi hai chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 2 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là: C_9^2.

Mỗi bộ 2 chữ số được chọn tạo ra 2 số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có $2.C_9^2$ số thỏa mãn.

Trường hợp 3: Số được chọn tạo bởi ba chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 3 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là: C_9^3.

Mỗi bộ 3 chữ số được chọn chỉ tạo ra một số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có C_9^3 số thỏa mãn.

Vậy $n(A)=9+2.C_9^2+C_9^3=165$

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{165}{900}=\dfrac{11}{60}$.

Câu 29. Gọi X là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập hợp X. Gọi A là biến cố lấy được số có đúng hai chữ số 1, có đúng hai chữ số 2, bốn chữ số còn lại đôi một khác nhau, đồng thời các chữ số giống nhau không đứng liền kề nhau. Xác suất của biến cố A bằng

A. $\dfrac{176400}{9^8}$. **B.** $\dfrac{151200}{9^8}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** $\dfrac{201600}{9^8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $n(\Omega)=9^8$.

TH1: Xếp bất kỳ

Xếp hai chữ số 1, hai chữ số 2 bất kỳ và 4 chữ số còn lại: Có $C_8^2.C_6^2.A_7^4=352.800$ (cách).

TH2: Số các cách xếp sao cho không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Xếp hai chữ số 1 đứng liền nhau: $7.C_6^2.A_7^4$ cách.

Xếp hai chữ số 2 đứng liền nhau: $7.C_6^2.A_7^4$ cách.

Số các cách xếp thuộc cả hai trường hợp trên:

+ Coi hai chữ số 1 đứng liền nhau là nhóm X, hai chữ số 2 đứng liền nhau là nhóm Y

+ Xếp X, Y và 4 số còn lại có: $C_7^4.6!$ (cách)

Vậy số cách xếp không thỏa mãn yêu cầu là: $2.7.C_6^2.A_7^4-C_7^4.6!=151200$ (cách)

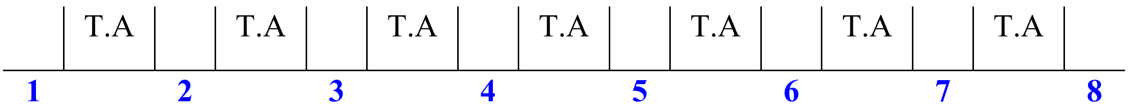
Vậy $n(A)=352.800-151.200=201.600\Rightarrow p(A)=\dfrac{201600}{9^8}$, chọn **D.**

Câu 30. Có 3 quyển sách Văn học khác nhau, 4 quyển sách Toán học khác nhau và 7 quyển sách Tiếng Anh khác nhau được xếp lên một kệ ngang. Tính xác suất để hai cuốn sách cùng môn không ở cạnh nhau

A. $\frac{19}{12012}$. **B.** $\frac{19}{1012}$. **C.** $\frac{19}{1202}$. **D.** $\frac{5}{8008}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi Ω là biến cố “xếp 14 quyển sách lên kệ sách một cách tùy ý” $\Rightarrow n(\Omega)=14!$.

A là biến cố “xếp 14 cuốn sách lên kệ sách sao cho hai cuốn sách cùng môn không ở cạnh nhau”.

- Xếp 7 quyển sách Tiếng Anh vào kệ có $7!$ cách.

- 7 quyển sách Tiếng Anh tạo ra 8 chỗ trống (gồm 6 chỗ trống ở giữa và 2 chỗ trống trước sau).

Đánh số từ 1 đến 8, từ trái sang phải cho các chỗ trống. Khi đó ta xét các trường hợp:

TH1: Xếp sách Văn hoặc Toán vào vị trí từ 1 đến 7 có $7!$ cách.

TH2: Xếp sách Văn hoặc Toán vào vị trí từ 2 đến 8 có $7!$ cách.

TH3: Xếp 1 cặp sách Văn – Toán chung vào ngăn 2, các ngăn $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ xếp tùy ý số sách còn lại. Ta có:

+ Số cách chọn 1 cặp sách Văn – Toán: 3.4 cách.

+ Vị trí 2 cuốn sách trong cặp sách: $2!$ cách.

+ Xếp các sách còn lại vào các ngăn $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ có $5!$ cách.

Vậy ta có số cách xếp 1 cặp sách Văn – Toán chung vào ngăn 2, các ngăn $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ xếp tùy ý số sách còn lại là $3.4.2!.5!$ cách.

Tương tự cho xếp cặp sách Văn – Toán lần lượt vào các ngăn $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$.

Số trường hợp thuận lợi của biến cố là $n(A)=7!(2.7!+3.4.2.6.5!)$

Vậy $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{19}{12012}$.

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà toạ độ là số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hay bằng 4. Nếu các điểm đều có cùng xác suất được chọn như nhau, vậy thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc toạ độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là

A. $\frac{13}{81}$. **B.** $\frac{15}{81}$. **C.** $\frac{13}{32}$. **D.** $\frac{11}{16}$.

Lời giải

Chọn A

* Tính số phần tử không giam mẫu $n(\Omega)$

+ Gọi toạ độ điểm $M(x;y)$ thoả $x,y\in Z$ và $\begin{cases}|x|\le 4\\ |y|\le 4\end{cases}$ nên $\begin{cases}x=-4;-3;-2;-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4(9\,số)\\ y=-4;-3;-2;-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4(9\,số)\end{cases}$. Suy ra số điểm $M(x;y)$ là $n(\Omega)=9.9=81$

* Tính số phần tử biến cố A: Trong những điểm trên, chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc toạ độ nhỏ hơn hoặc bằng 2

+ Gọi điểm $M'(x;y)$ thoả $x,y\in Z$ và $OM\le 2$ $\Leftrightarrow$ $x,y\in Z$ và $\sqrt{x^2+y^2}\le 2$ $\left(OM=\sqrt{x^2+y^2}\right)$ $\Leftrightarrow$ $x,y\in Z$ và $x^2+y^2\le 4$, vậy $\Leftrightarrow\begin{cases}x,\in Z\\ x=0;\pm 1;\pm 2\\ y^2\le 4-x^2\end{cases}$

+ Nếu chọn $x=0$ (1 cách) $\Rightarrow$ chọn $y=0;\pm 1;\pm 2$ (5 cách). Do đó có 5 cách chọn

+ Nếu chọn $x=\pm 1$ (2 cách) $\Rightarrow$ chọn y thoả $y^2\le 4-1\Leftrightarrow y^2\le 3$ có $y=0;\pm 1$ (3 cách). Do đó có 6 cách chọn

+ Nếu chọn $x=\pm 2$ (2 cách) $\Rightarrow$ chọn y thoả $y^2\le 4-4\Leftrightarrow y^2\le 0$ có $y=0$ (1 cách). Do đó có 2 cách chọn

Vậy có tất cả $5+6+2=13$ cách chọn, tức là số phần tử của biến cố $n(A)=13$

* Xác suất $P(A)=\dfrac{13}{81}$

Câu 32. Xếp ngẫu nhiên bốn bạn nam và năm bạn nữ ngồi vào chín ghế kê theo hàng ngang. Xác suất để có được năm bạn nữ ngồi cạnh nhau bằng:

A. $\dfrac{5}{21}$. **B.** $\dfrac{1}{2520}$. **C.** $\dfrac{5}{126}$. **D.** $\dfrac{5}{18}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega)=9!=362880$

Gọi biến cố A: "Xếp năm bạn nữ ngồi cạnh nhau" $\Rightarrow n(A)=C_5^1\times 5!\times 4!=14400$

Khi đó: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{14400}{362880}=\dfrac{5}{126}\Rightarrow$ **Đáp án C.**

Câu 33. Xếp ngẫu nhiên bốn bạn nam và năm bạn nữ ngồi vào chín ghế kê theo hàng ngang. Xác suất để có được năm bạn nữ ngồi cạnh nhau bằng:

A. $\dfrac{5}{21}$. **B.** $\dfrac{1}{2520}$. **C.** $\dfrac{5}{126}$. **D.** $\dfrac{5}{18}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega)=9!=362880$

Gọi biến cố A: "Xếp năm bạn nữ ngồi cạnh nhau" $\Rightarrow n(A)=C_5^1\times 5!\times 4!=14400$

Khi đó: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{14400}{362880}=\dfrac{5}{126}\Rightarrow$ **Đáp án C.**

Câu 34. Cho tập hợp $A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. Gọi S là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{23}{25}$. **C.** $\frac{2}{25}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm của tập S có dạng $\overline{abc}$. Trong đó $\begin{cases} a,b,c \in A \\ a \neq 0 \\ a \neq b; b \neq c; c \neq a \end{cases}$.

Khi đó

● Số cách chọn chữ số a có 5 cách chọn vì $a \neq 0$.
● Số cách chọn chữ số b có 5 cách chọn vì $b \neq a$.
● Số cách chọn chữ số c có 4 cách chọn vì $c \neq a$ và $c \neq b$.

Do đó tập S có $5.5.4 = 100$ phần tử.
Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.
Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{100}^{1} = 100$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu". Khi đó ta có các bộ số là $\overline{1b2}$ hoặc $\overline{2b4}$ thỏa mãn biến cố X và cứ mỗi bộ thì b có 4 cách chọn nên có tất cả 8 số thỏa yêu cầu.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 8$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$.

Câu 35. Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$, gọi S là tập hợp các số có 8 chữ số đôi một khác nhau lập từ tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, xác suất để số được chọn có tổng 4 chữa số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối bằng

A. $\frac{3}{35}$. **B.** $\frac{4}{35}$. **C.** $\frac{12}{245}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn B

Tổng các chữ số của tập S là $T = \frac{7.8}{2} = 28$

Ta chia tập S thành hai tập B, C mỗi tập 4 phần tử sao cho tổng các phần tử của B, C đều bằng 14 và $B \cap C = \varnothing$

Suy ra:

B	C
$\{0;1;6;7\}$	$\{2;3;4;5\}$
$\{0;2;5;7\}$	$\{1;3;4;6\}$
$\{0;3;4;7\}$	$\{1;2;5;6\}$
$\{0;3;5;6\}$	$\{1;2;4;7\}$

Số các số có 8 chữ số lập từ tập S là $7.7!$

Gọi $\overline{a_1a_2....a_8}$ là số có 8 chữ số thỏa mãn đề bài.

TH1 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ lấy từ các chữ số từ tập C khi đó có: $4.4!.4!$ số thỏa mãn.

TH2 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ lấy từ các chữ số từ tập B khi đó có: $4.3.3!.4!$ số thỏa mãn.

Vậy có $4.4!.4! + 4.3!.4! = 4.4!(3! + 4!)$ số

Xác suất để số được chọn có tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối là

$$P = \frac{4.4!(3.3! + 4!)}{7.7!} = \frac{4}{35}$$

Câu 36. Một túi đựng 10 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ túi đó. Xác suất để tổng số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2C_3^3+C_4^3+C_3^1C_3^1C_4^1}{C_{10}^3}$.

C. $\dfrac{2C_3^3+C_4^3}{C_{10}^3}$. **D.** $\dfrac{2C_3^1C_3^1C_4^1}{C_{10}^3}$.

Lời giải

Chọn B

Số cách rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ túi có 10 thẻ là: C_{10}^3 cách.

Trong các số từ 1 đến 10 có ba số chia hết cho 3, bốn số chia cho 3 dư 1, ba số chia cho 3 dư 2.

Để tổng các số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3 thì ba thẻ đó phải có số được ghi thỏa mãn:

- Ba số đều chia hết cho 3.
- Ba số đều chia cho 3 dư 1.
- Ba số đều chia cho 3 dư 2.
- Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, một số chia cho 3 dư 2.

Do đó số cách rút để tổng số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3 là $C_3^3+C_4^3+C_3^3+C_3^1C_4^1C_3^1$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là: $\dfrac{2C_3^3+C_4^3+C_3^1C_3^1C_4^1}{C_{10}^3}$.

Câu 37. Có 60 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3.

A. $\dfrac{11}{171}$. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** $\dfrac{9}{89}$. **D.** $\dfrac{409}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega|=C_{50}^3=19600$.

Gọi A là tập các thẻ đánh số a sao cho $1\le a\le 50$ và a chia hết cho 3. $A=\{3;6;...;48\}\Rightarrow |A|=16$.

Gọi B là tập các thẻ đánh số b sao cho $1\le b\le 50$ và b chia 3 dư 1. $B=\{1;4;...;49\}\Rightarrow |B|=17$.

Gọi C là tập các thẻ đánh số c sao cho $1\le c\le 50$ và c chia 3 dư 2. $C=\{2;5;...;59\}\Rightarrow |C|=17$.

Với D là biến cố: "Rút ngẫu nhiên 3 thẻ được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3". Ta có 4 trường hợp xảy ra:

□**Trường hợp 1:** Rút 3 thẻ từ A: Có C_{16}^3 *(cách)*.

□**Trường hợp 2:** Rút 3 thẻ từ B: Có C_{17}^3 *(cách)*.

□**Trường hợp 3:** Rút 3 thẻ từ C: Có C_{17}^3 *(cách)*.

□**Trường hợp 4:** Rút mỗi tập 1 thẻ: Có $16.17.17=4624$ *(cách)*.

Suy ra $|D|=2.C_{17}^3+C_{16}^3+4624=6544$.

Vậy xác suất cần tìm $P=\dfrac{|D|}{|\Omega|}=\dfrac{6544}{19600}=\dfrac{409}{1225}$.

Câu 38. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

A. $\dfrac{21}{81}$. **B.** $\dfrac{20}{81}$. **C.** $\dfrac{41}{81}$. **D.** $\dfrac{40}{81}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi số số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau có dạng : $\overline{abc}$

Ta có $n(\Omega)=9.9.8=648$

Gọi A là biến cố: " Số được chọn có tổng các chữ số là lẻ ".

Vì số được chọn có tổng các chữ số là lẻ nên có 2 trường hợp:

TH1 : Cả 3 số đều là số lẻ

a có 5 cách chọn số lẻ

b có 4 cách chọn trong 4 số lẻ còn lại

c có 3 cách chọn trong 3 số lẻ còn lại

$\Rightarrow$ Có $5.4.3=60$ cách chọn

TH2: Có 1 số lẻ và 2 số chẵn

□Theo thứ tự lẻ-chẵn-chẵn

a có 5 cách chọn số lẻ

b có 5 cách chọn số chẵn

c có 4 cách chọn trong 4 số chẵn còn lại.

$\Rightarrow$ Có $5.5.4=100$ cách chọn

□Theo thứ tự chẵn-lẻ-chẵn

a có 4 cách chọn số chẵn (trừ số 0)

b có 5 cách chọn trong 5 số lẻ

c có 4 cách chọn trong 4 số chẵn còn lại

$\Rightarrow$ Có $4.5.4=80$ cách chọn

□Theo thứ tự chẵn -chẵn-lẻ

a có 4 cách chọn số chẵn (trừ số 0)

b có 4 cách chọn trong 4 số chẵn còn lại

c có 5 cách chọn trong 5 số lẻ

$\Rightarrow$ Có $4.4.5=80$ cách chọn

$\Rightarrow n(A)=60+100+80+80=320$

Vậy $P(A)=\dfrac{320}{648}=\dfrac{40}{81}$.

Câu 39. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

A. $\dfrac{21}{81}$. **B.** $\dfrac{20}{81}$. **C.** $\dfrac{41}{81}$. **D.** $\dfrac{40}{81}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi số số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau có dạng : $\overline{abc}$

Ta có $n(\Omega)=9.9.8=648$

Gọi A là biến cố: " Số được chọn có tổng các chữ số là lẻ ".

Vì số được chọn có tổng các chữ số là lẻ nên có 2 trường hợp:

TH1 : Cả 3 số đều là số lẻ

a có 5 cách chọn số lẻ

b có 4 cách chọn trong 4 số lẻ còn lại

c có 3 cách chọn trong 3 số lẻ còn lại

$\Rightarrow$ Có $5.4.3=60$ cách chọn

TH2: Có 1 số lẻ và 2 số chẵn

□Theo thứ tự lẻ-chẵn-chẵn

a có 5 cách chọn số lẻ

b có 5 cách chọn số chẵn

c có 4 cách chọn trong 4 số chẵn còn lại.

$\Rightarrow$ Có $5.5.4=100$ cách chọn

□Theo thứ tự chẵn-lẻ-chẵn

a có 4 cách chọn số chẵn (trừ số 0)

b có 5 cách chọn trong 5 số lẻ

c có 4 cách chọn trong 4 số chẵn còn lại

$\Rightarrow$ Có $4.5.4=80$ cách chọn

□Theo thứ tự chẵn -chẵn-lẻ

a có 4 cách chọn số chẵn (trừ số 0)

b có 4 cách chọn trong 4 số chẵn còn lại

c có 5 cách chọn trong 5 số lẻ

$\Rightarrow$ Có $4.4.5=80$ cách chọn

$\Rightarrow n(A)=60+100+80+80=320$

Vậy $P(A)=\dfrac{320}{648}=\dfrac{40}{81}$.

Câu 40. Có 60 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3.

A. $\dfrac{11}{171}$. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** $\dfrac{9}{89}$. **D.** $\dfrac{409}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega|=C_{50}^{3}=19600$.

Gọi A là tập các thẻ đánh số a sao cho $1\le a\le 50$ và a chia hết cho 3. $A=\{3;6;...;48\}\Rightarrow |A|=16$.

Gọi B là tập các thẻ đánh số b sao cho $1\le b\le 50$ và b chia 3 dư 1. $B=\{1;4;...;49\}\Rightarrow |B|=17$.

Gọi C là tập các thẻ đánh số c sao cho $1\le c\le 50$ và c chia 3 dư 2. $C=\{2;5;...;59\}\Rightarrow |C|=17$.

Với D là biến cố: "Rút ngẫu nhiên 3 thẻ được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3". Ta có 4 trường hợp xảy ra:

▪**Trường hợp 1:** Rút 3 thẻ từ A: Có C_{16}^{3} (*cách*).

▪**Trường hợp 2:** Rút 3 thẻ từ B: Có C_{17}^{3} (*cách*).

▪**Trường hợp 3:** Rút 3 thẻ từ C: Có C_{17}^{3} (*cách*).

▪**Trường hợp 4:** Rút mỗi tập 1 thẻ: Có $16.17.17=4624$ (*cách*).

Suy ra $|D|=2.C_{17}^{3}+C_{16}^{3}+4624=6544$.

Vậy xác suất cần tìm $P=\dfrac{|D|}{|\Omega|}=\dfrac{6544}{19600}=\dfrac{409}{1225}$.

Câu 41. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau.Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập S.Xác suất để chọn được ít nhất một số chia hết cho 2 gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $74,4\%$. **B.** $75,6\%$. **C.** $24,4\%$. **D.** $25,6\%$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của tập S là số các số có 4 chữ số khác nhau $9.A_9^3=4536$

Số các số có 4 chữ số khác nhau không chia hết cho 2 bằng $5.8.A_8^2=2240$

Số các số có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 2 bằng $4536-2240=2296$

Chọn hai số từ tập S =>Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{4536}^2$

Gọi A là biến cố "Chọn được ít nhất một số chia hết cho 2"

Xác suất $P(A)=1-\dfrac{C_{2240}^2}{C_{4536}^2}\approx 75,6\%$

Câu 42. Gieo đồng thời ba con súc sắc. Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất hai mặt 6 chấm. Xác suất để trong 6 lần chơi thắng ít nhất bốn lần gần nhất với giá trị nào dưới đây.

A. $1,24.10^{-5}$. **B.** $3,87.10^{-4}$. **C.** 4.10^{-4}. **D.** $1,65.10^{-7}$.

Lời giải

Chọn C

Xác suất để một con súc sắc xuất hiện mặt sáu chấm là $\dfrac{1}{6}$. Vậy xác suất thắng trong một lần chơi là $C_3^2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\dfrac{5}{6}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{2}{27}$. Xác xuất trong 6 lần chơi thắng ít nhất 4 lần $C_6^4\left(\dfrac{2}{27}\right)^4\left(\dfrac{25}{27}\right)^2+C_6^5\left(\dfrac{2}{27}\right)^5\dfrac{25}{27}+\left(\dfrac{2}{27}\right)^6\approx 3.997.10^{-4}$

Câu 43. Một người đang đứng tại gốc O của trục tọa độ Oxy. Do say rượu nên người này bước ngẫu nhiên sang trái hoặc sang phải trên trục tọa độ với độ dài mỗi bước bằng 1 đơn vị. Xác suất để sau 10 bước người này quay lại đúng gốc tọa độ O bằng

A. $\dfrac{15}{128}$. **B.** $\dfrac{63}{100}$. **C.** $\dfrac{63}{256}$. **D.** $\dfrac{3}{20}$.

Lời giải

Chọn C

Mỗi bước người này có 2 lựa chọn sang trái hoặc phải nên số phần tử không gian mẫu là 2^{10}.

Để sau đúng 10 bước người này quay lại đúng gốc tọa độ O thì người này phải sang trái 5 lần và sang phải 5 lần, do đó số cách bước trong 10 bước này là C_{10}^5.

Xác suất cần tính bằng $\dfrac{C_{10}^5}{2^{10}}=\dfrac{63}{256}$.

Câu 44. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 0 và 1

A. $\dfrac{41}{81}$. **B.** $\dfrac{25}{81}$. **C.** $\dfrac{10}{27}$. **D.** $\dfrac{25}{1944}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có không gian mẫu $n(\Omega)=9A_9^5=136080$.

Gọi biến cố A: "Số được chọn có mặt chữ số 0 và 1".

Số cần tìm có dạng là: $\overline{abcdef}$ $(a\neq 0)$.

▪**Trường hợp 1:** $a=1$.

Khi đó số 0 có 5 cách chọn vị trí.

Các chữ số còn lại có A_8^4 cách chọn.

Vậy có $5.A_8^4=8400$ số.

▪**Trường hợp 2:** $a \neq 1$.
Khi đó số 1 có 5 cách chọn vị trí.
Số 0 có 4 cách chọn vị trí.
Các chữ số còn lại có A_8^4 cách chọn.

Vậy có $5.4.A_8^4 = 33600$.

Do đó $n(A) = 8400 + 33600 = 42000$.

Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 0 và 1 là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{42000}{136080} = \dfrac{25}{81}$.

Câu 45. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 8, 9. Tính xác suất để chọn được số lớn hơn số 2019 và bé hơn số 9102.

A. $\dfrac{83}{120}$. **B.** $\dfrac{119}{180}$. **C.** $\dfrac{31}{45}$. **D.** $\dfrac{119}{200}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$.

Ta có $n(\Omega) = 6.6.5.4 = 720$.

Gọi A là biến cố: “Số được chọn số lớn hơn số 2019 và bé hơn số 9102”.

Tính $n(A)$:

TH1: $a = 2$, $b = 0$, $c \geq 3$, d tuỳ ý khác a,b,c suy ra có $1.1.4.4 = 16$ số.

TH2: $a = 2, b > 0$ có $1.5.5.4 = 100$ số.

TH3: $a \in \{3;4;8\}$, $b;c;d$ khác nhau và khác a, có $3.6.5.4 = 360$ số.

TH4: $a = 9; b = 0$, $c;d$ khác nhau và khác $a;b$ có $1.1.5.4 = 20$ số.

Suy ra $n(A) = 16 + 360 + 100 + 20 = 496$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{31}{45}$.

Câu 46. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 8, 9. Tính xác suất để chọn được số lớn hơn số 2019 và bé hơn số 9102.

A. $\dfrac{83}{120}$. **B.** $\dfrac{119}{180}$. **C.** $\dfrac{31}{45}$. **D.** $\dfrac{119}{200}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$.

Ta có $n(\Omega) = 6.6.5.4 = 720$.

Gọi A là biến cố: “Số được chọn số lớn hơn số 2019 và bé hơn số 9102”.

Tính $n(A)$:

TH1: $a = 2$, $b = 0$, $c \geq 3$, d tuỳ ý khác a,b,c suy ra có $1.1.4.4 = 16$ số.

TH2: $a = 2, b > 0$ có $1.5.5.4 = 100$ số.

TH3: $a \in \{3;4;8\}$, $b;c;d$ khác nhau và khác a, có $3.6.5.4 = 360$ số.

TH4: $a = 9; b = 0$, $c;d$ khác nhau và khác $a;b$ có $1.1.5.4 = 20$ số.

Suy ra $n(A) = 16 + 360 + 100 + 20 = 496$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{31}{45}$.

Câu 47. Gọi A là tập các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ A chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số được chọn có chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau.

A. $\frac{4}{25}$. **B.** $\frac{4}{15}$. **C.** $\frac{8}{25}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=5.5!=600$.

Gọi số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và có chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau là $\overline{abcde}$.

 Ta coi cặp $(3,4)$ là phần tử kép, khi đó chỉ có 5 phần tử 0, 1, 2, $(3,4)$, 5.

 Số các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và có chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau (kể cả số 0 đứng đầu) là: $2.5!=240$ số.

 Số các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và có chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau (có số 0 đứng đầu) là: $2.4!=48$ số.

Gọi B là biến cố cần tính xác suất, suy ra $n(B)=240-48=192$.

Vậy $P(B)=\frac{192}{600}=\frac{8}{25}$.

Câu 48. Cho tập $X=\{0;1;2;4;6;7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số được lập X. Tính xác suất để số được chọn có một chữ số xuất hiện đúng hai lần và các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần.

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{5}{11}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ $X=\{0;1;2;4;6;7\}$. Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega|=5.6^3=1080$.

Gọi A là biến cố cần tìm xác suất. Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Chữ số 0 xuất hiện 2 lần.

Có C_3^2 cách chọn 2 vị trí cho chữ số 0.

Có A_5^2 cách xếp 2 chữ số trong 5 chữ số vào 2 vị trí còn lại.

Suy ra trường hợp này có: $C_3^2.A_5^2=60$ số thỏa mãn.

Trường hợp 2: Chữ số x (khác 0) xuất hiện 2 lần và x ở vị trí hàng nghìn.

Có 5 cách chọn x từ tập X.

Có 3 cách chọn thêm một vị trí nữa cho x.

Có A_5^2 cách xếp 2 chữ số trong 5 chữ số vào 2 vị trí còn lại.

Suy ra trường hợp này có $5.3.A_5^2=300$ số thỏa mãn.

Trường hợp 3: Chữ số x (khác 0) xuất hiện 2 lần và x không nằm ở vị trí hàng nghìn.

Có 5 cách chọn x.

Có C_3^2 cách chọn vị trí cho chữ số x.

Có 4 cách chọn một chữ số (khác 0 và khác x)vào vị trí hàng nghìn.

Có 4 cách chọn một chữ số vào vị trí còn lại.

Suy ra: trường hợp này có $5.4.4.C_3^2=240$ số thỏa mãn.

Do đó, theo quy tắc cộng có $|\Omega_A|=60+300+240=600$.

Vậy xác suất của biến cố A: $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{600}{1080}=\frac{5}{9}$.

Câu 49. Một chiếc hộp đựng 9 viên bi được đánh số từ 1 đến 9, chọn ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi rồi nhân hai số trên hai bi với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là số chẵn.

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{13}{36}$. **D.** $\frac{13}{18}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_9^2$

Gọi A là biến cố " Chọn được hai viên bi có ghi số chẵn": $n(A) = C_4^2$

Gọi B là biến cố " Chọn được một viên bi có ghi số chẵn và một viên bi có ghi số lẻ": $n(B) = C_4^1.C_5^1$

Gọi C là biến cố " Chọn 2 viên bi sao cho tích các số ghi trên đó là số chẵn":

Khi đó: $P(C) = P(A+B) = P(A) = P(B) = \frac{C_4^2 + C_4^1.C_5^1}{C_9^2} = \frac{13}{18}$

Câu 50. Một tập thể có 14 người trong đó có hai bạn tên A và B. Người ta cần chọn một tổ công tác gồm 6 người. Tính số cách chọn sao cho trong tổ phải có 1 tổ trưởng và 5 tổ viên hơn nữa A hoặc B phải có mặt nhưng không đồng thời có mặt cả hai người trong tổ.

A. 11088. **B.** 9504. **C.** 15048. **D.** 3003

Lời giải

Chọn B

Chọn nhóm 6 bạn bất kỳ ta có C_{14}^6 cách.

Chọn nhóm 6 bạn trong đó có cả A và B, có C_{12}^4 cách.

Chọn nhóm 6 bạn trong đó không có hai bạn A và B, có C_{12}^6 cách.

Suy ra số cách chọn 6 bạn có mặt A hoặc B. nhưng không đồng thời có mặt cả hai người trong tổ là: $C_{14}^6 - C_{12}^4 - C_{12}^6 = 1584$ cách.

Chọn 1 tổ trưởng từ nhóm 6 bạn này, có 6 cách.

Vậy có $1584.6 = 9504$ cách chọn thỏa yêu cầu đề.

Câu 51. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Gọi P là tích của ba số ở ba lần tung (mỗi số là số chấm trên mặt xuất hiện ở mỗi lần tung), tính xác suất sao cho P không chia hết cho 6.

A. $\frac{82}{216}$. **B.** $\frac{60}{216}$. **C.** $\frac{90}{216}$. **D.** $\frac{83}{216}$.

Lời giải

Chọn D

Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất nên không gian mẫu có số phần tử $n(\Omega) = 6^3 = 216$.

Gọi A là biến cố tích 3 số chấm ở 3 lần gieo liên tiếp không chia hết cho 6.

Gọi x, y, z là số chấm trên từng lần gieo theo thứ tự.

Để thoả điều kiện không chia hết cho 6 thì xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Cả 3 lần gieo đều không xuất hiện mặt 3 và 6: $4^3 = 64$ khả năng.

Trường hợp 2: Cả 3 lần gieo xuất hiện mặt 3 ít nhất một lần, và những lần gieo còn lại không xuất hiện mặt chẵn.

Cả 3 lần đều ra mặt 3 chấm: $x = y = z = 3$ có 1 cách chọn.

Chỉ 2 lần ra mặt 3 chấm, lần còn lại nhận các giá trị: 1 và 5 có: $2.3 = 6$ cách.

Chỉ một lần ra mặt 3 chấm: $3.2^2 = 12$ cách.

Trường hợp 2 có $12 + 6 + 1 = 19$.

Do đó $n(A) = 64 + 19 = 83$. Suy ra $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{83}{216}$.

Câu 52. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tìm xác suất để số được chọn có các chữ số sắp xếp theo thứ tự tăng dần và không chứa hai chữ số nguyên nào liên tiếp nhau.

A. $\frac{1}{36}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{63}$. <u>D.</u> $\frac{5}{1512}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phép thử: " Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S".

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 9.A_9^3 = 4536$.

Gọi A là biến cố: " Số được chọn có các chữ số sắp xếp theo thứ tự tăng dần và không chứa hai chữ số nguyên nào liên tiếp nhau".

Gọi số được chọn là $\overline{abcd}$.

+) Vì chữ số sắp xếp theo thứ tự tăng dần nên: $1 \le a < b < c < d \le 9$.

+) Trong số được chọn không chứa hai chữ số nguyên nào liên tiếp nhau nên: $1 \le a < b-1 < c-2 < d-3 \le 6$.

Đặt: $a_1 = a$; $b_1 = b-1$; $c_1 = c-2$; $d_1 = d-3$.

Khi đó: $1 \le a_1 < b_1 < c_1 < d_1 \le 6$.

Số cách chọn bộ bốn số $(a_1;b_1;c_1;d_1)$ là: C_6^4 (cách)$\Rightarrow$ có C_6^4 cách chọn a; b; c; d.

Mỗi cách chọn $(a;b;c;d)$ chỉ có một cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán nên tạo ra một số. Suy ra: $n(A) = C_6^4 = 15$.

Xác suất cần tìm là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{1512}$.

Câu 53. Tạo một số tự nhiên có 9 chữ số từ tập hợp E = {1; 2; 3; 4; 5}. Trong đó: Chữ số 1 xuất hiện đúng 5 lần; các chữ số còn lại xuất hiện đúng một lần. Tính xác suất để số tự nhiên thu được có năm chữ số 1 được xếp liền kề nhau.

A. $\frac{5}{261}$. B. $\frac{5}{216}$. <u>C.</u> $\frac{5}{126}$. D. $\frac{5}{162}$.

Lời giải

Chọn C

Phép thử: "Tạo một số tự nhiên có 9 chữ số từ tập hợp E = {1; 2; 3; 4; 5}. Trong đó: Chữ số 1 xuất hiện đúng 5 lần; các chữ số còn lại xuất hiện đúng một lần".

<u>Cách 1</u>: Xét 9 phần tử (*hình thức*) trong {1_a, 1_b, 1_c, 1_d, 1_e, 2, 3, 4, 5} để tạo số tự nhiên có 9 chữ số thì ban đầu ta có 9! = 362880 cách, trong đó có 5! = 120 lần trùng lặp của bộ (1_a, 1_b, 1_c, 1_d, 1_e) nên ta có $\frac{9!}{5!} = \frac{36288}{120}$ = 3024 số được tạo thành.

<u>Cách 2</u>: Trong 9 vị trí của $\overline{a_1a_2a_3a_4a_4a_6a_7a_8a_9}$, chọn 5 vị trí cho chữ số 1 có C_9^5. Xếp 4 chữ số {2, 3, 4, 5} vào 4 vị trí còn lại có A_4^4 cách. Theo quy tắc nhân, có C.4! = 3024 số được tạo.

<u>Cách 3</u>: Xếp 4 chữ số {2, 3, 4, 5} vào 4 trong 9 vị trí ta có A_9^4 cách, 5 vị trí còn lại cho các chữ số 1 có C_5^5 cách. Theo quy tắc nhân có#A.1 = 3024 số được tạo.

Vậy $|\Omega| = 3024$.

Biến cố A: "số tự nhiên thu được có năm chữ số 1 được xếp liền kề nhau".

Năm chữ số 1 được xếp kề nhau. Khi đó bộ (1, 1, 1, 1, 1) được coi là một phần tử bình đẳng với các phần tử trong tập hợp {(1, 1, 1, 1, 1), 2, 3, 4, 5}. Sắp xếp 5 phần tử như vậy, ta thu được

5! = 120 số. $\Rightarrow |\Omega_A| = 120$

Kết quả: $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\dfrac{120}{3024}=\dfrac{5}{126}$. Đáp án **C.**

Câu 54. Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng trong một trận là $0,4$ (không có hòa). Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn $0,95$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: A

Gọi n là số trận An chơi. Gọi A là biến cố " An thắng ít nhất 1 trận trong loạt chơi n trận"

$\overline{A}$ là biến cố " An thua cả n trận" $P(A)=1-P(\overline{A})=1-(0.6)^n$

Ta tìm số nguyên dương n thỏa $P(A)\geq 0.95 \Leftrightarrow 0.05\geq (0.6)^n$

Vậy n nhỏ nhất bằng 6. An chơi tối thiểu 6 trận.

Câu 55. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số (không nhất thiết khác nhau) được lập từ các chữ số $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$. Chọn ngẫu nhiên một số $\overline{abc}$ từ S. Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn $a\leq b\leq c$.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{11}{60}$. **C.** $\dfrac{13}{60}$. **D.** $\dfrac{9}{11}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=9.10^2=900$.

Gọi biến cố A :"Chọn được một số thỏa mãn $a\leq b\leq c$".

Vì $a\leq b\leq c$ mà $a\neq 0$ nên trong các chữ số sẽ không có số 0.

Trường hợp 1: Số được chọn có 3 chữ số giống nhau có 9 số.

Trường hợp 2: Số được chọn tạo bởi hai chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 2 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là: C_9^2.

Mỗi bộ 2 chữ số được chọn tạo ra 2 số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có $2.C_9^2$ số thỏa mãn.

Trường hợp 3: Số được chọn tạo bởi ba chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 3 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là: C_9^3.

Mỗi bộ 3 chữ số được chọn chỉ tạo ra một số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có C_9^3 số thỏa mãn.

Vậy $n(A)=9+2.C_9^2+C_9^3=165$

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{165}{900}=\dfrac{11}{60}$.

Câu 56. Tập S gồm các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Xác suất để số được chọn không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau là

A. $\frac{11}{70}$.   **B.** $\frac{29}{140}$ **C.** $\frac{97}{560}$.   **D.** $\frac{13}{80}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của S là $8.A_8^5 = 53760$. Do đó, chọn ngẫu nhiên một số từ tập S có 53760 (cách).

Vì số được chọn có 6 chữ số nên ít nhất phải có hai chữ số chẵn, và vì không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau nên số được chọn có tối đa 3 chữ số chẵn.

TH1: Số được chọn có đúng 2 chữ số chẵn, khi đó gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$

Xếp 4 số lẻ trước ta có $4!$ cách.

	lẻ		lẻ		lẻ		lẻ	

Xếp 2 số chẵn vào 5 khe trống của các số lẻ có $C_5^2.A_5^2 - 4.C_4^1$ cách.

Trong trường hợp này có $4!\left(C_5^2.A_5^2 - 4.C_4^1\right) = 4416$ (số).

TH2: Số được chọn có đúng 3 chữ số chẵn, khi đó gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$

Xếp 3 chữ số lẻ trước ta có A_4^3 cách.

	lẻ		lẻ		lẻ	

Xếp 3 chữ số chẵn vào 4 khe trống của các số lẻ có $C_4^3.A_5^3 - C_3^2.A_4^2$ cách.

Trong trường hợp này có $A_4^3.\left(C_4^3.A_5^3 - C_3^2.A_4^2\right) = 4896$ (số).

Vậy có tất cả 9312 số có 6 chữ số sao cho không có hai chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

Xác suất cần tìm là $\frac{9312}{53760} = \frac{97}{560}$.

Câu 57. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 số trong tập S, tính xác suất để trong 3 số được lấy ra có đúng 1 số có chữ số 5 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

A. $0,544$.   **B.** $0,434$.   **C.** $0,333$.   **D.** $0,444$.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau là $x = \overline{abc}$

Ta có số các số x là $9.9.8 = 648$, suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{648}^3$

Gọi A là biến cố: " Ba số được chọn có đúng 1 số có chữ số 5".

+ Số thuộc tập S không có chữ số 5 có dạng $y = \overline{abc}$, $(a,b,c \neq 5)$. Số các số y là $8.8.7 = 448$

+ Số thuộc tập S có chữ số 5 có 3 dạng $\overline{5ab}$, $\overline{a5b}$, $\overline{ab5}$.

-Số các số dạng $\overline{5ab}$ là $9.8 = 72$

-Số các số dạng $\overline{a5b}$, $\overline{ab5}$ là $8.8 = 64$

Suy ra số các số thuộc S và có chữ số 5 là $72 + 2.64 = 200$

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố A là số cách chọn 3 số trong đó có 1 số có chữ số 5 và 2 số không có chữ số 5. Suy ra $|\Omega_A| = 200.C_{448}^2$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{200.C_{448}^2}{C_{648}^3} \simeq 0,444$

Câu 58. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số (không nhất thiết khác nhau) được lập từ các chữ số $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$. Chọn ngẫu nhiên một số $\overline{abc}$ từ S. Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn $a \le b \le c$.

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{11}{60}$. **C.** $\frac{13}{60}$. **D.** $\frac{9}{11}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 9.10^2 = 900$.

Gọi biến cố A:"Chọn được một số thỏa mãn $a \le b \le c$".

Vì $a \le b \le c$ mà $a \ne 0$ nên trong các chữ số sẽ không có số 0.

Trường hợp 1: Số được chọn có 3 chữ số giống nhau có 9 số.

Trường hợp 2: Số được chọn tạo bởi hai chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 2 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là: C_9^2.

Mỗi bộ 2 chữ số được chọn tạo ra 2 số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có $2.C_9^2$ số thỏa mãn.

Trường hợp 3: Số được chọn tạo bởi ba chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 3 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là: C_9^3.

Mỗi bộ 3 chữ số được chọn chỉ tạo ra một số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có C_9^3 số thỏa mãn.

Vậy $n(A) = 9 + 2.C_9^2 + C_9^3 = 165$

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{165}{900} = \frac{11}{60}$.

Câu 59. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

A. $\frac{40}{81}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{35}{81}$. **D.** $\frac{5}{54}$

Lời giải

Chọn A

Tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau có 648 phần tử.

Không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{648}^1 = 648$.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn có tổng các chữ số là lẻ".

Trường hợp 1: 1 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn: Số cách chọn là $3!.C_5^1.C_5^2 - 2C_5^1.C_4^1 = 260$

Trường hợp 2: 3 chữ số lẻ. Số cách chọn là $A_5^3 = 60$.

Vậy $n(A) = 260 + 60 = 320 \Rightarrow P(A) = \frac{320}{648} = \frac{40}{81}$.

Câu 60. Một tổ có 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Chia tổ thành 3 nhóm mỗi nhóm 4 người để làm 3 nhiệm vụ khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên nhóm nào cũng có nữ.

A. $\frac{16}{55}$. **B.** $\frac{8}{55}$. **C.** $\frac{292}{1080}$. **D.** $\frac{292}{34650}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu $C_{12}^4.C_8^4.1 = 34650$.

Chỉ có 3 nữ và chia mỗi nhóm có đúng 1 nữ và 3 nam.Nhóm 1 có $C_3^1.C_9^3 = 252$ cách.

Lúc đó còn lại 2 nữ, 6 nam, nhóm thứ 2 có $C_2^1.C_6^3 = 40$ cách chọn.

Cuối cùng còn 4 người là một nhóm: có 1 cách.

Theo quy tắc nhân thì có: $252.40.1 = 10080$ cách. Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{10080}{34650} = \dfrac{16}{55}$.

Câu 61. Gọi S là tập các số có 7 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số chọn được có các chữ số 3,4,5 đứng liền nhau và các chữ số 6,9 đứng liền nhau.

A. $\dfrac{1}{135}$. **B.** $\dfrac{3}{700}$. **C.** $\dfrac{1}{210}$. **D.** $\dfrac{1}{630}$.

Lời giải

Không gian mẫu là số số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau $\Omega = 9.9.8.7.6.5.4$.

Gọi A là biến cố số chọn được thỏa mãn yêu cầu đề bài

Số thỏa mãn yêu cầu đề bài bắt buộc phải có 5 chữ số 3,4,5,6,9 nên cần chọn thêm 2 chữ số từ 5 số còn lại (0,1,2,7,8)

Số cách chọn ra 2 trong 5 chữ số C_5^2 (1)

Theo đề ta "buộc" 3 chữ số 3,4,5 lại và xem như 1 phần tử có 3! cách, tương tự cũng buộc 2 chữ số 6 và 9 lại và xem như một phần tử có 2! cách (2)

Sau đó hoán vị 4 phần tử gồm 2 phần tử đã chọn ở (1) và 2 phần tử đã chọn ở (2) có 4! Cách

Tổng cộng có $C_5^2.3!.2!.4!$ số

Nhưng trong cách tính trên vẫn còn số có dạng $\overline{Oabcdef}$ tức là có số 0 đứng đầu

Ta tính số phần tử của trường hợp này tương tự như cách làm trên đối với số có 6 chữ số và chắc chắc số 0 đứng đầu, ta có $C_4^1.3!.2!.3!$

Vậy $\Omega_A = C_5^2.3!.2!.4! - C_4^1.3!.2!.3!$

Xác xuất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{\Omega_A}{\Omega} = \dfrac{C_5^2.3!.2!.4! - C_4^1.3!.2!.3!}{9.9.8.7.6.5.4} = \dfrac{1}{210}$

Chọn C

Câu 62. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số phân biệt được lấy từ các số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Xác suất chọn được số chỉ chứa 3 số lẻ là

A. $\dfrac{8}{21}$. **B.** $\dfrac{16}{21}$. **C.** $\dfrac{10}{21}$. **D.** $\dfrac{23}{42}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = A_9^6 = 60480$.

Gọi A: "số được chọn chỉ chứa 3 số lẻ". Ta có: $n(A) = C_5^3.A_6^3.A_4^3 = 28800$.

(Lấy ra 3 số lẻ từ 5 số lẻ đã cho- chọn ra 3 vị trí từ 6 vị trí của số $\overline{abcdef}$ xếp thứ tự 3 số vừa chọn – Lấy ra 3 số chẵn từ 4 số chẵn đã cho xếp thứ tự vào 3 vị trí còn lại của số $\overline{abcdef}$)

Khi đó: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{28800}{60480} = \dfrac{10}{21}$.

Câu 63. Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số

A. $\dfrac{8}{33}$. **B.** $\dfrac{14}{33}$. **C.** $\dfrac{29}{66}$. **D.** $\dfrac{37}{66}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách lấy tùy ý 2 viên từ hộp chứa 12 viên bi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{12}^2 = 66$.

Gọi A là biến cố "2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số".

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi đỏ là $4.4=16$ cách (do số bi đỏ ít hơn nên ta lấy trước, có 4 cách lấy bi đỏ. Tiếp tục lấy bi xanh nhưng không lấy viên trùng với số của bi đỏ nên có 4 cách lấy bi xanh).

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi vàng là $3.4=12$ cách.

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi đỏ và 1 bi vàng là $3.3=9$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=16+12+9=37$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{37}{66}$.

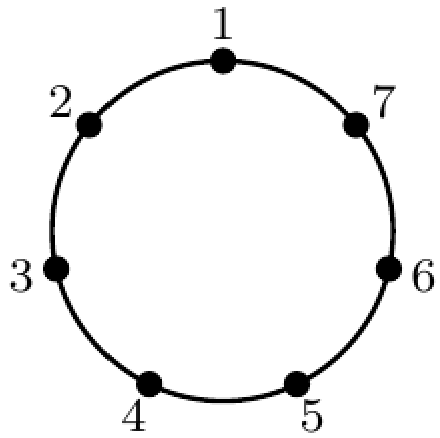
Câu 64. Có bao nhiêu các sắp xếp 7 người gồm 3 đàn ông, 2 đàn bà, 2 em bé vào một bàn tròn sao cho một em bé ngồi giữa 2 người đàn ông, em bé còn lại ngồi giữa 2 người đàn bà?

A. 24. **B.** 36. **C.** 21. **D.** 48.

Lời giải

Chọn D

Vì xếp trên một bàn tròn nên không mất tính tổng quát ta cố định ghế số 1 là ghế em bé và đánh số các ghế lần lượt theo ngược chiều kim đồng hồ (như hình vẽ).



Vì một em bé ngồi giữa 2 người đàn ông, em bé còn lại ngồi giữa 2 người đàn bà nên ghế 1 và 4 là của em bé (vì bàn tròn nên trường hợp ghế 5 là em bé trùng với trường hợp đã nói). Do vậy ta có 2 phương án sắp xếp sau:

PA1: 2-1-7 là bà-bé-bà, 3-4-5 là ông-bé-ông.

Sắp xếp 2 bé vào ghế 1 và 4 có 2 cách.

Sắp xếp 2 bà vào ghế 2 và 7 có 2 cách.

Sắp xếp 3 ông vào 3 ghế 3, 5 và 6 có 3! cách.

Suy ra phương án này có $2.2.3!=24$ cách sắp xếp.

PA2: 2-1-7 là ông-bé-ông, 3-4-5 là bà-bé bà. Tương tự trên ta có 24 cách sắp xếp.

Vậy có tổng cộng 48 cách sắp xếp.

Câu 65. Cho tập hợp $A=\{1,2,3,...,10\}$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ A. Tìm xác suất để trong ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

A. $P=\dfrac{7}{90}$. **B.** $P=\dfrac{7}{24}$. **C.** $P=\dfrac{7}{10}$. **D.** $P=\dfrac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{10}^3=120$.

Gọi B là biến cố "Ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp".

$\Rightarrow \overline{B}$ là biến cố "Ba số được chọn có ít nhất hai số là các số tự nhiên liên tiếp".

+ Bộ ba số dạng $(1,2,a_1)$, với $a_1 \in A\setminus\{1,2\}$: có 8 bộ ba số.

+ Bộ ba số có dạng $(2,3,a_2)$, với $a_2 \in A\setminus\{1,2,3\}$: có 7 bộ ba số.

+ Tương tự mỗi bộ ba số dạng $(3,4,a_3)$, $(4,5,a_4)$, $(5,6,a_5)$, $(6,7,a_6)$, $(7,8,a_7)$, $(8,9,a_8)$, $(9,10,a_9)$ đều có 7 bộ.

$\Rightarrow n\left(\overline{B}\right) = 8 + 8.7 = 64$.

$\Rightarrow P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \dfrac{64}{120} = \dfrac{7}{15}$.

Câu 66. Cho tập hợp $A = \{1;2;...;100\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của A. Xác suất để 3 phần tử được chọn lập thành một cấp số cộng bằng

A. $\dfrac{1}{132}$. **B.** $\dfrac{1}{66}$. **C.** $\dfrac{1}{33}$. **D.** $\dfrac{1}{11}$.

Lời giải

ChọnB.

Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử từ tập $A \Rightarrow$ Không gian mẫu là $|\Omega| = C_{100}^3$.

Gọi biến cố A:"Ba phần tử được chọn lập thành một cấp số cộng".

Cách 1. Giả sử 3 phần tử đó là $x; x+d; x+2d$ với $x, d \in \mathbb{N}^*$.

Với $x=1$ thì ta có $x+2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{99}{2} \Rightarrow d \in \{1;2;...;49\} \Rightarrow$ có 49 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=2$ thì ta có $x+2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{98}{2} \Rightarrow d \in \{1;2;...;49\} \Rightarrow$ có 49 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=3$ thì ta có $x+2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{97}{2} \Rightarrow d \in \{1;2;...;48\} \Rightarrow$ có 48 bộ ba số thỏa mãn.

… Với $x=97$ thì ta có $x+2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{3}{2} \Rightarrow d \in \{1\} \Rightarrow$ có 1 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=98$ thì ta có $x+2d \le 100 \Leftrightarrow d \le 1 \Rightarrow d \in \{1\} \Rightarrow$ có 1 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=99$ thì ta có $x+2d \le 100 \Leftrightarrow d \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow d \in \varnothing \Rightarrow$ không có bộ ba số thỏa mãn.

Do đó ta thấy có tất cả $2(49+48+47+...+2+1) = 2.\dfrac{49(49+1)}{2} = 2450$ bộ ba số thỏa mãn.

Cách 2. Giả sử 3 phần tử đó là $a;b;c$ với $a,b,c \in A$.

Trong tập A có 50 số lẻ, 50 số chẵn.

Do a,b,c lập thành một CSC nên $a+c = 2b$ là một số chẵn.

Do đó hai số a,c cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Đồng thời ứng với 1 cách chọn hai số a,c thì xác định được duy nhất 1 số b.

Tổng số bộ ba số a,b,c là $C_{50}^2 + C_{50}^2 = 2450$ (bộ ba).

Vậy xác suất của biến cố A là $P = \dfrac{2450}{C_{100}^3} = \dfrac{1}{66}$.

Câu 67. Một nhóm gồm 3 học sinh lớp 10, 3 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngồi vào một hàng có 9 ghế, mỗi em ngồi 1 ghế. Xác suất để 3 học sinh lớp 10 không ngồi 3 ghế liền nhau.

#**A.** $\frac{11}{12}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{7}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$

Lời giải

Chọn A

Số phần tử không gian mẫu là số hoán vị của 9 phần tử: $n(\Omega)=9!$

Gọi A là biến cố " 3 học sinh lớp 10 ngồi 3 ghế liền nhau"

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố " 3 học sinh lớp 10 ngồi 3 ghế không liền nhau"

Xem 3 học sinh lớp 10 như một khối đoàn kết, xếp khối này với 6 học sinh còn lại (lớp 11 và lớp 12) ta có $7!$ cách xếp, sau đó hoán đổi vị trí 3 học sinh lớp 10 cho nhau ta lại có $3!$ cách xếp. Vậy số biến cố thuận lợi $n(A)=7!.3!$

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{12}$.

Vậy xác suất cần tìm $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{11}{12}$.

Câu 68. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{1}{10}$.

Lời giải

Đáp án: A

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 6 học sinh vào 6 vị trí nên $n(\Omega)=6!=720$

Gọi A là biến cố: "Nam, nữ ngồi đối diện nhau", ta thực hiện

-Xếp 3 học sinh nam vào 1 dãy 3 ghế ta có $3!=6$

-Xếp 3 học sinh nữ vào dãy đối diện với học sinh nam ta có $3!=6$

-Hoán vị chỗ ngồi của hai bạn đối diện cho nhau ta có $2!.2!.2!=8$

Vậy $n(A)=6.6.8=288 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{288}{6!}=\frac{2}{5}$

Câu 69. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

A. $\frac{41}{81}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{40}{81}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là biến cố số được chọn có tổng là một số lẻ.

Ta có $n(\Omega)=9.9.8=648$.

Vì số được chọn có tổng các chữ số là một số lẻ nên ta chia thành hai trường hợp.

Trường hợp 1: Ba số được chọn đều lẻ.

Số cách chọn và sắp xếp ba chữ số lẻ là: $A_5^3=60$ cách chọn.

Trường hợp 2: Ba số được chọn có hai chữ số chẵn và một chữ số lẻ.

Số cách chọn và sắp xếp ba chữ số có hai chữ số chẵn và một chữ số lẻ: $C_5^2.C_5^1.3!$ cách chọn.

Số cách chọn và sắp xếp ba chữ số có hai chữ số chẵn và một chữ số lẻ số 0 đứng đầu là: $C_5^1.C_4^1.2!$ cách chọn.

Vậy số các số thỏa mãn là: $C_5^2.C_5^1.3! - C_5^1.C_4^1.2! = 260$ số.

$\Rightarrow n(A) = 60 + 260 = 320$ số.

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{320}{648} = \dfrac{40}{81}$.

Câu 70. Đề kiểm tra 15 phút có 10 câu trắc nghiệm, mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó có một phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 1,0 điểm. Một thí sinh làm cả 10 câu, mỗi câu chọn một phương án. Tính xác suất để thí sinh đó đạt từ 8,0 điểm trở lên.

A. $\dfrac{436}{4^{10}}$. **B.** $\dfrac{463}{4^{10}}$. **C.** $\dfrac{436}{10^4}$. **D.** $\dfrac{463}{10^4}$.

Lời giải

Thí sinh làm cả 10 câu, mỗi câu có 4 cách chọn một phương án nên ta có 4^{10} cách để hoàn thành bài kiểm tra $\Rightarrow n(\Omega) = 4^{10}$.

Gọi A là biến cố thí sinh đó đạt từ 8,0 điểm trở lên.

Trường hợp 1: Thí sinh làm sai 2 câu, có $C_{10}^2.3^2$ cách.

Trường hợp 2: Thí sinh làm sai 1 câu, có $C_{10}^1.3$ cách.

Trường hợp 3: Thí sinh làm đúng cả 10 câu, có 1 cách.

$\Rightarrow n(A) = C_{10}^2.3^2 + C_{10}^1.3 + 1 = 436$

Vậy xác suất để thí sinh đạt từ 8,0 điểm trở lên là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{436}{4^{10}}$.

Câu 71. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 23 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\dfrac{11}{23}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{265}{529}$. **D.** $\dfrac{12}{23}$.

Lời giải:

Chọn 2 trong 23 số, số cách chọn là: A_{23}^2

Gọi $a,b;\{a \ne b, 1 \le a,b \le 23\}$ là 2 số cần tìm. Vì $a+b$ là số chẵn, nên ta chia làm 2 trường hợp chọn a,b.

Trường hợp 1: a,b đều chẵn, số cách chọn là: A_{11}^2.

Trường hợp 2: a,b đều lẻ, số cách chọn là: A_{12}^2.

Vây, xác suất để tổng 2 số được chọn là chẵn là: $P = \dfrac{A_{11}^2 + A_{12}^2}{A_{23}^2} = \dfrac{11}{23}$

Chọn A

Câu 72. Cho đa giác đều 20 cạnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều. Xác suất để 3 đỉnh lấy được là 3 đỉnh của một tam giác vuông không có cạnh nào là cạnh của đa giác đều bằng

A. $\dfrac{3}{38}$. **B.** $\dfrac{7}{114}$. **C.** $\dfrac{7}{57}$. **D.** $\dfrac{5}{114}$.

Lời giải

Chọn C

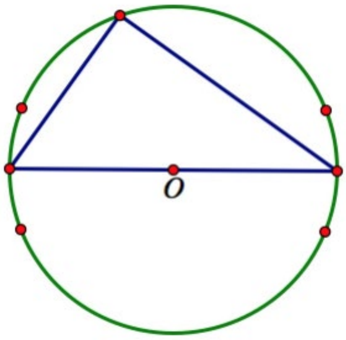
Đa giác đều nội tiếp một đường tròn tâm O. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh có C_{20}^{3} cách.

Để 3 đỉnh là 3 đỉnh một tam giác vuông không có cạnh nào là cạnh của đa giác đều thực hiện theo các bước:

Lấy một đường kính qua tâm đường tròn có 10 cách ta được 2 đỉnh.

Chọn đỉnh còn lại trong $20-2-4=14$ đỉnh (loại đi 2 đỉnh thuộc đường kính và 4 đỉnh gần ngay đường kính đó) cách.

Vậy có tất cả $10\times 14=140$ tam giác thoả mãn.



Xác suất cần tính bằng $\dfrac{140}{C_{20}^{3}}=\dfrac{7}{57}$.

Câu 73. Cho tập hợp $S=\{1;2;3;4;5;6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau lấy từ S sao cho tổng chữ số các hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm lớn hơn tổng chữ số các hàng còn lại là 3. Tính tổng T của các phần tử của tập hợp M.

A. T = 11003984 **B.** T = 36011952 **C.** T = 12003984 **D.** T = 18005967

Lời giải

Chọn B

Gọi số tự nhiên thỏa mãn là $\overline{abcdef}$ với $a,b,c,d,e,f\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Do yêu cầu bài toán nên $d+e+f=12, a+b+c=9$ hay $(a;b;c)\in\{(1;2;6),(1;3;5),(2;3;4)\}$ và $(d;e;f)\in\{(3;4;5),(2;4;6),(1;5;6)\}$ tương ứng.

Xét hai bộ $(1;2;6)$ và $(3;4;5)$ thì ta lập được 3!.3!= 36 số, trong đó các chữ số 1,2,6 có mặt ở hàng trăm nghìn 36: 3 =12 lần, hàng chục nghìn 12 lần, hàng nghìn 12 lần và các chữ số 3,4,5 cũng có mặt ở hàng trăm, chục, đơn vị 12 lần.

Tổng các số trong trường hợp này là:

$12.(1+2+6).10^5+12.(1+2+6).10^4+12.(1+2+6).10^3$

$+12.(3+4+5).10^2+12.(3+4+5).10+12.(3+4+5).1=12003984$

Tương tự ở hai cặp còn lại ta cũng có tổng các số bằng 12003984.

Khi đó tổng các phần tử của M là 12003984.3 = 36011952

Câu 74. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tích các chữ số là chẵn bằng:

A. $\dfrac{41}{81}$. **B.** $\dfrac{49}{54}$. **C.** $\dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{98}{135}$.

Lời giải.

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=9\times 9\times 8=648$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố: "tích nhận được là số lẻ"

$n(\overline{A})=5\times 4\times 3=60$.

$\Rightarrow n(A)=648-60=588$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{588}{648}=\dfrac{49}{54}$.

Câu 75. Chọn ngẫu nhiên một số từ 50 số nguyên đầu tiên. Tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 6.

A. $\dfrac{4}{25}$. **B.** $\dfrac{3}{25}$. **C.** $\dfrac{9}{50}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian $n(\Omega)=50$.

Để một số nguyên dương chia hết cho 6 thì nó phải có dạng $6k\Rightarrow 0<6k\le 50$. Vì k nguyên $\Rightarrow 0<k\le 8\Rightarrow$ Có tất cả 8 số chia hết cho 6 trong 50 số nguyên dương đầu tiên.

Câu 76. Tại SEA Games 2019, môn bóng chuyền nam có 8 đội bóng tham dự, trong đó có hai đôi Việt Nam và Thái Lan. Các đội bóng được chia ngẫu nhiên thành 2 bảng có số đội bóng bằng nhau. Xác suất để hai đội Việt Nam và Thái Lan nằm hai bảng khác nhau bằng

A. $\dfrac{3}{7}$. **B.** $\dfrac{4}{7}$. **C.** $\dfrac{3}{14}$. **D.** $\dfrac{11}{14}$.

Lời giải

Chọn B

Có 8 đội chia thành hai bảng số phần tử không gia mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_8^4$.

Gọi A là biến cố "hai đội Việt Nam và Thái Lan nằm hai bảng khác nhau"

Số phần tử của biến cố A là $n(\mathrm{A})=2.\mathrm{C}_6^3.\mathrm{C}_4^4$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{2.\mathrm{C}_6^3.\mathrm{C}_4^4}{\mathrm{C}_8^4}=\dfrac{4}{7}$

Câu 77. Có 100 tấm thẻ được đánh số từ 801 đến 900 (mỗi tấm thẻ được đánh một số khác nhau). Lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 3.

A. $\dfrac{817}{2450}$. **B.** $\dfrac{248}{3675}$. **C.** $\dfrac{2203}{7350}$. **D.** $\dfrac{2179}{7350}$.

Lời giải

Chọn A

Số cách lấy ra 3 tấm thẻ trong 100 tấm thẻ là $C_{100}^3=161700\Rightarrow n(\Omega)=161700$.

Trong 100 tấm thẻ từ 801 đến 900, số các tấm thẻ chia hết cho 3, chia 3 dư 1, chia 3 dư 2 lần lượt là 34 tấm, 33 tấm, 33 tấm.

Gọi A là biến cố "Lấy được ba tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3".

Trường hợp 1: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia hết cho 3.

Số cách lấy là: $C_{34}^{3} = 5984$ (cách).

Trường hợp 2: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia 3 dư 1.

Số cách lấy là: $C_{33}^{3} = 5456$ (cách).

Trường hợp 3: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia 3 dư 2.

Số cách lấy là: $C_{33}^{3} = 5456$ (cách).

Trường hợp 4: Ba tấm thẻ lấy ra có 1 tấm chia hết cho 3; 1 tấm chia 3 dư 1 và 1 tấm chia 3 dư 2.

Số cách lấy là: $34.33.33 = 37026$ (cách).

Vậy số các trường hợp thuận lợi của biến cố A là: $n(A) = 5984 + 5456 + 5456 + 37026 = 53922$ (cách).

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{53922}{161700} = \dfrac{817}{2450}$.

Câu 78. Có 100 tấm thẻ được đánh số từ 801 đến 900 (mỗi tấm thẻ được đánh một số khác nhau). Lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 3.

A. $\dfrac{817}{2450}$. **B.** $\dfrac{248}{3675}$. **C.** $\dfrac{2203}{7350}$. **D.** $\dfrac{2179}{7350}$.

Lời giải

Chọn A

Số cách lấy ra 3 tấm thẻ trong 100 tấm thẻ là $C_{100}^{3} = 161700 \Rightarrow n(\Omega) = 161700$.

Trong 100 tấm thẻ từ 801 đến 900, số các tấm thẻ chia hết cho 3, chia 3 dư 1, chia 3 dư 2 lần lượt là 34 tấm, 33 tấm, 33 tấm.

Gọi A là biến cố "Lấy được ba tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3".

Trường hợp 1: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia hết cho 3.

Số cách lấy là: $C_{34}^{3} = 5984$ (cách).

Trường hợp 2: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia 3 dư 1.

Số cách lấy là: $C_{33}^{3} = 5456$ (cách).

Trường hợp 3: Cả ba tấm thẻ lấy ra đều chia 3 dư 2.

Số cách lấy là: $C_{33}^{3} = 5456$ (cách).

Trường hợp 4: Ba tấm thẻ lấy ra có 1 tấm chia hết cho 3; 1 tấm chia 3 dư 1 và 1 tấm chia 3 dư 2.

Số cách lấy là: $34.33.33 = 37026$ (cách).

Vậy số các trường hợp thuận lợi của biến cố A là: $n(A) = 5984 + 5456 + 5456 + 37026 = 53922$ (cách).

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{53922}{161700} = \dfrac{817}{2450}$.

Câu 79. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

A. $\dfrac{40}{81}$. **B.** $\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{35}{81}$. **D.** $\dfrac{5}{54}$.

Lời giải

Chọn A

Tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau $S = A_{10}^3 - A_9^2 = 648$.

Không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{648}^1 = 648$.

Để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ thì

Gọi A là biến cố "số được chọn có tổng các chữ số là lẻ".

Trường hợp 1: 1 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn là: $3!.C_5^1.C_5^2 - 1.C_5^1.C_4^1.2! = 260$.

Trường hợp 2: 3 chữ số lẻ. Số cách chọn là $A_5^3 = 60$.

Vậy $n(A) = 280 + 60 = 320 \Rightarrow P(A) = \dfrac{320}{648} = \dfrac{40}{81}$.

Câu 80. Chọn ngẫu nhiên một số có 3 chữ số từ tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau. Xác suất số được chọn chia hết cho 3 là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{19}{54}$. **C.** $\dfrac{31}{90}$. **D.** $\dfrac{8}{27}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu $|\Omega| = 9.9.8 = 648$.

Gọi $\overline{abc}$ (với a, b, $c \in A = \{0;1;2;...;9\}$ và $a \neq 0$) là số được chọn.

Vì $\overline{abc} \vdots 3$ nên $(a+b+c) \vdots 3$. Suy ra 3 chữ số a, b, c nằm trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: cả 3 số đều chia hết cho 3 hay a, b, $c \in B = \{0;3;6;9\}$.

Số số lập được là $3.3.2 = 18$ số.

Trường hợp 2: cả 3 số đều chia hết cho 3 dư 1 hoặc dư 2 hay $a,b,c \in C = \{1;4;7\}$ hoặc $a,b,c \in D = \{2;5;8\}$. Số số lập được trong trường hợp này là $2.3! = 12$ số.

Trường hợp 3: trong 3 số a,b,c có 1 số chia hết cho 3, 1 số chia hết cho 3 dư 1, 1 số chia hết cho 3 dư 2. Suy ra để lập như sau:

•Lập các dãy 3 số như trên có $4.3.3.3! = 216$ số.

•Loại đi các trường hợp có số 0 ở đầu (có $3.3.2! = 18$ số) còn lại $216 - 18 = 198$ số.

Vậy có tổng cộng $18 + 12 + 198 = 228$ số thỏa yêu cầu nên xác suất chọn được là $p = \dfrac{228}{648} = \dfrac{19}{54}$.

Câu 81. Cho tập $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập E. Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5.

A. $P = \dfrac{3}{4}$. **B.** $P = \dfrac{24}{49}$. **C.** $P = \dfrac{25}{49}$. **D.** $P = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Số các các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập E là $A_7^3 = 210$. Trong đó số các số không có mặt chữ số 5 là $A_6^3 = 120$, và các số có mặt chữ số 5 là 90.

Gọi A là biến cố hai số được viết lên bảng đều có mặt chữ số 5 thì $P(A) = \dfrac{C_{90}^1.C_{90}^1}{C_{210}^1.C_{210}^1} \Rightarrow P(A) = \dfrac{9}{49}$

Gọi B là biến cố hai số được viết lên bảng đều không có mặt chữ số 5 thì

$P(B) = \dfrac{C_{120}^1.C_{120}^1}{C_{210}^1.C_{210}^1} \Rightarrow P(B) = \dfrac{16}{49}$

Ta có A, B xung khắc nên $P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(A\cup B)=\dfrac{25}{49}$

Suy ra xác suất cần tính là $P=1-P(A\cup B)\Rightarrow P=\dfrac{24}{49}$.

Câu 82. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà trong mỗi số này các chữ số không lặp lại?

A. 1956. **B.** 1631. **C.** 873. **D.** 720.

Lời giải

Chọn B

Vì có 6 chữ số khác nhau nên trong các số cần tìm cũng chỉ có tối đa sáu chữ số.

Dùng S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6 để kí hiệu tập số dạng $a_1,\overline{a_1a_2},\overline{a_1a_2a_3},\overline{a_1a_2a_3a_4},\overline{a_1a_2a_3a_4a_5},\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ được lập từ $A=\{0;1;...;5\}$.

Ta có: $\begin{array}{l}|S_1|=6.\\ |S_2|=A_6^2-A_5^1=25.\\ |S_3|=A_6^3-A_5^2=100.\\ |S_4|=A_6^4-A_5^3=300.\\ |S_5|=A_6^5-A_5^4=600.\\ |S_6|=A_6^6-A_5^5=600.\end{array}$

Vậy có 1631 số phải tìm.

Câu 83. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên A có bốn chữ số. Gọi N là số thỏa mãn $3^N=A$. Xác suất để N là số tự nhiên bằng:

A. $\dfrac{1}{4500}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2500}$. **D.** $\dfrac{1}{3000}$.

Lời giải

Chọn A

Ký hiệu B là biến cố lấy được số tự nhiên A thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có: $3^N=A\Leftrightarrow N=\log_3 A$.

Để N là số tự nhiên thì $A=3^m\ (\mathrm{m}\in\mathbb{N})$.

Những số A dạng có 4 chữ số gồm $3^7=2187$ và $3^8=6561$

$n(\Omega)=9000;\ n(B)=2$

Suy ra: $P(B)=\dfrac{1}{4500}$.

Câu 84. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số có 8 chữ số được lập từ 2 chữ số 0 và 1. Xác suất chọn được số không có hai chữ số 1 nào đứng kề nhau là:

A. $\dfrac{25}{128}$. **B.** $\dfrac{43}{128}$. **C.** $\dfrac{21}{128}$. **D.** $\dfrac{17}{64}$.

Lời giải

Chọn C

Số có 8 chữ số được lập từ 2 chữ số 0 và 1 có dạng là $\overline{1a_1...a_7}$ với $a_1,...,a_7\in\{0;1\}$.

Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega|=2^7=128$.

Gọi A là biến cố "số được chọn không có 2 chữ số 1 nào đứng kề nhau".

Vì không có 2 chữ số 1 nào đứng kề nhau nên số được chọn có nhiều nhất 4 chữ số 1 và có dạng $x=\overline{10a_3...a_8}$ và trong đó x có k chữ số 1, $k\in\{1;2;3;4\}$.

Trong 6 chữ số từ a_3 đến a_8 có $7-k$ chữ số 0, khi đó có $8-k$ chỗ trống giữa các chữ số 0 đó và chữ số $a_2=0$. Trong các chỗ trống này ta chọn $k-1$ chỗ trống để đặt các chữ số 1.

Do vậy $|A|=\sum_{k=1}^{4}C_{8-k}^{k-1}=C_7^0+C_6^1+C_5^2+C_4^3=21$.

Vậy xác suất cần tìm là $p(A)=\dfrac{21}{128}$.

Câu 85. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau được lập từ $0,1,2,3,4,5,6$. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập S. Xác suất để tích hai số được chọn là một số chẵn.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải:

Chọn B

Số phần tử của tập S là: $6.6=36$

Số các số chẵn có trong S là: $1.6+3.5=21$ (TH $b=0$, TH $b\neq 0$); số các số lẻ là: 15

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{36}^2$

Gọi A là biến cố: "Chọn được 2 số có tích là một số chẵn"

TH1: Chọn được 2 số chẵn, có: C_{21}^2

TH2: Chọn được 1 số chẵn, 1 số lẻ, có: $C_{21}^1.C_{15}^1$

ĐS: $P(A)=\dfrac{C_{21}^2+C_{21}^1.C_{15}^1}{C_{36}^2}=\dfrac{5}{6}$.

Câu 86. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1\le a\le b\le c\le d\le 9$.

A. $0,079$. **B.** $0,055$. **C.** $0,014$. **D.** $0,0495$.

Lời giải

Chọn B

Chọn số tự nhiên có 4 chữ số bất kỳ có: $n(\Omega)=9.10.10.10=9000$ (cách).

Gọi A là biến cố: "Số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1\le a\le b\le c\le d\le 9$". (*)

Cách 1: Dùng tổ hợp

Nhận xét rằng với 2 số tự nhiên bất kỳ ta có: $m\le n\Leftrightarrow m<n+1$.

Do đó nếu đặt: $\begin{cases}x=a\\y=b+1\\z=c+2\\t=d+3\end{cases}$

Từ giả thuyết $1\le a\le b\le c\le d\le 9$ ta suy ra: $1\le x<y<z<t\le 12$ (**).

Với mỗi tập con gồm 4 phần tử đôi một khác nhau được lấy ra từ $\{1,2,...,12\}$ ta đều có được duy nhất một bộ số thoả mãn (**) và do đó tương ứng ta có duy nhất một bộ số (a,b,c,d) thoả mãn (*). Số cách chọn tập con thoả tính chất trên là tổ hợp chập 4 của 12 phần tử, do đó: $n(A)=C_{12}^4=495$.

Vậy: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{495}{9000}=0,055$.

Cách 2: Dùng tổ hợp lặp

Chọn số tự nhiên có 4 chữ số bất kỳ có: $n(\Omega)=9.10.10.10=9000$ (cách).

Mỗi tập con có 4 phần tử được lấy từ tập $\{1,2,...,9\}$ (trong đó mỗi phần tử có thể được chọn lặp lại nhiều lần) ta xác định được một thứ tự không giảm duy nhất và theo thứ tự đó ta có được một số tự nhiên có dạng $\overline{abcd}$ (trong đó $1 \le a \le b \le c \le d \le 9$). Số tập con thoả tính chất trên là số tổ hợp lặp chập 4 của 9 phần tử.

Do đó theo công thức tổ hợp lặp ta có: $n(A) = C_{9+4-1}^4 = 495$.

Vậy: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{495}{9000} = 0,055$.

Câu 87. Có ba chiếc hộp A,B,C mỗi chiếc hộp chứa ba chiếc thẻ được đánh số $1,2,3$. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ. Gọi P là xác suất để tổng số ghi trên ba tấm thẻ là 6. Khi đó P bằng:

A. $\dfrac{6}{27}$. **B.** $\dfrac{1}{27}$. **C.** $\dfrac{8}{27}$. **D.** $\dfrac{7}{27}$.

Lời giải

Chọn D

$n(\Omega) = 3.3.3 = 27$. Gọi A:"tổng số ghi trên ba tấm thẻ là 6".

Để tổng số ghi trên ba tấm thẻ là 6 thì có các tổng sau:

$1+2+3=6$, khi đó hoán vị 3 phần tử $1,2,3$ ta được $3! = 6$ cách.

$2+2+2=6$, khi đó ta có 1 cách.

Do đó $n(A) = 6+1 = 7$. Vậy $P(A) = \dfrac{7}{27}$.

Câu 88. Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4;5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\dfrac{1}{30}$. **B.** $\dfrac{3}{25}$. **C.** $\dfrac{22}{25}$. **D.** $\dfrac{2}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta tính số phần tử thuộc tập S như sau

+ Số các số thuộc tập S có 3 chữ số là A_5^3.

+ Số các số thuộc tập S có 4 chữ số là A_5^4.

+ Số các số thuộc tập S có 5 chữ số là A_5^5.

Suy ra số phần tử của tập S là $A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 300$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $C_{300}^1 = 300$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có tổng các chữ số bằng 10". Các tập con của A có tổng số phần tử bằng 10 là $A_1 = \{1;2;3;4\}, A_2 = \{2;3;5\}, A_3 = \{1;4;5\}$.

+ Từ A_1 lập được các số thuộc S là $4!$.

+ Từ A_2 lập được các số thuộc S là $3!$.

+ Từ A_3 lập được các số thuộc S là $3!$.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $4!+3!+3! = 36$.

Xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{36}{300} = \dfrac{3}{25}$.

Câu 89. Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

A. $0,25^{30}.0,75^{20}$. **B.** $0,25^{20}.0,75^{30}$. **C.** $0,25^{30}.0,75^{20}.C_{50}^{20}$. **D.** $1-0,25^{20}.0,75^{30}$.

Lời giải

Chọn C

Xác suất để chọn được câu trả lời đúng là $\frac{1}{4}$, xác suất để chọn được câu trả lời sai là $\frac{3}{4}$.

Để được 6 điểm thì thí sinh đó phải trả lời đúng 30 câu và trả lời sai 20 câu.

Xác suất để thí sinh đó được 6 điểm là $C_{50}^{20}\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}=0,25^{30}.0,75^{20}.C_{50}^{20}$.

Câu 90. Cho tập hợp $A=\{1;2;3;...;10\}$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ#A. Tính xác suất để trong ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

A. $P=\frac{7}{90}$ **B.** $P=\frac{7}{24}$ **C.** $P=\frac{7}{10}$ **D.** $P=\frac{7}{15}$

Lời giải

Chọn D

Chọn ra ba số bất kì từ A có $C_{10}^{3}=120$ (cách) $\Rightarrow|\Omega|=120$.

Gọi A là biến cố: "trong ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp".

Khi đó ta có biến cố $\overline{A}$: "trong ba số chọn ra có hai hoặc ba số là số nguyên liên tiếp"

Giả sử chọn được một tập ba số $\{a;b;c\}$ từ tập#A.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a<b<c$.

TH1: a, b, c là 3 số tự nhiên liên tiếp ta có: $(a;b;c)\in\{(1;2;3);(2;3;4);...;(8;9;10)\}$: có 8 cách chọn.

TH2: Trong ba số chọn ra có hai số nguyên liên tiếp.

Ta lại chỉ ra thành các trường hợp nhỏ như sau:

TH2.1: a, b là số nguyên liên tiếp.

$a=1,b=2\Rightarrow c\in[4;10]\Rightarrow$ có 7 cách chọn#c.

$a=2,b=3\Rightarrow c\in[4;10]\Rightarrow$ có 6 cách chọn#c.

$a=7;b=8\Rightarrow c\in\{10\}\Rightarrow$ có 1 cách chọn#c.

Vậy có 7 + 6 + 5 + … + 1 = 28 cách.

TH2.2: b, c là số nguyên liên tiếp.

$c=10,b=9\Rightarrow a\in[1;7]\Rightarrow$ có 7 cách chọn#a.

$c=9,b=8\Rightarrow a\in[1;6]\Rightarrow$ có 6 cách chọn#a.

$c=4;b=3\Rightarrow a\in\{1\}\Rightarrow$ có 1 cách chọn#a.

Vậy có 7 + 6 + 5 + … + 1 = 28 cách.

$\Rightarrow|\overline{A}|=8+28+28=64\Rightarrow|A|=120-64=56$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$.

Câu 91. Cho tập $S=\{1;2;3;....;19;20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S. Xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng là

A. $\frac{7}{38}$. **B.** $\frac{5}{38}$. **C.** $\frac{3}{38}$. **D.** $\frac{1}{114}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc $S=\{1;2;3;....;19;20\}$ thì số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{20}^{3}$.

Các dãy cấp số cộng gồm 3 số được thành lập từ 20 số tự nhiên từ 1 đến 20 là:

$d=1$: (1; 2; 3); …; (18; 19; 20) có 18 dãy.

$d=2$: (1; 3; 5); …; (16; 18; 20) có 16 dãy.

$d=3$: (1; 4; 7); …; (14; 17; 20) có 14 dãy.

$d=4$: (1; 5; 9); …; (12; 16; 20) có 12 dãy.

$d = 5$: (1; 6; 11); …; (10; 15; 20) có 10 dãy.
$d = 6$: (1; 7; 13); …; (8; 14; 20) có 8 dãy.
$d = 7$: (1; 8; 15); …; (6; 13; 20) có 6 dãy.
$d = 8$: (1; 9; 17); …; (4; 12; 20) có 4 dãy.
$d = 9$: (1; 10; 19); …; (2; 11; 20) có 2 dãy.
Do đó có 90 dãy cấp số cộng thỏa yêu cầu của đề.

Vậy xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng là $\frac{90}{C_{20}^3} = \frac{3}{38}$.

Câu 92. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Lấy ngẫu nhiên một số từ S. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

A. $\frac{10}{21}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{20}{81}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có không gian mẫu $n(\Omega) = A_9^3 = 504$ số.

Gọi biến cố A : " Số được chọn có tổng các chữ số là lẻ".

Trường hợp 1: Số được chọn bao gồm 3 chữ số lẻ có $A_5^3 = 60$ số.

Trường hợp 2: Số được chọn bao gồm 1 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn có $C_5^1.C_4^2.3! = 180$.

Vậy xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60+180}{504} = \frac{10}{21}$.

Câu 93. Xếp ngẫu nhiên 5 bạn nam và 3 bạn nữ vào một bàn tròn. Xác suất để không có ba bạn nữ nào ngồi cạnh nhau là

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{84}$. **D.** $\frac{5}{84}$.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức hoán vị vòng quanh ta có: $|\Omega| = 7!$

Để xếp các bạn nữ không ngồi cạnh nhau, trước hết ta xếp các bạn nam vào bàn tròn: có $4!$ cách, giữa 5 bạn nam đó ta sẽ có được 5 ngăn (do ở đây là bàn tròn). Xếp chỉnh hợp 3 bạn nữ vào 5 ngăn đó có A_5^3 cách.

Vậy xác suất xảy ra là: $P = \frac{4!.A_5^3}{7!} = \frac{2}{7}$.

Câu 94. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A, tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1

A. $\frac{105}{339}$. **B.** $\frac{643}{90000}$. **C.** $\frac{643}{45000}$. **D.** $\frac{327}{90000}$.

Lời giải

Chọn C

Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $99999 - 10000 + 1 = 90000$

Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là: $\overline{abcd1}$

Ta có $\overline{abcd1} = 10.\overline{abcd} + 1 = 3.\overline{abcd} + 7.\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3.\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7.

Đặt $3.\overline{abcd} + 1 = 7h \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2h + \frac{h-1}{3}$ là số nguyên khi và chỉ khi $h = 3t + 1$

Khi đó ta được: $\overline{abcd} = 7t + 2 \Rightarrow 1000 \le 7t + 2 \le 9999$

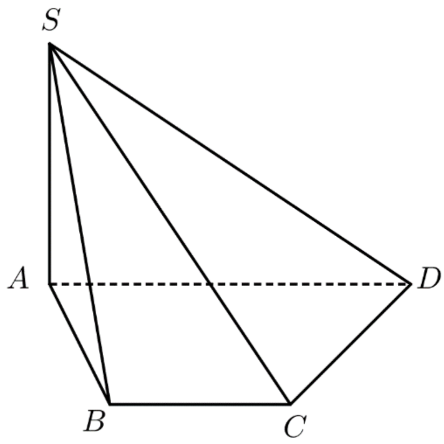
$\Leftrightarrow \frac{998}{7} \le t \le \frac{9997}{7} \Leftrightarrow t \in \{143, 144, ..., 1428\}$ suy ra số cách chọn ra t sao cho số $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 1286.

Vậy xác suất cần tìm là: $\frac{1286}{90000} = \frac{643}{45000}$.

KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

TOANMATH.com

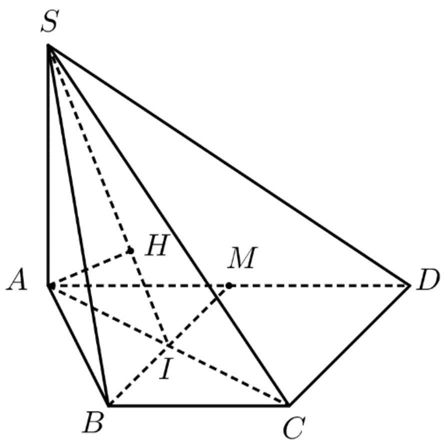
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$, $AB = BC = a$ và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường phẳng SB và DC bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.　　**B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.　　**C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.　　**D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của $AD \Rightarrow MD = BC \Rightarrow BCDM$ là hình bình hành

$\Rightarrow DC // BM \Rightarrow DC // (SBM)$

Do đó $d(DC, SB) = d(DC, (SBM)) = d(D, (SBM)) = d(A, (SBM))$ (vì $DM = AM$).

Ta thấy $ABCM$ là hình vuông cạnh a.

Gọi $I = AC \cap BM$ nên $AI = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $AH \perp SI$.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AI \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAI) \Rightarrow BM \perp AH$.

Mà $\begin{cases} AH \perp BM \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBM) \Rightarrow d(A, (SBM)) = AH$.

Xét tam giác SAI vuông tại A, ta có

$AH^2 = \dfrac{SA^2.AI^2}{SA^2 + AI^2} = \dfrac{2a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $d(CD, SB) = d(A, (SBM)) = AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{D}=60^0$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{2}$. Tính khoảng cách k từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $k=\frac{3a}{\sqrt{5}}$

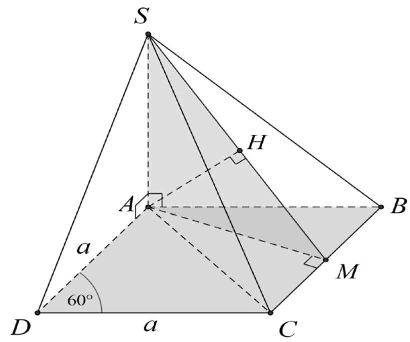
B. $k=a\sqrt{\frac{3}{5}}$

C. $k=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

D. $k=a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Lời giải

Chọn B



Diện tích đáy $S_{\square ABCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}B.SA\Rightarrow SA=\frac{3.\frac{a^3}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=a\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{matrix}BC\perp AM\\ BC\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAM)\quad(1)$$

$BC\subset(SBC)\quad(2)$, Từ (1) và $(2)\Rightarrow(SAM)\perp(SBC)$

$(SAM)\cap(SBC)=SM$

Kẻ $AH\perp SM\Rightarrow AH=d\left(A,(SBC)\right)$. Xét ΔSAM vuông tại A. Ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow AH^2=\frac{3a^2}{5}\Rightarrow AH=k=a\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông đỉnh A, cạnh huyền $BC=a$. Gọi I là trung điểm của BC và $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc tạo bởi SI và mặt phẳng (SAC) bằng 30^0. Tính cosin của góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{\sqrt{57}}{8}$.

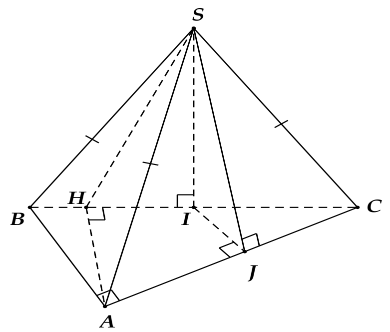
B. $\frac{\sqrt{19}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{19}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{57}}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Do $SA = SB = SC \Rightarrow SI \perp (ABC)$ (SI là trục của tam giác ABC hay $(SBC) \perp (ABC)$.

Khi đó góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC) là góc tạo bởi cạnh bên và mặt đứng.

Khi đó, kẻ $AH \perp BC(H \in BC) \Rightarrow \left(\widehat{SA,(SBC)}\right) = \widehat{ASH}$

Góc tạo bởi SI và mặt phẳng (SAC) là góc tạo bởi chiều cao và mặt bên.

Khi đó, kẻ $IJ \perp AC(J \in AC) \Rightarrow \left(\widehat{SI,(SAC)}\right) = \widehat{ISJ} = 30°$

+ Ta có $SI = \sqrt{SC^2 - CI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔSIJ ta có: $IJ = SI \tan 30° = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

+ IJ là đường trung bình ΔABC nên suy ra $AB = 2IJ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, khi đó $AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{2a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{19}}{6}$

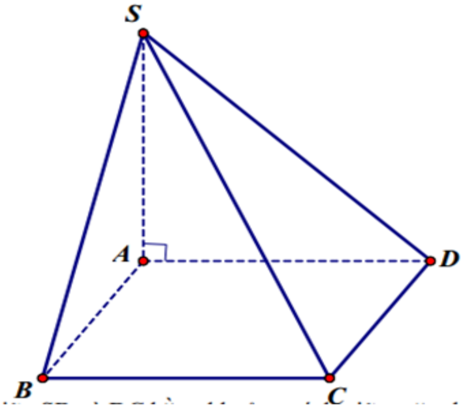
+ Xét tam giác vuông SHA (vuông tại H) ta có: $\cos \widehat{ASH} = \frac{SH}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{19}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{57}}{9}$.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn A



Vì DC // AB nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.

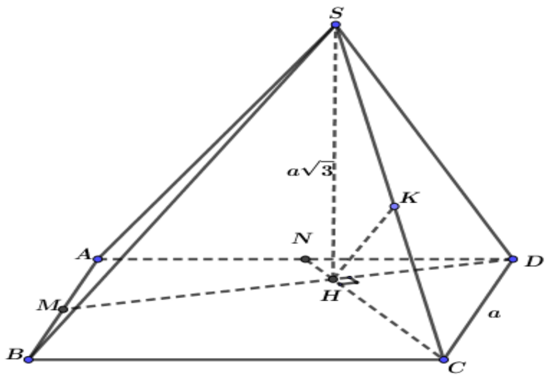
Do đó: $d\left(DC,SB\right)=d\left(DC,\left(SAB\right)\right)=d\left(D,\left(SAB\right)\right)=AD=a\sqrt{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SH=a\sqrt{3}$.Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{19}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{19}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là hình chiếu của H trên SC.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $DM\perp CN$.

Có $SH\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SH\perp DM$.

Suy ra $DM\perp\left(SHC\right)\Rightarrow DM\perp HK$.

Vậy HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC.

Có DH là đường cao của tam giác vuông CDN nên $CH.CN=DC^2\Rightarrow CH=\dfrac{DC^2}{CN}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lại có HK là đường cao trong tam giác vuông SHC nên $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HC^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{5}{4a^2}=\dfrac{19}{12a^2}$

$\Rightarrow HK=\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

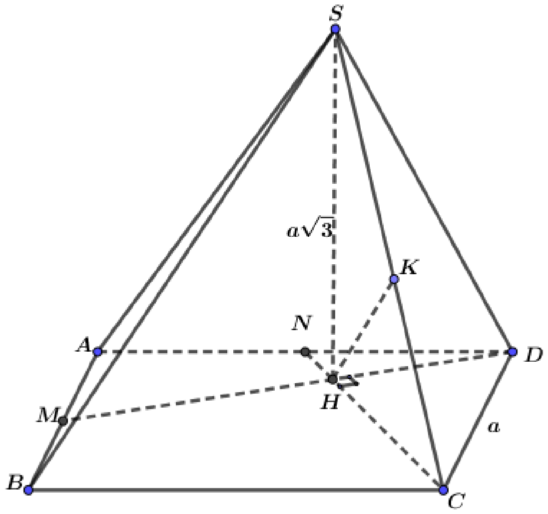
Vậy $d\left(SC,DM\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SH=a\sqrt{3}$.Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{19}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{19}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là hình chiếu của H trên SC.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $DM \perp CN$.

Có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp DM$.

Suy ra $DM \perp (SHC) \Rightarrow DM \perp HK$.

Vậy HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC.

Có DH là đường cao của tam giác vuông CDN nên $CH.CN = DC^2 \Rightarrow CH = \dfrac{DC^2}{CN} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lại có HK là đường cao trong tam giác vuông SHC nên $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{5}{4a^2} = \dfrac{19}{12a^2}$

$\Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Vậy $d(SC, DM) = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 7. Cho hình tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, $OB = a$, $OC = a\sqrt{3}$. Cạnh *OA* vuông góc với mặt phẳng *(OBC)*, $OA = a\sqrt{3}$, gọi *M* là trung điểm của *BC*. Tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng *AB* và *OM*.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải. Chọn C

Gọi *N* là điểm đối xứng của *C* qua *O*. Khi đó $OM // BN$ (tính chất đường trung bình)

do đó $OM // (ABN)$. Suy ra $d(OM, AB) = d(OM, (ABN)) = d(O, (ABN))$.

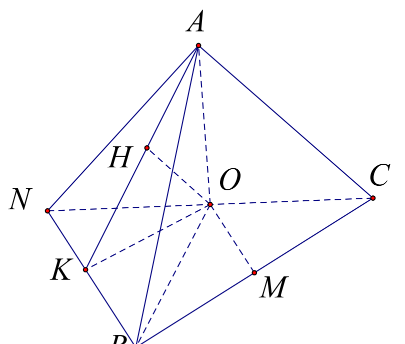
Dựng $OK \perp BN$, $OA \perp (OBC) \Rightarrow BN \perp OA \Rightarrow BN \perp AK$

Dựng $OH \perp AK$ khi đó $OH \perp (ABN)$. Từ đó $d(OM, AB) = OH$

Tam giác *ONB* vuông tại *O*, đường cao *OK* nên

$\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$

Tam giác *AOK* vuông tại *O*, đường cao *OH* nên



$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}+\frac{1}{OA^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{15}}{5}$$

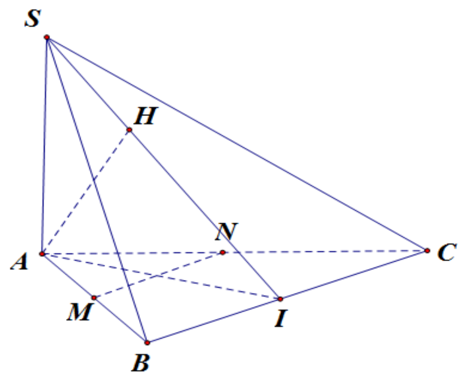
Vậy $d\left(OM,AB\right)=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $SA=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ). Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC bằng.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$$MN\,//\,BC\Rightarrow MN//\left(SBC\right)\Rightarrow d\left(MN,SC\right)=d\left(MN,\left(SBC\right)\right)=d\left(N,\left(SBC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,\left(SBC\right)\right)$$

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có:

$$\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAI\right)\Rightarrow\left(SBC\right)\perp\left(SAI\right),\ \left(SBC\right)\cap\left(SAI\right)=SI\quad(1)$$

Trong $\left(SAI\right)$ kẻ $AH\perp SI$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $AH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH=\frac{SA.AI}{\sqrt{SA^2+AI^2}}$

Ta có: $SA=2a; AI=2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow AH=\frac{2a.a\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2+3a^2}}=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

Vậy $d\left(MN,SC\right)=d\left(MN,\left(SBC\right)\right)=d\left(N,\left(SBC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{1}{2}AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

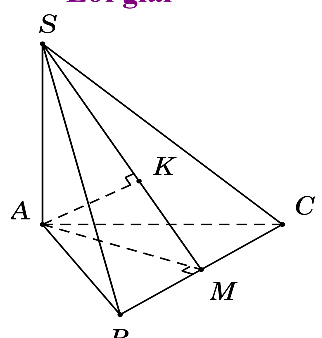
Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA=3a$ và vuông góc với mặt đáy $\left(ABC\right)$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$

A. $d=\frac{2a\sqrt{13}}{13}$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{13}}{39}$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{13}}{13}$ **D.** $d=\frac{3a\sqrt{13}}{13}$

Lời giải

Chọn D

Ta có hình vẽ sau đây:



Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $d\left[A,(SBC)\right] = AK.$

Trong ΔSAM, có $AK = \dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$.

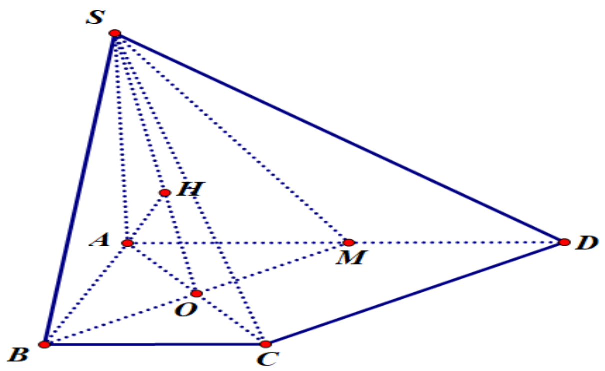
Vậy $d\left[A,(SBC)\right] = AK = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B $AD = 2a, AB = BC = a; SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa SB và DC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $a\sqrt{7}$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AD, ta có $BM // DC \Rightarrow BM // (SDC)$

$\Rightarrow d(SB; DC) = d(DC; (SBM)) = d(D; (SBM)) = d(A; (SBM))$.

Gọi O là giao điểm AC và BM, vì $ABCM$ là hình vuông nên $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC)$.

Ta có $AH \perp SO \Rightarrow \begin{cases} AH \perp SO \\ AH \perp BM \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBM) \Rightarrow AH = d(A; (SBM))$.

$AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác vuông SAO có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết $AB = BC = a, AD = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SC bằng

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ **D.** $\sqrt{2}a$

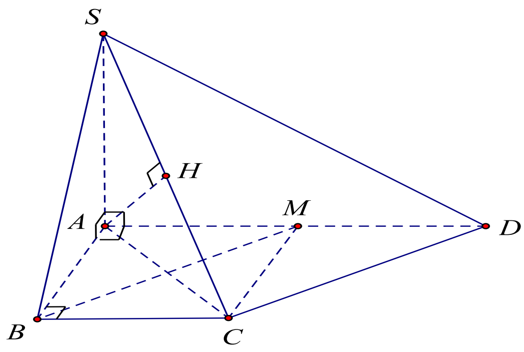
Lời giải

Chọn A

Xét tứ giác $BMDC$ có: $MD//BC$ và $MD = BC = a$ nên tứ giác $BMDC$ là hình bình hành $\Rightarrow BM//CD \Rightarrow BM//(SCD) \Rightarrow d(BM,SC) = d(BM,(SCD)) = d(M,(SCD))$

Mà $d(M,(SCD)) = \frac{1}{2}d(A,(SCD))$

Nên $d(BM,SC) = \frac{1}{2}d(A,(SCD))$



+) Tứ giác $AMCB$ là hình vuông nên cạnh $AB = a$ nên $AC = a\sqrt{2}, CM = a$

Do đó tam giác ACD có $CM = \frac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C hay $AC \perp CD$

+) Kẻ $AH \perp SC$ tại H (1)

Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$ (2)

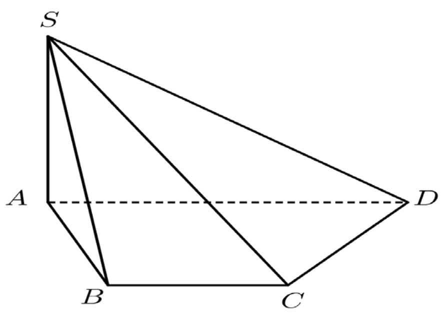
Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d(A,(SCD))$

Do $SA = AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp AC$ nên tam giác SAC vuông cân tại A

$\Rightarrow H$ là trung điểm của SC $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.SA = a$

Vậy $d(BM,SC) = \frac{a}{2}$.

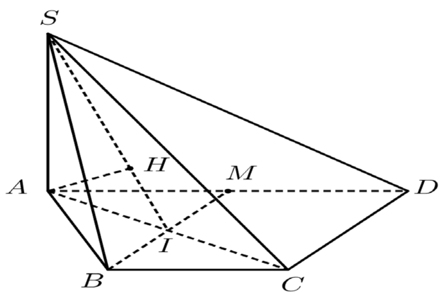
Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$, $AB = BC = a$ và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường phẳng SB và DC bằng



A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của $AD \Rightarrow MD = BC \Rightarrow BCDM$ là hình bình hành

$\Rightarrow DC//BM \Rightarrow DC//(SBM)$

Do đó $d(DC,SB) = d(DC,(SBM)) = d(D,(SBM)) = d(A,(SBM))$ (vì $DM = AM$).

Ta thấy $ABCM$ là hình vuông cạnh a.

Gọi $I = AC \cap BM$ nên $AI = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $AH \perp SI$.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AI \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAI) \Rightarrow BM \perp AH$.

Mà $\begin{cases} AH \perp BM \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBM) \Rightarrow d(A,(SBM)) = AH$.

Xét tam giác SAI vuông tại A, ta có

$AH^2 = \frac{SA^2.AI^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{2a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

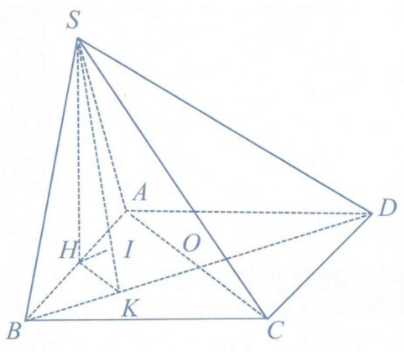
Vậy $d(CD, SB) = d(A,(SBM)) = AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 13. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, mặt bên *SAB* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải

Chọn B



Ta xem $d(A,(SBD))$ bằng bao nhiêu lần $d(H,(SBD))$, từ hình vẽ dưới đây ta thấy $d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD))$. Tính $d(H,(SBD))$.

Gọi *H* là trung điểm của *AB*. Khi đó, $SH \perp (ABCD)$. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD* suy ra $AC \perp BD$. Kẻ $HK \perp BD$ tại *K* (*K* là trung điểm *BO*). Kẻ $HI \perp SK$ tại *I*. Khi đó:

$d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD)) = 2HI$.

Xét tam giác *SHK*, có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$HK = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

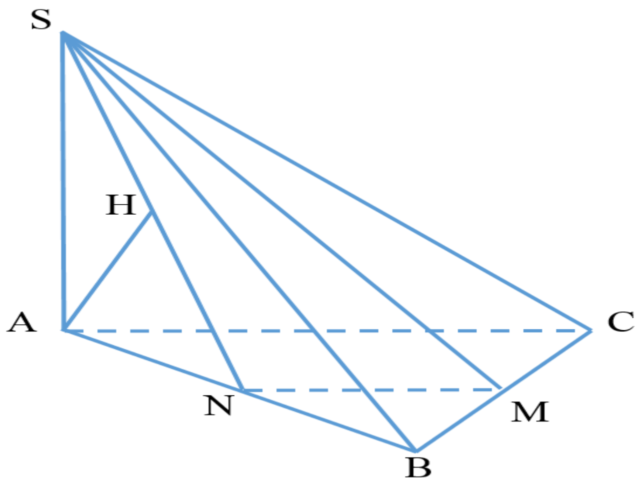
Khi đó: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{28}{3a^2} \Longrightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{14}$. Suy ra: $d(A,(SBD)) = 2HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 14. Cho khối chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAC) \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = AC = 2a$, $BC = 2a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



+) Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABC)$.

+) $AB^2+AC^2=8a^2=BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

+) Gọi N là trung điểm AB.

+) $AC//MN \Rightarrow AC//(SMN) \Rightarrow d(AC,SM)=d(AC,(SMN))=d(A,(SMN))$.

+ $\begin{cases}AN\perp MN\\SA\perp MN\end{cases} \Rightarrow (SAN)\perp MN \Rightarrow (SAN)\perp(SMN)$; $(SAN)\cap(SMN)=SN$.

+) Trong (SAN), kẻ $AH\perp SN, H\in SN$. Ta có $AH\perp(SMN)\Rightarrow d(A,(SMN))=AH$.

+) Vì $SA=AN=a \Rightarrow \Delta SAN$ vuông cân tại A. Do đó $AH=\frac{1}{2}SN=\frac{1}{2}SA.\sqrt{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Vậy $d(AC,SM)=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

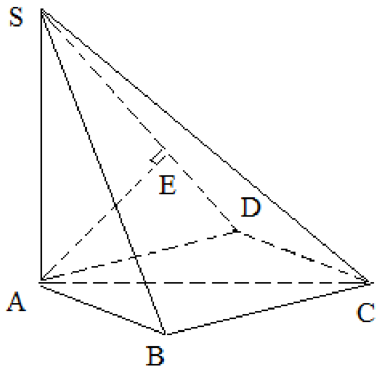
A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)$.

Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là góc $\widehat{SBA}=60°$. Do đó $SA=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.



Dựng D sao cho $ABCD$ là hình vuông. Dựng $AE \perp SD$ tại E.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AE.$

Mà $AE \perp SD$ suy ra $AE \perp (SCD)$.

Ta có $d(AB;SC) = d(AB;(SCD)) = d(A;(SCD)) = AE.$

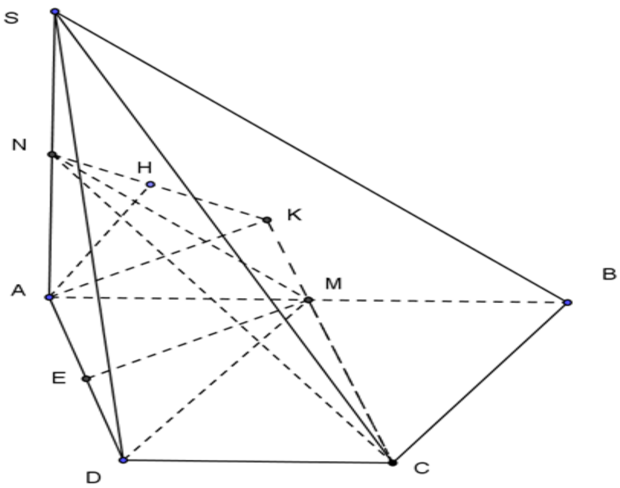
Mà $AE = \dfrac{AS.AD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(AB;SC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a, AD = DC = CB = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CM bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của SA ta có $MN // SB \Rightarrow SB // (NCM)$.

Khi đó: $d(SB,CM) = d(SB,(NCM)) = d(B,(NCM)) = d(A,(NCM))$.

Theo giả thiết tam giác ADM đều nên $ME \perp AD$ với E là trung điểm của AD, $ME = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $ME \perp CM$. Kẻ đường thẳng qua A song song với ME cắt CM tại K.

Khi đó $\begin{cases} CK \perp AK \\ CK \perp NA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (NAK) \Rightarrow (NAK) \perp (NCK)$.

Kẻ $AH \perp NK$ tại H. Suy ra $AH \perp (NCM)$.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{NA^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{\frac{9a^2}{4}}+\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}=\frac{16}{9a^2}\Rightarrow AH=\frac{3a}{4}.\ \text{(Vì } AK=ME=\frac{a\sqrt{3}}{2}\text{)}.$$

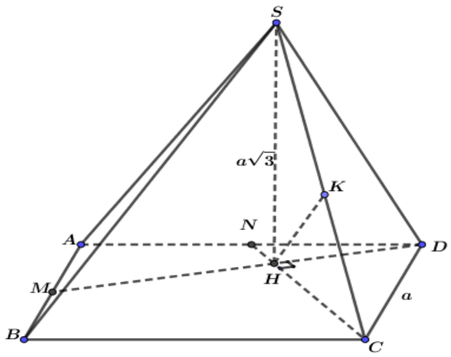
Vậy $d\left(SB,CM\right)=\frac{3a}{4}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SH=a\sqrt{3}$.Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a}{19}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{19}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là hình chiếu của H trên SC.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $DM\perp CN$.

Có $SH\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SH\perp DM$.

Suy ra $DM\perp\left(SHC\right)\Rightarrow DM\perp HK$.

Vậy HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC.

Có DH là đường cao của tam giác vuông CDN nên $CH.CN=DC^2\Rightarrow CH=\frac{DC^2}{CN}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lại có HK là đường cao trong tam giác vuông SHC nên $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HC^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{19}{12a^2}$

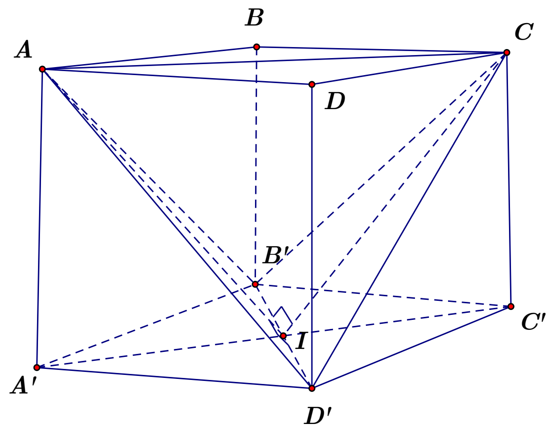
$\Rightarrow HK=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Vậy $d\left(SC,DM\right)=\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC=2$, $AA'=\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'D'\right)$ và $\left(CB'D'\right)$.

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 30^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Chọn D

Ta thấy : $(AB'D')\cap(CB'D')=B'D'$

Gọi I là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Khi đó ta suy ra: $AI\subset(AB'D')$, $AI\perp B'D'$, $CI\subset(CB'D')$, $CI\perp B'D'$.

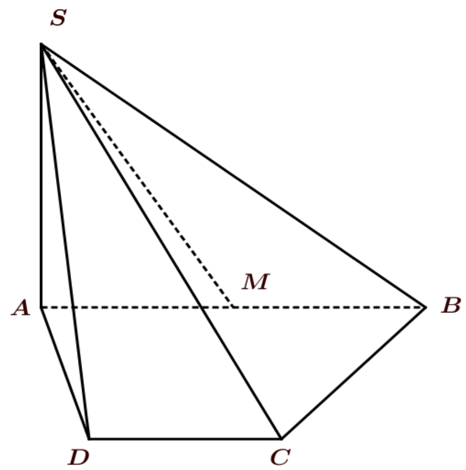
Suy ra : $\left(\widehat{(AB'D'),(CB'D')}\right)=\left(\widehat{AI,CI}\right)$.

Xét tam giác AIC có: $AC=2$, $CI=AI=\sqrt{AA^2+A'I^2}=\sqrt{3+1}=2$.

Do đó tam giác AIC đều $\Rightarrow$ $\widehat{AIC}=60^0$.

Suy ra: $\left(\widehat{(AB'D'),(CB'D')}\right)=60^0$.

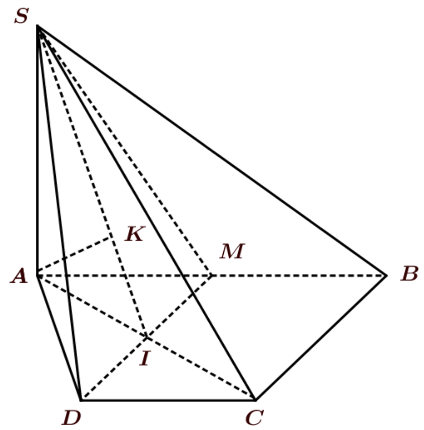
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB=2a$, $AD=DC=BC=a$. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=3a$. Gọi M là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng:



A. $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{6a}{\sqrt{13}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết ta có tam giác AMD đều cạnh#a.

Đặt $I = MD \cap AC$ thì I là trung điểm AC và MD. Nên $AI = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Ta có $(SAI) \perp (SDM);(SAI) \cap (SDM) = SI$.

Xét trong (SAI): kẻ $AK \perp SI \Rightarrow AK \perp (SDM)$

Vì $MD // BC \Rightarrow BC // (SDM)$ nên

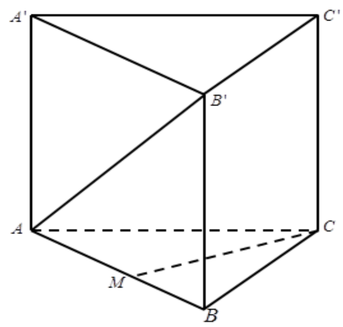
$$d(SM;BC) = d(BC;(SMD)) = d(C;(SMD)) = d(A;(SMD)) = AK = \frac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

Câu 20. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách giữa AB' và CC' bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



+ Ta có $CC' \,//\, BB'$; $BB' \subset (ABB'A')$ suy ra $CC' \,//\, (ABB'A')$

Nên $d(CC'; AB') = d(CC'; (ABB'A')) = d(C; (ABB'A'))$. (1)

+ Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $BB' \perp (ABC)$ và $BB' \subset (ABB'A')$ suy ra $(ABB'A') \perp (ABC)$.

+ Kẻ $CM \perp AB$ suy ra $CM \perp (ABB'A')$ nên $d(C; (ABB'A')) = CM$. (2)

+ Từ (1) và (2) ta có $d(CC'; AB') = CM$.

+ Mặt khác tam giác ABC đều cạnh a có CM là đường cao nên $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

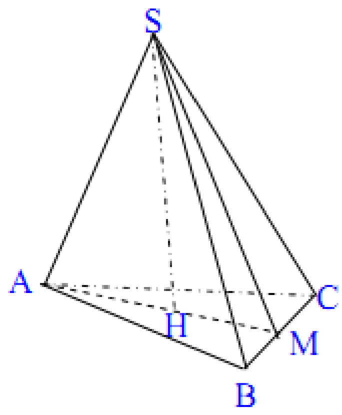
Vậy $d(CC'; AB') = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\frac{3a}{13}$. **C.** $3a$. **D.** $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Đáp án D



Theo giả thiết $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), Gọi M là trung diểm của BC,

$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

suy ra $\widehat{SAH} = 60^0, SH = AH.\tan 60^0 = a$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2}.SM.BC = \frac{1}{2}a.\frac{\sqrt{39}}{6}a = \frac{a^2\sqrt{39}}{12}$$

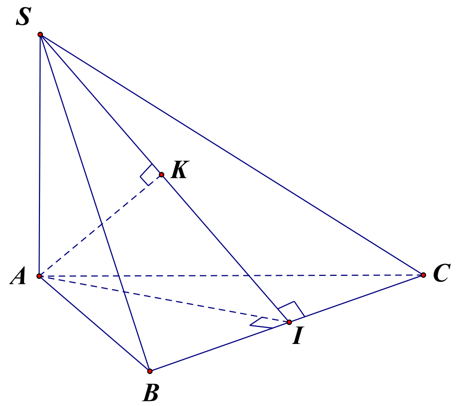
$$d(A,(SBC)) = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng a^3. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \frac{6a\sqrt{195}}{65}$. **B.** $d = \frac{4a\sqrt{195}}{65}$. **C.** $d = \frac{4a\sqrt{195}}{195}$. **D.** $d = \frac{8a\sqrt{195}}{195}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AI \perp BC, SA \perp BC$ suy ra $BC \perp AK \Rightarrow AK = d\left(A,(SBC)\right)$.

Ta có: $V = a^3, S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = 4a\sqrt{3}$.

Mà $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2}$.

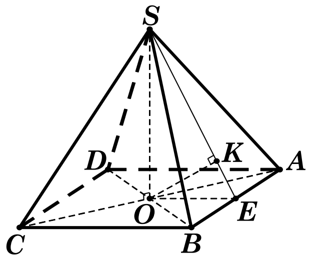
Vậy $d = AK = \sqrt{\frac{AS^2.AI^2}{AS^2 + AI^2}} = \frac{4a\sqrt{195}}{65}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Biết các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy các góc bằng nhau và thể tích của khối chóp bằng $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\sqrt{3}a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $3\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Do các mặt bên của khối chóp tạo với đáy các góc bằng nhau nên $SO\perp(ABCD)$. Giả thiết $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}=V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SO\Rightarrow SO=a\sqrt{3}$.

Ta có $d[SA,CD]=d[CD,(SAB)]=d[D,(SAB)]=2d[O,(SAB)]$.

Kẻ $OE\perp AB$ $(E\in AB)$, $OK\perp SE$ $(K\in SE)$.

Dễ dàng chứng minh $OK\perp(SAB)$ nên $d[O,(SAB)]=OK$.

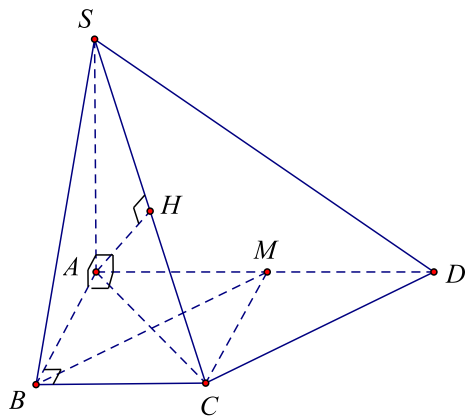
Tam giác vuông SOE, có $OK=\frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2+OE^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $d[SA,CD]=a\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết $AB=BC=a, AD=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $BMDC$ có: $MD//BC$ và $MD=BC=a$ nên tứ giác $BMDC$ là hình bình hành $\Rightarrow BM//CD\Rightarrow BM//(SCD)$ $\Rightarrow d(BM,SC)=d(BM,(SCD))=d(M,(SCD))$

Mà $d(M,(SCD))=\frac{1}{2}d(A,(SCD))$

Nên $d(BM,SC)=\frac{1}{2}d(A,(SCD))$

+) Tứ giác $AMCB$ là hình vuông nên cạnh $AB = a$ nên $AC = a\sqrt{2}, CM = a$

Do đó tam giác ACD có $CM = \dfrac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C hay $AC \perp CD$

+) Kẻ $AH \perp SC$ tại H (1)

Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$ (2)

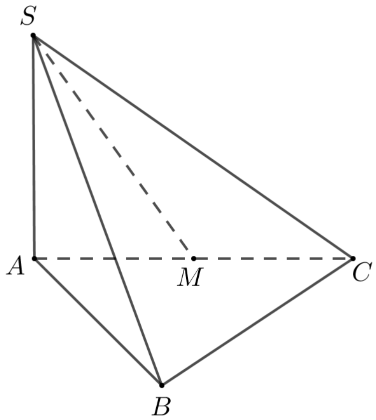
Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d\left(A, (SCD)\right)$

Do $SA = AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp AC$ nên tam giác SAC vuông cân tại A

$\Rightarrow H$ là trung điểm của SC $\Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{1}{2}.\sqrt{2}.SA = a$

Vậy $d(BM, SC) = \dfrac{a}{2}$.

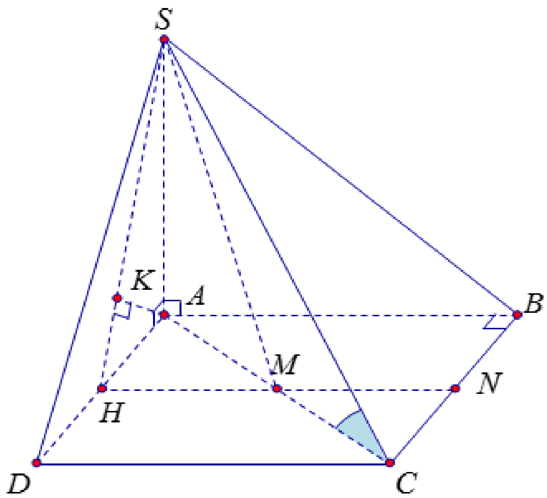
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = 3a, BC = 4a.$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng



A. $a\sqrt{3}$. **B.** $5a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{5a}{2}$. **D.** $\dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Lời giải

Chọn D



$AC = 5a,\ SA = 5a\sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm BC $\Rightarrow AB // (SMN) \Rightarrow d(AB, SM) = d\left(A, (SMN)\right)$.

Dựng $AH \perp MN$ tại H trong (ABC).

Dựng $AK \perp SH$ tại K trong (SAH). $\Rightarrow AK \perp (SMN)$ tại K nên $d(A,(SMN)) = AK$

$\Rightarrow d(AB, SM) = AK$; $AH = NB = 2a$.

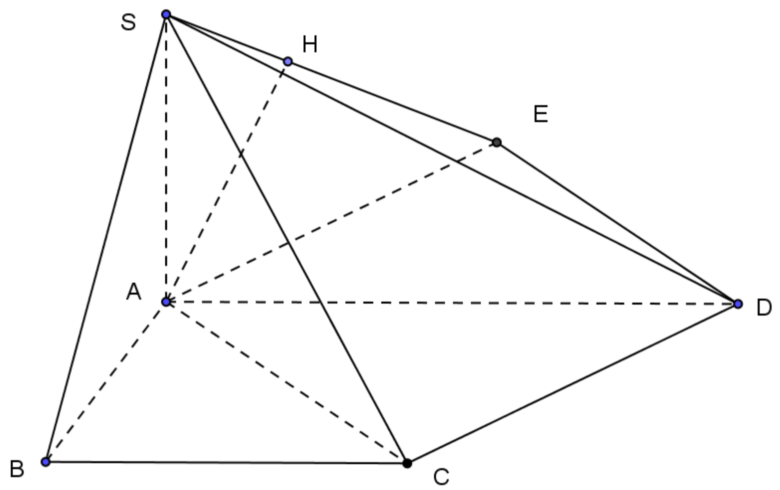
$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{75a^2} = \frac{79}{300a^2} \Rightarrow AK = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}.$$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC = a\sqrt{2}$, dễ thấy $CD = a\sqrt{2}$ nên $AD^2 = AC^2 + CD^2$ suy ra tam giác ACD vuông cân tại C.
Dựng hình vuông $ACDE$ khi đó ta có $AC // DE \Rightarrow AC // (SDE)$.

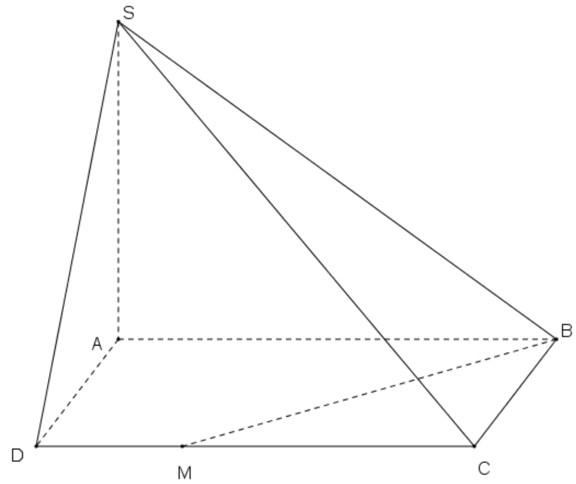
$\begin{cases} DE \perp AE \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAE) \Rightarrow (SAE) \perp (SDE)$ Kẻ $AH \perp SE$ tại H. Khi đó $AH \perp (SDE)$.

$d(AC, SD) = d(AC,(SDE)) = d(A,(SDE)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAE ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Vậy $d(AC, SD) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

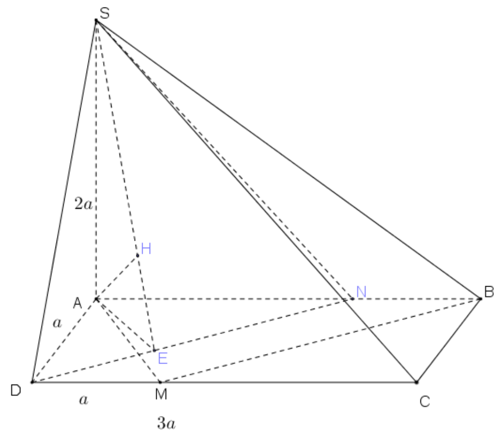
Câu 27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = 3a, AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn thẳng DC sao cho $DC = 3DM$ (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường BM và SD bằng



A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là điểm trên đoạn thẳng AB sao cho AB = 3BN. Khi đó có tứ giác DMBN là hình bình hành nên suy ra BM // DN. Suy ra $BM//(SDN)$.

Vậy $d(BM,SD)=d(BM,(SDN))=d(B,(SDN))=\frac{1}{2}d(A,(SDN))$

Trong mp (ABCD) kẻ AE vuông góc DN tại E. Ta suy ra $DN\perp(SAE)$. Trong tam giác SAE, từ A kẻ đường thẳng AH vuông góc với SE tại H.

Có: $\left.\begin{matrix}AH\perp DN\\AH\perp SE\end{matrix}\right\}\Rightarrow AH\perp(SDN)\Rightarrow d(A,(SDN))=AH$

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{6}a}{3}$$

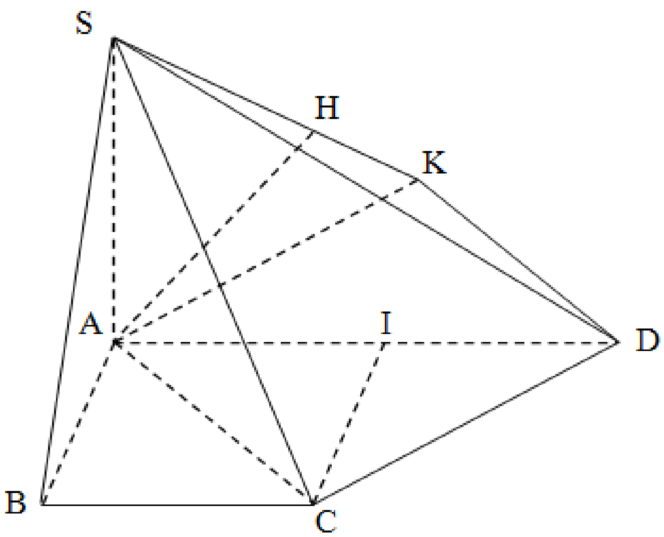
Vậy $d(BM,SD)=\frac{\sqrt{6}a}{6}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, $SA=a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng đáy, tạo hình bình hành $ACDK$.

Khi đó, do $AC // KD$ nên $d\left(AC,SD\right)=d\left(AC,\left(SDK\right)\right)=d\left(A,\left(SDK\right)\right)$.

Gọi I là trung điểm của AD thì $CI=\dfrac{1}{2}AD$, nên ΔACD vuông tại C, hay là $CD\perp AC$.

Ta có: $\begin{cases} CD\perp AC \\ CD // AK \end{cases}\Rightarrow AK\perp AC\Rightarrow AK\perp DK\Rightarrow DK\perp\left(SAK\right)$ (1)

Trong $\left(SAK\right)$, kẻ $AH\perp SK$ tại H. Từ (1) suy ra $DK\perp AH$.

Ta có: $\begin{cases} AH\perp SK \\ AH\perp DK \end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(SDK\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SDK\right)\right)=AH$

Do ΔACD vuông tại C nên $DC=a\sqrt{2}\Rightarrow AK=DC=a\sqrt{2}$

Do $SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp AK\Rightarrow\Delta SAK$ vuông tại A.

Khi đó: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow d\left(AC,SD\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 29. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=1,\ AA'=m\left(m>0\right)$. Hỏi m bằng bao nhiêu để góc giữa

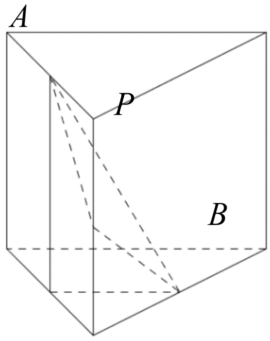
AB' và BC' bằng 60^0?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy M,N,P là trung điểm $BB',B'C',AB$ khi đó $MP//AB',MN//BC'$.



Suy ra góc cần tìm là góc giữa MP,MN.

$MP=MN=\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{2}$. Lấy Q là trung điểm $A'B'$.

$\Rightarrow PN=\sqrt{PQ^2+QN^2}=\sqrt{m^2+\dfrac{1}{4}}$.

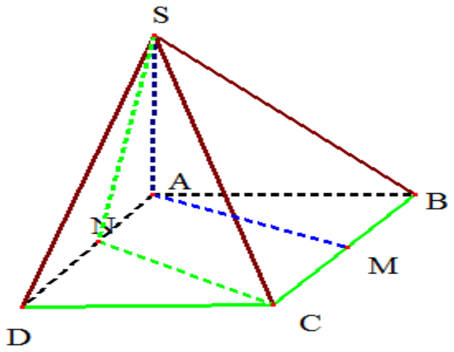
Suy ra $cos\widehat{PMN}=\dfrac{PM^2+MN^2-PN^2}{2.PM.MN}=\pm\dfrac{1}{2}$, từ đó tính được $m=\sqrt{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông, $AB = 3a$, vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AM bằng:

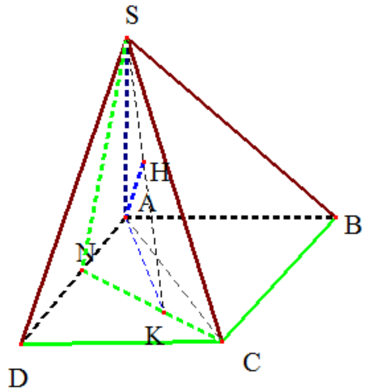
A. $\dfrac{12a\sqrt{89}}{89}$ **B.** $\dfrac{6a\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\dfrac{12a\sqrt{89}}{49}$. **D.** $\dfrac{6a\sqrt{2}}{14}$.

Lời giải

Chọn A



Dễ dàng chứng minh được: NC//AM$\Rightarrow d\left(AM, SC\right) = d\left(AM, \left(SNC\right)\right) = d\left(A, \left(SNC\right)\right)$



Sau đó: kẻ $AK \perp NC$ tại K và $AH \perp SK$ tại H

Khi đó: $d\left(A, \left(SNC\right)\right) = AH$ và $AH = \sqrt{\dfrac{SA^2.AK^2}{SA^2 + AK^2}}$ **(*)**

Ta có: $S_{\Delta ANC} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{9a^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}CN.AK = \dfrac{9a^2}{4}$, với $CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{2}$

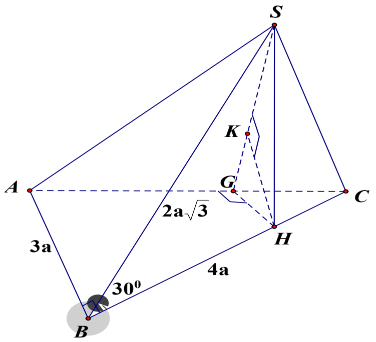
Suy ra: $AK = \dfrac{\dfrac{9a^2}{2}}{\dfrac{3a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$, mà $SA = 4a$ thay vào **(*)**: $AH = \sqrt{\dfrac{SA^2.AK^2}{SA^2 + AK^2}} = \dfrac{12a\sqrt{89}}{89}$

Câu 31. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a, BC = 4a$ mặt phẳng $\left(SBC\right)$ vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$.Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$ bằng

A. $\dfrac{6a\sqrt{7}}{21}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{56}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC. Do $(SBC)\perp(ABC)$ vuông góc với nhau theo giao tuyến BC nên $SH\perp mp(ABC)$.

Trong ΔSBH vuông tại H có $SH = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$, $BH = SB.\cos 30^0 = 3a$.

Trong mp(ABC) dựng $HG\perp AC$ tại G. Ta có $\begin{cases} AC\perp HG \\ AC\perp SH \end{cases} \Rightarrow AC\perp(SHG)$ mà $AC\subset(SAC) \Rightarrow (SAC)\perp(SHG)$ hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SG, trong mp(SHG) dựng $HK\perp SG$ tại K $\Rightarrow HK\perp(SAC)$.

Vậy $d\left(H,(SAC)\right) = HK$.

Ta có $\Delta CGH \sim \Delta CBA(g.g) \Rightarrow \frac{GH}{BA} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow GH = \frac{a}{5a}.3a = \frac{3a}{5}$.

Trong ΔSHG vuông tại H: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{25}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Hai điểm H và B nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SAC) tại C, nên có:

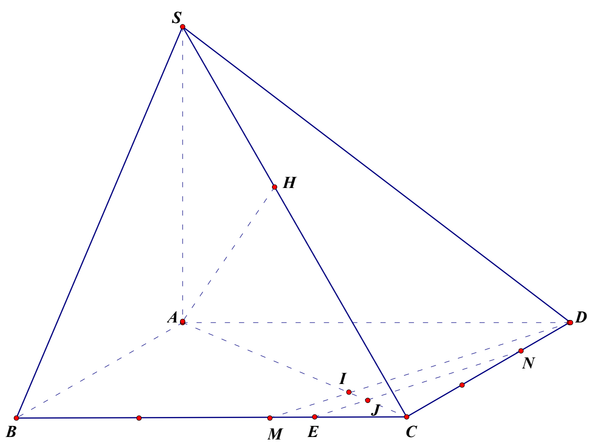
$\frac{d\left(B,(SAC)\right)}{d\left(H,(SAC)\right)} = \frac{BC}{HC} = 4 \Rightarrow d\left(B,(SAC)\right) = 4d\left(H,(SAC)\right) = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

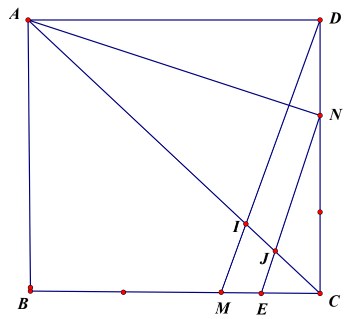
Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc cạnh đáy BC và CD sao cho $BM = 2MC$ và $CN = 2ND$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau DM và SN.

A. $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{730}}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{370}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{370}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{730}}$.

Lời giải

Chọn B





- Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA\perp(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{SBA}=60^\circ$ là góc giữa SB và mặt phẳng đáy $\Rightarrow SA=AB.\tan 60^\circ=3\sqrt{3}$.

- Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $NE\ //\ DM$ cắt BC tại E, cắt AC tại J.

Gọi I là giao điểm của DM và AC.

Ta có: $DM\ //\ NE \Rightarrow DM\ //\ (SNE) \Rightarrow d(DM;SN)=d(DM;(SNE))=d(I;(SNE))$.

Do $NE\ //\ DM \Rightarrow \dfrac{CJ}{CI}=\dfrac{CE}{CM}=\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ=\dfrac{1}{3}IC$.

Lại có: $BC\ //\ AD \Rightarrow \dfrac{IC}{IA}=\dfrac{CM}{AD}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow IC=\dfrac{1}{3}IA \Rightarrow IJ=\dfrac{1}{9}IA \Rightarrow IJ=\dfrac{1}{10}AJ$

Mặt khác: $\dfrac{d(I;(SNE))}{d(A;(SNE))}=\dfrac{IJ}{AJ}=\dfrac{1}{10} \Rightarrow d(I;(SNE))=\dfrac{1}{10}d(A;(SNE))$.

- Xét tam giác DAN và tam giác CDM có: $DA=CD$, $DN=CM$, $\widehat{ADN}=\widehat{DCM}=90^\circ$

$\Rightarrow \Delta DAN=\Delta CDM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DAN}=\widehat{CDM} \Rightarrow \widehat{DAN}+\widehat{ADM}=\widehat{CDM}+\widehat{ADM}=90^\circ$

$\Rightarrow AN\perp DM \Rightarrow AN\perp NE \Rightarrow NE\perp (SAN) \Rightarrow (SNE)\perp(SAN)$ (có giao tuyến là SN).

- Dựng $AH\perp SN$ tại $H \Rightarrow AH\perp(SNE) \Rightarrow AH=d(A;(SNE))$.

- Ta có: $SA=3\sqrt{3}$, $AN=\sqrt{AD^2+DN^2}=\sqrt{10}$.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{27}+\frac{1}{10}=\frac{37}{270} \Rightarrow AH=\frac{3\sqrt{30}}{\sqrt{37}}$$

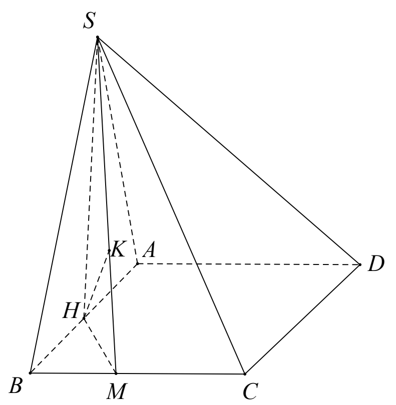
$$\Rightarrow d(DM;SN)=\frac{1}{10}AH=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{370}}.$$

Câu 33. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh a và $AC=a$. Từ trung điểm H của AB, dựng $SH\perp(ABCD)$ với $SH=a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{8a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{66}}{23}$. **D.** $\dfrac{10a\sqrt{5}}{27}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng $HM\perp BC\,(M\in BC)$; $SH\perp BC \Rightarrow (SHM)\perp(SBC)$; $(SHM)\cap(SBC)=SM$.

Trong mặt phẳng (SHM), dựng $HK\perp SM$ $(K\in SM) \Rightarrow HK\perp(SBC) \Rightarrow HK=d(H,(SBC))$.

Ta có: $d(A,(SBC))=2d(H,(SBC))$.

$$HM=BH\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{4};\ \frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{16}{3a^2}=\frac{19}{3a^2} \Rightarrow HK=\frac{\sqrt{57}a}{19}.$$

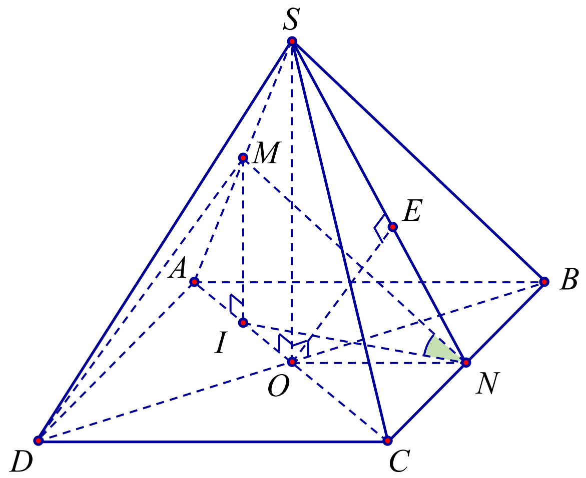
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2HK=\dfrac{a\sqrt{57}a}{19}$.

Câu 34. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM bằng

A. $a\sqrt{\frac{15}{62}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{30}{31}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{15}{68}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{15}{17}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm OA.

Vì $IM // SO \Rightarrow IM \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của MN lên $(ABCD)$ là IN.

Suy ra $\widehat{MNI} = 60°$.

Áp dụng định lí cô sin trong ΔCIN, ta có:

$$IN = \sqrt{CI^2 + CN^2 - 2CI.CN.\cos 45°} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

Trong tam giác vuông MIN ta có:

$$\tan 60° = \frac{MI}{IN} \Rightarrow MI = IN.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

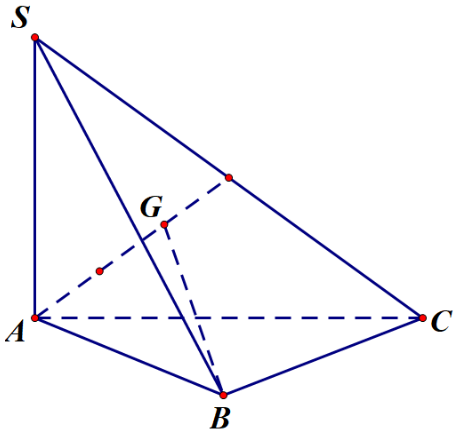
Ta có $d(BC, DM) = d(BC, (SAD)) = d(N, (SAD)) = 2d(O, (SAD)) = 2d(O, (SBC))$.

Kẻ $OE \perp SN \Rightarrow OE \perp (SBC)$.

Ta có $d(O, (SBC)) = OE$ mà $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{4}{30a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{62}{15a^2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{15}}{\sqrt{62}}$.

Vậy $d(BC, DM) = 2OE = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{62}} = \sqrt{\frac{30}{31}}a$.

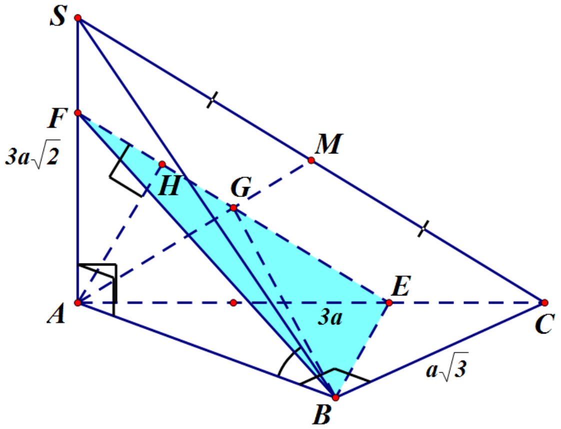
Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 3a$, $BC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a\sqrt{2}$. Điểm G là trọng tâm tam giác SAC (minh họa như hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BG bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi AM là đường trung tuyến của ΔSAC. Kẻ đường thẳng qua G song song với SC, cắt AC, SA tại E và F. Khi đó $SC \parallel (BEF)$ nên $d(SC, BG) = d(SC, (BEF))$.

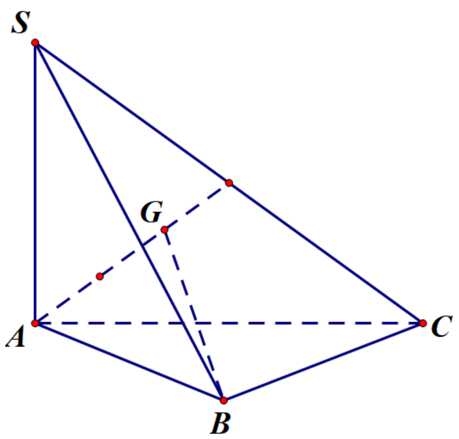
$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AE = 2EC$. Vậy $d(SC,(BEF)) = d(C,(BEF)) = \dfrac{1}{2} d(A,(BEF))$.

Mặt khác: $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra hai tam giác ΔECB và ΔBCA đồng dạng (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{ABC} = 90^0$ hay $EB \perp AC$ $\Rightarrow EB \perp (SAC)$. Gọi H là chân đường cao tại đỉnh A của ΔAEF, $AH \perp EF$ và $AH \perp EB$ $\Rightarrow AH \perp (BEF)$ hay $d(A,(BEF)) = AH$.

Xét ΔAEF vuông tại A có AH là đường cao, $AF = \dfrac{2}{3}SA = 2a\sqrt{2}$, $AE = 2a$. Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AF^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{3}{8a^2}$ $\Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(SC, BG) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

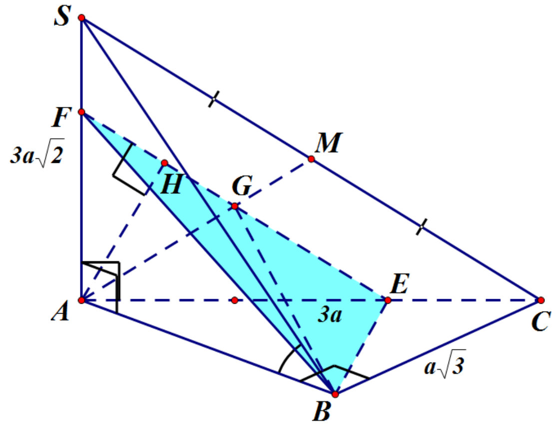
Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 3a$, $BC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a\sqrt{2}$. Điểm G là trọng tâm tam giác SAC (minh họa như hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BG bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi AM là đường trung tuyến của ΔSAC. Kẻ đường thẳng qua G song song với SC, cắt AC, SA tại E và F. Khi đó $SC \parallel (BEF)$ nên $d(SC, BG) = d(SC, (BEF))$.

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AE = 2EC$. Vậy $d(SC,(BEF)) = d(C,(BEF)) = \dfrac{1}{2}d(A,(BEF))$.

Mặt khác: $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra hai tam giác ΔECB và ΔBCA đồng dạng (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{ABC} = 90^0$ hay $EB \perp AC$ $\Rightarrow EB \perp (SAC)$. Gọi H là chân đường cao tại đỉnh A của ΔAEF, $AH \perp EF$ và $AH \perp EB$ $\Rightarrow AH \perp (BEF)$ hay $d(A,(BEF)) = AH$.

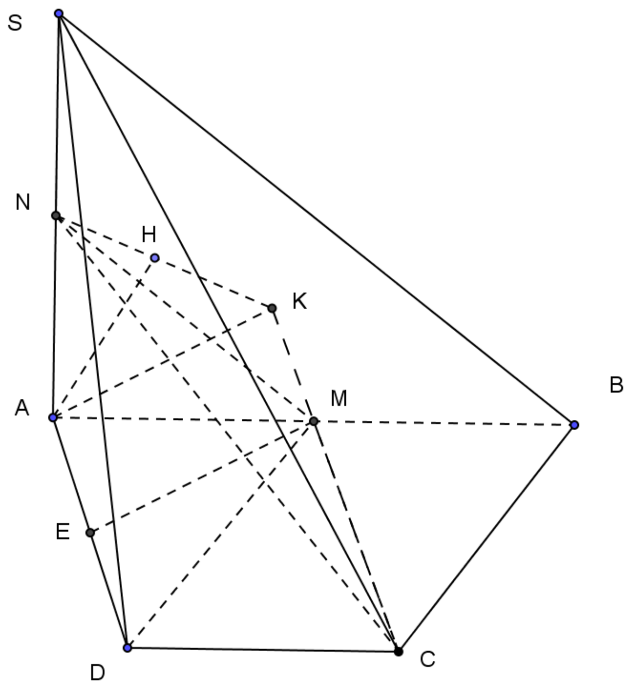
Xét ΔAEF vuông tại A có AH là đường cao, $AF = \dfrac{2}{3}SA = 2a\sqrt{2}$, $AE = 2a$. Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AF^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{3}{8a^2}$ $\Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(SC, BG) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a, AD = DC = CB = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CM bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của SA ta có $MN // SB \Rightarrow SB // (NCM)$.

Khi đó: $d(SB, CM) = d(SB, (NCM)) = d(B, (NCM)) = d(A, (NCM))$.

Theo giả thiết tam giác ADM đều nên $ME \perp AD$ với E là trung điểm của AD, $ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $ME \perp CM$. Kẻ đường thẳng qua A song song với ME cắt CM tại K.

Khi đó $\begin{cases} CK \perp AK \\ CK \perp NA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (NAK) \Rightarrow (NAK) \perp (NCK)$.

Kẻ $AH \perp NK$ tại H. Suy ra $AH \perp (NCM)$.

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{NA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{\frac{9a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4}$. (Vì $AK = ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}$).

Vậy $d(SB, CM) = \frac{3a}{4}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $AB = 2a, AD = a, \widehat{BAD} = 120^o$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa 2 đường DM và SB bằng

A. $\frac{3\sqrt{10}a}{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}a}{20}$. **C.** $\sqrt{10}a$. **D.** $3\sqrt{10}a$.

Lời giải

Chọn B

Gọi N là trung điểm của CD.Ta có $DM // BN \Rightarrow DM // (SBN) \Rightarrow d(DM, SB) = \mathrm{d}(DM, (SBN)) = d(M, (SBN)) = \frac{1}{2} d(A, (SBN))$

Lại có $AN \perp BN$, kẻ $AH \perp SN$ tại $H \Rightarrow AH = d(A; (SBN))$.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9a^2}=\frac{10}{9a^2}\Rightarrow AH=\frac{3\sqrt{10}a}{10}\Rightarrow d(DM,SB)=\frac{1}{2}AH=\frac{3\sqrt{10}a}{20}$$

$d\left(C;(SBD)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là 45^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **D.** $a\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Lời giải

Chọn D

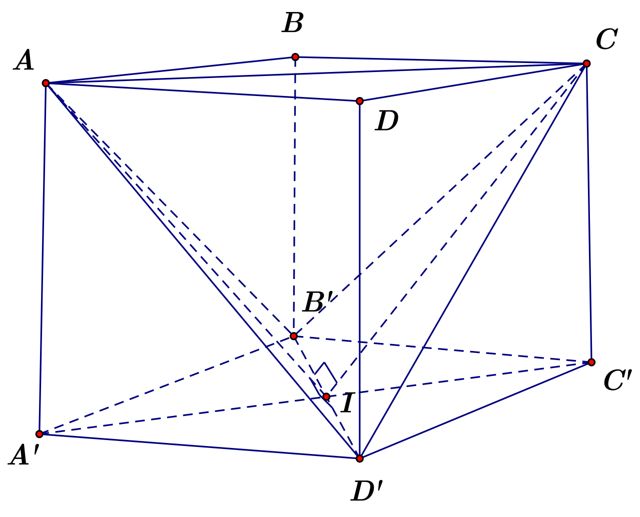
Do $SH\perp(ABCD)$ nên góc giữa SB và mặt phẳng đáy (ABCD) là góc $\widehat{SBH}=45^0$. Ta có ΔSBH vuông cân tại H nên $SH=BH=a\sqrt{2}$ Gọi K là trung điểm của BC, ta có $BH//DK\Rightarrow BH//(SDK)$. Suy ra:

$d(BH;SD)=d\left(BH;(SDK)\right)=d\left(H;(SDK)\right)$ Tứ diện SHDK vuông tại H nên $\dfrac{1}{d^2\left(H;(SDK)\right)}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HK^2}+\dfrac{1}{HD^2}=\dfrac{5}{2a^2}$. Vậy $d(BH;SD)=d\left(H;(SDK)\right)=a\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Câu 40. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC=2$, $AA'=\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$.

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 30^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Chọn D

Ta thấy : $(AB'D')\cap(CB'D')=B'D'$

Gọi I là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Khi đó ta suy ra: $AI\subset(AB'D')$, $AI\perp B'D'$, $CI\subset(CB'D')$, $CI\perp B'D'$.

Suy ra : $\left(\widehat{(AB'D'),(CB'D')}\right)=\widehat{(AI,CI)}$.

Xét tam giác AIC có: $AC=2$, $CI=AI=\sqrt{AA^2+A'I^2}=\sqrt{3+1}=2$.

Do đó tam giác AIC đều $\Rightarrow\widehat{AIC}=60^0$.

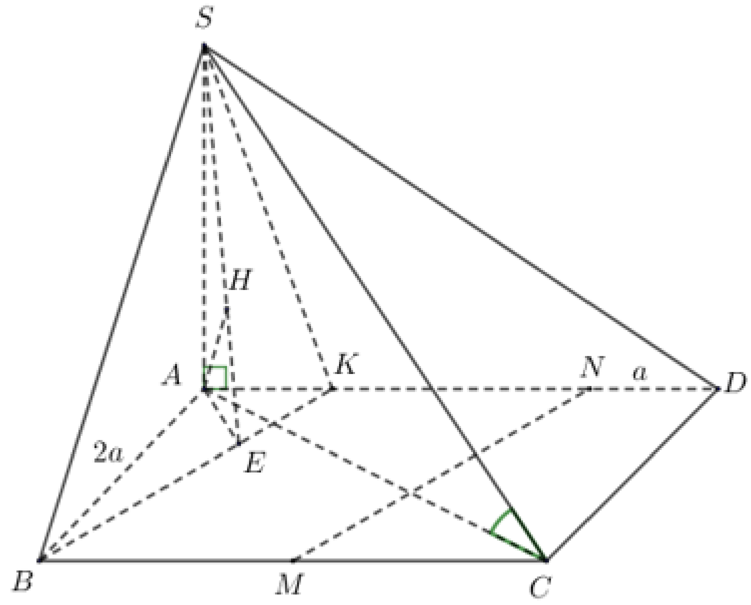
Suy ra: $\left(\widehat{(AB'D'),(CB'D')}\right)=60^0$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=2a$, $AD=4a$, $SA\perp(ABCD)$, cạnh SC tạo với đáy góc $60°$. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh AD sao cho $DN=a$. Khoảng cách giữa MN và SB là

A. $\frac{2a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{285}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{95}}{19}$. **D.** $\frac{8a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn A



Lấy K trên AD sao cho $AK=a$ thì $MN//(SBK)$, $AC=2a\sqrt{5}$.

$\Rightarrow d(MN,SB)=d(MN,(SBK))=d(N,(SBK))=2d(A,(SBK))$.

Vẽ $AE\perp BK$ tại E, $AH\perp SE$ tại H.

Ta có $(SAE)\perp(SBK)$, $(SAE)\cap(SBK)=SE$, $AH\perp SE$

$\Rightarrow AH\perp(SBK)\Rightarrow d(A,(SBK))=AH$. $SA=AC.\sqrt{3}=2a\sqrt{15}$.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AB^2}.=\frac{1}{\left(2a\sqrt{15}\right)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}.=\frac{1}{\left(2a\sqrt{15}\right)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}.$$

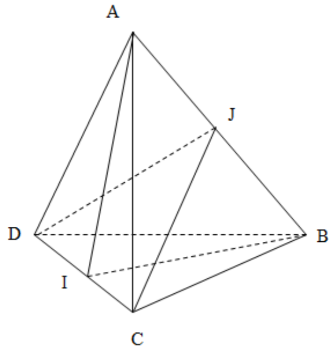
$\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{285}}{19}\Rightarrow d(MN,SB)=\frac{2a\sqrt{285}}{19}$.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD)\perp(BCD)$, $AC=AD=BC=BD=a$, $CD=2x$. Giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi $I;J$ lần lượt là trung điểm của CD, AB.

ΔABC cân tại C, J là trung điểm AB $\Rightarrow CJ \perp AB$.

ΔADB cân tại D, J là trung điểm AB $\Rightarrow DJ \perp AB$.

$\Rightarrow ((ABD),(ABD)) = (DJ, CJ)$.

$(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow (DJ, CJ) = 90°$ hay $DJ \perp CJ$.

+ ΔACD cân tại A, I là trung điểm CD $\Rightarrow AI \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD) \Rightarrow AI \perp (BCD)$.

+ ΔAIC vuông tại I $\Rightarrow AI^2 = AC^2 - IC^2 = a^2 - x^2$.

$\Rightarrow BI^2 = AI^2 = a^2 - x^2$ $(\Delta ADC = \Delta BDC \Rightarrow AI = BI)$.

+ ΔABI vuông tại I $\Rightarrow AB^2 = AI^2 + BI^2 = 2(a^2 - x^2)$.

+ ΔBCJ vuông tại J $\Rightarrow CJ^2 = BC^2 - JB^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}$.

$\Rightarrow DJ^2 = CJ^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}$ $(\Delta ABD = \Delta ABC \Rightarrow DJ = CJ)$.

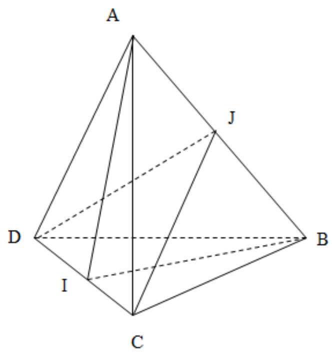
+ ΔDJC vuông tại J $\Leftrightarrow DJ^2 + CJ^2 = CD^2$ $\Leftrightarrow a^2 + x^2 = 4x^2$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi $I;J$ lần lượt là trung điểm của CD, AB.

ΔABC cân tại C, J là trung điểm AB $\Rightarrow CJ \perp AB$.

ΔADB cân tại D, J là trung điểm AB $\Rightarrow DJ \perp AB$.

$\Rightarrow ((ABD),(ABD)) = (DJ, CJ)$.

$(ABC)\perp(ABD)\Leftrightarrow(DJ,CJ)=90^\circ$ hay $DJ\perp CJ$.

+ ΔACD cân tại A, I là trung điểm CD $\Rightarrow AI\perp CD$ mà $(ACD)\perp(BCD)\Rightarrow AI\perp(BCD)$.

+ ΔAIC vuông tại I $\Rightarrow AI^2=AC^2-IC^2=a^2-x^2$.

$\Rightarrow BI^2=AI^2=a^2-x^2\ (\Delta ADC=\Delta BDC\Rightarrow AI=BI)$.

+ ΔABI vuông tại I $\Rightarrow AB^2=AI^2+BI^2=2(a^2-x^2)$.

+ ΔBCJ vuông tại J $\Rightarrow CJ^2=BC^2-JB^2=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}$.

$\Rightarrow DJ^2=CJ^2=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}\ (\Delta ABD=\Delta ABC\Rightarrow DJ=CJ)$.

+ ΔDJC vuông tại J $\Leftrightarrow DJ^2+CJ^2=CD^2\Leftrightarrow a^2+x^2=4x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA\perp(ABC)$ nên $\widehat{(SB;(ABC))}=\widehat{(SB;AB)}=\widehat{SBA}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^\circ$.

$SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$, ta có $AC//(SBD)$ nên:

$d(AC;SB)=d(AC;(SBD))=d(A;(SBD))$

Gọi M là trung điểm BD, suy ra $BD\perp AM$. Từ $SA\perp(ABC)$ ta có $BD\perp SA$, do đó $BD\perp(SAM)$. Kẻ $AH\perp SM$ ($H\in SM$) thì $BD\perp AH$.

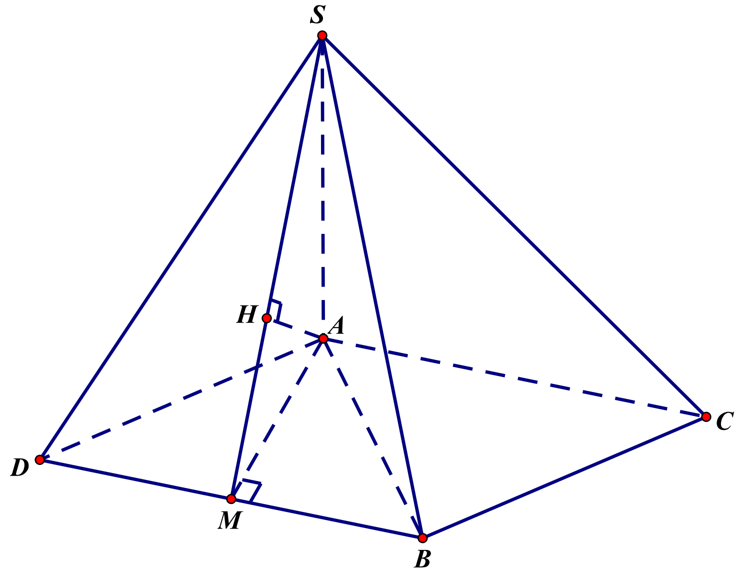
Từ $BD\perp AH$ và $AH\perp SM$ suy ra $AH\perp(SBD)$. Nên $d(A;(SBD))=AH$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $d(AC;SB)=d(A;(SBD))=AH=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.



Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$?

A. $V = \frac{1}{12}a^3$. **B.** $V = \frac{1}{6}a^3$. **C.** $V = \frac{1}{8}a^3$. **D.** $V = \frac{1}{36}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$

$V_{NDAC} = \frac{1}{3}NH.S_{\Delta DAC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}a.\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{a^3}{18}$

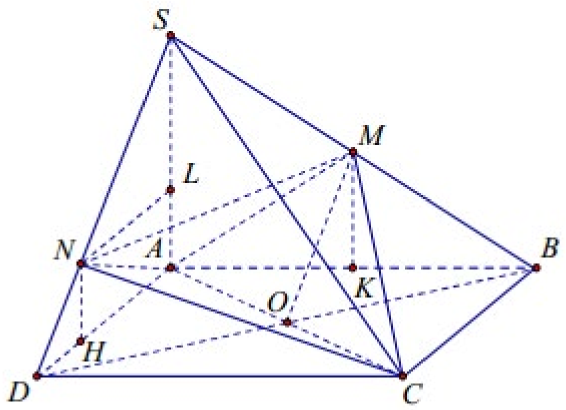
$V_{MABC} = \frac{1}{3}MK.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{a^3}{12}$

$\frac{1}{3}d\left(A,(SMN)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{a^3}{18}$

Suy ra $V_{NSAM} = \frac{1}{3}NL.S_{\Delta SAM} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}a\left(\frac{1}{2}a.\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{18}$

Mặt khác $V_{C.SMN} = \frac{1}{3}d\left(C,(SMN)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{1}{3}d\left(A,(SMN)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{a^3}{18}$

Vậy $V_{ACMN} = V_{S.ABCD} - V_{NSAM} - V_{NADC} - V_{MABC} - V_{SCMN} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{18} - \frac{a^3}{18} - \frac{a^3}{12} - \frac{a^3}{18} = \frac{1}{12}a^3$



Cách 2. Gọi O là giao điểm của AC và BD

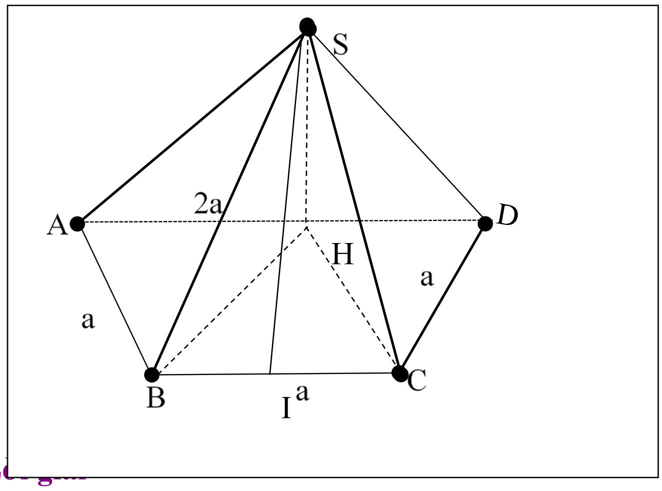
Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}$. Vì OM//SD nên $SD//(AMC)$

Do đó $d\left(N;(AMC)\right)=d\left(D;(AMC)\right)=d\left(B;(AMC)\right)$

$\Rightarrow V_{ACMN}=V_{N.MAC}=V_{D.MAC}=V_{B.MAC}=V_{M.BAC}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{12}$

(do $d\left(M;(ABC)\right)=\frac{1}{2}d\left(S;(ABC)\right)$ và $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$)

Câu 46. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là nửa lục giác đều cạnh a, hai mặt phẳng (ABCD) và (SAD) vuông góc nhau,ΔSAD cân tại S. Góc tạo bởi SB và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Tính theo a khoảng cách từ AD đến (SBC).



A. $\frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của S trên AD(H là trung điểm AD, do ΔSAD cân tại S). Ta có :

$$\left.\begin{array}{l}(ABCD)\perp(SAD)\\(ABCD)\cap(SAD)=AD\\SH\perp AD\end{array}\right\}\Rightarrow SH\perp(ABCD),$$

Do AD//BC nên $d\left(AD;(SBC)\right)=d\left(H;(SBC)\right)$

Ta có ΔBCH đều cạnh#a. $SH=\tan 60^0.BH=a\sqrt{3}$

$SB=\frac{a}{\cos 60^0}=2a$. Gọi SI là đường cao trong tam giác SBC, $SI=\sqrt{SB^2-BI^2}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$

Khi đó $d\left[H;(SBC)\right]=\frac{3V_{SHBC}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.a}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$

$=\frac{a-1+2a(b+1)+\left[-2a(a-1)+b+1\right]i}{1+4a^2}$.

$\frac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực suy ra $-2a(a-1)+b+1=0\Leftrightarrow b=2a^2-2a-1\Leftrightarrow\frac{b}{2}=4.\left(\frac{a}{2}\right)^2-2.\frac{a}{2}-\frac{1}{2}$.

Số phức $\frac{z}{2}$ có điểm biểu diễn $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)\Rightarrow$ quỹ tích M là parabol có phương trình $y=4x^2-2x-\frac{1}{2}$

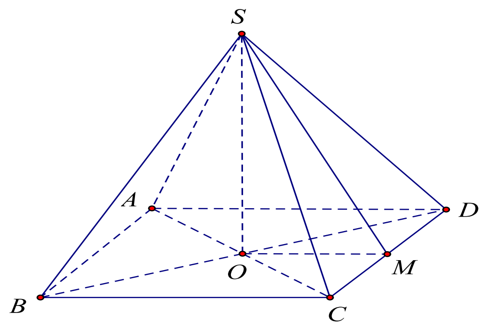
Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\frac{z}{2}$ là parabol có toạ độ đỉnh $I\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

Câu 47. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình chóp đều $S.ABCD$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi M là trung điểm của CD; $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ (do hình chóp đều $S.ABCD$)

Ta có: $OM // BC \Rightarrow OM \perp CD$ (vì $BC \perp CD$)

Lại có: $SO \perp CD$ (vì $SO \perp (ABCD)$)

Do đó $CD \perp (SOM)$ (1)

Ta có: $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SCD) \cap (SOM) = SM \\ (ABCD) \cap (SOM) = OM \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\alpha = \left(\widehat{SM, OM}\right) = \widehat{SMO}$

Ta có ΔSCD cân tại S có SM là đường trung tuyến suy ra SM cũng là đường cao của tam giác.

ΔSMC vuông tại M có: $SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = 2\sqrt{2}a$

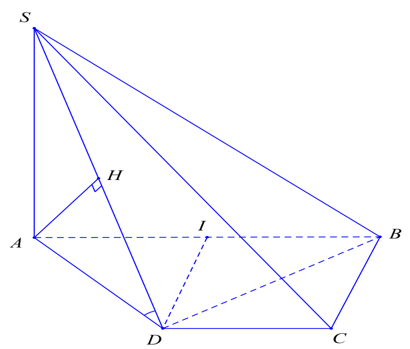
ΔSMO vuông tại O có: $\cos\alpha = \cos\widehat{SMO} = \frac{OM}{SM} = \frac{a}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn AB. Biết rằng $AD = DC = CB = a$, $AB = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBD) tạo với đáy góc $45°$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \frac{a}{4}$. **B.** $d = \frac{a}{2}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Kí hiệu $d\left(M,(P)\right)$ là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

Do $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn AB và $AD=DC=CB=a$, $AB=2a=2IB$ nên tứ giác $DIBC$ là hình thoi. Suy ra $DI=AI=IB \Rightarrow AD\perp DB$ (1).

Mặt khác SA vuông góc với đáy nên $SA\perp BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BD\perp(SAD)$.

Ta có $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ BD\perp(SAD)\\ (SAD)\cap(ABCD)=AD\\ (SAD)\cap(SBD)=SD\end{cases}$

nên góc giữa mặt phẳng (SBD) với đáy là góc giữa hai đường thẳng SD và AD bằng $\widehat{SDA}$. Tức là $\widehat{SDA}=45°$. Gọi H là hình chiếu của A lên SD.

Khi đó ta có $BD\perp AH$, $SD\perp AH \Rightarrow AH\perp(SBD)$, $H\in(SBD)$.

Do đó, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng AH.

Tam giác SAD vuông cân tại $A \Rightarrow AH=\dfrac{AD\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

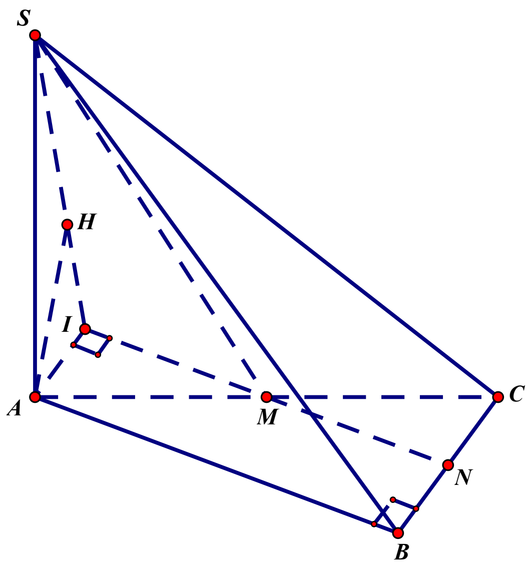
Vì I là trung điểm của cạnh AB nên ta có: $d=d\left(I,(SBD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,(SBD)\right)=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$ **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{13}}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{13}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm cạnh BC suy ra $AB//(SMN)$.

Khi đó, $d(AB,SM)=d\left(AB,(SMN)\right)=d\left(A,(SMN)\right)$.

Trong mặt phẳng (ABC), kẻ $AI \perp MN$ suy ra $(SAI) \perp (SMN) = SI$.

Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AH \perp SI$ suy ra $AH \perp (SMN)$.

Suy ra $d(AB, SM) = AH$.

Ta có $AI = BN = a$.

Lại có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{12a^2} = \dfrac{13}{12a^2}$.

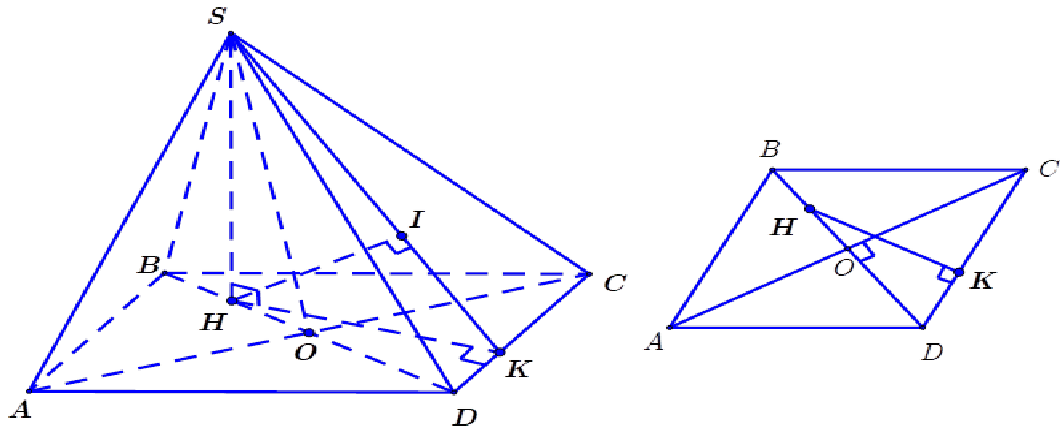
Vậy $d(AB, SM) = AH = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $BAD = 60^0$. Đường thẳng SO tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $BD = 4BH$. Tính khoảng cách từ điểm B tới mặt phẳng (SCD). Tính BE theo a.

A. $\dfrac{3a\sqrt{39}}{52}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



* Kẻ $HK \perp CD, K \in CD$. Kẻ $HI \perp SK, I \in SK$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp SH \\ CD \perp HK \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HI$.

Ta có $\begin{cases} HI \perp SK \\ HI \perp CD \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SCD)$.

* $BH \cap (SCD) = D \Rightarrow \dfrac{BE}{HI} = \dfrac{BD}{HD} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow BE = \dfrac{4}{3} HI$

Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SOH} = 60^0$.

* Từ giả thiết ta có ΔABD đều cạnh a nên ta có $BD = a$; $HO = \dfrac{a}{4}$; $HD = \dfrac{3a}{4}$.

+) $SH = HO \cdot \tan \widehat{SOH} = \dfrac{a}{4} \cdot \tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

+) $HK = HD.\sin \widehat{HDK} = \dfrac{3a}{4} \cdot \sin 60^0 = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$.

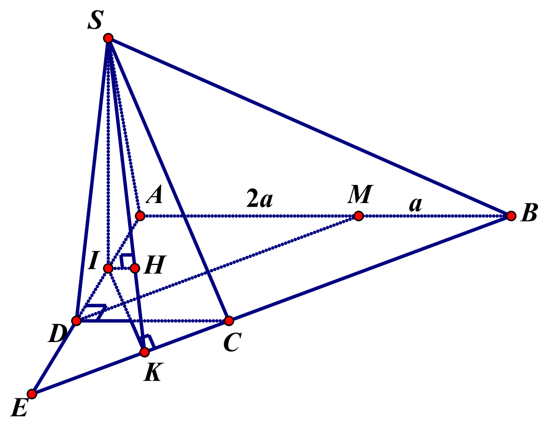
+) $\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{16}{3a^2}+\dfrac{64}{27a^2}=\dfrac{208}{27a^2} \Rightarrow HI=\dfrac{3a\sqrt{39}}{52}$.

Vậy $BE=\dfrac{4}{3}HI=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB=3a, AD=DC=a$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M điểm trên AB sao cho $AM=2a$, tính khoảng cách giữa MD và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{17}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải



Chọn B

+) Theo giả thiết ta có $\begin{cases}(SBI)\perp(ABCD)\\(SCI)\perp(ABCD)\\SI=(SBI)\cap(SCI)\end{cases} \Rightarrow SI\perp(ABCD)$

+) Vẽ $IK\perp BC \Rightarrow BC\perp(SIK)\Rightarrow \widehat{SKI}$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt đáy nên $\widehat{SKI}=60°$.

+) Vì $S_{\Delta IDC}=\dfrac{1}{2}DI.DC=\dfrac{a^2}{4}, S_{\Delta IAB}=\dfrac{3a^2}{4}$. Suy ra $S_{\Delta BIC}=S_{ABCD}-(S_{\Delta ICD}+S_{\Delta IAB})=a^2$.

+) Mặt khác $BC=\sqrt{(AB-CD)^2+AD^2}=a\sqrt{5}$ và $S_{\Delta IBC}=\dfrac{1}{2}IK.BC$. Suy ra $IK=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

+) Trong tam giác vuông SIK ta có $SI=IK.\tan 60°=\dfrac{2\mathrm{a}\sqrt{15}}{5}$.

+) Vì $AM=2a$ nên $BM=a\Rightarrow MD // BC$, do đó $d(MD,SC)=d(MD,(SBC))=d(D,(SBC))$.

+) Gọi E là giao điểm của AD với BC, ta có $\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{DC}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow ED=\dfrac{1}{2}AD=ID$.

Do đó $d(D,(SBC))=\dfrac{1}{2}d(I,(SBC))$.

+) Gọi H là hình chiếu của I lên SK ta có $d(I,(SBC))=IH$.

Trong tam giác vuông SIK, ta có:

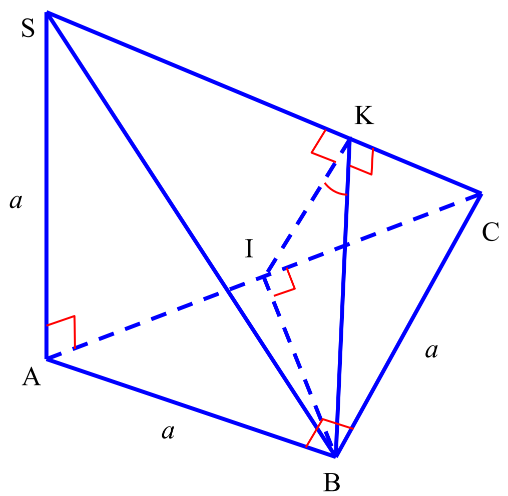
$\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{SI^2}+\dfrac{1}{IK^2}=\dfrac{5}{12a^2}+\dfrac{5}{4a^2}=\dfrac{5}{3a^2}\Rightarrow IH=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d\left(MD,SC\right)=\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

Câu 52. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B; ABC và $SA\perp\left(ABC\right)$; $AB=BC=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBC\right)$.

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$. **B.** $\dfrac{13a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{13}$.

Lời giải



Chọn A

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên SC: $BK\perp SC$ (1)

Gọi I là trung điểm AC thì $BI\perp\left(SAC\right)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC\perp\left(BKI\right)$. Vậy góc giữa $\left(SAC\right)$ và $\left(SBC\right)$ là $\widehat{BKI}$

Ta có: $AC=\sqrt{2}a\Rightarrow SC=\sqrt{AC^2+SA^2}=\sqrt{\left(2a\right)^2+a^2}=\sqrt{3}a$ và $IC=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$

Vì $\Delta IKC\sim\Delta SAC$ nên $\dfrac{IK}{IC}=\dfrac{SA}{SC}\Rightarrow IK=IC.\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}a}{2}.a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Trong tam giác BIK vuông tại I thì: $\tan\widehat{BKI}=\dfrac{IB}{IK}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}:\dfrac{a}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$

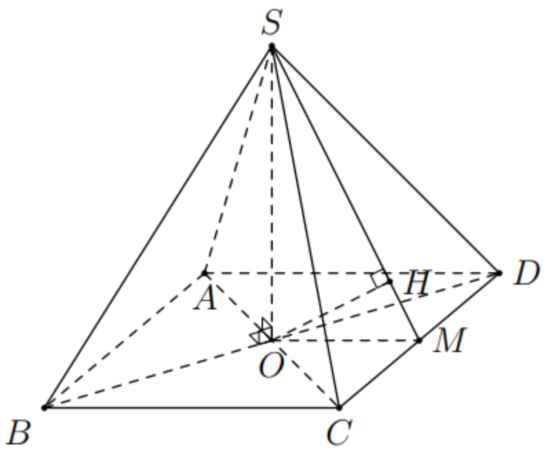
$\Rightarrow\widehat{BKI}=60^0$. Đáp án#**A.**

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SO=a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải

Đáp án: B



+ Ta có $AB//(SCD)$ nên $d(AB,SC) = d(AB,(\text{SCD}) = d(A,(SCD))$.

Do O là trung điểm của AC nên $d(A,(SCD)) = 2d(O,(SCD))$.

+ Gọi M là trung điểm của CD.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow (SCD) \perp (SOM)$.

Kẻ $OH \perp SM$. Do $(SCD) \cap (SOM) = SM$ nên $OH \perp (SCD)$ hay $OH = d(O,(SCD))$

+ Tam giác SOM vuông tại O có OH là đường cao nên

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$. Suy ra $OH^2 = \dfrac{a^2}{5}$ hay $OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

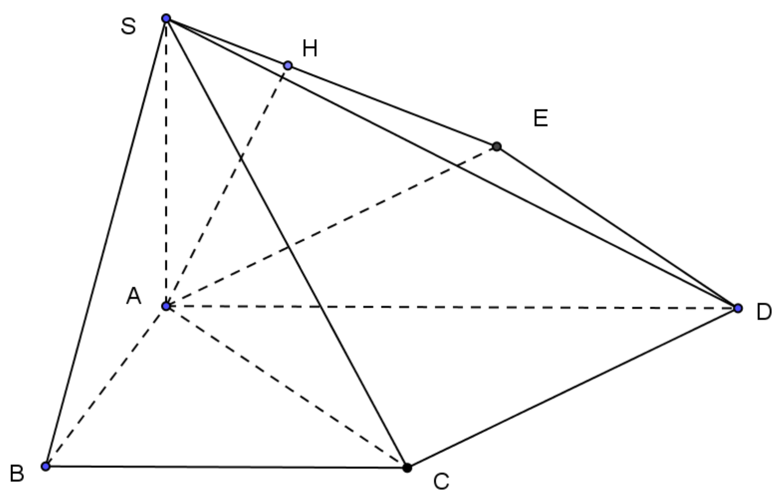
Vậy $d(AB,SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC = a\sqrt{2}$, dễ thấy $CD = a\sqrt{2}$ nên $AD^2 = AC^2 + CD^2$ suy ra tam giác ACD vuông cân tại C.

Dựng hình vuông $ACDE$ khi đó ta có $AC // DE \Rightarrow AC // (SDE)$.

$\begin{cases} DE \perp AE \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAE) \Rightarrow (SAE) \perp (SDE)$ Kẻ $AH \perp SE$ tại H. Khi đó $AH \perp (SDE)$.

$d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAE ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

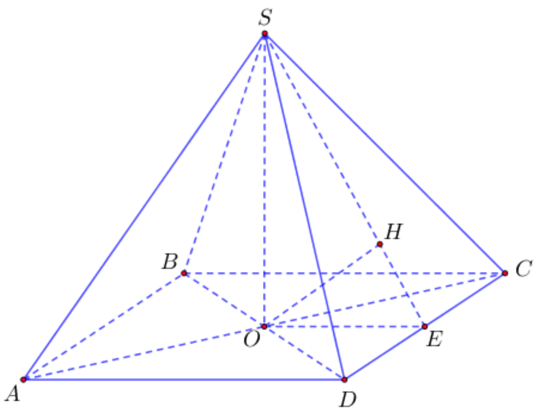
Vậy $d(AC, SD) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm cạnh $AB = a$, đường cao SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB là

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E là trung điểm CD $\Rightarrow OE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOE) \Rightarrow (SCD) \perp (SOE)$.

Vẽ $OH \perp SE$ tại $H \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OH$.

Ta có $OH = \frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh a tâm O, $\widehat{ADC} = 30^\circ$, $SA = a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ O đến $mp(SCD)$ theo a.

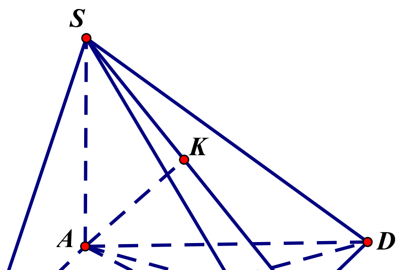
A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải

Chọn **D.**

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên CD và SH

Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH)$



Mà $AK \subset (SAH)$ nên AK $\perp$ CD

Theo cách vẽ AK $\perp$ SH

Do đó AK $\perp$ (SCD), suy ra AK là khoảng cách từ A đến (SCD)

Ta có AO cắt (SCD) tại C và $OC = \frac{1}{2}AC$. Do đó $d(O;(SCD)) = \frac{1}{2}d(A;(SCD))$

+ Tam giác AHD vuông tại H, suy ra AH = A**D**.sinD =#a/2

Tam giác SAH vuông tại A có AK là đường cao nên $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2}$

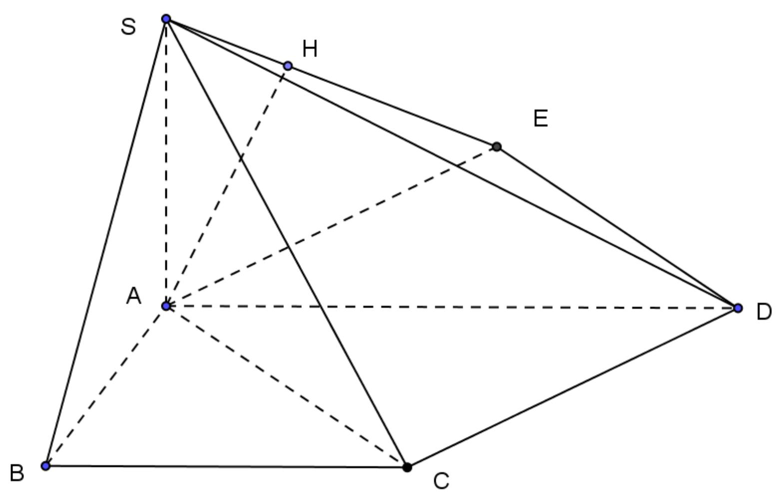
$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Vậy d(O;(SCD)) = $\frac{1}{2}AK = \frac{a\sqrt{5}}{10}$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC = a\sqrt{2}$, dễ thấy $CD = a\sqrt{2}$ nên $AD^2 = AC^2 + CD^2$ suy ra tam giác ACD vuông cân tại C.
Dựng hình vuông $ACDE$ khi đó ta có $AC // DE \Rightarrow AC // (SDE)$.

$\begin{cases} DE \perp AE \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAE) \Rightarrow (SAE) \perp (SDE)$ Kẻ $AH \perp SE$ tại H. Khi đó $AH \perp (SDE)$.

$d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAE ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

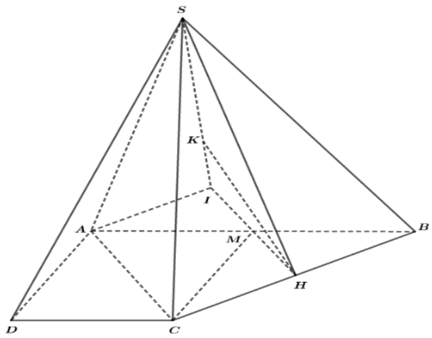
Vậy $d(AC, SD) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC$, $AB = 2AD$, mặt bên (SBC) là tam giác đều cạnh $2a$ và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA theo a.

A. $\frac{6a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{2\sqrt{7}a}{21}$. **D.** $\frac{2\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm AB, H là trung điểm của BC.

Ta có $SB \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$.

Tứ giác $AMCD$ là hình vuông nên $CM = AM = MB$. Suy ra ΔCMB vuông cân.

Do đó $CM = a\sqrt{2}$, $AB = 2a\sqrt{2}$, $CD = a\sqrt{2}\cdot$

Kẻ đường thẳng Δ đi qua A, $\Delta // BC$. Hạ $HI \perp \Delta, (I \in \Delta)$.

Suy ra $BC // (SAI)$. Do đó $d(BC, SA) = d(BC, (SAI)) = d(H, (SAI))\cdot$

Hạ $HK \perp SI \, (K \in SI)$. Suy ra $HK \perp (SAI)$. Do đó $d(H, (SAI)) = HK\cdot$

Ta có $CM = AM = MB$ nên tam giác ABC vuông tại C. Suy ra $HI = AC = 2a$.

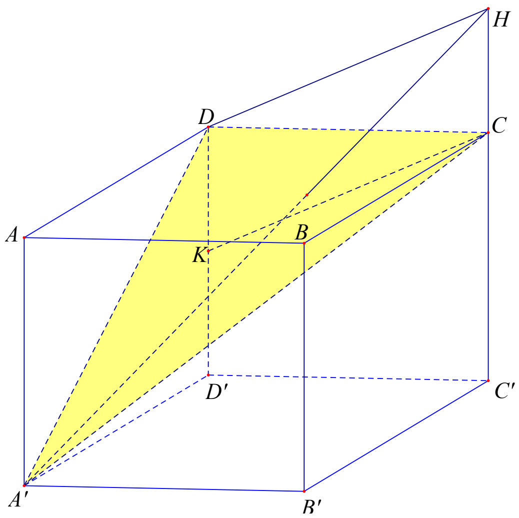
Do đó $d(BC, SA) = HK = \dfrac{HI.SH}{\sqrt{HI^2 + SH^2}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}a\cdot$

Câu 59. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{a}{3}$

Lời giải

Chọn D



Từ D kẻ $DH // CK$ $(H \in CC')$.

Khi đó $d(CK, A'D) = d(CK, (A'DH)) = d(C, (A'DH)) = \dfrac{3V_{CAHD}}{S_{ADH}}$.

Ta có $V_{A'CDH} = \dfrac{1}{3}A'D.'S_{DHC} = \dfrac{a^3}{12}$.

Mà $A'D = a$, $DH = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $A'H = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

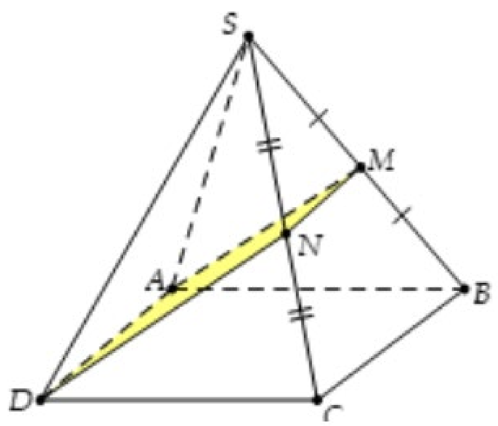
Xét tam giác $A'DH$ có $\cos DA'H = \dfrac{A'D^2 + A'H^2 - DH^2}{2A'D.A'H} = \dfrac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin DA'H = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

$\Rightarrow S_{\Delta A'DH} = \dfrac{1}{2}A'D.A'H = \dfrac{3a^2}{4}$.

Vậy $d\left(C,\left(A'DH\right)\right) = \dfrac{\dfrac{3a^3}{12}}{\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{3}$.

Câu 60. Cho khối chop S.ABCD có thể tích bằng 8. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SC và ABCD là hình bình hành (như hình vẽ). Biết diện tích của tứ giác AMND bằng 2. Tính khoảng cách h từ đỉnh S đến mặt phẳng (AMND)

A. $h = \dfrac{3}{2}$ **B.** $h = \dfrac{8}{3}$. **C.** $h = \dfrac{9}{2}$. **D.** $h = 3$.



Lời giải

Ta có $V_{SDAC} = V_{SBAC} = \dfrac{1}{2}V_{SABCD} = 4$

$V_{SDAN} = \dfrac{SN}{SC}V_{SDAC} = \dfrac{1}{2}V_{SDAC} = 2$, $V_{SAMN} = \dfrac{SN}{SC}.\dfrac{SM}{SB}V_{SBAC} = \dfrac{1}{4}V_{SBAC} = 1$

$V_{SDAMN} = V_{SADN} + V_{SAMN} = 2 + 1 = 3$

$V_{SDAMN} = \dfrac{1}{3}.d_{(S,(ADMN))}.S_{ADMN} \Rightarrow d_{(S,(ADMN))} = 3.\dfrac{V_{SDAMN}}{S_{ADMN}} = \dfrac{3.3}{2} = \dfrac{9}{2}$

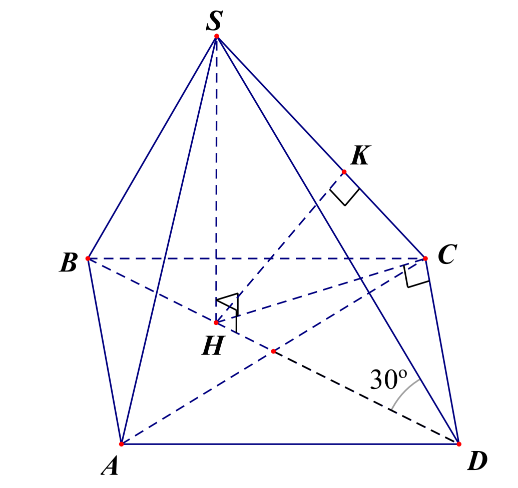
Chọn C

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ góc 30°. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ theo a.

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $HD = 2BH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $SH = HD\tan 30^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{3}$.

Kẻ $HK \perp SC, (K \in SC)$ (1).

Do $CH \perp AB$ và $AB // CD$ nên $CH \perp CD$. Hơn nữa, $SH \perp CD$ nên $CD \perp (SHC)$. Từ đó ta có $CD \perp HK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H,(SCD)) = HK$.

Trong tam giác vuông SHK có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2} = \dfrac{21}{4a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a}{\sqrt{21}}$.

Lại có $BH \cap (SCD) = D, BD = \dfrac{3}{2}HD$ nên

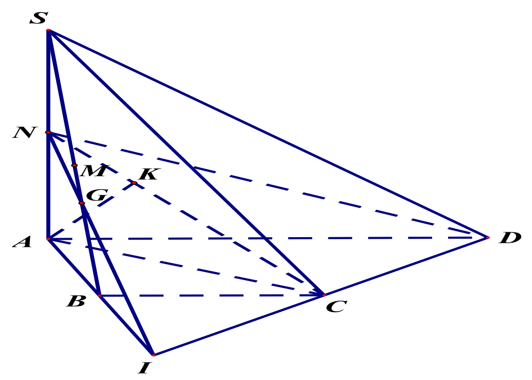
$d(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2}d(H,(SCD)) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{3}{2}.\dfrac{2a}{\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{66}}{22}$. **B.** $2a\sqrt{66}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{44}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là giao điểm của AB và CD, vì $AD = 2BC$ nên B là trung điểm của AI. Gọi G là giao điểm của SB và IN, dễ thấy G là trọng tâm tam giác SAI. Do đó,

$SG=\frac{2}{3}SB=\frac{2}{3}.2.SM=\frac{4}{3}SM\Rightarrow MG=\frac{1}{4}SG$, mà $G\in\left(NCD\right)$ nên $d\left(M;\left(NCD\right)\right)=\frac{1}{4}d\left(S;\left(NCD\right)\right)=\frac{1}{4}d\left(A;\left(NCD\right)\right)$.

Lại có, $CD\perp AC;CD\perp SA\Rightarrow CD\perp\left(SAC\right)$. Gọi K là hình chiếu của A lên NC thì $d\left(A;\left(NCD\right)\right)=AK=\frac{AN.AC}{\sqrt{AN^2+AC^2}}$ $(*)$, với $AN=\frac{a\sqrt{3}}{2};AC=a\sqrt{2}$ thay vào $(*)$ ta được $AK=\frac{a\sqrt{66}}{11}$.

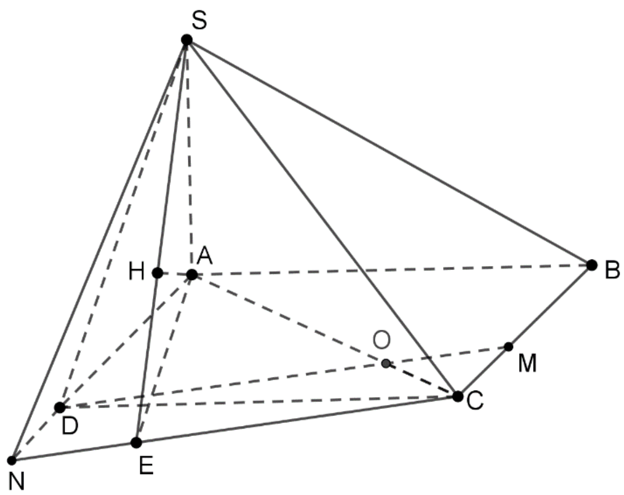
Vậy $d\left(M;\left(NCD\right)\right)=\frac{1}{4}AK=\frac{a\sqrt{66}}{44}$

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M là điểm thào mãn $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và DM bằng:

A. $\frac{\sqrt{154}}{77}a$. **B.** $\frac{3\sqrt{154}a}{154}$. **C.** $\frac{6\sqrt{154}}{77}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{154}}{77}a$.

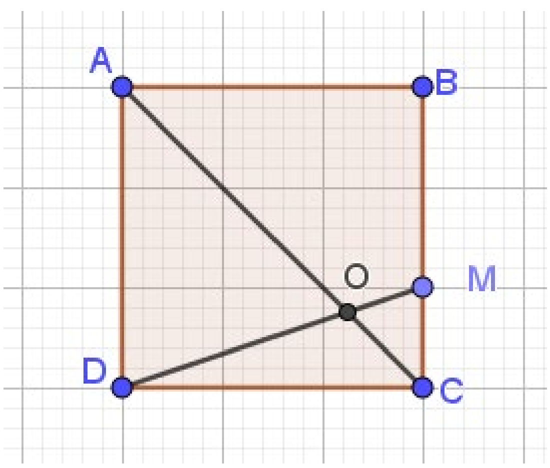
Lời giải

Chọn B



Gọi N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $DMCN$; Lấy E,H lần lượt là hình chiếu của A lên CN,SE. Gọi O là giao điểm của AC và DM.

Ta có $DM//\left(SCN\right)\Rightarrow d\left(DM,SC\right)=d\left(DM,\left(SNB\right)\right)=d\left(O,\left(SCN\right)\right)=\frac{1}{4}d\left(A,\left(SCN\right)\right)=\frac{1}{4}AH$



Tam giác ANC có diện tích: $S_{ACN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}+S_{DNC}=\frac{9a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}=6a^2\Rightarrow AE=\frac{2S_{ANC}}{CN}=\frac{6\sqrt{10}a}{5}$

Tam giác vuông SAE có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\frac{72}{5}a^2}=\frac{77}{72a^2}\Rightarrow AH=\frac{6\sqrt{154}}{77}a$.

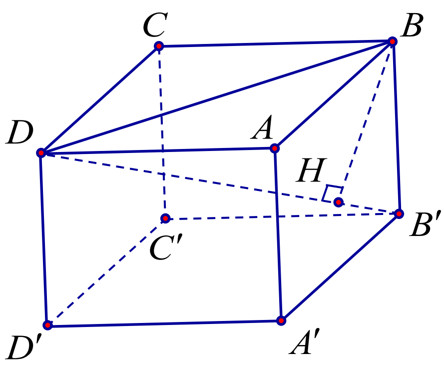
$\Rightarrow d(SC,DM)=\frac{6\sqrt{154}}{4.77}a=\frac{3\sqrt{154}}{154}a$.

Câu 64. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách từ B tới đường thẳng DB'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thuyết ta có: $BD=a\sqrt{2}$

Gọi H là hình chiếu của B lên DB' ta có: $BH=d\left(B,DB'\right)$.

Xét tam giác $BB'D$ vuông tại B ta có:

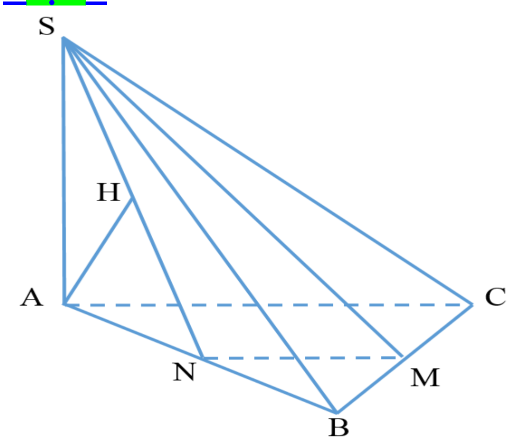
$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{B'B^2}+\frac{1}{BD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow BH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 65. Cho khối chóp $S.ABC$ có $(SAB)\perp(ABC)$, $(SAC)\perp(ABC)$, $SA=a$, $AB=AC=2a$, $BC=2a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



+) Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)$.

+) $AB^2+AC^2=8a^2=BC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông cân tại A.

+) Gọi N là trung điểm AB.

+) $AC//MN\Rightarrow AC//(SMN)\Rightarrow d(AC,SM)=d(AC,(SMN))=d(A,(SMN))$.

+ $\begin{cases}AN\perp MN\\SA\perp MN\end{cases}\Rightarrow(SAN)\perp MN\Rightarrow(SAN)\perp(SMN)$; $(SAN)\cap(SMN)=SN$.

+) Trong (SAN), kẻ $AH\perp SN, H\in SN$. Ta có $AH\perp(SMN)\Rightarrow d(A,(SMN))=AH$.

+) Vì $SA=AN=a\Rightarrow\Delta SAN$ vuông cân tại A. Do đó $AH=\frac{1}{2}SN=\frac{1}{2}SA.\sqrt{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

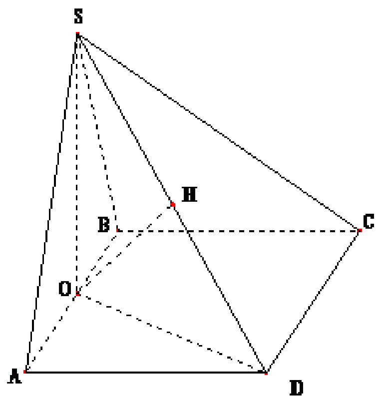
Vậy $d(AC,SM)=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD}=60^0$, SAB là tam giác đều nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) là?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm của $AB\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.

$SO=\frac{2a.\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$ do SO là đường cao của tam giác đều cạnh $2a$

Từ giả thiết suy ra tam giác BCD và tam giác ABD là tam giác đều $\Rightarrow CD\perp OD$

Ta có: $\begin{cases}CD\perp OD\\CD\perp SO\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SOD)$

Trong tam giác SOD kẻ $OH\perp SD$ tại H, ta có: $\begin{cases}OH\perp SD\\OH\perp CD\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SCD)$

Do $AB||(SCD)$ suy ra $d(B,(SCD))=d(O,(SCD))=OH$

Nhận thấy tam giác SOD là tam giác vuông cân tại O với $OD=a\sqrt{3}$

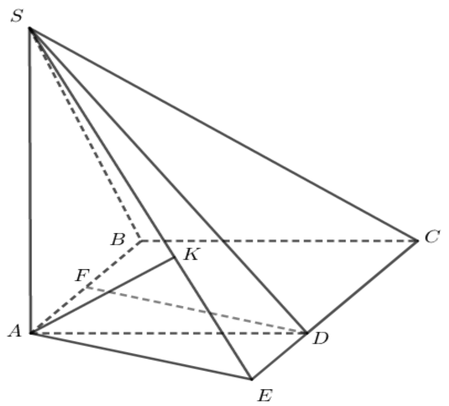
$OH=\frac{1}{2}SD=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+3a^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60^0, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Đáp án: A



Vì $AB // CD$ nên $AB // (SCD)$. Do đó $d(B;(SCD)) = d(A;(SCD))$

Ta có $ABCD$ là hình thoi mà $\widehat{BAD} = 60^0$ nên tam giác ABD là tam giác đều cạnh a

Gọi F là trung điểm của AB thì $DF \perp AB; AB // CD \Rightarrow DF \perp CD$

Kẻ $AE // FD \Rightarrow AE \perp CD, (E \in CD)$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

Do vậy $CD \perp (SAE) \Rightarrow (SCD) \perp (SAE)$, $(SCD) \cap (SAE) = SE$

Kẻ $AK \perp SE \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK = d(A;(SCD))$

Ta có $AE = FD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAE

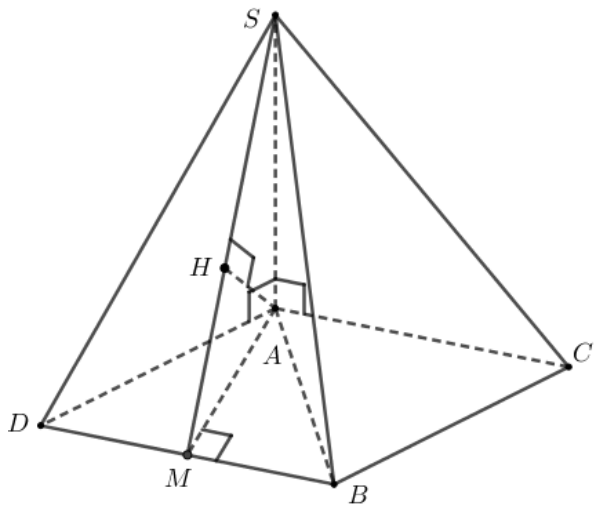
Ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{7}{3a^2}$. Do đó $d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $\widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{(SB;AB)} = \widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$, ta có $AC // BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow AC // (SBD)$

Suy ra $d(AC;SB) = d(AC;(SBD)) = d(A;(SBD))$

Gọi M là trung điểm BD, suy ra $BD \perp AM$. Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $BD \perp SA$, do đó $BD \perp (SAM)$. Kẻ $AH \perp SM$ $(H \in SM)$ thì $BD \perp AH$.

Từ $BD \perp AH$ và $AH \perp SM$ suy ra $AH \perp (SBD)$. Nên $d(A;(SBD)) = AH$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

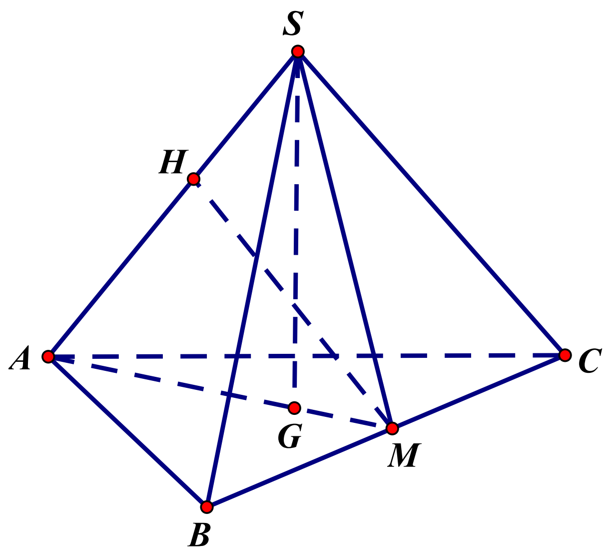
Vậy $\mathrm{d}(AC;SB) = \mathrm{d}(A;(SBD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA = SB = SC$, đáy là tam giác đều cạnh a. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng:

A. $\dfrac{4a}{7}$ **B.** $\dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$ **C.** $\dfrac{6a}{7}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Chọn C



Do hình chóp $S.ABC$ đều nên SG là đường cao của hình chóp (G là trọng tâm tam giác đều ABC). Gọi M là trung điểm BC. Kẻ $MH \perp SA$ tại H thì MH là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng MH.

Ta có $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}SG=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SG=4a$, $AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SA=\sqrt{AG^2+SG^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{9}+16a^2}=\dfrac{7a\sqrt{3}}{3}$. Ta có $SA.MH=SG.AM\Rightarrow MH=\dfrac{SG.AM}{SA}=\dfrac{3.4a.a\sqrt{3}}{2.7a\sqrt{3}}=\dfrac{6a}{7}$

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải:

Ta có: $CD//(SAB)$

$\Rightarrow d(CD,SB)=d(CD,(SAB))$

Lại có: $DA\perp(SAB)\Rightarrow d(CD,(SAB))=DA=a$.

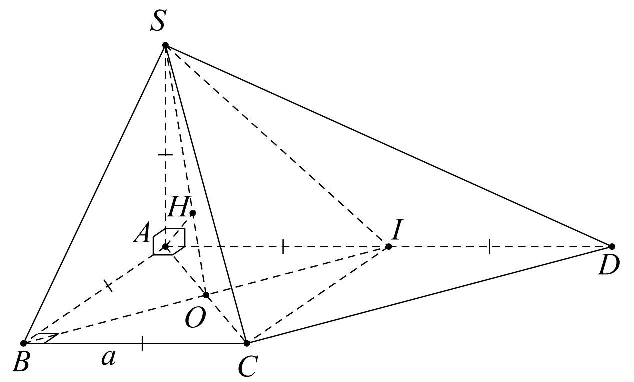
Chọn#**A.**

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $AD=2a; AB=BC=SA=a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AD, O là giao điểm của AC và BI. Ta có $CD//(SBI)$ nên $d(CD;SB)=d(CD;(SBI))=d(C;(SBI))=d(A;(SBI))$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SO $\Rightarrow d(A;(SBI))=AH$

Tứ diện $S.ABI$ có $AB; AS; AI$ đôi một vuông góc nên ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AS^2}\Rightarrow\frac{1}{AH^2}=\frac{3}{a^2}$$

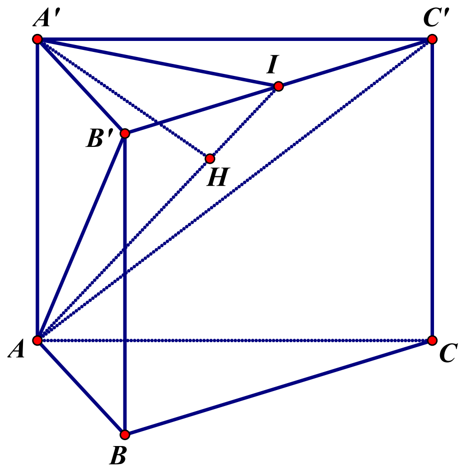
Vậy $\Rightarrow d(CD;SB)=AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 72. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AB' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC//B'C' \Rightarrow BC//(AB'C')$

suy ra $d(BC,AB')=d(BC,(AB'C'))=d(B,(AB'C'))=d(A',(AB'C'))$.

Gọi I và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên $B'C'$ và AI.

Ta có $B'C'\perp A'I$ và $B'C'\perp A'A$ nên $B'C'\perp(A'AI)\Rightarrow B'C'\perp A'H$ mà $AI\perp A'H$. Do đó $(AB'C')\perp A'H$

Khi đó $d(A',(AB'C'))=A'H=\dfrac{A'A.A'I}{\sqrt{A'A^2+A'I^2}}=\dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

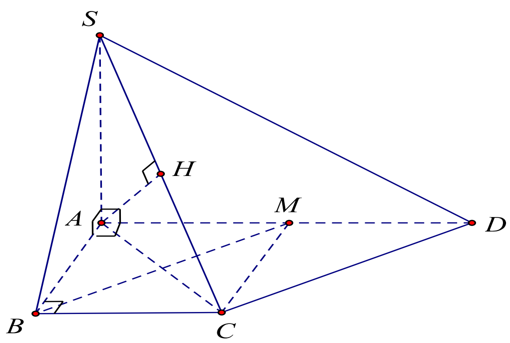
Vậy khoảng cách cần tìm là $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết $AB=BC=a, AD=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SC bằng

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ **D.** $\sqrt{2}a$

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $BMDC$ có: $MD//BC$ và $MD=BC=a$ nên tứ giác $BMDC$ là hình bình hành $\Rightarrow BM//CD \Rightarrow BM//(SCD) \Rightarrow d(BM,SC)=d(BM,(SCD))=d(M,(SCD))$

Mà $d(M,(SCD))=\dfrac{1}{2}d(A,(SCD))$

Nên $d(BM,SC)=\dfrac{1}{2}d(A,(SCD))$

+) Tứ giác $AMCB$ là hình vuông nên cạnh $AB=a$ nên $AC=a\sqrt{2}, CM=a$

Do đó tam giác ACD có $CM=\frac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C hay $AC\perp CD$

+) Kẻ $AH\perp SC$ tại H (1)

Ta có $\begin{cases} CD\perp AC \\ CD\perp SA \end{cases} \Rightarrow CD\perp(SAC)\Rightarrow(SCD)\perp(SAC)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow AH=d(A,(SCD))$

Do $SA=AC=a\sqrt{2}$ và $SA\perp AC$ nên tam giác SAC vuông cân tại A

$\Rightarrow H$ là trung điểm của SC $\Rightarrow AH=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}.\sqrt{2}.SA=a$

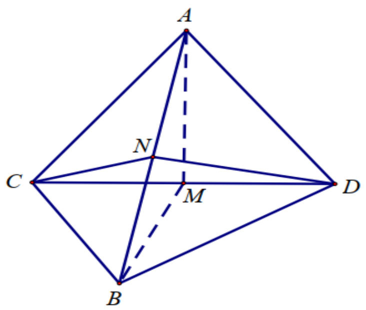
Vậy $d(BM,SC)=\frac{a}{2}$.

Câu 74. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=AD=BC=BD=2a,(ACD)\perp(BCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là 60^0. Độ dài cạnh CD bằng

A. $CD=\frac{\sqrt{7}}{7}a$. **B.** $CD=\frac{2\sqrt{7}}{7}a$. **C.** $CD=\frac{3\sqrt{7}}{7}a$. **D.** $CD=\frac{4\sqrt{7}}{7}a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm CD thì $AM=BM$ do $(ACD)\perp(BCD)$ ta được $AM\perp BM$.

Gọi N là trung điểm của AB thì $CN\perp AB$, $DN\perp AB$ suy ra góc $(CND)=60^0$.

Ta có $NA=NB=MN$ và do tam giác CDN cân nên $MN\perp CD$, suy ra

$$MN=\frac{MD}{\tan(MND)}=MD\sqrt{3}, ND=\frac{MD}{\cos(NDM)}=2ND$$

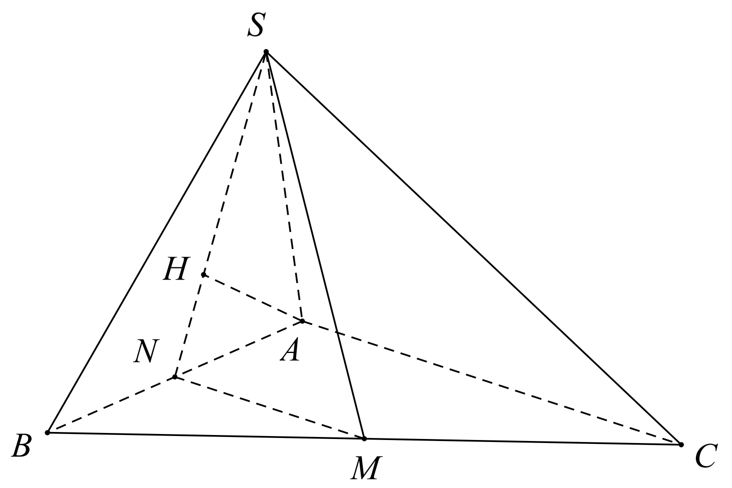
Lại có $AD^2=NA^2+ND^2\Rightarrow 4a^2=3MD^2+4MD^2\Rightarrow MD^2=\frac{4}{7}a^2\Rightarrow CD=\frac{4\sqrt{7}}{7}a$.

Câu 75. Cho khối chóp $S.ABC$ có $(SAB)\perp(ABC),(SAC)\perp(ABC), SA=a, AB=AC=2a, BC=2a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm AB ta có $MN // AC \Rightarrow d\left(AC, SM\right) = d\left(A, \left(SMN\right)\right)$

Do $\left(SAB\right) \perp \left(ABC\right), \left(SAC\right) \perp \left(ABC\right) \Rightarrow SA \perp \left(ABC\right)$

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow MN \perp AB$

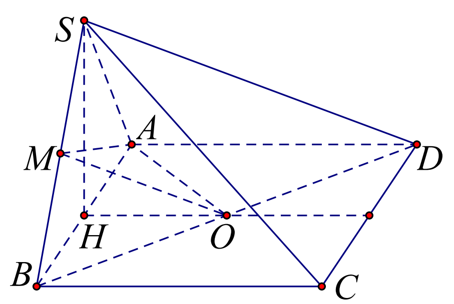
Dựng $AH \perp SN \Rightarrow AH \perp \left(SNM\right) \Rightarrow d\left(A, \left(SMN\right)\right) = AH$

Có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, SB; O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $MO // SD$.

Dễ thấy $BC \perp \left(SAB\right) \Rightarrow BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$ nên $AM \perp \left(SBC\right)$.

Xét tam giác AMO, có:

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$;

$$MO=\frac{1}{2}SD=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HA^2+AD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+3a^2}=a.$$

$\Rightarrow \Delta AMO$ cân tại O

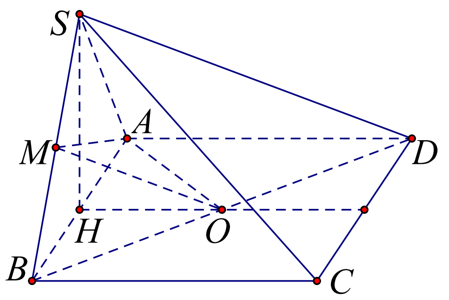
$$\Rightarrow \sin\widehat{AMO}=\frac{d\left(O;AM\right)}{OM}=\frac{\sqrt{MO^2-\frac{AM^2}{4}}}{OM}=\frac{\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{16}}}{a}=\frac{\sqrt{13}}{4}.$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{SD;\left(SBC\right)}\right)=\sin\widehat{AMO}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải



Gọi H,M lần lượt là trung điểm của AB,SB; O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $MO // SD$.

Dễ thấy $BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp AM$, mà $SB\perp AM$ nên $AM\perp\left(SBC\right)$.

Xét tam giác AMO, có:

$$AM=\frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+3a^2}=a;$$

$$MO=\frac{1}{2}SD=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HA^2+AD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+3a^2}=a.$$

$\Rightarrow \Delta AMO$ cân tại O

$$\Rightarrow \sin\widehat{AMO}=\frac{d\left(O;AM\right)}{OM}=\frac{\sqrt{MO^2-\frac{AM^2}{4}}}{OM}=\frac{\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{16}}}{a}=\frac{\sqrt{13}}{4}.$$

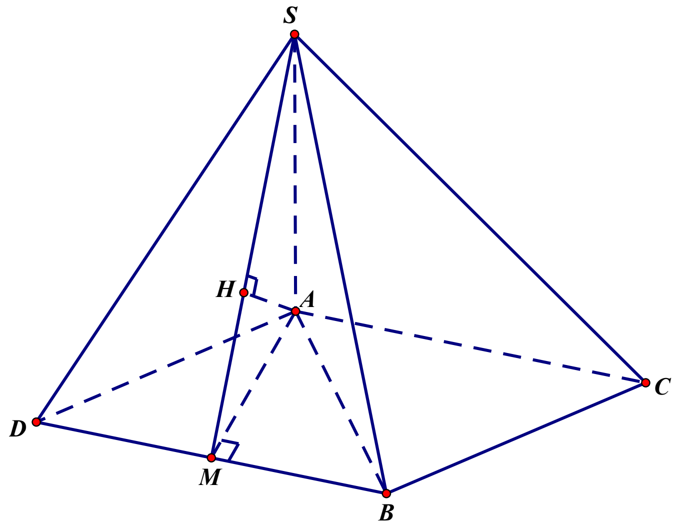
$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{SD;\left(SBC\right)}\right)=\sin\widehat{AMO}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $\widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{(SB,AB)} = \widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$, ta có $AC // (SBD)$ nên:

$d(AC,SB) = d(AC,(SBD)) = d(A,(SBD))$.

Gọi M là trung điểm BD, suy ra $BD \perp AM$. Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $BD \perp SA$, do đó $BD \perp (SAM)$. Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) thì $BD \perp AH$.

Từ $BD \perp AH$ và $AH \perp SM$ suy ra $AH \perp (SBD)$. Nên $d(A,(SBD)) = AH$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

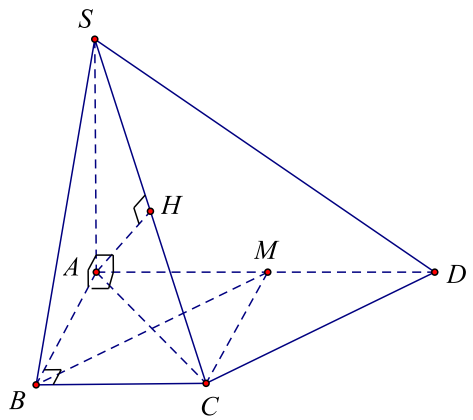
Vậy $d(AC,SB) = d(A,(SBD)) = AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết $AB = BC = a, AD = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SC bằng

A. $\frac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ **D.** $\sqrt{2}a$

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $BMDC$ có: $MD//BC$ và $MD = BC = a$ nên tứ giác $BMDC$ là hình bình hành $\Rightarrow BM//CD \Rightarrow BM//(SCD) \Rightarrow d(BM,SC) = d(BM,(SCD)) = d(M,(SCD))$

Mà $d(M,(SCD)) = \frac{1}{2}d(A,(SCD))$

Nên $d(BM,SC) = \frac{1}{2}d(A,(SCD))$

+) Tứ giác $AMCB$ là hình vuông nên cạnh $AB = a$ nên $AC = a\sqrt{2}, CM = a$

Do đó tam giác ACD có $CM = \frac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C hay $AC \perp CD$

+) Kẻ $AH \perp SC$ tại H (1)

Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d(A,(SCD))$

Do $SA = AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp AC$ nên tam giác SAC vuông cân tại A

$\Rightarrow H$ là trung điểm của SC $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.SA = a$

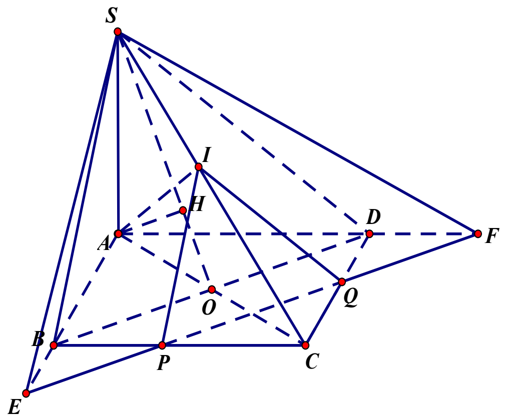
Vậy $d(BM,SC) = \frac{a}{2}$.

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Từ I lần lượt vẽ các đường thẳng song song với SB, SC cắt BC, CD tại P, Q. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AD. Tính khoảng cách từ E đến (SBD).

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{11}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{9}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Qua A dựng AH $\perp$ SO. Dễ dàng chứng minh được AH $\perp$ BD.

Khi đó AH = d(A;(SBD)). Trong tam giác vuông SAC, ta có:

$$CI.SC = AC^2 \Rightarrow \frac{IC}{SC} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{SA^2 + (AB^2 + BC^2)} = \frac{2a^2}{2a^2 + 3a^2} = \frac{2}{5}$$

ΔCBS có IP//SB $\Rightarrow \dfrac{IP}{SB} = \dfrac{CP}{CB} = \dfrac{CI}{CS} \Rightarrow \dfrac{CP}{CB} = \dfrac{2}{5}$

Áp dụng định lý Talet:

$$\frac{PE}{CQ} = \frac{BP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BE}{CQ} = \frac{BC - CP}{PC} = \frac{3}{2}$$

Mà AB = CD = CQ + QP = CQ + BE = $\dfrac{5}{3}$ BE.

Do tam giác AEF vuông tại A nên:

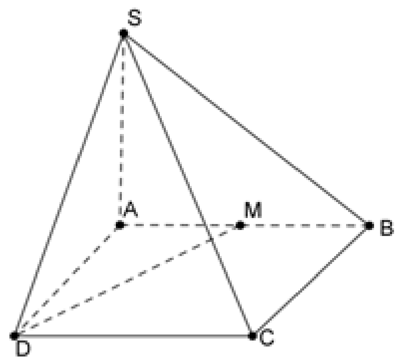
$$S_{AEF} = \frac{1}{2}AE.AF = \frac{1}{2}AE^2 = \frac{1}{2}\left(AB + BE\right)^2 = \frac{32}{25}AB^2 = \frac{32a^2}{25} \text{ (đvdt)}$$

$$\frac{DA}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow d\left(E,\left(SBD\right)\right) = \frac{3}{5}d\left(A,\left(SBD\right)\right)$$

Tam giác SAO vuông tại A, khi đó $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{3a^2}{7}$

Vậy $d\left(E,\left(SBD\right)\right) = \dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$.

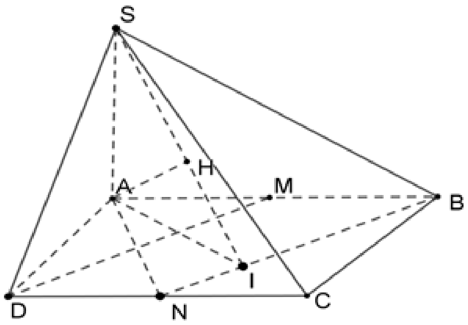
Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng:



A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}a$ **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{8}a$ **C.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}a$ **D.** a

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của CD; Lấy I, H lần lượt là hình chiếu của A lên BN, SI.

Ta có $DM//(SNB) \Rightarrow d(DM,SB) = d(DM,(SNB)) = \frac{1}{2}d(A,(SNB)) = \frac{1}{2}AH$.

Tam giác ANB có diện tích: $S_{ANB} = S_{ABCD} - 2.S_{ADN} = 2a^2 \Rightarrow AI = \frac{2S_{ANB}}{BN} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác vuông SAI có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{16}{5}a^2} = \frac{21}{16a^2} \Rightarrow AH = \frac{4\sqrt{21}}{21}a$.

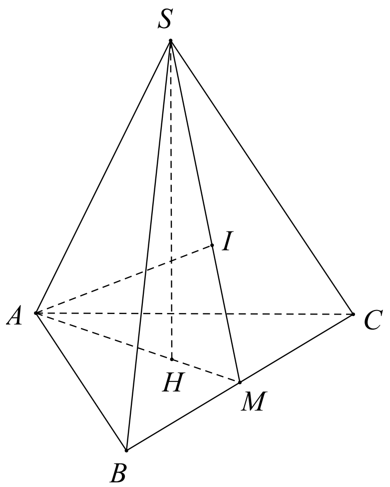
$d(DM,SB) = \frac{2\sqrt{21}}{21}a$.

Câu 82. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$, mặt bên tạo với đáy một góc $60°$. Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, ta có $SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $BC \perp (SAM)$.

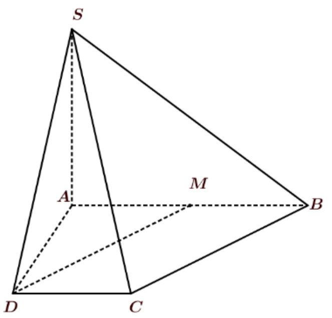
Do đó, ta có góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng $\widehat{SMH} = 60°$.

Đặt $AB = x \Rightarrow HM = \frac{x\sqrt{3}}{6}$; $SH = HM \tan 60° = \frac{x}{2}$. Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $V = \frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x^3\sqrt{3}}{24} \Rightarrow \frac{x^3\sqrt{3}}{24} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24} \Rightarrow x = a$.

Kẻ $AI \perp SM$ $\left(I \in SM\right) \Rightarrow AI \perp \left(SBC\right) \Rightarrow AI = d\left(A,\left(SBC\right)\right)$; $SM = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$.

$AI = \frac{SH.AH}{SM} = \frac{3a}{4}$.

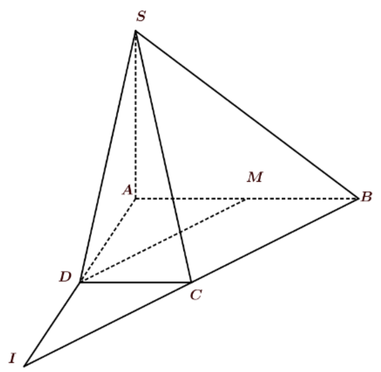
Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D. Biết $AB = 2a$, $AD = DC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SB bằng



A. $\frac{3a\sqrt{22}}{22}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{22}}{11}$ **C.** $\frac{6a\sqrt{22}}{11}$ **D.** $\frac{a\sqrt{22}}{22}$

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $BMDC$ có: $MB//DC$ và $MB = DC = a$ nên tứ giác $BMDC$ là hình bình hành

$\Rightarrow DM//BC \Rightarrow DM//(SBC) \Rightarrow d\left(DM,SB\right) = d\left(DM,(SBC)\right) = d\left(M,(SBC)\right)$.

Mà $d\left(M,\left(SBC\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(A,\left(SBC\right)\right)$ Nên $d\left(DM,SB\right) = \frac{1}{2}d\left(A,\left(SBC\right)\right) = \frac{1}{2}h$.

Kẻ $BC \cap AD = I$. Vì $AB//DC, AB = 2DC \Rightarrow D$ là trung điểm của AI.

Ta có tứ diện $A.SIB$ là tứ diện vuông tại A có: $AS = 3a; AB = 2a; AI = 2AD = 2a$

$d\left(A,\left(SBC\right)\right) = d\left(A,\left(SBI\right)\right)$. Do đó:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} \Leftrightarrow h = \frac{3a\sqrt{22}}{11}.$$

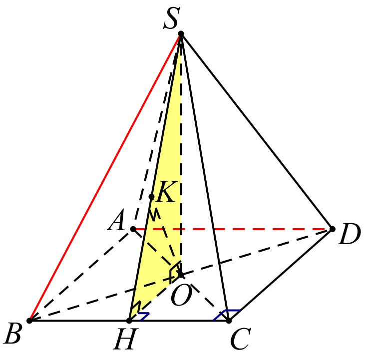
Vậy $d\left(DM,SB\right) = \frac{3a\sqrt{22}}{22}$.

Câu 84. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

A. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{42}}{14}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Lời giải:

Chọn A



* Gọi $O = AC \cap BD$, H, K lần lượt là hình chiếu của O trên BC, SH. Ta có:

$+\begin{cases} AD \,//\, BC \\ CB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AD \,//\, (ABC) \Rightarrow d(AD, SB) = d(D, (SBC))$

$+ DB = 2OB \Rightarrow d(D, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) \Rightarrow d(AD, SB) = 2d(O, (SBC))$

$*$ $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$; $BC \perp HO, BC \perp SO \Rightarrow BC \perp (SHO) \Rightarrow BC \perp OK$, $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OK$

$*$ ΔSOH vuông tại H có $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $HO = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2}$,

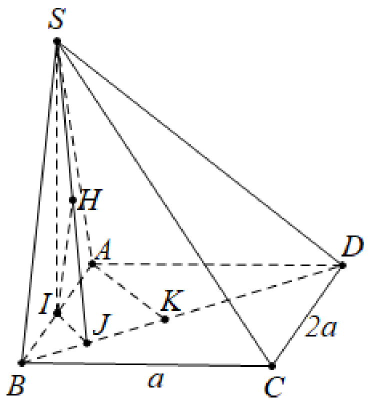
$OK \perp SH \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{14}{3a^2} \Rightarrow OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \Rightarrow d(AD, SB) = 2OK = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} SI \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD)\,(gt) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Xét ΔSAB đều có cạnh bằng $2a \Rightarrow SI = a\sqrt{3}$

Kẻ $AK \perp BD$ tại K. Ta xét ΔBAD có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Kẻ $JI \perp BD$ tại $J \Rightarrow JI // AK \Rightarrow JI = \frac{1}{2}AK = \frac{\sqrt{5}a}{5}$. Ta có: $BD \perp SI \Rightarrow BD \perp (SJI)$.

Kẻ $HI \perp SJ$ tại $H \Rightarrow IH \perp (SBD)$ tại $H \Rightarrow d(I;(SBD)) = IH$.

Xét ΔSJI có: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{JI^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do I là trung điểm của AB nên:

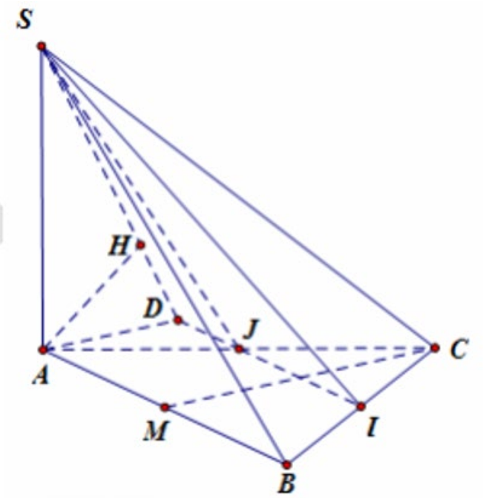
$\frac{d(A;(SBD))}{d(I;(SBD))} = \frac{AB}{AI} = 2 \Rightarrow d(A;(SBD)) = 2d(I;(SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều ABC cạnh là a, cạnh bên $SA = a$, $SA \perp (ABC)$, I là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SI và AB là

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{23}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{17}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $IJ // AB \Rightarrow d(SI, AB) = d(AB,(SIJ)) = d(A,(SIJ))$

Kẻ $AH \perp SD \Rightarrow AH = d(A,(SIJ))$

Ta có $AD = \frac{1}{2}MC = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{19}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{57}}{19}$

$\Rightarrow d(SI, AB) = \frac{a\sqrt{57}}{19}$

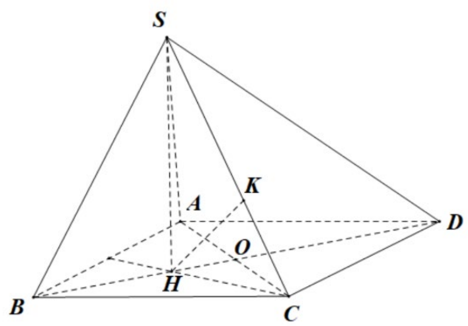
Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $ABCD$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30^0. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $O = AC \cap BD$



$\widehat{\left[SD,(ABCD)\right]} = \widehat{SDH} = 30^0$

$BD = 2BO = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$HD = OH + OD = \dfrac{1}{3}OB + OD$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}BD + \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$SH = HD.\tan\widehat{SDH} = \dfrac{2a}{3}$, $HC = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có $\begin{cases} HC \perp AB \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow CH \perp CD$, mà $SH \perp CD$ nên $CD \perp (SHC)$, ta suy ra $(SCD) \perp (SHC)$

$\begin{cases} (SCD) \perp (SHC) \\ SC = (SCD) \cap (SHC) \end{cases}$, trong ΔSHC, kẻ $HK \perp SC$, khi đó $HK \perp (SCD)$

$\Rightarrow d\left[H,(SCD)\right] = HK = \dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$

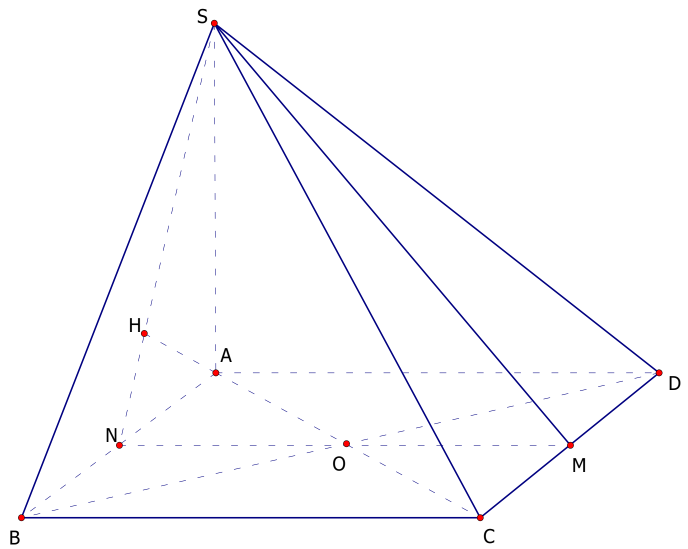
Mà $\dfrac{d\left[H,(SCD)\right]}{d\left[B,(SCD)\right]} = \dfrac{HD}{BD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow d\left[B,(SCD)\right] = \dfrac{3}{2}d\left[H,(SCD)\right] = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của CD. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SM bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow BC // (SMN)$.

$\Rightarrow d(BC,SM) = d(BC,(SMN)) = d(B,(SMN)) = d(A,(SMN))$.

Dựng AH vuông góc với SN tại H $\Rightarrow AH \perp (SMN)$.

Vậy $d\left(A,\left(SMN\right)\right)=AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lại có, trong tam giác vuông SAN : $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AS^2}\Rightarrow SA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

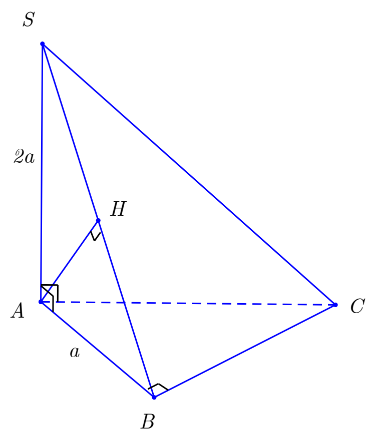
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng:

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)$.

Kẻ $AH\perp SB$. Khi đó $AH\perp BC$ $\Rightarrow AH\perp\left(SBC\right)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

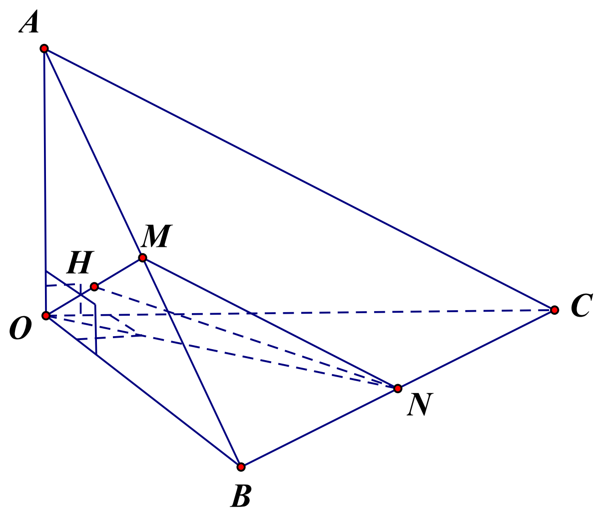
Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{4a^2}$ $\Rightarrow AH^2=\dfrac{4a^2}{5}\Rightarrow AH=\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 90. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=a$, $OC=2a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$ **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ **D.** $\dfrac{2a}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm của BC suy ra $MN//\text{AC}$ $\Rightarrow \text{AC}//(OMN)$

$\Rightarrow d(OM;AC) = d(C;(OMN)) = d(B;(OMN))$.

$V_{A.OBC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a.a.2a = \frac{1}{3}a^3$.

$\frac{V_{M.OBC}}{V_{A.OBC}} = \frac{d(M;(ABC))}{d(A;(ABC))}.\frac{S_{OBN}}{S_{OBC}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{M.OBC} = \frac{1}{12}a^3$.

Xét tam giác vuông cân AOB: $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Xét tam giác vuông BOC: $ON = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Xét tam giác BAC: $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Trong tam giác cân OMN, gọi H là trung điểm của OM ta có $\text{NH} = \sqrt{NM^2 - HM^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

Suy ra $S_{OMN} = \frac{1}{2}OM.NH = \frac{3}{8}a^2$.

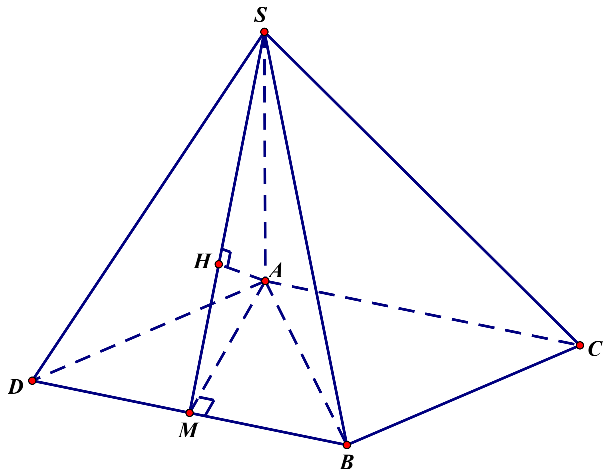
Vậy $d(B;OMN) = \frac{3V_{M.OBN}}{S_{OMN}} = \frac{2}{3}a$.

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $\widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{(SB,AB)} = \widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$.

Ta có $AC // (SBD)$ nên: $d(AC,SB) = d(AC,(SBD)) = d(A,(SBD))$.

Gọi M là trung điểm BD, suy ra $BD \perp AM$.

Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $BD \perp SA$, do đó $BD \perp (SAM)$.

Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) thì $BD \perp AH$.

Từ $BD \perp AH$ và $AH \perp SM$ suy ra $AH \perp (SBD)$. Nên $d(A,(SBD)) = AH$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

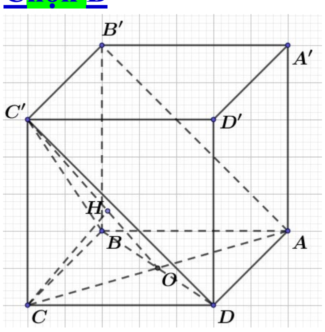
Vậy $d(AC,SB) = d(A;(SBD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 92. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là 6. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' là

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AB' // DC' \Rightarrow AB' // (BDC')$

$\Rightarrow d(AB',BC') = d(AB',(BDC')) = d(A,(BDC')) = d(C,(BDC'))$

Gọi $O = AC \cap BD$. Kẻ $CH \perp C'O$ tại H.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(ACC'\right) \Rightarrow BD \perp CH$

Mà $CH \perp C'O \Rightarrow CH \perp \left(BDC'\right)$

$\Rightarrow d\left(C,\left(BDC'\right)\right) = CH = \dfrac{CC'.CO}{C'O} = \dfrac{6.3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$.

Vậy $d\left(AB', BC'\right) = 2\sqrt{3}$.

TÍCH PHÂN

TOANMATH.com

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\frac{2}{3}$ và $f'(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$ với mọi $x>-1$. Khi đó $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{-113}{30}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{-5}{3}$. **D.** $\frac{113}{30}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{x+1-1}dx=\int (\sqrt{x+1}-1)\,\mathrm{dx}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+C$

Do $f(0)=\frac{2}{3}\Rightarrow C=0$. Vậy suy ra $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x$.

Khi đó $\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x\right)dx=\frac{113}{30}$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$, tính $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $5=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x$

Đặt $t=4-x\Rightarrow\begin{cases}x=4-t\\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\end{cases}$.

Đổi cận ta có $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\ x=3\Rightarrow t=1\end{cases}$.

Do đó $\int_1^3 x.f(4-x)\mathrm{d}x=-\int_3^1(4-t).f(t)\mathrm{d}t=\int_1^3(4-t).f(t)\mathrm{d}t=\int_1^3 4.f(t)\mathrm{d}t-\int_1^3 t.f(t)\mathrm{d}t$

Suy ra $5=\int_1^3 4.f(t)\mathrm{d}t-5\Rightarrow 4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=10\Rightarrow\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{5}{2}$ hay $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}$.

Ta có: $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{3}{t}\Rightarrow 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}\Leftrightarrow 4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x}(1)$

Theo đề: $f\left(x\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$$3f\left(x\right)=\frac{6}{x}-3x\Rightarrow\frac{f\left(x\right)}{x}=\frac{2}{x^2}-1$$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(-\frac{2}{x}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$$

Câu 4. Biết $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+\left(x+2\right)\sqrt{x}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-c$, với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 46. **D.** 22.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+\left(x+2\right)\sqrt{x}}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}$

$$=\int_1^2\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\Big|_1^2=\sqrt{2}+\sqrt{3}-3.$$

Vậy $a=2;b=3;c=3$ nên $P=a+b+c=8$.

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-2;1\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; $f\left(0\right)=\dfrac{1}{3}$ và $f\left(-3\right)-f\left(3\right)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=f\left(-4\right)+f\left(-1\right)-f\left(4\right)$.

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$ **B.** $\ln 80+1$ **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)+\ln 2+1$ **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)+1$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{\left(x-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right).$$

$$I=f\left(-3\right)-f\left(-4\right)=\int_{-4}^{-3}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{-4}^{-3}=\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}.$$

$$J=f\left(0\right)-f\left(-1\right)=\int_{-1}^{0}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{2}{3}\ln 2.$$

$$K=f\left(4\right)-f\left(3\right)=\int_{3}^{4}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{3}^{4}=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}.$$

$$-I-J-K=f\left(-4\right)-f\left(-3\right)+f\left(-1\right)-f\left(0\right)+f\left(3\right)-f\left(4\right)$$

$$=\left[f\left(-4\right)+f\left(-1\right)-f\left(4\right)\right]-f\left(0\right)-\left[f\left(-3\right)-f\left(3\right)\right].$$

$$f\left(-4\right)+f\left(-1\right)-f\left(4\right)=-I-J-K+f\left(0\right)+\left[f\left(-3\right)-f\left(3\right)\right].$$

$T=f(-4)+f(-1)-f(4)=-\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$; $f(0)=\frac{1}{3}$ và $f(-3)-f(3)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=f(-4)+f(-1)-f(4)$.

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$ **B.** $\ln 80+1$ **C.** $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{5}\right)+\ln 2+1$ **D.** $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)+1$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right).$$

$$I=f(-3)-f(-4)=\int_{-4}^{-3}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{-4}^{-3}=\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}.$$

$$J=f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{2}{3}\ln 2.$$

$$K=f(4)-f(3)=\int_{3}^{4}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_{3}^{4}=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}.$$

$$-I-J-K=f(-4)-f(-3)+f(-1)-f(0)+f(3)-f(4)$$

$$=\left[f(-4)+f(-1)-f(4)\right]-f(0)-\left[f(-3)-f(3)\right].$$

$$f(-4)+f(-1)-f(4)=-I-J-K+f(0)+\left[f(-3)-f(3)\right].$$

$$T=f(-4)+f(-1)-f(4)=-\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=\frac{-11}{15}$ và $f'(x)=x\sqrt{x+1},\forall x\in[1;+\infty)$. Khi đó $\int_3^8 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{115}{2}$. **B.** $\frac{115008}{525}$.

C. $\frac{115007}{525}$. **D.** $\frac{115}{4}$

Lời giải

Chọn C

$f(x)=\int x\sqrt{x+1}dx$

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$

Ta có: $I=\int(t^2-1)t.2tdt=\int(2t^4-2t^2)dt=\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+C=\frac{2t^3}{15}(3t^2-5)$

$=\frac{2(x+1)(3x+2)\sqrt{x+1}}{15}+C.$

- Thay $x=1$ vào $f(x) \Leftrightarrow \mathrm{f}(1)=\dfrac{-11}{15} \Leftrightarrow \mathrm{C}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{-11}{15} \Leftrightarrow \mathrm{C}=-1$

$\rightarrow f(x)==\dfrac{2(x+1)(3x+2)\sqrt{x+1}}{15}-1.$

- $\int\limits_3^8 f(x)dx=\int\limits_8^3 (\dfrac{2(x+1)(3x+2)\sqrt{x+1}}{15}-1)dx=\dfrac{115007}{525}$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=8$. **C.** $I=-12$. **D.** $I=-8$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $f(x)=ax+b$, $(a\neq 0) \Rightarrow f'(x)=a$.

Theo giả thiết ta có:

+) $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow a\int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{10}{a} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}=\dfrac{10}{a} \Rightarrow a=\dfrac{20}{3}$.

+) $2f(1)-f(0)=2 \Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{20}{3}+b\right)-b=2 \Leftrightarrow b=-\dfrac{34}{3}$.

Do đó, $f(x)=\dfrac{20}{3}x-\dfrac{34}{3}$.

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\dfrac{20}{3}x-\dfrac{34}{3}\right)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 9. Nếu $f(1)=12, f'(x)$ liên tục và $\int\limits_1^4 f'(x)dx=17$, giá trị của $f(4)$ bằng

A. 19. **B.** 29. **C.** 5. **D.** 9

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)dx=f(x)\Big|_1^4=f(4)-f(1)=17$

$\Rightarrow f(4)=17+12=29$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-10+2=-8$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 11. : Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=\dfrac{11}{12}$ và $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4x+1}},\forall x\in\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)dx$ bằng?

A. $\dfrac{9}{20}$. **B.** $\dfrac{29}{20}$. **C.** $\dfrac{20}{9}$. **D.** $\dfrac{20}{29}$

Lời giải

Chọn B

◆ Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Leftrightarrow t^2=4x+1\longrightarrow\begin{cases}2tdt=4dx\\ x=\dfrac{t^2-t}{4}\end{cases}\longrightarrow f(\mathrm{x})=\int\dfrac{xdx}{\sqrt{4x+1}}=\int\dfrac{\dfrac{t^2-1}{4}.\dfrac{tdt}{2}}{t}=\dfrac{1}{8}\int\left(t^2-1\right)dt$

$=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)+C=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3}-\sqrt{4x+1}\right)+C.$

◆ Thay $x=1$ vào $f(x)\Leftrightarrow \mathrm{f}(1)=\dfrac{11}{12}\Leftrightarrow \mathrm{C}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{12}\Leftrightarrow \mathrm{C}=1$

$\to f(x)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3}-\sqrt{4x+1}\right)+1.$

◆ $\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2(\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3}-\sqrt{4x+1}\right)+1)dx=\dfrac{29}{20}$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\dfrac{2}{3}$ và $f'(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}$ với mọi $x>-1$. Khi đó $\int\limits_0^3 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{-113}{30}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{-5}{3}$. **D.** $\dfrac{113}{30}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int\dfrac{x(\sqrt{x+1}-1)}{x+1-1}dx=\int(\sqrt{x+1}-1)\,\mathrm{dx}$

$=\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+C$

Do $f(0)=\dfrac{2}{3}\Rightarrow C=0$. Vậy suy ra $f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x$.

Khi đó $\int\limits_0^3 f(x)dx=\int\limits_0^3\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x\right)dx=\dfrac{113}{30}$

Câu 13. Cho $\int\limits_0^4 f(x)dx=2018$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2[f(2x)+f(4-2x)]dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=2018$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1009$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_0^2[f(2x)+f(4-2x)]dx=\int\limits_0^2 f(2x)dx+\int\limits_0^2 f(4-2x)dx=I_1+I_2$.

+Tính $I_1=\int\limits_0^2 f(2x)dx$.

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx \Rightarrow \frac{1}{2}dt=dx$.

Khi $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=2 \Rightarrow t=4$.

Ta được $I_1=\int\limits_0^2 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}.2018=1009$.

+ Tính $I_2=\int\limits_0^2 f(4-2x)dx$.

Đặt $t=4-2x \Rightarrow dt=-2dx \Rightarrow -\frac{1}{2}dt=dx$.

Khi $x=0 \Rightarrow t=4$; $x=2 \Rightarrow t=0$.

Ta được $I_2=\int\limits_0^2 f(4-2x)dx=-\frac{1}{2}\int\limits_4^0 f(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}.2018=1009$.

+Vậy $I=I_1+I_2=1009+1009=2018$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục với mọi $x\neq 0$ thỏa mãn $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x, x\neq 0$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{9}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x, x\neq 0\ \left(1\right)$.

Nên $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f\left(x\right)=\frac{3}{x}, x\neq 0\ \left(2\right)$.

$\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow 3\left[f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{3}{x}+3x$

$\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{1}{x}\ \left(3\right)$.

$\left(2\right),\left(3\right)\Rightarrow f\left(x\right)=-x+\frac{2}{x}$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left(-x-\frac{2}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$

Câu 15. Cho tích phân $I=\int\limits_0^4\frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{2x+1}}=a+b\ln\frac{2}{3}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=3$. **B.** $a-b=5$. **C.** $a+b=5$. **D.** $a+b=3$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$

$x=4\Rightarrow t=3$

Khi đó $I=\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{3+\sqrt{2x+1}}=\int\limits_1^3 \frac{t\mathrm{d}t}{3+t}=\int\limits_1^3\left(1-\frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t$

$=\left(t-3\ln|t+3|\right)\Big|_1^3=2+3\ln\frac{2}{3}$

Do đó $a+b=5$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(\ln 3)=3$ và $f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1-\sqrt{\mathrm{e}^x+1}},\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^{\ln 3}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Câu 17. #A. $\frac{-10-8\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{20-8\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{20+8\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{10-8\sqrt{2}}{3}$ 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1-\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^x+1+\sqrt{e^x+1}\right)}{\left(e^x+1\right)^2-\left(e^x+1\right)}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^x+1+\sqrt{e^x+1}\right)}{\mathrm{e}^x\left(e^x+1\right)}\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+C$.

Do $f(\ln 3)=3\Rightarrow C=-4\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^x+2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-4$.

Khi đó $\int\limits_0^{\ln 3}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\ln 3}\left(\mathrm{e}^{2x}+2e^x\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-4\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{4}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{\frac{3}{2}}-4\mathrm{e}^x\right)\Bigg|_0^{\ln 3}=\frac{20-8\sqrt{2}}{3}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

A. $1-\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}-1$. **C.** $1+\frac{\pi}{4}$. **D.** $2-\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\left(\tan x-x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}-\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2-\frac{\pi}{2}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(-x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, đổi cận $x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}$.

$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(-x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(t)-2f(-t)\right]\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[3f(x)-2f(-x)\right]\mathrm{d}x$

Suy ra, $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)\mathrm{d}x \Rightarrow 2-\frac{\pi}{2} = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[3f(x)-2f(x)\right]\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2-\frac{\pi}{2} = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = 2-\frac{\pi}{2}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{x}{x+f^2(x)}$. Biết rằng $\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 1$ và $2g(2)-g(1)=2$. Tích phân $\int\limits_1^2 \frac{x^2}{x+f^2(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1,5$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{x}{x+f^2(x)}$ nên $g'(x)=\frac{x}{x+f^2(x)}$.

Đặt $I=\int\limits_1^2 \frac{x^2}{x+f^2(x)}\mathrm{d}x \Rightarrow I=\int\limits_1^2 xg'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=g'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=g(x) \end{cases}$.

Khi đó $I=xg(x)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 2g(2)-g(1)-1=1$. $P=2a-b+c$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=\frac{11}{12}$ và $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{4x+1}}, \forall x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{9}{20}$. **B.** $\frac{29}{20}$. **C.** $\frac{20}{9}$. **D.** $\frac{20}{29}$

Lời giải

Chọn B

◆ Đặt $t=\sqrt{4x+1} \Leftrightarrow t^2=4x+1 \longrightarrow \begin{cases} 2tdt=4dx \\ x=\frac{t^2-t}{4} \end{cases} \longrightarrow f(x)=\int\frac{xdx}{\sqrt{4x+1}}=\int\frac{\frac{t^2-1}{4}.\frac{tdt}{2}}{t}=\frac{1}{8}\int(t^2-1)dt$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3}-\sqrt{4x+1}\right)+C.$

◆ Thay $x=1$ vào $f(x) \Leftrightarrow \mathrm{f}(1)=\frac{11}{12} \Leftrightarrow \mathrm{C}-\frac{1}{12}=\frac{11}{12} \Leftrightarrow \mathrm{C}=1$

$\rightarrow f(x)=\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3}-\sqrt{4x+1}\right)+1.$

◆ $\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2 (\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3}-\sqrt{4x+1}\right)+1)dx=\frac{29}{20}$

Câu 21. Biết rằng $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a,b,c là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chon A

Đặt $t=\sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2t dt = 3dx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$.

Ta có: $\int\limits_1^2 \frac{dx}{3x+1+5\sqrt{3x+1}+6} = \frac{2}{3}\int\limits_1^2 \frac{tdt}{t^2+5t+6} = \frac{2}{3}\int\limits_1^2 \left(\frac{3}{t+3} - \frac{2}{t+2}\right)dt = \frac{2}{3}\left[3\ln|t+3| - 2\ln|t+2|\right]\Big|_1^2$

$= \frac{2}{3}\left[(3\ln 5 - 2\ln 4) - (3\ln 4 - 2\ln 3)\right] = -\frac{20}{3}\ln 2 + \frac{4}{3}\ln 3 + 2\ln 5$

Suy ra: $a = -\frac{20}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=2$.

Vậy $a+b+c = -\frac{10}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int\limits_1^3 x.f(x)dx = 5$. Tính tích

phân $I=\int\limits_1^3 f(x)dx$.

A. $I=\frac{11}{2}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{9}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn D

Vì $f(4-x)=f(x)$ không phụ thuộc x nên chọn $f(x)=\text{const}$

Chọn $f(x)=k$ mà $\int\limits_1^3 xf(x)dx = \int\limits_1^3 kxdx = \frac{kx^2}{2}\Big|_1^3 = 4k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{4}$

Do đó $f(x)=\frac{5}{4} \to I = \int\limits_1^3 f(x)dx = \frac{5}{4}\int\limits_1^3 dx = \frac{5}{2}$

Câu 23. Một vật đang chuyển động với vận tốc $10m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=2t+t^2\ (m/s^2)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

A. $\frac{7900}{3}(m)$. **B.** $\frac{1600}{3}(m)$. **C.** $\frac{1300}{3}(m)$. **D.** $\frac{3800}{3}(m)$

Lời giải

Đáp án D

Vận tốc của chuyển động có phương trình $v(t)=\int a(t)dt = \int (2t+t^2)dt = t^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$

Tại thời điểm vận tốc 10m/s $C=10 \Rightarrow v(t) = t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 10$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

$$S=\int_0^{10}\left(t^2+\frac{1}{3}t^3+10\right)=\frac{3800}{3}(m)$$

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=xe^x$ và $f(0)=2$. Tính $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. e^2+5. **B.** -8. **C.** e^2+1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int x.e^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=x$ và $\mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=e^x$.

Do đó $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=x.e^x-\int e^x\mathrm{d}x=x.e^x-e^x+C$.

Theo đề: $f(0)=2\Leftrightarrow 2=-1+C\Leftrightarrow C=3$.

$\Rightarrow f(x)=x.e^x-e^x+3$.

Khi đó $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x.e^x-e^x+3\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 x.e^x\mathrm{d}x+\int_0^2\left(-e^x+3\right)\mathrm{d}x=\left(x.e^x-e^x\right)\Big|_0^2+\left(-e^x+3x\right)\Big|_0^2=8$.

Câu 25. Biết $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=12$. **B.** $P=18$. **C.** $P=24$. **D.** $P=46$

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}\mathrm{d}x.$

Đặt $u=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$, suy ra $\mathrm{d}u=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\longrightarrow 2\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases}x=2\rightarrow u=\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ x=1\rightarrow u=\sqrt{2}+1\end{cases}$. Khi đó $I=2\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=-\frac{2}{u}\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$=-2\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}\right)=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2\longrightarrow\begin{cases}a=32\\ b=12\\ c=2\end{cases}\longrightarrow P=46.$ **Chọn** **D.**

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(x+1)e^x$, $f(0)=0$. Khi đó $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$. Tính $a+b+c$

A. $a+b+c=2$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=1$. **D.** $a+b+c=0$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề: $f'(x)=(x+1)e^x$. Nguyên hàm 2 vế ta được $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)e^x\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(x)=(x+1)e^x-\int e^x dx$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$

Mà $f(0)=0\Rightarrow 0.e^0+C=0\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=xe^x$.

$\Rightarrow\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{\ln 3}xe^x\mathrm{d}x=xe^x\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}-\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x\mathrm{d}x=3\ln 3-2\ln 2-e^x\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}=3\ln 3-2\ln 2-1.$

Suy ra $a=3;b=-2;c=-1\Rightarrow a+b+c=0$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=1$. **B.** $I=8$. **C.** $I=-12$. **D.** $I=-8$

Lời giải

Chọn D

Từ $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10$. Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

Ta có $10=\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2f(1)-f(0)-I$

$I=2-10=-8$

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=xe^x$ và $f(0)=2$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. e^2+5. **B.** -8. **C.** e^2+1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int x.\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=x$ và $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=\mathrm{e}^x$.

Do đó $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Theo đề: $f(0)=2\Leftrightarrow 2=-1+C\Leftrightarrow C=3$.

$\Rightarrow f(x)=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+3$.

Khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 (x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+3)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\limits_0^2(-\mathrm{e}^x+3)\,\mathrm{d}x=(x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)\Big|_0^2+(-\mathrm{e}^x+3x)\Big|_0^2=8$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=0$ và $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4x+4},\forall x\in(2;+\infty)$. Khi đó $\int_3^{e+2} f(x)\,dx=ae+b\ \ (a,b\in\mathbb{Z})$. Tích $a.b$ bằng

A. -2. **B.** 24. **C.** 8. **D.** -24.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Ta có: $f(x)=\int\dfrac{2x}{x^2-4x+4}dx=\int\dfrac{2x}{(x-2)^2}dx=I$

Đặt $t=x-2\Rightarrow dt=dx$

$I=\int\dfrac{2(t+2)}{t^2}dt=2\ln|t|-\dfrac{4}{t}+C$.

Với $x=3\Rightarrow t=1$ nên có $f(1)=0\Rightarrow C=4$

Đổi cận: $x=3\Rightarrow t=1$

$x=e+2\Rightarrow t=e$

Vậy $\int_3^{e+2} f(x)\,dx=\int_1^e\left(2\ln|t|-\dfrac{4}{t}+4\right)dt=4e-6$. Suy ra $a=4;\ b=-6$.

Cách 2. $f(x)=\int\frac{2x}{x^2-4x+4}dx=\int\frac{2(x-2)+4}{(x-2)^2}dx=\int\frac{2}{x-2}dx+4\int\frac{1}{(x-2)^2}dx$

$=2\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}+C$

$f(3)=0\Rightarrow C=4$. Vậy $f(x)=2\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}+4$

$\int_3^{e+2}f(x)dx=\int_3^{e+2}\left(2\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}+4\right)dx=4e-6$. Suy ra $a=4;\ b=-6.$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=1$ và $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2},\ \forall x>0$. Khi đó $\int\limits_1^e f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{e}-1$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $1-\frac{2}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=\int f'(x)dx=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

Đặt: $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{1}{x^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=-\frac{1}{x}\end{cases}$. Khi đó: $I=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{\ln x}{x}-\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C$

Suy ra: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C$

Do $f(1)=1\Rightarrow 1=1+C\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{\ln x+1}{x}$

Khi đó: $J=\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_1^e\frac{\ln x+1}{x}dx=\int\limits_1^e(\ln x+1)d(\ln x)=\left(\frac{1}{2}\ln^2x+\ln x\right)\Big|_1^e=\frac{3}{2}$

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2;\ \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn B.

Có $I=\int\limits_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)\mathrm{d}x$.Đặt $u=1-2x\Rightarrow$ du=-2 dx $u=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\,\mathrm{d}x$.Đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow u=3\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow u=0\end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\frac{-1}{2}\int\limits_3^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_0^3 f(u)\mathrm{d}u=3$

Tính $I_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)\mathrm{d}x$. Đặt $u=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow u=1\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow u=0\end{cases}$.

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,\mathrm{du} = \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,\mathrm{du} = 1$

Vậy $I = I_1 + I_2 = 4$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=2$ và $f'(x)=\frac{9}{(x+2)^2}$, $\forall x > -2$. Khi đó $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ bằng:

A. $5-18\ln 2$. **B.** $9-18\ln 2$. **C.** $3-18\ln 2$. **D.** $15-18\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{9}{(x+2)^2}dx \Rightarrow f(x)=\frac{-9}{x+2}+C$

Mà: $f(1)=2 \Rightarrow \frac{-9}{1+2}+C=2 \Leftrightarrow C=5$. Nên: $f(x)=\frac{-9}{x+2}+5 \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(\frac{-9}{x+2}+5\right)dx$

$\Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(\frac{-9}{x+2}+5\right)dx=-9\ln|x+2|\Big|_{-1}^{2}+5x\Big|_{-1}^{2}=15-18\ln 2$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=2$ và $f'(x)=\frac{9}{(x+2)^2}$, $\forall x > -2$. Khi đó $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ bằng:

A. $5-18\ln 2$. **B.** $9-18\ln 2$. **C.** $3-18\ln 2$. **D.** $15-18\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{9}{(x+2)^2}dx \Rightarrow f(x)=\frac{-9}{x+2}+C$

Mà: $f(1)=2 \Rightarrow \frac{-9}{1+2}+C=2 \Leftrightarrow C=5$. Nên: $f(x)=\frac{-9}{x+2}+5 \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(\frac{-9}{x+2}+5\right)dx$

$\Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(\frac{-9}{x+2}+5\right)dx=-9\ln|x+2|\Big|_{-1}^{2}+5x\Big|_{-1}^{2}=15-18\ln 2$

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=1$ và $f'(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}$ với $x\ge 0$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\sqrt{32}-\sqrt{12}-1$. **B.** $\frac{17}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{32}+\sqrt{12}-1$. **D.** $\frac{17}{3}+\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+C$ $\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}}{(x+1)^2x-x^2(x+1)}dx$

$=\int\frac{(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+C$

Suy ra $f(x)=2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f(0)=1 \Leftrightarrow C=3$

Bấm máy tính $\int\limits_0^1 \left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+C\right)dx=\frac{17}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}$

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-f(x)=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x^2+2x-1}{2}}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=\mathrm{e}$. Giá trị của $f(5)$ bằng

A. $3\mathrm{e}^{12}-1$. **B.** $5\mathrm{e}^{17}$. **C.** $5\mathrm{e}^{17}-1$. **D.** $3\mathrm{e}^{12}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f'(x)-f(x)=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x^2+2x-1}{2}} \Leftrightarrow f'(x)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}f(x)=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}} \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{-x}f(x)\right)'=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}.$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^5 \left(\mathrm{e}^{-x}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\limits_1^5\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}f(x)\Big|_1^5=\int\limits_1^5 x^2\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x+\int\limits_1^5\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5}f(5)-1=I_1+I_2\,(*)$$

Xét: $I_2=\int\limits_1^5 \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u=\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=x\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x \\ v=x \end{cases}$.

$$I_2=x\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\Big|_1^5-\int\limits_1^5 x^2\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x=5\mathrm{e}^{12}-1-I_1 \Leftrightarrow I_1+I_2=5\mathrm{e}^{12}-1\,(*) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-5}f(5)-1=5\mathrm{e}^{12}-1 \Leftrightarrow f(5)=5\mathrm{e}^{17}.$$

Câu 36. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^x+3}$ và $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x)+\ln\left(x^3+3\right)=2$ là

A. $S=\{2\}$. **B.** $S=\{-2;2\}$. **C.** $S=\{1;2\}$. **D.** $S=\{-2;1\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+3}=\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)+C$.

Do $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 4$ nên $C=0$. Vậy $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)$.

Do đó: $3F(x)+\ln\left(e^x+3\right)=2\Leftrightarrow x=2$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x), \forall x>0, f(x)\neq 0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Khi đó $\int\limits_1^{2020} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\frac{2021}{4040}$. **B.** $\ln\frac{4040}{2021}$. **C.** $\ln\frac{2021}{2020}$. **D.** $\ln\frac{2020}{2021}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + x + C$.

Mà $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$.

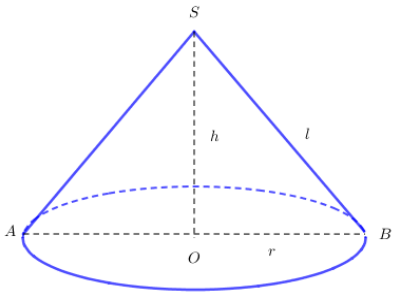
Khi đó $\int\limits_1^{2020} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{2020} \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|\right)\Big|_1^{2020} = \ln\dfrac{2021}{4040}$.

Câu 38. Một hình nón có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** $\sqrt{3}\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Hình nón có đường sinh $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2} = 2a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = 2\pi a^2$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}$ trên $[0;+\infty)$. Biết $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = -\dfrac{2}{3}$, khi đó phương trình $f(x) = 0$ có các nghiệm thuộc khoảng nào?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = \int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx = \dfrac{2}{3}\int \dfrac{d\left(1+x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{1+x\sqrt{x}} + C$.

(vì $\left(1+x\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$).

Mà $\begin{cases} f(x) \geq \dfrac{4}{3} + C, \forall x \geq 0 \\ f(0) = \dfrac{4}{3} + C \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(0) = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow C = -2$.

Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \in (1;2)$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}$ trên $[0;+\infty)$. Biết $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = -\dfrac{2}{3}$, khi đó phương trình $f(x) = 0$ có các nghiệm thuộc khoảng nào?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f\left(x\right)=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{d\left(1+x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}=\frac{4}{3}\sqrt{1+x\sqrt{x}}+C$.

(vì $\left(1+x\sqrt{x}\right)'=\sqrt{x}+x.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$).

Mà $\begin{cases} f\left(x\right)\geq\frac{4}{3}+C,\forall x\geq 0 \\ f\left(0\right)=\frac{4}{3}+C \end{cases}\Rightarrow\min\limits_{[o;+\infty)}f\left(x\right)=f\left(0\right)=-\frac{2}{3}\Rightarrow C=-2$.

Vậy $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{1+x\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\in\left(1;2\right)$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(\ln 3\right)=3$ và $f'\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1-\sqrt{\mathrm{e}^x+1}},\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^{\ln 3}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-10-8\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{20-8\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{20+8\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{10-8\sqrt{2}}{3}8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1-\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^x+1+\sqrt{e^x+1}\right)}{\left(e^x+1\right)^2-\left(e^x+1\right)}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^x+1+\sqrt{e^x+1}\right)}{\mathrm{e}^x\left(e^x+1\right)}\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+C$.

Do $f\left(\ln 3\right)=3\Rightarrow C=-4\Rightarrow f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-4$.

Khi đó $\int\limits_0^{\ln 3}\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\ln 3}\left(\mathrm{e}^{2x}+2e^x\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-4\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{4}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{\frac{3}{2}}-4\mathrm{e}^x\right)\right|_0^{\ln 3}=\frac{20-8\sqrt{2}}{3}$.

Câu 42. Biết $\int\limits_1^2\frac{1}{x^2\left(x+1\right)}dx=\frac{1}{2}+\ln\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. $a+b=7$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=9$. **D.** $a+b=4$.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_1^2\frac{1}{x^2\left(x+1\right)}dx=\int\limits_1^2\frac{x^2+1-x^2}{x^2\left(x+1\right)}dx=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\left.\left(\ln\left|x+1\right|-\ln\left|x\right|-\frac{1}{x}\right)\right|_1^2$

$=\left.\left(\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}\right)\right|_1^2=\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}$

Suy ra $a=4;b=3$. Vậy $a+b=7$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=-\dfrac{25}{3}$ và $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}, \forall x>0$. Khi đó $\int\limits_3^8 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10.   **B.** $\dfrac{68}{5}$.   **C.** $\dfrac{25}{3}$.   **D.** $\dfrac{13}{30}$.

Lời giải

Chọn D

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}, \forall x>0$

$\Rightarrow f(x)=\int \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}dx=\int(\sqrt{x+1}+1)dx$

$=\dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+x+C$

Do $f(3)=-\dfrac{25}{3}\Rightarrow C=-\dfrac{50}{3}$

$\Rightarrow \int\limits_3^8 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{13}{30}$

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{x}{x+f^2(x)}$. Biết rằng $\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=1$ và $2g(2)-g(1)=2$. Tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{x^2}{x+f^2(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1,5$.   **B.** 1.   **C.** 3.   **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{x}{x+f^2(x)}$ nên $g'(x)=\dfrac{x}{x+f^2(x)}$.

Đặt $I=\int\limits_1^2 \dfrac{x^2}{x+f^2(x)}\mathrm{d}x \Rightarrow I=\int\limits_1^2 xg'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=g'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=g(x) \end{cases}$.

Khi đó $I=xg(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2g(2)-g(1)-1=1$. $P=2a-b+c$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có $f(-\pi)=-2$ và $f'(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin x+1-\sqrt{\sin x+1}}$, $\forall x>0$. Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{2}$.   **B.** $\pi\sqrt{2}$.   **C.** $\pi+10$.   **D.** $\pi+6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin x+1-\sqrt{\sin x+1}}=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x+1}\left(\sqrt{\sin x+1}-1\right)}=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x+1}.\dfrac{\sin x+1-1}{\sqrt{\sin x+1}+1}}$

$$=\frac{2\cos x\left(\sqrt{\sin x+1}+1\right)}{\sqrt{\sin x+1}}=2\cos x+\frac{2\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}.$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)=\int\left(2\cos x+\frac{2\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}\right)\mathrm{d}x=2\sin x+4\sqrt{\sin x+1}+C.$$

$$f\left(-\pi\right)=0\Rightarrow 4+C=-2\Rightarrow C=2\Rightarrow f\left(x\right)=2\sin x+4\sqrt{\sin x+1}+2.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin x+4\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}+2\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x+2\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|+1\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\left(-\cos x+4\left(-\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)+x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\frac{\pi}{2}+5\right)=\pi+10.$$

Câu 46. Biết rằng tích phân $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}t\mathrm{d}t=dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;x=1\Rightarrow t=2$.

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{t}{t^2+5t+6}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2\left(\frac{-2}{t+2}+\frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left(-2\ln\left|t+2\right|+3\ln\left|t+3\right|\right)\Big|_1^2$$

$$=-\frac{20}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 3+2\ln 5=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5.$$

$$\Rightarrow a=-\frac{20}{3};b=\frac{4}{3};c=2\Rightarrow a+b+c=-\frac{10}{3}.$$

Câu 47. Biết rằng tích phân $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}t\mathrm{d}t=dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;x=1\Rightarrow t=2$.

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{t}{t^2+5t+6}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2\left(\frac{-2}{t+2}+\frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left(-2\ln\left|t+2\right|+3\ln\left|t+3\right|\right)\Big|_1^2$$

$$=-\frac{20}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 3+2\ln 5=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5.$$

$$\Rightarrow a=-\frac{20}{3};b=\frac{4}{3};c=2\Rightarrow a+b+c=-\frac{10}{3}.$$

Câu 48. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=2\cos x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=-x\ \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, đổi cận $x=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}f\left(-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(-x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\mathrm{d}x=4\Rightarrow I=4$.

Câu 49. Cho hàm $f(x)$ có $f(0)=\ln 2$ và $f'(x)=\dfrac{1}{2x+1+\sqrt{4x+1}},\forall x\geq 0$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(x)dx$ gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2x+1+\sqrt{4x+1}}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$

Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2}tdt$

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}=\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=\int\left[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\ln\left|t+1\right|+\frac{1}{t+1}+C=\ln\left(\sqrt{4x+1}+1\right)+\frac{1}{\sqrt{4x+1}+1}+C$$

Mà: $f(0)=\ln 2\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow f(x)=\ln\left(\sqrt{4x+1}+1\right)+\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}+1}+\dfrac{1}{2}$

Suy ra: $\int\limits_0^2 f(x)dx\approx 4$.

Câu 50. Cho hàm $f(x)$ có $f(0)=\ln 2$ và $f'(x)=\dfrac{1}{2x+1+\sqrt{4x+1}},\forall x\geq 0$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(x)dx$ gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2x+1+\sqrt{4x+1}}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$

Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1\Rightarrow dx=\frac{1}{2}tdt$

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}=\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=\int\left[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+C=\ln\left(\sqrt{4x+1}+1\right)+\frac{1}{\sqrt{4x+1}+1}+C$$

Mà: $f(0)=\ln 2\Rightarrow C=\frac{1}{2}\ \Rightarrow f(x)=\ln\left(\sqrt{4x+1}+1\right)+\frac{1}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{1}{2}$

Suy ra: $\int\limits_0^2 f(x)dx\approx 4$.

Câu 51. Cho $\int\limits_2^3\frac{x^2-2x+3}{x-1}dx=\frac{a}{b}+\ln c$, với a,b,c là các số thực dương, $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $A=a+b-c$

A. $A=1$. **B.** $A=3$. **C.** $A=-1$. **D.** $A=13$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_2^3\frac{x^2\text{-}2x\text{+}3}{x-1}dx=\int_2^3\left(x-1+\frac{2}{x-1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+2\ln|x-1|\right]\Big|_2^3=\frac{3}{2}+\ln 4$.

Vậy a=3, b=2,c=4. $P=a+b-c=3+2-4=1$.

Câu 52. Cho $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(2\sqrt{x^2+1}+5\right)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa $F(0)=6$. Tính $F\left(\frac{3}{4}\right)$.

A. $\frac{123}{16}$. **B.** $\frac{125}{16}$. **C.** $\frac{126}{16}$. **D.** $\frac{127}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow tdt=xdx$.

$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(2\sqrt{x^2+1}+5\right)dx=\int(2t+5)dt=t^2+5t+C=\left(x^2+1\right)+5\sqrt{x^2+1}+C$.

$F(0)=6\Rightarrow C=0$.

Do đó $F(x)=\left(x^2+1\right)+5\sqrt{x^2+1}$

Vậy $F\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{125}{16}$.

Câu 53. Hàm số F(x) nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+3}{x^2+4x+3}$?

A. $F(x)=2\ln|x+3|-\ln|x+1|+C$ **B.** $F(x)=\ln(2|x+1|)$.

C. $F(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+2$ **D.** $F(x)=\ln[(x+1)(x+3)]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\dfrac{x+3}{x^2+4x+3}=\dfrac{x+3}{\left(x+3\right)\left(x+1\right)}=\dfrac{1}{x+1}$

Suy ra $\int f(x)dx=\int\dfrac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C$

Suy ra một nguyên hàm là $F(x)=\ln(|x+1|)+\ln(2)=\ln(2|x+1|)$

Câu 54. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ và $f'\left(x\right)=x\sin x$.

Giả sử rằng $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}-\dfrac{\pi^2}{c}$(với a,b,c là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 23. **B.** 5. **C.** 20. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

Do $f'\left(x\right)=x\sin x$ nên $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\sin x\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}\cos x=-x\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x$ $=-x\cos x+\sin x+C$.

Theo giả thiết $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\Leftrightarrow 1+C=2\Rightarrow C=1$.

Suy ra $f\left(x\right)=\sin x-x\cos x+1$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left(\sin x-x\cos x+1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\cos x-x\cos^2x+\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(1+\cos 2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{x^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{16}.$$

Vậy $a=7,b=4,c=16$. Suy ra $a+b+c=27$.

Câu 55. Tính tích phân: $\mathrm{I}=\int\limits_0^{30}x\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-30\right)dx$

A. I = 0. **B.** I = 6. **C.** I = 10. **D.** I = 30.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-14\right)\left(x-15\right)\left(x-16\right)...\left(x-28\right)\left(x-19\right)\left(x-30\right)$

$=\left[x\left(x-30\right)\right]\left[\left(x-1\right)\left(x-29\right)\right]\left[\left(x-2\right)\left(x-28\right)\right]...\left[\left(x-14\right)\left(x-16\right)\right]\left(x-15\right)$

$=\left(x^2-30x\right)\left(x^2-30x+29\right)\left(x^2-30x+56\right)...\left(x^2-30x+224\right)\left(x-15\right)$

Đặt $u=x^2-30x\ \Rightarrow\ \mathrm{d}u=2\left(x-15\right)\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=30\Rightarrow u=0$. Từ đó thu được I = 0. Đáp án#**A.**

Tổng quát: $f(x) = x(x-1)(x-2).(x-2n)$ là hàm số đa thức bậc lẻ nên có thể đặt $u = x^2 - 2nx$ và thu được kết quả như trên.

Lưu ý: Trong phiên bản gốc, ứng với $n = 15$ thì không thể bấm trực tiếp được trên máy tính cầm tay.

Câu 56. Biết $F(x)$ là một họ nguyên hàm của $F(x)=\dfrac{x}{(x+1)^3}$ và $F(0)=\dfrac{1}{2}$. Khi đó $F(1)+F(2)$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{13}{8}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Đáp án: B

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x+1-1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}+C$.

$F(0)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow C=1$.

Suy ra: $F(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}+1\Rightarrow F(1)+F(2)=\dfrac{5}{8}+\dfrac{13}{8}=\dfrac{9}{4}$.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=x\mathrm{e}^x$ và $f(0)=2$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. e^2+5. **B.** -8. **C.** e^2+1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int x.\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=x$ và $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=\mathrm{e}^x$.

Do đó $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Theo đề: $f(0)=2\Leftrightarrow 2=-1+C\Leftrightarrow C=3$.

$\Rightarrow f(x)=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+3$.

Khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+3\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\left(-\mathrm{e}^x+3\right)\mathrm{d}x=\left(x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)\Big|_0^2+\left(-\mathrm{e}^x+3x\right)\Big|_0^2=8$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=-8$ **C.** $I=-12$. **D.** $I=8$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-10+2=-8$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ biết $f(0)=\frac{1}{3}$ và $f'(x)=\frac{2x^2}{x+1-\sqrt{x^2+1}}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta có

$$f(x)=\int\frac{2x^2}{x+1-\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{2x^2\left(1+x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x)^2-(1+x^2)}dx=\int x\left(1+x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=\int\left(x+x^2\right)dx+\int x\sqrt{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}+C$$

Do $f(0)=\frac{1}{3}$ nên $\frac{1}{3}+C=\frac{1}{3}\Leftrightarrow C=0$. Suy ra $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}$

Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\simeq 0,77$.

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=x\mathrm{e}^x$ và $f(0)=2$. Tính $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. e^2+5. **B.** -8. **C.** e^2+1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int x.\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=x$ và $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=\mathrm{e}^x$.

Do đó $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Theo đề: $f(0)=2\Leftrightarrow 2=-1+C\Leftrightarrow C=3$.

$\Rightarrow f(x)=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+3$.

Khi đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+3\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^2\left(-\mathrm{e}^x+3\right)\mathrm{d}x=\left(x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)\Big|_0^2+\left(-\mathrm{e}^x+3x\right)\Big|_0^2=8$.

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=4x\sin^2 x-2\sin x\cos x$ và $f(0)=1$. Biết

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{a}{b}\pi^2+\ln c+1$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Tính $P=a.b.c$

A. $P=48$. **B.** $P=24$. **C.** $P=12$. **D.** $P=8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(4x\sin^2 x-2\sin x\cos x\right)dx$

$=\int 4x\sin^2 xdx-\int\sin 2xdx$

$=\int 2x(1-\cos 2x)dx+\frac{1}{2}\cos 2x+C$

$=\int 2xdx-\int 2x\cos 2xdx+\frac{1}{2}\cos 2x+C$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = 2\cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin 2x \end{cases}$

Suy ra $\int 2x\cos 2x dx = x\sin 2x - \int \sin 2x dx = x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C_1$.

Do đó $f(x) = x^2 - x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C + C_1 = x^2 - x\sin 2x + C_2$.

Vì $(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x\sin 2x + 1$.

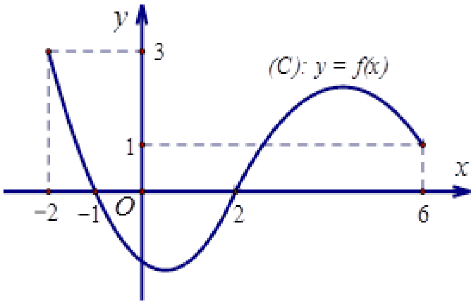
Khi đó, ta có

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + \ln|x| \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} + \ln \pi \right) - \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} + \ln \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{8}\pi^2 + \ln 2 + 1.$$

Suy ra $a = 3, b = 8, c = 2$. Vậy $P = a.b.c = 48$.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$. **B.** $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.

C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$. **D.** $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.

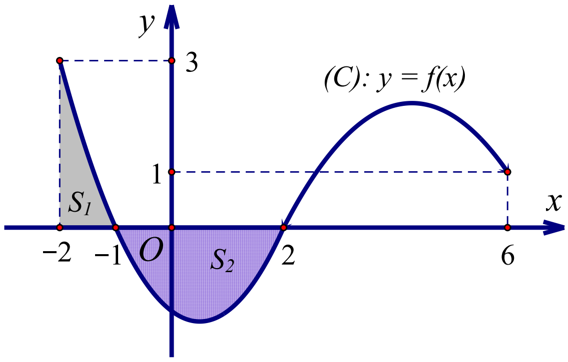
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như sau:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2) < f(-1) \\ f(2) < f(-1) \\ f(2) < f(6) \end{cases}$ nên A, D sai.



Chỉ cần so sánh $f\left(-2\right)$ và $f\left(2\right)$ nữa là xong.

Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.

Ta có:

$$S_1=\int_{-2}^{-1}\left|f'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}f'\left(x\right)dx=f\left(-1\right)-f\left(-2\right).$$

$$S_2=\int_{-1}^{2}\left|f'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(-1\right)-f\left(2\right).$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1<S_2$ nên $f\left(-1\right)-f\left(-2\right)<f\left(-1\right)-f\left(2\right)\Leftrightarrow f\left(-2\right)>f\left(2\right)$.

Câu 63. Tìm hai số thực A,B sao cho $f(x)=A\sin\pi x+B$, biết rằng $f'(1)=2$ và $\int_0^2 f(x)dx=4$.

A. $\begin{cases}A=-2\\ B=-\dfrac{2}{\pi}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}A=2\\ B=-\dfrac{2}{\pi}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}A=-2\\ B=\dfrac{2}{\pi}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}A=-\dfrac{2}{\pi}\\ B=2\end{cases}$.

Lời giải

$f(x)=A\sin\pi x+B\Rightarrow f'(x)=A\cos\pi x$

$f'(1)=2\Rightarrow A\pi\cos\pi=2\Rightarrow A=-\dfrac{2}{\pi}$

$\int_0^2 f(x)dx=4\Rightarrow\int_0^2(A\sin\pi x+B)dx=4\Rightarrow-\dfrac{A}{\pi}\cos 2\pi+2B+\dfrac{A}{\pi}\cos 0=4\Rightarrow B=2$

Chọn D

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-x)+2020f(x)=e^x$. Tính $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{e^2-1}{2021\mathrm{e}}$. **B.** $I=\dfrac{e^2-1}{2020\mathrm{e}}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{e^2-1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=-x\Rightarrow\mathrm{d}x=-dt$. Khi đó $I=\int_{-1}^{1}f(-t)dt=\int_{-1}^{1}f(-x)dx$

Suy ra $I+2020I=\int_{-1}^{1}(f(-x)+2020f(x))dx=\int_{-1}^{1}e^x dx=\dfrac{e^2-1}{e}$.

Do đó $2021I=\dfrac{e^2-1}{e}\Rightarrow I=\dfrac{e^2-1}{2021e}$.

Câu 65. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=\dfrac{23}{4}$ và $f'\left(x\right)=\dfrac{2(x+2)^4+2}{(x+2)^3}$. Khi đó $\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx$ bằng.

A. $\dfrac{57}{4}$. **B.** $\dfrac{23}{6}$. **C.** $\dfrac{49}{4}$. **D.** $\dfrac{55}{4}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{2(x+2)^4+2}{(x+2)^3}$

$\Rightarrow I=f(x)=\int f'\left(x\right)dx=\int \dfrac{2(x+2)^4+2}{(x+2)^3}dx=\int (2(x+2)+\dfrac{2}{(x+2)^3})dx$

Đặt $t=x+2\Rightarrow dt=dx$

$\Rightarrow I=\int (2t+\dfrac{2}{t^3})dx=t^2-\dfrac{1}{t^2}+C$

$\Rightarrow f(x)=(x+2)^2-\dfrac{1}{(x+2)^2}+C$

Mà $f\left(0\right)=\dfrac{23}{4}\Rightarrow (0+2)^2-\dfrac{1}{(0+2)^2}+C=\dfrac{23}{4}\Rightarrow C=2$

$\Rightarrow f(x)=(x+2)^2-\dfrac{1}{(x+2)^2}+2$

$\Rightarrow \int\limits_1^2 f\left(x\right)dx=\int\limits_1^2\left((x+2)^2-\dfrac{1}{(x+2)^2}+2\right)dx=\dfrac{(x+2)^3}{3}+\dfrac{1}{x+2}+2x\Big|_1^2=\dfrac{57}{4}$

Câu 66. Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}-8}{3}$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}+8}{3}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}-8}{3}$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-F\left(0\right)$

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}\Rightarrow 2tdt=\cos xdx$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x+1}{\sqrt{1+\sin x}}\cos xdx$

$=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\dfrac{2(t^2-1)+1}{t}2tdt=2\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(2t^2\text{ -}1\right)dt=2\left(\dfrac{2t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3}$

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3}+F\left(0\right)=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3}+2=\dfrac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 67. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân

$I=\int\limits_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}f(2x) \end{cases}$.

Khi đó, $I=x.\dfrac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}f(2)-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=8-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$.

Suy ra $I=8-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=8-1=7$.

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục với mọi $x\neq 0$ thỏa mãn $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x, x\neq 0$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=\dfrac{9}{2}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x, x\neq 0\ (1)$.

Nên $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}, x\neq 0\ (2)$.

$(1),(2)\Rightarrow 3\left[f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=\dfrac{3}{x}+3x$

$\Rightarrow f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\dfrac{1}{x}\ (3)$.

$(2),(3)\Rightarrow f(x)=-x+\dfrac{2}{x}$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(-1+\dfrac{2}{x^2}\right)dx=\left(-x-\dfrac{2}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\dfrac{3}{2}$

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$, biết $f(1)=1$, $f'(x)=\dfrac{2x}{3x+1-\sqrt{3x+1}}, x>0$. Khi đó $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng?

A. $\dfrac{184}{9}$. **B.** $\dfrac{916}{81}$. **C.** $\dfrac{440}{27}$. **D.** $\dfrac{128}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Biến đổi

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{3x+1}\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}=\frac{2x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}{\sqrt{3x+1}(3x+1-1)}=\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$$

$f(1)=1\Rightarrow C=-\frac{5}{9}$.

Khi đó $\int\limits_1^5 f(x)dx=\frac{916}{81}$.

Câu 70. Tính tích phân $\int\limits_1^5 f(x)dx$, biết $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}-\frac{1}{3\sqrt{2x-1}}, x>\frac{1}{2}$ và $f(1)=1$.

A. $\frac{262}{27}$. **B.** $\frac{106}{81}$. **C.** $\frac{118}{27}$. **D.** $\frac{106}{27}$.

Lời giải

Đáp án: D

Ta có

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}-\frac{1}{3\sqrt{2x-1}}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{3\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$$

Mà $f(1)=1\Rightarrow\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+C=1\Rightarrow C=\frac{2}{3}$. Do vậy $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+\frac{2}{3}$

Vậy $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^5\left(\frac{1}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{106}{27}$.

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ với $x\in\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$ thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$. Tính $\int\limits_{\frac{8}{3}}^{5}\frac{f(x)}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

A. $I=e^{\frac{1}{3}}\left(e^4-e^2\right)$. **B.** $I=e^{\frac{2}{3}}\left(e^{\frac{2}{3}}-1\right)$.

C. $I=e^2\left(e^{\frac{2}{3}}-e^{\frac{1}{3}}\right)$. **D.** $I=e^{\frac{2}{3}}\left(e^2-e\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta biến đổi: $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$.

$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$. Ta lấy nguyên hàm hai vế: $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}\left[f(x)\right]}{f(x)}=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$

$\Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$, ta lại có $f(1)=1 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}+C}=1\Rightarrow C=-\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}$.

Từ đó tính $I=\int\limits_{\frac{8}{3}}^{5}\frac{f(x)}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{8}{3}}^{5}\frac{e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$,

x	$\frac{8}{3}$	5
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}e^t\mathrm{d}t=e^t\Big|_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{4}{3}}-e^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}\left(e^{\frac{2}{3}}-1\right).$$

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x^5+4x+3)=2x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{-2}^{8}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 2. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 72.

Lời giải

Đặt $x=t^5+4t+3 \Rightarrow \mathrm{d}x=(5t^4+4)\mathrm{d}t$.

Với $x=-2\Rightarrow t=-1$; $x=8\Rightarrow t=1$.

Vậy $\int\limits_{-2}^{8}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f(t^5+4t+3)(5t^4+4)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}(2t+1)(5t^4+4)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}(10t^5+5t^4+8t+4)\mathrm{d}t$

$=\left(\frac{5t^6}{3}+t^5+4t^2+4t\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{32}{3}-\frac{2}{3}=10$.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2x+3,\forall\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2+4\pi-2}{8}$.

Lời giải:

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2\sin^2x+3)dx=\int(4-cos2x)dx=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Mặt khác, ta có: $f(0)=4\Leftrightarrow 4.0-\frac{1}{2}\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$

$\Rightarrow f(x)=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4.$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)dx=\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}.$

Chọn **C.**

Câu 74. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{\ln 2} f\left(e^x\right)dx = 4$ và $\int\limits_1^2 \frac{\left(x-2\right)f\left(x\right)}{x}dx = 10$. Tính $I = \int\limits_1^2 f\left(x\right)dx$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 18$. **C.** $I = 14$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$.

Do đó $\int\limits_0^{\ln 2} f\left(e^x\right)dx = 4 \Leftrightarrow \int\limits_1^2 \frac{f\left(t\right)}{t}dt = 4 \Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{f\left(x\right)}{x}dx = 4$.

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{\left(x-2\right)f\left(x\right)}{x}dx = \int\limits_1^2 \left[f\left(x\right) - 2\frac{f\left(x\right)}{x}\right]dx \Leftrightarrow 10 = \int\limits_1^2 f\left(x\right)dx - 2.4 \Rightarrow \int\limits_1^2 f\left(x\right)dx = 18$.

Câu 75. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(3\right) = 21$, $\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx = 9$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x.f'\left(3x\right)dx$.

A. $I = 15$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 9$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(3x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}f(3x) \end{cases}$.

Suy ra $I = \frac{1}{3}x.f(3x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{1}{3}f(3x)dx = \frac{1}{3}f(3) - \frac{1}{9}\int\limits_0^3 f(x)dx = 6$.

Vậy $I = 6$.

Câu 76. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right) = \frac{1}{x-1}$, $f\left(-1\right) = 2\ln 2$, $f\left(3\right) = 3\ln 2$. Tính $S = \frac{f(0).f(5)}{5}$.

A. $S = 5\ln 2$. **B.** $S = S = 5\ln^2 2$. **C.** $S = 2\ln 2$. **D.** $S = \ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right) = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln\left|x-1\right| + C = \begin{cases} \ln\left(x-1\right) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln\left(1-x\right) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Lại có $f\left(-1\right) = 2\ln 2 \Rightarrow \ln\left(1-(-1)\right) + C_2 = 2\ln 2 \Rightarrow C_2 = \ln 2$.

$f\left(3\right) = 3\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(3-1\right) + C_1 = 3\ln 2 \Rightarrow C_1 = 2\ln 2$.

Do đó $S = \frac{f(0).f(5)}{5} = \ln 2$.

Câu 77. Cho $\int_1^2 f(x)dx=3, \int_0^2 f(5x+2)dx=3$. Khi đó $\int_1^{12} f(x)dx$ bằng

A. 18. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=5x+2 \Rightarrow dt=5dx$ (Với $x=0 \Rightarrow t=2; x=2 \Rightarrow t=12$).

$\Rightarrow \int_0^2 f(5x+2)dx=\frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)dt \Rightarrow \int_2^{12} f(t)dt=15$.

Vậy ta có $\int_1^{12} f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^{12} f(x)dx=3+15=18$.

Câu 78. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x+1}+2x, \forall x>-1$, biết $F(0)=0$. Giá trị $F(1)$ bằng

A. $3+\ln 2$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2+\ln 2$. **D.** $1+\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(x)=\int\left(\frac{1}{x+1}+2x\right)dx=\ln|x+1|+x^2+C$

Do $\forall x>-1$ nên $F(x)=\ln(x+1)+x^2+C$

Ta lại có: $F(0)=\ln(0+1)+0^2+C=0 \Leftrightarrow C=0$

Vậy $F(x)=\ln(x+1)+x^2 \Rightarrow F(1)=\ln(1+1)+1^2=\ln 2+1$.

Câu 79. Biết $\int_0^3 x\ln(x^2+16)\text{d}x=a\ln 5+b\ln 2+\frac{c}{2}$ trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $\text{T}=a+b+c$

A. $\text{T}=-2$. **B.** $\text{T}=16$. **C.** $\text{T}=2$. **D.** $\text{T}=-16$.

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^3 x\ln(x^2+16)\text{d}x=\frac{x^2}{2}.\ln(x^2+16)\Big|_0^3-\int_0^3\frac{x^3}{x^2+16}\text{d}x=\frac{9}{2}\ln 25-\int_0^3\left(x-\frac{16x}{x^2+16}\right)\text{d}x$$

$$=9.\ln 5-\left[\frac{x^2}{2}-8\ln(x^2+16)\right]\Big|_0^3=9.\ln 5-\frac{9}{2}+8.\ln 25-8.\ln 16=25.\ln 5-32.\ln 2-\frac{9}{2}.$$

Suy ra $a=25,\ b=-32,\ c=-9$.

Vậy $\text{T}=a+b+c=-16$.

Câu 80. Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}-8}{3}$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}+8}{3}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}-8}{3}$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)$$

Đặt $t = \sqrt{1+\sin x} \Rightarrow 2tdt = \cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + 1}{\sqrt{1+\sin x}}\cos xdx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2(t^2-1)+1}{t}2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(2t^2 - 1\right)dt = 2\left(\frac{2t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2+2\sqrt{2}}{3} + F(0) = \frac{2+2\sqrt{2}}{3} + 2 = \frac{8+2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 81. Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0) = 2$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}-8}{3}$ **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}+8}{3}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}-8}{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)$$

Đặt $t = \sqrt{1+\sin x} \Rightarrow 2tdt = \cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + 1}{\sqrt{1+\sin x}}\cos xdx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2(t^2-1)+1}{t}2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(2t^2 - 1\right)dt = 2\left(\frac{2t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2+2\sqrt{2}}{3} + F(0) = \frac{2+2\sqrt{2}}{3} + 2 = \frac{8+2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}}, \forall x > 0$ và $f(1) = 2\sqrt{2}$. Khi đó $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $4\sqrt{3} - \dfrac{14}{3}$. **B.** $4\sqrt{3} + \dfrac{10}{3}$. **C.** $4\sqrt{3} - \dfrac{10}{3}$. **D.** $4\sqrt{3} + \dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}.\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)}$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}.\sqrt{x}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} + C.$$

Mà $f(1) = 2\sqrt{2}$ nên $C = -2 \Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} - 2$.

Vậy $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}-2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x\right]\Bigg|_1^2 = 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}$.

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = \frac{28}{3}$ và $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-2}}, \forall x \in (2;+\infty)$. Khi đó $\int\limits_3^6 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{809}{15}$. **B.** $\frac{808}{15}$. **C.** $\frac{807}{15}$. **D.** $\frac{808}{17}$

Lời giải

Chọn B

◆Đặt $t = \sqrt{x-2} \Rightarrow t^2 = x-2 \Rightarrow 2tdt = dx$

Khi đó $I = \int \frac{2\left(t^2+2\right)}{t}.2tdt = \int\left(4t^2+8\right)dt = \frac{4t^3}{3} + 8t + C = \frac{4}{3}t\left(t^2+6\right) + C$

$= \frac{4}{3}\sqrt{x-2}\,(x+4) + C.$

◆ Thay $x = 3$ vào $f(x) \Leftrightarrow \mathrm{f}(3) = \frac{28}{3} \Leftrightarrow \mathrm{C} + \frac{28}{3} = \frac{28}{3} \Leftrightarrow \mathrm{C} = 0$

$\rightarrow f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x-2}\,(x+4).$

◆ $\int\limits_3^6 f(x)dx = \int\limits_3^6 \left(\frac{4}{3}\sqrt{x-2}\,(x+4)\right)dx = \frac{808}{15}$.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ với $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$. Tính $\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $-\frac{9}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$ từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} - x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2} - 1.$$

Do đó $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$

Cách khác:

Tính $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$, đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x}+\frac{2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=3$.

Vậy $3I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}+\frac{2f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}3\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\Rightarrow I=\frac{3}{2}$.

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x, f(0)=0$.

Khi đó $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$. Tính $a+b+c$

A. $a+b+c=2$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=1$. **D.** $a+b+c=0$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề: $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$. Nguyên hàm 2 vế ta được

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x dx$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=x\mathrm{e}^x+C$

Mà $f(0)=0\Rightarrow 0.\mathrm{e}^0+C=0\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x\mathrm{e}^x$.

$\Rightarrow \int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\,e^x\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}-\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=3\ln 3-2\ln 2-e^x\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}=3\ln 3-2\ln 2-1$.

Suy ra $a=3;b=-2;c=-1\Rightarrow a+b+c=0$.

Câu 86. Cho $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=4$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2x+1\Rightarrow dt=2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Với $x=-1\Rightarrow t=-1$, với $x=2\Rightarrow t=5$.

Khi đó ta có $I=\int\limits_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{5} f(t).\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.4=2$.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=\frac{28}{3}$ và $f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x-2}},\forall x\in(2;+\infty)$. Khi đó $\int\limits_{3}^{6} f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{808}{15}$. **B.** $\frac{809}{15}$. **C.** $\frac{807}{15}$. **D.** $\frac{808}{17}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\mathrm{t}=\sqrt{x-2}\Rightarrow t^2=x-2\Rightarrow 2tdt=dx$

Khi đó $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2(t^2+2)}{t}\cdot 2tdt=\int(4t^2+8)dt=\frac{4}{3}t^3+8t+C=\frac{4}{3}(x+4)\sqrt{x-2}+C$

Vì $f(3)=\dfrac{28}{3}\Rightarrow C=0\;\Rightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}(x+4)\sqrt{x-2}$

Vậy $\int\limits_3^6 f(x)dx=\int\limits_8^3(\dfrac{4}{3}\sqrt{x-2}(x+4).)dx=\dfrac{808}{15}$

Câu 88. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(x+1)e^x$ và $\int f(x)dx=(ax+b)e^x+C$, với a,b,C là các hằng số. Khi đó

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=1$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $f'(x)=(x+1)e^x\Rightarrow f(x)=x.e^x$. Khi đó đặt $I=\int xe\,dx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow I=xe^x-\int e\,dx=xe^x-e^x\;=(x-1)e^x+C$.

Do đó $a=1,b=-1\;\Rightarrow a+b=0$.

Câu 89. Cho các số thực a,b khác không. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^3}+bxe^x$ với mọi x khác -1. Biết $f'(0)=-22$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $a+b$?

A. 19. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=\dfrac{-3a}{(x+1)^4}+be^x+bxe^x$ nên $f'(0)=-3a+b=-22\;(1)$.

Xét $5=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\;=\int\limits_0^1\left[\dfrac{a}{(x+1)^3}+bxe^x\right]\mathrm{d}x\;=a\int\limits_0^1(x+1)^{-3}\mathrm{d}(x+1)+b\int\limits_0^1 x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

$=-\dfrac{a}{2(x+1)^2}\Big|_0^1+b\left[xe^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right]=-\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{4}-1\right)+b\left[\mathrm{e}-\mathrm{e}^x\Big|_0^1\right]=\dfrac{3a}{8}+b\;(2)$.

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}-3a+b=-22\\\dfrac{3a}{8}+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=2\end{cases}\Rightarrow a+b=10$.

Câu 90. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$. Khi đó, hiệu $T=f(2\sqrt{2})-2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\dfrac{x}{x^2+1}dx\Leftrightarrow\int\dfrac{d(f(x))}{f(x)}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(x^2+1)}{x^2+1}$

Vậy $\ln(f(x))=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$, mà $f(0)=1\Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

Nên $f\left(2\sqrt{2}\right)=3;2f\left(1\right)=2\sqrt{2}\Rightarrow T=3-2\sqrt{2}\in\left(0;1\right)$

Câu 91. Cho $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int\limits_1^4\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$, $x=4\Rightarrow t=2$

$$I=\int\limits_1^4\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f\left(t\right)2\mathrm{d}t=2\int\limits_1^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2.2=4.$$

Câu 92. Biết $\int\limits_3^4\frac{dx}{(x+1)(x-2)}=a\ln 2+b\ln 5+c$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Tính $S=a-3b+c$.

A. $S=3$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=0$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức giải nhanh: $I=\int\limits_\alpha^\beta\frac{dx}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\Bigg|_\alpha^\beta$.

Ta có: $\int\limits_3^4\frac{dx}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{-3}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\Bigg|_3^4=-\frac{1}{3}\ln\frac{5}{8}=-\frac{1}{3}(\ln 5-3\ln 2)=\ln 2-\frac{1}{3}\ln 5=a\ln 2+b\ln 5+c$.

Suy ra $a=1;b=-\frac{1}{3};c=0\Rightarrow a-3b+c=1+1=2$.

Câu 93. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=10$ và $2f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$.

Khi đó $I=\left(x+1\right)f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Suy ra $10=2f\left(1\right)-f\left(0\right)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-10+2=-8$

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 94. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(\ln 3\right)=3$ và $f'\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1-\sqrt{\mathrm{e}^x+1}},\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^{\ln 3}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{-10-8\sqrt{2}}{3}$.   **B.** $\dfrac{20-8\sqrt{2}}{3}$.   **C.** $\dfrac{20+8\sqrt{2}}{3}$.   **D.** $\dfrac{10-8\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x}+1-\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{x}+1+\sqrt{e^{x}+1}\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}-\left(e^{x}+1\right)}\mathrm{d}x$

$=\int\dfrac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{x}+1+\sqrt{e^{x}+1}\right)}{\mathrm{e}^{x}\left(e^{x}+1\right)}\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^{x}+\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}+C$.

Do $f\left(\ln 3\right)=3\Rightarrow C=-4\Rightarrow f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+2\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}-4$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{\ln 3}\mathrm{e}^{x}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\ln 3}\left(\mathrm{e}^{2x}+2e^{x}\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}-4\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{4}{3}\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{\frac{3}{2}}-4\mathrm{e}^{x}\right)\Bigg|_{0}^{\ln 3}=\dfrac{20-8\sqrt{2}}{3}$.

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(0\right)=3$ và $f'(x)=\dfrac{1}{x^{2}+1-x\sqrt{x^{2}+1}}$. Khi đó $\int\limits_{0}^{1}xf\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\dfrac{2-4\sqrt{2}}{3}$.   **B.** $\dfrac{2+4\sqrt{2}}{3}$.   **C.** $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}$.   **D.** $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $f'(x)=\dfrac{1}{x^{2}+1-x\sqrt{x^{2}+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+1}\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)}=\dfrac{\sqrt{x^{2}+1}+x}{\sqrt{x^{2}+1}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}$.

$\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}\right)\mathrm{d}x=x+\sqrt{x^{2}+1}+C$.

Suy ra $f\left(x\right)=x+\sqrt{x^{2}+1}+C$

Mà $f\left(0\right)=3\Rightarrow 3=1+C\Leftrightarrow C=2$. Do đó $f\left(x\right)=x+\sqrt{x^{2}+1}+2$.

$\int\limits_{0}^{1}xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(x^{2}+2x+x\sqrt{x^{2}+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^{3}}{3}\Bigg|_{0}^{1}+x^{2}\Big|_{0}^{1}+\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{x^{2}+1}\right)^{3}\Bigg|_{0}^{1}=\dfrac{1}{3}+1+\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

TÌM THAM SỐ
ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

TOANMATH.com

Câu 1. Giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$ là:

A. $-2\le m\le 2$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $-2\le m\le 1$. **D.** $-2<m\le -1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện để hàm số nghịch biến trên $(-\infty,1)$ là $y'<0,\forall x\in(-\infty;1)$.

$$\frac{m^2-4}{(x+m)^2}<0,\forall x<1\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\-m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\m\le -1\end{cases}\Rightarrow -2<m\le -1.$$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

A. $m\ge 1$. **B.** $1\le m<2$.
C. $-1<m<2$. **D.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Đáp án B

Điều kiện $x\ne -m\Rightarrow -m\le -1\Rightarrow m\ge 1(1)$

$$y'=\frac{m^2-m-2}{(x+m)^2}<0\Rightarrow m^2-m-2<0\Leftrightarrow -1<m<2(2)$$

(1),(2) $\Rightarrow 1\le m<2$

Câu 3. Số các giá trị tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2-1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Có $y'=\dfrac{m^2-m+1}{(x-m)^2}>0$, $\forall x\in D$ (do $m^2-m+1=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$).

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$.

Suy ra $\max\limits_{[0;4]} f(x)=f(4)$

Để hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 thì

$$\begin{cases}m\notin[0;4]\\f(4)=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin[0;4]\\\dfrac{3-m^2}{4-m}=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin[0;4]\\m^2+6m-27=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin[0;4]\\\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-9\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=-9.$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{m^2-3m-4}{(x-m)^2}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f'(x)<0 \\ m\notin(2;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-4<0 \\ m\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<4 \\ m\le 2\end{cases} \Leftrightarrow -1<m\le 2.$$

Do m nhận giá trị nguyên nên $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$. Số phần tử của tập S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1-x}$, $x\in(-15;-3)\Rightarrow t\in(2;4)$ và $y_t=\dfrac{2t-14}{m-t}$.

Ta có $y'_x=y'_t.t'_x=\dfrac{2m-14}{(m-t)^2}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$

$$\Leftrightarrow y'_x=\frac{2m-14}{(m-t)^2}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)>0,\quad \forall x\in(-15;-3),\ \forall t\in(2;4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m-14}{(m-t)^2}<0,\ \forall t\in(2;4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-14<0 \\ m-t\ne 0\end{cases},\ \forall t\in(2;4) \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ m\notin(2;4)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\le m<7 \\ m\le 2\end{array}\right..$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4\le m<7 \\ m\le 2\end{array}\right. \\ m\in\mathbb{N}^*\end{cases} \Rightarrow m=\{1;2;4;5;6\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{6-x}\Rightarrow f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}\Rightarrow f'(x)=f'(t).t'(x)$.

Với $x\in(-8;5)$, ta có $t'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{6-x}}<0,\forall x\in(-8;5)$ và $x\in(-8;5)\Rightarrow t\in(1;\sqrt{14})$. Từ đó ta suy ra hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8;5)$ khi hàm số $f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;\sqrt{14})$.

$f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;\sqrt{14})$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m^2+4m-3<0\\-m\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}-m^2+4m-3<0\\-m\ge\sqrt{14}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\in[-1;1)\cup(3;+\infty)\\ m\le-\sqrt{14}\end{array}\right.$

Do $m\in(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-1;0;4;5;6;7;8;9\}$.

Như vậy có 14 số m nguyên trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

A. $-2\le m<-1$ hoặc $m>1$.   **B.** $m\le-1$ hoặc $m>1$.
C. $-1<m<1$.   **D.** $m<-1$ hoặc $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$

Hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ $\begin{cases}m^2-1>0\\-m\notin(2;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow y'>0,\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1>0\\-m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\-m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\m\ge-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in[-2;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 8. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 3.   **B.** 4.   **C.** 2.   **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\dfrac{x-2}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\m>-1\end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 9. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 3.   **B.** 4.   **C.** 2.   **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\dfrac{x-2}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\ m>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ m>-1\end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $\boldsymbol{m}$ sao cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m=-1;m=9$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=1;m=-9$.

Lời giải:

Chọn A

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=x^2-mx+2m$

+) Ta không xét trường hợp $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ vì $a=1>0$

+) Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$|x_1-x_2|=3\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\Leftrightarrow m^2-8m>0\\ (x_1-x_2)^2=9\Leftrightarrow S^2-4P=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>8\ hay\ m<0\\ m^2-8m=9\end{cases}\Leftrightarrow m=-1\ hay\, m=9$$

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{-3}{4}x^4+\dfrac{9}{2}x^2-(2m+15)x-m+3$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=-3x^3+9x-2m-15\le 0\,\forall x\in(0;+\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0;+\infty)\Leftrightarrow 3x^3-9x+15\ge -2m\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Xét hàm số: $g(x)=3x^3-9x+15$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=9x^2-9$

$g'(x)=0\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\ (l)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	15	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m\le 9\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m\in\{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x+m$ (m là tham số). Biết rằng với mọi giá trị của m đường thẳng d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N. Tìm các giá trị thực của tham số m để độ dài MN nhỏ nhất.

A. không tồn tại m để độ dài MN nhỏ nhất. **B.** $m=-3$.

C. $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d thỏa mãn:

$$\frac{x+3}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(m+1)x+m-3=0 (1) \\ m\neq -1 (*) \end{cases}$$

Theo giả thiết với mọi giá trị của m đường thẳng d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N. Gọi $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ lần lượt là tọa độ của hai điểm M và N. Khi đó x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{m+1}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{2} \end{cases}$

Ta có $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{5(x_2-x_1)^2}=\sqrt{5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}$

$$MN=\sqrt{5\left[\frac{(m+1)^2}{4}-2(m-3)\right]}=\sqrt{5\left(\frac{m^2}{4}-\frac{3m}{2}+6\right)}$$

$$MN \min \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{4}-\frac{3m}{2}+6\right)\min \text{ khi } m=\frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)}{2.\frac{1}{4}}=3.$$

Câu 13. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

TH1: $m=1$. Ta có: $y=-x+4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.

TH2: $m=-1$. Ta có: $y=-2x^2-x+4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.

TH3: $m\neq \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y'\leq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)^2+3(m^2-1)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)(4m+2)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ -\dfrac{1}{2}\leq m\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 2}{x - 2m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2m\}$.

$$y = \frac{-2m^2 + 2}{(x - 2m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in D \\ 2m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 + 2 > 0 \\ 2m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{2}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0\}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{m^2 - 3m - 4}{(x - m)^2}$.

Hàm số $f(x) = \dfrac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ m \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 2.$$

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + 6}{x + 5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{5m - 6}{(x + 5m)^2}$. Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$ thì $\begin{cases} y' < 0 \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 6 < 0 \\ -5m \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{6}{5} \\ m \ge -2 \end{cases}$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1;\ 0;\ 1\}$.

Câu 17. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$.

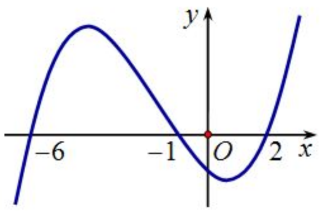
$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}, \forall x \in (2;+\infty)$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2;+\infty)$.

$g'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0$ với $\forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m \leq g(x), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{12}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng



A. $(2;3)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow -2xf'(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow 2xf'(3-x^2) < 0$.

TH1: $\begin{cases} x < 0 \\ f'(3-x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3 - x^2 > 2 \\ -6 < 3 - x^2 < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 4 < x^2 < 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ -3 < x < -2 \end{array}\right.$

TH2: $\begin{cases} x > 0 \\ f'(3-x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3 - x^2 < -6 \\ -1 < 3 - x^2 < 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$.

So sánh với đáp án Chọn **C.**

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow y'=\frac{m^2-m-12}{(x+m)^2}<0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-12<0 \\ x+m\neq 0 \end{cases}, \forall x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<4 \\ m\neq -x \end{cases}, \forall x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<4 \\ m\notin(-\infty;-1) \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m<4$.

$\begin{cases} -1\le m<4 \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m=\{-1;0;1;2;3\}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $y'=(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right)$.

Vì $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$. Do đó, để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

thì $f'\left(x^2+3x-m\right)\ge 0,\forall x\in(0;2)$ (*).

Đặt $t=x^2+3x-m$. Vì $x\in(0;2)\Rightarrow t\in(-m;10-m)$.

(*) trở thành: $f'(t)\ge 0,\forall t\in(-m;10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} 10-m\le -3 \\ 1\le -m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 13 \\ m\le -1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 13\le m\le 20 \\ -10\le m\le -1 \end{array}\right. \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow m\in\{-10;-9;..;-1;3;4;..;20\}$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3-mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

A. $m\ge -2\sqrt{3}$. **B.** $m\ge \frac{13}{2}$. **C.** $m\le -2\sqrt{3}$. **D.** $m\ge -\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 - 2mx + 2$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow mx \le 3x^2 + 1, \forall x(-2;0) \Leftrightarrow m \ge 3x + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{(-2;0)} \text{f(x)}, \forall x \in (-2;0)$.

Xét $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}, \forall x \in (-2;0)$. Ta có: $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} (L) \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$.

Lại có $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \dfrac{-13}{2}$ và $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

x	-2		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||
$f(x)$	$-\frac{13}{2}$	$\nearrow$	$-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ||

Dựa vào bảng biên thiên suy ra: $\max\limits_{(-2;0)} \text{f(x)} = -2\sqrt{3} \Rightarrow m \ge -2\sqrt{3}$.

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên $(-\infty;-6)$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \dfrac{3m-2}{(x+3m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 > 0 \\ -3m \ge -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{3} \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < m \le 2$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

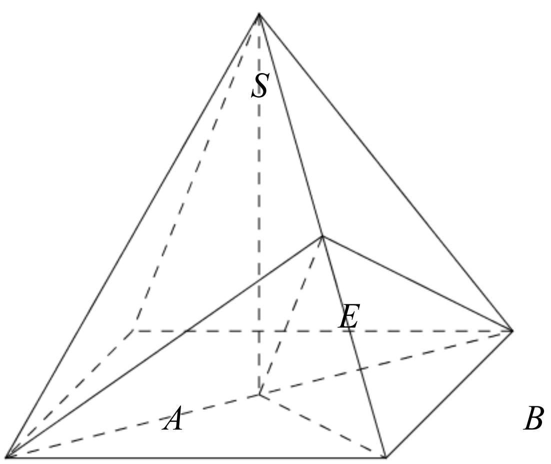
Câu 23. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi E là trung điểm cạnh SC. Tính cosin

của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (EBD).

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm cạnh BD. Theo tính chất hình chóp đều $SO \perp BD$.

Mặt bên là các tam giác đều cạnh a nên $DE = BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BD = \sqrt{2AB^2} = a\sqrt{2}$.

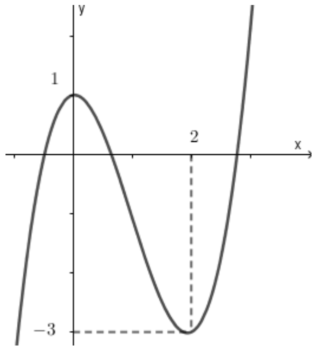
Nên tam giác EBD cân tại E, $EO \perp BD$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (EBD) là góc $\widehat{SOE}$

$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OE=\sqrt{BE^2-BO^2}=\dfrac{a}{2}$.

$\cos\widehat{SOE}=\dfrac{SO^2+OE^2-SE^2}{2SO.OE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ cắt đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ tại bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Đáp án B

Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ là đường màu đỏ. Đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 6 điểm phân biệt.

Câu 25. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$. Số phần tử của tập S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1-x}$, $x\in(-15;-3)\Rightarrow t\in(2;4)$ và $y_t=\dfrac{2t-14}{m-t}$.

Ta có $y'_x=y'_t.t'_x=\dfrac{2m-14}{(m-t)^2}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$

$\Leftrightarrow\ y'_x=\dfrac{2m-14}{(m-t)^2}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)>0,\quad \forall x\in(-15;-3),\,\forall t\in(2;4)$

$\Leftrightarrow\dfrac{2m-14}{(m-t)^2}<0,\ \forall t\in(2;4)\Leftrightarrow\begin{cases}2m-14<0\\ m-t\neq 0\end{cases},\ \forall t\in(2;4)\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ m\notin(2;4)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\le m<7\\ m\le 2\end{array}\right.$.

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}4\le m<7\\ m\le 2\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{N}^*\end{cases}\Rightarrow m=\{1;2;4;5;6\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x)=(3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]$.

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\geq 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(3-x)\leq 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]\leq 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\leq \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3},\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\leq \min\limits_{(3;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=\dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}$.

Ta có $h(x)=\dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}=(x-3)+\dfrac{9}{x-3}\geq 2\sqrt{(x-3).\dfrac{9}{x-3}}=6$.

Vậy suy ra $m\leq 6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;2;3;4;5;6\}$. **Chọn B.**

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{9}{2}x^2-(2m+15)x-m+3$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=-3x^3+9x-2m-15\leq 0\ \forall x\in(0;+\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0;+\infty)\Leftrightarrow 3x^3-9x+15\geq -2m\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Xét hàm số: $g(x)=3x^3-9x+15$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=9x^2-9$

$g'(x)=0\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	15	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m\leq 9\Leftrightarrow m\geq -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m\in\{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 28. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+\left(m^2+2m\right)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $S=[-1;0]$. **B.** $S=\varnothing$. **C.** $S=\{-1\}$. **D.** $S=[0;1]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m)$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array}\right. \forall m$

Hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(m; m+2)$ $\forall m$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì $(-1;1) \subset (m; m+2)$.

Nghĩa là: $m \le -1 < 1 \le m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ -1 < 1 \\ 1 \le m+2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 29. Tìm tập các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{\ln x - m}{m \ln x - 4}$ đồng biến trên khoảng $(\mathrm{e}; +\infty)$.

A. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
B. $(-\infty; -2) \cup [4; +\infty)$.
C. $(-\infty; -2)$.
D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \ln x$, $x \in (\mathrm{e}; +\infty) \Rightarrow t \in (1; +\infty)$ và $y_t = \dfrac{t-m}{mt-4}$.

Ta có $y'_x = y'_t . t'_x = \dfrac{-4 + m^2}{(mt-4)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(\mathrm{e}; +\infty) \Leftrightarrow y'_x = \dfrac{-4+m^2}{(mt-4)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0, \quad \forall x \in (\mathrm{e}; +\infty), \forall t \in (1; +\infty)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{-4+m^2}{(mt-4)^2} > 0, \ \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + m^2 > 0 \\ m \ne \dfrac{4}{t} \end{cases}, \ \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \notin (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

Câu 30. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 18}{2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 5)$.

A. 2.
B. 1.
C. 11.
D. 10.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-m}{2}\right\}$.

Ta có $y = \dfrac{mx+18}{2x+m} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2 - 36}{(2x+m)^2}$.

YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ \dfrac{-m}{2} \notin (-2; 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2} \ge 5 \\ -\dfrac{m}{2} \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -10 \\ m \ge 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le m < 6$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow(m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq-1\\2+m\leq3\end{cases}\Leftrightarrow-1\leq m\leq1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 32. Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số m bằng

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$.

Khi $m>0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0;m-1)$, $B(-m;-m^2+m-1)$, $C(m;-m^2+m-1)$.

$\overrightarrow{AB}=(-m;-m^2)$, $\overrightarrow{OC}=(m;-m^2+m-1)$.

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương nên hiển nhiên $AO\perp BC$. Để O là trực tâm ΔABC thì $CO\perp AB$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=0\Leftrightarrow-m^2-m^2(-m^2+m-1)=0\Leftrightarrow-m^2(-m^2+m)=0\Leftrightarrow m=0$ (loại) hoặc $m=1$ (nhận).

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\frac{mx+16}{x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2

Lời giải

Chọn B

$f(x)=\frac{mx+16}{x+m}\Rightarrow f'(x)=\frac{m^2-16}{(x+m)^2},\ \forall x\neq-m$

Yêu cầu của đề bài: $\begin{cases}m^2-16<0\\-m\geq-1\end{cases}\Leftrightarrow-4<m\leq1$, mà m là số nguyên

Nên: $m=-3;-2;-1;0;1$

Câu 34. Cho hàm số $f(x)=\frac{mx+16}{x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2

Lời giải

Chọn B

$f\left(x\right)=\dfrac{mx+16}{x+m}\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{m^2-16}{\left(x+m\right)^2},\ \forall x\neq -m$

Yêu cầu của đề bài: $\begin{cases} m^2-16<0 \\ -m\geq -1 \end{cases}\Leftrightarrow -4<m\leq 1$, mà m là số nguyên

Nên: $m=-3;-2;-1;0;1$

Câu 35. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx+\left(m+1\right)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D=\left[2;+\infty\right)$ là

A. $m\leq -1$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m<-1$. **D.** $-2\leq m\leq 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=mx+\left(m+1\right)\sqrt{x-2}\Rightarrow y'=m+\dfrac{m+1}{2\sqrt{x-2}}$, y' xác định trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Nhận xét: khi x nhận giá trị trên $\left(2;+\infty\right)$ thì $\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ nhận mọi giá trị trên $\left(0;+\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in\left(2;+\infty\right)\Leftrightarrow\left(m+1\right)t+m\leq 0,\forall t\in\left(0;+\infty\right)$ (đặt $t=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$).

$\Leftrightarrow\begin{cases} m+1\leq 0 \\ m+\left(m+1\right)\cdot 0\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow m\leq -1$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2-3m+1$ đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta chỉ xét các giá trị của $m\geq 0$.

Trường hợp $m=0$ hàm số trở thành $y=x^4+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$. Hay $m=0$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Trường hợp $m>0$ ta có: $y'=4x^3-4mx$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(1;2\right)\Leftrightarrow\sqrt{m}\leq 1\Leftrightarrow m\leq 1$.

Kết luận có 2 giá trị thỏa mãn bài toán: $m\in\left\{0,1\right\}$ nên chọn**Chọn** **C.**

Câu 37. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

A. $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;1)$.
C. $m\in(1;2)$. **D.** $m\in(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-3m+2}{(x-3m+2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi $\begin{cases}m^2-3m+2>0\\3m-2>1\end{cases}\Leftrightarrow m>2$.

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

$y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi và chỉ khi $y'>0,\forall x\in D$ $\Leftrightarrow -m^2+2m+3>0$ $\Leftrightarrow -1<m<3$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2\}$ nên có 3 giá trị của m nguyên.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{m\sin x+4}{\sin x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đk: $\sin x\neq -m$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}$

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x>0, 0<\sin x<1$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow f'(x)<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\\left[\begin{array}{l}-m\le 0\\-m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<m\le -1\\0\le m<2\end{array}\right.$.

Mà m nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{m\sin x+4}{\sin x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đk: $\sin x \neq -m$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}$

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x>0, 0<\sin x<1$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow f'(x)<0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}<0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\ \left[\begin{array}{l}-m\le 0\\ -m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<m\le -1\\ 0\le m<2\end{array}\right.$.

Mà m nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow y'=\dfrac{m^2-m-12}{(x+m)^2}<0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-12<0\\ x+m\neq 0\end{cases}, \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<4\\ m\neq -x\end{cases}, \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<4\\ m\notin(-\infty;-1)\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<4$.

$\begin{cases}-1\le m<4\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m=\{-1;0;1;2;3\}$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{e^{-2x}+m}{me^{-2x}+1}$ đồng biến trên khoảng $(\ln 2;+\infty)$.

A. $-4\le m\le -1$. **B.** $-4\le m<-1$. **C.** $m>1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>1\\ -4\le m<-1\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=e^{-2x}; x\in(\ln 2;+\infty) \Rightarrow t\in(0;\dfrac{1}{4})$

Vì $t=e^{-2x}$ *NB tren* $(\ln 2;+\infty)$ nên YCBT trở thành: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{t+m}{mt+1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$.

Ta có $y'=\dfrac{1-m^2}{(mt+1)^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-m^2<0 \\ -\dfrac{1}{m} \notin (0;\dfrac{1}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{m} \le 0 \\ -\dfrac{1}{m} \ge \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m>0 \\ -4 \le m < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ -4 \le m < -1 \end{array}\right.$$

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{mx+8}{x+2m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = \frac{2m^2-8}{(x+2m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-8<0 \\ -2m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} \le m < 2$

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $y'=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Vì $2x+3>0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

thì $f'(x^2+3x-m) \ge 0, \forall x \in (0;2)$ (*).

Đặt $t=x^2+3x-m$. Vì $x \in (0;2) \Rightarrow t \in (-m;10-m)$.

(*) trở thành: $f'(t) \ge 0, \forall t \in (-m;10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} 10-m \le -3 \\ 1 \le -m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 13 \\ m \le -1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 13 \le m \le 20 \\ -10 \le m \le -1 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow m \in \{-10;-9;..;-1;3;4;..;20\}$.

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 4. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 5

Lời giải

Chọn C

$D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$; $y'=\dfrac{m^2-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y'<0,\forall x\in D\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$ nên có 3 giá trị m nguyên.

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3+m(\cos x-\sin x)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (1).

Đặt $t=\cos x-\sin x, t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, thu được hàm $y'(t)=3+mt, t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Khi đó điều kiện (1) trở thành:

$$y'(t)\ge 0,\forall t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}y'\left(-\sqrt{2}\right)\ge 0\\ y'\left(\sqrt{2}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-\sqrt{2}m\ge 0\\ 3+\sqrt{2}m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{3}{\sqrt{2}}\le m\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Các giá trị nguyên của m nhận được là: $-2,-1,0,1,2$.

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3+m(\cos x-\sin x)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (1).

Đặt $t=\cos x-\sin x, t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, thu được hàm $y'(t)=3+mt, t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Khi đó điều kiện (1) trở thành:

$$y'(t)\ge 0,\forall t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}y'\left(-\sqrt{2}\right)\ge 0\\ y'\left(\sqrt{2}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-\sqrt{2}m\ge 0\\ 3+\sqrt{2}m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{3}{\sqrt{2}}\le m\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Các giá trị nguyên của m nhận được là: $-2,-1,0,1,2$.

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-9}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}y'<0\\-m\notin(1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-9<0\\-m\le 1\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<3\\m\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<3$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$, với mọi $x\in R$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=(2x-8).f'\left(x^2-8x+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\f'\left(x^2-8x+m\right)=0\quad(*)\end{array}\right.$ (I)

Mà $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)=(x-1)^2x(x-2);\forall x\in R.$

Suy ra $(*)\Leftrightarrow\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-8x+m-1=0 & (1)\\x^2-8x+m=0 & (2)\\x^2-8x+m-2=0 & (3)\end{array}\right.$.

Qua các nghiệm của phương trình (1) (nếu có) thì $g'(x)$ đều không đổi dấu. Do đó ta không xét phương trình (1).

Để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (2);(3) có 2 nghiệm phân biệt khác 4.

$\Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\16-m+2>0\\-16+m\ne 0\\-18+m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow m<16$

Kết hợp $m\in Z^+\Rightarrow$ có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 50. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{-2x+m}{2mx+3}$ trên là -1 khi m bằng:

A. $-\dfrac{3}{7}$ **B.** $\dfrac{9}{7}$

C. 0 **D.** $\dfrac{3}{7}$

Lời giải

Chọn B

$m=0:D=R$

$m\ne 0:D=R\backslash\left\{-\dfrac{3}{2m}\right\}$ Ta có: $y'=\dfrac{-6-2m^2}{(2mx+3)^2}<0,\forall x\in D$. Hàm số nghịch biến.

Khi đó ta luôn có $y(1)>y(3)$ Nên GTNN trên là y(3)

$\Rightarrow y(3)=\dfrac{-6+m}{6m+3}=-1\Rightarrow m=\dfrac{9}{7}$

Câu 51. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $[-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[-1;0]$. **D.** $[0;1]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=x^2-2(m+1)x+m^2+2m; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right.$.

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$CĐ$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ thì $(0;1)\subset(m;m+2) \Rightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ m+2\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le 0$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+3$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m\le 12$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge 12$.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow y'=3x^2-12x+m\ge 0, \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\ge -3x^2+12x, \forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow m\ge \max\limits_{x\in[0;+\infty)}\left(-3x^2+12x\right)$.

Ta có $-3x^2+12x=-3(x-2)^2+12\le 12, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \max\limits_{x\in[0;+\infty)}\left(-3x^2+12x\right)=12$ ("$=$" khi $x=2$)

$\Rightarrow m\ge \max\limits_{x\in[0;+\infty)}\left(-3x^2+12x\right)=12$

Vậy $m\ge 12$.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(m+1)\sqrt{-2x+3}-1}{-\sqrt{-2x+3}+\dfrac{2}{m}}$ ($m\ne 0$ và là tham số thực). Tập hợp m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ có dạng $S=(-\infty;a)\cup(b;c]\cup[d;+\infty)$, với a, b, c, d là các số thực. Tính $P=a-b+c-d$.

A. -3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \le \dfrac{3}{2} \\ -\sqrt{-2x+3}+\dfrac{2}{m} \ne 0 \end{cases}$.

Đặt $u=\sqrt{-2x+3} \Rightarrow u'=\dfrac{-1}{\sqrt{-2x+3}}<0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right)$, suy ra hàm số $u=\sqrt{-2x+3}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Với $x \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right) \Rightarrow u \in (1;\,2)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $g(u)=\dfrac{(m+1)u-1}{-u+\dfrac{2}{m}}$ đồng biến trên khoảng $(1;\,2)$.

Ta có $g'(u)=\dfrac{\dfrac{2}{m}(m+1)-1}{\left(-u+\dfrac{2}{m}\right)^2}, u \ne \dfrac{2}{m}$.

Hàm số $g(u)$ đồng biến trên khoảng $(1;\,2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} g'(u)>0, \forall u \in (1;\,2) \\ \dfrac{2}{m} \notin (1;\,2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{m}(m+1)-1>0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{m} \le 1 \\ \dfrac{2}{m} \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+2}{m}>0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m-2}{m} \ge 0 \\ \dfrac{m-1}{m} \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m<0 \\ 0<m \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ 0<m \le 1 \\ m \ge 2 \end{array}\right..$$

Vậy $S=(-\infty;\,-2)\cup(0;\,1]\cup[2;\,+\infty) \Rightarrow a=-2;\, b=0;\, c=1;\; d=2$.

Do đó $P=-2-0+1-2=-3$.

Câu 54. Cho hàm số $f(x)=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Đáp án: A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+1 \end{array}\right.$ (do $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1$).

Suy r hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;m)$ và $(m+1;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow m+1 \le 2 \Leftrightarrow m \le 1$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m=1$.

Câu 55. Tìm tập các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{\ln x-m}{m\ln x-4}$ đồng biến trên khoảng $(e;+\infty)$.

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[4;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\ln x$, $x\in(\mathrm{e};+\infty)\Rightarrow t\in(1;+\infty)$ và $y_t=\dfrac{t-m}{mt-4}$.

Ta có $y'_x=y'_t.t'_x=\dfrac{-4+m^2}{(mt-4)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(\mathrm{e};+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $y'_x=\dfrac{-4+m^2}{(mt-4)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)>0,\ \ \forall x\in(\mathrm{e};+\infty),\ \forall t\in(1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \dfrac{-4+m^2}{(mt-4)^2}>0,\ \forall t\in(1;+\infty)\ \Leftrightarrow \begin{cases}-4+m^2>0\\ m\neq\dfrac{4}{t}\end{cases},\ \forall t\in(1;+\infty)\ \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\notin(0;4)\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq 4\\ m<-2\end{array}\right..$$

Câu 56. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. **B.** $[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $y'=-3x^2-6x+4m-9\leq 0\ \ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m\leq 3x^2+12x+9\ \ \forall x\in(-\infty;-1)\ \Leftrightarrow\ 4m\leq \min\limits_{(-\infty;-1]} f(x),\ \ f(x)=3x^2+12x+9$

Ta có $f'(x)=6x+12;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x)=-3\Rightarrow 4m\leq -3\Leftrightarrow m\leq\dfrac{-3}{4}$.

Câu 57. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+(m+1)x-2$ (m là tham số thực). Tìm m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;2)$

A. $m<-4$. **B.** $m\leq -4$. **C.** $m\leq 4$. **D.** $m<4$.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta có: $y'=-3x^2+6x+m+1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;2)\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m+1\leq 3x^2-6x=f(x),\forall x\in(0;2)$

BBT của hàm số $f(x)$

x	0 1 2		
f(x)		0 0 -3	

Từ BBT ta thấy $m+1\leq f(x),\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m+1\leq -3\Leftrightarrow m\leq -4$

Câu 58. Tìm tập các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{\ln x-m}{m\ln x-4}$ đồng biến trên khoảng $(e;+\infty)$.

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[4;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\ln x$, $x\in(e;+\infty)\Rightarrow t\in(1;+\infty)$ và $y_t=\dfrac{t-m}{mt-4}$.

Ta có $y'_x=y'_t.t'_x=\dfrac{-4+m^2}{(mt-4)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(e;+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $y'_x=\dfrac{-4+m^2}{(mt-4)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)>0,\quad \forall x\in(e;+\infty),\ \forall t\in(1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \frac{-4+m^2}{(mt-4)^2}>0,\ \forall t\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases}-4+m^2>0\\ m\neq \dfrac{4}{t}\end{cases},\ \forall t\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\notin(0;4)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq 4\\ m<-2\end{array}\right..$$

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\leq 0$. **B.** $m\leq 12$. **C.** $m\geq 0$. **D.** $m\geq 12$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-12x+m$.

Cách 1: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x>0\Leftrightarrow m\geq -3x^2+12x,\forall x>0$.

Xét hàm số $g(x)=-3x^2+12x$ với $x>0$.

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

YCBT $\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{(0;+\infty)} g(x)\Leftrightarrow m\geq 12$. **Đáp án D**

Cách 2:

•TH1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ � $y'\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases}3>0,\forall m\\ 36-3m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 12$.

• TH2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ � $y'=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa $x_1<x_2\leq 0$.

+) $y'=0$ có nghiệm $x=0$ � $m=0$. Nghiệm còn lại của $y'=0$ là $x=4$ (không thỏa mãn)

+) $y'=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 36 - 3m > 0 \\ S = 4 < 0 \\ P = \dfrac{m}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow m\varnothing$$

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020;\ 2020]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \le \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \forall x \in \mathbb{R}\ (1)$.

Xét $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

$f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Ta có: $m \le \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \le -1$.

Mặt khác $m \in [-2020; 2020] \Rightarrow m \in [-2020; -1]$.

Vậy có 2020 số nguyên m thoả điều kiện.

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \cos 2x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. m > 4. **B.** m < 2. **C.** $m \ge 1$ **D.** $m \ge 2$.

Lời giải

Chọn D

Phương pháp

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow f'(x) \ge 0\ \forall \in (a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Cách giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -2\sin 2x + m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2\sin 2x + m \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m \ge 2\sin 2x\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \ge 2$.

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}\Rightarrow y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$

Điều kiện để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ thì

$$\begin{cases} y'<0,\forall x\in(0;1) \\ -\dfrac{m}{2}\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-4<0 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}\le 0 \\ -\dfrac{m}{2}\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<2$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$ và $m=1$.

Câu 63. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx+3}{3x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{6}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)=\dfrac{mx+3}{3x+m}$ *có TXĐ:* $D=R\setminus\left\{\dfrac{-m}{3}\right\}$

Có $f'(x)=\dfrac{m^2-9}{(3x+m)^2}$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)<0 \\ \dfrac{-m}{3}\notin\left(-\infty;\dfrac{1}{6}\right)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-9<0 \\ \dfrac{-m}{3}\ge\dfrac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -3<m<3 \\ m\le-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -3<m\le-\dfrac{1}{2}$$

Mà $m\in Z\Rightarrow m\in\{-2;-1\}$

Câu 64. Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2020;2020]$ sao cho hàm số $y=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2-15x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, $y'=mx^2+14mx-15$

Hàm số giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty) \Leftrightarrow mx^2+14mx-15\le 0, \forall x\ge 1$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{15}{x^2+14x}=g(x), \forall x\ge 1$ (1)

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-15(2x+14)}{\left(x^2+14x\right)^2}<0, \forall x\ge 1$

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $[1;+\infty)$.

x	1				$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$	1	$\searrow$			0

Vậy $m\le 0$.

Câu 65. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+\left(m^2+2m\right)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $S=[-1;0]$ **B.** $S=\varnothing$. **C.** $S=\{-1\}$. **D.** $S=[0;1]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=x^2-2(m+1)x+\left(m^2+2m\right)$

Xét $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+\left(m^2+2m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right. \forall m$

Hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(m;m+2)$ $\forall m$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì $(-1;1)\subset(m;m+2)$.

Nghĩa là: $m\le -1<1\le m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -1 \\ -1<1 \\ 1\le m+2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$.

Câu 66. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6(2m+1)x+12m+5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y'\ge 0$, $\forall x\in(2;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2-6(2m+1)x+12m+5\ge 0$, $\forall x\in(2;+\infty)$.

$3x^2-6(2m+1)x+12m+5\ge 0 \iff m\le \dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)},\forall x\in(2;+\infty)$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)}$ với $x\in(2;+\infty)$.

$g'(x)=\dfrac{3x^2-6x+1}{12(x-1)^2}>0$ với $\forall x\in(2;+\infty)$ $\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m\le g(x),\forall x\in(2;+\infty)$ $\Rightarrow m\le g(2)$ $\iff m\le \dfrac{5}{12}$.

Câu 67. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{\log_3 x-2}{\log_3 x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_3 x$. Hàm số $t=\log_3 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Với $x\in(1;+\infty)\Rightarrow t\in(0;+\infty)$.

Hàm số trở thành $y=f(t)=\dfrac{t-2}{t-m}\Rightarrow y'=f'(t)=\dfrac{-m+2}{(t-m)^2}$.

Để hàm số $y=\dfrac{\log_3 x-2}{\log_3 x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow\begin{cases}-m+2>0\\ m\notin(0;+\infty)\end{cases}\iff\begin{cases}m<2\\ m\le 0\end{cases}\iff m\le 0$.

Do đó không tồn tại giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 68. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đáp án: D

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

$y'=\dfrac{m^2-4}{(-2x+m)^2}$. Yêu cầu bài toán $\iff\begin{cases}m^2-4<0\\ \dfrac{m}{2}\le\dfrac{1}{2}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\iff\begin{cases}-2<m<2\\ m\le 1\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\iff m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m<\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Đặt $t=\sin x$, với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$. Ta có hàm số $t=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y=\frac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\frac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

$\Leftrightarrow f'(t)>0,\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow \frac{-2m+1}{(t-m)^2}>0,\ \forall t\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2m+1>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0.$$

Vậy $m\le 0$.

Câu 70. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

A. 1 **B.** 3 **C.** Vô số **D.** 2

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4m\}$

$$y'=\frac{4m-3}{(x+4m)^2}$$

Hàm số $y=\frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)\Leftrightarrow y'<0\,\forall x\in(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4m-3<0\\ -4m\notin(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{3}{4}\\ -4m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{3}{4}\\ m\ge-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<\frac{3}{4}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$. Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		4		$-\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Bất phương trình $f(x)+e^x-2m>0$ có nghiệm đúng với mọi $x\in(2;3)$ khi và chỉ khi

A. $m<\frac{1}{2}\left[f(2)+e^2\right]$. **B.** $m\le\frac{1}{2}\left[f(2)+e^2\right]$.

C. $m\ge\frac{1}{2}\left[f(3)+e^3\right]$. **D.** $m<\frac{1}{2}\left[f(3)+e^3\right]$.

Lời giải:

Ta có: $2m<f(x)+e^x$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)+e^x,\forall x\in(2;3)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)+e^x>0,\forall x\in(2;3)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	2		3
$g(x)$		$+$	
$g'(x)$	$g(2)$	$\nearrow$	$g(3)$

Vậy $2m \le g(2) \Leftrightarrow 2m \le f(2)+e^2 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{2}\left[f(2)+e^2\right]$.

Chọn **B.**

Câu 72. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{x+2m-3}{x-m^2}$ đồng biến trên $(5;+\infty)$. Số phần tử của S là:

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m^2\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2-2m+3}{\left(x-m^2\right)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(5;+\infty) \Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in(5;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2-2m+3>0 \\ m^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ -\sqrt{5}\le m\le\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{5}\le m<1$.

Vì $m\in Z \Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

$y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{-m}{2}\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m}{2}\le 0 \\ \dfrac{-m}{2}\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<2$.

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{\lg x+2}{\lg x-3m}$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên âm của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;10)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$y=f\left(x\right)=\dfrac{\lg x+2}{\lg x-3m}$

Đặt $t=\lg x$, điều kiện $t\in\left(0;1\right)$

$g\left(t\right)=\dfrac{t+2}{t-3m}$; $g'\left(t\right)=\dfrac{-3m-2}{\left(t-3m\right)^2}$

Để hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(1;10\right)$ thì hàm số $g\left(t\right)$ nghịch biến trên $\left(0;1\right)$ $\Leftrightarrow g'\left(t\right)<0,\, t\in\left(0;1\right)$ $\Leftrightarrow \dfrac{-3m-2}{\left(t-3m\right)^2}<0, t\in\left(0;1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m-2<0 \\ 3m\notin\left(0;1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-2}{3}<m\le 0 \\ m>\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

S là tập hợp các giá trị nguyên âm $\Rightarrow S=\phi$.

Vậy số phần tử của tập S là 0.

Câu 75. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(10;+\infty\right)$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x\ne -5m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(10;+\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y'<0 \\ -5m\notin\left(10;+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6<0 \\ -5m\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m<\dfrac{6}{5}$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán là $-2;-1;0;1$.

Câu 76. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{-3}{4}x^4+\dfrac{9}{2}x^2-\left(2m+15\right)x-m+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=-3x^3+9x-2m-15\le 0\,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $\left(0;+\infty\right)\Leftrightarrow 3x^3-9x+15\ge -2m\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Xét hàm số: $g(x)=3x^3-9x+15$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $g'(x)=9x^2-9$

$g'\left(x\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	15	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m \le 9 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 77. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \dfrac{-3}{4}x^4 + \dfrac{9}{2}x^2 - (2m+15)x - m + 3$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = -3x^3 + 9x - 2m - 15 \le 0 \,\forall x \in (0;+\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^3 - 9x + 15 \ge -2m \ \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số: $g(x) = 3x^3 - 9x + 15$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x) = 9x^2 - 9$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	15	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m \le 9 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 78. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m > 2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} 1 \le m < 2 \\ m \le 0 \end{array}\right.$. **C.** $m \le 2$. **D.** $m \le 0$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$ và $y_t=\frac{t-2}{t-m}$.

Ta có $y'_x=y'_t.t'_x=\frac{-m+2}{(t-m)^2}(-\sin x)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$ $y'_x=\frac{-m+2}{(t-m)^2}(-\sin x)<0,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\ \forall t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow\frac{-m+2}{(t-m)^2}>0,\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\ t-m\neq 0\end{cases},\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le m<2\\ m\le 0\end{array}\right.$.

Câu 79. Cho hàm số $y=\frac{mx-2}{x-2m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{2m\}$.

$y=\frac{-2m^2+2}{(x-2m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}y'>0,\forall x\in D\\ 2m\notin(1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2m^2+2>0\\ 2m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\ m\le\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\le\frac{1}{2}$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0\}$.

Câu 80. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right);(1;-1)$. **B.** $\left(-1;\frac{5}{3}\right);(3;3)$. **C.** $(3;3);(1;1)$. **D.** $\left(4;\frac{5}{2}\right);(3;3)$

Giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{x-2}=2$ nên $y=2$ là tiệm cận đứng;

$\lim\limits_{x\to 2^+}y=+\infty$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng.

Lấy $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C)$ với (C) là đồ thị hàm số.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=y'_{(x_0)}(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=\frac{-1}{(x_0-2)^2}.(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$.

Tiếp tuyến tại M cắt tiệm cận đứng tại $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; cắt tiệm cận ngang tại $B(2x_0-2;2)$.

$$AB=\sqrt{\left(2x_0-4\right)^2+\left(\frac{-2}{x_0-2}\right)^2}=\sqrt{4\left[\left(x_0-2\right)^2+\left(\frac{1}{x_0-2}\right)^2\right]}\ge 2 \text{ (Theo bất đẳng thức Cô-si).}$$

Dấu $=$ xảy ra khi $\left(x_0-2\right)^2=\left(\frac{1}{x_0-2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$. Vậy $M(1;1)$ hoặc $M(3;3)$..

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+\left(m+5\right)x+10$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. $m\le -5$. **B.** $m\le 7$. **C.** $m\ge -5$. **D.** $m\ge 7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-12x+m+5$

Hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right) \Leftrightarrow 3x^2-12x+m+5\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

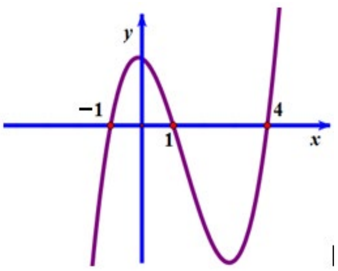
$\Leftrightarrow m\ge -3x^2+12x-5=g(x),\forall x\in(0;+\infty)$

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	-5	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $m\ge 7$.

Câu 82. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(3-2x\right)+2018$ nghịch biến trên khoảng?



A. $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;1\right)$. **D.** $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)=k\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-4\right)$ với $k>0$

$\Rightarrow f'\left(3-2x\right)=k\left[\left(3-2x\right)+1\right]\left[\left(3-2x\right)-1\right]\left[\left(3-2x\right)-4\right]$.

Hàm số $y=f\left(3-2x\right)+2018$ nghịch biến khi $y'=-2.f'\left(3-2x\right)<0$

$$\Leftrightarrow f'\left(3-2x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x>4 \\ -1<3-2x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\frac{1}{2} \\ 1<x<2 \end{array}\right..$$

Vậy hàm số $y=f\left(3-2x\right)+2018$ nghịch biến trên $\left(1;2\right)$ và $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x-2m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{2m\}$.

$y=\dfrac{-2m^2+2}{(x-2m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} y'>0, \forall x\in(1;+\infty) \\ 2m\notin(1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2+2>0 \\ 2m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ m\le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\le\dfrac{1}{2}$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0\}$.

Câu 84. Số giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$

YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} y'>0 \\ -m\notin(-\infty;-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \vee m>1 \\ m\le 5 \end{cases}$

m nguyên dương $\Rightarrow m=2,3,4,5$.

Câu 85. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\dfrac{x-2}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2>0 \\ m>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m>-1 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx-9}{x-m}$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên $(3;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

+ Trước hết theo yêu cầu bài toán ta phải có $m\in(-\infty;3]\Leftrightarrow m\le 3$.

+ Tiếp theo $f'(x)=\dfrac{9-m^2}{(x-m)^2}>0\Rightarrow 9-m^2>0\Rightarrow m\in(-3;3)$

Kết hợp ta có $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 87. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

$y'=\dfrac{-m^2-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của ta cần tìm m để $y'\ge 0$ trên $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên các khoảng đó

ĐK: $-m^2-m+2>0\Leftrightarrow -2<m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1,0\}$.

Câu 88. Cho hàm số $y=\dfrac{m.\sqrt{x-1}-9}{\sqrt{x-1}-m}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;17)$?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}>0,\forall x\in(2;17)\Rightarrow$ t là hàm đồng biến và $t\in(1;4)$.

Khi đó bài toán có thể phát biểu lại là: "Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{mt-9}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;4)$".

Yêu cầu bài toán tương đương:

$$y'=\frac{-m^2+9}{(t-m)^2}>0,\forall t\in(1;4)\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin(1;4)\\-m^2+9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le 1\\m\ge 4\end{array}\right.\\-3<m<3\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -3<m\le 1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-2;-1;0;1\}$: có 4 giá trị m thỏa mãn.

Câu 89. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

TH1: $m=1$. Ta có: $y=-x+4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.

TH2: $m=-1$. Ta có: $y=-2x^2-x+4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.

TH3: $m\ne\pm 1$. Khi đó

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ và dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)^2+3(m^2-1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)(4m+2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ -\dfrac{1}{2}\le m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m=0$ hoặc $m=1$.

Câu 90. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-5m\}$.

$$y'=\frac{5m-6}{(x+5m)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'<0,\forall x\in D \\ -5m\notin(10;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6<0 \\ -5m\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{6}{5} \\ m\ge -2 \end{cases}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1\}$ nên có 4 giá trị m nguyên.

Câu 91. Số giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\dfrac{mx-1}{m-4x}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{m}{4}\right\}$ và $y'=\dfrac{m^2-4}{(m-4x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{m}{4}\ge\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 1\le m<2$.

Vậy số giá trị nguyên của m là 1 số.

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn

$f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài: $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$

$\Leftrightarrow 2f(x).f'(x)=2x+\left(x^2-1\right).f'(x)+2x.f(x)$

$\Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=\left[x^2+\left(x^2-1\right).f(x)\right]'$

$\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right).f(x)+C\ (1)$.

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f^2(1)=1+C\Leftrightarrow C=0$ (vì $f(1)=1$).

Do đó, (1) trở thành: $f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right).f(x)$

$\Leftrightarrow f^2(x)-1=x^2-1+\left(x^2-1\right).f(x)$

$\Leftrightarrow \left[f(x)-1\right].\left[f(x)+1\right]=\left(x^2-1\right).\left[f(x)+1\right]$

$\Leftrightarrow f(x)-1=x^2-1$ (vì $f(x)\geq 0\Rightarrow f(x)+1>0\ \ \forall x\in[0;1]$)

$\Leftrightarrow f(x)=x^2$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1=\dfrac{1}{3}$.

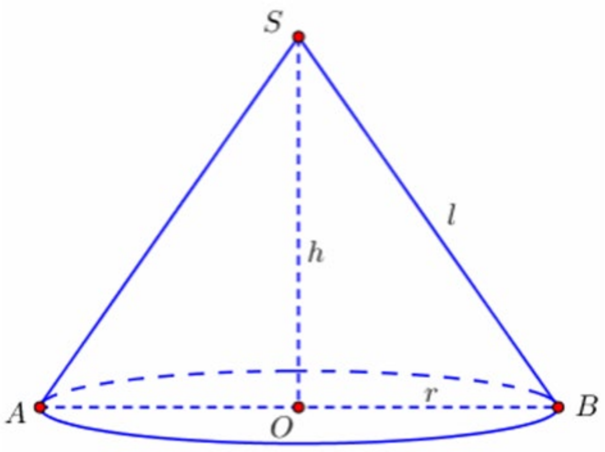
KHỐI NÓN

Câu 1. Cắt hình nón (N) bằng một mặt phẳng đi qua trục của hình nón được thiết diện là một tam giác vuông cân có diện tích bằng 4. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** 8π. **D.** 64π.

Lời giải

Chọn A



Gọi tam giác SAB vuông cân tại S là thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng.

Ta có $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SA^2 = 4 \Rightarrow SA = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = 4$.

Khi đó bán kính đáy của hình nón $r = \frac{AB}{2} = 2$ và $SO = r = 2$.

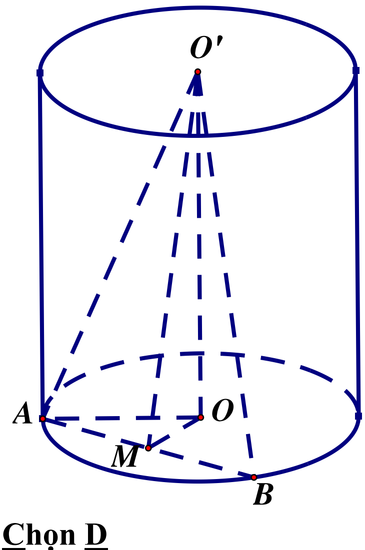
Vậy thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho là:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{8\pi}{3}$.

Câu 2. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc $60°$. Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = \frac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. **B.** $V = \frac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **C.** $V = \frac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **D.** $V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Lời giải



Chọn D

Đặt độ dài cạnh $AB = x$ $(x > 0)$ và M là trung điểm AB.

Vì tam giác $O'AB$ đều nên $O'A = O'B = AB = x \Rightarrow O'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ góc $60°$ nên $\widehat{O'MO} = 60°$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại O ta có: $\cos\widehat{O'MO} = \dfrac{OM}{O'M}$. Suy ra

$$\cos 60° = \dfrac{OM}{\dfrac{x\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OM = \dfrac{x\sqrt{3}}{4}$$

Xét tam giác OAM vuông ở M có: $OA^2 = OM^2 + AM^2$ nên

$$R^2 = \left(\dfrac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \dfrac{7}{16}x^2 \Rightarrow x = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}R$$

Do đó: $O'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}R$ và $OM = \dfrac{x\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}R$. Vì vậy, ta có

$$OO' = \sqrt{O'M^2 - OM^2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}R.$$

Vậy thể tích khối trụ là

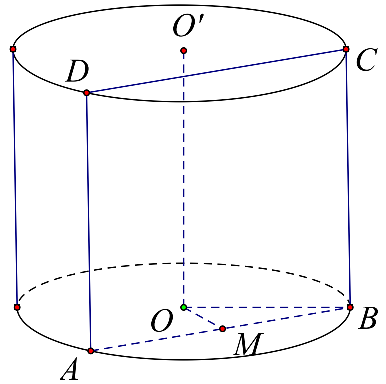
$$V = \pi R^2.h = \pi R^2.\dfrac{3\sqrt{7}}{7}R \Rightarrow V = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}.$$

Câu 3. Một hình trụ có chiều cao bằng 10 và bán kính mặt đáy bằng 5. Một mặt phẳng song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng 2 cắt hình trụ theo thiết diện có diện tích bằng

A. 40π. **B.** 80π. **C.** 100π. **D.** 50π.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện là hình chữ nhật và giả sử là $ABCD$ như hình vẽ.

Gọi Mlà trung điểm AB. Ta có: $\begin{cases} AD = OO' = 10 \\ OB = 5, OM = 3 \end{cases} \Rightarrow MB = \sqrt{OB^2 - OM^2} = 4 \Rightarrow AB = 8.$

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện bằng: $S_{ABCD} = AD.AB = 10.8 = 80$ $\Rightarrow$Chọn B

Câu 4. Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính R của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đạt giá trị nhỏ nhất:

A. $R = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}}$. **B.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$. **C.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$. **D.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi h và R lần lượt là chiều cao và bán kính đáy (đơn vị: mét).

Ta có: $V = h\pi R^2 = 1 \rightarrow h = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{1}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2}{R}(R > 0).$$

Cách 1: Khảo sát hàm số, thu được $f(R)_{\min} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \Rightarrow h = \frac{1}{\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}}}$.

Cách 2: Dùng bất đẳng thức:

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{1}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2.\frac{1}{R}.\frac{1}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi}.$$

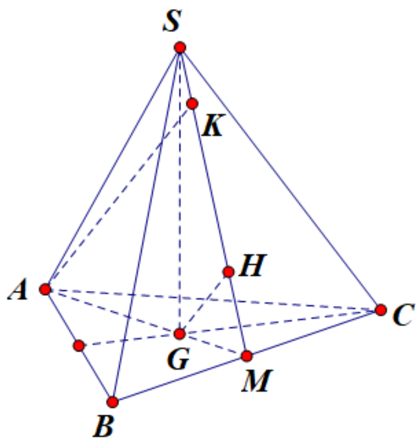
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $R^3 = \frac{1}{2\pi}$.

Câu 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{165}}{45}$. **B.** $\frac{a\sqrt{165}}{15}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{165}}{15}$. **D.** $\frac{a\sqrt{165}}{30}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do hình chóp $S.ABC$ đều nên $SO \perp (ABC)$

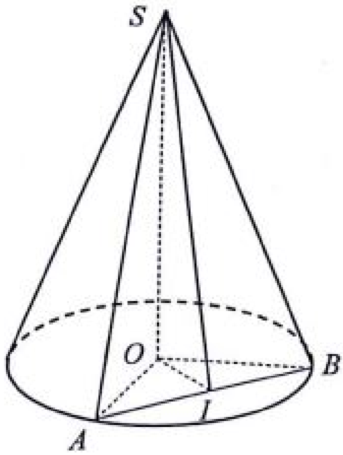
$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3};\ GM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$d(A,(SBC)) = 3d(G,(SBC)) = \frac{3SG.GM}{\sqrt{SG^2 + GM^2}} = \frac{a\sqrt{165}}{15}.$$

Câu 6. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng 2 và $SAO = 30^0$; $SAB = 60^0$. Tính diện tích xung quanh hình nón?

A. $4\pi\sqrt{3}$ **B.** $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$ **C.** $2\pi\sqrt{3}$ **D.** $3\pi\sqrt{2}$

Lời giải



Chọn A

Gọi I là trung điểm của AB thì $OI \perp AB; SI \perp AB; OI = 2$

Lại có $\begin{cases} AO = SA.\cos SAO = SA.\frac{\sqrt{3}}{2} \\ AI = SA.\cos SAI = \frac{SA}{2} \end{cases}$

Từ đó ta có $\frac{AI}{AO}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt khác $\frac{AI}{AO}=\cos IAO\Rightarrow \sin IAO=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2}{OA}\Rightarrow OA=\sqrt{6}$

Mà $SA=\frac{OA}{\cos 30}=\sqrt{6}.\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$

Diện tích xung quanh cần tính là: $S_{xq}=\pi.OA.SA=4\pi\sqrt{3}$

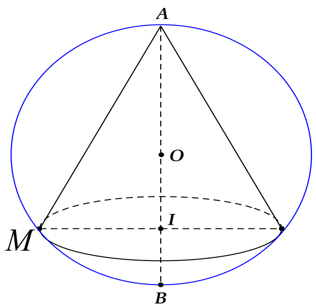
Câu 7. Cho mặt cầu (*S*) đường kính $AB=2R$. Lấy điểm *I* thuộc đoạn thẳng AB ($I\neq A, I\neq B$). Mặt phẳng (α) vuông góc AB tại *I* cắt mặt cầu (*S*) theo đường tròn (C). Khối nón đỉnh A, đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}\pi R^3$. **B.** $\frac{5}{81}\pi R^3$. **C.** $\frac{32}{81}\pi R^3$. **D.** $\frac{16}{81}\pi R^3$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $AI=h$.



Gọi O là trung điểm AB, M là điểm bất kì trên đường tròn (C).

Ta có $IM=\sqrt{OM^2-OI^2}=\sqrt{R^2-(h-R)^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$.

Thể tích hình nón: $V=\frac{1}{3}.AI.S_{(C)}=\frac{1}{3}.h.\pi.(2Rh-h^2)$.

Đặt $f(h)=\frac{\pi}{3}(2Rh^2-h^3)$ (R là tham số).

Tập xác định $D=(0;2R)$.

$f'(h)=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2)$; $f'(h)=0\Leftrightarrow h=\frac{4R}{3}$.

$f(0)=0$; $f(R)=\frac{\pi}{3}.R^3$; $f\left(\frac{4R}{3}\right)=\frac{32\pi}{81}R^3$.

Vậy hàm số $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất khi $h=\frac{4R}{3}\Rightarrow V_{\max}=\frac{1}{3}.\frac{4}{3}R.\sqrt{2R.\frac{4}{3}R-\left(\frac{4}{3}R\right)^2}^{2}=\frac{32}{81}\pi R^3$.

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$. Một hình nón có đỉnh S và đáy là hình tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $3\sqrt{2}\pi a^2$.. **B.** $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.. **C.** $6\pi a^2$.. **D.** $6\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A

Hình nón đã cho có $l=SA=3a, r=\frac{AC}{2}=\sqrt{2}a\Rightarrow S_{xq}=\pi.r.l=3\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 9. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Gọi BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S=\dfrac{a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn **D.**

Dựng $OM\perp BC$ (M là tr ung điểm của BC).

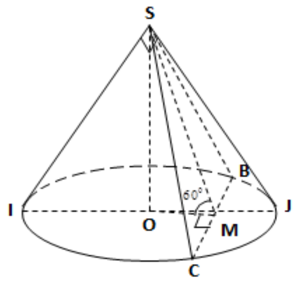
Vì $BC\perp SO$ nên $BC\perp SM$, từ đó ta có

$\left[(SBC);đáy\right]=\left[SM,OM\right]=SMO=60°$.

Vì $SO=\dfrac{1}{2}IJ=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $SM=\dfrac{SO}{\sin 60°}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $CM=\sqrt{SC^2-SM^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S_{\Delta SBC}=\dfrac{1}{2}SM.BC=\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.



Câu 10. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Gọi BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S=\dfrac{a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn **D.**

Dựng $OM\perp BC$ (M là tr ung điểm của BC).

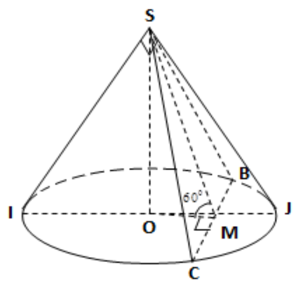
Vì $BC\perp SO$ nên $BC\perp SM$, từ đó ta có

$\left[(SBC);đáy\right]=\left[SM,OM\right]=SMO=60°$.

Vì $SO=\dfrac{1}{2}IJ=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $SM=\dfrac{SO}{\sin 60°}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $CM=\sqrt{SC^2-SM^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S_{\Delta SBC}=\dfrac{1}{2}SM.BC=\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

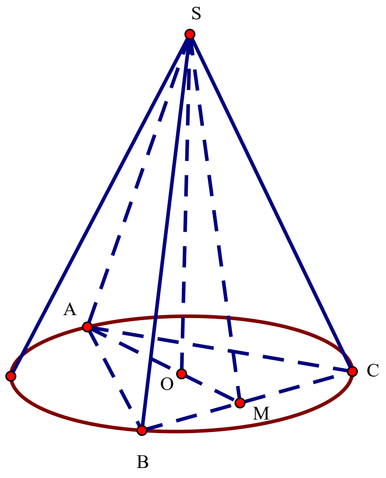


Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điêmt cạnh BC, ta có $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SMO} = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SMO: $SO = OM.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \frac{a}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

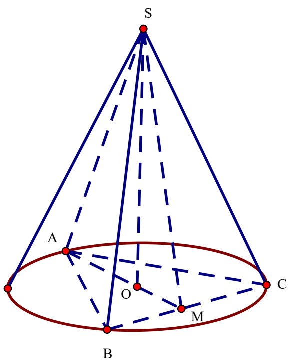
Vậy $S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 12. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\frac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điêmt cạnh BC, ta có $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SMO} = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SMO: $SO = OM.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \frac{a}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

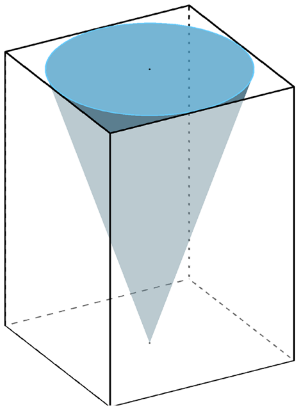
Vậy $S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 13. Trong một trò chơi vận động, các thí sinh phải làm một cái phễu nhỏ có dạng là một hình nón sau đó nhanh chóng hứng nước vào đầy phễu rồi rót vào trong một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy và miệng là hình vuông. Biết đáy phễu là đường tròn nội tiếp đáy chiếc thùng và chiều cao phễu bằng chiều cao của thùng. Hỏi sau bao nhiêu lần rót nước thì chiếc thùng sẽ đầy nước?

A. 6 lần. **B.** 7 lần. **C.** 8 lần. **D.** 9 lần.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Tưởng tượng ta đặt nón vào trong hộp, ta sẽ được kết quả như ở hình trên.

Ta nhận thấy khi đáy nón là đường tròn nội tiếp đáy thùng thì thì độ dài cạnh đáy thùng cũng là đường kính của đáy nón.

Gọi kích thước của thùng là a x a x h (trong đó a là độ dài cạnh đáy thùng, h là chiều cao thùng). Ta so sánh thể tích V_1 của chiếc nón và thể tích V_2 của chiếc thùng

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}.\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.h}{a^2.h}=\frac{1}{3}\pi.\frac{1}{8}=\frac{1}{24}\pi \Rightarrow V_2=\frac{24}{\pi}V_1\approx 7,64V_1.$$

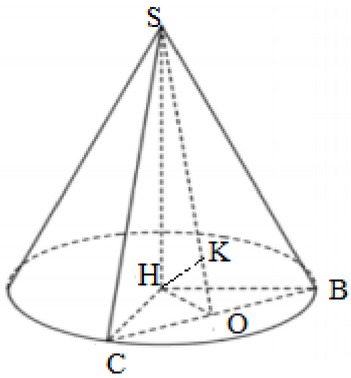
Vậy cần rót nước 8 lần bằng phễu thì mới đầy thùng.

Câu 14. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h=20cm$, bán kính đáy $r=25cm$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12cm$. Diện tích của thiết diện đó bằng

A. $500\,\text{cm}^2$ **B.** $400\,\text{cm}^2$ **C.** $300\,\text{cm}^2$ **D.** $406\,\text{cm}^2$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là tâm của đáy hình nón và O là trung điểm của BC (Với B,C là giao điểm của mp chứa thiết diện và đường tròn đáy) thì suy ra $HO\perp BC$, mà $SH\perp BC\Rightarrow BC\perp(SHO)\Rightarrow(SBC)\perp(SHO)$.

Vậy trong (SHO) ta dựng $HK\perp SO\Rightarrow HK\perp(SBC)\Rightarrow d\left(H,(SBC)\right)=HK=12cm.$

Ta có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HO^2}+\frac{1}{SH^2}\Rightarrow HO=15cm.$ Mà ΔSHO vuông tại $H\Rightarrow SO=\sqrt{SH^2+HO^2}=25cm, CB=2OC=2\sqrt{HC^2-HO^2}=40cm.$

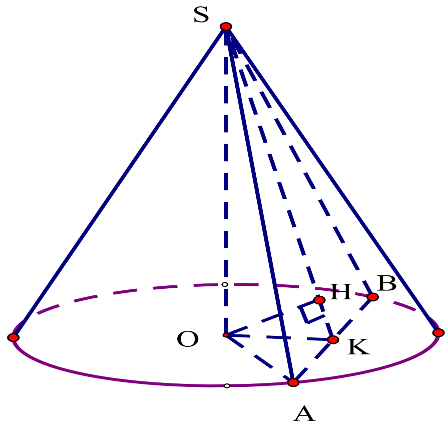
$$\Rightarrow S_{SBC}=\frac{SO.BC}{2}=\frac{25.40}{2}=500\left(cm^2\right).$$

Câu 15. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0,\widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK\perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO\perp AB$ nên $AB\perp(SOK)$ $\Rightarrow(SOK)\perp(SAB)$ mà $\Rightarrow(SOK)\cap(SAB)=SK$ nên từ O dựng $OH\perp SK$ thì $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=d(O,(SAB))$

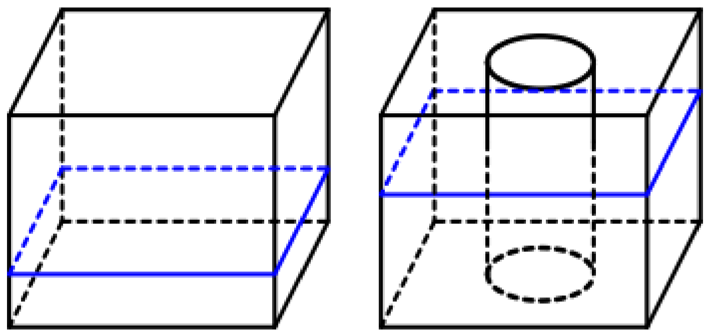
Xét tam giác SAO ta có: $\sin\widehat{SAO}=\frac{SO}{SA}\Rightarrow SO=\frac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin\widehat{SAB}=\frac{SK}{SA}\Rightarrow SK=\frac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{SK^2-SO^2}+\frac{1}{SO^2}$

$$\Rightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\frac{SA^2}{4}}+\frac{1}{\frac{3SA^2}{4}-\frac{SA^2}{4}}=\frac{4}{SA^2}+\frac{2}{SA^2}\Rightarrow\frac{6}{SA^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow SA=2a^2\Rightarrow SA=a\sqrt{2}$$

Câu 16. Một hình hộp chữ nhật có chiều cao là 90 cm, đáy hộp là hình chữ nhật có chiều rộng là 50 cm và chiều dài là 80 cm. Trong khối hộp có chứa nước, mực nước so với đáy hộp có chiều cao là 40 cm. Hỏi khi đặt vào khối hộp một khối trụ có chiều cao bằng chiều cao khối hộp và bán kính đáy là 20 cm theo phương thẳng đứng thì chiều cao của mực nước so với đáy là bao nhiêu?



A. 48,32 cm. **B.** 68,32 cm. **C.** 78,32 cm. **D.** 58,32 cm.

Lời giải

Chọn D

Trước khi đặt vào khối hộp một khối trụ thì thể tích lượng nước có trong khối hộp là $V_n=40.80.50=160000$ (cm^3).

Gọi h (cm)là chiều cao của mực nước so với đáy.

Sau khi đặt vào khối hộp một khối trụ thì thể tích lượng nước là $V_n=h.(4000-400\pi)$ (cm^3).

Do lượng nước không đổi nên ta có $h.(4000-400\pi)=160000$

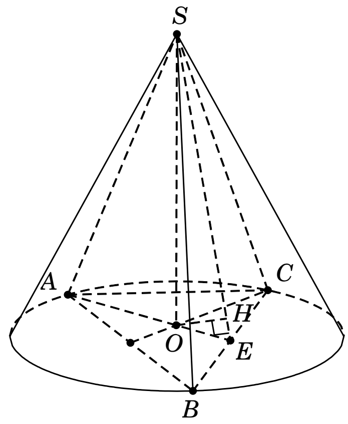
$$\Leftrightarrow h=\frac{160000}{4000-400\pi}\approx 58,32\ \text{(cm)}.$$

Câu 17. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC đến một mặt bên là $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{27}$. **D.** $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn **B.**



Gọi E là trung điểm của BC, dựng $OH \perp SE$ tại H.

Chứng minh được $OH \perp (SBC)$ nên suy ra $OH = d[O,(SBC)] = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác đều ABC, ta có

$OE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OA = \frac{2}{3}AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOE, ta có

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a$.

Vậy thể tích khối nón

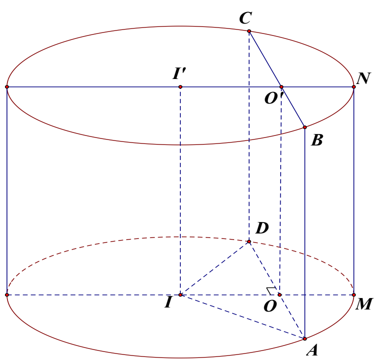
$V = \frac{1}{3}\pi OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \frac{4\pi a^3}{9}$ (đvtt).

Câu 18. Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng 3. Tính thể tích khối trụ.

A. $2\sqrt{3}\pi$. **B.** $\frac{52\pi}{3}$. **C.** 52π. **D.** 13π.

Lời giải

Chọn C



.

Dựng các dữ kiện bài toán theo hình vẽ trên.

Mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 16 $\Rightarrow$ Cạnh hình vuông bằng 4.

Khoảng cách từ tâm I đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng $3 \Rightarrow IO = 3$.

Ta có $IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

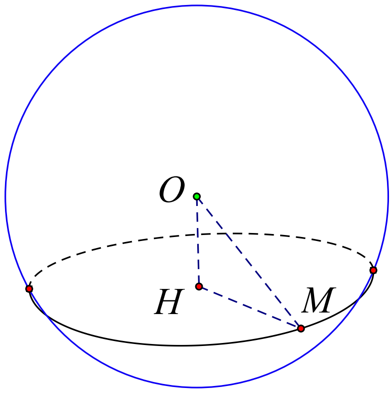
Vậy thể tích khối trụ trên là: $V = \pi.\left(\sqrt{13}\right)^2.4 = 52\pi\,(dvtt)$.

Câu 19. Một khối cầu có đường kính bằng $10\,(\text{cm})$. Người ta dùng một mặt phẳng cách tâm khối cầu $3\,(\text{cm})$ để cắt khối cầu thành hai phần. Diện tích của thiết diện bằng

A. $16\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $16\pi\left(\text{cm}\right)$. **C.** $16\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $16\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn D



Theo đề bài ta có: $2R=10\left(\text{cm}\right)\Rightarrow R=OM=5\left(\text{cm}\right),OH=3\left(\text{cm}\right)$

$\Rightarrow r=HM=\sqrt{OM^2-HM^2}=4\left(\text{cm}\right)$.

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện bằng: $S=\pi r^2=\pi.4^2=16\pi\left(\text{cm}^2\right)\Rightarrow$ Chọn **D.**

Câu 20. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

A. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ là hình chữ nhật $ABCD$ với $BC=\frac{3R}{2}$.

Gọi H là trung điểm AB, ta có $AH=\frac{R}{2}\Rightarrow AB=2HB=2\sqrt{R^2-AH^2}=R\sqrt{3}$.

Vậy diện tích thiết diện là: $S=AB.CD=R\sqrt{3}.\frac{3R}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

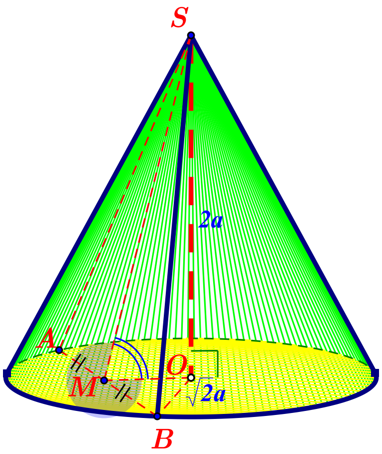
Câu 21. Một hình nón có chiều cao $2a$, bán kính đáy $a\sqrt{2}$. Một phẳng phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt đáy góc 60°. Tính diện tích thiết diện.

A. $\frac{5\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}a^2}{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Kí hiệu như hình vẽ



Dễ thấy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy là góc $\widehat{SMO}=60^0$.

Xét tam giác vuông SOM có $OM=2a.\cot 60^\circ=\frac{2a}{\sqrt{3}}$; $SM=\frac{2a}{\sin 60^\circ}=\frac{4a}{\sqrt{3}}$;

Lại có $AB=2.MB=2\sqrt{OB^2-OM^2}=2\sqrt{2a^2-\frac{4a^2}{3}}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$

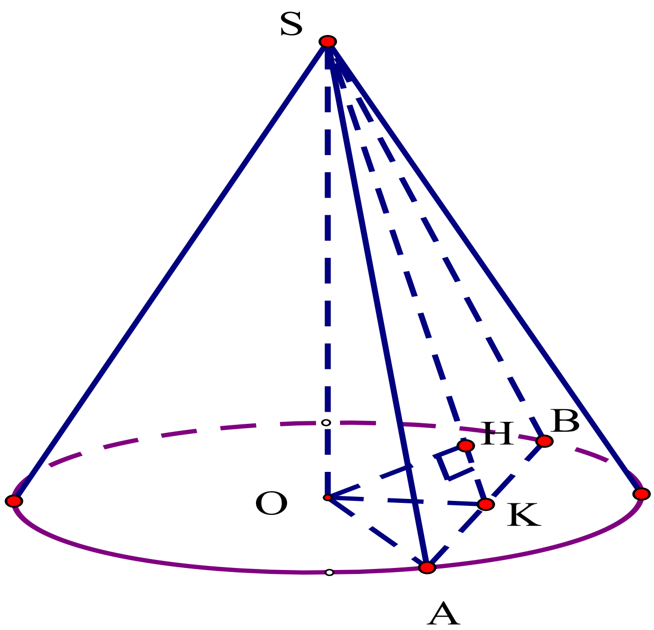
Vậy $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}SM.AB=\frac{1}{2}.\frac{4a}{\sqrt{3}}.\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.

Câu 22. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0, \widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK\perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO\perp AB$ nên $AB\perp(SOK)$ $\Rightarrow(SOK)\perp(SAB)$ mà $\Rightarrow(SOK)\cap(SAB)=SK$ nên từ O dựng $OH\perp SK$ thì $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=d(O,(SAB))$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin\widehat{SAO}=\frac{SO}{SA}\Rightarrow SO=\frac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin\widehat{SAB}=\frac{SK}{SA}\Rightarrow SK=\frac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{SK^2-SO^2}+\frac{1}{SO^2}$

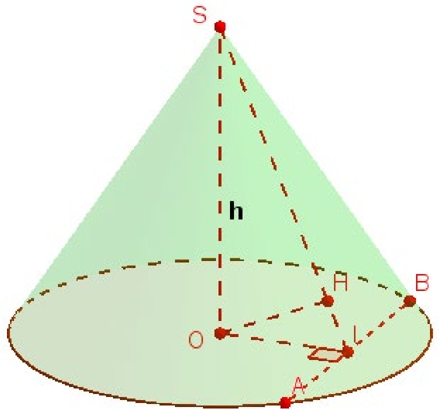
$\Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\frac{SA^2}{4}}+\frac{1}{\frac{3SA^2}{4}-\frac{SA^2}{4}}=\frac{4}{SA^2}+\frac{2}{SA^2}\Rightarrow \frac{6}{SA^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow SA=2a^2\Rightarrow SA=a\sqrt{2}$

Câu 23. Cho khối nón (N) có chiều cao $h=20$ cm, bán kính đáy $r=25$ cm. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của (N) và cách tâm của mặt đáy 12 cm. Khi đó (α) cắt (N) theo một thiết diện có diện tích là

A. $S=300\text{ cm}^2$. **B.** $S=500\text{ cm}^2$. **C.** $S=406\text{ cm}^2$. **D.** $S=400\text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi S,O lần lượt là đỉnh và tâm đường tròn đáy của khối nón (N).

Ta có mặt phẳng (α) cắt đường tròn đáy tâm O tại 2 điểm A,B.

Vậy mặt phẳng (α) cắt khối nón theo một thiết diện là ΔSAB.

Kẻ $OI\perp AB$, $OH\perp SI$

Ta có $\begin{cases}OI\perp AB\\ SO\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SOI)\Rightarrow AB\perp OH$

Ta có $\begin{cases}AB\perp OH\\ SI\perp OH\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SAB)\Rightarrow d\left[O,(SAB)\right]=OH=12$ cm.

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔSOI vuông tại O có đường cao OH

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{SO^2}\Rightarrow OI=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{SO^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12^2}-\frac{1}{20^2}}}=15$ cm.

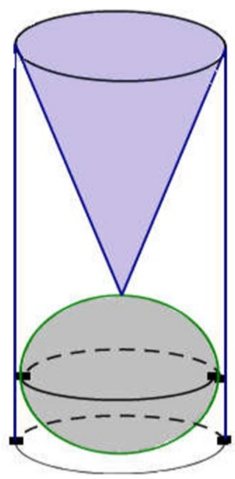
Xét ΔAOI vuông tại I có: $IA^2+OI^2=AO^2\Rightarrow IA=\sqrt{AO^2-OI^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20$ cm.

Xét ΔSOI vuông tại O có: $SO^2+IO^2=SI^2\Rightarrow SI=\sqrt{SO^2+IO^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$ cm.

Vậy $S_{SAB}=\frac{1}{2}SI.AB=SI.IA=25.20=500\text{ cm}^2$.

Câu 24. Một khối hình trụ có chiều cao bằng 3 lần đường kính của mặt đáy chứa đầy nước. Người ta đặt vào
trong khối đó một khối cầu có đường kính bằng đường kính khối trụ và một khối nón có đỉnh tiếp xúc

với khối cầu, đáy khối nón trùng với đáy trên của khối trụ (như hình vẽ).Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong khối trụ và lượng nước của khối trụ ban đầu.



A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ $\Rightarrow h = 6R = 6$. Thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi.1^2.6 = 6\pi$. Khối cầu bên trong khối trụ có bán kính là $R = 1 \Rightarrow V_C = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.$

Khối nón bên trong khối trụ có bán kính đáy là R = 1 và chiều cao h –2R =4. Suy ra thể tích khối nón là

$V_N = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.1^2.4 = \frac{4}{3}\pi.$ Do đó, thể tích lượng nước còn lại bên trong khối trụ là

$V_0 = V - (V_C + V_N) = 6\pi - 2.\frac{4\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$. Vậy tỉ số cần tính là $T = \frac{V_0}{V} = \frac{10\pi}{3} : 6\pi = \frac{5}{9}$.

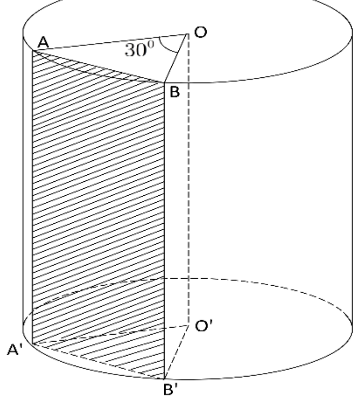
Câu 25. Một khối trụ có chiều cao bằng $20\,(cm)$ và có bán kính đáy bằng $10\,(cm)$. Người ta kẻ hai bán kính đáy OA và $O'B'$ lần lượt nằm trên hai đáy, sao cho chúng hợp với nhau một góc bằng 30^0. Cắt mặt trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với trục của khối trụ đó. Diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng cắt hình trụ trên là?

A. $200\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(cm^2)$. **B.** $200\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(cm^3)$. **C.** $200\,(cm^2)$. **D.** $30cm^2$.

Lời giải

Đáp án A

Từ một đáy của khối trụ, ta vẽ hai bán kính OA, OB sao cho $\widehat{AOB} = 30^0$. Gọi A', O', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, O, B trên mặt đáy còn lại. Ta có: OA và $O'B'$ tạo với nhau một góc 30^0. Thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$ có:



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos 30^0 = 100\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow AB = 10\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(cm).$$

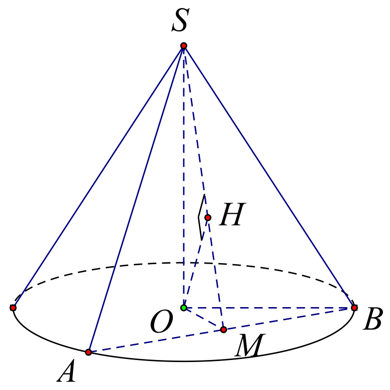
Mặt khác, ta có: $AA' = BB' = OO' = 20\,(cm)$.

Câu 26. Cho hình nón có chiều cao bằng 4. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cách tâm O của mặt đáy hình nón một khoảng bằng $\frac{12}{5}$ cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông cân. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** $136\sqrt{3}\pi$. **C.** $\frac{136\pi}{3}$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn C



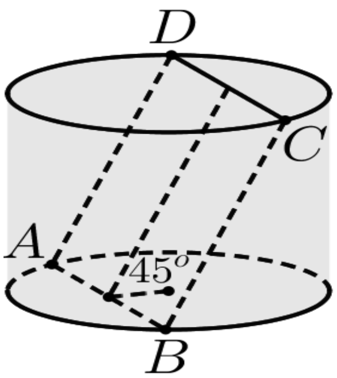
Giả sử thiết diện là tam giác vuông cân SAB có cạnh bằng l như hình vẽ.

Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OM = \sqrt{\frac{SO^2.OH^2}{SO^2 - OH^2}} = 3 \Rightarrow SM = MB = 5$.

$\Rightarrow r = \sqrt{OM^2 + MB^2} = \sqrt{34}$.

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.34.4 = \frac{136\pi}{3}$.

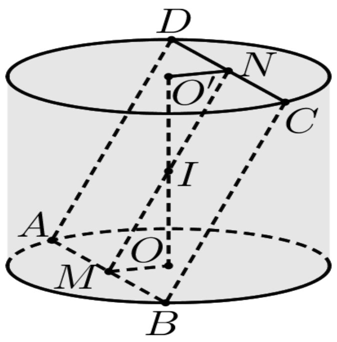
Câu 27. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc $45°$ như hình vẽ. Thể tích khối trụ đã cho bằng



A. $\frac{\pi a^3}{16}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{16}$. **C.** $\frac{3\pi a^3}{16}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $IM=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}.$

Tam giác IOM vuông cân và có $IM=\dfrac{a}{2},$ suy ra $IO=OM=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}.$

Tam giác cân $OAB,$ có $\begin{cases} OM=\dfrac{a}{2\sqrt{2}} \\ AB=a \end{cases} \Rightarrow OA=OB=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$

Hình trụ đã cho có $\begin{cases} h=OO'=2IO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ r=OA=\dfrac{a\sqrt{6}}{4} \end{cases} \Rightarrow V=\pi r^2 h=\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}.$ **Chọn** **D.**

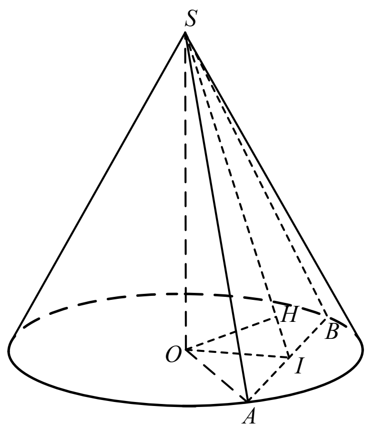
Câu 28. Cho hình nón có chiều cao $h=20$, bán kính đáy $r=25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S=500.$ **B.** $S=400.$ **C.** $S=300.$ **D.** $S=406.$

Lời giải

Chọn A

Giả sử hình nón đỉnh S, tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là ΔSAB.



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta chứng minh được $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH=12$.

Xét tam giác vuông SOI có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{1}{OH^2}-\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{1}{12^2}-\dfrac{1}{20^2}=\dfrac{1}{225}$.

$\Rightarrow OI^2=225 \Rightarrow OI=15$.

Xét tam giác vuông SOI có $SI=\sqrt{OS^2+OI^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$.

Xét tam giác vuông OIA có $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20 \Rightarrow AB=40$.

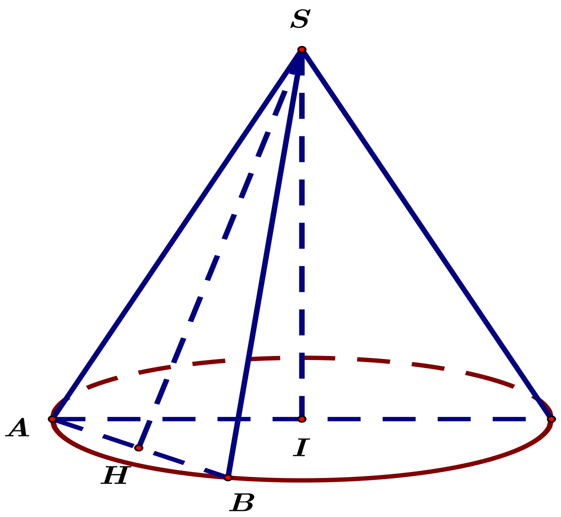
Ta có $S=S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.SI=\dfrac{1}{2}.40.25=500$.

Câu 29. Cho hình nón có chiều cao bằng 6. Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là tam giác cân tại đỉnh của hình nón sao cho góc ở đáy của tam giác bằng $30°$ và có chu vi bằng $12\left(2+\sqrt{3}\right)$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. 216π. **B.** 108π. **C.** $108\sqrt{3}\pi$. **D.** $216\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Mặt phẳng qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác cân SAB.

Theo bài ra ta có $2SA+AB=12\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có : $AB=2BH=2SA.\cos 30°=SA.\sqrt{3}$.

$\Rightarrow 2SA+SA\sqrt{3}=12\left(2+\sqrt{3}\right)\Rightarrow SA=12$.

Gọi I là tâm của đáy hình nón, áp dụng định lí Py-ta-go cho tam giác ΔSAI ta có :

$SI^2+AI^2=SA^2\Rightarrow AI=\sqrt{SA^2-SI^2}=6\sqrt{3}$.

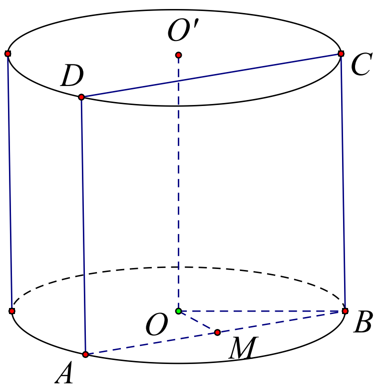
Gọi V là thể tích của khối nón ta có : $V=\dfrac{1}{3}\pi.AI^2.SI=\dfrac{1}{3}\pi.108.6=216\pi$.

Câu 30. Một hình trụ có chiều cao bằng 10 và bán kính mặt đáy bằng 5. Một mặt phẳng song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng 3 cắt hình trụ theo thiết diện có diện tích bằng

A. 40π. **B.** 80. **C.** 100π. **D.** 50.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện là hình chữ nhật và giả sử là $ABCD$ như hình vẽ.

Gọi M là trung điểm AB. Ta có: $\begin{cases} AD = OO' = 10 \\ OB = 5, OM = 3 \end{cases} \Rightarrow MB = \sqrt{OB^2 - OM^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$.

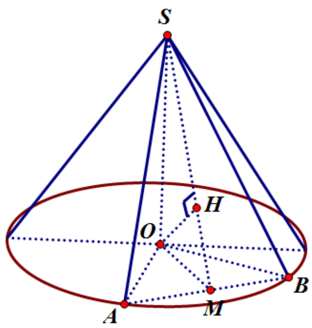
$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện bằng: $S_{ABCD} = AD.AB = 10.8 = 80 \Rightarrow$ Chọn **B.**

Câu 31. Cho hình nón đỉnh S, tâm của đáy là O và bán kính đường tròn đáy bằng 5. Mặt phẳng (P) qua đỉnh hình nón và cắt đường tròn đáy theo dây cung có độ dài bằng 6. Biết rằng khoảng cách từ O đến (P) bằng $2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón trên.

A. $50\pi\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{50\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $100\pi\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{100\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử thiết diện tạo bởi (P) và hình nón là tam giác SAB.

Gọi M là trung đoạn AB, khi đó $r = OA = 5$, $AB = 6 \Rightarrow OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = 4$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SM. Suy ra OH vuông góc với (P) nên $OH = 2\sqrt{3}$.

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{48} \Rightarrow SO = 4\sqrt{3}$.

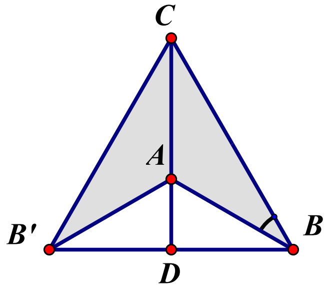
Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h = \dfrac{1}{3}\pi.5^2.4\sqrt{3} = \dfrac{100\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32. Cho tam giác ABC cân tại A, biết $AB = 2a$ và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cho tam giác ABC (kể cả điểm trong) quay xung quanh đường thẳng AC được khối tròn xoay. Khi đó thể tích khối tròn xoay bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** $6\pi a^3$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC.

V_1 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông CDB khi quay quanh trục CD.

V_2 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông ADB khi quay quanh trục AD.

Khi đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 - V_2$.

Tam giác ABC cân tại A và $AB = 2a = AC$, $\widehat{ABC} = 30^o \Rightarrow \widehat{CAB} = 120^o$ và $\widehat{DAB} = 60^o$.

Do đó $DB = AB.\sin 60^o = a\sqrt{3}$.

Vậy ta có

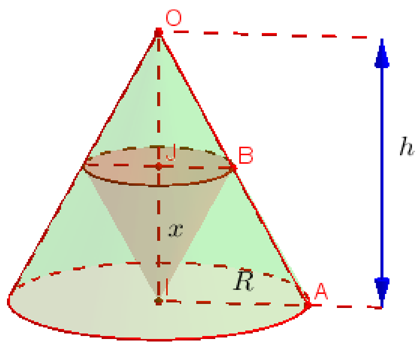
$$V = \frac{1}{3}\pi.DB^2.DC - \frac{1}{3}\pi.DB^2.DA = \frac{1}{3}\pi.DB^2\left(DC - DA\right) = \frac{1}{3}\pi.DB^2.AC = \frac{1}{3}\pi.\left(a\sqrt{3}\right)^2.2a = 2\pi a^3$$

Câu 33. Cho hình nón có chiều cao h. Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h.

A. $x = \frac{h}{2}$. **B.** $x = \frac{h}{3}$. **C.** $x = \frac{2h}{3}$. **D.** $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi r, R theo thứ tự là bán kính đáy hình nón và khối trụ cần tìm. O là đỉnh của hình nón, I là tâm của đáy hình nón, J là tâm của đáy hình trụ và khác I. OA là một đường sinh của hình nón, B là điểm chung của OA với khối trụ. Ta có: $\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-x)$.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi x R^2 = \pi x \frac{R^2}{h^2}(h-x)^2$

Xét hàm số $V(x) = \pi x \frac{R^2}{h^2}(h-x)^2$, $0 < x < h$.

Ta có $V'(x) = \pi \frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$ hay $x = h$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^2 h}{81}$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $x = \frac{h}{3}$; $V_{\max} = \frac{4\pi R^2 h}{27}$.

Câu 34. Cho hình nón có đường kính đáy bằng 6. Một mặt phẳng đi qua trục của của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác có diện tích bằng 12. Diện tích xung quanh hình nón này bằng:

A. 10π. **B.** 12π. **C.** 15π. **D.** 30π.

Lời giải

Chọn C

$S_{\Delta}=\frac{1}{2}.d.h=12\Leftrightarrow h=\frac{24}{d}=\frac{24}{6}=4\Rightarrow l=\sqrt{h^2+r^2}=5$

$S_{xq}=\pi.r.l=15\pi$

Câu 35. Cho hình nón có đường kính đáy bằng 6. Một mặt phẳng đi qua trục của của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác có diện tích bằng 12. Diện tích xung quanh hình nón này bằng:

A. 10π. **B.** 12π. **C.** 15π. **D.** 30π.

Lời giải

Chọn C

$S_{\Delta}=\frac{1}{2}.d.h=12\Leftrightarrow h=\frac{24}{d}=\frac{24}{6}=4\Rightarrow l=\sqrt{h^2+r^2}=5$

$S_{xq}=\pi.r.l=15\pi$

Câu 36. Một hình nón có thiết diện tạo bởi mặt phẳng qua trục của hình nón là một tam giác vuông cân với cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối nón là

A. $V=\frac{2\pi a^3}{3}$. **B.** $V=2\pi\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=\frac{2\pi\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V=2\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có tam giác SMN cân tại S. Giả thiết tam giác, suy ra tam giác SMN vuông cân tại S. Thiết diện qua trục nên tâm O đường tròn đáy thuộc cạnh huyền MN.

Vậy hình nón có bán kính đáy $R=\frac{1}{2}MN=a\sqrt{2}$, đường cao $h=\frac{1}{2}MN=a\sqrt{2}$.

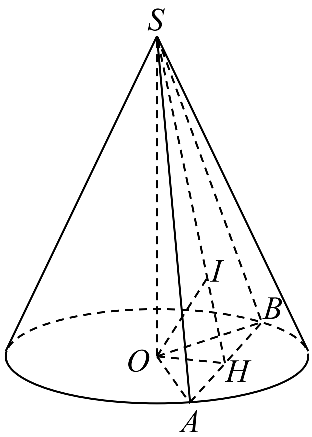
Thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{2\pi\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 37. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 2. Mặt phẳng (P) qua đỉnh hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 2. Khoảng cách từ tâm đáy tới mặt phẳng (P) bằng.

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



(P) qua đỉnh S cắt đáy theo dây cung $AB\Rightarrow AB=2$.

$\Rightarrow OA = OB = AB = 2 \Rightarrow \Delta OAB$ đều.

Gọi H là trung điểm AB, hạ $OI \perp SH$.

$OI \perp SH$ theo cách dựng, $OI \perp AB$ vì $AB \perp (SOI) \Rightarrow OI \perp (SAB)$

$\Rightarrow d(O,(P)) = d(O,(SAB)) = OI$.

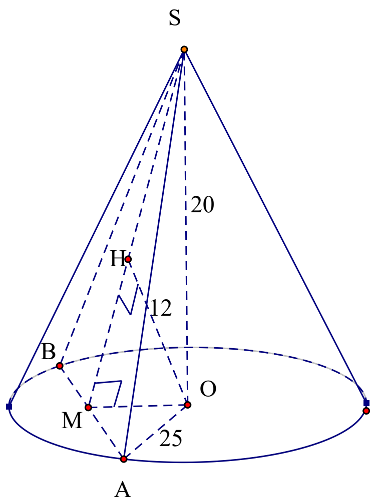
Ta có: $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12} \Rightarrow OI^2 = \dfrac{12}{7} \Rightarrow OI = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

Câu 38. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20\,\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\,\text{cm}$. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh của hình nón cách tâm của đáy $12\,\text{cm}$. Tính diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $S = 400\ (\text{cm}^2)$. **B.** $S = 406\ (\text{cm}^2)$. **C.** $S = 300\ (\text{cm}^2)$. **D.** $S = 500\ (\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $d(O,(\alpha)) = OH = 12$.

Diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mp (α) là: $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}SM.AB = SM.MA$.

Trong tam giác SMO vuông tại O: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{12^2} = \dfrac{1}{20^2} + \dfrac{1}{OM^2} \Leftrightarrow OM = 15$.

Suy ra $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

Mặt khác ta có: M là trung điểm của AB và $OM \perp AB$.

Xét tam giác MOA vuông tại M: $MA = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$.

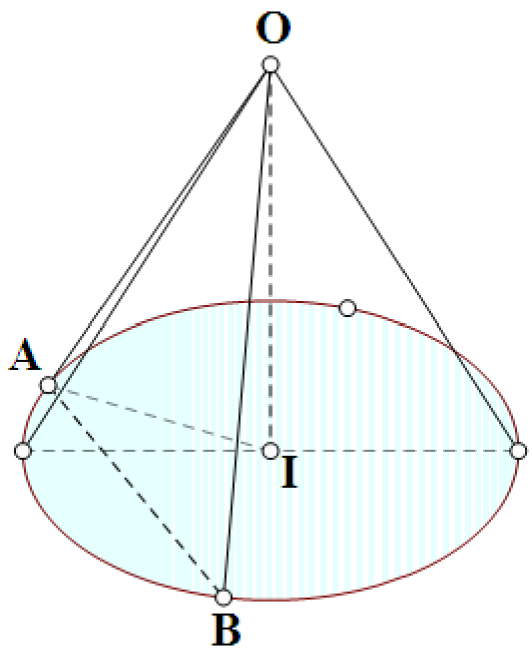
Vậy $S_{\Delta SAB} = SM.MA = 25.20 = 500\ (\text{cm}^2)$.

Câu 39. Cho hìnhân ón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh O của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác OAB có diện tích bằng $9\sqrt{2}$ và góc $\widehat{AOB} = 45°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là tâm đường tròn đáy hình nón, thiết diện là tam giác cân OAB.

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin 45^\circ \Leftrightarrow 9\sqrt{2}=\frac{1}{2}OA^2.\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow OA^2=36.$$

Do đó $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{36-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=4$.

Khối nón cần tìm có bán kính đáy $IA=4$, chiều cao $OI=2\sqrt{5}$ nên có thể tích là:

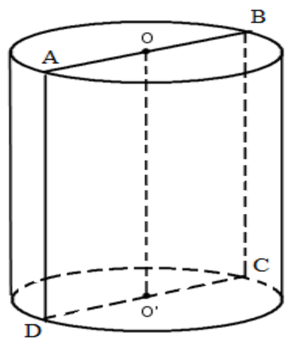
$$V=\frac{1}{3}.S_d.h=\frac{1}{3}\pi.IA^2.OI=\frac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{5}=\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 40. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng đi qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $6\pi a^3$. **D.** $8\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Hình trụ có bán kính đáy bằng a thì có đường kính đáy bằng $2a$.

Vì vậy, khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng đi qua trục thì thiết diện thu được là một hình vuông có cạnh bằng $2a$.

Suy ra đường sinh cũng là chiều cao của hình trụ $l=h=OO'=2a$.

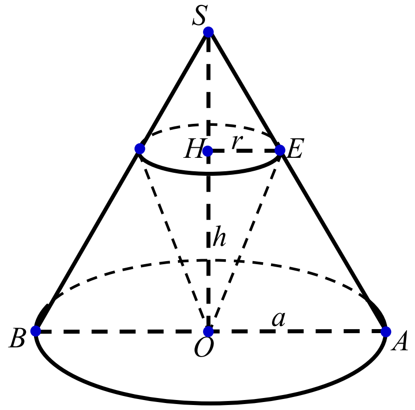
Thể tích của khối trụ đã cho: $V=\pi r^2 h=\pi.a^2.2a=2\pi a^3$.

Câu 41. Cho hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O, đỉnh S, thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh $2a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn thẳng SO. Mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh O và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết tam giác SAB đều cạnh $2a \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$.

Đặt $OH = h\left(0 < h < a\sqrt{3}\right)$.

Ta có: $\frac{SH}{SO} = \frac{HE}{OA} \Rightarrow HE = a - \frac{1}{\sqrt{3}}h \Rightarrow r = a - \frac{1}{\sqrt{3}}h$.

$V_C = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}h^3 - \frac{2}{\sqrt{3}}ah^2 + a^2h\right) = \frac{1}{3}\pi.f\left(h\right)$.

$f'\left(h\right) = h^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}ah + a^2 \Rightarrow f'\left(h\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = a\sqrt{3}\left(loai\right) \\ h = \frac{a\sqrt{3}}{3}\left(tm\right) \end{array}\right.$.

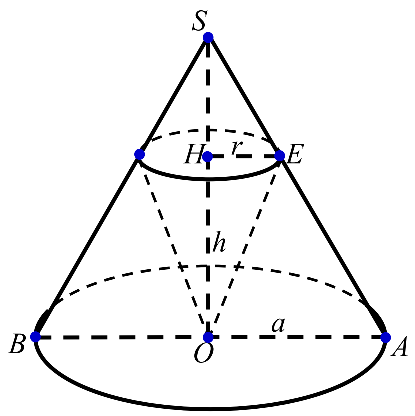
Vậy $MaxV_C = \frac{1}{3}\pi f\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$.

Câu 42. Cho hình nón $\left(N\right)$ có đáy là hình tròn tâm O, đỉnh S, thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh $2a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn thẳng SO. Mặt phẳng $\left(P\right)$ vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn $\left(C\right)$.Khối nón có đỉnh O và đáy là hình tròn $\left(C\right)$ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết tam giác SAB đều cạnh $2a \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$.

Đặt $OH = h\left(0 < h < a\sqrt{3}\right)$.

Ta có: $\dfrac{SH}{SO} = \dfrac{HE}{OA} \Rightarrow HE = a - \dfrac{1}{\sqrt{3}}h \Rightarrow r = a - \dfrac{1}{\sqrt{3}}h$.

$V_C = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{3}h^3 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}ah^2 + a^2h\right) = \dfrac{1}{3}\pi.f\left(h\right)$.

$f'\left(h\right) = h^2 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}ah + a^2 \Rightarrow f'\left(h\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = a\sqrt{3}\left(loai\right) \\ h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\left(tm\right) \end{array}\right.$.

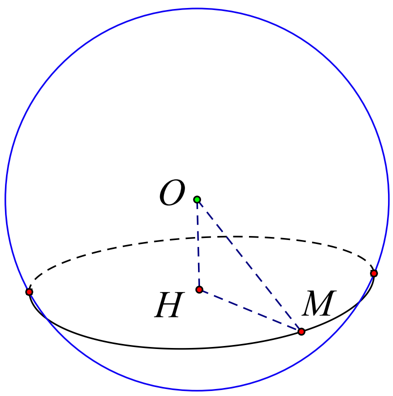
Vậy $MaxV_C = \dfrac{1}{3}\pi f\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$.

Câu 43. Một khối cầu có đường kính bằng $10\left(\text{cm}\right)$. Người ta dùng một mặt phẳng cách tâm khối cầu $3\left(\text{cm}\right)$ để cắt khối cầu thành hai phần. Diện tích của thiết diện bằng

A. $16\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $16\pi\left(\text{cm}\right)$. **C.** $16\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $16\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn D

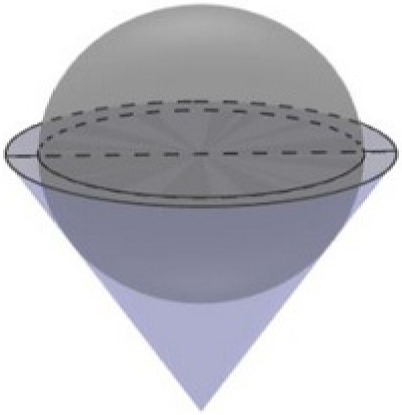


Theo đề bài ta có: $2R = 10\left(\text{cm}\right) \Rightarrow R = OM = 5\left(\text{cm}\right), OH = 3\left(\text{cm}\right)$

$\Rightarrow r = HM = \sqrt{OM^2 - HM^2} = 4\left(\text{cm}\right)$.

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện bằng: $S = \pi r^2 = \pi.4^2 = 16\pi\left(\text{cm}^2\right) \Rightarrow$ Chọn **D.**

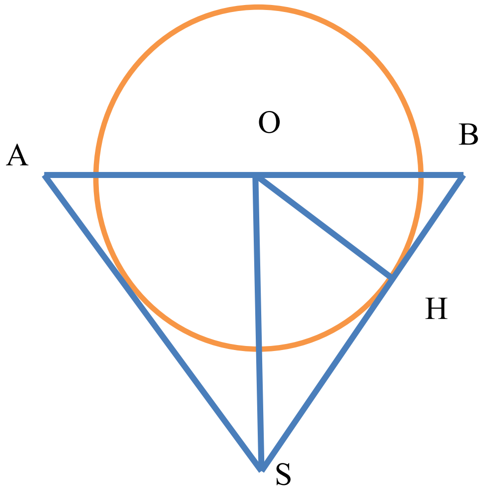
Câu 44. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\,\text{dm}^3$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước (hình bên). Thể tích V của nước còn lại trong bình bằng



A. $24\pi\,\text{dm}^3$.   **B.** $6\pi\,\text{dm}^3$.   **C.** $54\pi\,\text{dm}^3$ **D.** $12\pi\,\text{dm}^3$.

Lời giải

Chọn B



Đường kính của khối cầu bằng chiều cao của bình nước nên $OS = 2OH$.

Ta có thể tích nước tràn ra ngoài là thể tích của nửa quả cầu chìm trong bình nước:

$$18\pi = \frac{V_C}{2} = \frac{2\pi OH^3}{3} \Leftrightarrow OH = 3.$$

Lại có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OB^2 = 12.$

Thể tích bình nước (thể tích nước ban đầu): $V_n = \frac{\pi.OS.OB^2}{3} = 24\pi\,\left(\text{dm}^3\right)$.

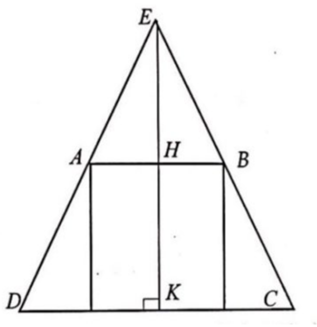
Thể tích nước còn lại là: $24\pi - 18\pi = 6\pi\,\left(\text{dm}^3\right)$.

Câu 45. Cho một hình thang cân $ABCD$ có các cạnh đáy $AB = 2a$,$CD = 4a$, cạnh bên $AD = BC = 3a$. Hãy tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình thang đó khi quay quanh trục đối xứng của nó.

A. $\frac{14a^3\sqrt{2}}{3}$.   **B.** $\frac{56a^3\sqrt{2}}{3}$.   **C.** $\frac{14a^3}{\sqrt{3}}$.   **D.** $\frac{28a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi AD và BC cắt nhau tại E. $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên AB là đường trung bình $\Delta EDC \Rightarrow ED = 2AD = 6a$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm AB và CD thì ta có EK vuông góc với CD và HK là trục đối xứng của $ABCD$.

$EK = \sqrt{ED^2 - DK^2} = 4a\sqrt{2}$; $EH = \dfrac{EK}{2} = 2a\sqrt{2}$

Khối tròn xoay sinh bởi hình thang $ABCD$ khi quay quanh trục của nó chính là phần thể tích nằm giữa hai khối nón:

+Khối nón 1: Có đáy là hình tròn tâm K, bán kính $KD = 2a$, đường cao EK=$4a\sqrt{2}$

+Khối nón 2: Có đáy là hình tròn tâm H, bán kính $HA = a$, đường cao $EH = 2a\sqrt{2}$

Do đó thể tích cần tìm là

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}.(2a)^2.\pi.4a\sqrt{2} - \frac{1}{3}.a^2.\pi.2a\sqrt{2} = \frac{14a^3\sqrt{2}}{3}.$$

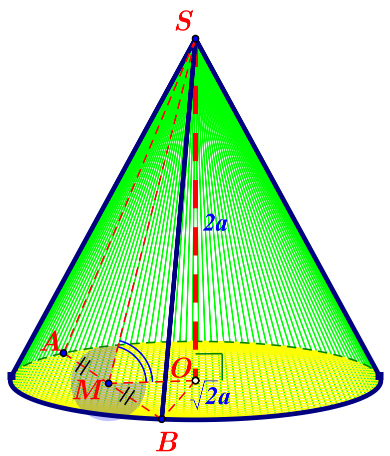
Câu 46. Một hình nón có chiều cao $2a$, bán kính đáy $a\sqrt{2}$. Một phẳng phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt đáy góc 60°. Tính diện tích thiết diện.

A. $\dfrac{5\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Kí hiệu như hình vẽ



Dễ thấy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy là góc $\widehat{SMO} = 60^0$.

Xét tam giác vuông SOM có $OM = 2a.\cot 60^\circ = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$; $SM = \dfrac{2a}{\sin 60^\circ} = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$;

Lại có $AB = 2.MB = 2\sqrt{OB^2 - OM^2} = 2\sqrt{2a^2 - \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$

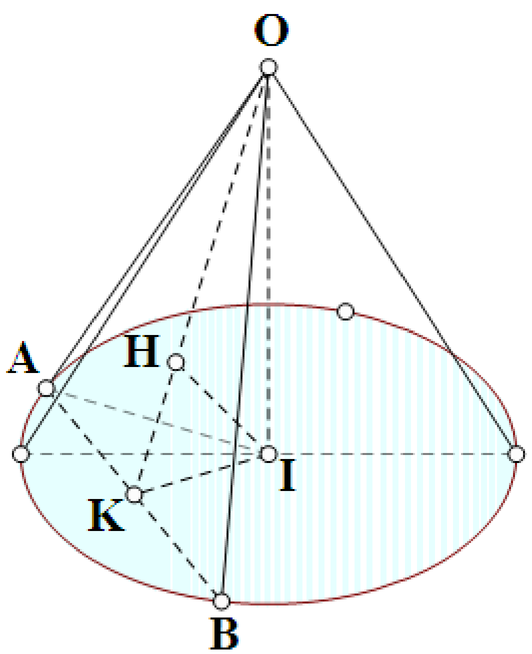
Vậy $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}SM.AB=\frac{1}{2}.\frac{4a}{\sqrt{3}}.\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.

Câu 47. Cho hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng 4. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$, đồng thời khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy hình nón đến (α) bằng $\frac{2\sqrt{35}}{3\sqrt{3}}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là đỉnh hình nón, I là tâm đường tròn đáy hình nón, thiết diện là tam giác đều OAB.
Gọi K là trung điểm của AB khi đó $IK\perp AB$.

Kẻ $IH\perp OK$ khi đó khoảng cách từ I đến (OAB) chính là IH hay $IH=\frac{2\sqrt{35}}{3\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta OAB}=\frac{OA^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow OA^2=\frac{4S_{\Delta OAB}}{\sqrt{3}}=\frac{4.9\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=36\Rightarrow OA=6$.

Gọi K là trung điểm của AB khi đó: $IK=\sqrt{IB^2-KB^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

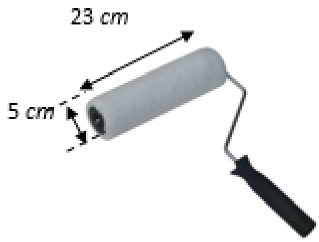
Tam giác OIK vuông tại I và IH là đường cao nên: $\frac{1}{IO^2}=\frac{1}{IH^2}-\frac{1}{IK^2}=\frac{27}{140}-\frac{1}{7}=\frac{1}{20}\Leftrightarrow OI^2=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Khối nón cần tìm có bán kính đáy $IA=4$, chiều cao $OI=2\sqrt{5}$ nên có thể tích là:

$V=\frac{1}{3}.S_d.h=\frac{1}{3}\pi.IA^2.OI=\frac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{5}=\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$.

Câu 48. Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là $5\,cm$, chiều dài lăn là $23\,cm$ (hình bên). Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là

A. $862,5\pi\,cm^2$. **B.** $5230\pi\,cm^2$. **C.** $2300\pi\,cm^2$. **D.** $1150\pi\,cm^2$.



Lời giải

Chọn D

Gọi r, l lần lượt là bán kính và độ dài đường sinh của hình trụ.

Theo giả thiết $2r = 5\,cm$, $l = 23\,cm$.

Ta có diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rl = 5.23\pi = 115\pi\,cm^2$.

Sau khi lăn trọn 1 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích bằng diện tích xung quanh của hình trụ.

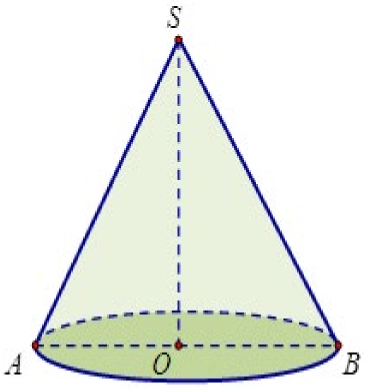
Vậy sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là: $10.S_{xq} = 1150\,\pi\,cm^2$.

Câu 49. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $8\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{8\sqrt{3}\pi a^3.}{3}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = 5\pi a^3$. **D.** $V = 2\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO.$

Ta có $\widehat{ASB} = 60° \Rightarrow \widehat{ASO} = 30° \Rightarrow \tan 30° = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO = OA\sqrt{3}.$

Lại có $S_{xq} = \pi Rl = \pi.OA.SA = \pi.OA\sqrt{OA^2 + SO^2} = 8\pi a^2$

$\Rightarrow OA\sqrt{OA^2 + 3OA^2} = 8a^2 \Rightarrow 2OA^2 = 8a^2$

$\Rightarrow OA = 2a \Rightarrow SO = 2\sqrt{3}a \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.4a^2.2\sqrt{3}a = \frac{8\sqrt{3}\pi a^3.}{3}$

Câu 50. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chiều cao $OO' = a\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên 2 đáy (O), (O’) sao cho góc giữa OO’ và AB bằng 30^0. Khoảng cách giữa AB và OO’ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Trên (O) lấy điểm C sao cho $BC//OO'$. Khi đó: $\widehat{ABC}=30^0$ và

$$BC=OO'=a\sqrt{3}.$$

Ta có: $OO'\perp(\text{O})\Rightarrow BC\perp(\text{O})\Rightarrow BC\perp AC\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại C.

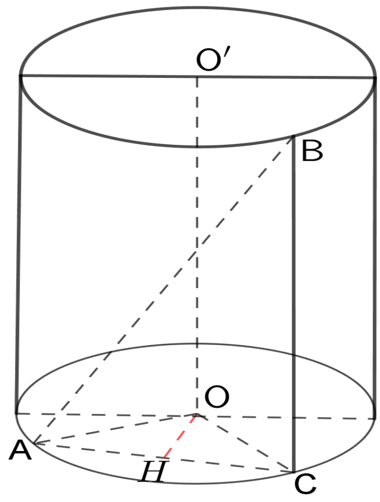
Suy ra: $AC=BC.\tan B=a\sqrt{3}.\tan 30^0=a$.

Ta có: $OO'//\text{BC}\Rightarrow \text{OO}'//(\text{ABC})\Rightarrow \text{d}\left(OO';AB\right)=d\left(O;(ABC)\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AC.

Ta có: $\left.\begin{matrix} OH\perp AC \\ OH\perp BC \end{matrix}\right\}\Rightarrow OH\perp\left(ABC\right)\Rightarrow OH=d\left(O;(ABC)\right)$

Ta có: ΔOAC đều (vì $OA=OC=AC=a$) $\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

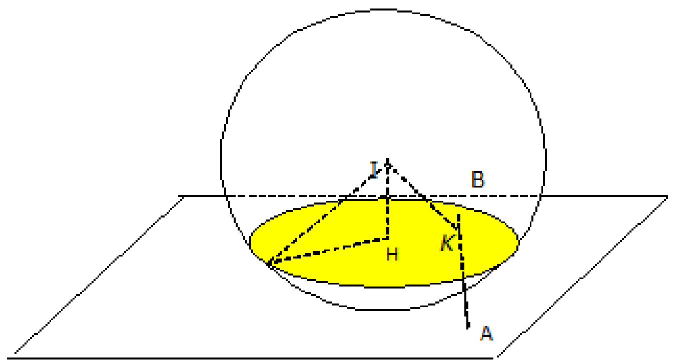


Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A\left(3;-2;6\right),B\left(0;1;0\right)$ và mặt cầu $\left(S\right):\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-3\right)^2=25$. Mặt phẳng $\left(P\right):ax+by+cz-2=0$ đi qua A,B và cắt $\left(S\right)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=3$. **D.** $T=5$.

Lời giải

Chọn C



$\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;2;3\right);R=5;\overrightarrow{AB}\left(-3;3;-6\right)$.

Vì B nằm trong mặt cầu nên gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên AB thì K cũng nằm trong mặt cầu. Do đó $\left(P\right)$ luôn cắt $\left(S\right)$ theo giao tuyến là một đường tròn bán kính r.

AB có phương trình: $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ nên $K\left(t;1-t;2t\right)\Rightarrow\overrightarrow{IK}=\left(t-1;-t-1;2t-3\right)$.

Vì $IK\perp AB$ suy ra $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow t=1$. Do đó $K\left(1;0;2\right)$.

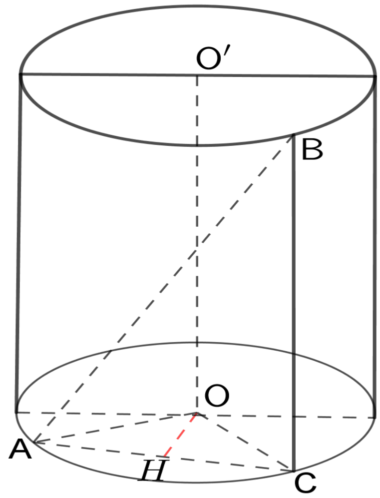
Ta lại có: $r^2=25-IH^2$ nên để r nhỏ nhất thì IH lớn nhất, mà $IH\le IK$ nên mp $\left(P\right)$ cần tìm nhận $\overrightarrow{IK}\left(0;-2;-1\right)$ làm VTPT. Vì $IK\perp AB$ nên $AB\subset\left(P\right)$. Vậy phương trình $\left(P\right)$: $2y+z-2=0\Rightarrow T=3$.

Câu 52. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chiều cao $OO'=a\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên 2 đáy (O), (O') sao cho góc giữa OO' và AB bằng 30^0. Khoảng cách giữa AB và OO' bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Trên (O) lấy điểm C sao cho $BC//OO'$. Khi đó: $\widehat{ABC}=30^0$ và $BC=OO'=a\sqrt{3}$.

Ta có: $OO'\perp(O)\Rightarrow BC\perp(O)\Rightarrow BC\perp AC\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại C.

Suy ra: $AC=BC.\tan B=a\sqrt{3}.\tan 30^0=a$.

Ta có: $OO'//BC\Rightarrow OO'//(ABC)\Rightarrow d\left(OO';AB\right)=d\left(O;(ABC)\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AC.

Ta có: $\left.\begin{matrix}OH\perp AC\\ OH\perp BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow OH\perp\left(ABC\right)\Rightarrow OH=d\left(O;(ABC)\right)$

Ta có: ΔOAC đều (vì $OA=OC=AC=a$) $\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 53. Một tấm đề can hình chữ nhật được cuộn tròn lại theo chiều dài tạo thành một khối trụ có đường kính 50cm. Người ta trải ra 250 vòng để cắt chữ và in tranh cổ động, phần còn lại một khối trụ có đường kính 45cm. Hỏi phần đã trải ra dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. $373m$. **B.** $187m$. **C.** $384m$. **D.** $192m$.

Lời giải

Chọn A

Bề dày của tấm đề can là $a=\frac{50-45}{2.250}=0,01(\text{cm})$

Gọi d là chiều dài đã trải và h là chiều rộng của tấm đề can

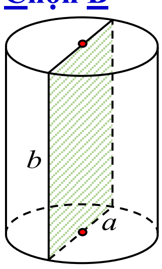
Khi đó ta có $d.h.a=\pi\left(\frac{50}{2}\right)^2h-\pi\left(\frac{45}{2}\right)^2h\Rightarrow d=\frac{\pi\left(50^2-45^2\right)}{4a}\approx 37306(\text{cm})\approx 373(\text{m})$

Câu 54. Hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi của thiết diện qua trục bằng $10a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng.

A. πa^3. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $5\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện qua trục là 1 hình chữ nhật.

Giả sử chiều cao của khối trụ là b.

Theo đề ra $2\left(2a+b\right)=10a\Rightarrow b=3a.$

Thể tích khối trụ là $V=S.h=\pi a^2.3a=3\pi a^3$.

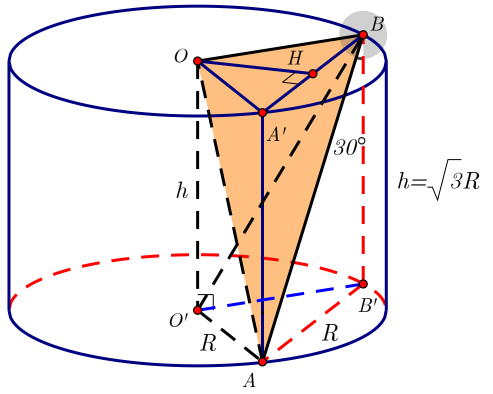
Câu 55. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao $h=\sqrt{3}R$. Đoạn thẳng AB có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy hình trụ sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $\alpha=30°$. Thể tích tứ diện $ABOO'$ là:

A. $\frac{R^3}{2}$. **B.** $\frac{3R^3}{2}$. **C.** $\frac{3R^3}{4}$. **D.** $\frac{R^3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có hình vẽ như sau:



Ta có: $OO' \parallel BB'$ nên $\left(\widehat{AB,OO'}\right)=\left(\widehat{AB,BB'}\right)=\widehat{ABB'}=30°$.

Đặt $V=V_{OA'B.O'AB'}$.

Ta có: $V_{OA'B.O'AB'}=V_{B.O'AB'}+V_{B.OA'AO}=\frac{1}{3}V+V_{B.OA'AO} \Rightarrow V_{B.OA'AO}=\frac{2}{3}V$.

Mà $\frac{d\left(A',(OBA)\right)}{d\left(O',(OBA)\right)}=\frac{IA'}{IO'}=1$ nên $V_{A'.OAB}=V_{O'OAB}=\frac{1}{3}V$.

Ta có $OB'=R$, $AB'=R$ nên tam giác $O'AB'$ đều nên có diện tích bằng $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

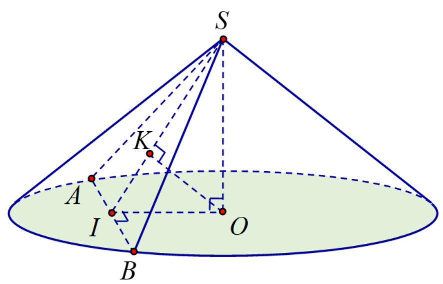
Vậy ta có $V_{O'OAB}=\frac{1}{3}V=\frac{1}{3}\sqrt{3}R\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{R^3}{4}$.

Câu 56. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông có diện tích bằng 4. Góc giữa đường cao của hình nón và mặt phẳng thiết diện bằng $30°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\sqrt{5}\pi$. **B.** $\frac{10\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông SAB.

Gọi $SA=l$ là đường sinh, $OA=R$ là bán kính và $SO=h$ là đường cao của hình nón đã cho.

Gọi I là trung điểm của AB và K là hình chiếu của O lên SI.

Góc giữa đường cao của hình nón và mặt phẳng thiết diện là $\left(\widehat{SO;(SAB)}\right)=\widehat{OSK}=30^\circ$.

ΔSAB vuông cân tại S nên $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}.SA^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}l^2=4\Rightarrow l=2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow AB=l.\sqrt{2}=4\Rightarrow$ Đường trung tuyến $SI=\frac{1}{2}.AB=\frac{1}{2}.4=2$.

ΔSOI vuông tại O: $\cos\widehat{OSI}=\frac{SO}{SI}\Rightarrow SO=SI.\cos30^\circ=2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow h=\sqrt{3}$.

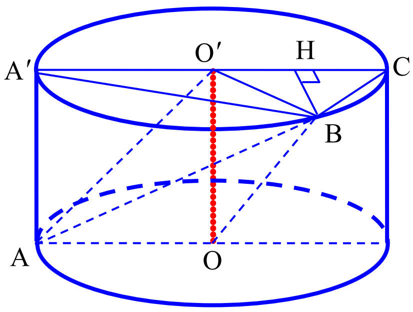
Ta có: $R=\sqrt{l^2-h^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}$.

Vậy thể tích của khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi.5.\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$.

Câu 57. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và $\mathrm{O'}$, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm $\mathrm{O'}$ lấy điểm B sao cho $\mathrm{AB}=2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $\mathrm{OO'AB}$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{18}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{15}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Lời giải



Chọn C

Kẻ đường sinh $\mathrm{AA'}$. Gọi C là điểm đối xứng với $\mathrm{A'}$ qua $\mathrm{O'}$ và H là hình chiếu của B trên đường thẳng $\mathrm{A'C}$.

Vì $\mathrm{BH}\perp\mathrm{A'C}$ và $\mathrm{BH}\perp\mathrm{AA'}$ nên $\mathrm{BH}\perp(\mathrm{AA'O'O})\Rightarrow \mathrm{V_{OO'AB}}=\frac{1}{3}\mathrm{S_{OO'A}}.\mathrm{BH}$.

Ta có: $\mathrm{A'B}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{A'A}^2}=\sqrt{3}a\Rightarrow\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{A'D}^2-\mathrm{A'B}^2}=a$

$\Rightarrow$ tam giác $\mathrm{BO'C}$ đều $\Rightarrow\mathrm{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Trong đó $\mathrm{OO'A}$ là tam giác vuông cân có cạnh bên bằng a nên $\mathrm{S_{OO'A}}=\frac{a^2}{2}$

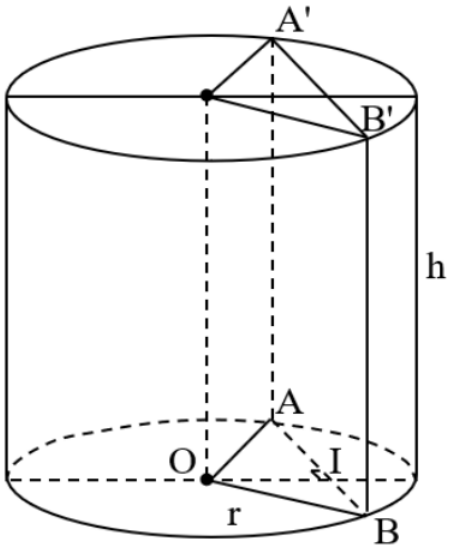
$\Rightarrow\mathrm{V_{OO'AB}}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{\alpha^2}{2}=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. Đáp án **C.**

Câu 58. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây của đường tròn đáy hình trụ và căng một cung 120°. Tính diện tích tứ giác $ABB'A'$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Đáp án: C



Gọi chiều cao của hình trụ là h, bán kính đáy của hình trụ là r.

Ta có: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi r.2r = 4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 1 \Rightarrow h = 2$.

Dây cung AB căng một cung $120°$ nên $\widehat{AOB} = 60°$.

Gọi I là trung điểm AB. Xét tam giác vuông OIB có: $IB = OB\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

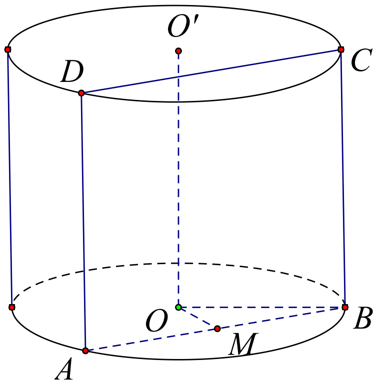
Vậy $S_{ABB'A'} = h.AB = 2\sqrt{3}$ (đvdt).

Câu 59. Một hình trụ có chiều cao bằng 10 và bán kính mặt đáy bằng 5. Một mặt phẳng song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng 2 cắt hình trụ theo thiết diện có diện tích bằng

A. 40π. **B.** 80π. **C.** 100π. **D.** 50π.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện là hình chữ nhật và giả sử là $ABCD$ như hình vẽ.

Gọi M là trung điểm AB. Ta có: $\begin{cases} AD = OO' = 10 \\ OB = 5, OM = 3 \end{cases} \Rightarrow MB = \sqrt{OB^2 - OM^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$.

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện bằng: $S_{ABCD} = AD.AB = 10.8 = 80 \Rightarrow$ Chọn **B.**

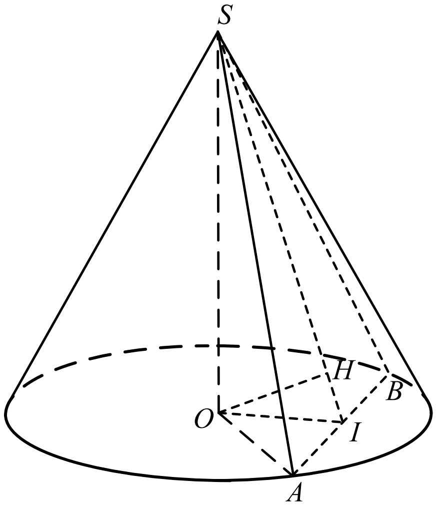
Câu 60. Cho hình nón có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S = 500$. **B.** $S = 400$ **C.** $S = 300$. **D.** $S = 406$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử hình nón đỉnh S, tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là ΔSAB (hình vẽ).



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI \Rightarrow OH \perp SI$.

Ta chứng minh được $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = 12$.

Xét tam giác vuông SOI có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225}$.

$\Rightarrow OI^2 = 225 \Rightarrow OI = 15$.

Xét tam giác vuông SOI có $SI = \sqrt{OS^2 + OI^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

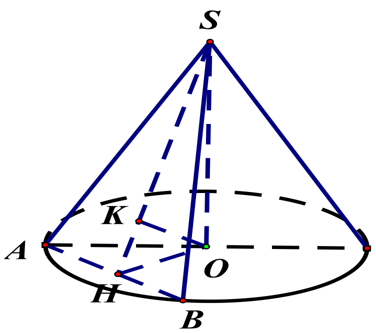
Xét tam giác vuông OIA có $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 40$.

Ta có $S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.SI = \frac{1}{2}.40.25 = 500$.

Câu 61. Cho hình nón có chiều cao bằng 4. Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông và cách tâm của đáy hình nón một khoảng bằng $\frac{12}{5}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{50\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** 132π. **C.** $\frac{144\pi}{3}$. **D.** $\frac{136\pi}{3}$.

Lời giải



Chọn **D.**

Thiết diện của mp và hình nón là tam giác SAB vuông tại S. Gọi H là trung điểm AB, vẽ OK vuông góc với SH tại K.Ta có $OK = d(O;(SAB)) = \frac{12}{5}$. Tam giác SOH vuông tại O có đường cao OK, suy ra $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{25}{144} - \frac{1}{16} = \frac{1}{9}$, suy ra $OH = 3$

Ta có $SH.OK = SO.OH \Rightarrow SH = \dfrac{SO.OH}{OK} = \dfrac{4.3}{\frac{12}{5}} = 5$, suy ra $AH = 5$,

suy ra $R = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

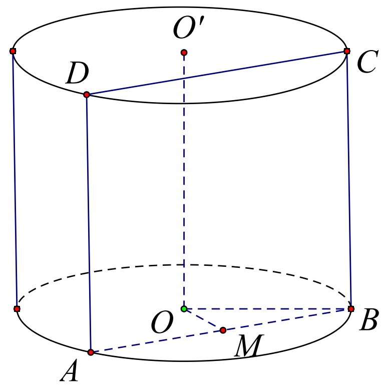
Vậy thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi.34.4 = \dfrac{136\pi}{3}$

Câu 62. Một hình trụ có chiều cao bằng 10 và bán kính mặt đáy bằng 5. Một mặt phẳng song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng 3 cắt hình trụ theo thiết diện có diện tích bằng

A. 40. **B.** 80. **C.** 100. **D.** 50.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện là hình chữ nhật và giả sử là $ABCD$ như hình vẽ.

Gọi M là trung điểm AB. Ta có: $\begin{cases} AD = OO' = 10 \\ OB = 5, OM = 3 \end{cases} \Rightarrow MB = \sqrt{OB^2 - OM^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$.

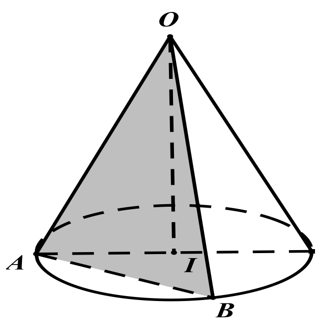
$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện bằng: $S_{ABCD} = AD.AB = 10.8 = 80 \Rightarrow$ Chọn **B.**

Câu 63. Cho hình nón có đường kính đáy bằng 10. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $16\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{25\sqrt{39}\pi}{3}$. **B.** 50π. **C.** $64\sqrt{39}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là đỉnh hình nón, I là tâm đường tròn đáy hình nón, thiết diện là tam giác đều OAB.

$S_{\Delta OAB} = \dfrac{OA^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow OA^2 = \dfrac{4S_{\Delta OAB}}{\sqrt{3}} = \dfrac{4 \cdot 16\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 64$

Do đó $h = IO = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39}$.

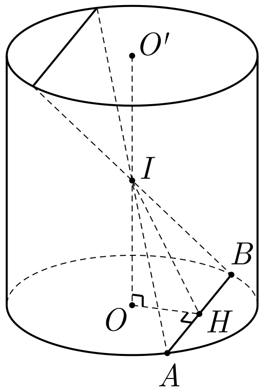
Khối nón cần tìm có bán kính đáy $IA = 5$, chiều cao $h = OI = \sqrt{39}$ nên có thể tích là:

$V=\frac{1}{3}.S_d.h=\frac{1}{3}\pi.IA^2.OI=\frac{1}{3}\pi.25.\sqrt{39}=\frac{25\pi\sqrt{39}}{3}$.

Câu 64. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao bằng $2R$ và bán kính đáy bằng R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc bằng $30°$, (α) cắt hình tròn đáy theo một đoạn thẳng có độ dài l. Tính l theo R.

A. $l=\frac{2R}{3}$. **B.** $l=\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **C.** $l=\frac{4R}{3\sqrt{3}}$. **D.** $l=\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$.

Lời giải



Chọn D

Giả sử (α) cắt hình tròn (O,R) theo dây cung AB.

Gọi I là trung điểm OO', H là trung điểm dây cung AB

Ta có $AB\perp(OIH)$ từ đó suy ra được $(\widehat{OO,(\alpha)})=\widehat{OIH}$

$\Rightarrow\widehat{OIH}=30^\circ$

Ta có: $OH=OI.\tan\widehat{OIH}=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Suy ra $AB=2\sqrt{R^2-\frac{R^2}{3}}=\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

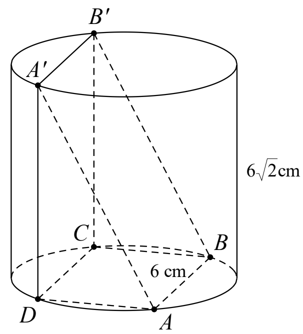
Câu 65. Cho hình trụ có bán kính đáy là 4 cm, một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB=A'B'=6$ cm (hình vẽ). Biết diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng 60 cm^2. Tính chiều cao của hình trụ đã cho.

A. $6\sqrt{2}$ cm. **B.** $4\sqrt{3}$ cm. **C.** $8\sqrt{2}$ cm. **D.** $5\sqrt{3}$ cm.

Lời giải

Dựng đường sinh $B'C$ và $A'D$, ta có tứ giác $A'B'CD$ là hình chữ nhật nên $CD//A'B'$ và $CD=A'B'=6$ cm. Vậy $CD//AB$ và $CD=AB=6$ cm. Do đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và nội tiếp được nên là hình chữ nhật. Từ đó $AB\perp BC$, mặt khác $AB\perp B'C$ nên $AB\perp(BCB')\Rightarrow AB\perp BB'$

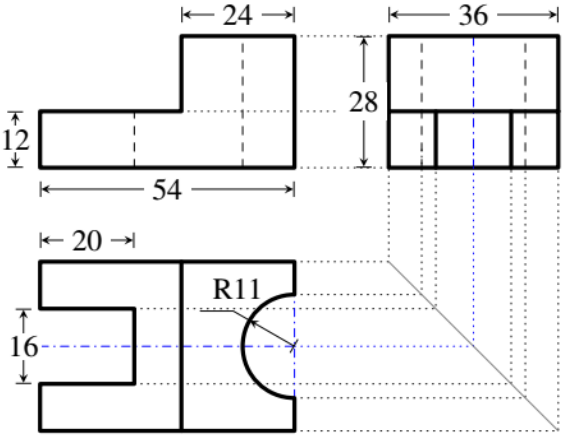
Vậy $ABB'C'$ là hình bình hành có một góc vuông nên là hình chữ nhật. Ta có $S_{ABB'A'}=AB.BB'$ nên $BB'=\frac{60}{6}=10$ cm. Xét tam giác $BB'C$ vuông tại C có $B'C^2=BB'^2-BC^2$ mà $BC^2=AC^2-AB^2=64-36=28$ nên $B'C^2=100-28=72\Rightarrow B'C=6\sqrt{2}$ cm.



Vậy chiều cao hình trụ là $6\sqrt{2}$ cm.

Chọn A

Câu 66. Một khối đồ chơi bằng gỗ có các hình chiếu đứng, hình chiếu cạnh và hình chiếu bằng như hình bên (các kích thước cho như trong hình).

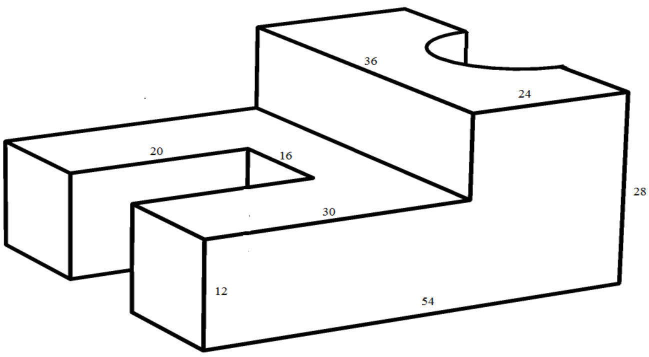


Tính thể tích của khối đồ chơi đó (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

A. 22668. **B.** 27990. **C.** 28750. **D.** 26340.

Lời giải

Chọn B



Từ các hình chiếu ta có khối đồ chơi như hình vẽ.

Thể tích khối đồ chơi:

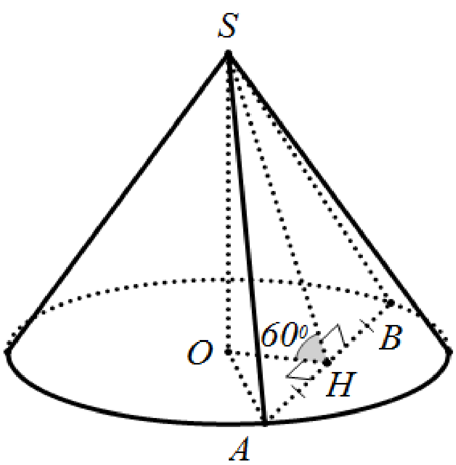
$V = 28.54.36 - 16.20.12 - 30.16.36 - \pi.11^2.14 = 27990{,}14$

Câu 67. Cho hình nón có thiết diện qua đỉnh S tạo với đáy góc 60^0 là tam giác đều cạnh bằng $4cm$. Thể tích của khối nón đó là:

A. $9\pi cm^3$. **B.** $4\sqrt{3}\pi cm^3$. **C.** $3\pi cm^3$. **D.** $7\pi cm^3$.

Lời giải

Chọn D



+Gọi thiết diện qua đỉnh là ΔSAB, tâm đường tròn đáy là O.

+Góc giữa (SAB) và đáy: $\begin{cases}(O)\cap(SAB)=AB\\(O): ke\, OH\perp AB\, tai\, H\,(HA=HB)\\(SAB): SH\perp AB=H\end{cases}$.

Suy ra $\left(\widehat{(SAB);(O)}\right)=\left(\widehat{OH;SH}\right)=\widehat{SHO}=60^0$

+Giả thiết cho ΔSAB đều cạnh $4cm \Rightarrow SH=\dfrac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$+\Delta SOH:\sin 60^0=\dfrac{SO}{SH}\Rightarrow SO=\sin 60^0.SH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2\sqrt{3}=3$;

$+\Delta SOA: OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

$+V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}.SO.\pi(OA)^2=\dfrac{1}{3}.3.\pi\left(\sqrt{7}\right)^2=7\pi\,(cm^3)$

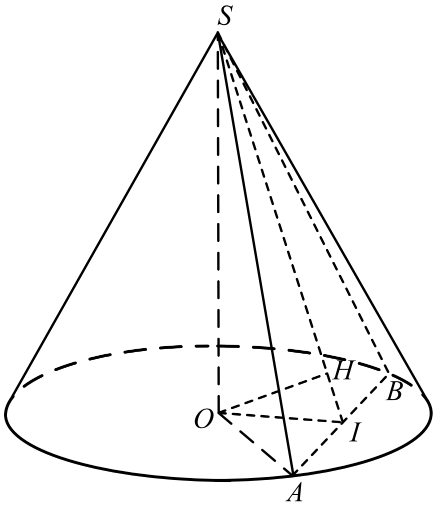
Câu 68. Cho hình nón có chiều cao $h=20$, bán kính đáy $r=25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S=500$. **B.** $S=400$. **C.** $S=300$. **D.** $S=406$

Lời giải

Chọn A

Giả sử hình nón đỉnh S, tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là ΔSAB.



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow OI\perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI\Rightarrow OH\perp SI$.

Ta chứng minh được $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=12$.

Xét tam giác vuông SOI có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{1}{OI^2}\Rightarrow\dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{1}{OH^2}-\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{1}{12^2}-\dfrac{1}{20^2}=\dfrac{1}{225}$.

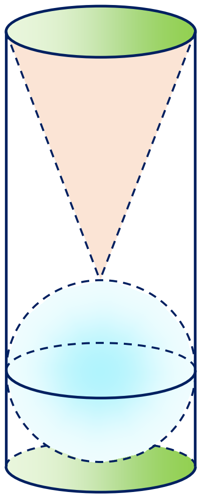
$\Rightarrow OI^2=225\Rightarrow OI=15$.

Xét tam giác vuông SOI có $SI=\sqrt{OS^2+OI^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$.

Xét tam giác vuông OIA có $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20\Rightarrow AB=40$.

Ta có $S=S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.SI=\dfrac{1}{2}.40.25=500$.

Câu 69. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy ; một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).



A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn#A.

Gọi bán kính đường tròn đáy của hình trụ là R.

Theo giả thiết và hình vẽ thì:

- Hình trụ có bán kính đường tròn đáy là R, chiều cao là $6R$.
- Mặt cầu có bán kính là R.
- Hình nón có bán kính đường tròn đáy là R, chiều cao là $4R$.

Thể tích lượng nước ban đầu V bằng thể tích khối trụ nên $V=\pi R^2.6R=6\pi R^3$.

Thể tích lượng nước tràn ra V_1 bằng tổng thể tích khối nón và khối cầu nên $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2.4R+\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\pi R^3}{3}$.

Thể tích lượng nước còn lại trong cốc là $V_2=V-V_1=6\pi R^3-\frac{8\pi R^3}{3}=\frac{10\pi R^3}{3}$.

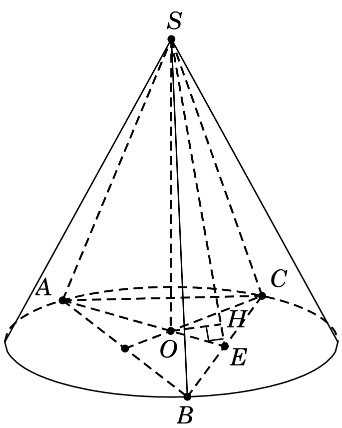
Do đó tỉ số thể tích của lượng nước còn lại và lượng nước ban đầu là: $\frac{V_2}{V}=\frac{\frac{10\pi R^3}{3}}{6\pi R^3}=\frac{5}{9}$.

Câu 70. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC đến một mặt bên là $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{27}$. **D.** $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi E là trung điểm của BC, dựng $OH\perp SE$ tại H.

Chứng minh được $OH\perp(SBC)$ nên suy ra $OH=d[O,(SBC)]=\frac{a}{2}$.

Trong tam giác đều ABC, ta có

$OE=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OA=\frac{2}{3}AE=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOE, ta có

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{SO^2}\Rightarrow\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OE^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow SO=a$.

Vậy thể tích khối nón

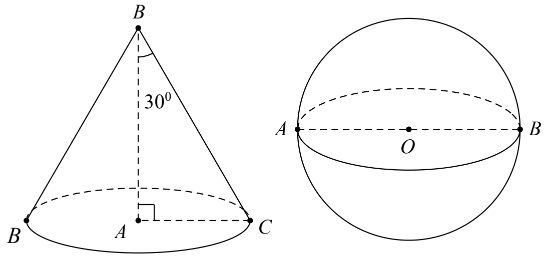
$V=\frac{1}{3}\pi OA^2.SO=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a=\frac{4\pi a^3}{9}$ (đvtt).

Câu 71. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC=2a$ và $\widehat{B}=30^0$. Quay tam giác vuông này quanh trục AB, ta được một hình nón đỉnh B. Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình nón đó và S_2 là diện tích mặt cầu có đường kính AB. Khi đó, tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là?

A. $\frac{S_1}{S_2}=1$. **B.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$AC=BC\sin 30^0=a; AB=BC\cos 30^0=a\sqrt{3}$.

Diện tích toàn phần hình nón là:

$S_1=S_{xq}+S_{day}=\pi Rl+\pi R^2=\pi a.2a+\pi a^2=3\pi a^2$.

Diện tích mặt cầu đường kính AB là:

$S_2=\pi AB^2=\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2=3\pi a^2$.

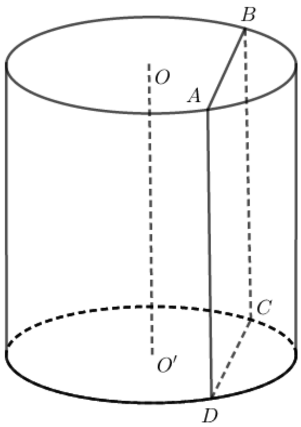
Từ đó suy ra, tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=1$

Câu 72. Cắt hình trụ có chiều cao bằng 4 bởi mặt phẳng song song với trục và và cách trục một khoảng bằng 3, thiết diện thu được có diện tích bằng 32. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. 100π. **B.** 200π. **C.** 40π. **D.** 125π.

Lời giải

Đáp án: C



Ta có $h=OO'=4$, diện tích thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 32 nên $CD.BC=32\Leftrightarrow CD.OO'=32\Leftrightarrow CD.4=32\Leftrightarrow CD=8$.

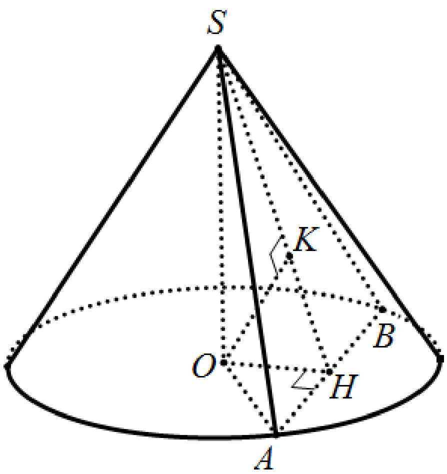
Gọi H là trung điểm CD ta có $O'H\perp CD; O'H=3\Rightarrow O'C=R=\sqrt{O'H^2+HC^2}=\sqrt{9+16}=5$ Do vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi Rh=2\pi.5.4=40\pi$

Câu 73. Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=a$ và bán kính đáy $r=\frac{5a}{4}$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy bằng $\frac{3a}{5}$. Diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình nón là

A. $\frac{5}{2}a^2$. **B.** $\frac{5}{4}a^2$. **C.** $\frac{15}{4}a^2$. **D.** $\frac{7}{2}a^2$

Lời giải

Chọn B



+Gọi mặt phẳng qua đỉnh là ΔSAB.

+Khoảng cách từ O đến mặt (SAB):

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên AB,

khi đó: $(SOH)\perp(SAB)$, gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên SH.

$\Rightarrow OK\perp(SAB)\Rightarrow \mathrm{d}(O;(SAB))=OK=\dfrac{3a}{5}$.

$+\Delta SOH:\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{1}{OH^2}\Rightarrow OH=\dfrac{OK.OS}{\sqrt{OS^2-OK^2}}=\dfrac{\dfrac{3a}{5}.a}{\sqrt{a^2-\left(\dfrac{3a}{5}\right)^2}}=\dfrac{3}{4}a$.

$SH=\sqrt{SO^2+OH^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2}=\dfrac{5}{4}a$.

$+\Delta OAH:AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5a}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2}=a\Rightarrow AB=2a$.

Vậy, $S_{SAB}=\dfrac{1}{2}SH.AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{4}a.2a=\dfrac{5}{4}a^2$.

Câu 74. Tính thể tích của hình nón có góc ở đỉnh bằng 60^o và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$.

A. $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $V=3\pi a^3$ **C.** $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$ **D.** $V=\pi a^3$

Lời giải

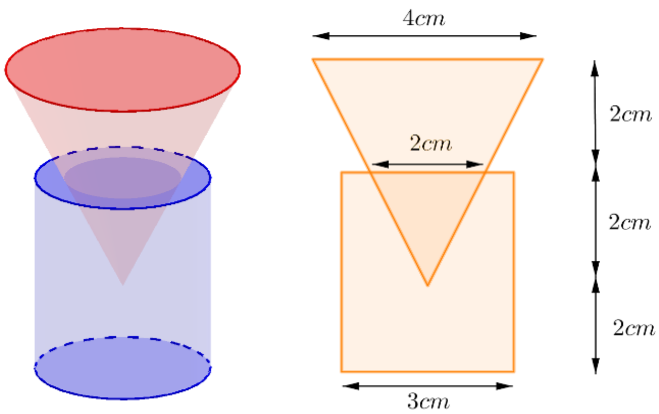
Chọn B

Khối nón có góc ở đỉnh bằng 60^o nên góc tạo bởi đường sinh và đáy bằng 60^o.

Vậy $R=\dfrac{l}{2}$; lại có $S_{xq}=\pi Rl=\pi R.2R=6\pi a^2$ nên $R=a\sqrt{3}$; vậy $h=\sqrt{l^2-R^2}=R\sqrt{3}=3a$

Vậy $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=3\pi a^3$.

Câu 75. Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên dưới. Tính thể tích V của (H).



A. $V=23\pi(cm^3)$.**B.** $V=13\pi(cm^3)$.**C.** $V=17\pi(cm^3)$.**D.** $V=\dfrac{41\pi}{3}(cm^3)$.

Lời giải:

Gọi V_1 là thể tích hình nón cụt có chiều cao 2cm, đáy lớn có bán kính $R_1=2cm$, đáy nhỏ có bán kính $r_1=1cm$. Khi đó:

$$V_1=\frac{\pi h}{3}\left(R_1^2+r_1^2+R_1r_1\right)=\frac{2\pi}{3}\left(2^2+1^2+2.1\right)=\frac{14\pi}{3}\left(cm^3\right).$$

Gọi V_2 là thể tích hình trụ có chiều cao 4cm, đáy có bán kính $R_2=\frac{3}{2}cm$. Khi đó:

$$V_2=\pi R_2^2 h=9\pi\left(cm^3\right).$$

Ta thấy, $V=V_1+V_2=\dfrac{14\pi}{3}+9\pi=\dfrac{41\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

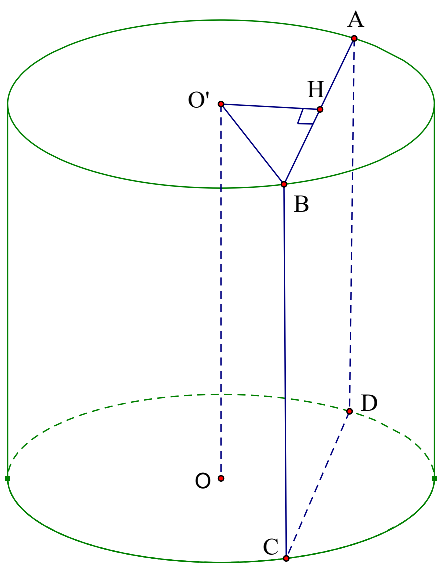
Chọn D

Câu 76. Cho hình trụ có chiều cao bằng $12a$. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục $4a$, ta được thiết diện có chu vi bằng $36a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng:

A. $624\pi a^3$. **B.** $1248\pi a^3$. **C.** $300\pi a^3$. **D.** $1200\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C.

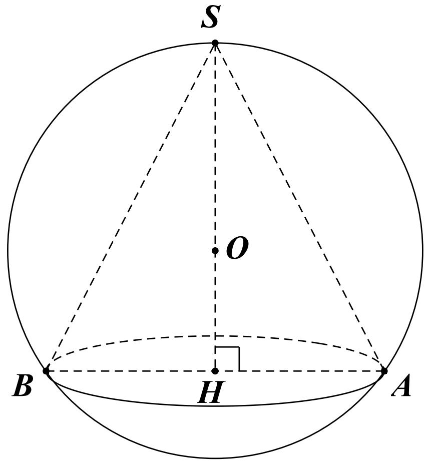


Gọi O và O' là tâm hai đáy của hình trụ, có $OO'=12a$, thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có $O'H\perp AB$ và $O'H=4a$.

Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là $2\left(AB+BC\right)=36a\Rightarrow AB=6a$.

Trong tam giác vuông $O'BH$ có $O'B=\sqrt{HB^2+O'H^2}=\sqrt{9a^2+16a^2}=5a$. Vậy hình trụ có bán kính $r=O'B=5a$. Thể tích khối trụ là $V=\pi r^2h=\pi.(5a)^2.12a=300\pi a^3$.

Câu 77. Cho hình nón bán kính $r=12$ nội tiếp trong hình cầu có bán kính $R=13$ như hình vẽ:

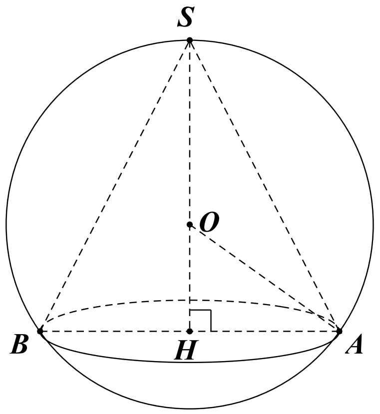


Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón.

A. $S_{xq}=72\sqrt{5}\pi$. **B.** $S_{xq}=36\sqrt{5}\pi$. **C.** $S_{xq}=72\sqrt{13}\pi$. **D.** $S_{xq}=36\sqrt{13}\pi$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=5$

Suy ra $SH=SO+OH=12+5=18$

Ta có đường sinh của hình nón $l=SA=\sqrt{SH^2+AH^2}=6\sqrt{13}$

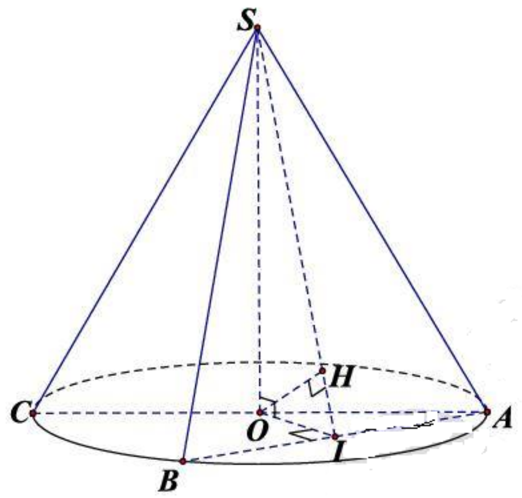
Vậy diện tích xung quanh hình nón $S_{xq}=\pi.R.l=\pi.12.6\sqrt{13}=72\sqrt{13}\pi$.

Câu 78. Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn $(O;5)$.Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA=AB=8$. Tính khoảng cách từ O đến (SAB).

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm AB.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SAB) \perp (SOI)$.

Trong (SOI), kẻ $OH \perp SI$ thì $OH \perp (SAB)$.

$\Rightarrow d(O;(SAB)) = OH$.

Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{8.5}{5}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{39}$.

Ta có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{4.5}{5}\right)^2} = 3$.

Tam giác vuông SOI có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Vậy $d(O;(SAB)) = OH = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Câu 79. Cho một khối cầu (S) có bán kính là R. Một khối trụ nội tiếp khối cầu (S) có chiều cao bằng bán kính của khối cầu (S) và bán kính đường tròn đáy của khối trụ bằng một nửa bán kính của khối cầu (S). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu và khối trụ đã cho. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. 4. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối cầu (S): $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích của khối trụ: $V_2 = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 R = \frac{\pi R^3}{4}$.

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{\frac{\pi R^3}{4}} = \frac{16}{3}.$$

Câu 80. Cho khối trụ (T) có đường cao h, bán kính đáy R và $h = 2R$. Một mặt phẳng qua trục cắt khối trụ theo thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $16a^2$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. $V = 27\pi a^3$ **B.** $V = 16\pi a^3$ **C.** $V = 4\pi a^3$ **D.** $V = \dfrac{16}{3}\pi a^3$

Lời giải

Chọn B

Vì thiết diện là hình chữ nhật đi qua trục và có diện tích bằng $16a^2$ nên $2R.h = 16a^2$

$\Leftrightarrow (2R)^2 = 16a^2 \Leftrightarrow R = 2a$

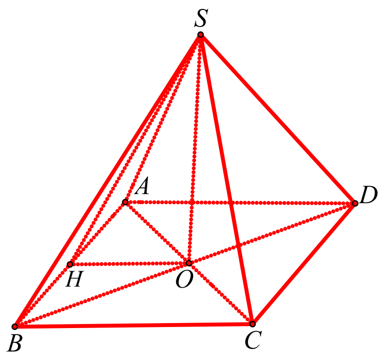
Thể tích khối trụ là: $V = \pi.(2a)^2.4a = 16\pi a^3$

Câu 81. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng#a. Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Lời giải

Chọn#A.



Gọi $O = AC \cap BD$ và H là trung điểm AB.

Khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ có bán kính đáy là: $R = OH = \dfrac{a}{2}$ và có chiều cao $h = SO$.

Ta có: $S_{\Delta SAB} = 2a^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}SH.AB = 2a^2 \Leftrightarrow SH = 4a$

ΔSOM vuông tại O: $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{16a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{2}$ hay $h = \dfrac{3a\sqrt{7}}{2}$

Ta có diện tích đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$: $B = \pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$

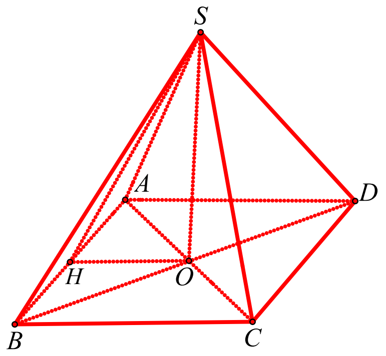
Vậy thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$.

Câu 82. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng#a. Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Lời giải

Chọn#A.



Gọi $O = AC \cap BD$ và H là trung điểm AB.

Khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ có bán kính đáy là: $R = OH = \frac{a}{2}$ và có chiều cao $h = SO$.

Ta có: $S_{\Delta SAB} = 2a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}SH.AB = 2a^2 \Leftrightarrow SH = 4a$

ΔSOM vuông tại O: $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{16a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$ hay $h = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$

Ta có diện tích đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$: $B = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4}$

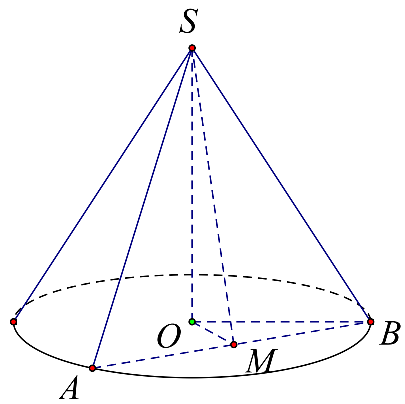
Vậy thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$.

Câu 83. Cho hình nón có chiều cao bằng 6. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $10\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{3}\pi$. **D.** 128π.

Lời giải

Chọn D



Giả sử thiết diện là tam giác vuông cân SAB có cạnh bằng l như hình vẽ $\Rightarrow l\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow l = 10$.

Ta có: $r = OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{l^2 - h^2} = 8$.

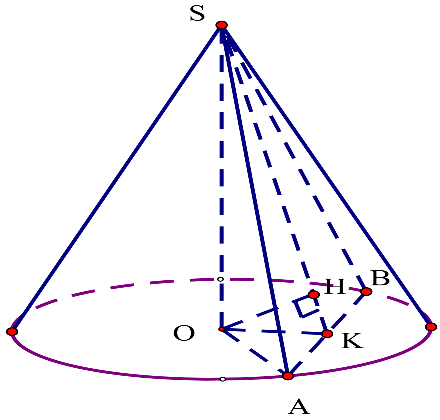
$\Rightarrow$ Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.8^2.6 = 128\pi \Rightarrow$ Chọn **D.**

Câu 84. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0,\widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK\perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO\perp AB$ nên $AB\perp(SOK)$ $\Rightarrow(SOK)\perp(SAB)$ mà $\Rightarrow(SOK)\cap(SAB)=SK$ nên từ O dựng $OH\perp SK$ thì $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=d\left(O,(SAB)\right)$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin\widehat{SAO}=\frac{SO}{SA}\Rightarrow SO=\frac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin\widehat{SAB}=\frac{SK}{SA}\Rightarrow SK=\frac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{SK^2-SO^2}+\frac{1}{SO^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\frac{SA^2}{4}}+\frac{1}{\frac{3SA^2}{4}-\frac{SA^2}{4}}=\frac{4}{SA^2}+\frac{2}{SA^2}\Rightarrow\frac{6}{SA^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow SA=2a^2\Rightarrow SA=a\sqrt{2}$

Câu 85. Cho khối nón đỉnh O, chiều cao là h. Một khối nón khác có đỉnh là tâm I của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Để thể tích của khối nón đỉnh I lớn nhất thì chiều cao của khối nón này bằng bao nhiêu?

A. $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h}{3}$. **C.** $\frac{2h}{3}$. **D.** $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi x là chiều cao cần tìm. R,r lần lượt là chiều cao của khối nón lớn và bé. Khi đó $\frac{r}{R}=\frac{h-x}{h}\Rightarrow r=\frac{R(h-x)}{h}$. Thể tích khối nón đỉnh I là

$$V=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{R(h-x)}{h}\right]^2x=\frac{\pi R^2}{6h^2}(h-x)^2\,2x\overset{Cauchy}{\le}\frac{\pi R^2}{6h^2}\frac{(h-x+h-x+2x)^3}{27}=\frac{4\pi R^2h}{81}$$

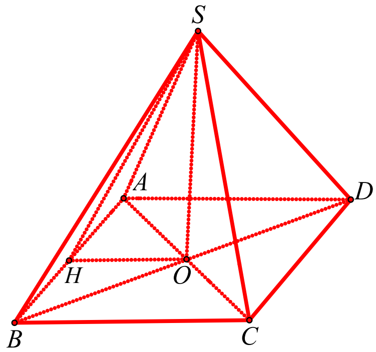
Dấu đẳng thức xảy ra khi $h-x=2x\Leftrightarrow x=\frac{h}{3}$.

Câu 86. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng#a. Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng:

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$ và H là trung điểm AB.

Khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ có bán kính đáy là:

$R = OH = \frac{a}{2}$ và có chiều cao $h = SO$.

Ta có: $S_{\Delta SAB} = 2a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}SH.AB = 2a^2 \Leftrightarrow SH = 4a$

ΔSOM vuông tại O: $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{16a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$ hay $h = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$

Ta có diện tích đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$: $B = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4}$

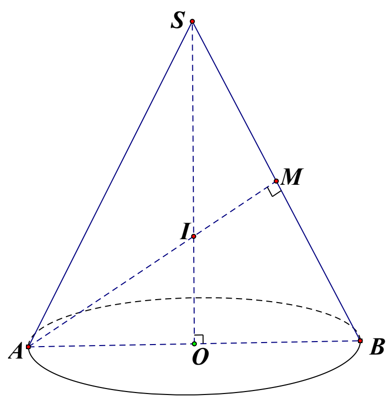
Vậy thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$.

Câu 87. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu nội tiếp và nội tiếp hình nón đã cho. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C



Giả sử cạnh của tam giác đều SAB bằng 1.

Gọi thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều SAB.

Gọi I là trọng tâm tam giác đều SAB, khi đó I là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón là $r = IO = \frac{1}{3}SO = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$.

Thể tích mặt cầu nội tiếp hình nón là $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi$.

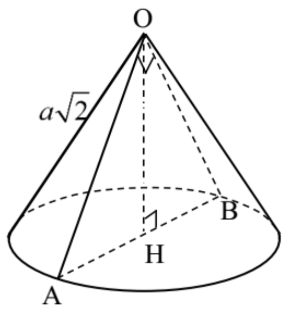
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 8$.

Câu 88. Cắt hình nón bằng một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân cạnh góc vuông bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình nón.

A. $4a^2\pi$. **B.** $4\sqrt{2}a^2\pi$. **C.** $a^2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$. **D.** $2\sqrt{2}a^2\pi$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử hình nón đã cho có độ dài đường sinh l, bán kính đáy là R.

Thiết diện của hình nón qua trục là tam giác OAB vuông cân tại O và $OA = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông cân OAB ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a$. Vậy $l = a\sqrt{2},\ R = a.$

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{TP} = S_{xq} + S_{\S,y} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$

Câu 89. Cho khối trụ có tâm hai đáy là O và O'. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng qua OO', thiết diện tạo thành là một hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối trụ là

A. $\frac{\pi a^3}{4}$ **B.** $\frac{\pi a^3}{12}$ **C.** $\frac{\pi a^3}{2}$ **D.** πa^3

Lời giải:

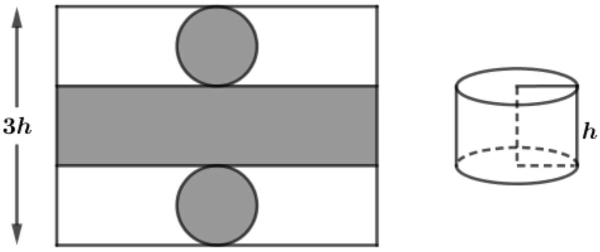
Chọn A

Đường chéo hình vuông bằng $a\sqrt{2} \Rightarrow$ cạnh hình vuông bằng a.

Do đó: $l = h = a$, $r = \frac{a}{2}$

Vậy, $V = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{4}$

Câu 90. Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật (phần tô đậm) sau đó hàn kín lại, như trong hình vẽ dưới đây. Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu (vừa đủ). Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng $50,24$ lít (các mối ghép nối khi gò hàn chiếm diện tích không đáng kể. Lấy $\pi = 3,14$). Diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu gần với giá trị nào sau đây nhất?



A. $1,5\left(m^2\right)$. **B.** $1,8\left(m^2\right)$. **C.** $2,2\left(m^2\right)$. **D.** $1,2\left(m^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy bán kính hình tròn đáy của thùng đựng dầu là $r = \frac{h}{2}$. Do đó, thể tích của thùng đựng dầu có công thức: $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4}h^3 = 50,24$ (lít) $= 0,05024\ (m^3)$.

Suy ra $h = 0,4\ (m)$ và $r = 0,2\ (m)$.

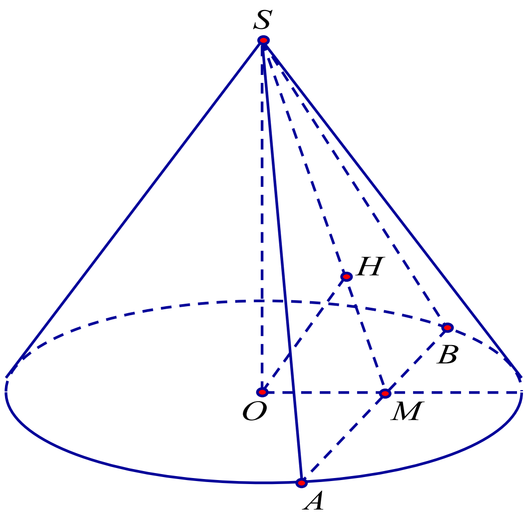
Ngoài ra, diện tích hình chữ nhật (chiều dài và chiều rộng lần lượt là $2\pi r$ và $3h$) của tấm thép có công thức: $S = 2\pi r.3h = 3\pi h^2 = 3 \times 3,14 \times 0,4^2 = 1,5072\ (m^2)$

Câu 91. Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O, SA, SB là hai đường sinh biết $SO = 3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích ΔSAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

A. $\frac{\sqrt{674}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{530}}{4}$. **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{23}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm AB, kẻ $OH \perp SM$ tại H, suy ra $OH \perp (SAB)$, nên $OH = d\left(O;(SAB)\right) = 1$.

Đặt $a = OM$ và gọi r là bán kính hình tròn đáy của hình nón đã cho.

Ta có:

$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OM^2}\Rightarrow\dfrac{1}{OM^2}=\dfrac{1}{OH^2}-\dfrac{1}{SO^2}=\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{8}{9}$. Suy ra $OM=\dfrac{3}{\sqrt{8}}$.

Từ đó: $SM=\sqrt{SO^2+OM^2}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{3}{\sqrt{8}}\right)^2}=\dfrac{9}{\sqrt{8}}$. $AB=2MA=2\sqrt{r^2-OM^2}=2\sqrt{r^2-\dfrac{9}{8}}$.

Bởi vậy: $S_{\Delta SAB}=18\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.AB.SM=18\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.2\sqrt{r^2-\dfrac{9}{8}}.\dfrac{9}{\sqrt{8}}=18$

$\Leftrightarrow\sqrt{r^2-\dfrac{9}{8}}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow r^2=\dfrac{265}{8}\Leftrightarrow r=\dfrac{\sqrt{530}}{4}$.

Câu 92. Cho hình nón có chiều cao bằng 3. Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, thiết diện thu được là tam giác đều có diện tích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 16π. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có cạnh a của tam giác đều sẽ bằng đường sinh: $a=\sqrt{\dfrac{4S}{\sqrt{3}}}=5=l$.

+ Suy ra $r^2=l^2-h^2=25-9=16$. Vậy $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=16\pi$

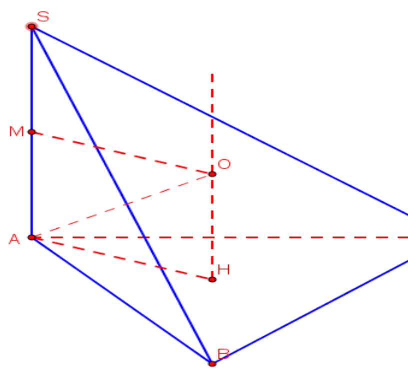
Câu 93. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=a$, $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=60^0$. Tính diện tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{5}{3}\pi a^2$. **B.** $20\pi a^2$. **C.** $5\pi a^2$. **D.** $\dfrac{20}{3}\pi a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án C

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi (α) là mặt phẳng trung trực của SA, O là giao điểm của d và (α). Khi đó O là tâm của hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.



Theo định lí hàm số cosin ta có :

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.\text{AC}.\cos\widehat{BAC}}$$
$$=\sqrt{a^2+(2a)^2-2a.2a.\cos 60^0}=a\sqrt{3}$$

Diện tích tam giác ABC :

$$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.\text{AB}.\text{AC}.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{2}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC:

$$AH=\dfrac{AB.BC.AC}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{a.2a.\text{a}\sqrt{3}}{4.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}=a$$

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$:

$$R=OA=\sqrt{AH^2+OH^2}=\sqrt{(a)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$$

Diện tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

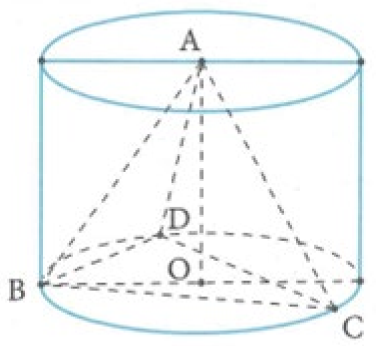
$$S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 5\pi a^2$$

Câu 94. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng#a. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và có chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$ là:

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{3}$ **D.** $S_{xq} = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Do BCD là tam giác đều cạnh a $\Rightarrow R = OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $l = h = OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra: $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 95. Công ty X định làm một téc nước hình trụ bằng inox (gồm cả nắp) có dung tích $1m^3$. Để tiết kiệm chi phí công ty X chọn loại téc nước có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Hỏi diện tích toàn phần của téc nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy)?

A. $5,59\ m^2$ **B.** $5,54\ m^2$ **C.** $5,57\ m^2$ **D.** $5,52\ m^2$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow \begin{cases} \pi Rh = \dfrac{1}{R} \\ \pi R^2 = \dfrac{1}{h} \end{cases}$

Diện tích toàn phần của téc nước: $S = S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \dfrac{2}{R} + 2\pi R^2$

Ta có

$$S' = 4\pi R - \frac{2}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 2}{R^2}$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi R^3 - 2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

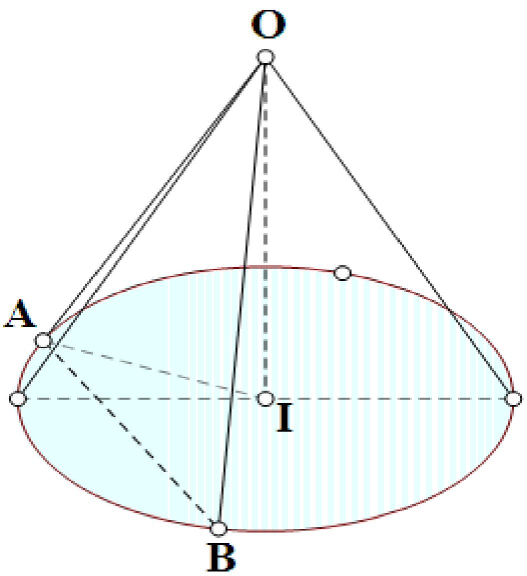
Lập bảng biến thiên ta có S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất tại $R=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \Rightarrow MinS_{tp}=S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)=2\sqrt[3]{2\pi}+\frac{2\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}}\approx 5,54$

Câu 96. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh O của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác OAB có diện tích bằng $9\sqrt{2}$ và góc $\widehat{AOB}=45°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là tâm đường tròn đáy hình nón, thiết diện là tam giác cân OAB.

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin 45° \Leftrightarrow 9\sqrt{2}=\frac{1}{2}OA^2.\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow OA^2=36$.

Do đó $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{36-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=4$.

Khối nón cần tìm có bán kính đáy $IA=4$, chiều cao $OI=2\sqrt{5}$ nên có thể tích là:

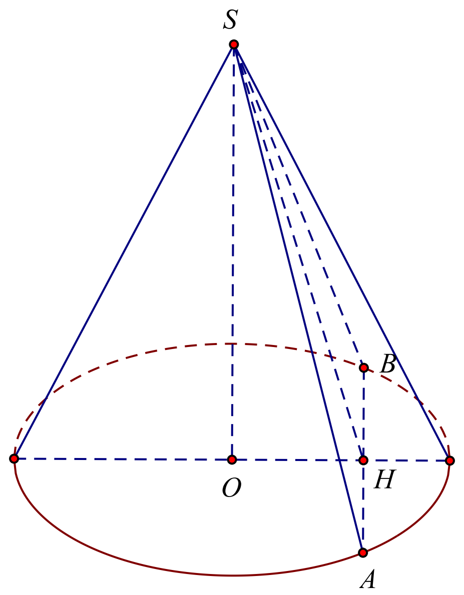
$V=\frac{1}{3}.S_d.h=\frac{1}{3}\pi.IA^2.OI=\frac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{5}=\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$.

Câu 97. Cho hình nón có chiều cao bằng 6. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều, góc giữa mặt phẳng và mặt đáy của hình nón bằng 60^0. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. 56π. **B.** 28π. **C.** 84π. **D.** 168π.

Lời giải

Chọn A



Gọi S là đỉnh của hình nón. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều SAB. Gọi O là tâm đường tròn đáy $\Rightarrow SO = 6$.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow OH \perp AB,\ SH \perp AB \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^0$.

Từ giả thiết ta có: $SH = \dfrac{SO}{sin60^0} = 4\sqrt{3}$, do ΔABC đều $SH = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = 8$.

Nên $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{64-36} = 2\sqrt{7}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}.\pi.OA^2.SO = \dfrac{1}{3}.\pi.28.6 = 56\pi$.

Câu 98. Tìm tất cả các giá thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $m \geq 2$. **B.** $m \geq 0$. **C.** $m \leq -\dfrac{1}{4}$. **D.** $m \geq \dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-1;1)$ hay $m \geq x^2 - x$ với $\forall x \in (-1;1)$.

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $(-1;1)$ ta có $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \geq f(x)$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq 2$.

* Có thể sử dụng $y' \le 0$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1) \le 0 \\ y'(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m \le 0 \\ 12 - 6m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2$.

LÔGARIT

Câu 1. Cho $x,\ y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\dfrac{x+y}{6}$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

A. $\dfrac{x}{y}=3$. **B.** $\dfrac{x}{y}=5$. **C.** $\dfrac{x}{y}=2$. **D.** $\dfrac{x}{y}=4$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_9 x=\log_6 y=\log_4\frac{x+y}{6}=t\Rightarrow\begin{cases}x=9^t\\ y=6^t\\ \dfrac{x+y}{6}=4^t\end{cases}\Rightarrow 9^t+6^t=6.4^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t=6\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=2.$$

Vậy $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=2$.

Câu 2. Cho x,y,z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x=5^y=10^{-z}$. Tính giá trị của biểu thức $A=xy+yz+zx$.

A. $A=3$. **B.** $A=0$. **C.** $A=1$. **D.** $A=2$.

Lời giải

Chọn B

$$2^x=5^y=10^{-z}\Leftrightarrow 2^x=5^y=\frac{1}{10^z}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x.10^z=1\\ 5^y.10^z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2^x.10^z\right)^y=1\\ \left(5^y.10^z\right)^x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{xy}.10^{yz}=1\\ 5^{xy}.10^{xz}=1\end{cases}$$

Khi đó $2^{xy}.10^{yz}.5^{xy}.10^{xz}=1\Leftrightarrow 10^{xy+yz+zx}=1\Leftrightarrow xy+yz+zx=0$.

Câu 3. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $P=a.b$.

A. $P=6$. **B.** $P=5$. **C.** $P=8$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)$.

$\Rightarrow x=9^t$, $y=12^t$, $x+y=16^t$.

$$\Rightarrow 9^t+12^t=16^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{4}\right)^t=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{4}\right)^t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \text{(loại)}\\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=5\end{cases}\Rightarrow a.b=5$.

Câu 4. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_4 a=\log_{25} b=\log\dfrac{4b-a}{2}$. Tính giá trị $\dfrac{a}{b}$?

A. $\dfrac{a}{b}=6-2\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$. **C.** $\dfrac{a}{b}=6+2\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_4 a = \log_{25} b = \log\dfrac{4b-a}{2} = t$, ta có:

$$\begin{cases} a = 4^t \\ b = 25^t \\ \dfrac{4b-a}{2} = 10^t \end{cases} \Rightarrow 4.25^t - 4^t = 2.10^t \Leftrightarrow 4 - \left(\dfrac{4}{25}\right)^t = 2.\left(\dfrac{10}{25}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2t} + 2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^t - 4 = 0$$

Đặt $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t = y > 0$, ta có $y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1-\sqrt{5} \\ y = -1+\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -1+\sqrt{5}$.

Từ đó $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t = -1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{4^t}{25^t} = \left(\sqrt{5}-1\right)^2 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 6-2\sqrt{5}$.

Câu 5. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_4 a = \log_{25} b = \log\dfrac{4b-a}{2}$. Tính giá trị $\dfrac{a}{b}$?

A. $\dfrac{a}{b} = 6-2\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$. **C.** $\dfrac{a}{b} = 6+2\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_4 a = \log_{25} b = \log\dfrac{4b-a}{2} = t$, ta có:

$$\begin{cases} a = 4^t \\ b = 25^t \\ \dfrac{4b-a}{2} = 10^t \end{cases} \Rightarrow 4.25^t - 4^t = 2.10^t \Leftrightarrow 4 - \left(\dfrac{4}{25}\right)^t = 2.\left(\dfrac{10}{25}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2t} + 2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^t - 4 = 0$$

Đặt $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t = y > 0$, ta có $y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1-\sqrt{5} \\ y = -1+\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -1+\sqrt{5}$.

Từ đó $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t = -1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{4^t}{25^t} = \left(\sqrt{5}-1\right)^2 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 6-2\sqrt{5}$.

Câu 6. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} x = \log_{12} y = \log_9(4x+5y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\log_2\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\log_{16}x=\log_{12}y=\log_9\left(4x+3y\right)$. Khi đó

$$\begin{cases} x=16^t \\ y=12^t \\ 4x+3y=9^t \end{cases} \Rightarrow 4.16^t+3.12^t=9^t \Leftrightarrow 4.\left(\frac{16}{9}\right)^t+3.\left(\frac{4}{3}\right)^t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{3}\right)^t=-1 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{1}{4}.$$

Do đó: $\frac{x}{y}=\left(\frac{16}{12}\right)^t=\left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{1}{4}$.

Câu 7. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16}b=\log_{12}\frac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{a}{b}=\frac{3+\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a}{b}=7-2\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a}{b}=7+2\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a}{b}=\frac{3-\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

+ Đặt $\log_9 a=\log_{16}b=\log_{12}\frac{5b-a}{2}=t$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=9^t \\ b=16^t \\ \frac{5b-a}{2}=12^t \end{cases} \Rightarrow \frac{5.16^t-9^t}{2}=12^t \Leftrightarrow 9^t+2.12^t-5.16^t=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2t}+2.\left(\frac{3}{4}\right)^t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^t=-1+\sqrt{6} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t=-1-\sqrt{6}\,(l) \end{array}\right..$$

$+\ \frac{a}{b}=\frac{9^t}{16^t}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}=\left(-1+\sqrt{6}\right)^2=7-2\sqrt{6}$.

Câu 8. Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì ông An được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

A. $768,37$ triệu. **B.** $726,74$ triệu. **C.** $858,72$ triệu. **D.** 71674 triệu.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Mức lương 3 năm đầu: 1 triệu	Tổng lương 3 năm đầu: 36. 1
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^2$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^2$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^3$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^3$

Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^4$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^4$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^5$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^5$
Mức lương 2 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$	Tổng lương 2 năm tiếp theo: $24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$

Tổng lương sau tròn 20 năm là.

$$S=36\left[1+\left(1+\frac{2}{5}\right)+\left(1+\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(1+\frac{2}{5}\right)^5\right]+24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$$

$$=36.\frac{1\left[1-\left(1+\frac{2}{5}\right)^6\right]}{1-\left(1+\frac{2}{5}\right)}+24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6\approx 768,37$$

Câu 9. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=26$. **B.** $T=29$. **C.** $T=20$. **D.** $T=25$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)=t$, suy ra $x=9^t$, $y=6^t$, $x+y=4^t$.

Khi đó ta có: $9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t-1=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (Vì $\left(\frac{3}{2}\right)^t>0$).

Lại có $\frac{x}{y}=\left(\frac{3}{2}\right)^t\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=1$, $b=5$ hay $T=26$.

Câu 10. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{27}x=\log_{12}y=\log_8\left(\frac{x}{9}+\frac{5y}{12}\right)$. Giá trị của $\frac{y}{x}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\log_3\left(\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}}2$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_{27}x=\log_{12}y=\log_8\left(\frac{x}{9}+\frac{5y}{12}\right)$. Khi đó $\begin{cases}x=27^t\\ y=12^t\\ \frac{x}{9}+\frac{5y}{12}=8^t\end{cases}\Rightarrow\frac{27^t}{9}+\frac{5}{12}12^t=8^t$

$\Leftrightarrow 4.27^t+15.12^t=36.8^t\Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}+15.\left(\frac{3}{2}\right)^t-36=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=1\Leftrightarrow t=0.$

Do đó: $\frac{y}{x}=\frac{4}{9}$.

Câu 11. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{16}\left(a+3b\right)=\log_{9}a=\log_{12}b$. Giá trị của $\frac{a^3-ab^2+b^3}{a^3+a^2b+3b^3}$ bằng

A. $\frac{3+\sqrt{13}}{11}$. **B.** $\frac{6-\sqrt{13}}{11}$. **C.** $\frac{82-17\sqrt{13}}{69}$. **D.** $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_{16}\left(a+3b\right)=\log_{9}a=\log_{12}b=t\rightarrow\begin{cases}a+3b=16^t\\a=9^t\\b=12^t\end{cases}$.

Suy ra $a+3b=16^t\Leftrightarrow 9^t+3.12^t=16^t\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}-3.\left(\frac{4}{3}\right)^t-1=0\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Mặt khác $\frac{b}{a}=\frac{12^t}{9^t}=\left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Khi đó $T=\frac{a^3-ab^2+b^3}{a^3+a^2b+3b^3}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^3}{1+\frac{b}{a}+3.\left(\frac{b}{a}\right)^3}=\frac{1-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3}{1+\frac{3+\sqrt{13}}{2}+3.\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3}=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$.

Câu 12. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $xy=4$, $x\geq\frac{1}{2}$, $y\geq 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=\log_2^2 x+(\log_2 y-1)^2$. Tổng $M+2m$ bằng

A. 6. **B.** 11. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{21}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ giả thiết suy ra $x=\frac{4}{y}\geq\frac{1}{2}\Rightarrow y\leq 8$.

Ta có $P=\log_2^2 x+(\log_2 y-1)^2=\log_2^2\frac{4}{y}+(\log_2 y-1)^2=(\log_2 y-2)^2+(\log_2 y-1)^2$.

Vì $1\leq y\leq 8$ nên $0\leq\log_2 y\leq 3$.

Xét hàm $f(t)=(t-2)^2+(t-1)^2$ trên $[0;3]$ ta được $f(t)\in\left[\frac{1}{4};5\right]$.

Câu 13. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\frac{x}{2}=\log_{15}y=\log_{9}\frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$; với a, b là các số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=14$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=21$. **D.** $a+b=34$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\dfrac{x+y}{4}\Rightarrow\begin{cases}y=15^{\log_{25}\frac{x}{2}}\\ \log_9\dfrac{x+15^{\log_{25}\frac{x}{2}}}{4}=\log_{25}\dfrac{x}{2}\end{cases}$.

Đặt $t=\log_{25}\dfrac{x}{2}\Rightarrow x=2.25^t$, ta được $2.25^t+15^t=4.9^t\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2t}+\left(\dfrac{5}{3}\right)^t=4\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$.

$\Rightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{2.25^t}{15^t}=2.\left(\dfrac{5}{3}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Do đó $a=1$, $b=33$ nên $a+b=34$.

Câu 14. Nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 2^{18}. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=\log_2 a\Rightarrow a=2^x$; $y=\log_2 b\Rightarrow b=2^y$.

Ta có $\begin{cases}\log_8 a+\log_4 b^2=5\\ \log_4 a^2+\log_8 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+y=5\\ x+\dfrac{1}{3}y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=15\\ 3x+y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}$. Suy ra $ab=2^{x+y}=2^9$.

Câu 15. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $3x-2y>0$ và $\log_3 x=\log_4 y=\log_{\sqrt{12}}(3x-2y)$.

Giá trị của $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_3 x=\log_4 y=\log_{\sqrt{12}}(3x-2y)$. Khi đó $\begin{cases}x=3^t\\ y=4^t\\ 3x-2y=\left(\sqrt{12}\right)^t\end{cases}\Rightarrow 3.3^t-2.4^t=\left(\sqrt{12}\right)^t$

$\Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{t}{2}}-2.\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{t}{2}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{t}{2}}=1\\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{t}{2}}=-\dfrac{2}{3}(L)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{t}{2}}=1\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1.$

Câu 16. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $\dfrac{a}{b}$.

A. $\dfrac{a}{b}=7-2\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{b}=7+2\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \dfrac{5b-a}{2} = t,\ t \in \mathbb{R}$. Ta có $a = 9^t,\ b = 16^t,\ \dfrac{5b-a}{2} = 12^t$.

Suy ra:

$$5.16^t - 9^t = 2.12^t \Leftrightarrow 5 - \left(\frac{9}{16}\right)^t = 2.\left(\frac{12}{16}\right)^t \Leftrightarrow 5 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2t} = 2.\left(\frac{3}{4}\right)^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2t} + 2.\left(\frac{3}{4}\right)^t - 5 = 0.$$

Giải phương trình, ta được $\left(\dfrac{3}{4}\right)^t = \sqrt{6} - 1$, (nhận) hoặc $\left(\dfrac{3}{4}\right)^t = -\sqrt{6} - 1$, (loại).

Suy ra $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{9}{16}\right)^t = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2t} = \left(\sqrt{6} - 1\right)^2 = 7 - 2\sqrt{6}$.

Câu 17. Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1;8]$.

A. $(2;6)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $[2;6]$. **D.** $(6;+\infty)$.

Lời giải

Đáp án C

Đặt $t = \log_2 x$, do $x \in [1;8] \Rightarrow t \in [0;3]$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t = m - 3$ (1)

Xét hàm số $y = f(t) = t^2 - 2t$;Ta có $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên

t	0		1		3
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le m - 3 \le 3 \Leftrightarrow 2 \le m \le 6$

Câu 18. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} x = \log_{12} y = \log_9 (4x + 5y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\log_2 \dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \log_{16} x = \log_{12} y = \log_9 (4x + 3y)$.

Khi đó $\begin{cases} x = 16^t \\ y = 12^t \\ 4x + 3y = 9^t \end{cases}$

$$\Rightarrow 4.16^t + 3.12^t = 9^t \Leftrightarrow 4.\left(\frac{16}{9}\right)^t + 3.\left(\frac{4}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{3}\right)^t = -1 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{1}{4}.$$

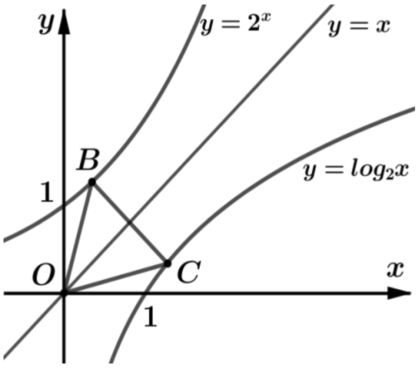
Do đó: $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{16}{12}\right)^t = \left(\dfrac{4}{3}\right)^t = \dfrac{1}{4}$.

Câu 19. Gọi B và C lần lượt là các điểm thuộc đồ thị hàm số $y=2^x$ và $y=\log_2 x$ sao cho tam giác OBC đều. Giả sử điểm B có hoành độ là a khi đó tỉ số $\dfrac{2^x}{a}$ bằng

A. $2-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{2}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Đồ thị hai hàm số $y=2^x$ và $y=\log_2 x$ đối xứng qua đường thẳng $y=x$ và theo yêu cầu bài toán là tam giác OBC đều nên suy ra $B\left(a;2^a\right)$, $C\left(2^a;a\right)$ (theo đề điểm B có hoành độ là a).

Tam giác OBC đều $\longrightarrow OB=BC \Leftrightarrow OB^2=BC^2 \Leftrightarrow 2^{2a}-4a.2^a+a^2=0$. Đây là phương trình đẳng cấp và tìm được $\dfrac{2^x}{a}=2\pm\sqrt{3}$. Vì B là điểm nằm trên đồ thị hàm số $y=2^x$ suy ra $2^a>a$ nên $\dfrac{2^x}{a}=2+\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 20. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} x=\log_{12} y=\log_9(4x+3y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\log_2\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\log_{16} x=\log_{12} y=\log_9\left(4x+3y\right)$. Khi đó

$$\begin{cases} x=16^t \\ y=12^t \\ 4x+3y=9^t \end{cases} \Rightarrow 4.16^t+3.12^t=9^t \Leftrightarrow 4.\left(\frac{16}{9}\right)^t+3.\left(\frac{4}{3}\right)^t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{3}\right)^t=-1 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{1}{4}.$$

Do đó: $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{16}{12}\right)^t=\left(\dfrac{4}{3}\right)^t=\dfrac{1}{4}$.

Câu 21. Cho x, y là hai số thực dương khác 1. Biết $\log_2 x=\log_y 16$ và $xy=64$. Tính $\left(\log_2\dfrac{x}{y}\right)^2$.

A. 20. **B.** $\dfrac{45}{2}$. **C.** 25. **D.** $\dfrac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$xy=64 \Leftrightarrow y=\dfrac{64}{x}$

$$\log_2 x = \log_{\frac{64}{x}} 16 = \frac{1}{\log_{16}\frac{64}{x}} = \frac{1}{\log_{16}64 - \log_{16}x}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\log_2 x} \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{4}{6 - \log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow 6\log_2 x - \log_2^2 x = 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 6\log_2 x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 3+\sqrt{5}\\ \log_2 x = 3-\sqrt{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2^{3+\sqrt{5}}\\ x = 2^{3-\sqrt{5}}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y = \dfrac{64}{2^{3+\sqrt{5}}}\\ y = \dfrac{64}{2^{3-\sqrt{5}}}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left(\log_2 \frac{x}{y}\right)^2 = 20.$$

Câu 22. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \frac{x+y}{6}$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

A. $\frac{x}{y} = 3$. **B.** $\frac{x}{y} = 5$. **C.** $\frac{x}{y} = 2$. **D.** $\frac{x}{y} = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \frac{x+y}{6} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ \dfrac{x+y}{6} = 4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 6^t = 6.4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2.$$

Vậy $\frac{x}{y} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2$.

Câu 23. Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{16}(3a+2b) = \log_9 a = \log_{12} b$. Giá trị của $\frac{a^3 - ab^2 - b^3}{a^3 + a^2b + 3b^3}$ bằng

A. $-\frac{19}{83}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{7}{17}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \log_{16}(3a+2b) = \log_9 a = \log_{12} b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 16^t \\ a = 9^t \\ b = 12^t \end{cases} \Rightarrow 3.9^t + 2.12^t = 16^t \Leftrightarrow 3\left(\frac{9}{16}\right)^t + 2.\left(\frac{3}{4}\right)^t = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{4}\right)^t = \dfrac{1}{3}\\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^t = -1\ (vn)\end{array}\right. \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\dfrac{a^3-ab^2-b^3}{a^3+a^2b+3b^3}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^3-\left(\dfrac{a}{b}\right)-1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+3}=-\dfrac{7}{17}$.

Câu 24. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x=\log_6 y=\log_9(4x-5y)-1$. Tính $\dfrac{x}{y}$.

A. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_4 x=\log_6 y=\log_9(4x-5y)-1$. Suy ra $\begin{cases}x=4^t\\ y=6^t\\ 4x-5y=9^{t+1}=9.9^t\end{cases}$.

Vì $9^t.4^t=\left(6^t\right)^2$ nên ta có $9.9^t.4^t=9.\left(6^t\right)^2$. Hay là

$(4x-5y)x=9y^2\Leftrightarrow 4x^2-5xy-9y^2=0\Leftrightarrow \underbrace{(x+y)}_{>0}(4x-9y)=0\Leftrightarrow 4x=9y\Leftrightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{9}{4}$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $2x-\log_4\left(2-2^x\right)^2>0$ là:

A. $(0;+\infty)\setminus\{1\}$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\left(2-2^x\right)^2>0\Leftrightarrow 2-2^x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Ta có $2x-\log_4\left(2-2^x\right)^2>0\Leftrightarrow 2x-\log_2\left|2-2^x\right|>0\Leftrightarrow 2x>\log_2\left|2-2^x\right|$

$\Leftrightarrow \log_2 2^{2x}>\log_2\left|2-2^x\right|\Leftrightarrow 2^{2x}>\left|2-2^x\right|\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-\left|2-2^x\right|>0$

Đặt $t=2^x\ (t>0)$, bất phương trình trở thành $t^2-|t-2|>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2+t-2>0\ (0<t<2)\\ t^2-t+2>0\ (t\geq 2)\end{array}\right.$.

Bất phương trình $t^2-t+2>0$ đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$ nên đúng với $t\geq 2$.

Bất phương trình $t^2+t-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-2\\ t>1\end{array}\right.$ dẫn đến $1<t<2$.

Do đó $t^2-|t-2|>0\Leftrightarrow t>1\Leftrightarrow 2^x>2^0\Leftrightarrow x>0$.

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta được tập nghiệm của bất phương trình là $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 26. Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}+\dfrac{1}{\log_2 z}=\dfrac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz)=2020$. Tính $\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-xz+1\right)$

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 1010. **D.** 2020^2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $a=\log_2 x,\quad b=\log_2 y,\quad c=\log_2 z$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2020} \\ a+b+c=2020 \\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \end{cases}$$

Xét $a=-b \Rightarrow c=2020 \Rightarrow z=2^{2020}$

$\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-xz+1\right)$

$=\log_2\left(2^{2020}\left(x+y+2^{2020}\right)-1-2^{2020}(x+y)+1\right)$

$=\log_2\left(2^{4040}\right)=4040$

Câu 27. Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}+\frac{1}{\log_2 z}=\frac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz)=2020$. Tính $\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-xz+1\right)$

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 1010. **D.** 2020^2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $a=\log_2 x, \quad b=\log_2 y, \quad c=\log_2 z$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2020} \\ a+b+c=2020 \\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \end{cases}$$

Xét $a=-b \Rightarrow c=2020 \Rightarrow z=2^{2020}$

$\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-xz+1\right)$

$=\log_2\left(2^{2020}\left(x+y+2^{2020}\right)-1-2^{2020}(x+y)+1\right)$

$=\log_2\left(2^{4040}\right)=4040$

Câu 28. Giả sử p,q là các soos thực dương thoả mãn $\log_{16} q=\log_{20} q=\log_{25}(p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$?

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. **C.** $\frac{8}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}(p+q) \Rightarrow p=16^t, q=20^t, p+q=25^t$

Suy ra $16^t+20^t=25^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{2t}+\left(\frac{4}{5}\right)^t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{5}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{4}{5}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vì $\left(\frac{4}{5}\right)^t>0$ nên $\left(\frac{4}{5}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Từ đó ta được $\frac{p}{q}=\frac{16^t}{20^t}=\left(\frac{4}{5}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Câu 29. Cho $\log_3 a=\log_4 b=\log_{12} c=\log_{13}(a+b+c)$. Hỏi $\log_{abc}144$ thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $\left\{\frac{7}{8};\frac{8}{9};\frac{9}{10}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7}\right\}$. **D.** $\{1;2;3\}$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_3 a=\log_4 b=\log_{12} c=\log_{13}(a+b+c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3^t \\ b=4^t \\ c=12^t \\ a+b+c=13^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc=144^t \\ 3^t+4^t+12^t=13^t \ (1) \end{cases}$$

$\log_{abc}144=\log_{144^t}144=\frac{1}{t}$; $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{13}\right)^t+\left(\frac{4}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t=1$

Vế trái là hàm số nghịch biến, Vế phải là hàm hằng nên ta nhẩm được nghiệm là $t=2$ là nghiệm.Vậy $\log_{abc}144=\frac{1}{2}$.

Câu 30. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_4 a=\log_{25} b=\log\frac{4b-a}{2}$. Tính giá trị $\frac{a}{b}$?

A. $\frac{a}{b}=6-2\sqrt{5}$. **B.** $\frac{a}{b}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$. **C.** $\frac{a}{b}=6+2\sqrt{5}$. **D.** $\frac{a}{b}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_4 a=\log_{25} b=\log\frac{4b-a}{2}=t$, ta có:

$$\begin{cases} a=4^t \\ b=25^t \\ \frac{4b-a}{2}=10^t \end{cases} \Rightarrow 4.25^t-4^t=2.10^t \Leftrightarrow 4-\left(\frac{4}{25}\right)^t=2.\left(\frac{10}{25}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2t}+2.\left(\frac{2}{5}\right)^t-4=0$$

Đặt $\left(\frac{2}{5}\right)^t = y > 0$, ta có $y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 - \sqrt{5} \\ y = -1 + \sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -1 + \sqrt{5}$.

Từ đó $\left(\frac{2}{5}\right)^t = -1 + \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{4^t}{25^t} = \left(\sqrt{5} - 1\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = 6 - 2\sqrt{5}$.

Câu 31. Cho $a > 0;\, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2 + b^2 + 1\right) + \log_{8ab+1}\left(4a + 5b + 1\right) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{27}{4}$. **C.** 9. **D.** $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng BĐT Cauchy: $16a^2 + b^2 \geq 8ab$. Suy ra:

$\log_{4a+5b+1}\left(16a^2 + b^2 + 1\right) + \log_{8ab+1}\left(4a + 5b + 1\right) \geq \log_{4a+5b+1}\left(8ab + 1\right) + \log_{8ab+1}\left(4a + 5b + 1\right) \geq 2$

Dấu "=" xảy ra: $\begin{cases} \log_{4a+5b+1}\left(8ab + 1\right) = 1 \\ 4a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{27}{4}$.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2-18x-5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}$ là

A. $\left[-\frac{1}{3}; 7\right]$. **B.** $\left[-7; \frac{1}{3}\right]$.

C. $(-\infty; -\frac{1}{3}] \cup$ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\log_4 x = \log_5 y = \log_{20} z = \log_{33}(2x + y + z)$. Giá trị của $x + y + z$ bằng:

A. 29. **B.** 3. **C.** -15. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_4 x = \log_5 y = \log_{20} z = \log_{33}(2x + y + z) \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t & (1) \\ y = 5^t & (2) \\ z = 20^t & (3) \\ 2x + y + y = 33^t & (4) \end{cases}$

Thế $(1),(2),(3)$ vào (4) ta có phương trình:

$2.4^t + 5^t + 20^t = 33^t \Leftrightarrow 2.\left(\frac{4}{33}\right)^t + \left(\frac{5}{33}\right)^t + \left(\frac{20}{33}\right)^t - 1 = 0 \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = 2.\left(\frac{4}{33}\right)^t + \left(\frac{5}{33}\right)^t + \left(\frac{20}{33}\right)^t - 1, \forall t \in R$

$\Rightarrow f'(t) = 2.\left(\frac{4}{33}\right)^t.\ln\frac{4}{33} + \left(\frac{5}{33}\right)^t.\ln\frac{5}{33} + \left(\frac{20}{33}\right)^t.\ln\frac{20}{33} < 0, \forall t \in R$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow (*)$ có nghiệm thì là nghiệm duy nhất.

Dễ thấy $t = 1$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Với $t = 1$ thì $x = 4, y = 5, z = 20$. Vậy $x + y + z = 29$.

Câu 33. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\log_4 x = \log_5 y = \log_{20} z = \log_{33}(2x + y + z)$. Giá trị của $x + y + z$ bằng:

A. 29. **B.** 3. **C.** -15. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_4 x=\log_5 y=\log_{20} z=\log_{33}(2x+y+z)\Rightarrow\begin{cases} x=4^t & (1)\\ y=5^t & (2)\\ z=20^t & (3)\\ 2x+y+y=33^t & (4)\end{cases}$

Thế $(1),(2),(3)$ vào (4) ta có phương trình:

$2.4^t+5^t+20^t=33^t\Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{4}{33}\right)^t+\left(\dfrac{5}{33}\right)^t+\left(\dfrac{20}{33}\right)^t-1=0\quad(*)$

Xét hàm số $f(t)=2.\left(\dfrac{4}{33}\right)^t+\left(\dfrac{5}{33}\right)^t+\left(\dfrac{20}{33}\right)^t-1,\forall t\in R$

$\Rightarrow f'(t)=2.\left(\dfrac{4}{33}\right)^t.\ln\dfrac{4}{33}+\left(\dfrac{5}{33}\right)^t.\ln\dfrac{5}{33}+\left(\dfrac{20}{33}\right)^t.\ln\dfrac{20}{33}<0,\forall t\in R$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow(*)$ có nghiệm thì là nghiệm duy nhất.

Dễ thấy $t=1$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $t=1$.

Với $t=1$ thì $x=4,y=5,z=20$. Vậy $x+y+z=29$.

Câu 34. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\dfrac{x+y}{4}$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$; với a, b là các số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=14$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=21$. **D.** $a+b=34$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\dfrac{x+y}{4}\Rightarrow\begin{cases} y=15^{\log_{25}\frac{x}{2}}\\ \log_9\dfrac{x+15^{\log_{25}\frac{x}{2}}}{4}=\log_{25}\dfrac{x}{2}\end{cases}$.

Đặt $t=\log_{25}\dfrac{x}{2}\Rightarrow x=2.25^t$, ta được $2.25^t+15^t=4.9^t\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2t}+\left(\dfrac{5}{3}\right)^t=4\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{3}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$.

$\Rightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{2.25^t}{15^t}=2.\left(\dfrac{5}{3}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Do đó $a=1$, $b=33$ nên $a+b=34$.

Câu 35. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(5x+4y)$. Giá trị của m để $2x-my=0$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}}5$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(5x+4y) = t$. Suy ra: $\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 5x+4y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 5.9^t + 4.6^t = 4^t$

$$\Leftrightarrow 5.\left(\frac{9}{4}\right)^t + 4\left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t = -1 \ (loai) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{5} \end{array}\right. .$$

Ta có: $2x - my = 0 \Leftrightarrow 2x = my \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{5}$.

Câu 36. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 x = \log_4 y = \log_5(x+y)$. Giá trị của $2x+y$ bằng

A. 25. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 34

Lời giải

Chọn D

Đặt

$t = \log_3 x = \log_4 y = \log_5(x+y)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3^t \\ y = 4^t \\ x + y = 5^t \end{cases} \Rightarrow 3^t + 4^t = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 2.$$

Với $t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 16 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 34.$

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = \log_2\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right)$. Tính

$$T = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + ... + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

A. $T = \frac{2019}{2}$. **B.** $T = 2019$. **C.** $T = 2018$. **D.** $T = 1009$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(1-x) = \log_2\left(1 - x - \frac{1}{2} + \sqrt{(1-x)^2 - (1-x) + \frac{17}{4}}\right) = \log_2\left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$

$$f(x) + f(1-x) = \log_2\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right) + \log_2\left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \log_2\left[\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right)\left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\right] = \log_2 4 = 2$$

$$\Rightarrow T = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + ... + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + ... + f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right)$$

$= 1009.2 = 2018$

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)$. Tính

$T=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+...+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$

A. $T=\frac{2019}{2}$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2018$. **D.** $T=1009$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(1-x)=\log_2\left(1-x-\frac{1}{2}+\sqrt{(1-x)^2-(1-x)+\frac{17}{4}}\right)=\log_2\left(\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$f(x)+f(1-x)=\log_2\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)+\log_2\left(\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$=\log_2\left[\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)\left(\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]=\log_2 4=2$

$\Rightarrow T=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+...+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$

$=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2018}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+f\left(\frac{2017}{2019}\right)+...+f\left(\frac{1009}{2019}\right)+f\left(\frac{1010}{2019}\right)$

$=1009.2=2018$

Câu 39. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_{25}x=\log_{15}y=\log_9(2x+y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\log_5\left(\frac{3}{5}\right)$. **D.** $\log_{\frac{5}{3}}2$.

Lời giải.

+ Đặt $\log_{25}x=\log_{15}y=\log_9(2x+y)=t\Rightarrow x=25^t,y=15^t,2x+y=9^t$. Cần tính $\frac{x}{y}=\left(\frac{5}{3}\right)^t$.

+ Mặt khác $2.25^t+15^t=9^t\Rightarrow 2.\left(\frac{5}{3}\right)^{2t}+\left(\frac{5}{3}\right)^t-1=0\Rightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^t=\frac{1}{2}$. Vậy **Chọn B.**

Câu 40. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9x=\log_6y=\log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a.b$?

A. $\text{a.b}=5$. **B.** $\text{a.b}=1$. **C.** $\text{a.b}=8$. **D.** $\text{a.b}=4$.

Lời giải

Chọn A

• Ta đặt $t=\log_9x=\log_6y=\log_4(x+y)\Rightarrow x=9^t;y=6^t;x+y=4^t$

Ta có: $9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}(\text{loai})\\\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(\text{nhan})\end{array}\right.$

Mà $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{6}\right)^t=\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó: $a=1;b=5$ và $a.b=5$.

Câu 41. Cho $\log_2 x=\sqrt{a}$, a>0. Giá trị của biểu thức $P=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3+\log_4 x$ bằng:

A. $-\frac{3\sqrt{a}}{2}$.. **B.** $-\frac{\sqrt{a}}{2}$.. **C.** $3\sqrt{a}$.. **D.** $\sqrt{a}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3+\log_4 x=2\log_2 x-3\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x=-\frac{1}{2}\log_2 x$

$=-\frac{\sqrt{a}}{2}$

Câu 42. Cho các số $a,\,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\log_{\sqrt{2}}(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

B. $\log_2(a+b)^2=4(\log_2 a+\log_2 b)$.

C. $\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right)=2(\log_2 a+\log_2 b)$.

D. $\log_2\left(\frac{a+b}{16}\right)=\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^2+b^2=14ab\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=16ab\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{4}\right)^2=ab$.

$\Rightarrow\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right)^2=\log_2 ab\Leftrightarrow 2\log_2(a+b)-2\log_2 4=\log_2 a+\log_2 b$.

$\Leftrightarrow\log_{\sqrt{2}}(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

Câu 43. Cho hai số a,b dương thỏa mãn đẳng thức $\log_4 a=\log_{25} b=\log\frac{4b-a}{4}$. Giá trị biểu thức $M=\log_6\left(\frac{a}{2}+4b\sqrt{2}\right)-\log_6 b$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $\log_4 a=\log_{25} b=\log\frac{4b-a}{4}=t$.

Khi đó: $a=4^t$, $b=25^t$, $\frac{4b-a}{4}=10^t$.

Nên: $\frac{4.25^t-4^t}{4}=10^t\Leftrightarrow 4.25^t-4^t=4.10^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{2t}+4.\left(\frac{2}{5}\right)^t-4=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^t=2\sqrt{2}-2$.

Suy ra: $\frac{a}{b}=\left(\frac{4}{25}\right)^t=(2\sqrt{2}-2)^2=12-8\sqrt{2}$.

Vậy: $M=\log_6\left(\frac{a}{2}+4b\sqrt{2}\right)-\log_6 b=\log_6\left(\frac{a}{2b}+4\sqrt{2}\right)=\log_6 6=1$

Câu 44. Cho các số thực a,b,c thuộc khoảng $(1;+\infty)$ và thỏa mãn

$\log_{\sqrt{a}}^2 b+\log_b c.\log_b\left(\frac{c^2}{b}\right)+9\log_a c=4\log_a b$. Giá trị của biểu thức $\log_a b+\log_b c^2$ bằng:

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\sqrt{a}}^2 b+\log_b c.\log_b\left(\frac{c^2}{b}\right)+9\log_a c=4\log_a b$

$\Leftrightarrow 4\log_a^2 b+\log_b c.(2\log_b c-\log_b b)+9\log_a c=4\log_a b$

$\Leftrightarrow 4\log_a^2 b+2\log_b^2 c-\log_b c+9\log_a c=4\log_a b$ $(*)$.

Đặt $\begin{cases}\log_a b=x\\ \log_b c=y\end{cases}$ ($x,y>0$ vì $a,b,c>1$).

Ta có $\log_a c=\log_a b.\log_b c=xy$.

Thay vào $(*)$ ta được: $4x^2+2y^2-y+9xy=4x\Leftrightarrow 4x^2+xy+8xy+2y^2-(4x+y)=0$

$\Leftrightarrow(4x+y)(x+2y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+y=0\ (loại)\\ x+2y=1\end{array}\right.$.

Vậy $\log_a b+\log_b c^2=\log_a b+2\log_b c=x+2y=1$.

Câu 45. Cho ba số thực dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a b+\log_c b=\log_a 2020.\log_c b$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $ab=2020$. **B.** $bc=2020$. **C.** $abc=2020$. **D.** $ac=2020$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a b+\log_c b=\log_a 2020.\log_c b\Leftrightarrow\log_a b+\frac{\log_a b}{\log_a c}=\log_a 2020.\frac{\log_a b}{\log_a c}$.

$\Leftrightarrow\log_a b.\log_a c+\log_a b=\log_a 2020.\log_a b\Leftrightarrow\log_a c+1=\log_a 2020$.

$\Leftrightarrow\log_a(ac)=\log_a 2020\Leftrightarrow ac=2020$. Đáp án **D.**

Câu 46. Cho các số dương a,b,c,x thoả $\frac{\log a}{p}=\frac{\log b}{q}=\frac{\log c}{r}=\log x\neq 0;\ \frac{b^2}{ac}=x^y$. Tính y theo p,q,r.

A. $y=q^2-pr$. **B.** $y=\frac{p+r}{2q}$. **C.** $y=2q-p-r$. **D.** $y=2q-pr$.

Lời giải

Đáp án: C

Ta có: $\frac{b^2}{ac}=x^y\Leftrightarrow\log\frac{b^2}{ac}=\log x^y$

$\Rightarrow y\log x=2\log b-\log a-\log c=2q\log x-p\log x-r\log x=(2q-p-r)\log x$

$\Rightarrow y=2q-p-r$ (do $\log x\neq 0$).

Câu 47. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\frac{x+y}{6}$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

A. $\frac{x}{y}=3$. **B.** $\frac{x}{y}=5$. **C.** $\frac{x}{y}=2$. **D.** $\frac{x}{y}=4$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_9 x=\log_6 y=\log_4\frac{x+y}{6}=t\Rightarrow\begin{cases}x=9^t\\y=6^t\\\frac{x+y}{6}=4^t\end{cases}\Rightarrow 9^t+6^t=6.4^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t=6\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=2.$$

Vậy $\frac{x}{y}=\left(\frac{3}{2}\right)^t=2$.

Câu 48. Biết rằng phương trình $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x+\log_{\frac{1}{3}}2$ có hai nghiệm x_1 và x_2. Hãy tính tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$.

A. $S=252$. **B.** $S=180$ **C.** $S=9$. **D.** $S=45$.

Lời giải

Chọn B

Đkxđ: $x>-1$.

Ta có $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x+\log_{\frac{1}{3}}2\Leftrightarrow\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=\log_3 3^{2x}-\log_3 2$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=\log_3\frac{3^{2x}}{2}\Leftrightarrow 3^{x+1}-1=\frac{3^{2x}}{2}\Leftrightarrow 3^{2x}-6.3^x+2=0.$$

Đặt $t=3^x$, $t>0$, phương trình trên trở thành

$$t^2-6t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3+\sqrt{7}\\t=3-\sqrt{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=3+\sqrt{7}\\3^x=3-\sqrt{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\log_3\left(3+\sqrt{7}\right)\\x_2=\log_3\left(3-\sqrt{7}\right)\end{array}\right..$$

Câu 49. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a=25^b=10^c$. Tính $T=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$.

A. 2. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn#**A.**

Đặt $4^a=25^b=10^c=t\Rightarrow\begin{cases}a=\log_4 t\\b=\log_{25}t\\c=\log_{10}t\end{cases}$.

Khi đó $T=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{\log_{10}t}{\log_4 t}+\frac{\log_{10}t}{\log_{25}t}=\frac{\log_t 4}{\log_t 10}+\frac{\log_t 25}{\log_t 10}=\log_{10}4+\log_{10}25$

$=\log_{10}(4.25)=\log_{10}100=2$. **Chọn#A.**

Câu 50. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\frac{x+y}{6}$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

A. $\frac{x}{y}=3$. **B.** $\frac{x}{y}=5$. **C.** $\frac{x}{y}=2$. **D.** $\frac{x}{y}=4$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_9 x=\log_6 y=\log_4\frac{x+y}{6}=t\Rightarrow\begin{cases}x=9^t\\y=6^t\\\dfrac{x+y}{6}=4^t\end{cases}\Rightarrow 9^t+6^t=6.4^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t=6\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=2.$$

Vậy $\frac{x}{y}=\left(\frac{3}{2}\right)^t=2$.

Câu 51. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $2log_{12}(a+3b)=1+log_{12}a+log_{12}b$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2log_{12}(a+3b)=\ 1+log_{12}a+log_{12}b\Leftrightarrow\log_{12}(a+3b)^2=\log_{12}(12ab)$

$\Leftrightarrow(a+3b)^2=12ab\Leftrightarrow(a-3b)^2=0\Leftrightarrow a=3b\Leftrightarrow\frac{a}{b}=3$.

Câu 52. Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e))=2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$

A. 10. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log(\log(e))=\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)=-\log(\ln 10)\Leftrightarrow\log(\ln(10))=-t$

Theo giả thiết ta có: $f(t)=a\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+b\sin t+6=2\Leftrightarrow a\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+b\sin t=-4$

Khi đó $f(\log(\ln 10))=f(-t)=a\ln\left(-t+\sqrt{t^2+1}\right)+b\sin(-t)+6=a\ln\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}-b\sin t+6$

$=-\left(a\ln\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}+b\sin t\right)+6=10$.

Câu 53. Cho hai số thực dương *x, y* thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}$. Tìm giá trị của biểu thức sau: $P=x+y$.

A. $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=5$. **D.** $P=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn đáp án A

Phương pháp

+) Sử dụng $5^{\ln 2}=2^{\ln 5}$, chia cả 2 vế cho $5^{\ln(x+y)}>0$, tìm mối quan hệ giữa *x* và *y*.

Cách giải

$$2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=5^{\ln 2}$$

$\Leftrightarrow 2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)} = 5^{\ln 2-\ln(x+y)} = 5^{\ln\frac{2}{x+y}} = 5^{-\ln\frac{x+y}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\ln\frac{x+y}{2}}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = 1 \Leftrightarrow x+y=2$

Câu 54. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{x}{y}\right)^2$.

A. $P = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $P = 6-2\sqrt{5}$. **C.** $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $P = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt

$\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x+y = 9^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Do đó $P = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 55. Cho $\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \ (y>0, y>x)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $3x = 4y$. **B.** $x = -\frac{3}{4}y$. **C.** $x = \frac{3}{4}y$. **D.** $3x = -4y$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài ta có: $\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \ (y>0, y>x)$

$\Leftrightarrow \log_{4^{-1}}(y-x) - \log_4 y^{-1} = 1$

$\Leftrightarrow -\log_4(y-x) + \log_4 y = 1$

$\Leftrightarrow \log_4 \frac{y}{y-x} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{y}{y-x} = 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y$

Câu 56. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25} x = \log_{20} y = \log_{16}(5x+3y)$. Giá trị của $\frac{(x-y)(x+y)}{xy}$ bằng

A. $\frac{-4}{9}$.. **B.** $\frac{3}{2}$.. **C.** $\frac{1}{4}$.. **D.** $-\frac{21}{10}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_{25}x=\log_{20}y=\log_{16}\left(\frac{5x+3y}{2}\right)$. Khi đó

$$\begin{cases}x=25^t\\ y=20^t\\ \frac{5x+3y}{2}=16^t\end{cases}\Rightarrow 5.25^t+3.20^t=2.16^t \Leftrightarrow 5.\left(\frac{25}{16}\right)^t+3.\left(\frac{5}{4}\right)^t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{4}\right)^t=-1\\ \left(\frac{5}{4}\right)^t=\frac{2}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{5}{4}\right)^t=\frac{2}{5}.$$

Do đó: $\frac{x}{y}=\left(\frac{25}{20}\right)^t=\left(\frac{5}{4}\right)^t=\frac{2}{5}$. Suy ra $\frac{(x-y)(x+y)}{xy}=\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=-\frac{21}{10}$.

Câu 57. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_4 a=\log_{25}b=\log\frac{4b-a}{2}$. Tính giá trị $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{a}{b}=6-2\sqrt{5}$. **B.** $\frac{a}{b}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$. **C.** $\frac{a}{b}=6+2\sqrt{5}$. **D.** $\frac{a}{b}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_4 a=\log_{25}b=\log\frac{4b-a}{2}=t$

Ta có $$\begin{cases}a=4^t\\ b=25^t\\ \frac{4b-a}{2}=10^t\end{cases}\Rightarrow 4.25^t-4^t=2.10^t\Leftrightarrow 4-\left(\frac{4}{25}\right)^t=2.\left(\frac{10}{25}\right)^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{2t}+2.\left(\frac{2}{5}\right)^t-4=0$$

Đặt $\left(\frac{2}{5}\right)^t=y>0$, ta có $y^2+2y-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1-\sqrt{5}\\ y=-1+\sqrt{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow y=-1+\sqrt{5}$.

Từ đó $\left(\frac{2}{5}\right)^t=-1+\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{4^t}{25^t}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2\Rightarrow\frac{a}{b}=6-2\sqrt{5}$.

Câu 58. Cho $x,\ y$ là các số thực thỏa mãn $xy=4,\ x\ge\frac{1}{2},\ y\ge 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=\log_2^2 x+(\log_2 y-1)^2$. Tổng $M+2m$ bằng

A. 6. **B.** 11. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{21}{2}$.

Lời giải

Chọn#A.

Từ giả thiết suy ra $x=\frac{4}{y}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow y\le 8$ mặt khác vì $y\ge 1\Rightarrow 1\le y\le 8$.

Ta có $P=\log_2^2 x+(\log_2 y-1)^2=\log_2^2\frac{4}{y}+(\log_2 y-1)^2=(\log_2 y-2)^2+(\log_2 y-1)^2$.

Vì $1\le y\le 8$ đặt $\log_2 y=t$ nên $0\le\log_2 y\le 3$.

Xét hàm $f(t)=(t-2)^2+(t-1)^2$ trên $[0;3]$ ta có $f'(t)=4t-6=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}\in[0;3]$. Ta có $m=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}; M=f(0)=5 \Rightarrow M+2m=6.$

Câu 59. Phương trình $\log_3(x-1)=\log_4(5-2x)$ có mấy nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$\log_3(x-1)=\log_4(5-2x)\,(1)$

ĐK: $1<x<\frac{5}{2}$

Đặt $\log_3(x-1)=\log_4(5-2x)=t$

$$\Rightarrow \begin{cases}\log_3(x-1)=t\\ \log_4(5-2x)=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=3^t\\ 5-2x=4^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3^t+1\\ x=\dfrac{5-4^t}{2}\end{cases} \Leftrightarrow 3^t+1=\frac{5-4^t}{2} \Leftrightarrow 4^t+2.3^t-3=0(*)$$

Xét hàm số $f(t)=4^t+2.3^t-3 \Rightarrow f'(t)=4^t\ln 4+2.3^t\ln 4>0$

$f(t)$Hàm số $f(t)$đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

$f(t)$Phương trình $f(t)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm

mà $f(0)=4^0+2.3^0-3=0$

Vậy $t=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(*)$

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Câu 60. Biết rằng nếu $x\in R$ thỏa mãn $27^x+27^{-x}=4048$ thì $3^x+3^{-x}=9a+b$ trong đó $a,b\in N; 0<a\le 9$. Tổng $a+b$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Đáp án: B

Ta có $27^x+27^{-x}=4048 \Leftrightarrow 3^{3x}+3^{-3x}=4048 \Leftrightarrow (3^x+3^{-x})^3-3.3^x.3^{-x}.(3^x+3^{-x})=4048$

Đặt $3^x+3^{-x}=u(u>0)$ ta có phương trình $u^3-3u-4048=0 \Leftrightarrow u=16$

Từ $u=16 \Rightarrow 9a+b=16$ mà $0<a\le 9; a,b\in N \Rightarrow a=1; b=7$

Câu 61. Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a=25^b=10^c$. Tính $T=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$.

A. $T=\frac{1}{2}$. **B.** $T=\sqrt{10}$. **C.** $T=2$. **D.** $T=\frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử: $4^a=25^b=10^c=t \Rightarrow \begin{cases}a=\log_4 t\\ b=\log_{25} t\\ c=\log_{10} t\end{cases}.$

Ta có: $T=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{\log_{10} t}{\log_4 t}+\frac{\log_{10} t}{\log_{25} t}=\frac{\log_t 4}{\log_t 10}+\frac{\log_t 25}{\log_t 10}$

$=\log_{10}4+\log_{10}25=\log_{10}(4.25)=\log_{10}100=2$.

Câu 62. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\frac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{a}{b}=7-2\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a}{b}=\frac{3-\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a}{b}=7+2\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a}{b}=\frac{3+\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Đặt $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\frac{5b-a}{2}=t,\ t\in\mathbb{R}$. Ta có $a=9^t,\ b=16^t,\ \frac{5b-a}{2}=12^t$.

Suy ra:

$$5.16^t-9^t=2.12^t\Leftrightarrow 5-\left(\frac{9}{16}\right)^t=2.\left(\frac{12}{16}\right)^t\Leftrightarrow 5-\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}=2.\left(\frac{3}{4}\right)^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}+2.\left(\frac{3}{4}\right)^t-5=0.$$

Giải phương trình, ta được $\left(\frac{3}{4}\right)^t=\sqrt{6}-1$, (nhận) hoặc $\left(\frac{3}{4}\right)^t=-\sqrt{6}-1$, (loại).

Suy ra $\frac{a}{b}=\left(\frac{9}{16}\right)^t=\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}=\left(\sqrt{6}-1\right)^2=7-2\sqrt{6}$.

Câu 63. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\frac{1}{\log_{3^3} x}+...+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x\neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2n+3$.

A. $P=23$. **B.** $P=41$. **C.** $P=43$. **D.** $P=32$.

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\frac{1}{\log_{3^3} x}+...+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{190}{\log_3 x}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\log_3 x}+\frac{2}{\log_3 x}+\frac{3}{\log_3 x}+...+\frac{n}{\log_3 x}=\frac{190}{\log_3 x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+2+3+...+n}{\log_3 x}=\frac{190}{\log_3 x}$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+...+n=190$$

$$\Leftrightarrow\frac{n(n+1)}{2}=190\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=19\\ n=-20\,(loai)\end{array}\right.$$

$P=2n+3=2.19+3=41$.

Chọn B

Câu 64. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln^2\sqrt{x}+\ln^2 y=\ln x.\ln y$. Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{1+\log_2 x+\log_{\sqrt{2}} y}{-1+2\log_2\left(x+y^2\right)}$.

A. $M=\frac{1}{2}$. **B.** $M=2$. **C.** $M=\frac{1}{4}$. **D.** $M=1$

Lời giải

Chọn D

Do x, y là các số thực dương nên ta có :

$$\ln^2\sqrt{x}+\ln^2 y=\ln x.\ln y\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln^2 x+\ln^2 y=\ln x.\ln y\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\ln x-\ln y\right)^2=0$$

$\Leftrightarrow \ln x = 2\ln y \Leftrightarrow x = y^2$

$\Leftrightarrow \ln x = 2\ln y \Leftrightarrow x = y^2$.

Ta có:

$$M = \frac{1+\log_2 x+\log_{\sqrt{2}} y}{-1+2\log_2\left(x+y^2\right)} = \frac{1+\log_2 x+2\log_2 y}{-1+2\log_2\left(x+y^2\right)} = \frac{1+\log_2 x+\log_2 y^2}{-1+2\log_2\left(x+y^2\right)} = \frac{1+\log_2 x+\log_2 x}{-1+2\log_2\left(x+x\right)}$$

$$= \frac{1+2\log_2 x}{-1+2\left[\log_2 2+\log_2 x\right]} = 1$$

Câu 65. Phương trình $9^{-|2-x|} - 4.3^{-|2-x|} = m$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = \frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ tối giản). Giá trị a^2+b^2 bằng

A. 5. **B.** 17. **C.** 25. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $3^{-|2-x|} = t$, vì $3^{-|2-x|} \le 3^0 = 1 \Rightarrow t \in (0;1]$.

Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 4t = m \Leftrightarrow t^2 - 4t - m = 0,\ (1)$. Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $-|2-x| = 0 \Rightarrow t = 3^0 = 1 \Rightarrow m = 1^2 - 4.1 = -3$.

Thử lại với $m = -3$ ta dễ dàng thấy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Vậy $m = -3 = \frac{-3}{1} \Rightarrow a = -3; b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 10$.

Câu 66. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{27} x = \log_{12} y = \log_8\left(\frac{x}{9}+\frac{5y}{12}\right)$. Giá trị của $\frac{y}{x}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\log_3\left(\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_{27} x = \log_{12} y = \log_8\left(\frac{x}{9}+\frac{5y}{12}\right)$. Khi đó $\begin{cases} x = 27^t \\ y = 12^t \\ \frac{x}{9}+\frac{5y}{12} = 8^t \end{cases} \Rightarrow \frac{27^t}{9} + \frac{5}{12}12^t = 8^t$

$$\Leftrightarrow 4.27^t + 15.12^t = 36.8^t \Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{3t} + 15.\left(\frac{3}{2}\right)^t - 36 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 0.$$

Do đó: $\frac{y}{x} = \frac{4}{9}$.

Câu 67. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{x}{y}\right)^2$.

A. $P = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $P = 6-2\sqrt{5}$. **C.** $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $P = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt

$$\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 9^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Do đó $P = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 68. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25} x = \log_{20} y = \log_{16} \frac{5x+3y}{2}$. Giá trị của $\frac{(x-y)(x+y)}{xy}$ bằng

A. $\frac{-4}{9}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{21}{10}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_{25} x = \log_{20} y = \log_{16}\left(\frac{5x+3y}{2}\right)$. Khi đó

$$\begin{cases} x = 25^t \\ y = 20^t \\ \frac{5x+3y}{2} = 16^t \end{cases} \Rightarrow 5.25^t + 3.20^t = 2.16^t \Leftrightarrow 5.\left(\frac{25}{16}\right)^t + 3.\left(\frac{5}{4}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{4}\right)^t = -1 \\ \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{5}.$$

Do đó: $\frac{x}{y} = \left(\frac{25}{20}\right)^t = \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{5}$. Suy ra $\frac{(x-y)(x+y)}{xy} = \frac{x^2-y^2}{xy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = -\frac{21}{10}$.

Câu 69. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25} x = \log_{20} y = \log_{16} \frac{5x+3y}{2}$. Giá trị của $\frac{(x-y)(x+y)}{xy}$ bằng

A. $\frac{-4}{9}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{21}{10}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_{25} x = \log_{20} y = \log_{16}\left(\frac{5x+3y}{2}\right)$. Khi đó

$$\begin{cases} x = 25^t \\ y = 20^t \\ \frac{5x+3y}{2} = 16^t \end{cases} \Rightarrow 5.25^t + 3.20^t = 2.16^t \Leftrightarrow 5.\left(\frac{25}{16}\right)^t + 3.\left(\frac{5}{4}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{4}\right)^t = -1 \\ \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{5}.$$

Do đó: $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{25}{20}\right)^t=\left(\dfrac{5}{4}\right)^t=\dfrac{2}{5}$. Suy ra $\dfrac{(x-y)(x+y)}{xy}=\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{21}{10}$.

Câu 70. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$+$ Đặt $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)=t\Rightarrow x=9^t, y=6^t, \dfrac{x+y}{6}=4^t$. Cần tính $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t$.

$+$ Mặt khác $9^t+6^t=6.4^t\Rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t-6=0\Rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=2$.

Câu 71. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15} y=\log_9\dfrac{x+y}{4}$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là các số nguyên dương, tính $a+b$.

A. $a+b=14$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=21$. **D.** $a+b=34$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\mathrm{t}=\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15} y=\log_9\dfrac{x+y}{4}$,

ta được $2.25^t+15^t=4.9^t\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2t}+\left(\dfrac{5}{3}\right)^t=4$

$\Rightarrow t=\log_{\frac{5}{3}}\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\Rightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{2.25^t}{15^t}=2.\left(\dfrac{5}{3}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Do đó $a=1$, $b=33$ nên $a+b=34$.

Câu 72. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x=\log_9 y=\log_4(2x+2y)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$?

A. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$. **C.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$. **D.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $\log_6 x=\log_9 y=\log_4(2x+2y)=t$. Ta có: $\begin{cases} x=6^t & (1)\\ y=9^t & (2)\\ 2x+2y=4^t & (3)\end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{x}{y}=\dfrac{6^t}{9^t}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t>0$.

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2.6^t+2.9^t=4^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2t}-2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\left(\dfrac{2}{3}\right)^t=1+\sqrt{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} & \text{(thỏa)}\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^t=1-\sqrt{3} & \text{(loại)}\end{array}\right..$$

Câu 73. Cho hai số thực dương a,b thỏa $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$.

$$\Rightarrow\begin{cases}a=4^t\\b=6^t\\a+b=9^t\end{cases}\Rightarrow 4^t+6^t=9^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}+\left(\frac{2}{3}\right)^t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}(L)\end{array}\right..$$

$$\frac{a}{b}=\frac{4^t}{6^t}=\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 74. Cho phương trình $9^x+(x-12).3^x+11-x=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Giá trị $S=x_1+x_2$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 0.

Giải

Chọn phương án#A.

Ta thấy phương trình $9^x+(x-12).3^x+11-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=11-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3^x+x=11\end{array}\right.$.

Xét hàm $y=f(t)=3^t+t$. Ta có $f'(t)=3^t.\ln 3+1>0\,\forall t$. Mà $f(2)=11$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $3^x+x=11$.

Vậy tổng nghiệm là 2.

Câu 75. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_{27}x=\log_{12}y=\log_8\left(\frac{x}{9}+\frac{5y}{12}\right)$. Giá trị của $\frac{y}{x}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\log_3\left(\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}}2$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_{27}x=\log_{12}y=\log_8\left(\frac{x}{9}+\frac{5y}{12}\right)$. Khi đó $\begin{cases}x=27^t\\y=12^t\\\frac{x}{9}+\frac{5y}{12}=8^t\end{cases}\Rightarrow\frac{27^t}{9}+\frac{5}{12}12^t=8^t$

$$\Leftrightarrow 4.27^t+15.12^t=36.8^t\Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}+15.\left(\frac{3}{2}\right)^t-36=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{3}{2}\Leftrightarrow t=1$$

Do đó: $\frac{y}{x}=\frac{4}{9}$.

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\log(x^2-5x+m)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m>\frac{25}{4}$. **B.** $m\ge\frac{4}{25}$. **C.** $m\ge\frac{25}{4}$. **D.** $m>\frac{4}{25}$.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra ta có $x^2 - 5x + m > 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta = 25 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{25}{4}$.

Câu 77. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

A. $a + b = 6$. **B.** $a + b = 11$. **C.** $a + b = 4$. **D.** $a + b = 8$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_9 x = t$

Theo đề ra có $\begin{cases} \log_9 x = \log_6 y = t \\ \log_9 x = \log_4 (x + y) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t & (1) \\ y = 6^t & (2) \\ x + y = 4^t & (3) \\ \frac{x}{y} = \left(\frac{3}{2}\right)^t & (4) \end{cases}$

Từ (1), (2), và (3) ta có

$$9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow (3^t)^2 + (3.2)^t - 4^t = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & (TM) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} & (L) \end{array}\right.$$

Thế vào (4) ta được $\frac{x}{y} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2} \Rightarrow a = 1; b = 5$

Thử lại ta thấy $a = 1; b = 5$ thỏa mãn dữ kiện bài toán. Suy ra $a + b = 6$.

Câu 78. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x + y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

+ Đặt $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x + y) = t \Rightarrow x = 4^t, y = 6^t, x + y = 9^t$. Cần tính $\frac{x}{y} = \left(\frac{2}{3}\right)^t$.

+ Mặt khác $4^t + 6^t = 9^t \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (nhan) \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} (loai) \end{array}\right.$.

Câu 79. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a + b$.

A. $T = 4$. **B.** $T = 8$. **C.** $T = 11$. **D.** $T = 6$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)\to\begin{cases}x=9^t\\ y=6^t\\ x+y=4^t\end{cases}$.

Suy ra $x+y=4^t\Leftrightarrow 9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=1\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t-1=0$.

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Mặt khác $\dfrac{x}{y}=\dfrac{9^t}{6^t}=\left(\dfrac{9}{6}\right)^t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$ suy ra $\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\to\begin{cases}a=1\\ b=5\end{cases}$.

Vậy $T=a+b=6$.

Câu 80. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $3^x=5^y=15^{\frac{2019}{x+y}-x}$. Gọi $S=xy+yz+zx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S\in(1;2018)$. **B.** $S\in(0;2019)$. **C.** $S\in(0;2020)$. **D.** $S\in(2019;2020)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $3^x=5^y=15^{\frac{2019}{x+y}-x}=t$. Từ giả thiết ta có $\begin{cases}x=\log_3 t\\ y=\log_5 t\\ \dfrac{2019}{x+y}-z=\log_{15} t\end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{2019}{x+y}-z=\log_{15}t=\dfrac{1}{\log_t 15}=\dfrac{1}{\log_t 3+\log_t 5}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=\dfrac{xy}{x+y}$.

Suy ra $\dfrac{2019}{x+y}=\dfrac{xy+(x+y)z}{x+y}\Leftrightarrow 2019=xy+yz+zx$.

Câu 81. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=26$. **B.** $T=29$. **C.** $T=20$. **D.** $T=25$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)=t$, suy ra $x=9^t$, $y=6^t$, $x+y=4^t$.

Khi đó ta có: $9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t-1=0$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (Vì $\left(\dfrac{3}{2}\right)^t>0$).

Lại có $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t\Rightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=1$, $b=5$ hay $T=26$.

Câu 82. Biết rằng bất phương trình $\log_2\left(5^x+2\right)+2.\log_{\left(5^x+2\right)}2>3$ có tập nghiệm là $S=\left(\log_a b;+\infty\right)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\neq 1$. Tính $P=2a+3b$.

A. $P=11$. **B.** $P=16$. **C.** $P=18$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2\left(5^x+2\right)+2.\log_{\left(5^x+2\right)}2>3\Leftrightarrow\log_2\left(5^x+2\right)+2.\dfrac{1}{\log_2\left(5^x+2\right)}>3$ $(*)$.

Đặt $t=\log_2\left(5^x+2\right)>1$. Khi đó $(*)$ thành $t+\dfrac{2}{t}>3\Leftrightarrow t^2-3t+2>0\Leftrightarrow t>2$ (do $t>1$).

Với $t>2$ thì $\log_2\left(5^x+2\right)>2=\log_2 2^2\Leftrightarrow 5^x>2\Leftrightarrow x>\log_5 2$.

Suy ra $\begin{cases}a=5\\b=2\end{cases}\Rightarrow P=2a+3b=16$.

Câu 83. Cho x,y là các số thực dương thoả mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(2x+y\right)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}}2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(2x+y\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=9^t\\y=6^t\\t=\log_4\left(2.9^t+6^t\right)(*)\end{cases}$$

$$(*)\Leftrightarrow 2.9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow 2.\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^t=-1(loai)\\\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{1}{2}=\frac{x}{y}\end{array}\right.$$

Vậy $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 84. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16}a=\log_{20}b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T=\dfrac{a}{b}$.

A. $0<T<\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}<T<\dfrac{2}{3}$ **C.** $-2<T<0$ **D.** $1<T<2$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_{16}a=\log_{20}b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}=x$, ta có:

$$\begin{cases} a=16^x \\ b=20^x \\ \dfrac{2a-b}{3}=25^x \end{cases} \Rightarrow 2.16^x-20^x=3.25^x \Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{16}{25}\right)^x-\left(\dfrac{20}{25}\right)^x=3$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2x}-\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{4}{5}\right)^x=-1 \\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\dfrac{3}{2}.$$

Từ đó $T=\dfrac{a}{b}=\dfrac{16^x}{20^x}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\dfrac{3}{2}\in(1;2)$.

Hay $1<T<2$.

Câu 85. Xét các số thực dương $x,\ y$ thoả mãn $2018^{2(x^2-y+1)}=\dfrac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=2y-3x$ bằng

A. $P_{\min}=\dfrac{3}{4}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{5}{6}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{7}{8}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$2018^{2(x^2-y+1)}=\dfrac{2x+y}{(x+1)^2}\Rightarrow \log_{2018}\left(x^2+2x+1\right)+2\left(x^2+2x+1\right)=\log_{2018}(2x+y)+2(2x+y)\ (*).$$

Xét hàm: $f(t)=\log_{2018}t+2t\ ,t>0$.

Suy ra: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2018}+2>0\ ,\forall t>0.$

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $(*)\Leftrightarrow f\left(x^2+2x+1\right)=f(2x+y)\Leftrightarrow x^2+2x+1=2x+y\Leftrightarrow y=x^2+1$.

Khi đó: $P=2y-3x=2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}\geq\dfrac{7}{8}$.

Kết luận: $P_{\min}=\dfrac{7}{8}$ khi $x=\dfrac{3}{4}$.

Câu 86. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+18}{x}$.

A. 9. **B.** $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1+9\sqrt{2}$. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}\Leftrightarrow 4+3^{x^2-2y+2}=\left[2+3^{2(x^2-2y)}\right].7^{2y-x^2+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4+3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}}=\dfrac{2+3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}}(*)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4+3^t}{7^t}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(t)=4.\left(\dfrac{1}{7}\right)^t+\left(\dfrac{3}{7}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow f\left(x^2-2y+2\right)=f\left[2(x^2-2y)\right]\Leftrightarrow x^2-2y+2=2(x^2-2y)\Leftrightarrow x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$. Từ đó $P=\dfrac{x^2+x+16}{x}=x+\dfrac{16}{x}+1\geq 2\sqrt{x.\dfrac{16}{x}}+1\Leftrightarrow P\geq 9$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x=4$.

Câu 87. Cho $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log\left[\dfrac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]$.

A. $T=9$. **B.** $T=3$. **C.** $T=10$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Chọn B

Có $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$

$\Rightarrow f(96)=f(95+1)=f(95)+f(1)+95=f(95)+96=f(94)+95+96=...=f(1)+2+...+95+96$

$\Rightarrow f(96)=1+2+...+95+96=\dfrac{96.97}{2}=4656$.

Tương tự $f(69)=1+2+...+68+69=\dfrac{69.70}{2}=2415$.

Vậy $T=\log\left[\dfrac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]=\log\left(\dfrac{4656-2415-241}{2}\right)=\log 1000=3$.

GTLN – GTNN
HÀM SỐ TRỊ TUYỆT ĐỐI
CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+m^2-m-3\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ không vượt quá 15?

A. 3. **B.** **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn#A.

Xét hàm số $f(x)=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+m^2-m-3$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2x+\left(m^2+1\right)=2x^2+(x+1)^2+m^2>0, \forall x\in[-1;2]$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1;2] \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)=-m-4 \\ \max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=3m^2-m+11 \end{cases}$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;2]} y=\max\limits_{[-1;2]}|f(x)|=\max\left\{|-m-4|;\left|3m^2-m+11\right|\right\}\le 15 \Leftrightarrow \begin{cases} |-m-4|\le 15 \\ \left|3m^2-m+11\right|\le 15 \end{cases}$

$\begin{cases} -15\le m+4\le 15 \\ -15\le 3m^2-m+11\le 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19\le m\le 11 \\ 3m^2-m-4\le 0 \\ 3m^2-m+26\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -19\le m\le 11 \\ -1\le m\le \dfrac{4}{3} \end{cases}$. Với $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $\sin 2x-2\cos^2 x+C$. **B.** $\sin 2x+2\cos^2 x+C$.
C. $-\sin 2x+2\cos^2 x+C$. **D.** $-\sin 2x-2\cos^2 x+C$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ nên:

$\Rightarrow f(x)e^{2x}=\left(\cos^2 x\right)'=-2\cos x.\sin x=-\sin 2x$.

Tính $I=\int f'(x)e^{2x}dx$.

Đặt $\begin{cases} u=e^{2x} \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2e^{2x}dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow I=f(x).\mathrm{e}^{2x}-2\int f(x)e^{2x}dx=-\sin 2x-2\cos^2 x+C$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\left|x^2+x+m\right|$. Tổng tất cả giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[-2;2]} y=2$ bằng

A. $-\dfrac{31}{4}$. **B.** -8. **C.** $-\dfrac{23}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $u=x^2+x+m$ trên đoạn $[-2;2]$, có: $u'=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Khi đó: $\begin{cases} \max\limits_{[-2;2]} u = max\left\{u(-2), u\left(-\dfrac{1}{2}\right), u(2)\right\} = m+6 \\ \min\limits_{[-2;2]} u = \min\left\{u(-2), u\left(-\dfrac{1}{2}\right), u(2)\right\} = m-\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

▪ Nếu $m-\dfrac{1}{4} \geq 0$ hay $m \geq \dfrac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = m-\dfrac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn).

▪ Nếu $m+6 \leq 0$ hay $m \leq -6$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = -m-6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$ (thỏa mãn).

▪ Nếu $-6 < m < \dfrac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = 0$ (không thỏa mãn).

Vậy có hai số thực $m = \dfrac{9}{4}$ và $m = -8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tổng các giá trị đó bằng $-\dfrac{23}{4}$.

Câu 4. Gọi điểm $M(a;b)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho M có hoành độ dương đồng thời tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất. Tính $T = a^4 - 3b^3$.

A. $T = 16$. **B.** $T = -294$. **C.** $T = 82$. **D.** $T = 175$.

Lời giải

Chọn D

Đường TCN của đồ thị (C) là $(d_1): y = 1$, đường TCĐ của đồ thị (C) là $(d_2): x = 2$.

Điểm $M \in (C) \Rightarrow M\left(m; \dfrac{m+2}{m-2}\right)$, khi đó $d(M, d_1) = \dfrac{4}{|m-2|}$ và $d(M, d_2) = |m-2|$.

Theo bài ra, ta có $T = d(M, d_1) + d(M, d_2) = |m-2| + \dfrac{4}{|m-2|} \geq 2\sqrt{|m-2| \cdot \dfrac{4}{|m-2|}} = 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $|m-2| = \dfrac{4}{|m-2|} \Leftrightarrow m = 4$ (vì yêu cầu $m > 0$). Suy ra $M(4;3)$

Ta có $a = 4; b = 3 \Rightarrow T = (4)^4 - 3.(3)^3 = 175$

Câu 5. Tìm các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. $m = -4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -4, m = 2$. **D.** $m = \pm 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + m$ trên đoạn $[-1;2]$, ta có $f'(x) = 2(x-1)$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy:

$\max\limits_{[-1;2]} y = \max\limits_{[-1;2]} |f(x)| = \max\{|f(-1)|;\ |f(1)|;\ |f(2)|\} = \max\{|3+m|;\ |m-1|;\ |m|\}$.

TH1. Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m-1|$, ta có $\begin{cases} |m-1| \ge |m+3| \\ |m-1| \ge |m| \\ |m-1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-1| \ge |m+3| \\ |m-1| \ge |m| \\ m = -4 \vee m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$

TH2. Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m+3|$, ta được $\begin{cases} |m+3| \ge |m-1| \\ |m+3| \ge |m| \\ |m+3| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+3| \ge |m-1| \\ |m+3| \ge |m| \\ m = 2 \vee m = -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

TH3. Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m|$, ta được $\begin{cases} |m| \ge |m-1| \\ |m| \ge |m+3| \\ |m| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \ge |m-1| \\ |m| \ge |m+3| \\ m = 5 \vee m = -5 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M \le 2m$?

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	a	$\nearrow$	$a+1$	$\searrow$	a

Do $2m \ge M > 0$ nên $m > 0$ suy ra $g(x) \ne 0\ \forall x \in [0;2]$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a+1 < 0 \\ a > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -1 \\ a > 0 \end{array}\right.$.

Nếu $a < -1$ thì $M = -a$, $m = -a-1 \Rightarrow 2(-a-1) \ge -a \Leftrightarrow a \le -2$.

Nếu $a > 0$ thì $M = a+1$, $m = a \Rightarrow 2a \ge a+1 \Leftrightarrow a \ge 1$.

Do đó $a \le -2$ hoặc $a \ge 1$, do a nguyên và thuộc đoạn $[-3;3]$ nên $a \in \{-3;-2;1;2;3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M \le 2m$?

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$g'(x)=4x^3-12x^2+8x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	a	$\nearrow$	$a+1$	$\searrow$	a

Do $2m \geq M > 0$ nên $m > 0$ suy ra $g(x) \neq 0\ \forall x \in [0;2]$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a+1<0 \\ a>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>0 \end{array}\right.$.

Nếu $a<-1$ thì $M=-a$, $m=-a-1 \Rightarrow 2(-a-1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2$.

Nếu $a>0$ thì $M=a+1$, $m=a \Rightarrow 2a \geq a+1 \Leftrightarrow a \geq 1$.

Do đó $a \leq -2$ hoặc $a \geq 1$, do a nguyên và thuộc đoạn $[-3;3]$ nên $a \in \{-3;-2;1;2;3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\left|2x^3-6x^2+m\right|$, gọi A là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Số giá trị nguyên của tham số m để $A<2020$ là

A. 4031. **B.** 4032. **C.** 4033. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Xét $u(x)=2x^3-6x^2-m$ trên đoạn $[1;3]$. Ta có hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

$u'(x)=6x^2-12x$.

$u'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin (1;3) \\ x=2 \in (1;3) \end{array}\right.$.

Khi đó: $\begin{cases} \max\limits_{[1;3]} \mathrm{u(x)} = \max\{u(1);u(2);u(3)\}=m \\ \min\limits_{[1;3]} \mathrm{u}(x)=\min\{u(1);u(2);u(3)\}=m-8 \end{cases}$.

$A=\max\{|m|;|m-8|\}$.

Yêu cầu $A<2020 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m|<2020 \\ |m| \geq |m-8| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-8|<2020 \\ |m-8| \geq |m| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2020<m<2020 \\ m \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} -2012<m<2028 \\ m \leq 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 \leq m < 2020 \\ -2012 < m \leq 4 \end{array}\right.$.

Vậy có 4031 số nguyên m để $A<2020$.

Câu 9. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|2x^3-6x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 8. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8. **B.** -16. **C.** -64. **D.** -72.

Lời giải

Chọn C

Xét $u(x)=2x^3-6x+m$ trên đoạn $[0;3]$. Dễ thấy hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$

có $u'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\Rightarrow x=1\in[0;3]$.

Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{[0;3]} u=\max\{u(0);u(1);u(3)\}=\max\{m;m-4;m+36\}=m+36\\ \min\limits_{[0;3]} u=\min\{u(0);u(1);u(3)\}=\min\{m;m-4;m+36\}=m-4\end{cases}$.

Theo bài ra $\mathop{Min}\limits_{[0;3]} f(x)=\min\{|m-4|;|m+36|,0\}=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m-4|=8\\ m-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}m+36<0\\ |m+36|=8\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=12\\ m=-44\end{array}\right.$.

Do đó $S=\{-44,12\}$. Vậy số các phần tử của S bằng 2.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số

$y=\left|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$.

Ta có: $mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ mx^2-2mx+m-2=0\ \ (1)\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m(m-2)>0\\ m-2m+m-2\neq 0\end{cases}$.

Vì m nguyên và $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{1;2;...;10\}$.

Câu 11. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$2+m$

TH 1: $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (loại).

TH 2: $\begin{cases}2+m>0\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó : $|m-2|=2-m>2>2+m\ \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

TH 3 : $\begin{cases} m>0 \\ -2+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$. Khi đó : $|m-2|=2-m<2<2+m \Rightarrow \underset{[0;2]}{max}|f(x)|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

TH 4: $-2+m>0 \Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\underset{[0;2]}{max}|f(x)|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại).

Câu 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \notin [0;2] \\ x=2 \\ x=3 \notin [0;2] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	0		2	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-\quad 0$		$+$	0	$-\quad 0\quad +$	
$g(x)$			$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$		

Ta có $g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max\limits_{[0;2]} y=\max\limits_{[0;2]}|g(x)|\le 20 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)|\le 20 \\ |g(2)|\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-20|\le 20 \\ |m+6|\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le 14$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 13. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3+x^2+(m^2+1)x+m^2-m-3\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ không vượt quá 15?

A. 3. **B.** **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn#A.

Xét hàm số $f(x)=x^3+x^2+(m^2+1)x+m^2-m-3$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2x+(m^2+1)=2x^2+(x+1)^2+m^2>0, \forall x\in[-1;2]$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1;2] \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)=-m-4 \\ \max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=3m^2-m+11 \end{cases}$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;2]} y = \max\limits_{[-1;2]} |f(x)| = \max\{|-m-4|;|3m^2-m+11|\} \le 15 \Leftrightarrow \begin{cases} |-m-4| \le 15 \\ |3m^2-m+11| \le 15 \end{cases}$

$\begin{cases} -15 \le m+4 \le 15 \\ -15 \le 3m^2-m+11 \le 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19 \le m \le 11 \\ 3m^2-m-4 \le 0 \\ 3m^2-m+26 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -19 \le m \le 11 \\ -1 \le m \le \dfrac{4}{3} \end{cases}$. Với $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow m \in \{-1;0;1\}$

Câu 14. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\sqrt{4-x^2} + x - \dfrac{1}{2}\right| + m$ là 18. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m < 5$. **B.** $10 < m < 15$. **C.** $5 < m < 10$. **D.** $15 < m < 20$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{4-x^2} + x - \dfrac{1}{2}$ liên tục trên tập xác định $[-2;2]$.

$g'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

$g(-2) = -\dfrac{5}{2}$; $g\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{-1+4\sqrt{2}}{2}$; $g(2) = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} |g(x)| = \dfrac{5}{2}$ khi $x = -2$.

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\sqrt{4-x^2} + x - \dfrac{1}{2}\right| + m$ bằng $\dfrac{5}{2} + m$

$\Rightarrow \dfrac{5}{2} + m = 18 \Leftrightarrow m = 15{,}5$.

Vậy $15 < m < 20$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2\left(ax^2 + 4ax - a + b - 2\right)$, với a, $b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\dfrac{4}{3};0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x?

A. $x = -\dfrac{5}{4}$. **B.** $x = -\dfrac{4}{3}$. **C.** $x = -\dfrac{3}{2}$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2(x-1)\left(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2\right)$.

Vì trên khoảng $\left(-\dfrac{4}{3};0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a > 0$.

$\Rightarrow f'(-1)=0 \Leftrightarrow -4(-6a+b-2)=0 \Leftrightarrow b=6a+2$.

$\Rightarrow f'(x)=2a(x-1)(2x^2+5x+3)$.

Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ **. (đều là các nghiệm đơn)**

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$CĐ$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc $\left[-2;-\dfrac{5}{4}\right]$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\dfrac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{5}{4}\right]$.

Câu 16. Cho hàm số $y=x^3-3mx+m^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu số nguyên m bé hơn 10 thỏa mãn đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A,B sao cho $AB\ge 2\sqrt{5}$.

A. 18. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-3m$. Để hàm số có hai điểm cực trị thì $m>0$.

Khi đó, $y'=0 \Leftrightarrow x^2=m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{m} \to y_1=m^2-2m\sqrt{m} \\ x_2=-\sqrt{m} \to y_2=m^2+2m\sqrt{m} \end{array}\right.$.

Ta được: $A\left(\sqrt{m};m^2-2m\sqrt{m}\right)$, $B\left(-\sqrt{m};m^2+2m\sqrt{m}\right)$.

$AB\ge 2\sqrt{5} \Leftrightarrow AB^2\ge 20 \Leftrightarrow 4m+16m^3\ge 20 \Leftrightarrow 4m^3+m-5\ge 0 \Leftrightarrow (m-1)(4m^2+4m+5)\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 1$.

Do m nguyên và bé hơn 10 nên $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Câu 17. Gọi tập S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét $u=x^3-3x+m$ có: $u'=3x^2-3$; $u'=0 \Leftrightarrow x=1\in[0;2]$. Khi đó:

$A=\max\limits_{[0;2]} u=\max\{u(0),u(1),u(2)\}=\max\{m,m-2,m+2\}=m+2$.

$a=\min\limits_{[0;2]} u=\min\{u(0),u(1),u(2)\}=\min\{m,m-2,m+2\}=m-2$.

Vậy $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|A|,|a|\} = \max\{|m+2|,|m-2|\} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+2| = 3 \\ |m+2| \ge |m-2| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-2| = 3 \\ |m-2| \ge |m+2| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Chọn **B.**

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \left|\dfrac{x-m^2}{x+1}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 trên đoạn. Tính tổng các phần tử của S?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+1}$ có $f'(x) = \dfrac{1+m^2}{(x+1)^2} > 0\ \forall x \ne -1$.

Suy ra hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+1}$ đồng biến trên $[1;2]$

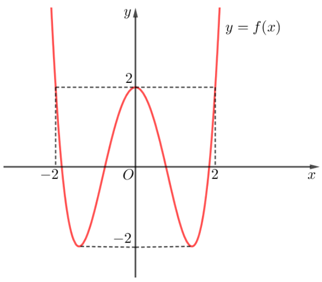
Có $f(1) = \dfrac{1-m^2}{2}; f(2) = \dfrac{2-m^2}{3}$.

$\Rightarrow \max\limits_{[1;2]} f(x) = \dfrac{2-m^2}{3}; \min\limits_{[1;2]} f(x) = \dfrac{1-m^2}{2}$.

$\Rightarrow \min\limits_{[1;2]} y = \min\limits_{[1;2]} |f(x)| = \min\left\{\left|\dfrac{1-m^2}{2}\right|;\left|\dfrac{2-m^2}{3}\right|\right\} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left|\dfrac{1-m^2}{2}\right| = 0 \\ \left|\dfrac{1-m^2}{2}\right| \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1 \\ \begin{cases} \left|\dfrac{1-m^2}{2}\right| \ne 0 \\ \left|\dfrac{1-m^2}{2}\right| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Do đó tổng các phần tử của tập S bằng $1 + (-1) + \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

Câu 19. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \left||2f(x)+m+4| - f(x) - 3\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có: $-2 \le f(x) \le 2, \forall x \in [-2;2]$ $(*)$. $\Rightarrow 2f(x)+4 \ge 0, \forall x \in [-2;2]$.

Vì $m \in [0;20]$ nên $2f(x)+m+4 \ge 0$

suy ra $|2f(x)+m+4| = 2f(x)+m+4, \forall x \in [-2;2]$.

Ta có: $g(x) = \left||2f(x)+m+4| - f(x)-3\right| = |2f(x)+m+4-f(x)-3| = |f(x)+m+1|, \forall x \in [-2;2]$.

+) Với $m=0 \Rightarrow g(x) = |f(x)+1|$, $\forall x \in [-2;2]$.

$(*) \Leftrightarrow -1 \le f(x)+1 \le 3, \forall x \in [-2;2]. \Rightarrow 0 \le |f(x)+1| \le 3, \forall x \in [-2;2] \Leftrightarrow 0 \le g(x) \le 3, \forall x \in [-2;2]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) = 0 \Rightarrow m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

+) Với $m \in [1;20] \Rightarrow f(x)+m+1 \ge 0 \Rightarrow g(x) = f(x)+m+1$.

Từ $(*)$ ta có: $f(x)+m+1 \ge m-1 \Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) = m-1$.

Yêu cầu bài toán: $\min\limits_{[-2;2]} g(x) \ge 1 \Leftrightarrow m-1 \ge 1 \Leftrightarrow m \ge 2 \Rightarrow m \in [2;20]$. Vậy có 19 giá trị nguyên

Câu 20. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x) = x^3 - 19x + 30$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \notin [0;2] \\ x=2 \\ x=3 \notin [0;2] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	0		2	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$ 0		$+$	0	$-$ 0 $+$	
$g(x)$			$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$		

Ta có $g(0) = m-20$; $g(2) = m+6$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max\limits_{[0;2]} y = \max\limits_{[0;2]} |g(x)| \le 20 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)| \le 20 \\ |g(2)| \le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-20| \le 20 \\ |m+6| \le 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 14$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 21. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x+m$ là hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2-3\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1 & \left(n\right)\\ x=-1 & \left(l\right)\end{array}\right.$

Suy ra GTLN và GTNN của $f\left(x\right)$ thuộc $\left\{f\left(0\right);f\left(1\right);f\left(2\right)\right\}=\left\{m;m-2;m+2\right\}$.

Xét hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ ta được giá trị lớn nhất của y là

$\max\left\{\left|m\right|;\left|m-2\right|;\left|m+2\right|\right\}=3$.

TH1: $\max\left\{1;3;5\right\}=5$ (loại).

TH2: $\left|m-2\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=5\end{array}\right.$

+ Với $m=-1$. Ta có $\max\left\{1;3\right\}=3$ (nhận).

+Với $m=5$. Ta có $\max\left\{3;5;7\right\}=7$ (loại).

TH3: $\left|m+2\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-5\end{array}\right.$

+ Với $m=1$. Ta có $\max\left\{1;3\right\}=3$ (nhận).

+ Với $m=-5$. Ta có $\max\left\{3;5;7\right\}=7$ (loại).

Do đó $m\in\left\{-1;1\right\}$

Vậy tập hợp S có 2 phần tử.

Câu 22. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|2x^3-6x^2+m\right|$, gọi A là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[1;3\right]$. Số giá trị nguyên của tham số m để $A<2020$ là

A. 4031. **B.** 4032. **C.** 4033. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Xét $u\left(x\right)=2x^3-6x^2-m$ trên đoạn $\left[1;3\right]$. Ta có hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$.

$u'\left(x\right)=6x^2-12x$.

$u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin\left(1;3\right)\\ x=2\in\left(1;3\right)\end{array}\right.$.

Khi đó: $\begin{cases} \max\limits_{[1;3]} u(x) = \max\left\{u(1); u(2); u(3)\right\} = m \\ \min\limits_{[1;3]} u(x) = \min\left\{u(1); u(2); u(3)\right\} = m-8 \end{cases}$.

$A = \max\left\{|m|; |m-8|\right\}$.

Yêu cầu $A < 2020 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m| < 2020 \\ |m| \ge |m-8| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-8| < 2020 \\ |m-8| \ge |m| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2020 < m < 2020 \\ m \ge 4 \end{cases} \\ \begin{cases} -2012 < m < 2028 \\ m \le 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 \le m < 2020 \\ -2012 < m \le 4 \end{array}\right.$.

Vậy có 4031 số nguyên m để $A < 2020$.

Câu 23. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\dfrac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + m\right|$ trên đoạn $\left[1; e^2\right]$ có giá trị nhỏ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\max\limits_{[1;e^2]} f(x) \overset{t=\ln x}{=} \max\limits_{[0;2]} \left|\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} + m\right|$.

Xét $g(t) = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} + m$; $g'(t) = \dfrac{1-t}{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Ta có $\begin{cases} g(0) = 1+m \\ g(1) = \sqrt{2}+m \\ g(2) = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} + m \end{cases} \longrightarrow \max\limits_{[0;2]} g(x) = \max\left\{|m+1|; |m+\sqrt{2}|\right\} \ge \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m+1 = -\sqrt{2} - m \Leftrightarrow m = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. **Chọn#A.**

Câu 24. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. $-\dfrac{11}{3}$. **B.** $\dfrac{13}{6}$. **C.** $-\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $u(x) = \dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$. Dễ thấy $u(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$

Ta có $u' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;2] \\ x = -2 \notin [1;2] \end{array}\right.$.

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[1;2]} u(x) = \max\left\{u(1), u(2)\right\} = \max\left\{m+\dfrac{1}{2}, m+\dfrac{4}{3}\right\} = m+\dfrac{4}{3} \\ \min\limits_{[1;2]} u(x) = \min\left\{u(1), u(2)\right\} = \min\left\{m+\dfrac{1}{2}, m+\dfrac{4}{3}\right\} = m+\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra $\max\limits_{[1;2]} f(x) = \max\left\{\left|m+\frac{1}{2}\right|, \left|m+\frac{4}{3}\right|\right\} = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left|m+\frac{1}{2}\right| = 2 \\ \left|m+\frac{1}{2}\right| \geq \left|m+\frac{4}{3}\right| \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left|m+\frac{4}{3}\right| = 2 \\ \left|m+\frac{4}{3}\right| \geq \left|m+\frac{1}{2}\right| \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{5}{2} \\ m = \frac{2}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S là $-\frac{11}{6}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Có bao nhiêu giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $|f(1+\sin x)+m|$ bằng 5?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 1+\sin x$. Suy ra $t \in [0;2]$. Ta có:

$|f(1+\sin x)+m| = |f(t)+m| = |t^2 - 2t + m|$.

Đặt $u = t^2 - 2t$. Với $t \in [0;2]$ thì $u \in [-1;0]$. Khi đó $|t^2-2t+m| = |u+m|$.

Suy ra

$\max\limits_{\mathbb{R}} |f(1+\sin x)+m| = \max\limits_{[0;2]} |f(t)+m| = \max\limits_{[0;2]} |t^2-2t+m| = \max\limits_{[-1;0]} |u+m| = \max\limits_{[-1;0]} \{|-1+m|;|m|\}$.

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} |f(1+\sin x)+m| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |-1+m| = 5 \\ |m| = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -4 \\ m = 5 \\ m = -5 \end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy với $m=-4$ hoặc $m=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26. Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2+1)x + 27|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Xét $u = x^3 + x^2 + (m^2+1)x + 27$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có: $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0,\ \forall x$.

Do đó $A = \max\limits_{[-3;-1]} u = u(-1) = 26 - m^2$; $a = \min\limits_{[-3;-1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2$.

Do $\mathrm{M} = \max\limits_{[-3;-1]} y = \max\{|26-m^2|, |6-3m^2|\}$ và $4M \geq 3|26-m^2| + |6-3m^2| \geq 72$.

Vậy $M \geq 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $|26-m^2| = |6-3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B.**

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị m dương sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3m^2 x + 2m^3 + 9m^2 + 1|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 30?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3-3m^2x+2m^3+9m^2+1$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;3\right]$

Ta có: $g'\left(x\right)=3x^2-3m^2$

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=-m\ \ (ktm)\end{array}\right.$$

$g\left(0\right)=2m^3+9m^2+1$

$g\left(3\right)=2m^3+28$

$g\left(m\right)=9m^2+1$

Vì $0<g\left(0\right);g\left(3\right);g\left(m\right)$ và $g\left(m\right)<g\left(0\right)\ \forall m>0$

Suy ra

$$\underset{[0;3]}{Max}f\left(x\right)=Max\left\{g\left(0\right);g\left(3\right)\right\}=Max\left\{2m^3+9m^2+1;\,2m^3+28\right\}$$

TH 1: $m>3\Rightarrow 2m^3+9m^2+1>2m^3+28$

Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3m^2x+2m^3+9m^2+1\right|$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 30

$\Leftrightarrow 2m^3+9m^2+1=30$

$\Leftrightarrow m\approx 1,548\left(ktm\right)$

TH 2: $m<3\Rightarrow 2m^3+9m^2+1<2m^3+28$

Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3m^2x+2m^3+9m^2+1\right|$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 30

$\Leftrightarrow 2m^3+28=30$

$\Leftrightarrow m=1\left(tm\right)$.

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[0;2019\right]$ để bất phương trình: $x^2-m+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\le 0$ đúng với mọi $x\in\left[-1;1\right]$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$. Khi đó, $0\le t\le 1,\ \forall x\in[-1;1]$.

Ta có, bất phương trình: $1-t^2-m+t^3\le 0,\forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\ge t^3-t^2+1,\ \forall t\in[0;1]$ $\Leftrightarrow m\ge f(t),\forall t\in[0;1]$, với $f(t)=t^3-t^2+1$

$\Leftrightarrow m\ge \underset{[0;1]}{\max}f(t)$

Ta có, $f'(t)=3t^2-2t$ $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$ Lập bảng biến thiên ta được: $\underset{[0;1]}{\max}f(t)=1$.

Do đó, $m\ge 1$ Mà $m\in\left[0;2019\right]\Rightarrow m\in[1;2019]$ $\Rightarrow$ có 2019 giá trị nguyên của m.

Câu 29. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[0;2\right]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc $\left[-4;4\right]$ sao cho $M\le 2m$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6 **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=x^3-4x^3+4x^2+a$ trên $[0;2]$.

$g'(x)=4x^3-12x^2+8x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$; $g(0)=a$, $g(1)=a+1$, $g(2)=a$.

Suy ra: $a \le g(x) \le a+1$.

TH1: $0 \le a \le 4 \Rightarrow a+1 \ge a > 0 \Rightarrow M=\max\limits_{[0;2]} f(x) = a+1$; $m=\min\limits_{[0;2]} f(x) = a$.

Suy ra: $\begin{cases} 0 \le a \le 4 \\ a+1 \le 2a \end{cases} \Rightarrow 1 \le a \le 4$. Do đó: có 4 giá trị của a thỏa mãn.

TH2: $-4 \le a \le -1 \Rightarrow a \le a+1 \le -1 \Rightarrow |a+1| \le |a|$

$\Rightarrow M=\max\limits_{[0;2]} f(x)=|a|=-a$; $m=\min\limits_{[0;2]} f(x) = |a+1|=-a-1$.

Suy ra: $\begin{cases} -4 \le a \le -1 \\ -a \le -2a-2 \end{cases} \Rightarrow -4 \le a \le -2$. Do đó: có 3 giá trị của a thỏa mãn.

Vậy có tất cả 7 giá trị thỏa mãn.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc $[-4;4]$ sao cho $M \le 2m$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6 **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=x^3-4x^3+4x^2+a$ trên $[0;2]$.

$g'(x)=4x^3-12x^2+8x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$; $g(0)=a$, $g(1)=a+1$, $g(2)=a$.

Suy ra: $a \le g(x) \le a+1$.

TH1: $0 \le a \le 4 \Rightarrow a+1 \ge a > 0 \Rightarrow M=\max\limits_{[0;2]} f(x) = a+1$; $m=\min\limits_{[0;2]} f(x) = a$.

Suy ra: $\begin{cases} 0 \le a \le 4 \\ a+1 \le 2a \end{cases} \Rightarrow 1 \le a \le 4$. Do đó: có 4 giá trị của a thỏa mãn.

TH2: $-4 \le a \le -1 \Rightarrow a \le a+1 \le -1 \Rightarrow |a+1| \le |a|$

$\Rightarrow M=\max\limits_{[0;2]} f(x)=|a|=-a$; $m=\min\limits_{[0;2]} f(x) = |a+1|=-a-1$.

Suy ra: $\begin{cases} -4 \le a \le -1 \\ -a \le -2a-2 \end{cases} \Rightarrow -4 \le a \le -2$. Do đó: có 3 giá trị của a thỏa mãn.

Vậy có tất cả 7 giá trị thỏa mãn.

Câu 31. Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a=2$. **B.** $a=1$. **C.** 4. **D.** $a=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\left|x^2+2x+a-4\right|=\left|(x+1)^2+a-5\right|$. Đặt $u=(x+1)^2$ khi đó $\forall x\in[-2;1]$ thì $u\in[0;4]$ Ta được hàm số $f(u)=\left|u+a-5\right|$. Khi đó.

$\max\limits_{x\in[-2;1]} y=\max\limits_{u\in[0;4]} f(u)=\max\left\{f(0),f(4)\right\}=\max\left\{\left|a-5\right|;\left|a-1\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\left|a-5\right|\ge\left|a-1\right|\Leftrightarrow a\le 3\Rightarrow \max\limits_{u\in[0;4]} f(u)=5-a\ge 2\Leftrightarrow a=3$.

Trường hợp 2: $\left|a-5\right|\le\left|a-1\right|\Leftrightarrow a\ge 3\Rightarrow \max\limits_{u\in[0;4]} f(u)=a-1\ge 2\Leftrightarrow a=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{x\in[-2;1]} y=2\Leftrightarrow a=3$.

Câu 32. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 108. **B.** 136. **C.** 120. **D.** 210.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$

$g'(x)=x^3-28x+48$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=-6 & (L)\\ x=4 & (L)\\ x=2 & (TM)\end{array}\right.$$

$\max\limits_{[0;2]} f(x)=\max\limits_{[0;2]}\left\{\left|g(0)\right|;\left|g(2)\right|\right\}=\max\limits_{[0;2]}\left\{\left|m-30\right|;\left|\mathrm{m}+14\right|\right\}\le 30$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|m-30\right|\le 30\\ \left|m+14\right|\le 30\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 16$$

Suy ra $S=\sum\limits_{x=1}^{16}x=136$.

Câu 33. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 108. **B.** 136. **C.** 120. **D.** 210.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$

$g'(x)=x^3-28x+48$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=-6 & (L)\\ x=4 & (L)\\ x=2 & (TM)\end{array}\right.$$

$\max\limits_{[0;2]} f(x) = \max\limits_{[0;2]}\{|g(0)|;|g(2)|\} = \max\limits_{[0;2]}\{|m-30|;|m+14|\} \le 30$

$\Rightarrow \begin{cases} |m-30| \le 30 \\ |m+14| \le 30 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 16$. Suy ra $S = \sum\limits_{x=1}^{16} x = 136$.

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^4 - 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^2 + m, x \in [-1;1]$, ta có $g'(x) = 4x^3 - 16x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

$g(-1) = g(1) = -7 + m$, $g(0) = m$.

Do đó: $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = \max\{|-7+m|, |m|\} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |-7+m| = 5 \\ |-7+m| \ge |m| \end{cases} \\ \begin{cases} |m| = 5 \\ |m| \ge |-7+m| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 5 \end{array}\right.$

Vậy $s = \{2;5\}$. Vậy tổng các giá trị của S bằng 7.

Câu 35. Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2+1)x + 27|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Xét $u = x^3 + x^2 + (m^2+1)x + 27$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có: $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x$.

Do đó $A = \max\limits_{[-3;-1]} u = u(-1) = 26 - m^2$; $a = \min\limits_{[-3;-1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2$.

Do $M = \max\limits_{[-3;-1]} y = \max\{|26-m^2|, |6-3m^2|\}$ và $4M \ge 3|26-m^2| + |6-3m^2| \ge 72$.

Vậy $M \ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $|26-m^2| = |6-3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B.**

Câu 36. Cho S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |-x^4 + 2x^2 + m| + 1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 6. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 7. **B.** 17. **C.** -3. **D.** -7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + m$ trên $[0;2]$, có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \end{array}\right.$

Ta có $|f(0)| = |m| + 1; |f(1)| = |m+1| + 1; |f(2)| = |m-8| + 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \max\limits_{[0;2]} f(x) = |m+1| + 1 \\ \max\limits_{[0;2]} f(x) = |m-8| + 1 \\ \max\limits_{[0;2]} f(x) = |m| + 1 \end{array}\right.$

+) Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = |m+1|+1 \Rightarrow \begin{cases} |m+1|+1=6 \\ |m+1| \ge |m-8| \\ |m+1| \ge |m| \end{cases} \Leftrightarrow m=4$

+) Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = |m-8|+1 \Rightarrow \begin{cases} |m-8|+1=6 \\ |m-8| \ge |m+1| \\ |m-8| \ge |m| \end{cases} \Leftrightarrow m=3$

+) Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = |m|+1 \Rightarrow \begin{cases} |m|+1=6 \\ |m| \ge |m-8| \\ |m| \ge |m+1| \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$

Vậy tổng các giá trị của m bằng 7.

Câu 37. Cho S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|-x^4+2x^2+m\right|+1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 6. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 7. **B.** 17. **C.** -3. **D.** -7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = -x^4+2x^2+m$ trên $[0;2]$, có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \in [0;2] \\ x=1 \in [0;2] \end{array}\right.$

Ta có $|f(0)| = |m|+1; |f(1)| = |m+1|+1; |f(2)| = |m-8|+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \max\limits_{[0;2]} f(x) = |m+1|+1 \\ \max\limits_{[0;2]} f(x) = |m-8|+1 \\ \max\limits_{[0;2]} f(x) = |m|+1 \end{array}\right.$

+) Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = |m+1|+1 \Rightarrow \begin{cases} |m+1|+1=6 \\ |m+1| \ge |m-8| \\ |m+1| \ge |m| \end{cases} \Leftrightarrow m=4$

+) Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = |m-8|+1 \Rightarrow \begin{cases} |m-8|+1=6 \\ |m-8| \ge |m+1| \\ |m-8| \ge |m| \end{cases} \Leftrightarrow m=3$

+) Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = |m|+1 \Rightarrow \begin{cases} |m|+1=6 \\ |m| \ge |m-8| \\ |m| \ge |m+1| \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$

Vậy tổng các giá trị của m bằng 7.

Câu 38. Gọi tập S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét $u = x^3-3x+m$ có: $u' = 3x^2-3$; $u'=0 \Leftrightarrow x=1 \in [0;2]$. Khi đó:

$A=\max\limits_{[0;2]}u=\max\{u(0),u(1),u(2)\}=\max\{m,m-2,m+2\}=m+2$.

$a=\min\limits_{[0;2]}u=\min\{u(0),u(1),u(2)\}=\min\{m,m-2,m+2\}=m-2$.

Vậy $\max\limits_{[0;2]}y=\max\{|A|,|a|\}=\max\{|m+2|,|m-2|\}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m+2|=3\\|m+2|\ge|m-2|\end{cases}\\\begin{cases}|m-2|=3\\|m-2|\ge|m+2|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Chọn **B.**

Câu 39. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{\ln x+1}{\sqrt{\ln^2x+1}}+m\right|$ trên $[1;e^2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\dfrac{1+\sqrt2}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt2-1}{4}$ **C.** $\dfrac{1+\sqrt2}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt2-1}{2}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\ln x;x\in[1;e^2]=>t\in[0;2]$

Ta có $\max\limits_{[1;e^2]}y=\max\limits_{[0;2]}\left|\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}+m\right|$. Ta xét $f(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}+m\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1-t}{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2}=0\Leftrightarrow t=1$

Mặt khác $f(0)=1+m;f(1)=\sqrt2+m;f(2)=\dfrac{3\sqrt5}{5}+m$. Vậy $\max\limits_{[1;e^2]}y=\max\left\{|m+1|;|m+\sqrt2|\right\}=M$

Vì $\begin{cases}M\ge|m+1|\\M\ge|-\sqrt2-m|\end{cases}\Rightarrow 2M\ge\sqrt2-1$.

Do đó $\min M=\dfrac{\sqrt2-1}{2}$ khi $m+1=-\sqrt2-m=\pm\left(\dfrac{\sqrt2-1}{2}\right)$ khi $m=-\dfrac{1+\sqrt2}{2}$

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để GTNN của hàm số $y=|x^2-2x+m|+4x$ bằng -1?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Nếu $m\ge1$ thì $y=x^2+2x+m$ có GTNN là $m-1=-1\Leftrightarrow m=0$ (loại).

Nếu $m<1$ thì $y=\begin{cases}x^2+2x+m...\\-x^2+6x-m...\end{cases}$

nên $\min y=\min\left\{f(-1);f\left(1+\sqrt{1-m}\right);f\left(1-\sqrt{1-m}\right)\right\}$

$\Rightarrow\min y=\min\left\{|m+3|-4;4\left(1+\sqrt{1-m}\right);4\left(1-\sqrt{1-m}\right)\right\}$

$\Rightarrow \min y = \min\left\{|m+3|-4; 4\left(1-\sqrt{1-m}\right)\right\}$

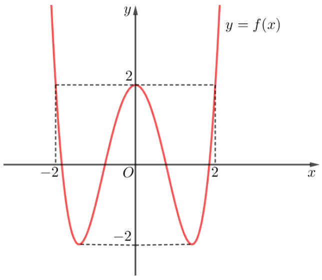
Trường hợp 1: $\min y = |m+3|-4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-7 \end{array}\right.$

Vì $m<1$ nên $m=-7$ khi đó $4\left(1-\sqrt{1-m}\right)<0$ nên trường hợp này không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\min y = 4\left(1-\sqrt{1-m}\right)=0 \Leftrightarrow m=0$ khi đó $|m+3|-4=-1<0$ nên trường hợp này không thỏa mãn.

Kết luận: không tồn tại m thỏa mãn. Chọn đáp án#**A.**

Câu 41. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left||2f(x)+m+4|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có: $-2\le f(x)\le 2, \forall x\in[-2;2]$ $(*)$. $\Rightarrow 2f(x)+4\ge 0, \forall x\in[-2;2]$.

Vì $m\in[0;20]$ nên $2f(x)+m+4\ge 0$

suy ra $|2f(x)+m+4| = 2f(x)+m+4, \forall x\in[-2;2]$.

Ta có: $g(x)=\left||2f(x)+m+4|-f(x)-3\right| = |2f(x)+m+4-f(x)-3| = |f(x)+m+1|, \forall x\in[-2;2]$.

+) Với $m=0 \Rightarrow g(x)=|f(x)+1|$, $\forall x\in[-2;2]$.

$(*) \Leftrightarrow -1\le f(x)+1\le 3, \forall x\in[-2;2]. \Rightarrow 0\le |f(x)+1|\le 3, \forall x\in[-2;2] \Leftrightarrow 0\le g(x)\le 3, \forall x\in[-2;2]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x)=0 \Rightarrow m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

+) Với $m\in[1;20] \Rightarrow f(x)+m+1\ge 0 \Rightarrow g(x)=f(x)+m+1$.

Từ $(*)$ ta có: $f(x)+m+1\ge m-1 \Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x)=m-1$.

Yêu cầu bài toán: $\min\limits_{[-2;2]} g(x)\ge 1 \Leftrightarrow m-1\ge 1 \Leftrightarrow m\ge 2 \Rightarrow m\in[2;20]$. Vậy có 19 giá trị nguyên

Câu 42. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2-9x+m$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$.

$f'=3x^2-6x-9$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

$f\left(-2\right)=-2+m;\ f\left(-1\right)=5+m; f\left(3\right)=-27+m; f\left(4\right)=-20+m$

$\Rightarrow\min\limits_{[-2;4]}f\left(x\right)=m-27;\max\limits_{[-2;4]}f\left(x\right)=m+5\ \Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|m-27\right|;\left|m+5\right|\right\}$.

+) Trường hợp 1: Nếu $\left|m-27\right|\le\left|m+5\right|\ \left(*\right)$

$\Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|m+5\right|\Rightarrow\left|m+5\right|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=11\\m=-21\end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện $\left(*\right)\Rightarrow m=11$.

+) Trường hợp 1: Nếu $\left|m-27\right|>\left|m+5\right|\ \left(**\right)$

$\Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|m-27\right|\Rightarrow\left|m-27\right|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=43\\m=11\end{array}\right.$ (Không thỏa mãn điều kiện $\left(**\right)$).

Vậy $S=\left\{11\right\}\Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x+m\right|$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **<u>D</u>.** 1.

Lời giải

<u>Chọn D</u>

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2-9x+m$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$.

$f'=3x^2-6x-9$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

$f\left(-2\right)=-2+m;\ f\left(-1\right)=5+m; f\left(3\right)=-27+m; f\left(4\right)=-20+m$

$\Rightarrow\min\limits_{[-2;4]}f\left(x\right)=m-27;\max\limits_{[-2;4]}f\left(x\right)=m+5\ \Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|m-27\right|;\left|m+5\right|\right\}$.

+) Trường hợp 1: Nếu $\left|m-27\right|\le\left|m+5\right|\ \left(*\right)$

$\Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|m+5\right|\Rightarrow\left|m+5\right|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=11\\m=-21\end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện $\left(*\right)\Rightarrow m=11$.

+) Trường hợp 1: Nếu $\left|m-27\right|>\left|m+5\right|\ \left(**\right)$

$\Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|m-27\right|\Rightarrow\left|m-27\right|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=43\\m=11\end{array}\right.$ (Không thỏa mãn điều kiện $\left(**\right)$).

Vậy $S=\left\{11\right\}\Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để hàm số $y=\left|x-1\right|+\left|x+3\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 4. **<u>B</u>.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\left|x-1\right|+\left|x+3\right|=\begin{cases}-2x-2 & khi\ \ x<-3\\ 4 & khi\ \ -3\le x\le1\\ 2x+2 & khi\ \ x>1\end{cases}$

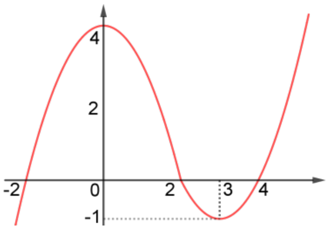
Vậy trên khoảng $\left(-\infty;-3\right)$ thì hàm số nghịch biến, trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ thì hàm số đồng biến, còn hàm số là hằng số trên đoạn $\left[-3;1\right]$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\rightarrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $y \ge 4, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\min y = 4$ khi $x \in [-3;1]$. Có 5 giá trị x nguyên.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3-3x)\right| = \frac{1}{2}$?



A. 3. **B.** 12.

C. 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left|f(x^3-3x)\right| = \frac{1}{2}$

Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$

$t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = -2 \\ x = -3 \Rightarrow t = 2 \end{array}\right.$

Suy ra BBT

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, ta có:

Với $a < -2$ thì phương trình $t = a$ có 1 nghiệm t. Với mỗi giá trị t thì $\left|f(t)\right| = \frac{1}{2}$ có 1 nghiệm.

Suy ra: $x^3 - 3x = a$ $(a < -2)$ có 1 nghiệm.

Với $-2 < b < 2$ thì phương trình $t = b$ có 3 nghiệm t. Với mỗi giá trị t thì $\left|f(t)\right| = \frac{1}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra: $x^3 - 3x = b$ $(-2 < b < 2)$ có 6 nghiệm phân biệt.

Với $c > 2$ thì phương trình $t = c$ có 1 nghiệm t. Với mỗi giá trị t thì $\left|f(t)\right| = \frac{1}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Suy ra: $x^3 - 3x = c$ $(c > 2)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt.

Câu 46. Cho hàm số $y = \left|x^2 - 4x + 2m - 1\right|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;4]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 1. **B.** -3. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số trong dấu trị tuyệt đối: $g(x) = x^2 - 4x + 2m - 1$

Bảng biến thiên:

x	1	2	4
$g(x)$	$2m-4$ ↘	$2m-5$	↗ $2m-1$

Ta có: $2m-5 < 2m-4 < 2m-1$. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = x^2 - 4x + 2m - 1$ trên đoạn $[1;4]$ lần lượt là $2m-1$ và $2m-5$.

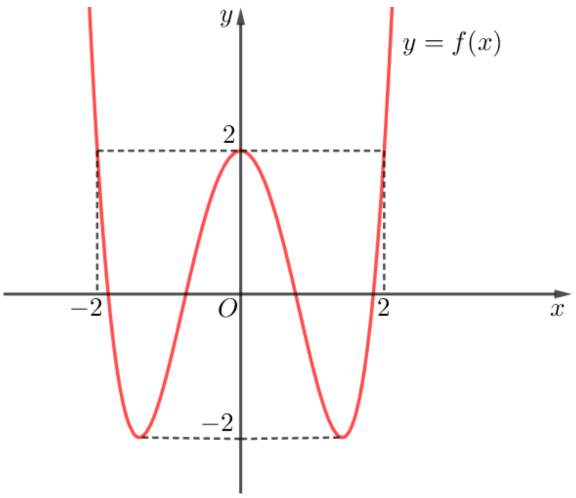
Ta có: $\max\limits_{x\in[1;4]} |g(x)| = \max\{|2m-1|;|2m-5|\}$

Nếu $|2m-1| \ge |2m-5| \Leftrightarrow m \ge \frac{3}{2}$ thì $\max\limits_{x\in[1;4]} |g(x)| = |2m-1| = 2m-1 \ge 2, \forall m \ge \frac{3}{2}$.

Nếu $|2m-5| \ge |2m-1| \Leftrightarrow m \le \frac{3}{2}$ thì $\max\limits_{x\in[1;4]} |g(x)| = |2m-5| = 5-2m \ge 2, \forall m \le \frac{3}{2}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = |g(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $m = \frac{3}{2}$.

Câu 47. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \left| |2f(x) + m + 4| - f(x) - 3 \right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có: $-2 \le f(x) \le 2, \forall x \in [-2;2]$ $(*)$.

$\Rightarrow 2f(x) + 4 \ge 0, \forall x \in [-2;2]$.

Vì $m \in [0;20]$ nên $2f(x) + m + 4 \ge 0$

suy ra $|2f(x) + m + 4| = 2f(x) + m + 4, \forall x \in [-2;2]$.

Ta có:

$g(x)=\left|\left|2f(x)+m+4\right|-f(x)-3\right|=\left|2f(x)+m+4-f(x)-3\right|=\left|f(x)+m+1\right|, \forall x\in[-2;2]$.

+) Với $m=0\Rightarrow g(x)=\left|f(x)+1\right|$, $\forall x\in[-2;2]$.

$(*)\Leftrightarrow -1\le f(x)+1\le 3, \forall x\in[-2;2]$.

$\Rightarrow 0\le\left|f(x)+1\right|\le 3, \forall x\in[-2;2]\Leftrightarrow 0\le g(x)\le 3, \forall x\in[-2;2]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x)=0 \Rightarrow m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

+) Với $m\in[1;20]\Rightarrow f(x)+m+1\ge 0\Rightarrow g(x)=f(x)+m+1$.

Từ $(*)$ ta có: $f(x)+m+1\ge m-1\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x)=m-1$.

Yêu cầu bài toán: $\min\limits_{[-2;2]} g(x)\ge 1\Leftrightarrow m-1\ge 1\Leftrightarrow m\ge 2 \Rightarrow m\in[2;20]$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 48. Tìm số giá trị nguyên của $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $y=\left|x^3-6x^2+5+m\right|$ đồng biến trên $(5;+\infty)$

A. 2019. **B.** 2000. **C.** 2001. **D.** 2020.

Lời giải

Đáp án: C

Ta có $y=\left|x^3-6x^2+5+m\right|\Rightarrow y'=\dfrac{(3x^2-12x)(x^3-6x^2+5+m)}{\left|x^3-6x^2+5+m\right|}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)\Leftrightarrow x^3-6x^2+5+m\ge 0, \forall x>5$

$\Leftrightarrow m\ge -x^3+6x^2-5=h(x), \quad \forall x\in(5;+\infty)$

x	$-\infty$	0	4	5	$+\infty$
$h(x)$	↘		↗	20 ↘	

$\Rightarrow m\ge 20$. Vậy có 2001 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 49. Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+(m^2+1)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Xét $u=x^3+x^2+(m^2+1)x+27$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có: $u'=3x^2+2x+m^2+1>0, \forall x$.

Do đó $A=\max\limits_{[-3;-1]} u=u(-1)=26-m^2$; $a=\min\limits_{[-3;-1]} u=u(-3)=6-3m^2$.

Do $M=\max\limits_{[-3;-1]} y=\max\left\{\left|26-m^2\right|,\left|6-3m^2\right|\right\}$ và $4M\ge 3\left|26-m^2\right|+\left|6-3m^2\right|\ge 72$.

Vậy $M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left|26-m^2\right|=\left|6-3m^2\right|=18 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B.**

Câu 50. $\Rightarrow S = 27^{x_1} + 27^{x_2} = 3^{3x_1} + 3^{3x_2} = 3^{3\log_3\left(3+\sqrt{7}\right)} + 3^{3\log_3\left(3-\sqrt{7}\right)} = \left(3+\sqrt{7}\right)^3 + \left(3-\sqrt{7}\right)^3 = 180$.

Cho hàm số $y=ax^3+cx+d,\ a\neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d-11a$. **B.** $d-16a$ **C.** $d+2a$. **D.** $d+8a$.

Lời giải

Chọn B

Vì $y=ax^3+cx+d,\ a\neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$ nên $a<0$ và $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y'=3ax^2+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac<0$.

Vậy với $a<0,\ c>0$ thì $y'=0$ có hai nghiệm đối nhau $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f\left(-\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}=-2 \Leftrightarrow \sqrt{-\dfrac{c}{3a}}=2 \Leftrightarrow c=-12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0	1	2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$+$		0		$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$		$\nearrow$		$f(2)$		$\searrow$		$-\infty$

Ta suy ra $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=f(2)=8a+2c+d=-16a+d$.

Câu 51. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m\right|$ trên $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn#**A.**

Ta xét $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-x}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x=1\in[0;2]$

Mặt khác $f(0)=1+m;\ f(1)=\sqrt{2}+m;\ f(2)=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}+m$.

BBT

x	0 1 2
$f'(x)$	+ 0 −
$f(x)$	$\sqrt{2}+m$ ↗ ↘

	$1+m \quad \frac{3\sqrt{5}}{5}+m$

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y=\max\left\{|m+1|;\left|m+\sqrt{2}\right|\right\}=M$ (do $1+m<\frac{3\sqrt{5}}{5}+m<\sqrt{2}+m$)

Vì $\begin{cases} M\ge|m+1| \\ M\ge\left|-\sqrt{2}-m\right| \end{cases} \Rightarrow 2M\ge\sqrt{2}-1$. $M=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ khi $m+1=-\sqrt{2}-m=\pm\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ khi $m=-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Câu 52. Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Xét $u=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có: $u'=3x^2+2x+m^2+1>0,\ \forall x$.

Do đó $A=\max\limits_{[-3;-1]} u=u(-1)=26-m^2$; $a=\min\limits_{[-3;-1]} u=u(-3)=6-3m^2$.

Do $\mathrm{M}=\max\limits_{[-3;-1]} y=\max\left\{\left|26-m^2\right|,\left|6-3m^2\right|\right\}$ và $4M\ge 3\left|26-m^2\right|+\left|6-3m^2\right|\ge 72$.

Vậy $M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left|26-m^2\right|=\left|6-3m^2\right|=18 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B.**

Câu 53. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=f(x)=\left|3x^4+4x^3-12x^2+m-1\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $-1;2$ bằng 2020.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=3x^4+4x^3-12x^2+m-1$ trên đoạn $[-1;2]$

Ta có $g'(x)=12x^3+12x^2-24x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Khi đó

$$\left[\begin{array}{l} M=\max\limits_{[-1;2]} g(x)=\max\{g(-1);g(0);g(1);g(2)\}=\max\{m-14;m-1;m-6;m+31\}=m+31 \\ m=\min\limits_{[-1;2]} g(x)=\min\{g(-1);g(0);g(1);g(2)\}=\min\{m-14;m-1;m-6;m+31\}=m-14 \end{array}\right.$$

Vậy $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=\min\{|m+31|;|m-14|\}=2020$

Câu 54. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m+31|=2020\\ |m+31|\le|m-14|\end{cases}\\ \begin{cases}|m-14|=2020\\ |m+31|\ge|m-14|\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2051\\ m=2034\end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 55. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 6 điểm cực trị là:

A. $(0;6)$. **B.** $\{6;33\}$. **C.** $(1;33)$. **D.** $\{1;6\}$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m-1$,

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$m-1$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			$m-6$				$m-33$		

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y=|f(x)|$ có 6 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m-6=0\\ m-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6\\ m=1\end{array}\right.$.

Chọn D

Câu 56. Tập hợp nào dưới đây chứa được tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^4-8x^2-m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 14?

A. $(-\infty;-5)\cup(-3;+\infty)$. **B.** $(-5;-2)$. **C.** $(-7;1)$. **D.** $(-4;2)$.

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=x^4-8x^2-m$ trên đoạn $[0;3]$ có $f'(x)=4x^3-16x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm2\end{array}\right.$. $f(0)=-m$; $f(2)=-m-16$; $f(3)=-m+9$.

Khi đó $\max\limits_{[0;3]} y=-m+9$ hoặc $\max\limits_{[0;3]} y=m+16$ nên ta có $\left[\begin{array}{l}-m+9=14\\ m+16=14\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=-5\\ m=-2\end{array}\right.$.

Câu 57. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5. Tích tất cả các phần tử của S bằng

A. -8. **B.** -40. **C.** 8. **D.** 40.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2-2x+m$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$, ta có $f'\left(x\right)=2\left(x-1\right)$ và $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

$f(-1)=3+m$
$f(1)=m-1$
$f(2)=m$

Vậy:

$\max\limits_{[-1;2]} y=\max\limits_{[-1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|f\left(-1\right)\right|;\ \left|f\left(1\right)\right|;\ \left|f\left(2\right)\right|\right\}=\max\left\{\left|3+m\right|;\ \left|m-1\right|;\ \left|m\right|\right\}$.

TH1. Với $\max\limits_{[-1;2]} y=\left|m-1\right|$, ta có $\begin{cases}\left|m-1\right|\ge\left|m+3\right|\\ \left|m-1\right|\ge\left|m\right|\\ \left|m-1\right|=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m-1\right|\ge\left|m+3\right|\\ \left|m-1\right|\ge\left|m\right|\\ m=-4\vee m=6\end{cases}\Leftrightarrow m=-4.$

TH2. Với $\max\limits_{[-1;2]} y=\left|m+3\right|$, ta được $\begin{cases}\left|m+3\right|\ge\left|m-1\right|\\ \left|m+3\right|\ge\left|m\right|\\ \left|m+3\right|=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+3\right|\ge\left|m-1\right|\\ \left|m+3\right|\ge\left|m\right|\\ m=2\vee m=-8\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$

TH3. Với $\max\limits_{[-1;2]} y=\left|m\right|$, ta được $\begin{cases}\left|m\right|\ge\left|m-1\right|\\ \left|m\right|\ge\left|m+3\right|\\ \left|m\right|=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m\right|\ge\left|m-1\right|\\ \left|m\right|\ge\left|m+3\right|\\ m=5\vee m=-5\end{cases}$ (vô nghiệm).

Câu 58. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(2-\cos x)+m\right|$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** -16. **C.** -32. **D.** -12.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2-\cos x$ ta có $t\in\left[1;3\right]$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=\left|t^3-3t+m\right|$ với $\forall t\in\left[1;3\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Xét $u\left(t\right)=t^3-3t+m$ trên đoạn $\left[1;3\right]$. Ta có hàm số $u(t)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$.

$u'\left(t\right)=3t^2-3$.

$u'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\notin\left(1;3\right)\\ t=1\notin\left(1;3\right)\end{array}\right.$.

Khi đó: $\begin{cases}\max\limits_{[1;3]} \mathrm{u}(t)=\max\left\{u\left(1\right);u(3)\right\}=\max\left\{m+18;m-2\right\}=m+18\\ \min\limits_{[1;3]} \mathrm{u(t)}=\min\left\{u\left(1\right);u(3)\right\}=\min\left\{m+18;m-2\right\}=m-2\end{cases}$.

Yêu cầu bài tập: $\min\limits_{[1;3]} y=2$.

Trường hợp 1: $m-2\ge0\Leftrightarrow m\ge2$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} y = |m-2| = m-2$; $\min\limits_{[1;3]} y = 2 \Leftrightarrow m-2=2 \Leftrightarrow m=4$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $m+18 \le 0 \Leftrightarrow m \le -18$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} y = |m+18| = -(m+18)$; $\min\limits_{[1;3]} y = 2 \Leftrightarrow -(m+18)=2 \Leftrightarrow m=-20$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $(m+18)(m-2) \le 0 \Leftrightarrow -18 \le m \le 2 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = 0 \ne 2$ (loại)

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -16. Chọn phương án. **B.**

Câu 59. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^3-12x+m|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 10. Tổng các giá trị của S là?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 25.

Lời giải

Chọn D

$g(x)=x^3-12x+m;\quad g'(x)=3x^2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;3] \\ x=-2\notin[1;3] \end{array}\right.$

$g(1)=m-11; g(2)=m-16; g(3)=m-9$

$\max\limits_{[1;3]} f(x) = \max\{|m-16|,|m-9|\}$

$*TH1: \begin{cases} |m-16|=10 \\ |m-9|\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=26 \\ m=6 \end{array}\right. \\ 1\le m\le 19 \end{cases} \Leftrightarrow m=6$

$*TH2: \begin{cases} |m-9|=10 \\ |m-16|\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=19 \\ m=-1 \end{array}\right. \\ 6\le m\le 26 \end{cases} \Leftrightarrow m=19$

$\Rightarrow S=\{6;19\}$

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^2+2x+m-4|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=5$. **D.** $m=4$.

Lời giải

Đáp án: A

Xét hàm số $f(x)=x^2+2x+m-4$ với $x\in[-2;1]$.

Ta có $f'(x)=2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=m-5$.

Mà $f(-2)=m-4$, $f(1)=m-1$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=m-1$ và $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=m-5$.

Do đó $\max\limits_{[-2;1]} y = \max\{|m-1|,|m-5|\} = \dfrac{|2m-6|+4}{2} \ge 2$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $m=3$.

Câu 61. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $f(x)=|x^3-3x+m|\le 16, \forall x\in[0;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -104. **B.** 104. **C.** -96. **D.** 96.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=\left|x^3-3x+m\right|\le 16,\forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow -16\le x^3-3x+m\le 16,\forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow -16-m\le x^3-3x\le 16-m,\forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-16-m\le \min\limits_{[0;3]}\left(x^3-3x\right)\\ 16-m\ge \max\limits_{[0;3]}\left(x^3-3x\right)\end{cases}$

Xét hàm $y=x^3-3x$ với $x\in[0;3]$

$y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\ x=-1\notin[0;3]\end{array}\right.$.

Mà $y(0)=0;y(1)=-2;y(3)=18\Rightarrow \min\limits_{[0;3]}\left(x^3-3x\right)=-2;\max\limits_{[0;3]}\left(x^3-3x\right)=18$

Vậycó $\begin{cases}-16-m\le -2\\ 16-m\ge 18\end{cases}\Leftrightarrow -14\le m\le -2$.

Tổng các giá trị của m là -104.

Câu 62. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2;4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4. **B.** 36. **C.** 140. **D.** 0.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$ có $g'(x)=3x^2-6x$. Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ trên $[-2;4]$ là:

$\max\limits_{x\in[-2;4]} y=\max\left\{y(0);y(-2);y(2);y(4)\right\}=\max\left\{|m|;|m-4|;|m-20|;|m+16|\right\}$.

Trường hợp 1: Giả sử $\max y=|m|=50\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=50\\ m=-50\end{array}\right.$.

Với $m=50$ thì $|m+16|=66>50$ (loại).

Với $m=-50$ thì $|m-20|=70>50$ (loại).

Trường hợp 2: Giả sử $\max y=|m-4|=50\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=54\\ m=-46\end{array}\right.$.

Với $m=54\Rightarrow |m|=54>50$ (loại).

Với $m=-46$ thì $|m-20|=66>50$ (loại).

Trường hợp 3: Giả sử $\max y = |m-20| = 50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 70 \\ m = -30 \end{array}\right.$

Với $m = 70$ thì $|m+16| = 86 > 50$ (loại).

Với $m = -30$ thì $|m+16| = 14 < 50$, $|m| = 30 < 50$; $|m-4| = 34 < 50$ (thỏa mãn).

Trường hợp 4: Giả sử $\max y = |m+16| = 50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 34 \\ m = -66 \end{array}\right.$.

Với $m = 34$ thì $|m| = 34 < 50, |m-4| = 30 < 50, |m-20| = 14 < 50$ (thỏa mãn).

Với $m = -66$ thì $|m| = 66 > 50$ (loại).

Vậy $S \in \{-30; 34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30 + 34 = 4$.

Câu 63. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 5 ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

* Đặt $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$

Hàm số $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$

$g(-2) = m - 4; g(1) = m - 1$

* $f(-1) = |m-5|; f(-2) = |m-4|; f(1) = |m-1|$

* TH1: $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = |m-1| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 = 5 \\ m-1 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -4 \end{array}\right.$

Thử lại với $m = 6$ thỏa yêu cầu bài toán và $m = -4$ không thỏa yêu cầu bài toán

* TH2: $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = |m-5| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-5 = 5 \\ m-5 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = 0 \end{array}\right.$

Thử lại với $m = 10$ không thỏa yêu cầu bài toán và $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán

Vậy $m = 6$ và $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 64. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sin x + \cos x + 1}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$ với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $M + \sqrt{3}m$ bằng

A. $1 + 2\sqrt{2}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \\ t^2 = 1 + \sin 2x \end{cases}$.

Khi đó: $f(t) = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t) = \dfrac{1-t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Ta có: $f(-\sqrt{2}) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $f(\sqrt{2}) = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $f(1) = \sqrt{2}$.

Suy ra $M = f(1) = \sqrt{2}$; $m = f(-\sqrt{2}) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $M+\sqrt{3}m=1$.

Câu 65. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\notin[0;2]\\x=2\\x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	0		2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0		$+$	0	$-\ 0\ +$	
$g(x)$			$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$		

Ta có $g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max\limits_{[0;2]}y=\max\limits_{[0;2]}|g(x)|\le 20\Leftrightarrow\begin{cases}|g(0)|\le 20\\|g(2)|\le 20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-20|\le 20\\|m+6|\le 20\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 14$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 66. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m có giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{x^2+xm+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2+mx+m}{x+1}$ trên $[1;2]$.

$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}>0,\forall\in[1;2]$

$f(1)=\frac{2m+1}{2};f(2)=\frac{3m+4}{3}$

Suy ra $\max\limits_{[1;2]}y=\max\{|f(x)|,|f(2)|\}=\max\left\{\frac{|2m+1|}{2};\frac{|3m+4|}{3}\right\}$

TH 1: $\max_{[1;2]} y = \frac{|2m+1|}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} |2m+1| = 4 \\ \frac{|2m+1|}{2} \geq \frac{|3m+4|}{3} \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$

TH 2: $\max_{[1;2]} y = \frac{|3m+4|}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} |3m+4| = 6 \\ \frac{|2m+1|}{2} \leq \frac{|3m+4|}{3} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 67. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Xét hàm $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;1]$

Ta có $g'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Do đó

$\max_{[-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m-1|; |m-4|; |m-5|\}$.

Ta thấy $m - 5 < m - 4 < m - 1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\max_{[-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m-1|, |m-5|\}$.

$\max\{|m-1|, |m-5|\} \geq \frac{|m-1| + |m-5|}{2} \geq \frac{m - 1 + 5 - m}{2} = 2.$

Vậy GTNN của $\max\{|m-1|, |m-5|\}$ bằng 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|m-1| = |m-5| \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 68. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Xét hàm $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;1]$

Ta có $g'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Do đó

$\max_{[-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m-1|; |m-4|; |m-5|\}$.

Ta thấy $m - 5 < m - 4 < m - 1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\max_{[-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m-1|, |m-5|\}$.

$\max\{|m-1|, |m-5|\} \ge \dfrac{|m-1|+|m-5|}{2} \ge \dfrac{m-1+5-m}{2} = 2.$

Vậy GTNN của $\max\{|m-1|, |m-5|\}$ bằng 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|m-1| = |m-5| \Leftrightarrow m = 3.$

Câu 69. Gọi S là tập giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + m|$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 6. Tổng các phần tử của S bằng

A. -4. **B.** 4. **C.** -10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

+ Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1;4]$. Đạo hàm: $g'(t) = 2t - 4$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

+ Suy ra giá trị nhỏ nhất: $\min f(x) = \min\{|m-3|;|m-4|;|m|\}$

Xét $|m-4| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -2 \end{array}\right.$. Ta thấy $m = 10$ thỏa mãn.

Xét $|m-3| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = -3 \end{array}\right.$ (không thỏa mãn).

Xét $|m| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -6 \end{array}\right.$. Ta thấy $m = -6$ thỏa mãn.

Câu 70. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\dfrac{x^2 + mx + m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. $-\dfrac{11}{3}$. **B.** $\dfrac{13}{6}$. **C.** $-\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$

Lời giải

Chọn C

Xét $u(x) = \dfrac{x^2 + mx + m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$. Dễ thấy $u(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$

Ta có $u' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;2] \\ x = -2 \notin [1;2] \end{array}\right.$.

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[1;2]} u(x) = \max\{u(1), u(2)\} = \max\left\{m + \dfrac{1}{2}, m + \dfrac{4}{3}\right\} = m + \dfrac{4}{3} \\ \min\limits_{[1;2]} u(x) = \min\{u(1), u(2)\} = \min\left\{m + \dfrac{1}{2}, m + \dfrac{4}{3}\right\} = m + \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra $\max\limits_{[1;2]} f(x)=\max\left\{\left|m+\frac{1}{2}\right|,\left|m+\frac{4}{3}\right|\right\}=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left|m+\frac{1}{2}\right|=2\\ \left|m+\frac{1}{2}\right|\ge\left|m+\frac{4}{3}\right|\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left|m+\frac{4}{3}\right|=2\\ \left|m+\frac{4}{3}\right|\ge\left|m+\frac{1}{2}\right|\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-\frac{5}{2}\\ m=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S là $-\frac{11}{6}$.

Câu 71. Cho hàm số $f(x)=\left|2x^3-6x^2+m\right|$, gọi A là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Số giá trị nguyên của tham số m để $A<2020$ là

A. 4031. **B.** 4032. **C.** 4033. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Xét $u(x)=2x^3-6x^2-m$ trên đoạn $[1;3]$. Ta có hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

$u'(x)=6x^2-12x$.

$u'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\notin(1;3)\\ x=2\in(1;3)\end{array}\right.$.

Khi đó: $\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{[1;3]} u(x)=\max\left\{u(1);u(2);u(3)\right\}=m\\ \min\limits_{[1;3]} u(x)=\min\left\{u(1);u(2);u(3)\right\}=m-8\end{array}\right.$.

$A=\max\left\{|m|;|m-8|\right\}$.

Yêu cầu $A<2020 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}|m|<2020\\ |m|\ge|m-8|\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}|m-8|<2020\\ |m-8|\ge|m|\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-2020<m<2020\\ m\ge 4\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-2012<m<2028\\ m\le 4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\le m<2020\\ -2012<m\le 4\end{array}\right.$.

Vậy có 4031 số nguyên m để $A<2020$.

Câu 72. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5\notin[0;2]\\ x=2\\ x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5	0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$				$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$				

Ta có $g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max\limits_{[0;2]} y=\max\limits_{[0;2]}|g(x)|\le 20 \Leftrightarrow \begin{cases}|g(0)|\le 20\\ |g(2)|\le 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|m-20|\le 20\\ |m+6|\le 20\end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le 14$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 73. Cho hàm số $y=x^3-2(m-1)x^2+9x+2-m$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thoả mãn $|x_1-x_2|=2$ là

A. 2. **B.** -2. **C.** -7. **D.** 7.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-4(m-1)x+9$

Hàm số đạt cực trị $\Leftrightarrow$ PT $y'=0$ có 2 nghiệm p.biệt $\Leftrightarrow \Delta'=4(m-1)^2-27>0$ $\Leftrightarrow m<1-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m>1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (*)

Khi đó phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=\dfrac{4(m-1)}{3}, x_1x_2=3$ (Vi-ét)

Ta có: $|x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4 \Leftrightarrow \dfrac{16(m-1)^2}{9}-12=4 \Leftrightarrow (m-1)^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=4\end{array}\right.$

Kết hợp với (*) ta có giá trị m cần tìm là $m=-2$, $m=4$.

Câu 74. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m-20$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5\notin[0;2]\\ x=2\\ x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0			$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$					$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$				

$g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Để $\max\limits_{[0;2]}|g(x)|\le 20$ thì $\begin{cases} g(0)\le 20 \\ g(2)\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-20|\le 20 \\ |m+6|\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le 14$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 75. Biết giá trị lớn nhất hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ trên đoạn $[-1;4]$ bằng 10. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-7<m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m<-27$ **D.** $\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

+ Đặt $g(x)=x^3-3x^2+m \Rightarrow g'(x)=3x^2-6x$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

+ Suy ra $\max\limits_{[1;4]} f(x)\in\left\{|g(-1)|;g(0);|g(2)|;|g(4)|\right\}=\left\{|m-4|;|m|;|m+16|\right\}$. Vì m + 16 > 10 với m > 0

nên xét $\begin{cases} m\le 0 \\ |m-4|=10 \\ |m+16|\le 10 \end{cases} \Rightarrow m=-6$ hoặc $\begin{cases} m\le 0 \\ |m+16|=10 \Rightarrow m=\phi \\ |m-4|\le 10 \end{cases}$.

Câu 76. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(m^2-2)x^3-m^2x^2+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5?

A. 0. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(m^2-2)x^3-m^2x^2+m$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x)=x^3+(m^2-2)x^2-2m^2x^2=x(x-2)(x+m^2)\le 0,\ \forall x\in[0;2]$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[0;2]\longrightarrow$ yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0)\le 5 \\ g(2)\ge -5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 5 \\ 4+\frac{8}{3}(m^2-2)-4m^2+m\ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{53}}{4}\le m\le \frac{3+\sqrt{53}}{4} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-1;0;1;2\}$. **Chọn B**

Câu 77. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$2+m$

TH1 : $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (loại).

TH2 : $\begin{cases}2+m>0\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó : $|m-2|=2-m>2>2+m\ \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3\Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

TH3 : $\begin{cases}m>0\\ -2+m<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<2$. Khi đó : $|m-2|=2-m<2<2+m\ \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

$2+m=3\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

TH4: $-2+m>0\Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

$2+m=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

Câu 78. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^4-8x^2+m|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=x^4-8x^2+m, x\in[-1;1]$, ta có $g'(x)=4x^3-16x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm2\end{array}\right.$.

$g(-1)=g(1)=-7+m$, $g(0)=m$.

Do đó: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\max\{|-7+m|,|m|\}=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|-7+m|=5\\ |-7+m|\ge|m|\end{cases}\\ \begin{cases}|m|=5\\ |m|\ge|-7+m|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=5\end{array}\right.$

Vậy $s=\{2;5\}$. Vậy tổng các giá trị của S bằng 7.

Câu 79. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Lời giải

Chọn#A.

Đặt $t=x^3-3x$. Khảo sát hàm t biến x, với $x\in[0;3]\Rightarrow t\in[-2;18]$

Suy ra $f=g(t)=|t+m|\Rightarrow \max f(x)=\max\{|m-2|;|m+18|\}$.

Theo bài ra ta có $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m-2|=16\\|m-2|\geq|m+18|\end{cases}\\\begin{cases}|m+18|=16\\|m-2|<|m+18|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-14\\m=-2\end{array}\right.$.

Vậy $S=\{-14;-2\}$. Tổng tất cả các phần tử của S là: -16.

Câu 80. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn không vượt quá 30. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 108. **B.** 120. **C.** 210. **D.** 136.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn.

Ta có: $f'\left(x\right)=x^3-28x+48$. Với mọi $x\in\left[0;2\right]$ ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^3-28x+48=0\Leftrightarrow x=2$.

Mặt khác: $f\left(0\right)=m-30; f\left(x\right)=m+14$. Ta có: $\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|f\left(0\right)\right|;\left|f\left(2\right)\right|\right\}$.

Theo bài: $\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|\leq 30\Leftrightarrow\begin{cases}\left|f\left(0\right)\right|\leq 0\\\left|f\left(2\right)\right|\leq 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-30|\leq 30\\|m+14|\leq 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-30\leq m-30\leq 30\\-30\leq m+14\leq 30\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq m\leq 60\\-44\leq m\leq 16\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq m\leq 16$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in S=\left\{0;1;2;3;4;5;...;16\right\}$.

Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là $\frac{17\left(0+16\right)}{2}=136$.

PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT CHỨA THAM SỐ

TOANMATH.com

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên m mà $-10 \le m \le 10$, để phương trình (ẩn x):

$3^{\log_2 x^2} - 2(m+3).3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn : $x_1x_2 > 2$.

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

- ĐK : $x > 0$.

- Ta có : $3^{\log_2 x^2} - 2(m+3).3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2\log_2 x} - 2(m+3).3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ (1).

- Đặt $t = 3^{\log_2 x}$, $t > 0$. Ta được phương trình : $t^2 - 2(m+3)t + m^2 + 3 = 0$ (2).

Nhận thấy : (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 = 2(m+3) > 0 \\ t_1t_2 = m^2 + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (m^2+3) > 0 \\ m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m + 6 > 0 \\ m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 \ (*)$$

Khi đó : (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn :

$t_1.t_2 = m^2 + 3 \Leftrightarrow 3^{\log_2 x_1}.3^{\log_2 x_x} = m^2 + 3 \Leftrightarrow 3^{\log_2 x_1 + \log_2 x_2} = m^2 + 3 \Leftrightarrow 3^{\log_2(x_1x_2)} = m^2 + 3$.

Từ $x_1x_2 > 2 \Rightarrow \log_2(x_1x_2) > 1 \Rightarrow 3^{\log_2(x_1x_2)} > 3 \Rightarrow m^2 + 3 > 3 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne 0$.

Kết hợp điều kiện (*) ta được : $m \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, -10 \le m \le 10$ nên $m = 1, 2, ..., 10$.

Câu 2. Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}(|m| + 5)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \le m \le \sqrt{6}$. **B.** $-5 \le m \le 5$. **C.** $5 - \sqrt{6} \le m \le 5 + \sqrt{6}$. **D.** $-\sqrt{6} \le m \le 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}(|m| + 5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}}{3^{|m|+5}} = \frac{\ln(|m| + 5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}.\ln(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10) = 3^{|m|+5}.\ln(|m| + 5)$$

Xét $f(t) = \ln(t).3^t, \forall t \ge 5$

$$f'(t) = \frac{1}{t}3^t + \ln(t)3^t\ln(3) > 0, \forall t \ge 5$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10) = f(|m| + 5)$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5}\cos x + 10 = |m| + 5$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5}\cos x + 5 = |m|$$

Mà $-\sqrt{6} \le \sin x + \sqrt{5}\cos x \le \sqrt{6}$

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có $5-\sqrt{6}\le m\le 5+\sqrt{6}$

Câu 3. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)=2$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 6. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $a>0$, $b>0$ nên $\begin{cases}3a+2b+1>1\\9a^2+b^2+1>1\\6ab+1>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)>0\\\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)>0\end{cases}$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được

$\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)\ge 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right).\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)}$

$\Leftrightarrow 2\ge 2\sqrt{\log_{6ab+1}\left(9a^2+b^2+1\right)}\Leftrightarrow \log_{6ab+1}\left(9a^2+b^2+1\right)\le 1\Leftrightarrow 9a^2+b^2+1\le 6ab+1\Leftrightarrow (3a-b)^2\le 0$

$\Leftrightarrow 3a=b$.

Vì dấu "$=$" đã xảy ra nên

$\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)=\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)\Leftrightarrow \log_{3b+1}\left(2b^2+1\right)=\log_{2b^2+1}\left(3b+1\right)$

$\Leftrightarrow 2b^2+1=3b+1\Leftrightarrow 2b^2-3b=0\Leftrightarrow b=\dfrac{3}{2}$ (vì $b>0$). Suy ra $a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a-b=-1$.

Câu 4. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+y^2>2$ và $\log_{x^2+y^2}\left(x+2y\right)\ge 1$. Gọi M,m lầ lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+y$.Tính giá trị biểu thức $A=M+m$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Đáp án C

Vì $x^2+y^2>1$ suy ra $y=\log_{x^2+y^2}f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến trên tập xác định. Khi đó $\log_{x^2+y^2}\left(x+2y\right)\ge\log_{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow x+2y\ge x^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-x+y^2-2y\le 0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2\le\dfrac{5}{4}$

Xét biểu thức P, ta có $P=2x+y=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+y-1+2\Leftrightarrow 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+y-1=P-2$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, có $\left[2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+y-1\right]^2\le\left(2^2+1^2\right)\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2\right]^2\Leftrightarrow\left(P-2\right)^2\le 5.\dfrac{5}{4}=\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow-\dfrac{5}{2}\le P-2\le\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}\le P\le\dfrac{9}{2}\Rightarrow P_{Max}=\dfrac{9}{2};P_{min}=-\dfrac{1}{2}$

Vậy, $A=M+m=\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}=4$

Câu 5. Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\dfrac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$ bằng

A. -1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có $2(x+1)^2+\log_2 2(x+1)^2=\log_2(2y+1)+2y+1$.

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ trên $(0;+\infty)$ và đi đến kết quả $2(x+1)^2=2y-1$.

Khi đó $P=e^{2x-1}+2x^2-4x-2=g(x)$.

Ta có $g'(x)=2e^{2x-1}+4x-4;\ g'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{2x-1}=4-4x$. Ta thấy vế trái là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến nên phương trình có nghiệm duy nhất. Vì $g'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ nên $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của $g'(x)=0$. Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$ và kết luận được giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị m nguyên và $m\in(0;2021)$ để phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}=m$ có nghiệm?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_2 x$ thì phương trình (*) trở thành

$$t^2-2t-\sqrt{m+t}=m\Leftrightarrow\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{m+t}+\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t-1=\sqrt{m+t} & (2)\\ -t=\sqrt{m+t} & (3)\end{array}\right..$$

TH1: $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}t-1\ge 0\\ (t-1)^2=t+m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1\\ m=t^2-3t+1\end{cases}$.

t	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(t)=t^2-3t+1$	-1 ↘		↗ $+\infty$

Phương trình (2) có nghiệm khi $m\ge-\frac{5}{4}$ (4).

TH2:

$(3)\Leftrightarrow\begin{cases}-t\ge 0\\ (-t)^2=t+m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 0\\ m=t^2-t\end{cases}$.

t	$-\infty$	0
$g(t)=t^2-t$	$+\infty$ ↘	0

Phương trình (3) có nghiệm khi $m\ge 0$ (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ PT (*) có nghiệm khi $m\ge-\frac{5}{4}$.

Lấy các giá trị nguyên $m\in(0,2021)$ ta được $m=1,2,\ldots,2020$.

Có 2020 giá trị nguyên của m.

Câu 7. Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số thực m để phương trình $\log_2^2 x+4\log_2 x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

A. $(-4;+\infty)$. **B.** $[-4;+\infty)$. **C.** $[-4;0)$. **D.** $[-2;0]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_2 x$. Với $x\in(0;1)\Rightarrow t\in(-\infty;0)$.

PT đã cho trở thành: $t^2+4t=m$.

Xét hàm $g(t)=t^2+4t\Rightarrow g'(t)=2t+4=0\Leftrightarrow t=-2$

BBT:

t	$-\infty$		-2		0
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có để pt (1) có nghiệm thì $m \in [-4;\ +\infty)$.

Câu 8. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m.2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2^{(x-1)^2}\quad (t \geq 1)$

Phương trình có dạng: $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0(*)$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 3m + 2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ \sqrt{m^2 - 3m + 2} < m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m - 1 \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 < m^2 - 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Câu 9. Biết rằng phương trình: $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1x_2 = 27$. Khi đó tổng $(x_1 + x_2)$ bằng:

A. 6. **B.** $\dfrac{34}{3}$. **C.** 12. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Phương pháp

+) Đặt $\log_3 x = t \Rightarrow x = 3^t (x > 0)$

+) Tìm điều kiện của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

+) Áp dụng hệ thức Vi-ét để làm bài toán.

+) Tìm m sau đó thế m vào phương trình để tìm $x_1; x_2$.

Cách giải:

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $\log_3 x = t \Rightarrow x = 3^t$

Khi đó ta có phương trình: $t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0(*)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm t phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \leftrightarrow (m+2)^2 - 4(3m-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 12m + 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 + 2\sqrt{2} \\ m < 4 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Với $\left[\begin{array}{l} m > 4+2\sqrt{2} \\ m < 4-2\sqrt{2} \end{array}\right.$ có hai nghiệm phân biệt $t_1;t_2$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1;x_2$ với $x_1 = 3^{t_2}, x_2 = 3^{t_1}$

Áp dụng hệ thức Vi-ét với phương trình (*) ta có: $\begin{cases} t_1+t_2 = m+2 \\ t_1t_2 = 3m-1 \end{cases}$

Theo đề bài ta có: $x_1x_2 = 27 \Leftrightarrow 3^{t_1}\cdot 3^{t_2} = 3^{t_1+t_2} = 27 \Leftrightarrow t_1+t_2 = 3 \Leftrightarrow m+2 = 3 \Leftrightarrow m = 1(tm)$

Với $m = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow t^2-3t+2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3^1 = 3 \\ x_2 = 3^2 = 9 \end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2 = 3+9 = 12$

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3 x^2 + m\sqrt{\log_3 x^8} + m + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $-1 \le m < -\frac{2}{3}$. **D.** $-1 \le m < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

PT: $\log_3 x^2 + m\sqrt{\log_3 x^8} + m + 1 = 0$.(1)

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ \log_3 x^8 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x^8 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$.

Đặt $t = \log_3 x^2\ (t \ge 0)$. Khi đó phương trình trở thành: $t^2 + 2mt + m + 1 = 0$.(2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có một nghiệm $t \ge 0$

TH1) (2) có nghiệm kép $t \ge 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 = 0 \\ \frac{-b'}{a} = -m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ m \le 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

TH2) (2) có hai nghiệm thỏa $t_1 < 0 \le t_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 > 0 \\ P = \frac{c}{a} = m+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1-\sqrt{5}}{2}; m > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m \le -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \le -1$.

Vậy, $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3 x^2 + m\sqrt{\log_3 x^8} + m + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $-1 \le m < -\frac{2}{3}$. **D.** $-1 \le m < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

PT: $\log_3 x^2 + m\sqrt{\log_3 x^8} + m + 1 = 0$.(1)

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ \log_3 x^8 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x^8 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$.

Đặt $t = \log_3 x^2 \left(t \ge 0\right)$. Khi đó phương trình trở thành: $t^2 + 2mt + m + 1 = 0$.(2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có một nghiệm $t \ge 0$

TH1) (2) có nghiệm kép $t \ge 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 = 0 \\ \dfrac{-b'}{a} = -m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ m \le 0 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

TH2) (2) có hai nghiệm thỏa $t_1 < 0 \le t_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} = m + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m \le -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \le -1$.

Vậy, $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $(2;4)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $[3;4]$. **D.** $[2;4]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1} = m$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) = \dfrac{12^x.\ln 3 + 6^x.\ln 6 + 3.2^x.\ln 2}{\left(2^x + 1\right)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2, f(1) = 4$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m \in (2;4)$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)\left(2^{2+x} - 2^{2-x}\right) + 16 - 8m$ có nghiệm trên $[0;1]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)\left(2^{2+x} - 2^{2-x}\right) + 16 - 8m \Leftrightarrow 4^x + 4^{-x} = (m+1)\left(2^x - 2^{-x}\right) + 4 - 2m (*)$.

Đặt $t = 2^x - 2^{-x} \Rightarrow t^2 + 2 = 4^x + 4^{-x}$, vì $x \in [0;1]$ nên $t \in \left[0; \dfrac{3}{2}\right]$.

Khi đó: $(*) \Rightarrow t^2 - (m+1)t - 2 + 2m = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-m) = 0$.

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = m \end{array}\right. \Leftrightarrow t = m$ suy ra $m \in \left[0; \dfrac{3}{2}\right]$ nên $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $1 + \log_5\left(x^2 + 1\right) \le \log_5\left(mx^2 + 4x + m\right)$ nghiệm đúng với mọi x ∈ R

A. $m \in (2;3]$; **B.** $m \in [7;+\infty)$;

C. $m \in (-\infty;3] \cup [7;+\infty)$ **D.** $m \in (0;7]$.

Lời giải

Chọn B

Câu 15. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$ **B.** $[2;4]$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(3;4)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $6^x+(3-m)2^x-m=0\ (1) \Leftrightarrow \dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}=m$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=\dfrac{12^x.\ln 3+6^x.\ln 6+3.2^x.\ln 2}{(2^x+1)^2}>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra $0<x<1 \Leftrightarrow f(0)<f(x)<f(1) \Leftrightarrow 2<f(x)<4$ vì $f(0)=2,\ f(1)=4$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m\in(2;4)$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m\in(-\infty;0]$. **B.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$. **C.** $m\in\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Ta có $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2+\log_2 x+m=0$.

Đặt $t=\log_2 x$, bài toán trở thành tìm m sao cho $t^2+t+m=0 \Leftrightarrow t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$

Đặt $f(t)=t^2+t \Rightarrow f'(t)=2t+1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-1}{2}$.

BBT.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(t)=2t+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Để pt $t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$ thì $-m\ge-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$.

Câu 17. Tập các giá trị của m để phương trình $4.\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x-m+3=0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt là

A. $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$. **B.** $(7;\ 8)$. **C.** $(-\infty;\ 3)$. **D.** $(7;\ 9)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, điều kiện: $t>0$.

Với $x<0 \Leftrightarrow 0<t<1$ và mỗi $t\in(0;\ 1)$ cho ta đúng một nghiệm $x<0$.

Khi đó phương trình đã cho được viết lại $4t+\frac{1}{t}+3=m\ (*)$. Suy ra bài toán trở thành tìm m để phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm phân biệt $t\in(0;\,1)$.

Xét hàm số $f(t)=4t+\frac{1}{t}+3$ với $t\in(0;\,1)$.

Có $f'(t)=4-\frac{1}{t^2}=\frac{4t^2-1}{t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}\in(0;\,1) \\ t=-\frac{1}{2}\notin(0;\,1)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;1)$:

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	8

Dựa vào bảng biến thiên ta có $7<m<8$.

Câu 18. Cho phương trình $\log_4\left[2^{2x}+2^{x+2}+2^2\right]=\log_2|m-2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình vô nghiệm?

Câu 19. #A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $m\neq 2$. Phương trình $\Leftrightarrow\log_4\left[(2^x+2)^2\right]=\log_2|m-2|$

$\Leftrightarrow\log_2(2^x+2)=\log_2|m-2|\Leftrightarrow 2^x+2=|m-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x+2=m-2\\2^x+2=2-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=m-4\\2^x=-m\end{array}\right.$.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}m-4\le 0\\-m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 4\\m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 4$.

$\xrightarrow[m\neq 2]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1;3;4\}$.

Câu 20. Cho phương trình $\log_3{}^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in\left(2;\frac{7}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{7}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(x_1+3)(x_2+3)=72\Rightarrow x_1x_2+3(x_1+x_2)=63$. (*)

Xét $\log_3{}^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$, đặt $t=\log_3 x$, PT trở thành $t^2-3t+2m-7=0$ (1).

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $x_1,x_2\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 9-4(2m-7)>0\Leftrightarrow -8m+37>0\Leftrightarrow m<\frac{37}{8}$.

Khi đó, giả sử (1) có hai nghiệm t_1, t_2, tương ứng PT đã cho có hai nghiệm x_1, x_2.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 t_2 = 2m - 7 \end{cases}$.

Nên $\begin{cases} \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3 & (2) \\ \log_3 x_1 . \log_3 x_2 = 2m - 7 & (3) \end{cases}$. Từ (2) $\Rightarrow x_1 . x_2 = 27$

Kết hợp với giả thiết (*), ta có $\begin{cases} x_1 . x_2 = 27 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{cases}$. Thay vào (3), ta được $m = \dfrac{9}{2}$ (TM).

Câu 21. Cho phương trình $\log_3^2 \dfrac{x}{9} - (m-1)\log_3 x + 2m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;9]$ là

A. $(-1;1)$. **B.** $[-1;1)$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $(-1;1]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_3^2 \dfrac{x}{9} - (m-1)\log_3 x + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 2)^2 - (m-1)\log_3 x + 2m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x - (m+3)\log_3 x + 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = m+1 \end{array}\right.$.

Ta có: $x \in [1;9] \Leftrightarrow \log_3 x \in [0;2]$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;9]$ khi và chỉ khi $0 \le m + 1 < 2 \Leftrightarrow -1 \le m < 1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2(5^x - 1).\log_4(2.5^x - 2) = m$ có nghiệm $x \ge 1$?

A. $m \in [2;+\infty)$. **B.** $m \in [3;+\infty)$. **C.** $m \in (-\infty;2]$. **D.** $m \in (-\infty;3]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$

Với $x \ge 1 \Rightarrow 5^x \ge 5 \Rightarrow \log_2(5^x - 1) \ge \log_2(5-1) = 2$ hay $t \ge 2$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + t = 2m$

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình có nghiệm $t \ge 2$".

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t,\ \forall t \ge 2,\ f'(t) = 2t + 1 > 0,\ \forall t \ge 2$

t	2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến với $t \ge 2$.

Khi đó phương trình có nghiệm khi $2m \ge 6 \Leftrightarrow m \ge 3$.

Vậy $m \ge 3$ là các giá trị cần tìm.

Câu 23. Cho phương trình $\sqrt{\log_3^2 x-4\log_3 x-5}=m\left(\log_3 x+1\right)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $\left[27;+\infty\right)$.

A. $0<m<2$. **B.** $0<m\le 2$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $0\le m<1$

Lời giải

Chọn d

Đặt $t=\log_3 x$, với $x\ge 27\Rightarrow t\ge 3$.

Phương trình trở thành $\sqrt{t^2-4t-5}=m\left(t+1\right)$. $(*)$ Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} t\le -1 \\ t\ge 5 \end{array}\right.$.

+) Với $m<0$ thì phương trình vô nghiệm, do $\begin{cases}\sqrt{t^2-4t-5}\ge 0 \\ t+1>0\end{cases}, \forall t\ge 5.$

+) Với $m=0$, ta có $\sqrt{t^2-4t-5}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1\ \ (loại) \\ t=5\ \ (thỏa mãn) \end{array}\right.$.

+) Với $m>0$ thì $(*)\Leftrightarrow t^2-4t-5=m^2\left(t+1\right)^2\Leftrightarrow\left(1-m^2\right)t^2-\left(2m^2+4\right)t-5-m^2=0$. $(**)$

Nếu $m=1\Rightarrow t=-1$ không thỏa mãn.

Nếu $m\ne 1$, ta có $(**)$ $\Leftrightarrow(t+1)\left[\left(1-m^2\right)t-m^2-5\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1\ \ (loại) \\ t=\dfrac{m^2+5}{1-m^2} \end{array}\right.$.

Do đó, PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow\dfrac{m^2+5}{1-m^2}\ge 5\Leftrightarrow\dfrac{6m^2}{1-m^2}\ge 0\Leftrightarrow -1<m<1$, kết hợp $m>0$ suy ra $0<m<1$.

Vậy với $0\le m<1$ thì phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[27;+\infty)$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_5^2 x-\log_5 x-m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in(1;125)$

A. $m\le\frac{1}{4}$. **B.** $m\le-\frac{1}{4}$. **C.** $m\ge-\frac{1}{4}$. **D.** $m\ge\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_5 x$, vì $x\in(1;125)$ nên $t\in(0;3)$. Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-t-m\ge 0$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m\le t^2-t$ với mọi $t\in(0;3)$

Tức là $m\le\min\limits_{(0;3)} f(t)$, với $f(t)=t^2-t$.

Ta khảo sát nhanh hàm số $f(t)=t^2-t$ trên khoảng $(0;3)$ như sau:

t	0		$\frac{1}{2}$		3
f'(t)		−	0	+	
f(t)	↘		$\frac{-1}{4}$		↗

Từ đó suy ra $m\le\min\limits_{(0;3)} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^x-4.6^x+\left(m-1\right).4^x\le 0$ có nghiệm?

A. 6. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 4.

Lời giải

ChọnB

$9^x-4.6^x+(m-1).4^x\le 0\Leftrightarrow\left(\frac{9}{4}\right)^x-4.\left(\frac{6}{4}\right)^x+m-1\le 0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-4.\left(\frac{3}{2}\right)^x+m-1\le 0\ (1)$.

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x, t>0$ ta được bất phương trình $t^2-4t+m-1\le 0\Leftrightarrow -t^2+4t+1\ge m\ (2)$.

Bất phương trình $9^x-4.6^x+(m-1).4^x\le 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ bất phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ bất phương trình (2) có nghiệm $t>0$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2+4t+1, t>0$.

$f'(t)=-2t+4$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow -2t+4=0\Leftrightarrow t=2$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ ta thấy bất phương trình (2) có nghiệm $t>0\Leftrightarrow \max\limits_{(0;+\infty)} f(t)\ge m\Leftrightarrow\ 5\ge m$.

Mà m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 26. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$. Diện tích của (H)

bằng

A. $\frac{108}{5}$. **B.** $\frac{109}{5}$. **C.** $\frac{109}{6}$. **D.** $\frac{119}{6}$

Lời giải

Chọn C

Xét pt $\left|x^2-4x+3\right|=x+3$ có nghiệm $x=0,\ x=5$

Suy ra $S=\int_0^1\left(-x^2+5x\right)dx+\int_1^3\left(x^2-3x+6\right)dx+\int_3^5\left(-x^2+5x\right)dx=\frac{109}{6}$

Câu 27. Tìm m để phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-m=0$ có nghiệm.

A. $m\ge -2$.. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m\le 2$.. **D.** $m<2$.

Lời giải

Đáp án B

Đặt $\left(\sqrt{2}-1\right)^x=t\ (t>0)$, phương trình đã cho trở thành $t+\frac{1}{t}=m$. Do $t>0$ nên $\frac{1}{t}>0$, ta có: $t+\frac{1}{t}\ge 2$ (bất đẳng thức Cô-si). Vậy phương trình $t+\frac{1}{t}=m$ có nghiệm khi $m\ge 2$.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_5^2 x-\log_5 x-m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in(1;125)$

A. $m\le\frac{1}{4}$. **B.** $m\le -\frac{1}{4}$. **C.** $m\ge -\frac{1}{4}$. **D.** $m\ge\frac{1}{4}$.

Lời giải

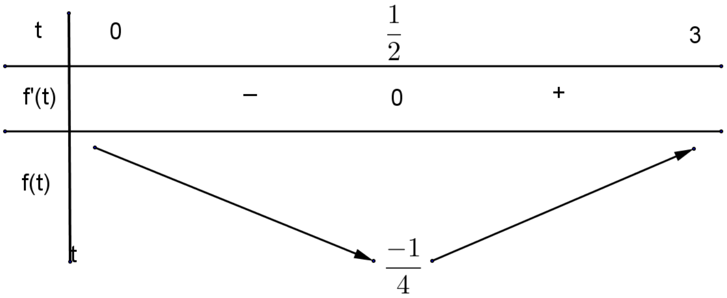
Chọn B

Đặt $t=\log_5 x$, vì $x\in(1;125)$ nên $t\in(0;3)$. Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-t-m\ge 0$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m\le t^2-t$ với mọi $t\in(0;3)$

Tức là $m\le \min\limits_{(0;3)} f(t)$, với $f(t)=t^2-t$.

Ta khảo sát nhanh hàm số $f(t)=t^2-t$ trên khoảng $(0;3)$ như sau:



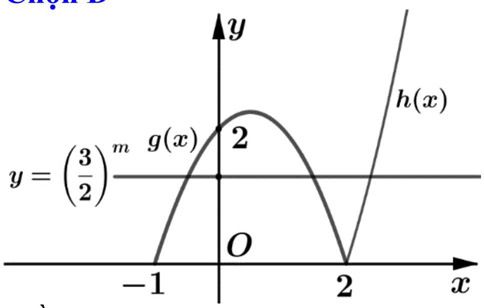
Từ đó suy ra $m\le \min\limits_{(0;3)} f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $\log_{\frac{3}{2}}|x-2|-\log_{\frac{2}{3}}(x+1)=m$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D



Điều kiện: $-1<x\ne 2$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}}|x-2|+\log_{\frac{3}{2}}(x+1)=m$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}}\left(|x-2|(x+1)\right)=m \Leftrightarrow |x-2|(x+1)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^m$. $(*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=|x-2|(x+1)$ và đường thẳng $y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^m$ (cùng phương với trục hoành).

Xét hàm số $f(x)=|x-2|(x+1)$ xác định trên $(-1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ta có $f(x)=|x-2|(x+1)=\begin{cases} h(x)=(x-2)(x+1)=x^2-x-2 & \text{khi } x>2 \\ g(x)=-(x-2)(x+1)=-x^2+x+2 & \text{khi } -1<x<2 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt khi

$0<\left(\dfrac{3}{2}\right)^m<\max\limits_{(-1;2)} g(x) \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^m<\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m<2 \xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-10;-9;...;1\}$. **Chọn D**

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m\in(-\infty;0]$. **B.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$. **C.** $m\in\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m=0$.

Đặt $t=\log_2 x$, bài toán trở thành tìm m sao cho $t^2+t+m=0$ $\Leftrightarrow t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$

Đặt $f(t)=t^2+t\Rightarrow f'(t)=2t+1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(t)=2t+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

.

Để phương trình $t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$ thì $-m\ge-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$.

Câu 31. Tập các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ là

A. $m\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **B.** $m\in[0;2]$.

C. $m\in(0;2)$. **D.** $m\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ trên $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

Đặt $\log_3^2 x=t$. Khi đó $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ nên $t\in[0;3]$.

Phương trình đã cho trở thành: $t+\sqrt{t+1}=2m+1$.

Đặt $f(t)=t+\sqrt{t+1}$, để phương trình có nghiệm trên $[0;3]$ ta có:

$\min\limits_{[0;3]} f(t)\le 2m+1\le\max\limits_{[0;3]} f(t)$ $(*)$

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}>0$, $\forall t\ge0$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[0;3]$

Vậy $(*)\Leftrightarrow f(0)\le 2m+1\le f(3)\Leftrightarrow 1\le 2m+1\le 5\Leftrightarrow 0\le m\le 2$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{2x-1}-m.2^x+2m-2=0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[1;2]$.

A. $m\in(2;3]$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in[2;4]$. **D.** $m\in[2;3)$.

Lời giải

Chọn A

$2^{2x-1}-m.2^x+2m-2=0\Leftrightarrow 2^{2x}-2m.2^x+4m-4=0$

Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$t^2-2mt+4m-4=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-2m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=2m-2(**) \end{array}\right.$ $(*)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $(**)$ phải có một nghiệm thuộc $(2;4]$

$\Leftrightarrow 2<2m-2\le 4 \Leftrightarrow 2<m\le 3$.

Câu 33. Cho phương trình $4^x+m2^x-2m-4=0$, (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;1]$ là

A. $\left(-4;-\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\left[-4;-\frac{5}{2}\right]$. **C.** $\left[-4;-\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(-4;-\frac{5}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho tương đương với

$2^{2x}+m2^x-2m-4=0$

Đặt $t=2^x$, vì $x\in[-1;1] \Rightarrow t\in\left[\frac{1}{2};2\right]$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $t^2+mt-2m-4=0\,(1)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (t-2)(t+m+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-m-2 \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le -m-2<2 \Leftrightarrow m\in\left(-4;-\frac{5}{2}\right]$

Câu 34. Cho phương trình $\log_{2020}^2(2020x)-(m+2)\log_{2020}x+m-2=0$ (m là tham số thực). Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2020^2]$ là:

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\log_{2020}^2(2020x)-(m+2)\log_{2020}x+m-2=0$ $(*)$

Điệu kiện $x>0$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow (1+\log_{2020}x)^2-(m+2)\log_{2020}x+m-2=0$

$\Leftrightarrow \log_{2020}{}^2 x-m\log_{2020}x+m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{2020}x=1 \\ \log_{2020}x=m-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2020 \\ x=2020^{m-1} \end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt trên đoạn $[1;2020^2]$ thì:

$\begin{cases} 2020^{m-1}\ne 2020 \\ 1\le 2020^{m-1}\le 2020^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 2 \\ 0\le m-1\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 2 \\ 1\le m\le 3 \end{cases} \Rightarrow m\in\{1;3\}$

Vậy tổng các giá trị m nguyên là: $1+3=4$.

Câu 35. n là số rự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x-3^{-x}=2\cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x+9^{-x}=4+2\cos 2nx$.

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 4035. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

$9^x + 9^{-x} = 4 + 2\cos 2nx \Leftrightarrow 9^x + 9^{-x} - 2.3^x.3^{-x} = 2 + 2\cos 2nx$

$\Leftrightarrow \left(3^x - 3^{-x}\right)^2 = 4\cos^2 nx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 3^{-x} = 2\cos nx \ (1) \\ 3^x - 3^{-x} = -2\cos nx \ (2) \end{array}\right.$

Khi đó nếu (1) và (2) có nghiệm chung thì $3^x - 3^{-x} = 3^{-x} - 3^x \Leftrightarrow 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = 0$

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $3^0 - 3^0 = 2\cos 0 \Leftrightarrow 0 = 2$, tức là (1) và (2) không có nghiệm chung.

Mặt khác ta thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ sẽ là nghiệm của (2)

Mà (1) có 2018 nghiệm nên (2) cũng có 2018 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4036 nghiệm.

Câu 36. Cho phương trình $\mathrm{e}^{3x} - 2.\mathrm{e}^{2x+\ln 3} + \mathrm{e}^{x+\ln 9} + m = 0$, với m là tham số thực. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất là

A. $m < 0$ hoặc $m = 4$. **B.** $m = 0$ hoặc $m < -4$.

C. $-4 \le m < 0$. **D.** $m > 0$ hoặc $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\mathrm{e}^{3x} - 2.\mathrm{e}^{2x+\ln 3} + \mathrm{e}^{x+\ln 9} + m = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} - 2.\mathrm{e}^{2x}.\mathrm{e}^{\ln 3} + \mathrm{e}^{x}.\mathrm{e}^{\ln 9} + m = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} - 6.\mathrm{e}^{2x} + 9.\mathrm{e}^{x} + m = 0$.

Đặt $t = \mathrm{e}^x$ $(t > 0)$, phương trình tương đương với $m = -t^3 + 6t^2 - 9t$.

Xét $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t$ trên $(0; +\infty)$.

$f'(t) = -3t^2 + 12t - 9$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: với $m = 0$ hoặc $m < -4$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

Ta không lấy giá trị $x = 0$ nên tại $m = 0$ đường thẳng $y = m$ vẫn cắt đồ thị tại duy nhất một điểm (điểm tiếp xúc tại $x = 3$).

Câu 37. Cho phương trình $\mathrm{e}^{3x} - 2.\mathrm{e}^{2x+\ln 3} + \mathrm{e}^{x+\ln 9} + m = 0$, với m là tham số thực. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất là

A. $m < 0$ hoặc $m = 4$. **B.** $m = 0$ hoặc $m < -4$.

C. $-4 \le m < 0$. **D.** $m > 0$ hoặc $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\mathrm{e}^{3x} - 2.\mathrm{e}^{2x+\ln 3} + \mathrm{e}^{x+\ln 9} + m = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} - 2.\mathrm{e}^{2x}.\mathrm{e}^{\ln 3} + \mathrm{e}^{x}.\mathrm{e}^{\ln 9} + m = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} - 6.\mathrm{e}^{2x} + 9.\mathrm{e}^{x} + m = 0$.

Đặt $t = \mathrm{e}^x$ $(t > 0)$, phương trình tương đương với $m = -t^3 + 6t^2 - 9t$.

Xét $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t$ trên $(0; +\infty)$.

$f'(t) = -3t^2 + 12t - 9$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: với $m=0$ hoặc $m<-4$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

Ta không lấy giá trị $x=0$ nên tại $m=0$ đường thẳng $y=m$ vẫn cắt đồ thị tại duy nhất một điểm (điểm tiếp xúc tại $x=3$).

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m\in(-\infty;0]$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$. **C.** $m\in\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Ta có $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m=0$.

Đặt $t=\log_2 x$, bài toán trở thành tìm m sao cho $t^2+t+m=0$ $\Leftrightarrow t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$.

Đặt $f(t)=t^2+t\Rightarrow f'(t)=2t+1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-1}{2}$.

BBT.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(t)=2t+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

.

Để pt $t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$ thì $-m\ge-\frac{1}{4}\Leftrightarrow m\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_5\left(25^x-\log_5 m\right)=x$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$. **B.** $m=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge1 \\ m=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{array}\right.$. **D.** $m\ge1$.

Lời giải

Chọn C

PT$\Leftrightarrow 25^x-\log_5 m=5^x\xrightarrow{t=5^x>0}t^2-t=\log_5 m$

Xét $g(t)=t^2-t$ trên $(0;+\infty)$ ta có bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\|\|$ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

PT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 m = -\frac{1}{4} \\ \log_5 m \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \\ m \geq 1 \end{array}\right.$

Câu 40. Cho phương trình $(m-3)9^x + 2(m+1)3^x - m - 1 = 0$. Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tổng $S = a + b$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$.

Khi đó phương trình trở thành $(m-3)t^2 + 2(m+1)t - m - 1 = 0$ $(*)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm x phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm t dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 \neq 0 \\ 2m^2 - 2 > 0 \\ \frac{-2(m+1)}{m-3} > 0 \\ \frac{-(m+1)}{m-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ -1 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3. \text{ Khi đó, } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = 4.$$

Câu 41. Số giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3{}^2(2x) + \log_9(4x^2) + 4 - m = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình tương đương với: $\log_3^2(2x) + \log_3(2x) + 4 = m$.

Đặt $t = \log_3(2x)$ với $x \in \left(\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right] \Rightarrow t \in (-1;1]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + t + 4 = m$.

Đặt $f(t) = t^2 + t + 4$.

Lập bảng biến thiên của $f(t)$ trên $(-1;1]$

t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f(t)$	$f(-1) = 4$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$	$\nearrow$	$f(1) = 6$

Yêu cầu bài toán tương đương với: $f\left(-\frac{1}{2}\right) \le m \le f(1) \Leftrightarrow \frac{15}{4} \le m \le 6$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa là 4, 5, 6.

Câu 42. Trong không gian $\boldsymbol{Oxyz}$, cho ba điểm $\boldsymbol{M(2;3;-1), N(-1;1;1), P(1;m-1;2)}$. Tìm $\boldsymbol{m}$ để tam giác $\boldsymbol{MNP}$ vuông tại $\boldsymbol{N}$.

A. $m = 2$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = -6$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Chọn D

Có $\overrightarrow{NM} = (3;2;-2), \overrightarrow{NP} = (2;m-2;1)$.

Để **tam giác** MNP **vuông tại** N thì $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow 6 + 2m - 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 43. Cho phương trình $\log_3^2\left(\frac{x}{9}\right) + (1-2m)\log_3 x + m^2 + 3m - 4 = 0$ (m là tham số thực). Số các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3};3\right)$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

$pt \Leftrightarrow (\log_3 x - 2)^2 + (1-2m)\log_3 x + m^2 + 3m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x - (2m+3)\log_3 x + m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = m \\ \log_3 x = m+3\end{array}\right.$

Ta có: $x \in \left(\frac{1}{3};3\right) \Leftrightarrow \log_3 x \in (-1;1)$.

Vậy để phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3};3\right)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}-1 < m < 1 \le m+3 \\ m \le -1 < m+3 < 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1 < m < 1 \\ -4 < m < -2\end{array}\right.$. Kết hợp với m nguyên nên $m \in \{-3;0\}$.

Câu 44. Cho phương trình $\log_3^2\left(\frac{x}{9}\right) + (1-2m)\log_3 x + m^2 + 3m - 4 = 0$ (m là tham số thực). Số các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3};3\right)$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

$pt \Leftrightarrow (\log_3 x - 2)^2 + (1-2m)\log_3 x + m^2 + 3m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x - (2m+3)\log_3 x + m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = m \\ \log_3 x = m+3\end{array}\right.$

Ta có: $x \in \left(\frac{1}{3};3\right) \Leftrightarrow \log_3 x \in (-1;1)$.

Vậy để phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3};3\right)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}-1<m<1\le m+3\\ m\le -1<m+3<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<m<1\\ -4<m<-2\end{array}\right.$. Kết hợp với m nguyên nên $m\in\{-3;0\}$.

Câu 45. Cho phương trình $\log_3^2\frac{x}{9}-(m-1)\log_3 x+2m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;9]$ là

A. $(-1;1)$. **B.** $[-1;1)$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $(-1;1]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

$\log_3^2\frac{x}{9}-(m-1)\log_3 x+2m-2=0\Leftrightarrow(\log_3 x-2)^2-(m-1)\log_3 x+2m-2=0$

$\Leftrightarrow\log_3^2 x-(m+3)\log_3 x+2m+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=m+1\end{array}\right.$.

Ta có: $x\in[1;9]\Leftrightarrow\log_3 x\in[0;2]$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;9]$ khi và chỉ khi $0\le m+1<2\Leftrightarrow -1\le m<1$.

Câu 46. Cho phương trình $\log_3^2 x-4.\log_3 x+m-3=0$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_2-81x_1<0$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đk: $x>0$.

Đặt $\log_3 x=t$ ta có phương trình $t^2-4.t+m-3=0$ (*)

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1<t_2$.

Hay $\Delta'=4-(m-3)=7-m>0\Leftrightarrow m<7$.

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases}t_1+t_2=4\\ t_1.t_2=m-3\end{cases}$

Ta có $t_1=\log_3 x_1\Rightarrow x_1=3^{t_1};t_2=\log_3 x_2\Rightarrow x_2=3^{t_2}$

Khi đó $x_2-81x_1<0\Leftrightarrow 3^{t_2}-81.3^{t_1}<0\Leftrightarrow 3^{t_2}<3^{t_1+4}\Leftrightarrow t_2<t_1+4\Leftrightarrow t_2-t_1<4$

Suy ra $(t_2-t_1)^2<16\Leftrightarrow(t_2+t_1)^2-4t_1t_2<16\Leftrightarrow(-4)^2-4(m-3)<16\Leftrightarrow m-3>0\Leftrightarrow m>3$

Từ đó $3<m<7$ mà $m\in Z$ nên $m\in\{4;5;6\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 47. Giá trị nào của m để phương trình $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;2^{\sqrt{3}}\right]$

A. $1\le m\le 2$. **B.** $0\le m\le 2$. **C.** $3\le m\le 8$. **D.** $1\le m\le 16$

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$ do $x\in\left[1;2^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow \log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 2^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 0\le \log_2 x\le \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 0\le \log_2^2 x\le 3\Leftrightarrow 1\le \log_2^2 x+1\le 4\Leftrightarrow 1\le \sqrt{\log_2^2 x+1}\le 2$

$\Rightarrow t\in[1;2]$.

Do vậy bài toán trở thành tìm m để phương trình $\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-1=m$ (1) có ít nhất nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-1$ trên đoạn $[1;2]$

Để phương trình (1) có nghiệm trên đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi $\underset{x\in[1;2]}{Min} f(x)\le m\le \underset{x\in[1;2]}{Max} f(x)$

Do hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$ nên $f(1)\le m\le f(2)\Leftrightarrow 0\le m\le 2$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $0\le m\le 2$.

Câu 48. Cho phương trình $\sqrt{\log_3^2 x-4\log_3 x-5}=m\left(\log_3 x+1\right)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[27;+\infty)$.

A. $0<m<2$. **B.** $0<m\le 2$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $0\le m<1$.

Lời giải

Chọn d

Đặt $t=\log_3 x$, với $x\ge 27\Rightarrow t\ge 3$.

Phương trình trở thành $\sqrt{t^2-4t-5}=m(t+1)$. $(*)$ Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} t\le -1\\ t\ge 5\end{array}\right.$.

+) Với $m<0$ thì phương trình vô nghiệm, do $\begin{cases}\sqrt{t^2-4t-5}\ge 0\\ t+1>0\end{cases},\forall t\ge 5$.

+) Với $m=0$, ta có $\sqrt{t^2-4t-5}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-1 & (loại)\\ t=5 & (thỏa\,mãn)\end{array}\right.$.

+) Với $m>0$ thì $(*)\Leftrightarrow t^2-4t-5=m^2(t+1)^2\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)t^2-\left(2m^2+4\right)t-5-m^2=0$. (**)

Nếu $m=1\Rightarrow t=-1$ không thỏa mãn.

Nếu $m\ne 1$, ta có (**) $\Leftrightarrow (t+1)\left[\left(1-m^2\right)t-m^2-5\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (loại)\\ t=\dfrac{m^2+5}{1-m^2}\end{array}\right.$.

Do đó, PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m^2+5}{1-m^2}\ge 5\Leftrightarrow \frac{6m^2}{1-m^2}\ge 0\Leftrightarrow -1<m<1$, kết hợp $m>0$ suy ra $0<m<1$.

Vậy với $0\le m<1$ thì phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[27;+\infty)$.

Câu 49. Giá trị của m để phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2+mx+m-1\right)+\log_{2-\sqrt{3}}x=0$ có nghiệm duy nhất là

A. $m>-5$. **B.** $m<-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ x^2+mx+m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ (x+m-1).(x+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1-m\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ m\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}x>1-m\\ m<1\end{cases}\end{array}\right.$.

$\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2+mx+m-1\right)+\log_{2-\sqrt{3}}x=0\Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2+mx+m-1\right)+\log_{2+\sqrt{3}}\frac{1}{x}=0$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+mx+m-1}{x}=1 \Leftrightarrow m=\frac{1+x-x^2}{x+1}.$$

Đặt $f\left(x\right)=\frac{1+x-x^2}{x+1}$.

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=-\frac{x\left(x+2\right)}{\left(x+1\right)^2}<0 \text{ với } x>0 \text{ và } \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=-\infty.$$

Trường hợp 1: $x>0 \quad \left(m\geq 1\right)$

x	0		+∞
f(x)	1	↘	−∞

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì: $\begin{cases} m\geq 1 \\ m<f(0)=1 \end{cases}$ (Vô nghiệm).

Trường hợp 2:

x	1−m		+∞
f(x)	f(1−m)	↘	−∞

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì: $\begin{cases} m<1 \\ m<f\left(1-m\right)=\dfrac{m^2-m-1}{m-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \dfrac{1-m}{m-2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<1$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m<1$.

Câu 50. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(x-1\right)=\log_2\left(mx-8\right)$ có hai nghiệm phân biệt.

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\log_{\sqrt{2}}\left(x-1\right)=\log_2\left(mx-8\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ m=x-2+\dfrac{9}{x}=g\left(x\right) \end{cases}.$$

$$g'\left(x\right)=\frac{x^2-9}{x}=0 \Leftrightarrow x=3.$$

x	1		3		+∞
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$	8	↘	4	↗	+∞

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4<m<8$.

Do m là số nguyên nên có 3 giá trị thỏa đề. Đáp án **C.**

Câu 51. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt.

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ m=x-2+\dfrac{9}{x}=g(x)\end{cases}.$$

$$g'(x)=\frac{x^2-9}{x}=0\Leftrightarrow x=3.$$

x	1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4<m<8$.

Do m là số nguyên nên có 3 giá trị thỏa đề. Đáp án **C.**

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_5^2 x+\sqrt{\log_5^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;5^{2\sqrt{2}}\right]$

A. 6 **B.**5 **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\sqrt{\log_5^2 x+1}$, khi $x\in\left[1;5^{2\sqrt{2}}\right]$ thì $\log_5 x\in\left[0;2\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow \log_5^2 x+1\in[1;9]\Leftrightarrow t\in[1;3]$

Bài toán trở thành: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $t^2+t-2m-2=0(*)$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;3]$.

Ta có: $t^2+t-2m-2=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t-1$

Đặt: $g(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t-1=0; t\in[1;3]\Rightarrow g'(t)=t+\dfrac{1}{2}>0,\ \forall t\in[1;3]$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	1		3
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $m=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-1$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;3]\Leftrightarrow m\in[0;5]$

Với $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Câu 53. Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$. Tính $b-2a$?

A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133\sqrt{10^x}$ chia hai vế bất phương trình cho 5^x ta được: $50+\frac{20.2^x}{5^x}\le\frac{133\sqrt{10^x}}{5^x}\Leftrightarrow 50+20.\left(\frac{2}{5}\right)^x\le 133.\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x$ (1)

Đặt $t=\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x,(t\ge 0)$ phương trình (1) trở thành: $20t^2-133t+50\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le t\le\frac{25}{4}$

Khi đó ta có: $\frac{2}{5}\le\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x\le\frac{25}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^2\le\left(\frac{2}{5}\right)^x\le\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}\Leftrightarrow -4\le x\le 2$ nên $a=-4,b=2$

Vậy $b-2a=10$

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1.x_2=27$

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\log_3 x$. Phương trình trở thành: $t^2-(m+2)t+3m-1=0$ (*)

$\Delta=(m+2)^2-4(3m-1)=m^2-8m+8$

Với $x_1.x_2=27\Rightarrow\log_3(x_1.x_2)=3\Rightarrow\log_3 x_1+\log_3 x_2=3$

ycbt⇔(*) có hai nghiệm t thỏa $t_1+t_2=3\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ge 0\\ S=m+2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge 4+2\sqrt{2}\\ m\le 4-2\sqrt{2}\end{array}\right.\\ m=1\end{cases}$ Vậy m= 1

Câu 55. Phương trình $4^{x+1}-2.6^x+m.9^x=0$ có 2 nghiệm thực phân biệt nếu

A. $m>0$. **B.** $m<0$. **C.** $0<m<\frac{1}{4}$. **D.** $m<\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4^{x+1}-2.6^x+m.9^x=0\Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+m=0$ (1).

Đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x>0$ phương trình trở thành: $4t^2-2t+m=0$ (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - 4m > 0 \\ S = \dfrac{1}{2} > 0 \\ P = \dfrac{m}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{1}{4}.$$

Câu 56. Cho phương trình $\sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x - 5} = m(\log_3 x + 1)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[27; +\infty)$.

A. $0 < m < 2$. **B.** $0 < m \le 2$. **C.** $0 \le m \le 1$. **D.** $0 \le m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_3 x$, với $x \ge 27 \Rightarrow t \ge 3$.

Phương trình trở thành $\sqrt{t^2 - 4t - 5} = m(t+1)$. $(*)$

Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ t \ge 5 \end{array}\right.$.

+) Với $m < 0$ thì phương trình vô nghiệm, do $\begin{cases} \sqrt{t^2 - 4t - 5} \ge 0 \\ t + 1 > 0 \end{cases}, \forall t \ge 5$.

+) Với $m = 0$, ta có $\sqrt{t^2 - 4t - 5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ \ (loại) \\ t = 5 \ \ (thỏa\, mãn) \end{array}\right.$.

+) Với $m > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = m^2(t+1)^2 \Leftrightarrow (1 - m^2)t^2 - (2m^2 + 4)t - 5 - m^2 = 0$. $(**)$

Nếu $m = 1 \Rightarrow t = -1$ không thỏa mãn.

Nếu $m \ne 1$, ta có $(**) \Leftrightarrow (t+1)\left[(1 - m^2)t - m^2 - 5\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ \ (loại) \\ t = \dfrac{m^2 + 5}{1 - m^2} \end{array}\right.$.

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{m^2 + 5}{1 - m^2} \ge 5 \Leftrightarrow \dfrac{6m^2}{1 - m^2} \ge 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$, kết hợp $m > 0$ suy ra $0 < m < 1$.

Vậy với $0 \le m < 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[27; +\infty)$.

Câu 57. Tìm m để phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{2}, 4\right]$.

A. $-3 \le m \le \dfrac{7}{3}$. **B.** $m \in \mathbb{R}$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $-3 < m \le \dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Đáp án: A

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x \in \left[\dfrac{5}{2}; 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

PT trở thành: $4(m-1)t^2 + 4(m-5)t + 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(t^2 + t + 1) = t^2 + 5t + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}(1)$

Xét $f(t) = \dfrac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}$ với $t \in [-1; 1]$

$f'(t)=\dfrac{4-4t^2}{(t^2+t+1)^2}\geq 0\ \forall t\in[-1;1]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow f(-1)\leq m\leq f(1)\Leftrightarrow -3\leq m\leq \dfrac{7}{3}$.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{2x-1}-m.2^x+2m-2=0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[1;2]$.

A. $m\in(2;3]$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in[2;4]$. **D.** $m\in[2;3)$.

Lời giải

Chọn A

$2^{2x-1}-m.2^x+2m-2=0\Leftrightarrow 2^{2x}-2m.2^x+4m-4=0$

Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2-2mt+4m-4=0\Leftrightarrow (t-2)(t-2m+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=2m-2\,(**)\end{array}\right.\ (*).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $(**)$ phải có một nghiệm thuộc $(2;4]$

$\Leftrightarrow 2<2m-2\leq 4\Leftrightarrow 2<m\leq 3$.

Câu 59. Gọi $(a;b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x}-8e^x-m=0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Tổng $a+b$ là

A. 2. **B.** 4 **C.** -6. **D.** -14.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=e^x$; $x\in(0;\ln 5)$ tương ứng $t\in(1;5)$.

Phương trình thành $2t^2-8t=m$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2-8t$ với $t\in(1;5)$ có $f'(t)=4t-8$

t	1		2		5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\searrow$	-8	$\nearrow$	10

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ khi phương trình $f(t)=m$ có hai nghiệm $t\in(1;5)$ $\Leftrightarrow -8<m<-6$.

Câu 60. Cho phương trình $\log_2^2(4x^2)-m\log_2 x+m-12=0$ (m là tham số thực). Số giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc nửa khoảng $[1;2)$ là

A. Vô số. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

$pt \Leftrightarrow 4\left(1+\log_2 x\right)^2 - m\log_2 x + m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 4\log_2^2 x + 8\log_2 x - m\log_2 x + m - 8 = 0 (*)$

Đặt $t = \log_2 x$, vì $x \in [1;2)$ nên $t \in [0;1)$

Khi đó (*) trở thành $4t^2 + 8t - 8 = m(t-1) \Leftrightarrow m = \dfrac{4t^2+8t-8}{t-1} = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ trên $[0;1)$, ta có $f'(t) = \dfrac{4t^2-8t}{(t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$

BBT

t		0		1	2
$f'(t)$		0	$-$		
$f(t)$		8	$\searrow$	$-\infty$	

Từ BBT suy ra PT có nghiệm duy nhất thuộc $[1;2)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t), t \in [0;1)$ tại đúng 1 điểm $\Leftrightarrow m \le 8$. Vậy, có 8 giá trị nguyên dương m thỏa ycbt

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{2x-1} - m.2^x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[1;2]$.

A. $m \in (2;3]$. **B.** $m \in (2;3)$. **C.** $m \in [2;4]$. **D.** $m \in [2;3)$.

Lời giải

Chọn A

$2^{2x-1} - m.2^x + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2m.2^x + 4m - 4 = 0$

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$t^2 - 2mt + 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-2m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t = 2m-2 (**) \end{array}\right. (*)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $(**)$ phải có một nghiệm thuộc $(2;4]$

$\Leftrightarrow 2 < 2m - 2 \le 4 \Leftrightarrow 2 < m \le 3$.

Câu 62. Cho phương trình $2\log_3^2 x + (m-7)\log_3(9x) + 20 - 4m = 0$. (m là tham số thực). Tập hợp tất cả giá trị của *m* để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 < 3 < x_2$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho tương đương $2\log_3^2 x + (m-7)(\log_3 x + 2) + 20 - 4m = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_3^2 x + (m-7)\log_3 x + 6 - 2m = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$. Khi đó phương trình trở thành $2t^2 + (m-7)t + 6 - 2m = 0$ (1)

Ta dễ dàng nhẩm được 1 nghiệm của phương trình (1) là $t = 2$ nên nghiệm còn lại là $t = \dfrac{3-m}{2}$.

Ta có $x_1 < 3 < x_2 \Leftrightarrow \log_3 x_1 < \log_3 3 < \log_3 x_2 \Leftrightarrow t_1 < 1 < t_2$.

Vậy ta đã có 1 nghiệm $t_2 = 2 > 1$ nên phương trình có 2 nghiệm thỏa điều kiện khi và chỉ khi $t = \dfrac{3-m}{2} < 1 \Leftrightarrow m > 1$

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 3x+\log_3 x+m-1=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $0<m<\frac{9}{4}$. **B.** $m>\frac{9}{4}$. **C.** $0<m<\frac{1}{4}$. **D.** $m>-\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x \Rightarrow x\in(0;1)\Rightarrow t\in(-\infty;0)$

Khi đó ta có phương trình: $\log_3^2 3x+\log_3 x+m-1=0 \Leftrightarrow (\log_3 3+\log_3 x)^2+\log_3 x-1=-m$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x+3\log_3 x=-m \Leftrightarrow t^2+3t=-m\ \ (*)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;1)\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty;3)$.

Xét hàm số: $y=t^2+3t$ trên $(-\infty;3)$ ta có: $y'=2t+3$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 2t+3=0\Leftrightarrow t=-\frac{3}{2}$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0
y'			0		
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0

Để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty;0)$ thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại hai điểm phân biệt thuộc $(-\infty;0)\Rightarrow -\frac{9}{4}<-m<0\Leftrightarrow 0<m<\frac{9}{4}$.

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9.9^{x^2-2x}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2x^2-4x+2}=0$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $\frac{1}{2}<m<1$ **B.** $m>\frac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m<\frac{3-\sqrt{6}}{2}$ **C.** $m>1$ hoặc $m<\frac{1}{2}$

D. $\frac{3-\sqrt{6}}{2}<m<\frac{3+\sqrt{6}}{2}$

Lời giải

Đáp án A

$9.9^{x^2-2x}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2x^2-4x+2}=0$

$\Leftrightarrow 9^{x^2-2x+1}-(2m+1)15^{x^2-2x+1}+(4m-2)5^{2x^2-4x+2}=0$

$\Leftrightarrow \left(3^{(x-1)^2}\right)^2-(2m+1)3^{(x-1)^2}.5^{(x-1)^2}+(4m-2)\left(5^{(x-1)^2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}\right]^2-(2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}+4m-2=0\ \ (1)$

Đặt $\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=t,(1)\Leftrightarrow t^2-(2m+1)t+4m-2=0\Leftrightarrow (t-2)(t-2m+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=2m-1\end{array}\right.$

Chú ý rằng với $t=2\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=2\Leftrightarrow(x-1)^2=\log_{\frac{3}{5}}2$, mà $\log_{\frac{3}{5}}2<0$ và $(x-1)^2\ge 0$ nên phương trình này vô nghiệm

Do đó (1) $\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}=2m-1$ (2)

Xét hàm $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$ có $f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}.\ln\left(\frac{3}{5}\right).2(x-1), f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
t		+	0	-	
t'	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên hàm $f(x)$, ta thấy để phương trình (1) có 2 nghiệm thực x phân biệt thì phương trình (2) phải có duy nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$, nghiệm còn lại (nếu có) khác 1. Số nghiệm của (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$ và đường thẳng $y=2m-1$ nên điều kiện của m thỏa mãn là $0<2m-1<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}<m<1$

Câu 65. Cho phương trình $\log_2\left[x^2-(2m-3)x+2m-2\right]=\log_2(x+1)$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0;8)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $x>-1$.

Khi đó phương trình trở thành

$x^2-(2m-3)x+2m-2=x+1$, $\forall x>-1$.

$\Rightarrow(x-1)(x-2m+3)=0$, $\forall x>-1$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2m-3\end{array}\right.$, $\forall x>-1$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì

$-1<2m-3\ne 1\Rightarrow 1<m\ne 2\xrightarrow[m\in(0;8)]{m\in\mathbb{Z}}m\in\{3;4;5;6;7\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 66. Phương trình $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3$ có tổng các nghiệm là bao nhiêu?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0

Lời giải

Chọn D

$3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3\ (1)$

$(1)\Leftrightarrow 27.3^{3x}+\dfrac{27}{3^{3x}}+81.3^x+\dfrac{81}{3^x}=10^3\Leftrightarrow 27.\left(3^{3x}+\dfrac{1}{3^{3x}}\right)+81.\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)=10^3\quad (1')$

Đặt $t=3^x+\dfrac{1}{3^x}\overset{Côsi}{\geq}2\sqrt{3^x.\dfrac{1}{3^x}}=2$

$\Rightarrow t^3=\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)^3=3^{3x}+3.3^{2x}.\dfrac{1}{3^x}+3.3^x.\dfrac{1}{3^{2x}}+\dfrac{1}{3^{3x}}\Leftrightarrow 3^{3x}+\dfrac{1}{3^{3x}}=t^3-3t$

Khi đó: $(1')\Leftrightarrow 27\left(t^3-3t\right)+81t=10^3\Leftrightarrow t^3=\dfrac{10^3}{27}\Leftrightarrow t=\dfrac{10}{3}>2\ \ (N)$

Với $t=\dfrac{10}{3}\Rightarrow 3^x+\dfrac{1}{3^x}=\dfrac{10}{3}\quad (1")$

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó: $(1")\Leftrightarrow y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3\ \ (N)\\ y=\dfrac{1}{3}\ \ (N)\end{array}\right.$

Với $y=3\Rightarrow 3^x=3\Leftrightarrow x=1$

Với $y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=-1$

Suy ra tổng các nghiệm bằng 0

Câu 67. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 12. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 15

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>1\\ mx>8\end{cases}$

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)\ (1)\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2=\log_2(mx-8)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=mx-8\Leftrightarrow x^2-2x+9=mx\Leftrightarrow x-2+\dfrac{9}{x}=m\ \ (do\ x>1)\ (2)$

Phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1 (*)

Xét hàm số $y=x-2+\dfrac{9}{x},x>1\ có\ y'=1-\dfrac{9}{x^2}=0\Leftrightarrow x=3$

Bảng biến thiên:

x	1		3		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$(*)\Leftrightarrow 4<m<8$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{5;6;7\}$.

Câu 68. Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_m\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x \geq 1$.

Đặt $t = \log_2\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$ thì $t' = \dfrac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.\dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\sqrt{x^2 - 1}}.\dfrac{1}{\ln 2}$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}\ln 2} < 0$

BBT:

x	1	$+\infty$
t'	$-$	
t	0 $\searrow$	$-\infty$

Do $x > 2 \Rightarrow t < \log_2\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

Phương trình trở thành $t.\log_5 2^t = \log_m \dfrac{1}{2^t} \Leftrightarrow t.\log_5 2 = -\log_m 2 \Leftrightarrow \log_5 m = -\dfrac{1}{t}$

Ycbt $\log_5 m < -\dfrac{1}{\log_2\left(2 - \sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow m < 5^{-\frac{1}{\log_2\left(2 - \sqrt{3}\right)}}$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ và $m \neq 1$ nên $m = 2$.

Câu 69. Cho phương trình $\log_4\left[2^{2x} + 2^{x+2} + 2^2\right] = \log_2|m - 2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình vô nghiệm?

Câu 70. #A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $m \neq 2$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_4\left[\left(2^x + 2\right)^2\right] = \log_2|m - 2|$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x + 2\right) = \log_2|m - 2| \Leftrightarrow 2^x + 2 = |m - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x + 2 = m - 2 \\ 2^x + 2 = 2 - m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = m - 4 \\ 2^x = -m \end{array}\right.$.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 \leq 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

$\xrightarrow[m \neq 2]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 3; 4\}$.

Câu 71. Biết rằng phương trình $\log_3^2 x - (m + 2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 27$.

Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng?

A. $\dfrac{34}{3}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Xét: $\log_3^2 x - (m + 2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ (1)

Đk: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x \Rightarrow x = 3^t$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0$ (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ m^2 - 8m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 4 - 2\sqrt{2} \\ m > 4 + 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Xét $x_1 x_2 = 27 \Leftrightarrow 3^{t_1 + t_2} = 27 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 3 \Leftrightarrow m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận).

Thay $m = 1$ vào (2), ta được: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{array}\right.$.

Câu 72. Cho phương trình $\log^2(10x) - 2m\log_{10x} x - \log(10x^2) = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m \in [-20; 20]$ để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là:

A. 20. **B.** 21. **C.** 38. **D.** 19.

Lời giải

Đáp án: A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ 10x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{10} \end{cases}$.

Ta có: $\log^2(10x) - 2m\log_{10x} x - \log(10x^2) = 0$.

$\Leftrightarrow (1 + \log x)^2 - 2m\dfrac{\log x}{1 + \log x} - (1 + 2\log x) = 0$ (1)

Đặt: $t = \log x$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Phương trình (1) trở thành:

$$(t+1)^2 - \frac{2mt}{t+1} - 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2mt = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ f(t) = t^2 + t - 2m = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Nhận xét: với mỗi giá trị của t ta có duy nhất một giá trị của $x \Rightarrow$ yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và -1.

Suy ra: $\begin{cases} \Delta = 1 + 8m > 0 \\ f(0) = -2m \neq 0 \\ f(-1) = -2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{8} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-20; 20]$ nên $m \in \{1; 2; ...; 20\}$. Vậy có 20 giá trị của m.

Câu 73. Cho phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 5m + 1 = 0$ (với m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc $[16; +\infty)$ là

A. $(-\infty; -8] \cup [17; +\infty)$. **B.** $[-8; 17]$. **C.** $[-9; 16]$.

D. $(-\infty; -9] \cup [16; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta đặt $t = \log_2 x$, vì $x \in [16; +\infty)$ nên $t \in [4; +\infty)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - (m+2)t + 5m + 1 = 0 (*)$.

Để phương trình ban đầu có ít nhất một nghiệm $x\in[16;+\infty)$ thì phương trình $(*)$ có ít nhất một nghiệm $t\in[4;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow t^2-mt-2t+5m+1=0\Leftrightarrow m(5-t)=-t^2+2t-1\Leftrightarrow m(t-5)=t^2-2t+1\,(**)$.

Với $t=5$ thì phương trình $(**)$ trở thành $0=16(sai)$.

Suy ra $t=5$ không phải là nghiệm của $(**)$.

$(**)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-5}$.

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{t-5}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{t^2-10t+9}{(t-5)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\notin[4;+\infty)\\t=9\in[4;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	4		5		9		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	-9	$\searrow$	$-\infty\ \|\ +\infty$	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $\left[\begin{array}{l}m\le -9\\m\ge 16\end{array}\right.$.

Câu 74. Tìm m để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;8]$.

A. $6\le m\le 9$ **B.** $2\le m\le 3$ **<u>C</u>.** $2\le m\le 6$ **D.** $3\le m\le 6$

Lời giải

Chọn C

$\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ (1)

• Điều kiện: $x>0$ (*)

pt (1) $\Leftrightarrow$ $(\log_2 x)^2-2\log_2 x+3=m$

Cách 1: **(Tự luận)**

• Đặt $t=\log_2 x$, với $x\in[1;8]$ thì $t\in[0;3]$.

Phương trình trở thành: $t^2-2t+3=m$ (2)

• Để phương trình (1) có nghiệm $x\in[1;8]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t\in[0;3]$

$\Leftrightarrow$ $\min\limits_{[0;3]} f(t)\ \le\ m\ \le\ \max\limits_{[0;3]} f(t)$, trong đó $f(t)=t^2-2t+3$

$\Leftrightarrow$ $2\le m\le 6$. (bấm máy tính)

Cách 2: Thử các đáp án.

• Chọn $m=2$, ta có phương trình: $(\log_2 x)^2-2\log_2 x+1=0$ $\Leftrightarrow$ $\log_2 x=1$ $\Leftrightarrow$ $x=2\in[1;8]$

$\Rightarrow$ $m=2$ thỏa mãn ycbt $\Rightarrow$ loại các đáp án **A** và **D**.

• Chọn $m=6$, ta có phương trình: $(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1\\\log_2 x=3\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\notin[1;8]\\x=8\ \in[1;8]\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ $m=6$ thỏa mãn ycbt $\Rightarrow$ loại đáp án **B**.

Vậy chọn đáp án **C**.

Câu 75. Cho phương trình $\sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x - 5} = m\left(\log_3 x + 1\right)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $\left[27;+\infty\right)$.

A. $0 < m < 2$. **B.** $0 < m \le 2$. **C.** $0 \le m \le 1$. **D.** $0 \le m < 1$.

Lời giải:

Đặt $t = \log_3 x$, với $x \ge 27 \Rightarrow t \ge 3$.

Phương trình trở thành $\sqrt{t^2 - 4t - 5} = m\left(t+1\right)$. (*)

Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ t \ge 5 \end{array}\right.$.

+) Với $m < 0$ thì phương trình vô nghiệm, do $\begin{cases} \sqrt{t^2 - 4t - 5} \ge 0 \\ t + 1 > 0 \end{cases}, \forall t \ge 5$.

+) Với $m = 0$, ta có $\sqrt{t^2 - 4t - 5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ \ (loại) \\ t = 5 \ \ (thỏa\, mãn) \end{array}\right.$.

+) Với $m > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = m^2\left(t+1\right)^2 \Leftrightarrow \left(1 - m^2\right)t^2 - \left(2m^2 + 4\right)t - 5 - m^2 = 0$. (**)

Nếu $m = 1 \Rightarrow t = -1$ không thỏa mãn.

Nếu $m \ne 1$, ta có (**) $\Leftrightarrow \left(t+1\right)\left[\left(1 - m^2\right)t - m^2 - 5\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ \ (loại) \\ t = \dfrac{m^2 + 5}{1 - m^2} \end{array}\right.$.

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{m^2 + 5}{1 - m^2} \ge 5 \Leftrightarrow \dfrac{6m^2}{1 - m^2} \ge 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$, kết hợp $m > 0$ suy ra $0 < m < 1$.

Vậy với $0 \le m < 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm thuộc $\left[27;+\infty\right)$.

Chọn D

Câu 76. Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln\left(3x - mx + 1\right) = \ln\left(-x^2 + 4x - 3\right)$ có nghiệm là nửa khoảng $\left[a;b\right)$. Tổng của $a + b$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{22}{3}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\ln\left(3x - mx + 1\right) = \ln\left(-x^2 + 4x - 3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 > 0 \\ 3x - mx + 1 = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x^2 - x + 4 = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ m = \dfrac{x^2 - x + 4}{x} \ (*) \end{cases}$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x}$ với $1 < x < 3$.

Khi đó $f'\left(x\right) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$; $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+4}{x}$ trên khoảng $\left(1;3\right)$

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$

Nhận xét: Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm trên khoảng $\left(1;3\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $(*)$ có nghiệm trên khoảng $\left(1;3\right)$ khi và chỉ khi $3\le m<4$ hay $m\in\left[3;4\right)$. Do đó $a=3$, $b=4$.

Vậy $a+b=7$.

Câu 77. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\log_2 x)^2-\log_2\left(x^2\right)+3-m=0$ có nghiệm $x\in\left[1;8\right]$.

A. $2\le m\le 6$. **B.** $6\le m\le 9$. **C.** $3\le m\le 6$. **D.** $2\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\mathrm{t}=\log_2 x$. Vì $x\in\left[1;8\right]$ nên $t\in\left[0;3\right]$. Phương trình $\left(\log_2 x\right)^2-\log_2\left(x^2\right)+3-m=0$ trở thành $t^2-2t+3-m=0\Leftrightarrow m=t^2-2t+3$, $t\in\left[0;3\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2-2t+3, t\in\left[0;3\right]$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(t\right)$

t	0		1		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

Vậy $m\in\left[2;6\right]$.

Câu 78. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_5^2 x-\log_5 x-m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in(1;125)$

A. $m\le\dfrac{1}{4}$. **B.** $m\le-\dfrac{1}{4}$. **C.** $m\ge-\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\ge\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_5 x$, vì $x\in(1;125)$ nên $t\in(0;3)$. Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-t-m\ge 0$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m\le t^2-t$ với mọi $t\in(0;3)$

Tức là $m \le \min\limits_{(0;3)} f(t)$, với $f(t) = t^2 - t$.

Ta khảo sát nhanh hàm số $f(t) = t^2 - t$ trên khoảng $(0;3)$ như sau:

t	0		$\frac{1}{2}$		3
f'(t)		$-$	0	$+$	
f(t)		$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	

Từ đó suy ra $m \le \min\limits_{(0;3)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Câu 79. Biết phương trình $\log^2\left(x^2+1\right) - m\log_2\left(x^2+1\right) + 8 - m = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;9)$. **B.** $(9;15)$. **C.** $(15;21)$. **D.** $(21;28)$.

Lời giải

Chọn A

$\log_2^2\left(x^2+1\right) - m\log_2\left(x^2+1\right) + 8 - m = 0$ (1).

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \log_2\left(x^2+1\right) \ge 0$ vì $x^2 + 1 \ge 1, \forall \in \mathbb{R}$.

(Nếu $t = 0 \Rightarrow x = 0$; nếu $t > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2^t - 1}$).

Khi đó phương trình có dạng $t^2 - mt + 8 - m = 0$ (2).

Điều kiện cần để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt là phương trình (2) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

Phương trình (2) có một nghiệm bằng $0 \Rightarrow 8 - m = 0 \Leftrightarrow m = 8$.

Khi đó phương trình (2) có dạng $t^2 - 8t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m = 8$.

Câu 80. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\log_2 x\right)^2 - \log_2\left(x^2\right) + 3 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1;8]$.

A. $6 \le m \le 9$. **B.** $2 \le m \le 3$. **C.** $2 \le m \le 6$. **D.** $3 \le m \le 6$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\left(\log_2 x\right)^2 - \log_2\left(x^2\right) + 3 - m = 0 \Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2 - 2\log_2 x + 3 = m$ (Do $x \in [1;8]$)

Đặt $t = \log_2 x$, vì $x \in [1;8]$ nên $t \in [0;3]$.

Khi đó ta cần tìm điều kiện của tham số thực m để phương trình $t^2 - 2t + 3 = m$ có nghiệm $t \in [0;3]$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ với $t \in [0;3]$

t	0		1		3
f'		$-$	0	$+$	
f	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có $2 \le m \le 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 81. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm trên $[0;1]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m \Leftrightarrow 4^x+4^{-x}=(m+1)\left(2^x-2^{-x}\right)+4-2m(*)$.

Đặt $t=2^x-2^{-x} \Rightarrow t^2+2=4^x+4^{-x}$, vì $x\in[0;1]$ nên $t\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Khi đó: $(*)\Rightarrow t^2-(m+1)t-2+2m=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-m)=0$.

$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=m \end{array}\right. \Leftrightarrow t=m$ suy ra $m\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$ nên $m=0$ hoặc $m=1$.

Câu 82. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm trên $[0;1]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m \Leftrightarrow 4^x+4^{-x}=(m+1)\left(2^x-2^{-x}\right)+4-2m(*)$.

Đặt $t=2^x-2^{-x} \Rightarrow t^2+2=4^x+4^{-x}$, vì $x\in[0;1]$ nên $t\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Khi đó: $(*)\Rightarrow t^2-(m+1)t-2+2m=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-m)=0$.

$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=m \end{array}\right. \Leftrightarrow t=m$ suy ra $m\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$ nên $m=0$ hoặc $m=1$.

Câu 83. Cho phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}-(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+8m-16=0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm trên doạn $[0;1]$ là

A. $\left[0;\frac{3}{2}\right]$. **B.** $\left[1;\frac{5}{2}\right]$. **C.** $\left[1;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2^x-2^{-x}$, $t'(x)=2^x+2^{-x}>0\ \forall x[0;1]$. Suy ra $t\in\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$ và $4^x+4^{-x}=t^2+2$.

Phương trình trở thành: $t^2+2-t(m+1)+4-2m=0 \Leftrightarrow t^2-t(m+1)+2m-2=0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t+1-m)=0 \Rightarrow t=m-1$. Suy ra $m-1\in\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$, hay $m\in\left[1;\ \frac{5}{2}\right]$.

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m\in(-\infty;0]$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$. **C.** $m\in\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Ta có $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m=0$.

Đặt $t=\log_2 x$, bài toán trở thành tìm m sao cho $t^2+t+m=0 \Leftrightarrow t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$.

Đặt $f(t)=t^2+t\Rightarrow f'(t)=2t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{-1}{2}$.

BBT.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(t)=2t+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

.

Để pt $t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$ thì $-m\ge-\frac{1}{4}\Leftrightarrow m\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$.

Câu 85. Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

A. $S=-2$. **B.** $S=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\left[\begin{array}{l}-2<x<-\frac{1}{2}\\ x>0\end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+(t-1)^2$, $t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+2(t-1)=\frac{2\ln 2.t^2-2\ln 2.t+1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t>0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$. Vậy $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Câu 86. Cho phương trình $m.2^{x^2-x-6}+2^{4x-x^2}=m+4.2^{3x-8}$ (m tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương.

A. m= 16 hoặc $0<m\le 1$ **B.** m = 16.

C. $0<m<1$ **D.** m = 16, m =8 hoặc $0<m\le 1$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $m.2^{x^2-x-6}+2^{4x-x^2}=m+4.2^{3x-8} \Leftrightarrow m(2^{(3x-6)-(4x-x^2)}-1)=2^{3x-6}-2^{4x-x^2}$

$\Leftrightarrow m(\dfrac{2^{3x-6}}{2^{4x-x^2}}-1)=2^{3x-6}-2^{4x-x^2}$

$\Leftrightarrow m(2^{3x-6}-2^{4x-x^2})=(2^{3x-6}-2^{4x-x^2})2^{4x-x^2}$

$\Leftrightarrow (2^{3x-6}-2^{4x-x^2})(2^{4x-x^2}-m)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^{3x-6}=2^{4x-x^2} & (1) \\ 2^{4x-x^2}=m & (2) \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow 3x-6=4x-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \text{ (loai)} \end{array}\right.$

Xét hàm số $y=2^{4x-x^2}$, có $y'=(4-2x)2^{4x-x^2}.\ln 2=0 \Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên

x		0		2		3	+∞
y’			+	0	-		
y		1	↗	16	↘	8	0

Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương thì phương trình (2) chỉ có một nghiệm dương khác 3.

Từ bảng biến thiên suy ra m = 16, m = 8 hoặc $0<m\le 1$

Vậy $P=8$.

Câu 87. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $(2;4)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $[3;4]$. **D.** $[2;4]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $6^x+(3-m)2^x-m=0$ (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}=m$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, Có $f'(x)=\dfrac{12^x.\ln 3+6^x.\ln 6+3.2^x.\ln 2}{\left(2^x+1\right)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $0<x<1\Leftrightarrow f(0)<f(x)<f(1)\Leftrightarrow 2<f(x)<4$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m\in(2;4)$.

Câu 88. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(4.3^{x-1}-1\right)=2x-1$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $\log_3\left(4.3^{x-1}-1\right)=2x-1\Leftrightarrow 4.3^{x-1}-1=3^{2x-1}\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}3^{2x}-\dfrac{4}{3}3^x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Câu 89. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 3. **B.** 2. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tương đương $3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)}=\dfrac{\ln\left(2|x-m|+2\right)}{\ln\left(x^2-2x+3\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln\left(x^2-2x+3\right)=3^{2|x-m|+2}.\ln\left(2|x-m|+2\right)$ (*).

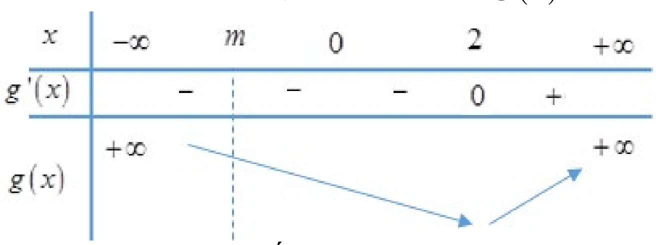
Xét hàm đặc trưng $f(t)=3^t.\ln t, t\ge 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra $\Leftrightarrow x^2-2x+3=2|x-m|+2\Leftrightarrow g(x)=x^2-2x-2|x-m|+1=0$.

Có $g(x)=\begin{cases}x^2-4x+2m+1 & khi\ x\ge m\\ x^2-2m+1 & khi\ x\le m\end{cases}\Rightarrow g'(x)=\begin{cases}2x-4 & khi\ x\ge m\\ 2x & khi\ x\le m\end{cases}$

và $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\ khi\ x\ge m\\ x=0\ khi\ x\le m\end{array}\right.$.

Xét các trường hợp sau:

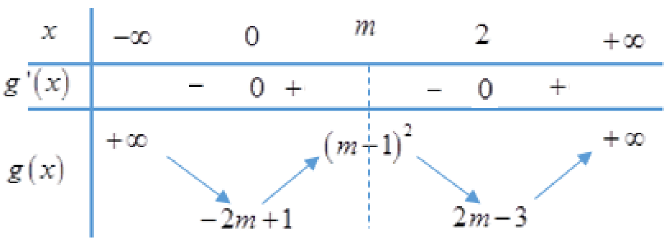
TH1: $m\le 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:



Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thoả mãn.

TH2: $m\ge 2$ tương tự.

TH3: $0<m<2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:



Phương trình có 3 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}(m-1)^2=0\\ -2m+1=0>2m-3\\ -2m+1<0=2m-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{1}{2}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Cả 3 giá trị trên đều thoả mãn, nên tổng bình phương của chúng bằng $\dfrac{7}{2}$

Câu 90. Cho phương trình $(m-3)9^x+2(m+1)3^x-m-1=0\ (1)$. Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=3^x\ (t>0)$.

Khi đó phương trình (1) trở thành $(m-3)t^2+2(m+1)t-m-1=0\ (*)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm x phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm t dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-3\neq 0\\ 2m^2-2>0\\ \dfrac{-2(m+1)}{m-3}>0\\ \dfrac{-(m+1)}{m-3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ \left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.\\ -1<m<3\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<3.$$

Khi đó, $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow S=4$.

Câu 91. Cho phương trình $\log_2^2 x-(m^2-3m)\log_2 x+3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2=16$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=4\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=4\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=1\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-4\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2^2 x-(m^2-3m)\log_2 x+3=0\,(1)$

Đặt $t=\log_2 x$. Phương trình (1) trở thành: $t^2-(m^2-3m)t+3=0$ (*).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Rightarrow x_1,x_2>0$.

Do đó

$x_1.x_2=16\Leftrightarrow\log_2(x_1.x_2)=\log_2 16$

$\Rightarrow\log_2 x_1+\log_2 x_2=4\Rightarrow t_1+t_2=4$, với t_1,t_2 là hai nghiệm của (*).

Để phương trình (1) có hai nghiệm thỏa thỏa mãn YCBT thì (*) có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1+t_2=4$

$$\begin{cases}\left(m^2-3m\right)^2-4.3>0\\ m^2-3m=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=4\end{array}\right..$$

Câu 92. Cho phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có nghiệm.

A. $4\le m\le\dfrac{64}{7}$. **B.** $4\le m\le 8$. **C.** $3\le m\le\dfrac{64}{7}$. **D.** $m\ge\dfrac{64}{7}$.

Lời giải

Chọn A Điều kiện $-1\le x\le 1$. Xét $g\left(x\right)=3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1$.

Khi đó: $g'\left(x\right)=3^{1+\sqrt{1-x^2}}.\ln 3.\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$. Suy ra $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0$.

Từ bảng biến thiên của $g\left(x\right)$.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
g'(x)			+	0	−		
g(x)		3	↗	9	↘	3	

Đặt $t=3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ Suy ra $\forall x\in\left[-1;1\right]\Rightarrow t\in\left[3;9\right]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-\left(m+2\right)t+2m+1=0$ $\left(1\right)$, $t\in\left[3;9\right]$.

Ta có, $\left(1\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2},t\in\left[3;9\right]$.

Phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2},t\in\left[3;9\right]$ có điểm chung.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2},t\in\left[3;9\right]$: $f'\left(t\right)=\dfrac{t^2-4t+3}{\left(t-2\right)^2}$.

Từ bảng biến thiên của $f\left(x\right)$ suy ra phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi $4\le m\le\dfrac{64}{7}$.

Câu 93. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $\left(-2020;2020\right)$ để phương trình $6.2^{2x-1}-\left(7m-48\right).2^x+2m^2-16m=0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2\ge 15$?

A. 1994. **B.** 1996. **C.** 3992. **D.** 3988.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2^x$ vì $x>0\Rightarrow t>1$.

Phương trình trở thành $3t^2-\left(7m-48\right)t+2m^2-16m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2m-16\\ t=\dfrac{m}{3}\end{array}\right..$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow\begin{cases}t_1>1\\ t_2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-16>1\\ \dfrac{m}{3}>1\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{17}{2}$.

Khi đó $\begin{cases} x_1 = \log_2(2m-16) \\ x_2 = \log_2 \dfrac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 \ge 15 \Leftrightarrow \log_2(2m-16).\log_2 \dfrac{m}{3} \ge 15.$ $(*)$

Xét hàm $f(m) = \log_2(2m-16).\log_2 \dfrac{m}{3}$ là hàm đồng biến trên $\left(\dfrac{17}{2};+\infty\right)$.

Nhận thấy $(*)$ có dạng $f(m) \ge f(24) \Leftrightarrow m \ge 24 \xrightarrow[m\in(-2020;2020)]{m\in\mathbb{Z}}$ có 1996 giá trị.

Câu 94. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$ **B.** $[2;4]$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(3;4)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1} = m$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = \dfrac{12^x.\ln 3 + 6^x.\ln 6 + 3.2^x.\ln 2}{(2^x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2, f(1) = 4$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m \in (2;4)$.

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1;27]$.

A. $m \in [0;2]$. **B.** $m \in (0;2)$. **C.** $m \in [2;4]$. **D.** $m \in (0;4)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \sqrt{\log_3 x + 1}$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 2m + 2$ $(*)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $(*)$ phải có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên đoạn $[1;2]$. Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1;2]$.

$\min\limits_{[1;2]} f(t) = f(1) = 2$, $\max\limits_{[1;2]} f(t) = f(2) = 6$.

Để $(*)$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$ thì $2 \le 2m + 2 \le 6 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.

Câu 96. Cho phương trình $\log_3^2(3x) - (m+2)\log_3 x + m - 5 = 0$. ($m$ là tham số thực). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;9]$.

A. $(2;4)$. **B.** $[2;4]$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $[2;4)$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $\log_3^2(3x)-(m+2)\log_3 x+m-5=0$ (1). Điều kiện: $x>0$

$(1)\Leftrightarrow \log_3^2 x-m\log_3 x+m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=m-2\end{array}\right.$

$\log_3 x=2\Leftrightarrow x=9$ (thỏa đề bài)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \log_3 x=m-2\Leftrightarrow x=3^{m-2}$ có nghiệm duy nhất trên $[1;9)$

$\Leftrightarrow 1\le 3^{m-2}<9\Leftrightarrow 0\le m-2<2\Leftrightarrow 2\le m<4$.

Câu 97. Biết rằng các số thực a, b thay đổi sao cho hàm số $f(x)=-x^3+(x+a)^3+(x+b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2-4a-4b+2$.

A. -2. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=-3x^2+3(x+a)^2+3(x+b)^2=3x^2+6(a+b)x+3a^2+3b^2$.

Do hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm trên $(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow x^2+2(a+b)x+a^2+b^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow ab\le 0$ (*).

Cách 1: Ta có $P=a^2+b^2-2a-2b+4=(a+b)^2-4(a+b)+4-2-2ab$

Hay $P=(a+b-2)^2-2ab-2\ge -2$, do $ab\le 0$ theo (*) và $(a+b-2)^2\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+b-2=0\\ ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$.

Vậy $\min P=-2$.

Cách 2: Do $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(-2)\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2-4(a+b)+4\ge 0$

$\Rightarrow P=a^2+b^2-4(a+b)+2\ge -2$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$.

Vậy $\min P=-2$.

Câu 98. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2+2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^{x^2+2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2+2x+3}\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow 3^{x^2+2x+3-(2|x-m|+2)}=\log_{x^2+2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$

Đặt $\begin{cases}a=x^2+2x+3\\ b=2|x-m|+2\end{cases}$ ta có $a>1$, khi đó phương trình đã cho có dạng $3^{a-b}=\log_a b$.

+ Nếu $a>b$ thì $\begin{cases}3^{a-b}>1\\ \log_a b<1\end{cases}$ không thỏa mãn.

+ Nếu $a<b$ thì $\begin{cases}3^{a-b}<1\\ \log_a b>1\end{cases}$ không thỏa mãn.

Do đó $a=b$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với $x^2+2x+3=2|x-m|+2\Leftrightarrow x^2+2x+1=2|x-m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+2x+1=2(x-m)\\ -(x^2+2x+1)=2(x-m)\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=-2m-1 & (1) \\ x^2+4x+1-2m=0 & (2) \end{array}\right.$$

Vì phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt nên ta xét ba trường hợp

- Trường hợp 1: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 1 nghiệm khác các nghiệm của (1) tức là: $\begin{cases} m<-\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} \Delta_2'=0 \\ 4\neq -2m-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} m=-\dfrac{3}{2} \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$.

- Trường hợp 2: Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và phương trình (1) có 1 nghiệm khác các nghiệm của (2) tức là: $\begin{cases} m=-\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} \Delta_2'>0 \\ 1-2m\neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} m>-\dfrac{3}{2} \\ m\neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

- Trường hợp 3: Phương trình (2) và phương trình (1) đều có hai nghiệm trong đó có 1 nghiệm chung. Giả sử x_0 là một nghiệm chung của hai phương trình khi đó ta có $\begin{cases} x_0^2=-2m-1 \\ x_0^2+4x_0=2m-1 \end{cases} \Rightarrow 2x_0^2+4x_0+2=0 \Rightarrow x_0=-1$. Thay vào hệ ta được $m=-1$. Thử lại ta thấy thỏa mãn

Vậy Tổng các giá trị của m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2+2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là $-\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-1)=-3$.

Câu 99. Với giá trị của tham số m thì phương trình $(m+1)16^x-2(2m-3)4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm

trái dấu?

A. $-4<m<-1$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $-1<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $-1<m<-\dfrac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $4^x=t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $\underbrace{(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5}_{f(t)}=0.$ $(*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0<t_1<1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1\neq 0 \\ (m+1)f(1)<0 \\ (m+1)(6m+5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1\neq 0 \\ (m+1)(3m+12)<0 \\ (m+1)(6m+5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow -4<m<-1.$$

Câu 100. Phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên $\left(1;3^{\sqrt{3}}\right]$ khi:

A. $m\in[2;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)$. **C.** $m\in[0;2]$. **D.** $m\in(0;2]$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\Rightarrow t^2-1=\log_3^2 x$. Khi $x\in\left(1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow t\in\left(1;2\right]$.

Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $t^2+t-2=2m$ (1) có nghiệm trên $\left(1;2\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2+t-2;t\in\left(1;2\right]$. Ta có $f'\left(t\right)=2t+1>0,\forall t\in\left(1;2\right]$.

Ta có bảng biến thiên:

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	4

$\Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm trên $\left(1;2\right]$ $\Leftrightarrow 0<2m\le 4\Leftrightarrow 0<m\le 2$.

Vậy $m\in\left(0;2\right]$ thỏa yêu cầu đề.

Câu 101. Cho phương trình $\left(m-5\right).3^x+\left(2m-2\right).2^x.\sqrt{3^x}+\left(1-m\right).4^x=0$, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(m-5\right).3^x+\left(2m-2\right).2^x.\sqrt{3^x}+\left(1-m\right).4^x=0$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(m-5\right).\left(\frac{3}{4}\right)^x+\left(2m-2\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+1-m=0.$$

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t>0$.

Khi đó phương trình trở thành: $\left(m-5\right)t^2+\left(2m-2\right)t+1-m=0,\left(2\right)$.

Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne 0\\ \Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 5\\ \left[\begin{array}{l}m>3\\ m<1\end{array}\right.\\ 1<m<5\end{cases}\Leftrightarrow 3<m<5\Leftrightarrow m\in\left(3;5\right)$.

Vậy $a=3$, $b=5$ nên $a+b=8$.

Câu 102. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-m.2^x+2m-5=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x-m.2^x+2m-5=0\Leftrightarrow 2^{2x}-m.2^x+2m-5=0\left(1\right)$.

Đặt $t=2^x,t>0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-mt+2m-5=0\left(2\right)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương t_1,t_2 thỏa mãn $0<t_1<1<t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ (t_2 - 1)(1 - t_1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(2m-5) > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 5 > 0 \\ t_2 - t_1t_2 + t_1 - 1 > 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{5}{2} \\ m - (2m-5) - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{5}{2} \\ -m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} < m < 4.$$

Câu 103. Tập các giá trị của m để phương trình $4.\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x - m + 3 = 0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt là

A. $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$. **B.** $(7;\, 8)$. **C.** $(-\infty;\, 3)$. **D.** $(7;\, 9)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x$, điều kiện: $t > 0$.

Với $x < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1$ và mỗi $t \in (0;\, 1)$ cho ta đúng một nghiệm $x < 0$.

Khi đó phương trình đã cho được viết lại $4t + \dfrac{1}{t} + 3 = m$ $(*)$. Suy ra bài toán trở thành tìm m để phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm phân biệt $t \in (0;\, 1)$.

Xét hàm số $f(t) = 4t + \dfrac{1}{t} + 3$ với $t \in (0;\, 1)$.

Có $f'(t) = 4 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{4t^2 - 1}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \in (0;\, 1) \\ t = -\dfrac{1}{2} \notin (0;\, 1) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;1)$:

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	8

Dựa vào bảng biến thiên ta có $7 < m < 8$.

Câu 104. Tính tổng T của các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $e^x + \left(m^2 - m\right)e^{-x} = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\dfrac{1}{\log e}$.

A. $T = 28$ **B.** $T = 20$ **C.** $T = 21$ **D.** $T = 27$

Lời giải

Chọn D

$e^x+\left(m^2-m\right)e^{-x}=2m\Leftrightarrow e^{2x}-2me^x+m^2-m=0$

Đặt $t=e^x\left(t>0\right)$, phương trình trở thành $t^2-2mt+m^2-m=0$ (*).

Ta có $x<\dfrac{1}{\log e}\Leftrightarrow t=e^x<e^{\frac{1}{\log e}}=e^{\ln 10}=10$.

Bài toán trở thành tìm điều kiện để phương trình (*) có 2 nghiệm thỏa mãn $0<t_1<t_2<10$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m^2+m>0\\0<S=2m<20\\P=m^2-m>0\\\left(t_1-10\right)\left(t_2-10\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\0<m<10\\\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right.\\m^2-m-10.2m+100>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1<m<10\\m^2-21m+100>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<m<10\\\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{21+\sqrt{41}}{2}\\m<\dfrac{21-\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<\dfrac{21-\sqrt{41}}{2}$$

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow T=\left\{2;3;4;5;6;7\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của T bằng 27.

NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 1. Cho $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$. Tính $\int f'(x).e^x dx$

A. $3x^2e^x-6xe^x+6e^x+C$ **B.** $x^2e^x-6xe^x+6e^x+C$

C. $3x^2e^x-6xe^x+e^x+C$ **D.** $3x^2+6xe^x+6e^x+C$

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra

$$F'(x)=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow x^2=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=x^3$$

$$\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

Do đó để tính $\int f'(x).e^x dx=\int 3x^2 e^x dx$ ta đặt $\begin{cases}u=3x^2\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=6xdx\\ v=e^x\end{cases}$

Ta được

$$\int f'(x).e^x dx=\int 3x^2 e^x dx=3x^2e^x-\int 6xe^x$$
$$=3x^2e^x-6xe^x+6e^x+C$$

Câu 2. Cho $F(x)=x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).2020^x$. Khi đó $\int f'(x).2020^x \mathrm{d}x$ bằng

A. $\sin x+x\cos x-x\sin x.\ln 2020+C$. **B.** $\sin x-x\cos x-x\sin x.\ln 2020+C$.

C. $x\cos x+\sin x-x\sin x.\ln 2020+C$. **D.** $\cos x-x\sin x.\ln 2020+C$.

Lời giải

Chọn A

Xét $\int f'(x).2020^x \mathrm{d}x=F'(x)-\ln 2020.F(x)+C=\sin x+x\cos x-x\sin x.\ln 2020+C$.

Câu 3. Cho $F(x)=(x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$?

A. $(4-2x)e^x+C.$. **B.** $\dfrac{2-x}{2}e^x+C.$. **C.** $(2-x)e^x+C.$. **D.** $(x-2)e^x+C.$

Lời giải

Chọn C

$$F'(x)=f(x)e^{2x}\Leftrightarrow\left[(x-1)e^x\right]'=f(x)e^{2x}\Leftrightarrow x.e^x=f(x)e^{2x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$$

Đặt $A=\int f'(x)e^{2x}dx=\int(1-x)e^x dx$

Đặt $\begin{cases}u=1-x\Rightarrow du=dx\\ dv=e^x dx\Rightarrow v=e^x\end{cases}\Rightarrow A=e^x(2-x)+C$.

Câu 4. Biết $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $f\left[F(0)\right]$.

A. $-e^{-1}$. **B.** $20e^2$. **C.** $9e$. **D.** $3e$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$F'(x)=\left(ax^2+bx+c\right)'e^{-x}+\left(ax^2+bx+c\right)\left(e^{-x}\right)'=(2ax+b)e^{-x}-\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

$F'(x)=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$

Vì $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$ nên:

$F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-a=2\\2a-b=-5\\b-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=-1\end{cases}.$

Như vậy $F(x)=\left(-2x^2+x-1\right)e^{-x}\Rightarrow F(0)=\left(-2.0^2+0-1\right)e^{-0}=-1$.

Bởi vậy $f\left[F(0)\right]=f(-1)=\left(2.1^2+5.1+2\right)e=9e$.

Câu 5. Biết $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $f\left[F(0)\right]$.

A. $-e^{-1}$. **B.** $20e^2$. **C.** $9e$. **D.** $3e$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$F'(x)=\left(ax^2+bx+c\right)'e^{-x}+\left(ax^2+bx+c\right)\left(e^{-x}\right)'=(2ax+b)e^{-x}-\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

$F'(x)=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$

Vì $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$ nên:

$F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}=\left(2x^2-5x+2\right)e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-a=2\\2a-b=-5\\b-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=-1\end{cases}.$

Như vậy $F(x)=\left(-2x^2+x-1\right)e^{-x}\Rightarrow F(0)=\left(-2.0^2+0-1\right)e^{-0}=-1$.

Bởi vậy $f\left[F(0)\right]=f(-1)=\left(2.1^2+5.1+2\right)e=9e$.

Câu 6. Cho $F(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\,dx=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C$.

B. $\int f'(x)\ln x\,dx=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.

C. $\int f'(x)\ln x\,dx=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)+C$.

D. $\int f'(x)\ln x\,dx=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}x^{-2}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Tính $I=\int f'(x)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=f(x)\end{cases}$

Ta được: $I=f(x)\ln x-\int\dfrac{f(x)}{x}dx=-\dfrac{1}{x^2}\ln x-\dfrac{1}{2x^2}+C=-\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C$.

Câu 7. Cho $\cos^2 x-3$ là một nguyên hàm của $f'(\cos x).\sin x$. Tính $f(-7)$ biết $f(0)=2$

A. 46. **B.** - 47. **C.** - 46. **D.** 51.

Lời giải

Chọn B

$\int f'(\cos x).\sin x dx=-\int f'(\cos x).d(\cos x)=-f(\cos x)+C$

Đặt $u=\cos x$.

Khi đó $u^2-3=-f(u)+C\Leftrightarrow f(u)=-u^2+3+C$

$f(0)=2$ nên $C=-1$. Suy ra $f(u)=-u^2+2$.

Vậy $f(-7)=-47$

Câu 8. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_1^5 2f(x)dx=2$ và $\int_1^3 f(x)dx=7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng:

A. 5. **B.** -6. **C.** 9. **D.** -9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_3^5 f(x)dx=\int_3^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx=-\int_1^3 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx=-7+\dfrac{2}{2}=-6$.

Câu 9. Cho $F(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\,dx=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C$.

B. $\int f'(x)\ln x\,dx=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.

C. $\int f'(x)\ln x\,dx=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)+C$.

D. $\int f'(x)\ln x\,dx=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}x^{-2}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^3}=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

Tính $I=\int f'(x)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=f(x)\end{cases}$

Ta được: $I=f(x)\ln x-\int\frac{f(x)}{x}dx=-\frac{1}{x^2}\ln x-\frac{1}{2x^2}+C=-\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)+C.$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$ là

A. $\sin 2x-2\cos^2 x+C$. **B.** $\sin 2x+2\cos^2 x+C$.
C. $-\sin 2x+2\cos^2 x+C$. **D.** $-\sin 2x-2\cos^2 x+C$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ nên:

$\Rightarrow f(x)e^{2x}=(\cos^2 x)'=-2\cos x.\sin x=-\sin 2x$.

Tính $I=\int f'(x)e^{2x}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=e^{2x}\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2e^{2x}dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

$\Rightarrow I=f(x).e^{2x}-2\int f(x)e^{2x}dx=-\sin 2x-2\cos^2 x+C$.

Câu 11. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$. **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\int f(x)dx=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}dx=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx-\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$

$=2\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

Xét hàm số $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{3}+C$	$\searrow$	

$\max\limits_{(0;\pi)} F(x)=F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

Khi đó, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Câu 12. Cho $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$. Khi đó $\int f'(x).e^x dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

B. $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

C. $\dfrac{1}{1+x^2}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

D. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x).e^x dx=F'(x)-F(x)+C=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

Câu 13. Cho $F(x)=x.e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{3x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\int f'(x).e^{3x}\mathrm{dx}$.

A. $e^x(1-x)+C.$ **B.** $e^x(1+2x)+C.$ **C.** $e^x(1-2x)+C.$ **D.** $e^x(1+x)+C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F'(x)=e^x+xe^x=f(x).e^{3x}$.

Xét $I=\int f'(x).e^{3x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=e^{3x}\Rightarrow du=3.e^{3x}.dx \\ dv=f'(x)\Rightarrow v=f(x)\end{cases}$.

Ta có: $I=f(x).e^{3x}-3\int f'(x).e^{3x}dx=e^x+xe^x-3x.e^x+C=e^x(1-2x)+C.$.

Câu 14. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $R\setminus\{0\}$. Biết x^2-3x+2 là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là:

A. 2x – 3lnx + **C.** **B.** $x^2-3ln|x|+$ C.

C. $2x-3ln|x|+$ C.. **D.**. $2x-3ln|x|+2020$.

Lời giải

Chọn C

x^2-3x+2 là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$ nên

$(x^2-3x+2)'=xf(x)\Leftrightarrow 2x-3=x.f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{2x-3}{x}$

Khi đó $\int f(x)dx=\int\dfrac{2x-3}{x}dx=\int(2-\dfrac{3}{x})dx=2x-3\ln|x|+C$.

Câu 15. Cho $F(x)=-\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{5x^5}+C$.

B. $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}-\dfrac{1}{5x^5}+C$.

C. $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.

D. $\int f'(x)\ln x dx=-\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $F'(x)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3x^2}{x^6}=\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

Xét $I=\int f'(x)\ln x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

Ta có: $I=\ln x.f(x)-\int\dfrac{f(x)}{x}dx+C=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là 0; 1; 2 và có đạo hàm liên tục trên R. Khi đó hàm số $y=f\left(4x-4x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5 **B.** 2 **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left[f\left(4x-4x^2\right)\right]'=\left(4x-4x^2\right)'.f'\left(4x-4x^2\right)=4(1-2x).f'\left(4x-4x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ 4x-4x^2=0\\ 4x-4x^2=1\\ 4x-4x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=0;x=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Do đó hàm số $y=f\left(4x-4x^2\right)$ có ba điểm cực trị là $0;\dfrac{1}{2};1$.

Câu 17. Cho $F(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$

A. $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C$.

B. $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.

C. $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)+C$.

D. $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}x^{-2}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}.$

Tính $I=\int f'(x)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=f(x)\end{cases}$

Ta được: $I=f(x)\ln x-\int\dfrac{f(x)}{x}dx=-\dfrac{1}{x^2}\ln x-\dfrac{1}{2x^2}+C=-\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C.$

Câu 18. Cho $F(x)=-\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln xdx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{5x^5}+C$.

B. $\int f'(x)\ln xdx=\dfrac{\ln x}{x^3}-\dfrac{1}{5x^5}+C$.

C. $\int f'(x)\ln xdx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.

D. $\int f'(x)\ln xdx=-\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}$

$\Leftrightarrow\left(-\dfrac{1}{3}x^{-3}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^3}.$

Tính $I=\int f'(x)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=f(x)\end{cases}$

Ta được: $I=f(x)\ln x-\int\dfrac{f(x)}{x}dx=\dfrac{1}{x^3}\ln x+\dfrac{1}{3x^3}+C=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C.$

Câu 19. Cho $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $a\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a=3$. Tính $F(a)-10a^2+3a$.

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 10$.

B. $-\dfrac{1}{4}\ln 10$.

C. $\dfrac{1}{2}\ln 10$.

D. $\ln 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$

Ta lại có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\tan x)=x\tan x-\int \tan x\mathrm{d}x=x\tan x-\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$=x\tan x+\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=x\tan x+\ln|\cos x|+C\Rightarrow F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|+C$

Lại có: $F(0)=0\Rightarrow C=0$, do đó: $F(x)=xf(x)-x\tan x-\ln|\cos x|$.

$\Rightarrow F(a)=af(a)-a\tan a-\ln|\cos a|$

Khi đó $f(a)=\frac{a}{\cos^2 a}=a(1+\tan^2 a)=10a$

và $\frac{1}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a=10\Leftrightarrow \cos^2 a=\frac{1}{10}\Leftrightarrow |\cos a|=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a)-10a^2+3a=10a^2-3a-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\right|-10a^2+3a=\frac{1}{2}\ln 10$.

Câu 20. Cho $F(x)=2^x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$. Khi đó $\int f'(x).e^x dx$ bằng

A. $2^x(\sin x.\ln 2+\cos x)+C$.

B. $2^x\left(\sin x.\ln\frac{2}{\mathrm{e}}+\cos x\right)+C$.

C. $2^x\left(\sin x.\ln\frac{2}{\mathrm{e}}-\cos x\right)+C$.

D. $2^x\left(\cos x.\ln\frac{2}{\mathrm{e}}+\sin x\right)+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f'(x).e^x dx=F'(x)-F(x)+C=2^x\left(\sin x.\ln\frac{2}{\mathrm{e}}+\cos x\right)+C$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$, họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $(x+3)\mathrm{e}^x+C$.

B. $\frac{(3+2x)}{4}\mathrm{e}^x+C$.

C. $(x-1)\mathrm{e}^x+C$.

D. $(x+1)\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x+C\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{2x}=(1+x)\mathrm{e}^x\Rightarrow f(x)=\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}$.

Lúc đó $f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x(1+x)}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{2+x}{\mathrm{e}^x}\Rightarrow f'(x)\mathrm{e}^{2x}=(2+x)\mathrm{e}^x$

Tính $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int (2+x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=2+x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}$

$\Rightarrow\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=(2+x)\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(2+x)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=(x+1)\mathrm{e}^x+C$.

Câu 22. Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x\left(\ln(ax)+\frac{1}{x}\right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right)=0$ và $F(2020)=\mathrm{e}^{2020}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in\left(\frac{1}{2020};1\right)$.

B. $a\in\left(0;\frac{1}{2020}\right]$.

C. $a\in[1;2020)$.

D. $a\in[2020;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int e^x\left(\ln(ax)+\frac{1}{x}\right)dx=\int e^x\ln(ax)dx+\int\frac{e^x}{x}dx$ (1)

• Tính $\int e^x\ln(ax)dx$:

Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax)\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int e^x\ln(ax)dx=e^x\ln(ax)-\int\frac{e^x}{x}dx+C$

• Thay vào (1), ta được: $F(x)=e^x\ln(ax)+C$.

Ta có:

$\begin{cases}F\left(\frac{1}{a}\right)=0\\F(2020)=e^{2020}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{\frac{1}{a}}.\ln 1+C=0\\e^{2020}\ln(a.2020)+C=e^{2020}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=0\\\ln(a.2020)=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{e}{2020}$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=|x-1|+|x-2|$, $f(0)+f\left(\frac{3}{2}\right)=1; f(4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)+f\left(\frac{3}{2}\right)$ bằng

A. -4. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=|x-1|+|x-2|=\begin{cases}2x-3 & khi & x>2\\1 & khi & 1<x<2\\3-2x & khi & x<1\end{cases}$

Suy ra $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+c & khi & x>2\\x+d & khi & 1<x<2\\3x-x^2+e & khi & x<1\end{cases}$

Từ giả thiết $f(0)+f\left(\frac{3}{2}\right)=1; f(4)=2$ ta có

$\begin{cases}e+\left(\frac{3}{2}+d\right)=1\\c+4=2\end{cases}\Rightarrow c+e+\left(\frac{3}{2}+d\right)=-1$

$\Rightarrow f(-1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(3)=(e-4)+\left(\frac{3}{2}+d\right)+c=-1-4=-5$

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=|x-1|+|x-2|$, $f(0)+f\left(\frac{3}{2}\right)=1; f(4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)+f\left(\frac{3}{2}\right)$ bằng

A. -4. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=|x-1|+|x-2|=\begin{cases}2x-3 & khi & x>2\\ 1 & khi & 1<x<2\\ 3-2x & khi & x<1\end{cases}$

Suy ra $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+c & khi & x>2\\ x+d & khi & 1<x<2\\ 3x-x^2+e & khi & x<1\end{cases}$

Từ giả thiết $f(0)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)=1; f(4)=2$ ta có

$\begin{cases}e+\left(\dfrac{3}{2}+d\right)=1\\ c+4=2\end{cases}\Rightarrow c+e+\left(\dfrac{3}{2}+d\right)=-1$

$\Rightarrow f(-1)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)+f(3)=(e-4)+\left(\dfrac{3}{2}+d\right)+c=-1-4=-5$

Câu 25. Cho $F(x)=-\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx=-\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.
B. $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}-\dfrac{1}{5x^5}+C$.

C. $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.
D. $\int f'(x)\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{5x^5}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F'(x)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3x^2}{x^6}=\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

Xét $I=\int f'(x)\ln x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

Ta có: $I=\ln x.f(x)-\int\dfrac{f(x)}{x}dx+C=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $(\sin x-1)\left[2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m\right]=0$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$?

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, phương trình này có 1 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là $x=\dfrac{\pi}{2}$

Lại có: $2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\cos x-m)=0$

$\Leftrightarrow(\cos x-m)(2\cos x-1)=0$

Xét PT: $2\cos x=1$ có 2 nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3};x=\dfrac{5\pi}{3}$ trên đoạn $[0;2\pi]$

Để PT có đúng 4 nghiệm phân biệt khi:

+) $\cos x = m$ có duy nhất 1 nghiệm khác $x=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{3}; x=\frac{5\pi}{3}$ khi đó $m=-1$.

+) $\cos x = m$ có 2 nghiệm trong đó có 1 nghiệm trùng với 1 trong 3 nghiệm $x=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{3}; x=\frac{5\pi}{3}$.

Suy ra $m=0$. Kết hợp 2 trường hợp suy ra có 2 giá trị của m.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=x^2$ và $f(1)=-1$. Giá trị của $f\left(\frac{3}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{96}$. **B.** $\frac{1}{64}$. **C.** $\frac{1}{48}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=x^2 \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=x^3 \Leftrightarrow \left[xf(x)\right]'=x^3 \Rightarrow xf(x)=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$.

$f(1)=-1 \Rightarrow C=-\frac{5}{4}$. Khi đó $f(x)=\frac{x^4-5}{4x} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{96}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác đinh trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $\sin 2x$ là một nguyên hàm của $f(x).e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^x$ là

A. $I=2\cos 2x-\sin 2x+C$. **B.** $I=-2\cos 2x+\sin 2x+C$.
C. $I=-2\cos 2x-\sin 2x+C$. **D.** $I=2\cos 2x+\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int f'(x).e^x dx=\int e^x df(x)=f(x).e^x-\int f(x).e^x dx$.

Lại có $\int f(x).e^x dx=\sin 2x+C \Rightarrow f(x).e^x=(\sin 2x)'=2\cos 2x$.

Vậy $I=2\cos 2x-\sin 2x+C$.

Câu 29. Cho $F(x)=2^x \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$. Khi đó $\int f'(x).e^x\,dx$ bằng

A. $2^x(\sin x.\ln 2+\cos x+\sin x)+C$. **B.** $2^x(\ln 2.\sin x+\cos x-\sin x)+C$.
C. $2^x\left(\sin x.\ln\frac{2}{e}-\cos x\right)+C$. **D.** $2^x\left(\cos x.\ln\frac{2}{e}+\sin x\right)+C$.

Lời giải

Chọn B

Theo bài có $\int e^x f(x).dx=2^x.\sin x$

Ta có: $I=\int f'(x).e^x\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ dv=f'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=e^x\,dx \\ v=f(x) \end{cases}$

Nên: $I=\int f'(x).e^x\,dx = e^x f(x)-\int e^x f(x)dx = e^x f(x)-2^x.\sin x+C$ (*)

Do $F(x)=2^x \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$.

Nên có $f(x).e^x=(2^x\sin x)'=2^x \ln 2.\sin x+2^x\cos x$ (2*)

Thay (2*) vào (*) ta có :

$$I=2^x\ln 2.\sin x+2^x\cos x-2^x.\sin x+C=2^x(\ln 2.\sin x+\cos x-\sin x)+C$$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $e^x(x^2-2x+3)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f''(x)e^x$ là

A. $2xe^x-2e^x+C$. **B.** $2e^x+C$.

C. $e^{2x}+x^2+C$. **D.** $2e^x+x^2+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(e^x\left(x^2-2x+3\right)\right)'=f\left(x\right)e^x \Leftrightarrow e^x\left(x^2+1\right)=f\left(x\right)e^x \Leftrightarrow f\left(x\right)=x^2+1$.

Vậy $\int f''\left(x\right)e^x dx=\int 2e^x dx=2e^x+C$.

Câu 31. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $e^x\left(x^2-2x+3\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f''\left(x\right)e^x$ là

A. $2xe^x-2e^x+C$. **B.** $2e^x+C$.

C. $e^{2x}+x^2+C$. **D.** $2e^x+x^2+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(e^x\left(x^2-2x+3\right)\right)'=f\left(x\right)e^x \Leftrightarrow e^x\left(x^2+1\right)=f\left(x\right)e^x \Leftrightarrow f\left(x\right)=x^2+1$.

Vậy $\int f''\left(x\right)e^x dx=\int 2e^x dx=2e^x+C$.

Câu 32. Cho $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right).e^x$. Khi đó $\int f'\left(x\right).e^x dx$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. **B.** $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

C. $\frac{1}{1+x^2}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f\left(x\right).e^x dx=F'\left(x\right)-F\left(x\right)+C=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

Câu 33. Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm xác định trên $[e;e^2]$, cho $f(e)=\frac{e^2}{2}$ và $f'(x)=\frac{f(x)}{x\ln x}+x\ln x+\ln x$. Tính $f(e^2)$?

A. $f(e^2)=e^4+2e^2-2e$. **B.** $f(e^2)=e^4+2e^2+2e$.

C. $f(e^2)=e^4-2e^2-2e$. **D.** $f(e^2)=e^4-2e^2+2e$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\frac{f(x)}{x\ln x}+x\ln x+\ln x \Leftrightarrow f'(x)-\frac{f(x)}{x\ln x}=x\ln x+\ln x$

$\Leftrightarrow xf'(x).\ln x-f(x)=x^2\ln^2 x+x\ln^2 x \Leftrightarrow f'(x).\ln x-\frac{1}{x}.f(x)=x\ln^2 x+\ln^2 x$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x).\ln x-\frac{1}{x}.f(x)}{\ln^2 x}=x+1 \Leftrightarrow \frac{f'(x).\ln x-\left(\ln x\right)'.f(x)}{\left(\ln x\right)^2}=x+1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\ln x}\right)'=x+1 \Rightarrow \frac{f(x)}{\ln x}=\int\left(x+1\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+C$

Mặt khác $f(\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\Rightarrow C=-\mathrm{e}$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{2}+x\ln x-\mathrm{e}\ln x$.

Vậy $f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^4+2\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ xác đinh trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $\tan x$ là một nguyên hàm của $f(x).\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).\mathrm{e}^x$ là

A. $I=\tan x-1-\tan^2 x+C$.
B. $I=-\tan x-1-\tan^2 x+C$.
C. $I=\tan x+1-\tan^2 x+C$.
D. $I=\tan x+1+\tan^2 x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int f'(x).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\,f(x)=f(x).\mathrm{e}^x-\int f(x).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Lại có $\int f(x).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\tan x+C\Rightarrow f(x).\mathrm{e}^x=(\tan x)'=1+\tan^2 x$.

Vậy $I=\tan x-1-\tan^2 x+C$.

Câu 35. Cho a là số thực khác 0, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$ và $F(2018)=e^{2018}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\in[2018;+\infty)$.
B. $a\in\left(\dfrac{1}{2018};1\right)$.
C. $a\in\left(0;\dfrac{1}{2018}\right)$.
D. $a\in[1;2018)$.

Lời giải

Chọn B

Xét $F(x)=\int e^x\left(\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x+\int e^x.\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=M+\int e^x.\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $M=\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax)\\ dv=e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=e^x\end{cases}$

Khi đó $M=\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x=e^x.\ln(ax)-\int e^x.\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow F(x)=e^x\ln(ax)+C$.

Vì $F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0\Leftrightarrow C=0$ suy ra $F(x)=e^x\ln(ax)$.

Lại có $F(2018)=e^{2018}\ln(2018a)=e^{2018}\Leftrightarrow\ln(2018a)=1$

$\Leftrightarrow 2018a=e\Leftrightarrow a=\dfrac{e}{2018}$. Vậy $a\in\left(\dfrac{1}{2018};1\right)$.

Câu 36. Cho a là số thực khác 0, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$ và $F(2018)=e^{2018}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\in[2018;+\infty)$.
B. $a\in\left(\dfrac{1}{2018};1\right)$.
C. $a\in\left(0;\dfrac{1}{2018}\right)$.
D. $a\in[1;2018)$.

Lời giải

Chọn B

Xét $F(x)=\int e^x\left(\ln(ax)+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x+\int e^x.\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=M+\int e^x.\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $M=\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax)\\ dv=e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=e^x\end{cases}$

Khi đó $M=\int e^x\ln(ax)\mathrm{d}x=e^x.\ln(ax)-\int e^x.\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow F(x)=e^x\ln(ax)+C$.

Vì $F\left(\dfrac{1}{a}\right)=0\Leftrightarrow C=0$ suy ra $F(x)=e^x\ln(ax)$.

Lại có $F(2018)=e^{2018}\ln(2018a)=e^{2018}\Leftrightarrow\ln(2018a)=1$

$\Leftrightarrow 2018a=e\Leftrightarrow a=\dfrac{e}{2018}$. Vậy $a\in\left(\dfrac{1}{2018};1\right)$.

Câu 37. Cho $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$. Tính $\int f'(x).e^x dx$

A. $3x^2e^x-6xe^x+6e^x+C$ **B.** $x^2e^x-6xe^x+6e^x+C$

C. $3x^2e^x-6xe^x+e^x+C$ **D.** $3x^2+6xe^x+6e^x+C$

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra

$F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=x^3$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2$

Do đó để tính $\int f'(x).e^x dx=\int 3x^2.e^x dx$ ta đặt $\begin{cases}u=3x^2\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=6xdx\\ v=e^x\end{cases}$

Ta được

$\int f'(x).e^x dx=\int 3x^2.e^x dx=3x^2e^x-\int 6xe^x$

$=3x^2e^x-6xe^x+6e^x+C$

Câu 38. Hàm số $f(x)=2^{x^2+3x+1}$ có đạo hàm là

A. $f'(x)=2^{x^2+3x+1}(2x+3)\ln 2$. **B.** $f'(x)=\dfrac{2x+3}{2^{x^2+3x+1}}$.

C. $f'(x)=2^{x^2+3x+1}(2x+3)$. **D.** $f'(x)=\dfrac{2x+3}{2^{x^2+3x+1}\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

$\left(2^{x^2+3x+1}\right)'=2^{x^2+3x+1}.\left(x^2+3x+1\right)'.\ln 2=2^{x^2+3x+1}.(2x+3).\ln 2$.

Câu 39. Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên $R\setminus\{0\}$ và $F(x)=-\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ $(x>0)$.

A. $\int f'(x)\ln xdx=-\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$. **B.** $\int f'(x)\ln xdx=\dfrac{\ln x}{x^3}-\dfrac{1}{5x^5}+C$.

C. $\int f'(x)\ln xdx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$. **D.** $\int f'(x)\ln xdx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{5x^5}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F'(x)=\frac{1}{3}.\frac{3x^2}{x^6}=\frac{1}{x^4}=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^3}$.

Xét $I=\int f'(x)\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=f'(x)dx \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

Ta có: $I=\ln x.f(x)-\int \frac{f(x)}{x}dx+C=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2018$, $f(2)=2019$. Giá trị của $f(3)-f(-1)$ bằng

A. 1. **B.** $\ln 4$. **C.** $\ln 4037$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|+C=\begin{cases} \ln(x-1)+C_1, \text{khi } x>1 \\ \ln(1-x)+C_2, \text{khi } x<1 \end{cases}$.

+ Xét trên $(-\infty;1)$, ta có $f(0)=2018\Rightarrow C_1=2018$.

+ Xét trên $(1;+\infty)$, ta có $f(2)=2019\Rightarrow C_2=2019$.

Do đó, $f(x)=\begin{cases} \ln(x-1)+2019, \text{khi } x>1 \\ \ln(1-x)+2018, \text{khi } x<1 \end{cases}$

Vậy $f(3)-f(-1)=(\ln 2+2019)-(\ln 2+2018)=1$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x)-f(x)=(2x+1)e^x$ và $f(0)=-2$. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $f(x)=0$ có giá trị là

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)-f(x)=(2x+1)e^x\Leftrightarrow\left[f'(x)-f(x)\right].e^{-x}=2x+1$

$\Leftrightarrow f'(x).e^{-x}+f(x).\left(e^{-x}\right)'=2x+1\Leftrightarrow\left(f(x).e^{-x}\right)'=2x+1$

$\Rightarrow f(x).e^{-x}=\int(2x+1)dx\Rightarrow f(x).e^{-x}=x^2+x+C$ (1).

Do $f(0)=-2$ nên từ (1) ta có $-2.e^0=0^2+0+C\Rightarrow C=-2$.

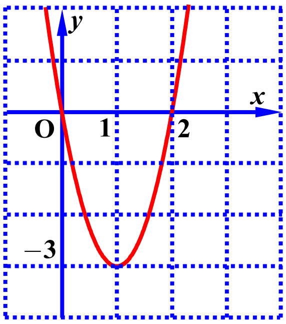
Khi đó $f(x)=\left(x^2+x-2\right).e^x$.

$f(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2+x-2\right).e^x=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $f(x)=0$ là $1-2=-1$.

.

Câu 42. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$, $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0\right)$. Biết đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ dương. Đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Tính diện tích S của hình phẳng tạo bởi đồ thị $\left(C\right)$ với trục hoành.



A. S = $\dfrac{21}{4}$. **B.** S = $\dfrac{25}{4}$. **C.** S = $\dfrac{35}{4}$. **D.** S = $\dfrac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị $y=f'\left(x\right)$ đi qua các điểm (0; 0), (2; 0), (1; –3) nên $f'\left(x\right)=3x^2-6x$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'\left(x\right)dx=x^3-3x^2+C$.

Vì đồ thị (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 dương nên

$f'\left(x_0\right)=0,x_0>0\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=0,x_0>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x_0=0 & (KTM)\\ x_0=2 & (TM\end{array}\right.$

Khi đó $f\left(2\right)=0\Leftrightarrow z^3-3.2^2+C=0\Leftrightarrow C=4\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-3x^2+4$

$\Rightarrow S=\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(x^3-3x^2+4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^4}{4}-x^3+4x\right)\right|_{-1}^{2}=\dfrac{27}{4}$. Đáp án **D.**

Câu 43. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó có bao nhiêu số thực $x\in\left(0;2020\pi\right)$ để $F(x)=1$.

A. 1010. **B.** 1009. **C.** 2020. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\sin x\right)dx=-\cot x+\cos x+C$

Do $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow C=1$

Suy ra $F(x)=-\cot x+\cos x+1$

Khi đó: $F(x)=1\Leftrightarrow -\cot x+\cos x=0\Leftrightarrow -\cos x\left(\dfrac{1}{\sin x}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin x=1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Do $x \in (0;2020\pi)$ nên $0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 2020\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{4039}{4} = 1009,75 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{0;1;2;...;1009\}$

Vậy có 1010 giá trị của $k \Rightarrow$ có 1010 giá trị của x.

Câu 44. Cho $F(x) = 2^x \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).\mathrm{e}^x$. Khi đó $\int f'(x).\mathrm{e}^x dx$ bằng

A. $2^x(\sin x.\ln 2 + \cos x) + C$.

B. $2^x\left(\sin x.\ln\frac{2}{\mathrm{e}} + \cos x\right) + C$.

C. $2^x\left(\sin x.\ln\frac{2}{\mathrm{e}} - \cos x\right) + C$.

D. $2^x\left(\cos x.\ln\frac{2}{\mathrm{e}} + \sin x\right) + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f'(x).\mathrm{e}^x dx = F'(x) - F(x) + \mathrm{C} = 2^x\left(\sin x.\ln\frac{2}{\mathrm{e}} + \cos x\right) + C$.

Câu 45. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2+a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x\cos ax$.

A. $x\sin x - \cos x + C$.

B. $\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$

C. $x\sin x + \cos + C$.

D. $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x^2+1)^2}{x^2}$.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2+a)^2}{x^2}$ nên $a = 1$.

$\int g(x)\mathrm{d}x = \int x\cos x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases}$

$\int g(x)\mathrm{d}x = \int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$. Biết $\ln 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

A. $\frac{1}{2x} - \ln 2x + C$.

B. $\frac{1}{x} - \ln x + C$.

C. $\frac{2}{x} + \ln 2x + C$.

D. $\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln 2x + C$.

Lời giải

Chọn B

Dùng nguyên hàm từng phần: Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow \int f'(x)e^x dx = f(x)e^x - \int f(x)e^x dx = \frac{1}{x} - \int (\ln 2x)' dx$, (vì $(\ln 2x)' = f(x)e^x$)

$= \frac{1}{x} - \ln 2x + C = \frac{1}{x} - \ln x + C$. **Chọn B**

Câu 47. Cho $F(x) = 2^x \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).\mathrm{e}^x$. Khi đó $\int f'(x).\mathrm{e}^x dx$ bằng

A. $2^x(\sin x.\ln 2 + \cos x) + C$.

B. $2^x\left(\sin x.\ln \frac{2}{\mathrm{e}} + \cos x\right) + C$.

C. $2^x\left(\sin x.\ln \frac{2}{\mathrm{e}} - \cos x\right) + C$.

D. $2^x\left(\cos x.\ln \frac{2}{\mathrm{e}} + \sin x\right) + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f'(x).\mathrm{e}^x dx = F'(x) - F(x) + \mathrm{C} = 2^x\left(\sin x.\ln \frac{2}{\mathrm{e}} + \cos x\right) + C$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^x$ là:

A. $3x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$. **B.** $x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$.

C. $3x^2e^x - 6xe^x + e^x + C$. **D.** $3x^2 + 6xe^x + 6e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$.

Do đó: $\int f'(x).e^x dx = \int 3x^2.e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 3x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 6x\mathrm{d}x \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó, $\int 3x^2.e^x \mathrm{d}x = 3x^2e^x - \int 6xe^x \mathrm{d}x = 3x^2e^x - 6(xe^x - e^x) + C = 3x^2e^x - 6xe^x + 6e^x + C$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2(x^2+4)} + C$. **B.** $\frac{x+3}{x^2+4} + C$. **C.** $\frac{2x+3}{4(x^2+1)} + C$. **D.** $\frac{2x+3}{8(x^2+1)} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C \Leftrightarrow 2\int f(\sqrt{x+1})\mathrm{d}(\sqrt{x+1}) = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1})^2+4} + C$.

Đặt $\sqrt{x+1} = t$ ta được: $2\int f(t)\mathrm{d}t = \frac{2(t+3)}{t^2+4} + C \Rightarrow \int f(t)\mathrm{d}t = \frac{t+3}{t^2+4} + C'$.

Suy ra $\int f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+C_1\right)=\frac{2x+3}{8x^2+8}+C$

Câu 50. Cho $F(x)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$

A. $\int f'(x)\ln x dx=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$ **B.** $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+C$

C. $\int f'(x)\ln x dx=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)+C$ **D.** $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+C$

Lời giải

$\int f'(x).\ln x\, dx=\int \ln x d f(x)=f(x).\ln x-\int f(x) d\ln x=f(x).\ln x-\int f(x)\frac{1}{x}dx$ (1)

Lại có $F(x)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên

$\frac{f(x)}{x}=[\frac{1}{2x^2}]'=\frac{-2}{2x^3}=\frac{-1}{x^3}$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được

$\int f'(x).e^{2x}dx=\frac{-1}{x^2}.\ln x-\int\frac{-1}{x^2}.\frac{1}{x}dx=\frac{-\ln x}{x^2}-\int\frac{-1}{x^3}dx=\frac{-\ln x}{x^2}-\frac{1}{2x^2}+C\ =-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$

Chọn A

Câu 51. Cho $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x.f'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$?

A. $\frac{\pi^2}{36}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln 2$.   **B.** $\frac{4\pi^2}{9}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2$.

C. $\frac{4\pi^2}{9}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln 2$.   **D.** $\frac{\pi^2}{36}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x)=\int x.f'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(f(x))=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{\cos^2 x}-\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int x d(\tan x)=x.\tan x-\int\tan x dx=x.\tan x+\ln(\cos x)+C$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{\cos^2 x}-x\tan x-\ln(\cos x)+C\Rightarrow F(0)=C=0$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{\cos^2 x}-x\tan x-\ln(\cos x)\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\pi^2}{9}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+\ln 2$

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$, họ tất cả

các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$ là

A. $-\sin 2x+\cos x+C$.   **B.** $2\sin x-\cos x+C$.

C. $-2\sin x+\cos x+C$.   **D.** $-\sin x+2\cos x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)e^{2x}$

$\Rightarrow f\left(x\right)e^{2x}=(\sin x)'$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)e^{2x}=\cos x$

Lại có: $\int f\left(x\right)e^{2x}dx=\sin x$

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=e^{2x}dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin x=\int f\left(x\right)e^{2x}dx=f(x).\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}.f'(x)dx$

$=\frac{1}{2}f(x).e^{2x}-\frac{1}{2}\int f'(x).e^{2x}dx$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\int f'(x).e^{2x}dx+C$

$\Leftrightarrow \int f'(x).e^{2x}dx=-2\sin x+\cos x+C$

Câu 53. Cho $F\left(x\right)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f\left(x\right)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)\ln x$.

A. $\int f'\left(x\right)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$.   **B.** $\int f'\left(x\right)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+C$.

C. $\int f'\left(x\right)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)+C$.   **D.** $\int f'\left(x\right)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F'\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2x^2}\right)'=\frac{f\left(x\right)}{x}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}x^{-2}\right)'=\frac{f\left(x\right)}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^3}=\frac{f\left(x\right)}{x}\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}$.

Tính $I=\int f'\left(x\right)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=f'\left(x\right)dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=f\left(x\right) \end{cases}$

Ta được: $I=f\left(x\right)\ln x-\int\frac{f\left(x\right)}{x}dx=-\frac{1}{x^2}\ln x-\frac{1}{2x^2}+C=-\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$..

Câu 54. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{1}{x-1}$, $f\left(0\right)=2019$,, $f\left(2\right)=2020$. Tính $S=\left(f\left(3\right)-2019\right)\left(f\left(-1\right)-2020\right)$.

A. $S=1$.   **B.** $S=1+\ln^2 2$.   **C.** $S=2\ln 2$.   **D.** $S=\ln^2 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C=\begin{cases}\ln(x-1)+C_1 & \text{khi } x>1\\ \ln(1-x)+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Lại có $f(0)=2019 \Rightarrow \ln(1-0)+C_2=2019 \Rightarrow C_2=2019$.

$f(2)=2020$ $\ln(2-1)+C_1=2020 \Rightarrow C_1=2020$.

Do đó $S=\left[\ln(3-1)+2020-2020\right]\left[\ln(1-(-1))+2019-2019\right]=\ln^2 2$.

Câu 55. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$. **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$=2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x}-\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

Xét hàm số $F(x)=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\frac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{3}+C$	$\searrow$	

$\max\limits_{(0;\pi)} F(x)=F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3} \Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

Khi đó, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{-x}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{-x}$ là?

A. $\dfrac{1}{3}\cos 3x+\sin 3x+C$. **B.** $3\sin 3x+3\cos 3x+C$.

C. $3\cos 3x+\sin 3x+C$. **D.** $3\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$.

Lời giải

Chọn C

Tính $I=\int f'(x).e^{-x}$.

Đặt $\begin{cases} u=e^{-x} \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-e^{-x}dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$I=e^{-x}.f(x)+\int f(x).e^{-x}d(x)$

$=(\sin 3x)'+\sin 3x+C$

$=3\cos 3x+\sin 3x+C$

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{-x}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{-x}$ là

A. $\sin x+x(\cos x-\sin x)+C.$

B. $\sin x+x(\cos x+\sin x)+C.$

C. $-\sin x+x(\cos x-\sin x)+C.$

D. $\sin x-x(\cos x-\sin x)+C.$

Lời giải

Đáp án: B

Bằng phương pháp nguyên hàm từng phần đặt $u=\mathrm{e}^{-x}; dv=f'(x)\Rightarrow du=-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x; v=f(x)$

$\int f'(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$=\mathrm{e}^{-x}f(x)+\int f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}f(x)+x\sin x+C$

$=\sin x+x\cos x+x\sin x+C=\sin x+x(\cos x+\sin x)+C.$

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $(x-2)e^{x}+e^{x}+C$. **B.** $(x+2)e^{2x}+e^{x}+C$.

C. $(x-1)e^{x}+C$. **D.** $(x+1)e^{x}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f(x)+f'(x)=e^{-x}\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}+f'(x)\mathrm{e}^{x}=1\Leftrightarrow\left(f(x)\mathrm{e}^{x}\right)'=1\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}=x+C$

Vì $f(0)=2 \Leftrightarrow 2\cdot e^{0}=C \Leftrightarrow C=2 \Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{2x}=(x+2)\mathrm{e}^{x}$.

Vậy $\int f(x)e^{2x}dx=\int (x+2)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\int (x+2)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x}\right)=(x+2)\mathrm{e}^{x}-\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}(x+2)$

$=(x+2)\mathrm{e}^{x}-\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=(x+2)\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+C=(x+1)\mathrm{e}^{x}+C$.

Phân tích: Bài toán cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện chứa tổng của $f(x)$ và $f'(x)$ đưa ta tới công thức đạo hàm của tích $(u.v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ với $u=f(x)$. Từ đó ta cần chọn hàm D cho phù hợp

Tổng quát: Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên K, thỏa mãn $f'(x)+g(x)f(x)=k(x)$ (Chọn $v=e^{G(x)}$).

Ta có $f'(x)+g(x)f(x)=k(x) \Leftrightarrow e^{G(x)}f'(x)+g(x)e^{G(x)}f(x)=k(x)e^{G(x)}$.

$\Leftrightarrow \left(e^{G(x)}f(x)\right)'=k(x)e^{G(x)} \Rightarrow e^{G(x)}f(x)=\int k(x)e^{G(x)}dx \Leftrightarrow f(x)=e^{-G(x)}\int k(x)e^{G(x)}dx$.

Với $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$.

Bản chất của bài toán là cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện chứa tổng của $f(x)$ và $f'(x)$ liên quan tới công thức đạo hàm của tích $(u.v)'=u'v+u.v'$ với $u=f(x)$. Khi đó ta cần chọn hàm D thích hợp. Cụ thể, với bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=k(x)$ liên tục trên K, $g(x)\neq 0$ với $\forall x\in K$ và thỏa mãn $g(x).f'(x)+h(x).f(x)=k(x)$

Ta sẽ đi tìm v như sau: $\dfrac{v'}{v}=\dfrac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow \int \dfrac{v'}{v}dx=\int \dfrac{h(x)}{g(x)}dx$

Khi đó: $\ln|v|=\int \dfrac{h(x)}{g(x)}dx \Leftrightarrow |v|=e^{\int \frac{h(x)}{g(x)}dx}$

Câu 59. Cho $F(x)=-\dfrac{1}{3x^{3}}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^{3}}+\dfrac{1}{5x^{5}}+C$.

B. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=-\dfrac{\ln x}{x^{3}}+\dfrac{1}{3x^{3}}+C$.

C. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^{3}}+\dfrac{1}{3x^{3}}+C$.

D. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^{3}}-\dfrac{1}{5x^{5}}+C$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{f(x)}{x}=F'(x)=\left(\dfrac{-1}{3x^{3}}\right)'=\dfrac{1}{x^{4}} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^{3}}$.Do đó $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\int \dfrac{-3}{x^{4}}\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{-3}{x^{4}}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{x^{3}} \end{cases}$.

Suy ra $\int \dfrac{-3}{x^{4}}\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^{3}}-\int \dfrac{1}{x^{4}}\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^{3}}+\dfrac{1}{3x^{3}}+C$.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1, \int_0^1 xf(3x)dx=1$, khi đó

$\int_0^3 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** -9. **D.** $-\frac{25}{3}$.

Lời giải:

Ta có: $I=\int_0^3 x^2 f'(x)dx = x^2 f(x)\Big|_0^3 - 2\int_0^3 xf(x)dx = 9-2\int_0^3 xf(x)dx.$

Mặt khác, $\int_0^1 xf(3x)dx=1$. Đặt $u=3x \Rightarrow du=3dx$, với $x=0 \Rightarrow u=0; x=1 \Rightarrow u=3$. Khi đó

$\int_0^1 xf(3x)dx=1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}\int_0^3 uf(u)du=1 \Leftrightarrow \int_0^3 uf(u)du=9 \Leftrightarrow \int_0^3 xf(x)dx=9$.

Thay vào I ta được: $I=9-2\int_0^3 xf(x)dx=9-2.9=-9$.

Chọn C

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3x)=f(x)-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$. Giá trị $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(3x)=f(x)-2x \Rightarrow \int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \left[f(x)-2x\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=5-x^2\Big|_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=4\ (1)$

Mặt khác $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=3.4=12$.

Do đó $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=12-5=7$.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết;

$f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0; f(x)>0, \forall x>0$ và $f(2)=\frac{1}{15}$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{11}{15}$. **C.** $\frac{7}{30}$. **D.** $\frac{11}{30}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=-2x-4$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(-2x-4)\mathrm{d}x\ (1)$.

Đặt $t=f(x) \Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{f(x)}+C$.

Thay vào (1) ta có $-\frac{1}{f(x)}+C=-x^2-4x+C_1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}=x^2+4x+C-C_1$.

Do $f(2)=\frac{1}{15} \Rightarrow 15=12+C-C_1 \Rightarrow C-C_1=3$.

Khi đó $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+C-C_1}=\frac{1}{x^2+4x+3}$

$\Rightarrow f(1)+f(2)+f(3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}=\frac{7}{30}$.

Câu 63. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $R\setminus\{0\}$. Biết x^2-3x+2 là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là:

A. 2x – 3lnx + **C.** **B.** $x^2 - 3ln|x| + C$.

C. $2x - 3ln|x| + C$.. **D.**. $2x - 3ln|x| + 2020$.

Lời giải

Chọn C

x^2-3x+2 là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$ nên

$(x^2-3x+2)'=xf(x) \Leftrightarrow 2x-3=x.f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2x-3}{x}$

Khi đó $\int f(x)dx=\int\frac{2x-3}{x}dx=\int(2-\frac{3}{x})dx=2x-3\ln|x|+C$.

Câu 64. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.\sin 2x$ là

A. $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$. **B.** $-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

C. $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **D.** $\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$.

Lời giải

Chọn B

Ta tính $I=\int x\sin 2x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$.

Do đó $I = -\dfrac{x}{2}\cos 2x + \int \dfrac{1}{2}\cos 2x dx = -\dfrac{x}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$.

Câu 65. Cho $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{5x^5} + C$.

B. $\int f'(x)\ln x dx = \dfrac{\ln x}{x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + C$.

C. $\int f'(x)\ln x dx = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.

D. $\int f'(x)\ln x dx = -\dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F'(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)' = \dfrac{f(x)}{x}$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}x^{-3}\right)' = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Tính $I = \int f'(x)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Ta được: $I = f(x)\ln x - \int \dfrac{f(x)}{x}dx = \dfrac{1}{x^3}\ln x + \dfrac{1}{3x^3} + C = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C.$

Câu 66. Cho $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{5x^5} + C$.

B. $\int f'(x)\ln x dx = \dfrac{\ln x}{x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + C$.

C. $\int f'(x)\ln x dx = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.

D. $\int f'(x)\ln x dx = -\dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F'(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)' = \dfrac{f(x)}{x}$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}x^{-3}\right)' = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Tính $I = \int f'(x)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Ta được: $I = f(x)\ln x - \int \dfrac{f(x)}{x}dx = \dfrac{1}{x^3}\ln x + \dfrac{1}{3x^3} + C = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{3x^3} + C.$

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$. Biết $\ln 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

A. $\dfrac{1}{2x} - \ln 2x + C$. **B.** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\ln 2x + C$.

C. $\dfrac{2}{x} + \ln 2x + C$. **D.** $\dfrac{1}{x} - \ln 2x + C$.

Lời giải

Chọn D

Nguyên hàm từng phần: Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases}$. (Chú ý $(\ln 2x)' = f(x)e^x$)

$\Rightarrow I(x) = \int udv = uv - \int vdu = f(x)e^x - \int f(x)e^x dx = \dfrac{1}{x} - \int (\ln 2x)'dx$.

Hay ta có $I(x) = \dfrac{1}{x} - \ln 2x + C$.

Câu 68. Cho $F(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\,dx = -\left(\dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2}\right) + C$. **B.** $\int f'(x)\ln x\,dx = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} + C$.

C. $\int f'(x)\ln x\,dx = -\left(\dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\right) + C$. **D.** $\int f'(x)\ln x\,dx = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2} + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F'(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2x^2}\right)' = \dfrac{f(x)}{x}$

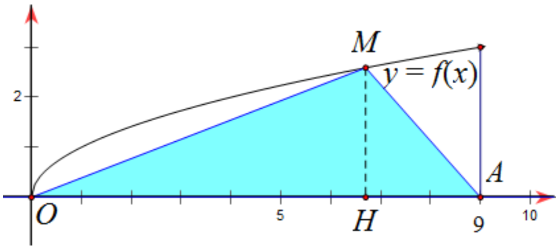
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}x^{-2}\right)' = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^3} = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{x^2}.$

Tính $I = \int f'(x)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Ta được: $I = f(x)\ln x - \int \dfrac{f(x)}{x}dx = -\dfrac{1}{x^2}\ln x - \dfrac{1}{2x^2} + C = -\left(\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{2x^2}\right) + C.$

Câu 69. Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x = 9$ và trục Ox. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.



A. $S = 3$. **B.** $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $V_1 = \pi\int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{81\pi}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox, đặt $OH = m$ (với $0 < m \le 9$), ta có $M\left(m;\sqrt{m}\right)$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra $V_2 = \frac{1}{3}\pi.MH^2.OH + \frac{1}{3}\pi.MH^2.AH = \frac{1}{3}\pi.MH^2.OA = 3m\pi$.

Theo giả thiết, ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\frac{81\pi}{2} = 6m\pi \Leftrightarrow m = \frac{27}{4}$. Do đó $M\left(\frac{27}{4};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \frac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S = \int_0^{\frac{27}{4}}\left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x\right)\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2\right)\right|_0^{\frac{27}{4}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ liên tục tên R. Biết e^x là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{\cos^2 x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).\tan x$ là:

A. $e^x(\frac{\sin 2x}{2} - 1) + C$. **B.** $e^x(\sin 2x - 1) + C$. **C.** $e^x(\frac{\sin 2x}{2} + 1) + C$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

e^x là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{\cos^2 x}$, nên

$(e^x)' = \frac{f(x)}{\cos^2 x} \Rightarrow e^x = \frac{f(x)}{\cos^2 x} \Leftrightarrow f(x) = e^x.\cos^2 x$

Đặt A=$\int f'(x).\tan x dx$

$$\begin{cases} u = \tan x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\cos^2 x}dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow A = \tan x.f(x) - \int \frac{f(x)}{\cos^2 x}dx$$

$A=\tan x.e^x.\cos^2 x-e^x+C=e^x(\frac{\sin 2x}{2}-1)+C$

Câu 71. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$ 1 2 3 4 $+\infty$
$f'(x)$	- 0 + 0 + 0 - 0 +

Hàm số $y=3f\left(x+2\right)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-1\right)$ **C.** (-1;0) **D.** (0;2)

Lời giải

Ta có $y'>0\Leftrightarrow 3f'\left(x+2\right)-3x^2+3>0\Leftrightarrow f'\left(x+2\right)>x^2-1$.

Đặt $t=x+2$, bất phương trình trở thành: $f'(t)>(t-2)^2-1$. Không thể giải trực tiếp bất phương trình:

Ta sẽ chọn t sao cho $\begin{cases}(t-2)^2-1<0\\ f'(t)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<t-2<1\\ t\in(1;2)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<t<3\\ t\in(1;2)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<t<2\\ 2<t<3\end{cases}$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l}1<x+2<2\\ 2<x+2<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ 0<x<1\end{array}\right.$. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng (-1;0); (0;1). Đối chiếu đáp án chọn **C.**

Câu 72. Cho $F\left(x\right)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f\left(x\right)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)\ln x$.

A. $\int f'\left(x\right)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$. **B.** $\int f'\left(x\right)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+C$.

C. $\int f'\left(x\right)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)+C$. **D.** $\int f'\left(x\right)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F'\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2x^2}\right)'=\frac{f\left(x\right)}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^3}=\frac{f\left(x\right)}{x}\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}$.

Tính $I=\int f'\left(x\right)\ln x dx$, đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$

Ta được: $I=f\left(x\right)\ln x-\int\frac{f\left(x\right)}{x}dx=-\frac{1}{x^2}\ln x-\frac{1}{2x^2}+C=-\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$.

Câu 73. Cho $F\left(x\right)=-\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f\left(x\right)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)\ln x$.

A. $\int f'\left(x\right)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{5x^5}+C$. **B.** $\int f'\left(x\right)\ln x dx=-\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$.

C. $\int f'\left(x\right)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$. **D.** $\int f'\left(x\right)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}-\frac{1}{5x^5}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\dfrac{f(x)}{x}=F'(x)=\left(\dfrac{-1}{3x^3}\right)'=\dfrac{1}{x^4}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

Do đó $\int f'(x)\ln x dx=\int \dfrac{-3}{x^4}\ln x dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{-3}{x^4}dx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=\dfrac{1}{x^3} \end{cases}$. Suy ra $\int \dfrac{-3}{x^4}\ln x dx=\dfrac{\ln x}{x^3}-\int \dfrac{1}{x^4}dx=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$ $(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $2(a^2+b^2)$ là:

A. $\dfrac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét trên đoạn $[1;2]$ ta có

$x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}\cdot f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}\cdot f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)=\int \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)=x-\ln|x+1|+C$ (2).

Theo giả thiết, $f(1)=-2\ln 2$ nên thay $x=1$ vào phương trình (2), ta được:

$\dfrac{1}{2}f(1)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow -\ln 2=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.

Thay $x=2$ vào (2), ta được:

$\dfrac{2}{3}f(2)=2-\ln 3-1\Leftrightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$.

$\Rightarrow a=\dfrac{3}{2},\ b=-\dfrac{3}{2}$. Vậy $2(a^2+b^2)=9$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ xác đinh trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $\sin 2x$ là một nguyên hàm của $f(x).\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).\mathrm{e}^x$ là

A. $I=2\cos 2x-\sin 2x+C$. **B.** $I=-2\cos 2x+\sin 2x+C$.

C. $I=-2\cos 2x-\sin 2x+C$. **D.** $I=2\cos 2x+\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int f'(x).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}f(x)=f(x).\mathrm{e}^x-\int f(x).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Lại có $\int f(x).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\sin 2x+C\Rightarrow f(x).\mathrm{e}^x=(\sin 2x)'=2\cos 2x$.

Vậy $I=2\cos 2x-\sin 2x+C$.

Câu 76. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)e^{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)e^{x}$ là

A. $\sin 3x-3\cos 3x+C$. **B.** $-\sin 3x+3\cos 3x+C$.
C. $-\sin 3x-3\cos 3x+C$. **D.** $\sin 3x+3\cos 3x+C$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $\Rightarrow$ $(\sin 3x)'=f(x)e^{x}=-3\cos 3x$

$\Rightarrow f(x)e^{x}=3\cos 3x$. Xét $I=\int f'(x)e^{x}dx$

Đặt $\begin{matrix} u=e^{x}\Rightarrow du=e^{x}dx \\ dv=f'(x)dx\Rightarrow v=f(x) \end{matrix}$,

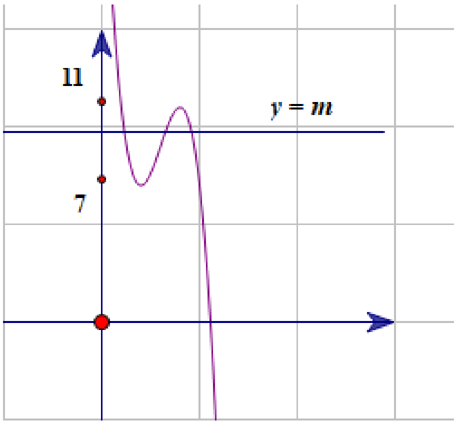
Ta có: $I=f(x)e^{x}-\int f(x)e^{x}dx=3\cos 3x-3\int \cos 3xdx=3\cos 3x-\sin 3x+C$.

Câu 77. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình:
$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^{3}-9x^{2}+24x+m\right).3^{x-3}=3^{x}+1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 45 **B.** 34 **C.** 27 **D.** 38

Lời giải

Chọn C



$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^{3}-9x^{2}+24x+m\right).3^{x-3}=3^{x}+1$

$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left[\left(x-3\right)^{3}+27+m-3x\right].3^{x-3}=3^{x}+1$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x-3\right)^{3}+m-3x+27=3^{3}+3^{3-x}\left(1\right)$

$a=3-x;\ b=\sqrt[3]{m-3x}$

$\left(1\right)\Leftrightarrow 3^{b}+27+b^{3}-a^{3}=27.+3^{a}\Leftrightarrow 3^{b}+b^{3}=3^{a}+a^{3}$

Xét $f\left(t\right)=3^{t}+t^{3}\Rightarrow f'\left(t\right)=3^{t}.\ln 3+3t^{2}\geq 0\forall t\in R$

$\Rightarrow f\left(a\right)=f\left(b\right)\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow 3-x=\sqrt[3]{m-3x}$

$\Leftrightarrow m=\left(3-x\right)^{3}+3x=-x^{3}+9x^{2}-24x+27$

$f\left(x\right)=-x^{3}+9x^{2}-24x+27\Rightarrow f'\left(x\right)=-3x^{2}+18x-24$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2\vee x=4$

Dựa vào đồ thị: $7<m<11\Rightarrow m\in\left\{8;9;10\right\}$.

BÀI TOÁN LIÊN QUAN GIAO ĐIỂM HAI ĐỒ THỊ

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình $f(\sin x)-2=0$ là

A. 1010. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1\le \sin x\le 1\ \forall x$, nên từbảng biến thiên suy ra $f(\sin x)-2=0$

$$\Leftrightarrow f(\sin x)=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x=-1 & (1)\\ \sin x=1 & (2)\end{array}\right..$$

+ Phương trình $(1):\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$. Mà $x\in[0;2020\pi]$=> có 1010 giá trị với k=1,2,3,…,1010

(1) có 1010 nghiệm.

+ Phương trình $(2):\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$. Mà $x\in[0;2020\pi]$ $x\in[0;2020\pi]$=> có 1010 giá trị với k=0,2,3,…,1009

(2) có 1010 nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình là 2020 nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3+(2-m)x^2+4m$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(-2;0),B,C$ sao cho $AB^2+AC^2=12$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+(2-m)x^2+4m=0\Leftrightarrow (x+2)(x^2-mx+2m)=0$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi phương trình $x^2-mx+2m=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ 4+2m+2m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-8m>0\\ m\ne -1\end{cases}$

Khi đó: gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

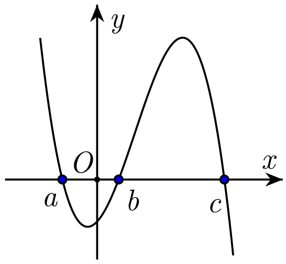
Theo Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=2m\end{cases}$

Giả sử $B(x_1;0),C(x_2;0)$. Ta có $AB^2=(x_1+2)^2,AC^2=(x_2+2)^2$

$$\Rightarrow (x_1+2)^2+(x_2+2)^2=12\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+4(x_1+x_2)-4=0\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+4(x_1+x_2)-4=0$$

$\Leftrightarrow m^2-4m+4m-4=0\Leftrightarrow m^2-4=0\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=2$ (loại) hoặc $m=-2$ (thích hợp)

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(c)>f(b)>f(a)$..

B. $f(a)>f(b)>f(c)$..

C. $\left(f(b)-f(a)\right)\left(f(b)-f(c)\right)<0$..

D. $f(c)+f(a)-2f(b)>0.$

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm $y=f'\left(x\right)$, suy ra $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt $x=a,\ x=b,\ x=c$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau

x		a		b		c	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

Từ đây, suy ra $\begin{cases} f\left(a\right)>f\left(b\right) \\ f\left(c\right)>f\left(b\right) \end{cases} \Rightarrow f\left(a\right)+f\left(c\right)>2f\left(b\right) \Rightarrow f\left(a\right)+f\left(c\right)-2f\left(b\right)>0$..

Câu 4. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt?

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^3-3x^2+2$, ta có phương trình $t^3-3t^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=1+\sqrt{3} \\ t=1-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Với $t=1\Rightarrow f\left(x\right)=1$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1$ có hai nghiệm x dương phân biệt.

Với $t=1+\sqrt{3}$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đường thẳng $y=1+\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại một điểm và là điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1+\sqrt{3}$ có một nghiệm x dương.

Với $t=1-\sqrt{3}$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đường thẳng $y=1-\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1-\sqrt{3}$ có hai nghiệm x dương phân biệt.

Vậy phương trình bài ra có 5 nghiệm phân biệt dương.

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt?

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^3-3x^2+2$, ta có phương trình $t^3-3t^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=1+\sqrt{3}\\t=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Với $t=1 \Rightarrow f\left(x\right)=1$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1$ có hai nghiệm x dương phân biệt.

Với $t=1+\sqrt{3}$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đường thẳng $y=1+\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại một điểm và là điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1+\sqrt{3}$ có một nghiệm x dương.

Với $t=1-\sqrt{3}$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đường thẳng $y=1-\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1-\sqrt{3}$ có hai nghiệm x dương phân biệt.

Vậy phương trình bài ra có 5 nghiệm phân biệt dương.

Câu 6. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi;2\pi\right]$ của phương trình $f\left(\sin x\right)-1=0$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

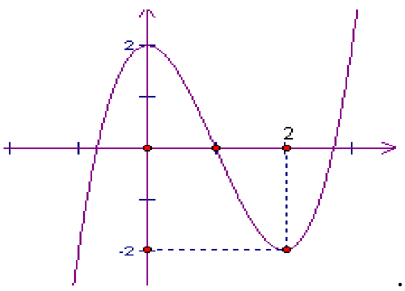
Ta có $-1\le \sin x\le 1\ \forall x$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f\left(\sin x\right)-1=0$

$\Leftrightarrow f\left(\sin x\right)=1 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi\ \ k\in Z$

Mà $x\in\left[-2\pi;2\pi\right]\Rightarrow x=-2\pi;-\pi;0;\pi;2\pi$

Vậy số nghiệm của phương trình là 5 nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



.

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là

A. 14. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0 \Leftrightarrow f\left(2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=a \text{ với } a\in(0;1) \\ 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=b \text{ với } b\in(2;3) \\ 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=c \text{ với } c\in(-1;0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2} \text{ với } a\in(0;1) & (1) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b}{2} \text{ với } b\in(2;3) & (2) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{c}{2} \text{ với } c\in(-1;0) & (3) \end{array}\right.$$

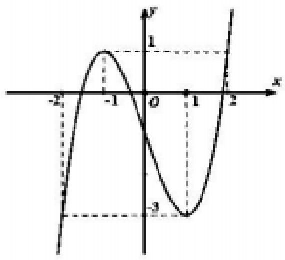
+ Xét phương ttrình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2}$ với $a\in(0;1)$. Phương trình này có 4 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b}{2}$ với $b\in(2;3)$. Phương trình vô nghiệm.

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{c}{2}$ với $c\in(-1;0)$. Phương trình có 6 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

Vậy Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là 10 nghiệm

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=x_2\in(-1;0) \\ x=x_3\in(1;2) \end{array}\right.$

Khi đó: $f\left(f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=x_1\in(-2;-1) \\ f(x)-1=x_2\in(-1;0) \\ f(x)-1=x_3\in(1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1+x_1\in(-1;0) \\ f(x)=1+x_2\in(0;1) \\ f(x)=1+x_3\in(2;3) \end{array}\right.$

+ Ta thấy hai phương trình $f(x)=1+x_1\in(-1;0)$; $f(x)=1+x_2\in(0;1)$ đều có ba nghiệm phân biệt. Phương trình $f(x)=1+x_3\in(2;3)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(f(x)-1\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình $f(\sin x)+1=0$ là

A. 1010. **B.** 2020. **C.** 1011. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1\le \sin x\le 1\ \forall x$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f(\sin x)+1=0$

$\Leftrightarrow f(\sin x)=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Mà $x\in[0;2020\pi] \Rightarrow 0\le -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\le 2020\pi$

$\Leftrightarrow 0\le -\dfrac{1}{2}+2k\le 2020$

$\Leftrightarrow 0,5\le 2k\le 2020,5$

$\Leftrightarrow 0,25\le k\le 1010,25$

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=1;2;...;1010$.

Vậy số nghiệm của phương trình là 1010 nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm đoạn $[-2\pi;2\pi]$ của phương trình $4f(\cos x)+5=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Từ $4f(\cos x)+5=0 \Rightarrow f(\cos x)=-\dfrac{5}{4}(1)$

Đặt $t=\cos x$ với $x\in[-2\pi;2\pi]$ thì $t\in[-1;1]$

$(1)\Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{5}{4}(2)$

Xét hàm số $h(x)=\cos x$; $x\in[-2\pi;2\pi]$ ta có BBT:

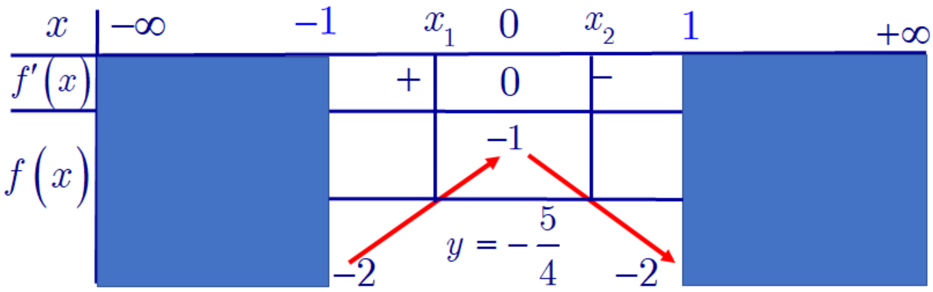
x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Với $t=-1$ thì PT có 2 nghiệm

Với $-1<t<1$ thì PT có 4 nghiệm

Với thì PT có 3 nghiệm

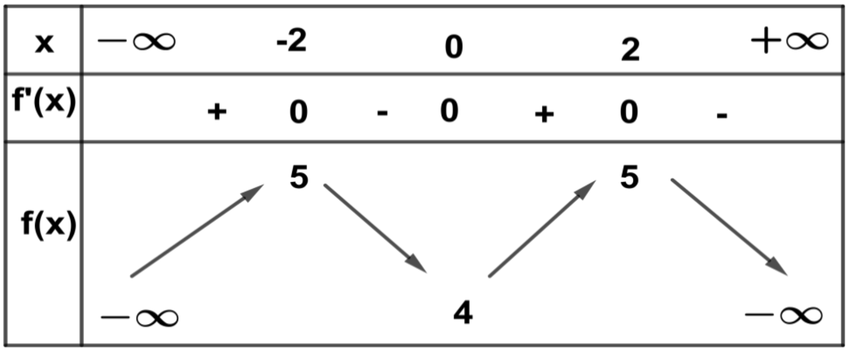
Xét $f(t)=-\frac{5}{4}(2)$ với $t\in[-1;1]$



Nhìn vào BBT PT $f(t)=-\frac{3}{2}(2)$ có hai nghiệm

Vậy tất cả có 8 nghiệm

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x)-9=0$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

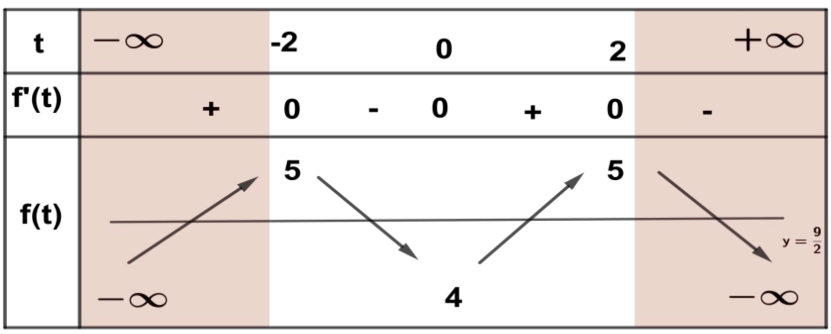
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\cos x$, $t\in[-2;2]$ thì $2f(2\cos x)-9=0$ trở thành $2f(t)-9=0\Leftrightarrow f(t)=\frac{9}{2}$ (1).

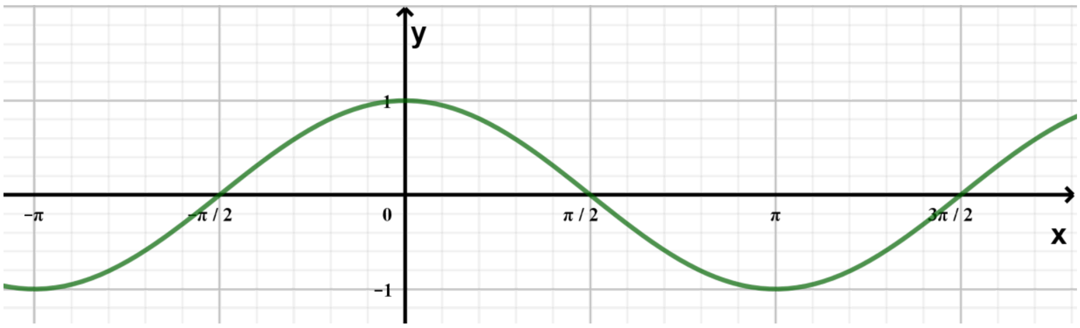
Nhận xét: Số nghiệm của phương trình là (1) số giao điểm của hai đồ thị: $(C):y=f(t)$ và đường thẳng $(d):y=\frac{9}{2}$.

Bảng biến thiên hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[-2;2]$:



Dựa vào bảng biến thiên, số nghiệm $t \in [-2;2]$ của (2) là 2 nghiệm phân biệt $t_1 \in (-2;0)$, $t_2 \in (0;2)$.

Ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$:



▪Với $t_1 \in (-2;0) \Rightarrow 2\cos x = t_1 \in (-2;0) \Rightarrow \cos x = \dfrac{t_1}{2} \in (-1;0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \dfrac{t_1}{2} \in (-1;0)$ có 3 nghiệm phân biệt: $-\pi < x_1 < -\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} < x_2 < \pi < x_3 < \dfrac{3\pi}{2}$ T (1) có 3 nghiệm $x \in \left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

▪Với $t_2 \in (0;2) \Rightarrow 2\cos x = t_2 \in (0;2) \Rightarrow \cos x = \dfrac{t_2}{2} \in (0;1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \dfrac{t_2}{2} \in (0;1)$ có 2 nghiệm phân biệt $-\dfrac{\pi}{2} < x_4 < 0 < x_5 < \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x) - 9 = 0$ là $2 + 3 = 5$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin^2 x) + 1 = 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t' = \cos x, t' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \left\{\pm\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right\}$ $\left(Do\, x \in [-\pi;2\pi]\right)$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
t	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $t \in [-1;1]$.

Ứng với mỗi $t \in (-1;0]$ cho ta 4 nghiệm x, ứng với mỗi $t \in (0;1) \cup \{-1\}$ cho ta 2 nghiệm x, ứng với $t = 1$ cho ta 1 nghiệm x. (*)

Đặt $u = t^2$ $\left(u \in [0;1]\right)$

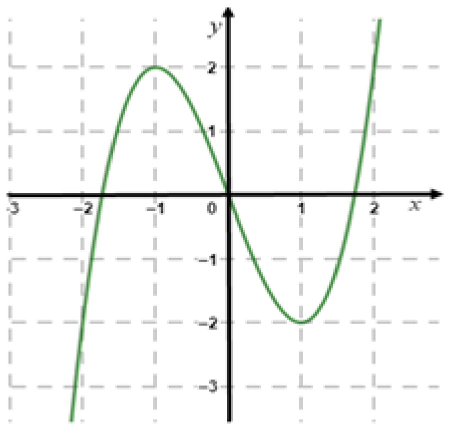
Khi đó phương trình trở thành $2f(u) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(u) = \frac{-1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên đã cho, suy ra trên đoạn $[0;1]$ thì phương trình có duy nhất 1 nghiệm là $u \in (0;1)$cho hai nghiệm $t = a \in (-1;0)$ và $t = b \in (0;1)$.

Theo (*) nghiệm $t = a \in (-1;0)$ cho 4 nghiệm x; nghiệm $t = b \in (0;1)$ cho 2 nghiệm x.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) = m$ có nghiệm là



A. $[-1;2]$. **B.** $[0;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[-2;2]$.

Lời giải

Chọn D

Vì: $x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{2|x|}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$

Từ đồ thị thấy

$x \in [-1;1] \Rightarrow f(x) \in [-2;2]$

$x \in [-2;2] \Rightarrow f(x) \in [-2;2]$

Xét phương trình

$f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) = m$. Đặt $t = \frac{2x}{x^2+1}$; $u = f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

Vì $t \in [-1;1] \Rightarrow u \in [-2;2] \Rightarrow f(u) \in [-2;2]$

Vậy để phương trình ban đầu có nghiệm thì $f(u) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$

nên $m \in [-2;2]$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình $f(\cos x)-2=0$ là:

A. 1010. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1 \le \cos x \le 1\ \forall x$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f(\cos x)-2=0$

$\Leftrightarrow f(\cos x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x=-1 & (1)\\ \cos x=1 & (2)\end{array}\right.$.

+ Phương trình (1): $\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi$. Mà $x\in[0;2020\pi] \Rightarrow x=\pi;3\pi;...;2019\pi$.

(1) có 1010 nghiệm.

+ Phương trình (2): $\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$. Mà $x\in[0;2020\pi] \Rightarrow x=0;2\pi;...;2020\pi$.

(2) có 1011 nghiệm

Vậy số nghiệm của phương trình là 2021 nghiệm.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(1-2\sin x)=f(|m|)$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lờigiải

Chọn B

Xét phương trình $f(1-2\sin x)=f(|m|)$ (1)

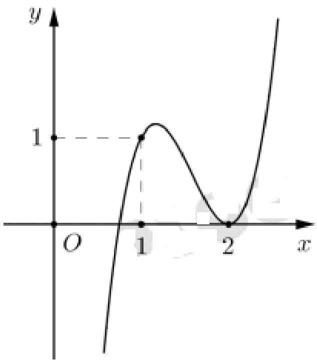
Đặt $t=1-2\sin x$ khi đó phương trình (1) trở thành $f(t)=f(|m|)$.

Do $\forall x\in\mathbb{R}: -1\le \sin x\le 1 \Rightarrow -1\le 1-2\sin x\le 3 \Rightarrow -1\le t\le 3 \Rightarrow \min\limits_{[-1;3]} f(t)=-2$, $\max\limits_{[-1;3]} f(t)=2$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm thực khi và chỉ khi $\min\limits_{[-1;3]} f(x)\le f(|m|)\le \max\limits_{[-1;3]} f(x) \Leftrightarrow -2\le f(|m|)\le 2 \Leftrightarrow -1\le |m|\le 3 \Leftrightarrow -3\le m\le 3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$. Chọn phương án **B.**

Câu 16. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Đáp án B

Dễ thấy $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số vì TXĐ: $x\ge 1$

Ta xét phương trình: $f^2(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f(x)=0 & (1)\\ f(x)=1 & (2)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng

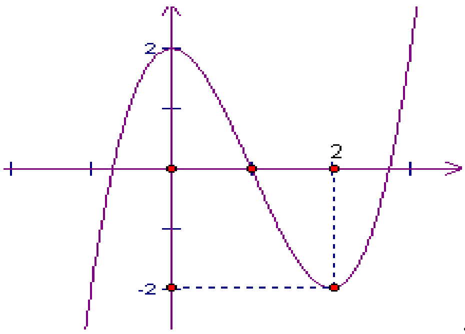
• Phương trình (1), có hai nghiệm phân biệt là $x_1<1; x_2=2$ (nghiệm kép)

• Phương trình (2), có ba nghiệm phân biệt là $x_3=1; x_4\in(1;2); x_5>2$

Do đó $f^2(x)-f(x)=(x-1)(x-2).h(x)$ suy ra $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x.h(x)}$

Mà $h(x)=0$ có 3 nghiệm lớn hơn 1 $(2;x_4;x_5)\Rightarrow$ ĐTHS $y=g(x)$ có 3 đường TCĐ.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là

A. 14. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0\Leftrightarrow f\left(2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=1$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=a \text{ với } a\in(0;1)\\ 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=b \text{ với } b\in(2;3)\\ 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=c \text{ với } c\in(-1;0)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{a}{2} \text{ với } a\in(0;1) & (1)\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{b}{2} \text{ với } b\in(2;3) & (2)\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{c}{2} \text{ với } c\in(-1;0) & (3)\end{array}\right.$$

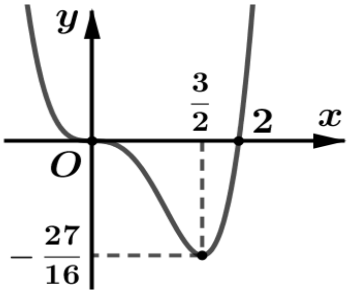
+ Xét phương ttrình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2}$ với $a\in(0;1)$. Phương trình này có 4 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b}{2}$ với $b\in(2;3)$. Phương trình vô nghiệm.

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{c}{2}$ với $c\in(-1;0)$. Phương trình có 6 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

Vậy Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là 10 nghiệm

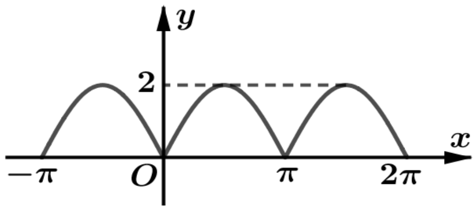
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2\sin x|)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Đặt $t=2|\sin x|$ $(0\le t\le 2)$. Ta thấy $t=0$ cho ta 4 nghiệm $x\in[-\pi;2\pi]$, mỗi $t\in(0;2)$ cho ta 6 nghiệm $x\in[-\pi;2\pi]$, $t=2$ cho ta 3 nghiệm $x\in[-\pi;2\pi]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có tối đa 2 nghiệm t (đường thẳng $y=f\left(\frac{m}{2}\right)$ cắt đồ thị tối đa hai điểm). Do đó để phương trình đã cho có đúng 12 nghiệm x phân biệt thuộc khi và chỉ khi phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 2 nghiệm t phân biệt thuộc $(0;2)$

$\longrightarrow -\frac{27}{16}<f\left(\frac{m}{2}\right)<0,$ suy ra $\begin{cases}0<\frac{m}{2}<2\\ \frac{m}{2}\neq\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\ m\neq 3\end{cases}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=\{1;2\}$. **Chọn A**

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi;2\pi]$ của phương trình $f(\sin x)-1=0$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1\le\sin x\le 1$ $\forall x$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f(\sin x)-1=0$

$\Leftrightarrow f\left(\sin x\right)=1 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$

Mà $x\in\left[-2\pi;2\pi\right] \Rightarrow x=-2\pi;-\pi;0;\pi;2\pi$

Vậy số nghiệm của phương trình là 5 nghiệm.

Câu 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-4	↗	5	↘	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $2f\left(\sin x-\cos x\right)=m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$?

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Với $x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $2f\left(t\right)=m-1 \Leftrightarrow f\left(t\right)=\frac{m-1}{2}$.

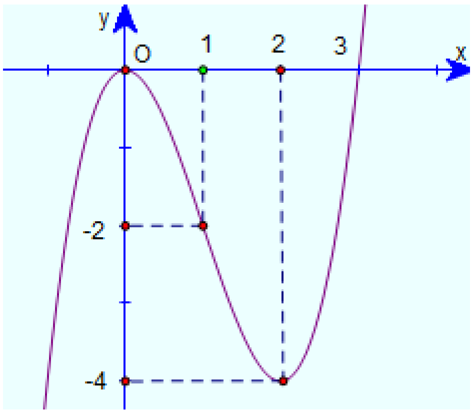
Với mỗi giá trị của $t_0\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ có duy nhất một giá trị $x_0\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ sao cho $t_0=\sqrt{2}\sin\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó phương trình $2f\left(\sin x-\cos x\right)=m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$ phương trình $f\left(t\right)=\frac{m-1}{2}$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-4<\frac{m-1}{2}<3 \Leftrightarrow -7<m<7$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $3f\left(2|\cos x|\right)+2=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2|\cos x|$. Vì $x\in[-\pi;\pi]$ nên $t\in[0;2]$.

$\Rightarrow 3f(t)+2=0 \Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{2}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t)=-\dfrac{2}{3}$ có 1 nghiệm $t_0\in(0;1)$.

Suy ra $|\cos x|=\dfrac{t_0}{2}\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

➢Với $\cos x=\dfrac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $\dfrac{-\pi}{2}<x_1<0<x_2<\dfrac{\pi}{2}$.

➢Với $\cos x=-\dfrac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $-\pi<x_3<-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}<x_4<\pi$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	5	↘	4	↗	5	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x)-9=0$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

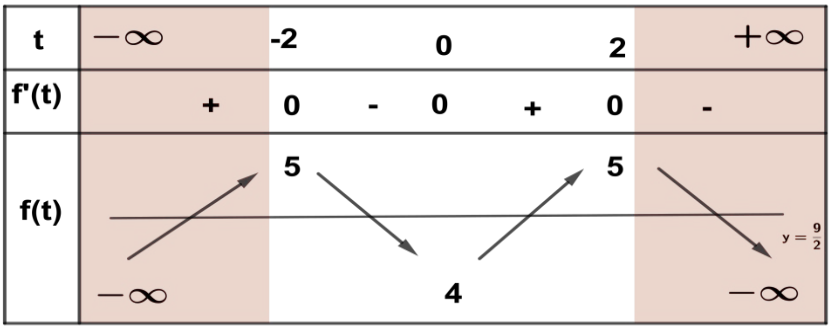
Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2\cos x$, $t\in[-2;2]$ thì $2f(2\cos x)-9=0$ trở thành $2f(t)-9=0 \Leftrightarrow f(t)=\dfrac{9}{2}$ (1).

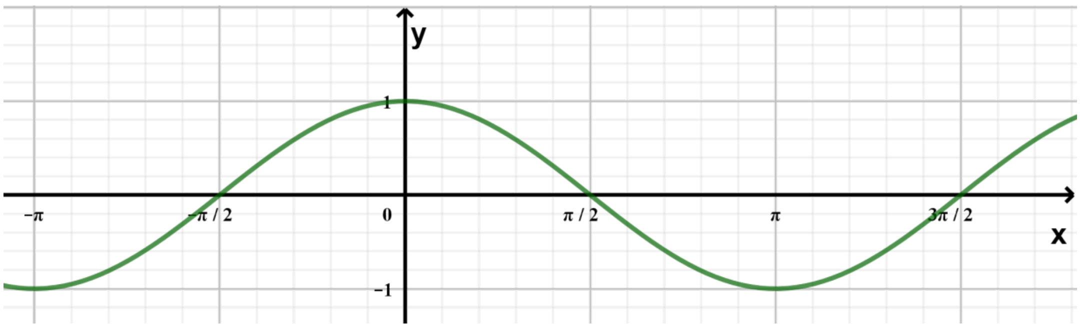
Nhận xét: Số nghiệm của phương trình là (1) số giao điểm của hai đồ thị: $(C): y = f(t)$ và đường thẳng $(d): y = \frac{9}{2}$.

Bảng biến thiên hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2;2]$:



Dựa vào bảng biến thiên, số nghiệm $t \in [-2;2]$ của (2) là 2 nghiệm phân biệt $t_1 \in (-2;0)$, $t_2 \in (0;2)$.

Ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$:



□Với $t_1 \in (-2;0) \Rightarrow 2\cos x = t_1 \in (-2;0) \Rightarrow \cos x = \frac{t_1}{2} \in (-1;0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \frac{t_1}{2} \in (-1;0)$ có

3 nghiệm phân biệt: $-\pi < x_1 < -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < x_2 < \pi < x_3 < \frac{3\pi}{2}$

(1) có 3 nghiệm $x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

□Với $t_2 \in (0;2) \Rightarrow 2\cos x = t_2 \in (0;2) \Rightarrow \cos x = \frac{t_2}{2} \in (0;1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \frac{t_2}{2} \in (0;1)$ có 2 nghiệm phân biệt $-\frac{\pi}{2} < x_4 < 0 < x_5 < \frac{\pi}{2}$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x) - 9 = 0$ là $2 + 3 = 5$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

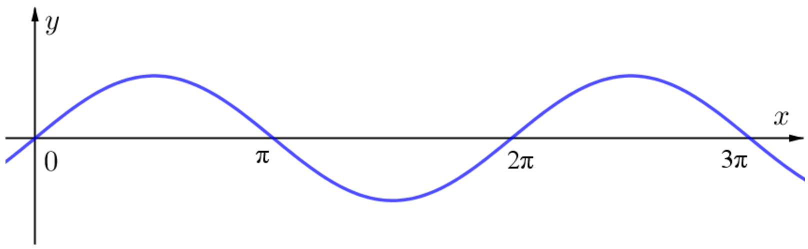
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\sin x+m\right)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$$f\left(2\sin x+m\right)+2=0 \Leftrightarrow f\left(2\sin x+m\right)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x+m=-1\\2\sin x+m=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{-m-1}{2}\\ \sin x=\dfrac{-m+1}{2}\end{array}\right..$$



Nhận xét $\dfrac{-m+1}{2}-\dfrac{-m-1}{2}=1$.

Để phương trình $f\left(2\sin x+m\right)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ thì

$$\left[\begin{array}{ll}\sin x=\dfrac{-m-1}{2} & (1)\\ \sin x=\dfrac{-m+1}{2} & (2)\end{array}\right. \text{ có 6 nghiệm phân biệt thuộc } \left[0;3\pi\right].$$

$\Leftrightarrow (1)$ có 4 nghiệm phân biệt và (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ **hoặc** (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\sin x$, để (1) có 4 nghiệm phân biệt và (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ **hoặc** (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ thì

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{-m-1}{2}=0\\ \dfrac{-m+1}{2}=1\end{cases}\\ \begin{cases}-1<\dfrac{-m-1}{2}<0\\ 0\le\dfrac{-m+1}{2}<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ \begin{cases}-1<m<1\\-1<m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<1.\end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m=0;m=-1$ để phương trình $f\left(2\sin x+m\right)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$.

Câu 24. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;2\pi\right]$ của phương trình $4f\left(\cos 2x\right)+5=0$ là

A. 12. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\cos 2x=t\in\left[-1;1\right]$.

Trước hết xét $4f\left(t\right)+5=0\Leftrightarrow f\left(t\right)=-\dfrac{5}{4}$ có hai nghiệm đối nhau là $t=\pm a\in\left(-1;1\right)$.

+ Trở về phương trình $\cos 2x=-a\in\left(-1;0\right),x\in\left[-\pi;2\pi\right]$, phương trình này có 6 nghiệm

+ Trở về phương trình $\cos 2x=a\in\left(0;1\right),x\in\left[-\pi;2\pi\right]$, phương trình này có 6 nghiệm.

Câu 25. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;2\pi\right]$ của phương trình $4f\left(\cos 2x\right)+5=0$ là

A. 12. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

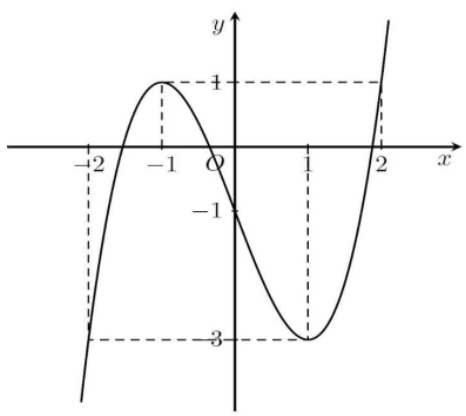
Đặt $\cos 2x=t\in\left[-1;1\right]$.

Trước hết xét $4f\left(t\right)+5=0\Leftrightarrow f\left(t\right)=-\dfrac{5}{4}$ có hai nghiệm đối nhau là $t=\pm a\in\left(-1;1\right)$.

+ Trở về phương trình $\cos 2x=-a\in\left(-1;0\right),x\in\left[-\pi;2\pi\right]$, phương trình này có 6 nghiệm

+ Trở về phương trình $\cos 2x=a\in\left(0;1\right),x\in\left[-\pi;2\pi\right]$, phương trình này có 6 nghiệm.

Câu 26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(x\right)+m\right)+1=f\left(x\right)+m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\left[-1;1\right]$

A. **1.** **B.** **2.** **C.** **3.** **D.** **4.**

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(f\left(x\right)+m\right)+1=f\left(x\right)+m \Leftrightarrow f\left(t\right)=t-1$

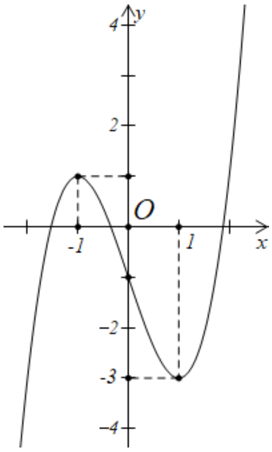
Với $t=f\left(x\right)+m$

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(t\right)=t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=-m-2 \\ f\left(x\right)=-m \\ f\left(x\right)=-m+2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị trên $\left[-1;1\right]$, phương trình $f\left(f\left(x\right)+m\right)+1=f\left(x\right)+m \Leftrightarrow f\left(t\right)=t-1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} -3\le -m-2\le 1 \\ -3\le -m\le 1 \\ -3\le -m+2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le m\le 1 \\ -1\le m\le 3 \Rightarrow m=1 \\ 1\le m\le 5 \end{cases}$$

Câu 27. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(2\sin x-1\right)\right|=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$. Tính số phần tử của tập S.



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

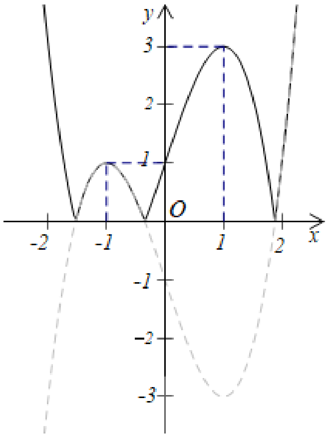
Chọn C

Xét phương trình $\left|f\left(2\sin x-1\right)\right|=m\ \ (1)$

Đặt $t=2\sin x-1$. Với $x\in\left(0;\pi\right)$ ta được $t\in\left(-1;1\right]$.

Phương trình (1) trở thành $\left|f\left(t\right)\right|=m\ \ (2)$

Từ đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra đồ thị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$



Với $x\in(-1;1]$ ta được $|f(x)|\in[0;3]$. Từ đó suy ra, để phương trình (2) có nghiệm $t\in(-1;1]$ thì $m\in[0;3]$. Do m nguyên nên $m\in\{0;1;2;3\}$.

Vậy có bốn giá trị của m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ghi chú: Dựa vào đồ thị có thể tìm được hàm số gốc $f(x)=x^3-3x-1$ rồi bấm máy tính.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $3f(2\sin x)+1=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\sin x$. Vì $x\in[-\pi;\pi]$ nên. $t\in[-2;2]$.

$\Rightarrow 3f(t)+1=0\Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{1}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t)=-\dfrac{1}{3}$ có 2 nghiệm $t_1\in(-2;0)$ và $t_2\in(0;2)$.

Suy ra $\sin x=\dfrac{t_1}{2}\in(-1;0)$ và $\sin x=\dfrac{t_2}{2}\in(0;1)$.

□Với $\sin x=\dfrac{t_1}{2}\in(-1;0)$ thì phương trình có 2 nghiệm $-\pi<x_1<x_2<0$.

□Với $\sin x=\dfrac{t_2}{2}\in(0;1)$ thì phương trình có 2 nghiệm $0<x_3<x_4<\pi$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

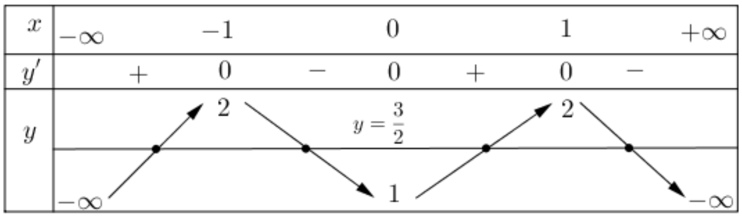
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;3\pi]$ của phương trình $2f(\cos x)-3=0$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

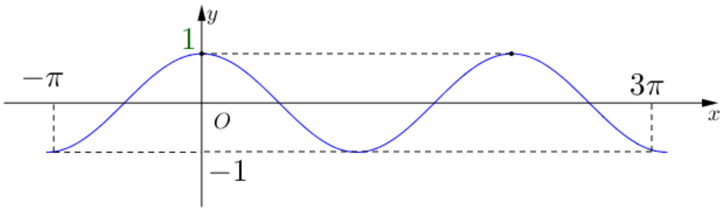
Chọn D



Ta có: $2f(\cos x)-3=0 \Leftrightarrow f(\cos x)=\dfrac{3}{2}\left[\begin{array}{lll}\cos x=a_1 & a_1\in(-\infty;-1) & (1)\\ \cos x=a_2 & a_2\in(-1;0) & (2)\\ \cos x=a_3 & a_3\in(0;1) & (3)\\ \cos x=a_4 & a_4\in(1;+\infty) & (4)\end{array}\right.$.

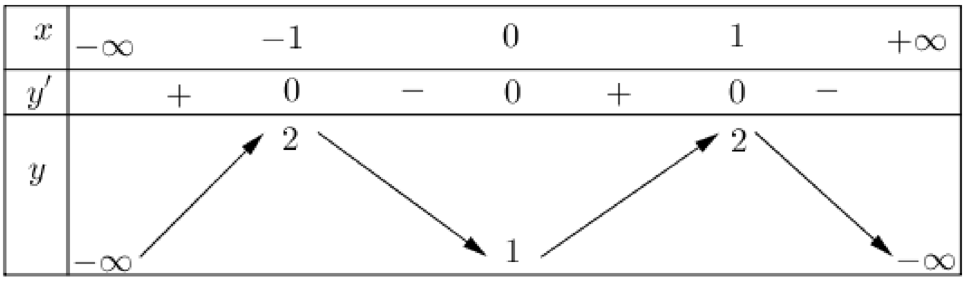
Dễ thấy các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $[-\pi;3\pi]$



Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có các nghiệm nào trùng nhau. Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;3\pi]$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

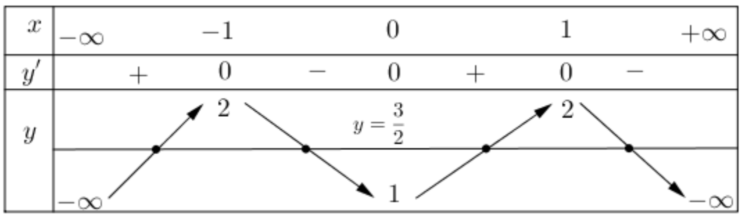


Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;3\pi]$ của phương trình $2f(\cos x)-3=0$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

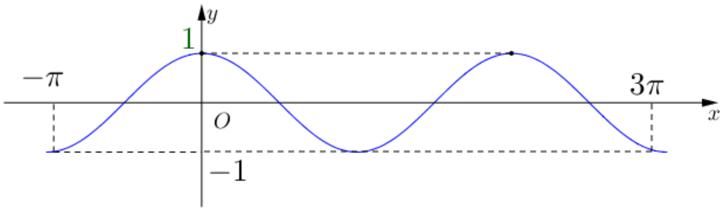
Chọn D



Ta có: $2f\left(\cos x\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(\cos x\right)=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=a_1 & a_1\in(-\infty;-1)\ (1) \\ \cos x=a_2 & a_2\in(-1;0)\ \ (2) \\ \cos x=a_3 & a_3\in(0;1)\ \ \ \ (3) \\ \cos x=a_4 & a_4\in(1;+\infty)\ (4) \end{array}\right.$.

Dễ thấy các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;3\pi\right]$



Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có các nghiệm nào trùng nhau. Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi;3\pi\right]$.

Câu 31. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	5	↘	4	↗	5	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f\left(2\cos x\right)-9=0$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

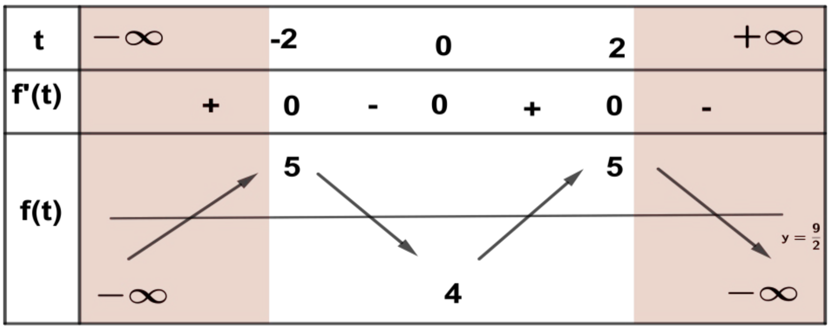
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\cos x$, $t\in\left[-2;2\right]$ thì $2f\left(2\cos x\right)-9=0$ trở thành $2f\left(t\right)-9=0 \Leftrightarrow f\left(t\right)=\dfrac{9}{2}$ (1).

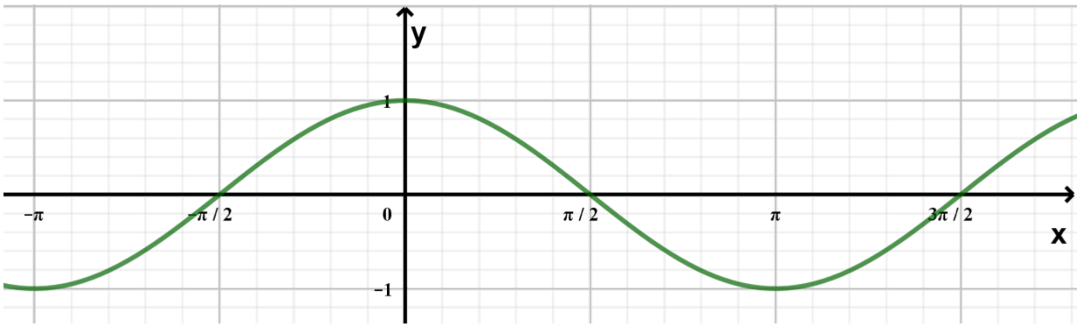
Nhận xét: Số nghiệm của phương trình là (1) số giao điểm của hai đồ thị: $(C): y=f\left(t\right)$ và đường thẳng $(d): y=\dfrac{9}{2}$.

Bảng biến thiên hàm số $y=f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$:



Dựa vào bảng biến thiên, số nghiệm $t\in[-2;2]$ của (2) là 2 nghiệm phân biệt $t_1\in(-2;0)$, $t_2\in(0;2)$.

Ta có đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$:



▪Với $t_1\in(-2;0)\Rightarrow 2\cos x=t_1\in(-2;0)\Rightarrow \cos x=\frac{t_1}{2}\in(-1;0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x=\frac{t_1}{2}\in(-1;0)$ có

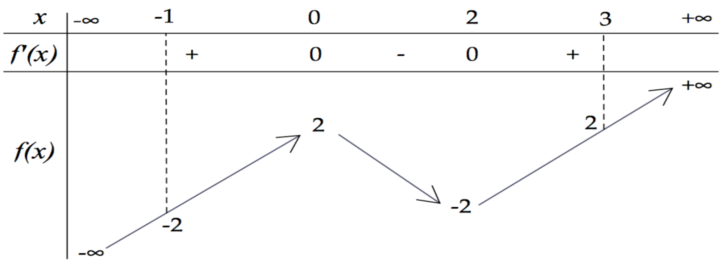
3 nghiệm phân biệt: $-\pi<x_1<-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}<x_2<\pi<x_3<\frac{3\pi}{2}$ T (1) có 3 nghiệm $x\in\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

▪Với $t_2\in(0;2)\Rightarrow 2\cos x=t_2\in(0;2)\Rightarrow \cos x=\frac{t_2}{2}\in(0;1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x=\frac{t_2}{2}\in(0;1)$ có 2 nghiệm phân biệt $-\frac{\pi}{2}<x_4<0<x_5<\frac{\pi}{2}$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x)-9=0$ là $2+3=5$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(1-2\sin x)=f(|m|)$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

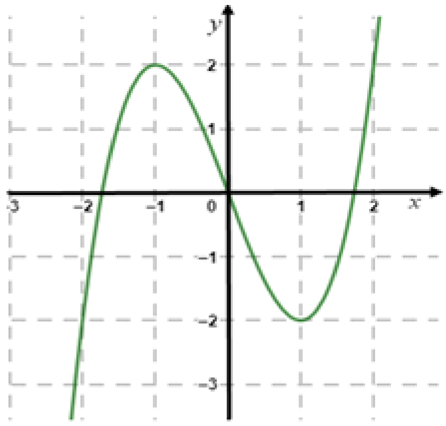
Lời giải

Chọn D

Đặt $t=1-2\sin x\in[-1;3],\forall x$ phương trình trở thành $f(t)=f(|m|)$ có nghiệm $t\in[-1;3]$.

Dựa trên bảng biến thiên để đường thẳng $y=f(|m|)$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[-1;3]$ ta phải có $-2\le f(|m|)\le 2\Leftrightarrow |m|\le 3$ Vì vậy $m\in\{-3,-2-1,0,1,2,3\}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$ có nghiệm là



A. $[-1;2]$. **B.** $[0;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[-2;2]$.

Lời giải

Chọn D

Vì: $x^2+1\ge 2|x|\Rightarrow \dfrac{2|x|}{x^2+1}\le 1\Rightarrow -1\le \dfrac{2x}{x^2+1}\le 1$

Từ đồ thị thấy

$x\in[-1;1]\Rightarrow f(x)\in[-2;2]$

$x\in[-2;2]\Rightarrow f(x)\in[-2;2]$

Xét phương trình

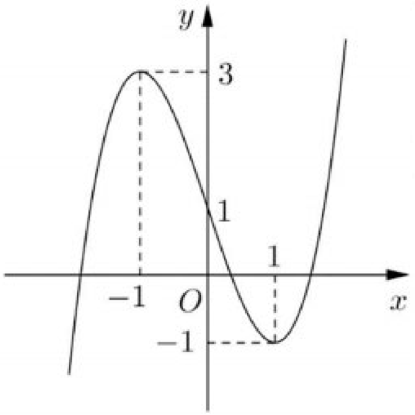
$f\left(f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$. Đặt $t=\dfrac{2x}{x^2+1}$; $u=f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

Vì $t\in[-1;1]\Rightarrow u\in[-2;2]\Rightarrow f(u)\in[-2;2]$

Vậy để phương trình ban đầu có nghiệm thì $f(u)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$

nên $m\in[-2;2]$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m để phương trình $f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -5. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right),m$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có nghiệm $m\geq 2$.

Xét $m\leq 1$ *(dựa vào đồ thị đề cho).*

Suy ra hàm số $0<m<1$ nghịch biến trên khoảng $m>2$. Hay $m<1$.

Vậy $m>1$.

Tổng các phần tử $\left|f\left(x\right)\right|=m$ bằng $f\left(x\right)=m$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f\left(x\right)>2^x+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;1\right)$ khi và chỉ khi:

A. $m>f\left(1\right)-2$. **B.** $m\leq f\left(1\right)-2$. **C.** $m\leq f\left(-1\right)-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m>f\left(-1\right)-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f\left(x\right)>2^x+m$, $\forall x\in\left(-1;1\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-2^x>m\Leftrightarrow f\left(x\right)-2^x>m$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2^x$ trên $\left(-1;1\right)$.

Ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-2^x.\ln 2$.

Ta thấy: $\forall x\in\left(-1;1\right)$ thì $f'\left(x\right)\leq 0$ và $2^x.\ln 2>0$.

Do đó $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-2^x.\ln 2<0$, $\forall x\in\left(-1;1\right)$.

Bảng biến thiên

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có: $m \le g(1) \Leftrightarrow m \le f(1) - 2$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > 2^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m > f(1) - 2$. **B.** $m \le f(1) - 2$. **C.** $m \le f(-1) - \frac{1}{2}$. **D.** $m > f(-1) - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f(x) > 2^x + m$, $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow f(x) - 2^x > m \Leftrightarrow f(x) - 2^x > m$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2^x$ trên $(-1;1)$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2^x.\ln 2$.

Ta thấy: $\forall x \in (-1;1)$ thì $f'(x) \le 0$ và $2^x.\ln 2 > 0$.

Do đó $g'(x) = f'(x) - 2^x.\ln 2 < 0$, $\forall x \in (-1;1)$.

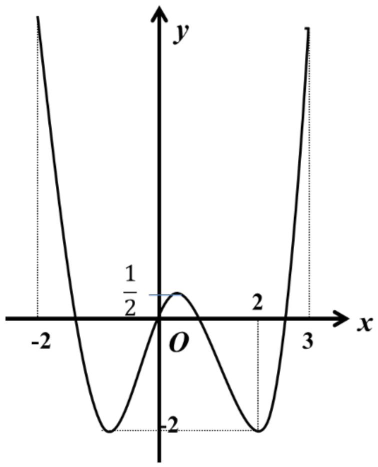
Bảng biến thiên

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có: $m \le g(1) \Leftrightarrow m \le f(1) - 2$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x^3 - 3x) = -1$ thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 7.



Lời giải

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x,\ x \in [-1;2]$

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;2]$

x	-1		1		2
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

$t \in [-2;2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x) = -1$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		x
y'	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$?

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

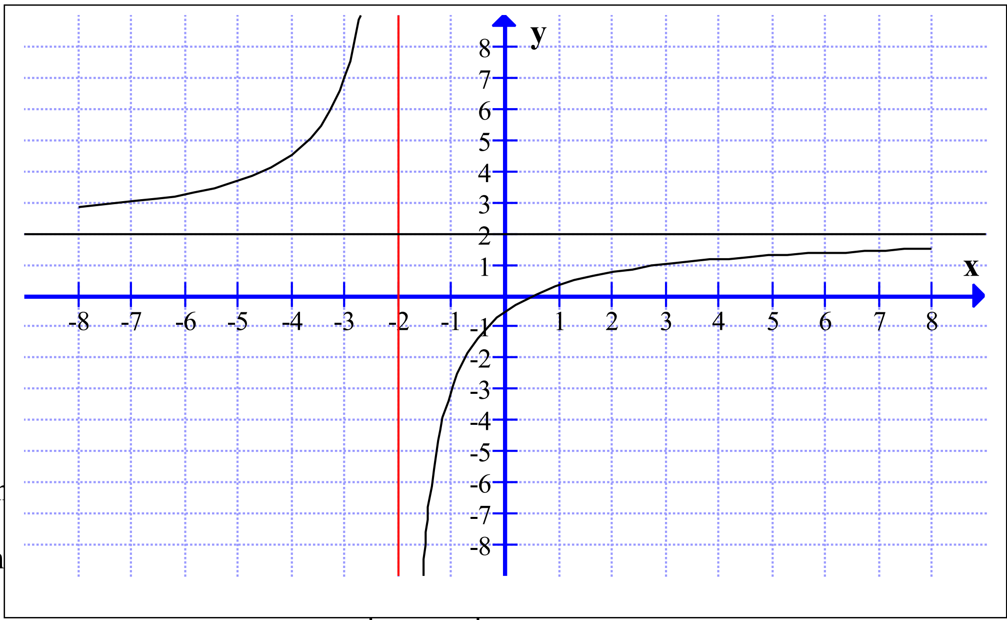
Xét hàm số: $y = f(x^2 + 2x)$ trên R. Ta có: $y' = (2x+2) f'(x^2 + 2x)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f'(x)$ ta được $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 + 2x = a \\ x^2 + 2x = b \\ x^2 + 2x = c \\ x^2 + 2x = d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ (x+1)^2 = a + 1\ (1) \\ (x+1)^2 = b + 1\ (2) \\ (x+1)^2 = c + 1\ (3) \\ (x+1)^2 = d + 1\ (4) \end{array}\right.$, trong đó $a < -1 < b < 0 < c < 1 < d$.

Do $a<-1<b<0<c<1<d$ nên $\begin{cases} a+1<0 \\ b+1<0 \\ c+1<0 \\ d+1<0 \end{cases}$. Khi đó, phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình $(2),(3),(4)$ mỗi phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt và khác nhau, cùng khác -1.

$\Rightarrow PT\ y'=0$ có 7 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trên đoạn $[0;\pi]$



A. $-\dfrac{1}{3}\le$ ... $\le m\le\dfrac{1}{3}$.

Chọn C

Đặt t=sin

Ta có ph ... thẳng y=m với $t\in[0;1]$ thì (C) cắt (d) khi và chỉ khi $-\dfrac{1}{2}\le m\le\dfrac{1}{3}$

Mặt khác, để phương trình $\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}=m$ có hai nghiệm phân biệt thì $0\le t<1$

Suy ra $-\dfrac{1}{2}\le m<\dfrac{1}{3}$. Chọn C

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có 6 nghiệm phân biệt là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1				$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$			$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f(x)\right|=m$ chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ và đường thẳng có phương trình $y=m$.

Từ bảng biến thiên trên ta suy ra đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $2<m<5$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{3;4\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f(x-1)\right|=2$ là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số đã cho ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x-1)\right|$ như sau :

x	$-\infty$		x_1+1		-1		x_2+1		4		x_3+1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $\left|f(x-1)\right|=2$ có 5 nghiệm.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

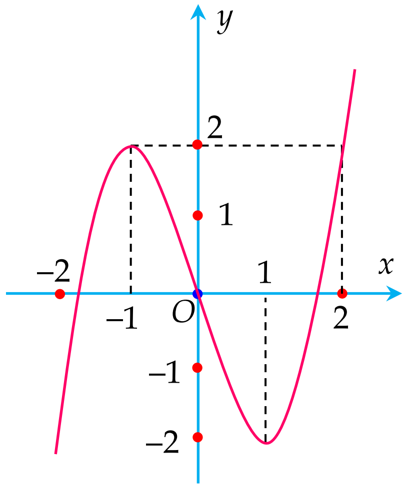
Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$; $y'=\dfrac{m^2-4}{(m-x)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ m \notin (-3;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m=1$. Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.



A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

+) Đặt $t=\cos x$, do $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nên suy ra $t \in (-1;0]$.

Trên khoảng $(-1;0)$ hàm số nghịch biến nên suy ra

Với $t \in (-1;0]$ thì $f(0) \le f(t) < f(-1)$ hay $0 \le f(t) < 2$.

+) Đặt $u=\sqrt{2f(\cos x)}$ thì $u=\sqrt{2f(t)}, u \in [0;2)$. Khi đó bài toán trở thành:

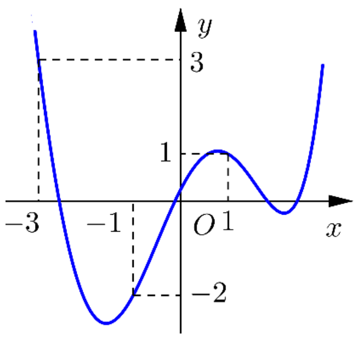
Tìm m để phương trình $f(u)=m$ có nghiệm $u \in [0;2)$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng với $u \in [0;2)$ thì $f(u) \in [-2;2) \Rightarrow -2 \le m < 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0;1\}$. Vậy có 4 giá trị của m.

Tổng các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là -2.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2020$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



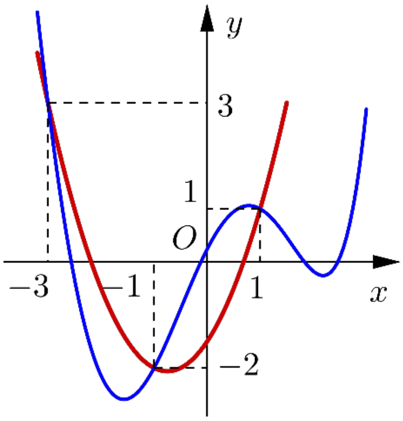
A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=f'(x)-\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$. Ta xét thêm đồ thị hàm số $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$



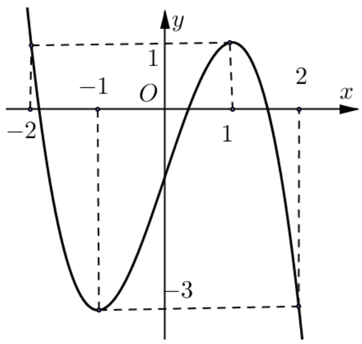
Dựa nào đồ thị $\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	–∞–3–11+∞
$g'(x)$	+0–0+0–
$g(x)$	0

Từ bảng biến thiên của $g(x)$, ta chọn đáp án **C.**

Câu 45. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)-m)=1$ có 3 nghiệm. Tìm số phần tử của tập S.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: C

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$f(f(x)-m)=1\ (*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-m=-2\\f(x)-m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=m-2 & (1)\\f(x)=m+1 & (2)\end{array}\right.$

(1) và (2) là các phương trình bậc 3 nên chúng có ít nhất 1 nghiệm.

Do đó phương trình có 3 nghiệm khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm và (2) có 1 nghiệm hoặc (1) có 1 nghiệm và (2) có 2 nghiệm.

Phương trình (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=1 \\ m-2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Phương trình (2) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=1 \\ m+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-4 \end{array}\right.$

TH1: $m=3$: Phương trình (1) có 2 nghiệm, phương trình (2) là $f(x)=4$ có 1 nghiệm (thỏa mãn).

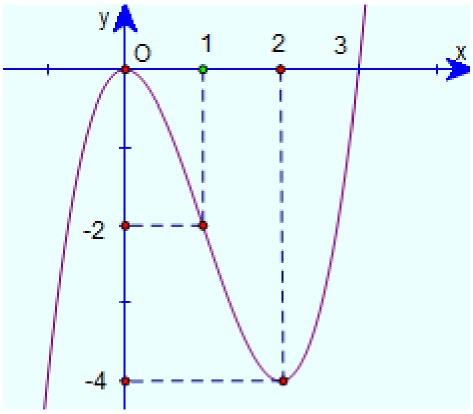
TH2: $m=-1$: Phương trình (1) có 2 nghiệm, phương trình (2) là $f(x)=0$ có 3 nghiệm (không thỏa mãn).

TH3: $m=0$: Phương trình (2) có 2 nghiệm, phương trình (1) là $f(x)=-2$ có 3 nghiệm (không thỏa mãn).

TH4: $m=-4$: Phương trình (2) có 2 nghiệm, phương trình (2) là $f(x)=-6$ có 1 nghiệm (thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 46. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ của phương trình $3f\left(2\left|\cos x\right|\right)+2=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\left|\cos x\right|$. Vì $x\in\left[-\pi;\pi\right]$ nên $t\in\left[0;2\right]$.

$\Rightarrow 3f\left(t\right)+2=0 \Leftrightarrow f\left(t\right)=-\dfrac{2}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f\left(t\right)=-\dfrac{2}{3}$ có 1 nghiệm $t_0\in\left(0;1\right)$.

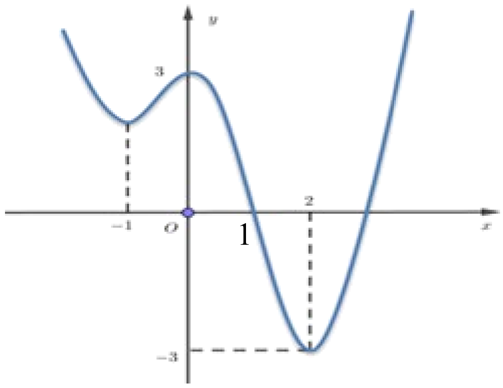
Suy ra $\left|\cos x\right|=\dfrac{t_0}{2}\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

➢Với $\cos x=\dfrac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $\dfrac{-\pi}{2}<x_1<0<x_2<\dfrac{\pi}{2}$.

➢Với $\cos x=-\dfrac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $-\pi<x_3<-\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}<x_4<\pi$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 2)$.



A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$ **C.** $(0;3)$. **D.** $[-3;0]$.

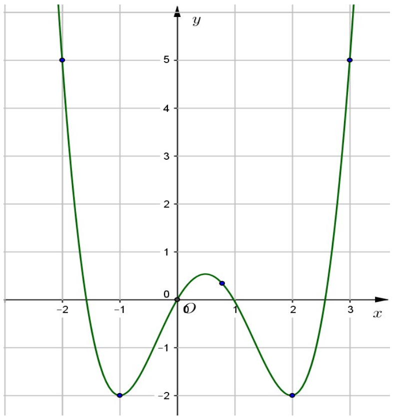
Lời giải

Chọn A

Đặt $t = e^x$. Với $x \in (0;\ln 2) \Rightarrow t \in (1;2)$

Phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 2)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;2) \Leftrightarrow -3 < m < 0$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ là



A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x, x \in [-1;2]$, ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

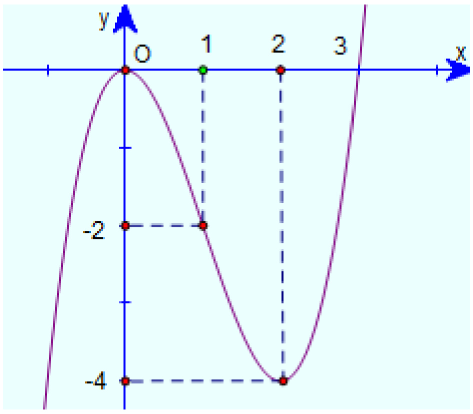
BBT của hàm số g(x)

x	-1		1		2
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Từ BBT ta thấy: Với $t = -2$ có 1 $x \in [-1;2]$, với mỗi $t \in (-2;2]$ cho 2 giá trị $x \in [-1;2]$

PT $f\left(x^3-3x\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$ khi và chỉ khi pt $f(x)=m$ có 1 nghiệm thuộc $\left(-2;2\right]$. Dựa vào đồ thị hàm số y = f(t) và m nguyên, ta có $m\in\{1;2;3;4\}$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 49. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ của phương trình $3f\left(2\left|\cos x\right|\right)+2=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\left|\cos x\right|$. Vì $x\in\left[-\pi;\pi\right]$ nên $t\in\left[0;2\right]$.

$\Rightarrow 3f\left(t\right)+2=0\Leftrightarrow f\left(t\right)=-\dfrac{2}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f\left(t\right)=-\dfrac{2}{3}$ có 1 nghiệm $t_0\in\left(0;1\right)$.

Suy ra $\left|\cos x\right|=\dfrac{t_0}{2}\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

➢Với $\cos x=\dfrac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $\dfrac{-\pi}{2}<x_1<0<x_2<\dfrac{\pi}{2}$.

➢Với $\cos x=-\dfrac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $-\pi<x_3<-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}<x_4<\pi$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

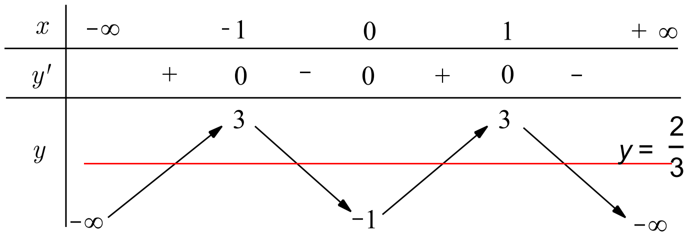
Số nghiệm của phương trình $3f\left(\cos x\right)-2=0$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. 2 **B.** 0 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

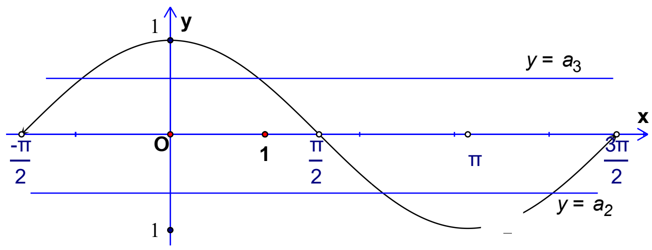
Ta có $3f\left(\cos x\right)-2=0\Leftrightarrow f\left(\cos x\right)=\dfrac{2}{3}$



Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left[\begin{array}{l}\cos x=a_1\in(-\infty;-1)\\ \cos x=a_2\in(-1;0)\\ \cos x=a_3\in(0;1)\\ \cos x=a_4\in(1;+\infty)\end{array}\right.$

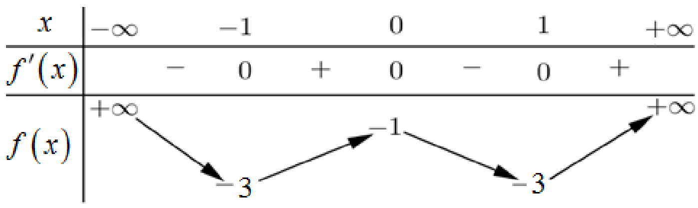
Phương trình $\cos x=a_1$; $\cos x=a_4$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$



Ta có phương trình $\cos x=a_2$ có hai nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$; phương trình $\cos x=a_3$ có hai nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ và các nghiệm không trùng nhau nên phương trình $3f(\cos x)-2=0$ có 4 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(\cos x)+5=0$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\cos x=t\in[-1;1]$.

Ta được phương trình: $2f(t)+5=0\Leftrightarrow f(t)=-\frac{5}{2}$ có hai nghiệm đối nhau là $t=\pm a$ với $a\in(0;1)$.

+ Phương trình $\cos x=-a\in(-1;0), x\in\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$, phương trình này có 4 nghiệm.

+ Trở về phương trình $\cos x=a\in(0;1), x\in\left[0;\frac{7\pi}{2}\right]$, phương trình này có 3 nghiệm.

Vậy có 7 nghiệm.

Câu 52. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	5	$\nearrow$	13	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f\left(\cos x\right)=\dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$.

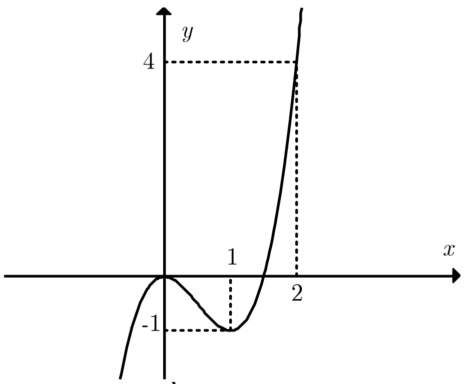
Phương trình $f\left(\cos x\right)=\dfrac{13}{3}$ trở thành $f\left(t\right)=\dfrac{13}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f\left(t\right)=\dfrac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t\in\left(0;1\right)$

Với một nghiệm $t\in\left(0;1\right)$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x=t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f\left(\cos x\right)=\dfrac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 53. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2$, có đồ thị như hình vẽ.



Sử dụng đồ thị đã cho tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $16\left|x\right|^3-12x^2\left(x^2+1\right)=m\left(x^2+1\right)^3$ có nghiệm.

A. $\forall m\in\mathbb{R}$. **B.** $-1\le m\le 4$.. **C.** $-1\le m\le 0$.. **D.** $1\le m\le 4$..

Lời giải

Chọn C

Hướng dẫn giải:

Phương trình $16\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|^3-12\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2=m\longleftrightarrow 2\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|^3-3\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2=m$.

Đặt $t=\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\geq 0$. Ta có $x^2+1\geq 2x\longrightarrow t=\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leq 1$. Do đó $0\leq t\leq 1$.

Phương trình trở thành $2t^3-3t^2=m\quad (*)$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2$ (chỉ xét trong phần $x\in[0;1]$) và đường thẳng $y=m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]\longleftrightarrow -1\leq m\leq 0$.

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $3f(\cos 2x)-3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $3f(\cos 2x)-3=0\Leftrightarrow f(\cos 2x)=1(*)$ có nghiệm trên $[-\pi;2\pi]\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(\cos 2x)$ tại các điểm trên $[-\pi;2\pi]$

Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow x\in[-\pi;2\pi]\Rightarrow 2x\in[-2\pi;4\pi]\Rightarrow t\in[-1;1]\Rightarrow f(t)\in[0;1]$

Theo BBT ta có:

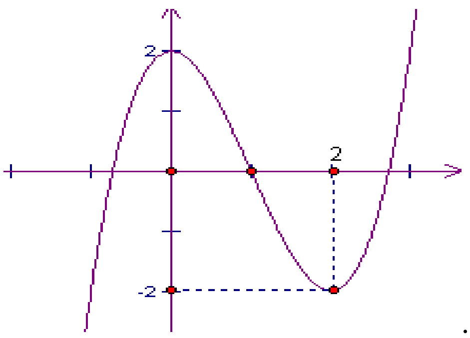
đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại 1 điểm

Ta có $(*)\Leftrightarrow \cos 2x=0$

Xét trên đường tròn lượng giác ta thấy phương trình $\cos 2x=0$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $[-\pi;2\pi]$,

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là

A. 14. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0\Leftrightarrow f\left(2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=a \text{ với } a\in(0;1) \\ 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=b \text{ với } b\in(2;3) \\ 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=c \text{ với } c\in(-1;0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2} \text{ với } a\in(0;1) & (1) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b}{2} \text{ với } b\in(2;3) & (2) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{c}{2} \text{ với } c\in(-1;0) & (3) \end{array}\right.$$

+ Xét phương ttrình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2}$ với $a\in(0;1)$. Phương trình này có 4 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b}{2}$ với $b\in(2;3)$. Phương trình vô nghiệm.

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{c}{2}$ với $c\in(-1;0)$. Phương trình có 6 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

Vậy Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là 10 nghiệm.

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Phương trình $f\left(4x-x^2\right)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(4x-x^2\right)-2=0 \Rightarrow f\left(4x-x^2\right)=2$

Số nghiệm của phương trình trên bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $\begin{cases} y=f\left(4x-x^2\right) \\ y=2 \end{cases}$.

Xét $y=f\left(4x-x^2\right)=g(x)$.

$$g'(x)=0 \Rightarrow \left[f\left(4x-x^2\right)\right]'=0 \Leftrightarrow \left(4x-x^2\right)' f'\left(4x-x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (4-2x)f'\left(4x-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-2x=0 \\ 4x-x^2=0 \\ 4x-x^2=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(nghiem\ boi\ le) \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt nên phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm $x\in[1;2]$ biết $f(x)=x^5+3x^3-4m$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt[3]{f(x)+m}\to t^3=f(x)+m$. Ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ t\ =f(x)+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t)=x^3-m \\ f(x)=t^3-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t)+t^3=f(x)+x^3 (*) \\ f(x)\quad =t^3-m \end{cases}.$$

Vì $f(x)=x^5+3x^3-4m, f'(x)=5x^4+9x^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $h(x)=f(x)+x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó: $(*)\Leftrightarrow x=t$.

Khi đó ta được: $f(x)=x^3-m=x^5+3x^3-4m\Leftrightarrow x^5+2x^3=3m\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{3}x^5+\frac{2}{3}x^3=m(**)$.

Dễ thấy $g(x)=\frac{1}{3}x^5+\frac{2}{3}x^3$ đồng biến trên $[1;2]$ nên phương trình (**) có nghiệm trên đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi: $g(1)\leq m\leq g(2)\Leftrightarrow 1\leq m\leq 16$.

Vì m thuộc số nguyên nên có 16 số thỏa mãn bài toán.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $2f(x)-3=0$ là?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

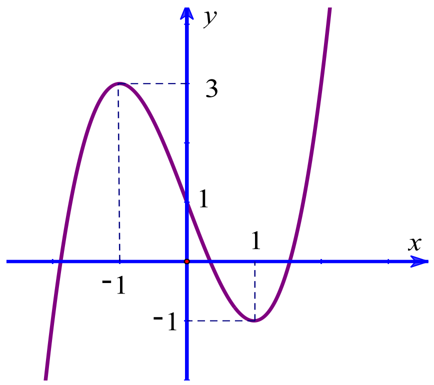
Lời giải

Chọn A

Đặt $\cos x=t\in[-1;1]$

$pt\Leftrightarrow f(t)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_1\in(-1;0) \\ t=t_2\in(0;1) \end{array}\right.$ suy ra phương trình có 4 nghiệm thỏa mãn

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x)=-2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $(-1;1]$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Đáp án: B

Đặt $t=\cos x$ vì hàm số $t=\cos x$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $0<t<1$ phương trình đã cho trở thành $f(t)=-2m+1$, $t\in(0;1)$. Để phương trình có nghiệm thì đồ thị hàm số $y=f(t), t\in(0;1)$ và đường $y=-2m+1$ phải có điểm chung. Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có $-1<-2m+1<1 \Leftrightarrow 0<m<1$

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình $f(\cos x)=-2$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị ta xét phương trình $f(x)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Nên từ đó ta có :

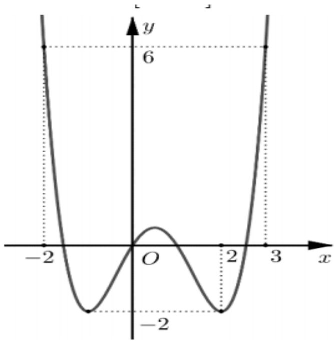
$f(\cos x)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \cos x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$

Để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ $\Rightarrow 0\le k\pi\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le k\le 2$

mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;2\}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm thuộc khoảng $[0;2\pi]$.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 3 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^3 - 3x$, với $x \in [-1;2]$ ta có bảng biến thiên

x	-1		1		2
t'		$-$	0	$+$	
t	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Với $t \in (-2;2]$ thì có 2 nghiệm $x \in [-1;2]$

Để phương trình có 6 nghiệm thì phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm $t \in (-2;2]$

Dựa vao đồ thị ta có $m = 0; m = -1$

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f (x)	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $3f(\sin 2x) - 5 = 0$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải:

Đặt $t = \sin 2x$. Khi đó: $3f(\sin 2x) - 5 = 0$ trở thành $3f(t) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{5}{3}(1)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = a \in (-\infty;-1) \\ t_2 = b \in (-1;0) \\ t_3 = c \in (0;1) \\ t_4 = d \in (1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = a \in (-\infty;-1) \quad (1') \\ \sin 2x = b \in (-1;0) \quad (2') \\ \sin 2x = c \in (0;1) \quad (3') \\ \sin 2x = d \in (1;+\infty) \quad (4') \end{array}\right.$$

Ta thấy:

+) (1’) vô nghiệm.

+) Với $x \in [-\pi; 2\pi]$ thì (2') có 6 nghiệm..

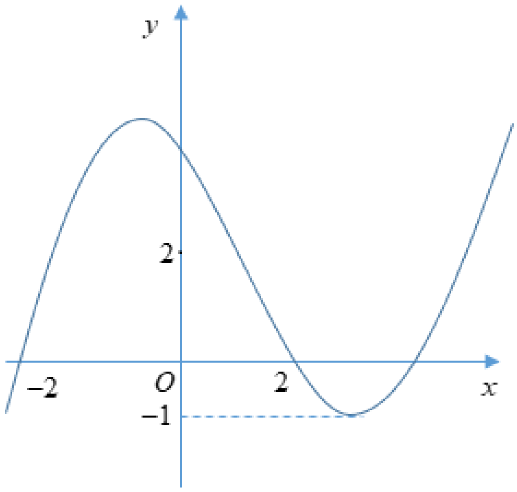
+) Với $x \in [-\pi; 2\pi]$ thì (3') có 6 nghiệm..

+) (4') vô nghiệm.

Vậy, với $x \in [-\pi; 2\pi]$ thì phương trình $3f(\sin 2x) - 5 = 0$ có tất cả 12 nghiệm.

Chọn C

Câu 63. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau



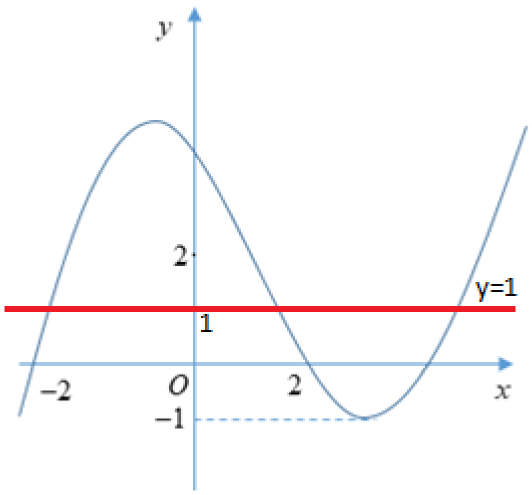
Số nghiệm của phương trình $f(|2\cos x|) = 1$ trong khoảng $x \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2|\cos x|, t \in [0; 2]$, ta có phương trình $f(t) = 1$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có phương trình $f(t) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt t_1, t_2, t_3 thỏa mãn $-2 < t_1 < 0 < t_2 < 2 < t_3$ nhưng chỉ có một giá trị t_2 thỏa mãn.

Vậy $|\cos x| = \dfrac{t_2}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = \dfrac{t_2}{2} \in (0;1) & (1) \\ \cos x = -\dfrac{t_2}{2} \in (-1;0) & (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Suy ra phương trình $f\left(|2\cos x|\right) = 1$ có 3 nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{\pi}{2};4\pi\right]$ của phương trình $2f(\cos x + 1) - 5 = 0$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\cos x + 1 = t,\ t \in [0;2]$. Phương trình trở thành

$2f(t) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1,\ t_1 < 0 \\ t = t_2,\ 0 < t_2 < 1 \text{ (Từ bảng biến thiên)} \\ t = t_3,\ t_3 > 2 \end{array}\right.$

Với $t = t_1,\ t_1 < 0$ (loại vì $t \notin [0;2]$)

Với $t = t_3,\ t_3 > 2$ (loại vì $t \notin [0;2]$)

Với $t = t_2 \Leftrightarrow \cos x + 1 = t_2 \Leftrightarrow \cos x = t_2 - 1 \in (-1;0)$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình $f(\cos x) - 2 = 0$ là:

A. 1010. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1 \le cosx \le 1\ \forall x$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f\left(\cos x\right)-2=0$

$\Leftrightarrow f\left(\cos x\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x=-1 & (1)\\ \cos x=1 & (2)\end{array}\right.$.

+ Phương trình (1): $\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi$. Mà $x\in[0;2020\pi]\Rightarrow x=\pi;3\pi;...;2019\pi$.

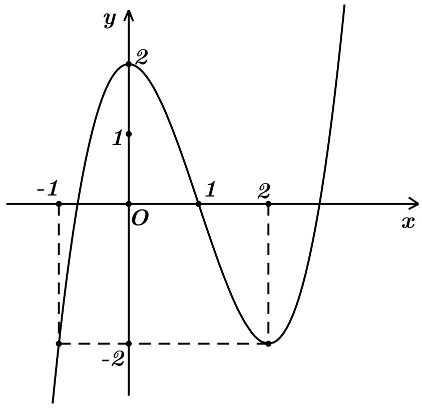
(1) có 1010 nghiệm.

+ Phương trình (2): $\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$. Mà $x\in[0;2020\pi]\Rightarrow x=0;2\pi;...;2020\pi$.

(2) có 1011 nghiệm

Vậy số nghiệm của phương trình là 2021 nghiệm.

Câu 66. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



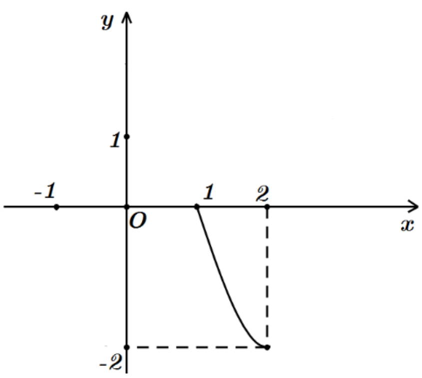
Tập hợp tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right)$ là

A. $(-2;0]$. **B.** $(0;2]$. **C.** $[-2;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

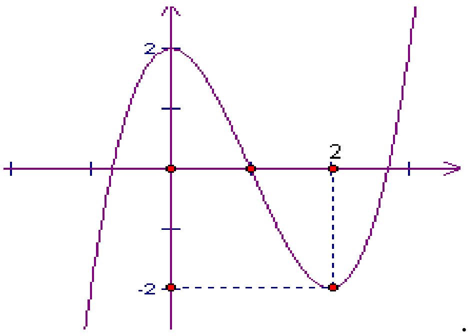
Đặt $2\sin x+1=t$. Khi $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right)$ thì $t\in[1;2)$. Bài toán trở thành tìm điều kiện của m để phương trình $f\left(t\right)=m$ có nghiệm trên nửa khoảng $[1;2)$. Từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $f\left(t\right)$ trên $[1;2)$ như sau:



Dựa vào đồ thị: Phương trình $f\left(t\right)=m$ có nghiệm trên $[1;2)$ khi và chỉ khi $-2<m\le 0$.

Vậy tập hợp tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $f(2\sin x+1)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{6}\right)$ là $(-2;0]$.

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là

A. 14. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0 \Leftrightarrow f\left(2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=a \text{ với } a\in(0;1) \\ 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=b \text{ với } b\in(2;3) \\ 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=c \text{ với } c\in(-1;0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2} \text{ với } a\in(0;1) & (1) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b}{2} \text{ với } b\in(2;3) & (2) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{c}{2} \text{ với } c\in(-1;0) & (3) \end{array}\right.$$

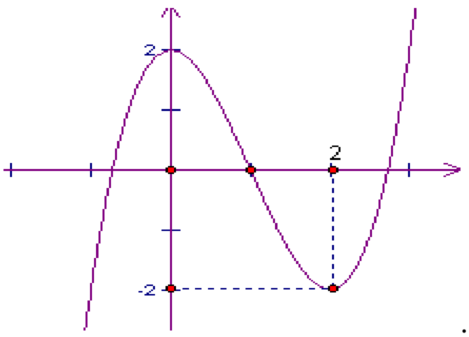
+ Xét phương ttrình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2}$ với $a\in(0;1)$. Phương trình này có 4 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b}{2}$ với $b\in(2;3)$. Phương trình vô nghiệm.

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{c}{2}$ với $c\in(-1;0)$. Phương trình có 6 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

Vậy Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là 10 nghiệm

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là

A. 14. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0 \Leftrightarrow f\left(2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=a \text{ với } a\in(0;1) \\ 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=b \text{ với } b\in(2;3) \\ 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=c \text{ với } c\in(-1;0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{a}{2} \text{ với } a\in(0;1) & (1) \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{b}{2} \text{ với } b\in(2;3) & (2) \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{c}{2} \text{ với } c\in(-1;0) & (3) \end{array}\right.$$

+ Xét phương ttrình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{a}{2}$ với $a\in(0;1)$. Phương trình này có 4 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{b}{2}$ với $b\in(2;3)$. Phương trình vô nghiệm.

+ Xét phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{c}{2}$ với $c\in(-1;0)$. Phương trình có 6 nghiệm thuộc $[-\pi;4\pi]$

Vậy Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;4\pi]$ của phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-1=0$ là 10 nghiệm

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $4f(\cos 2x)+5=0$ là

A. 12. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\cos 2x=t\in[-1;1]$. Trước hết xét $4f(t)+5=0 \Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{5}{4}$ có hai nghiệm đối nhau là $t=\pm a\in(-1;1)$.

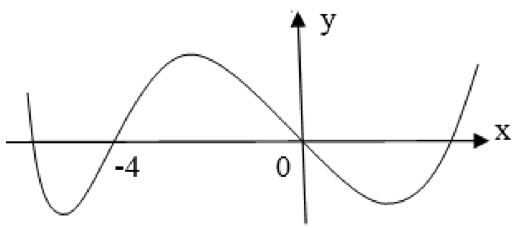
+ Phương trình $\cos 2x=-a\in(-1;0), x\in[-\pi;2\pi]$, phương trình này có 6 nghiệm.

+ Phương trình $\cos 2x=a\in(0;1), x\in[-\pi;2\pi]$, phương trình này có 6 nghiệm.

(Vẽ đồ thị hàm số $y=\cos 2x$ trên đoạn $[-\pi;2\pi]$ các nghiệm này phân biệt).

(Các em có thể lấy $a=\pm\dfrac{1}{2}$ để thử).

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình $f(\sin x)+1=0$ là

A. 1010. **B.** 2020. **C.** 1011. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \le \sin x \le 1\ \forall x$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f(\sin x)+1=0$

$\Leftrightarrow f(\sin x)=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Mà $x\in[0;2020\pi] \Rightarrow 0 \le -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \le 2020\pi$

$\Leftrightarrow 0 \le -\dfrac{1}{2}+2k \le 2020$

$\Leftrightarrow 0,5 \le 2k \le 2020,5$

$\Leftrightarrow 0,25 \le k \le 1010,25$

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=1;2;...;1010$.

Vậy số nghiệm của phương trình là 1010 nghiệm.

Câu 71. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+4m-4$ (m là tham số thực). Xác định m để hàm số đã cho có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=5$. **D.** $m=7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=4x^3-4mx$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị khi $m>0$.

Tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;4m-4)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+4m-4\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2+4m-4\right)$.

Tam giác ABC cân tại $A(0;4m-4)$ nên

$S_{ABC}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}d(A,BC).BC=1 \Leftrightarrow d(A,BC).BC=2$

$BC:\ y=-m^2+4m-4$.

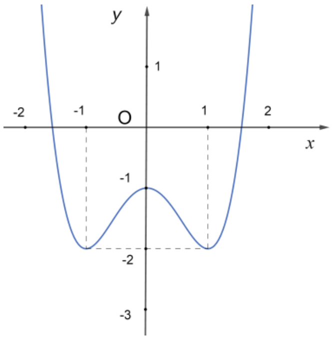
$d(A,BC)=\left|m^2\right|=m^2$.

$\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{m};0\right) \Rightarrow BC=2\sqrt{m}$

$d(A,BC).BC=2 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m}=1 \Leftrightarrow m=1$

Kết hợp với điều kiện $m>0$ ta có $m=1$.

Câu 72. Cho hàm số $f(x)=a.x^4+b.x^2+c$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)+1\right)=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

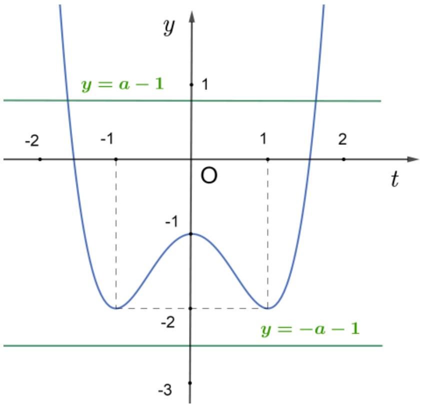
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x,\ t\in[-1;1]\ \left(do\ x\in\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ thì PT $f\left(f\left(\cos x\right)+1\right)=0$ trở thành

$$f\left(f\left(t\right)+1\right)=0\Leftrightarrow f\left(t\right)+1=\pm a,\ a\in\left(1;2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)=a-1\in\left(0;1\right)\\ f\left(t\right)=-a-1\in\left(-3;-2\right)\end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)=a.x^4+b.x^2+c$ ta suy ra đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ như sau:

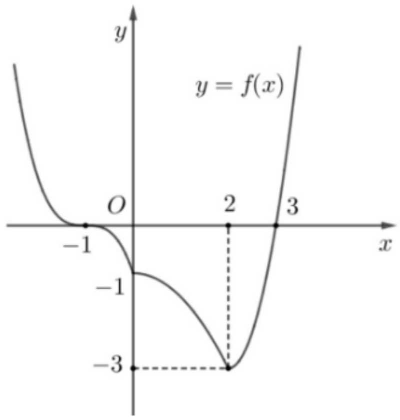


Quan sát đồ thị ta thấy: PT $f\left(t\right)=-a-1$ vô nghiệm với $-a-1\in\left(-3;-2\right)$

PT $f\left(t\right)=a-1$, với $a-1\in\left(0;1\right)$, có 2 nghiệm phân biệt $t\notin\left[-1;1\right]$.

Vậy PT $\left(1\right)$ vô nghiệm.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x)+x^3>2m+3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$ khi và chỉ khi



A. m < -5 **B.** m < -1 **C.** m < -3 **D.** m < -2

Lời giải

Bất phương trình tương đương với:

$ycbt \Leftrightarrow f(x)+\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{2}>m, \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow m<\min\limits_{(-1;3)} g(x),$

Trong đó $g(x)=f(x)+\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{2}.$

Quan sát đồ thị hàm số có $\min\limits_{(-1;3)} f(x)=f(2)=-3$ và $\min\limits_{(-1;3)}\left(h(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{2}\right)=h(2)=-2.$

Vì vậy $\min\limits_{(-1;3)} g(x)=g(2)=-5.$

Vậy m < -5 là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án#A.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình $f(\cos x)-2=0$ là:

A. 1010. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1\le\cos x\le1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f(\cos x)-2=0$

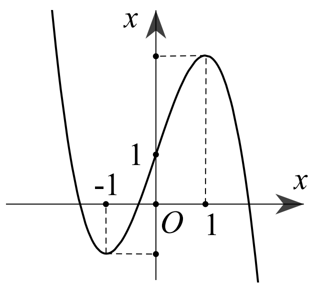
$\Leftrightarrow f(\cos x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x=-1 & (1)\\ \cos x=1 & (2)\end{array}\right.$.

+ Phương trình (1): $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi$. Mà $x\in[0;2020\pi]\Rightarrow x=\pi;3\pi;...;2019\pi$. Phương trình (1) có 1010 nghiệm.

+ Phương trình (2): $\cos x=1\Leftrightarrow x=2k\pi$. Mà $x\in[0;2020\pi]\Rightarrow x=0;2\pi;...;2020\pi$. Phương trình (2) có 1011 nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình là 2021 nghiệm.

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. bất phương trình $f(x)<x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;0)$ khi và chỉ khi



A. $m\ge f(-1)+1$. **B.** $m\ge f(0)$. **C.** $m>f(-1)+1$. **D.** $m>f(0)$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x) < x + m \Leftrightarrow f(x) - x < m$

YCBT $\Leftrightarrow \max\limits_{[-1;0]} h(x) = \max\limits_{[-1;0]}\left[f(x) - x\right] \le m, \forall x \in [-1;0]$

$h'(x) = f'(x) - 1 \le 0, \forall x \in [-1;0] \Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $[-1;0]$

$\max\limits_{[-1;0]} h(x) = h(-1) = f(-1) + 1 \le m$.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > \sin x + m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(1) - \sin 1$. **B.** $m \ge f(1) - \sin 1$. **C.** $m \le f(-1) + \sin 1$. **D.** $m < f(-1) + \sin 1$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \sin x$.

$g'(x) = f'(x) - \cos x$

Với $\forall x \in (-1;1)$, ta có $f'(x) < -1 \Rightarrow f'(x) - \cos x < -1 - \cos x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$.

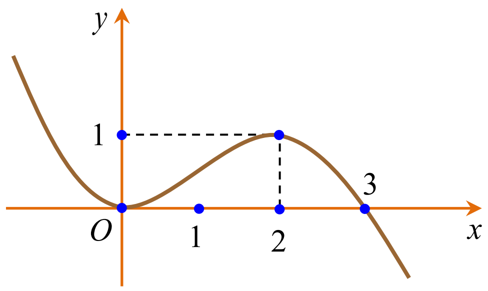
Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ nên $g(x) < g(-1) = f(-1) + \sin 1$.

Do đó bất phương trình $f(x) > \sin x + m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi bất phương trình $m < f(x) - \sin x$ có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

$\Leftrightarrow m < \max\limits_{[-1;1]} g(x) \Leftrightarrow m < f(-1) + \sin 1$.

Vậy $m < f(-1) + \sin 1$.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt truc hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-12;12]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Ta thấy rằng đây là hàm bậc 3 qua 0 không đổi dấu và qua 3 đổi dấu 1 lần. Nên suy ra

$f'(x) = k.x^2(x-3)$ $(k < 0)$ (vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ nên $k < 0$)

Do $f'(2) = 1 \Rightarrow -4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{4} \to f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.

Suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{-1}{16}x^4+\dfrac{1}{4}x^3+e=-\dfrac{1}{4}x^3\left(\dfrac{1}{4}x-1\right)+e.$

Mà theo đề ta có phương trình

$f\left(-x^2+2x+m\right)=e\Leftrightarrow\left(-x^2+2x+m\right)^3\left(\dfrac{-x^2+2x+m}{4}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}-x^2+2x+m=0 & (1)\\ -x^2+2x+m-4=0 & (2)\end{array}\right.$

Để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) và (2) lần lượt có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow\begin{cases}\Delta_1=1+m>0\\ \Delta_2=1+m-4>0\end{cases}\Leftrightarrow m>3.$

Mà $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in\left[-12;12\right]\end{cases}\Rightarrow m\in\left\{4;5;6;7;8;9;10;11;12\right\}$. Vậy có 9 giá trị nguyên m thoả mãn bài toán.

Câu 78. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, biết $f'\left(x\right)+\left(2x+1\right)f^2\left(x\right)=0$, $f'\left(x\right)>0,\ \forall x>0$ và $f\left(2\right)=\dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2019\right)$.

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2018}{2019}$. **C.** $\dfrac{2021}{2020}$. **D.** $\dfrac{2020}{2019}$.

Lời giải

Chọn A

TH1: $f\left(x\right)=0\Rightarrow f'\left(x\right)=0$ trái giả thiết.

TH2:

$f\left(x\right)\neq0\Rightarrow f'\left(x\right)=-\left(2x+1\right).f^2\left(x\right)\Rightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=-\left(2x+1\right).\Rightarrow\int\dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\mathrm{d}x=-\int\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\dfrac{-1}{f\left(x\right)}=-\left(x^2+x+C\right)$.

Ta có: $f\left(2\right)=\dfrac{1}{6}\Rightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+.....-\dfrac{1}{2020}=\dfrac{2019}{2020}$.

Câu 79. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt?

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^3-3x^2+2$, ta có phương trình $t^3-3t^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=1+\sqrt{3} \\ t=1-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Với $t=1 \Rightarrow f(x)=1$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1$ có hai nghiệm x dương phân biệt.

Với $t=1+\sqrt{3}$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=1+\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại một điểm và là điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1+\sqrt{3}$ có một nghiệm x dương.

Với $t=1-\sqrt{3}$. Quan sát đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=1-\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ dương nên phương trình $t=1-\sqrt{3}$ có hai nghiệm x dương phân biệt.

Vậy phương trình bài ra có 5 nghiệm phân biệt dương.

Câu 80. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f(1-3x)+1\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$t=1-3x \Rightarrow \left|f(t)+1\right|=3 \Leftrightarrow f(t)=2$ hay $f(t)=-4$

Nhận xét 1 nghiệm t cho ta 1 nghiệm x.

Bảng biến thiên trên ta có thể xem là BBT của hàm $f(t)$.

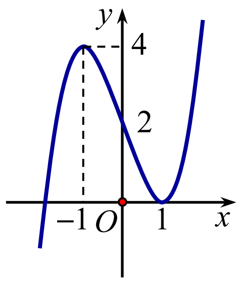
Nhìn vào BBT ta thấy

$f(t)=2$ có 3 nghiệm phân biệt t.

$f(t)=-4$ có 1 nghiệm t.

Nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 81. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $\left|f\left(x-2\right)-2\right|=\pi$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

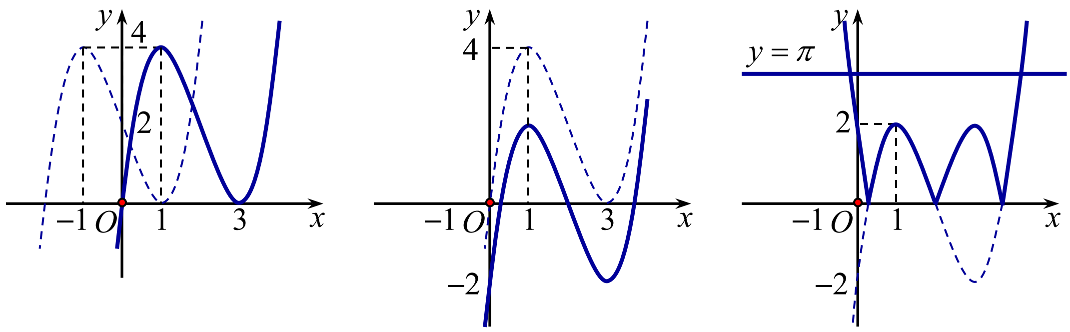
Chọn B

Cách 1:

+ Tịnh tiến đồ thị $y=f\left(x\right)$ theo vectơ $\vec{u}=\left(2;0\right)$ ta được đồ thị hàm số $y=f\left(x-2\right)$ (hình a)

+ Tịnh tiến đồ thị $y=f\left(x-2\right)$ theo vectơ $\vec{v}=\left(0;-2\right)$ ta được đồ thị hàm số $y=f\left(x-2\right)-2$ (hình b)

+ Vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-2\right)-2\right|$ như hình#c.



Hình a. *Hình b.* *Hình c.*

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-2\right)-2\right|$ suy ra phương trình $\left|f\left(x-2\right)-2\right|=\pi$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Cách 2: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=k$ và số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x+p\right)$ với đường thẳng $y=k$ luôn như nhau.

Do đó số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x-2\right)-2\right|=\pi$ cũng chính là số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)-2\right|=\pi$

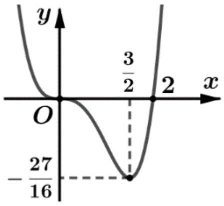
Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)-2=\pi \\ f\left(x\right)-2=-\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=2+\pi\ (1) \\ f\left(x\right)=2-\pi\ (2) \end{array}\right.$

Xét $\left(1\right)$: Vì $2+\pi>4$ nên pt có 1 nghiệm

Xét $\left(2\right)$: Vì $2-\pi<0$ nên pt có 1 nghiệm

KL: PT đã cho có 2 nghiệm.

Câu 82. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|2\sin x\right|\right)=f\left(\dfrac{m}{2}\right)$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi;2\pi\right]$?

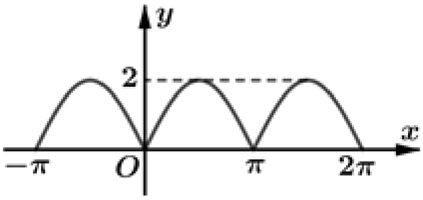


A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

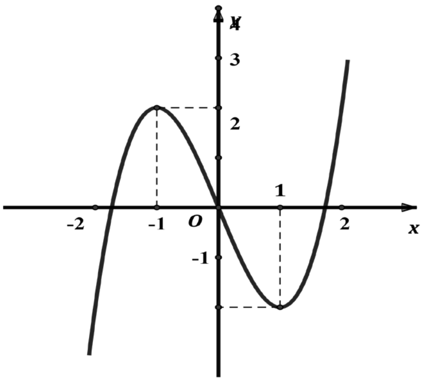
Đặt $t=2|\sin x|\ (0\le t\le 2)$. Ta thấy $t=0$ cho ta 4 nghiệm $x\in[-\pi;2\pi]$, mỗi $t\in(0;2)$ cho ta 6 nghiệm $x\in[-\pi;2\pi]$, $t=2$ cho ta 3 nghiệm $x\in[-\pi;2\pi]$.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có tối đa 2 nghiệm t (đường thẳng $y=f\left(\frac{m}{2}\right)$ cắt đồ thị tối đa hai điểm). Do đó để phương trình đã cho có đúng 12 nghiệm x phân biệt thuộc $[-\pi;2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 2 nghiệm t phân biệt thuộc $(0;2)$

$$\longrightarrow -\frac{27}{16}<f\left(\frac{m}{2}\right)<0,\text{ suy ra }\begin{cases}0<\dfrac{m}{2}<2\\ \dfrac{m}{2}\ne\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\ m\ne 3\end{cases}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{1;2\}.$$

Câu 83. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-2;-1)\\ x=0\\ x=x_2\in(1;2)\end{array}\right.$

Khi đó: $f(f(x)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-1=x_1\in(-2;-1)\\ f(x)-1=0\\ f(x)-1=x_2\in(1;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1+x_1\in(-1;0)\\ f(x)=1\\ f(x)=1+x_2\in(2;3)\end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra:

Phương trình $f(x)=1+x_1\in(-1;0)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=1+x_2\in(2;3)$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x)-1)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f(x)			5				5		
	$-\infty$				4				$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x)-9=0$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\cos x$, $t\in[-2;2]$ thì $2f(2\cos x)-9=0$ trở thành $2f(t)-9=0\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{9}{2}$ (1).

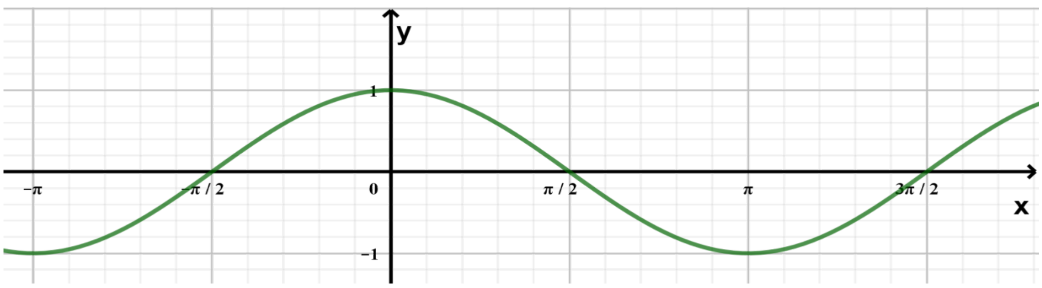
Nhận xét: Số nghiệm của phương trình là (1) số giao điểm của hai đồ thị: $(C):y=f(t)$ và đường thẳng $(d):y=\dfrac{9}{2}$.

Bảng biến thiên hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[-2;2]$:

t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	0	+	0	-	
f(t)			5				5		
									$y=\frac{9}{2}$
	$-\infty$				4				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, số nghiệm $t\in[-2;2]$ của (2) là 2 nghiệm phân biệt $t_1\in(-2;0)$, $t_2\in(0;2)$.

Ta có đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$:



Với $t_1\in(-2;0)\Rightarrow 2\cos x=t_1\in(-2;0)\Rightarrow \cos x=\dfrac{t_1}{2}\in(-1;0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x=\dfrac{t_1}{2}\in(-1;0)$ có

3 nghiệm phân biệt: $-\pi < x_1 < -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < x_2 < \pi < x_3 < \frac{3\pi}{2}$ T (1) có 3 nghiệm $x \in \left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Với $t_2 \in (0;2) \Rightarrow 2\cos x = t_2 \in (0;2) \Rightarrow \cos x = \frac{t_2}{2} \in (0;1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \frac{t_2}{2} \in (0;1)$ có 2 nghiệm phân biệt $-\frac{\pi}{2} < x_4 < 0 < x_5 < \frac{\pi}{2}$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x) - 9 = 0$ là $2 + 3 = 5$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ của phương trình $2f(\cos x) - 3 = 0$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

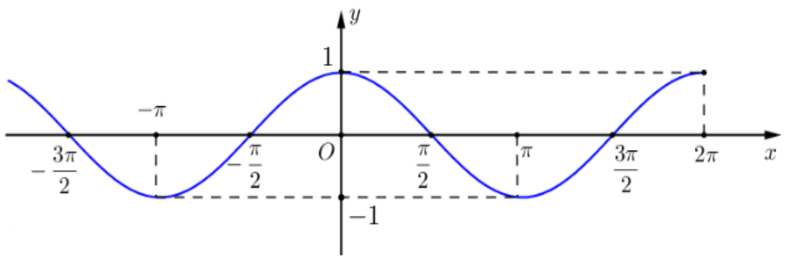
Lời giải

Chọn B

Ta có $2f(\cos x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = a \in (-\infty;-1) \\ \cos x = b \in (-1;0) \\ \cos x = c \in (0;1) \\ \cos x = d \in (1;+\infty) \end{array}\right.$

Vì $\cos x \in [-1;1]$ nên $\cos x = a \in (-\infty;-1)$ và $\cos x = d \in (1;+\infty)$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$



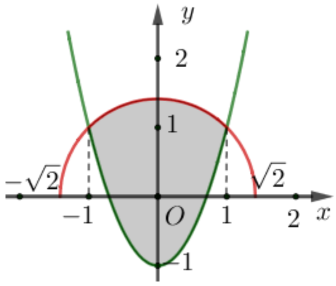
Phương trình $\cos x = b \in (-1;0)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\cos x = c \in (0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt, không trùng với nghiệm nào của phương trình $\cos x = b \in (-1;0)$.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

Câu 86. Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu theo hình giới hạn bởi một đường Parabol và nửa đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ mét (phần tô trong hình vẽ). Biết rằng: để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng, số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu gần bằng

A. 809000 đồng. **B.** 559000 đồng. **C.** 893000 đồng. **D.** 476000 đồng.



Lời giải

Chọn A

Nửa đường tròn (T) có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$.

Xét parabol (P) có trục đối xứng Oy nên có phương trình dạng: $y=ax^2+c$.

(P) cắt Oy tại điểm $(0;-1)$ nên ta có: $c=-1$.

(P) cắt (T) tại điểm $(1;1)$ thuộc (T) nên ta được: $a+c=1\Rightarrow a=2$.

Phương trình của (P) là: $y=2x^2-1$.

Diện tích miền phẳng D (tô màu trong hình) là:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}dx+\int_{-1}^{1}\left(-2x^2+1\right)dx.$$

$$I_1=\int_{-1}^{1}\left(-2x^2+1\right)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

Xét $I_2=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}dx$, đặt $x=\sqrt{2}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$

Đổi cận: $x=-1$ thì $t=-\frac{\pi}{4}$, với $x=1$ thì $t=\frac{\pi}{4}$, ta được:

$$I_2=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{2-2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t\,dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}2\cos^2 t\,dt$$

$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1+\cos 2t\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=1+\frac{\pi}{2}$$

Suy ra $S=I_1+I_2=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\left(m^2\right)$.

Số tiền trồng hoa tối thiểu là: $250000\left(\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\approx 809365$ đồng.

Câu 87. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm đoạn $[-2\pi;2\pi]$ của phương trình $4f(\cos x)+5=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Từ $4f(\cos x)+5=0 \Rightarrow f(\cos x)=-\frac{5}{4}(1)$

Đặt $t=\cos x$ với $x\in[-2\pi;2\pi]$ thì $t\in[-1;1]$

$(1)\Leftrightarrow f(t)=-\frac{5}{4}(2)$

Xét hàm số $h(x)=\cos x$; $x\in[-2\pi;2\pi]$ ta có BBT:

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

Với $t=-1$ thì PT có 2 nghiệm

Với $-1<t<1$ thì PT có 4 nghiệm

Với thì PT có 3 nghiệm

Xét $f(t)=-\frac{5}{4}(2)$ với $t\in[-1;1]$

x	$-\infty$	-1		x_1	0	x_2		1	$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$			
$f(x)$		-2	↗		-1		↘	-2	
					$y=-\frac{5}{4}$				

Nhìn vào BBT PT $f(t)=-\frac{3}{2}(2)$ có hai nghiệm

Vậy tất cả có 8 nghiệm

Câu 88. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(\cos 2x\right)-2m-1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ **C.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ **D.** $\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{4};\frac{1}{4}\right)$

Lời giải

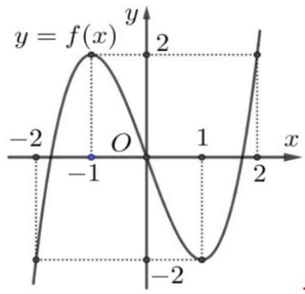
Chọn A

Đặt $\cos 2x=t, x\in\left(\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Yêu cầu đề bài tương đương với phương trình $f\left(t\right)=2m+1$ có nghiệm $t\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu $\Leftrightarrow 1\le 2m+1\le 2\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{1}{2}$.

Câu 89. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=f(x)$ bằng



A. 7. **B.** 3.
C. 6. **D.** 9.

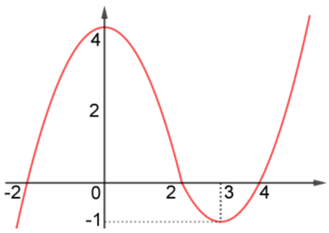
Lời giải:

Đặt $t=f(x)$ phương trình trở thành: $f(t)=t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.$ vì đồ thị $f(t)$ cắt đường thẳng y = t tại ba điểm có hoành độ $t=-2;t=0;t=2$. Vậy:

$$\left[\begin{array}{l}f(x)=-2\\f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=1;x=-2\\x=0;x=a\in(-2;-1);x=b\in(1;2)\\x=-1;x=2\end{array}\right..$$

Chọn#**A.**

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thực



của phương trình $\left|f(x^3-3x)\right|=\frac{1}{2}$?

A. 3. **B.** 12.
C. 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left|f(x^3-3x)\right|=\frac{1}{2}$

Đặt $t=x^3-3x\Rightarrow t'=3x^2-3$

$t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = -2 \\ x = -3 \Rightarrow t = 2 \end{array}\right.$

Suy ra BBT

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, ta có:

Với $a < -2$ thì phương trình $t = a$ có 1 nghiệm t. Với mỗi giá trị t thì $|f(t)| = \frac{1}{2}$ có 1 nghiệm.

Suy ra: $x^3 - 3x = a \;\; (a < -2)$ có 1 nghiệm.

Với $-2 < b < 2$ thì phương trình $t = b$ có 3 nghiệm t. Với mỗi giá trị t thì $|f(t)| = \frac{1}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra: $x^3 - 3x = b \;\; (-2 < b < 2)$ có 6 nghiệm phân biệt.

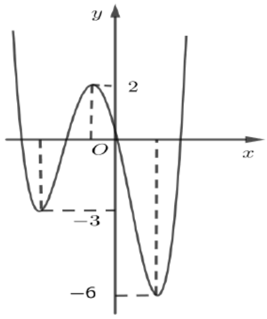
Với $c > 2$ thì phương trình $t = c$ có 1 nghiệm t. Với mỗi giá trị t thì $|f(t)| = \frac{1}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Suy ra: $x^3 - 3x = c \;\; (\mathrm{c} > 2)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt.

TÌM CỰC TRỊ HÀM HỢP

Câu 1. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x+1)+m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị của hàm số $y=|f(x+1)+m|$ được suy ra từ đồ thị (C) ban đầu như sau:

+ Tịnh tiến (C) sang trái một đơn vị, sau đó tịnh tiến lên trên (hay xuống dưới) m đơn vị. Ta được đồ thị $(C'): y=f(x+1)+m$.

+ Phần đồ thị (C') nằm dưới trục hoành, lấy đối xứng qua trục Ox ta được đồ thị của hàm số $y=|f(x+1)+m|$.

Ta được bảng biến thiên của của hàm số $y=|f(x+1)+m|$ như sau.

x	$-\infty$		-4		-2		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-3+m$	$\nearrow$	$2+m$	$\searrow$	$-6+m$	$\nearrow$	$+\infty$

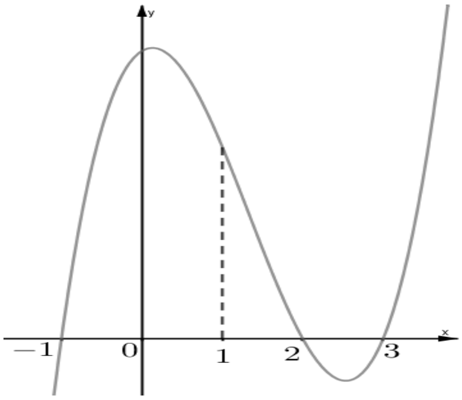
Để hàm số $y=|f(x+1)+m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị của hàm số $(C'): y=f(x+1)+m$ phải cắt trục Ox tại 2 hoặc 3 giao điểm.

+ TH1: Tịnh tiến đồ thị $(C'): y=f(x+1)+m$ lên trên. Khi đó $\begin{cases} m>0 \\ -3+m\geq 0 \\ -6+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\leq m<6$.

+ TH2: Tịnh tiến đồ thị $(C'): y=f(x+1)+m$ xuống dưới. Khi đó $\begin{cases} m<0 \\ 2+m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq -2$.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m là $3;4;5$.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^4-8x^2+1)$ là



A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị $y=f(x)$ ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-1;1) \\ x=b\in(2;3) \end{array}\right.$.

Ta có: $g'(x)=\left(4x^3-16x\right)f'\left(x^4-8x^2+1\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \\ f'\left(x^4-8x^2+1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & \\ x=0 & \\ x=-2 & \\ x^4-8x^2+1=a\in(-1;2) & (1) \\ x^4-8x^2+1=b\in(2;3) & (2) \end{array}\right. .$$

Xét hàm số: $h(x)=x^4-8x^2+1$

Ta có $h'(x)=4x^3-16x$, $h'(x)=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-15	$\nearrow$	1	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

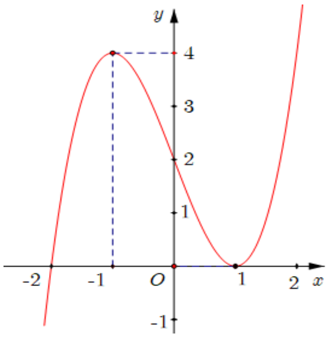
Dựa vào bảng biến thiên

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệtkhông trùng với ba ngiệm của pt (1).

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 9 điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f(x-2018)-2019x+2020$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$g'\left(x\right)=f'(x-2018)-2019$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'(x-2018)=2019\ \ (1)$

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x-2018)$ và đường thẳng $y=2019$.

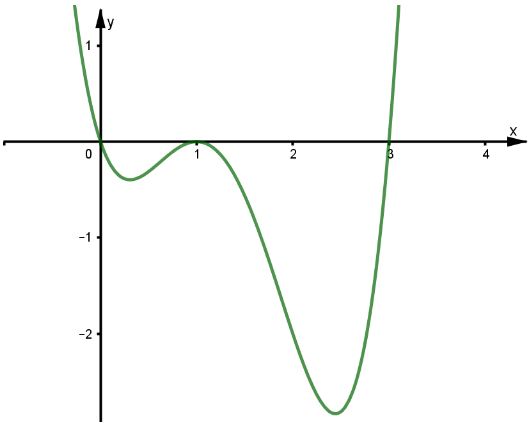
Đồ thị $y=f'(x-2018)$ được vẽ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ về bên phải 2018 đơn vị theo phương của trục Ox. Do đó, số nghiệm của phương trình (1) bằng số nghiệm của phương trình $f'(x)=2019$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ suy ra đường thẳng $y=2019$ cắt đồ thị hàm số $y=f'\left(x-2018\right)$ tại một điểm duy nhất, tức là phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Phương trình $g'(x)=0$ không có nghiệm bội chẵn nên hàm số $y=g'(x)$ đổi dấu một lần.

Vậy hàm số $g\left(x\right)=f(x-2018)-2019x+2020$ có một điểm cực trị.

Câu 4.) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$. Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ



Đồ thị của hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu ?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **B.** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **D.** 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	y_1	↗	0	↘	y_2	↗	$+\infty$

$y=\left(f(x)\right)^2 \Rightarrow y'=2f(x).f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$.

Quan sát đồ thị ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ với $x_1 \in (0;1)$ và $x_2 \in (1;3)$.

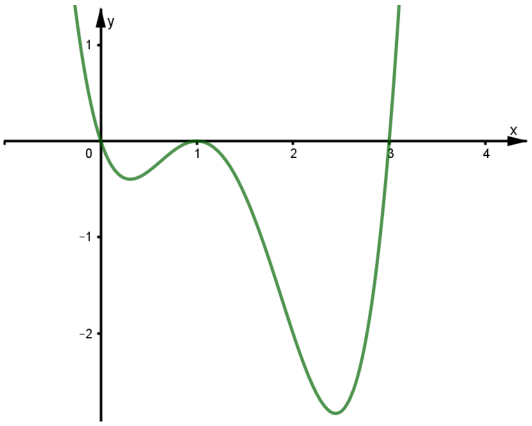
Suy ra $y'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ f'(x)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (3;+\infty) \\ x \in \in (0;x_1) \cup (1;x_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;x_1) \cup (1;x_2) \cup (3;+\infty)$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗	y_1	↘		↗	y_2	↘		↗	$+\infty$

Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 5.) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị của hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu ?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
B. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	0	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

$y=\left(f\left(x\right)\right)^2 \Rightarrow y'=2f\left(x\right).f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=0 \\ f'\left(x\right)=0 \end{array}\right.$.

Quan sát đồ thị ta có $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ và $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ với $x_1 \in \left(0;1\right)$ và $x_2 \in \left(1;3\right)$.

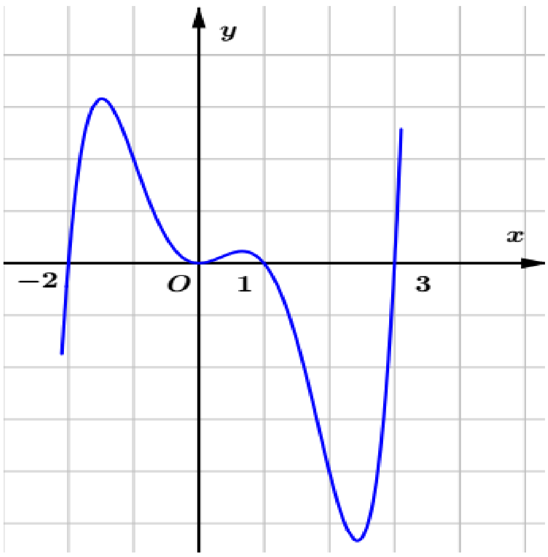
Suy ra $y'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f\left(x\right)>0 \\ f'\left(x\right)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f\left(x\right)<0 \\ f'\left(x\right)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(3;+\infty\right) \\ x \in \in \left(0;x_1\right) \cup \left(1;x_2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(0;x_1\right) \cup \left(1;x_2\right) \cup \left(3;+\infty\right)$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^2$

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	y_1	$\searrow$		$\nearrow$	y_2	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 6. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)+2018$ là



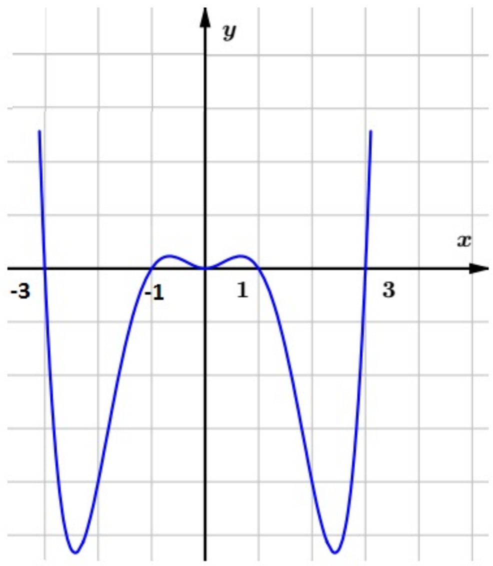
A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

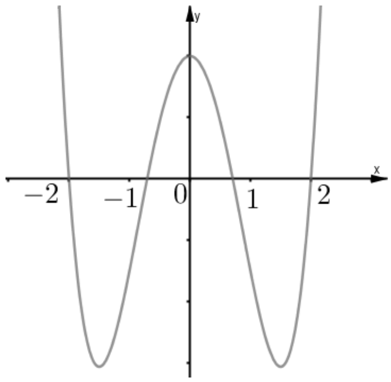
Từ đồ thị ta thấy hàm số $f\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow$ hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị



$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi số cực trị của một hàm số).

Câu 7. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x+1)$ là



A. 5. **B.** 7 **C.** 9. **D.** 11

Lờigiải

Chọn C

Dựa vào đồ thị $y=f(x)$ ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-2;-1) \\ x=0 \\ x=b\in(1;2) \end{array}\right.$.

Ta có: $g'(x)=(3x^2-3)f'(x^3-3x+1)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-3=0 \\ f'(x^3-3x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x=-1 & \\ x^3-3x+1=a\in(-2;-1) & (1) \\ x^3-3x+1=0 & (2) \\ x^3-3x+1=b\in(1;2) & (3) \end{array}\right..$$

Xét hàm số: $h(x)=x^3-3x+1$

Ta có $h'(x)=3x^2-3$, $h'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số $h(x)$

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(2x)$ đạt cực đại tại

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f(2x)\Rightarrow g'(x)=2f'(2x)$

$$g'(x)=0\Rightarrow 2f'(2x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\\2x=0\Rightarrow x=0\\2x=2\Rightarrow x=1\end{array}\right.$$

Với $x=-1\Rightarrow g'(-1)=2f'(-2)>0.$

Với $x=-\frac{1}{4}\Rightarrow g'\left(-\frac{1}{4}\right)=2f'\left(-\frac{1}{2}\right)<0.$

Với $x=\frac{1}{2}\Rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right)=2f'(1)>0.$

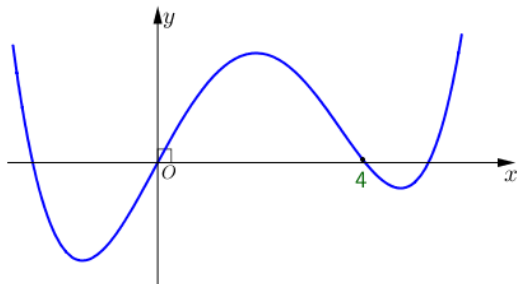
Với $x=2\Rightarrow g'(2)=2f'(4)<0.$

Ta có BBT sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-\frac{1}{2}$ và $x=1$.

Câu 9. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+4\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

Ta có $g'(x)=\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+4\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-6x=0 \\ f'(x^3-3x^2+4)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f'(x^3-3x^2+4)=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Mặt khác, từ đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<0 \\ x=b\in(0;4) \\ x=c>4 \end{array}\right.$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x^2+4=a & (2) \\ x^3-3x^2+4=b & (3) \\ x^3-3x^2+4=c & (4) \end{array}\right.$

Xét hàm số $u=x^3-3x^2+4$, $u'=3x^2-6x$, $u'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
u'		$+$			0	$-$	0			$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có

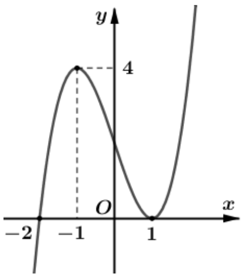
Với $a<0$, phương trình (2) có một nghiệm duy nhất nhỏ hơn -1

Với $b\in(0;4)$, phương trình (3) có ba nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $(-1;0);(0;2);(2;3)$

Với $c>4$, phương trình (4) có một nghiệm duy nhất lớn hơn 3

Vậy $g'(x)=0$ có 7 nghiệm đơn nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)<0$, đồng thời đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f^2(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \quad (\text{nghiem kep}) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$		$\nearrow$	

$y=0$

Xét $g'(x)=2f'(x)f(x)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo BBT } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \;\; (\text{nghiem kep}) \\ x=a\,(a<-2) \\ x=b\,(b>0) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		-2		b		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

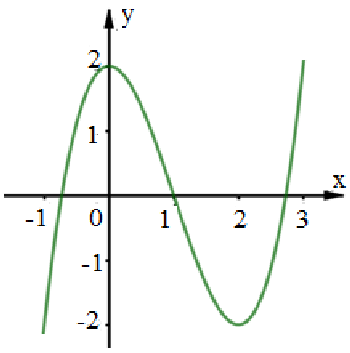
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=0\in(-2;b)$

- $x=0 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(0)>0.$ (1)
- Theo giả thiết $f(0)<0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(0)<0$ trên khoảng $(-2;b)$.

Nhận thấy $x=-2;\ x=a;\ x=b$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này. Nghiệm $x=1$ là nghiệm kép nên $g'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm này, trong bảng biến thiên ta bỏ qua nghiệm $x=1$ vẫn không ảnh hưởng đến quá trình xét dấu của $g'(x)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình v



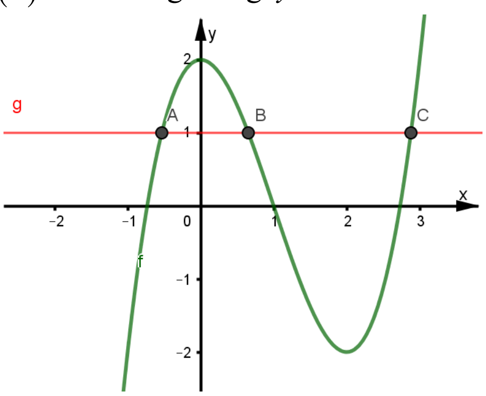
Gọi m là số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m=6$. **B.** $m=7$. **C.** $m=5$. **D.** $m=9$.

Lời giải

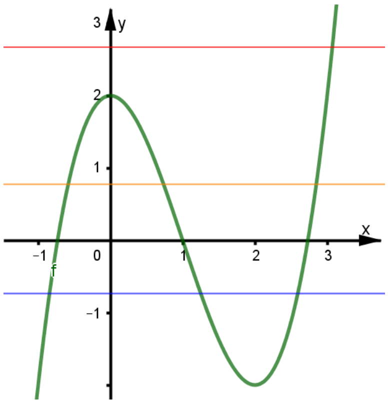
Chọn B

Đặt $f(x)=u$ khi đó nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $f(u)$ với đường thẳng $y=1$.



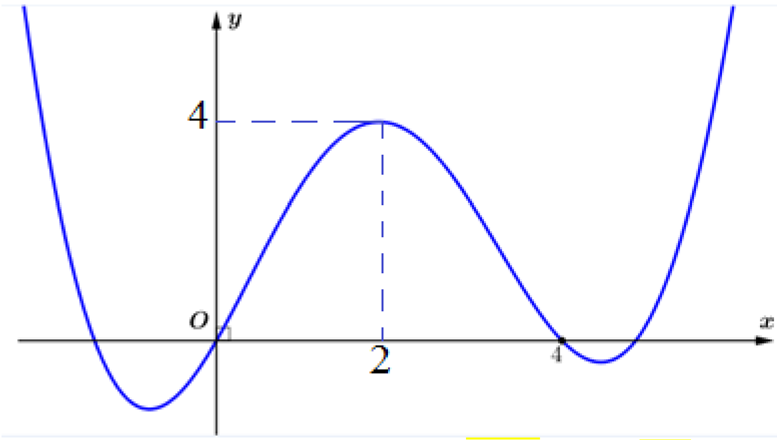
Dựa vào đồ thị ta có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l} f(x)=u_1 \\ f(x)=u_2 \\ f(x)=u_3 \end{array}\right.$ với $u_1\in(-1;0)$, $u_2\in(0;1)$, $u_3\in\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Tiếp tục xét số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với từng đường thẳng $y=u_1$, $y=u_2$, $y=u_3$.



Dựa vào đồ thị ta có được 7 giao điểm. Suy ra phương trình ban đầu $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm.

Câu 12. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)-2x^3-6x^2$ là



A. 5. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(3x^2+6x).f'(x^3+3x^2)-6x^2-12x=(3x^2+6x)\left[f'(x^3+3x^2)-2\right]$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=2 \end{array}\right.$.

Phương trình $3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x^3+3x^2)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x^2=a<0 \\ x^3+3x^2=b\in(0;2) \\ x^3+3x^2=c\in(2;4) \\ x^3+3x^3=d>4 \end{array}\right.$.

Hàm số $h(x)=x^3+3x^2$ có $h'(x)=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\infty$	-3		-2		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		||	$+$	0	$-$	0	$+$	||		
$h(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biên thiên của hàm $h(x)$, ta có

Phương trình $x^3+3x^2=a<0$ có duy nhất một nghiệm $x_1<-3$.

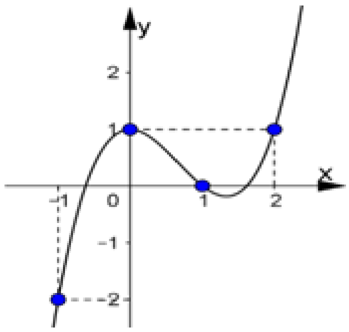
Phương trình $x^3+3x^2=d>4$ có duy nhất một nghiệm $x_2>1$.

Phương trình $x^3+3x^2=b\in(0;2)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Phương trình $x^3+3x^2=c\in(2;4)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Do đó, phương trình $g'(x)=0$ có mười nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có mười điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?

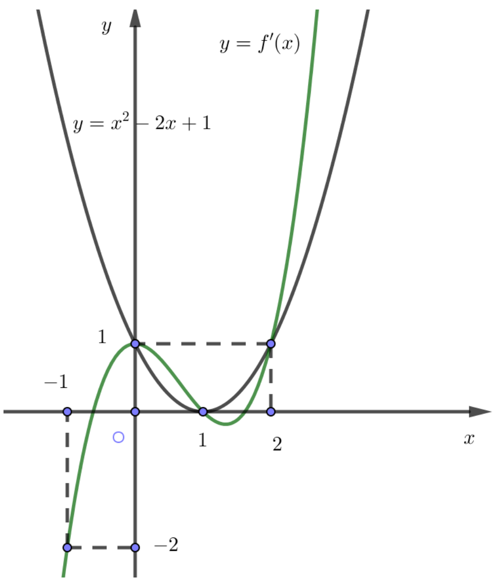
A. $x=2$ **B.** $x=0$ **<u>C</u>.** $x=1$ **D.** $x=-1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$ (Như hình vẽ).



Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ ta suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2\left(x^2-4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

$$g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right) \Rightarrow g'(x)=(4x-12)f'\left(2x^2-12x+m\right)$$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow (4x-12)f'\left(2x^2-12x+m\right)=0$ (*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=-1 \\ 2x^2-12x+m=0 \\ 2x^2-12x+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & \\ 2x^2-12x+m=-1 & (l) \\ 2x^2-12x=-m & (1) \\ 2x^2-12x=4-m & (2) \end{array}\right.$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$)

Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C).

$y'=4x-12$

Ta có bảng biến thiên

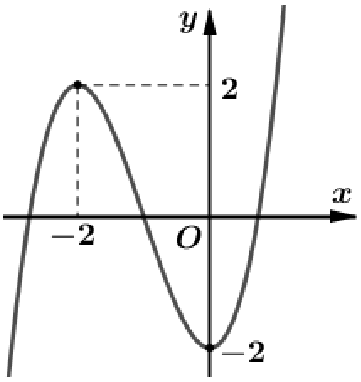
x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $(1);(2)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y=4-m$ và $y=-m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-m$.

Ta có: $-18<-m \Leftrightarrow m<18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $g(x)=f\left(-x^2+3x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'(-x^2+3x)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+3=0\\ f'(-x^2+3x)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)}\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\ -x^2+3x=-2\\ -x^2+3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\ x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn** **C.**

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ f'\left(x^2+2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x^2+2x=a\in(-\infty;-1)\\ x^2+2x=b\in(-1;0)\\ x^2+2x=c\in(0;1)\\ x^2+2x=d\in(1;+\infty)\end{array}\right..$

* $x^2+2x-a=0$ có $\Delta'=1+a<0\ \forall a\in(-\infty;-1)$ nên phương trình vô nghiệm.
* $x^2+2x-b=0$ có $\Delta'=1+b>0\ \forall b\in(-1;0)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
* $x^2+2x-c=0$ có $\Delta'=1+c>0\ \forall c\in(0;1)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
* $x^2+2x-d=0$ có $\Delta'=1+d>0\ \forall d\in(1;+\infty)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: 7 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 + 2x\right)$ có 7 cực trị.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số

$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2028. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$

$= \sin^3 x - 3\left(1 - \sin^2 x\right) - m\sin x - 1$

$= \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4$

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0;1]$.

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = t^3 + 3t^2 - mt - 4$ đồng biến trên $[0;1]$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3t^2 + 6t - m$.

Để hàm số đồng biến trên $[0;1]$

$\Rightarrow y' \ge 0\ \forall \text{t} \in [0;1] \Rightarrow 3t^2 + 6t - m \ge 0\ \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow m \le 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0;1]$

$\Rightarrow m \le f(t) = 3t^2 + 6t\ \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow m \le \min\limits_{[0;1]} f(t)$

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 + 6t$ ta có TXĐ:

Kết hợp điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} m \in (-2019;0] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 2019 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 18. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm m để khoảng cách giữa các điểm cực đại và cực tiểu là nhỏ nhất?

A. $m = -1$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = 2$

Lời giải

Đáp án C

Ta có: $y' = x^2 - 2mx - 1 > 0\,\forall m \in \mathbb{R}$. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

Gọi hai điểm cực trị là: $A\left(x_1, -\dfrac{2}{3}(m^2+1)x_1 + \dfrac{2}{3}m + 1\right), B\left(x_2, -\dfrac{2}{3}(m^2+1)x_2 + \dfrac{2}{3}m + 1\right)$.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}(m^2+1)(x_2 - x_1)\right)^2} \quad = 2\sqrt{(m^2+1)\left(1 + \dfrac{4}{9}(m^2+1)^2\right)}$$

Đặt $t = m^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow AB = 2\sqrt{\dfrac{4}{9}t^3 + t}$.

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{4}{9}t^3 + t$ liên tục trên nửa khoảng $[1;+\infty)$. $g'(t) = \dfrac{4}{3}t^2 + 1 > 0\forall t \ge 1$.

Suy ra $g(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$. Do đó: $\min\limits_{[1;+\infty)} g(t) = g(1) = \dfrac{13}{9}$.

Vậy $\min AB = 2\sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{2\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow m = 0.$

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = 2f^3(x) - 6f^2(x) - 1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6f'(x)f^2(x) - 12f'(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm 0; 3, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_4 > 3$ và phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm $x_1 < 0 < x_2 < 3 < x_3 < x_4$.

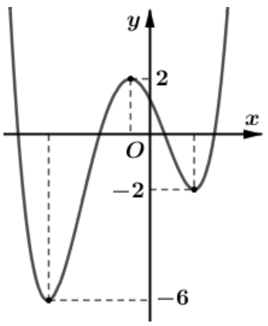
Hàm số $g(x)$ có xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		3		x_3		x_4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 3 điểm cực đại.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = \left|f(x+2018) + m^2\right|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.



Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018) + m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

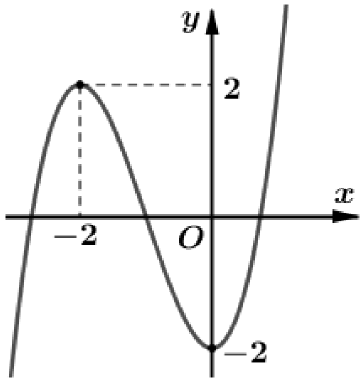
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m^2$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \le -2$: vô lý
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$\longrightarrow 2 \le m^2 < 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \le m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \le -\sqrt{2} \end{array}\right. \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; 2\}$. **Chọn B**

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = (-2x+3).f'(-x^2+3x)$

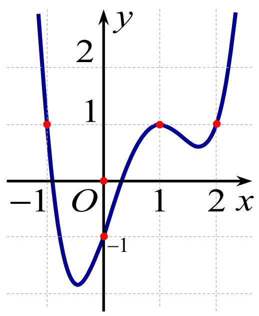
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+3=0 \\ f'(-x^2+3x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ -x^2+3x=-2 \\ -x^2+3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số $g(x)$ đã cho có 3 điểm cực đại.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

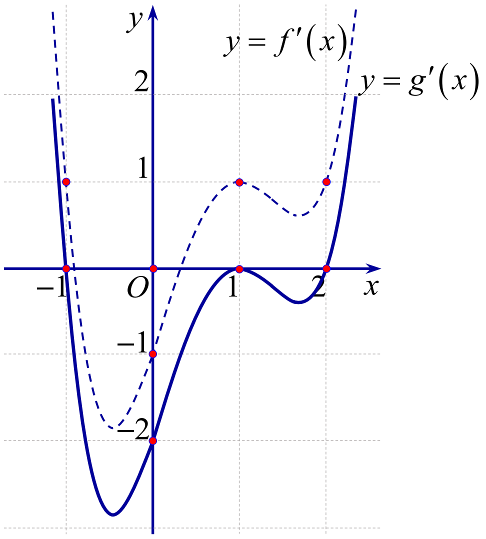


A. $x = 2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

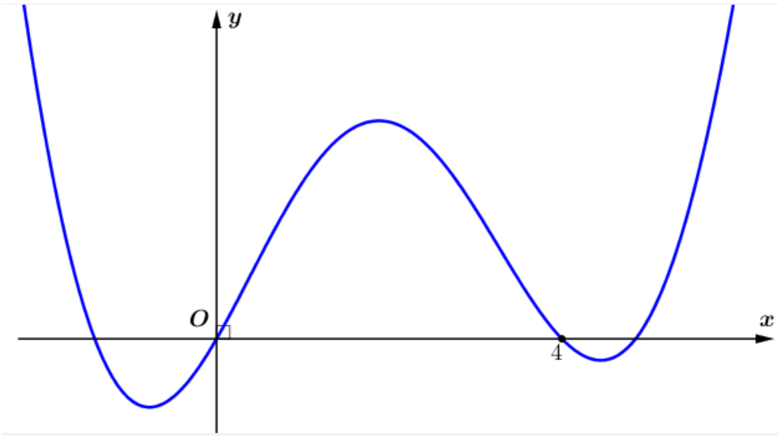
Ta có $g'(x)=f'(x)-1$. Do đó đồ thị của hàm số $g'(x)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ đi xuống 1 đơn vị.



Quan sát đồ thị $g'(x)$ ta thấy $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm $x=-1$.

Do đó $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 23. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\left(3x^2+6x\right).f'\left(x^3+3x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0 \end{array}\right..$$

▪Phương trình $3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

▪Phương trình $f'\left(x^3+3x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x^2=a<0 \\ x^3+3x^2=0 \\ x^3+3x^2=4 \\ x^3+3x^3=b>4 \end{array}\right.$.

Ta thấy: $x^3+3x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0; x=-3$

Và $x^3+3x^2=4 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=1; x=-2$.

Hàm số $h(x)=x^3+3x^2$ có $h'(x)=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		$+\infty$
$h'(x)$				$+$	0	$-$	0	$+$			
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biên thiên của hàm $h(x)$, ta có

Phương trình $x^3+3x^2=a<0$ có duy nhất một nghiệm $x_1<-3$.

Phương trình $x^3+3x^2=c>4$ có duy nhất một nghiệm $x_2>1$.

Do đó, phương trình $g'(x)=0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt và hai nghiệm bội ba nên hàm số $y=g(x)$ có sáu điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$

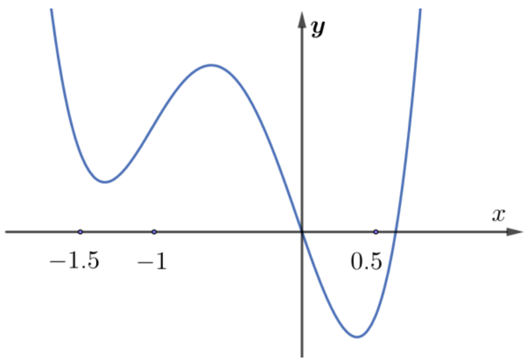
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Do $x=1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm kép nên ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A

Câu 25. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2-4\right)$ là

A. 6. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 12.

Lời giải

Fb: Võ Đức Toàn

Chọn B

Ta có $g'(x)=(3x^2+6x).f'\left(x^3+3x^2-4\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'\left(x^3+3x^2-4\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{lll}x=-2 & & \\ x=0 & & \\ x^3+3x^2-4=t_1 & (-1.5<t_1<-1) & (1)\\ x^3+3x^2-4=t_2 & (-1<t_2<0) & (2)\\ x^3+3x^2-4=t_3 & (0<t_3<0.5) & (3)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2-4$.

$h'(x)=3x^2+6x$. $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=0\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên:

•Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1<-2,-2<x_2<0,\ x_3>0$.

•Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt $x_4<-2,-2<x_5<0,\ x_6>0$.

•Phương trình (3) có 1 nghiệm $x_7>0$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm phân biệt ($x_1<x_4<-2<x_5<x_2<0<x_3<x_6<x_7$) và đều là nghiệm đơn. Suy ra hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(a)>f(b)$.

B. $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(a) > f(b) > f(c)$.

D. $f(b) > f(a) > f(c)$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[a;b]$ và $[b;c]$, lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Do đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ là:

$$S_1 = \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x) \mathrm{d}x = -f(x)\Big|_a^b = f(a) - f(b).$$

Vì $S_1 > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ (1)

Tương tự: diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = b \\ x = c \end{cases}$ là:

$$S_2 = \int_b^c |f'(x)| \mathrm{d}x = \int_b^c f'(x) \mathrm{d}x = f(x)\Big|_b^c = f(c) - f(b).$$

$S_2 > 0 \Rightarrow f(c) > f(b)$ (2).

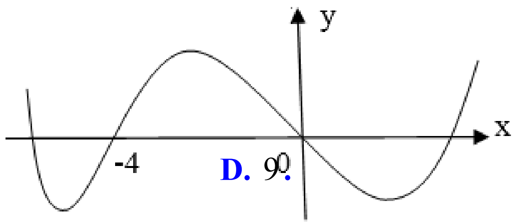
Mặt khác, dựa vào hình vẽ ta có: $S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta **chọn đáp án#A.**

(có thể so sánh $f(a)$ với $f(b)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[a;b]$ và so sánh $f(b)$ với $f(c)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[b;c]$)

Câu 27. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

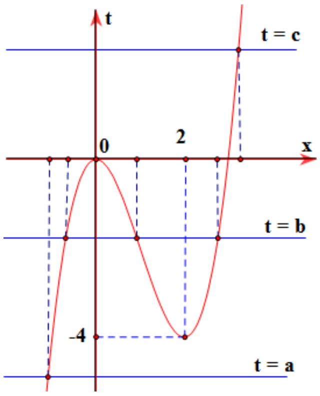
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^3 - 3x^2 \Rightarrow t' = 3x^2 - 6x$. Trước hết xét $f(t)$ có ba cực trị, hoành độ các điểm cực trị tương ứng là $t = a < -4, t = b \in (-4;0), t = c > 0$.

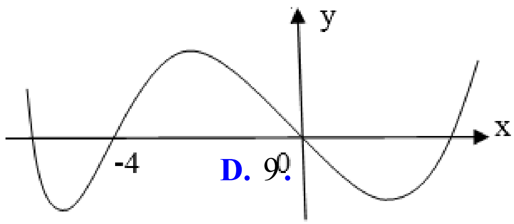
Ta có $g'(x) = t'.f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t' = 0 \\ t = a \vee t = b \vee t = c \end{array}\right.$

Đồ thị t(x) là



Từ đó suy ra $f'(t)=0$ có 5 nghiệm x khác nhau và đều khác 0; 2 nên $g'(x)$ đổi dấu 7 lần nên có 7 cực trị.

Câu 28. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

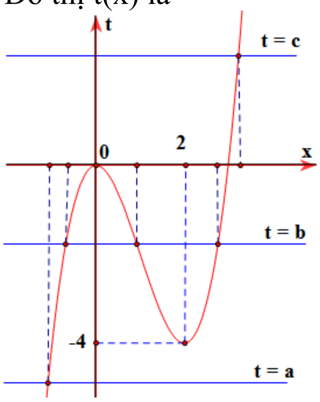
Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^3-3x^2 \Rightarrow t'=3x^2-6x$. Trước hết xét $f(t)$ có ba cực trị, hoành độ các điểm cực trị tương ứng là $t=a<-4, t=b\in(-4;0), t=c>0$.

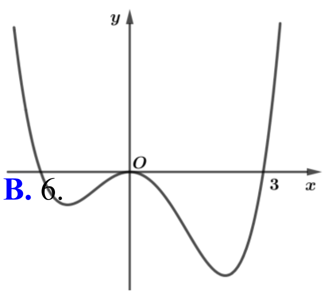
Ta có $g'(x)=t'.f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'=0 \\ t=a \vee t=b \vee t=c \end{array}\right.$

Đồ thị t(x) là



Từ đó suy ra $f'(t)=0$ có 5 nghiệm x khác nhau và đều khác 0; 2 nên $g'(x)$ đổi dấu 7 lần nên có 7 cực trị.

Câu 29. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

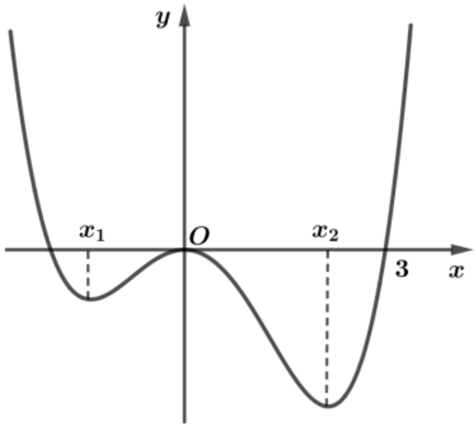
Xét hàm số $u=x^3-3x^2$ có bảng biến thiên nhua sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Ta có $g'(x)=(3x^2-6x)f'(x^3-3x^2)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0; x=2 \\ f'\left(x^3-3x^2\right)=0 \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số



$y=f(x)$, ta có:

$$f'\left(x^3-3x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x^2=0 & (1) \\ x^3-3x^2=x_1\in(-3;0) & (2) \\ x^3-3x^2=x_2\in(1;3) & (3) \end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $u=x^3-3x^2$ ta thấy:
(1) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó $x=0$ là nghiệm kép.
(2) có 3 nghiệm phân biệt khác với các nghiệm trên.
(3) có nghiệm duy nhất khác với tất cả các nghiệm trên.

Suy ra $g'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này (trong đó $x=0$ là nghiệm bội 3) nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-1\right)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Ta có $g(x)=f(3-x) \Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

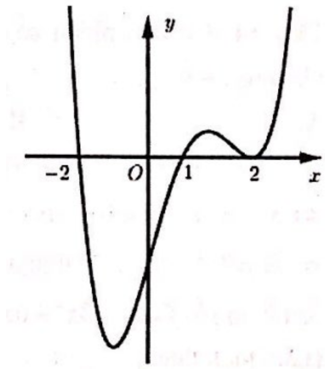
$$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(3-x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x\le -1 \\ 1\le 3-x\le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ -1\le x\le 2 \end{array}\right..$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ và các khẳng định sau:



(1). Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

(2). Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

(3). Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

(4). Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$

(5). Hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

Số khẳng định đúng là

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có: $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>1 \end{array}\right.$

Do đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$

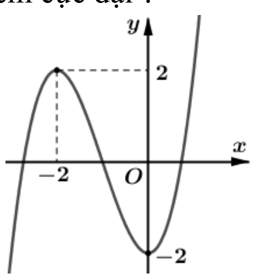
Giả sử $f'(x)=(x+2)(x-1)(x-2)^2$

Xét hàm số $y=f(x^2) \Rightarrow y'=2x.f'(x^2)=2x.(x^2+2)(x^2-1)(x^2-2)^2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ -1<x<0 \end{array}\right.$

Do đó hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

Suy ra có 3 khẳng định đúng là 1, 3 và 4.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'(-x^2+3x)$

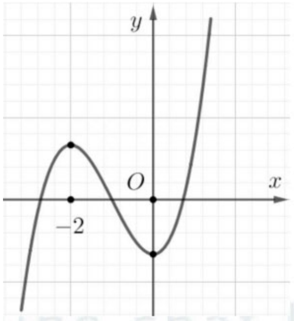
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2x+3=0\\ f'(-x^2+3x)=0\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ -x^2+3x=-2\\ -x^2+3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn#A.**

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(-2x^2+4x)$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị $f(x)$, hàm số có hai điểm cực trị $x=-2$; $x=0$ vì vậy $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm $x=-2$; $x=0$ nên $f'(x)=3a(x+2)x$.

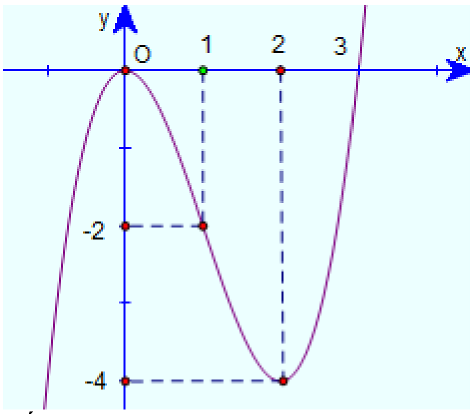
Ta có:

$y'=(-4x+4)f'(-2x^2+4x)=3a(-4x+4)(-2x^2+4x)(-2x^2+4x+2)=-48ax(x-2)(x-1)(x^2-2x-1)$

đổi dấu khi qua các điểm $x=0$; $x=2$; $x=1$; $x=1\pm\sqrt{2}$.

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $3f(2|cos\,x|)+2=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2|cos\,x|$. Vì $x \in [-\pi;\pi]$ nên $t \in [0;2]$.

$\Rightarrow 3f(t) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{2}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = -\frac{2}{3}$ có 1 nghiệm $t_0 \in (0;1)$.

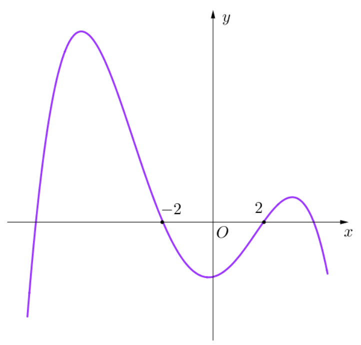
Suy ra $|cos\,x| = \frac{t_0}{2} \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

➢Với $cos\,x = \frac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $\frac{-\pi}{2} < x_1 < 0 < x_2 < \frac{\pi}{2}$.

➢Với $cos\,x = -\frac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $-\pi < x_3 < -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < x_4 < \pi$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$.

Câu 35. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Do $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại $\forall x \in \mathbb{R}$.

Theo đồ thị hàm số ta có được $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1\ ,x_1 < -2 \\ x = x_2\ ,-2 < x_2 < 2 \\ x = x_3\ ,x_3 > 2 \end{array}\right.$.

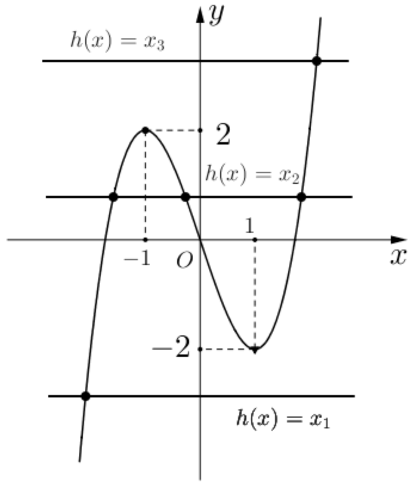
Mặt khác $g'(x) = (3x^2 - 3)f(x^3 - 3x)$ nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x = x_1 \\ x^3 - 3x = x_2 \\ x^3 - 3x = x_3 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x$ trên $\mathbb{R}$.

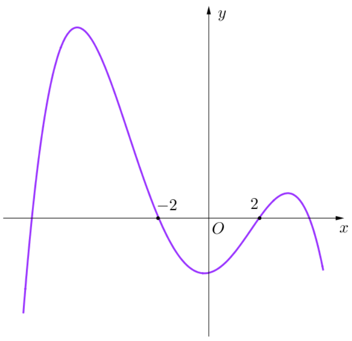
Ta có $h'(x) = 3x^2 - 3$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$, từ đó ta có bảng biến thiên của $y = h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^3 - 3x$ nên ta có $h(x) = x_1$ có đúng một nghiệm, $h(x) = x_2$ có đúng 3 nghiệm, $h(x) = x_3$ có đúng một nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều khác 1 và -1. Vì thế phương trình $g'(x)=0$ có đúng bảy nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y=g(x)$ có 7 cực trị.



Câu 36. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x)$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Do $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại $\forall x\in\mathbb{R}$.

Theo đồ thị hàm số ta có được $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\ ,x_1<-2\\x=x_2\ ,-2<x_2<2\\x=x_3\ ,x_3>2\end{array}\right.$.

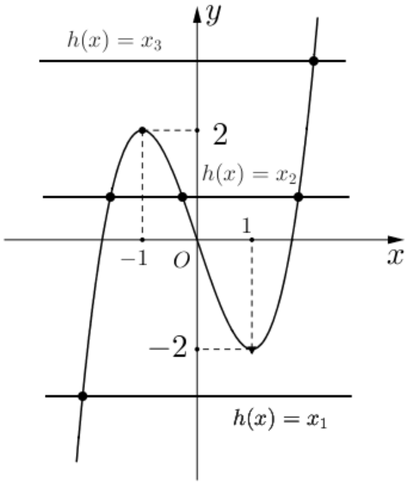
Mặt khác $g'(x)=(3x^2-3)f(x^3-3x)$ nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\f'(x^3-3x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x^3-3x=x_1\\x^3-3x=x_2\\x^3-3x=x_3\end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x)=x^3-3x$ trên $\mathbb{R}$.

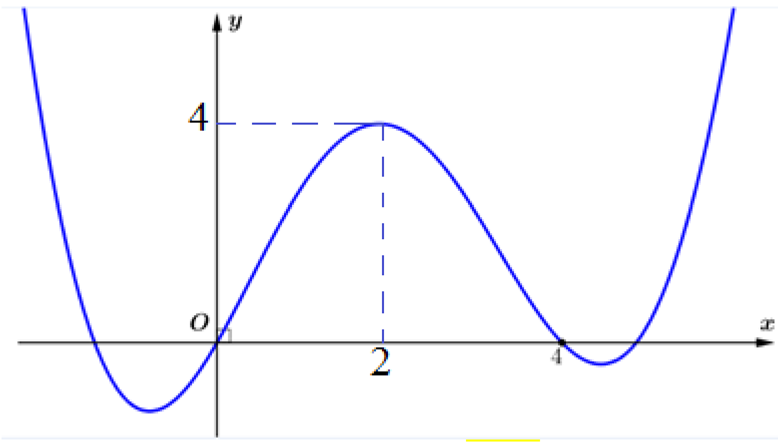
Ta có $h'(x)=3x^2-3$, $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$, từ đó ta có bảng biến thiên của $y=h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)=x^3-3x$ nên ta có $h(x)=x_1$ có đúng một nghiệm, $h(x)=x_2$ có đúng 3 nghiệm, $h(x)=x_3$ có đúng một nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều khác 1 và -1. Vì thế phương trình $g'(x)=0$ có đúng bảy nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y=g(x)$ có 7 cực trị.



Câu 37. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)-2x^3-6x^2$ là



A. 5. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(3x^2+6x).f'(x^3+3x^2)-6x^2-12x=(3x^2+6x)\left[f'(x^3+3x^2)-2\right]$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'(x^3+3x^2)=2\end{array}\right..$$

Phương trình $3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right..$

Phương trình $f'(x^3+3x^2)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3+3x^2=a<0\\ x^3+3x^2=b\in(0;2)\\ x^3+3x^2=c\in(2;4)\\ x^3+3x^3=d>4\end{array}\right..$

Hàm số $h(x)=x^3+3x^2$ có $h'(x)=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right..$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		$+\infty$
$h'(x)$			|	$+$	0	$-$	0	$+$	|		
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biên thiên của hàm $h(x)$, ta có

Phương trình $x^3+3x^2=a<0$ có duy nhất một nghiệm $x_1<-3$.

Phương trình $x^3+3x^2=d>4$ có duy nhất một nghiệm $x_2>1$.

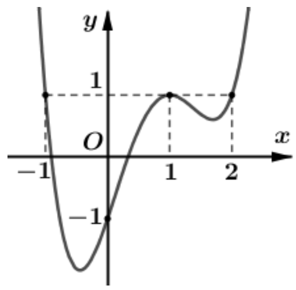
Phương trình $x^3+3x^2=b\in(0;2)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Phương trình $x^3+3x^2=c\in(2;4)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Do đó, phương trình $g'(x)=0$ có mười nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có mười điểm cực trị.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $g(x)=f(\sqrt{-x^2+4x})$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 1. **B.** 7 **C.** 3. **D.** 5.



Lời giải

Chọn C

. Ta có $g'(x)=\left(\dfrac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x}}\right).f'\left(\sqrt{-x^2+4x}\right)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+4=0\\ f'\left(\sqrt{-x^2+4x}\right)=0\end{array}\right.\xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)}\left[\begin{array}{l}x=2\\ \sqrt{-x^2+4x}=a\in(-1;0)\\ \sqrt{-x^2+4x}=1\\ \sqrt{-x^2+4x}=b\in(1;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2\pm\sqrt{3}\\ x=b_1\in(2-\sqrt{3};2)\\ x=b_2\in(2+\sqrt{3};4)\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu g'(x) (các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu)

x 0 $2-\sqrt{3}$ b_1 2 $2+\sqrt{3}$ b_2 4

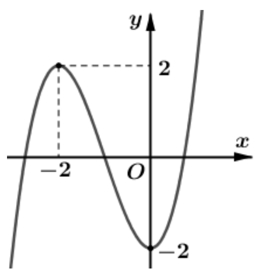
$g'(x)$ || + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - ||

=>đáp án C

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 3. **B.** 4.

C. 5. **D.** 6.



Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'(-x^2+3x)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+3=0\\ f'(-x^2+3x)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ -x^2+3x=-2\\ -x^2+3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn#A.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4\in\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

- $-2x+3=-5<0.\ (1)$
- $-x^2+3x=-4\xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)}f'(-4)>0$ (vì f đang tăng). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'(-x^2+3x)<0$ trên khoảng $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2-4x)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(2x^2-12x+m)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có:

$f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2(x^2-4x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\\ x=4\end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

$g(x)=f(2x^2-12x+m)\Rightarrow g'(x)=(4x-12)f'(2x^2-12x+m)$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow(4x-12)f'(2x^2-12x+m)=0$ (*)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ 2x^2-12x+m=-1\\ 2x^2-12x+m=0\\ 2x^2-12x+m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=3 & \\ 2x^2-12x+m=-1\ (l) & \\ 2x^2-12x=-m & (1)\\ 2x^2-12x=4-m & (2)\end{array}\right.$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$)

Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C).

$y'=4x-12$

Ta có bảng biến thiên

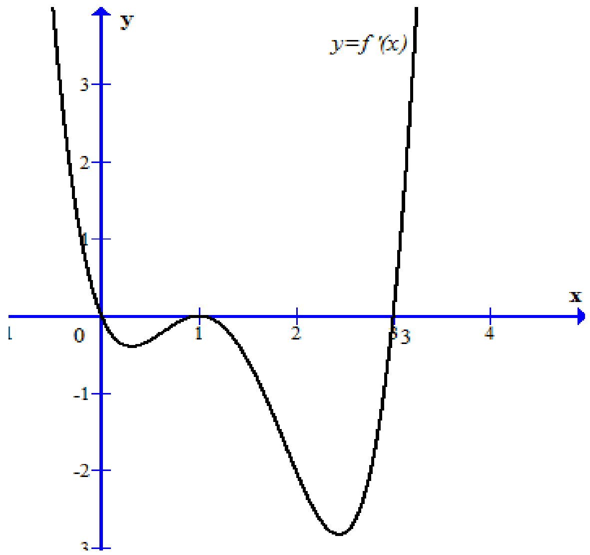
x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Để $g\left(x\right)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $\left(1\right);\left(2\right)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y=4-m$ và $y=-m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-m$.

Ta có: $-18<-m \Leftrightarrow m<18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 41. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục rên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(x^2+m\right)$ có đúng 3 điểm cực trị.



A. 2. **B.** Vô số. **C.** 4 **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$y'=2x.f'\left(x^2+m\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2+m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+m=0 \\ x^2+m=1 \\ x^2+m=3 \end{array}\right..$$

Do đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ tiếp xúc với trụ hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Vì vậy y' chỉ có thể đổi dấu qua các điểm $x=0; x^2=-m; x^2=-m+3$.

Ta thấy nếu $\begin{cases} -m\neq 0 \\ -m+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 3 \end{cases}$ thì $x=0$ là nghiệm đơn, còn $\left[\begin{array}{l} -m=0 \\ -m+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ thì nghiệm $x=0$ là nghiệm bội 3 suy ra $x=0$ là một điểm cực trị, do vậy các nghiệm cần hai nghiệm qua đó đạo hàm đổi dấu.

Vì $-m<-m+3$ nên hàm số có 3 cực trị khi $\begin{cases}-m\le 0\\-m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 0\\m<3\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<3$ mặt khác m nguyên nên $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để hàm số có 3 cực trị.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^3(x^2-2mx+m+6)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Cho $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x^2-2mx+m+6=0\end{array}\right.$.

Trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn, $x=1$ là nghiệm bội lẻ.

Để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị thì $f'(x)=0$ chỉ đổi dấu 1 lần.

Trường hợp: $x^2-2mx+m+6\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m^2-m-6\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$. Suy ra có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Trường hợp: tam thức $x^2-2mx+m+6$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x=1$. Khi đó $1^2-2m.1+m+6=0\Rightarrow m=7$.

Vậy $m\in\{-2;-1;0;1;2;3;7\}$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^3(x^2-2mx+m+6)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Cho $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x^2-2mx+m+6=0\end{array}\right.$.

Trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn, $x=1$ là nghiệm bội lẻ.

Để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị thì $f'(x)=0$ chỉ đổi dấu 1 lần.

Trường hợp: $x^2-2mx+m+6\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

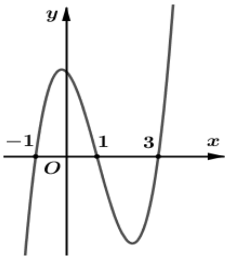
$\Leftrightarrow m^2-m-6\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$. Suy ra có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Trường hợp: tam thức $x^2-2mx+m+6$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x=1$. Khi đó $1^2-2m.1+m+6=0\Rightarrow m=7$.

Vậy $m\in\{-2;-1;0;1;2;3;7\}$.

Câu 44. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

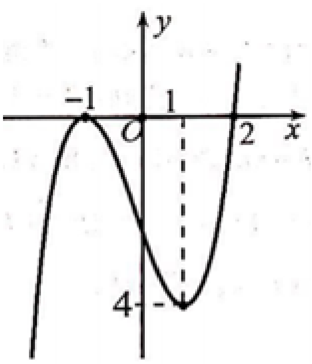
Suy ra $g'(x)=0\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-1+2\sqrt{2}\\ x=-1-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R. Đường cong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và liên tục trên R. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**



A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $(-2;-1)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

D. Hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(0;2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm $g\left(x\right)=f\left(x^2-2\right)$ có tập xác định D = R

$g'\left(x\right)=\left[f\left(x^2-2\right)\right]'=2xf'\left(x^2-2\right)=2xf'\left(t\right)$ với $t=x^2-2$

$g(x)$ đồng biến $\Rightarrow g'(x)>0 \Leftrightarrow x.f'(x^2-2)>0$

TH1: $x>0$

Suy ra: $f'(x^2-2)>0$

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow x^2-2>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $x>0$ suy ra: $x\in(2;+\infty)$ (1)

TH2: $x<0$

Suy ra: $f'(x^2-2)<0$

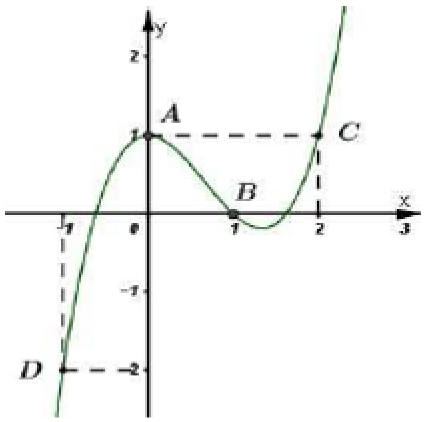
Dựa vào đồ thị $\Rightarrow x^2-2<2 \Leftrightarrow -2<x<2$

Kết hợp điều kiện $x<0$ suy ra: $x\in(-2;0)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng (-2;0) và (2;+∞).

Tương tự hàm số $g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng (-∞;-2) và (0;2).

Câu 46. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ với đạo hàm $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm



số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào ?

A. $x=-1$. **B.** $x=1$.
C. $x=0$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$, có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-x^2+2x-1;\forall x\in R$

Ta có $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$ (*)

Từ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ ta thấy: $f'\left(0\right)=1=\left(0-1\right)^2$ nên $x=0$ là một nghiệm của $g'\left(x\right)$.

$f'\left(1\right)=0=\left(1-1\right)^2 \Rightarrow x=1$ là nghiệm của $g'\left(x\right)$.

$f'\left(2\right)=1=\left(2-1\right)^2 \Rightarrow x=2$ là nghiệm của $g'\left(x\right)$.

Vậy phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x_1=0; x_2=1; x_3=2$.

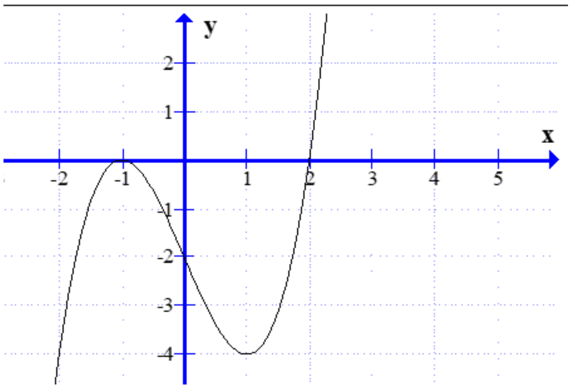
Vẽ đồ thị hàm số $y=(x-1)^2$ trên cùng mặt tọa độ với $y=f'(x)$ ta thấy:

Trong khoảng (0;1) thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)>0,\forall x\in(0;1)$.

Trong khoảng (1;2) thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)<0,\forall x\in(1;2)$.

Vậy $x=1$ là điểm cực đại của hàm số $y=g(x)$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và đạo hàm y=f'(x) có đồ thị như hình vẽ



Xét hàm số $g(x)=f(3-x^2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. Hàm số g(x) nghịch biến trên khoảng (0;2)
B. Hàm số g(x) nghịch biến trên $(-\infty;-2)$
C. Hàm số đồng biến trên (-1;0)
D. Hàm số g(x) nghịch biến trên khoảng (-2;-1)

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=-2x.f'(3-x^2)$

$$g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right.$$

Mặt khác: $f'(3-x^2)>0\Rightarrow3-x^2>2\Leftrightarrow-1<x<1$

x	-∞ +∞		-2				-1		0			1	2
$f'(3-x^2)$		-	0	-	0	+	|	+	0	-	0	-	
g'		-	0	-	0	+	0	-	0	+	0	+	

Dựa vàc

Câu 48. C

nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm $f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách.

- Bỏ phần bên trái trục Oy.

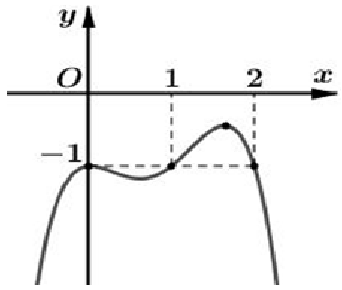
- Giữ và lấy đối xứng phần đồ thị nằm bên phải trục Oy qua trục Oy.

Ta thấy $x=0$ là một điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$.

Do đó hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị khi phần đồ thị bên phải trục Oy có một điểm cực trị$\Rightarrow f'(x)$ đổi dấu 1 lần với $x>0 \Rightarrow m>0$.

Mà $m\in[-5;5]$ và $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm.



A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** không có điểm cực tiểu. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)+1$. Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1$ (1).

Nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-1$ có ba điểm chung có hoành độ là $0;1;2$. Do đó $f'(x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Trên $(-\infty;1)$ đường thẳng $y=-1$ tiếp xúc hoặc nằm trên đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Trên $(1;2)$ đường thẳng $y=-1$ nằm dưới đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

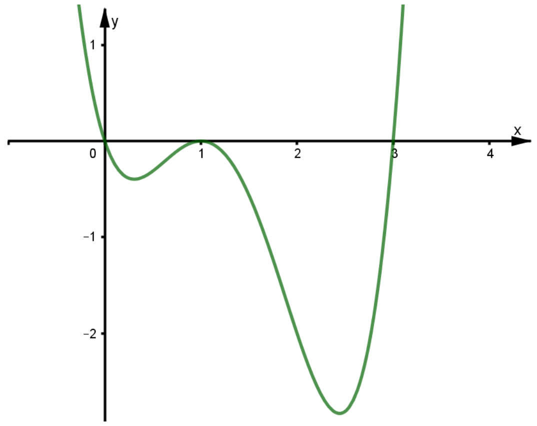
Trên $(2;+\infty)$ đường thẳng $y=-1$ nằm trên đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ:



Đồ thị của hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
B. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	0	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có: $y=\left(f\left(x\right)\right)^2 \Rightarrow y'=2f\left(x\right).f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=0 \\ f'\left(x\right)=0 \end{array}\right.$.

Quan sát đồ thị ta có $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ và $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ với $x_1\in\left(0;1\right)$ và $x_2\in\left(1;3\right)$.

Suy ra $y'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f\left(x\right)>0 \\ f'\left(x\right)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f\left(x\right)<0 \\ f'\left(x\right)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left(3;+\infty\right) \\ x\in\in\left(0;x_1\right)\cup\left(1;x_2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(0;x_1\right)\cup\left(1;x_2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$

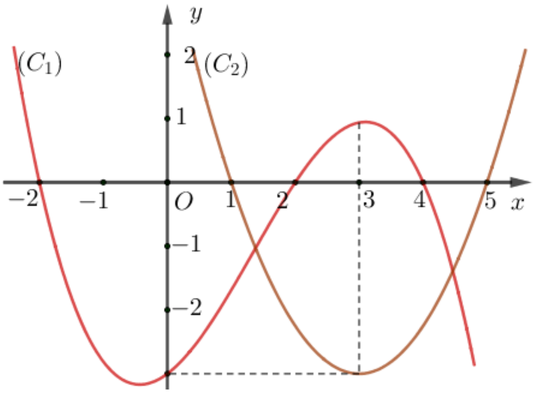
Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^2$

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	y_1	$\searrow$		$\nearrow$	y_2	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^2$ có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

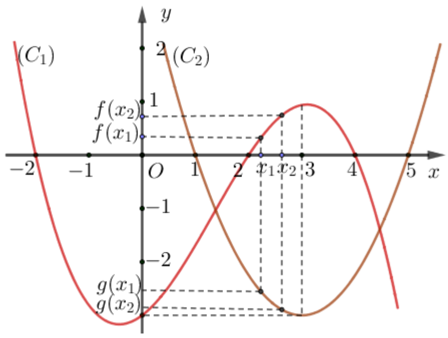
Câu 51. Cho hai hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right),\left(C_2\right)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x\right).g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;0\right)$.
B. $\left(4;5\right)$.
C. $\left(2;3\right)$.
D. $\left(0;1\right)$.



Lời giải

Chọn C



Ta xét khoảng $(2;3)$, với mọi $x_1, x_2 \in (2;3), x_1 < x_2$ ta có:

$$\begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 > g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 < -g(x_1) < -g(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1).[-g(x_1)] < f(x_2).[-g(x_2)] \Rightarrow f(x_1).g(x_1) > f(x_2).g(x_2)$$

$$\Rightarrow y(x_1) > y(x_2)$$

Hay hàm số nghịch biến trên $(2;3)$.

Câu 52. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x = -3, x = 3, x = 5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x) = f\left(e^{x^3+3x^2} - m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2}.f'\left(e^{x^3+3x^2} - m\right)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2}.f'\left(e^{x^3+3x^2} - m\right) = 0$$

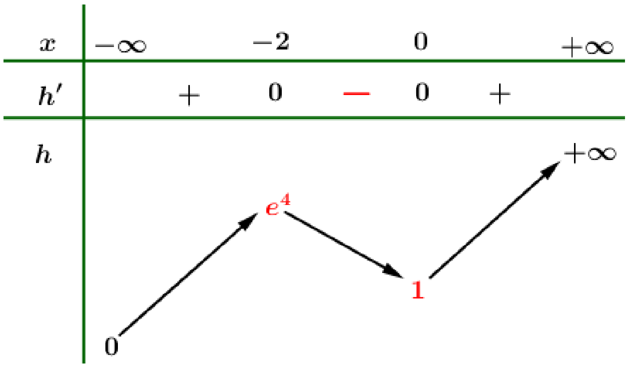
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ e^{x^3+3x^2} - m = -3 \\ e^{x^3+3x^2} - m = 3 \\ e^{x^3+3x^2} - m = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ e^{x^3+3x^2} = m - 3, (1) \\ e^{x^3+3x^2} = m + 3, (2) \\ e^{x^3+3x^2} = m + 5, (3) \end{array}\right. .$$

Hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi tổng số nghiệm đơn và bội lẻ, khác 0 và -2 của các phương trình $(1), (2), (3)$ là 5.

Xét hàm số $h(x)=e^{x^3+3x^2}$ có $h'(x)=(3x^2+6x)e^{x^3+3x^2}$.

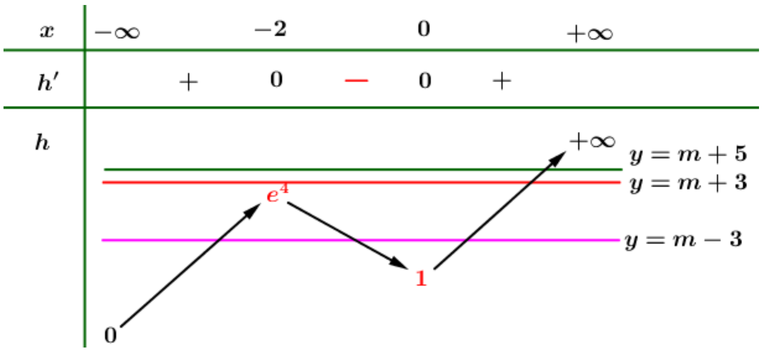
Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Khi đó có 3 trường hợp sau:

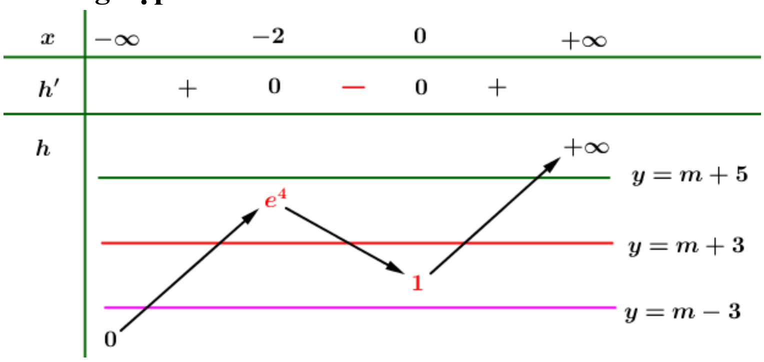
Trường hợp 1:



Khi đó: $\begin{cases} m+3 \ge e^4 \\ 1 < m-3 < e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge e^4-3 \approx 51,6 \\ 4 < m < e^4+3 \approx 57,6 \end{cases}$

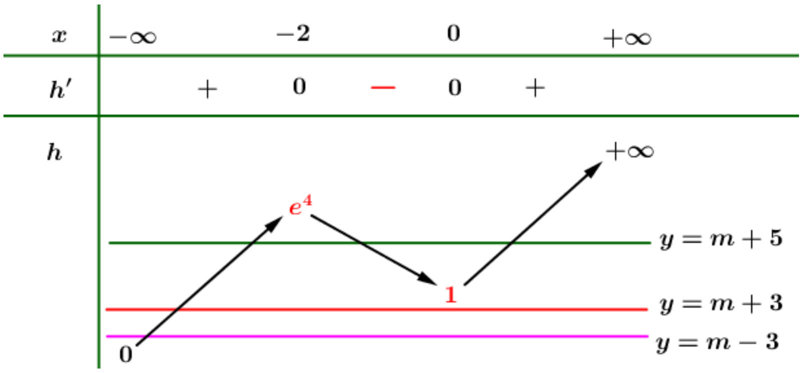
Do m nguyên nên $m \in \{52;53;54;55;56;57\}$.

Trường hợp 2:



Khi đó: $\begin{cases} m+5 \ge e^4 \\ 1 < m+3 < e^4 \\ 0 < m-3 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > e^4-5 \approx 49,6 \\ -2 < m < e^4-3 \\ 3 < m \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

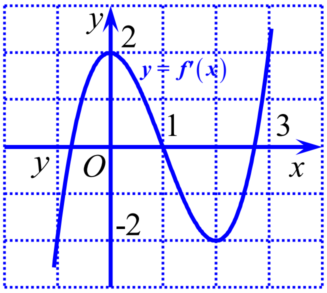
Trường hợp 3:



Khi đó: $\begin{cases}1<m+5<e^4\\ m+3\le 1\\ m-3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4<m<e^4-5\approx 49,6\\ m\le -2\\ m>3\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 53. Cho hàm $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(x-m)-\dfrac{1}{2}(x-m-1)^2+2020$ với m là tham số thự**C**. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$.

Tổng các phần tử của S bằng:

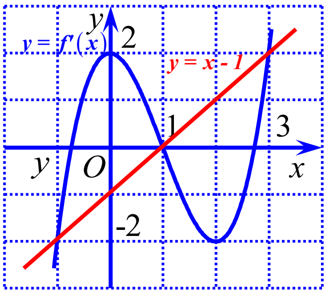
A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$

Đặt $h(x)=f'(x)-(x-1)$. Từ đồ thị $y=f'(x)$ và đồ thị $y=x-1$ trên hình vẽ ta suy ra $h(x)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x\le 1\\ x\ge 3\end{array}\right.$



Ta có $g'(x)=h(x-m)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x-m\le 1\\ x-m\ge 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m-1\le x\le m+1\\ x\ge m+3\end{array}\right.$

Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1;m+1)$ và $(m+3;+\infty)$

Do vậy, hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1\le 5\\ m+1\ge 6\end{cases}\\ m+3\le 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5\le m\le 6\\ m\le 2\end{array}\right.$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1;2;5;6\}$, tức $S = \{1;2;5;6\}$.

Tổng các phần tử của S bằng 14. Đáp án **C.**

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

#**A.** 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Đáp án: B

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x-3|)$

Ta có $g'(x) = \left[f(|x-3|)\right]' = (|x-3|)' . f'(|x-3|) = \dfrac{x-3}{|x-3|} f'(|x-3|)$.

Có $g'(x)$ không xác định tại $x = 3$.

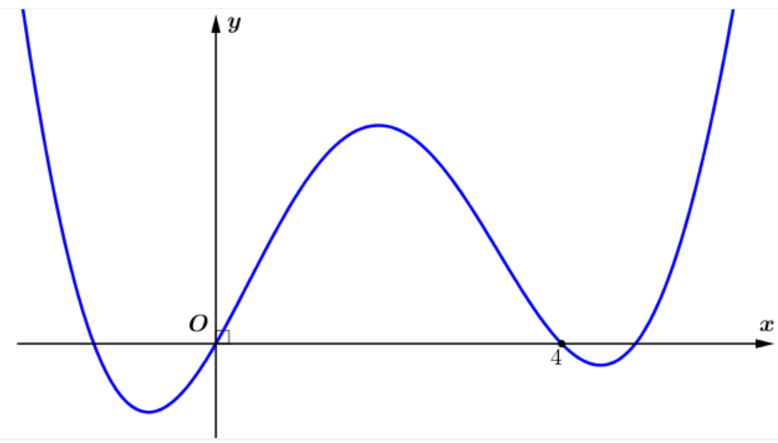
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x-3|) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-3| = -2 \\ |x-3| = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -1 \end{array}\right.$ ($|x-3| = -2$ loại)

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	**CT**	↗	**CĐ**	↘	**CT**	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = f(|x-3|)$ có 3 cực trị.

Câu 55. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(3x^2+6x).f'(x^3+3x^2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'(x^3+3x^2)=0\end{array}\right..$$

▪Phương trình $3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right..$

▪Phương trình $f'(x^3+3x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x^2=a<0\\ x^3+3x^2=0\\ x^3+3x^2=4\\ x^3+3x^3=b>4\end{array}\right..$

Ta thấy: $x^3+3x^2=0\Leftrightarrow x^2(x+3)=0\Leftrightarrow x=0;x=-3$

Và $x^3+3x^2=4\Leftrightarrow(x-1)(x+2)^2=0\Leftrightarrow x=1;x=-2$.

Hàm số $h(x)=x^3+3x^2$ có $h'(x)=3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right..$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\infty$	-3		-2		0		1		$+\infty$
$h'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$			
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	4	↘	0	↗	4	↗	$+\infty$

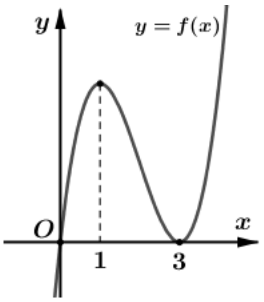
Dựa vào bảng biên thiên của hàm $h(x)$, ta có

Phương trình $x^3+3x^2=a<0$ có duy nhất một nghiệm $x_1<-3$.

Phương trình $x^3+3x^2=c>4$ có duy nhất một nghiệm $x_2>1$.

Do đó, phương trình $g'(x)=0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt và hai nghiệm bội ba nên hàm số $y=g(x)$ có sáu điểm cực trị.

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>1$. **B.** $m\geq 1$ **C.** $m\leq 2$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Chọn B

Số cực trị của hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+2m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số $y(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$ và $y=0$.

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)+2f(x)+2m$

$g'(x)=2f(x).f'(x)+2f'(x)=2f'(x)\left[f(x)+1\right]$

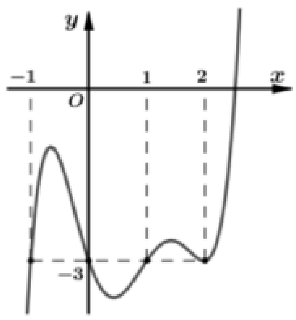
$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'(x)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=\alpha(\alpha<0)\end{array}\right.$

BBT

x	$-\infty$		α		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-1+2m$	↗	CĐ	↘	$2m$	↗	$+\infty$

Hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m\ge 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$. Đáp án B là gần kết quả nhất

Câu 57. Cho hàm đa thức $y=f(x)$ đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ là

A. 5. B. 6. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f(x)+3x,\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $h'(x)=f'(x)+3;\ h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\,(2n)\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm $f'(x)$ ta có BBT của hàm số $h(x)$ như sau

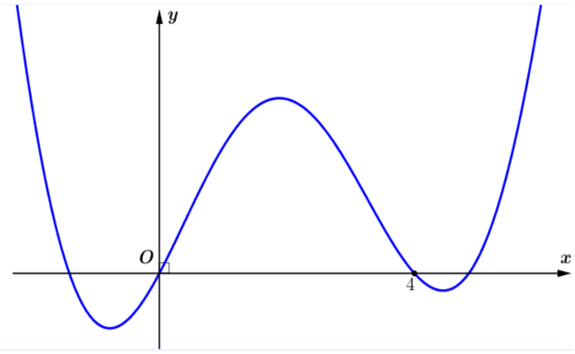
x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(-1)$	↗	$h(0)$	↘	$h(1)$	↗		↗	$+\infty$

Ta có $h(0)=f(0)+3.0<0$, suy ra $h(1)<0$, do đó trong khoảng $(1;+\infty)$ tồn tại giá trị x_0 sao cho $h\left(x_0\right)=0$. Từ đó ta có BBT của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		x_0		$+\infty$
g(x)	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$-h(-1)$	$\searrow$	$-h(0)$	$\nearrow$	$-h(1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

Câu 58. Cho hàm số bậc năm $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'\left(x\right)=\left(3x^2+6x\right).f'\left(x^3+3x^2\right)$.

$$g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0 \end{array}\right.$$

▪Phương trình $3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

▪Phương trình $f'\left(x^3+3x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x^2=a<0 \\ x^3+3x^2=0 \\ x^3+3x^2=4 \\ x^3+3x^3=b>4 \end{array}\right.$.

Ta thấy: $x^3+3x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(x+3\right)=0 \Leftrightarrow x=0; x=-3$

Và $x^3+3x^2=4 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x+2\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1; x=-2$.

Hàm số $h\left(x\right)=x^3+3x^2$ có $h'\left(x\right)=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $h\left(x\right)$:

x	$-\infty$	- 3		-2		0		1	$+\infty$
$h'\left(x\right)$			+	0	$-$	0	+		
$h\left(x\right)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$+\infty$

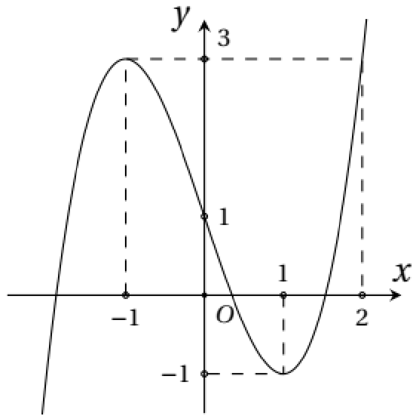
Dựa vào bảng biên thiên của hàm $h\left(x\right)$, ta có

Phương trình $x^3+3x^2=a<0$ có duy nhất một nghiệm $x_1<-3$.

Phương trình $x^3+3x^2=c>4$ có duy nhất một nghiệm $x_2>1$.

Do đó, phương trình $g'(x)=0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt và hai nghiệm bội ba nên hàm số $y=g(x)$ có sáu điểm cực trị.

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x_1=-1$, $x_2=1$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+1\right)+2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x_1=-1$, $x_2=1$ nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ $x_1=-1$, $x_2=1$.

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x+1\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x+1=-1\\x^2-2x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Ta có

$$g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-2>0\\f'\left(x^2-2x+1\right)>0\end{cases}\\\begin{cases}2x-2<0\\f'\left(x^2-2x+1\right)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1>1\\x^2-2x+1<-1\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<1\\-1<x^2-2x+1<1\end{cases}\end{array}\right.$$

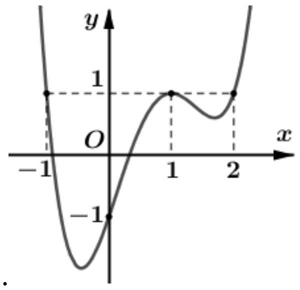
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<1\\0<x<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\0<x<1\end{array}\right..$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $g(x)=f(x^2-2x+1)+2019$ có 3 cực trị.

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f(x)-x$ đạt cực đại tại



.

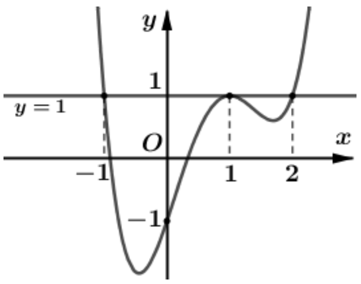
A. $x=-1$ **B.** $x=2$ **C.** $x=1$ **D.** $x=0$

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)-1 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=1$



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

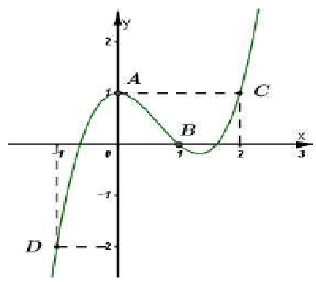
x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$

Chọn A

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;-1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=1$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=-1$.
B. $x=1$.
C. $x=0$.
D. $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số để kết luận điểm cực trị

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$, có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1;\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2\ (*)$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy: $f'(0)=1=(0-1)^2$ nên $x=0$ là một nghiệm của $g'(x)$.

$f'(1)=0=(1-1)^2\Rightarrow x=1$ là một nghiệm của $g'(x)$.

$f'(2)=1=(2-1)^2\Rightarrow x=2$ là một nghiệm của $g'(x)$.

Vậy phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x_1=0,x_2=1,x_3=2$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=(x-1)^2$ trên cùng mặt phẳng tọa độ với $y=f'(x)$ ta thấy:

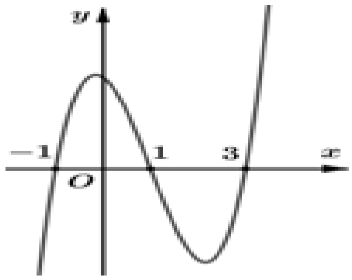
Trong khoảng $(0;1)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)<0,\forall x\in(0;1)$

Trong khoảng $(1;2)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)<0,\forall x\in(1;2)$.

Vậy $x=1$ là điểm cực đại của hàm số $y=g(x)$.

Câu 62. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm

số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 11

Lời giải

Chọn A

$$g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)\Rightarrow g'(x)=\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right).$$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0\end{array}\right.$$

Theo đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-1+\sqrt{2}\\ x=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Theo bảng xét dấu ta có điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là: 3

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị của hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?

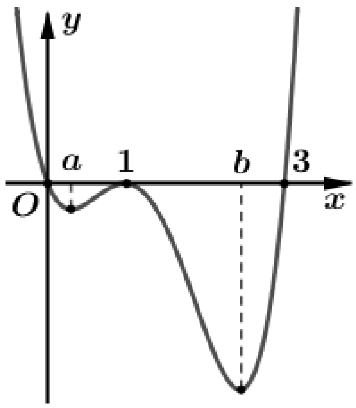
A. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
B. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 (\text{nghiệm kép}) \\ x=3 \end{array}\right. \text{ và } f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a(0<a<1) \\ x=1 \\ x=b(1<b<3) \end{array}\right.$$



Ta có $g'(x)=2f'(x).f(x)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ (0<a<1) \\ x=1 \\ x=b\ (1<b<3) \\ x=0 \\ x=1\ (\text{nghiem boi } 2) \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		a		1		b		3		$+\infty$
f'		$-$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	
f		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $g(x)$ có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Chọn.C.

Câu 64. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$.

A. 12.
B. 11.
C. 13.
D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$ khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in (-3;3)$.

$\Leftrightarrow 3x^2-6x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in (-3;3)$.

$\Leftrightarrow m=3x^2-6x$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in (-3;3)$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2-6x$.

Ta có $f'(x)=6x-6$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

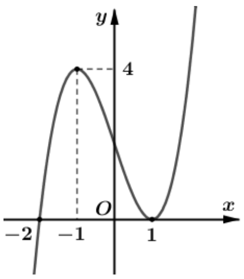
Bảng biến thiên

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	45	$\searrow$	-3	$\nearrow$	9

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3<m<9$.

Vậy $m \in \{-2;-1;0;...;8\}$.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)<0$, đồng thời đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f^2(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \quad (\text{nghiem kep}) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$		$y=0$

Xét $g'(x)=2f'(x)f(x)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo BBT } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \quad (\text{nghiem kep}) \\ x=a\,(a<-2) \\ x=b\,(b>0) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		-2		b		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

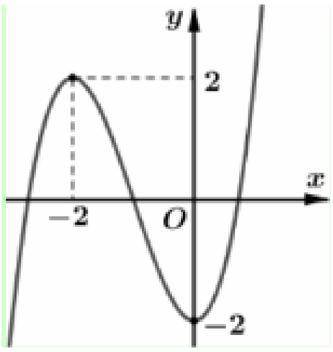
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=0\in(-2;b)$

- $x=0\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(0)>0.$ (1)
- Theo giả thiết $f(0)<0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(0)<0$ trên khoảng $(-2;b)$.

Nhận thấy $x=-2;\ x=a;\ x=b$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này. Nghiệm $x=1$ là nghiệm kép nên $g'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm này, trong bảng biến thiên ta bỏ qua nghiệm $x=1$ vẫn không ảnh hưởng đến quá trình xét dấu của $g'(x)$.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(-x^2+3x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x)=(-2x+3).f'\left(-x^2+3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+3=0\\ f'\left(-x^2+3x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ -x^2+3x=-2\\ -x^2+3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\\ x=0\\ x=3\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A

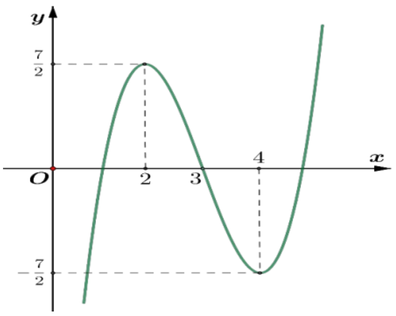
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4\in\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

- $-2x+3=-5<0.$ (1)
- $-x^2+3x=-4\xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(-4)>0$ (vì f đang tăng). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'(-x^2+3x)<0$ trên khoảng $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Giá trị cực đại của hàm số $g(x)=f(x)+1$ là

A. 2. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{9}{2}$

Lời giải

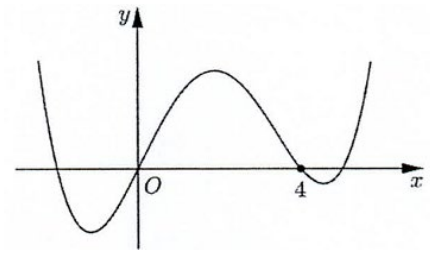
Đáp án: D

Ta có: $g'(x)=\left[f(x)+1\right]'=f'(x)$.

Từ đồ thị của hàm số ta thấy $f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=4$ nên hàm số $f(x)+1$ cũng đạt cực đại tại $x=2$.

Vậy giá trị cực đại của $g(x)$ là $f(2)+1=\dfrac{7}{2}+1=\dfrac{9}{2}$.

Câu 68. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2019^{f(x)}+2020^{f(x)}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

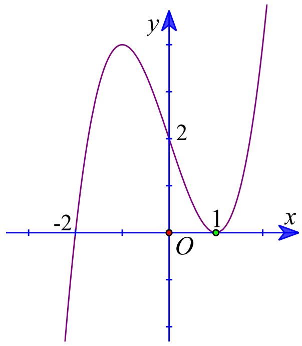
Ta có $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=f'(x).2019^{f(x)}\ln 2019+f'(x).2020^{f(x)}\ln 2020=f'(x)\left[2019^{f(x)}\ln 2019+2020^{f(x)}\ln 2020\right]$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow f'(x)=0$ (do $2019^{f(x)}\ln 2019+2020^{f(x)}\ln 2020>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $y=2019^{f(x)}+2020^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 69. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$.



A. 4 **B.** 2

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị ta có $y=f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=-2$ nên hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực trị là $x=-2$.

Ta có $y'=\left[f\left(x^2-3\right)\right]'=2x.f'\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=-2\\x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Mà $x=\pm2$ là nghiệp kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$ có ba cực trị.

Câu 70. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'\left(x\right)=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(2x-2\right).f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.$

Với $2x-2=0\Leftrightarrow x=1$

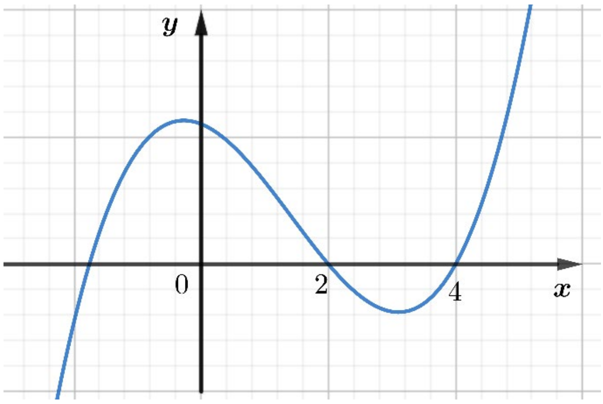
Với $f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=1\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\pm\sqrt{2}\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị là $x=-1,x=1,x=3$

Câu 71. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+3\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'\left(x\right)=\left(x^2-2x+3\right)'.f'\left(x^2-2x+3\right)=\left(2x-2\right).f'\left(x^2-2x+3\right)$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(2x-2\right).f'\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x+3\right)=0\end{array}\right.$

$2x-2=0\Leftrightarrow x=1$

$f'\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+3=x_1\\ x^2-2x+3=x_2\end{array}\right.$

(x_1,x_2 là 2 điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$, với $x_1<2$, $2<x_2<4$)

Xét phương trình $x^2-2x+3=x_1\Leftrightarrow x^2-2x+3-x_1=0$ (1)

Ta có $\Delta'=1-\left(3-x_1\right)=x_1-2<0$ suy ra phương trình (1) vô nghiệm

Xét phương trình $x^2-2x+3=x_2\Leftrightarrow x^2-2x+3-x_2=0$ (2)

Ta có $\Delta'=1-\left(3-x_2\right)=x_2-2>0$ suy ra phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt

Mặt khác thay x = 1 vào (2) không thỏa mãn. Do đó (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

Vậy hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+3\right)$ có 3 điểm cực trị

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

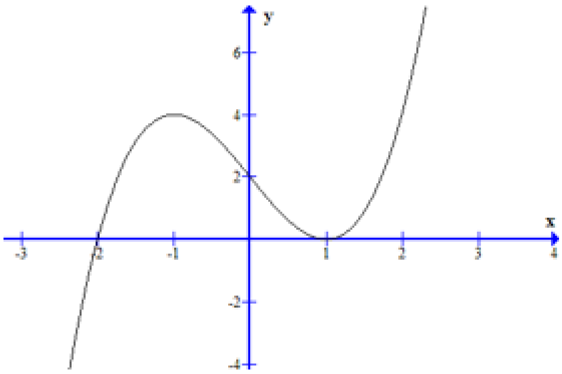
Chọn B

Ta có $g'(x)=2x.f'\left(x^2+1\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+1) \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo BBT}} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=-2 \\ x^2+1=1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=0 \ \ (\text{nghiem don}) \\ x=0 \ \ (\text{nghiem kep}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0 (\text{nghiem boi } 3).$$

Vậy $g'(x)=0$ có duy nhất nghiệm bội lẻ $x=0$ nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-3)$.



A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1 :

Ta có $y'=\left[f(x^2-3)\right]'=2xf'(x^2-3)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right..$$

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có

$$f'(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3=1 \\ x^2-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right..$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$+$	
$y'=\left[f(x^2-3)\right]'$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy có 3 điểm mà đạo hàm đổi dấu qua đó nên ta có 3 điểm cực trị.

Cách 2 : Dự đoán đồ thị

Từ đồ thị ta suy ra hàm số $y=f'(x)=(x-1)^2(x+2)$.

$$\left[f(x^2-3)\right]'=2xf'(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right..$$

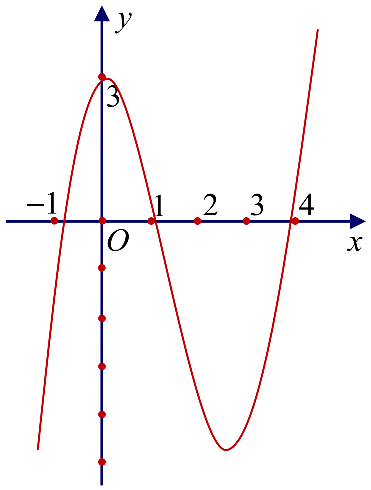
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left[(x^2-3)-1\right]^2\left[(x^2-3)+2\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$y=\left[f(x^2-3)\right]'$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

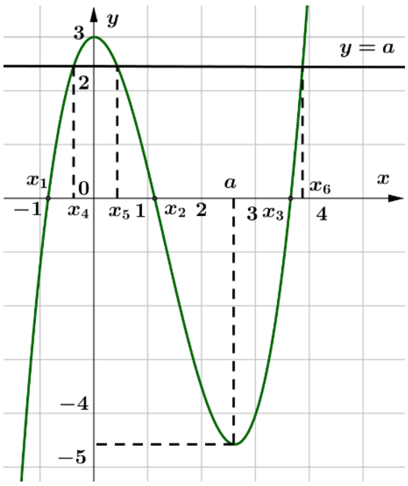
Từ bảng xét dấu ta thấy có 3 điểm mà đạo hàm đổi dấu qua đó nên ta có 3 điểm cực trị.

Câu 74. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right)=3f\left(f\left(x\right)\right)+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải



$g'\left(x\right)=3f'\left(f\left(x\right)\right).f'\left(x\right)$.

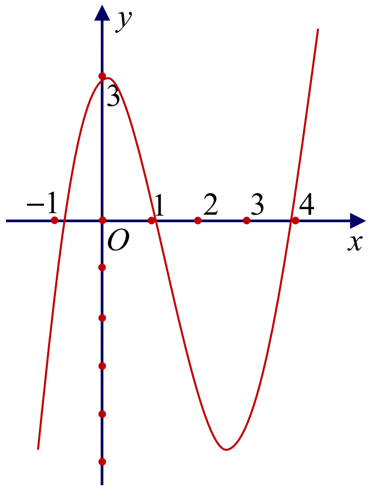
$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3f'\left(f\left(x\right)\right).f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(f\left(x\right)\right)=0\\ f'\left(x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)=a\\ x=0\\ x=a\end{array}\right.,\ \left(2<a<3\right).$$

$f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2<a<3$ nên $f\left(x\right)=a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

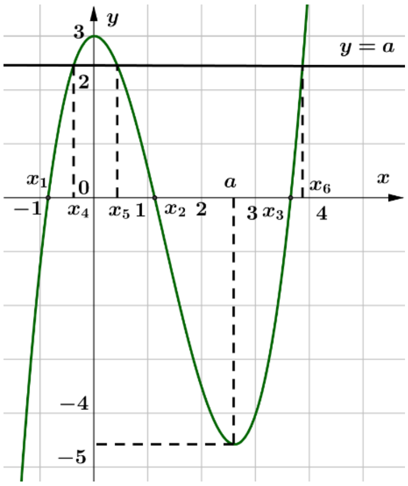
Suy ra $g'\left(x\right)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g\left(x\right)=3f\left(f\left(x\right)\right)+4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 75. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right)=3f\left(f\left(x\right)\right)+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải



$g'(x)=3f'(f(x)).f'(x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 3f'(f(x)).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(f(x))=0\\ f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=a\\ x=0\\ x=a\end{array}\right.,\ (2<a<3).$$

$f(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2<a<3$ nên $f(x)=a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

Suy ra $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x)=3f(f(x))+4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 76. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2)$ là

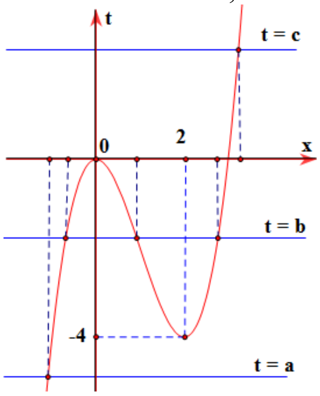
A. 5. **B.** 3.
C. 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

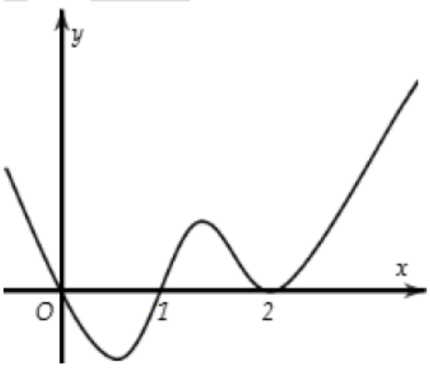
Đặt $t=x^3-3x^2\Rightarrow t'=3x^2-6x$. Trước hết xét $f(t)$ có ba cực trị, hoành độ các điểm cực trị tương ứng là $t=a<-4, t=b\in(-4;0), t=c>0$.

Ta có $g'(x)=t'.f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t'=0\\t=a\cup t=b\cup t=c\end{array}\right.$ và ta cần tìm các nghiệm t(x) = a, t(x) = b, t(x) = c khác nhau và khác 0; 2. Đồ thị t(x) là



Từ đó suy ra $f'(t)=0$ có 5 nghiệm x khác nhau và đều khác 0; 2 nên $g'(x)$ đổi dấu 7 lần nên có 7 cực trị.

Câu 77. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+2x)$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét $g'(x)=(3x^2+2).f'(x^3+2x)\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow f'(x^3+2x)=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}x^3+2x=a \text{ với } a\in(0;1) & (1)\\x^3+2x=b \text{ với } b\in(1;2) & (2)\\x^3+2x=2 & (3)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $y=x^3+2x\Rightarrow y'=3x^2+2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra cả ba phương trình trên đều có nghiệm duy nhất nên $g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $g(x)=f(x^3+2x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 78. Cho hàm số $y=|4+3x-x^2|+mx-2$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có đúng hai điểm cực tiểu và tổng hai giá trị cực tiểu tương ứng lớn hơn 1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=|4+3x-x^2|+mx-2=|x^2-3x-4|+mx-2$

Phá trị tuyệt đối: $y=\left|x^2-3x-4\right|+mx-2=\begin{cases} x^2+(m-3)x-6 & \text{nếu } \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge 4 \end{array}\right. \\ -x^2+(m+3)x+2 & \text{nếu } -1<x<4 \end{cases}$

Hàm số $y=\left|x^2-3x-4\right|+mx-2$ có hai điểm cực tiểu khi và chỉ khi:

$-1<\dfrac{m+3}{2}<4\Leftrightarrow -5<m<5\ (*)$.

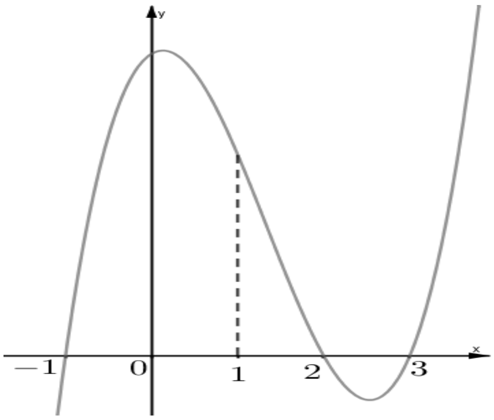
Hai giá trị cực tiểu sẽ là hai giá trị của hàm số tại $x=-1;x=4$.

Suy ra điều kiện: $y(-1)+y(4)>1\Leftrightarrow(-m-2)+(4m-2)>1\Leftrightarrow m>\dfrac{5}{3}\ (**)$.

Kết hợp $(*)$ với $(**)$, suy ra giá trị m nguyên thỏa mãn là $m\in\{2;3;4\}$.

Tổng tất cả các phần tử của S bằng 9.

Câu 79. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^4-8x^2+1\right)$ là



A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị $y=f(x)$ ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a\in(-1;1) \\ x=b\in(2;3) \end{array}\right.$.

Ta có: $g'(x)=\left(4x^3-16x\right)f'\left(x^4-8x^2+1\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 4x^3-16x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \\ f'\left(x^4-8x^2+1\right)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=2 & \\ x=0 & \\ x=-2 & \\ x^4-8x^2+1=a\in(-1;2) & (1) \\ x^4-8x^2+1=b\in(2;3) & (2) \end{array}\right..$$

Xét hàm số: $h(x)=x^4-8x^2+1$

Ta có $h'(x)=4x^3-16x$, $h'(x)=0\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	-15	↗	1	↘	-15	↗	$+\infty$

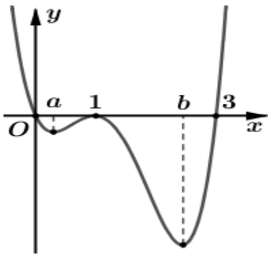
Dựa vào bảng biến thiên

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt không trùng với ba nghiệm của pt (1).

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 9 điểm cực trị.

Câu 80. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Đồ thị của hàm số $g(x)=[f(x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \text{ (nghiem kep)} \\ x=3 \end{array}\right. \text{ và } f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ (0<a<1) \\ x=1 \\ x=b\ (1<b<3) \end{array}\right.$$

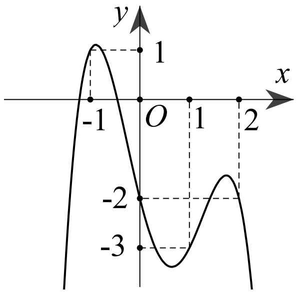
Ta có $g'(x)=2f'(x).f(x)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ (0<a<1) \\ x=1 \\ x=b\ (1<b<3) \\ x=0 \\ x=1 \text{ (nghiem boi 2)} \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		a		1		b		3		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $g(x)$ có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 81. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên.



Đặt $y=g\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5}{3}x^3+6x$. Hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

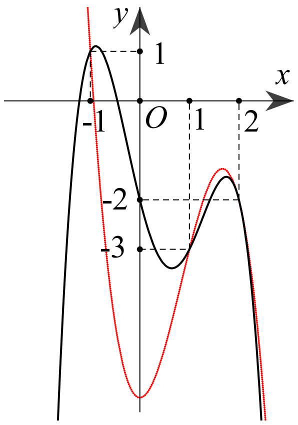
A. $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(-2;-1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Lời giải:

Chọn A

Xét hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5}{3}x^3+6x$ có $y'=g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+2x^3-5x^2+6$ $=f'\left(x\right)-\left(-2x^3+5x^2-6\right)$

Đặt $h\left(x\right)=-2x^3+5x^2-6$. Khi đó đồ thị $h\left(x\right)$ là một đường đứt khúc như hình sau

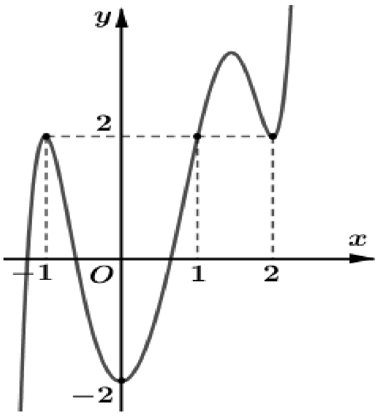


Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=h\left(x\right)$ tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1;x=1;x=2$.

$y'>0$ khi đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=h\left(x\right)$.

Vậy $x\in\left(-1;1\right)$ thì hàm số đồng biến.

Câu 82. Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

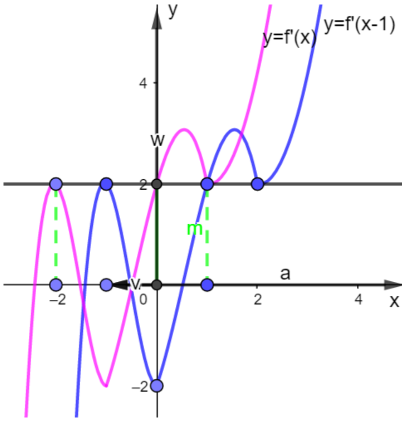
Lời giải:

Chọn A

Ta có: $y'=\left[2f'(x)-4\right]\pi^{2f(x)-4x}\ln\pi$.

$y'=0\Leftrightarrow 2f'(x)-4=0\Leftrightarrow f'(x)=2$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị



nên $f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

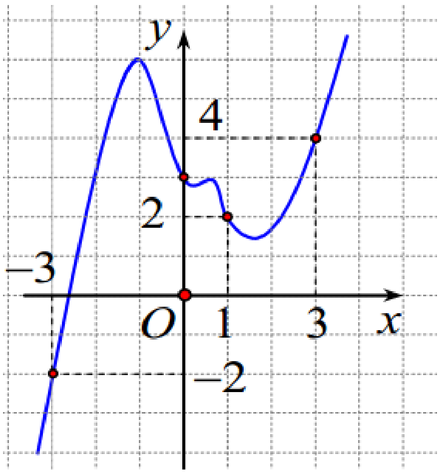
Do $x=-2$ và $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘				↗			$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 83. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$

cho như hình dưới đây. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.



A. $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

B. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$.

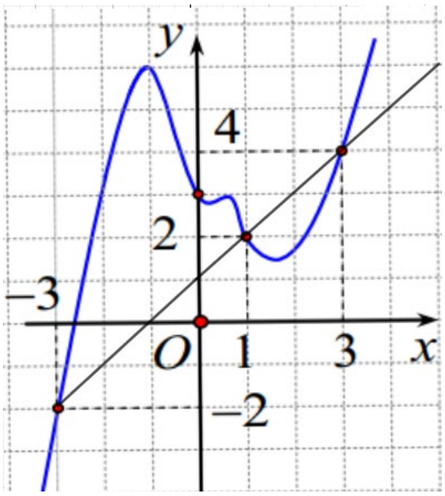
Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$

$\Rightarrow g'(x)=2f'(x)-(2x+2)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1$. Quan sát trên đồ thị ta có hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $y=x+1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x=1$.

Vậy ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$



Xét $\int\limits_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(1)-g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(1) > g(-3)$.

Tương tự xét $\int\limits_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x < 0 \Leftrightarrow g(3)-g(1) < 0 \Leftrightarrow g(3) < g(1)$.

Xét $\int\limits_{-3}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x + 2\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(3) > g(-3)$. Vậy ta có $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $y = (f(x))^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

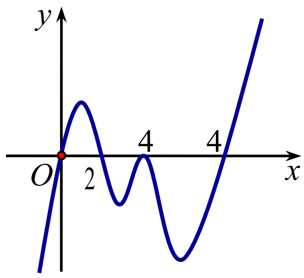
Chọn B

Ta có $y = (f(x))^3 \Rightarrow y' = 3f'(x).f^2(x)$.

Từ đồ thị ta có: $f'(x) = 0$ tại $x = -1, x = 1$. Bởi $f^2(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Từ đó suy ra $y = (f(x))^3$ có hai điểm cực trị là $x = -1, x = 1$.

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$, phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm thực và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực của hàm số $y = f(x^2)$.



A. 3.   **B.** 4.   **C.** 5.   **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 2x.f'\left(x^2\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

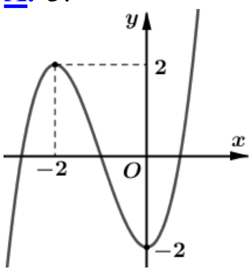
$$f'\left(x^2\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 > 4 \\ 0 < x^2 < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \\ -1 < x < 1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'\left(x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $y = f\left(-x^2 + 3x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 3.   **B.** 4.   **C.** 5.   **D.** 6.



Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = (-2x + 3).f'\left(-x^2 + 3x\right)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x + 3 = 0 \\ f'\left(-x^2 + 3x\right) = 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ -x^2 + 3x = -2 \\ -x^2 + 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn#A.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4\in\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

- $-2x+3=-5<0.\ (1)$
- $-x^2+3x=-4\xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(-4)>0$ (vì f đang tăng).(2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'(-x^2+3x)<0$ trên khoảng $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(2x)$ đạt cực đại tại

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f(2x)\Rightarrow g'(x)=2f'(2x)$

$$g'(x)=0\Rightarrow 2f'(2x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\\ 2x=0\Rightarrow x=0\\ 2x=2\Rightarrow x=1\end{array}\right.$$

Với $x=-1\Rightarrow g'(-1)=2f'(-2)>0.$

Với $x=-\frac{1}{4}\Rightarrow g'\left(-\frac{1}{4}\right)=2f'\left(-\frac{1}{2}\right)<0.$

Với $x=\frac{1}{2}\Rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right)=2f'(1)>0.$

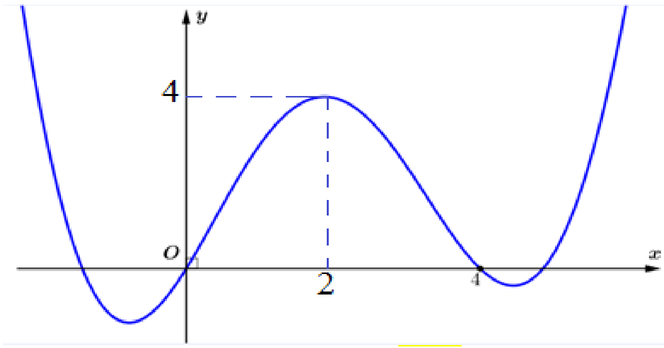
Với $x=2\Rightarrow g'(2)=2f'(4)<0.$

Ta có BBT sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{1}{2}$ và $x=1$.

Câu 88. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)-2x^3-6x^2$ là



A. 5. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\left(3x^2+6x\right).f'\left(x^3+3x^2\right)-6x^2-12x=\left(3x^2+6x\right)\left[f'\left(x^3+3x^2\right)-2\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'\left(x^3+3x^2\right)=2\end{array}\right..$$

Phương trình $3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

Phương trình $f'\left(x^3+3x^2\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x^2=a<0\\ x^3+3x^2=b\in(0;2)\\ x^3+3x^2=c\in(2;4)\\ x^3+3x^3=d>4\end{array}\right..$

Hàm số $h(x)=x^3+3x^2$ có $h'(x)=3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\infty$	-3		-2		0		1	$+\infty$
$h'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$		
$h(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $h(x)$, ta có

Phương trình $x^3+3x^2=a<0$ có duy nhất một nghiệm $x_1<-3$.

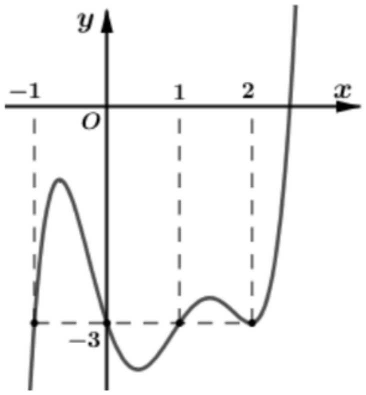
Phương trình $x^3+3x^2=d>4$ có duy nhất một nghiệm $x_2>1$.

Phương trình $x^3+3x^2=b\in(0;2)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Phương trình $x^3+3x^2=c\in(2;4)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Do đó, phương trình $g'(x)=0$ có mười nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có mười điểm cực trị.

Câu 89. Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x)=f(x)+3x$, $x\in\mathbb{R}$.

$h'(x)=f'(x)+3$, $x\in\mathbb{R}$.

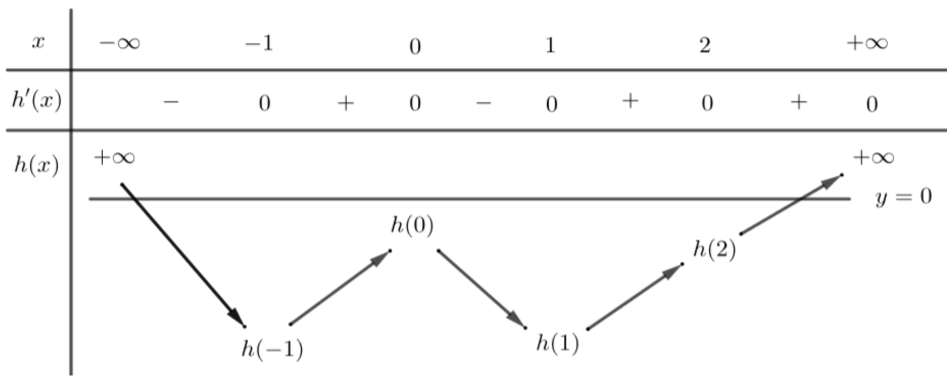
$$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Với $x=2$ là nghiệm kép vì qua nghiệm $x=2$ thì $h'(x)$ không đổi dấu.

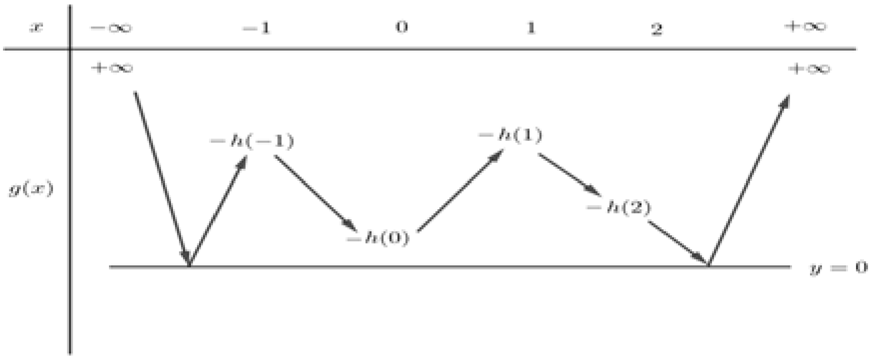
Dựa vào đồ thị hàm số của $f'(x)$, ta có: $\begin{cases}f'(x)<-3 & \forall x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\\ f'(x)>-3 & \forall x\in(-1;0)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)\end{cases}$.

Mặt khác $h(0)=f(0)+3.0<0$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)=f(x)+3x$:

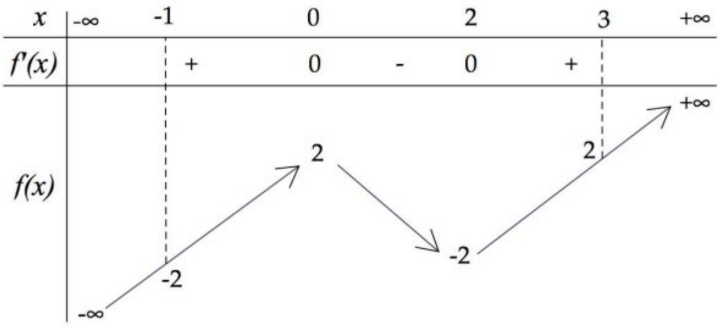


Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|f(x)+3x|=|h(x)|$:



$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)=|f(x)+3x|=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2\sin x+1)=f(m)$ có nghiệm thực?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\sin x+1$ suy ra $t\in[-1;3]$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

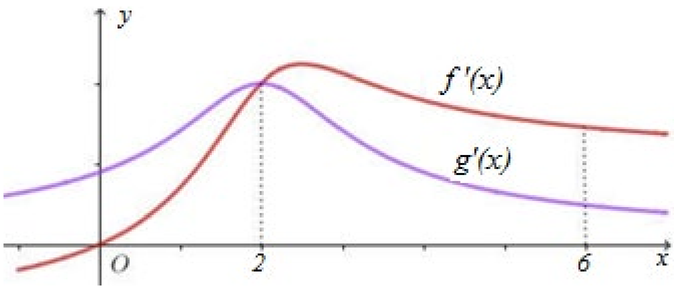
Phương trình $f(2\sin x+1)=f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t)=f(m)$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$.

$\Leftrightarrow \underset{[-1;3]}{Min}\, f(t)\le f(m)\le \underset{[-1;3]}{Max}\, f(t)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-2\le f(m)\le 2\Leftrightarrow -1\le m\le 3$.

Suy ra có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 91. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(6),h(2)$. **B.** $h(2),h(6)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(2),h(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

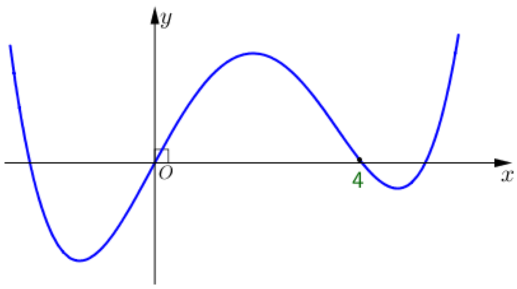
x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(6)$

Và $f(0)-f(6)<g(0)-g(6) \Leftrightarrow f(0)-g(0)<f(6)-g(6)$.

Hay $h(0)<h(6)$.

Vậy $\max\limits_{[0;6]} h(x)=h(6)$; $\min\limits_{[0;6]} h(x)=h(2)$.

Câu 92. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+4\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

Ta có $g'(x)=\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+4\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\ f'\left(x^3-3x^2+4\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ f'\left(x^3-3x^2+4\right)=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

Mặt khác, từ đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a<0\\ x=b\in(0;4)\\ x=c>4\end{array}\right.$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^3-3x^2+4=a & (2)\\ x^3-3x^2+4=b & (3)\\ x^3-3x^2+4=c & (4)\end{array}\right.$

Xét hàm số $u=x^3-3x^2+4$, $u'=3x^2-6x$, $u'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
u'			$+$		0	$-$	0		$+$		
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có

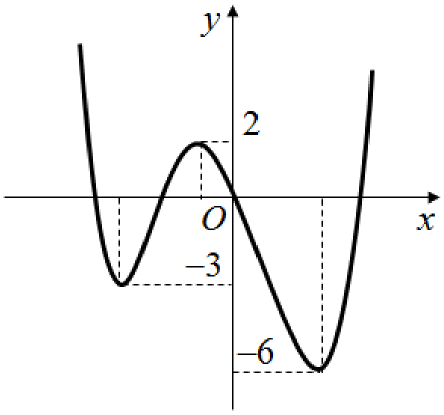
Với $a<0$, phương trình (2) có một nghiệm duy nhất nhỏ hơn -1

Với $b\in(0;4)$, phương trình (3) có ba nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $(-1;0);(0;2);(2;3)$

Với $c>4$, phương trình (4) có một nghiệm duy nhất lớn hơn 3

Vậy $g'(x)=0$ có 7 nghiệm đơn nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.

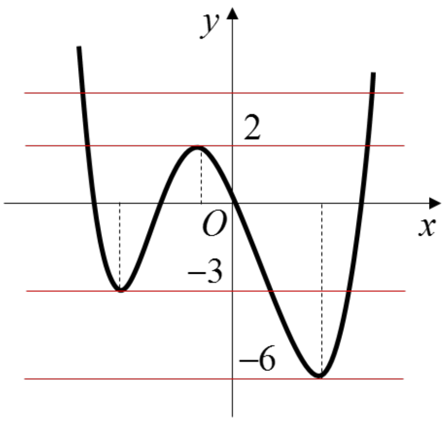


Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-2018)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của tập S bằng

A. 9. **B.** 7. **C.** 18. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2018)+m$ là 3.

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2018)+m\right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=0$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x-2018)+m$ tại 2 điểm (không tính giao điểm là điểm cực trị của đồ thị hàm số).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6<-m\le -3 \\ -m\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\le m<6 \\ m\le -2 \end{array}\right. .$$

Do m nguyên dương nên $m\in\{3;4;5\}\Rightarrow S=\{3;4;5\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tập S bằng: $3+4+5=12$.

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

TOANMATH.com

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_2(4x+4)+x=y+1+2^y$?

A. 10. **<u>B</u>.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Đặt $\log_2(4x+4)=t\Leftrightarrow 4x+4=2^t\Leftrightarrow x=2^{t-2}-1$.

Từ điều kiện $0\le x\le 2020\Rightarrow 0\le 2^{t-2}-1\le 2020\Leftrightarrow 1\le t-1\le 1+\log_2 2021$.

Theo giả thiết ta có: $t-1+2^{t-2}=y+1+2^y\ (*)$.

Xét hàm số $f(u)=u+2^{u-1}$ với $1\le u\le 1+\log_2 2021$.

Có $f'(u)=1+2^{u-1}.\ln 2>0,\forall u\in[1;1+\log_2 2021]$ nên hàm $f(u)$ đồng biến trên đoạn $[1;1+\log_2 2021]$.

Dựa vào $(*)\Rightarrow f(t-1)=f(y+1)\Leftrightarrow t-1=y+1$.

Mặt khác $1\le t-1\le 1+\log_2 2021\Rightarrow 1\le y+1\le 1+\log_2 2021\Rightarrow 0\le y\le \log_2 2021\approx 10,98$.

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Vậy có 11 cặp số nguyên thỏa mãn ycbt.

Câu 2. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$x\le 2020$ và $\log_2\dfrac{y}{2\sqrt{x+1}}=3(\sqrt{x+1}-\mathrm{y})-\mathrm{y}^2+x$?

<u>A</u>. 43. **B.** 44. **C.** 2020. **D.** 1011

Lời giải

<u>Chọn A</u>

Điều kiện bài toán: $\begin{cases}0\le x\le 2020\\ 1\le y\end{cases}$

Ta có: $\log_2\dfrac{y}{2\sqrt{x+1}}=3(\sqrt{x+1}-\mathrm{y})-\mathrm{y}^2+x$

$\Leftarrow\Rightarrow \log_2 y+y^2+3y=\log_2\sqrt{x+1}+(\mathrm{x}+1)+3\sqrt{x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(\mathrm{t})=\log_2 t+t^2+3t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2\ln t}+2t+3>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó(1)$\Leftrightarrow \Leftarrow\Rightarrow f(y)=f(\sqrt{x+1})\Leftrightarrow\Leftarrow\Rightarrow y=\sqrt{x+1}$

Vì $1\le x\le 2020$ nên $\sqrt{2}\le y=\sqrt{x+1}\le\sqrt{2021}\Leftarrow\Rightarrow 2\le y\le 44$

Do y nguyên dương nên có 43 số nguyên dương y thỏa yêu cầu bài toán

Rõ ràng, với mỗi y ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị x nguyên dương thỏa mãn.

Vậy có 43 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 3. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y}$ bằng

A. $\dfrac{e+\ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{e-\ln 2}{2}$. **<u>C</u>.** $\dfrac{e\ln 2}{2}$. **D.** $\dfrac{e}{2\ln 2}$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Có

$2^y + y = 2x + \log_2\left(x + 2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y + y = 2x + \log_2\left(2x + 2^y\right) - 1(1)$.

Đặt $t = \log_2\left(2x + 2^y\right) \Rightarrow 2x + 2^y = 2^t \Rightarrow 2x = 2^t - 2^y$.

(1) trở thành: $2^y + y = 2^t - 2^y + t - 1 \Leftrightarrow 2^{y+1} + y + 1 = 2^t + t(2)$.

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x, \forall x > 0 \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x > 0$ nên hàm số $f(x) = 2^x + x$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$. Kết hợp với (2) ta có: $t = y + 1$ hay $\log_2\left(2x + 2^y\right) = y + 1 \Leftrightarrow 2x + 2^y = 2^{y+1} \Leftrightarrow x = 2^{y-1}$.

Khi đó $P = \dfrac{x}{y} = \dfrac{2^{y-1}}{y} \Rightarrow P' = \dfrac{2^{y-1} y \ln 2 - 2^{y-1}}{y^2}$.

Cho $P = 0 \Leftrightarrow y \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Bảng biến thiên:

y	0		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e \ln 2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{e \ln 2}{2}$ khi $x = \dfrac{e}{2}$ và $y = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Câu 4. Gọi S là tập các giá trị của tham số m sao cho phương trình $(x+1)^3 + 3 - m = 3\sqrt[3]{3x+m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tính tổng tất cả các phần tử trong tập hợp S.

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x) = x^3 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên:

$(x+1)^3 + 3 - m = 3\sqrt[3]{3x+m}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = \left(\sqrt[3]{3x+m}\right)^3 + 3\sqrt[3]{3x+m}$

$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{3x+m}$

$\Leftrightarrow m = x^3 + 3x^2 + 1$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad 3 \quad +\infty$
y'	$+ \ 0 \ - \ 0 \ +$
y	$5 \quad +\infty$ $-\infty \quad 1$

Phương trình ban đầu có đúng hai nghiệm thực khi và chỉ khi $m = 5$ hoặc $m = 1$.

$\Rightarrow S = \{1;5\}$.

Câu 5. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$\log \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1} + (x+1)^3 = x^2 + 6x + 7$

A. $-2+\sqrt{3}$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-2-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện:

$\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}>0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-3x-5>0 \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-6x-6>0$

$\Leftrightarrow (x+1)^3-6(x+1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x-5)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1-\sqrt{6}<x<-1\\ -1+\sqrt{6}<x\end{array}\right.$.

$\log\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}+(x+1)^3=x^2+6x+7$.

$\Leftrightarrow \log(x^3+3x^2-3x-5)-\log(x^2+1)=x^2+6x+7-(x+1)^3$.

$\Leftrightarrow \log(x^3+3x^2-3x-5)+x^3+3x^2-3x-5=\log(x^2+1)+x^2+1 (*)$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log t+t\ (t>0)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+1$.

Với $t>0 \Rightarrow f'(t)>0$.

Vậy hàm $f(t)=\log t+t$ đồng biến với $t>0$.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$x^3+3x^2-3x-5=x^2+1$.

$\Leftrightarrow x^3+8+2x^2-3x-14=0$.

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(2x-7)=0$.

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-3)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}\\ x=-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình bằng 0.

Câu 6. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$\log\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}+(x+1)^3=x^2+6x+7$

A. $-2+\sqrt{3}$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-2-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện:

$\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}>0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-3x-5>0 \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-6x-6>0$

$\Leftrightarrow (x+1)^3-6(x+1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x-5)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1-\sqrt{6}<x<-1\\ -1+\sqrt{6}<x\end{array}\right.$.

$\log\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}+(x+1)^3=x^2+6x+7$.

$\Leftrightarrow \log(x^3+3x^2-3x-5)-\log(x^2+1)=x^2+6x+7-(x+1)^3$.

$\Leftrightarrow \log(x^3+3x^2-3x-5)+x^3+3x^2-3x-5=\log(x^2+1)+x^2+1(*)$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log t+t\ (t>0)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+1$.

Với $t>0\Rightarrow f'(t)>0$.

Vậy hàm $f(t)=\log t+t$ đồng biến với $t>0$.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$x^3+3x^2-3x-5=x^2+1$.

$\Leftrightarrow x^3+8+2x^2-3x-14=0$.

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(2x-7)=0$.

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-3)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình bằng 0.

Câu 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $1\le y\le 2020$ và $4^{x+1}+\log_2(y+3)=16.2^y+\log_2(2x+1)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 1010. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện bài toán: $\begin{cases} 0\le x\le 2020 \\ 1\le y\le 2020 \end{cases}$

Ta có: $4^{x+1}+\log_2(y+3)=16.2^y+\log_2(2x+1)\Leftrightarrow 2^{2x+2}-\log_2(2x+1)=2^{y+4}-\log_2(y+3)(*)$

Xét hàm số $f(t)=2^{t+1}-\log_2 t$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2^{t+1}\ln 2-\dfrac{1}{t\ln 2}=\dfrac{t.2^{t+1}.\ln^2 2-1}{t\ln 2}>0,\forall t\in[1;+\infty)\Rightarrow$ hàm sốđồng biến trên$[1;+\infty)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(y+3)\Leftrightarrow 2x+1=y+3\Leftrightarrow y=2x-2$

Vì $1\le y\le 2020\Leftrightarrow 1\le 2x-2\le 2020\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\le x\le 1011$.

Do x nguyên nên $x\in\{2;3;4;...;1011\}$. Rõ ràng, với mỗi x ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị y nguyên thỏa mãn.

Vậy có 1010 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 8. Phương trình $\log_2^3(x-1)-27y^3=8^y+1-x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên $(x;y)$ với $x\in\left[8^{1992};8^{2020}\right]$.

A. 26 **B.** 28 **C.** 24 **D.** 30

Lời giải

Chọn B

$\log_2^3(x-1)-27y^3=8^y+1-x \Leftrightarrow \log_2^3(x-1)+x-1=27y^3+2^{3y}$

Đặt $t=\log_2(x-1)\Leftrightarrow x-1=2^t$.Thay vào phương trình ta được $t^3+2^t=(3y)^3+2^{3y}$ (1).

Xé thàm số $y=f(u)=u^3+2^u$.

Ta có $f'(u)=3u^2+2^u\ln 2>0,\ \forall u\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(t)=f(3y)\Leftrightarrow t=3y\Leftrightarrow \log_2(x-1)=3y\Leftrightarrow x=8^y+1$.

Do $x\in\left[8^{1992}\ ;\ 8^{2020}\right]$ nên $8^{1992}\le 8^y+1\le 8^{2020}\Leftrightarrow 1992\le y\le 2019$ với $y\in\mathbb{Z}$.

Vậy có 28 giá trị nguyên của y nên phương trình có 28 nghiệm.

Câu 9. Cho $m=\log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)$, với $a>1$, $b>1$ và $P=\log_a^2 b+16\log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1: Tự luận.

Ta có $m=\log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log_a b\Rightarrow \log_a b=3m-1$; $\log_b a=\frac{1}{3m-1}$.

Do đó $P=\log_a^2 b+16\log_b a=(3m-1)^2+\frac{16}{3m-1}$.

Xét hàm số $f(m)=(3m-1)^2+\frac{16}{3m-1}\ \Rightarrow f'(m)=18m-6-\frac{48}{(3m-1)^2}$.

$f'(m)=0\Leftrightarrow 3m-1=2\Leftrightarrow m=1$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 12 tại $m=1$.

Câu 10. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $1\le y\le 2020$ và $4^{x+1}+\log_2(y+3)=16.2^y+\log_2(2x+1)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 1010. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện bài toán: $\begin{cases}0 \le x \le 2020 \\ 1 \le y \le 2020\end{cases}$

Ta có: $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 16.2^y + \log_2(2x+1) \Leftrightarrow 2^{2x+2} - \log_2(2x+1) = 2^{y+4} - \log_2(y+3) (*)$

Xét hàm số $f(t) = 2^{t+1} - \log_2 t$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2^{t+1}\ln 2 - \dfrac{1}{t\ln 2} = \dfrac{t.2^{t+1}.\ln^2 2 - 1}{t\ln 2} > 0, \forall t \in [1;+\infty) \Rightarrow$ hàm sốđồng biến trên$[1;+\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(2x+1) = f(y+3) \Leftrightarrow 2x+1 = y+3 \Leftrightarrow y = 2x-2$

Vì $1 \le y \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le 2x-2 \le 2020 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \le x \le 1011$.

Do x nguyên nên $x \in \{2;3;4;...;1011\}$. Rõ ràng, với mỗi x ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị y nguyên thỏa mãn.

Vậy có 1010 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2020$ và $\log_2(4x+4) + x = y + 1 + 2^y$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_2(4x+4) = t \Leftrightarrow 4x+4 = 2^t \Leftrightarrow x = 2^{t-2} - 1$.

Từ điều kiện $0 \le x \le 2020 \Rightarrow 0 \le 2^{t-2} - 1 \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le t-1 \le 1 + \log_2 2021$.

Theo giả thiết ta có: $t - 1 + 2^{t-2} = y + 1 + 2^y \ (*)$.

Xét hàm số $f(u) = u + 2^{u-1}$ với $1 \le u \le 1 + \log_2 2021$.

Có $f'(u) = 1 + 2^{u-1}.\ln 2 > 0, \forall u \in [1; 1+\log_2 2021]$ nên hàm $f(u)$ đồng biến trên đoạn $[1;1+\log_2 2021]$.

Dựa vào $(*) \Rightarrow f(t-1) = f(y+1) \Leftrightarrow t - 1 = y + 1$.

Mặt khác $1 \le t-1 \le 1+\log_2 2021 \Rightarrow 1 \le y+1 \le 1+\log_2 2021 \Rightarrow 0 \le y \le \log_2 2021 \approx 10,98$.

Vì $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Vậy có 11 cặp số nguyên thỏa mãn ycbt.

Câu 12. Phương trình $\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right) + |x| = \log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right) + \sqrt{2x^2+1}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \ne 0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}-1} + |x| = \log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right) + \sqrt{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow \log_2(2x^2) - \log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right) + |x| = \log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right) + \sqrt{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow 1 + 2\log_2|x| + |x| = 2\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right) + \sqrt{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow 2\log_2|x| + |x| = 2\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right) + \left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)$.

Xét hàm $f(t) = 2\log_2 t + t$ trên $(0;+\infty)$ và đi đến kết quả $|x| = \sqrt{2x^2+1} - 1$

$\Leftrightarrow |x| + 1 = \sqrt{2x^2+1} \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Câu 13. Cho các số thực x,y thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ và $\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$, ta có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0,\ \forall t>0$.

$\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến với $\forall t>0$.

$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow x+y=1-xy \Leftrightarrow y=\frac{1-x}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}$ (2).

Thế (2) vào P ta được $P=2x+\frac{1-x}{1+x}$ với $0\le x\le 1$.

$P'=2-\frac{2}{(x+1)^2}$; $P'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;1] \\ x=-2\notin[0;1]\end{array}\right.$.

$P(0)=1,\ P(1)=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 đạt được khi $x=0,\ y=1$.

Câu 14. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=6$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=8$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_9 x=t$

Theo đề ra có $\begin{cases}\log_9 x=\log_6 y=t\\ \log_9 x=\log_4(x+y)=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9^t & (1)\\ y=6^t & (2)\\ x+y=4^t & (3)\\ \frac{x}{y}=\left(\frac{3}{2}\right)^t & (4)\end{cases}$

Từ (1), (2), và (3) ta có

$$9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow (3^t)^2+(3.2)^t-4^t=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} & (TM)\\ \left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} & (L)\end{array}\right.$$

Thế vào (4) ta được $\frac{x}{y}=\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}\Rightarrow a=1;b=5$

Thử lại ta thấy $a=1;b=5$ thỏa mãn dữ kiện bài toán. Suy ra $a+b=6$.

Câu 15. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $1\le y\le 2020$ và $4^{x+1}+\log_2(y+3)=16.2^y+\log_2(2x+1)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 1010. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện bài toán: $\begin{cases}0\le x\le 2020\\1\le y\le 2020\end{cases}$

Ta có: $4^{x+1}+\log_2(y+3)=16.2^y+\log_2(2x+1)\Leftrightarrow 2^{2x+2}-\log_2(2x+1)=2^{y+4}-\log_2(y+3)(*)$

Xét hàm số $f(t)=2^{t+1}-\log_2 t$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2^{t+1}\ln 2-\dfrac{1}{t\ln 2}=\dfrac{t.2^{t+1}.\ln^2 2-1}{t\ln 2}>0,\forall t\in[1;+\infty)\Rightarrow$ hàm sốđồng biến trên$[1;+\infty)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(y+3)\Leftrightarrow 2x+1=y+3\Leftrightarrow y=2x-2$

Vì $1\le y\le 2020\Leftrightarrow 1\le 2x-2\le 2020\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\le x\le 1011$.

Do x nguyên nên $x\in\{2;3;4;...;1011\}$. Rõ ràng, với mỗi x ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị y nguyên thỏa mãn.

Vậy có 1010 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 16. Cho bất phương trình: $9^x+(m-1).3^x+m>0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. $m\ge-\dfrac{3}{2}$.. **B.** $m>-\dfrac{3}{2}$.. **C.** $m>3+2\sqrt{2}$.. **D.** $m\ge 3+2\sqrt{2}$..

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=3^x$

Vì $x>1\Rightarrow t>3$ Bất phương trình đã cho thành: $t^2+(m-1).t+m>0$ nghiệm đúng $\forall t\ge 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2-t}{t+1}>-m$ nghiệm đúng $\forall t>3$.

Xét hàm số $g(t)=t-2+\dfrac{2}{t+1},\forall t>3,g'(t)=1-\dfrac{2}{(t+1)^2}>0,\forall t>3$. Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)$ và $g(3)=\dfrac{3}{2}$. Yêu cầu bài toán tương đương $-m\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{3}{2}$.

Câu 17. Cho phương trình $7^x+m=\log_7(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-25;25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 26.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>m$.

Đặt $t=\log_7(x-m)$ ta có $\begin{cases}7^x+m=t\\7^t+m=x\end{cases}\Rightarrow 7^x+x=7^t+t$ (1).

Do hàm số $f(u)=7^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1)\Leftrightarrow t=x$. Khi đó:

$7^x+m=x\Leftrightarrow m=x-7^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-7^x\Rightarrow g'(x)=1-7^x\ln 7=0\Leftrightarrow x=-\log_7(\ln 7)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\log_7(\ln 7)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-\log_7(\ln 7))$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\le g(-\log_7(\ln 7))\approx -0,856$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x-m=7^x>0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25;25)$, nên $m\in\{-24;-23;...;-1\}$.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $1\le y\le 2020$ và $4^{x+1}+\log_2(y+3)=16.2^y+\log_2(2x+1)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 1010. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện bài toán: $\begin{cases}0\le x\le 2020\\ 1\le y\le 2020\end{cases}$

Ta có: $4^{x+1}+\log_2(y+3)=16.2^y+\log_2(2x+1)\Leftrightarrow 2^{2x+2}-\log_2(2x+1)=2^{y+4}-\log_2(y+3)\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=2^{t+1}-\log_2 t$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2^{t+1}\ln 2-\dfrac{1}{t\ln 2}=\dfrac{t.2^{t+1}.\ln^2 2-1}{t\ln 2}>0,\ \forall t\in[1;+\infty)\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(y+3)\Leftrightarrow 2x+1=y+3\Leftrightarrow y=2x-2$

Vì $1\le y\le 2020\Leftrightarrow 1\le 2x-2\le 2020\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\le x\le 1011$.

Do x nguyên nên $x\in\{2;3;4;...;1011\}$. Rõ ràng, với mỗi x ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị y nguyên thỏa mãn.

Vậy có 1010 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 19. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 16. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ x\ne \dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ta có $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(\dfrac{(2x-1)^2}{2x}\right)+4x^2-4x+1=2x$

$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x\,(1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0$ với $t>0$

Vậy hàm số đồng biến

Phương trình (1) trở thành $f\left((2x-1)^2\right)=f(2x)\Leftrightarrow (2x-1)^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$

Vậy $x_1+2x_2=\left[\begin{array}{l} \dfrac{9-\sqrt{5}}{4}\ (l) \\ \dfrac{9+\sqrt{5}}{4}\ (tm)\end{array}\right. \Rightarrow a=9; b=5 \Rightarrow a+b=9+5=14.$

Câu 20. Cho $x,\ y$ là các số thực dương thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1}+(x-y+1)(x-y-1)=\log_2(2xy)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_2(2xy)+\dfrac{4}{x^2+y^2}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Giả thiết $2^{x^2+y^2-1}+(x-y+1)(x-y-1)=\log_2(2xy) \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-1}+(x-y)^2-1=\log_2(2xy)$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+2^{x^2+y^2-1}-1=\log_2(2xy) \Leftrightarrow x^2+y^2-1+2^{x^2+y^2-1}=2xy+\log_2(2xy)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-1+2^{x^2+y^2-1}=\log_2(2xy)+2^{\log_2(2xy)}\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$, ta có $f'(t)=1+2^t\ln 2>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) suy ra $f\left(x^2+y^2-1\right)=f\left(\log_2(2xy)\right) \Leftrightarrow x^2+y^2-1=\log_2(2xy)$.

Khi đó $P=\log_2(2xy)+\dfrac{4}{x^2+y^2}=x^2+y^2+\dfrac{4}{x^2+y^2}-1\geq 2\sqrt{\left(x^2+y^2\right).\dfrac{4}{x^2+y^2}}-1=3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{4}{x^2+y^2} \\ x^2+y^2-1=\log_2(2xy)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1\end{array}\right.$.

Vì $x>0, y>0$ nên $x=y=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 3 khi và chỉ khi $x=y=1$.

Câu 21. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2(m-x)+2m=2^x+3x-1$ có nghiệm thuộc $[0;2]$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $m-x>0$

Ta có: $\log_2(m-x)+2m=2^x+3x-1$

$\Leftrightarrow \log_2(2m-2x)+2m-2x=2^x+x$

$\Leftrightarrow \log_2(2m-2x)+2m-2x=\log_2 2^x+2^x \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có: $f'(t)=1+\dfrac{1}{t.\ln 2}>0,\ \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(2m-2x)=f(2^x)\Leftrightarrow 2m-2x=2^x\Leftrightarrow 2m=2^x+2x$.

Đặt $g(x)=2^x+2x$. Vì $g'(x)=2^x.\ln 2+2>0,\ \forall x\in[0;2]$ nên ta có BBT:

x	0		2
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	8

Do đó ycbt $1\le 2m\le 8\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le m\le 4$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ $m\in\{1;2;3;4\}$

Vậy có 4 giá trị m cần tìm.

Câu 22. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $2.625^{x^2}-10.125^y=3y-4x^2+1$

A. 2020. **B.** 674. **C.** 2021. **D.** 1347.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có:

$2.625^{x^2}-10.125^y=3y-4x^2+11\Leftrightarrow 2.5^{4x^2}-2.5^{3y+1}=3y-4x^2+1$

$\Leftrightarrow 2.5^{4x^2}+4x^2=2.5^{3y+1}+3y+1 \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=2.5^t+t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $(*)\Leftrightarrow f(4x^2)=f(3y+1)\Leftrightarrow 4x^2=3y+1\Leftrightarrow 4x^2-1=3y\Leftrightarrow(2x-1)(2x+1)=3y(**)$

Do x,y nguyên nên $2x-1;2x+1\in\mathbb{Z}$ và 3 là số nguyên tố nên $(**)$ tương đương với hoặc $(2x-1)\vdots 3$ hoặc $(2x+1)\vdots 3$

Nếu $(2x-1)\vdots 3\Leftrightarrow 2x\equiv 1(\bmod 3)\Leftrightarrow 2x\equiv 4(\bmod 3)\Leftrightarrow x\equiv 2(\bmod 3)$

Nếu $(2x+1)\vdots 3\Leftrightarrow 2x\equiv -1(\bmod 3)\Leftrightarrow 2x\equiv 2(\bmod 3)\Leftrightarrow x\equiv 1(\bmod 3)$

Ta có 2021 giá trị nguyên của x sao cho $0\le x\le 2020$. Trong đó có 674 số chia hết cho 3. Nên có 1347 số thỏa $(**)$. Với mỗi giá trị nguyên của x thì ta tìm được một và chỉ một giá trị y nguyên tương ứng. Vậy có 1347 cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn bài toán.

Cách 2:

Ta có:

$2.625^{x^2}-10.125^y=3y-4x^2+11\Leftrightarrow 2.5^{4x^2}-2.5^{3y+1}=3y-4x^2+1$

$\Leftrightarrow 2.5^{4x^2}+4x^2=2.5^{3y+1}+3y+1 \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=2.5^t+t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $(*)\Leftrightarrow f(4x^2)=f(3y+1)\Leftrightarrow 4x^2=3y+1\Leftrightarrow 4x^2-1=3y \quad (**)$

Ta thấy $x \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3k \\ x = 3k+1 \\ x = 3k+2 \end{array}\right. (k \in \mathbb{N})$.

Với $x = 3k$ thì $4x^2 - 1 = 4.9k^2 - 1$ không chia hết cho 3 nên trường hợp này loại.

Với $\left[\begin{array}{l} x = 3k+1 \\ x = 3k+2 \end{array}\right.$ thì $x^2 = 3m+1$ $(m \in \mathbb{N})$ nên $4x^2 - 1 = 12m + 3$ chia hết cho 3.

Vậy $\left[\begin{array}{l} x = 3k+1 \\ x = 3k+2 \end{array}\right.$ mặt khác $0 \le x \le 2020$ nên có 1347 số nguyên x thỏa $(**)$.

Với mỗi giá trị nguyên của x thì ta tìm được một và chỉ một giá trị y nguyên tương ứng. Vậy có 1347 cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 23. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $\log_2(2x-2002) + x = y + 1002 + 2^y$ và $1002 \le x \le 2020$?

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(2x-2002) + x = y + 1002 + 2^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1001) + (x-1001) = 2^y + y$

Đặt $x - 1001 = u > 0, 2^y = v > 0$ ta có phương trình $\log_2 u + u = \log_2 v + v$ với hàm số

$f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ suy ra $u = v \Rightarrow x - 1001 = 2^y$

$\Rightarrow 1002 \le x = 2^y + 1001 \le 2020$ Suy ra $0 = \log_2 1 \le y \le \log_2 1019 = 9,99$.

y nguyên nên $y \in \{0;1;2;...;9\}$.

Câu 24. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $\log_2(2x-2002) + x = y + 1002 + 2^y$ và $1002 \le x \le 2020$?

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(2x-2002) + x = y + 1002 + 2^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1001) + (x-1001) = 2^y + y$

Đặt $x - 1001 = u > 0, 2^y = v > 0$ ta có phương trình $\log_2 u + u = \log_2 v + v$ với hàm số

$f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ suy ra $u = v \Rightarrow x - 1001 = 2^y$

$\Rightarrow 1002 \le x = 2^y + 1001 \le 2020$ Suy ra $0 = \log_2 1 \le y \le \log_2 1019 = 9,99$.

y nguyên nên $y \in \{0;1;2;...;9\}$.

Câu 25. Cho là các số thực thoả mãn $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Biết $0 \le x \le 2018$, số cặp $(x;y)$ thoả mãn đẳng thức là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y \Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)}+\log_2(x+1)=2^{3y}+3y(1)$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0$

Nên $(1)\Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y \Leftrightarrow x=2^{3y}-1$

Với $0\le x\le 2018 \Leftrightarrow 1\le 8^y\le 2019 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_8 2019, y\in\mathbb{Z} \Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$

Câu 26. Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\log_2\dfrac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2}+1+x^2-10xy+9y^2\le 0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}$. Tính $T=10M-m$.

A. $T=60$. **B.** $T=94$. **C.** $T=104$. **D.** $T=50$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2\dfrac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2}+1+x^2-10xy+9y^2\le 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+5y^2)-\log_2(x^2+10xy+y^2)+\log_2 2+2(x^2+5y^2)-(x^2+10xy+y^2)\le 0$

$\Leftrightarrow \log_2(2x^2+10y^2)+2(x^2+5y^2)\le \log_2(x^2+10xy+y^2)+(x^2+10xy+y^2)$

$\Leftrightarrow 2x^2+10y^2\le x^2+10xy+y^2$ ***(vi)***

$\Leftrightarrow x^2-10xy+9y^2\le 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^2-10\left(\dfrac{x}{y}\right)+9\le 0 \Leftrightarrow 1\le\dfrac{x}{y}\le 9$

$$P=\frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+9}{\frac{x}{y}+1}$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, điều kiện: $1\le t\le 9$

$f(t)=\dfrac{t^2+t+9}{t+1}$; $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4\\ t=2\end{array}\right.$

$f(1)=\dfrac{11}{2}$; $f(2)=5$; $f(9)=\dfrac{99}{10}$

Nên $M=\dfrac{99}{10}$, $m=5$. Vậy $T=10M-m=94$.

Câu 27. Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(2x-4y+6)\ge 1$, tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

A. $\sqrt{13}-3$ và $\sqrt{13}+3$ **B.** $\sqrt{13}-3$

C. $\left(\sqrt{13}-3\right)^2$ **D.** $\left(\sqrt{13}-3\right)^2$ và $\left(\sqrt{13}+3\right)^2$

Lời giải

Chọn C.

Giả thiết $\Leftrightarrow 2x-4y+6\ge x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\le 9$ (C_1).

Xét điều kiện $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=m$ (C_2).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (C_1),(C_2)$ tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{13}-3\right)^2$.

Câu 42 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y = f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn#A.

Giả sử $f'(x) = -(x+2)(x-1)^2(x-3)$

Xét

$y = f(x^2-2x) \Rightarrow y' = (2x-2)f'(x^2-2x) = -2(x-1)(x^2-2x+2)(x^2-2x-1)^2(x^2-2x-3)$

Suy ra bảng xét dấu của $y = f(x^2-2x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x^2-2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $y = f(x^2-2x)$ có 1 điểm cực tiểu là $x=1$.

Câu 28. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0;2018)$ để phương trình $m+10x = m.e^x$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 9 **B.** 2017 **C.** 2016 **D.** 2007

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có: PT $\Leftrightarrow me^x - 10x - m = 0$

Xét hàm số $f(x) = me^x - 10x - m$

Ta có: $f'(x) = me^x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\frac{10}{m}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \underset{\mathbb{R}}{Min}\, f(x) = f\left(\ln\frac{10}{m}\right)$, mặt khác $f(0)=0$

Do đó để PT có 2 nghiệm phân biệt thì $\ln\frac{10}{m} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 10$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên $m \in (0;2018)$ để PT có 2 nghiệm.

Câu 29. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn điều kiện sau

$u_1+u_2+...+u_{2018} = 4(u_1+u_2+...+u_{1009})$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$ bằng

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có: $u_1+u_2+...+u_{2018} = 4(u_1+u_2+...+u_{1009}) \Leftrightarrow \frac{u_1+u_{2018}}{2}.2018 = 4.\frac{u_1+u_{1009}}{2}.1009$

$u_1+u_{2018} = 2u_1+2u_{1009} \Leftrightarrow u_{2018} \Leftrightarrow u_1+2u_{1009} \Leftrightarrow 2017d = 2(u_1+1008d) \Leftrightarrow 2u_1 = d$

Ta có: $P=\log_3^2 u_2+\log_3^2 u_5+\log_3^2 u_{14}=\log_3^2\left(u_1+d\right)+\log_3^2\left(u_1+d\right)+\log_3^2\left(u_1+13d\right)$

$\Rightarrow P=\log_3^2\left(3u_1\right)+\log_3^2\left(9u_1\right)+\log_3^2\left(27u_1\right)=\left(1+\log_3 u_1\right)^2+\left(2+\log_3 u_1\right)^2+\left(3+\log_3 u_1\right)^2$

Đặt $t=\log_3 u_1 \Rightarrow P=\left(1+t\right)^2+\left(2+t\right)^2+\left(3+t\right)^2=3t^2+12t+14=3\left(t+2\right)^2+2\geq 2$

Do đó $P_{\min}=2$.

Câu 30. Số giá trị nguyên của $m\in\left(-200;200\right)$ để $3.a^{\sqrt{\log_a b}}-b^{\sqrt{\log_b a}}>m.\sqrt{\log_a b}+2$ với mọi a, $b\in\left(1;+\infty\right)$ là

A. 200. **B.** 199. **C.** 2020. **D.** 2002.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\sqrt{\log_a b}=x$, $x>0$.

Suy ra $b=a^{x^2}$.

Khi đó $3.a^{\sqrt{\log_a b}}-b^{\sqrt{\log_b a}}>m.\sqrt{\log_a b}+2 \Leftrightarrow 3.a^x-\left(a^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}>m.x+2 \Leftrightarrow \dfrac{2.a^x-2}{x}>m$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2.a^x-2}{x}$, với $x>0$.

có $f'\left(x\right)=\dfrac{2a^x\left(x.\ln a+2\right)}{x^2}>0$, $\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ nên $f\left(x\right)$ liên tục và đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$2\ln a$ $\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy $m<f\left(x\right) \Leftrightarrow m<2\ln a$.

Vì $\ln a>0,\forall a>1$, do đó $3.a^{\sqrt{\log_a b}}-b^{\sqrt{\log_b a}}>m.\sqrt{\log_a b}+2$ với mọi a, $b\in\left(1;+\infty\right)$ thì $m\leq 0$.

Và $m\in\left(-200;200\right)$ nguyên nên có 200 số nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 31. Cho hệ phương trình $\begin{cases}2^{x-y}-2^y+x=2y\\2^x+1=\left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2}\end{cases}$ (1), m là tham số. Gọi S là tập các giá trị m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$\begin{cases}2^{x-y}-2^y+x=2y\\2^x+1=\left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2}\end{cases}(1) \Leftrightarrow \begin{cases}2^{x-y}+x-y=2^y-y\\2^x+1=\left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2}\end{cases}$

Xét hàm số $y=f\left(t\right)=2^t+t$, dễ thấy đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó, phương trình $2^{x-y}+x-y=2^y-y \Leftrightarrow f\left(x-y\right)=f\left(y\right) \Leftrightarrow x-y=y \Leftrightarrow x=2y$.

Thế $x=2y$ vào phương trình $2^x+1=(m^2+2).2^y.\sqrt{1-y^2}$ được $2^{2y}+1=(m^2+2).2^y.\sqrt{1-y^2}$
$\Leftrightarrow \dfrac{2^{2y}+1}{2^y}=(m^2+2).\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 2^y+2^{-y}=(m^2+2).\sqrt{1-y^2}$.

Dễ thấy phương trình $(*)$ nếu có nghiệm $y=y_0$ thì sẽ có nghiệm $y=-y_0$.

Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow (*)$ có nghiệm $y=0 \Rightarrow m=0$.

Thử lại với $m=0$ c$^{(*)} \Leftrightarrow 2^y+2^{-y}=2\sqrt{1-y^2}$. Dễ thấy $VT=2^y+2^{-y}\ge 2$ và $VP=2\sqrt{1-y^2}\le 2$ nên dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}2^y=2^{-y}\\1-y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow y=0$ và (1) có nghiệm $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$. Vậy tập S có 1 phần tử.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{2x-1}-m.2^x+2m-2=0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[1;2]$.

A. $m\in(2;3]$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in[2;4]$. **D.** $m\in(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

$2^{2x-1}-m.2^x+2m-2=0 \Leftrightarrow 2^{2x}-2m.2^x+4m-4=0$.

Đặt $t=2^x, t>0$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$t^2-2mt+4m-4=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-2m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\t=2m-2(**)\end{array}\right. (*)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $(**)$ phải có một nghiệm thuộc $(2;4]$.

$\Leftrightarrow 2<2m-2\le 4 \Leftrightarrow 2<m\le 3$.

Câu 33. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_5(5x+5)-3y=125^y-x$?

A. 1010. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

ChọnC.

Ta có: $\log_5(5x+5)+x=3y+125^y \Leftrightarrow 1+\log_5(x+1)+x=3y+5^{3y}$

Đặt $t=\log_5(x+1)\Rightarrow x=5^t-1$.

Khi đó: $1+\log_5(x+1)+x=3y+5^{3y} \Leftrightarrow t+5^t=3y+5^{3y}$.

Xét hàm đặc trưng: $f(v)=v+5^v$.

$\Rightarrow f'(v)=1+5^v\ln 5>0$ nên hàm số $f(v)=v+5^v$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $t+5^t=3y+5^{3y} \Leftrightarrow t-3y \Leftrightarrow \log_5(x+1)=3y \Leftrightarrow x+1=5^{3y} \Leftrightarrow x+1=125^y$.

Theo giả thiết:

$0\le x\le 2020 \Leftrightarrow 1\le x\le 2021 \Leftrightarrow 1\le 125^y\le 2021 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_{125}2021\approx 1,57$.

Chọn $y=0\Rightarrow x=0$ và $y=1\Rightarrow x=124$.

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;y)$ là $(0;0);(1;124)$ thỏa mãn.

Câu 34. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_5(5x+5)-3y=125^y-x$?

A. 1010. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

ChọnC.

Ta có: $\log_5(5x+5)+x=3y+125^y \Leftrightarrow 1+\log_5(x+1)+x=3y+5^{3y}$

Đặt $t=\log_5(x+1)\Rightarrow x=5^t-1$.

Khi đó: $1+\log_5\left(x+1\right)+x=3y+5^{3y} \Leftrightarrow t+5^t=3y+5^{3y}$.

Xét hàm đặc trưng: $f\left(v\right)=v+5^v$.

$\Rightarrow f'\left(v\right)=1+5^v\ln 5>0$ nên hàm số $f\left(v\right)=v+5^v$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $t+5^t=3y+5^{3y} \Leftrightarrow t-3y \Leftrightarrow \log_5\left(x+1\right)=3y \Leftrightarrow x+1=5^{3y} \Leftrightarrow x+1=125^y$.

Theo giả thiết:

$0\le x\le 2020 \Leftrightarrow 1\le x\le 2021 \Leftrightarrow 1\le 125^y\le 2021 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_{125}2021\approx 1,57$.

Chọn $y=0\Rightarrow x=0$ và $y=1\Rightarrow x=124$.

Vậy có 2 cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ là $\left(0;0\right);\left(1;124\right)$ thỏa mãn.

Câu 35. Cho các số thực x,y thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+\left(x+1\right)\left(y+1\right)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+\left(x+1\right)\left(y+1\right)-2=0 \Leftrightarrow \log_3\left(x+y\right)+\left(x+y\right)=\log_3\left(1-xy\right)+\left(1-xy\right)\ \left(1\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_3 t+t$ với $t>0$, ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0,\ \forall t>0$.

$\Rightarrow f\left(t\right)$ luôn đồng biến với $\forall t>0$.

$\Rightarrow \left(1\right)\Leftrightarrow x+y=1-xy \Leftrightarrow y=\dfrac{1-x}{x+1}=-1+\dfrac{2}{x+1}\ \left(2\right)$.

Thế $\left(2\right)$ vào P ta được $P=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$ với $0\le x\le 1$.

$P'=2-\dfrac{2}{\left(x+1\right)^2}$; $P'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in\left[0;1\right] \\ x=-2\notin\left[0;1\right] \end{array}\right.$.

$P\left(0\right)=1,\ P\left(1\right)=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 đạt được khi $x=0$, $y=1$.

Câu 36. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<x\le 2020$ và $2^x+\log_2\dfrac{x}{2-y}=2^{2-y}$?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn C

pt (1) $\Leftrightarrow 2^x+\log_2 x=2^{2-y}+\log_2(2-y)$.

Hàm số $f(t)=2^t+\log_2 t$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$

$f'(t)=2^t\ln 2+\dfrac{1}{t\ln 2}>0,\forall t>0\Rightarrow hs\ f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà phương trình (4) $\Leftrightarrow f(x)=f(2-y)\Leftrightarrow x=2-y$

Từ đó suy ra có 2020 cặp số thỏa mãn.

Câu 37. Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5}=\log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \le m \le \sqrt{6}$. **B.** $-5 \le m \le 5$. **C.** $5-\sqrt{6} \le m \le 5+\sqrt{6}$. **D.** $-\sqrt{6} \le m \le 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x-|m|+5} = \log_{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}\left(|m|+5\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}}{3^{|m|+5}} = \frac{\ln\left(|m|+5\right)}{\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right)}$$
$$\Leftrightarrow 3^{\sin x+\sqrt{5}\cos x+10}.\ln\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right) = 3^{|m|+5}.\ln\left(|m|+5\right)$$

Xét $f(t) = \ln(t).3^t, \forall t \ge 5$

$$f'(t) = \frac{1}{t}3^t + \ln(t)3^t\ln(3) > 0, \forall t \ge 5$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f\left(\sin x+\sqrt{5}\cos x+10\right) = f\left(|m|+5\right)$$
$$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{5}\cos x+10 = |m|+5$$
$$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{5}\cos x+5 = |m|$$

Mà $-\sqrt{6} \le \sin x+\sqrt{5}\cos x \le \sqrt{6}$

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có $5-\sqrt{6} \le m \le 5+\sqrt{6}$

Câu 38. Xét các số thực dương x, y thoả mãn $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2y-3x$ bằng

A. $P_{\min} = \frac{3}{4}$. **B.** $P_{\min} = \frac{5}{6}$. **C.** $P_{\min} = \frac{7}{8}$. **D.** $P_{\min} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Rightarrow \log_{2018}\left(x^2+2x+1\right)+2\left(x^2+2x+1\right) = \log_{2018}(2x+y)+2(2x+y)\ (*).$$

Xét hàm: $f(t) = \log_{2018} t + 2t$, $t > 0$.

Suy ra: $f'(t) = \frac{1}{t\ln 2018} + 2 > 0$, $\forall t > 0$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $(*) \Leftrightarrow f\left(x^2+2x+1\right) = f(2x+y) \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2+1$.

Khi đó: $P = 2y-3x = 2x^2-3x+2 = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8} \ge \frac{7}{8}$.

Kết luận: $P_{\min} = \frac{7}{8}$ khi $x = \frac{3}{4}$.

Câu 39. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S=\dfrac{y}{x}$. Tính $M+m$.

A. $M+m=2\sqrt{14}$. **B.** $M+m=\sqrt{10}$.

C. $M+m=\dfrac{7}{2}$. **D.** $M+m=\dfrac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Do $S=\dfrac{y}{x}$ nên $y=Sx.$

Ta có

$$\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1 \Leftrightarrow 11x+20y-40=2x^2+xy+3y^2$$
$$\Leftrightarrow 11x+20Sx-40=2x^2+xSx+3S^2x^2$$
$$\Leftrightarrow (3S^2+S+2)x^2-(20S+11)x+40=0 \quad (1)$$

Biệt thức $\Delta=(20S+11)^2-4\cdot 40\cdot(3S^2+S+2)=-80S^2+280S-199.$

Để có các số thực dương x, y thỏa mãn giả thiết trước hết ta phải có:

$$\Delta\ge 0\Leftrightarrow -80S^2+280S-199\ge 0\Leftrightarrow \frac{35-\sqrt{230}}{20}=S_1\le S\le S_2=\frac{35+\sqrt{230}}{20}.$$

Từ đó ta suy ra $\mathrm{M}=\max \mathrm{S}=\dfrac{35+\sqrt{230}}{20}$ khi $\begin{cases} \mathrm{x}=\dfrac{20\mathrm{S}_1+11}{3\mathrm{S}_1{}^2+\mathrm{S}_1+2}>0 \\ \mathrm{y}=\mathrm{S}_1\mathrm{x}>0 \end{cases}$

$\mathrm{m}=\min \mathrm{S}=\dfrac{35-\sqrt{230}}{20}$ khi $\begin{cases} \mathrm{x}=\dfrac{20\mathrm{S}_2+11}{3\mathrm{S}_2{}^2+\mathrm{S}_2+2}>0 \\ \mathrm{y}=\mathrm{S}_2\mathrm{x}>0 \end{cases}$

Vậy $\mathrm{M}+\mathrm{m}=\dfrac{7}{2}$.

Câu 40. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S=\dfrac{y}{x}$. Tính $M+m$.

A. $M+m=2\sqrt{14}$. **B.** $M+m=\sqrt{10}$.

C. $M+m=\dfrac{7}{2}$. **D.** $M+m=\dfrac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Do $S=\dfrac{y}{x}$ nên $y=Sx.$

Ta có

$$\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1 \Leftrightarrow 11x+20y-40=2x^2+xy+3y^2$$
$$\Leftrightarrow 11x+20Sx-40=2x^2+xSx+3S^2x^2$$
$$\Leftrightarrow (3S^2+S+2)x^2-(20S+11)x+40=0 \quad (1)$$

Biệt thức $\Delta=(20S+11)^2-4\cdot 40\cdot(3S^2+S+2)=-80S^2+280S-199.$

Để có các số thực dương x, y thỏa mãn giả thiết trước hết ta phải có:

$$\Delta\ge 0 \Leftrightarrow -80S^2+280S-199\ge 0 \Leftrightarrow \frac{35-\sqrt{230}}{20}=S_1\le S\le S_2=\frac{35+\sqrt{230}}{20}.$$

Từ đó ta suy ra $\mathrm{M}=\max \mathrm{S}=\dfrac{35+\sqrt{230}}{20}$ khi $\begin{cases} \mathrm{x}=\dfrac{20\mathrm{S}_1+11}{3\mathrm{S}_1{}^2+\mathrm{S}_1+2}>0 \\ \mathrm{y}=\mathrm{S}_1\mathrm{x}>0 \end{cases}$

$\mathrm{m}=\min \mathrm{S}=\dfrac{35-\sqrt{230}}{20}$ khi $\begin{cases} \mathrm{x}=\dfrac{20\mathrm{S}_2+11}{3\mathrm{S}_2{}^2+\mathrm{S}_2+2}>0 \\ \mathrm{y}=\mathrm{S}_2\mathrm{x}>0 \end{cases}$

Vậy $\mathrm{M}+\mathrm{m}=\dfrac{7}{2}.$

Câu 41. Cho các số thực x,y thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0 \Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0\,\forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến với $\forall t>0$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow x+y=1-xy \Leftrightarrow y=\dfrac{1-x}{x+1}=-1+\dfrac{2}{x+1}$ (2).

Thế (2) vào P ta được $P=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$ Với $0\le x\le 1$

$P'=2-\dfrac{2}{(x+1)^2}$; $P'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin[0;1] \\ x=-2\notin[0;1] \end{array}\right.$.

$P(0)=1; P(1)=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 đạt được khi $x=0; y=1$.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình :

$(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x\in\left[\frac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

$4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2+t+1\right)=t^2+5t+1$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$

$\Leftrightarrow g(m)=f(t)$

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ với $t\in[-1;1]$

$f'(t)=\dfrac{4-4t^2}{\left(t^2+t+1\right)^2}\geq 0\ \forall t\in[-1;1]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$

Để phương trình có nghiệm khi hai đồ thị $g(m);f(t)$ cắt nhau $\forall t\in[-1;1]\Rightarrow f(-1)\leq g(m)\leq f(1)\Leftrightarrow -3\leq m\leq\dfrac{7}{3}$

Câu 43. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a.b$?

A. a.b $=5$. **B.** a.b $=1$. **C.** a.b $=8$. **D.** a.b $=4$.

Lời giải

Chọn A

• Ta đặt $\mathrm{t}=\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)\Rightarrow x=9^t;y=6^t;x+y=4^t$

Ta có: $9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^t=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}(\text{loai})\\\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(\text{nhan})\end{array}\right.$

Mà $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{6}\right)^t=\left(\frac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó: $a=1;b=5$ và $a.b=5$.

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình :

$(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2},4\right]$

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x\in\left[\frac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

$4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2+t+1\right)=t^2+5t+1$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$

$\Leftrightarrow g\left(m\right)=f\left(t\right)$

Xét $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ với $t\in\left[-1;1\right]$

$f'\left(t\right)=\dfrac{4-4t^2}{\left(t^2+t+1\right)^2}\geq 0\ \forall t\in\left[-1;1\right]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[-1;1\right]$

Để phương trình có nghiệm khi hai đồ thị $g\left(m\right);f\left(t\right)$ cắt nhau $\forall t\in\left[-1;1\right]\Rightarrow f(-1)\leq g\left(m\right)\leq f\left(1\right)\Leftrightarrow -3\leq m\leq\dfrac{7}{3}$

Câu 45. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16}a=\log_{20}b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T=\dfrac{a}{b}$.

A. $0<T<\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}<T<\dfrac{2}{3}$. **C.** $-2<T<0$. **D.** $1<T<2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_{16}a=\log_{20}b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}=x$, ta có:

$$\begin{cases}a=16^x\\ b=20^x\\ \dfrac{2a-b}{3}=25^x\end{cases}\Rightarrow 2.16^x-20^x=3.25^x\Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{16}{25}\right)^x-\left(\dfrac{20}{25}\right)^x=3$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2x}-\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=-1\\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\dfrac{3}{2}.$$

Từ đó $T=\dfrac{a}{b}=\dfrac{16^x}{20^x}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\dfrac{3}{2}\in\left(1;2\right)$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\dfrac{17}{4}}\right)$. Tính $T=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2}{2019}\right)+...+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)$

A. $T=\dfrac{2019}{2}$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2018$. **D.** $T=1009$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(1-x)=\log_2\left(1-x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{(1-x)^2-(1-x)+\dfrac{17}{4}}\right)=\log_2\left(\sqrt{x^2-x+\dfrac{17}{4}}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

$$f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=\log_2\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)+\log_2\left(\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\log_2\left[\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)\left(\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]=\log_2 4=2$$

$$\Rightarrow T=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+...+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2018}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+f\left(\frac{2017}{2019}\right)+...+f\left(\frac{1009}{2019}\right)+f\left(\frac{1010}{2019}\right)$$

$$=1009.2=2018$$

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu cặp số $(a;b)$ với a,b là các số nguyên dương thỏa mãn:
$\log_3(a+b)+(a+b)^3=3(a^2+b^2)+3ab(a+b-1)+1$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Cách 1:

Với a,b là các số nguyên dương, ta có:

$$\log_3(a+b)+(a+b)^3=3(a^2+b^2)+3ab(a+b-1)+1$$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab}+a^3+b^3+3ab(a+b)=3(a^2+b^2-ab)+3ab(a+b)+1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(a^3+b^3)+a^3+b^3=\log_3\left[3(a^2+b^2-ab)\right]+3(a^2+b^2-ab)\ (1)$$

Xét hàm số: $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành :

$$f(a^3+b^3)=f\left[3(a^2+b^2-ab)\right]\Leftrightarrow a^3+b^3=3(a^2+b^2-ab)\Leftrightarrow (a^2+b^2-ab)(a+b-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+b^2-ab=0\ (*) \\ a+b-3=0 \end{array}\right.$$

Do $a,b\in\mathbb{N}^*$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm. Suy ra: $a+b=3$.

Mà a,b là các số nguyên dương nên $\begin{cases} 0<a<3 \\ 0<b<3 \\ a+b=3 \\ a,b\in\mathbb{N}^* \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy có hai cặp số $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Với a,b là các số nguyên dương, ta có:

$$\log_3(a+b)+(a+b)^3=3(a^2+b^2)+3ab(a+b-1)+1$$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{a+b}{3}+a^3+b^3+3ab(a+b)=3(a^2+b^2-ab)+3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{a+b}{3}=(a^2+b^2-ab)(3-a-b)(1)$$

Trường hợp 1: $a+b=2$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \log_3 \frac{2}{3} = 4-3ab$ loại do $a,b \in \mathbb{N}^*$.

Trường hợp 2: $a+b>3 \Rightarrow \log_3 \frac{a+b}{3} > 0$ và $\left(a^2+b^2-ab\right)(3-a-b)<0, \forall a,b \in \mathbb{N}^*$

nên (1) không xảy ra.

Trường hợp 3: $a+b=3$, khi đó (1) thỏa mãn.

Mà a,b là các số nguyên dương nên $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy có hai cặp số $(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48. Cho phương trình: $(m-3)\log_2^2(x-4)-(2m+1)\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+m+2=0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $4<x_1<x_2<6$.

A. $m<-\frac{25}{8}$ hoặc $0<m<3$. **B.** $-\frac{25}{8}<m<0$ hoặc $m>3$.

C. $m<-\frac{25}{8}$ hoặc $m>3$. **D.** $-\frac{25}{8}<m<3$.

Lời giải

Chọn B

Với điều kiện $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$, ta có: $(m-3)\log_2^2(x-4)-(2m+1)\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+m+2=0$

$\Leftrightarrow (m-3)\log_2^2(x-4)+(2m+1)\log_2(x-4)+m+2=0$. Khi đó:

$4<x<6 \Leftrightarrow 0<x-4<2 \Rightarrow \log_2(x-4)<1$. Đặt $\log_2(x-4)=t$

Ta thu được phương trình $(m-3)t^2+(2m+1)t+m+2=0$, xét trên $(-\infty;1)$

Dẫn đến phương trình $m\left(t^2+2t+1\right)=3t^2-t-2 \Leftrightarrow m(t+1)^2=3t^2-t-2$ (*)

Nhận thấy $t=-1$ không thoả mãn (*) nên có thể biến đổi thành $m=\frac{3t^2-t-2}{t^2+2t+1}$

Bài toán trở thành tìm điều kiện của m để phương trình $m=\frac{3t^2-t-2}{t^2+2t+1}$ có hai nghiệm phân biệt $t_1<t_2<1$. Xét hàm $f(t)=\frac{3t^2-t-2}{t^2+2t+1}$ có $f'(t)=\frac{7t+3}{(t+1)^3}$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{7}$. Ta lập bảng biến thiên của $f(t)$ trên $(-\infty;1)$.

t	$-\infty$ -1 $-\frac{3}{7}$ 1	
$f'(t)$	$+$	$-$ 0 $+$
$f(t)$	3 ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ 0 ↗

		$-\dfrac{25}{8}$	

Từ bảng biến thiên, ta có được kết quả $-\dfrac{25}{8} < m < 0$ hoặc $m > 3$.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2020 để phương trình $\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x$ có nghiệm thực?.

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Đáp án: A

Phương trình $m+\sqrt{m+2^x}=2^{2x} \Leftrightarrow \left(m+2^x\right)+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}+2^x\ (1)$

Ta có $\sqrt{m+2^x}\ge 0$, $2^x>0$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^2+t$ trên $[0;+\infty)$.

$f'(t)=2t+1\ge 0, \forall t\in[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+2^x}\right)=f\left(2^x\right)\Leftrightarrow \sqrt{m+2^x}=2^x \Leftrightarrow m=2^{2x}-2^x$.

Đặt $a=2^x$, $a>0$. Ta có $\Leftrightarrow m=g(a)=a^2-a$.

a	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(a)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{4}$ mà m nguyên dương nhỏ hơn 2020 nên $m\in\{1;2;3;...;2019\}$.

Vậy có 2019 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1}+(x-y+1)(x-y-1)=\log_2(2xy)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_2(2xy)+\dfrac{4}{x^2+y^2}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Giả thiết $2^{x^2+y^2-1}+(x-y+1)(x-y-1)=\log_2(2xy)\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-1}+(x-y)^2-1=\log_2(2xy)$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+2^{x^2+y^2-1}-1=\log_2(2xy)\Leftrightarrow x^2+y^2-1+2^{x^2+y^2-1}=2xy+\log_2(2xy)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-1+2^{x^2+y^2-1}=\log_2(2xy)+2^{\log_2(2xy)}$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$, ta có $f'(t)=1+2^t\ln 2>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) suy ra $f(x^2+y^2-1)=f(\log_2(2xy))\Leftrightarrow x^2+y^2-1=\log_2(2xy)$.

Khi đó $P=\log_2(2xy)+\dfrac{4}{x^2+y^2}=x^2+y^2+\dfrac{4}{x^2+y^2}-1\ge 2\sqrt{(x^2+y^2).\dfrac{4}{x^2+y^2}}-1=3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{4}{x^2+y^2} \\ x^2+y^2-1=\log_2(2xy)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1\end{array}\right.$.

Vì $x>0, y>0$ nên $x=y=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 3 khi và chỉ khi $x=y=1$.

Câu 51. Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 64 . **B.** Vô số. **C.** 62 . **D.** 63 .

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x\ge \log_4 m\end{cases}$ (*) (với m nguyên dương).

Phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x-\log_3 x-1=0\ (2) \\ 4^x=m\ (3)\end{array}\right.$.

Phương trình $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \log_3 x=1 \\ \log_3 x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Phương trình $(3)\Leftrightarrow x=\log_4 m$.

Do m nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

TH 1: $m=1$ thì $\log_4 m=0$. Do đó (*) là $x>0$.

Khi đó nghiệm của phương trình (3) bị loại và nhận nghiệm của phương trình (2).

Do đó nhận giá trị $m=1$.

TH 2: $m\ge 2$ thì (*) là $x\ge\log_4 m$ (vì $\log_4 m\ge\dfrac{1}{2}$)

Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\log_4 m<3\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\le m<4^3$

Suy ra $m\in\{3;4;5;\ldots;63\}$.

Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63-3+1+1=62$ giá trị nguyên dương m.

Câu 52. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ sao cho $\log_{2020}(x+y)\le 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1$, m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $m\in(-2;-1)$. **B.** $m\in(1;2)$. **C.** $m\in(-1;0)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn **C.**

Xét hệ $\begin{cases}\log_{2020}(x+y)\le 0 & (1)\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1 & (2)\end{cases}$

+ NX hệ đối xứng nên nếu $(x;y)$ là nghiệm thì $(y;x)$ cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất thì x = y

+ Khi x = y thì (1) $\Leftrightarrow \log_{2020}2x\le 0\Leftrightarrow 0<x\le\frac{1}{2}(*)$

và (2) $\Leftrightarrow 2x+\sqrt{2x^2+m}\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+m}\ge 1-2x\Leftrightarrow 2x^2+m\ge(1-2x)^2\,(do(*))$

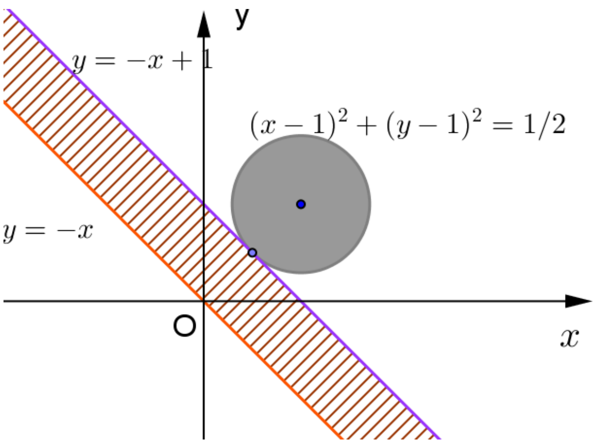
$\Leftrightarrow m\ge 2x^2-4x+1=f(x)$. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{2}\right]$,

Suy ra $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2},\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$

Do đó $m\ge f(x)$ có nghiệm duy nhất trên $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ khi $m=-\frac{1}{2}$

*) Thử lại, với $m=-\frac{1}{2}$ thì hệ $\begin{cases}\log_{2020}(x+y)\le 0 & (1)\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1 & (2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{2020}(x+y)\le 0 & (1)\\ x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}}\ge 1 & (2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ \sqrt{2xy-\frac{1}{2}}\ge 1-(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ 2xy-\frac{1}{2}\ge(1-(x+y))^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ (x-1)^2+(y-1)^2\le\frac{1}{2}\end{cases}$



Dựa vào hình vẽ ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Vậy $m=-\frac{1}{2}$

Câu 53. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1}+(x-y+1)(x-y-1)=\log_2(2xy)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_2(2xy)+\frac{4}{x^2+y^2}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Giả thiết $2^{x^2+y^2-1}+(x-y+1)(x-y-1)=\log_2(2xy)\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-1}+(x-y)^2-1=\log_2(2xy)$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+2^{x^2+y^2-1}-1=\log_2(2xy)\Leftrightarrow x^2+y^2-1+2^{x^2+y^2-1}=2xy+\log_2(2xy)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-1+2^{x^2+y^2-1}=\log_2(2xy)+2^{\log_2(2xy)}$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$, ta có $f'(t)=1+2^t\ln 2>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) suy ra $f\left(x^2+y^2-1\right)=f\left(\log_2(2xy)\right)\Leftrightarrow x^2+y^2-1=\log_2(2xy)$.

Khi đó $P=\log_2(2xy)+\dfrac{4}{x^2+y^2}=x^2+y^2+\dfrac{4}{x^2+y^2}-1\ge 2\sqrt{\left(x^2+y^2\right).\dfrac{4}{x^2+y^2}}-1=3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{4}{x^2+y^2}\\ x^2+y^2-1=\log_2(2xy)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=y=-1\end{array}\right.$.

Vì $x>0,y>0$ nên $x=y=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 3 khi và chỉ khi $x=y=1$.

Câu 54. Cho hàm số $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1).f(2).f(3)...f(2020)=e^{\frac{p}{q}}$ với p,q là các số tự nhiên và $\dfrac{p}{q}$ tối giản. Giá trị q^2-p bằng?

A. 2020. **B.** -2020. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2}{x^2.(x+1)^2}}=\dfrac{x^2+x+1}{x.(x+1)}=1+\dfrac{1}{x.(x+1)}=1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Với $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$

Suy ra $f(1).f(2).f(3)...f(2020)=e^{\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}\right)}=e^{2020+\frac{1}{1}-\frac{1}{2021}}=e^{\frac{2021^2-1}{2021}}$.

Ta chứng minh $\dfrac{2021^2-1}{2021}$ tối giản. Thật vậy: giả sử d là ước chung của 2021^2-1 và 2021.

Khi đó $2021^2-1\,\vdots\, d$ và $2021\,\vdots\, d$. Do $2021\,\vdots\, d\Rightarrow 2021^2\,\vdots\, d\Rightarrow 1\,\vdots\, d$. Suy ra $d=\pm1$.

Do đó $\dfrac{2021^2-1}{2021}$ tối giản nên $p=2021^2-1;q=2021$

Vậy $q^2-p=1$

Câu 55. Cho phương trình $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)+\sqrt{2x^2+mx+1}=x+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình trên có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x+2>0\\ 2x^2+mx+1>0\end{cases}$.

Ta có $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)+\sqrt{2x^2+mx+1}=x+2$

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{2x^2+mx+1}+\sqrt{2x^2+mx+1}=\log_2(x+2)+x+2$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t\in(0;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0$, $\forall t\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà (1) có dạng: $f\left(\sqrt{2x^2+mx+1}\right)=f(x+2)$ nên: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+mx+1}=x+2$.

Từ đó $\begin{cases}x>-2\\ 2x^2+mx+1=(x+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\ x^2+(m-4)x-3=0 \quad (2)\end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(m-4)^2+12>0\\ (x_1+2)+(x_2+2)>0\\ (x_1+2)(x_2+2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{R}\\ x_1+x_2+4>0\\ x_1x_2+2(x_1+x_2)+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{R}\\ 4-m+4>0\\ -3+2(4-m)+4>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<8\\ m<\dfrac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m<\dfrac{9}{2}$ mà $m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$.

Câu 56. Cho x, y thỏa mãn $\log_3\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+y>0$ (do $x^2+y^2+xy+2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+2>0$).

Đẳng thức đã cho tương đương với

$\log_3\dfrac{9(x+y)}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy+2$ $(*)$.

Đặt $u=x^2+y^2+xy+2>0$, $v=9x+9y>0$, ta có.

$(*)\Leftrightarrow \log_3\dfrac{v}{u}=u-v\Leftrightarrow u+\log_3 u=v+\log_3 v$.

Mà hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên

$(*)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x^2+y^2+xy-9x-9y+2=0$.

Ta có

$$x^2+y^2+xy-9x-9y+2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2-9\left(x+\frac{y}{2}\right)=-\frac{3}{4}y^2+\frac{9}{2}y-2=-\frac{3}{4}(y-3)^2+\frac{19}{4}.$$

Dẫn đến

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-9\left(x+\frac{y}{2}\right)\le\frac{19}{4}\Rightarrow-\frac{1}{2}\le x+\frac{y}{2}\le\frac{19}{2}\Rightarrow-1\le 2x+y\le 19.$$

Suy ra

$$P=\frac{3x+2y-9}{x+y+10}=\frac{x+y+10+2x+y-19}{x+y+10}=1+\frac{2x+y-19}{x+y+10}\le 1.$$

$$P=1\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=19\\ y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=3\end{cases}.$$

Vậy $\max P=1$.

Cách 2:

Từ giả thiết, ta có $x^2+y^2+xy-9x-9y+2=0(*)$

Ta thấy $x=8, y=3$ thỏa mãn $(*)$, đặt $x=a+8, y=b+3$ khi đó:

$x^2+y^2+xy-9x-9y+2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+ab+10a+5=0 \Leftrightarrow 10a+5b=-\left(a^2+ab+b^2\right)$

$\Rightarrow 10a+5b\le 0\Leftrightarrow 2a+b\le 0$

Ta có: $P=\dfrac{3x+2y-9}{x+y+10}=\dfrac{3a+2b+21}{a+b+21}=1+\dfrac{2a+b}{a+b+21}\le 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=8, y=3$. Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 57. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2019$ và $\log_5(5x+5)+x=3y+125^y$?

A. 2019. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

ĐKXĐ: $5x+5>0\Leftrightarrow x>-1$

Ta có:

$\log_5(5x+5)+x=3y+125^y \Leftrightarrow \log_5(5(x+5))+x=3y+125^y$

$\Leftrightarrow \log_5(x+1)+x+1=3y+5^{3y} \Leftrightarrow 5^{\log_5(x+1)}+\log_5(x+1)=3y+5^{3y}$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=5^t+t\Rightarrow f'(t)=5^t.\ln 5+1>0$ ta có $f'(t)=1+3^t\ln 3>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó ta có $\log_5(x+1)=3y\Leftrightarrow x+1=5^{3y}$

Theo bài ra ta có: $0\le x\le 2019$

$\Leftrightarrow 0\le 5^{3y}-1\le 2019\Leftrightarrow 1\le 5^{3y}\le 2020\Leftrightarrow 0\le 3y\le\log_5 2020\approx 4,73$

Mà $y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow y\in\{0;1\}$

Ứng với mỗi giá trị của y cho 1 giá x tương ứng.

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 58. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x\le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2x+y+3}{x+3y+4}\right)=2y-x+1$?

A. 1010. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 1009.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện bài toán: $\begin{cases}1\le x\le 2020\\ 1\le y\end{cases}$

Ta có: $\log_3\left(\dfrac{2x+y+3}{x+3y+4}\right)=2y-x+1\Leftrightarrow \log_3(2x+y+3)-\log_3(x+3y+4)=(x+3y+4)-(2x+y+3)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+3)+(2x+y+3)=\log_3(x+3y+4)+(x+3y+4)(*)$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 3}>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(2x+y+3)=f(x+3y+4)\Leftrightarrow 2x+y+3=x+3y+4\Leftrightarrow x=2y+1$

Vì $1\le x\le 2020\Leftrightarrow 1\le 2y+1\le 2020\Leftrightarrow 0\le y\le\dfrac{2019}{2}$.

Do y nguyên dương nên $y\in\{1;2;3;...;1009\}$

Rõ ràng, với mỗi y ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị x nguyên thỏa mãn.

Vậy có 1009 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 59. Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ là

A. $P_{\min}=\dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{27}{5}$. **C.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)\right]+(x-1)(y+1)=9$.

$\Leftrightarrow (y+1)\left[\log_3(x+1)+\log_3(y+1)+x-1\right]=9$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x-1=\dfrac{9}{y+1}-\log_3(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1-2=\dfrac{9}{y+1}-2+\log_3\dfrac{9}{y+1}$ **(*).**

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t-2$ với $t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ với mọi $t>0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) suy ra $x+1=\dfrac{9}{y+1}$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{y+1}-1=\dfrac{8-y}{y+1}$, do $x>0$ nên $y\in(0;8)$.

Vậy $P=x+2y=\dfrac{8-y}{y+1}+2y=2y-1+\dfrac{9}{y+1}=2(y+1)+\dfrac{9}{y+1}-3\ge -3+6\sqrt{2}$.

Vậy $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$ khi $2(y+1)=\dfrac{9}{y+1}\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}-1$.

Câu 60. Phương trình $\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)+|x|=\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\sqrt{2x^2+1}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: $x\neq 0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2\dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}-1}+|x|=\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\sqrt{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2\right)-\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+|x|=\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\sqrt{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow 1+2\log_2|x|+|x|=2\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\sqrt{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow 2\log_2|x|+|x|=2\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)(*)$.

Xét hàm $f(t)=2\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$ ta có $f'(t)=2\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall x\in(0;+\infty)$ suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên từ (*) ta có $|x|=\sqrt{2x^2+1}-1\Leftrightarrow |x|+1=\sqrt{2x^2+1}\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Câu 61. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $\log_2(2x-2002)+x=y+1002+2^y$ và $1002\le x\le 2020$?

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 18.

Lời giải.

Chọn B

$\log_2(2x-2002)+x=y+1002+2^y$

$\Leftrightarrow \log_2[2(x-1001)]+x=y+1002+2^y$

$\Leftrightarrow 1+\log_2(x-1001)+x=y+1002+2^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1001)+(x-1001)=y+2^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1001)+(x-1001)=\log_2 2^y+2^y$

Đặt $\begin{cases}x-1001=u>0\\ 2^y=v>0\end{cases}$ ta có phương trình $\log_2 u+u=\log_2 v+v$ với hàm số

$f(t)=\log_2 t+t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$ suy ra $u=v\Rightarrow x-1001=2^y$

$\Rightarrow 1002\le x=2^y+1001\le 2020$,Suy ra $0=\log_2 1\le y\le \log_2 1019=9{,}99$.

Do mỗi y cho ta một x và y nguyên nên $y\in\{0;1;2;...;9\}$.

Câu 62. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $2^{2x-3y-3}+9.2^{4x-6y-3}=8.3^{2x-3y-1}+1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+9y^2-8x+12$ tương ứng bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 13.

Lời giải

Đáp án: C

+ Đặt $t=2x-3y$ thế vào giả thiết sẽ được: $2^{t-3}+9.2^{2t-3}=8.3^{t-1}+1\Leftrightarrow \dfrac{2^t}{8}+\dfrac{9}{8}.2^{2t}=\dfrac{8}{3}.3^t+1$

$\Leftrightarrow 3.2^t+27.4^t=64.3^t+24\Leftrightarrow 3\left(2^t-8\right)+\left(27.4^t-64.3^t\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\left(2^t-8\right)+3^t\left(27\left(\frac{4}{3}\right)^t-64\right)=0 \quad (*)$

+ Với $t=3$: Thỏa mãn phương trình (*)

+ Với $t>3 \Rightarrow \begin{cases} 3\left(2^t-8\right)>0 \\ 3^t\left(27.\left(\frac{4}{3}\right)^t-64\right)>0 \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm

+ $t<3 \Rightarrow \begin{cases} 3\left(2^t-8\right)<0 \\ 3^t\left(27.\left(\frac{4}{3}\right)^t-64\right)<0 \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm

+ Do đó: (*) có nghiệm duy nhất $t=3 \Rightarrow 2x-3y=3 \Rightarrow y=\frac{2x-3}{3}\left(x>\frac{3}{2}\right)$ thế vào biểu thức T, ta được: $T=x^2+9\left(\frac{2x-3}{3}\right)^2-8x+12=5x^2-20x+21=5(x-2)^2+1\geq 1, \forall x>\frac{3}{2}$

+ Vậy giá trị nhỏ nhất của của biểu thức T bằng 1 khi và chỉ khi $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 63. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$

$\Leftrightarrow 3^x+3x-6=9y+3\log_3 y$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-2=3y+\log_3 y$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-1=3y+\log_3(3y)$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-1=3^{\log_3(3y)}+\log_3(3y)$ (*).

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$. Ta có: $f'(t)=1+3^t.\ln 3>0, \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x-1)=f(\log_3(3y)) \Leftrightarrow x-1=\log_3(3y) \Leftrightarrow x-2=\log_3 y \Leftrightarrow y=3^{x-2}$.

Vì $y\in(0;2020)$ nên $3^{x-2}<2020 \Leftrightarrow x-2<\log_3 2020 \Leftrightarrow x<2+\log_3 2020$

Do $x;y\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Ứng với mỗi giá trị nguyên của x cho ta 1 giá trị nguyên của y.

Vậy có 7 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 64. Cho các số thực x,y thỏa mãn $0\leq x,y\leq 1$ và $\log_3\frac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2x+y$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Với điều kiện biểu thức đề bài có nghĩa, ta có

$\log_3 \dfrac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(1-xy) + xy + x + y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y) + (x+y) = \log_3(1-xy) + (1-xy)(*)$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 t + t$ trên $(0;2)$

$f'(t) = \dfrac{1}{t}\ln 3 + 1 > 0, \forall t \in (0;2)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Do đó từ $(*)$ ta có $x + y = 1 - xy \Leftrightarrow y(1+x) = 1 - x \Leftrightarrow y = \dfrac{1-x}{1+x}$

$P = 2x + y = 2x + \dfrac{1-x}{1+x}$

$P'(x) = 2 - \dfrac{2}{(1+x)^2} \ge 0, \forall x \in [0;1]$

Suy ra $\min P = P(0) = 1$ đạt được khi $x = 0, y = 1$.

Câu 65. Xét các số thực dương a,b thỏa mãn: $\log_2 \dfrac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$

A. $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-5}{2}$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-7}{2}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$.

Lời giải:

Ta có:

$\log_2 \dfrac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1-ab}{a+b} + 1 = -(2-2ab) + a + b$

$\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{2-2ab}{a+b} = -(2-2ab) + a + b$

$u = 2 - 2ab, v = a + b$

$\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{u}{v} = -u + v \Leftrightarrow \log_2 u + u = \log_2 v + v$

Hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$ là hàm đồng biến. Nên suy ra: $u = v \Leftrightarrow 2 - 2ab = a + b(*)$.

Lại có, $P = a + 2b(P > 0) \Leftrightarrow a = P - 2b$ thế vào (*) ta có:

$2 - 2(P-2b)b = P - 2b + b \Leftrightarrow 4b^2 + (1-2P)b + 2 - P = 0(**)$

Để phương trình (**) có nghiệm thì $\Delta = (1-2P)^2 - 16(2-P) \ge 0 \Leftrightarrow 4P^2 + 12P - 31 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P \le \dfrac{-2\sqrt{10}-3}{2} \\ P \ge \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2} \end{array}\right.$

Vì $P > 0$ nên $P \ge \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$. Vậy $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Chọn A

Câu 66. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{x-3y}{xy+1} = xy+3y-x+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{y}$.

A. $A_{\min} = \frac{14}{3}$. **B.** $A_{\min} = -\frac{14}{3}$. **C.** $A_{\min} = -6$. **D.** $A_{\min} = 6$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x-3y>0$.

$\log_3 \frac{x-3y}{xy+1} = xy+3y-x+1 \Leftrightarrow \log_3(x-3y) - \log_3(xy+1) = xy+3y-x+1$

$\Leftrightarrow \log_3(x-3y) + (x-3y) = \log_3(xy+1) + xy + 1 (1)$.

Xét hàm $f(t) = \log_3 t + t,\ t>0$.

$f'(t) = \frac{1}{t.\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3y = xy+1 \Rightarrow y = \frac{x-1}{x+3}$.

$A = x + \frac{1}{y} = x + \frac{x+3}{x-1}$.

Đặt $A = A(x) = x + \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow A'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ do $x, y > 0$.

x	0		3		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A	$-\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $A_{\min} = 6$.

Câu 67. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \le y \le 2020$ và $\log_2(6x-2) + 3x = 2 + y + 2^y$?

A. 2019. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > \frac{1}{3}$

$\log_2(6x-2) + 3x = 2 + y + 2^y \Leftrightarrow 1 + \log_2(3x-1) + 3x = 2 + y + 2^y \Leftrightarrow 3x - 1 + \log_2(3x-1) = 2^y + y$ Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$ suy ra $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó phương trình

$3x - 1 + \log_2(3x-1) = 2^y + y$

$\Leftrightarrow 3x - 1 + \log_2(3x-1) = 2^y + \log_2 2^y$

$\Leftrightarrow 3x - 1 = 2^y$

$\Leftrightarrow 3x = 2^y + 1$ (*)

Nếu y chẵn ta có $2^y + 1$ không chia hết cho 3 suy ra (*) vô nghiệm

Nếu y lẻ 2^y+1 chia hết cho 3. Do đó từ (*) suy ra $x=\dfrac{2^y+1}{3}\in\mathbb{N}$

Tức là với mỗi y lẻ cho ta một giá trị tương ứng x. Mà $0\le y\le 2020$ suy ra có 1010 số y lẻ

Vậy có 1010 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 68. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x\le 2020$ và

$\log_2\left(\dfrac{y}{2\sqrt{1+x}}\right)=3\left(y-\sqrt{x+1}\right)-y^2+x$?

A. 1010. **B.** 44. **C.** 2020. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện bài toán: $\begin{cases}0\le x\le 2020\\ 1\le y\end{cases}$

Ta có: $\log_2\left(\dfrac{y}{2\sqrt{1+x}}\right)=3\left(y-\sqrt{x+1}\right)-y^2+x\Leftrightarrow \log_2 y+y^2-3y=\log_2\sqrt{1+x}+(x+1)-3\sqrt{1+x}\,(*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t^2-3t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2t-3\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{t\ln 2}.2t}-3=2\sqrt{\dfrac{2}{\ln 2}}-3>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}$

Vì $0\le x\le 2020\Leftrightarrow 1\le x+1\le 2021\Leftrightarrow 1\le\sqrt{x+1}\le\sqrt{2021}\Leftrightarrow 1\le y\le\sqrt{2021}$.

Do y nguyên nên $y\in\{1;2;3;...;44\}$

Rõ ràng, với mỗi y ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị x nguyên thỏa mãn đề bài.

.Vậy có 44 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 69. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}+\dfrac{1}{\log_2 z}=\dfrac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz)=2020$. Tính $\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-zx+1\right)$

A. 4040. **B.** 1010. **C.** 2020. **D.** 2020^2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $a=\log_2 x;b=\log_2 y;c=\log_2 z$.

Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2020}$ và $a+b+c=2020$

$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(a+b+c)=1\Leftrightarrow(a+b+c)(ab+ac+bc)=abc$

$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+abc+abc+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2=0$

$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$

Vì vai trò a,b,c như nhau nên giả sử $a+b=0\Rightarrow c=2020\Rightarrow z=2^{2020}$ và $xy=1$.

$\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-zx+1\right)=\log_2\left(z(x+y+z)-1-yz-zx+1\right)$

$=\log_2\left(z^2\right)=2\log_2 z=4040$

Câu 70. Cho x, y là các số thực âm thỏa điều kiện $e^{2-y}-\frac{1}{e^{x-1}}+\frac{x-y+1}{xy+2-2x-y}=0$. Biết rằng biểu thức $P=x+y+xy$ đạt giá trị nhỏ nhất là P_0 khi $x=x_0$ và $y=y_0$. Tính giá trị $M=P_0+x_0-y_0$

A. $M=-\frac{5}{4}$ **B.** $M=-\frac{1}{4}$ **C.** $M=-\frac{9}{4}$ **D.** $M=-1$

Lời giải

Chọn C

$e^{2-y}-\frac{1}{e^{x-1}}+\frac{x-y+1}{xy+2-2x-y}=0$

$\Leftrightarrow e^{2-y}-e^{1-x}+\frac{x-y+1}{xy-2x+2-y}=0$

$\Leftrightarrow e^{2-y}-e^{1-x}+\frac{x-y+1}{x(y-2)-(y-2)}=0$

$\Leftrightarrow e^{2-y}-e^{1-x}+\frac{x-1-y+2}{(y-2)(x-1)}=0$

$\Leftrightarrow e^{2-y}-e^{1-x}+\frac{1}{y-2}-\frac{1}{x-1}=0$

$\Leftrightarrow e^{2-y}+\frac{1}{y-2}=e^{1-x}+\frac{1}{x-1}$

Xét hàm số $y=f(t)=e^{-t}+\frac{1}{t}, \forall t\neq 0$

Ta có $f'(t)=-e^{-t}-\frac{1}{t^2}<0, \forall t\neq 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Phương trình trở thành $f(y-2)=f(x-1)$ với $x, y<0$ nên $y-2, x-1\in(-\infty;0)$.

Do đó $y-2=x-1\Leftrightarrow y=x+1$. Thay vào P ta được $P=x+x+1+x(x+1)=x^2+3x+1$.

Khi đó P đạt GTNN trên $(-\infty;0)$ là $-\frac{5}{4}$ khi $x=-\frac{3}{2}$ và $y=-\frac{1}{2}$.

Câu 71. Cho x, y là các số thực âm thỏa điều kiện $e^{2-y}-\frac{1}{e^{x-1}}+\frac{x-y+1}{xy+2-2x-y}=0$. Biết rằng biểu thức $P=x+y+xy$ đạt giá trị nhỏ nhất là P_0 khi $x=x_0$ và $y=y_0$. Tính giá trị $M=P_0+x_0-y_0$

A. $M=-\frac{5}{4}$ **B.** $M=-\frac{1}{4}$ **C.** $M=-\frac{9}{4}$ **D.** $M=-1$

Lời giải

Chọn C

$$e^{2-y}-\frac{1}{e^{x-1}}+\frac{x-y+1}{xy+2-2x-y}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{2-y}-e^{1-x}+\frac{x-y+1}{xy-2x+2-y}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{2-y}-e^{1-x}+\frac{x-y+1}{x(y-2)-(y-2)}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{2-y}-e^{1-x}+\frac{x-1-y+2}{(y-2)(x-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{2-y}-e^{1-x}+\frac{1}{y-2}-\frac{1}{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{2-y}+\frac{1}{y-2}=e^{1-x}+\frac{1}{x-1}$$

Xét hàm số $y=f(t)=e^{-t}+\frac{1}{t},\forall t\neq 0$

Ta có $f'(t)=-e^{-t}-\frac{1}{t^2}<0,\forall t\neq 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Phương trình trở thành $f(y-2)=f(x-1)$ với $x,y<0$ nên $y-2,x-1\in(-\infty;0)$.

Do đó $y-2=x-1\Leftrightarrow y=x+1$. Thay vào P ta được $P=x+x+1+x(x+1)=x^2+3x+1$.

Khi đó P đạt GTNN trên $(-\infty;0)$ là $-\frac{5}{4}$ khi $x=-\frac{3}{2}$ và $y=-\frac{1}{2}$.

Câu 72. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $\log_2(2x-2002)+x=y+1002+2^y$ và $1002\le x\le 2020$?

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x-1001=u>0, 2^y=v>0$ ta có phương trình $\log_2 u+u=\log_2 v+v$ với hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ suy ra $u=v\Rightarrow x-1001=2^y$

$\Rightarrow 1002\le x=2^y+1001\le 2020$ Suy ra $0=\log_2 1\le y\le \log_2 1019=9,99$.

Do mỗi y cho ta một x và y nguyên nên $y\in\{0;1;2;...;9\}$.

Câu 73. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x\le 2020$ và

$$\log_2\frac{y}{2\sqrt{x+1}}=3(\sqrt{x+1}-\mathrm{y})-\mathrm{y}^2+x\ ?$$

A. 2020. **B.** 44. **C.** 43. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện bài toán: $0\le x\le 2020, y\ge 1$

Ta có: $\log_2\frac{y}{2\sqrt{x+1}}=3(\sqrt{x+1}-\mathrm{y})-\mathrm{y}^2+x$

$\Leftrightarrow \log_2 y+y^2+3y=\log_2\sqrt{x+1}+(\mathrm{x}+1)+3\sqrt{x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(\mathrm{t})=\log_2 t+t^2+3t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2\ln t}+2t+3>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{x+1})\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}$

Vì $1\le x\le 2020$ nên $\sqrt{2}\le y=\sqrt{x+1}\le\sqrt{2021}\Leftrightarrow 2\le y\le 44$

Do y nguyên dương nên có 43 số nguyên dương y thỏa yêu cầu bài toán.

Rõ ràng với mỗi y ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị x nguyên dương thỏa mãn.

Vậy có 43 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 74. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2>a_1\ge 0$ và $b_2>b_1\ge 1$; và hàm số $f(x)=x^3-3x$ sao cho $f(a_2)+2=f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2)+2=f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n>2018a_n$ là:

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)=x^3-3x$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Theo giả thiết

$$\begin{cases}f(a_2)+2=f(a_1)\\ a_2>a_1\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(a_2)<f(a_1)\\ a_2>a_1\ge 0\end{cases}.$$

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l}0\le a_1<a_2\le 1\\ 0\le a_1\le 1<a_2\end{array}\right.$, hơn nữa $f(x)+2\ge 0\,\forall x\ge 0$. Ta xét các trường hợp:

□ Nếu $0\le a_1<a_2\le 1$ thì $\begin{cases}f(a_2)+2\ge 0\\ f(a_1)\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(a_2)=-2\\ f(a_1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=1\\ a_1=0\end{cases}$.

□ Nếu $0\le a_1\le 1<a_2$ thì $\begin{cases}f(a_2)+2>0\\ f(a_1)\le 0\end{cases}$ điều này là không thể.

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $a_1=0;a_2=1$.

Từ đó suy ra $a_n=n-1\,(n\ge 1)$.

Tương tự vì $b_2>b_1\ge 1$ nên $\log_2 b_2>\log_2 b_1\ge 0$, suy ra $\begin{cases}\log_2 b_2=1\\ \log_2 a_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_2=1\\ b_1=1\end{cases}\Rightarrow b_n=2^{n-1}\,(n\ge 1)$.

Xét hàm số $g(x)=2^x-2018x$ trên nữa khoảng $[0;+\infty)$, ta có bảng biến thiên

x	0		$log_2\dfrac{2018}{\ln 2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$g(log_2\frac{2018}{\ln 2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $\begin{cases} g\left(\log_2\dfrac{2018}{\ln 2}\right)<0 \\ \log_2\dfrac{2018}{\ln 2}>11 \\ g(12)=-20120 \\ g(13)=-18042 \\ g(14)=-11868 \\ g(15)=2498>0 \end{cases}$ nên số nguyên dương nhỏ nhất n thỏa $g(n-1)>0$ là $n-1=15 \Leftrightarrow n=16$.

Câu 75. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}+(x+1)^3=x^2+6x+7$

A. $-2+\sqrt{3}$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-2-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}>0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-3x-5>0 \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-6x-6>0$

$\Leftrightarrow (x+1)^3-6(x+1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x-5)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{6}<x<-1 \\ -1+\sqrt{6}<x \end{array}\right.$.

$\log\dfrac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}+(x+1)^3=x^2+6x+7$.

$\Leftrightarrow \log(x^3+3x^2-3x-5)-\log(x^2+1)=x^2+6x+7-(x+1)^3$.

$\Leftrightarrow \log(x^3+3x^2-3x-5)+x^3+3x^2-3x-5=\log(x^2+1)+x^2+1(*)$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log t+t$ $(t>0)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+1$.

Với $t>0 \Rightarrow f'(t)>0$.

Vậy hàm $f(t)=\log t+t$ đồng biến với $t>0$.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$x^3+3x^2-3x-5=x^2+1$.

$\Leftrightarrow x^3+8+2x^2-3x-14=0$.

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(2x-7)=0$.

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-3)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có ba nghiệm nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình bằng -2.

Câu 76. Biết rằng với $m \in [a;b]$ thì phương trình $16|x|^3 - 12x^2\left(x^2+1\right) = m\left(x^2+1\right)^3$ có nghiệm. Khi đó a^2+b^2 có giá trị bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 16\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|^3 - 12\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2 = m \Leftrightarrow 2\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|^3 - 3\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2 = m.$

Đặt $t = \left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right| \geq 0$. Ta có $x^2+1 \geq 2x$ suy ra $t = \left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$. Do đó $0 \leq t \leq 1$.

Phương trình trở thành $2t^3 - 3t^2 = m \quad (*)$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2t^3 - 3t^2$ (chỉ xét trong phần $t \in [0;1]$) và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1] \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$.

Do đó $a=-1; b=0 \Rightarrow a^2+b^2 = 1+0 = 1$. bằng

Chọn phương án#A.

Câu 77. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x \leq 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2x+y+3}{x+3y+4}\right) = 2y-x+1$?

A. 1010 **B.** 2020. **C.** 2019 **D.** 1009

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán: $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2020,\ x \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq y,\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$ và $\log_3\left(\dfrac{2x+y+3}{x+3y+4}\right) = 2y-x+1$?

Ta có: $\log_3\left(\dfrac{2x+y+3}{x+3y+4}\right) = 2y-x+1$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+3) - \log_3(x+3y+4) = (x+3y+4) - (2x+y+3)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+3) + (2x+y+3) = \log_3(x+3y+4) + (x+3y+4) \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t\ln 3} > 0, \forall t \in (0;+\infty) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(2x+y+3) = f(x+3y+4) \Leftrightarrow x = 2y+1$

Vì $1 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2y+1 \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \dfrac{2019}{2}$.

Do y nguyên dương nên $y \in \{1;2;3;...;1009\}$.

Với mỗi giá trị y xác định được tương ứng duy nhất một giá trị x nguyên dương thỏa mãn. Vậy có 1009 cặp số nguyên.

Câu 78. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2020$ và $1 \le y \le 2020$ và $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 16.2^y + \log_2(2x+1)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 1010. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện bài toán: $\begin{cases} 0 \le x \le 2020 \\ 1 \le y \le 2020 \end{cases}$

Ta có: $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 16.2^y + \log_2(2x+1) \Leftrightarrow 2^{2x+2} - \log_2(2x+1) = 2^{y+4} - \log_2(y+3)(*)$

Xét hàm số $f(t) = 2^{t+1} - \log_2 t$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2^{t+1}\ln 2 - \dfrac{1}{t\ln 2} = \dfrac{t.2^{t+1}.\ln^2 2 - 1}{t\ln 2} > 0, \forall t \in [1;+\infty) \Rightarrow$ hàm sốđồng biến trên$[1;+\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(2x+1) = f(y+3) \Leftrightarrow 2x+1 = y+3 \Leftrightarrow y = 2x-2$

Vì $1 \le y \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le 2x-2 \le 2020 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \le x \le 1011$.

Do x nguyên nên $x \in \{2;3;4;...;1011\}$. Rõ ràng, với mỗi x ta xác định được tương ứng duy nhất một giá trị y nguyên thỏa mãn.

Vậy có 1010 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 79. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=16$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=14$. **D.** $a+b=13$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \ne \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7\left(\dfrac{(2x-1)^2}{2x}\right) + 4x^2 - 4x + 1 = 2x$

$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x(1)$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t \Leftrightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 7} + 1 > 0$ với $t > 0$

Vậy hàm số đồng biến

Phương trình (1) trở thành $f\left((2x-1)^2\right) = f(2x) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

Vậy $x_1 + 2x_2 = \left[\begin{array}{l} \dfrac{9-\sqrt{5}}{4} \quad (l) \\ \dfrac{9+\sqrt{5}}{4} \quad (tm) \end{array}\right. \Rightarrow a = 9; b = 5 \Rightarrow a+b = 9+5 = 14.$

Câu 80. Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$, với m là tham số. Số giá trị nguyên của $m\in(-2020;2020)$ để phương trình đã cho có nghiệm là?

A. 9. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện của phương trình: $x>m$.

Ta có $5^x+m=\log_5(x-m)\Leftrightarrow 5^{5^x+m}=x-m\Leftrightarrow 5^{5^x+m}+m=x$.

Đặt $5^x+m=t\ \ (1)$, phương trình trên trở thành $5^t+m=x\ \ (2)$.

Trừ tương ứng vế với vế của (1) cho (2), ta được: $5^x-5^t=t-x\Leftrightarrow 5^x+x=5^t+t$.

Đặt $f(x)=5^x+x\Rightarrow f'(x)=5^x.\ln 5+1>0\ \forall x$, vậy $f(x)$ là hàm đơn điệu trên tập xác định.

Từ đây suy ra $5^x+x=5^t+t\Leftrightarrow f(x)=f(t)\Leftrightarrow x=t$, thế vào phương trình (1), ta được:

$5^x+m=x\Leftrightarrow x-5^x=m$.

Xét hàm $g(x)=x-5^x$ có $g'(x)=1-5^x.\ln 5\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow 1-5^x.\ln 5=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)-\frac{1}{\ln 5}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy phương trình $g(x)=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\le \log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)-\dfrac{1}{\ln 5}\approx -0,92$.

Lại có $m\in(-2020;2020)$ và $m\in\mathbb{Z}$, từ đây suy ra $m\in\mathbb{Z}$ và $-2019\le m\le -1$.

Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 81. Cho a, b, c là ba số thực dương, $a>1$ thỏa mãn $\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\dfrac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}=0$. Có bao nhiêu bộ 3 số $(a;b;c)$ thỏa mãn điều kiện đã cho?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $4-c^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le c\le 2$

Kết hợp giả thiết ta có $0<c\le 2$.

Do a, b, c là ba số thực dương, $a>1$ nên ta có

$$\mathrm{P}=\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}\ge \log_a^2(bc)+\log_a\left(2\sqrt{b^3c^3.\frac{bc}{4}}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}$$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}\ge \log_a^2(bc)+4\log_a(bc)+4+\sqrt{4-c^2}$

$\Leftrightarrow P\ge\left(\log_a(bc)+2\right)^2+\sqrt{4-c^2}\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(bc)+2=0 \\ \sqrt{4-c^2}=0 \\ b^3c^3=\dfrac{bc}{4} \\ a>1 \\ b>0 \\ 0<c\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc=\dfrac{1}{a^2} \\ c=2 \\ bc=\dfrac{1}{2} \\ a>1 \\ b>0 \\ 0<c\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=\dfrac{1}{4} \\ c=2 \end{cases}$.

Vậy có duy nhất một bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 82. Cho $x,\ y$ là các số thực dương thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1}+(x-y+1)(x-y-1)=\log_2(2xy)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_2(2xy)+\dfrac{4}{x^2+y^2}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Giả thiết $2^{x^2+y^2-1}+(x-y+1)(x-y-1)=\log_2(2xy) \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-1}+(x-y)^2-1=\log_2(2xy)$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+2^{x^2+y^2-1}-1=\log_2(2xy) \Leftrightarrow x^2+y^2-1+2^{x^2+y^2-1}=2xy+\log_2(2xy)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-1+2^{x^2+y^2-1}=\log_2(2xy)+2^{\log_2(2xy)}\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$, ta có $f'(t)=1+2^t\ln 2>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) suy ra $f(x^2+y^2-1)=f(\log_2(2xy)) \Leftrightarrow x^2+y^2-1=\log_2(2xy)$.

Khi đó $P=\log_2(2xy)+\dfrac{4}{x^2+y^2}=x^2+y^2+\dfrac{4}{x^2+y^2}-1\ge 2\sqrt{(x^2+y^2).\dfrac{4}{x^2+y^2}}-1=3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{4}{x^2+y^2} \\ x^2+y^2-1=\log_2(2xy) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$.

Vì $x>0, y>0$ nên $x=y=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 3 khi và chỉ khi $x=y=1$.

Câu 83. Cho phương trình $\log_2(2x^2-4x+4)=2^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ và $0<x<100$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $2x^2-4x+4>0$ (*)

Ta có

$\log_2(2x^2-4x+4)=2^{y^2}+y^2-x^2+2x-1 \Leftrightarrow \log_2\left[2(x^2-2x+2)\right]+(x^2-2x+1)=2^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-2x+2)+\log_2 2+(x^2-2x+1)=2^{y^2}+y^2 \Leftrightarrow \log_2(x^2-2x+2)+(x^2-2x+2)=2^{y^2}+y^2$ (1).

Xét hàm $f(t)=2^t+t$

Ta có $f'(t)=2^t.\ln 2+1>0\ \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow f\left(\log_2\left(x^2-2x+2\right)\right)=f\left(y^2\right)\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-2x+2\right)=y^2\Leftrightarrow x^2-2x+2=2^{y^2}\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+1=2^{y^2}$.

Do $0<x<100\Rightarrow 1\le\left(x-1\right)^2+1=2^{y^2}\le 99^2+1\Rightarrow 0\le y^2\le\log_2\left(99^2+1\right)$; do y nguyên dương nên ta suy ra $1\le y\le 3$.

+) $y=1\Rightarrow x^2-2x+2=2\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn Đk (*) và x nguyên dương).

+) $y=2\Rightarrow x^2-2x+2=16\Rightarrow x^2-2x-14=0$ (Không có giá trị nguyên nào thỏa mãn).

+) $y=3\Rightarrow x^2-2x+2=512\Rightarrow x^2-2x-510=0$ (Không có giá trị nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x;y)=(2;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(-x)+2019f(x)=2^x, \forall x\in[-1;1]$. Giá trị của $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{2019\ln 2}$. **B.** $\frac{3}{4040\ln 2}$. **C.** 0 **D.** $\frac{5}{2018\ln 2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $f(-x)+2019f(x)=2^x$. (1)

Đặt $u=-x$, phương trình đã cho trở thành $f(u)+2019f(-u)=2^{-u}$

$\Rightarrow f(x)+2019f(-x)=2^{-x}$. (2)

Từ $(1)\Rightarrow f(-x)=\frac{2^{-x}-f(x)}{2019}$ thế vào phương trình (2) ta được

$$f(x)+2019.\frac{2^{-x}-f(x)}{2019}=2^{-x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2019^2-1}\left(2019.2^x-2^{-x}\right).$$

Ta có

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2019^2-1}\left(2019.2^x-2^{-x}\right)dx=\frac{1}{2019^2-1}.\left[2019.\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2019^2-1}.\left[\frac{2019}{\ln 2}\left(2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}-2\right)\right]=\frac{1}{2020.2018}.\frac{2018.3}{2.\ln 2}=\frac{3}{4040.\ln 2}.$$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2},\int\limits_0^1 f'(x)\cos\pi x dx=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** π. **D.** $\frac{1}{\pi}$.

Lời giải

Đáp án A

Phương pháp:

+) Sử dụng phương pháp từng phần đối với tích phân $\int\limits_0^1 f'(x).\cos\pi x dx$.

+) Sử dụng kết quả $\int\limits_0^1 \left[f(x)+k.\sin\pi x\right]^2 dx=0$ tính $f(x)$

+) Lấy tích phân từ 0 đến 1 cả 2 vế tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$

Cách giải:

Đặt $\begin{cases} u=\cos\pi x \\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=-\pi\sin\pi x dx \\ v=f(x)\end{cases}$

Ta có $\int\limits_0^1 f'(x).\cos\pi x dx=f(x).\cos\pi x\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f(x).\sin\pi x dx$

$$=-\left[f(1)+f(0)\right]+\pi\int\limits_0^1 f(x).\sin\pi x dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x).\sin\pi x dx=\frac{1}{2}$$

Xét $\int_0^1 \left[f(x)+k.\sin\pi x\right]^2 dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx+2k.\int_0^1 f(x).\sin\pi x dx+k^2.\int_0^1 \sin^2(\pi x)dx=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k^2+2k.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow (k+1)^2=0 \Leftrightarrow k=-1$. Suy ra $\int_0^1 \left[f(x)-\sin\pi x\right]^2 dx=0$

Vậy $f(x)=\sin\pi x \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \sin\pi x dx=-\frac{\cos\pi x}{x}\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$

Câu 3. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f(x^2)+3.f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $I=\frac{\pi}{20}$. **B.** $I=\frac{\pi}{16}$. **C.** $I=\frac{\pi}{6}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

- Xét $I_1=\int_0^1 4x.f(x^2).dx$.

Đặt $t=x^2 \Rightarrow dt=2x.dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$

$\Rightarrow I_1=2\int_0^1 f(t).dt=2\int_0^1 f(x).dx=2I$.

- Xét $I_2=\int_0^1 3f(1-x).dx$.

Đặt $t=1-x \Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$

$\Rightarrow I_2=-3.\int_1^0 f(t).dt=3.\int_0^1 f(t).dt=3.\int_0^1 f(x).dx=3I$.

- Tính $I_3=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx$.

Đặt $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t.dt$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t.dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t).dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

- Lại có: $4x.f(x^2)+3.f(1-x)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int_0^1 \left(4x.f(x^2)+3.f(1-x)\right).dx=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx$

$\Leftrightarrow I_1+I_2=I_3 \Rightarrow 5.I=\frac{\pi}{4} \Rightarrow I=\frac{\pi}{20}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;4]$ và thỏa mãn đẳng thức sau đây $2019f(x)+2020f(4-x)=6059-\frac{\sqrt{x}}{2}$. Tính tích phân $\int_0^4 f'(x)dx$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

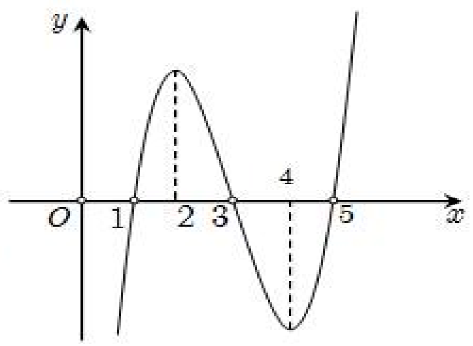
Chọn B

Ta có $\int_0^4 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^4=f(4)-f(0)$.

Với $x=0$ và $x=4$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}2019f(0)+2020f(4)=6059\\2020f(0)+2019f(4)=6058\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=1\\f(4)=2\end{cases}$.

Do đó $\int_0^4 f'(x)\mathrm{d}x=f(4)-f(0)=2-1=1$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $y=g(x)=f(x+1)-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=g'(x)=f'(x+1)-(x^2-2x)$.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=4\end{array}\right.$.

$f'(x+1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x+1<3\\x+1>5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<2\\x>4\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $y'=g'(x)$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2+2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	Chưa xác định dấu	

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2},2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x$ Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\ 4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x} \end{cases} \longrightarrow f(x)=\frac{2}{x}-x.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(-\frac{2}{x}-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$

Cách khác. Từ $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \longrightarrow f(x)=3x-2f\left(\frac{1}{x}\right).$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$

Xét $J=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$ Đặt $t=\frac{1}{x}$, suy ra $\mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-t^2\mathrm{d}x \longrightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\rightarrow t=2 \\ x=2\rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $J=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}tf(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=I.$

Vậy $I=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2I \longrightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thuyết ta có $\int\limits_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left[2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4\right]\mathrm{d}x$ $(*)$.

Ta tính $\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}(2-x)=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vì vậy $\int\limits_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=4\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Hơn nữa $\int\limits_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}\left(x^2-2x+1\right)=\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\Big|_0^2=0$ và $\int\limits_0^2 4\mathrm{d}x=8$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thuyết ta có $\int_0^2 \left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4\right]\mathrm{d}x$ $(*)$.

Ta tính $\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x = -\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}(2-x) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vì vậy $\int_0^2 \left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x = 4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Hơn nữa $\int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}\left(x^2-2x+1\right) = \mathrm{e}^{x^2-2x+1}\Big|_0^2 = 0$ và $\int_0^2 4\mathrm{d}x = 8$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{4}{3}$ **B.** $-\frac{10}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Từ $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(0)+f(2)=2 \Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$.

Xét $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2-t \Rightarrow dx=-dt$, đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

Khi đó $I=-\int_2^0 f(2-t)dt = \int_0^2 f(2-t)dt \Rightarrow I=\int_0^2 f(2-x)dx$

Do đó ta có $\int_0^2 \left(f(x)+f(2-x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Vậy $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2.(-1)-\frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$xf\left(x^5\right)-f\left(1-x^4\right)=x^{11}-x^8-3x^6-x^4+x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-1}^0 f(x)dx$.

A. $I=-\frac{21}{2}$. **B.** $I=\frac{17}{6}$. **C.** $I=\frac{7}{6}$. **D.** $I=\frac{21}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $xf\left(x^5\right)-f\left(1-x^4\right)=x^{11}-x^8-3x^6-x^4+x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow x^4f\left(x^5\right)-x^3f\left(1-x^4\right)=x^{14}-x^{11}-3x^9-x^7+x^4+x^3$

+ Lấy tích phân hai vếtrên đoạn $[-1;0]$, ta được:

$$\underbrace{\int_{-1}^{0} x^4 f\left(x^5\right)dx}_{t=x^5} - \underbrace{\int_{-1}^{0} x^3 f\left(1-x^4\right)dx}_{t=1-x^4} = \int_{-1}^{0}\left(x^{14}-x^{11}-3x^9-x^7+x^4+x^3\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}.\int_{-1}^{0} f\left(t\right)dt + \frac{1}{4}.\int_{0}^{1} f\left(t\right)dt = \frac{21}{40}\ (1)$$

+ Lấy tích phân hai vế trên đoạn $\left[0;1\right]$, ta được:

$$\underbrace{\int_{0}^{1} x^4 f\left(x^5\right)dx}_{t=x^5} - \underbrace{\int_{0}^{1} x^3 f\left(1-x^4\right)dx}_{t=1-x^4} = \int_{0}^{1}\left(x^{14}-x^{11}-3x^9-x^7+x^4+x^3\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}.\int_{0}^{1} f\left(t\right)dt - \frac{1}{4}.\int_{0}^{1} f\left(t\right)dt = \frac{1}{120} \Leftrightarrow \int_{0}^{1} f\left(t\right)dt = -\frac{1}{6}\left(2\right)$$

Thế vào $\left(1\right)$ ta được: $\int_{-1}^{0} f\left(t\right)dt = \frac{17}{6}$.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $\int_{0}^{1}\left[f'\left(x\right)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{9}{5}$ và $\int_{0}^{1} f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$. Tính tích phân $I = \int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{3}{5}$. **B.** $I = \frac{1}{4}$. **C.** $I = \frac{3}{4}$. **D.** $I = \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0;\ x=1 \Rightarrow t=1$

Suy ra $\int_{0}^{1} f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} t.f\left(t\right)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_{0}^{1} t.f\left(t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}$. Do đó $\Leftrightarrow \int_{0}^{1} x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$

Mặt khác $\int_{0}^{1} x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}f\left(x\right)\Big|_0^1 - \int_{0}^{1}\frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \int_{0}^{1}\frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-\frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow \int_{0}^{1} x^2 f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$

Ta tính được $\int_{0}^{1}\left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x = \frac{9}{5}$.

Do đó $\int_{0}^{1}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{1} 3x^2 f'\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_{0}^{1}\left(f'\left(x\right)-3x^2\right)^2\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right)-3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) = 3x^2 \Leftrightarrow f\left(x\right) = x^3 + C$.

Vì $f\left(1\right)=1$ nên $f\left(x\right)=x^3$

Vậy $I = \int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

Câu 12. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx$.

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x=-t$. Khi đó $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(x\right)dx=\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(-t\right)d\left(-t\right)=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(-t\right)dt=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(-x\right)dx$

Ta có: $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right)=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(x\right)d\left(x\right)+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(-x\right)d\left(x\right)+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right)$

Hay $I=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f\left(-x\right)+f\left(x\right)\right)d\left(x\right)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}\,d\left(x\right)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}\,d\left(x\right)$

$\Leftrightarrow I=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}\,d\left(x\right)=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|d\left(x\right)=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d\left(x\right)-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos x\,d\left(x\right)$

Vậy $I=2\sin x\,|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2\sin x\,|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Câu 13. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$ Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{5}{2}$ **C.** $I=\frac{3}{2}$ **D.** $I=\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\frac{1}{x}$. Suy ra $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2$. $x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Ta có $I=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}} tf\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $3I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x+2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\left(f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}3\mathrm{d}x=3x|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9}{2}$.

Vậy $I=\frac{3}{2}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[0;4\right]$ và thỏa mãn đẳng thức sau đây $2019f\left(x\right)+2020f\left(4-x\right)=6059-\frac{\sqrt{x}}{2}$. Tính tích phân $\int\limits_0^4 f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 0 **B. 1** **C. 2** **D. 3**

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^4 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(x\right)\Big|_0^4=f\left(4\right)-f\left(0\right)$.

Với $x=0$ và $x=4$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}2019f\left(0\right)+2020f\left(4\right)=6059\\2020f\left(0\right)+2019f\left(4\right)=6058\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(0\right)=1\\f\left(4\right)=2\end{cases}$.

Do đó $\int\limits_0^4 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(4\right)-f\left(0\right)=2-1=1$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[0;3\right]$; $f\left(3-x\right).f\left(x\right)=1, f\left(x\right)\neq -1$ với mọi $x\in\left[0;3\right]$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân: $I=\int\limits_0^3\frac{x.f'\left(x\right)}{\left[1+f\left(3-x\right)\right]^2.f^2\left(x\right)}dx$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$\left(1+f\left(3-x\right)\right)^2.f^2\left(x\right)=f^2\left(x\right)+2.f\left(3-x\right).f^2\left(x\right)+f^2\left(3-x\right).f^2\left(x\right)$

$=f^2\left(x\right)+2.f\left(x\right)+1=\left(f\left(x\right)+1\right)^2$.

$$I=\int\limits_0^3\frac{x.f'\left(x\right)}{\left(1+f\left(x\right)\right)^2}\mathrm{d}x$$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{f'\left(x\right)}{\left(1+f\left(x\right)\right)^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=-\frac{1}{1+f\left(x\right)}\end{cases}$

$$I=\frac{-x}{1+f\left(x\right)}\Bigg|_0^3+\int\limits_0^3\frac{dx}{1+f\left(x\right)}=\frac{-3}{1+f\left(3\right)}+I_1$$

$f\left(0\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(3\right)=2$

Đặt $t=3-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$

$x=3\Rightarrow t=0$

$$I_1=\int\limits_0^3\frac{dt}{1+f\left(3-t\right)}=\int\limits_0^3\frac{dx}{1+\frac{1}{f\left(x\right)}}=\int\limits_0^3\frac{f\left(x\right).dx}{1+f\left(x\right)}$$

$$2I_1=\int\limits_0^3\frac{1+f\left(x\right)}{1+f\left(x\right)}dx=3\Rightarrow I_1=\frac{3}{2}$$

Vậy $I=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$xf\left(x^3+1\right)+f\left(x^2\right)=-x^{13}-x^8+6x^7+4x^6+8x^4+5x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó tích phân $\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx$ bằng

A. $-\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{42}{15}$. **C.** $\frac{54}{5}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$(1)\Leftrightarrow x^2f\left(x^3+1\right)+xf\left(x^2\right)=-x^{14}-x^9+6x^8+4x^7+8x^5+5x^2+2x,\forall x\in\mathbb{R}$

Lấy TP hai vế từ 0 đến 1:

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 x^2f\left(x^3+1\right)dx+\int\limits_0^1 xf\left(x^2\right)dx=5$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x^3+1\right)d(x^3+1)+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(x^2\right)d(x^2)=5$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}[F(2)-F(1)]+\frac{1}{2}[F(1)-F(0)]=5$

Lấy TP hai vế từ -1 đến 0: $\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^0 f\left(x^3+1\right)d(x^3+1)+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 f\left(x^2\right)d(x^2)=\frac{-7}{15}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}[F(1)-F(0)]+\frac{1}{2}[F(0)-F(1)]=\frac{-7}{15}\Leftrightarrow[F(1)-F(0)]=\frac{42}{15}$

- Thay lên: $\frac{1}{3}[F(2)-F(1)]+\frac{1}{2}.\frac{42}{15}=5\Leftrightarrow[F(2)-F(1)]=\frac{54}{5}$

Câu 17. Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+xf\left(1-x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\frac{1}{x+1}$.

Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\frac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f\left(x\right)+x.f\left(1-x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\frac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\ln\left|x+1\right|\Big|_0^1=\ln 2\ \left(*\right)$.

Đặt $u=1-x^2\Rightarrow\mathrm{d}u=-2x\mathrm{d}x$; với $x=0\Rightarrow u=1;x=1\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int\limits_0^1 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\ \left(1\right)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; với $x=0\Rightarrow t=1;x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\ \left(2\right)$.

Thay $\left(1\right)$, $\left(2\right)$ vào $\left(*\right)$ ta được:

$\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\ln 2\Rightarrow\frac{9}{2}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\ln 2\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\ln 2$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)-f(2-x)-f\left(3x^2-1\right)=3x^2-\frac{15}{4}$ với $\forall x\in[-10;10]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_a^{2-a} f\left(3x^2-1\right)dx$ bằng bao nhiêu? Với số thực $a\in[1;6]$.

A. $-\frac{15}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -10. **D.** -6.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$. Suy ra: $\int_a^{2-a} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{2-a} f(2-x)\mathrm{d}x$.

Từ

$$f(x)-f(2-x)-f\left(3x^2-1\right)=3x^2-\frac{15}{4}\Rightarrow \int_a^{2-a}\left(f(x)-f(2-x)-f\left(3x^2-1\right)\right)\mathrm{d}x=\int_a^{2-a}\left(3x^2-\frac{15}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{2-a} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{2-a} f(2-x)\mathrm{d}x-\int_a^{2-a} f\left(3x^2-1\right)\mathrm{d}x=-2a^3-6a^2+\frac{9}{2}a+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\int_a^{2-a} f\left(3x^2-1\right)\mathrm{d}x=-2a^3-6a^2+\frac{9}{2}a+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{2-a} f\left(3x^2-1\right)\mathrm{d}x=2a^3+6a^2-\frac{9}{2}a-\frac{1}{2}=h(a).$$

Khảo sát nhanh hàm số $h(a)=2a^3+6a^2-\frac{9}{2}a-\frac{1}{2}$ trên đoạn $[1;6]$ ta được:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(a)=2a^3+6a^2-\frac{9}{2}a-\frac{1}{2}$ là $\min\limits_{[1;6]} h(a)=h\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_a^{2-a} f\left(3x^2-1\right)\mathrm{d}x$ là $-\frac{1}{2}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn

$f\left(x^2\right)+2\left(x^2+1\right)f\left(x^4+2x^2+1\right)=4x^4+8x^2+2x+4$. Tính tích phân $\int_0^4 f(x)dx$

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** $\frac{23}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$4xf\left(x^2\right)+2\left(4x^3+4x\right)f\left(x^4+2x^2+1\right)=\left(4x^4+8x^2+2x+4\right).4x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 4xf\left(x^2\right)dx+\int_0^1 2\left(4x^3+4x\right)f\left(x^4+2x^2+1\right)dx=\int_0^1\left(4x^4+8x^2+2x+4\right).4xdx$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(t)dt+2\int_1^4 f(u)du=\frac{64}{3}\Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx=\frac{32}{3}$$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{5}{2}$ **C.** $I=\frac{3}{2}$ **D.** $I=\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\frac{1}{x}$. Suy ra $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2$. $x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Ta có $I=\int\limits_2^{\frac{1}{2}} tf\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $3I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\left(f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}3\mathrm{d}x=3x\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9}{2}$.

Vậy $I=\frac{3}{2}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x,\forall x\in[0;1]$. Tính $I=\int\limits_0^1 f\left(1-x^2\right)dx$

A. $I=\frac{4}{15}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-\frac{2}{15}$. **D.** $I=\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1-x,\forall x\in[0;1]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Ta có $f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x\Leftrightarrow f(x)+2f(1-x)=3(1-x)^2-3$

$\Leftrightarrow f(1-t)+2f(t)=3t^2-3\Leftrightarrow 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \\ 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \\ 4f(x)+2f(1-x)=6x^2-6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3f(x)=3x^2+6x-6\Leftrightarrow f(x)=x^2+2x-2$

Khi đó $f\left(1-x^2\right)=\left(1-x^2\right)^2+2\left(1-x^2\right)-2=x^4-4x^2+1$

Suy ra $I=\int\limits_0^1 f\left(1-x^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^4-4x^2+1\right)dx=-\frac{2}{15}$.

Câu 22. Cho hàm số $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.\mathrm{f}\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{16}\frac{\mathrm{f}\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $\mathrm{I}=\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\mathrm{f}(\pi 4x)}{x}\mathrm{d}x$?

A. $\mathrm{I}=3$ **B.** $\mathrm{I}=\frac{3}{2}$ **C.** $\mathrm{I}=2$ **D.** $\mathrm{I}=\frac{5}{2}$

Lời giải

Đáp án D

$$A=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}.f\left(\sin^2 x\right)dx$$

Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow dt=2\sin x\cos x dx$, đổi cận suy ra $A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{2t}dt=1\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx=2$

Mặt khác $B=\int_{1}^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}dx=1\xrightarrow{u=\sqrt{x}}B=\int_{1}^{4}\frac{f(u)}{u^2}2udu\Rightarrow B=\int_{1}^{4}\frac{f(u)}{u}du=1$

$$\Rightarrow\int_{1}^{4}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}$$

Xét $I=\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f(\pi 4x)}{x}dx\xrightarrow{v=4x}I=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(v)}{\frac{v}{4}}\frac{dv}{4}=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(v)}{v}dv=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(x)}{x}dx=A+B=\frac{5}{2}$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$xf(x^5)+f(1-x^4)=-x^{11}-x^8+x^6+x^4+x+1,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0}f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{61}{96}$. **B.** $-\frac{65}{48}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Chọn C

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có $xf(x^5)+f(1-x^4)=-x^{11}-x^8+x^6+x^4+x+1\ (*)$

$$\Rightarrow x^4f(x^5)+x^3f(1-x^4)=-x^{14}-x^{11}+x^9+x^7+x^4+x^3$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left(x^4f(x^5)\right)dx+\int_0^1\left(x^3f(1-x^4)\right)dx=\int_0^1\left(-x^{14}-x^{11}+x^9+x^7+x^4+x^3\right)dx$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}\int_0^1 f(x^5)dx^5-\frac{1}{4}\int_0^1 f(1-x^4)d(1-x^4)=\frac{21}{40}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx=\frac{21}{40}\Rightarrow\frac{9}{20}\int_0^1 f(x)dx=\frac{21}{40}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{6}\ (1)$$

Mặt khác từ suy ra

$$\Rightarrow\int_{-1}^0\left(x^4f(x^5)\right)dx+\int_{-1}^0\left(x^3f(1-x^4)\right)dx=\int_{-1}^0\left(-x^{14}-x^{11}+x^9+x^7+x^4+x^3\right)dx$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}\int_{-1}^0 f(x^5)dx^5-\frac{1}{4}\int_{-1}^0 f(1-x^4)d(1-x^4)=-\frac{31}{120}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}\int_{-1}^0 f(x)dx-\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx=-\frac{31}{120}\quad(2)$$

Thế vào ta được $\int_{-1}^0 f(x)dx=\frac{1}{6}$.

Câu 24. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases}\frac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x)\\ \frac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2\end{cases},\ \forall x\in[1;2].$$

Tính tích phân $I=\int_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x.$

A. $I=\frac{1}{2}.$ **B.** $I=1.$ **C.** $I=\frac{3}{2}.$ **D.** $I=2.$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2}g(x)-\frac{(x+1)}{x}f'(x)=-2017\\ \frac{x}{x+1}g'(x)+\frac{1}{x^2}f(x)=2018\end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$.

Suy ra $\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\frac{(x+1)}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right]=1\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\frac{(x+1)}{x}f(x)\right]'=1$

$\longrightarrow\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{(x+1)}{x}f(x)=x+C.$

Mà $f(1)=g(1)=0\Rightarrow C=-1\longrightarrow I=\int_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$ **Chọn A**

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{4}{3}.$ **B.** $-\frac{10}{3}.$ **C.** $\frac{2}{3}.$ **D.** $\frac{5}{3}.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$

Từ $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(0)+f(2)=2\Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1.$

Xét $I=\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x$

Đặt $t=2-x\Rightarrow dt=-dx,$ đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=0\end{cases}$

Khi đó $I=-\int_2^0 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 f(x)dx$

Do đó ta có $\int_0^2\left(f(x)+f(2-x)\right)dx=\int_0^2\left(x^2-2x+2\right)dx$

$\Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=\frac{4}{3}.$

Vậy $\int_0^2 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)dx=2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}.$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(2)-f(0)=8$ đồng thời $xf\left(x^3-3x^2+2\right)-f'(2-2x)=x^2\left[x^5(x-3)^3-12\right]$ $\forall x\in\mathbb{R}.$ Khi đó tích phân $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{17}{6}$. **B.** $-\frac{124}{7}$. **C.** -4. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Nhân cả hai vế với $3x-6$ ta được

$$xf\left(x^3-3x^2+2\right)-f'(2-2x)=x^2\left[x^5(x-3)^3-12\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(3x^2-6x\right)f\left(x^3-3x^2+2\right)-(3x-6)f'(2-2x)=x^2(3x-6)\left[x^5(x-3)^3-12\right]$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f\left(x^3-3x^2+2\right)d\left(x^3-3x^2+2\right)-\frac{3}{4}\int_0^1(2+2-2x)f'(2-2x)d(2-2x)=\int_0^1 x^2(3x-6)\left[x^5(x-3)^3-12\right]dx$$

$$\Leftrightarrow\int_2^0 f(t)d(t)+\frac{3}{4}\int_0^2(2+t)f'(t)d(t)=19$$

$$\Leftrightarrow -I+\frac{3}{4}\left[\left((2+t)f(t)\right)\Big|_0^2-I\right]=19$$

$$\Leftrightarrow I=-4$$

Câu 27. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1,2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf\left(x^2-2\right)+3f(1-x)=4x^3$.

Tính giá trị tích phân $I=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)+2xf\left(x^2-2\right)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}2x.f\left(x^2-2\right)\mathrm{d}x+3\int_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}4x^3\mathrm{d}x=15\,(*)$.

Đặt $u=x^2-2\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; với $x=-1\Rightarrow u=-1; x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^{2}2x.f\left(x^2-2\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\ (1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; với $x=-1\Rightarrow t=2; x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\ (2)$.

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được $5\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=15\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=3$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$f(x+y)=f(x)+f(y)+\left(e^x-1\right)\left(e^y-1\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ và $f'(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=e-\frac{1}{2}$. **B.** $I=-e+\frac{1}{2}$. **C.** $I=-e-\frac{3}{2}$. **D.** $I=e-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x+y)=f(x)+f(y)+\left(e^x-1\right)\left(e^y-1\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Lấy đạo hàm hai vế của theo biến x, ta được $f'(x+y)=f'(x)+e^x\left(e^y-1\right)$.

Thay $x=0$ vào, ta được $f'(y)=f'(0)+e^y-1=e^y+1$.

Do đó $\int f'(y)dy=\int\left(e^y+1\right)dy \Rightarrow f(y)=e^y+y+C$.

Thay $x=0$ và $y=0$ vào, ta được $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

Từ và, suy ra $C=-1$. Khi đó $f(y)=e^y+y-1$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(y)dy=\int_0^1\left(e^y+y-1\right)dy=e-\frac{3}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn: $f\left(x^3\right)+xf\left(1-x^4\right)=-x^{13}+4x^9-3x^5-1, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó tính $T=2\int_{-1}^{0} f(x)dx+3\int_0^1 f(x)dx$.

A. 12. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** $-\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{19}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra $f\left(x^3\right)+xf\left(1-x^4\right)=-x^{13}+4x^9-3x^5-1, \forall x\in\mathbb{R}$

Nhân cả hai vế với x^2 ta được:

$x^2f\left(x^3\right)+x^3f\left(1-x^4\right)=-x^{15}+4x^{11}-3x^7-x^2, \forall x\in\mathbb{R}\ (*)$

+ Lấy tích phân cận từ -1 đến 0 hai vế $(*)$ ta được:

$$\int_{-1}^{0} x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0} x^3f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(-x^{15}+4x^{11}-3x^7-x^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{11}{48}$$

Đặt $\begin{cases}x^3=u\\1-x^4=v\end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(u)\mathrm{d}u-\frac{1}{4}\int_0^1 f(v)\mathrm{d}v=-\frac{11}{48}\ (*)}$

+ Lấy tích phân cận từ 0 đến 1 hai vế $(*)$ ta được:

$$\int_0^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^3f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-x^{15}+4x^{11}-3x^7-x^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{7}{16}$$

Đặt $\begin{cases}x^3=u\\1-x^4=v\end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u-\frac{1}{4}\int_1^0 f(v)\mathrm{d}v=-\frac{7}{16}\ (**)}$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta được $\Rightarrow \begin{cases}\int_{-1}^{0} f(u)\mathrm{d}u=-\frac{5}{4}\\ \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=-\frac{3}{4}\end{cases}$

Vậy $T=2\int_{-1}^{0} f(x)dx+3\int_0^1 f(x)dx=2.\left(-\frac{5}{4}\right)+3.\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{19}{4}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} \end{cases}$

Do đó $\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$.

Lại có: $\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}-\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=0$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\geq 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int\limits_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}f'(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Suy ra $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+C$ mà $f(1)=0$ do đó $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn:

$2f\left(\mathrm{e}^x-1\right)+(2e^x-5)f\left(\mathrm{e}^{2x}-5e^x+6\right)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{2020}$.Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

A. $\frac{2^{2021}-1}{2021}$. **B.** $\frac{2^{2020}-1}{4042}$. **C.** $\frac{2^{2021}+1}{4042}$. **D.** $\frac{2^{2020}+1}{2020}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$2f\left(\mathrm{e}^x-1\right)+(2e^x-5)f\left(\mathrm{e}^{2x}-5e^x+6\right)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{2020}$

$\Leftrightarrow 2e^xf\left(\mathrm{e}^x-1\right)+e\ (2e^x-5)f\left(\mathrm{e}^{2x}-5e^x+6\right)=e^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{2020}$

Suy ra: $\int\limits_0^{\ln 2} 2e^xf\left(\mathrm{e}^x-1\right)dx+\int\limits_0^{\ln 2} e^x(2e^x-5)f\left(\mathrm{e}^{2x}-5e^x+6\right)dx=\int\limits_0^{\ln 2} e^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{2020}dx$

Tính $\int_0^{\ln 2} 2e^x f\left(e^x-1\right)dx \ =\int_0^{\ln 2} 2e^x f\left(e^x-1\right)d\left(e^x-1\right) \ =2\int_0^1 f(x)dx$ (1)

Tính $\int_0^{\ln 2} e^x(2e^x-5)f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)dx=\int_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)d\left(e^{2x}-5e^x+6\right)=\int_2^0 f(x)dx$ (2)

Tính $\int_0^{\ln 2} e^x(e^x-1)^{2020}dx=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)^{2020}d(e^x-1)=\frac{1}{2021}$

Từ và $\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx+\int_2^0 f(x)dx=\frac{1}{2021}$ (*)

Tương tự.

Tính $\int_0^{\ln 3} 2e^x f\left(e^x-1\right)dx \ =\int_0^{\ln 3} 2e^x f\left(e^x-1\right)d\left(e^x-1\right) \ =2\int_0^2 f(x)dx$ (3)

Tính $\int_0^{\ln 3} e^x(2e^x-5)f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)dx=\int_0^{\ln 3} f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)d\left(e^{2x}-5e^x+6\right)=\int_2^0 f(x)dx$ (4)

Tính $\int_0^{\ln 3} e^x(e^x-1)^{2020}dx=\int_0^{\ln 3}(e^x-1)^{2020}d(e^x-1)=\frac{2^{2021}}{2021}$

Từ, suy ra $2\int_0^2 f(x)dx+\int_2^0 f(x)dx=\frac{2^{2021}}{2021}\Rightarrow \int_2^0 f(x)dx=-\frac{2^{2021}}{2021}$ (**)

Từ và suy ra $\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{2^{2021}+1}{4042}$ (**)

Câu 32. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và thỏa mãn:

$2f\left(e^x-1\right)+(2e^x-5)f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)=\left(e^x-1\right)^{2020}$. Tính tích phân $\int_0^1 f\left(x\right)dx$.

A. $\frac{2^{2021}-1}{2021}$. **B.** $\frac{2^{2020}-1}{4042}$. **C.** $\frac{2^{2021}+1}{4042}$. **D.** $\frac{2^{2020}+1}{2020}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$2f\left(e^x-1\right)+(2e^x-5)f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)=\left(e^x-1\right)^{2020}$

$\Leftrightarrow 2e^x f\left(e^x-1\right)+e\ (2e^x-5)f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)=e^x\left(e^x-1\right)^{2020}$

Suy ra: $\int_0^{\ln 2} 2e^x f\left(e^x-1\right)dx+\int_0^{\ln 2} e^x(2e^x-5)f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)dx=\int_0^{\ln 2} e^x\left(e^x-1\right)^{2020}dx$

Tính $\int_0^{\ln 2} 2e^x f\left(e^x-1\right)dx \ =\int_0^{\ln 2} 2e^x f\left(e^x-1\right)d\left(e^x-1\right) \ =2\int_0^1 f(x)dx$ (1)

Tính $\int_0^{\ln 2} e^x(2e^x-5)f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)dx=\int_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)d\left(e^{2x}-5e^x+6\right)=\int_2^0 f(x)dx$ (2)

Tính $\int_0^{\ln 2} e^x(e^x-1)^{2020}dx=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)^{2020}d(e^x-1)=\frac{1}{2021}$

Từ và $\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx+\int_2^0 f(x)dx=\frac{1}{2021}$ (*)

Tương tự.

Tính $\int_0^{\ln 3} 2e^x f\left(e^x-1\right)dx \ =\int_0^{\ln 3} 2e^x f\left(e^x-1\right)d\left(e^x-1\right) \ =2\int_0^2 f(x)dx$ (3)

Tính $\int_0^{\ln 3} e^x(2e^x-5)f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)dx=\int_0^{\ln 3} f\left(e^{2x}-5e^x+6\right)d\left(e^{2x}-5e^x+6\right)=\int_2^0 f(x)dx$ (4)

Tính $\int_0^{\ln 3} e^x(e^x-1)^{2020}dx=\int_0^{\ln 3}(e^x-1)^{2020}d(e^x-1)=\dfrac{2^{2021}}{2021}$

Từ, suy ra $2\int_0^2 f(x)dx+\int_2^0 f(x)dx=\dfrac{2^{2021}}{2021}\Rightarrow\int_2^0 f(x)dx=-\dfrac{2^{2021}}{2021}$ (**)

Từ và suy ra $\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{2^{2021}+1}{4042}$ (**)

Câu 33. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$f(1)=f'(1)=1$ và $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 xf'(x)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\dfrac{1}{3}$. **D.** $I=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=f'(x)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f''(x)dx\\v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

Suy ra $I=\int_0^1 xf'(x)dx=\dfrac{x^2}{2}f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x^2}{2}f''(x)dx=\dfrac{1}{2}-\int_0^1\dfrac{x^2}{2}f''(x)dx$

Do $f(1-x)+x^2f''(x)=2x\Rightarrow\dfrac{x^2}{2}f''(x)=x-\dfrac{1}{2}f(1-x)$

Vậy $I=\dfrac{1}{2}-\int_0^1\left[x-\dfrac{1}{2}f(1-x)\right]dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(1-x)dx$

Đặt $t=1-x\Rightarrow I=-\dfrac{1}{2}\int_1^0 f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx\right]\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}(1-I)\Leftrightarrow I=\frac{1}{3}$$

Câu 34. Cho hàm số $f(x)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$, đồng thời thỏa mãn $f'(0)=0$; $f(0)=1$ và $f''(x).f(x)+\left[\dfrac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2$.Tính $T=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $T=\dfrac{3}{4}$. **B.** $T=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

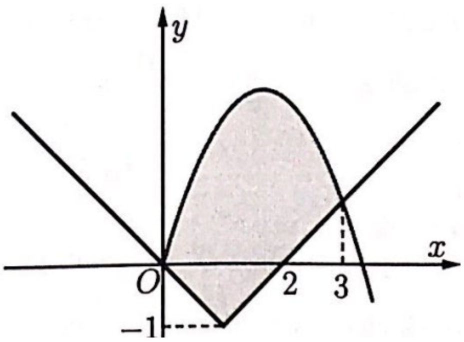
Ta có $f''(x).f(x)+\left[\dfrac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow \dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=-\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\tan x+C$. Vì $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ nên $C=0$.

Do đó $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\tan x$. Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{d\left(f(x)\right)}{f(x)}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}-\tan x.\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}\Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow \ln f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\ln f(0)=\ln\dfrac{1}{2}-\ln 1\Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 35. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\dfrac{10}{3}x-x^2, y=\begin{cases} -x \text{ khi } x\le 1 \\ x-2 \text{ khi } x>1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{11}{2}$ **B.** $\dfrac{13}{2}$ **C.** $\dfrac{11}{6}$ **D.** $\dfrac{14}{3}$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có: $S=\int\limits_0^1\left(\dfrac{10}{3}x-x^2+x\right)dx+\int\limits_1^3\left(\dfrac{10}{3}x-x^2-x+2\right)dx$

$=\int\limits_0^1\left(\dfrac{13}{3}x-x^2\right)dx+\int\limits_1^3\left(\dfrac{7}{3}x-x^2+2\right)dx=\left(\dfrac{13x^2}{6}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\left(\dfrac{7x^2}{6}-\dfrac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_1^3=\dfrac{13}{2}$.

Câu 36. Cho $\int\limits_0^2(1-2x)f'(x)dx=3f(2)+f(0)=2016$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(2x)dx$ bằng:

A. 4032 **B.** 1008 **C.** 0 **D.** 2016

Lời giải

Chọn B

Xét tích phân $I=\int\limits_0^2(1-2x)f'(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u=1-2x \\ dv=f'(x)dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=-2dx \\ v=f(x) \end{cases}\Rightarrow I=(1-2x)f(x)\Big|_0^2+2\int\limits_0^2 f(x)dx=-3f(2)-f(0)+2\int\limits_0^2 f(x)dx$

Suy ra $2016=-2016+2\int\limits_0^2 f(x)dx\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)dx=2016$

Xét $J=\int_0^1 f(2x)dx$, đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx$, đổi cận suy ra

$$J=\int_0^2 f(t).\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=1008.$$

Do đó $0=ax_0^2+c\Leftrightarrow 0=a.(-b)+c\Leftrightarrow ab-c=0$. Vậy $T=2(ab-c)+3=3$.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{2e-1}{2}$ **B.** $\frac{e^4-1}{4}$ **C.** e^4-2 **D.** $\frac{e^4-1}{2}$

Lời giải

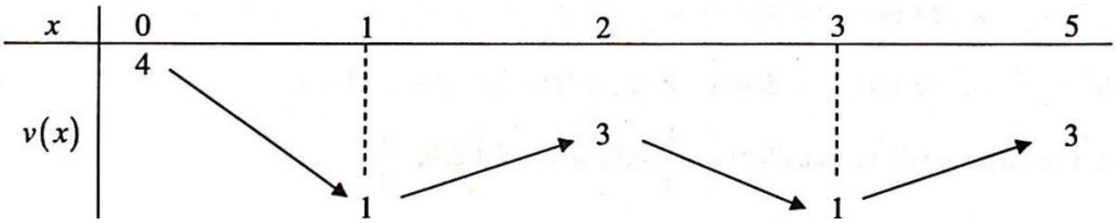
Chọn B

Ta có $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 x.e^{x^2}dx$.

Lại có $\int_0^2 f(2-x)dx=-\int_0^2 f(2-x)d(2-x)=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 f(x)dx$, với $t=2-x$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow 2\times\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x.e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}d(x^2)\longrightarrow\int_0^2 f(x)dx=\frac{e^4-1}{4}$.

Câu 38. Cho hàm số $v(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=m.v(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5]$?



A. 6 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $v(x)\in[1;4]$ với $\forall x\in[0;5]$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$ trên $[0;5]$, có $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}-\frac{1}{\sqrt{10-2x}}=0\Leftrightarrow x=3$.

Suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(0)=\sqrt{10};\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(3)=5\Rightarrow\sqrt{10}\le\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}\le 5$.

Khi đó $m=\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{u(x)}$ mà $\frac{1}{u(x)}\in\left[\frac{1}{4};1\right]\longrightarrow\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{u(x)}\in\left[\frac{\sqrt{10}}{4};5\right]$.

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left[\frac{\sqrt{10}}{4};5\right]$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$.

A. $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln[f(x).f(2-x)]=\ln e^{2x^2+4x} \Leftrightarrow \ln f(x)+\ln f(2-x)=2x^2-4x$.

Mặt khác, với $x=0$, ta có $f(0).f(2)=1$ và $f(0)=1$ nên $f(2)=1$.

Xét $I=\int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$, ta có $I=\int\limits_0^2 (x^3-3x^2).\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Đặt $\begin{cases} u=x^3-3x^2 \\ dv=\frac{f'(x)}{f(x)}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(3x^2-6x)dx \\ v=\ln f(x) \end{cases}$

Suy ra $I=\left[(x^3-3x^2)\ln f(x)\right]\Big|_0^2-\int\limits_0^2(3x^2-6x).\ln f(x)dx=-\int\limits_0^2(3x^2-6x).\ln f(x)dx \quad (1)$.

Đến đây, đổi biến $x=2-t \Rightarrow dx=-dt$. Khi $x=0\to t=2$ và $x=2\to t=0$.

Ta có $I=-\int\limits_2^0(3t^2-6t).\ln f(2-t)(-dt)=-\int\limits_0^2(3t^2-6t).\ln f(2-t)dt$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I=-\int\limits_0^2(3x^2-6x).\ln f(2-x)dx \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được $2I=-\int\limits_0^2(3x^2-6x).[\ln f(x)+\ln f(2-x)]dx$

Hay $I=-\frac{1}{2}\int\limits_0^2(3x^2-6x).(2x^2-4x)dx=-\frac{16}{5}$.

Câu 40. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$.

Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\frac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)+x.f(1-x^2)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_0^1 xf(1-x^2)dx+3\int\limits_0^1 f(1-x)dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2 \quad (*)$.

Đặt $u=1-x^2 \Rightarrow du=-2xdx$; với $x=0\Rightarrow u=1; x=1\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int\limits_0^1 xf(1-x^2)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(u)du=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)dx \quad (1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$; với $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (2).

Thay (1), (2) vào $(*)$ ta được:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln 2\Rightarrow\frac{9}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln 2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\ln 2.$$

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=xe^x$ và $f(0)=2$. Tính $\int_0^2 f(x)\,dx$.

A. e^2+5. **B.** -8. **C.** e^2+1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f=\int f'(x)\,dx=\int x.e^x\,dx$.

Đặt $u=x$ và $dv=e^x dx$, ta có $du=dx$ và $v=e^x$.

Do đó $f=\int f'(x)\,dx=x.e^x-\int e^x dx=x.e^x-e^x+C$.

Theo đề: $f(0)=2\Leftrightarrow 2=-1+C\Leftrightarrow C=3\Rightarrow f(x)=x.e^x-e^x+3$.

Khi đó $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x.e^x-e^x+3)dx=\int_0^2 x.e^x dx+\int_0^2(-e^x+3)dx$

$=(x.e^x-e^x)|_0^2+(-e^x+3x)|_0^2=8$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$xf(x^3)-f(1-x^2)=-x^{10}-x^6-6x^2+4x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $-\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Nhân 2 vế $xf(x^3)-f(1-x^2)=-x^{10}-x^6-6x^2+4x$ với x ta được:

$x^2f(x^3)-xf(1-x^2)=-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2$.

Lấy tích phân 2 vế của $x^2f(x^3)-xf(1-x^2)=-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2$ với cận từ -1 đến 1 ta được:

$$\int_{-1}^1 x^2f(x^3)dx-\int_{-1}^1 xf(1-x^2)dx=\int_{-1}^1(-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2)dx.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_{-1}^1 f(u)du+\frac{1}{2}\int_0^0 f(v)dv=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int_{-1}^1 f(x)dx=8.$$

Lấy tích phân 2 vế của $x^2f(x^3)-xf(1-x^2)=-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2$ với cận từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_0^1 x^2f(x^3)dx-\int_0^1 xf(1-x^2)dx=\int_0^1(-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2)dx.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_0^1 f(u)du+\frac{1}{2}\int_1^0 f(v)dv=-\frac{3}{8}.$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{9}{4}.$$

Từ và ta được $\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx=8-\frac{9}{4}=\frac{23}{4}$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$xf(x^3)-f(1-x^2)=-x^{10}-x^6-6x^2+4x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $-\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

ChọnA.

Nhân 2 vế $xf\left(x^3\right)-f\left(1-x^2\right)=-x^{10}-x^6-6x^2+4x$ với x ta được:

$x^2f\left(x^3\right)-xf\left(1-x^2\right)=-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2$.

Lấy tích phân 2 vế của $x^2f\left(x^3\right)-xf\left(1-x^2\right)=-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2$ với cận từ -1 đến 1 ta được:

$$\int_{-1}^{1}x^2f\left(x^3\right)dx-\int_{-1}^{1}xf\left(1-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2\right)dx.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}f(u)du+\frac{1}{2}\int_{0}^{0}f(v)dv=\frac{8}{3}\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}f(x)dx=8.$$

Lấy tích phân 2 vế của $x^2f\left(x^3\right)-xf\left(1-x^2\right)=-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2$ với cận từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_{0}^{1}x^2f\left(x^3\right)dx-\int_{0}^{1}xf\left(1-x^2\right)dx=\int_{0}^{1}\left(-x^{11}-x^7-6x^3+4x^2\right)dx.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1}f(u)du+\frac{1}{2}\int_{1}^{0}f(v)dv=-\frac{3}{8}.$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{9}{4}.$$

Từ và ta được $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx=8-\frac{9}{4}=\frac{23}{4}$.

Câu 44. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf\left(1-x^2\right)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$.

Tính giá trị tích phân $I=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\frac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)+x.f\left(1-x^2\right)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$.

$$\Rightarrow \int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+3\int_{0}^{1}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2\ (*).$$

Đặt $u=1-x^2\Rightarrow \mathrm{d}u=-2x\mathrm{d}x$; với $x=0\Rightarrow u=1;x=1\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int_{0}^{1}xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\ (1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; với $x=0\Rightarrow t=1;x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_{0}^{1}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\ (2)$.

Thay (1), (2) vào $(*)$ ta được:

$$\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x+3\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\ln 2\Rightarrow \frac{9}{2}\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\ln 2\Leftrightarrow \int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\ln 2.$$

Câu 45. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2$. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{2x}=2$.

Tích phân $\int\limits_0^1 f'(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{2x}=2$ mà $\lim\limits_{x\to 0}2x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x+f'(x)\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0\Rightarrow f'(0)=0$

Từ đó $x=0;x=1;x=2$ là ba cực trị của hàm số đã cho. Hay phương trình $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm $x=0;x=1;x=2$.

Vì $f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 4 nên ta giả sử hàm $f'(x)=m.x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.

Từ đề bài ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+mx\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{2x}=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+m\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{2}=2\Rightarrow \dfrac{2+2m}{2}=2\Leftrightarrow m=1$

Nên $f'(x)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)=x^3-3x^2+2x$

Từ đó $\int\limits_0^1 f'(x)dx=\int\limits_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)dx=\dfrac{1}{4}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$\sqrt{1+\ln^2 x}\left[2019f(\ln x)+2020.\ln x.f(\ln^2 x)\right]=2021\ln x,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}(\sqrt{e}-1)$

với $\dfrac{a}{b}$ tối giản và $a,b\in\mathbb{N}$. Khi đó $a-b$ bằng

A. 2018. **B.** -2018. **C.** 1008. **D.** -1008.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta suy ra: $2019f(\ln x)+2020.\ln x.f(\ln^2 x)=\dfrac{2021.\ln x}{\sqrt{1+\ln^2 x}},\forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

$$\Rightarrow \frac{2019}{x}f(\ln x)+\frac{2020\ln x}{x}f(\ln^2 x)=\frac{2021\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}},\forall x\in\left(0;+\infty\right).$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^e\left(\frac{2019}{x}f(\ln x)+\frac{2020\ln x}{x}f(\ln^2 x)\right)dx=\int\limits_1^e\frac{2021\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}dx$$

$$\Rightarrow 2019\int\limits_1^e f(\ln x)d\left(\ln x\right)+1010\int\limits_1^e f(\ln^2 x)d\left(\ln^2 x\right)=\frac{2021}{2}\int\limits_1^e\frac{d(1+\ln^2 x)}{\sqrt{1+\ln^2 x}}$$

$$\Rightarrow 2019\int\limits_0^1 f(t)d(t)+1010\int\limits_0^1 f(t)d(t)=2021(\sqrt{e}-1)$$

$$\Rightarrow 3029\int\limits_1^2 f(t)d(t)=2021(\sqrt{e}-1)\Rightarrow \int\limits_1^2 f(t)d(t)=\frac{2021}{3029}(\sqrt{e}-1).$$

Nên $a=2021,b=6059\Rightarrow a-b=-1008.$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn

$f\left(x^2\right)+2\left(x^2+1\right)f\left(x^4+2x^2+1\right)=4x^4+8x^2+2x+4$. Tính tích phân $\int\limits_0^4 f\left(x\right)dx$

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** $\frac{23}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$4xf\left(x^2\right)+2\left(4x^3+4x\right)f\left(x^4+2x^2+1\right)=\left(4x^4+8x^2+2x+4\right).4x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 4xf\left(x^2\right)dx+\int_0^1 2\left(4x^3+4x\right)f\left(x^4+2x^2+1\right)dx=\int_0^1\left(4x^4+8x^2+2x+4\right).4xdx$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(t)dt+2\int_1^4 f(u)du=\frac{64}{3}\Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx=\frac{32}{3}$$

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $\left(f'(x)\right)^2+4\left(6x^2-1\right)f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4,\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{15}$. **B.** $-\frac{17}{15}$. **C.** $\frac{13}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy tích phân hai vế đẳng thức trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x+4\int_0^1\left(6x^2-1\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(40x^6-44x^4+32x^2-4\right)\mathrm{d}x=\frac{376}{105}.$$

Theo công thức tích phân từng phần có:

$$\int_0^1\left(6x^2-1\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(2x^3-x\right)=\left(2x^3-x\right)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(2x^3-x\right)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1\left(6x^2-1\right)f(x)\mathrm{d}x=1-\int_0^1\left(2x^3-x\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Thay lại đẳng thức trên ta có

$$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x+4\left(1-\int_0^1\left(2x^3-x\right)f'(x)\mathrm{d}x\right)=\frac{376}{105}\Leftrightarrow \int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-4\int_0^1\left(2x^3-x\right)f'(x)\mathrm{d}x+\frac{44}{105}=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1\left(f'(x)-2\left(2x^3-x\right)\right)^2\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=2\left(2x^3-x\right),\forall x\in[0;1]$$

$$\Rightarrow f(x)=x^4-x^2+C.$$

Mặt khác $f(1)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^4-x^2+1\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{13}{15}$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn:

$f(2)=0,\int_1^2\left(f'(x)\right)^2dx=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\ln\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1}f(x)\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{x+1}dx = -\frac{1}{3}f(2)+\frac{1}{2}f(1)+\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{x+1}dx$

Do $f(2)=0$ nên $\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{x+1}dx+\frac{1}{2}f(1)=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$

Lại có $\int\limits_1^2 f'(x)dx = f(2)-f(1) \Rightarrow f(1) = -\int\limits_1^2 f'(x)dx$

Suy ra $\int\limits_1^2 \left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right]f'(x)dx = -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$

Mặt khác $\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2 dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\right)dx = \left(-\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+\frac{1}{4}x\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$

Vậy:

$\int\limits_1^2 (f'(x))^2 dx + 2\int\limits_1^2 \left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right]f'(x)dx + \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2 dx$

$= \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}+2\left(-\frac{5}{12}-\ln\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}=0$

$\Leftrightarrow \int\limits_1^2 \left(f'(x)+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = -\ln|x+1|+\frac{1}{2}x+\ln 3-1$

do $f(2)=0 \Rightarrow \int\limits_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - x + x\ln 3 - \left((x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right)\right]\Big|_1^2 = \frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn:

$f(2)=0, \int\limits_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int\limits_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\ln\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1}f(x)\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{x+1}dx = -\frac{1}{3}f(2)+\frac{1}{2}f(1)+\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{x+1}dx$

Do $f(2)=0$ nên $\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{x+1}dx+\frac{1}{2}f(1)=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$

Lại có $\int\limits_1^2 f'(x)dx = f(2)-f(1) \Rightarrow f(1) = -\int\limits_1^2 f'(x)dx$

Suy ra $\int\limits_1^2 \left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right]f'(x)dx = -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$

Mặt khác $\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2 dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\right)dx = \left(-\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+\frac{1}{4}x\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$

Vậy:

$$\int_1^2 (f'(x))^2 dx + 2\int_1^2 \left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right] f'(x)dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{5}{12} + \ln\frac{2}{3} + 2\left(-\frac{5}{12} - \ln\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{12} + \ln\frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \left(f'(x) + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = -\ln|x+1| + \frac{1}{2}x + \ln 3 - 1$$

do $f(2)=0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - x + x\ln 3 - ((x+1)\ln(x+1) - (x+1))\right]\Big|_1^2 = \frac{3}{4} + 2\ln\frac{2}{3}$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$xf(x^5) + f(1-x^4) = -x^{11} - x^8 + x^6 + x^4 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{61}{96}$. **B.** $-\frac{65}{48}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Chọn C

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $xf(x^5) + f(1-x^4) = -x^{11} - x^8 + x^6 + x^4 + x + 1 \ (*)$

$$\Rightarrow x^4 f(x^5) + x^3 f(1-x^4) = -x^{14} - x^{11} + x^9 + x^7 + x^4 + x^3$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^4 f(x^5))dx + \int_0^1 (x^3 f(1-x^4))dx = \int_0^1 (-x^{14} - x^{11} + x^9 + x^7 + x^4 + x^3)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int_0^1 f(x^5)dx^5 - \frac{1}{4}\int_0^1 f(1-x^4)d(1-x^4) = \frac{21}{40}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx = \frac{21}{40} \Rightarrow \frac{9}{20}\int_0^1 f(x)dx = \frac{21}{40} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{6} \ (1)$$

Mặt khác từ suy ra

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 (x^4 f(x^5))dx + \int_{-1}^0 (x^3 f(1-x^4))dx = \int_{-1}^0 (-x^{14} - x^{11} + x^9 + x^7 + x^4 + x^3)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int_{-1}^0 f(x^5)dx^5 - \frac{1}{4}\int_{-1}^0 f(1-x^4)d(1-x^4) = -\frac{31}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int_{-1}^0 f(x)dx - \frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx = -\frac{31}{120} \quad (2)$$

Thế vào ta được $\int_{-1}^0 f(x)dx = \frac{1}{6}$.

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn: $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$?

A. $-\frac{1}{e}$. **B.** $\frac{1}{e^2}$. **C.** $\frac{1}{e}$. **D.** e^2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$

Nhân cả 2 vế phương trình cho e^{x^2}, ta được:

$$e^{x^2}.f'(x)+2x.e^{x^2}.f(x)=e^{-x^2}.e^{x^2} \Leftrightarrow \left[e^{x^2}.f(x)\right]'=1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}.f(x)=\int dx \Leftrightarrow e^{x^2}.f(x)=x+C \Leftrightarrow f(x)=\frac{x+C}{e^{x^2}}$$

Ta có: $f(0)=0 \Rightarrow C=0$.

Vậy $f(1)=\dfrac{1}{e}$

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn: $f'(x)+2x.f(x)=e^{-x^2}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$?

A. $-\dfrac{1}{e}$. **B.** $\dfrac{1}{e^2}$. **C.** $\dfrac{1}{e}$. **D.** e^2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)+2x.f(x)=e^{-x^2}$

Nhân cả 2 vế phương trình cho e^{x^2}, ta được:

$$e^{x^2}.f'(x)+2x.e^{x^2}.f(x)=e^{-x^2}.e^{x^2} \Leftrightarrow \left[e^{x^2}.f(x)\right]'=1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}.f(x)=\int dx \Leftrightarrow e^{x^2}.f(x)=x+C \Leftrightarrow f(x)=\frac{x+C}{e^{x^2}}$$

Ta có: $f(0)=0 \Rightarrow C=0$.

Vậy $f(1)=\dfrac{1}{e}$

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định dương trên và thỏa mãn các điều kiện

$3x^4.f(x)-f'(x).x^5+f^2(x)=0, \forall x\in[1;2], f(1)=1$. Tính $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$

A. 6. **B.** 5. **C.** $\dfrac{34}{5}$. **D.** $\dfrac{31}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$3x^4f(x)-f'(x).x^5+f^2(x)=0 \Leftrightarrow 3x^4f(x)-f'(x).x^5=-f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2f(x)-f'(x).x^3=-\frac{f^2(x)}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=\frac{3x^2f(x)-f'(x).x^3}{f^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=\left(\frac{x^3}{f(x)}\right)' \Rightarrow \int\left(\frac{x^3}{f(x)}\right)'dx=\frac{1}{x}+C \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)}=\frac{1}{x}+C$$

$$\Rightarrow f(x)=x^4+m$$

.

Vì f=1 nêm m=0. Vậy $f(x)=x^4.\displaystyle\int_1^2 x^4dx=\frac{31}{5}$

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;5]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^5 xf'(x)e^{f(x)}dx=8$;

$f(5)=\ln 5$. Tính $I=\displaystyle\int_0^5 e^{f(x)}dx$

A. -33. **B.** 33. **C.** 17. **D.** -17.

Lời giải

Chọn C

Tính $I=\int\limits_0^5 e^{f(x)}\mathrm{d}x$

Đặt $u=e^{f(x)} \Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x \Rightarrow v=x$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$I=\left[xe^{f(x)}\right]\Big|_0^5-\int\limits_0^5 xf'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x=5.e^{f(5)}-0.e^{f(0)}-8=5e^{\ln 5}-8=5.5-8=17$.

trị nguyên của m trong $[-2019;2019]$.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R, $f(x)>-1$, $f(0)=0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f\left(\sqrt{3}\right)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}dx=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}-\sqrt{f(0)+1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{f\left(\sqrt{3}\right)+1}=2 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=3$.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=e^x f(x)$ với $f(x)\neq 0, \forall x$ và $f(0)=1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng.

A. $e+1$. **B.** e^{e-2}. **C.** $e-1$. **D.** e^{e+1}.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)+2xf(x)=e^x f(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}+2x=e^x \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=e^x-2x$

$\Rightarrow \int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\left(e^x-2x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|f(x)|=e^x-x^2+C$.

$f(0)=1 \Rightarrow \ln|f(0)|=0 \Leftrightarrow 1+C=0 \Leftrightarrow C=-1$.

Vậy $\ln|f(x)|=e^x-x^2-1$. Suy ra $\ln|f(1)|=e-2 \Rightarrow |f(1)|=e^{e-2}$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$x^2f(1-x)+2f\left(\dfrac{2x-2}{x}\right)=\dfrac{-x^4+x^3+4x-4}{x}, \forall x\neq 0, x\neq 1$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $f(1-x)+\dfrac{2}{x^2}f\left(\dfrac{2x-2}{x}\right)=\dfrac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3}$

Ta có: $\int_1^2 f(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right).\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\int_1^2 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)+\int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\int_1^2\left(-x+1+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\int_0^{-1} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\left(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\Big|_1^2$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=0$.

Vậy $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.

Cách trắc nghiệm

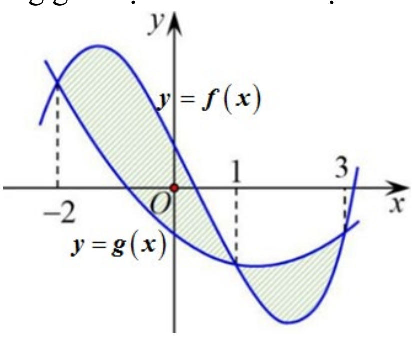
Ta có: $x^2 f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x},\forall x\neq 0,x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3}{x}+\frac{4x-4}{x},\forall x\neq 0,x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=x^2(1-x)+2\left(\frac{2x-2}{x}\right),\forall x\neq 0,x\neq 1$

Chọn $f(x)=x\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x).\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 x.\mathrm{d}x=0$.

Câu 59. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng:



A. $\frac{253}{48}$. **B.** $\frac{125}{24}$. **C.** $\frac{125}{48}$. **D.** $\frac{253}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0$.

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1; x=3$.

Với $x=-2$ ta có $-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}$, (1).

Với $x=1$ ta có $a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}$, (2).

Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}$, (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b-d=-\frac{1}{2}\\ c-e=-\frac{5}{4}\end{cases}$.

Hay ta có

$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}$.

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoả mãn $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2$ với $\forall x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$

A. $\frac{1186}{45}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{186}{45}$. **D.** $\frac{16}{45}$.

Lời giải

Đáp án: A

Ta có: $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;4]\Rightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in[1;4]$

Ta có $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2\Leftrightarrow x(1+2.f(x))=[f'(x)]^2$, do $x\in[1;4]$ và $f'(x)\ge 0,\forall x\in[1;4]$

$\Rightarrow f(x)>\frac{-1}{2}$ và $f'(x)=\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)}\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+2f(x)}\right)'=\sqrt{x}$

$\Rightarrow\sqrt{1+2f(x)}=\int\sqrt{x}dx\Leftrightarrow\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$. Vì $f(1)=\frac{3}{2}\Rightarrow\sqrt{1+2.\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}+c\Leftrightarrow c=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}\Leftrightarrow 1+2f(x)=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}\right)^2\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{18}$

Khi đó $I=\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left(\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{18}\right)dx=\left.\left(\frac{1}{18}x^4+\frac{16}{45}x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{18}x\right)\right|_1^4=\frac{1186}{45}$.

Câu 61. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1,2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị tích phân $I=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x+3\int_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}4x^3\mathrm{d}x=15(*)$.

Đặt $u = x^2 - 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$; với $x = -1 \Rightarrow u = -1; x = 2 \Rightarrow u = 2$.

Khi đó $\int_{-1}^{2} 2x.f\left(x^2-2\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(u)\mathrm{d}u = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x \ (1)$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$; với $x = -1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó $\int_{-1}^{2} f(1-x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x \ (2)$.

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được $5\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 15 \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)\left[f(x)\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\ln 2$ **C.** $-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $-\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = (2x+1)\left[f(x)\right]^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $\dfrac{1}{f(x)} = -\int (2x+1)\mathrm{d}x = -x^2 - x + C \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{-x^2 - x + C}$.

Do $f(0) = -1 \Rightarrow C = -1$. Vậy $f(x) = -\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\mathrm{d}x.$$

Đặt $x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$, $t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $I = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}\mathrm{d}t = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t = -\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{25}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}.f'(x) + \dfrac{1}{(x+1)^2}f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \dfrac{x}{x+1}$, với $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0; -1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x)=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3\Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\frac{9}{2}$.

Câu 64. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1,2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x+3\int\limits_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}4x^3\mathrm{d}x=15(*)$.

Đặt $u=x^2-2\Rightarrow\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; với $x=-1\Rightarrow u=-1; x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$ (1).

Đặt $t=1-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; với $x=-1\Rightarrow t=2; x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$ (2).

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được $5\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=15\Rightarrow\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=3$.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(1-x^3)+\frac{1}{2x}f(x^2+1)=-x^{2017}+2x^5+\frac{3}{x^3+2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx=\frac{a}{b}+3\ln\frac{c}{d}$, khi đó giá trị của biểu thức $3b-a+4c-d$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$f(1-x^3)+\frac{1}{2x}f(x^2+1)=-x^{2017}+2x^5+\frac{3}{x^3+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2.f(1-x^3)+\frac{1}{2}x.f(x^2+1)=-x^{2019}+2x^7+\frac{3x^2}{x^3+2}(1)$$

$$(1)\Leftrightarrow-\frac{1}{3}\int_0^1 f(1-x^3)d(1-x^3)+\frac{1}{4}\int_0^1 f(x^2+1)d(x^2+1)$$

$$=\int_0^1\left(-x^{2019}+2x^7+\frac{3x^2}{x^3+2}\right)dx$$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-x^{2019}+2x^7+\frac{3x^2}{x^3+2}\right)dx$$

$$=\left.\left(-\frac{x^{2020}}{2020}+\frac{x^8}{4}+\ln\left|x^3+2\right|\right)\right|_0^1=\frac{126}{505}+\ln 3-\ln 2$$

Mặc khác $(1)\Leftrightarrow \int_{-1}^{0}x^2.f\left(1-x^3\right)dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}x.f\left(x^2+1\right)dx$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-x^{2019}+2x^7+\frac{3x^2}{x^3+2}\right)dx$$

$$(1)\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}f\left(1-x^3\right)d\left(1-x^3\right)+\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}f\left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right)$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-x^{2019}+2x^7+\frac{3x^2}{x^3+2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{1}^{2}f(x)dx-\frac{1}{4}\int_{1}^{2}f(x)dx=\left.\left(\frac{-x^{2020}}{2020}+\frac{x^8}{4}+\ln\left|x^3+2\right|\right)\right|_{-1}^{0}=\ln 2-\frac{126}{505}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12}\int_{1}^{2}f(x)dx=\ln 2-\frac{126}{505}(3)$$

Từ $(2),(3)\Rightarrow \int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1512}{505}+3\ln 3-12\ln 2=\frac{1512}{505}+3\ln\frac{3}{16}$

Vậy suy ra $a=1512;b=505;c=3;d=16\Rightarrow 3b-a+4c-d=-1$

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{2}{3}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1).f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2613<f^2(8)<2614$. **B.** $2614<f^2(8)<2615$.

C. $2618<f^2(8)<2619$. **D.** $2616<f^2(8)<2617$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên suy ra $f'(x)\geq 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

Mặt khác $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ nên

$\left[f'(x)\right]^2=(x+1)f(x)\Rightarrow f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}$, $\forall x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{(x+1)}$, $\forall x\in(0;+\infty)$;

$\Rightarrow \int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\sqrt{(x+1)}dx \Rightarrow \sqrt{f(x)}=\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$;

Từ $f(3)=\frac{3}{2}$ suy ra $C=\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}$

Như vậy $f(x)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^2$

Bởi thế: $f(8)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(8+1)^3}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^2=\left(9+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^2\Rightarrow f^2(8)=\left(9+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^4\approx 2613,26$.

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2$, $\forall x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{1186}{45}$. **B.** $I=\frac{1174}{45}$. **C.** $I=\frac{1222}{45}$. **D.** $I=\frac{1201}{45}$.

Lời giải

Ta có $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2 \Rightarrow \sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)}=f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$, $\forall x\in[1;4]$.

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+C \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}f(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x+C$

$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$. Mà $f(1)=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{4}{3}$. Vậy $f(x)=\frac{\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\right)^2-1}{2}$.

Vậy $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1186}{45}$.

Chọn A

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)\left[1+f(x)\right]^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b$ $(a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z})$, tính tổng $S=a+b^2$.

A. $S=2$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=4$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Chọn B

Với $x\in[1;3]$ ta có: $f'(x)\left[1+f(x)\right]^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)\left[1+f(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4}=(x-1)^2$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\left[f(x)\right]^4}+\frac{2}{\left[f(x)\right]^3}+\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}\right)f'(x)=x^2-2x+1$

Suy ra: $-\frac{1}{3\left[f(x)\right]^3}-\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}-\frac{1}{f(x)}=\frac{x^3}{3}-x^2+x+C$.

Ta lại có: $f(1)=-1\Rightarrow \frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}-1+1+C\Rightarrow C=0$.

Dẫn đến: $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{f(x)}\right)^3-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2-\frac{1}{f(x)}=-\frac{1}{3}(-x)^3-(-x)^2-(-x)$ $(*)$.

Vì hàm số $g(t)=-\frac{1}{3}t^3-t^2-t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $(*)\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=-x\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x}$.

Hàm số này thỏa các giả thiết của bài toán.

Do đó $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\ln 3\Rightarrow a=-1, b=0$. Vậy $S=a+b^2=-1$.

Câu 69. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3\left(x\right)+2f\left(x\right)=1-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=f(x)$ theo đề bài ta có $f^3\left(x\right)+2f\left(x\right)=1-x,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow t^3+2t=1-x\Leftrightarrow t^3+2t-1=-x\Leftrightarrow(3t^2+2)dt=-dx\Leftrightarrow-(3t^2+2)dt=dx$.

$x=-2\Rightarrow t^3+2t-1=2\Leftrightarrow t=1$.

$x=1\Rightarrow t^3+2t-1=-1\Leftrightarrow t=0$

Từ đó suy ra $I=\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)dx=\int\limits_{1}^{0}t(-3t^2-2)dt=\frac{7}{4}$.

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{0}^{2}xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int\limits_{0}^{2}xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Từ $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(0)+f(2)=2\Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$.

Xét $I=\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$, đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\x=2\Rightarrow t=0\end{cases}$

Khi đó $I=-\int\limits_{2}^{0}f(2-t)dt=\int\limits_{0}^{2}f(2-t)dt\Rightarrow I=\int\limits_{0}^{2}f(2-x)dx$

Do đó ta có $\int\limits_{0}^{2}\left(f(x)+f(2-x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow2\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Vậy $\int\limits_{0}^{2}xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

Câu 71. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và $f\left(0\right)+f\left(1\right)=0$. Biết $\int\limits_{0}^{1}f^2\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int\limits_{0}^{1}f'\left(x\right)\cos\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=\cos(\pi x) \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-\pi\sin(\pi x)dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx$

$=-\left(f(1)+f(0)\right)+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\frac{1}{2}$.

Ta có

Tìm k sao cho $\int_0^1 \left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2 dx=0$

Ta có: $\int_0^1 \left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2 dx=\int_0^1 f^2(x)dx-2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx+k^2\int_0^1 \sin^2(\pi x)dx$

$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0 \Leftrightarrow k=1$.

Do đó $\int_0^1 \left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2 dx=0 \Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \sin(\pi x)dx=\frac{2}{\pi}$.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$; $f(3-x).f(x)=1, f(x)\neq -1$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân: $I=\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}dx$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$(1+f(3-x))^2.f^2(x)=f^2(x)+2.f(3-x).f^2(x)+f^2(3-x).f^2(x)$

$=f^2(x)+2.f(x)+1=\left(f(x)+1\right)^2$.

$I=\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\frac{f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=-\frac{1}{1+f(x)} \end{cases}$

$$I=\left.\frac{-x}{1+f(x)}\right|_0^3+\int_0^3\frac{dx}{1+f(x)}=\frac{-3}{1+f(3)}+I_1$$

$$f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow f(3)=2$$

Đặt $t=3-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$

$x=3\Rightarrow t=0$

$$I_1=\int_0^3\frac{dt}{1+f(3-t)}=\int_0^3\frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int_0^3\frac{f(x).dx}{1+f(x)}$$

$$2I_1=\int_0^3\frac{1+f(x)}{1+f(x)}dx=3\Rightarrow I_1=\frac{3}{2}$$

Vậy $I=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của

tích phân $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng?

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\left.f(x)\right|_0^1=f(1)-f(0)$.

Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}\longrightarrow\begin{cases}2f(0)+3f(1)=1\\2f(1)+3f(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=-\frac{2}{5}\\f(1)=\frac{3}{5}\end{cases}$.

Vậy $I=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f(1)-f(0)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

$3x^2+2f'(x).x+\left(2f(x)-f''(x)\right)=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}; f'(0)=0; f(0)=-\frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của $|f(3)|$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(6;8)$. **D.** $(4;6)$.

Lời giải

Đáp án: D

+ Từ giả thiết, suy ra:

$$3x^2=f''(x)-2\left(f(x)+xf'(x)\right)=\left(f'(x)\right)'-2\left(x.f(x)\right)'=\left(f'(x)-2xf(x)\right)'.$$

+ Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $f'(x)-2x.f(x)=\int 3x^2dx=x^3+a$ (1)

+ Thay $x=0$ vào (1), ta được:

$f'(0)-2.0.f(0)=0^3+a\Leftrightarrow a=0\Rightarrow f'(x)-2x.f(x)=x^3$ (1)

+ Đến đây nhân hai vế với e^{-x^2} ta được: $\mathrm{e}^{-x^2}\left[f'(x)-2xf(x)\right]=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$.

+ Nguyên hàm hai vế:

$$\int e^{-x^2}\left[f'(x)-2xf(x)\right]dx=\int x^3e^{-x^2}dx \Leftrightarrow e^{-x^2}f(x)=\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(-x^2-1\right)+b$$

+ Thay $x=0$ vào hai vế của (2), ta được:

$$e^{-0^2}f(0)=\frac{1}{2}e^{-0^2}\left(-0^2-1\right)+b \Leftrightarrow b=0 \Rightarrow e^{-x^2}f(x)=\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(-x^2-1\right) \Rightarrow f(x)=-\frac{x^2+1}{2}.$$

$$\Rightarrow f(3)=-5 \Rightarrow |f(3)|=5\in(4;6).$$

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int\limits_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx=a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$$\Rightarrow \int\left[f(x).f'(x)+18x^2\right]dx=\int\left[\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)\right]dx$$

$$\Rightarrow \int\left[\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3\right]'dx=\int\left[\left(3x^2+x\right)f(x)\right]'dx$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x)+C$, với C là hằng số.

Mặt khác: theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x) (1), \forall x\in\mathbb{R}$.

$$(1)\Leftrightarrow f^2(x)+12x^3=\left(6x^2+2x\right)f(x)\Leftrightarrow\left[f(x)-2x\right]\left[f(x)-6x^2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2x\\ f(x)=6x^2\end{array}\right..$$

Trường hợp 1: Với $f(x)=6x^2, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$.

Trường hợp 2: Với $f(x)=2x, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có :

$$\int\limits_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx=\int\limits_0^1 (x+1)e^{2x}dx=\left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1-\int\limits_0^1\frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow a-b=1.$$

Câu 76. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,\pi]$. Biết $f(0)=2e$ và $f(x)$ luôn thỏa mãn đẳng thức $f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.e^{\cos x}, \forall x\in[0,\pi]$. Tính $I=\int\limits_0^\pi f(x).dx$.

A. $I \approx 6,55$. **B.** $I \approx 17,30$. **C.** $I \approx 10,31$. **D.** $I \approx 16,91$.

Lời giải

$f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.e^{\cos x}$. Chia hai vế đẳng thức cho $e^{\cos x}$ ta được

$f'(x).e^{-\cos x}+e^{-\cos x}.\sin x.f(x)=\cos x$

$\Leftrightarrow \left(f(x).e^{-\cos x}\right)'=\cos x \Leftrightarrow \int\left(f(x).e^{-\cos x}\right)'\mathrm{d}x=\int\cos x.\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f(x).e^{-\cos x}=\sin x+C$.

Do $f(0)=2e$ nên $2e.e^{-1}=C \Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=\dfrac{\sin x+2}{e^{-\cos x}}=e^{\cos x}(\sin x+2)$.

$I=\int\limits_0^{\pi} f(x).dx=\int\limits_0^{\pi} e^{\cos x}(\sin x+2)dx$.

Sử dụng MTCT. KQ: 10,31

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết: $\int\limits_0^1 f^2(x)dx=\dfrac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)cos\dfrac{\pi x}{2}dx=\dfrac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{6}{\pi}$. **B.** $\dfrac{4}{\pi}$. **C.** $\dfrac{2}{\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{\pi}$.

Lời giải:

Ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}xdx=-\dfrac{2}{\pi}f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x\Big|_0^1+\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi}{2}xdx=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3}{2}$

Lại có: $\int\limits_0^1 [f(x)-3\sin\dfrac{\pi}{2}x]^2dx=\int\limits_0^1 f^2(x)dx-6\int\limits_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}xdx+9\int\limits_0^1\sin^2\dfrac{\pi}{2}xdx=0$

Suy ra: $f(x)=3\sin\dfrac{\pi}{2}x$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 3\sin\dfrac{\pi}{2}xdx=\dfrac{6}{\pi}$.

Chọn A

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+x.e^x$. Tính tích phân $I=\int\limits_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3\ln^2 2$. **B.** $I=3e^4$. **C.** $I=2\ln^2 3$. **D.** $I=4e^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\left[\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int\limits_1^4 x.e^x\mathrm{d}x$ (*)

+ Xét $K=\int\limits_1^4\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t \Rightarrow \sqrt{x}=\dfrac{t+1}{2} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow K=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

+ Xét $M=\int_1^4 x.e^x\mathrm{d}x=(x-1)e^x\Big|_1^4=3e^4$.

Vậy từ $(*)$ ta có $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+3e^4$

Mặt khác $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=3e^4$.

Câu 79. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x)+2x.f(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị tích phân $I=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$.
B. $I=\dfrac{5}{2}$.
C. $I=3$.
D. $I=15$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^2 2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x+3\int_{-1}^2 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 4x^3\mathrm{d}x=15(*)$.

Đặt $u=x^2-2\Rightarrow\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; với $x=-1\Rightarrow u=-1; x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^2 2x.f(x^2-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$ (1).

Đặt $t=1-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; với $x=-1\Rightarrow t=2; x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^2 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$ (2).

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được $5\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=15\Rightarrow\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=3$.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

A. $\dfrac{3}{2}$
B. $\dfrac{1}{2}$
C. 1
D. 2

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x).f(1-x)+f(x)=1+f(x)\Rightarrow\dfrac{1}{f(1-x)+1}=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}$

Xét $I=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Đặt $t=1-x\Leftrightarrow x=1-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=-\int_1^0\dfrac{\mathrm{d}t}{1+f(1-t)}=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}t}{1+f(1-t)}=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(1-x)}=\int_0^1\dfrac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Mặt khác $\int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(t)}dx = \int_0^1 dx = 1$ hay $2I = 1$. Vậy $I = \frac{1}{2}$.

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = 2x - x^2 + m$ có hai nghiệm phân biệt và cả hai nghiệm đó đều lớn hơn 0.

A. $m \in [1;\sqrt{5}]$. **B.** $m \in (1;\sqrt{5})$. **C.** $m \in (1;5)$. **D.** $m \in (1;5]$.

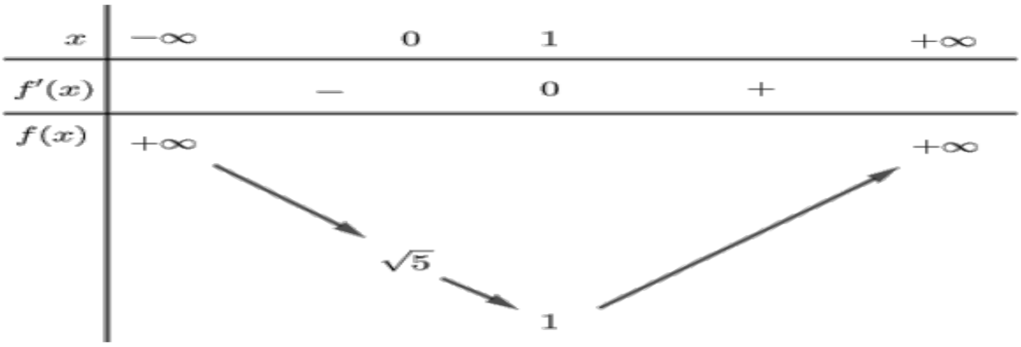
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2-2x+5} + x^2 - 2x$ trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}} + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}} + 2 = 0 \quad (VN) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số:



Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow f(x) = m$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 1 < m < \sqrt{5}$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$. **B.** $I = -\frac{7}{5}$. **C.** $I = -\frac{7}{20}$. **D.** $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1)^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{(x-1)^3}{3} \end{cases}$.

Khi đó, $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = \left.\frac{(x-1)^3 f(x)}{3}\right|_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx$

$\Rightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx = 1$.

Ta lại có: $\begin{cases} \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7 \\ \int_1^2 14(x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x = 14 \\ \int_1^2 49(x-1)^6 \mathrm{d}x = 7(x-1)^7\Big|_1^2 = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x - \int_1^2 14(x-1)^3 f'(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 49(x-1)^6 \mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \int_1^2 \left[f'(x) - 7(x-1)^3\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \ (1)$, mà $\int_1^2 \left[f'(x) - 7(x-1)^3\right]^2 \mathrm{d}x \ge 0$.

nên $(1) \Rightarrow f'(x) - 7(x-1)^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{7(x-1)^4}{4} + C$.

Mà $f(2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{7}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\dfrac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \dfrac{7}{4}\left[(x-1)^4 - 1\right]$.

$\Rightarrow I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{7}{4}\int_1^2 \left[(x-1)^4 - 1\right]\mathrm{d}x = \dfrac{7}{4}\left[\dfrac{(x-1)^5}{5} - x\right]\Bigg|_1^2 = -\dfrac{7}{5}$.

Vậy $I = -\dfrac{7}{5}$.

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}.f'(x) + \dfrac{1}{(x+1)^2}f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \dfrac{x}{x+1}$, với $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0; -1\}$.

Suy ra $\dfrac{x}{x+1}.f(x) = \int \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\dfrac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| + C$.

Mặt khác, ta có $f(1) = -2\ln 2$ nên $C = -1$. Do đó $\dfrac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| - 1$.

Với $x = 2$ thì $\dfrac{2}{3}.f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a = \dfrac{3}{2}$ và $b = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}$.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}.f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\dfrac{x}{x+1}.f(x)=\int\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\dfrac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\dfrac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\dfrac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3 \Leftrightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\dfrac{3}{2}$ và $b=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^8+2x^5-3x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó tích phân $\int\limits_{-1}^{0}f(x)dx$ bằng

A. $-\dfrac{17}{10}$. **B.** $-\dfrac{13}{6}$. **C.** $-\dfrac{579}{175}$. **D.** $\dfrac{17}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ký hiệu $I=\int\limits_{-1}^{0}f(x)dx$. Từ giả thiết ta có: $3x^2f(x^3)+3xf(1-x^2)=-3x^9+6x^6-9x^2=g(x)$.

Đến đây ta thấy

+ Tích phân thứ nhất $\int\limits_{-1}^{0}3x^2f(x^3)dx=\int\limits_{-1}^{0}f(u)du=\int\limits_{-1}^{0}f(t)dt=I$.

+ Tích phân thứ hai: $\int\limits_{-1}^{0}3xf(1-x^2)dx=-\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^{0}f(v)d(v)=-\dfrac{3}{2}\int\limits_{0}^{1}f(t)d(t)=-\dfrac{3}{2}K$

+ Tích phân thứ ba: $\int\limits_{0}^{1}3x^2f(x^3)dx=\int\limits_{0}^{1}f(u)du=\int\limits_{0}^{1}f(t)dt=K$

+ Tích phân thứ tư: $\int\limits_{0}^{1}3xf(1-x^2)dx=-\dfrac{3}{2}\int\limits_{0}^{1}f(v)dv=-\dfrac{3}{2}\int\limits_{1}^{0}f(t)dt=\dfrac{3}{2}K$

Từ lấy tích phân trên đoạn, kết hợp và, ta có: $I-\dfrac{3}{2}K=\int\limits_{-1}^{0}g(x)dx$

Từ lấy tích phân trên đoạn, kết hợp và, ta có: $I+\dfrac{3}{2}K=\int\limits_{0}^{1}g(x)dx$ và cộng hai vế suy ra $I=-\dfrac{15}{7}-\dfrac{2}{5}\int\limits_{0}^{1}g(x)dx=-\dfrac{579}{175}$.

Câu 86. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$xf(x^3)+f(1-x^2)=x^{13}+x^8-2x^7-4x^6+4x^4+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{0}f(x)dx$ bằng

A. $\frac{8}{45}$. **B.** $\frac{8}{15}$. **C.** $\frac{64}{45}$. **D.** $\frac{64}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $xf\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=x^{13}+x^8-2x^7-4x^6+4x^4+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2f\left(x^3\right)+xf\left(1-x^2\right)=x^{14}+x^9-2x^8-4x^7+4x^5+x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 đến 1 ta được

$$\int_0^1 x^2f\left(x^3\right)dx+\int_0^1 xf\left(1-x^2\right)dx=\int_0^1\left(x^{14}+x^9-2x^8-4x^7+4x^5+x^2\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt-\frac{1}{2}\int_1^0 f(t)dt=\left.\left(\frac{x^{15}}{15}+\frac{x^{10}}{10}-2\frac{x^9}{9}-4\frac{x^8}{8}+4\frac{x^6}{6}+\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\int_0^1 f(t)dt=\frac{4}{9}\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt=\frac{8}{15}$$

Lấy tích phân 2 vế cận từ -1đến 1 ta được

$$\int_{-1}^0 x^2f\left(x^3\right)dx+\int_{-1}^0 xf\left(1-x^2\right)dx=\int_{-1}^0\left(x^{14}+x^9-2x^8-4x^7+4x^5+x^2\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt=\left.\left(\frac{x^{15}}{15}+\frac{x^{10}}{10}-2\frac{x^9}{9}-4\frac{x^8}{8}+4\frac{x^6}{6}+\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(t)dt-\frac{1}{2}.\frac{8}{15}=-\frac{4}{45}\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(t)dt=\frac{8}{15}.$$

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\left(f'(x)\right)^2+4\left(6x^2-1\right).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4,\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Từ giả thuyết dự đoán và chọn hàm $f(x)=ax^4+bx^2+c$ ta có:

$$\left(4ax^3+2bx\right)^2+4\left(6x^2-1\right).\left(ax^4+bx^2+c\right)=40x^6-44x^4+32x^2-4$$

$$\Leftrightarrow\left(16a^2+24a\right)x^6+\left(16ab+24b-4a\right)x^4+\left(4b^2+24c-4b\right)x^2-4c=40x^6-44x^4+32x^2-4$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16a^2+24a=40\\16ab+24b-4a=-44\\4b^2+24c-4b=32\\-4c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=x^4-x^2+1\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^4-x^2+1\right)dx=\frac{13}{5}.$$

Cách 2:

Ta có: $\left(f'(x)\right)^2+4\left(6x^2-1\right).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4$

$$\Rightarrow\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx+\int_0^1 4\left(6x^2-1\right).f(x)dx=\int_0^1\left(40x^6-44x^4+32x^2-4\right)dx.\ (1)$$

Xét $I=\int_0^1 4\left(6x^2-1\right).f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(24x^2-4\right)f\left(x\right)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ dv=\left(24x^2-4\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'\left(x\right)dx\\ v=8x^3-4x\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\left(8x^3-4x\right).f\left(x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left(8x^3-4x\right).f'\left(x\right)dx=4-2\int_0^1\left(4x^3-2x\right).f'\left(x\right)dx.$

Do đó:

$(1)\Rightarrow\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx-2\int_0^1\left(4x^3-2x\right).f'\left(x\right)dx+\int_0^1\left(4x^3-2x\right)^2dx=\int_0^1\left(56x^6-60x^4+36x^2-8\right)dx.$

$\Rightarrow\int_0^1\left[f'(x)-\left(4x^3-2x\right)\right]^2dx=0\Rightarrow f'\left(x\right)=4x^3-2x\Rightarrow f\left(x\right)=x^4-x^2+c.$

Mà $f\left(1\right)=1\Rightarrow c=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^4-x^2+1$.

Do đó $\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(x^4-x^2+1\right)dx=\frac{13}{15}$.

Câu 88. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(2\sin^2x\right)dx=\frac{1}{2};\int_{e^{\sqrt{2}}}^{e^2}\frac{f\left(\ln^2x\right)}{x\ln x}dx=2$.

Tính $I=\int_{\frac{3}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}dx.$

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{4}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

+ Xét tích phân $A=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(2\sin^2x\right)dx=\frac{1}{2}$:

Đặt $t=\sin^2x\Rightarrow A=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{f\left(2t\right)}{2t}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{f\left(2t\right)}{t}dx=\frac{1}{2}\Rightarrow\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{f\left(2t\right)}{t}dx=1\ (1)$

+ Xét tích phân $B=\int_{e^{\sqrt{2}}}^{e^2}\frac{f\left(\ln^2x\right)}{x\ln x}dx=2$:

Đặt $2t=\ln^2x\Rightarrow B=\int_1^2\frac{f\left(2t\right)}{2t}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{f\left(2t\right)}{t}dx=2\Rightarrow\int_1^2\frac{f\left(2t\right)}{t}dx=4\ (2)$

Cộng vế theo vế với, ta được $I=\int_{\frac{3}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}dx=1+4=5.$

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 x.f'(x)dx$ bằng

A. $-\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int_0^2 xf'(x)dx = x.f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx$.

Từ $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Thay $x=0$ vào ta được $f(0)+f(2)=2 \Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$.

Xét $I=\int_0^2 f(x)dx$

Đặt $x=2-t \Rightarrow dx=-dt$, đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2 \\ x=2\Rightarrow t=0 \end{cases}$

Khi đó $I=-\int_2^0 f(2-t)dt=\int_0^2 f(2-t)dt=\int_0^2 f(2-x)dx$

Do đó ta có $2I=\int_0^2 \left(f(x)+f(2-x)\right)dx=\int_0^2 \left(x^2-2x+2\right)dx=\frac{8}{3} \Leftrightarrow I=\int_0^2 f(x)dx=\frac{4}{3}$.

Vậy $\int_0^2 x.f'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)dx=2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

Câu 90. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải:

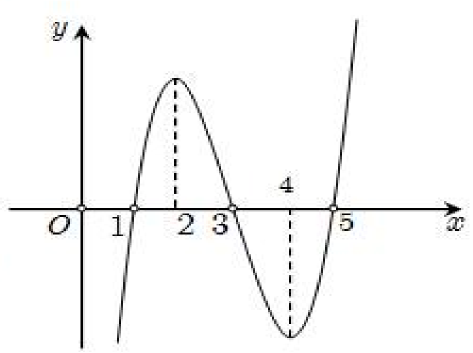
Chọn A

Thay x bởi $1-x$ ta có: $2f(1-x)+3f(1-1+x)=\sqrt{1-1+x} \Leftrightarrow 2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x}$

Ta có hệ: $\begin{cases} 2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x} \\ 3f(1-x)+2f(x)=\sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow 5f(x)=3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{5}\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\right)$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{5}\int_0^1\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\right)dx=\frac{2}{3}$.

Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $y=g(x)=f(x+1)-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = g'(x) = f'(x+1) - (x^2 - 2x)$.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

$f'(x+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x+1 < 3 \\ x+1 > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x > 4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $y' = g'(x)$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2+2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	Chưa xác định dấu	

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x$. Giá trị tích phân $I = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2+x}dx$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{8}{9}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2+x} + \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} = x - 1$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{3}}^{3} (x-1)\mathrm{d}x = \frac{16}{9}.$$

Xét $I' = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $\frac{1}{x} = t \Rightarrow \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{-t^2}$.

$$I' = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\mathrm{d}x = \int_{3}^{\frac{1}{3}} \frac{f(t)}{\frac{1}{t}+1}\frac{\mathrm{d}t}{-t^2} = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(t)}{t^2+t}dt = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x = I.$$

Suy ra $2I = \frac{16}{9} \Rightarrow I = \frac{8}{9}$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\frac{9}{5}$ và $\int\limits_0^1 f(\sqrt{x})\,dx=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

A. $I=\frac{3}{5}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{3}{4}$. **D.** $I=\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow dx=2t\,dt$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=1$

Suy ra $\int\limits_0^1 f(\sqrt{x})\,dx=2\int\limits_0^1 t.f(t)\,dt \Leftrightarrow \int\limits_0^1 t.f(t)\,dt=\frac{1}{5}$. Do đó $\Leftrightarrow \int\limits_0^1 x.f(x)\,dx=\frac{1}{5}$

Mặt khác $\int\limits_0^1 x.f(x)\,dx=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)\,dx=\frac{1}{2}-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)\,dx$.

Suy ra $\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}\Rightarrow\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,dx=\frac{3}{5}$

Ta tính được $\int\limits_0^1(3x^2)^2\,dx=\frac{9}{5}$.

Do đó $\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,dx-2\int\limits_0^1 3x^2f'(x)\,dx+\int\limits_0^1(3x^2)^2\,dx=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left(f'(x)-3x^2\right)^2dx=0$

$\Leftrightarrow f'(x)-3x^2=0\Leftrightarrow f'(x)=3x^2\Leftrightarrow f(x)=x^3+C$.

Vì $f(1)=1$ nên $f(x)=x^3$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}$.

Câu 94. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f^2(x)-xf(x)f'(x)=2x+4,\forall x\in[0;1]$. Biết $f(1)=3$, tích phân $I=\int\limits_0^1 f^2(x)dx$ bằng:

A. 13 **B.** $\frac{19}{3}$ **C.** $\frac{13}{3}$ **D.** 19

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f^2(x)=xf(x)f'(x)+2x+4$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 f^2(x)dx=\int\limits_0^1\left[xf(x)f'(x)+2x+4\right]dx$

$=\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)dx+\int\limits_0^1(2x+4)dx=A+5\ (*)$

Tính $A=\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)dx$

Đặt $\begin{cases}u=xf(x)\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(f(x)+xf'(x)\right)dx\\ v=f(x)\end{cases}$

$\Rightarrow A=xf^2(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\left(f(x)+xf'(x)\right)dx=9-\int\limits_0^1 f^2(x)dx-\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)dx$

$\Rightarrow A=\frac{9-I}{2}(**)$. Thay vào, ta được: $I=\frac{9-I}{2}+5\Leftrightarrow I=\frac{19}{3}$

Câu 95. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm lẻ và liên tục trên $\left[-4;4\right]$ biết $\int\limits_{-2}^{0}f\left(-x\right)\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_{1}^{2}f\left(-2x\right)\mathrm{d}x=4$.

Tính $I=\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn B

+ Xét tích phân $\int\limits_{-2}^{0}f\left(-x\right)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $-x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.
Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$
khi $x=0$ thì $t=0$

Do đó: $\int\limits_{-2}^{0}f\left(-x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_{2}^{0}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_{0}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\Rightarrow\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$.

Do hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số lẻ nên $f\left(-2x\right)=-f\left(2x\right)$.

Do đó $\int\limits_{1}^{2}f\left(-2x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{2}f\left(2x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{1}^{2}f\left(2x\right)\mathrm{d}x=-4$.

+ Xét $\int\limits_{1}^{2}f\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $2x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$
khi $x=2$ thì $t=4$

Do đó: $\int\limits_{1}^{2}f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{4}f\left(t\right)\mathrm{d}t=-4$

$\Rightarrow\int\limits_{2}^{4}f\left(t\right)\mathrm{d}t=-8\Rightarrow\int\limits_{2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-8$.

Suy ra: $I=\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2-8=-6$.

Câu 96. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $4x.f\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}$.

Tính $\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{16}$.

Lời giải

Chọn C

$4x.f\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow 2.\int\limits_{0}^{1}2x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_{0}^{1}f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2A+3B=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\quad(*)$,

$A=\int\limits_{0}^{1}2x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2x\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$.

$A=\int\limits_{0}^{1}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$B=\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x; x=0\Rightarrow t=1, x=1\Rightarrow t=0$.

$B=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

$(*)\Leftrightarrow 2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 5.\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt: $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right); x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(1-x)=x^3(1-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $I=\int\limits_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $-\frac{1}{20}$.

Lời giải

Chọn A

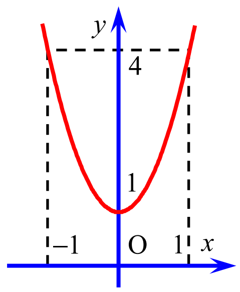
Từ giả thiết $f(x)+f(1-x)=x^3(1-x),\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(1)=0$.

Ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^3(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{40}$.

$I=\int\limits_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$, đặt $\mathrm{I}=\int\limits_0^2 \mathrm{x}f'\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=2f\left(\frac{x}{2}\right)\end{cases}$.

Nên $I=2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^2-2\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=4f(1)-2\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-2\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-4\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{10}$.

Câu 98. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$. có đồ thị là (C). Biết đồ thi (C) đi qua gốc toạ độ và có đồ thị $y=f'(x)$ cho bởi thình vẽ. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$.



A. $H=58$. **B.** $H=51$. **C.** $H=45$. **D.** $H=64$.

Lời giải

Chọn A

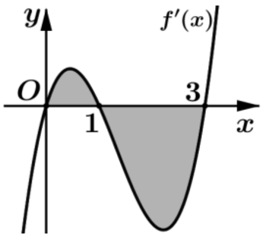
Do $f(x)$ là hàm số bậc ba nên $f'(x)$ là hàm số bậc hai.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ thì $f'(x)$ có dạng $f'(x)=ax^2+1$ với $a>0$.

Đồ thị đi qua điểm $A(1;4)$ nên $a=3$ vậy $f'(x)=3x^2+1$.

Vậy $H=f(4)-f(2)=\int_2^4 f'(x)\mathrm{d}x=\int_2^4(3x^2+1)\mathrm{d}x=58$.

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S=a$. Biết rằng $\int_0^1(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=b$ và $f(3)=c$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $a-b+c$. **B.** $-a+b-c$. **C.** $-a+b+c$. **D.** $a-b-c$.

Giải

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó $b=\int_0^1(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2f(1)-f(0)-I$.

Mặt khác, ta có $a=S=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x=f(1)-f(0)-[f(3)-f(1)]$

$=2f(1)-f(0)-f(3)=2f(1)-f(0)-c$.

Suy ra $2f(1)-f(0)=a+c$. Vậy $I=2f(1)-f(0)-b=a+c-b$.

Câu 100. Biết $\int_1^2\frac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln a+b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2+ab$.

A. 10 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 6

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2\frac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x+1}{x(x+\ln x)}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x+\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

Khi $x=1\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=2+\ln 2$.

Khi đó $I=\int_1^{2+\ln 2}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|\Big|_1^{2+\ln 2}=\ln(\ln 2+2)$. Suy ra $\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}$.

Câu 101. Biết tích phân $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(a\sqrt{3}+b+c\pi\right)+4$ với a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b^2+c^4$.

A. 20. **B.** 241. **C.** 196. **D.** 48.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \left(-4+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)\mathrm{d}x = -4\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x + \int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = I+J$.

Tính $I=-4\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x = -4x\Big|_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+4$.

Tính $J=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x-\frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận

$x=1 \Rightarrow t=0$

$x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó $J=\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$. Đặt $t=\sqrt{2}\tan u \Rightarrow \mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u$.

Đổi cận

$t=0 \Rightarrow u=0$

$t=\sqrt{2} \Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$.

Suy ra $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\left(1+\tan^2 u\right)}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

Vậy $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-16\sqrt{3}-16+\pi\right)+4 \Rightarrow \begin{cases} a=b=-16 \\ c=1 \end{cases}$.

Vậy $a+b^2+c^4=241$.

Câu 102. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(4-x\right)=f\left(x\right)$. Biết $\int\limits_1^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{9}{2}$. **D.** $I=\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x)=f(x),\forall x[a;b]$. Khi đó $\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x\in[a;b]$. Đổi cận: khi $x=a\Rightarrow t=b$; khi $x=b\Rightarrow t=b$

Ta có $\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b xf(a+b-x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a (a+b-t)f(t)\mathrm{d}t$

$=\int\limits_a^b (a+b-t)f(t)\mathrm{d}t=(a+b)\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_a^b tf(t)\mathrm{d}t=(a+b)\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=(a+b)\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow \boxed{\int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x}$.

Áp dụng tính chất trên với $a=1$, $b=3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x)=f(x)$.

Khi đó $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1+3}{4}\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}$.

Cách 2: Đổi biến trực tiếp:

Đặt $t=4-x$, với $x\in[1;3]$.

Ta có $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t=4\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_1^3 t.f(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow 5=4\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t-5\Rightarrow \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{5}{2}$.

Câu 103. Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng: $\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=ae+b$ Tính $Q=a^{2020}+b^{2020}$.

A. $Q=2^{2020}+1$. **B.** $Q=2^{2020}-1$. **C.** $Q=0$. **D.** $Q=2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases}$.

$\int\limits_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=e^xf(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^xf'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 e^xf'(x)\mathrm{d}x=ef(1)-f(0)=e-1$.

Do đó $a=1$, $b=-1$.

Suy ra $Q=a^{2020}+b^{2020}=1^{2020}+(-1)^{2020}=2$.

Vậy $Q=2$.

Câu 104. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+3x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Tích phân $\int\limits_0^4 f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** 88. **C.** 25. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=t^3+3t$. Khi đó: $dx=\left(3t^2+3\right)dt$.

Với $x=0\Rightarrow t=0$.

$x=4\Rightarrow t=1$.

Vậy: $\int\limits_0^4 f(x)dx=\int\limits_0^1 f\left(t^3+3t\right)\left(3t^2+3\right)dt=\int\limits_0^1 (t+1)\left(3t^2+3\right)dt=\dfrac{25}{4}$.

Câu 105. Giả sử rằng $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c;\left(a,b,c\in\mathbb{Q}\right)$. Khi đó $3a+2b+2c$ bằng?

A. 30. **B.** 50. **C.** 40. **D.** 60.

Lời giải

Đáp án C

$\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{(x-2)(3x+11)+21}{x-2}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(3x+11+\dfrac{21}{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\dfrac{3}{2}x^2+11x\right)\Bigg|_{-1}^{0}+21.\ln|x-2|\Bigg|_{-1}^{0}=-\dfrac{3}{2}+11+21.\ln 2-21.\ln 3=21.\ln 2-21.\ln 3+\dfrac{19}{2}$

Suy ra: $a=21;b=-21;c=\dfrac{19}{2}$.

Vậy $3a+2b+2c=40$.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0,\ \ f(x)>0$ với mọi $x>0$ và $f(1)=\dfrac{1}{6}$. Tính $P=1+f(1)+f(2)+...+f(2018)$.

A. $P=\dfrac{1009}{2020}$. **B.** $P=\dfrac{2019}{2020}$. **C.** $P=\dfrac{3029}{2020}$. **D.** $P=\dfrac{4039}{2020}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+3)$

$\longrightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=-\int(2x+3)dx\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=-x^2-3x+C\longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-C}$.

Mà $f(1)=\dfrac{1}{6}\longrightarrow\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{1^2+3.1-C}\Leftrightarrow C=-2\longrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

Suy ra $P=1+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}\right)=\dfrac{3029}{2020}$. **Chọn C**

Câu 107. Giá trị của $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_n^{n+1}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** e. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Tính $I=\int\limits_n^{n+1}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+e^x}=\int\limits_n^{n+1}\dfrac{e^x\mathrm{d}x}{e^x\left(1+e^x\right)}$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow\mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=n\Rightarrow t=e^n$, $x=n+1\Rightarrow t=e^{n+1}$.

Khi đó $I=\int\limits_{e^n}^{e^{n+1}}\dfrac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\int\limits_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln t-\ln(t+1)\right)\Big|_{e^n}^{e^{n+1}}=1+\ln\dfrac{1+\dfrac{1}{e^n}}{e+\dfrac{1}{e^n}}$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{1+e^{x}}=\lim\limits_{n\to+\infty}I=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\ln\frac{1+\frac{1}{e^{n}}}{e+\frac{1}{e^{n}}}\right)=1+\ln\frac{1}{e}=1-1=0$.

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$; $\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=1$.

Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{3}f'\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-5$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-18$. **D.** $I=-10$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^{2}=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=0$; $x=3\Rightarrow t=2$.

Khi đó: $I=\int\limits_{-1}^{3}f'\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}2t.f'(t)\mathrm{d}t=2t.f(t)\Big|_{0}^{2}-2\int\limits_{0}^{2}f(t)\mathrm{d}t=4f(2)-2\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-8-2=-10$.

Câu 109. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1,2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$. Tính giá trị tích phân $I=\int_{-1}^{2}f(x)dx$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$.

$\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)dx+3\int_{-1}^{2}f(1-x)dx=\int_{-1}^{2}4x^3\,dx=15(*)$.

Đặt $u=x^2-2\Rightarrow du=2xdx$; với $x=-1\Rightarrow u=-1; x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^{2}2x.f(x^2-2)dx=\int_{-1}^{2}f(u)du=\int_{-1}^{2}f(x)dx$ (1).

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$; với $x=-1\Rightarrow t=2; x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^{2}f(1-x)dx=\int_{-1}^{2}f(t)dt=\int_{-1}^{2}f(x)dx$ (2).

Thay (1), (2) vào $(*)$ ta được $5\int_{-1}^{2}f(x)dx=15\Rightarrow\int_{-1}^{2}f(x)dx=3$.

Câu 110. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn, thỏa mãn $f(4-x)=f(x),\forall x\in[1;3]$ và $\int\limits_{1}^{3}x.f(x)dx=-2$. Giá trị $2\int\limits_{1}^{3}f(x)dx$ bằng:

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Sử dụng tính chất $I=\int\limits_{a}^{b}x.f(x)dx=\int\limits_{a}^{b}t.f(t)dt$

Áp dụng phương pháp đổi biến, đặt $t=4-x$

Sử dụng công thức $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx+\int\limits_{a}^{b}g(x)dx=\int\limits_{a}^{b}\left[f(x)+g(x)\right]dx$

Ta có: $I=\int\limits_{1}^{3}x.f(x)dx=\int\limits_{1}^{3}t.f(t)dt=-2$

Đặt $t=4-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\x=3\Rightarrow t=1\end{cases}$

$\Rightarrow I=-\int\limits_{3}^{1}(4-x)f(4-x)dx=\int\limits_{1}^{3}(4-x)f(x)dx=-2 \Leftrightarrow 2I=\int\limits_{1}^{3}x.f(x)dx+\int\limits_{1}^{3}(4-x)f(x)dx=-4$

$\Leftrightarrow \int\limits_{1}^{3}(4-x+x)f(x)dx=-4 \Leftrightarrow 4\int\limits_{1}^{3}f(x)dx=-4 \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{3}f(x)dx=-1.$

Vậy $2\int\limits_{1}^{3}f(x)dx=-2.$

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+3x)=x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{0}^{4}f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{25}{4}$. **B.** 88. **C.** 25. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=t^3+3t$. Khi đó: $dx=(3t^2+3)dt$.

Với $x=0\Rightarrow t=0$.

$x=4\Rightarrow t=1$.

Vậy: $\int\limits_{0}^{4}f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}f(t^3+3t)(3t^2+3)dt=\int\limits_{0}^{1}(t+1)(3t^2+3)dt=\frac{25}{4}$.

Câu 112. hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $[0;1]$ thỏa $\int\limits_{0}^{1}x^2.f''(x)dx=12$ và $2f(1)-f'(1)=-2$. Tính $\int\limits_{0}^{1}f(x)dx$.

A. 10. **B.** 14 **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_{0}^{1}x^2f''(x)dx=12$

Đặt: $\begin{cases}u=x^2\\dv=f''(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=f'(x)\end{cases}$

$$12=x^2f'(x)|_0^1-2\int\limits_{0}^{1}x.f'(x)dx$$

Suy ra:

$$\Rightarrow 12=f'(1)-2\int\limits_{0}^{1}x.f'(x)dx\,(*)$$

Lại đặt: $\begin{cases}t=x\\dz=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dt=dx\\z=f(x)\end{cases}$

$$12=f'(1)-2\left[x.f(x)|_0^1-\int\limits_{0}^{1}f(x)dx\right]$$

Thay vào:

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}(12-2f(1)+f'(1))=5$$

Câu 113. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trong đoạn $\left[1;\mathrm{e}\right]$, biết $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=1$, $f\left(\mathrm{e}\right)=1$. Khi đó $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x=f\left(x\right).\ln x\Big|_{1}^{\mathrm{e}}-\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}f\left(x\right).\frac{1}{x}\mathrm{d}x=f\left(\mathrm{e}\right)-1=1-1=0$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x=f\left(x\right)\ln x\Big|_{1}^{\mathrm{e}}-\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=f\left(\mathrm{e}\right)-1=1-1=0$.

Câu 114. Cho $f\left(x\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f\left(1\right)=1$ và $\int\limits_{0}^{1}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$.Tính $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{3}$. **B.** $I=-\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\sin x=t\Rightarrow f\left(\sin x\right)=f\left(t\right)\Rightarrow\cos x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=f'\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x.\cos x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{1}t.f'\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Đặt: $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=f'\left(t\right)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=f\left(t\right)\end{cases}$.

$I=2\left[\left(t.f\left(t\right)\right)\Big|_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

Câu 115. Biết rằng tích phân $\int\limits_{0}^{4}\frac{\left(x+1\right)e^{x}}{\sqrt{2x+1}}dx=ae^{4}+b$. Tính $T=a^{2}-b^{2}$

A. $T=1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=\frac{3}{2}$. **D.** $T=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_{0}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}e^{x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4}\frac{2x+2}{\sqrt{2x+1}}e^{x}dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{4}\sqrt{2x+1}.e^{x}dx+\int\limits_{0}^{4}\frac{e^{x}}{\sqrt{2x+1}}dx\right)$.

Xét $I_1=\int\limits_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}}dx$.

Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=e^x dx \\ v=\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2x+1} \end{cases}$

Do đó $I_1=e^x.\sqrt{2x+1}\Big|_0^4-\int\limits_0^4 e^x.\sqrt{2x+1}dx$.

Suy ra $I=\frac{3e^4-1}{2}$. Khi đó $a=\frac{3}{2},b=\frac{-1}{2}\Rightarrow T=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$.

Câu 116. Cho $\int\limits_0^2 (1-2x)f'(x)dx=3f(2)+f(0)=2020$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x)dx$ bằng

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 1010. **D.** 2022.

Lời giải:

Chọn C

Theo bài ra ta có $\int\limits_0^2 (1-2x)f'(x)dx=\int\limits_0^2 (1-2x)d(f(x))=(1-2x)f(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)d(1-2x)$

$=-3f(2)-f(0)-\int\limits_0^2 f(x)(-2)dx \quad =-3f(2)-f(0)+2\int\limits_0^2 f(x) \quad \Rightarrow 2\int\limits_0^2 f(x)=3f(2)+f(0)=2020$

$\Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)=1010$.

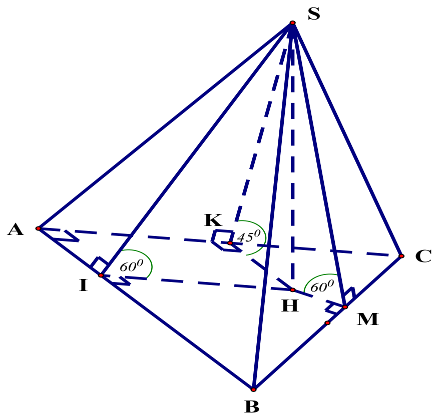
THỂ TÍCH
KHỐI ĐA DIỆN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với cạnh huyền $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt đáy ABC nằm trong tam giác ABC. Biết các mặt bên (SAB), (SBC) (SCA) lần lượt tạo với đáy các góc $60^0, 60^0, 45^0$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ tính theo a tương ứng bằng:

A. $\dfrac{3a^3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **D.** $\dfrac{6a^3}{2+\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có ΔABC vuông cân tại A và $BC = 2a \Rightarrow AB = AC = a\sqrt{2}$; $h_a = \dfrac{1}{2}BC = a$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}h_a.BC = \dfrac{1}{2}a.2a = a^2$.

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{2}\left(HI.a\sqrt{2} + HM.2a + HK.a\sqrt{2}\right) = a^2 \Leftrightarrow HI.\sqrt{2} + HM.2 + HK.\sqrt{2} = 2a\ (*)$

Từ giả thiết các mặt bên $(SAB),(SBC),(SCA)$ lần lượt tạo với đáy các góc $60^0, 60^0, 45^0$ suy ra $SH = HI.\tan 60^0 = HM.\tan 60^0 = HK.\tan 45^0 \Leftrightarrow SH = HI.\sqrt{3} = HM.\sqrt{3} = HK.1$

$\Leftrightarrow HI = HM; HK = \sqrt{3}HI$. Thay vào $(*)$ ta được $HI.\sqrt{2} + HI.2 + HI.\sqrt{3}.\sqrt{2} = 2a\ (*) \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)HI = 2a \Leftrightarrow HI = \dfrac{2a}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}} \Rightarrow SH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

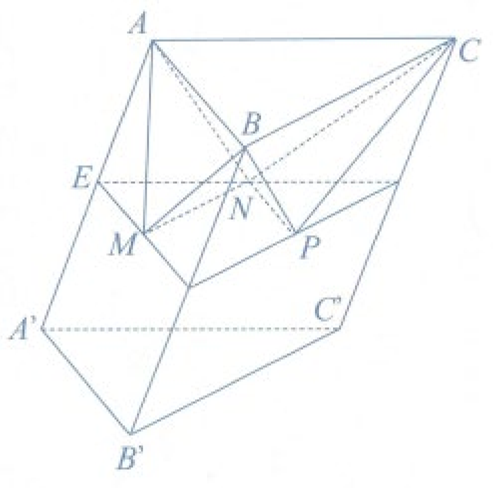
Vậy thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}.a^2 = \dfrac{2a^3}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Câu 2. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $12\sqrt{3}$ **B.** $16\sqrt{3}$ **C.** $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Vì ΔABC đều có độ dài cạnh bằng 6 nên $S_{\Delta ABC} = 4^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = h.S_{\Delta ABC} = 8.4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$.

Câu 3. Gọi E là trung điểm của cạnh AA'. Thể tích khối chópA.EMN là:

$$V_{A.EMN} = \frac{1}{3}d\left(A,\left(EMN\right)\right).S_{\Delta EMN} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}h.\frac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{24}V$$

Thể tích khối đa diện ABCMNP là:

$$V_{ABCMNP} = \frac{1}{2}V - 3V_{A.EMN} = \frac{1}{2}V - 3.\frac{1}{24}V = \frac{3}{8}V = 12\sqrt{3}$$

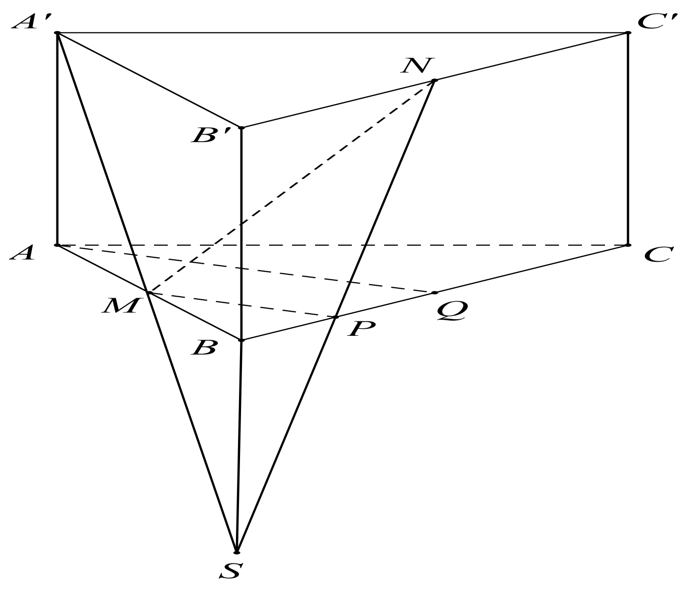
Câu 4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung

điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{32}$. **B.** $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{96}$. **C.** $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{32}$. **D.** $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{68}$.

Lời giải

Chọn B



.

Gọi Q là trung điểm của BC. Suy ra $AQ \parallel A'N \Rightarrow MP \parallel AQ \Rightarrow P$ là trung điểm của BQ.
Ta có $BB', A'M, NP$ đồng quy tại S và B là trung điểm của $B'S \Rightarrow SB' = 2a$.

$$S_{A'B'N} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

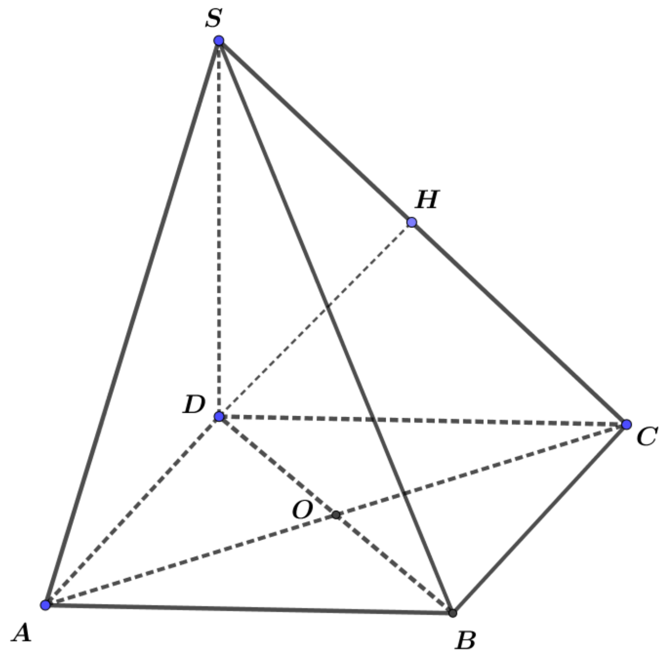
$$V_{SMNP} = \frac{1}{8}V_{SA'B'N} \Rightarrow V_{MBPA'B'N} = \frac{7}{8}V_{SA'B'N} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}.$$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BA = BC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$ và $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. a^3. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử $SD \perp (ABC)$. Ta chứng minh: $ABCD$ là hình vuông.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB \perp SD \\ AB \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SDA) \Rightarrow AB \perp DA \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ.$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} BC \perp SD \\ BC \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DC \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ.$

Tứ giác $ABCD$ có: $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.
Mà $BA = BC \Rightarrow ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$.
Vì $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d\left(D, (SBC)\right) = d\left(A, (SBC)\right) = a\sqrt{2}$.
Kẻ $DH \perp SC$ tại H.
Ta có: $BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DH$.
Mà $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC)$.
$\Rightarrow d\left(D, (SBC)\right) = DH = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác SDC vuông tại D có:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Rightarrow SD = a\sqrt{6}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SD = \frac{1}{3}.\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{2}.a\sqrt{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$

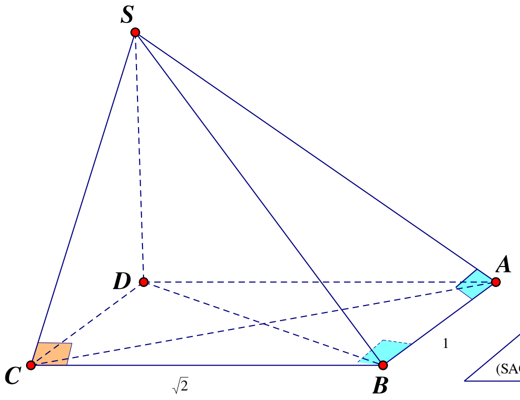
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, $AB=1, AC=\sqrt{3}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, $SB>2$ và $\cos\varphi=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ với φ là góc hợp bởi giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

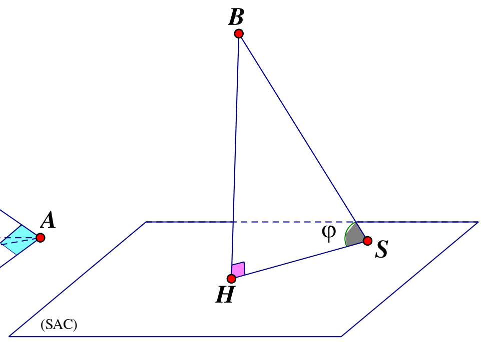
Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{1}{3}$. **C.** $V=\dfrac{1}{2}$. **D.** $V=\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B





Hạ $SD\perp(ABC)$ tại D có

$\left.\begin{matrix} BA\perp SA \\ BA\perp SD \end{matrix}\right\}\Rightarrow BA\perp(SAD)\Rightarrow BA\perp AD$. Chứng minh tương tự $BC\perp CD$.

Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Hạ $BH\perp(SAC)$ tại H suy ra $(SB,(SAC))=\widehat{BSH}=\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

$\sin\varphi=\dfrac{BH}{BS}=\dfrac{BH}{\sqrt{BD^2+SD^2}}=\dfrac{d}{\sqrt{3+x^2}}\Rightarrow\sin^2\varphi=\dfrac{d^2}{3+x^2}$ với $d=d(B,(SAC))=BH$, $SD=x$.

(điều kiện $x>1$ vì $SB>2\Leftrightarrow SB^2>4\Leftrightarrow SD^2+BD^2>4\Leftrightarrow x^2+3>4\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow x>1$)

Mặt khác $d=d(B,(SAC))=d(D,(SAC))$ suy ra:

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{DC^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{3x^2+2}{2x^2}\Rightarrow d^2=\frac{2x^2}{3x^2+2}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{10}=\dfrac{2x^2}{(3x^2+2)(3+x^2)}\Leftrightarrow 3x^4-9x^2+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{matrix} x^2=1\,(l) \\ x^2=2 \end{matrix}\right.\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\Rightarrow SD=\sqrt{2}$.

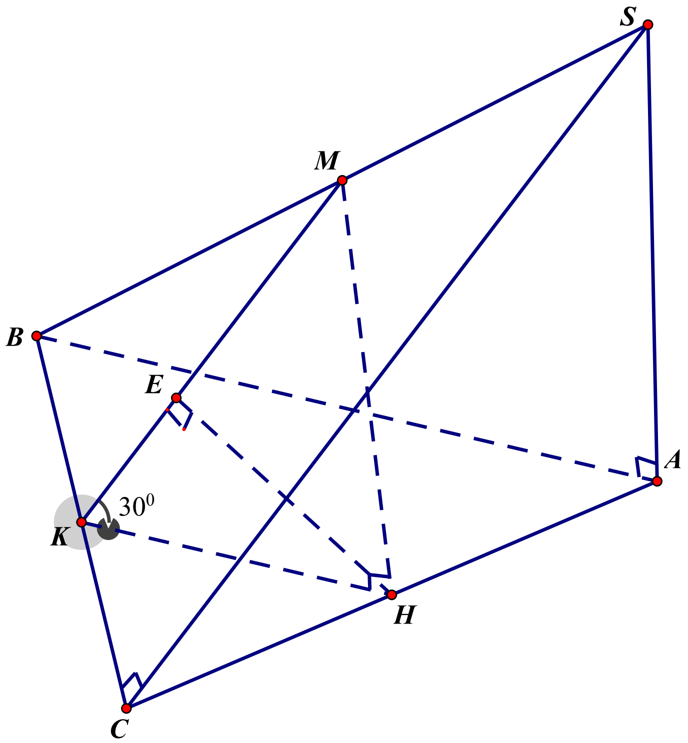
Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}AB.BC\right)SD=\dfrac{1.\sqrt{2}\sqrt{2}}{6}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=2a$; $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$ và góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SBC) bằng 30^0. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **B.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{9}$ **C.** $V=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ **D.** $V=\dfrac{8\sqrt{3}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi H, K, M lần lượt là trung điểm của AC, BC, SB và vì tam giác ABC vuông tại B suy ra $HK\perp BC$ (1).

Gọi E là hình chiếu của H trên mặt phẳng $(SBC)\Rightarrow HE\perp BC$ (2).

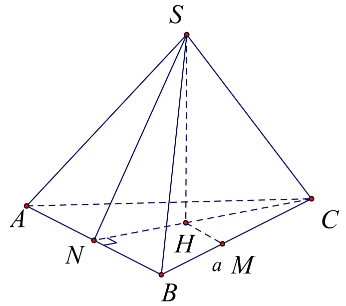
Từ (1), (2) suy ra $EK\perp BC\Rightarrow EK\equiv MK$ (vì $MK\perp BC$) do đó

$\left[\widehat{AB,(SBC)}\right]=\left[\widehat{HK,(SBC)}\right]=\left(\widehat{HK,KE}\right)=\left(\widehat{HK,KM}\right)=\widehat{HKM}=30^0$.

Lại có $HA=HB=HC$, $MA=MB=MC$ (do M là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$) suy ra MH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC suy ra ΔMHK vuông tại $H\Rightarrow MH=\tan 30^{\circ}.HK=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Vậy thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}d\left[S,(ABC)\right].S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.2MH.\dfrac{2a.2a}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{9}$.

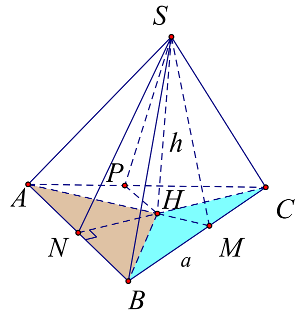
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên (SAB), (SAC), (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là 30°, 45°, 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC.



A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.   **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$.   **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$.   **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh BC, AB, AC; h là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

Khi đó, $\widehat{SNH}=30^\circ$, $\widehat{SPH}=45^\circ$, $\widehat{SMH}=60^\circ$.

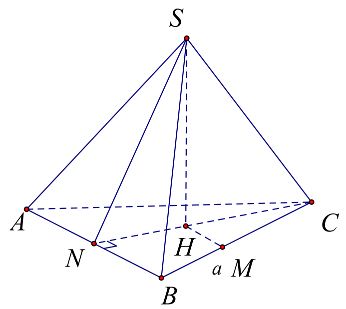
Mà $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta HAB}+S_{\Delta HAC}+S_{\Delta HBC}\Leftrightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}a\left(HN+NM+HP\right)\Leftrightarrow HN+NM+HP=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Leftrightarrow\left(\tan 30^\circ+\tan 45^\circ+\tan 60^\circ\right)h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left(\tan 30^\circ+\tan 45^\circ+\tan 60^\circ\right)h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

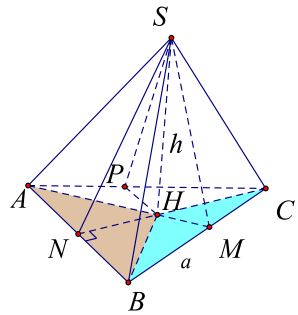
Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên (SAB), (SAC), (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là 30°, 45°, 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC.



A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.　　**B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$.　　**C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$.　　**D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh BC, AB, AC; h là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

Khi đó, $\widehat{SNH}=30^\circ$, $\widehat{SPH}=45^\circ$, $\widehat{SMH}=60^\circ$.

Mà $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta HAB}+S_{\Delta HAC}+S_{\Delta HBC}\Leftrightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}a\left(HN+NM+HP\right)\Leftrightarrow HN+NM+HP=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Leftrightarrow\left(\tan 30^\circ+\tan 45^\circ+\tan 60^\circ\right)h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left(\tan 30^\circ+\tan 45^\circ+\tan 60^\circ\right)h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

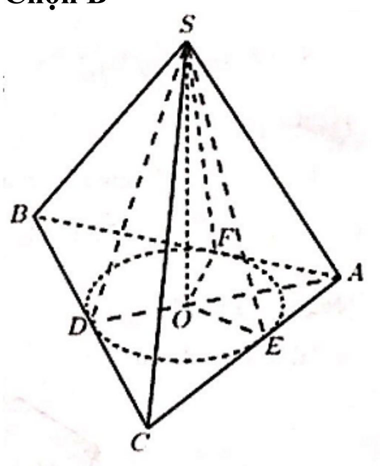
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Câu 10. Cho khối chóp S.ABC có cạnh đáy $AB=AC=5a, BC=6a$ và các mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Hãy tính thể tích V của khối chóp đó?

A. $V=2a^3\sqrt{3}.$　　**B.** $V=6a^3\sqrt{3}.$　　**C.** $V=12a^3\sqrt{3}.$　　**D.** $V=18a^3\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B



Kẻ $SO\perp\left(ABC\right)$ và OD,OE,OF lần lượt vuông góc với BC,AC,AB. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SD\perp BC, SE\perp AC, SF\perp AB$ (như hình vẽ).

Từ đó suy ra $\widehat{ABC}=\widehat{ABC}=\widehat{ABC}=60^0$. Do đó các tam giác vuông SDO,SEO,SFO bằng nhau. Từ đó suy ra $OD=OE=OF$. Vậy O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vì tam giác ABC cân tại A nên OA vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến. Suy ra A,O,D thẳng hàng và D là trung điểm của BC.

Suy ra $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16a^2} = 4a$.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của nó.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.6a.4a = 12a^2 = pr = 8ar$. Suy ra $r = \frac{3}{2}a$

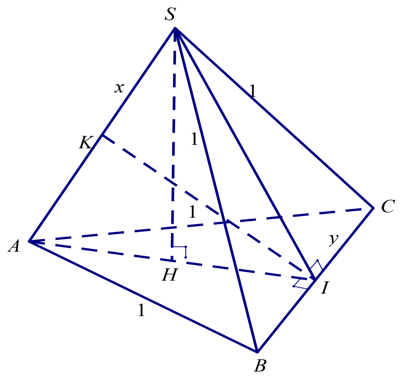
Do đó $SO = OD.\tan 60^0 = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$.Vậy $V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}a^3$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $(x+y)$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải:

Chọn C



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC và H là hình chiếu của S lên (ABC).

Ta có: $BC \perp (SAI)$ và $H \in AI, \Delta SAI$ cân tại I.

$$SI = AI = \sqrt{SC^2 - IC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2},\ IK = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2}$$

$$S_{SAI} = \frac{1}{2}SH.AI = \frac{1}{2}SA.IK \Rightarrow SH = \frac{SA.IK}{AI} = \frac{x.\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{4-y^2}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AI = \frac{y\sqrt{4-y^2}}{4}$$

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có: $0 < x, y < 2$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{12}xy\sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)} \le \frac{1}{12}xy\sqrt{4-2xy}$ (vì $x^2 + y^2 \ge 2xy$)

Suy ra $V_{S.ABC} \le \frac{1}{12}xy\sqrt{4-2xy} = \frac{1}{12}\sqrt{xy.xy.(4-2xy)} \le \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{xy+xy+4-2xy}{3}\right)^3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

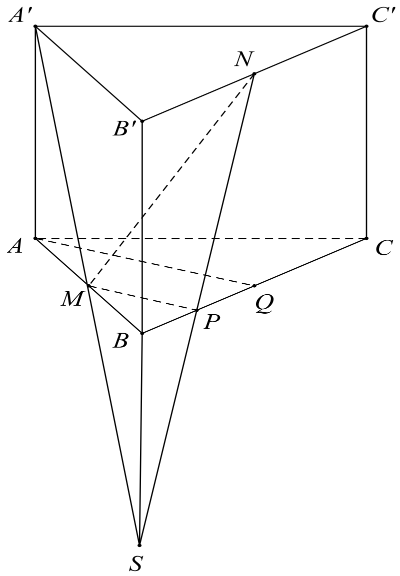
$V_{S.ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow V_{S.ABC} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 4 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + y = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Câu 12. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. **B.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{68}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi Q là trung điểm của BC. Suy ra $AQ \parallel A'N \Rightarrow MP \parallel AQ \Rightarrow P$ là trung điểm của BQ.

Ta có $BB', A'M, NP$ đồng quy tại S và B là trung điểm của $B'S \Rightarrow SB' = 2a$.

$S_{A'B'N} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'N} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

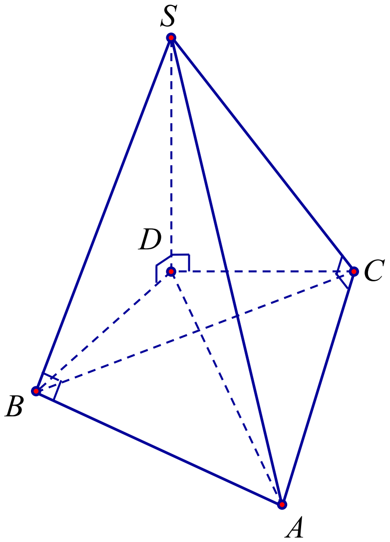
$V_{SMNP} = \dfrac{1}{8}V_{SA'B'N} \Rightarrow V_{MBPA'B'N} = \dfrac{7}{8}V_{SA'B'N} = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.

Chọn B



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB$ (gt), suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C.

Dễ thấy $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$.

Từ đó ta chứng minh được $\Delta SBD = \Delta SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC, nên cũng là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{DAC}=30°$, suy ra $DC=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBD}=60°$, suy ra $\tan\widehat{SBD}=\dfrac{SD}{BD}\Rightarrow SD=BD\tan\widehat{SBD}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}=a$.

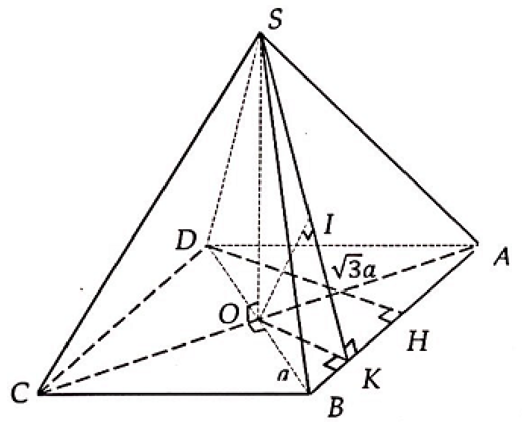
Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SD=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 14. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi; hai đường chéo $AC=2\sqrt{3}a, BD=2a$ và cắt nhau tại *O*; hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Biết khoảng cách từ điểm *O* đến mặt phẳng (*SAB*) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo *a*.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



+Từ giả thiết $AC=2a\sqrt{3};BD=2a$ và AC,BD vuông góc với nhau tại trung điểm *O* của mỗi đường chéo. Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO=a\sqrt{3}$; $BO=a$, do đó $ABD=60^0$

Hay tam giác *ABD* đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*) nên giao tuyến của chúng là $SO\perp(ABCD)$.

+Do tam giác *ABD* đều nên với *H* là trung điểm của *AB*, *K* là trung điểm của *HB* ta có $DH\perp AB$ và $DH=a\sqrt{3}$; $OK//DH$ và $OK=\dfrac{1}{2}DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OK\perp AB\Rightarrow AB\perp(SOK)$.

+Gọi *I* là hình chiếu của *O* lên *SK* ta có $OI\perp SK$; $AB\perp OI\Rightarrow OI\perp(SAB)$, hay *OI* là khoảng cách từ *O* đến mặt phẳng (*SAB*).

Tam giác *SOK* vuông tại *O*, *OI* là đường cao $\Rightarrow\dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{1}{OK^2}+\dfrac{1}{SO^2}\Rightarrow SO=\dfrac{a}{2}$

Diện tích đáy: $S_{ABCD}=4S_{\Delta ABO}=2.OA.OB=2\sqrt{3}a^2$;

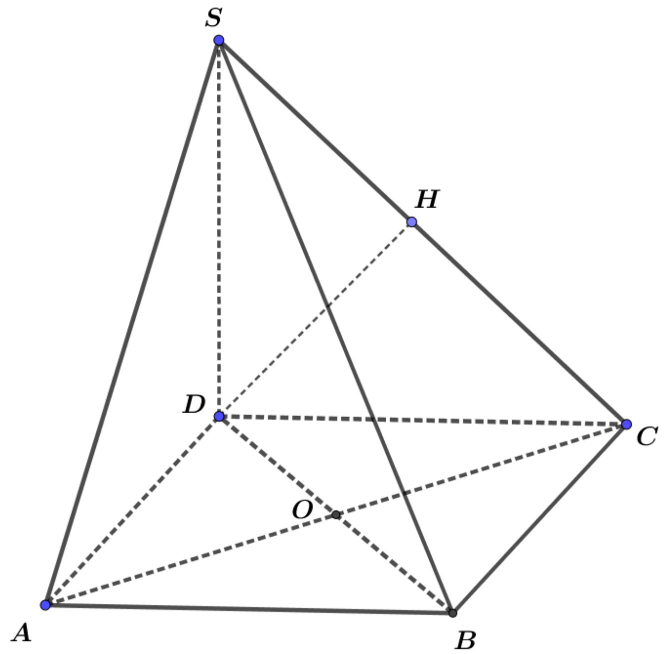
Đường cao của hình chóp $SO=\dfrac{a}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BA=BC=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$ và $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. a^3. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử $SD \perp (ABC)$. Ta chứng minh: $ABCD$ là hình vuông.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp SD \\ AB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SDA) \Rightarrow AB \perp DA \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} BC \perp SD \\ BC \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DC \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ có: $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Mà $BA = BC \Rightarrow ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$.

Vì $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = d(A,(SBC)) = a\sqrt{2}$.

Kẻ $DH \perp SC$ tại H.

Ta có: $BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DH$.

Mà $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC)$.

$\Rightarrow d(D,(SBC)) = DH = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SDC vuông tại D có:

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{DC^2} \Rightarrow SD = a\sqrt{6}$.

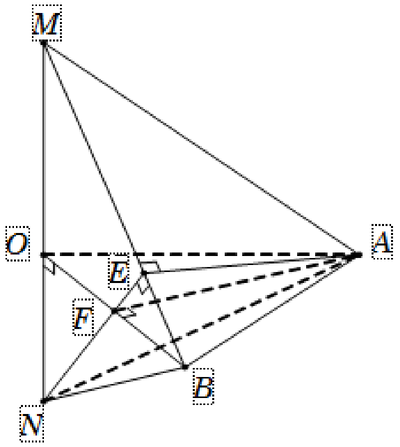
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{2}.a\sqrt{6} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 16. Cho tam giác OAB đều cạnh a. Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB. Gọi N là giao điểm của EF và d. Thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Do tam giác OAB đều cạnh $a \Rightarrow F$ là trung điểm $OB \Rightarrow OF = \frac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp MO \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB.$

Mặt khác, $MB \perp AE$ Suy ra $MB \perp (AEF) \Rightarrow MB \perp EF$.

Suy ra $\Delta OBM \backsim \Delta ONF$ nên $\frac{OB}{ON} = \frac{OM}{OF} \Rightarrow ON = \frac{OB.OF}{OM} = \frac{a^2}{2x}$.

Ta có $V_{ABMN} = V_{ABOM} + V_{ABON}$

$$= \frac{1}{3} S_{\Delta OAB}(OM + ON) = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.(x + \frac{a^2}{2x}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(x + \frac{a^2}{2x}\right) \geq \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.2\sqrt{x.\frac{a^2}{2x}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

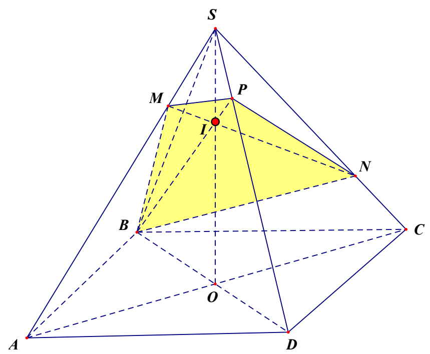
Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI = \frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I. (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Gọi m, n lần lượt là GTLN, GTNN của $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\frac{m}{n}$.

A. 2. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn C



+) Đặt $\begin{cases} \frac{SA}{SM} = x \\ \frac{SC}{SN} = y \end{cases}, (x, y \geq 1)$.

+) Có $\frac{SB}{SB} + \frac{SD}{SP} = 2\frac{SO}{SI} = 2.3 = 6 \Rightarrow \frac{SD}{SP} = 5$.

+) Có $x+y=2\dfrac{SO}{SI}=6 \Leftrightarrow y=6-x$, $1\le x\le 5$. (vì $y\le 1$)

+) $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{V_{S.BPM}}{V_{S.BDA}}+\dfrac{V_{S.BPN}}{V_{S.BDC}}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SP}{SD}+\dfrac{SN}{SC}.\dfrac{SP}{SD}\right]=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{5})=\dfrac{x+y}{10xy}=\dfrac{6}{10xy}=\dfrac{3}{5xy}$

(Gốc $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{x+1+y+5}{4.x.1.y.5}=\dfrac{12}{20xy}=\dfrac{3}{5xy}=\dfrac{3}{5x(6-x)}=\dfrac{3}{5(6x-x^2)}$.)

+) Xét $f(x)=\dfrac{3}{5(6x-x^2)}$, với $1\le x\le 5$. +) Có $f'(x)=\dfrac{3}{5}.\dfrac{2x-6}{(6x-x^2)^2}$.

+) $\begin{cases} f'(x)=0 \\ 1<x<5 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.

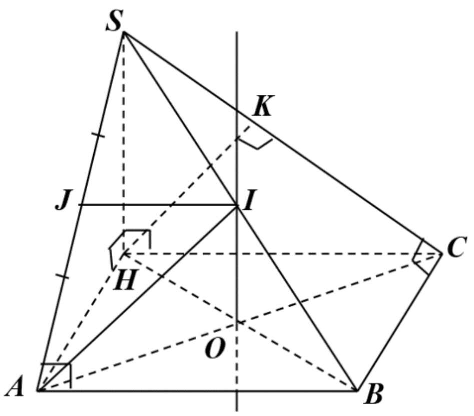
+) $f(1)=\dfrac{3}{25}$; $f(3)=\dfrac{1}{15}$; $f(5)=\dfrac{3}{25} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{3}{25} \\ n=\dfrac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{m}{n}=\dfrac{9}{5}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$ và khoảng cách từ điểm A đến (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

Ta có: $\begin{cases} BC\perp SC \\ SH\perp BC \end{cases} \Rightarrow HC\perp BC$.

Tương tự $AH\perp AB$.

Và ΔABC vuông cân tại B nên $ABCH$ là hình vuông. Gọi $O=AC\cap BH$, O là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta hoàn toàn có $IJ\perp SA \Rightarrow IJ // AB \Rightarrow I$ là trung điểm SB, hay $I=d\cap SC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S.ABC}=AI=\sqrt{IJ^2+JA^2}$; $IJ=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AH//(SBC) \Rightarrow d(A,(SBC))=d(H,(SBC))=HK$.

(K là hình chiếu của H lên SC và $BC\perp(SHC) \Rightarrow HK\perp(SBC)$).

$\Rightarrow HK=a\sqrt{2}$. Tam giác SHC vuông tại H $\Rightarrow SH=a\sqrt{6}$.

Tam giác SHA vuông tại H $\Rightarrow SA=3a$.

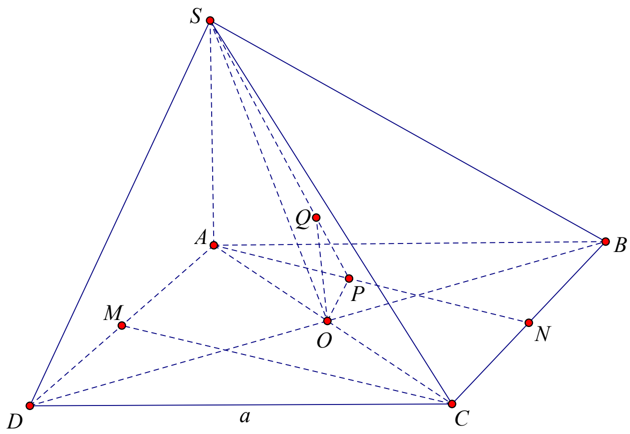
$JA = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2$.

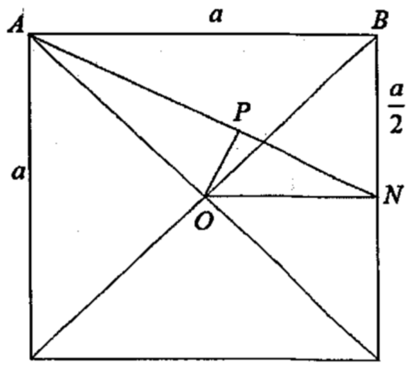
Câu 19. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm của AD. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA bằng $\frac{a}{\sqrt{6}}$. Thể tích khối chóp $SABCD$ bằng

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A





Gọi O là giao điểm của AC và BD, suy ra đường cao hình chóp là $h = SO$.
Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Suy ra CM song song với AN $\Rightarrow CM // (SAN)$.

Suy ra: $d(CM, SA) = d(CM, (SAN)) = d(M, (SAN)) = 2d(O, (SAN)) = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Từ O hạ $OP \perp AN$ tại P; hạ $OQ \perp SP$ tại Q. Khi đó ta có: $d(O, (SAN)) = OQ = \frac{a}{2\sqrt{6}}$.

Tam giác SOP vuông tại O và OQ là đường cao. Suy ra: $\frac{1}{OQ^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{h^2}$ (1).

Ta có: $\cos\widehat{NAO} = \frac{AO^2 + AN^2 - ON^2}{2.AO.\text{AN}} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{5a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}{2.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin\widehat{NAO} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

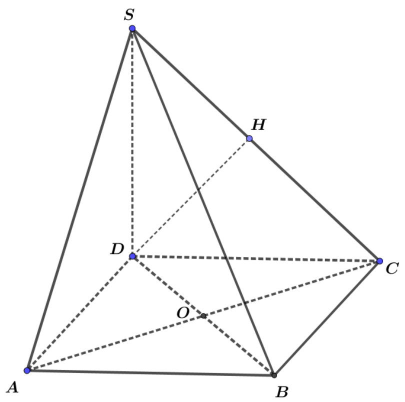
Suy ra $OP = AO.\sin\widehat{NAO} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$.

Thay $OP = \frac{a}{2\sqrt{5}}; OQ = \frac{a}{2\sqrt{6}}$ vào (1), ta được: $\frac{1}{\left(\frac{a}{2\sqrt{6}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{1}{h^2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}$.

Suy ra $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.h = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BA = BC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$ và $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. a^3. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.



Lời giải

Chọn D

Giả sử $SD \perp (ABC)$. Ta chứng minh: $ABCD$ là hình vuông.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB \perp SD \\ AB \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SDA) \Rightarrow AB \perp DA \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ.$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} BC \perp SD \\ BC \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DC \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ.$

Tứ giác $ABCD$ có: $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.Mà $BA = BC \Rightarrow ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$. Vì $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = d(A,(SBC)) = a\sqrt{2}$.

Kẻ $DH \perp SC$ tại H.Ta có: $BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DH$ .Mà $DH \perp SC$ $\Rightarrow DH \perp (SBC). \Rightarrow d(D,(SBC)) = DH = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SDC vuông tại D có: $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Rightarrow SD = a\sqrt{6}$. $\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SD = \frac{1}{3}.\frac{(a\sqrt{3})^2}{2}.a\sqrt{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ .là

Câu 21. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a, BD = 2a$ và cắt nhau tại *O*; hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Biết khoảng cách từ điểm *O* đến mặt phẳng (*SAB*) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo*a*.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

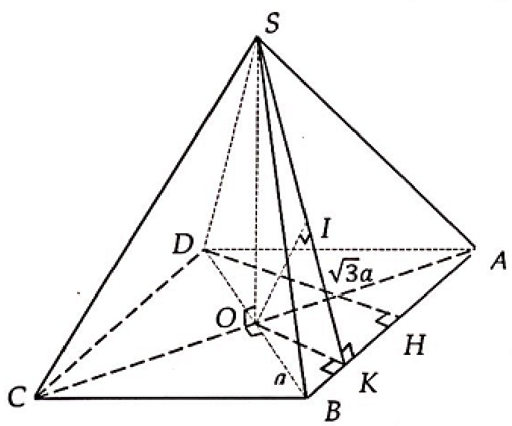
Lời giải

Chọn A

+Từ giả thiết $AC = 2a\sqrt{3}; BD = 2a$ và AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm *O* của mỗi đường chéo. Ta có tam giác *ABO* vuông tại *O* và $AO = a\sqrt{3}$; $BO = a$, do đó $ABD = 60^0$

Hay tam giác *ABD* đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*) nên giao tuyến của chúng là $SO \perp (ABCD)$.



+Do tam giác *ABD* đều nên với *H* là trung điểm của *AB*, *K* là trung điểm của *HB* ta có $DH \perp AB$ và $DH = a\sqrt{3}$; $OK // DH$ và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$.

+Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có $OI \perp SK$; $AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao $\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$

Diện tích đáy: $S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$;

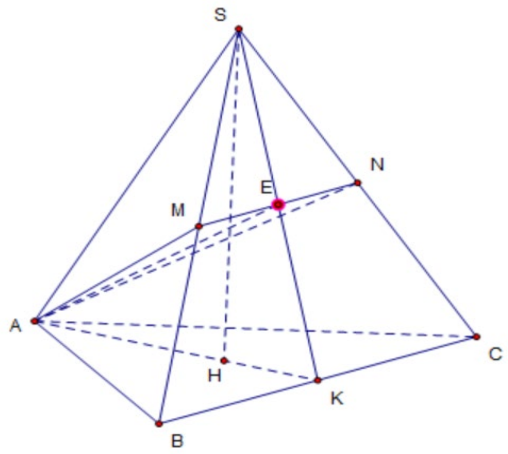
Đường cao của hình chóp $SO = \frac{a}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Câu 22. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Biết $(AMN) \perp (SBC)$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{26}}{24}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{13}}{18}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm MN, K là trung điểm BC, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Ta có: S,E,K thẳng hàng và A,H,K thẳng hàng.

Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AM = AN \Rightarrow$ tam giác AMN cân tại $A \Rightarrow AE \perp MN$

Ta có: $\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \\ AE \perp MN \\ AE \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC)$

$\Rightarrow AE \perp SK$

Ta có: $\frac{SE}{SK} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow E$ là trung điểm $SK \Rightarrow$ tam giác SAK cân tại A

$\Rightarrow AS = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

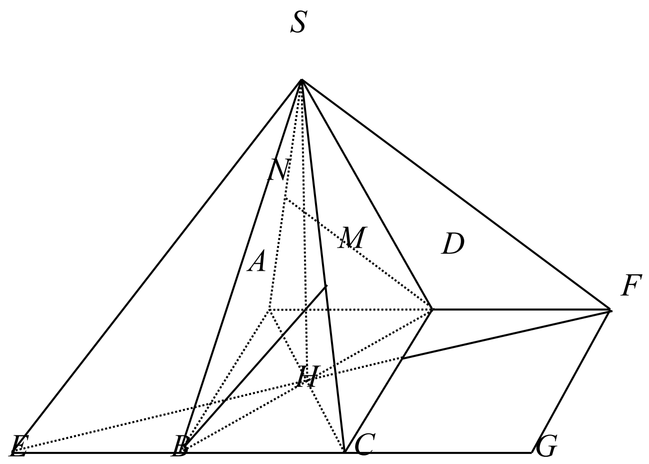
Suy ra: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

Câu 23. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB = 3a$, $AD = 2a$ và $\cos\widehat{BAD} = -\frac{1}{9}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $BM \perp DN$ với M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SA

A. $\dfrac{28a^3\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{7a^3\sqrt{5}}{9}$. **C.** $\dfrac{28a^3\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\dfrac{14a^3\sqrt{5}}{9}$.

Lời giải

Đáp án C



Gọi H là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta có

$$\begin{cases}(SAC)\perp(ABCD)\\(SBD)\perp(ABCD)\\(SAC)\cap(SBD=SH\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD).$$

Gọi E là điểm đối xứng của C qua B và F là điểm đối xứng của A qua D. Ta có

$$\begin{cases}BM\ //\ SE\\DN\ //\ SF\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{SE,SF}\right)=\left(\widehat{BM,DN}\right)=90^\circ.$$

Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành suy ra H là trung điểm của đoạn EF.

Gọi G là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDFG$. Xét tam giác EGF ta có

$$EF=\sqrt{GE^2+GF^2-2GE.GF.\cos\widehat{EGF}}=\sqrt{(6a)^2+(3a)^2-2.6a.3a.\left(-\frac{1}{9}\right)}=7a$$

Tam giác SEF vuông tại S và SH là đường trung tuyến nên $SH=\dfrac{EF}{2}=\dfrac{7a}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

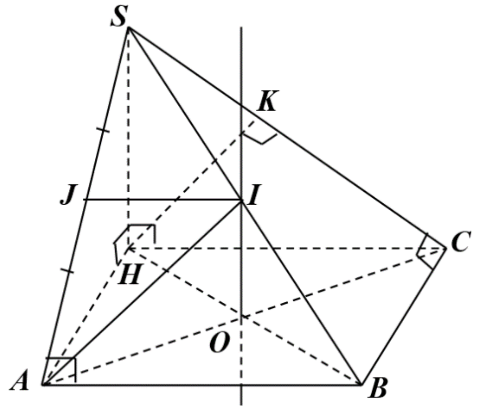
$$V=\frac{1}{3}AB.AD.\sin\widehat{BAD}.SH=\frac{1}{3}3a.2a.\frac{4\sqrt{5}}{9}.\frac{7a}{2}=\frac{28a^3\sqrt{5}}{9}.$$

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$ và khoảng cách từ điểm A đến (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$.

Tương tự $AH \perp AB$.

Và ΔABC vuông cân tại B nên $ABCH$ là hình vuông. Gọi $O = AC \cap BH$, O là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta hoàn toàn có $IJ \perp SA \Rightarrow IJ // AB \Rightarrow I$ là trung điểm SB, hay $I = d \cap SC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S.ABC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}$; $IJ = \dfrac{\text{AB}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AH // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC)) = HK$.

(K là hình chiếu của H lên SC và $BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC)$).

$\Rightarrow HK = a\sqrt{2}$. Tam giác SHC vuông tại H $\Rightarrow SH = a\sqrt{6}$.

Tam giác SHA vuông tại H $\Rightarrow SA = 3a$.

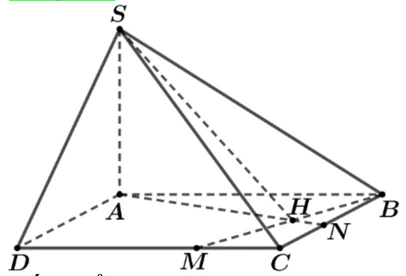
$JA = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD, thể tích khối chóp $S.ABH$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải

Chọn C



Lấy điểm $N \in BC$ sao cho $BN = CM$. Dễ dàng chứng minh được $AN \perp BM$.

Gọi $H = AN \cap BM$. Ta có $\begin{cases} BM \perp AN \\ BM \perp SA \end{cases} \rightarrow BM \perp (SAH) \rightarrow BM \perp SH$ nên H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM.

Đặt $BN = CM = x,\ 0 < x \le a$. Trong tam giác vuông ABN có BH là đường cao, suy ra

$BH = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $AH = \dfrac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Ta có $S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2}AH.BH = \frac{a^3}{2}.\frac{x}{x^2+a^2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABH} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABH}.SA = \frac{a^4\sqrt{2}}{6}.\frac{x}{x^2+a^2} \overset{\text{Cosi}}{\leq} \frac{a^4\sqrt{2}}{6}.\frac{x}{2ax} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

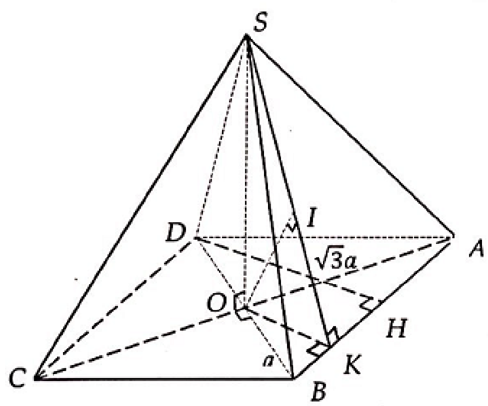
Dấu "=" xảy ra khi $x = a$ hay $N \equiv C,\ M \equiv D$. **Chọn C**

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi; hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a,\ BD = 2a$ và cắt nhau tại O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



+Từ giả thiết $AC = 2\sqrt{3}a,\ BD = 2a$ và $AC,\ BD$ vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo. Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3},\ BO = a$, do đó $\widehat{ABD} = 60^o$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của chúng là $SO \perp (ABCD)$.

+Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và $DH = a\sqrt{3},\ OK \,//\, DH$ và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$.

+Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có $OI \perp SK,\ AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao $\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$

Diện tích đáy: $S_{ABCD} = 4S_{ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$.

Đường cao của hình chóp $SO = \frac{a}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Biết tam giác SBA vuông tại B, tam giác SCA vuông tại C và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng $\frac{3a}{\sqrt{13}}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

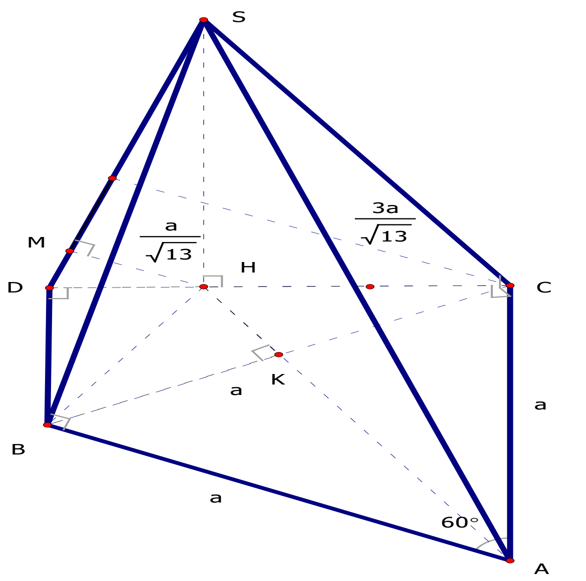
Chọn B

Giả sử AK vuông góc với BC tại $K \Rightarrow KB = KC$.

Ta có $\Delta SAC = \Delta SAB \Rightarrow SB = SC$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$ $\Rightarrow HB = HC$.

Ta có $AC \perp HC; AB \perp HB \Rightarrow$ $ABHC$ nội tiếp đường tròn đường kính HA.



Suy ra H, K, A thẳng hàng.

Kẻ BD vuông góc với HC tại D. Gọi $HM \perp SD$ tại $M \Rightarrow d(H; mp(SBD)) = HM$.

Ta có $BD // AC \Rightarrow d(SB; AC) = d(AC; mp(SBD)) = d(C; mp(SBD))$

Ta có $\widehat{BHC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{KHC} = 60^o \Rightarrow HC = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Ta có $\widehat{BHD} = 60^o \Rightarrow HD = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

Ta có $\dfrac{d(C; mp(SBD))}{d(H; mp(SBD))} = \dfrac{CD}{HD} = 3 \Rightarrow d(H; mp(SDC)) = \dfrac{1}{3} d(C; mp(SDC)) = \dfrac{a}{\sqrt{13}} = HM$

Ta có $\dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HD^2} \Rightarrow SH = a$.

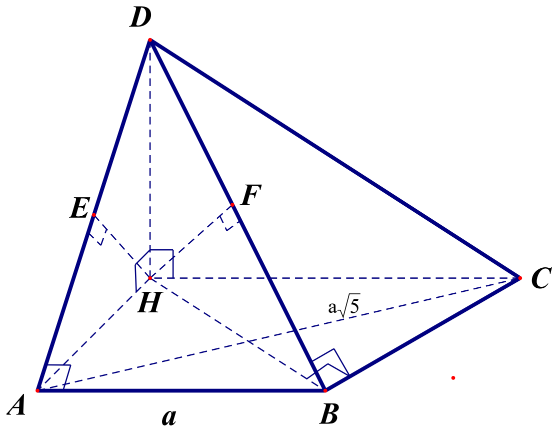
Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a.a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3.\sqrt{3}}{12}$.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng 30°. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác AHB có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 45^{\circ} \Rightarrow \Delta HAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BA.BC.\sin\widehat{CBA} = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp DA \\ HF \perp DB \end{cases} \Rightarrow HE \perp (DAB)$ và $HF \perp (DBC)$.

Suy ra $\widehat{((DBA),(DBC))} = \widehat{(HE,HF)} = \widehat{EHF}$ và tam giác HEF vuông tại E.

Đặt $DH = x$, khi đó $HE = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $HF = \frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}$.

Suy ra $\cos\widehat{EHF} = \frac{HE}{HF} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{x^2+2a^2}}{\sqrt{2x^2+2a^2}} \Rightarrow x = a$.

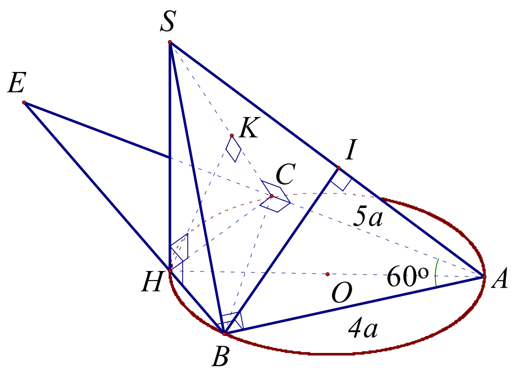
Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.DH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{6}$.

Câu 29. Cho khối chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác có $AB = 4a$, $AC = 5a$, $\widehat{BAC} = 60^0$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^0$, góc giữa (SAB) và (SAC) bằng 60^0. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

A. $\frac{20\sqrt{39}a^3}{13}$. **B.** $\frac{10\sqrt{13}a^3}{13}$. **C.** $\frac{20\sqrt{13}a^3}{13}$. **D.** $\frac{10\sqrt{39}a^3}{13}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC}} = \sqrt{(4a)^2 + (5a)^2 - 2.4a.5a.\cos 60^0} = a\sqrt{21}$.

Từ đó suy ra tam giác ABC là tam giác nhọn và có bán kính đường tròn ngoại tiếp là

$R=\dfrac{BC}{2\sin\widehat{BAC}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{2\sin 60^0}=a\sqrt{7}$.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó ta có $\begin{cases}SH\perp AB\\ SB\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SHB)\Rightarrow AB\perp HB$. Tương tự $AC\perp HC$.

Từ đó suy ra $ABHC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $HA=2R=2\sqrt{7}a$.

Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B,H trên SA và SC. Khi đó $HK\perp(SAC)$.

Gọi E là giao điểm của BH và AC. Ta có $BE=BA.\tan\widehat{BAC}=4a.\tan 60^0=4\sqrt{3}a$.

Lại có $BH=\sqrt{AH^2-AB^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{7}a\right)^2-(4a)^2}=2\sqrt{3}a$.

$CH=\sqrt{AH^2-AC^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{7}a\right)^2-(5a)^2}=a\sqrt{3}$.

Suy ra $HE=BE-BH=4\sqrt{3}a-2\sqrt{3}a=2\sqrt{3}a$.

Đặt $SH=x>0$, ta có $SB=\sqrt{SH^2+BH^2}=\sqrt{x^2+12a^2}$

$\Rightarrow d(B,SA)=BI=\dfrac{SB.AB}{\sqrt{SB^2+AB^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+12a^2}.4a}{\sqrt{x^2+28a^2}}$.

$d(B;(SAC))=\dfrac{BE}{HE}d(H,(SAC))=2.HK=2\dfrac{SH.CH}{\sqrt{SH^2+CH^2}}=2\dfrac{x.a\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3a^2}}$

Gọi góc giữa (SAB) và (SAC) là φ.

Ta có $\sin\varphi=\dfrac{d(B,(SAC))}{d(B,SA)}=\dfrac{\sqrt{3}x\sqrt{x^2+28a^2}}{2\sqrt{x^2+3a^2}.\sqrt{x^2+12a^2}}$

Vì $\varphi=60^0$ nên $\dfrac{\sqrt{3}x\sqrt{x^2+28a^2}}{2\sqrt{x^2+3a^2}.\sqrt{x^2+12a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+28a^2}=\sqrt{x^2+3a^2}.\sqrt{x^2+12a^2}$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+28a^2\right)=\left(x^2+3a^2\right)\left(x^2+12a^2\right)\Leftrightarrow 13x^2=36a^2\Leftrightarrow x=\dfrac{6a}{\sqrt{13}}$

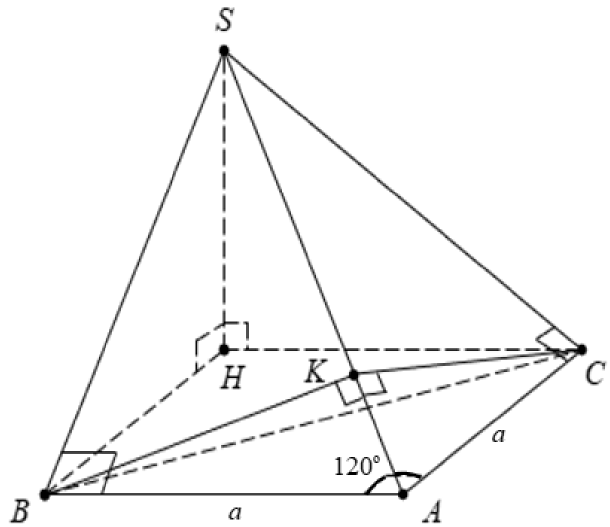
Khi đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}.SH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}4a.5a.\sin 60^0.\dfrac{6a}{\sqrt{13}}=\dfrac{10\sqrt{39}a^3}{13}$.

Câu 30. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=a$, $\widehat{BAC}=120°,\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90°$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC). Khi $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$ thì thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $SH \perp (ABC), H \in (ABC)$ suy ra $SH \perp AB$ và $SH \perp AC$.

Khi đó ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ SB \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBH) \Rightarrow AB \perp BH$.

Chứng minh tương tự ta có $AC \perp CH$ suy ra tứ giác $ABHC$ nội tiếp đường tròn đường kính AH. Do đó góc BHC bằng $60°$.

Dễ thấy $\Delta AHB = \Delta AHC \Rightarrow HB = HC$ nên ΔHBC đều.

ΔABC cân tại A có $AB = a, \widehat{BAC} = 120°$ suy ra $BC^2 = 3a^2$.

Do đó $HB^2 = HC^2 = BC^2 = 3a^2$.

Dễ thấy $\Delta SHB = \Delta SHC \Rightarrow SB = SC$ nên $\Delta SAB = \Delta SAC$.

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $BK \perp SA, (K \in SA)$.

Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $CK_1 \perp SA, (K_1 \in SA)$.

Xét hai tam giác vuông ΔKAB và ΔK_1AC có $AB = AC$, $\widehat{BAK} = \widehat{CAK_1}$ (vì $\Delta SAB = \Delta SAC$) suy ra $\Delta KAB = \Delta K_1AC \Rightarrow AK = AK_1$ mà K và K_1 nằm giữa S và A nên $K \equiv K_1$.

Từ đó ta có $CK \perp SA$ và $BK = CK$.

Do đó $\cos\alpha = \left|\cos\widehat{BKC}\right| \Leftrightarrow \left|\dfrac{BK^2 + CK^2 - BC^2}{2BK.CK}\right| = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2BK^2 - BC^2}{2BK^2}\right| = \dfrac{3}{4}\ (1)$.

Đặt $SH = x, (x > 0)$.

Xét ΔSHB có $SB^2 = SH^2 + HB^2 = 3a^2 + x^2$.

Xét ΔSAB vuông tại B có $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BS^2} \Rightarrow \dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2 + x^2} \Rightarrow BK^2 = \dfrac{a^2(3a^2 + x^2)}{4a^2 + x^2}$.

Thay vào (1) ta có $\left|\dfrac{\dfrac{2a^2(3a^2 + x^2)}{4a^2 + x^2} - 3a^2}{\dfrac{2a^2(3a^2 + x^2)}{4a^2 + x^2}}\right| = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$.

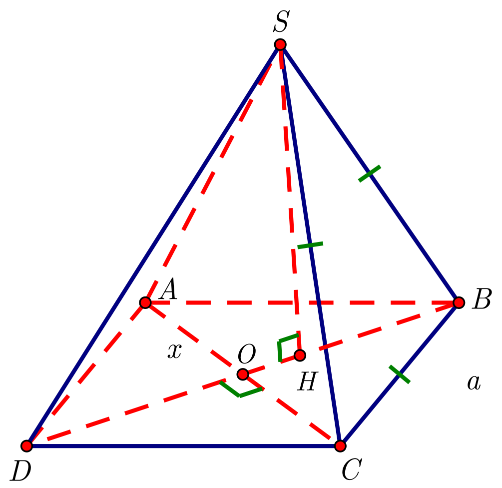
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\dfrac{1}{3}.SH.\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.a^2\sin 120° = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu 31. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $SA = SB = SC = a$, Cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Khi SD thay đổi thi AC thay đổi. Đặt $AC = x$. Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $SA = SB = SC$ nên chân đường cao SH trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow H \in BO$.

Ta có $OB = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2 - x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}OB.AC = \frac{1}{2}x.\frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$$

$$HB = R = \frac{a.a.x}{4S_{ABC}} = \frac{a^2x}{4.\dfrac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.$$

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4a^2 - x^2}} = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

$$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$$

$$= \frac{1}{3}a\left(x.\sqrt{3a^2 - x^2}\right) \le \frac{1}{3}a\left(\frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2}\right) = \frac{a^3}{2}$$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ **có** $ABCD$ là hình thang vuông tại đỉnh A và ***D***.

Biết độ dài $AB = 4a, AD = 3a, CD = 5a$ và tam giác SBC đều và góc giữa mặt phẳng SBC và $(ABCD)$ bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ tính theo a bằng:

A. $\dfrac{27\sqrt{10}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{27\sqrt{10}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{27a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{27a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

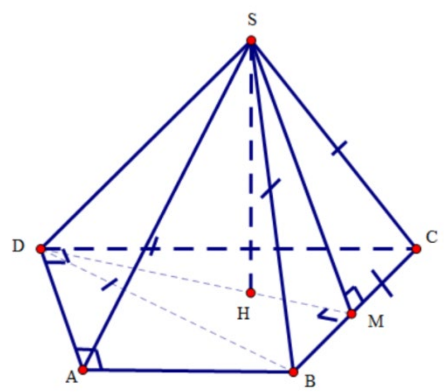
Ta có $BD = CD = 5a$ nên tam giác cân BCD **tại *D***

Kẻ $DM \perp BC$, mà tam giác SBC đều,nên $SM \perp BC$ Suy ra $(SDM) \perp BC \Rightarrow (SDM) \perp (ABCD)$

Kẻ $SH \perp DM \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có góc giữa mặt phẳng SBC và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SMH} = 60^0$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.SM.S\text{in}\,60^0.\left(\frac{AB + CD}{2}\right).AD = \frac{27\sqrt{10}a^3}{8}$$



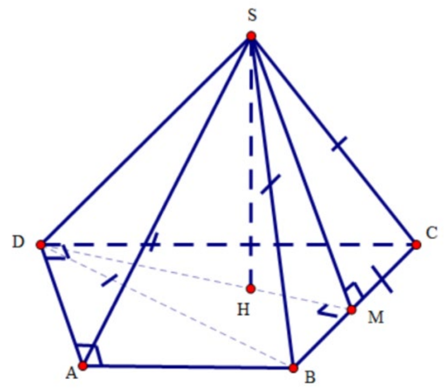
Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ **có** $ABCD$ là hình thang vuông tại đỉnh A và ***D.***

Biết độ dài $AB=4a, AD=3a, CD=5a$ và tam giác SBC đều và góc giữa mặt phẳng SBC và $(ABCD)$ bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ tính theo a bằng:

A. $\dfrac{27\sqrt{10}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{27\sqrt{10}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{27a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{27a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $BD=CD=5a$ nên tam giác cân BCD **tại** D

Kẻ $DM\perp BC$, mà tam giác SBC đều, nên $SM\perp BC$ Suy ra $(SDM)\perp BC \Rightarrow (SDM)\perp(ABCD)$

Kẻ $SH\perp DM \Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Ta có góc giữa mặt phẳng SBC và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SMH}=60^0$

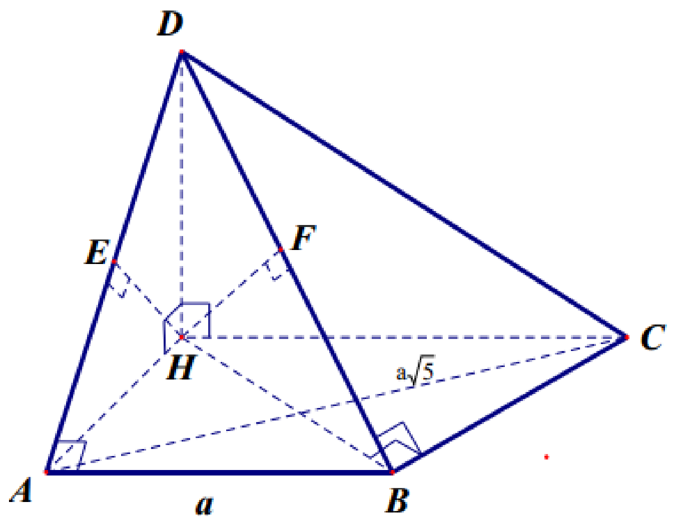
$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.SM.S\text{in}\,60^0.\left(\frac{AB+CD}{2}\right).AD=\frac{27\sqrt{10}a^3}{8}$

Câu 34. Cho tứ diện ABCD có $DAB=CBD=90^O; AB=a; AC=a\sqrt{5}; ABC=135^o$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABD),(BCD)$ bằng 30^o. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $DH\perp(ABC)$

Ta có $\begin{cases}BA\perp DA\\BA\perp DH\end{cases}\Rightarrow BA\perp AH$.

Tương tự $\begin{cases}BC\perp DB\\BC\perp DH\end{cases}\Rightarrow BC\perp BH$

Tam giác AHB có $AB=a, ABH=45^o \Rightarrow \Delta HAB$ vuông cân tại $A\Rightarrow AH=AB=a$

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC=a\sqrt{2}$.

Vậy

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.BA.BC.\sin CBA=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}$$

Dựng $\begin{cases}HE\perp DA\\HF\perp DB\end{cases}\Rightarrow HE\perp(DAB)$ và $HF\perp(DBC)$.

Suy ra $DBA, DBC = HE, HF = EHF$ và tam giác EHF vuông tại E

Đặt $DH=x$, khi đó $HE=\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}, HF=\dfrac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}$

Suy ra $\cos EHF = \frac{HE}{HF} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{x^2+2a^2}}{\sqrt{2x^2+2a^2}} \Rightarrow x = a$

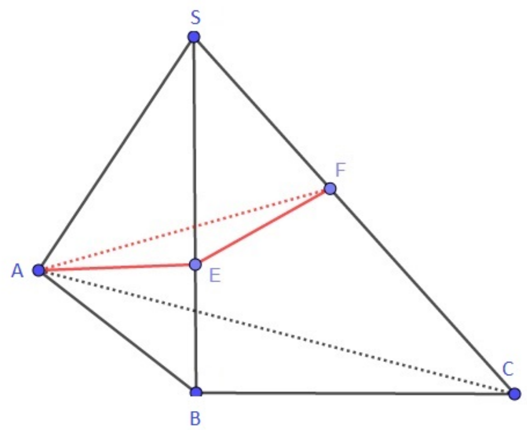
Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.DH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{6}$.

Câu 35. Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^0$, $SA = a, SB = 2a, SC = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Lấy $E \in SB, F \in SC$, thỏa mãn: $SE = SF = a$. Suy ra $\frac{SE}{SB} = \frac{1}{2}, \frac{SF}{SC} = \frac{1}{4}$.

Theo giả thiết $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^0$, suy ra $S.AEF$ là khối tứ diện đều cạnh a.

Suy ra $V_{S.AEF} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. Mặt khác: $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.ABC} = 8V_{S.AEF} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tròn xoay có đỉnh là trung điểm của OO' và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$, V_2 là thể tích khối trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

Câu 37. Đặt cạnh của hình lập phương làa.

Khối nón tròn xoay có đỉnh là trung điểm của OO' và đá là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ có chiều cao $h = \frac{a}{2}$ bán kính đáy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{12}$.

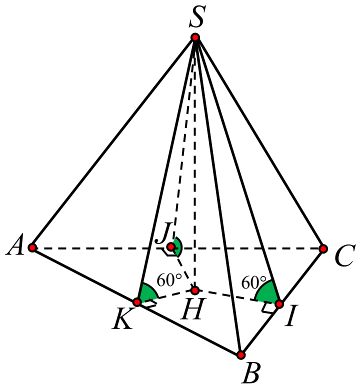
Khối trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có chiều cao $h = a$ bán kính đáy $r = \frac{a}{2} \Rightarrow V_1 = \pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{4}$. Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$, có $AB=5(\text{cm})$, $BC=6(\text{cm})$, $AC=7(\text{cm})$. Các mặt bên tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp bằng

A. $\dfrac{105\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^3)$. **B.** $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^3)$. **C.** $24\sqrt{3}(\text{cm}^3)$. **D.** $8\sqrt{3}(\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) và I, J, K là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh BC, CA, AB

Ta có $SH\perp(ABC)$; $HI\perp BC$, $HJ\perp CA$, $HK\perp AB$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SIH}$; $\left(\widehat{(SCA),(ABC)}\right)=\widehat{SJH}$, $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right)=\widehat{SKH}$.

Mà các mặt bên tạo với đáy 1 góc $60°$ nên $\widehat{SIH}=\widehat{SJH}=\widehat{SKH}=60°$.

$\Rightarrow \Delta SHI=\Delta SHJ=\Delta SHK$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HI=HJ=HK$ $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Mặt khác $S_{ABC}=\sqrt{p(p-BC)(p-CA)(p-AB)}$, với $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=9$

$\Rightarrow S_{ABC}=6\sqrt{6}(\text{cm}^2)$.

Mà $S_{ABC}=pr\Rightarrow r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow HI=HJ=HK=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác SHI vuông tại H có $SH=HI.\tan 60°=2\sqrt{2}$ (cm).

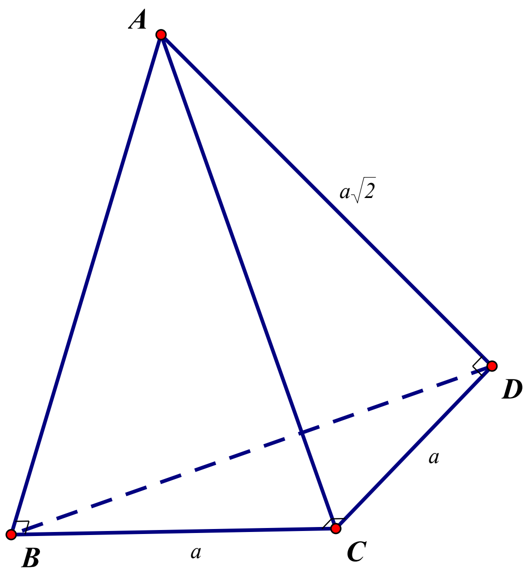
Khi đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH=8\sqrt{3}(\text{cm}^3)$.

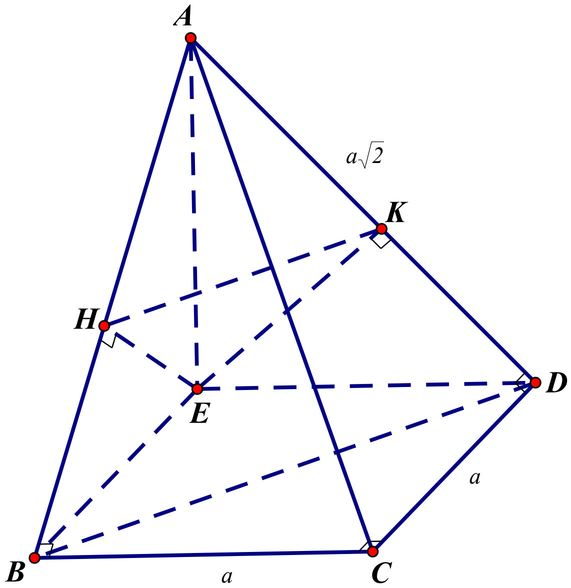
Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{CDA}=90°$, $BC=CD=a$, $AD=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A





Gọi E là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD).

Kết hợp đề bài $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp AE \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp BE$; $\left.\begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp AE \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp ED$ và $BC = CD = a$.

Suy ra tứ giác $BCDE$ là hình vuông cạnh a.

Khi đó $AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = a$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của E lên $(ABC),(ACD)$ thì $EH \perp (ABC), EK \perp (ACD)$ nên góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) là góc (EH, EK)

Nhận xét 2 tam giác SEB và SED là vuông cân tại E nên $EH = EK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $HK = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra tam giác EHK đều.

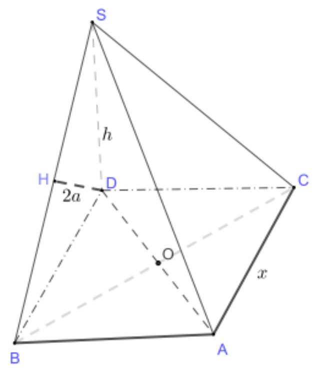
Vậy số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) là $60°$.

Câu 40. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Khoảng cách từ C đến (SAB) bằng 2a. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất bằng

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là trung điểm của BC. Chọn D là điểm đối xứng với A qua O

Do ABC là tam giác vuông cân tại A nên tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Do $\begin{cases} AB \perp BD \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD$. Tương tự $AC \perp SD$. Vậy hình chóp $S.ABCD$ có đường cao là SD

Do $DC//(SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = d(D,(SAB)) = 2a$. Dựng $DH \perp SB \Rightarrow DH \perp (SAB)(H \in SB)$. Ta có $d(C,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DH = 2a$.

Đặt $AB = x; \quad SD = h \quad (x > 0; h > 0) \Rightarrow \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{h^2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{4a^2x^2}{\sqrt{h^2 - 4a^2}}$

Đặt $SD = x(x \rangle 0)$; $SC = SB = \sqrt{a^2 + x^2}$; $BI = CI = \dfrac{a\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}h.x^2 = \dfrac{2}{3}a^2 \dfrac{h^3}{h^2 - 4a^2}$

Đặt $f(h) = \dfrac{h^3}{h^2 - 4a^2} \Rightarrow f'(h) = \dfrac{h^2(h^2 - 12a^2)}{(h^2 - 4a^2)^2} \Rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 2a\sqrt{3} \\ h = -2a\sqrt{3} \quad (loai) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

h	0		$2a\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(h)'$		$-$	0	$+$	
$f(h)$	$\searrow$		$3a\sqrt{3}$		$\nearrow$

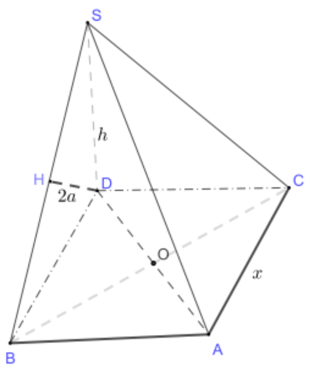
Vậy hình chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất bằng $2a^3\sqrt{3}$. Đáp án A

Câu 41. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Khoảng cách từ C đến (SAB) bằng 2a. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất bằng

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là trung điểm của BC . Chọn D là điểm đối xứng với A qua O

Do ABC là tam giác vuông cân tại A nên tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Do $\begin{cases} AB \perp BD \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD$. Tương tự $AC \perp SD$. Vậy hình chóp $S.ABCD$ có đường cao là SD

Do $DC//(SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = d(D,(SAB)) = 2a$. Dựng $DH \perp SB \Rightarrow DH \perp (SAB)(H \in SB)$. Ta có $d(C,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DH = 2a$.

Đặt $AB = x;\quad SD = h\quad (x > 0; h > 0) \Rightarrow \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{h^2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{4a^2x^2}{\sqrt{h^2 - 4a^2}}$

Đặt $SD = x(x\rangle 0)$; $SC = SB = \sqrt{a^2 + x^2}$; $BI = CI = \dfrac{a\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}h.x^2 = \dfrac{2}{3}a^2\dfrac{h^3}{h^2 - 4a^2}$

Đặt $f(h) = \dfrac{h^3}{h^2 - 4a^2} \Rightarrow f'(h) = \dfrac{h^2(h^2 - 12a^2)}{(h^2 - 4a^2)^2} \Rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 2a\sqrt{3} \\ h = -2a\sqrt{3}\quad (loai) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

h	0		$2a\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(h)'$		$-$	0	$+$	
$f(h)$		$\searrow$	$3a\sqrt{3}$	$\nearrow$	

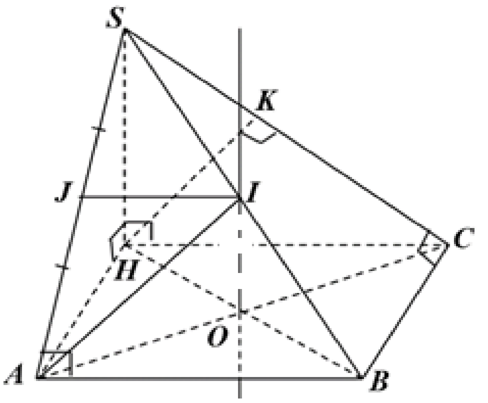
Vậy hình chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất bằng $2a^3\sqrt{3}$. Đáp án A

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ và khoảng cách từ điểm A đến (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$.

Tương tự $AH \perp AB$.

Và ΔABC vuông cân tại B nên $ABCH$ là hình vuông. Gọi $O = AC \cap BH$, O là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta hoàn toàn có $IJ \perp SA \Rightarrow IJ // AB \Rightarrow I$ là trung điểm SB, hay $I = d \cap SC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S.ABC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}$; $IJ = \dfrac{\text{AB}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AH // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC)) = HK$.

(K là hình chiếu của H lên SC và $BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC)$).

$\Rightarrow HK = a\sqrt{2}$. Tam giác SHC vuông tại H $\Rightarrow SH = a\sqrt{6}$.

Tam giác SHA vuông tại H $\Rightarrow SA = 3a$.

$JA = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{3a}{2}$ $\Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2$.

Câu 43. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng $60°$, tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của ΔABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\dfrac{13a^3}{108}$. **B.** $\dfrac{7a^3}{106}$. **C.** $\dfrac{15a^3}{108}$. **D.** $\dfrac{9a^3}{208}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M, N là trung điểm của AB, AC

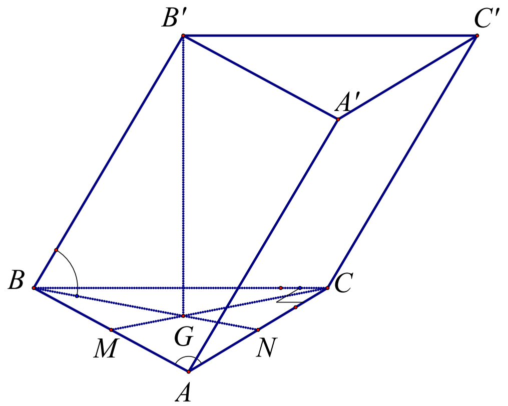
và G là trọng tâm của ΔABC.

$B'G \perp (ABC)$ $\Rightarrow \left(\widehat{BB',(ABC)}\right) = \widehat{B'BG} = 60^0$.

$V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.B'G = \dfrac{1}{6}.AC.BC.B'G$

Xét $\Delta B'BG$ vuông tại G, có $\widehat{B'BG} = 60^0$

60°



60°

$\Rightarrow B'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (nửa tam giác đều)

Đặt $AB = 2x$. Trong ΔABC vuông tại C có $\widehat{BAC} = 60^0$

$\Rightarrow$ tam giác ABC là nữa tam giác đều $\Rightarrow AC = \dfrac{AB}{2} = x,\ BC = x\sqrt{3}$

Do G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow BN = \dfrac{3}{2}BG = \dfrac{3a}{4}$.

Trong ΔBNC vuông tại C: $BN^2 = NC^2 + BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16}=\frac{x^2}{4}+3x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{9a^2}{52} \Rightarrow x=\frac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AC=\dfrac{3a}{2\sqrt{13}} \\ BC=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

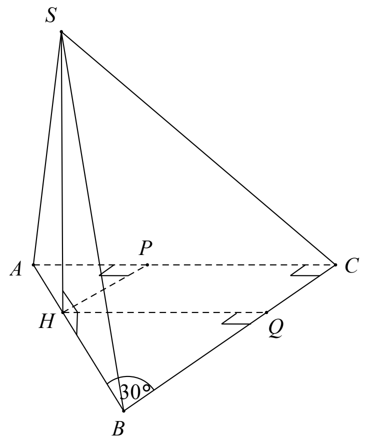
Vậy, $V_{A'ABC}=\frac{1}{6}.\frac{3a}{2\sqrt{13}}.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{9a^3}{208}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy(ABC), tam giác ABC vuông tại C có $AC=a,\widehat{ABC}=30°$. Mặt bên (SAC) và (SBC) cùng tạo với đáy góc bằng nhau và bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a là:

A. $V=\dfrac{a^3}{2(1+\sqrt{5})}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2(1+\sqrt{3})}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2(1+\sqrt{2})}$.

Lời giải

Chọn D



+ Theo đề $(SAB)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AB. Dựng $SH\perp AB \Rightarrow SH\perp(SAB)$.

+ ΔABC vuông nên $\tan 30°=\dfrac{AC}{BC} \Rightarrow BC=a\sqrt{3}$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.BC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (1) .

+ Dựng $HP\perp AC, HQ\perp BC \Rightarrow \widehat{SPH}=\widehat{SQH}=\widehat{((SAC),(ABC))}=\widehat{((SBC),(ABC))}=60^0$.

$\Rightarrow \Delta SPH=\Delta SQH \Rightarrow HP=HQ$.

$\Rightarrow HPCQ$ là hình vuông. Đặt $HQ=x, 0<x<a\sqrt{3}$ $\Rightarrow QB=a\sqrt{3}-x$.

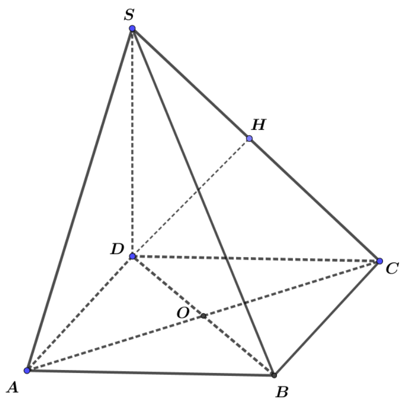
ΔHQB vuông nên $\tan 60°=\dfrac{QB}{HQ} \Rightarrow x\sqrt{3}=a\sqrt{3}-x \Rightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=HQ$.

ΔSHQ vuông nên $\tan 60°=\dfrac{SH}{HQ} \Rightarrow SH=\dfrac{3a}{\sqrt{3}+1}$ (2) .

Từ (1) và (2): $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BA=BC=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$ và $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. a^3. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.



Lời giải

Chọn D

Giả sử $SD \perp (ABC)$. Ta chứng minh: $ABCD$ là hình vuông.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp SD \\ AB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SDA) \Rightarrow AB \perp DA \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} BC \perp SD \\ BC \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DC \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ có: $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.Mà $BA = BC \Rightarrow ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$. Vì $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = d(A,(SBC)) = a\sqrt{2}$.

Kẻ $DH \perp SC$ tại H.Ta có: $BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DH$ .Mà $DH \perp SC$ $\Rightarrow DH \perp (SBC) . \Rightarrow d(D,(SBC)) = DH = a\sqrt{2}$.

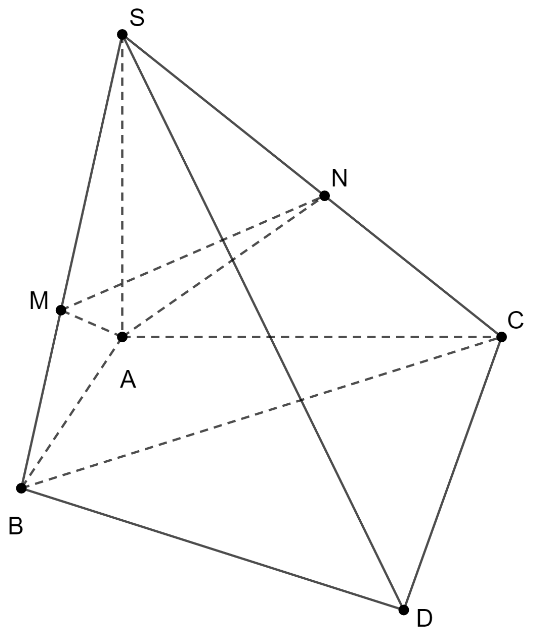
Xét tam giác SDC vuông tại D có: $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Rightarrow SD = a\sqrt{6} . \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SD = \frac{1}{3}.\frac{(a\sqrt{3})^2}{2}.a\sqrt{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ .là

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA = BC$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB và SC lần lượt là M và N. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $15°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính là AD.
Khi đó tam giác ABD vuông tại B $\Rightarrow AB \perp BD$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{BD} \perp \mathrm{AM}$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AM \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$.

Tương tự, ta chứng minh được $AN \perp SD$.

Do đó $SD \perp (AMN)$ suy ra $\widehat{((ABC),(AMN))} = \widehat{(SA,SD)} = \widehat{ASD}$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA}$.

Với $AD = 2R_{\Delta ABC} = 2\dfrac{BC}{\sin 120°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}SA$.

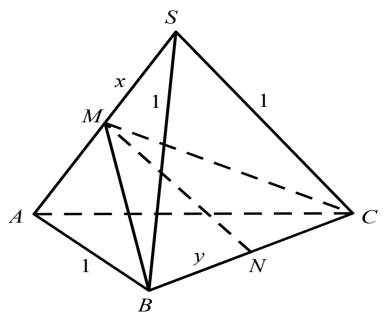
Do đó $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30° \Rightarrow \widehat{((ABC),(AMN))} = 30°$.

Câu 47. Cho x, y là các số thực dương. Xét khối chóp $S.ABC$ có $SA = x$, $BC = y$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi x, y thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Vì tam giác SAB, SAC lần lượt cân tại B và C nên $BM \perp SA, CM \perp SA$. Suy ra, $SA \perp (BMC)$.

Ta có: $V_{S.MBC}=V_{S.AMBC}$ nên $V_{S.ABC}=V_{S.MBC}+V_{S.AMBC}=2V_{S.MBC}=\dfrac{2}{3}.SM.S_{\Delta MBC}$.

Ta có: $BM=CM=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$, tam giác BCM cân tại M nên $MN=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}}$.

$$V_{S.ABC}=\frac{2}{3}.\frac{x}{2}.\frac{1}{2}y\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^2}{4}.\frac{y^2}{4}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}.\frac{y^2}{4}.\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)}$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}.\dfrac{y^2}{4}\left(1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}\right)\leq\dfrac{1}{27}$ dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

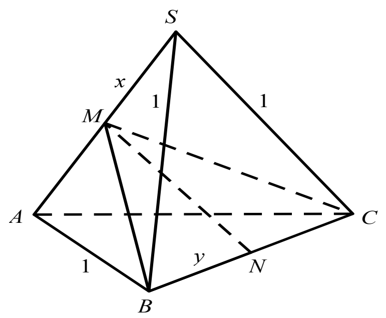
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất bằng $V_{S.ABC}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{\sqrt{27}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$

Câu 48. Cho x, y là các số thực dương. Xét khối chóp $S.ABC$ có $SA=x$, $BC=y$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi x, y thay đổi, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Vì tam giác SAB, SAC lần lượt cân tại B và C nên $BM\perp SA, CM\perp SA$. Suy ra, $SA\perp(BMC)$.

Ta có: $V_{S.MBC}=V_{S.AMBC}$ nên $V_{S.ABC}=V_{S.MBC}+V_{S.AMBC}=2V_{S.MBC}=\dfrac{2}{3}.SM.S_{\Delta MBC}$.

Ta có: $BM=CM=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$, tam giác BCM cân tại M nên $MN=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}}$.

$$V_{S.ABC}=\frac{2}{3}.\frac{x}{2}.\frac{1}{2}y\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^2}{4}.\frac{y^2}{4}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}.\frac{y^2}{4}.\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)}$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}.\dfrac{y^2}{4}\left(1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}\right)\leq\dfrac{1}{27}$ dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

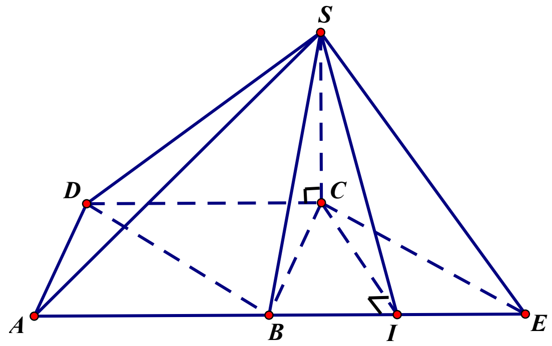
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất bằng $V_{S.ABC}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{\sqrt{27}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 120°$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $V = a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E là điểm đối xứng của A qua B, I là trung điểm của BE.

Ta có ΔBCE đều

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BE \perp IC \\ SC \perp (ABCD) \Rightarrow BE \perp SC\end{array}\right\} \Rightarrow BE \perp (SIC) \Rightarrow BE \perp SI$$

Do đó $((SAB),(ABCD)) = \widehat{SIC} = 45° \Rightarrow SC = IC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

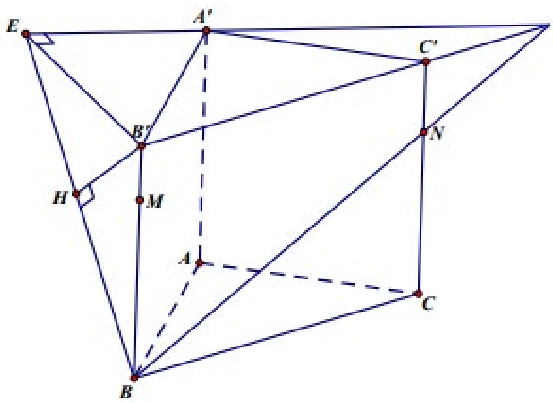
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SC = \dfrac{1}{3}.2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu 50. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1, AC = 2, AA' = 3, \widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M, CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BN)$?

A. $\dfrac{9\sqrt{138}}{184}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{138}}{46}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{138}}{46}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC\cos\widehat{BAC} = 1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos 120^\circ = 7$. Suy ra $BC = \sqrt{7}$.

Ta cũng có $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \dfrac{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2^2}{2.1.\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$, suy ra $\cos\widehat{A'B'C} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Gọi $D = BN \cap B'C'$ suy ra $\dfrac{DC'}{DB'} = \dfrac{C'N}{B'B} = \dfrac{1}{3}$, nên $DB' = \dfrac{3}{2}B'C' = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

Từ đó, ta có

$$A'D^2 = A'B'^2 + B'D^2 - 2A'B'.B'D.\cos\widehat{A'B'D} = 1^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2.1.\frac{3\sqrt{7}}{2}.\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{43}{4}.$$

Hay $A'D = \dfrac{\sqrt{43}}{2}$.

Kẻ $B'E \perp A'D$ và $B'H \perp BE$. suy ra $B'H \perp (A'BN)$, do đó $d(B';(A'BN)) = B'H$.

Từ $\cos\widehat{A'B'C} = \dfrac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\widehat{A'B'C} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Do đó $S_{A'B'D} = \dfrac{1}{2}.A'B'.B'D.\sin\widehat{A'B'D} = \dfrac{1}{2}.1.\dfrac{3\sqrt{7}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

$$B'E = \frac{2S_{A'B'D}}{A'D} = \frac{2.\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{43}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\right)^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{46}{27} \Rightarrow B'H = \sqrt{\frac{27}{46}}.$$

Từ $BM = 3B'M$ suy ra

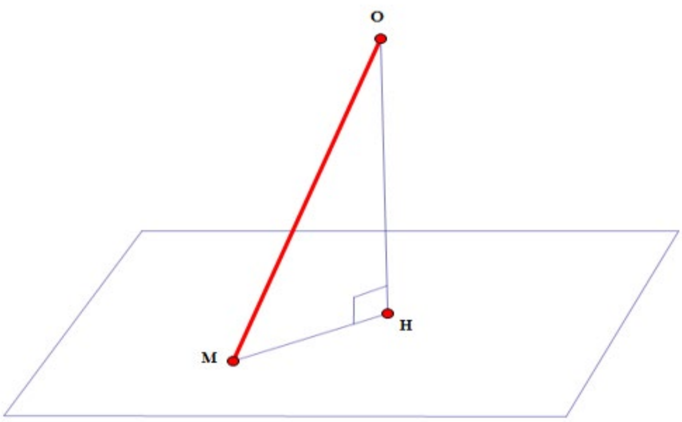
$$d(M;(A'BN)) = \frac{3}{4}d(B';(A'BN)) = \frac{3}{4}.B'H = \frac{3}{4}.\sqrt{\frac{27}{46}} = \frac{9\sqrt{138}}{184}.$$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C. Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

A. $\dfrac{1372}{9}$. **B.** $\dfrac{686}{9}$. **C.** $\dfrac{524}{3}$. **D.** $\dfrac{343}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của O lên mp(P)

Tam giác OHM có $OH \le OM$, $\forall H$.

Khi đó $d(O,(P)) = OH$ lớn nhất khi $M \equiv H$, hay $OM \perp (P)$.

Mp(P) đi qua M và nhận $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$ làm véc tơ pháp tuyến,

phương trình (P): $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

(P) cắt Ox ; Oy ; Oz lần lượt tại $A(14;0;0)$, $B(0;7;0)$, $C\left(0;0;\frac{14}{3}\right)$

Thể tích $V_{O.ABC} = \frac{868}{9}$.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$?

A. $V = \frac{1}{12}a^3$. **B.** $V = \frac{1}{6}a^3$. **C.** $V = \frac{1}{8}a^3$. **D.** $V = \frac{1}{36}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$

$V_{NDAC} = \frac{1}{3}NH.S_{\Delta DAC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}a.\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{a^3}{18}$

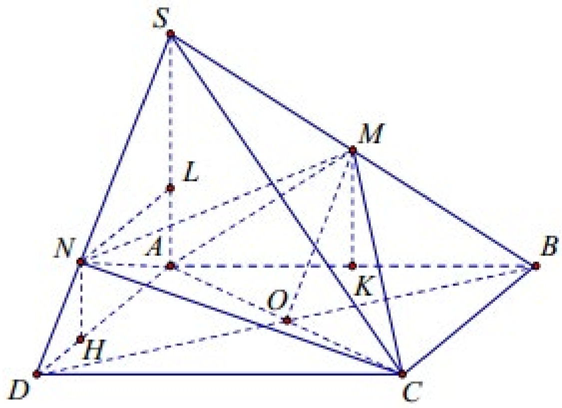
$V_{MABC} = \frac{1}{3}MK.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{a^3}{12}$

$\frac{1}{3}d\left(A,(SMN)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{a^3}{18}$

Suy ra $V_{NSAM} = \frac{1}{3}NL.S_{\Delta SAM} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}a\left(\frac{1}{2}a.\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{18}$

Mặt khác $V_{C.SMN} = \frac{1}{3}d\left(C,(SMN)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{1}{3}d\left(A,(SMN)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{a^3}{18}$

Vậy $V_{ACMN} = V_{S.ABCD} - V_{NSAM} - V_{NADC} - V_{MABC} - V_{SCMN} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{18} - \frac{a^3}{18} - \frac{a^3}{12} - \frac{a^3}{18} = \frac{1}{12}a^3$



Cách 2. Gọi O là giao điểm của AC và BD

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$. Vì OM//SD nên $SD // (AMC)$

Do đó $d\left(N;(AMC)\right) = d\left(D;(AMC)\right) = d\left(B;(AMC)\right)$

$\Rightarrow V_{ACMN} = V_{N.MAC} = V_{D.MAC} = V_{B.MAC} = V_{M.BAC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{12}$

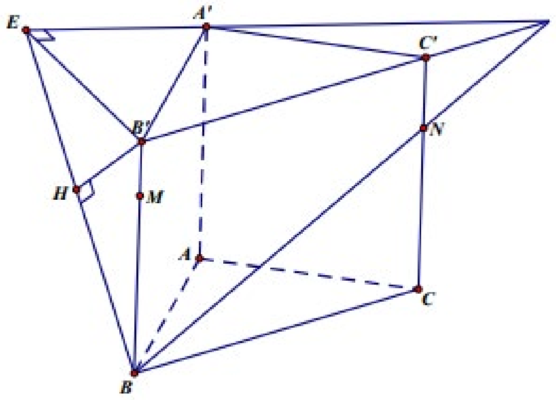
(do $d\left(M;(ABC)\right) = \frac{1}{2}d\left(S;(ABC)\right)$ và $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$)

Câu 53. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1, AC = 2, AA' = 3, \widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M, CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BN)$?

A. $\dfrac{9\sqrt{138}}{184}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{138}}{46}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{138}}{46}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC\cos\widehat{BAC} = 1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos 120^\circ = 7$. Suy ra $BC = \sqrt{7}$.

Ta cũng có $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.\text{BC}} = \dfrac{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2^2}{2.1.\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$, suy ra $\cos\widehat{A'B'C} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Gọi $D = BN \cap B'C'$ suy ra $\dfrac{DC'}{DB'} = \dfrac{C'N}{B'B} = \dfrac{1}{3}$, nên $DB' = \dfrac{3}{2}B'C' = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

Từ đó, ta có

$$A'D^2 = A'B'^2 + B'D^2 - 2A'B'.B'D.\cos\widehat{A'B'D} = 1^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2.1.\frac{3\sqrt{7}}{2}.\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{43}{4}.$$

Hay $A'D = \dfrac{\sqrt{43}}{2}$.

Kẻ $B'E \perp A'D$ và $B'H \perp BE$. suy ra $B'H \perp (A'BN)$, do đó $d\left(B';(A'BN)\right) = B'H$.

Từ $\cos\widehat{A'B'C} = \dfrac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\widehat{A'B'C} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Do đó $S_{A'B'D} = \dfrac{1}{2}.A'B'.B'D.\sin\widehat{A'B'D} = \dfrac{1}{2}.1.\dfrac{3\sqrt{7}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

$$B'E = \frac{2S_{A'B'D}}{A'D} = \frac{2.\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{43}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\right)^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{46}{27} \Rightarrow B'H = \sqrt{\frac{27}{46}}.$$

Từ $BM = 3B'M$ suy ra

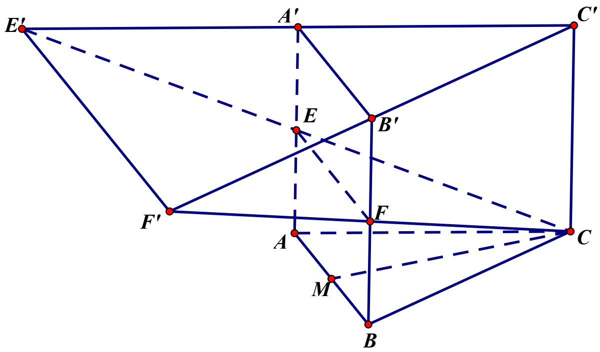
$$d\left(M;(A'BN)\right) = \frac{3}{4}d\left(B';(A'\text{BN})\right) = \frac{3}{4}.B'H = \frac{3}{4}.\sqrt{\frac{27}{46}} = \frac{9\sqrt{138}}{184}.$$

Câu 54. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E, F lần lượt là trung điểm AA' và BB', đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E', đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F'. Thể tích khối đa diện $EFB'A'E'F'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{\sqrt{3}}{4}.1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow CM \perp (ABB'A')$ và $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó, thể tích khối chóp $C.ABFE$ là:

$V_{C.ABFE} = \frac{1}{3} S_{C.ABFE}.CH = \frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Thể tích khối đa diện $A'B'C'EFC$ là:

$V_{A'B'C'EFC} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABFE} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Do A' là trung điểm $C'E'$ nên:

$d\left(E',(BCC'B')\right) = 2d\left(A',(BCC'B')\right) = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$S_{CC'F'} = S_{F'B'F} + S_{FB'C'C} = S_{FBC} + S_{FB'C'C} = S_{BCC'B'} = 1$.

Thể tích khối chóp $E'.CC'F'$ là

$V_{E'.CC'F'} = \frac{1}{3} S_{CC'F'}.d\left(E',(BCC'B')\right) = \frac{1}{3}.1.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

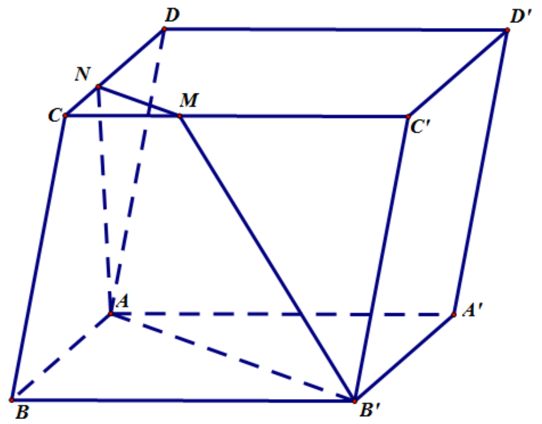
$V_{EFA'B'E'F'} = V_{E'.CC'F'} - V_{A'B'C'EFC} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 55. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, điểm M nằm trên cạnh CC' thỏa mãn $CC' = 3CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A', V_2 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B'. Tính tỉ số thể tích V_1 và V_2.

A. $\frac{41}{13}$. **B.** $\frac{27}{7}$. **C.** $\frac{7}{20}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $N=\left(AB'M\right)\cap CD \Rightarrow \left(AB'M\right)\cap\left(CDD'C'\right)=MN$.

Vì $AB'//C'D \Rightarrow MN//C'D \Rightarrow \dfrac{CN}{CD}=\dfrac{CM}{CC'}=\dfrac{1}{3}$.

Đặt $S_{ABB'A'}=S$, $d\left(\left(ABB'A'\right),\left(CDD'C'\right)\right)=h$, $V_{ABCD.A'B'C'D'}=V$. Suy ra: $V=hS$.

Lại có: $S_{ABB'}=\dfrac{1}{2}S_{ABB'A'}=\dfrac{1}{2}S$, $S_{CMN}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 S_{CDC'}=\dfrac{1}{18}S_{CDD'C'}=\dfrac{1}{18}S$.

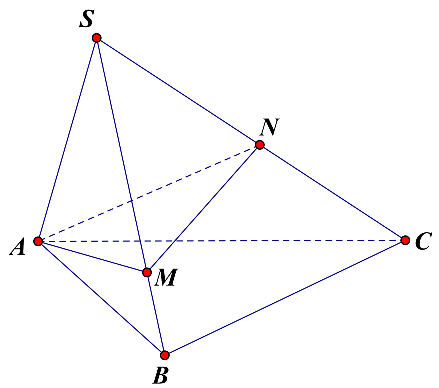
Ta có: $V_2=V_{CMN.BAB'}=\dfrac{1}{3}d\left(\left(CMN\right),\left(BAB'\right)\right).\left(S_{CMN}+\sqrt{S_{CMN}.S_{BAB'}}+S_{BAB'}\right)$

$=\dfrac{1}{3}h\left(\dfrac{1}{18}S+\sqrt{\dfrac{1}{18}S.\dfrac{1}{2}S}+\dfrac{1}{2}S\right)=\dfrac{13}{54}hS=\dfrac{13}{54}V \Rightarrow V_1=V-V_2=\dfrac{41}{54}V$ .Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{41}{13}$.

Câu 56. Cho khối chóp $S.ABC$ có góc $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60°$ và $SA=2,\ SB=3,\ SC=4$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải



Chọn C

Lấy $M\in SB,\ N\in SC$ sao cho $SA=SM=SN=2$.

Suy ra tứ diện $S.AMN$ là tứ diện đều cạnh $a=2$ nên $V_{S.AMN}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{2^3.\sqrt{2}}{12}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

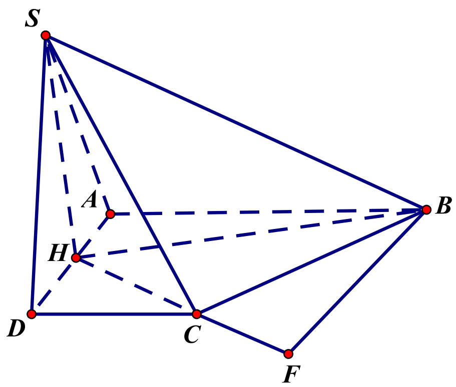
Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{S.ABC}=3V_{S.AMN}=2\sqrt{2}$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, đáy nhỏ của hình thang là CD, cạnh bên $SC = a\sqrt{15}$. Tam giác SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy hình chóp. Gọi H là trung điểm cạnh AD, khoảng cách từ B tới mặt phẳng (SHC) bằng $2\sqrt{6}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$?

A. $V = 24\sqrt{6}a^3$. **B.** $V = 8\sqrt{6}a^3$. **C.** $V = 12\sqrt{6}a^3$. **D.** $V = 4\sqrt{6}a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



$$\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)=AD\\ SH\perp AD, SH\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$$

Ta có $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = a\sqrt{3}$, $HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{15a^2 - 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

$CD = \sqrt{HC^2 - HD^2} = \sqrt{12a^2 - a^2} = a\sqrt{11}$.

Ta có $\begin{cases}BF\perp BC\\ BF\perp SH\end{cases}\Rightarrow BF\perp(SHC)$ nên $d\left(B,(SHC)\right) = BF = 2\sqrt{6}a$.

$S_{HBC} = \frac{1}{2}BF.HC = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}a.2\sqrt{6}a = 6\sqrt{2}a^2$

Đặt $AB = x$ nên $S_{AHB} = \frac{1}{2}AH.AB = \frac{a}{2}.x$; $S_{CDH} = \frac{1}{2}DH.DC = \frac{a^2\sqrt{11}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(CD + AB)AD = \left(a\sqrt{11} + x\right)a$.

$S_{AHB} = S_{ABCD} - S_{CDH} - S_{BHC} \Leftrightarrow \frac{a}{2}.x = \left(a\sqrt{11} + x\right)a - \frac{a^2\sqrt{11}}{2} - 6\sqrt{2}a^2 \Leftrightarrow x = \left(12\sqrt{2} - \sqrt{11}\right)a$.

$S_{ABCD} = \left(a\sqrt{11} + \left(12\sqrt{2} - \sqrt{11}\right)a\right)a = 12\sqrt{2}a^2$.

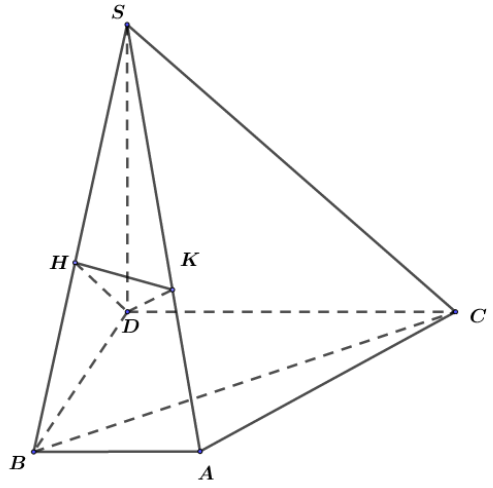
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.12\sqrt{2}a^2 = 4\sqrt{6}a^3$.

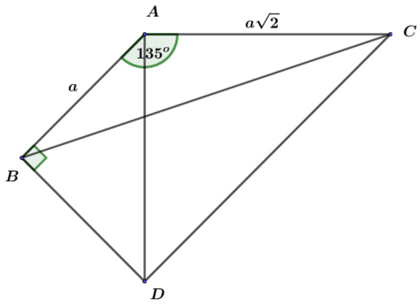
Câu 58. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = a; AC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{CAB} = 135°$, tam giác SAB vuông tại B và tam giác SAC vuông tại A. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A





Gọi D là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC).

$\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD$.

$\begin{cases} AC \perp SA \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAD) \Rightarrow AC \perp AD$.

Tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 135° \Rightarrow \widehat{BAD} = 45°$.

Tam giác ABD vuông tại B có $\widehat{BAD} = 45°$ suy ra tam giác ABD vuông cân và $AD = a\sqrt{2}$.

Từ đó có tam giác ACD vuông cân tại $A \Rightarrow$ tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông tại B và D.

Trong mặt phẳng (SBD), hạ $DH \perp SB$ $(H \in SB)$. Dễ chứng minh $DH \perp (SAB)$.

Trong mặt phẳng (SAD), hạ $DK \perp SA$ $(K \in SA)$. Dễ chứng minh $DK \perp (SAC)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) ta có: $\alpha = \widehat{(DH, DK)} = \widehat{HDK} = 30°$ do tam giác DHK vuông tại H.

Đặt $SD = x$, $(x > 0)$.

Tam giác DHK vuông tại H có $\cos\widehat{HDK} = \dfrac{HD}{DK} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2a^2+x^2}}{\sqrt{2}.ax}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6}\sqrt{a^2+x^2} = 2\sqrt{2a^2+x^2} \Leftrightarrow 6a^2 + 6x^2 = 8a^2 + 4x^2 \Leftrightarrow x = a$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}.SD.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a^3}{6}$.

Vậy thể tích khối $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{6}$.

Câu 59. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. Độ dài $AB = AD = 2a$, $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm AD, hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{15}a}{10}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{10}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$.

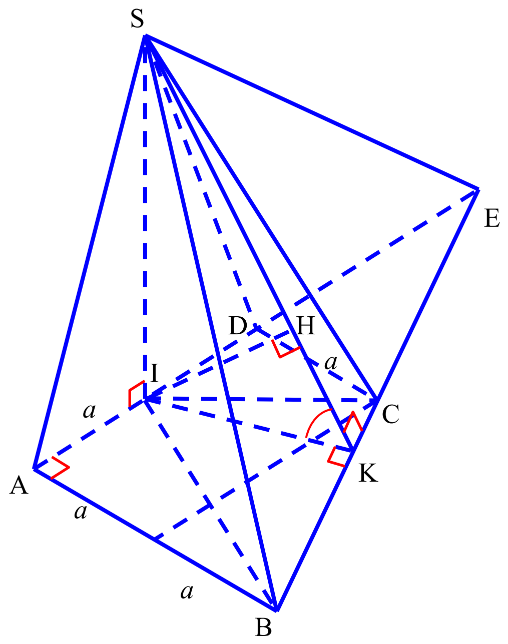
Lời giải

Chọn D

Ta có $(SBI) \perp (ABCD)$ và $(SCI) \perp (ABCD)$ nên $(SBI) \cap (SCI) = SI \perp (ABCD)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên BC và H là hình chiếu vuông góc của I trên SK.

Ta thấy: $\mathrm{IH} \perp (\mathrm{SBC}) \Rightarrow d(\mathrm{I},(\mathrm{SBC})) = \mathrm{IH}$.



$$\mathrm{S}_{\mathrm{IBC}} = \mathrm{S}_{\mathrm{ABCD}} - \mathrm{S}_{\mathrm{DIC}} - \mathrm{S}_{\mathrm{ABI}} = 3a^2 - \frac{a^2}{2} - a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a \Rightarrow \mathrm{IK} = \frac{2\mathrm{S}_{\mathrm{IBC}}}{\mathrm{BC}} = 2.\frac{3a^2}{2}.\frac{1}{\sqrt{5}a} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$$

Theo cách dựng điểm K, góc giữa mặt (SBC) và (ABCD) là $\widehat{\mathrm{IKS}}$ nên $\widehat{\mathrm{IKS}} = 60^0$.

$$\Rightarrow \mathrm{SI} = \mathrm{IK}.\tan\widehat{\mathrm{IKS}} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}.\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$$

Trong tam giác IKS vuông tại I, với $\mathrm{IH} \perp \mathrm{SK}$ tại H thì

$$\frac{1}{\mathrm{IH}^2} = \frac{1}{\mathrm{SI}^2} + \frac{1}{\mathrm{KI}^2} = \frac{25}{9.15.a^2} + \frac{25}{9.5.a^2} = \frac{20}{27.a^2} \Rightarrow \mathrm{IH} = \frac{3\sqrt{15}a}{10}$$

Gọi $\mathrm{AD} \cap \mathrm{BC} = \mathrm{E}$ thì $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{IE}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{d(\mathrm{A},(\mathrm{SBC}))}{d(\mathrm{I},(\mathrm{SBC}))} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{IE}} = \frac{4}{3}$

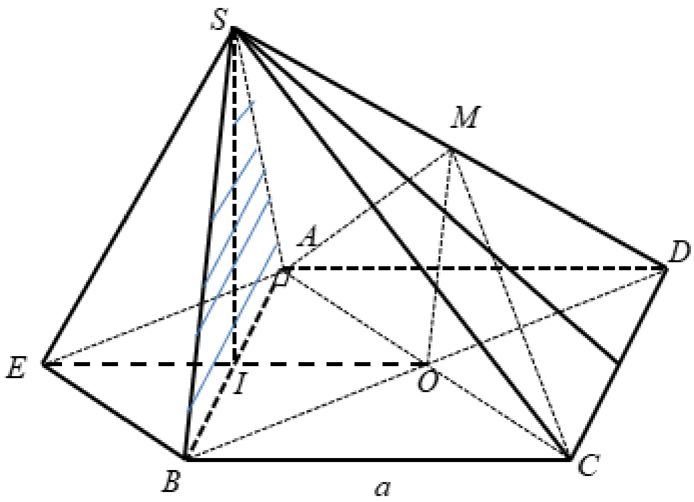
$\Rightarrow d(\mathrm{A},(\mathrm{SBC})) = \frac{4}{3}.d(\mathrm{I},(\mathrm{SBC})) = \frac{4}{3}.\mathrm{IH} = \frac{4}{3}.\frac{3\sqrt{15}a}{10} = \frac{2\sqrt{15}a}{5}$. Đáp án **D.**

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SD; góc giữa (SBC) và (AMC) là φ thỏa mãn $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Tính thể tích V của khối đa diện $S.ABCM$?

A. $V = \frac{a^3}{2}$. **B.** $V = \frac{a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{5a^3}{9}$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Đáp án: A



Dựng hình chữ nhật $AOBE$.

Khi đó $OA // BE$ và $OM // SB \Rightarrow (MAC) // (SBE)$.

Do đó góc $\widehat{((SBC),(MAC))}$ góc $\widehat{((SBC),(SBE))}$.

Ta có góc giữa (SBC) và (SBA) bằng 90^0.

Gọi α là góc giữa hai mặt (SBE) và (SBA).

Ta có $\varphi = 180^0 - (90^0 + \alpha) = 90^0 - \alpha$.

Do đó $\tan\varphi = \cot\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Do đó $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\dfrac{5}{4}} = \dfrac{4}{9}(1)$.

Ta có $EI \perp (SBA) \Rightarrow \Delta SEB$ có hình chiếu trên (SBA) là ΔSIB.

Do đó $\cos\alpha = \dfrac{S_{SIB}}{S_{SEB}} = \dfrac{BI.SA}{BE.SE} = \dfrac{\dfrac{a}{2}SA}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{SA^2+OB^2}} = \dfrac{SA}{\sqrt{2}.\sqrt{SA^2+\dfrac{a^2}{2}}}(2)$.

Từ $(1);(2)$ ta có $\dfrac{SA^2}{2SA^2+a^2} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow SA^2 = 4a^2 \Rightarrow SA = 2a$.

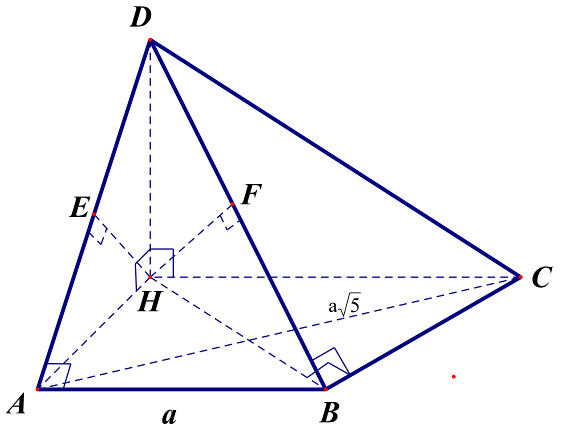
Vậy $V_{S.ABCM} = V_{S.ABCD} - V_{MACD} = V_{S.ABCD} - \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD} = \dfrac{3}{4}V_{S.ABCD} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{3}a^2.2a = \dfrac{a^3}{2}$.

Câu 61. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^0$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác AHB có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 45^\circ \Rightarrow \Delta HAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.BA.BC.\sin\widehat{CBA} = \dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp DA \\ HF \perp DB \end{cases} \Rightarrow HE \perp (DAB)$ và $HF \perp (DBC)$.

Suy ra $\widehat{\left((DBA),(DBC)\right)} = \widehat{(HE,HF)} = \widehat{EHF}$ và tam giác HEF vuông tại E.

Đặt $DH = x$, khi đó $HE = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $HF = \dfrac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$.

Suy ra $\cos\widehat{EHF} = \dfrac{HE}{HF} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2a^2}}{\sqrt{2x^2 + 2a^2}} \Rightarrow x = a$.

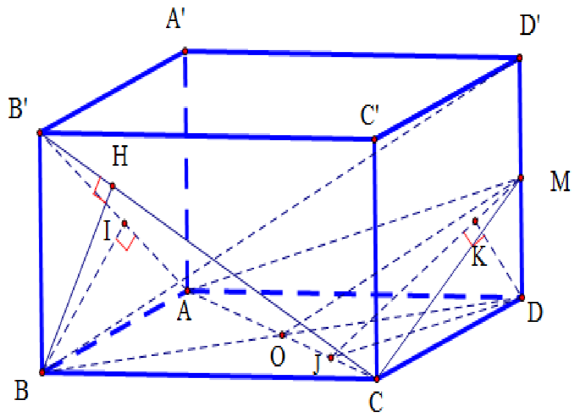
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.DH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3}{6}$.

Câu 62. Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa BC và AB' là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa AC và BD' là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối hộp đó là

A. $8a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = x$, $AD = y$, $AA' = z$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên $B'C$, ta có BH là đoạn vuông góc chung của AB và $B'C$ nên $d\left(AB, B'C\right) = BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4a^2}$. (1)

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B trên AB', ta có BI là đoạn vuông góc chung của BC và AB' nên $d\left(BC, AB'\right) = BI \Rightarrow \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{5}{4a^2}$. (2)

Gọi M là trung điểm của DD', O là giao điểm của AC và BD, ta có mặt phẳng (ACM) chứa AC và song song với BD' nên $d\left(AC, BD'\right) = d\left(BD', (ACM)\right) = d\left(D', (ACM)\right)$.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của D trên MJ, ta có $d\left(D', (ACM)\right) = d\left(D, (ACM)\right) = DK \Rightarrow \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{4}{z^2} = \frac{3}{a^2}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{2}{z^2} = \frac{1}{2a^2} \Leftrightarrow z = 2a \Rightarrow x = y = a$.

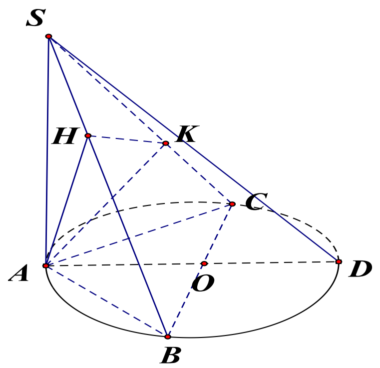
Thể tích khối hộp là $V = xyz = 2a^3$.

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABC$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A, $BC = a$ không đổi. Gọi hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là H, K, biết số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AHK) bằng $30°$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Bài giải

Chọn A



Gọi AD là đường kính của đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} SA \perp DC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow \left.\begin{matrix} DC \perp AK \\ SC \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SD$ (1).

Tương tự: $AH \perp SD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AHK)$. Mà $SA \perp (ABC)$, suy ra $((ABC);(AHK)) = \widehat{(SA;SD)} = \widehat{ASD}$, suy ra

$\widehat{ASD} = 30°$. Ta có $AD = 2R = BC = a$. Trong ΔASD có $SA = AD.\cot\widehat{ASD} = a.\cot 30° = a\sqrt{3}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}S_{ABC}.a\sqrt{3}$. Thể tích này lớn nhất khi diện tích tam giác ABC lớn nhất, diện tích này lớn nhất khi đường cao vẽ từ A lớn nhất, khi đó đường cao bằng bán kính đường tròn (O) và bằng $\frac{a}{2}$.

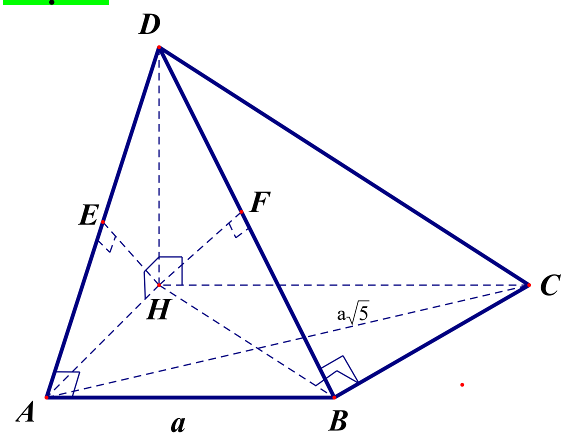
Thể tích lớn nhất bằng $V_{\max} = \frac{1}{3}\frac{a^2}{4}a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^o$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác AHB có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 45^o \Rightarrow \Delta HAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BA.BC.\sin\widehat{CBA} = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp DA \\ HF \perp DB \end{cases} \Rightarrow HE \perp (DAB)$ và $HF \perp (DBC)$.

Suy ra $\widehat{((DBA),(DBC))} = \widehat{(HE,HF)} = \widehat{EHF}$ và tam giác HEF vuông tại E.

Đặt $DH = x$, khi đó $HE = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $HF = \dfrac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}$.

Suy ra $\cos\widehat{EHF} = \dfrac{HE}{HF} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{x^2+2a^2}}{\sqrt{2x^2+2a^2}} \Rightarrow x = a$.

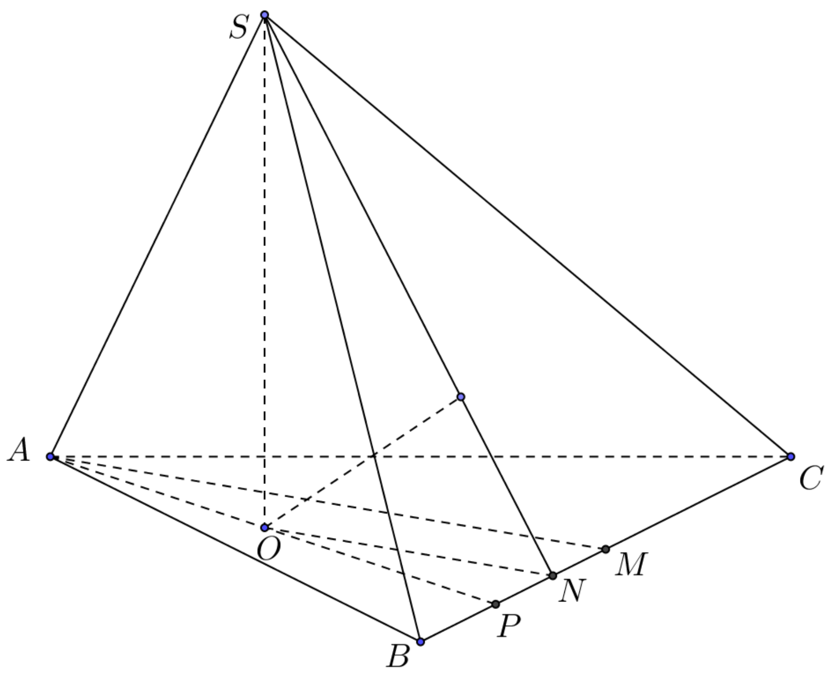
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.DH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3}{6}$.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) là $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\dfrac{a\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{36}$. **B.** $\dfrac{a^3}{48}$. **C.** $\dfrac{a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn B



Vì tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi O là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC).

Đặt $d(O,BC) = x$, $d(O,AC) = y$, $d(O,AB) = z$, $SO = h$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OAB} \Leftrightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}(x.a + y.a + z.a) \Leftrightarrow x + y + z = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi P là giao điểm của AO và BC, M là trung điểm BC và $ON // AM$, $N \in BC$.

Ta có $\dfrac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \dfrac{OP}{AP} = \dfrac{ON}{AM} = \dfrac{2x}{a\sqrt{3}} \Rightarrow d(O,(SBC)) = \dfrac{2x}{a\sqrt{3}}.\dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác vuông SON.

Ta có: $\dfrac{1}{d(O,SBC)^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{ON^2} \Rightarrow \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow x = h$.

Tương tự $\dfrac{d\left(O,\left(SAC\right)\right)}{d\left(B,\left(SAC\right)\right)}=\dfrac{2y}{a\sqrt{3}}\Rightarrow d\left(O,\left(SAC\right)\right)=\dfrac{2y}{a\sqrt{3}}.\dfrac{a\sqrt{15}}{10}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\dfrac{5}{y^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{y^2}\Rightarrow y=2h$.

Tương tự $\dfrac{d\left(O,\left(SAB\right)\right)}{d\left(C,\left(SAB\right)\right)}=\dfrac{2z}{a\sqrt{3}}\Rightarrow d\left(O,\left(SAC\right)\right)=\dfrac{2z}{a\sqrt{3}}.\dfrac{a\sqrt{30}}{20}=\dfrac{z}{\sqrt{10}}$.

Suy ra $\dfrac{10}{z^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{z^2}\Rightarrow z=3h$.

Mà $x+y+z=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h+2h+3h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{a\sqrt{3}}{12}$.

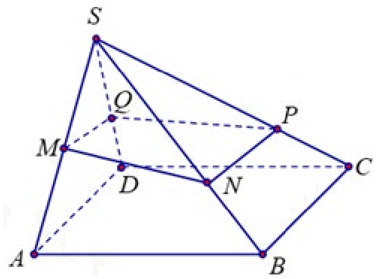
Vậy $V=\dfrac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{12}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3}{48}$.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm trên đoạn SB sao cho $SN=2NB$. Mặt phẳng $\left(R\right)$ chứa MN cắt đoạn SD tại Q và cắt đoạn SC tại P. Tỉ số $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ lớn nhất bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $\dfrac{SP}{SC}=x$ $0<x\le 1$. Ta có $\dfrac{SM}{SA}+\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{SN}{SB}+\dfrac{SQ}{SD}\Rightarrow\dfrac{SQ}{SC}=\dfrac{1}{2}+x-\dfrac{2}{3}=x-\dfrac{1}{6}$ $\left(x>\dfrac{1}{6}\right)$.

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành nên có $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2V_{S.ACD}$

$\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{1}{3}x$; $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SP}{SC}.\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{1}{2}x\left(x-\dfrac{1}{6}\right)$.

Suy ra $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}}+\dfrac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}}=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{4}x\left(x-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{8}x$.

Xét $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{8}x$ với $\dfrac{1}{6}<x\le 1$; $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}\notin\left(\dfrac{1}{6};1\right]$

Bảng biến thiên:

x	$\dfrac{1}{6}$		1
$f'\left(x\right)$		$+$	
$f\left(x\right)$		$\nearrow$	$\dfrac{3}{8}$

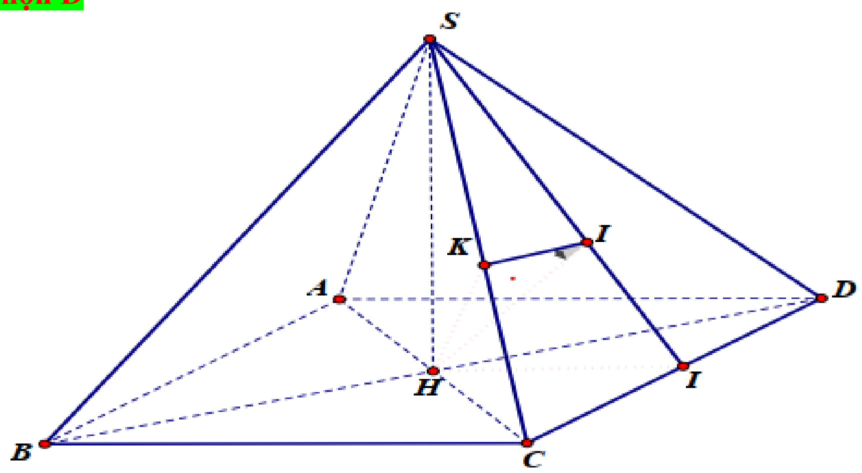
Từ BBT ta có $\max\limits_{\left(\frac{1}{6};1\right]} f\left(x\right)=\dfrac{3}{8}$. Vậy $\dfrac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{3}{8}$.

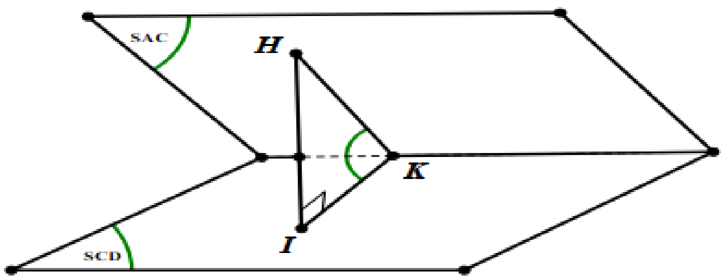
Câu 67. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2-3x+2\le 0$ cũng làCho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Chọn D





Gọi $\{H\}=AC\cap BD$. Vì hình chóp S.ABCD là hình chóp đều nên $SH\perp\left(ABCD\right)$

Ta có: $\left(SAC\right)\cap\left(SCD\right)=SC.$

Gọi I là hình chiếu của H trên mặt phẳng (SCD).

(Cách xác định điểm I:

Gọi M là trung điểm của CD. Nối S với M. Gọi I là hình chiếu của H trên SM. Dễ dàng chứng minh được: $SI\perp\left(SCD\right)$. Tính được: $SM=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}, SH=a\sqrt{3}, HC=a, MC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.)

Gọi K là hình chiếu của I trên mặt phẳng SC

Có: $\begin{cases} HI\perp SC \\ KI\perp SC \end{cases}\Rightarrow SC\perp\left(HIK\right)\Rightarrow SC\perp HK.$

Lại có: $SC\perp HI$ (vì $HI\perp\left(SCD\right), SC\subset\left(SCD\right)$) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) là góc HKI = α

Tính $\cos\alpha=\cos KHI=\dfrac{IK}{HK}$.

+ Tính $HK: HK.SC=SH.HC\Rightarrow HK=\dfrac{SH.HC}{SC}=\dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

+ Tính IK: dễ thấy $\Delta SIK-\Delta SCM\Rightarrow\dfrac{IK}{MC}=\dfrac{SK}{SM}\Rightarrow IK=\dfrac{SK.MC}{SM}$.

+ Tính SK: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông cho tam giác SHC ta có:

$$SH^2 = SK.SC \Rightarrow SK = \frac{SH^2}{SC} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2} \Rightarrow IK = \frac{\frac{3a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{14}}{2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

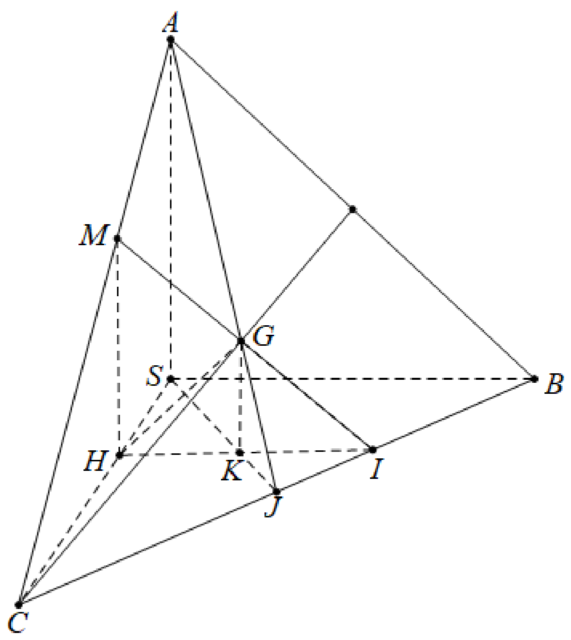
Vậy $\cos\alpha = \cos KHI = \frac{IK}{HK} = \frac{\frac{3a\sqrt{7}}{14}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 68. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, các mặt bên là các tam giác vuông cân tại S. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, (α) là mặt phẳng qua G vuông góc với SC. Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{4}{9}a^2$. **B.** $\frac{2}{3}a^2$. **C.** $\frac{4}{3}a^2$. **D.** $\frac{2}{9}a^2$.

Lời giải

Chọn A



Xét ΔSBC vuông cân tại $S, BC = 2a$ ta có:

$SB^2 + SC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2SB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow SB^2 = 2a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{2} = SA = SC$.

Gọi J là trung điểm của BC, trong (SJA) kẻ $GK // SA$ cắt SJ tại K.

Trong (SBC) kẻ đường thẳng qua K song song với SB cắt SC và CB lần lượt tại H và I.

Trong (SAC) kẻ $HM // SA$ cắt SC tại M.

Do các mặt bên của hình chóp $S.ABC$ là các tam giác vuông tại S nên ta có:

$\begin{cases} SA \perp SC \\ SA \perp SB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$ mà $GK // SA \Rightarrow GK \perp (SBC) \Rightarrow GK \perp SC$ (1).

Do $\begin{cases} SB \perp SC \\ IH // SB \end{cases} \Rightarrow IH \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2)$\Rightarrow SC \perp (HMI)$. Vậy thiết diện là ΔHMI.

Ta có: $KG // SA; KJ // SB$ và do G là trọng tâm ΔABC nên $\frac{JG}{JA} = \frac{JK}{JS} = \frac{JI}{JB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác: $HI // SB; HM // SA$ nên ta có:

$$\frac{2}{3} = \frac{CI}{CB} = \frac{HI}{SB} \Rightarrow HI = \frac{2}{3}SB = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{CI}{CB} = \frac{CH}{CS} = \frac{HM}{SA} \Rightarrow HM = \frac{2}{3}SA = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Do $SB \perp ((SAC); HI // SB \Rightarrow HI \perp (SAC) \Rightarrow HI \perp MH \Rightarrow \Delta HMI$ vuông tại H.

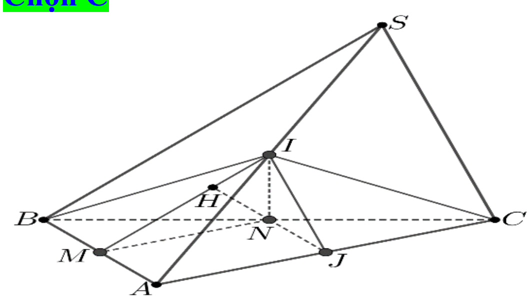
Diện tích ΔHIM là: $S_{\Delta HIM} = \frac{1}{2}HM.HI = \frac{1}{2}.\left(\frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABC$. Tam giác ABC vuông tại A, $AB = 1\text{cm}$, $AC = \sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông góc tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB)

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{4}\text{cm}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$. **D.** 1cm.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC vuông tại A:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$V_{mc} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi I, J, M, N lần lượt là trung điểm SA, AC, AB, BC.

Do tam giác SAB, SAC lần lượt vuông góc tại B và C nên $IS = IA = IB = IC$.

Nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $IB = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Và IN vuông góc với (ABC) (do N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Ta có:

$\begin{cases} MN \perp AB \\ IN \perp AB \end{cases} \Rightarrow (IMN) \perp AB \Rightarrow (IMN) \perp (IAB)$

Trong (IMN): Dựng $NH \perp IM \Rightarrow NH \perp (IAB)$

$\Rightarrow d_{(N;(IAB))} = NH = d_{(N;(SAB))}$

$MN = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $IN = \sqrt{IB^2 - BN^2} = \frac{1}{2}$

Ta có $\frac{1}{NH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{IN^2} = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \Rightarrow NH = \frac{\sqrt{3}}{4}$

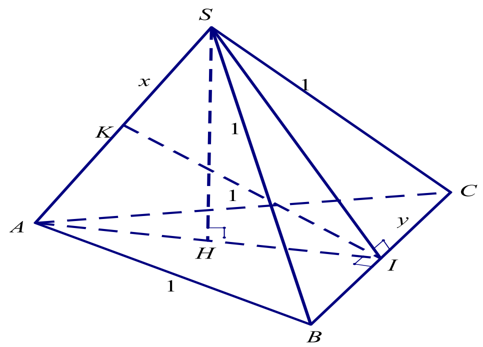
Lại có: $CN \cap (SAB) = B \Rightarrow \frac{d_{(C;(SAB))}}{d_{(N;(SAB))}} = \frac{BC}{BN} = 2 \Rightarrow d_{(C;(SAB))} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $(x+y)$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải:

Chọn C



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC và H là hình chiếu của S lên (ABC).

Ta có: $BC \perp (SAI)$ và $H \in AI, \Delta SAI$ cân tại I.

$SI = AI = \sqrt{SC^2 - IC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2}$, $IK = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2}$

$S_{SAI} = \frac{1}{2}SH.AI = \frac{1}{2}SA.IK \Rightarrow SH = \frac{SA.IK}{AI} = \frac{x.\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{4-y^2}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AI = \frac{y\sqrt{4-y^2}}{4}$

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có: $0 < x, y < 2$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{12}xy\sqrt{4-(x^2+y^2)} \le \frac{1}{12}xy\sqrt{4-2xy}$ (vì $x^2 + y^2 \ge 2xy$)

Suy ra $V_{S.ABC} \le \frac{1}{12}xy\sqrt{4-2xy} = \frac{1}{12}\sqrt{xy.xy.(4-2xy)} \le \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{xy+xy+4-2xy}{3}\right)^3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

$V_{S.ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow V_{S.ABC} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 4 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + y = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V = \frac{1}{12}a^3$ **B.** $V = \frac{1}{6}a^3$. **C.** $V = \frac{1}{8}a^3$. **D.** $V = \frac{1}{36}a^3$.

Lời giải

Đáp án A

Cách 1. Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$

$V_{NDAC} = \frac{1}{3}NH.S_{\Delta DAC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}a.\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{a^3}{18}$

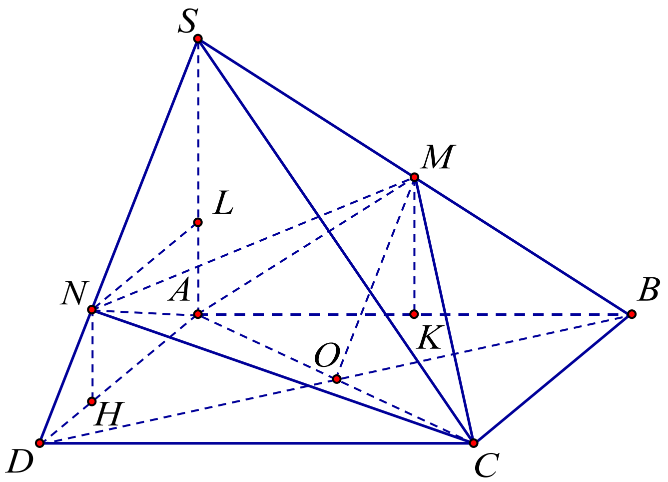
$V_{MABC} = \frac{1}{3}MK.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{a^3}{12}$

$V_{N.SAM} = V_{A.SMN} = \frac{1}{3}d\left(A,\left(SMN\right)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{a^3}{18}$

Suy ra $V_{NSAM} = \frac{1}{3}NL.S_{\Delta SAM} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}a.\left(\frac{1}{2}a.\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{18}$.

Mặt khác $V_{C.SMN} = \frac{1}{3}d\left(C,\left(SMN\right)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{1}{3}d\left(A,\left(SMN\right)\right).S_{\Delta SMN} = \frac{a^3}{18}$

Vậy $V_{ACMN} = V_{S.ABCD} - V_{NSAM} - V_{NADC} - V_{MABC} - V_{SCMN} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{18} - \frac{a^3}{18} - \frac{a^3}{12} - \frac{a^3}{18} = \frac{1}{12}a^3$.



Cách 2. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$. Vì $OM // SD$ nên $SD // \left(AMC\right)$.

Do đó $d\left(N;\left(AMC\right)\right) = d\left(D;\left(AMC\right)\right) = d\left(B;\left(AMC\right)\right)$

$\Rightarrow V_{ACMN}=V_{N.MAC}=V_{D.MAC}=V_{B.MAC}=V_{M.BAC}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{12}$.

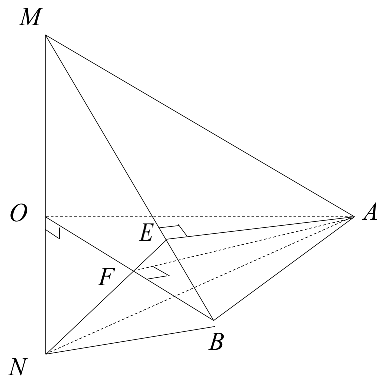
(do $d\left(M;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(S;\left(ABC\right)\right)$ và $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$)

Câu 72. Cho tam giác OAB đều cạnh a. Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng $\left(OAB\right)$ lấy điểm M sao cho $OM=x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB. Gọi N là giao điểm của EF và d. Thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Do tam giác OAB đều cạnh $a\Rightarrow F$ là trung điểm $OB\Rightarrow OF=\frac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AF\perp OB \\ AF\perp MO \end{cases}\Rightarrow AF\perp\left(MOB\right)\Rightarrow AF\perp MB.$

Mặt khác, $MB\perp AE$ Suy ra $MB\perp\left(AEF\right)\Rightarrow MB\perp EF$.

Suy ra $\Delta OBM\backsim\Delta ONF$ nên $\frac{OB}{ON}=\frac{OM}{OF}\Rightarrow ON=\frac{OB.OF}{OM}=\frac{a^2}{2x}$.

Ta có $V_{ABMN}=V_{ABOM}+V_{ABON}$

$=\frac{1}{3}S_{\Delta OAB}\left(OM+ON\right)=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.(x+\frac{a^2}{2x})=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(x+\frac{a^2}{2x}\right)\geq\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.2\sqrt{x.\frac{a^2}{2x}}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

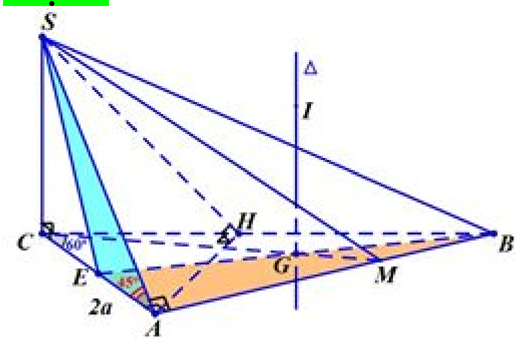
Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{a^2}{2x}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy GTNN $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng đáy, $AC=2a$, $\left(\widehat{AC,(SBC)}\right)=60^o$, $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right)=45^o$. Gọi E là trung điểm AC. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABE$.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{22}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



$\left(SBC\right)\perp\left(ABC\right)$ nên BC là hình chiếu của AC lên $\left(SBC\right)$.

Vậy $\left(\widehat{AC,\left(SBC\right)}\right)=\widehat{ACB}=60^o$ nên $AB=2a\sqrt{3};BC=4a$.

$\left(\widehat{\left(SAB\right),\left(ABC\right)}\right)=\widehat{SAC}=45^o\Rightarrow SC=2a$.

Tam giác ABE có tâm ngoại tiếp là trung điểm G của BE, giả sử tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABE$ là I thì $IG//(SAE)$ nên $d=d\left(I;(SAE)\right)=d\left(G;(SAE)\right)=\frac{1}{2}AB=a\sqrt{3}$.

Tam giác SAE có diện tích là a^2; $SA=2a\sqrt{2}; AE=a; SE=a\sqrt{5}$ nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $r=\frac{2a\sqrt{2}.a.a\sqrt{5}}{4a^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

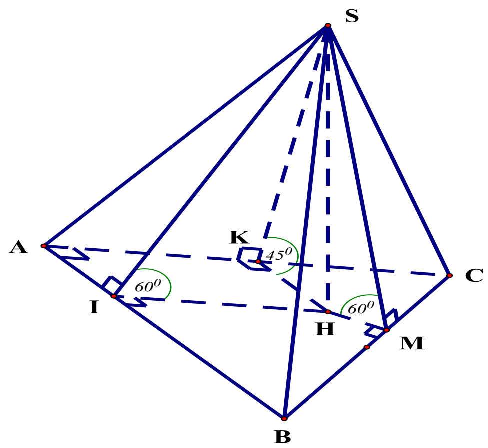
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABE$ là $R=\sqrt{r^2+d^2}=\frac{a\sqrt{22}}{2}$.

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với cạnh huyền $BC=2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt đáy ABC nằm trong tam giác ABC. Biết các mặt bên $(SAB),(SBC),(SCA)$ lần lượt tạo với đáy các góc 60^0, 60^0, 45^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ tính theo a tương ứng bằng:

A. $\frac{3a^3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{2a^3}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **D.** $\frac{6a^3}{2+\sqrt{3}}$.

Lời giải

Đáp án: C



Ta có ΔABC vuông cân tại A và $BC=2a\Rightarrow AB=AC=a\sqrt{2}$; $h_a=\frac{1}{2}BC=a$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}h_a.BC=\frac{1}{2}a.2a=a^2$.

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta HAB}+S_{\Delta HBC}+S_{\Delta HCA}$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{2}\left(HI.a\sqrt{2}+HM.2a+HK.a\sqrt{2}\right)=a^2\Leftrightarrow HI.\sqrt{2}+HM.2+HK.\sqrt{2}=2a\ (*)$

Từ giả thiết các mặt bên $(SAB),(SBC),(SCA)$ lần lượt tạo với đáy các góc $60^0, 60^0, 45^0$ suy ra $SH=HI.\tan 60^0=HM.\tan 60^0=HK.\tan 45^0\Leftrightarrow SH=HI.\sqrt{3}=HM.\sqrt{3}=HK.1$

$\Leftrightarrow HI=HM; HK=\sqrt{3}HI$. Thay vào $(*)$ ta được

$HI.\sqrt{2}+HI.2+HI.\sqrt{3}.\sqrt{2}=2a\ (*)\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)HI=2a\Leftrightarrow HI=\frac{2a}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}\Rightarrow SH=\frac{2a\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

Vậy thể tích $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}.a^2=\frac{2a^3}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

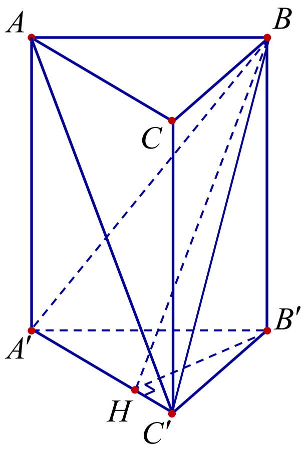
Câu 75. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Hạ $B'H\perp A'C'$. Khi đó $A'C'\perp\left(BHB'\right)$



Ta có: $\begin{cases} S_1=S_{A'B'C'}=\dfrac{1}{2}A'B'.A'C'.\sin 120^\circ=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ B'H=A'C'.\sin 120^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Theo công thức tính diện tích hình chiếu $S=S_{A'BC'}=\dfrac{S_1}{\cos 60^\circ}=2S_1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}BH.A'C'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BH=\dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}.A'C'}=a\sqrt{3}$.

Khi đó: $BB'=\sqrt{BH^2-B'H^2}=\sqrt{3a^2-\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{3a}{2}$.

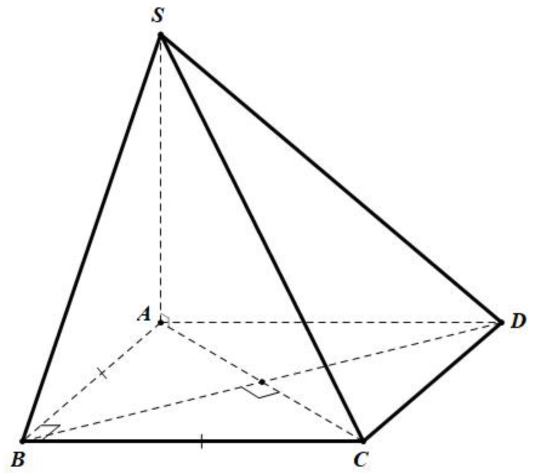
Vậy $V=S_{\Delta A'B'C'}.BB'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3a}{2}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 76. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Biết tổng diện tích các mặt bên của khối chóp $S.ABCD$ bằng $2a^2$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{a^3}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3}{6}$

Lời giải

Chọn C



Đặt $SA = h; SB = \sqrt{a^2 + h^2} = SD$

Ta biết các mặt bên là các hình tam giác vuông nên $S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SAD} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCD} = 2a^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}a\sqrt{h^2 + a^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{h^2 + a^2} = 2a^2$

$\Leftrightarrow ah + a\sqrt{h^2 + a^2} = 2a^2 \Leftrightarrow \sqrt{h^2 + a^2} = 2a - h$

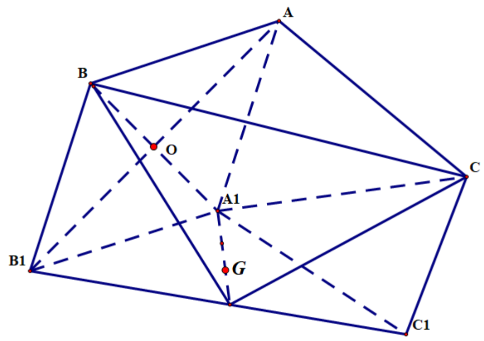
$\Rightarrow 0 = 3a^2 - 4ah \Rightarrow h = \frac{3a}{4}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.a^2.\frac{3a}{4} = \frac{a^3}{4}$

Câu 77. Cho khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có thể tích bằng 30. Gọi O là tâm của hình bình hành ABB_1A_1 và G là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$. Thể tích khối tứ diện $COGB_1$ là

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{15}{14}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của A_1C_1.

Ta có:

$V_{B_1.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}.30 = 10$.

$V_{C.B_1C_1M} = \frac{1}{2}V_{C.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.30 = 5$.

$V_{A.A_1B_1M} = V_{CB_1C_1M} = 5$.

Mà $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{B_1.ABC} + V_{C.B_1C_1M} + V_{A.A_1B_1M} + V_{C.AB_1M} = 30$.

Suy ra $V_{C.AB_1M} = 10$.

Mặt khác $\frac{V_{B_1.OCG}}{V_{B_1.ACM}} = \frac{B_1O}{B_1A}.\frac{B_1C}{B_1C}.\frac{B_1G}{B_1M} = \frac{1}{2}.1.\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{B_1.OCG} = \frac{1}{3}V_{B_1.ACM} = \frac{10}{3}$.

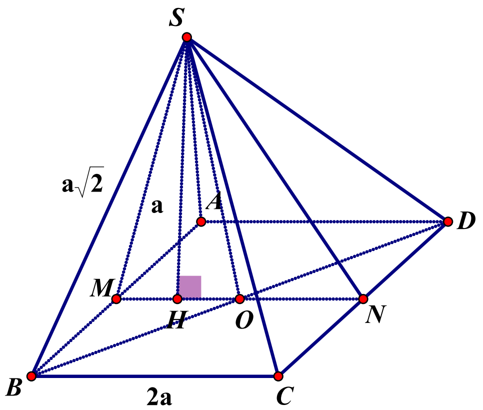
Chọn D

Câu 78. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, $SA = SB = a\sqrt{2}$, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng a. Tính thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Ta có $SA = SB = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAB cân tại S suy ra $SM \perp AB$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng CD suy ra $MN \perp AB$. Do đó $AB \perp (SMN)$ mà $AB \subset (ABCD)$ nên $(SMN) \perp (ABCD)$. Kẻ $SH \perp MN \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Lại có $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{4}} = a \Rightarrow SM = AM = BM = a$ hay tam giác SAB vuông cân tại S.

Mặt khác lại có $AB // (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(AB,(SCD)) = d(M,(SCD)) = a = SM$ nên CX $SM \perp SN \Rightarrow SN = \sqrt{MN^2 - SM^2} = a\sqrt{3}$.

Do đó $SH.MN = SM.SN \Leftrightarrow SH = \frac{SM.SN}{MN} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2$.

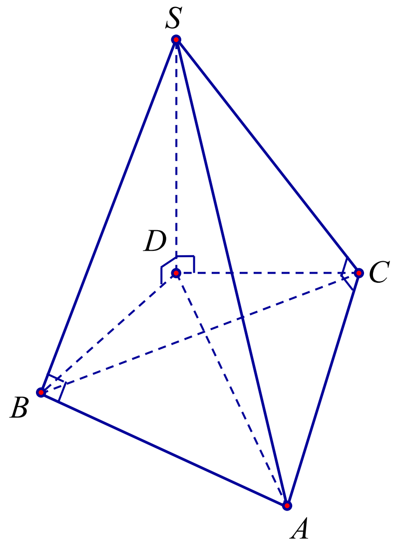
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.4a^2 = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB$ (gt), suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C.

Dễ thấy $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$.

Từ đó ta chứng minh được $\Delta SBD = \Delta SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC, nên cũng là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{DAC} = 30°$ suy ra $DC = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBD} = 60°$,

ta có $\tan \widehat{SBD} = \dfrac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \tan \widehat{SBD} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = a$.

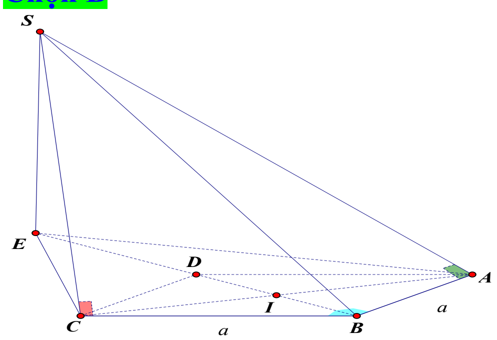
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

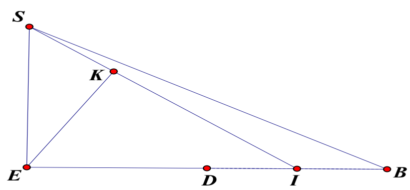
Câu 80. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a, \widehat{ABC} = 120^0$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{10}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B





Hạ $SE \perp (ABC)$ tại E có

$$\left.\begin{matrix} AB \perp SE \\ AB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SAE) \Rightarrow AB \perp AE \Rightarrow \widehat{BAE} = 90^0$$. Chứng minh tương tự có $\widehat{BCE} = 90^0$.

Hai tam giác vuông BCE và BAE bằng nhau suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{ABE} = 60^0$.

Gọi D là trung điểm của BE suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Gọi I là tâm hình thoi $ABCD$ có

$$BI = \frac{1}{3}EI \Rightarrow d(B,(SAC)) = \frac{1}{3}d(E,(SAC)) \Rightarrow d(E,(SAC)) = 3.\frac{2a\sqrt{21}}{21} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Có $\left.\begin{matrix} CA \perp BD \\ CA \perp SE \end{matrix}\right\} \Rightarrow CA \perp (SEI) \Rightarrow (SAC) \perp (SEI)$.

Hạ $EK \perp SI$ tại K ta có $EK \perp (SAC)$ tại K suy ra $d(E,(SAC)) = EK \Rightarrow EK = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBE vuông tại E đường cao EK có

$$\frac{1}{EK^2} = \frac{1}{EI^2} + \frac{1}{SE^2} \Rightarrow \frac{1}{SE^2} = \frac{1}{EK^2} - \frac{1}{EI^2} = \frac{7}{12a^2} - \frac{4}{9a^2} = \frac{5}{36a^2} \Rightarrow SE = \frac{6a\sqrt{5}}{5}.$$

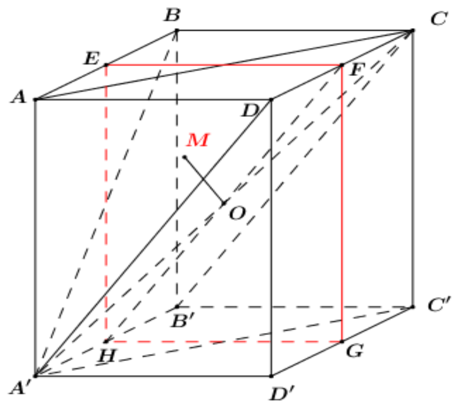
Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SE = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}BA.BC.\sin 120^0\right).SE = \frac{1}{6}a^2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{6a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^3\sqrt{15}}{10}$.

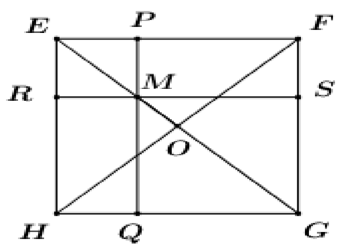
Câu 81. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a và M là một điểm trong khối lập phương đó. Gọi V_1, V_2 và V_3 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $MA'B'C', MACD$ và $MABB'$. Biết rằng $V_1 = 2V_2 = 2V_3$. Tính thể tích khối tứ diện $MA'CD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ **B.** $\frac{a^3}{24}$ **C.** $\frac{a^3}{18}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$

Lời giải

Chọn C





Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của $AB, CD, C'D', A'B'$.

Không mất tính tổng quát, ta chọn $M \in (EFGH)$.

Qua M lần lượt kẻ $\begin{cases} PQ \perp, PQ \perp HG\ (P \in EF; Q \in HG) \\ RS \perp EH, RS \perp FG\ (R \in EH; S \in FG) \end{cases}$

Ta dễ dàng chứng minh được

$MP = d(M;\ (ABCD)); MQ = d(M;(A'B'C'D'))$

$MR = d(M;(ABB'A')); MS = d(M;(CDD'C'))$.

Theo bài ra ta có: $V_1 = 2V_2 \Rightarrow d\left(M;\left(A'B'C'D'\right)\right) = 2d\left(M;\left(ABCD\right)\right) \Rightarrow MQ = 2MP.$

Chứng minh tương tự ta có: $MS = 2MR.$

$\Rightarrow MP = MR = \dfrac{a}{3}$; $MQ = MS = \dfrac{2a}{3}$ Do đó M thuộc đường phân giác của $\angle FEH$.

Mà $EFGH$ là hình vuông nên EG là phân giác của $\angle FEH$.

$\Rightarrow M \in EG.$

Gọi $O = EG \cap FH$ ta có $EG \perp FH$ (do $EFGH$ là hình vuông) nên $MO \perp FH$.

Ta có:

$\begin{cases} CD \perp CD \\ CD \perp FG \end{cases} \Rightarrow CD \perp \left(EFGH\right) \Rightarrow \left(A'B'CD\right) \perp \left(EFGH\right).$

Lại có $\left(A'B'CD\right) \cap \left(EFGH\right) = FH, MO \subset \left(EFGH\right) \perp FH\left(cmt\right)$.

$\Rightarrow MO \perp \left(A'B'CD\right) \Rightarrow MO \perp \left(A'CD\right) \Rightarrow d\left(M;\left(A'CD\right)\right) = MO.$

Vì $EFGH$ là hình vuông cạnh a nên $EO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$EPMR$ là hình vuông cạnh a 3nên $EM = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow MO = EO - EM = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$

Vì $CD \perp \left(ADD'A'\right)$ nên $CD \perp A'D$, suy ra $A'B'CD$ là hình chữ nhật.

Có $CD = a, A'D = a\sqrt{2}.$

$\Rightarrow S_{A'B'CD} = a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} \Rightarrow S_{A''CD} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

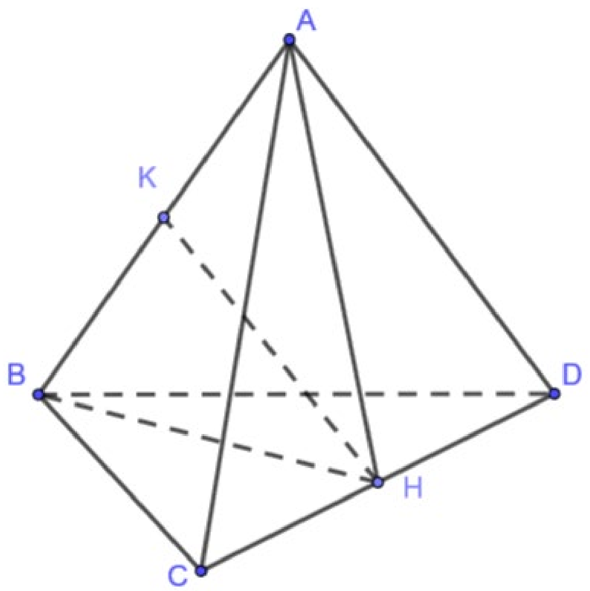
Vậy $V_{M.A'CD} = \dfrac{1}{3}MO.S_{A'CD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{6}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3}{18}$

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = BD = AC = AD = 1, \left(ACD\right) \perp \left(BCD\right)$ và $\left(ABD\right) \perp \left(ABC\right)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.

Đặt $AH = x, (x > 0)$

• ΔACD và ΔBCD lần lượt cân tại A và D nên AH và BH là hai đường cao tương ứng.

$$\begin{cases}(ACD)\perp(BCD)\\(ACD)\cap(BCD)=CD\Rightarrow AH\perp(BCD)\\(ACD)\supset AH\perp CD\end{cases}$$

Do đó $AH \perp BH$ (1)

$\Delta ACD = \Delta BCD(c.c.c)$ do đó $AH = BH$ (2 đường cao tương ứng) (2)

Từ (1), (2) suy ra ΔAHB vuông cân tại H.

$\Rightarrow AB = AH\sqrt{2} = x\sqrt{2}$.(3)

•Chứng minh tương tự ta được ΔCKD vuông cân tại K.

$$\Rightarrow CK = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{2.\text{HD}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{2}.\sqrt{1-x^2}$$

Mặt khác, ΔACD cân tại A có CK là đường cao nên:

$AB = 2AK = 2\sqrt{AC^2 - CK^2} = 2\sqrt{1-2\left(1-x^2\right)}$ (4)

Từ (3), (4) ta có:

$$x\sqrt{2} = 2\sqrt{1-2\left(1-x^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 4\left(2x^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (x>0)$$

$$CD = 2.HD = 2\sqrt{1-AH^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

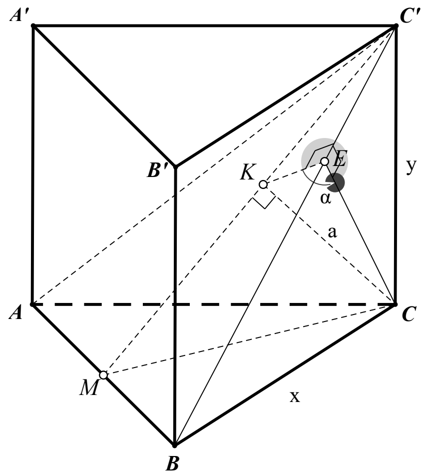
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{27}.$$

Câu 83. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB.

Do $\begin{cases} AB\perp CC' \\ AB\perp CM \end{cases} \Rightarrow AB\perp (MCC') \Rightarrow (ABC')\perp (MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK\perp (ABC') \Rightarrow CK=d\left(C,(ABC')\right)=a$.

Đặt $BC=x, CC'=y, (x>0, y>0)$, ta được: $CM=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2}+\dfrac{1}{CC'^2}=\dfrac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}$ (1).

Kẻ $CE\perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC}=\alpha$, $EC=\dfrac{KC}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{CE^2}=\dfrac{11}{12a^2}$ (2).

Giải $(1),(2)$ ta được $x=2a, y=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

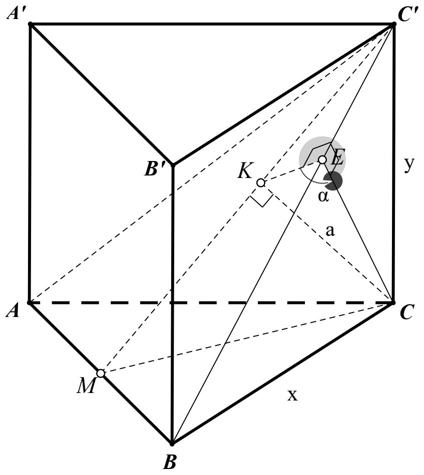
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V=y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 84. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.   **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.   **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.   **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB.

Do $\begin{cases} AB\perp CC' \\ AB\perp CM \end{cases}\Rightarrow AB\perp(MCC')\Rightarrow(ABC')\perp(MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK\perp(ABC')\Rightarrow CK=d\left(C,(ABC')\right)=a$.

Đặt $BC=x, CC'=y,(x>0,y>0)$, ta được: $CM=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2}+\dfrac{1}{CC'^2}=\dfrac{1}{CK^2}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}\ (1)$.

Kẻ $CE\perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC}=\alpha$, $EC=\dfrac{KC}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{CE^2}=\dfrac{11}{12a^2}\ (2)$.

Giải $(1),(2)$ ta được $x=2a, y=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V=y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=2f(1-x)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;-2)$.   **B.** $(-\infty;1)$.   **C.** $(-2;0)$.   **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải.

Chọn B

$y' = -2f'(1-x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

Có $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0,\ \forall x \in (-2;0)$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow -2f'(1-x) < 0,\ \forall x \in (-2;0)$

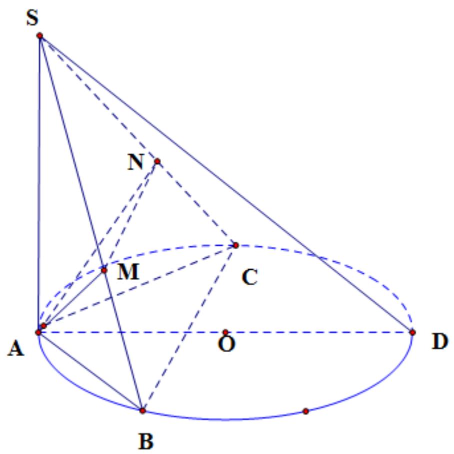
$\Rightarrow -2f'(1-x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0,\ \forall x \in (-2;0)$.

Câu 86. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $\widehat{BAC} = 135°$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là M, N. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi AD là đường kính của đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} SA \perp DC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow \left.\begin{matrix} DC \perp AN \\ SC \perp AN \end{matrix}\right\} \Rightarrow AN \perp (SDC) \Rightarrow AN \perp SD$ (1).

Tương tự: $\begin{cases} SA \perp DB \\ AB \perp DB \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB) \Rightarrow \left.\begin{matrix} DB \perp AM \\ SB \perp AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$ (2).

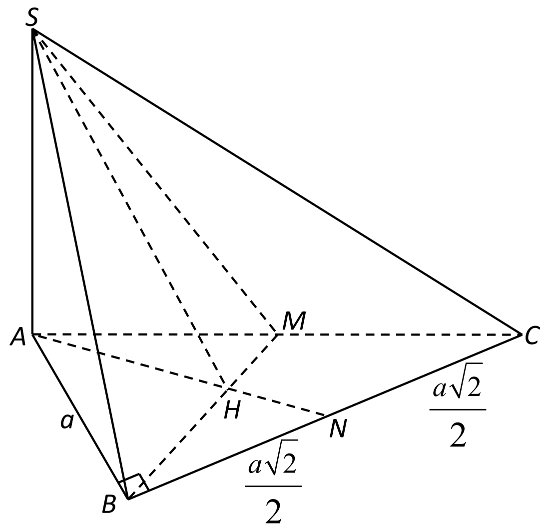
Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AMN)$. Mà $SA \perp (ABC)$, suy ra $((ABC);(AMN)) = \widehat{(SA;SD)} = \widehat{ASD}$. Ta có: $AD = 2R = \dfrac{BC}{\sin A} = a\sqrt{2}$. Trong ΔASD có: $\tan\widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = 1 \Rightarrow \widehat{ASD} = 45°$.

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Biết rằng $SA \perp (ABC)$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBM), (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{x},\ \overrightarrow{BC}=\vec{y}$. Ta có

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BM}=\left(-\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}\right).\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{y}^2-\vec{x}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.2a^2-a^2\right)=0.$$

Suy ra $AN\perp BM$. Kết hợp với giả thiết $SA\perp(ABC)$ suy ra $BM\perp(SAN)$. Do đó $(SBM)\perp(SAN)$.

Gọi H là giao điểm của AN và BM. Theo chứng minh trên ta có $AH\perp BM$ nên $\left(\widehat{(SBM),(ABC)}\right)=\widehat{SHA}=60^0$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABN với đường cao BH ta có

$$AH.AN=AB^2\Leftrightarrow AH=\frac{AB^2}{AN}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông SAH ta có $SA=AH.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3}=a\sqrt{2}.$

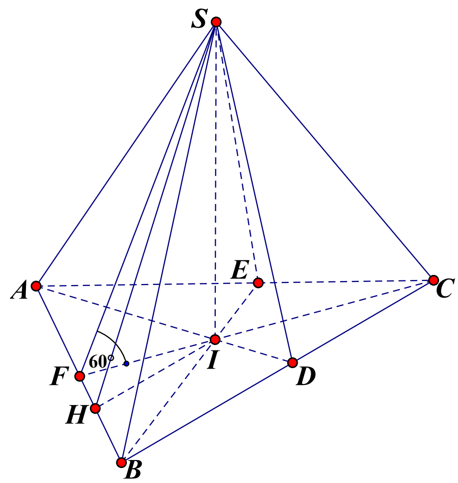
Từ đó suy ra $V_{SABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\left(\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}\right)=\frac{a^3}{3}.$

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=5$ cm, $BC=6$ cm, $CA=7$ cm. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC. Các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) đều tạo với đáy một góc $60°$. Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác ABC với $D\in BC$, $E\in AC$, $F\in AB$. Thể tích $S.DEF$ gần với số nào sau đây?

A. 2,9 cm^3 **B.** 4,1 cm^3 **C.** 3,7 cm^3 **D.** 3,4 cm^3

Lời giải

Chọn D

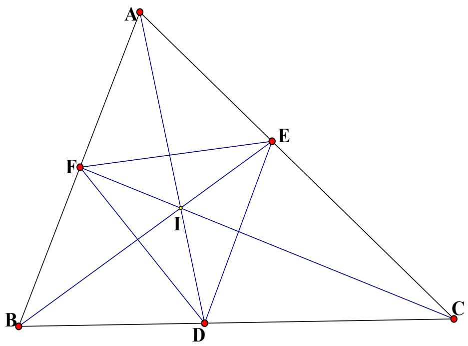


Vì các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) đều tạo với đáy một góc $60°$ và hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC nên ta có hình chiếu của S chính là tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC thì $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=9$.

Ta có : $S_{ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}=6\sqrt{6}$ và $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra chiều cao của hình chóp là : $h=r.\tan 60°=2\sqrt{2}$



Vì BE là phân giác của góc B nên ta có : $\dfrac{EA}{EC}=\dfrac{BA}{BC}$.

Tương tự : $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{CA}{CB}$, $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

Khi đó : $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{AE}{AC}.\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AB}{AB+BC}.\dfrac{AC}{AC+BC}$.

Tương tự : $\dfrac{S_{CED}}{S_{ABC}}=\dfrac{CA}{CA+AB}.\dfrac{CB}{CB+AB}$, $\dfrac{S_{BFD}}{S_{ABC}}=\dfrac{BC}{BC+CA}.\dfrac{BA}{BA+CA}$.

Do đó,

$S_{DEF}=S_{ABC}\left(1-\dfrac{ab}{(a+c)(b+c)}-\dfrac{bc}{(b+a)(c+a)}-\dfrac{ac}{(a+b)(c+b)}\right)$, với $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

$=\dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.S_{ABC}=\dfrac{210\sqrt{6}}{143}$.

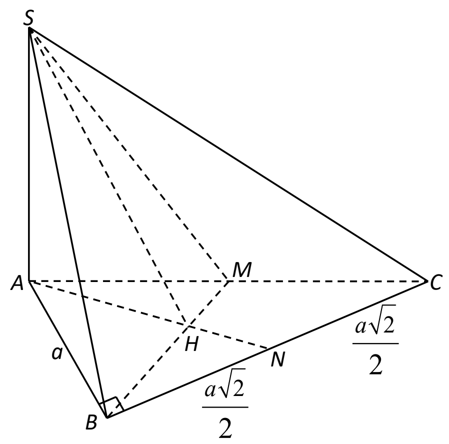
Suy ra $V_{S.DEF}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{210\sqrt{6}}{143}.2\sqrt{2}=\dfrac{280\sqrt{3}}{143}\ \left(\text{cm}^3\right)\approx 3,4\ \left(\text{cm}^3\right)$

Câu 89. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Biết rằng $SA \perp (ABC)$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBM), (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $SABC$ theo a.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$. Ta có

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BM} = \left(-\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}\right).\frac{1}{2}\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{y}^2 - \vec{x}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.2a^2 - a^2\right) = 0.$$

Suy ra $AN \perp BM$. Kết hợp với giả thiết $SA \perp (ABC)$ suy ra $BM \perp (SAN)$. Do đó $(SBM) \perp (SAN)$.

Gọi H là giao điểm của AN và BM. Theo chứng minh trên ta có $AH \perp BM$ nên $\left((SBM),(ABC)\right) = \widehat{SHA} = 60^0$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABN với đường cao BH ta có

$$AH.AN = AB^2 \Leftrightarrow AH = \frac{AB^2}{AN} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông SAH ta có $SA = AH.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3} = a\sqrt{2}$.

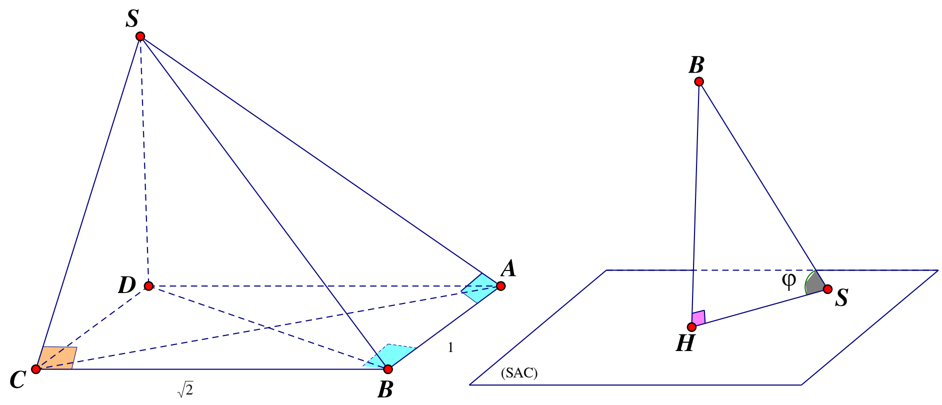
Từ đó suy ra $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\left(\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2}\right) = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, $AB = 1, AC = \sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$, $SB > 2$ và $\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ với φ là góc hợp bởi giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{1}{3}$. **C.** $V = \dfrac{1}{2}$. **D.** $V = \dfrac{1}{6}$

Lời giải

Chọn B



Hạ $SD\perp(ABC)$ tại D, ta có

$$\left.\begin{matrix} BA\perp SA \\ BA\perp SD \end{matrix}\right\}\Rightarrow BA\perp(SAD)\Rightarrow BA\perp AD.$$ Chứng minh tương tự $BC\perp CD$

Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Hạ $BH\perp(SAC)$ tại H suy ra $\left(SB,(SAC)\right)=\widehat{BSH}=\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\sin\varphi=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\sin\varphi=\frac{BH}{BS}=\frac{BH}{\sqrt{BD^2+SD^2}}=\frac{d}{\sqrt{3+x^2}}\Rightarrow\sin^2\varphi=\frac{d^2}{3+x^2}$ với $d=d\left(B,(SAC)\right)=BH;\ x=SD.$

(điều kiện $x>1$ vì $SB>2\Leftrightarrow SB^2>4\Leftrightarrow SD^2+BD^2>4\Leftrightarrow x^2+3>4\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow x>1$)

Mặt khác $d=d\left(B,(SAC)\right)=d\left(D,(SAC)\right)$ suy ra

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{DC^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{3x^2+2}{2x^2}\Leftrightarrow d^2=\frac{2x^2}{3x^2+2}$$

Suy ra $\frac{1}{10}=\frac{2x^2}{\left(3x^2+2\right)\left(3+x^2\right)}\Leftrightarrow 3x^4-9x^2+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{matrix} x^2=1(L) \\ x^2=2 \end{matrix}\right.\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\Rightarrow SD=\sqrt{2}$

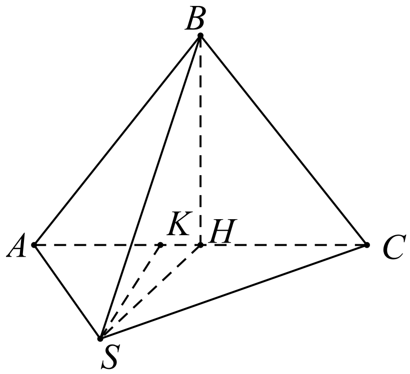
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB.BC\right)SD=\frac{1}{3}$

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng $\left(SAC\right)$ vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$, SAB là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$, $BC=a\sqrt{3}$, đường thẳng SC tạo với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ góc 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3.\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3.\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3.\sqrt{6}}{6}$. **D.** $2a^3\sqrt{6}$.

Lời giải:

Chọn C



Ta có $BA = BC = a\sqrt{3} \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại B.

Gọi H là trung điểm của AC thì $BH \perp AC$. Mà $(BAC) \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

Lại có $BA = BS = BC = a\sqrt{3} \Rightarrow HA = HS = HC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Gọi K là hình chiếu của S trên AC thì $SK \perp (ABC)$ do $(SAC) \perp (ABC)$.

Khi đó $(SC,(ABC)) = (SC, SK) = \widehat{SCK} = \widehat{SCA} = 60^0$.

ΔABC vuông tại S nên $SC = SA.\cot 60^0 = a\sqrt{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = a \Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2a$.

Suy ra $S_{\Delta SAC} = \dfrac{1}{2}SA.SC = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{3}.a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $BH = \sqrt{AB^2 - \dfrac{AC^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

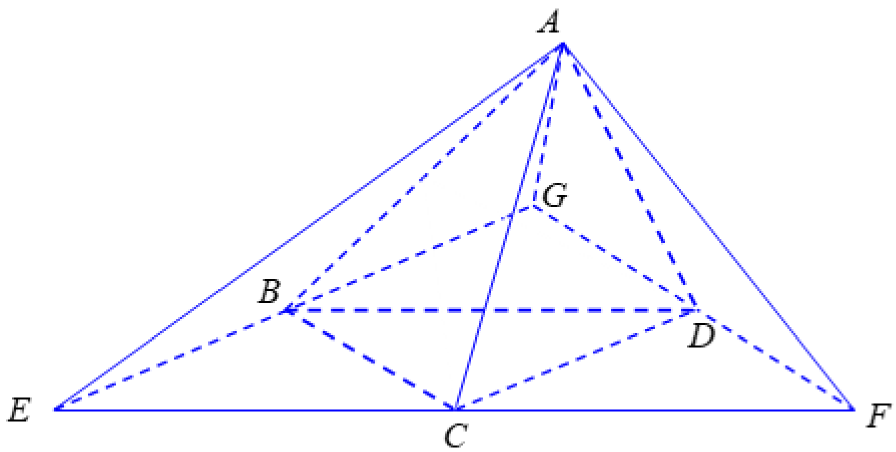
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}BH.S_{\Delta SAC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD = BC = 3$; $AC = BD = 4$; $AB = CD = 2\sqrt{3}$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{2047}}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2470}}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2474}}{12}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2740}}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Từ các đỉnh của tam giác BCD ta kẻ các đường thẳng song song với cạnh đối diện chúng tạo thành tam giác EFG có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác BCD.

Các tam giác AEF, AFG, AGE là các tam giác vuông tại A nên ta có:

$AE^2 + AF^2 = EF^2 = 64\ (1)$; $AF^2 + AG^2 = FG^2 = 36\ (2)$ và $AE^2 + AG^2 = EG^2 = 48\ (3)$.

Từ (1), (2), (3) ta có: $2(AE^2 + AF^2 + AG^2) = 148 \Rightarrow AE^2 + AF^2 + AG^2 = 74\ \ (4)$.

Từ (1), (4) ta có: $AG^2 = 10 \Rightarrow AG = \sqrt{10}$.

Từ (2), (4) ta có: $AE^2 = 38 \Rightarrow AE = \sqrt{38}$.

Từ $(3),(4)$ ta có: $AF^2 = 26 \Rightarrow AF = \sqrt{38}$.

Thể tích khối chóp $A.EFG$ là : $V' = \frac{1}{6}AE.AF.AG = \frac{1}{6}\sqrt{9880} = \frac{1}{3}\sqrt{2470}$.

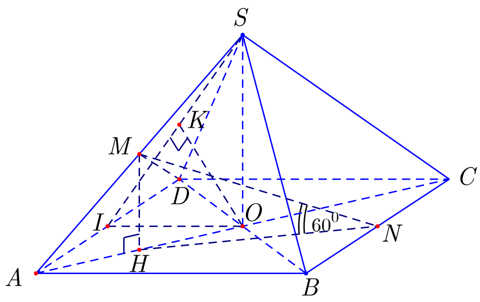
Do đó thể tích tứ diện $ABCD$ là : $V = \frac{1}{4}V' = \frac{\sqrt{2470}}{12}$.

Câu 93. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi $M;N$ lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là:

A. $a.\sqrt{\frac{15}{62}}$. **B.** $a.\sqrt{\frac{30}{31}}$. **C.** $a.\sqrt{\frac{15}{68}}$. **D.** $a.\sqrt{\frac{15}{17}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$.

Gọi H là trung điểm $OA \Rightarrow MH \,//\, SO$ mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH$ là hình chiếu vuông góc của MN lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó, $\left(\widehat{MN;(ABCD)}\right) = \widehat{MNH} = 60^0$.

Ta có:

$$\left.\begin{matrix} BC \,//\, AD \\ AD \subset (ADM) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \,//\, (ADM)$$

$$\Rightarrow d(BC;DM) = d(BC;(ADM)) = d(BC;(SAD)) = d(N \in BC;(SAD)) = 2d(O;(SAD)).$$

Gọi I là trung điểm AD, ta có $(SAD) \perp (SOI)$ theo giao tuyến SI. Kẻ $OK \perp SI \Rightarrow OK = d(O;(SAD))$

Tính được $NH = \frac{a\sqrt{10}}{4}; MH = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

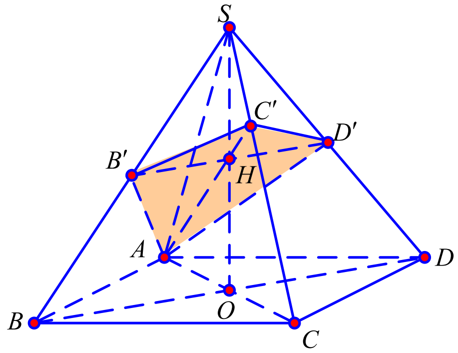
$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{62a}{15} \Rightarrow OK = d(O;(SAD)) = \frac{\sqrt{930}}{62} \Rightarrow d(N;(SAD)) = 2OK = \sqrt{\frac{30}{31}}.$$

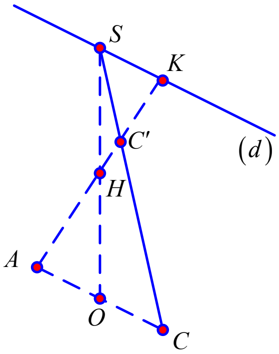
Câu 94. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi có $AC = a, BD = 2a$. Biết hai mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ cùng vuông góc với mặt đáy và tam giác SAC cân tại A. Lấy điểm B', D' lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Mặt phẳng qua $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{2a^3}{9}$. **C.** $\frac{a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{18}$.

Lời giải

Chọn D





Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì $SO \cap B'D' = H$. Khi đó H là trung điểm của SO và $C' = AH \cap SO$.

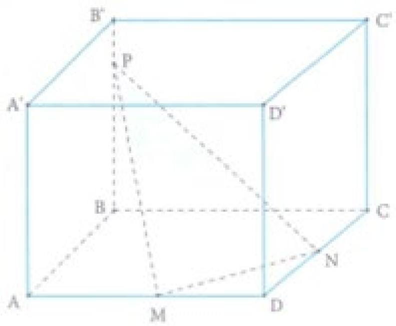
Dễ thấy $SA \perp (ABCD), SA = a$. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$ thì $V = \frac{a^3}{3}$.

Trong mặt phẳng (SAC): Ta kẻ $(d)//AC$ và AC' cắt (d) tại K. Khi đó áp dụng tính đồng dạng của các tam giác ta có: $\frac{OH}{SH} = \frac{OA}{SK} = 1 \Rightarrow SK = OA \Rightarrow \frac{SK}{AC} = \frac{1}{2}$; $\frac{SK}{AC} = \frac{SC'}{CC'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$.

Vì $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2}.V_{S.ABCD} = \frac{V}{2}$ nên ta có $\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow V_{S.AB'D'} = \frac{1}{8}V$ và $\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow V_{S.B'C'D'} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{V}{8}$.

Suy ra $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \frac{1}{8}V + \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{8}\left(1 + \frac{SC'}{SC}\right) = \frac{V}{6} = \frac{a^3}{18}$.

Câu 95. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, CD và P là điểm trên cạnh BB' sao cho $BP = 3PB'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lập phương thành hai khối lần lượt có thể tích V_1, V_2. Biết khối có thể tích V_1 chứa điểmA. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

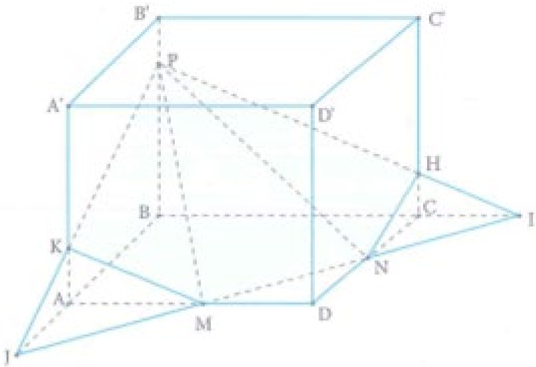


A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{71}$ **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$ **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{96}$

Lời giải

Chọn B

Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình lập phương là ngũ giác $MNHPK$ (như hình vẽ).



Khi đó ta có: $V_1 = V_{P.BIJ} - \left(V_{K.AMJ} + V_{H.CIN}\right)$ (*).

Ta có: DMN là tam giác vuông cân tại D.

Suy ra: ΔAMJ, ΔCIN đều là tam giác vuông cân.

Đặt $AB = 2a$, khi đó: $AJ = AM = CN = CI = a$ và $PB = \dfrac{3a}{2}$.

$\dfrac{KA}{PB} = \dfrac{JA}{JB} = \dfrac{a}{3a} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KA = \dfrac{1}{3}PB = \dfrac{a}{2}$.

Khi đó $HC = KA = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra: $\begin{cases} V_{K.AMJ} + V_{H.CIN} = 2V_{K.AMJ} = 2.\dfrac{1}{6}.AK.AJ.AM = 2.\dfrac{1}{6}.\dfrac{a}{2}.a.a = \dfrac{a^3}{6} \\ V_{P.BIJ} = \dfrac{1}{6}.BP.BI.BJ = \dfrac{1}{6}.\dfrac{3a}{2}.3a.3a = \dfrac{9a^3}{4} \end{cases} (**)$

Thay (**) vào (*) ta được: $V_1 = \dfrac{9a^3}{4} - \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{25a^3}{12}$

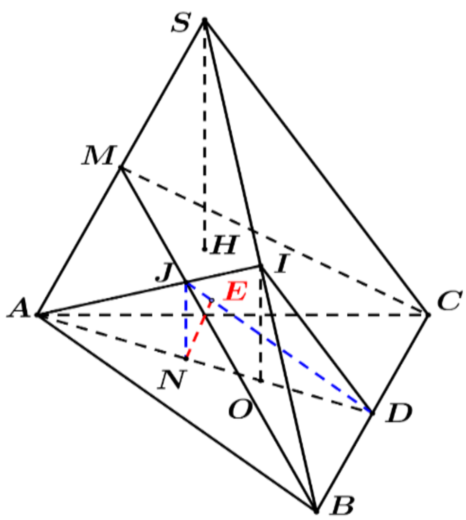
$\Rightarrow V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_1 = 8a^3 - \dfrac{25a^3}{12} = \dfrac{71a^3}{12} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{25}{71}$.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{12}$ **B.** $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$ **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ **D.** $V = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{12}$

Lời giải

Chọn B



Vì $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0 \Rightarrow S, A, B, C$ cùng thuộc mặt cầu đường kính SB.

Gọi D là trung điểm BC, I là trung điểm SB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Ta có $OI \perp (ABC)$.

Gọi H là điểm đối xứng với B qua $O \Rightarrow SH \perp (ABC)$(vì OI là đường trung bình ΔSHB).

Gọi $BM \cap AI = J$, ta có J trọng tâm ΔSAB.

Trong ΔAID, kẻ $JN // IO$. Khi đó, vì $BC \perp (JND)$ nên $(JND) \perp (MBC)$.

Kẻ $NE \perp JD$, ta có $NE \perp (MBC)$. Do đó $d(N;(MBC)) = NE$.

Ta có $\dfrac{d(A,(MBC))}{d(N,(MBC))} = \dfrac{AD}{ND} = \dfrac{AD}{AD - AN} = \dfrac{AD}{AD - \frac{2}{3}AO} = \dfrac{AD}{AD - \frac{4}{9}AD} = \dfrac{9}{5}$.

Suy ra, $d(N,(MBC)) = \dfrac{5}{9} d(A,(MBC)) = \dfrac{10a}{21}$.

Xét ΔJND có $\dfrac{1}{NE^2} = \dfrac{1}{ND^2} + \dfrac{1}{NJ^2}$ nên $NJ = \dfrac{10a}{3} \Rightarrow OI = \dfrac{3}{2} NJ = 5a \Rightarrow SH = 10a$.

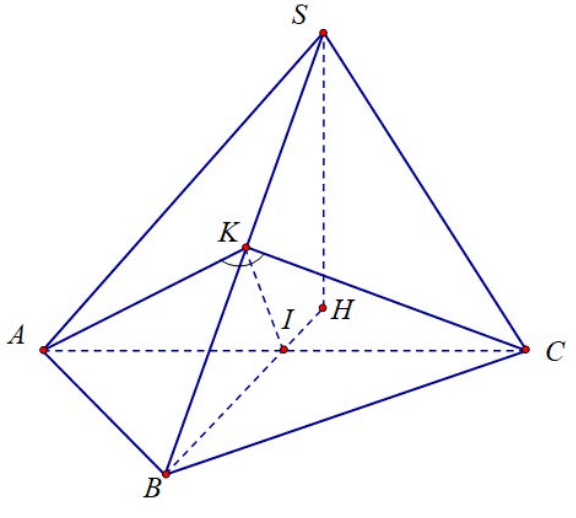
Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.10a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{IH}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là 60^o. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V = \dfrac{a^3}{9}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{18}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Dễ thấy hai tam giác SAB và SAC bằng nhau (cạnh chung SB), gọi K là chân đường cao hạ từ A trong tam giác SAB suy ra $((SAB),(SBC)) = \widehat{AKC}$.

Trường hợp 1: $\widehat{AKC} = 60°$ kết hợp I là trung điểm AC suy ra $\widehat{IKC} = 30°$.

Ta có $IB = IC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $BH = \dfrac{4}{3} BI = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại B ta được $AC \perp BI \Rightarrow IC \perp IK$.

Trong tam giác ICK vuông tại I có $\tan \widehat{IKC} = \dfrac{IC}{IK} \Leftrightarrow IK = \dfrac{IC}{\tan 30°} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Như vậy $IK > IB$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\widehat{AKC} = 120°$ tương tự phần trên ta có $\tan\widehat{IKC} = \dfrac{IC}{IK} \Leftrightarrow IK = \dfrac{IC}{\tan 60°} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Do $SB \perp (AKC) \Rightarrow SB \perp IK$ nên tam giác BIK vuông tại K và $BK = \sqrt{IB^2 - IK^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

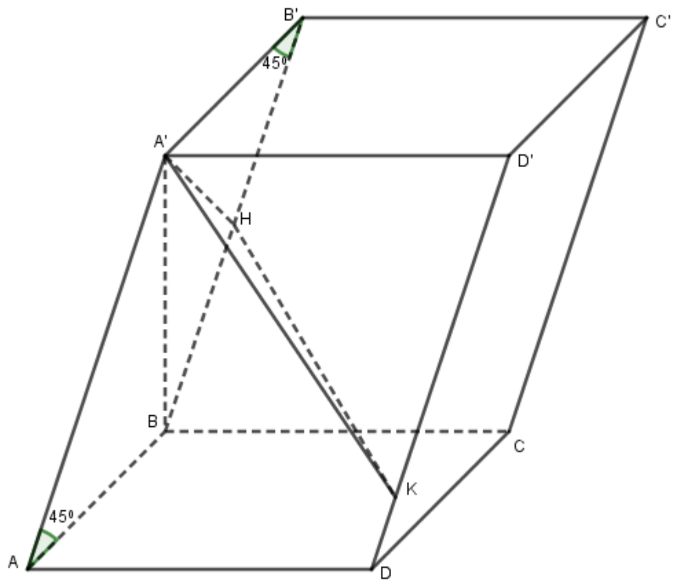
Như vậy tam giác BKI đồng dạng với tam giác BHS suy ra: $SH = \dfrac{IK.BH}{BK} = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2}{2}.\dfrac{2a}{3} = \dfrac{a^3}{9}$.

Câu 98. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và DD' bằng 1. Góc giữa mặt $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng $60°$. Thể tích khối hộp đã cho là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A' trên các đường thẳng BB' và DD'.

Ta có: $d(A;BB') = d(A';BB') = A'H = 1$, $d(A;DD') = d(A';DD') = A'K = 1$.

$$\begin{cases} \left(\widehat{AA',(ABCD)}\right) = 45° \\ A'B \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \widehat{A'AB} = 45° \quad (1).$$

$A'B \perp (ABCD) \Rightarrow A'B \perp AB \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra $\Delta A'AB$ là tam giác vuông cân tại $B \Rightarrow A'B = AB$

$\Rightarrow A'B = A'B' \Rightarrow H$ là trung điểm BB'.

Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng $(BB'C'C)$ và $(CC'D'D)$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'A'A)$ nên ta suy ra $\widehat{HA'K} = 60°$, mà $A'H = A'K = 1$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ $\Delta A'HK$ là tam giác đều $\Rightarrow S_{A'HK} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$A'H = 1 \Rightarrow BB' = 2$.

Lại có: $\begin{cases} A'H \perp BB' \\ A'K \perp BB' \\ A'H \cap A'K = \{A'\} \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (A'HK)$.

Do đó: $V_{A'B'D'.ABD} = BB'.S_{A'HK} = 2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{A'B'D'.ABD} = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Câu 99. Cho Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện:

$f(1) = -2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$ (1). Biết $f(2) = a + b.\ln 3$ $(a,\ b \in \mathbb{Q})$.

Giá trị của $2(a^2 + b^2)$ là:

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét trên đoạn $[1;2]$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho $(x+1)^2$, ta được:

$$\frac{x}{x+1}\cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}\cdot f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]' = \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]' \mathrm{d}x = \int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1}\cdot f(x) + C_1 = \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1}\cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C\ (2).$$

Theo giả thiết, $f(1) = -2\ln 2$ nên thay $x = 1$ vào phương trình (2), ta được:

$$\frac{1}{2}f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

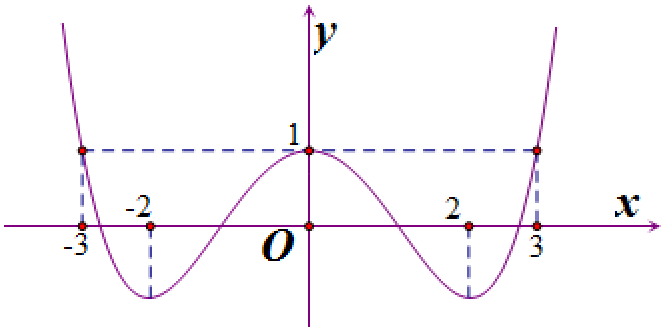
Thay $x = 2$ vào (2), ta được:

$$\frac{2}{3}f(2) = 2 - \ln 3 - 1 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3.$$

$\Rightarrow a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{3}{2}$. Vậy $2(a^2 + b^2) = 9$.

TÍNH ĐƠN ĐIỆU
HÀM LIÊN KẾT

Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(2x-1\right)+\dfrac{x^3}{3}+x^2-2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-6;-3\right)$. **B.** $\left(3;6\right)$. **C.** $\left(6;+\infty\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=2f'\left(2x-1\right)+x^2+2x-2=2f'\left(2x-1\right)+\left(x+1\right)^2-3$

Nhận xét: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)\le 1\Leftrightarrow -3\le x\le 3$ và $f'\left(x\right)\ge 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le -3\end{array}\right.$

Do đó ta xét các trường hợp

Với $-6<x<-3\Rightarrow -13<2x-1<-7$ suy ra $y'>0$ hàm số đồng biến (loại)

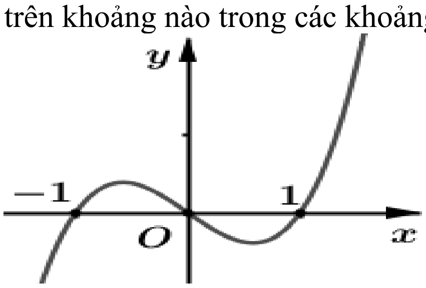
Với $3<x<6\Rightarrow 5<2x-1<11$ suy ra $y'>0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $6<x\Rightarrow 11<2x-1$ suy ra $y'>0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $-1<x<0\Rightarrow -3<2x-1<-1$ nên $2f'\left(2x-1\right)\le 2$ và $0<\left(x+1\right)^2-3<-2$ suy ra $y'<0$ hàm số đồng biến (nhận).

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)$ đồng biến

trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $\left(-\infty;-1\right)$. **B.** $\left(-1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

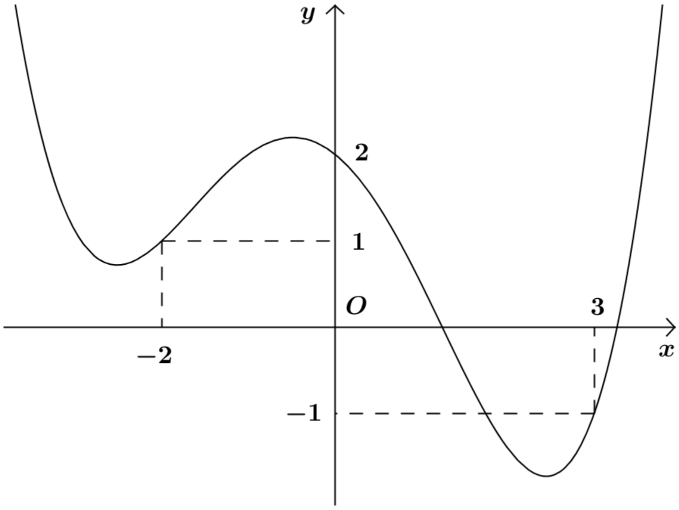
Lời giải

Chọn C

Ta có $g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2\right)$.

Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\f'\left(x^2\right)>0\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\f'\left(x^2\right)<0\end{cases}\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\-1<x^2<0\ \vee\ x^2>1\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\x^2<-1\ \vee\ 0<x^2<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\-1<x<0\end{array}\right.$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(x+1)+\frac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

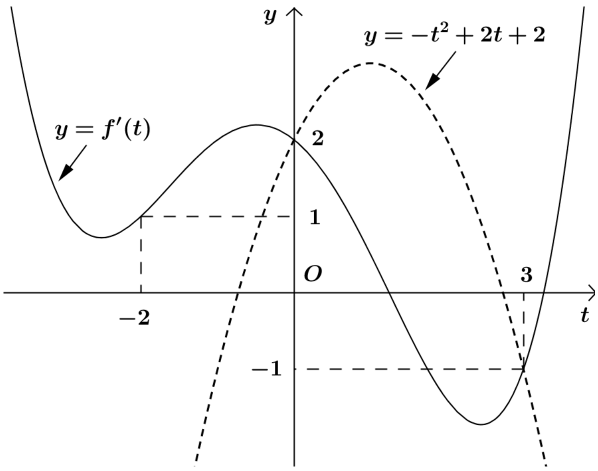
Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x+1)+x^2-3=f'(x+1)+(x+1)^2-2(x+1)-2$.

Khi đó $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'(x+1)\le -(x+1)^2+2(x+1)+2$ (1)

Đặt $t=x+1$. BPT (1) trở thành $f'(t)\le -t^2+2t+2$ (2)

Xét tương giao của ĐTHS $y=f'(t)$ và $y=-t^2+2t+2$

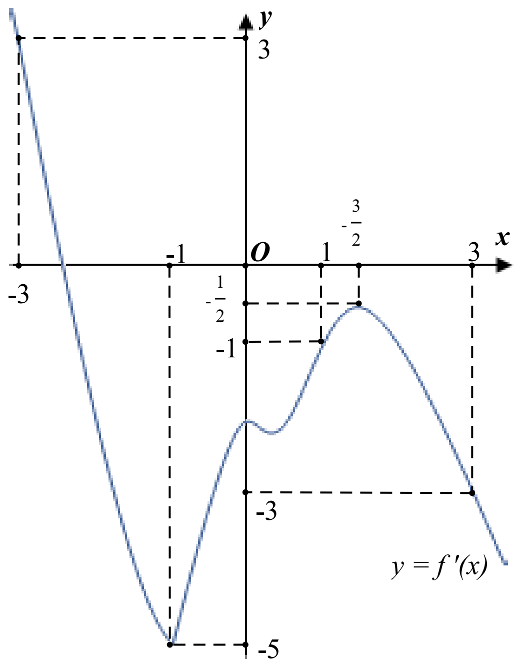


ta có nghiệm của BPT (2) là $0\le t\le 3 \Leftrightarrow 0\le x+1\le 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 2$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(x+1)+\frac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên $(-1;2)$.

Do đó ta chọn đáp án#**A**.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên.

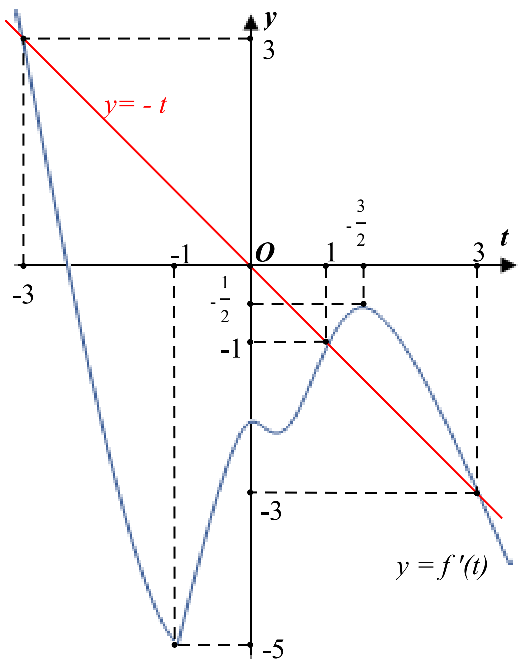


Hàm số $y=-2f(2-x)-x^2+4x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-3;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-3;3)$

Lời giải

Chọn B



$y=-2f(2-x)-x^2+4x$.

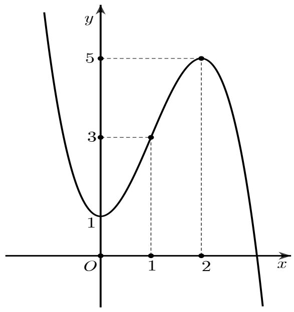
$\Rightarrow y'=2f'(2-x)-2x+4<0 \Leftrightarrow f'(2-x)<-(2-x)$

Đặt $2-x=t$ ta có $\Rightarrow f'(t)<-t$.

Đường thẳng $y=-t$ đi qua các điểm $(-3;3)$ và $(-1;1)$ nằm trên đồ thị $f'(t)$ do đó $f'(t)<-t$ trên $(-3;1)$ hay ta có:

$-3<2-x<1\Rightarrow x\in(1;5)$, mà $(1;3)\subset(1;5)$, vậy g(x) nghịch biến trên $(1;3)$.

Câu 5. Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(5-2x)+4x^2-10x$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(3;4)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra $y=f'(x)$ có hai điểm cực trị $A(0;1),B(2;5)$

Ta có $f''(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax$, do đó $y=f'(x)=\frac{ax^3}{3}-ax^2+b$ (1).

Thay tọa độ các điểm A,B vào (1) ta được hệ $\begin{cases} b=1 \\ \frac{8a}{3}-4a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-3 \end{cases}$.

Vậy $f'(x)=-x^3+3x^2+1$.

$g(x)=f(5-2x)+4x^2-10x$ có TXĐ là $\mathbb{R}$ ta suy ra.

Đạo hàm $g'(x)=-2[f'(5-2x)-4x+5]=-4(4x^3-24x^2+43x-22)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{4\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{4+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ BBT ta chọn đáp án **B**

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ được cho hình vẽ. Hàm số $y=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. (-2;0). **B.** (-4;-2). **C.** (0;2). **D.** (2;4).

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3	1	-1	2	4

Lời giải

Chọn B

Đặt $y = g(x) = f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$

TXĐ: $D=[-1;3]$

Có $y' = -\frac{1}{2}f'(1-\frac{x}{2})+1$

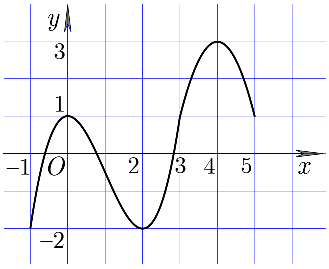
Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến khi:

$y' \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)+1 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le f'\left(1-\frac{x}{2}\right)$

Dựa vào bảng biến thiên có:

$2 \le f'\left(1-\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le 1-\frac{x}{2} \le x_0; x_0 \in (-1;0) \\ 2 \le 1-\frac{x}{2} \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le -\frac{x}{2} \le x_0 - 1 \\ 1 \le -\frac{x}{2} \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 \ge x \ge 2-2x_0 \\ -2 \ge x \ge -4 \end{array}\right.$.

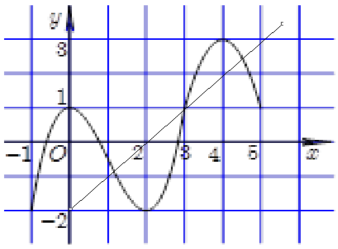
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C



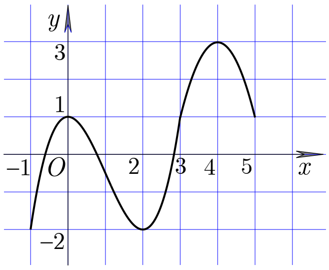
Ta có $y=-2f(2-x)+x^2 \Rightarrow y' = -(2-x)' 2f'(2-x)+2x$

$y' = 2f'(2-x)+2x \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x)+x<0 \Leftrightarrow f'(2-x) < (2-x)-2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ nguyên liên tiếp là $\left[\begin{array}{l} 1<x_1<2 \\ x_2=3 \end{array}\right.$ và cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x)<x-2$ trên miền $2<x<3$ nên $f'(2-x)<(2-x)-2$ trên miền $2<2-x<3 \Leftrightarrow -1<x<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

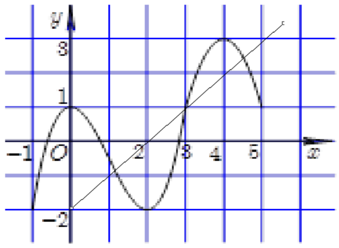
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;\,-2)$. **B.** $(-2;\,-1)$. <u>**C.**</u> $(-1;\,0)$. **D.** $(0;\,2)$.

Lời giải

Chọn C



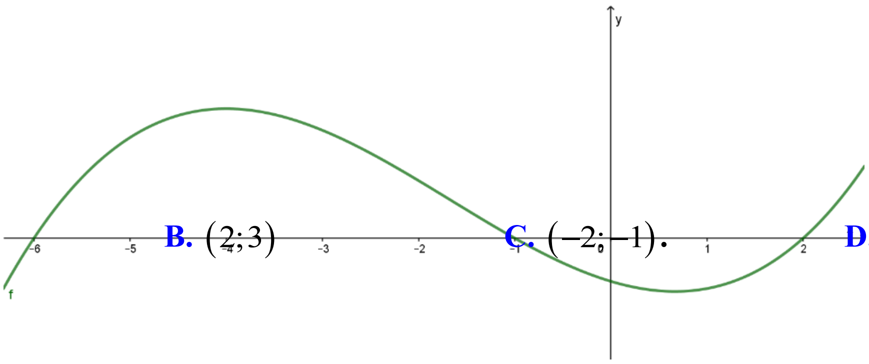
Ta có $y=-2f(2-x)+x^2 \Rightarrow y'=-(2-x)'\,2f'(2-x)+2x$

$y'=2f'(2-x)+2x \;\Rightarrow y'<0 \Leftrightarrow f'(2-x)+x<0 \Leftrightarrow f'(2-x)<(2-x)-2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ nguyên liên tiếp là $\left[\begin{array}{l}1<x_1<2\\ x_2=3\end{array}\right.$ và cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x)<x-2$ trên miền $2<x<3$ nên $f'(2-x)<(2-x)-2$ trên miền $2<2-x<3 \Leftrightarrow -1<x<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;\,0)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(3-x^2)+2018$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải:

Chọn A

Đặt

$y=g(x)=f(3-x^2)+2018$.

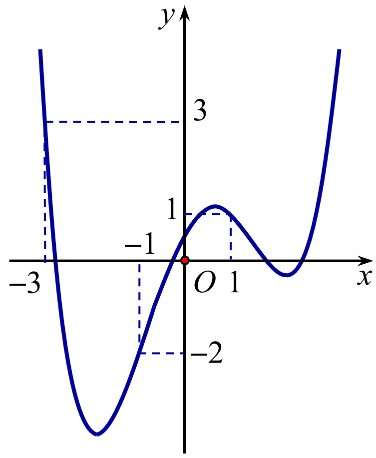
Ta có $g'(x)=-2x.f'(3-x^2)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(3-x^2)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ 3-x^2=-6\\ 3-x^2=-1\\ 3-x^2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\\ x=\pm 2\\ x=\pm 3\end{array}\right.$$

Ta lập được bảng dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty \;\; -3 \;\; -2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; +\infty$
$g'(x)$	$- \;\; 0 \; + \; 0 \; - \;\; 0 \; + \; 0 \; - \;\; 0 \; + \; 0 \; - \;\; 0 \; +$

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Hàm đồng biến trên khoảng $\left(-3;-1\right)$.

B. Hàm đồng biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$.

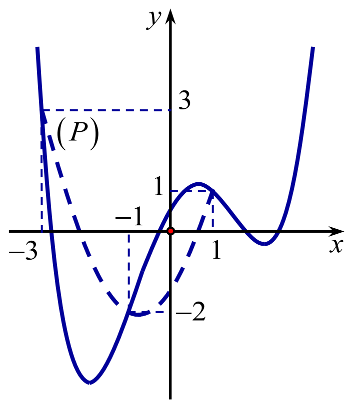
C. Nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

D. Hàm đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Căn cứ vào đồ thị $y=f'\left(x\right)$, ta có: $\begin{cases} f'\left(-1\right)=-2 \\ f'\left(1\right)=1 \\ f'\left(-3\right)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'\left(-1\right)=0 \\ g'\left(1\right)=0 \\ g'\left(-3\right)=0 \end{cases}$



Ngoài ra, vẽ đồ thị $\left(P\right)$ của hàm số $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (đường nét đứt), ta thấy $\left(P\right)$ đi qua các điểm $\left(-3;3\right)$, $\left(-1;-2\right)$, $\left(1;1\right)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4};-\frac{33}{16}\right)$. Rõ ràng

Trên khoảng $\left(-1;1\right)$ thì $f'\left(x\right)>x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$, nên $g'\left(x\right)>0\ \ \forall x\in\left(-1;1\right)$

Trên khoảng $\left(-3;-1\right)$ thì $f'\left(x\right)<x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$, nên $g'\left(x\right)<0\ \ \forall x\in\left(-3;-1\right)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y=g'\left(x\right)$ trên $\left[-3;1\right]$ như sau:

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậyhàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$; $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-2)^2}<0,\forall x\neq 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Bảng biến thiên của hàm số $f(|x|)$:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	|	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

*) Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

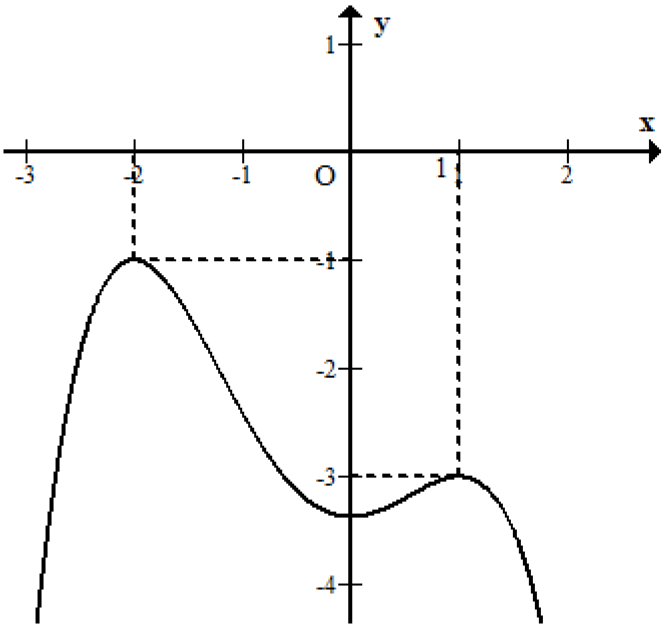
$\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(|x|)=-m$ có 4 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $d: y=-m$ cắt đồ thị hàm số $f(|x|)$ tại 4 điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $f(|x|)\Rightarrow$ không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m, $m \in Z, -2020 \le m \le 2020$ để hàm số $g(x) = f(x^2) + mx^2\left(x^2 + \frac{8}{3}x - 6\right)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ suy ra $g'(x) \ge 0, \forall x \in (-3;0)$.

$2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3) \ge 0, \forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow f'(x^2) - 2m(-x^2 - 2x + 3) \le 0, \forall x \in (-3;0)$

$\Leftrightarrow f'(x^2) \le 2m(-x^2 - 2x + 3), \forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}, \forall x \in (-3;0)$

$\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{(-3;0)} \dfrac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}$.

Ta có $-3 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \Rightarrow f'(x^2) \le -3$ dấu "=" khi $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

$-x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow 0 < -x^2 - 2x + 3 \le 4, \forall x \in (-3;0)$

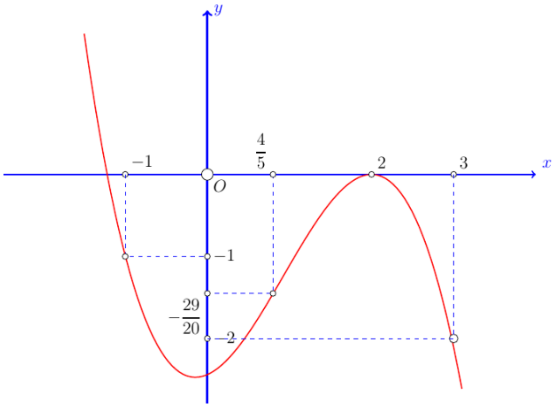
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{-x^2 - 2x + 3} \ge \dfrac{1}{4}$, dấu "=" khi $x = -1$.

Suy ra $\dfrac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} \le \dfrac{-3}{2.4} = \dfrac{-3}{8}$, $\forall x \in (-3;0)$, dấu "=" khi $x = -1$.

$\Rightarrow \max\limits_{(-3;0)} \dfrac{f'(x^2)}{2(x^2 + 2x + 3)} = -\dfrac{3}{8}$.

Vậy $m \ge -\dfrac{3}{8}$, mà $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 \le m \le 2020$ nên có 2021 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.

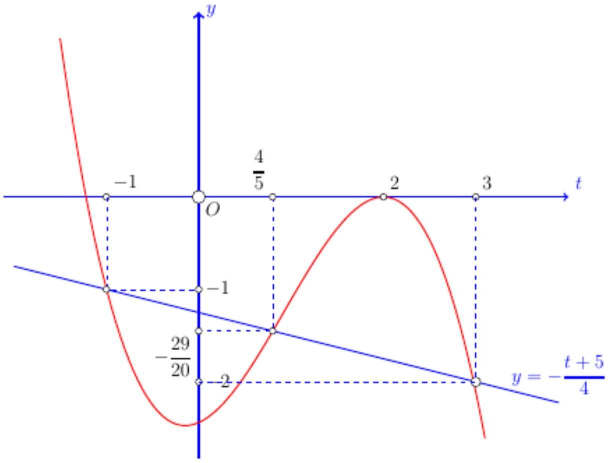


Hàm số $g(x)=f(1-4x)+2x^2-6x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-1;\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{20};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A



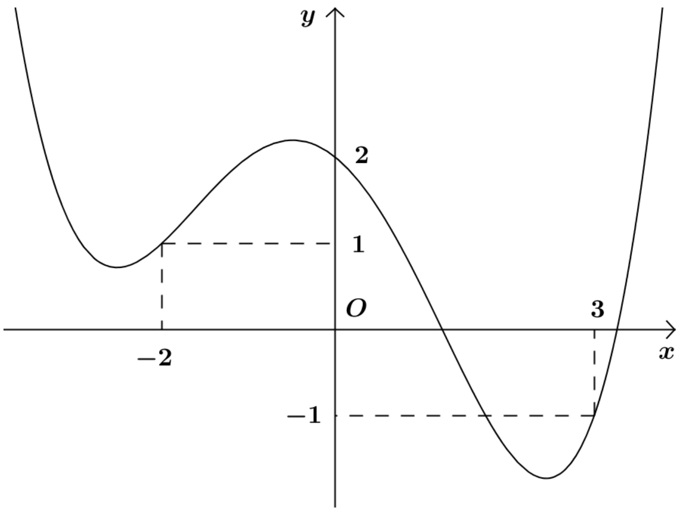
Có $g'(x)=-4f'(1-4x)+4x-6=-4\left[f'(1-4x)-x+\frac{3}{2}\right]=-4\left[f'(1-4x)+\frac{1}{4}(1-4x)+\frac{5}{4}\right]$.

Đặt $t=1-4x\Rightarrow g'(x)=-4\left[f'(t)-\left(-\frac{t+5}{4}\right)\right]$

$g(x)$ nghịch biến khi $-4\left[f'(t)-\left(-\frac{t+5}{4}\right)\right]\le 0\Leftrightarrow f'(t)-\left(-\frac{t+5}{4}\right)\ge 0\Leftrightarrow f'(t)\ge -\frac{t+5}{4}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le -1\\ \frac{4}{5}\le t\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-4x\le -1\\ \frac{4}{5}\le 1-4x\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{20}\end{array}\right..$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(x+1)+\frac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

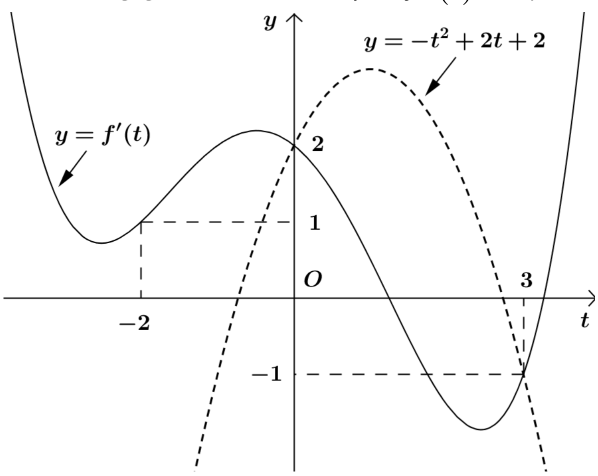
Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x+1)+x^2-3=f'(x+1)+(x+1)^2-2(x+1)-2$.

Khi đó $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'(x+1)\le -(x+1)^2+2(x+1)+2 \quad (1)$

Đặt $t=x+1$. BPT (1) trở thành $f'(t)\le -t^2+2t+2 \qquad (2)$

Xét tương giao của ĐTHS $y=f'(t)$ và $y=-t^2+2t+2$



ta có nghiệm của BPT (2) là $0\le t\le 3 \Leftrightarrow 0\le x+1\le 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 2$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(x+1)+\dfrac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên $(-1;2)$.

Do đó ta chọn đáp án#**A.**

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ trong đó $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

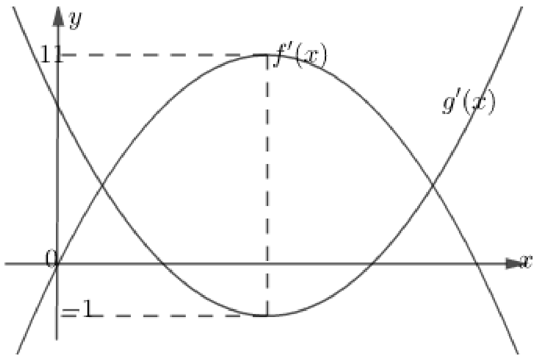
Từ $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019 \Rightarrow f'(1-x)=x(3-x)g(1-x)+2019$

Nên đạo hàm của hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ là

$y'=-x(3-x).g(1-x)-2019+2019=-x(3-x)g(1-x)$.

Xét bất phương trình $y'<0 \Leftrightarrow x(3-x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$, do $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 16. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)-a^2x+2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến $(\alpha;\beta)$. Số giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

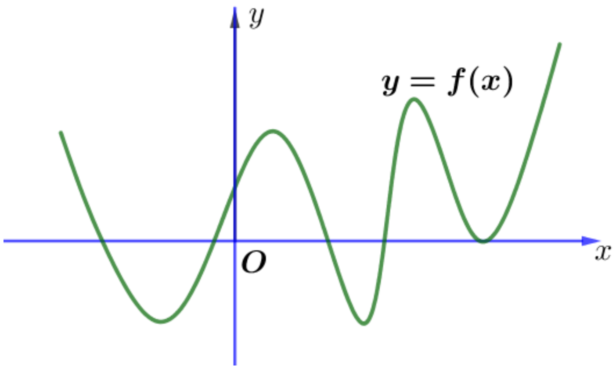
Hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)-a^2x+2021$ có đạo hàm $h'(x)=f'(x)-g'(x)-a^2$.

Hàm số đồng biến khi $h'(x)=f'(x)-g'(x)-a^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2\le f'(x)-g'(x)$.

Quan sát đồ thị ta thấy $f'(x)-g'(x)\ge 12$, suy ra $a^2\le 12$.

Vậy giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là $\{1;2;3\}$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị biểu diễn như hình vẽ và đồ thị đạo hàm không tiếp xúc với trục hoành. Số nghiệm của phương trình $f(x).4^{f'(x)}+f'(x).2^{f(x)}=f(x)+f'(x)$ tương ứng là:



A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta đã biết: $\dfrac{a^t-1}{t}>0;\ \forall a>1, t\ne 0$

Phương trình đã cho trở thành: $f(x)\left(4^{f'(x)}-1\right)+f'(x)\left(2^{f(x)}-1\right)=0.$

Nhận thấy $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$ thỏa mãn phương trình đã cho. Số nghiệm phương trình $f'(x)=0$ là 5 và số nghiệm phương trình $f(x)=0$ là 5 (nhưng có một nghiệm trùng nhau tại điểm đồ thì hàm số $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành).

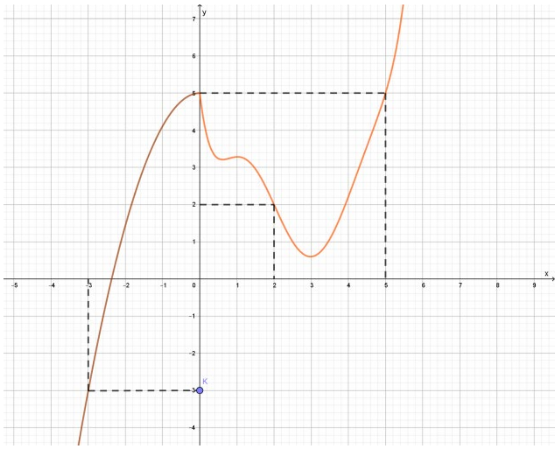
Khi $\begin{cases} f(x)\ne 0 \\ f'(x)\ne 0 \end{cases}$: chia cả hai vế của pt cho $f(x).f'(x)$, ta được: $\dfrac{4^{f'(x)}-1}{f'(x)}+\dfrac{2^{f(x)}-1}{f(x)}=0$ (1)

Mà $\dfrac{4^{f'(x)}-1}{f'(x)}>0;\ \dfrac{2^{f(x)}-1}{f(x)}>0;\ \forall f'(x), f(x)\neq 0.$

Do đó pt (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình có 9 nghiệm.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;\dfrac{-1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(\dfrac{-1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\dfrac{-1}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn A

$g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$

$g(x)=f(-2x+1)+(-2x^2+2x+4)$

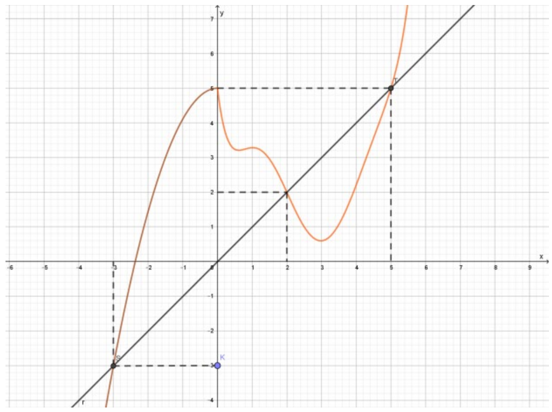
$g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2$

$g'(x)=-2\left[f'(-2x+1)+2x-1\right]$

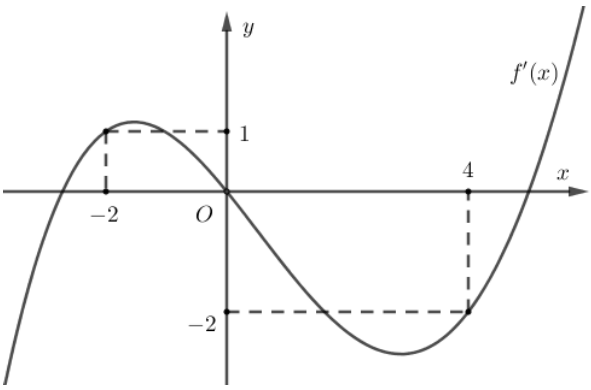
Để hàm số đồng biến thì $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)<-2x+1$

Dựa vào đồ thị ta có $2<-2x+1<5$

$\Rightarrow -2<x<\dfrac{-1}{2}$



Câu 19. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.

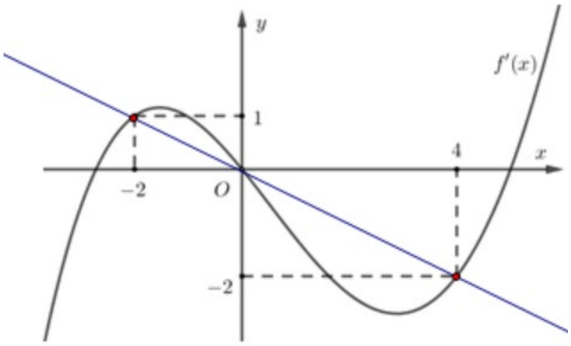


Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn A



Có $g'(x) = -2f'(1-2x) + 2x - 1$.

Đặt $t = 1-2x \Rightarrow g'(x) = -2f'(t) - t = -2\left[f'(t) - \left(-\frac{t}{2}\right)\right]$

$g(x)$ nghịch biến khi $-2\left[f'(t) - \left(-\frac{t}{2}\right)\right] \le 0 \Leftrightarrow f'(t) - \left(-\frac{t}{2}\right) \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le t \le 0 \\ t \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ x \le \frac{-3}{2} \end{array}\right.$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1, +\infty)$. **B.** $(-\infty, -1)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0, 2)$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3f'(x+2) = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow f'(x+2) = x^2 - 1$.

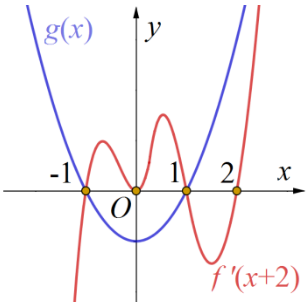
Để hàm số đồng biến $\Leftrightarrow f'(x+2) - x^2 + 1 > 0$.

$$f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=1 \\ x+2=2 \\ x+2=3 \\ x+2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x) = x^2 - 1$ ta có đồ thị:

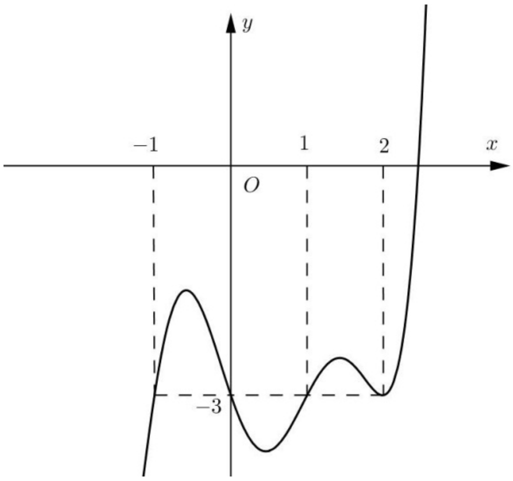


Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $(-1;0)$ và $(0;1)$: $\begin{cases} f'(x+2)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x+2)>g(x)$.

Hay $f'(x+2)-x^2+1>0$.

Vậy hàm số $y=3f(x)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$

$\Rightarrow g'(x)=(4x-1)f'\left(2x^2-x\right)+12x-3 =(4x-1)\left[f'\left(2x^2-x\right)+3\right]$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-1=0 \\ f'\left(2x^2-x\right)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ 2x^2-x=-1\left(\text{vô nghiệm}\right) \\ 2x^2-x=1 \\ 2x^2-x=0 \\ 2x^2-x=2\left(\text{nghiệm kép loại}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

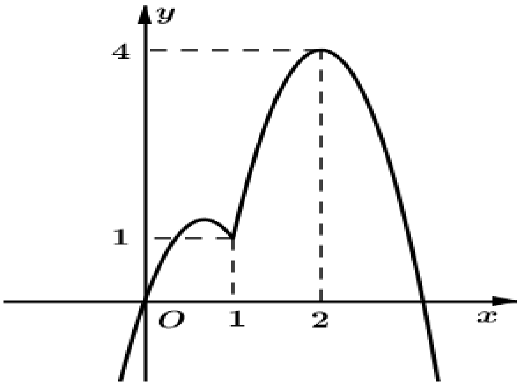
Xét dấu $g'(x)$ ta được $g'(x)>0, \forall x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Mà $\left(-\dfrac{1}{4};0\right)\subset\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ nên hàm số $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{4};0\right)$.

------------- HẾT -------------

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau

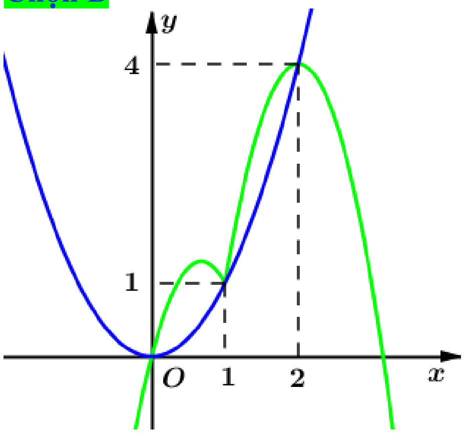


Hàm số $y=\left|3f(x)-x^3\right|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn B



Xét hàm số $g(x)=3f(x)-x^3\Rightarrow g'(x)=3\left[f'(x)-x^2\right]$.

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2$ (1).

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số $y=f'(x)$ và $y=x^2$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=x^2$, ta có:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Quan sát đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=x^2$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ ta thấy.

•Với $x\in(-\infty;0)$ hoặc $x\in(2;+\infty)$ thì $f'(x)\geq x^2\Rightarrow f'(x)-x^2\leq 0\Leftrightarrow g'(x)\leq 0$.

• Với $x\in(0;2)\Rightarrow f'(x)\geq x^2\Rightarrow f'(x)-x^2\geq 0\Leftrightarrow g'(x)\geq 0$.

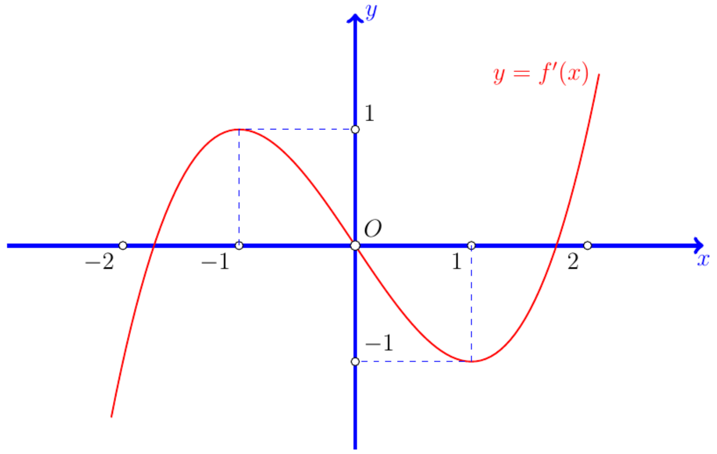
Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$\lvert g(x)\rvert$			0		$y=0$		$g(2)$	0	

Có $f(0)=0 \Rightarrow g(0)=0$. Từ bảng biến thiên suy ra dồ thị hàm số $y=|g(x)|$ có được bằng cách bỏ phần phía dưới trục hoành và lấy đối xứng phần bị bỏ đối xứng qua trục hoành.

Do đó suy ra hàm số $y=|3f(x)-x^3|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và $(a;+\infty)$ với $g(a)=0$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.

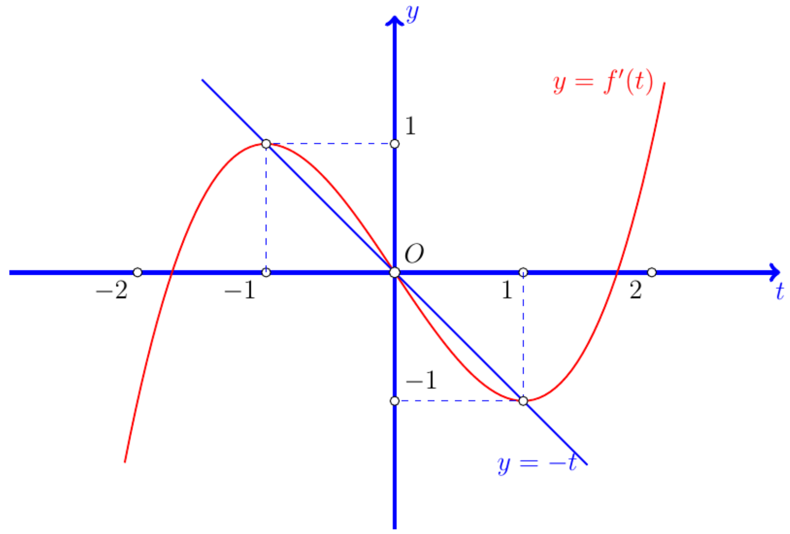


Hàm số $g(x)=f(x^3)+\dfrac{x^6}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

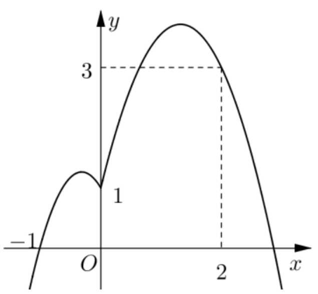


Có $g'(x)=3x^2f'(x^3)+3x^5=3x^2\left[f'(x^3)-(-x^3)\right]$

$g(x)$ đồng biến khi $g'(x)=3x^2\left[f'(x^3)-(-x^3)\right]\ge 0 \Rightarrow f'(x^3)\ge(-x^3)$ (1).

Đặt $t=x^3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow f'(t)\ge -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le t\le 0\\ t\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x^3\le 0\\ x^3\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x\le 0\\ x\ge 1\end{array}\right.$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1)=0$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



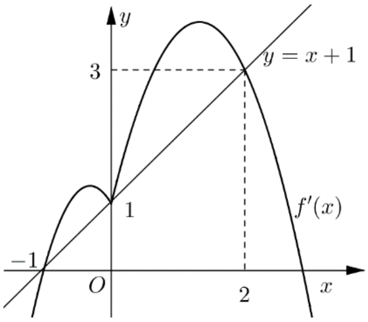
Hàm số $y=\left|2f(x-1)-x^2\right|$ đồng biến trên khoảng

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=2f(x-1)-x^2 \Rightarrow g'(x)=2[f'(x-1)-(x-1)-1]$



Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=x+1$ ta có:

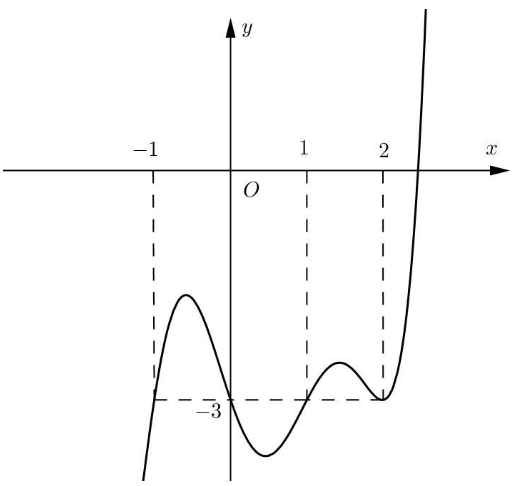
$g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x-1)>(x-1)+1 \Leftrightarrow -1<x-1<2 \Leftrightarrow 0<x<3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=\left|2f(x-1)-x^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f(2x^2-x)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x)=f(2x^2-x)+6x^2-3x$

$\Rightarrow g'(x)=(4x-1)f'(2x^2-x)+12x-3 =(4x-1)\left[f'(2x^2-x)+3\right]$.

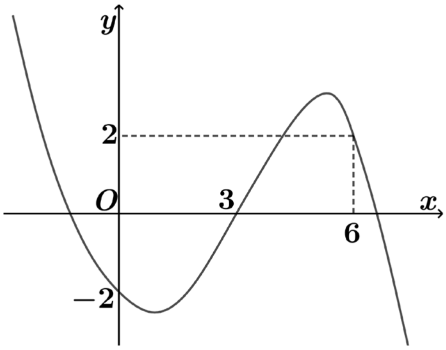
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-1=0\\ f'(2x^2-x)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ 2x^2-x=-1(\text{vô nghiệm})\\ 2x^2-x=1\\ 2x^2-x=0\\ 2x^2-x=2(\text{nghiệm kép loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ x=1\\ x=-\frac{1}{2}\\ x=0\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Xét dấu $g'(x)$ ta được $g'(x)>0,\forall x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Mà $\left(-\frac{1}{4};0\right)\subset\left(-\frac{1}{2};0\right)$ nên hàm số $g(x)=f(2x^2-x)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(3-x)-\frac{x^2}{3}$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(1;3)$.

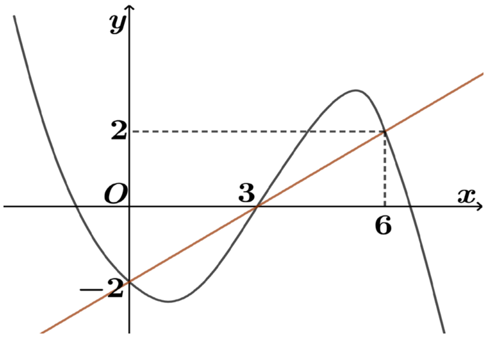
Lời giải

Chọn A

Xét $g'(x)=-f'(3-x)-\frac{2x}{3}$. Ta có $g'(x)\le 0\Leftrightarrow -f'(3-x)-\frac{2x}{3}\le 0\Leftrightarrow f'(3-x)\ge-\frac{2x}{3}$ (1)

Đặt $t=3-x\Rightarrow(1)\Leftrightarrow f'(t)\ge-\frac{2(3-t)}{3}\Leftrightarrow f'(t)\ge\frac{2t-6}{3}$ (2).

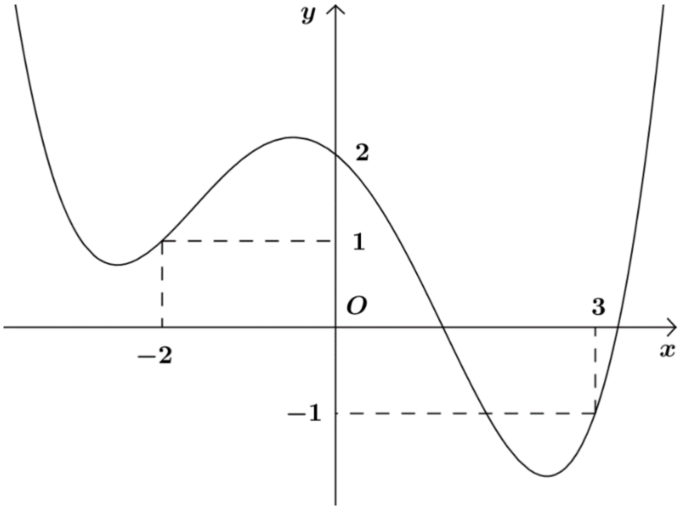
Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy, vẽ đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=\frac{2t-6}{3}$ như hình vẽ



Dựa vào đồ thị, ta thấy $f'(t) \ge \frac{2t-6}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le 0 \\ 3 \le t \le 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x \le 0 \\ 3 \le 3-x \le 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ -3 \le x \le 0 \end{array}\right.$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ -3 \le x \le 0 \end{array}\right.$ nên $g(x)$ nghịch biến trong $(3;+\infty)$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x+1) + \frac{x^3}{3} - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

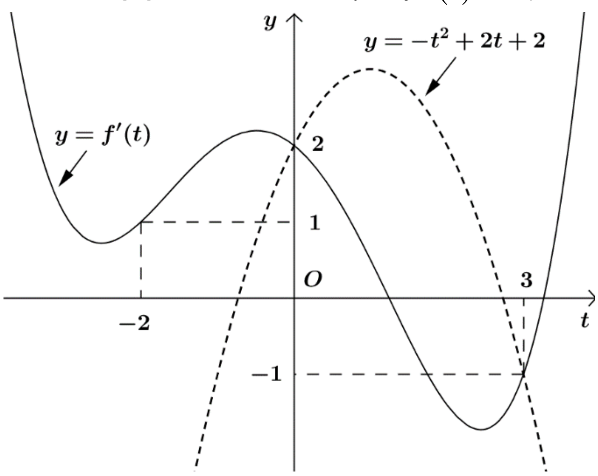
Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x+1) + x^2 - 3 = f'(x+1) + (x+1)^2 - 2(x+1) - 2$.

Khi đó $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(x+1) \le -(x+1)^2 + 2(x+1) + 2 \quad (1)$

Đặt $t = x+1$. BPT (1) trở thành $f'(t) \le -t^2 + 2t + 2 \qquad (2)$

Xét tương giao của ĐTHS $y = f'(t)$ và $y = -t^2 + 2t + 2$



ta có nghiệm của BPT (2) là $0 \le t \le 3 \Leftrightarrow 0 \le x+1 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$.

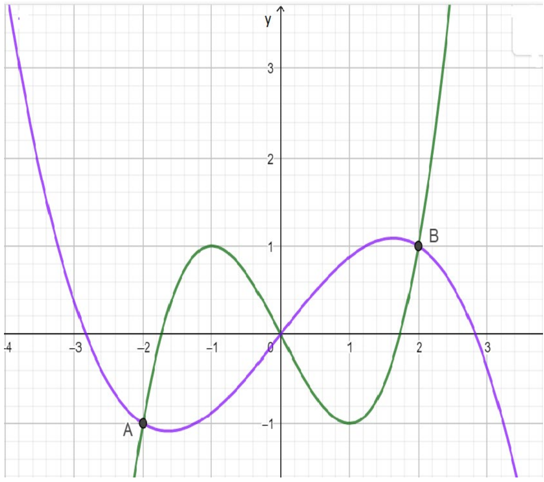
Suy ra hàm số $g(x)=f(x+1)+\frac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên $(-1;2)$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f'(x)$,có đồ thị như hình vẽ.Tổng tất cả các giá trị nguyên của x với $x\in(-2;2020)$ để hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x+2}\right)+\frac{1}{32}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$ nghịch biến là:

A. 2039187. **B.** 2041207. **C.** 2039189. **D.** 2041209.

Lời giải

Chọn C



Đặt $t=\sqrt{x+2}, t\geq 0 \Rightarrow x=t^2-2$

Suy ra: $g'=f(t)+\frac{1}{32}t^4-\frac{1}{2}t^2+1 \Rightarrow g'+\frac{1}{8}t^3-t$

Để hàm số đồng thì $g'\geq 0 \Leftrightarrow f'(t)\geq -\frac{1}{8}t^3+t\ \forall\ t\geq 0$

Đặt $h(t)=-\frac{1}{8}t^3+t\ \forall\ t\geq 0$ **có đồ thị màu tím**

Ta có phương trình

$$f'(t)=h(t)\Leftrightarrow f'(t)=-\frac{1}{8}t^3+t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\,(l)\\ t=0\\ t=2\end{array}\right..$$

Lập BBT và dựa vào đồ thị ta có hàm số g đồng biến khi

$t\geq 2\Rightarrow\sqrt{x+2}\geq 2\Leftrightarrow x\geq 2, x\in(-2;2020), x\in Z\Rightarrow x\in\{2;3;.....;2019\}$

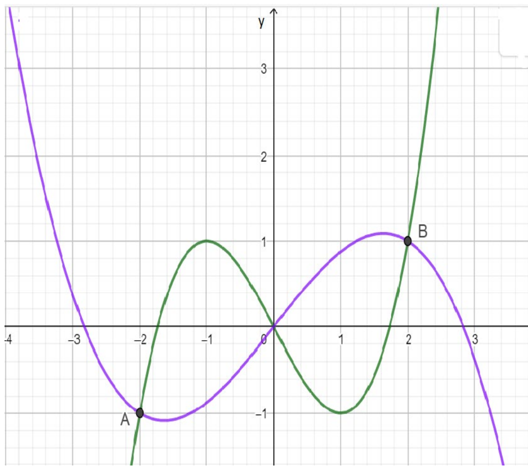
Ta có $2+...+2019=2039189$

Câu 29. Cho hàm số $y=f'(x)$,có đồ thị như hình vẽ.Tổng tất cả các giá trị nguyên của x với $x\in(-2;2020)$ để hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x+2}\right)+\frac{1}{32}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$ nghịch biến là:

A. 2039187. **B.** 2041207. **C.** 2039189. **D.** 2041209.

Lời giải

Chọn C



Đặt $t=\sqrt{x+2}, t\geq 0 \Rightarrow x=t^2-2$

Suy ra: $g'=f(t)+\frac{1}{32}t^4-\frac{1}{2}t^2+1 \Rightarrow g'+\frac{1}{8}t^3-t$

Để hàm số đồng thì $g'\geq 0 \Leftrightarrow f'(t)\geq -\frac{1}{8}t^3+t\ \forall\ t\geq 0$

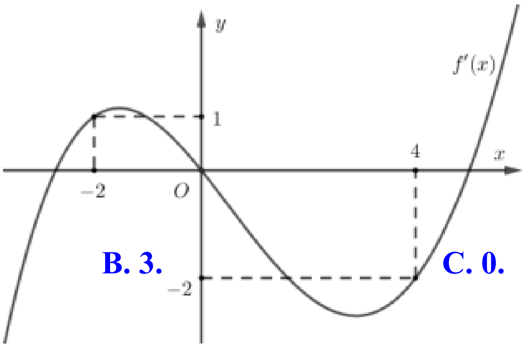
Đặt $h(t)=-\frac{1}{8}t^3+t\ \forall\ t\geq 0$ **có đồ thị màu tím**

Ta có phương trình

$$f'(t)=h(t)\Leftrightarrow f'(t)=-\frac{1}{8}t^3+t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\,(l)\\ t=0\\ t=2\end{array}\right..$$

Lập BBT và dựa vào đồ thị ta có hàm số g đồng biến khi
$t \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x+2} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2, x \in (-2;2020), x \in Z \Rightarrow x \in \{2;3;.....;2019\}$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f^{'}(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

A. 2. **B. 3.** **C. 0.** **D. 1.**

Lời giải

Chọn A

Chọn A

Ta có

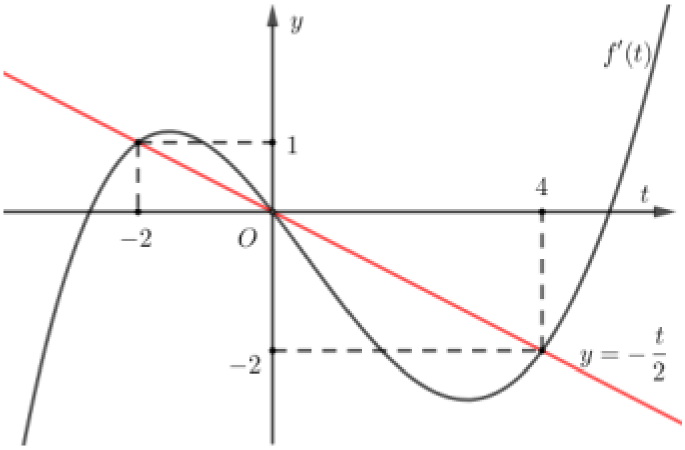
$g^{'}(x) = 4f^{'}(x-m) + 2x - 2m$

$g^{'}(x) \geq 0 \Leftrightarrow f^{'}(x-m) \geq -\dfrac{x-m}{2} (*)$

Đặt $t = x - m$ thì $(*) \Leftrightarrow f^{'}(t) \geq -\dfrac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y = -\dfrac{x}{2}$ trên cùng hệ trục $\mathrm{O}xy$ với đồ thị $y = f^{'}(x)$ như hình vẽ sau

Từ đồ thị ta có



$$f^{'}(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2 \leq x \leq m \\ x \geq m+4 \end{array}\right.$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g^{'}(x) \geq 0 \forall x \in (1;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m+4 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{2;3\}$

Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoản $(1;2)$

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2019	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x^3-3x)-\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x-\frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1;2]$?

A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

$g'(x)=(3x^2-3)f'(x^3-3x)-x^4-2x^2+3=(x^2-1)\left[3f'(x^3-3x)-x^2-3\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3f'(x^3-3x)-x^2-3=0\\ x^2-1=0\end{array}\right.$$

Mà $x\in[-1;2]\Rightarrow x^3-3x\in[-2;2]\Rightarrow f'(x^3-3x)<0\Rightarrow 3f'(x^3-3x)-x^2-3<0$, do đó

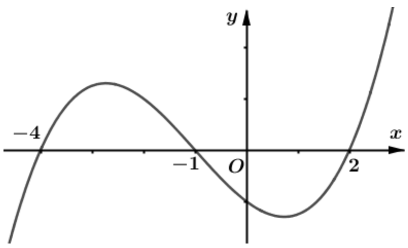
$g'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Ta có

x		-1		1		2	
g'		0	$+$	0	$-$		
g		$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(-2)$	

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y=g(1)=f(-2)+2=2021$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2-5)$

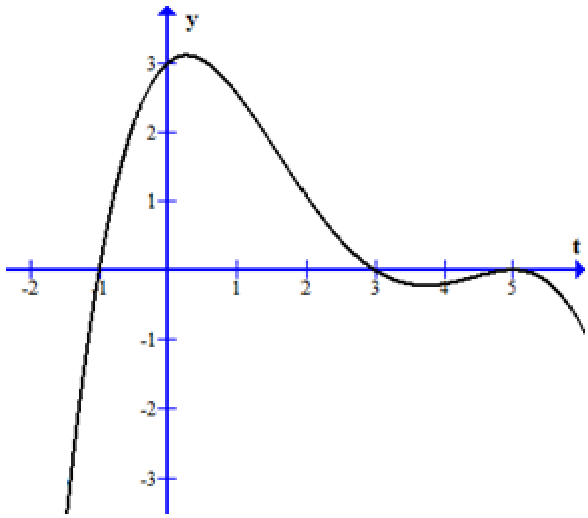
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^2-5)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-5=-4\\ x^2-5=-1\\ x^2-5=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm2\\ x=\pm\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		-2		-1		0		1		2		$\sqrt{7}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn** **C.**

Câu 33. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như sau:



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-x\right)+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-6x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;2\right)$. **B.** $\left(-2;3\right)$. **C.** $\left(-1;3\right)$. **D.** $\left(3;5\right)$.

Lời giải

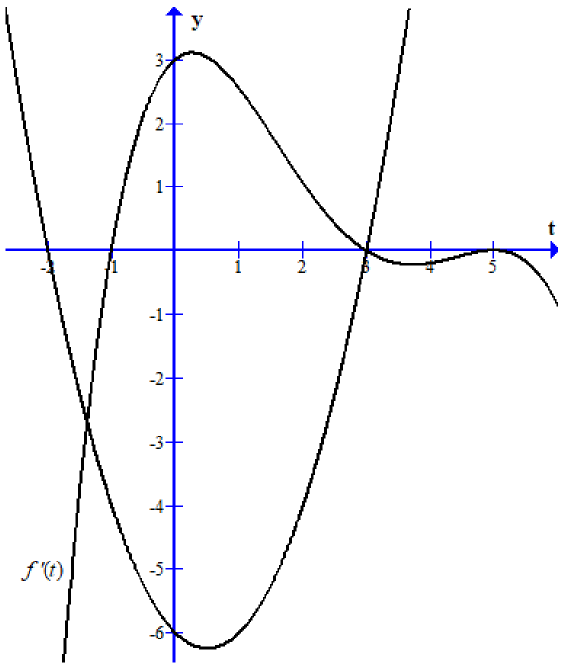
Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=-f'\left(1-x\right)+x^2-x-6 \Leftrightarrow g'\left(x\right)=-f'\left(1-x\right)+\left(1-x\right)^2-\left(1-x\right)-6$.

Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'\left(x\right)\le 0 \Leftrightarrow -f'\left(1-x\right)+\left(1-x\right)^2-\left(1-x\right)-6<0 \ \left(1\right)$.

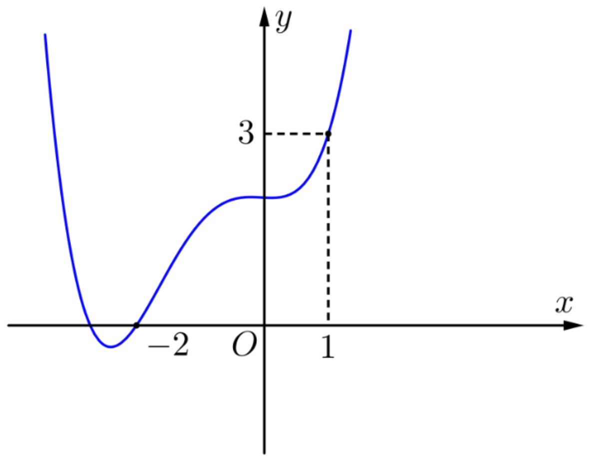
Đặt $t=1-x$, $\left(1\right)$ trở thành $-f'\left(t\right)+t^2-t-6\le 0 \Leftrightarrow f'\left(t\right)\ge t^2-t-6$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=f'\left(t\right)$ và $y=t^2-t-6$ (Hình vẽ).



Từ đồ thị hàm số ta có $f'(x) \ge t^2 - t - 6 \Leftrightarrow t_1 \le t \le 3,$ với $t_1 \in (-2;-1)$ hay $t_1 \le 1 - x \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 1 - t_1$ suy ra hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = \frac{1}{3}f(1-3x) - 3x(x^2 - x - 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

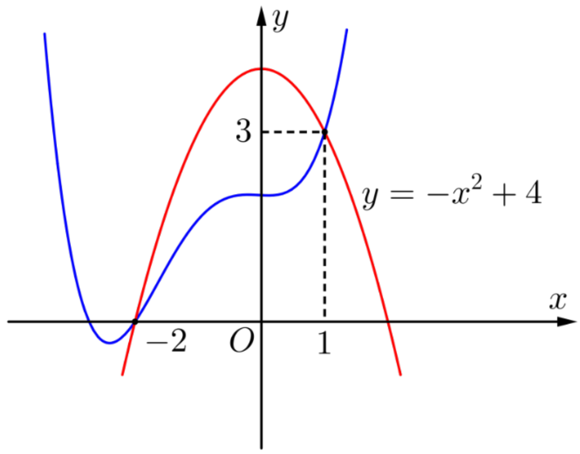
Chọn C

Ta có $g'(x) = -f'(1-3x) - 9x^2 + 6x + 3$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-3x) < -9x^2 + 6x + 3$

$\Leftrightarrow f'(1-3x) < -(1-3x)^2 + 4$

Đặt $t = 1 - 3x$ bất phương trình trở thành $f'(t) < -t^2 + 4$ $(*)$

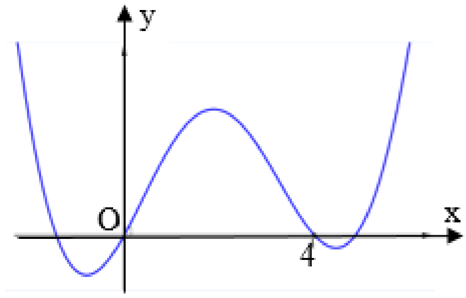


Vẽ parabol $y = -x^2 + 4$ trên đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm dưới parabol $y = -x^2 + 4$ trên khoảng $(-2;1)$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow -2 < t < 1 \Leftrightarrow -2 < 1 - 3x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 35. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x).f'(x^3 + 3x^2)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{array}\right.$.

▪Phương trình $3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

▪Phương trình $f'(x^3 + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + 3x^2 = a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = 0 \\ x^3 + 3x^2 = 4 \\ x^3 + 3x^3 = b > 4 \end{array}\right.$.

Ta thấy: $x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -3$

Và $x^3 + 3x^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2$.

Hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2$ có $h'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		$+\infty$
$h'(x)$				$+$	0	$-$	0	$+$			
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

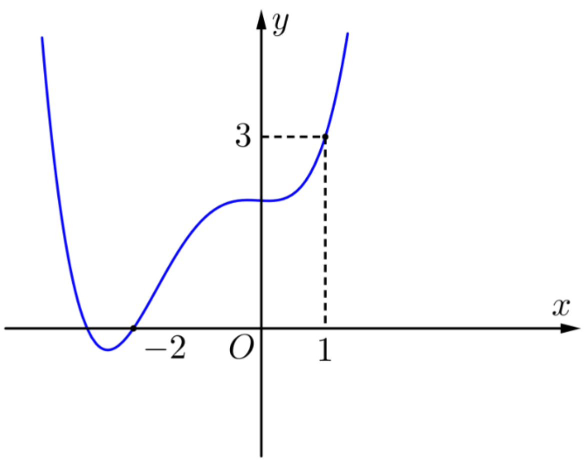
Dựa vào bảng biên thiên của hàm $h(x)$, ta có

Phương trình $x^3 + 3x^2 = a < 0$ có duy nhất một nghiệm $x_1 < -3$.

Phương trình $x^3 + 3x^2 = c > 4$ có duy nhất một nghiệm $x_2 > 1$.

Do đó, phương trình $g'(x) = 0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt và hai nghiệm bội ba nên hàm số $y = g(x)$ có sáu điểm cực trị.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = \frac{1}{3}f(1-3x) - 3x(x^2 - x - 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

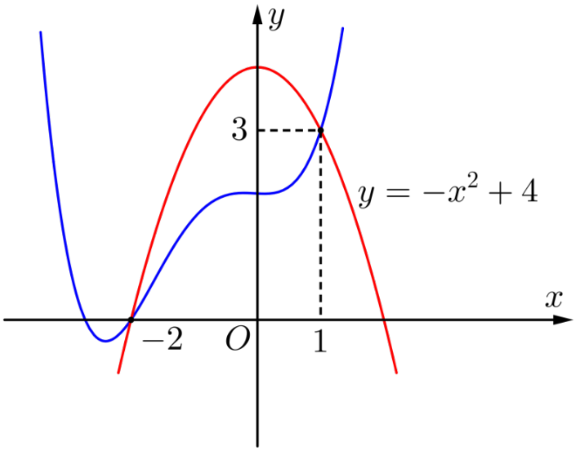
Chọn C

Ta có $g'(x) = -f'(1-3x) - 9x^2 + 6x + 3$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-3x) < -9x^2 + 6x + 3$

$\Leftrightarrow f'(1-3x) < -(1-3x)^2 + 4$

Đặt $t = 1-3x$, bất phương trình trở thành $f'(t) < -t^2 + 4 \;\; (*)$.

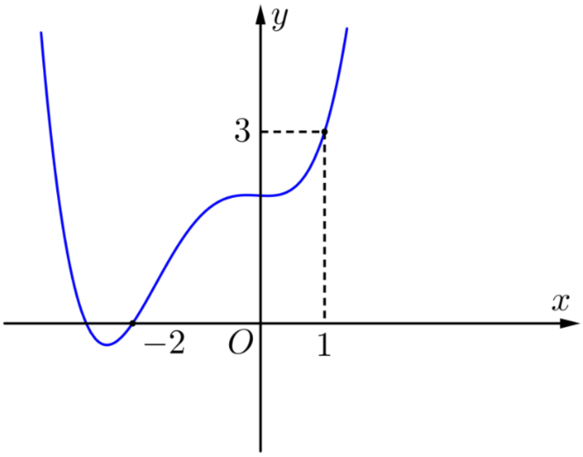


Vẽ parabol $y = -x^2 + 4$ trên đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm dưới parabol $y = -x^2 + 4$ trên khoảng $(-2;1)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow -2 < t < 1 \Leftrightarrow -2 < 1-3x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = \frac{1}{3}f(1-3x) - 3x(x^2 - x - 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

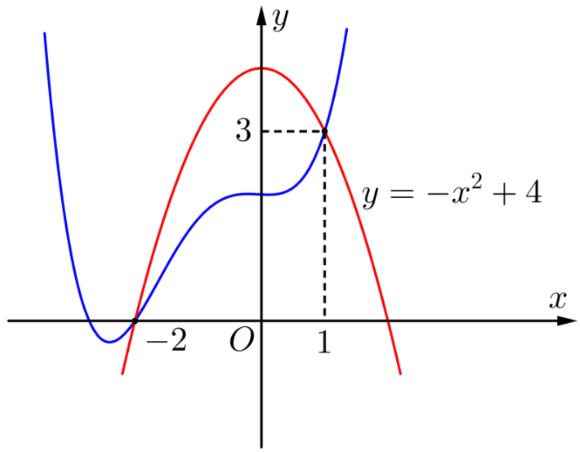
Chọn C

Ta có $g'(x) = -f'(1-3x) - 9x^2 + 6x + 3$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-3x) < -9x^2 + 6x + 3$

$\Leftrightarrow f'(1-3x) < -(1-3x)^2 + 4$

Đặt $t = 1-3x$, bất phương trình trở thành $f'(t) < -t^2 + 4 \;\; (*)$.

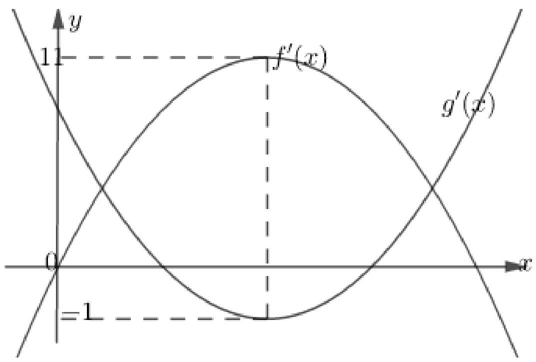


Vẽ parabol $y=-x^2+4$ trên đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm dưới parabol $y=-x^2+4$ trên khoảng $(-2;1)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow -2<t<1 \Leftrightarrow -2<1-3x<1 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 38. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)-a^2x+2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến $(\alpha;\beta)$. Số giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)-a^2x+2021$ có đạo hàm $h'(x)=f'(x)-g'(x)-a^2$.

Hàm số đồng biến khi $h'(x)=f'(x)-g'(x)-a^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2\le f'(x)-g'(x)$.

Quan sát đồ thị ta thấy $f'(x)-g'(x)\ge 12$, suy ra $a^2\le 12$.

Vậy giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là $\{1;2;3\}$.

Câu 39. **☙HẾT❧**Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+x^2+2x+3$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-3;1)$. **B.** $(1;3)$.

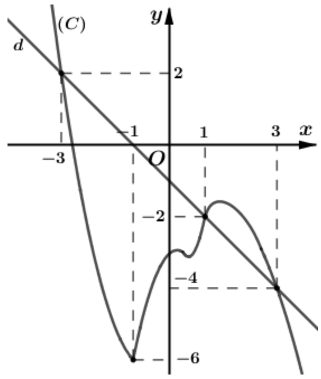
C. $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2(x+1) \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x-1$.

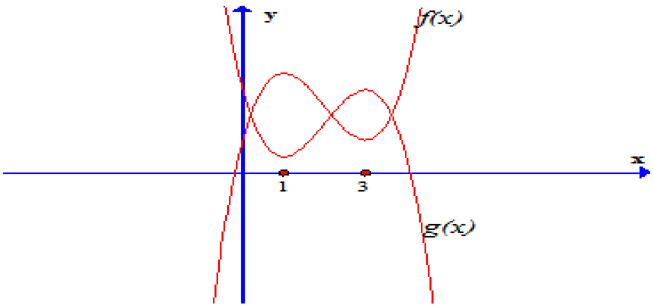
Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=-x-1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ 1<x<3 \end{array}\right.$ (vì phần đồ thị của $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y=-x-1$). Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án **B** thỏa mãn.

Câu 40. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới,



biết rằng $x=1; x=3$ đều là các điểm cực trị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đồng thời $3f(1)=g(3)+1;\ 2f(3)=g(1)+4\ ; f(-2x+7)=g(2x-3)-1$

. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ của hàm số.

$S(x)=f(x)g(x)-g^2(x)+f(x)-4g(x)+2$ Tính tổng $P=M-2m$.

A. 39. **B.** 107. **C.** 51. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B

lần lượt thay $x=2; x=3$ vào (*)Ta được $f(3)=g(1)-1$; $f(1)=g(3)-1$

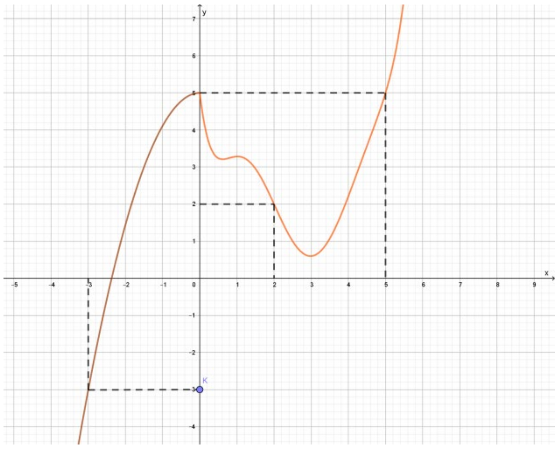
kết hợp với điều điện ban đầu ta có hệ $\begin{cases} f(1)=g(3)-1 \\ f(3)=g(1)-1 \\ 3f(1)=g(3)+1 \\ 2f(3)=g(1)+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=1 \\ g(3)=2 \\ f(3)=5 \\ g(1)=6 \end{cases}$

Từ giả thiết kết hợp với với đồ thị ta nhận thấy rằng $y=f(x)$ nghịch biến trên $[1;3]$ và $y=g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$.Đặt $u=f(x)$, $v=g(x)$, $u\in[1;5]$, $v\in[2;6]$. $S=u(v+1)-v^2-4v+2=h(u;v)$

Xem $h(u;v)$ là hàm số bậc nhất ẩn u tham số v.với hệ số $a=v+1>0$ nên $h(1;v)\le S\le h(5;v)$ hay $-v^2-3v+3\le S\le -v^2+v+7; v\in[2;6]$.Lập bảng biến thiên của hai hàm số $y=-v^2-3v+3; y=-v^2+v+7; v\in[2;6]$

Ta được $m=S_{Min}=-51$ Khi $x=1$; $M=S_{Max}=5$ Khi $x=3$. $P=M-2m=107$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;\frac{-1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(\frac{-1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{-1}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn A

$g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$

$g(x)=f(-2x+1)+\left(-2x^2+2x+4\right)$

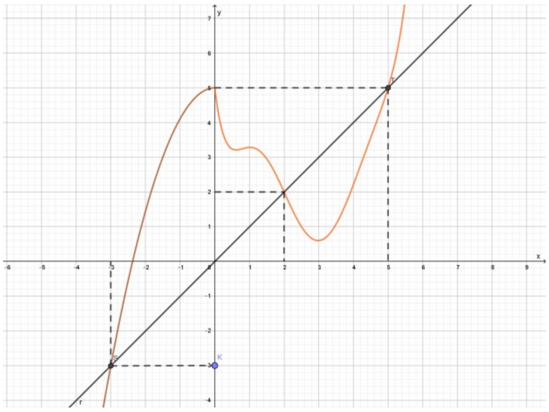
$g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2$

$g'(x)=-2\left[f'(-2x+1)+2x-1\right]$

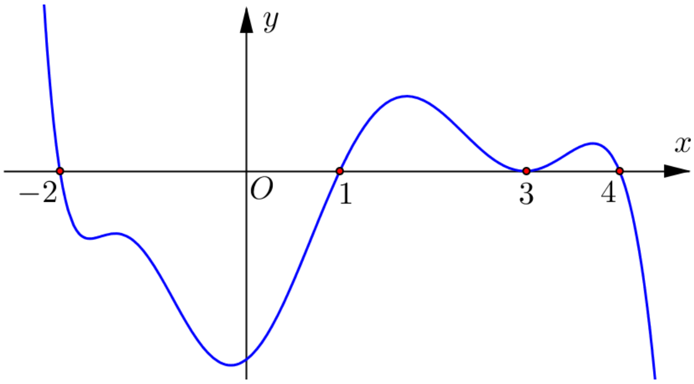
Để hàm số đồng biến thì $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)<-2x+1$

Dựa vào đồ thị ta có $2<-2x+1<5$

$\Rightarrow -2<x<\frac{-1}{2}$



Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-2)=10$, $f(4)=1000$. Biết $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=g(x)=f^2(x)-2020f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;1)$ và $(4;+\infty)$. **B.** $(1;2)$ và $(4;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$ và $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$ và $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên $y=f(x)$.

x	$-\infty$		-2		1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	1000	$\searrow$	$-\infty$

Ta có: $g'(x)=2f'(x)\left(f(x)-1010\right)$.

Nhận xét dựa bảng biến thiên ta có $f(x)-1010<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=3\\x=4\end{array}\right.$.

Nên ta có bảng xét dấu $y=g(x)$:

x	$-\infty$		-2		1		3		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f^2(x)-2020f(x)$ đồng biến trên $(-2;1)$ và $(4;+\infty)$.

Câu 43. Có bảo nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x)=2x^3-2mx+3$. Ta có $g'(x)=6x^2-2m$ và $g(1)=5-2m$.

Để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $g(1)\ge 0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2-2m\ge 0,\forall x>1\\5-2m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 3x^2,\forall x>1\\m\le\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{5}{2}.$$

Kết hợp giả thiết suy ra có 12 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $g(1)\le 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6x^2-2m\right)=+\infty>0$.

Vậy có 12 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 44. Có bảo nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x)=2x^3-2mx+3$. Ta có $g'(x)=6x^2-2m$ và $g(1)=5-2m$.

Để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $g(1)\ge 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-2m\ge 0,\forall x>1 \\ 5-2m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 3x^2,\forall x>1 \\ m\le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\le \dfrac{5}{2}$.

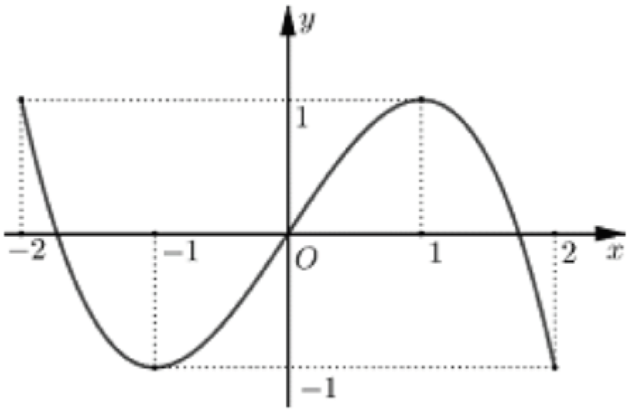
Kết hợp giả thiết suy ra có 12 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $g(1)\le 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6x^2-2m\right)=+\infty>0$.

Vậy có 12 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f(\cos x)+x^2-x$.

$D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=-\sin x.f'(\cos x)+2x-1$.

Hàm số đồng biến $\Rightarrow g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow -\sin x.f'(\cos x)+2x-1\ge 0$.

Vì $-1\le \cos x\le 1$ nên $-1\le f'(\cos x)\le 1$ (từ đồ thị).

$\Rightarrow \left|-\sin x.f'(\cos x)\right|\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g'(x)=-\sin x.f'(\cos x)+2x-1\ge -1+2x-1=2x-2$.

• Xét đáp án A:

Với $x>1\Rightarrow 2x-2>0\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow$ hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trong khoảng $(1;+\infty)$.

Suy ra hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trong khoảng $(1;2)$.

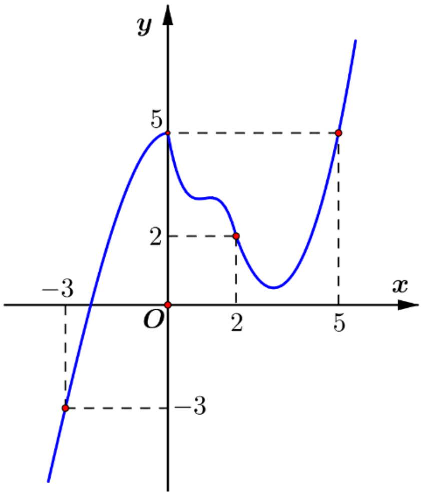
• Xét đáp án B, D:

Với $x<0\Rightarrow 2x-2<0$ nên hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ không đồng biến khoảng tương ứng.

• Xét đáp án C:

Với $x<1\Rightarrow 2x-2<0$ nên hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ không đồng biến khoảng $(0;1)$.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

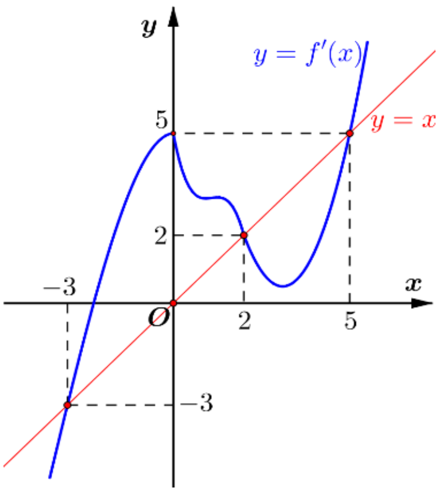
Chọn A

Ta có $y=g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)=f(-2x+1)-2x^2+2x+4$.

$y'=-2f'(-2x+1)-4x+2$.

Đặt $t=-2x+1 \Rightarrow -2x=t-1$. Khi đó $y'=-2f'(-2x+1)-4x+2$ trở thành

$y'=-2f'(t)+2t=2(t-f'(t))$

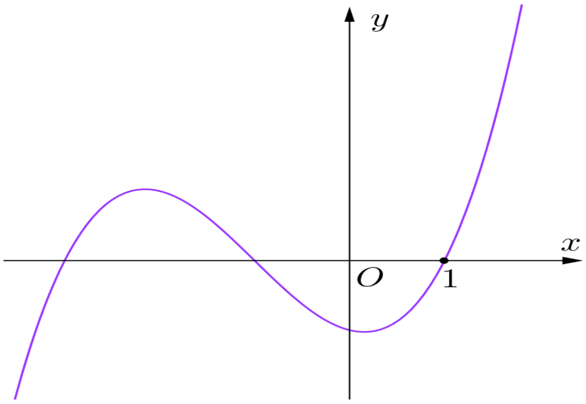


Xét $y'=-2f'(t)+2t=2(t-f'(t))>0 \Leftrightarrow t>f'(t)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ 2<t<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+1<-3 \\ 2<-2x+1<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ -2<x<-\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-2;-\frac{1}{2}\right),(2;+\infty)$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Tìm điều kiện của m để hàm số $g(x)=f(2019^x)-mx+2$ đồng biến trên $[0;1]$



A. $m \le \ln 2019$. **B.** $0 < m < \ln 2019$. **C.** $m > \ln 2019$. **D.** $m \le 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2019^x \ln 2019. f'\left(2019^x\right) - m$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019^x \ln 2019. f'\left(2019^x\right) = m$, (1)

Đặt $t = 2019^x$, ta có $t \in [1;2019]$ và $2019^x \ln 2019. f'\left(2019^x\right) = t.\ln 2019. f'(t)$

Đặt $h(t) = t.\ln 2019. f'(t), t \in [1;2019]$.

Phương trình (1) trở thành $h(t) = t.\ln 2019. f'(t) = m$, (2)

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $[1;2019]$, do đó $f''(x) \ge 0$ trên $[1;2019]$. Hơn nữa, từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta cũng có $f'(x) \ge 0$ trên $[1;2019]$.

Do đó $h'(t) = \ln 2019\left[f'(t) + t.f''(t)\right] \ge 0 \ \forall t \in [1;2019]$, $h'(t) = 0$ tại hữu hạn điểm, nên $h(t)$ đồng biến trên $[1;2019]$. Từ đó (2) có số nghiệm là hữu hạn trên $[1;2019]$, nên phương trình $g'(x) = 0$ có số nghiệm hữu hạn trên $[1;2019]$.

Như vậy: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0;1]$

$\Leftrightarrow g'(x) \ge 0$ với mọi $x \in [0;1] \Leftrightarrow m \le 2019^x.\ln 2019. f'\left(2019^x\right) \ \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow m \le t.\ln 2019. f'(t) \ \forall t \in [1;2019] \Leftrightarrow m \le \min\limits_{[1;2019]} h(t) = h(1) = 1.\ln 2019. f'(1) = 0$.

Vậy $m \le 0$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{137}{16}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	|	−	0	+	
$f'(x)$		↗		↘	$-\frac{11}{2}$	↘		↗	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020;\ 2020]$ để hàm số $g(x) = e^{-x^2+4mx-5}.f(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

A. 4040. **B.** 4041. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=(-2x+4m).e^{-x^2+4mx-5}.f(x)+e^{-x^2+4mx-5}.f'(x)$

$\Leftrightarrow g'(x)=\left[(-2x+4m).f(x)+f'(x)\right].e^{-x^2+4mx-5}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0,\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ và $g'(x)=0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow (-2x+4m).f(x)+f'(x)\geq 0,\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ (vì $e^{-x^2+4mx-5}>0$)

$\Leftrightarrow -2x+4m\geq -\frac{f'(x)}{f(x)},\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, (vì $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow 4m\geq 2x-\frac{f'(x)}{f(x)},\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ $(*)$.

Xét $h(x)=2x-\frac{f'(x)}{f(x)},\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. Ta có $h'(x)=2-\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}$.

Mà $\begin{cases}f''(x)<0\\ f(x)>0\end{cases},\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}<0,\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Từ đó suy ra $h'(x)>0,\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. Vậy hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

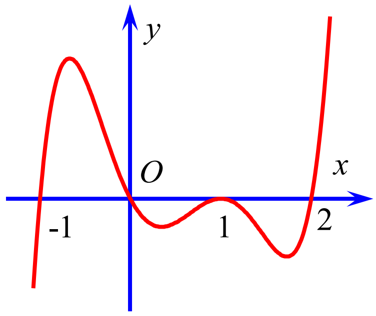
x	-1		$\frac{1}{2}$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$h(-1)$	$\nearrow$	$h\left(\frac{1}{2}\right)$

Vậy điều kiện $(*)\Leftrightarrow 4m\geq h\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow 4m\geq 2.\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(\frac{1}{2}\right)}\Leftrightarrow 4m\geq\frac{225}{137}\Leftrightarrow m\geq\frac{225}{548}$.

Lại có $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in[-2020;2020]\end{cases}\Rightarrow m\in\{1;2;3;...;2020\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.



A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$. Ta có:

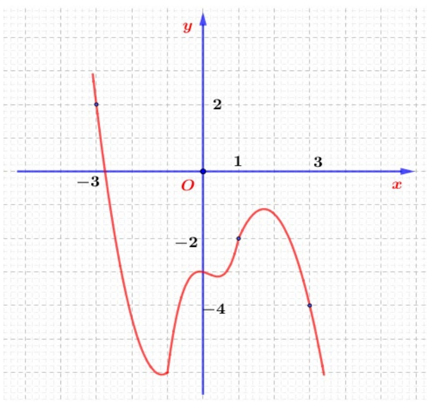
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=-1\vee\sqrt{x^2+1}=0\vee\sqrt{x^2+1}=1\vee\sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+1=1\\ x^2+1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$. Từ đó lập bảng biến thiên:

x	$-\infty\ -\sqrt{3}\ 0\ \sqrt{3}\ +\infty$
y'	$-0+0-0+$
y	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(2x+\dfrac{5}{2}\right)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\infty;-\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{17}{2}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{17}{2}\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Đáp án: D

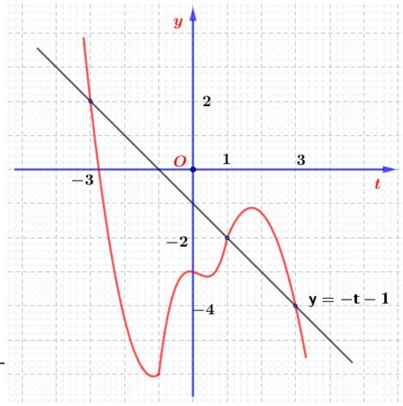
Ta có $y=f(x)+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}x+1\Rightarrow y'=f'(x)+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$

$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ (1)

Đặt $x = 2t + \frac{5}{2}$

Phương trình (1) trở thành: $f'\left(2t + \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(2t + \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow f'\left(2t + \frac{5}{2}\right) = -t - 1$ (2)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'\left(2t + \frac{5}{2}\right)$ và đồ thị hàm số $y = -t - 1$.



Khi đó

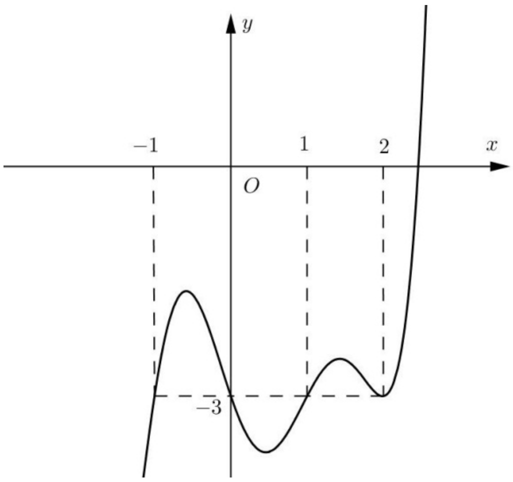
phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \\ t = 1 \quad \Rightarrow x = \frac{9}{2} \\ t = 3 \quad \Rightarrow x = \frac{17}{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{9}{2}$		$\frac{17}{2}$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$ và $\left(\frac{17}{2}; +\infty\right)$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x) = f(2x^2 - x) + 6x^2 - 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x) = f(2x^2 - x) + 6x^2 - 3x$

$\Rightarrow g'(x) = (4x-1) f'(2x^2 - x) + 12x - 3 = (4x-1)\left[f'(2x^2 - x) + 3\right]$.

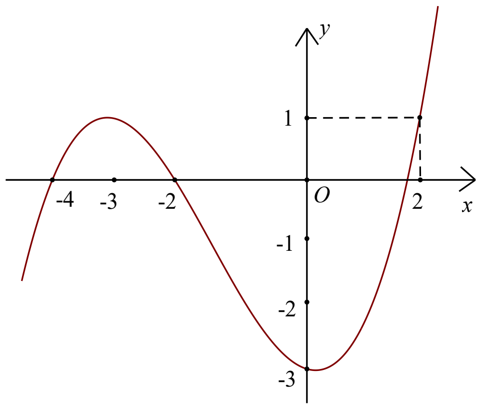
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-1=0\\ f'\left(2x^2-x\right)=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ 2x^2-x=-1\left(\text{vô nghiệm}\right)\\ 2x^2-x=1\\ 2x^2-x=0\\ 2x^2-x=2\left(\text{nghiệm kép loại}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ x=1\\ x=-\frac{1}{2}\\ x=0\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Xét dấu $g'(x)$ ta được $g'(x)>0, \forall x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Mà $\left(-\frac{1}{4};0\right)\subset\left(-\frac{1}{2};0\right)$ nên hàm số $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

Câu 52. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y=3f(x)+x^3-6x^2+9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$ **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải

Chọn C

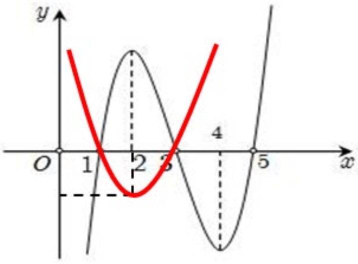
Hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$; $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.
Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua các điểm $(-4;0),(-2;0),(0;-3),(2;1)$ nên ta có:

$$\begin{cases}-256a+48b-8c+d=0\\ -32a+12b-4c+d=0\\ d=-3\\ 32a+12b+4c+d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{5}{96}\\ b=\frac{7}{24}\\ c=-\frac{7}{24}\\ d=-3\end{cases}$$

Do đó hàm số $y=3f(x)+x^3-6x^2+9x; y'=3\left(f'(x)+x^2-4x+3\right)=3\left(\frac{5}{24}x^3+\frac{15}{8}x^2-\frac{55}{12}x\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-11\\x=0\\x=2\end{array}\right.$$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-11;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=3f(x+1)-(x^3-3x^2+2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có: $g'(x)=3f'(x+1)-(3x^2-6x)=3\left[f'(x+1)-(x^2-2x)\right]$.

+ $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x+1)>x^2-2x$

$\Leftrightarrow f'(x+1)>(x+1)^2-4(x+1)+3\,(*)$

Đặt $t=x+1$, (*) trở thành $\Leftrightarrow f'(t)>t^2-4t+3\,(**)$

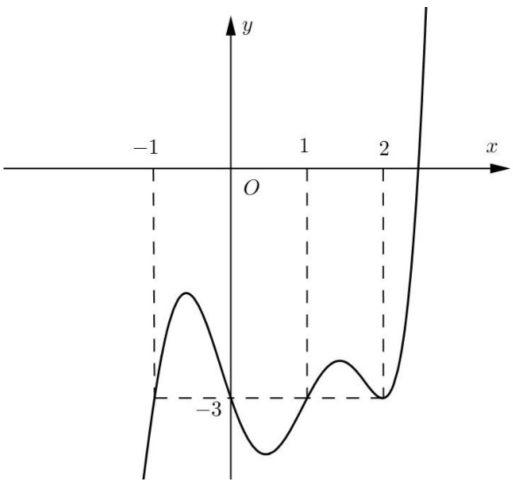
Đồ thị hàm số $y=t^2-4t+3$ màu đỏ trên hình vẽ

Các khoảng ta xét đều con khoáng $(-\infty;4)$

Trên khoáng $(-\infty;4)$, (**) $\Leftrightarrow 1<t<3\Rightarrow 1<x+1<3\Leftrightarrow 0<x<2$

Vậy ta chọn C

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f(2x^2-x)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x)=f(2x^2-x)+6x^2-3x$

$\Rightarrow g'(x)=(4x-1)f'(2x^2-x)+12x-3\;=(4x-1)\left[f'(2x^2-x)+3\right]$.

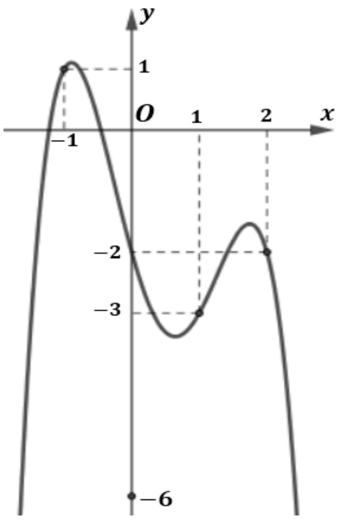
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-1=0\\ f'(2x^2-x)=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\ 2x^2-x=-1\,(\text{vônghiệm})\\ 2x^2-x=1\\ 2x^2-x=0\\ 2x^2-x=2\,(\text{nghiệm kép loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\ x=1\\ x=-\dfrac{1}{2}\\ x=0\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Xét dấu $g'(x)$ ta được $g'(x)>0, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Mà $\left(-\dfrac{1}{4};0\right)\subset\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ nên hàm số $g(x)=f(2x^2-x)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{4};0\right)$.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $y=g(x)=f(x)+\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5}{3}x^3+6x$. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-3;-2)$.

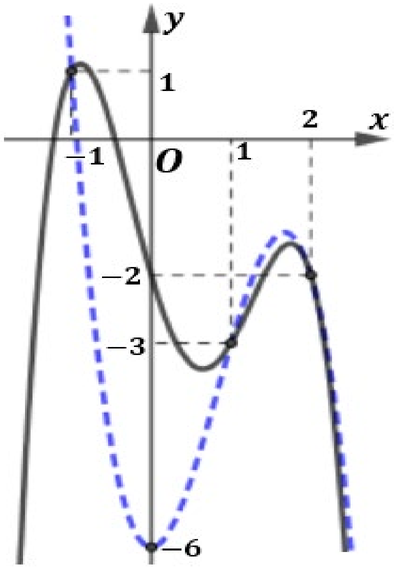
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=g(x)=f(x)+\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5}{3}x^3+6x$

có $y'=g'(x)=f'(x)+2x^3-5x^2+6=f'(x)-(-2x^3+5x^2-6)$

Đặt $h(x)=-2x^3+5x^2-6$. Khi đó đồ thị $h(x)$ là một đường đứt khúc như hình sau.

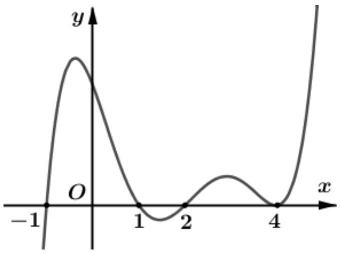


Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1; x=1; x=2$.

$y'>0$ khi đồ thị của hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=h(x)$.

Vậy $x\in(-1;1)$ thì hàm số đồng biến.

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ Đồ thị hàm số $y=f'(x)$. như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=-2f'(1-2x)$.

Xét $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(1-2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x<-1 \\ 1<1-2x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ -\frac{1}{2}<x<0 \end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $(1;+\infty)$. Chọn D

Cách 2. Ta có

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} 1-2x=-1 \\ 1-2x=1 \\ 1-2x=2 \\ 1-2x=4 \text{(nghiem kep)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

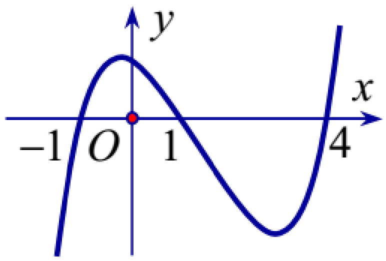
x	$-\infty$		$-1,5$		$-0,5$		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn D

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau:

Ví dụ chọn $x=2\in(1;+\infty)$, suy ra $1-2x=-3 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(1-2x)=f'(-3)<0$. Khi đó $g'(2)=-2f'(-3)>0$.

Câu 57. Nhận thấy các nghiệm $x=-\frac{1}{2};x=0$ và $x=1$ của $g'(x)$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu; nghiệm $x=-\frac{3}{2}$ là nghiệm kép nên qua nghiệm không đổi dấu.Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.



A. 5 **B.** 3

C. 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

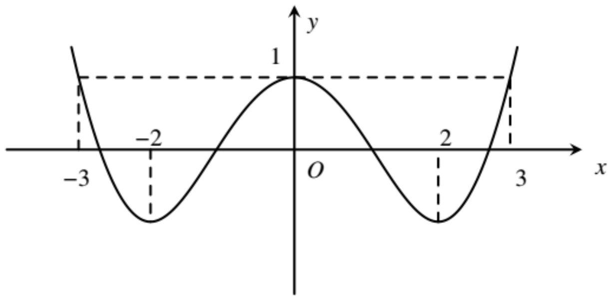
Ta có $y'=\left[f(x^2)\right]'=2x.f'(x^2)$

Hàm số nghịch biến

$$\Leftrightarrow y'<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ f'(x^2)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ f'(x^2)>0\end{cases}\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo dt } f'(x)} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x^2<-1\vee 1<x^2<4\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ -1<x^2<1\vee x^2>4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<x<2\\ x<-2\vee -1<x<0\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=f(x^2)$ có 3 khoảng nghịch biến.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(2x-1\right)+\dfrac{x^3}{3}+x^2-2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây

A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(-6;-3\right)$. **C.** $\left(3;6\right)$. **D.** $\left(6;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn đáp án A

Ta có $y'=2f'\left(2x-1\right)+x^2+2x-2\le 0$.

Nhận xét: $-3\le x\le 3\Leftarrow y'\le 1, x\le -3; x\ge 3\Leftarrow y'\ge 1$.

- $-1<x<0\Rightarrow -3<2x-1<-1\Rightarrow 2f'\left(2x-1\right)\le 2\,\&\,x^2+2x-2<-2\Rightarrow y'\le 0$ nên hàm số giảm.
- $-6<x<-3\Rightarrow -13<2x-1<-7\Rightarrow 2f'\left(2x-1\right)\ge 2\,\&\,x^2+2x-2>-2\Rightarrow y'>0$ nên hàm số tăng (loại).
- Tương tự cho các trường hợp còn lại.

Câu 59. Cho cấp số nhân $\left(b_n\right)$ thỏa mãn $b_2>b_1\ge 1$ và hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ sao cho $f\left(\log_2\left(b_2\right)\right)+2=f\left(\log_2\left(b_1\right)\right)$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n>5^{100}$ bằng:

A. 234. **B.** 229. **C.** 333. **D.** 292.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$.

Có $f'\left(x\right)=3x^2-3$, $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Mặt khác, ta có $b_1>b_2\ge 1$.

Đặt $a=\log_2 b_2>\log_2 b_1=b\ge 0$.

Ta có: $a^3-3a+2=b^3-3b\ \left(1\right)$.

Nếu $b>1\Rightarrow a>b>1\Rightarrow a^3-3a>b^3-3b\Rightarrow\left(1\right)$ vô nghiệm.

Nếu $0\le b\le 1\Rightarrow -2<b^3-3b\le 0\Rightarrow a^3-3a+2\le 0\Rightarrow\left(a-1\right)^2\left(a+2\right)\le 0$.

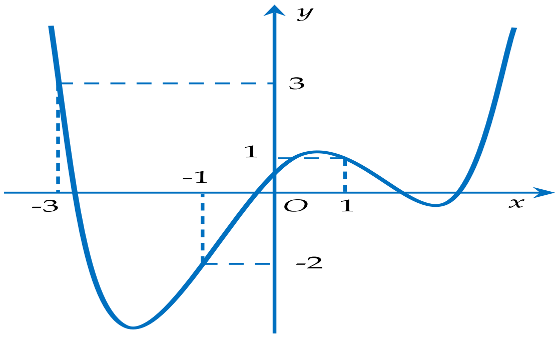
Suy ra $a=1\Rightarrow b=0$.

Khi đó $\begin{cases} b_1=2^0=1 \\ b_2=2^1=2 \end{cases}\Rightarrow b_n=2^{n-1}>5^{100}\ n-1>100\log_2 5\Rightarrow n\ge 234$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 234.

Câu 60. Cho hàm số $f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới. Hàm số

$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-3;-1\right)$. **B.** $\left(-3;0\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(-2;1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=f'\left(x\right)-(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2})$ Căn cứ vào đồ thị ta có: $\begin{cases} f'(-1)=-2 \\ f'(1)=1 \\ f'(-3)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1)=0 \\ g'(1)=0 \\ g'(-3)=0 \end{cases}$

Vẽ Parabol (P): $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục với đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$

Ta có: Trên $(-3;-1)$ thì $f'\left(x\right)<x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ nên $g'\left(x\right)<0\,\forall x\in(-3;-1)$

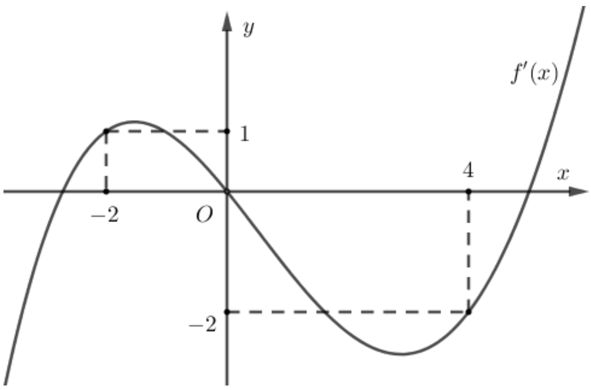
Trên $(-1;1)$ thì $f'\left(x\right)>x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ nên $g'\left(x\right)>0\,\forall x\in(-1;1)$

Khi đó BBT của hàm số $g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;1\right]$

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g(x)		↘	$g(-1)$	↗	

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;-1)$

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình sau.

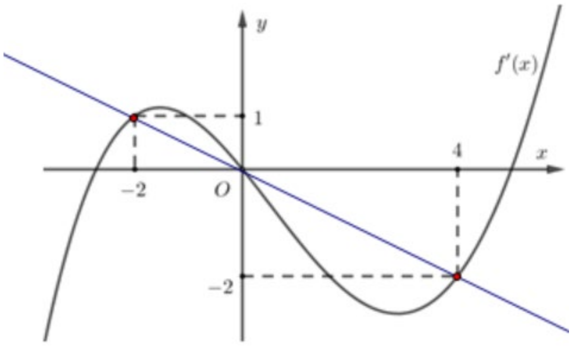


Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn A



Có $g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$.

Đặt $t=1-2x\Rightarrow g'(x)=-2f'(t)-t=-2\left[f'(t)-\left(-\frac{t}{2}\right)\right]$

$g(x)$ nghịch biến khi $-2\left[f'(t)-\left(-\frac{t}{2}\right)\right]\le 0\Leftrightarrow f'(t)-\left(-\frac{t}{2}\right)\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\\ x\le\frac{-3}{2}\end{array}\right.$.

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\frac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định : $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$y'=3x^3-2(m-1)x+\frac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

$\Leftrightarrow 3x^3-2(m-1)x+\frac{1}{x^5}\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\le\frac{3}{2}x^2+1+\frac{1}{2x^6},\forall x\in(0;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3}{2}x^2+1+\frac{1}{2x^6},x\in(0;+\infty)$.

Ta có : $f'(x)=3x-\dfrac{3}{x^7}, x\in(0;+\infty)$.

$f'(x)=3x-\dfrac{3}{x^7}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y					$\|$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy : $\Leftrightarrow m\le f(x), \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(0;+\infty)} f(x)\Leftrightarrow m\le 3$.

Giá trị nguyên dương của tham số m là $m=1$, $m=2$ và $m=3$.

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ trong đó $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

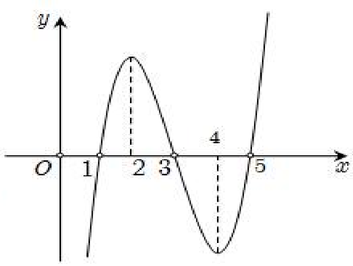
Từ $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019 \Rightarrow f'(1-x)=x(3-x)g(1-x)+2019$

Nên đạo hàm của hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ là

$y'=-x(3-x).g(1-x)-2019+2019=-x(3-x)g(1-x)$.

Xét bất phương trình $y'<0\Leftrightarrow x(3-x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$, do $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $y=g(x)=f(x+1)-\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=g'(x)=f'(x+1)-(x^2-2x)>0\Leftrightarrow f'(x+1)+(-x^2+2x)$.

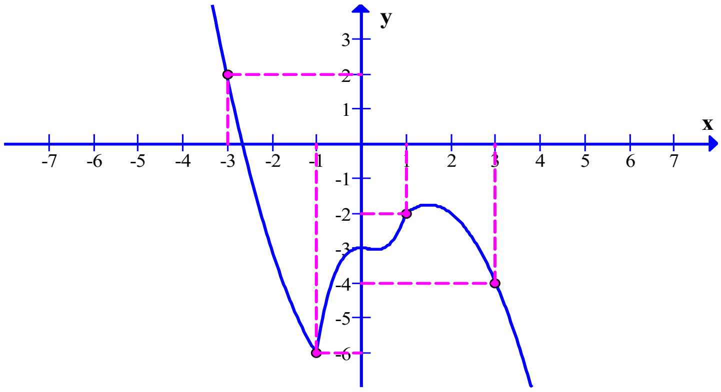
Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=3 \\ x+1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $y'=g'(x)$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2+2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	Chưa xác định dấu	

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

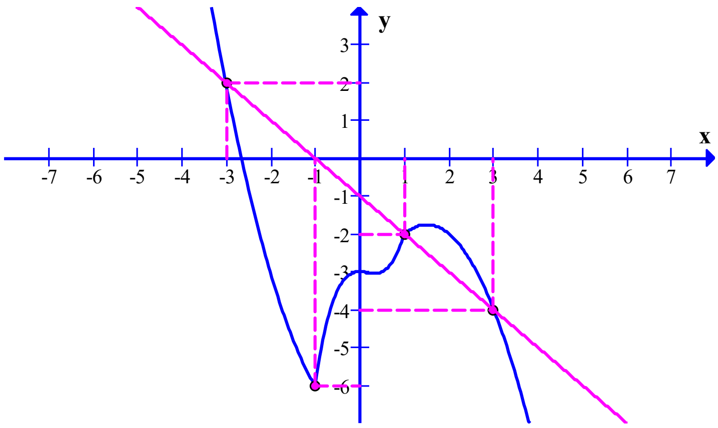
Lời giải

Đáp án: B

TXĐ của $g(x)$ là $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)+x+1\right]$.

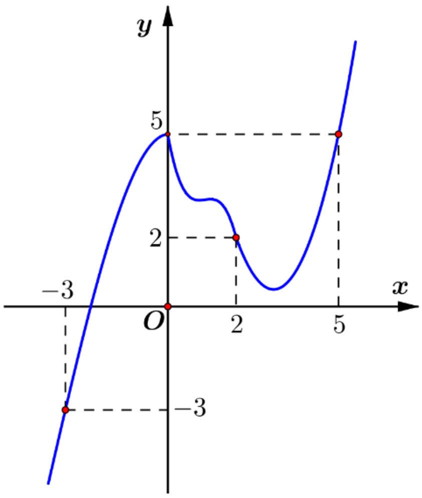
Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $f'(x)\geq -x-1$, (Dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm).

Vẽ chung đồ thị $y=f'(x)$ và $y=-x-1$ trên cùng một hệ trục như sau.



Từ đồ thị ta có $f'(x)\geq -x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -3 \\ 1\leq x\leq 3 \end{array}\right.$. Chọn B

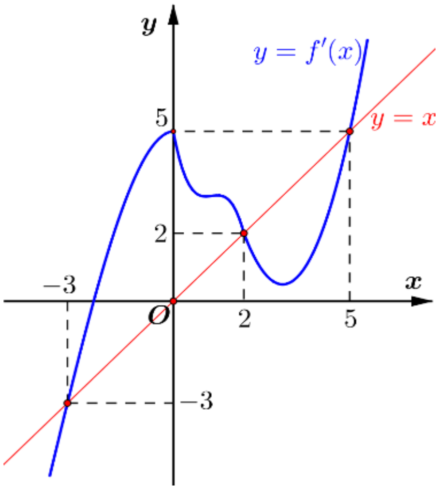
Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải



Chọn A

Cách 1: Ta có: $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)\Rightarrow g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2$

Có $g'(x)>0\Leftrightarrow -2f'(-2x+1)-4x+2>0\Leftrightarrow f'(-2x+1)<-2x+1$ (1).

Đặt $t=-2x+1$, bất phương trình (1) trở thành $f'(t)<t$.

Kẻ đường thẳng $y=x$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=x$ nằm trên đồ thị hàm số $f'(x)$ trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(2;5)$.

Suy ra $f'(t)<t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ 2<t<5 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+1<-3 \\ 2<-2x+1<5 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ -2<x<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

Cách 2: Ta có: $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)\Rightarrow g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2$

Có $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(-2x+1)=-2x+1$ (1).

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=t,(t=-2x+1)$.

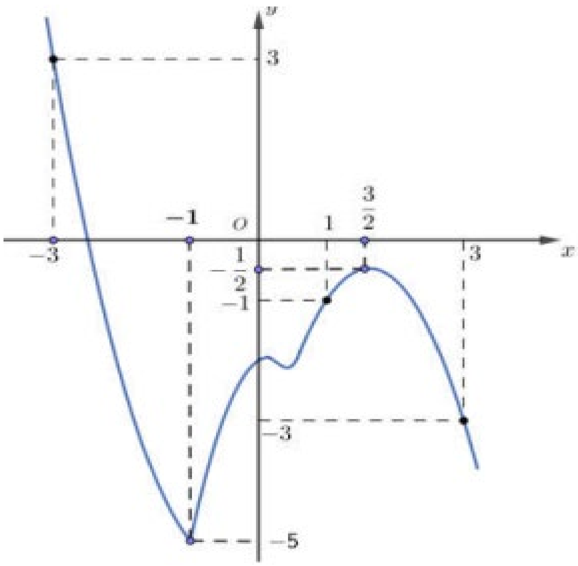
Từ đồ thị ta có $f'(t)=t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=2 \\ t=5 \end{array}\right.$. Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+1=-3 \\ -2x+1=2 \\ -2x+1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-f'(1-x)+x-1=0$

$\Leftrightarrow f'(1-x)=x-1$

Đặt $t=1-x$

Ta có $\Leftrightarrow f'(t)=-t$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ suy ra $t=\pm 3; t=1$

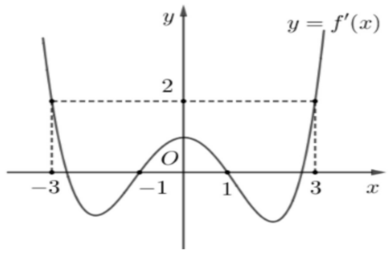
Suy ra $x=-2; x=4; x=0$ và các nghiệm này đều là các nghiệm đơn.

Ta có sơ đồ xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy chọn đáp án.#**A.**

Câu 68. Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$, với a, b, c, d, e, f là các số thực; đồ thị của $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.Hàm số $y=f(1-2x)-2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

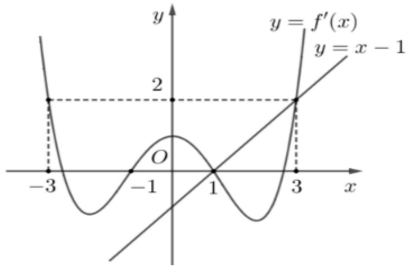


A. $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

C. $(-1;0)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải:

Ta có $y'>0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x)-4x>0 \Leftrightarrow f'(1-2x)<-2x$. Đặt $t=1-2x$, bất phương trình trở thành $f'(t)<t-1$. kẻ thêm đường thẳng $y=x-1$ qua hai điểm (1;0);(3;2) trên đồ thị



Ta có $f'(t)<t-1 \Leftrightarrow 1<t<3 <=> 1<1-2x<3 \Leftrightarrow -1<x<0$.

Chọn **C.**

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0

Hàm số $y=f(3x+1)+\frac{3x^2}{2}-2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{3};1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=f(3x+1)+\frac{3x^2}{2}-2x+2020 \Rightarrow y'=3f'(3x+1)+3x-2$.

Xét $f'(3x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x+1=-4\\3x+1=-1\\3x+1=2\\3x+1=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{5}{3}\\x=-\frac{2}{3}\\x=\frac{1}{3}\\x=1\end{array}\right.$.

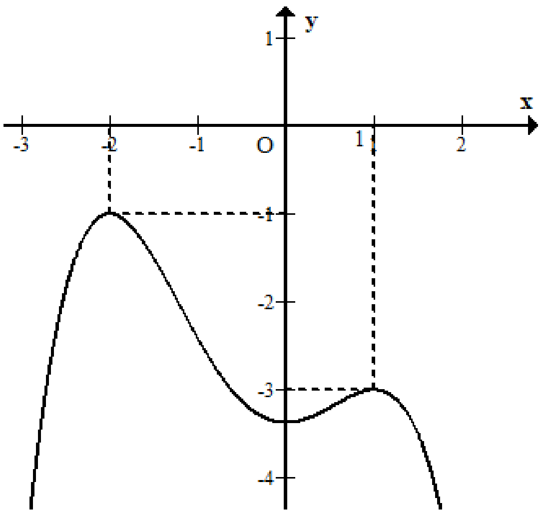
Xét $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Ta có bảng xét dấu của hàm số $y=f(3x+1)+\frac{3x^2}{2}-2x+2020$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3f'(3x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		không xác định dấu		$-$		$-$		không xác định dấu		$+$		không xác định dấu	

Hàm số $y=f(3x+1)+\frac{3x^2}{2}-2x+2020$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{2}{3};1\right)$.

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m, $m\in\mathbb{Z}, -2020<m<2020$ để hàm số $g(x)=f(x^2)+mx^2\left(x^2+\frac{8}{3}x-6\right)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2)+4mx(x^2+2x-3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ suy ra $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(-3;0)$.

$\Leftrightarrow 2xf'(x^2)+4mx(x^2+2x-3)\ge 0, \forall x\in(-3;0) \Leftrightarrow f'(x^2)-2m(-x^2-2x+3)\le 0, \forall x\in(-3;0)$

$\Leftrightarrow f'(x^2)\le 2m(-x^2-2x+3), \forall x\in(-3;0) \Leftrightarrow m\ge \dfrac{f'(x^2)}{2(-x^2-2x+3)}, \forall x\in(-3;0)$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(-3;0)} \dfrac{f'(x^2)}{2(-x^2-2x+3)}$.

Ta có $-3<x<0 \Rightarrow 0<x^2<9 \Rightarrow f'(x^2)\le -3$ dấu "$=$" khi $x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$.

$-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4 \Rightarrow 0<-x^2-2x+3\le 4, \forall x\in(-3;0)$

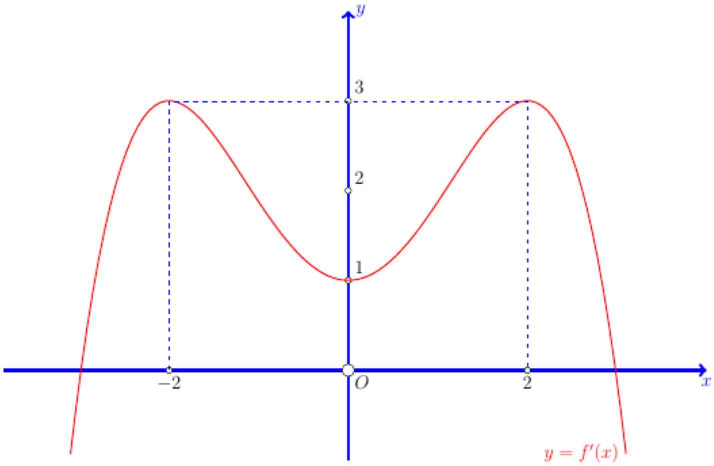
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{-x^2-2x+3} \geq \dfrac{1}{4}$, dấu "=" khi $x=-1$.

Suy ra $\dfrac{f'\left(x^2\right)}{2\left(-x^2-2x+3\right)} \leq \dfrac{-3}{2.4} = \dfrac{-3}{8}$, $\forall x \in (-3;0)$, dấu "=" khi $x=-1$.

$\Rightarrow \max\limits_{(-3;0)} \dfrac{f'\left(x^2\right)}{2\left(x^2+2x+3\right)} = -\dfrac{3}{8}$.

Vậy $m \geq -\dfrac{3}{8}$, mà $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020 \Rightarrow m \in \{0,1,2,...,2019\}$ nên có 2020 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.

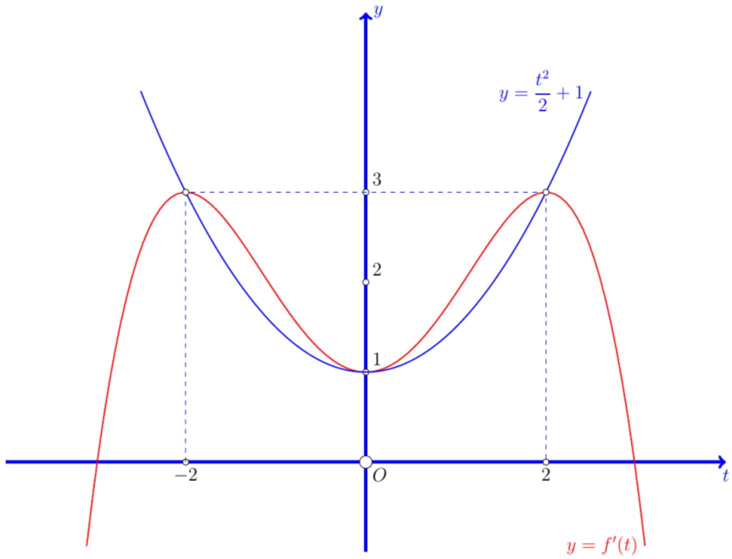


Hàm số $g(x) = f(1-5x) + \dfrac{125x^3}{6} - \dfrac{25x^2}{2} + \dfrac{15x}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{5}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D



Có

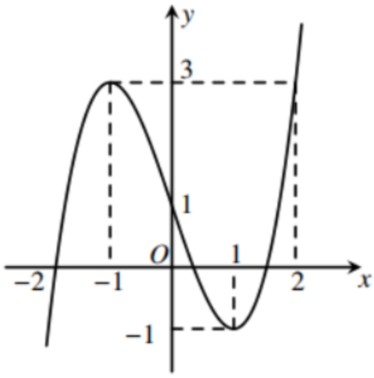
$g'(x)=-5f'(1-5x)+\dfrac{125x^2}{2}-25x+\dfrac{15}{2}=-5\left[f'(1-5x)-\left(\dfrac{25}{2}x^2-5x+\dfrac{3}{2}\right)\right]$

$=-5\left[f'(1-5x)-\left(\dfrac{(5x-1)^2}{2}+1\right)\right]$.

Đặt $t=1-5x\Rightarrow g'(x)=-5\left[f'(t)-\left(\dfrac{t^2}{2}+1\right)\right]$

$g(x)$ đồng biến khi $-5\left[f'(t)-\left(\dfrac{t^2}{2}+1\right)\right]\ge 0\Leftrightarrow f'(t)-\left(\dfrac{t^2}{2}+1\right)\le 0\Leftrightarrow f'(t)\le\dfrac{t^2}{2}+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le -2\\ t\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-5x\le -2\\ 1-5x\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -\dfrac{1}{5}\\ x\ge\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f(x^2-2x+1)+2020$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Xét $y'=2(x-1).f'(x^2-2x+1)<0$ (*)

TH 1: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Khi đó (*) trở thành

$f'(x^2-2x+1)<0\Leftrightarrow -1<x^2-2x+1<1\Leftrightarrow 0<x<2$ suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Nên chọn phương án **D.** (Tìm được đáp án rồi thì thôi, không xét các trường hợp khác về dấu của $y'<0$ nữa).

Câu 73. Cho hàm số $g(x)=f(x+1)$ có đạo hàm $g'(x)=(x+1)\left[x^2+(2-m)x-m+5\right],\forall\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$g'(x)=(x+1)\left[x^2+(2-m)x-m+5\right]=(x+1)\left[(x+1)^2-m(x+1)+4\right]$

$\Rightarrow f'(x)=x(x^2-mx+4)$. Để $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x(x^2-mx+4)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow x^2-mx+4\ge 0$

TH 1: $x^2-mx+4\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\ \Delta=m^2-16\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -4\le m\le 4$. Vì $m>0\Rightarrow m\in(0;4]$.

TH 2: $x^2-mx+4=0$ có hai nghiệm $x_1<x_2<0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1x_2>0\\ x_1+x_2<0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4>0\\ m<0\\ m^2-16>0\end{cases}$

Vì đề bài cho $m>0\Rightarrow m\in\varnothing$.

Vậy $m\in(0;4]\Rightarrow$ có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như ở bảng sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ gt ta có BBT của $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$g'(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$. $g'(x)=0\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{1}{x^2}=0\\ f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$

BXD của $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. Chọn A

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=2f(1-x)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải.

Chọn B

$y'=-2f'(1-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

Có $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0,\ \forall x\in(-2;0)$.

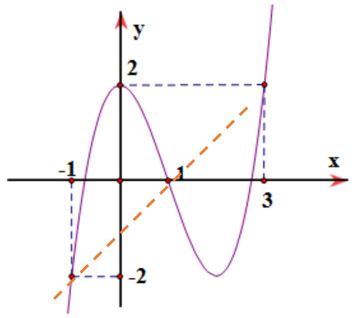
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow -2f'(1-x)<0,\ \forall x\in(-2;0)$

$\Rightarrow -2f'(1-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0,\ \forall x\in(-2;0)$.

Câu 76. Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ cho như hình bên.



Hàm số $g(x)=f(2-x)-\dfrac{1}{2}x^2+x$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$.

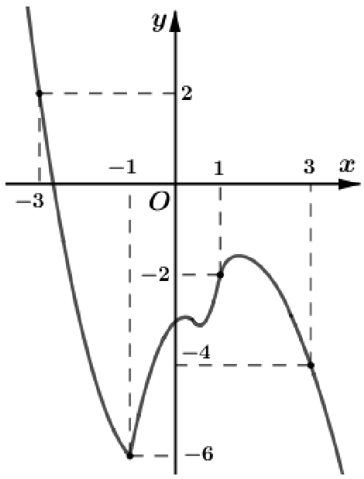
C. $\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2-x=t$ ta có $g'(x)=-f'(t)+t-1>0\Leftrightarrow f'(t)<t-1$. Đường thẳng $y=t-1$ đi qua các điểm $(-1;-2)$ và $(1;0)$ và $(3;2)$ trên đồ thị $f'(t)$ do đó $f'(t)<t-1$ trên $(1;3)$ hoặc $(-\infty;-1)$ hay ta có $\left[\begin{array}{l}1<2-x<3\\2-x<-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(-1;1)\\x\in(3;+\infty)\end{array}\right.$, theo bài $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(2x-3)+2x^2-4x+5$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



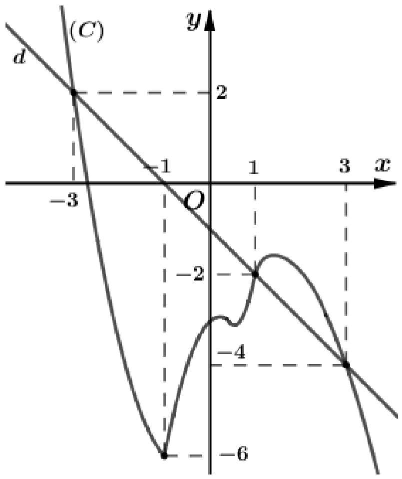
A. $(0;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2f'(2x-3)+4x-4\Rightarrow g'(x)\ge 0\Leftrightarrow f'(2x-3)\ge -2x+2$ (1).

Đặt $t=2x-3$ khi đó (1) $\Rightarrow f'(t)\ge -t-1$ (2).



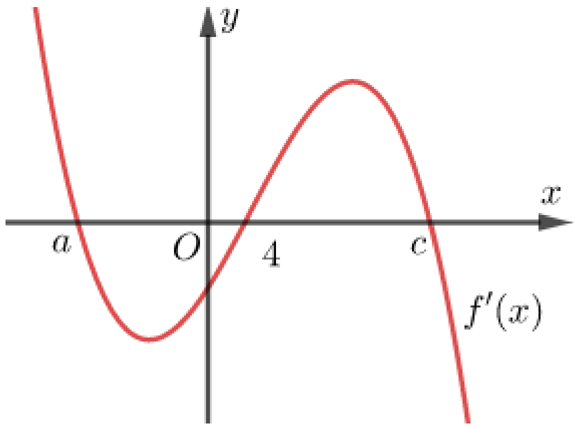
Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(t) \geq -t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -3 \\ 1 \leq t \leq 3 \end{array}\right.$ (vì phần đồ thị của $f'(t)$ nằm phía trên đường thẳng $y=-t-1$).

Như vậy $f'(2x-3) \geq -2x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3 \leq -3 \\ 1 \leq 2x-3 \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(2x-3)+2x^2-4x+5$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;3)$

Mà $\left(\frac{5}{2};3\right) \subset (2;3)$ nên hàm số $g(x)=f(2x-3)+2x^2-4x+5$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021;2021]$ để hàm số $y=f(x+|x-2|+|x-m|)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là



A. 2025. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2026.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $u=x+|x-2|+|x-m|$

TH1: $m>2$

x	$-\infty$ 2	m	$+\infty$
u	$2+m-x$	$x-2+m$	$3x-2-m$
u'	-1	1	3
u	↘ m	↗ $2m-2$	↗

TH2: $m<2$

x	$-\infty$		m		2		$+\infty$
u		$2+m-x$		$x+2-m$		$3x-2-m$	
u'		-1		1		3	
u		$\searrow$	2	$\nearrow$	$4-m$	$\nearrow$	

TH3: $m=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
u		$4-x$		$3x-4$	
u'		-1		3	
u		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Xét hàm số $y=f(u)\Rightarrow y'=u'.f'(u)$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số u có đúng một cực trị $\Rightarrow u'=0$ có đúng 1 nghiệm.

Để hàm số có 5 cực trị thì $f'(u)=0$ phải có 4 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+|x-2|+|x-m|=a<0 & (1)\rightarrow VN \\ x+|x-2|+|x-m|=4 & (2) \\ x+|x-2|+|x-m|=c>4 & (3) \end{array}\right. .$$

Mỗi phương trình $(2),(3)$ có hai nghiệm phân biệt. Vì $c>4$ nên nếu pt (2) có 2 nghiệm phân biệt thì pt (3) cũng có 2 nghiệm phân biệt vì vậy chỉ cần xét phương ttrình (2).

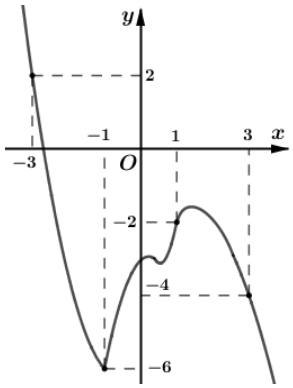
Với $m\le 2$, dựa vào bảng biến thiên trên phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Với $m>2$, để pt (2) có 2 nghiệm phân biệt thì $m<4$.

Suy ra các giá trị nguyên của m thoả điều kiện $-2021\le m\le 3$

Vậy có 2025 giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(2x-3)+2x^2-4x+5$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



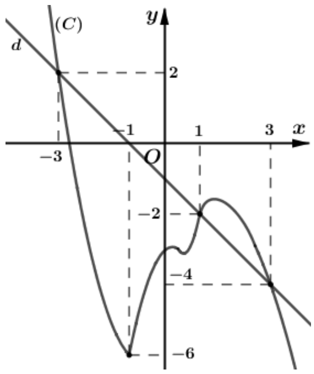
A. $(0;3)$. **B.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$ **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(2x-3)+4x-4 \longrightarrow g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f'(2x-3)\geq -2x+2$ (1).

Đặt $t=2x-3$ khi đó (1) $\Rightarrow f'(t)\geq -t-1$ (2).



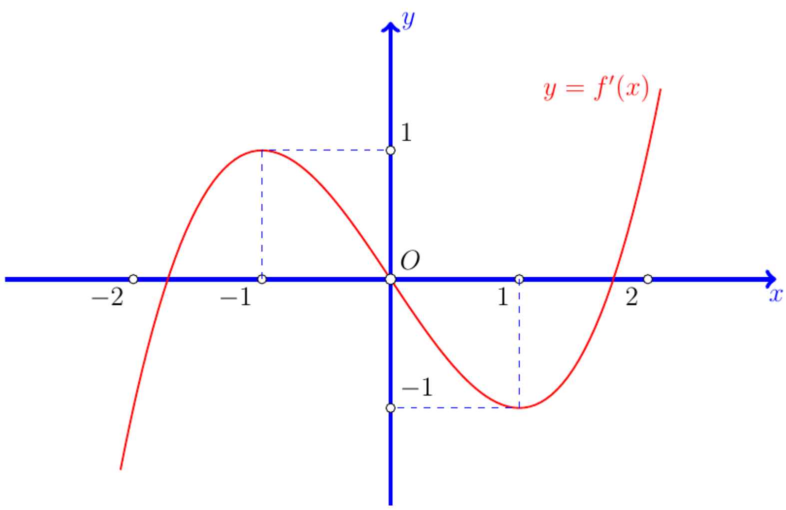
Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(t)\geq -t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq -3 \\ 1\leq t\leq 3 \end{array}\right.$ (vì phần đồ thị của $f'(t)$ nằm phía trên đường thẳng $y=-t-1$).

Như vậy $f'(2x-3)\geq -2x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3\leq -3 \\ 1\leq 2x-3\leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ 2\leq x\leq 3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(2x-3)+2x^2-4x+5$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;3)$

Mà $\left(\dfrac{5}{2};3\right)\subset(2;3)$ nên hàm số $g(x)=f(2x-3)+2x^2-4x+5$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.

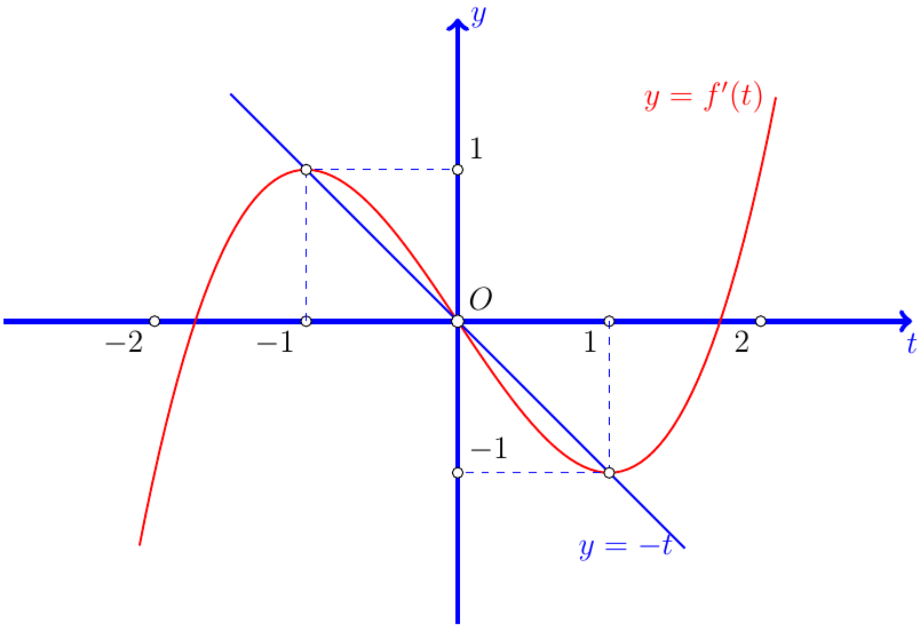


Hàm số $g(x)=f\left(x^3\right)+\frac{x^6}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(0;2)$ **B.** $(-2;0)$ **C.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **D.** $(1;2)$

Lời giải

Chọn D

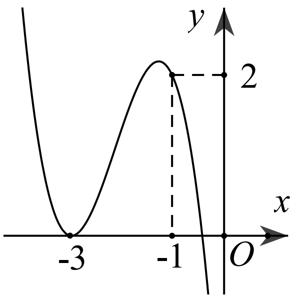


Có $g'(x)=3x^2.f'(x^3)+3x^5=3x^2\left[f'(x^3)+x^3\right]$.

$g(x)$ đồng biến khi $g'(x)=3x^2\left[f'(x^3)+x^3\right]\geq 0\Rightarrow f'(x^3)\geq -x^3$ (1).

Đặt $t=x^3\Rightarrow(1)\Leftrightarrow f'(t)\geq -t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq t\leq 0\\ t\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x^3\leq 0\\ x^3\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x\leq 0\\ x\geq 1\end{array}\right.$.

Câu 81. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $y=\frac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có nghiệm kép $x=-3$ và một nghiệm đơn $x=a$ với $a\in\left(0;1\right)$.

Giả sử $f\left(x\right)=m\left(x+3\right)^2\left(x-a\right)$ với $m>0$.

Hàm số $f\left(x\right)-2$ có nghiệm kép $x=-1$, $x=b$ và $x=c$ với $b\in\left(-3;-1\right)$, $c\in\left(-\infty;-3\right)$.

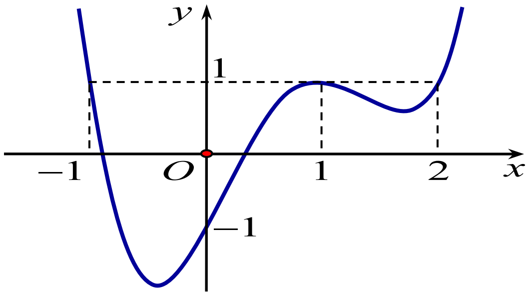
Giả sử $f\left(x\right)-2=m\left(x+1\right)\left(x-b\right)\left(x-c\right)$.

Điều kiện xác định của hàm số $y=\frac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{xf(x)\left[f(x)-2\right]}$

$=\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.m(x+3)^2(x-a).m(x+1)(x-b)(x-c)}=\frac{\sqrt{x(x+1)}}{m^2x(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}$.

Ta thấy các đường thẳng $x=0, x=-3, x=b, x=c$ là các đường tiệm cận đứng.

Câu 82. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\frac{2020-2019x}{2019}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1\,;0)$. **B.** $(1\,;2)$. **C.** $(2\,;3)$. **D.** $(0\,;1)$.

Lời giải

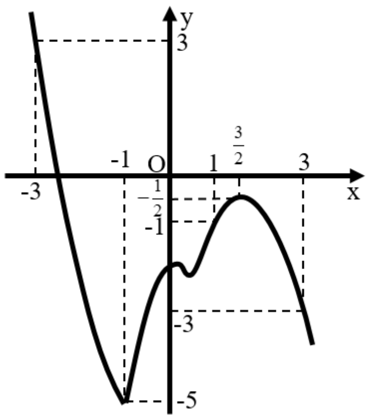
Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x-1)-1$.

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1)-1\geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1)\geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1\leq -1\\x-1\geq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq 0\\x\geq 3\end{array}\right.$.

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f(x-1)+\frac{2020-2019x}{2019}$ đồng biến trên khoảng

Câu 83. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $y=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-3;1)$. **B.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=-f'(1-x)+x-1$.

Hàm số đã cho nghịch biến $\Leftrightarrow y'\leq 0 \Leftrightarrow -f'(1-x)+x-1\leq 0 \Leftrightarrow f'(1-x)\geq -(1-x)$.

Đặt $t=1-x$, ta có: $f'(t)\geq -t$.

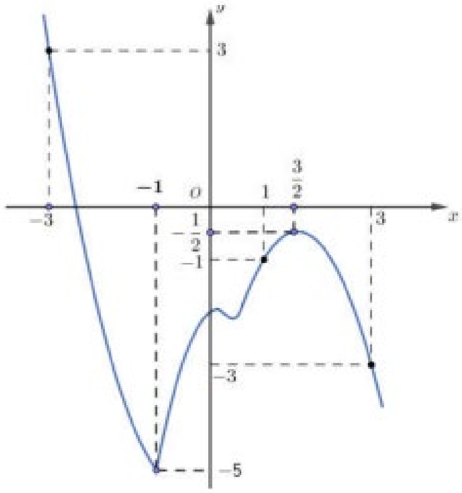
Dựa vào đồ thị ta có: $\left[\begin{array}{l}t\leq -3\\1\leq t\leq 3\end{array}\right.$

$+\ t \le -3 \Leftrightarrow 1-x \le -3 \Leftrightarrow x \ge 4$.

$+\ 1 \le t \le 3 \Leftrightarrow 1 \le 1-x \le 3 \Leftrightarrow -2 \le t \le 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $[-2;0]$ và $[4;+\infty)$.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

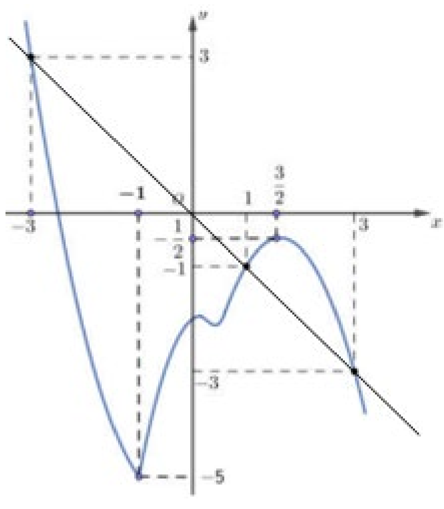
Lời giải

Chọn B

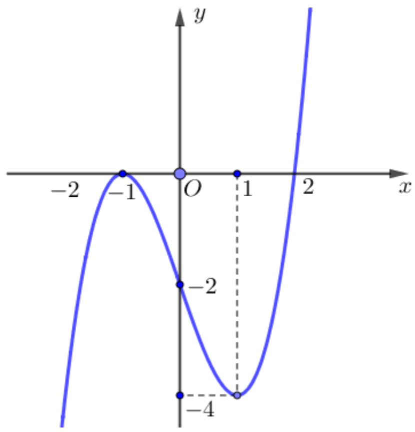
Ta có $y' = -f(1-x) + x - 1$.

Hàm số nghịch biến khi $y' = -f(1-x) + x - 1 < 0 \Leftrightarrow -f(1-x) - (1-x) < 0 \Leftrightarrow f(1-x) > -(1-x)$ (dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ và đồ thị hàm số $y = -x$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x < -3 \\ 1 < 1-x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{array}\right..$$



Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2x.f'\left(x^2 - 2\right)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2-2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right..$$

$$f'\left(x^2-2\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right..$$

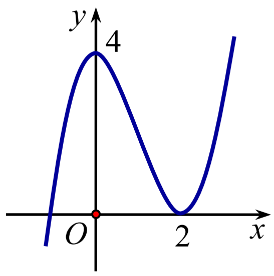
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$f(2)$	↗	$f(-1)$	↗	$f(-2)$	↘	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy câu **A** là sai.

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + x + 2}\right)$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, có đồ thị như hình vẽ.

Do đó $x=0\Rightarrow d=4$; $x=2\Rightarrow 8a+4b+2c+d=0$; $f'(2)=0\Rightarrow 12a+4b+c=0$; $f'(0)=0\Rightarrow c=0$.

Tìm được $a=1;b=-3;c=0;d=4$ và hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

Ta có $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^3-3\left(x^2+x+2\right)+4$

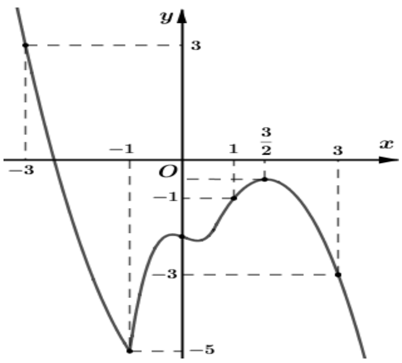
$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}-3(2x+1)=3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2}-1\right);\ g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\dfrac{7\sqrt{7}-10}{8}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$.

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-3;1)$.

B. $(-2;0)$.

C. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

D. $(1;3)$.

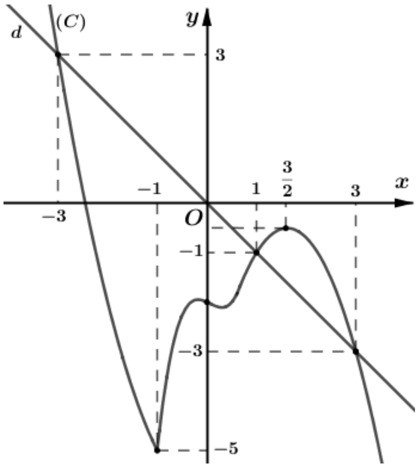
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=-f'(1-x)+x-1$.

Để $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(1-x)>x-1$. Đặt $t=1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t)>-t$.

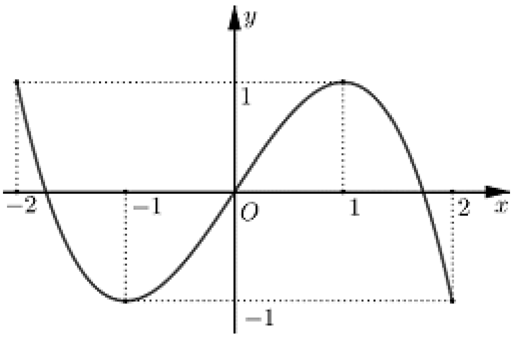
Kẻ đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x=-3;\ x=-1;\ x=3$.



Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình $f'(t) > -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x < -3 \\ 1 < 1-x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{array}\right.$.

Đối chiếu đáp án ta chọn **B.**

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$.

Ta có $g'(x) = -\sin x.f'(\cos x) + 2x - 1$.

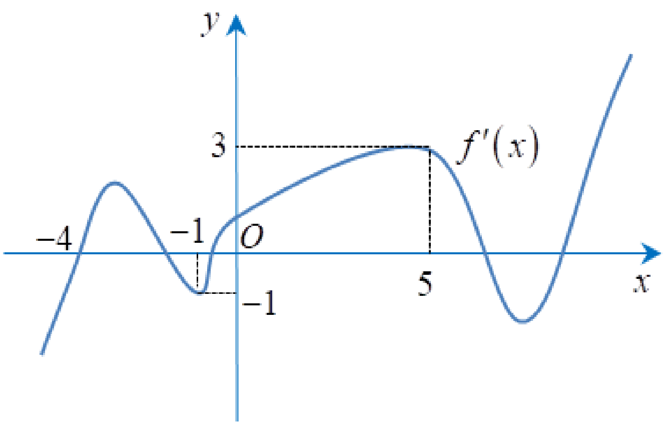
Do $\cos x \in [-1;1]$ và từ đồ thị hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(\cos x) \in [-1;1]$.

Từ đó suy ra $|-\sin x.f'(\cos x)| \le 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow g'(x) = -\sin x.f'(\cos x) + 2x - 1 \ge -1 + 2x - 1 = 2x - 2$

$\Rightarrow g'(x) > 0, \forall x > 1$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3x-1) - x^3 + 3x + 2020$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Giá trị lớn nhất của bằng $(b-a)$



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

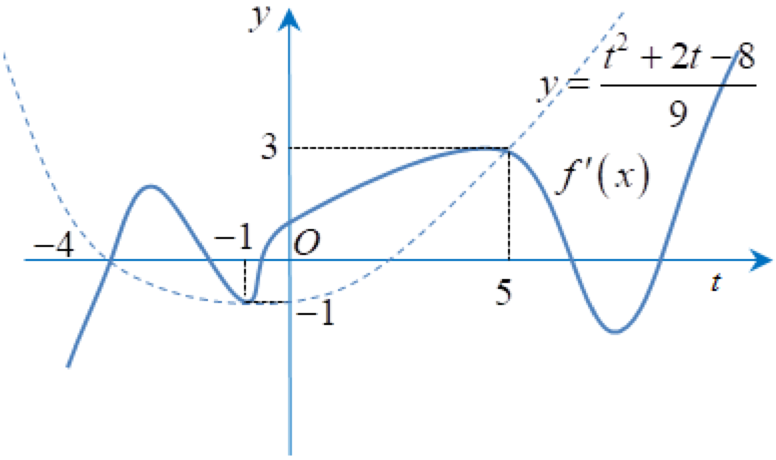
Xét hàm số: $y=f\left(3x-1\right)-x^3+3x+2020 \Rightarrow y'=3f'\left(3x-1\right)-3\left(x^2-1\right).1$.

Hàm số đồng biến nên $y'\ge 0 \Leftrightarrow 3f'\left(3x-1\right)-3\left(x^2-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow f'\left(3x-1\right)-\left(x^2-1\right)\ge 0$.

Đặt $t=3x-1 \Rightarrow x=\frac{t+1}{3} \Rightarrow f'\left(t\right)-\left(\frac{t+1}{3}\right)^2+1\ge 0 \Leftrightarrow f'\left(t\right)\ge \frac{t^2+2t-8}{9}\left(*\right)$.

$\left(*\right)$ thoả mãn khi đồ thị $y=f'\left(t\right)$ nằm phía trên so với đồ thị $y=\frac{t^2+2t-8}{9}$.

Đồ thị tương giao của $y=f'\left(t\right)$ và $y=\frac{t^2+2t-8}{9}$.



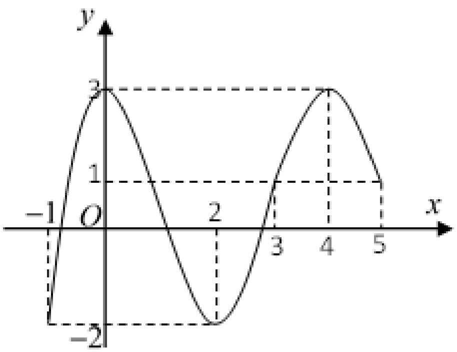
Dựa vào đồ thị, ta thấy $\left(*\right)$ thoả mãn $\Rightarrow -4\le t\le 5 \Leftrightarrow -4\le 3x-1\le 5 \Leftrightarrow -1\le x\le 2$.

Hàm số $y=f\left(3x-1\right)-x^3+3x+2020$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;2\right)$.

Suy ra $\left(a;b\right)\subset\left(-1;2\right)\Rightarrow b-a\le 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\left(b-a\right)=3$.

Câu 90. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f\left(2-x\right)+x^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(-3;-2\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=-2f\left(2-x\right)+x^2$ trên $\left[-3;2\right]$ có

$y'=2f'\left(2-x\right)+2x; y'=0 \Leftrightarrow f'\left(2-x\right)=-x\ \left(*\right)$

Đặt $2-x=t\Rightarrow t\in[0;5]\Rightarrow(*)$ có dạng $f'(t)=t-2$

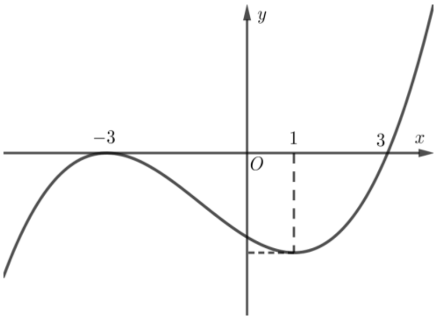
Dựa vào đồ thị suy ra $f'(t)=t-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=t_0\in(4;5)\\ t=t_1\in(0;2)\end{array}\right.\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2-t_0=x_0\in(-3;-2)\\ x=2-t_1=x_1\in(0;2)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-3		x_0		-2		-1		0		x_1		2
y'		$-$	0		$+$		0		$-$		0	$+$	
y	$y(-3)$	$\searrow$	$y(x_0)$		$\nearrow$		$y(-1)$		$\searrow$		$y(x_1)$	$\nearrow$	$y(2)$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta có $g'(x)=2f(x).f'(x)\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3;x=-3\text{ (nghiệm kép)}\\ x=1;x=-3\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)\Rightarrow f(4)>0$ và $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-3\end{array}\right.\Rightarrow f'(4)>0$. Do đó

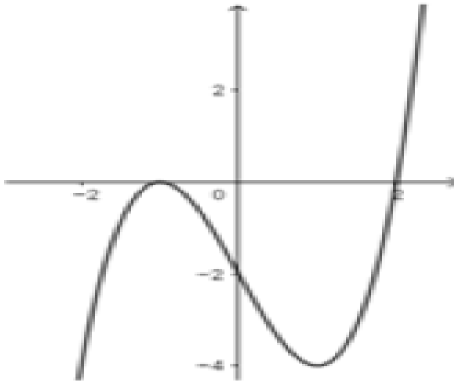
$g'(4)=2f(4).f'(4)>0$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;3)$.

Câu 92. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$.



Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(0;2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên$(-\infty;-2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=f(x^2-2)$

$g'(x)=f'(x^2-2).2x$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Ta có $g'(3)=6.f'(7)>0$, g'(x) đổi dấu qua các nghiệm đơn hoặc bội lẻ, không đổi dấu qua các nghiệm bội chẵn nên ta có bảng xét dấu g'(x):

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+	