

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ HỖN TẠP

BÀI TẬP GIẢI VÀ BIỆN LUẬN CÁC LOẠI HỆ CHỨA THAM SỐ (QUYỂN 1)

TRUNG ĐOÀN HOA PHƯỢNG ĐỎ – QUÂN ĐOÀN TĂNG THIẾT GIÁP

[TÀI LIỆU PHỤC VỤ KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT, LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN]

CHỦ ĐẠO: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT CHỨA THAM SỐ

- GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ.
- GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THAY THẾ.
- GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT CHỨA THAM SỐ.
- CÂU HỎI PHỤ BÀI TOÁN GIẢI VÀ BIỆN LUẬN.
- BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THÀNH PHỐ THÁI BÌNH – MÙA THU 2016

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*“....Năm ấy từ miền xuôi xa xôi,
Cô giáo người Kinh lên với bản làng,
Dòng Khuổi Nậm nhẹ reo reo hát,
Hát cùng bầu em bé vang núi rừng,
Cô giáo dạy bầu em thơ ngây,
Yêu núi rừng ruộng nương quê hương...”*

*Cô giáo về bản
Nhạc và lời: Trương Hùng Cường.*

CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ HỖN TẬP

BÀI TẬP GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT CHỨA THAM SỐ

TRUNG ĐOÀN HOA PHƯỢNG ĐỎ – QUÂN ĐOÀN TĂNG THIẾT GIÁP

Trong khuôn khổ Toán học sơ cấp nói chung và Đại số phổ thông nói riêng, hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tập là dạng toán cơ bản nhưng thú vị, có phạm vi trải rộng, phong phú, liên hệ chặt chẽ với nhiều bộ phận khác của toán học sơ cấp cũng như toán học hiện đại.

Tại Việt Nam, hệ phương trình, nội dung hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tập là một bộ phận hữu cơ, quan trọng, được phổ biến giảng dạy chính thức trong chương trình sách giáo khoa Toán các lớp 9, 10, 11, 12 song song với các khối lượng kiến thức liên quan. Các phương pháp giải và biện luận hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tập được luyện tập một cách đều đặn, bài bản và hệ thống sẽ rất hữu ích, không chỉ trong bộ môn Toán mà còn phục vụ đắc lực cho các môn khoa học tự nhiên khác như hóa học, vật lý, sinh học,... Đối với chương trình Đại số lớp 9 THCS hiện hành, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là một nội dung cơ bản – quan trọng, giữ vai trò chính yếu trong Đề thi kiểm tra chất lượng học kỳ, Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT hệ đại trà và hệ THPT Chuyên. Thậm chí đây cũng là kiến thức phổ biến xuất hiện trong các kỳ thi kiểm tra kiến thức thường niên, kỳ thi chọn học sinh giỏi toán các cấp trên toàn quốc, kỳ thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT và trong kỳ thi tuyển sinh đại học – cao đẳng hàng năm, một kỳ thi đầy cam go, kịch tính và bất ngờ, nó lại là một câu rất được quan tâm của các bạn học sinh, phụ huynh, các thầy cô, giới chuyên môn và đông đảo bạn đọc yêu Toán.

Yêu cầu của dạng toán khá đa dạng, đa chiều, mục tiêu tìm các ẩn thỏa mãn một tính chất nào đó nên để thao tác dạng toán này, các bạn học sinh cần liên kết, phối hợp, tổng hợp các kiến thức được học về phương trình, hệ phương trình và bất phương trình, như vậy nó đòi hỏi năng lực tư duy của thí sinh rất cao. Tuy nhiên "Trăm hay không hay bằng tay quen", các phương pháp cơ bản đã được đúc kết và tận tụy cho thế hệ đi trước đúc kết và tận tụy cho thế hệ tương lai, các bạn hoàn toàn đủ khả năng kế thừa, phát huy và sáng tạo không ngừng, chuẩn bị đủ hành trang nắm bắt khoa học kỹ thuật, đưa đất nước ngày càng vững bền, phồn vinh, và hiển nhiên những bài toán trong các kỳ thi nhất định không thể là rào cản, mà là cơ hội thử sức, cơ hội khẳng định kiến thức, minh chứng sáng ngời cho tinh thần học tập, tinh thần ái quốc!

Trong phạm vi hệ phương trình hai ẩn bậc nhất hai ẩn, tài liệu này tập trung trình bày một lớp các bài toán giải và biện luận hệ phương trình với tham số (thường dùng là $a, m, k, b, \dots$), kết hợp các phương pháp thường dùng bao gồm phương pháp thay thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp hình học, phương pháp định thức. Nói chung, bài toán giải và biện luận hệ phương trình ngoài các vấn đề căn bản như vô nghiệm, có nghiệm, có vô số nghiệm, có nghiệm duy nhất, nó thường kèm theo rất nhiều vấn đề liên quan, vì bản thân hệ là hai phương trình bậc nhất hai ẩn, với mỗi phương trình biểu diễn một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ. Bài toán giải và biện luận hệ phương trình vì thế có thể lồng ghép với bài toán hàm số bậc nhất, bậc hai, mặt phẳng tọa độ, với muôn vàn các kiến thức, kỹ năng khác đối với phương pháp tọa độ trong mặt phẳng (còn gọi là hình học giải tích trong chương trình Hình học lớp 10 THPT).

I. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. Kỹ thuật nhân, chia đơn thức, đa thức, hằng đẳng thức.
2. Nắm vững các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.
3. Nắm vững các phương pháp giải, biện luận phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc cao.
4. Sử dụng thành thạo các ký hiệu toán học, logic (ký hiệu hội, tuyển, kéo theo, tương đương).
5. Kiến thức nền tảng về mặt phẳng tọa độ, hàm số bậc nhất, đường thẳng.
6. Kiến thức nền tảng về hệ số góc của đường thẳng, công thức độ dài, hệ thức lượng trong tam giác vuông, công thức lượng giác, đường tròn, hàm số bậc hai parabol, phương trình nghiệm nguyên.
7. Kiến thức nền tảng về ước lượng – đánh giá, hàm số - đồ thị, bất đẳng thức – cực trị.

II. MỘT SỐ BÀI TẬP ĐIỂN HÌNH.

Bài toán 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=3m, \\ 2x-y=m. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải phương trình (I) với $m=2$.
- Giải và biện luận hệ đã cho theo m .
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $x+y=7m-1$.
 - $2x+5y>5$.
 - $x^3+4y^3=5m$.
 - Biểu thức $P=x^2+(y-1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ thuộc đường cong $(C): y=x^3-3x$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía trong hình tròn tâm O, bán kính $R=1$.
 - Biểu thức $S=\frac{2m^2+7x+23}{y(m+2)+10}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất (nếu có).
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà điểm $M(x;y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định. Xác định phương trình đường thẳng đó.
- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét hình vuông (V) có tâm O, hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 2. Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho điểm $M(x;y)$ nằm phía trong (tính cả biên) của hình vuông (V) .
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho tỷ số $\frac{x+3}{2y+1}$ là một số nguyên.

Bài toán 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=m \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) khi $m=\sqrt{2}$.
- Giải hệ phương trình (I) với $m=\frac{x}{3}+2$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo m .
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $x+5y=13$.
 - $7(x+3y)>4m-5$.
 - $x^3+2y=-1$.
 - $x>m; y\leq 7m-2$;
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong parabol $(P): y=\frac{x^2}{2}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía bên trái đường thẳng $x=\sqrt{3}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ III của mặt phẳng tọa độ (không tính biên).
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà điểm $M(x;y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho tỷ số $\frac{x}{y}$ là một số nguyên.

Bài toán 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2m + 3, \\ 3x + 2y = m - 6. \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) với $m = 5$.
- Giải và biện luận hệ phương trình (I) theo m .
- Tìm giá trị của tham số m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức
 - $x = y + 3$.
 - $x > y + 1$.
 - $x - 4y = m + 9$.
 - $x \geq 0; y \leq 0$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $(d): 3x + 4y = 7$.
 - Biểu thức $S = \frac{m^2 + 2\sqrt{2}(x + y - 3) + 3}{m^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất (nếu có).
 - Điểm $M(x; y)$ và điểm $N(0; 2)$ nằm trong cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $\Delta: x + y = 1$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà điểm $M(x; y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho tỷ số $\frac{x}{y}$ là một số nguyên.
- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét hình vuông (V) có tâm O, hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 2. Tồn tại hay không giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho điểm $M(x; y)$ nằm phía trong (tính cả biên) hình vuông (V) ?

Bài toán 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m, \\ 2x - 3y = 5m - 7. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) khi $m = 5$.
- Chứng minh rằng hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với mọi m .
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức
 - x và y trái dấu.
 - $2x + y = 8m - 1$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm hoàn toàn bên phải đường thẳng $x = 4$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $3x - 2y = 1$.
 - Biểu thức $P = 25x^2 + 25y^2 + 1$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{17}$.
 - Biểu thức $S = \frac{m^2}{m^2 - x - y + 7}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất (nếu có).
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà điểm $M(x; y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho tỷ số $\frac{x}{y}$ là một số nguyên.
- Giả sử y_0 là số thực lớn nhất thỏa mãn đẳng thức $t^2 + ty + y^2 + 4 = 3t + 4y$. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình (I) có nghiệm $(x; y_0)$.

Bài toán 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m + 4, \\ 2x + 3y = 4m - 2. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) khi $m = 2$.
- Chứng minh rằng hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi m .
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $x + 4y = 5$.
 - $x^2 + y^2 = 233$.
 - Biểu thức $S = m^2 + 2x + y + 5$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - $(x+1)(y+1) \leq 0$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - $6x + y + 2m - 7 \geq 0$.
 - Điểm $M(x;y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $(1;4)$ và $(25;-20)$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà điểm $M(x;y)$ luôn thuộc một đường thẳng (d) cố định. Viết phương trình đường thẳng (d) đó.
- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét hình thoi (T) có tâm O, hai đường chéo của (T) nằm trên hai trục tọa độ, độ dài hai đường chéo là 16 và 14. Tồn tại hay không giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho điểm $M(x;y)$ nằm phía trong (tính cả biên) hình thoi (T) ?

Bài toán 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m + 6, \\ 2x - 7y = 5m - 2. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ (I) với $m = 4$.
- Chứng minh rằng hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị của m .
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $x + y = 19$.
 - $2x + 3y > 7m - 10$.
 - $\frac{x}{y} > 1$.
 - $x < \frac{m}{9} < y + 1$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = 9x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía bên trái đường thẳng $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$.
 - Biểu thức $P = x^2 + 2xy + 3y^2$ nhận giá trị nhỏ nhất.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà điểm $M(x;y)$ luôn thuộc một đường thẳng (d) cố định. Viết phương trình đường thẳng (d) đó.
- Giả sử y_0 là số thực lớn nhất thỏa mãn đẳng thức $k^2 - 2(y+1)k + 3y^2 + 1 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình (I) có nghiệm $(x; y_0)$.

Bài toán 7. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2011 – 2012.

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = 18, \\ x - y = -6. \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ (I) khi $m = 4$.
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm $(x;y)$ trong đó $x = 2$.

3. Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $2x + y = 9$.
 - b) $x + 6y = \frac{2m-9}{m+2}$.
 - c) $x > 3; y > 1$.
 - d) Điểm $M(x;y)$ nằm phía trên trục hoành.
 - e) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường parabol $(P): y = 5x^2$.
 - f) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(C): y = x^3 - 2x + 8$.
 - g) Biểu thức $S = x^4 + 2x^2 - xy + 11$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - h) Điểm $M(x;y)$ nằm giữa hai điểm A và B với $A(1;2), B(2;3)$.
4. Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.
5. Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho điểm $M(x;y)$ nằm trong lòng parabol $(Q): y = x^2$.

Bài toán 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} a^2x + 2y = 0, \\ x + y = 4. \end{cases}$ (I); với a là tham số thực.

1. Giải hệ phương trình (I) với $a = 2$.
2. Giải và biện luận hệ (I) theo tham số a .
3. Tìm giá trị của a để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $x = -4; y = 4a$.
 - b) $2x + 7y = 10$.
 - c) $x + y = \frac{-4a}{a^2 - 2}$.
 - d) Biểu thức $T = x^2 + y - 11x + 12$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - e) Biểu thức $S = x^4 - 500x + 2015$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - f) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ III trong mặt phẳng tọa độ.
 - g) Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $(P): y = 3x^2$.
 - h) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(H): y = -\frac{5}{x}$.
4. Chứng minh rằng không tồn tại giá trị m để hệ (I) có nghiệm $(x;y)$ duy nhất thỏa mãn đẳng thức $x = \sqrt{y} + \sqrt{2y-1} + \sqrt[3]{y^2+2}$.

Bài toán 9. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2004 – 2005.

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 3 + a \\ x + 2y = a \end{cases}$ (a là tham số thực).

1. Giải hệ phương trình trên với $a = \frac{4}{3}$.
2. Giải và biện luận hệ đã cho theo m . Khi đó chứng minh rằng với mọi giá trị của a hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó điểm $M(x;y)$ thuộc một đường thẳng cố định.
3. Tìm a sao cho hệ có nghiệm $(x;y)$ trong đó $y = 1$;
4. Tìm giá trị a để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $4x + 7y > 12$.
 - b) $x^2 + y^2 = 17$.
 - c) $x - 3x\sqrt{y} + 2y = 0$.

- d) $x^2 + y = 5a - 1$.
- e) Tích xy đạt giá trị lớn nhất.
- f) Điểm $M(x;y)$ nằm bên trái đường thẳng $x = 5$ và bên phải đường thẳng $x = 4$.
- g) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{29}$.
- h) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- i) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(H): y = 3 - x^5$.
- j) Điểm $M(x;y)$ và điểm $N(3;5)$ cách đều đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

Bài toán 10. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 3y - x + 1 = 3m \\ 2x + 4y - 1 = m \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$

1. Giải hệ (I) khi m thỏa mãn $m^3 = 8$.
2. Chứng minh rằng hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị của m . Khi đó hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với m .
3. Với giá trị nào của m thì hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ sao cho x thỏa mãn $2x + 3m\sqrt{x} = 5m^2$.
4. Xác định giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho

- a) $x - y = \frac{1}{10}$.
- b) $3x - 2y > 3$.
- c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{10}{3}$.
- d) $x < y < 2m - 1$.
- e) x và y là nghiệm của phương trình $100k^2 - 20(2m - 1)k + (7 - 9m)(7m - 1) = 0$.
- f) Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = 10x^2$.
- g) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- h) Biểu thức $P = x^4 - x^2 + 5x + 9y + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- i) Điểm $M(x;y)$ và điểm $N(1;2)$ cùng nằm trong nửa mặt phẳng tọa độ Oxy với bờ là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Bài toán 11. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 4y = 5, \\ kx + 2y = k + 8. \end{cases} \quad (I); \text{ với } k \text{ là tham số thực.}$$

1. Giải hệ (I) với $k = -4$.
2. Tìm k để hệ (I) có nghiệm $(x;y)$ trong đó $x = -4$.
3. Tìm k để hệ (I) có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức $5x + 2y = 8$.
4. Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số k .
5. Tìm k để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $3x + 7y - 1 = \frac{k + 6}{2k - 1}$.
 - b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 6$.
 - c) $x - y \geq 1$.
 - d) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $d: x - y = 3$.
 - e) Biểu thức $P = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - f) Biểu thức $S = x^4 - 5x^2 - 11x + 4y + 13$ đạt giá trị nhỏ nhất.
6. Tìm giá trị nguyên của k để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.

7. Tồn tại hay không giá trị của k để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó điểm $M(x;y)$ nằm trong hình tròn (tính cả biên) tâm O, bán kính bằng 1 ?

Bài toán 12. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 4y = 20 \\ x + my = 10 \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình với $m = 3$.
- Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Chứng minh rằng khi $m \neq -2$, hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà điểm $M(x;y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $x + 2y > \frac{m}{m+2}$.
 - $x - y = 3$.
 - $x^3 + my = 20$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 12$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $(P): y = x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(H): y = \frac{2}{x}$.
 - Biểu thức $K = -y^2 + 3x + 5$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $S = 2x^4 - x^2 - 12y + 9$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{5}$.
 - Điểm $M(x;y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $P(3;4)$, $Q(5;0)$.

Bài toán 13. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2006 – 2007.

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình với $m = 5$.
- Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $y^2 = x$.
 - $x^4 = y^4 + x^2 - y^2$.
 - $3x > 2y + xy + 19$.
 - Biểu thức $P = x^2 + y^2 + 3m + 2$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $(P): y = 4x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $A(1;2)$, $B(1;5)$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất trong mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía ngoài đường tròn tâm O, bán kính $R = 2$.
- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét hình vuông (V) có tâm O, hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 8. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà điểm $M(x;y)$ nằm phía trong (tính cả biên) hình vuông (V) .

Bài toán 14. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = -m, \\ x + my = -1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho khi $m = -2$.
- Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn
 - $x^2 + y^3 = 5$.
 - $x^2 + 6y^2 = 9 + 2m$.
 - $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-2} = 3$.
 - $|x-3| + |y-4| = 5$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $x - 7y = 11$.
 - Biểu thức $S = 4x^2 + 3y^2 + 2x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $(H): y = \frac{5}{x-3}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ hai của mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Bài toán 15. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2009 – 2010.

Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x + y = 2, \\ mx + y = m + 1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 2$.
- Giải và biện luận hệ đã cho theo m .
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $2x + y \leq 3$.
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $y \geq \frac{1}{2}m + 1$.
 - $x^2 + y = 9m - 13$.
 - $x + 2y > 1$.
 - $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = m^2 - m - 2$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên tia Oy.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $d: x + y = -4$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên parabol $(P): y = x^2$.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$, đồng thời tồn tại một hệ thức liên hệ giữa hai biến x và y độc lập với m .

Bài toán 16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$ (I); m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình với $m = -2$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Tồn tại hay không giá trị m để hệ (I) có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$?
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ trong đó x thỏa mãn $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x} = 2$.

5. Tìm giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x, y đều là các số nguyên dương.
6. Tìm giá trị của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn
 - a) $5x + y = \frac{9m-6}{m+2}$.
 - b) $2x > y + 4$.
 - c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$.
 - d) $x \geq 2; y \leq 3$.
 - e) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai trong mặt phẳng tọa độ.
 - f) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $x + 2y = 6$.
 - g) Điểm $M(x; y)$ nằm trên parabol $(P): y = 3x^2$.
 - h) Điểm $M(x; y)$ và điểm $N(1; 2)$ nằm cùng phía so với đường thẳng $\Delta: y = x$.
7. Trong trường hợp hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$, chứng minh rằng điểm $M(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài toán 17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

1. Giải hệ phương trình với $m = 5$.
2. Chứng minh rằng hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất với mọi giá trị của tham số m .
3. Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $x + y = 6$.
 - b) $x^2 > 2x + y$.
 - c) $y - x > \sqrt{3}$.
 - d) Độ dài đoạn thẳng OM bằng 5 với O là gốc tọa độ.
 - e) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường parabol $y = \frac{1}{2}x^2$.
 - f) Điểm $M(x; y)$ nằm trên tiếp tuyến đi qua điểm $(1; 1)$ của parabol $(P): y = x^2$.
 - g) Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
 - h) Điểm $M(x; y)$ nằm trên biên hình vuông biểu diễn bởi phương trình $|x| + |y| = 4$.
4. Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 8.

Bài toán 18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx = 3my + 2m + 3 \end{cases}$ (m là tham số thực).

1. Giải hệ phương trình với $m = 4$.
2. Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
3. Với giá trị nguyên nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên duy nhất?
4. Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $y \geq \frac{1}{m^2}$.
 - b) $x - y = 3$.
 - c) $x + 7y = \frac{8}{m}$.

- d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} > 3$.
- e) Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = 2x^2$.
- f) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(C): y = x^3 - 3x + 5$.
- g) Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.

Bài toán 19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình với $m = 4$.
- Chứng minh rằng trong trường hợp hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.
- Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho
 - $2x - 9\sqrt{x} + 7 = 0$.
 - $2x + y = \frac{7}{m+1}$.
 - $x - y > 4$.
 - $|x| = 3|y|$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $2x + 3y = 5$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = x^2$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành gấp ba lần khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung.
 - Điểm $M(x;y)$ có hoành độ thỏa mãn đẳng thức $6x^2 + 3z^2 + 2z + 1 = 4x(2z + 1)$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên tiếp tuyến đi qua điểm $(1;1)$ của parabol $y = x^2$.

Bài toán 20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} my + 3 = x \\ mx = 4(y+1) + m \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình với $m = 4$;
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x > 0, y < 0$.
 - $2x + 5y = \frac{9}{m+2}$.
 - $x + 2y > \frac{m-6}{m+2}$.
 - $|x| = 5|y|$.
 - $x \geq 3; y \geq 5$.
 - x và y là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn $t: t^2 - 3mt + xy = 0$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành gấp bốn lần khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên tiếp tuyến đi qua điểm $(1;1)$ của parabol $y = x^2$.
- Trong trường hợp hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, tìm quỹ tích (tập hợp điểm trong hình học) các điểm $M(x;y)$.

Bài toán 21. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2014 – 2015.

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình với $m = 2$;
- Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
- Trong trường hợp hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$, chứng tỏ rằng điểm M có tọa độ $(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.
- Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x \geq 3; y \geq 2$.
 - $x - y > 2$.
 - $x + y^2 = \frac{4}{(m+1)^2}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên parabol $y = \frac{1}{4}x^2$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $y = x^3 - 3x - 1$.
 - Biểu thức $P = x^2 + y^2$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $S = 2x^4 - 15x^2 - 4y + 37$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.
- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét hình vuông (V) có tâm O , hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 8. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà điểm $M(x; y)$ nằm trên một trong bốn biên của hình vuông (V) .

Bài toán 22. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ 4x + my = 2 \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình với $m = 2$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .
- Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + 3y = 4$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.
 - $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$
 - $4x + 3y = \frac{m^2 - 10}{m - 2}$.
 - x và y là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn t : $t^2 - 5t + xy = 0$.
 - $x < y < 3$.
- Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y + 2m$ với $(x; y)$ là nghiệm duy nhất của hệ thỏa mãn $x + y = 0$.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.

Bài toán 23. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m^2 \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) khi $m = -4$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .
- Tìm m để hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.
- Xác định giá trị của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ trong đó x thỏa mãn điều kiện $2x + 3\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x-3} = 12$.
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x \leq 2; y \geq 2$.
 - $x + y^2 = 9$.
 - $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} = 5$.
 - $(x+1)m + 2y = \sqrt{3}$.
 - Biểu thức $S = -x^2 + 2y^2 + 3m + 4$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$.
 - Điểm $M(x; y)$ là tâm đối xứng của hai điểm O và N trong đó $N(0; 6)$ và O là gốc tọa độ.
- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét hình vuông (V) có tâm O, hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 8. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà điểm $M(x; y)$ có thể nằm bên trong hoặc biên của hình vuông (V) .

Bài toán 24. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ (m-1)x + (m-1)y = 1 \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình đã cho khi $m = -4$.
- Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.
- Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $xy > 0$.
 - $x + 2y > 0$.
 - $x - y = 3$.
 - $x + 2y = \frac{8}{m^2 - 3m + 2}$.
 - $x^4 - 3x^2 \leq 4$.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành gấp năm lần khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung.
 - Biểu thức $S = x + y + \frac{m}{m^2 - 3m + 2}$ nhận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).

Bài toán 25. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - (m+3)y = 0, \\ (m-2)x + 4y = m-1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) khi $m = 3$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Chứng minh rằng khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$, điểm $M(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng (d) cố định. Tìm phương trình đường thẳng (d) .
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn từng điều kiện

- a) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $x - 2y = 5$.
 - b) $x - y > \frac{5}{m+2}$.
 - c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{2}$.
 - d) $x + my = \frac{5}{3}$.
 - e) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - f) Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành gấp bảy lần khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung.
 - g) Điểm $M(x;y)$ nằm về phía trên trục hoành.
 - h) x và y là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn t : $t^2 - 6t + xy = 0$.
 - i) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $y = x^5 - 15x - 1$.
5. Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho $M(x;y)$ cách đều hai điểm $P(2;5), Q(1;-4)$.
 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét hình vuông (V) có tâm O , hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích S . Tìm điều kiện của S để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà điểm $M(x;y)$ có thể nằm bên trong hoặc biên của hình vuông (V) .

Bài toán 26. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0, \\ mx - y = m + 1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

1. Giải hệ phương trình (I) khi $m = 3$.
2. Giải và biện luận hệ (I) theo m .
3. Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.
4. Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $x > 0; y > 0$.
 - b) $x > 2; y > 1$.
 - c) $x + 2y \leq 5$.
 - d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{2}$.
 - e) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $2x + 3y = 6$.
 - f) Điểm $M(x;y)$ nằm bên trái đường thẳng $x = 4$.
 - g) Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $(P): y = x^2$.
 - h) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - i) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai đường thẳng $y = 3x - 2; y = 3x - 4$.
 - j) Điểm $M(x;y)$ là trung điểm của đoạn thẳng PQ với $P(2;4), Q(-2;-6)$.
 - k) Điểm $M(x;y)$ và điểm $(0;-2)$ nằm trong một nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng $x - y = 1$.
5. Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.

Bài toán 27. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2, \\ 3x + my = 5. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

1. Giải hệ (I) với $m = 3$.
2. Giải và biện luận hệ (I) theo m .
3. Chứng minh rằng hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị m .
4. Tìm giá trị của m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $|x| = |y|$.

b) $x + 2y = \frac{5}{4}$.

c) $x + y > 1$.

d) $x + y + \frac{m^2}{m^2 + 3} = 1$.

e) $x + y = \frac{7m-1}{m^4+3}$.

f) Điểm $M(x;y)$ thuộc một trong các đường phân giác của các góc phần tư của hệ trục tọa độ.g) Điểm $M(x;y)$ thuộc cung phần tư thứ nhất (không tính biên) của hệ trục tọa độ.h) Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành gấp sáu lần khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung.5. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên dương.**Bài toán 28.** Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$
1. Giải hệ (I) trong trường hợp $m = -6$.2. Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .3. Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện

a) $3x + 5y = 2$.

b) $x^2 - y^2 \leq 1$.

c) $x + y \leq 5$.

d) $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{20}{3}$.

e) $|x - y + 2|^3 \geq m^2 - 7m + 27$.

f) Điểm $M(x;y)$ nằm phía trên trục hoành.g) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $2x - 5y = -6$.h) Điểm $M(x;y)$ nằm trên tiếp tuyến đi qua điểm $(2;4)$ của parabol $y = x^2$.i) Điểm $M(x;y)$ nằm phía trong hình tròn (không tính biên) tâm O, bán kính $R = 2$.j) Độ dài đoạn thẳng OM ngắn nhất, với $M(x;y)$ và O là gốc tọa độ.4. Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên âm.**Bài toán 29.** Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = m \\ mx + y + m = 2 \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$
1. Giải hệ phương trình với $m = 2$.2. Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .3. Khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, chứng minh rằng điểm $M(x;y)$ luôn di chuyển trên một đường thẳng cố định, tìm phương trình đường thẳng đó.4. Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện

a) $3y + x = 7$.

b) $y \leq \frac{3m}{4}$.

c) $x - y > \frac{1}{3}$.

- d) Điểm $M(x;y)$ nằm bên trái đường thẳng $x = 2$.
- e) $\frac{x}{y} \leq -3m$.
- f) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai của mặt phẳng tọa độ.
- g) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(C): y = x^3 + 2$.
- h) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
5. Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ sao cho x, y đều là số nguyên dương.

Bài toán 30. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 2m - 1, \\ (2m + 1)x + 7y = m + 3. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ (I) với $m = 2$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, hãy tìm mối liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m .
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + 5y = \frac{9}{5m-1}$.
 - $|x| = 3|y|$.
 - $x \geq \frac{13}{5}; y \geq \frac{3}{5}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $x + y = 3$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm bên trái đường thẳng $x = 2$.
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
- Xác định giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm $(x;y)$ mà x và y đều là các số nguyên dương.
- Giả sử x_0 là nghiệm x lớn nhất của phương trình hai ẩn $t^2 - 2(x+2)t + 5x^2 + 4 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm $(x_0; y)$.

Bài toán 31. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 2, \\ -3mx + my = m - 3. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ (I) khi $m = -5$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm $(x;y)$ mà x và y đều là các số nguyên.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + y = \frac{m+7}{m}$.
 - $x + 2y = 9$.
 - $x - y \leq \frac{2}{3}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $(d): y = 5x - 2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = 9x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất (không tính biên).
 - Biểu thức $S = x^2 + x - 2xy + 3y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm $(x;y)$ mà x và y đều là số nguyên.

Bài toán 32. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2, \\ mx - 3my = 3m + 3. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ (I) khi $m = 2$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + 5y = 18$.
 - $y = 8x^2$.
 - $x^3 + y^3 = 28$.
 - $x^2 + \frac{1}{y^2} = 17$.
 - $2 \leq |x - y| \leq 3$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ IV.
 - Điểm $M(x; y)$ và điểm $N(0; -3)$ nằm cùng phía (cùng nằm trong một nửa mặt phẳng, không tính biên) so với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.
 - Biểu thức $S = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành gấp rưỡi khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà x và y đều là các số nguyên.

Bài toán 33. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x - my = 4. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ (I) với $m = 4$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $2x + 3y = 3$.
 - $3x - y > 1$.
 - $x + 6y > \frac{5}{m+4}$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{65}{22}$.
 - $x + y = \frac{m^2 + 6}{m+4}$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành gấp rưỡi khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $(C): y = \frac{1-x^3}{2}$.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn tích xy là một số nguyên.
- Biện luận theo tham số m giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (x + 2y - 1)^2 + (2x - my - 4)^2$.
- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét hình vuông (V) có tâm O , hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích S . Tìm điều kiện của S để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà điểm $M(x; y)$ có thể nằm bên trong hoặc biên của hình vuông (V) .

Bài toán 34. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + my = m + 1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ (I) khi $m = -6$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Chứng minh rằng khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, điểm $M(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng (d) cố định. Tìm phương trình đường thẳng (d) đó.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + y \leq \frac{m^2 - 8m + 1}{m + 1}$.
 - $x - 7y = \frac{1}{m + 1}$.
 - $7x > y$.
 - $x - 3x\sqrt{y} + 2y = 0$.
 - $x \geq \frac{5}{3}; y \geq \frac{2}{3}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng d với d đi qua điểm $(4;5)$ và có hệ số góc $k = \frac{2}{3}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tiếp tuyến đi qua điểm $(1;-3)$ của parabol $y = x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(C): y = x^7 - 1$.
 - Điểm $M(x;y)$ và điểm $N(1;3)$ cách đều đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía trong (không tính biên) của hình tròn tâm O , bán kính bằng 1.

Bài toán 35. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + (2 - m)y = -1, \\ (m - 1)x - my = 2. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ (I) khi $m = -3$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo m .
- Trong trường hợp hệ có nghiệm $(x;y)$, tìm mối liên hệ giữa x và y độc lập với m .
- Tìm tất cả các giá trị của m của hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho
 - $x + 6y = \frac{9m + 8}{3m - 2}$.
 - $x + y = \frac{1}{2}$.
 - $x \geq 2; y \geq -1$.
 - $3x - 2y > \frac{m}{3m - 2}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng d đi qua điểm $(1;5)$ và có hệ số góc $k = -4$.
 - Điểm $M(x;y)$ thuộc đường tiếp tuyến đi qua điểm $(2;3)$ của parabol $y = x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với điểm $N(1;\sqrt{3} + 1)$ tạo thành một đường thẳng (MN) hợp với tia Ox một góc lượng giác $\alpha = 60^\circ$.
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của m của hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho x và y đều là các số nguyên dương.

Bài toán 36. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = -1, \\ 12x - my = 2. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức
 - $x + y = 10$.
 - $3x - 4y = \frac{m}{8+m}$.
 - $x > 0; y < 1$.
 - $4x - 5y > \frac{1}{m+8}$.
 - $x^2 + x + 2y + 2 + \sqrt{3x + 2y + 1} = 0$.
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $y = \frac{-1-3x^3}{2}$.
- Khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, tìm mối liên hệ giữa x và y độc lập với m .
- Biện luận theo tham số m giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (3x + 2y + 1)^2 + (12x - my - 2)^2$.

Bài toán 37. Mở rộng và phát triển bài 5; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Vĩnh Long; Năm học 2008 – 2009.

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình với m thỏa mãn $m^3 = m$.
- Xác định m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ trong đó y là nghiệm nhỏ nhất trong các nghiệm y của phương trình hai ẩn $t^2 + 5y^2 + 2y = 4ty + 3$.
- Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + y \leq 1$.
 - $7x + 2y > \frac{5}{m+1}$.
 - $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $2x - 3y = 5$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ III của mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $A(2;3), B(0;2)$ thẳng hàng.
 - Tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $S = x^4 + y^2 - x - y + 11$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 38. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 1$.
- Xác định giá trị m để hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.
- Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.

4. Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ sao cho

- $3x - y = 5$.
- $2x + 3y > 7$.
- Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $4x - y = 4$.
- Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $(C): y = -2x^5 + 2$.
- Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường parabol $(P): y = x^2 - 4x + 2$.
- x là nghiệm nguyên của hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+1) + xt = 10 \\ t(t+1) + xt = 20 \end{cases}$$
- $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{18}{5}$.
- $y^2 - 3y\sqrt{2-2x} = 4x - 4$.
- x và y là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn $t: t^2 - 4t + xy = 0$.
- Điểm $M(x; y)$ nằm giữa hai điểm $A(1; 2)$ và $B(2; 3)$.

Bài toán 39. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình với $m = 1$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì điểm $M(x; y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn
 - $x + y = \frac{5m + 6}{m + 2}$.
 - $x \geq 3; y \geq 2$.
 - $x < 2; y < 3$.
 - $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1,5$.
 - y là nghiệm lớn nhất của phương trình hai ẩn $(t + y)^2 + 6y = 8t$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $3y + x = 5$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ II (không kể biên).
 - $y^2 - 3y\sqrt{2x-1} + 4x - 2 = 0$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong parabol $y = 2x^2$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành gấp tám lần khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung.
 - Điểm $M(x; y)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành (H) có tọa độ ba đỉnh là $(3; 4), (5; 7), (4; 6)$.
- Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y đều là các số nguyên.

Bài toán 40. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m+1)x + 1 = m + 2y \\ m^2(x-1) = 2m + y \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình (I) với $m = 1$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .

3. Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thì điểm $M(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.
4. Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y đều là các số nguyên.
5. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x thỏa mãn phương trình $x^2 - 2xz + 2z^2 - 2x - 2z + 5 = 0$.
6. Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $2x + y = \frac{7m-1}{m-1}$.
 - b) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - c) $|x + y| = \frac{2}{m-1}$.
 - d) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+2} = 2$.
 - e) Điểm $M(x;y)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành (H) có tọa độ ba đỉnh là $(2;3)$, $(5;7)$, $(4;6)$.
 - f) Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành gấp 2,5 lần khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung.
 - g) $\frac{1}{x^5} + \frac{1}{y-1} = \frac{17}{32}$.
 - h) Điểm $M(x;y)$ cùng hai điểm $N(2;3)$, $P(2;4)$ tạo thành một tam giác.

Bài toán 41. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ (m^2 + 1)x + 6y = 2m \end{cases} \quad (\text{I}); m \text{ là tham số thực.}$$

1. Giải hệ phương trình với $m = 2$.
2. Xác định m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $(\sin 45^\circ) \cdot 3x + (\cos 45^\circ) \cdot 4y = 5\sqrt{2}$.
 - b) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - c) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong parabol $3y = 1 - 2x - 4x^2$.
 - d) $2x + y > 9 - \frac{2}{m+1}$.
 - e) Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $N(2;5)$, $P(1;6)$ thẳng hàng.
 - f) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y+2} = \frac{1}{6}$.
 - g) Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành gấp 3,5 lần khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung.
 - h) $(9x^2 + 4)(81y^2 + 1)(z^2 + 4) = 108$.
 - i) Điểm $M(x;y)$ cách gốc tọa độ một khoảng bằng $\frac{\sqrt{37}}{9}$.
 - j) $|x(x+1)| + |x^2 - 3y - 4| + \sqrt{6x + 9y - 5} = 5$.
3. Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y đều là các số nguyên.
4. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ x^3 + 8y^3 = 2 \end{cases}$$

Bài toán 42. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y + m = 4 \\ 2x + (m-1)y = m \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình với $m = -2$.
- Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho vô số nghiệm.
- Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $2x + 3y = 4m$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư số III.
 - $|2x - y| + |2y - x| = |x + y|$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $(C): y = x^6 + 2$.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{y+4} = \frac{16}{21}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $x - 5y = -4$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{10}$.
 - $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y-2} = 2$.
 - Biểu thức $S = [x^2 + y^2 + (x-y)xy]^2 + 3x^2 - 2x + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - x và y là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn $t: t^2 - 4t + \frac{(2-m)(m+4)}{(m+1)^2} = 0$.
- Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y đều là các số nguyên.

Bài toán 43. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m-1 \\ x + my = m+1 \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình với $m = 4$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.
- Khi hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$, hãy tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với tham số m .
- Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + y > \frac{m+4}{m^2-1}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $d: x - 2y = 5$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư số II.
 - Biểu thức $P = x + y$ nhận giá trị nhỏ nhất.
- Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y đều là các số nguyên.

Bài toán 44. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = m-2 \\ (m-1)^2 x + 1 = m^2 + y \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình với $m = 5$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện

- a) $x^2 + 2y^2 = 1$.
 - b) $2|x| + 3y = 4$.
 - c) $|x - y| + |x + y| = 3$.
 - d) Điểm $M(x; y)$ nằm trong cung phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
 - e) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $(C): y = 4x^3 + 1$.
 - f) Điểm $M(x; y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $N(4; 3), P(-5; -3)$.
 - g) $y^2 - 2y + x + 3 = 2(y - 1)\sqrt{x + 2}$.
 - h) Điểm $M(x; y)$ nằm bên trái của đường thẳng $\Delta: x = -\frac{1}{3}$.
 - i) $x^3 + 3xy^2 = 4y^3$.
 - j) Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung bằng ba lần khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành.
 - k) $|x^2 - x| + |x^2 - y - 6| + \sqrt{4x + y - 11} = 7$.
4. Xác định giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y đều là các số nguyên.
 5. Khi hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$, chứng minh rằng điểm $M(x; y)$ luôn di động trên đường thẳng cách đều hai điểm $A(1; 5), B(5; -1)$.

Bài toán 45. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m+2)x + 3y = 3m+9 \\ x + (m+4)y = 2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

1. Giải hệ phương trình đã cho khi $m = -3$.
2. Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm.
3. Xác định giá trị của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $x^3 + 3x^2y = 4y^3$.
 - b) $|x| + |y| = |x + y|$.
 - c) $y > 2x - 1$.
 - d) Điểm $M(x; y)$ nằm bên phải của đường thẳng $\Delta: x = -\frac{1}{3}$.
 - e) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $y = \frac{3 - 2x - x^2}{3}$.
 - f) Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung bằng bảy lần khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành.
 - g) Biểu thức $P = |x^2 + 2x + 2| + |x^2 - 9y + 1| - 6\sqrt{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - h) Điểm $M(x; y)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.
 - i) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
4. Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho điểm $M(x; y)$ là một điểm nguyên.
5. Khi hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$, chứng minh rằng điểm $M(x; y)$ luôn di động trên đường thẳng cách đều hai điểm $A(1; 4), B(-1; -2)$.
6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét hình vuông (V) có tâm O , hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 2. Chứng minh rằng khi hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì có duy nhất một điểm $M(x; y)$ có thể nằm trên biên của hình vuông (V) .

Bài toán 46. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 3m-4, \\ x + (m-1)y = m. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình (I) khi $m = -2$.
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $x + y = 3$.
 - $3x - 2y > 7$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{10}{3}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm bên trái của đường thẳng $\Delta: x = \sqrt{2}$.
 - Điểm $M(x;y)$ thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $P(2;3)$, $Q(3;4)$ tạo thành một tam giác.
 - Độ dài đoạn thẳng OM ngắn nhất, với O là gốc tọa độ.
 - Biểu thức $D = -5x^2 + y^2 + 3x$ nhận giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $A = \frac{x(x-2)}{x^2 + y^2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $S = x^4 - 32y + 8\sqrt{x-y+2}$ nhận giá trị nhỏ nhất.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho điểm $M(x;y)$ là một điểm nguyên.

Bài toán 47. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m+1)x = y + m + 1 \\ x + (m-1)y = 2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình với $m = -2$.
- Tìm m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho điểm $M(x;y)$ là một điểm nguyên.
- Xác định giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + y = \frac{3}{m^2}$.
 - $\begin{cases} x + y > 0 \\ xy \geq 1 \end{cases}$
 - Biểu thức $S = x + y$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $P = x - 2y + 3$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm về bên trái của trục tung.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm về phía dưới đường thẳng $(d): y = \frac{5}{16}$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung bằng 5 lần khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành.

Bài toán 48. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 3y = m - 1 \\ 2x + (m-1)y = 3 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình với $m = \frac{1}{2}$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Khi hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$, chứng minh rằng điểm $M(x;y)$ luôn di động trên đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.

4. Tìm m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ trong đó có một biến bằng 2.
5. Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $\begin{cases} 3x + 4y > 0 \\ 2x - y < 0 \end{cases}$
 - b) $2x + 3y = 5\sqrt{xy}$.
 - c) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-3} = \frac{13}{6}$.
 - d) Tích xy đạt giá trị lớn nhất.
 - e) Biểu thức $S = y^4 + 2y^2 + x^2 - 2x - 10y + 16$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - f) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $x + 5y = \sqrt{2}$.
 - g) Điểm $M(x; y)$ nằm trên parabol $(P): y = 2 - x^2$.
 - h) Điểm $M(x; y)$ và hai điểm $P(2; 3), Q(3; 5)$ thẳng hàng.
 - i) Điểm $M(x; y)$ nằm bên trái đường thẳng $x = 3$.
 - j) $\sqrt{x + y + 3} - x = y(y^2 + 1)$.
 - k) Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất (của mặt phẳng tọa độ Oxy).
 - l) Điểm $M(x; y)$ nằm trong lòng parabol $y = x^2$.

Bài toán 49. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m+3)x + 2y = m \\ (3m+1)x + (m+1)y = 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

1. Giải hệ phương trình trên với $m = 1$.
2. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .
3. Khi hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$, hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với tham số m .
4. Tìm m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $x + y = m - 1$.
 - b) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $\Delta: x + 2y = 3$.
 - c) $x > 1; y > 2$.
 - d) $x^2 + y^2 = 29$.
 - e) $|x| = 4|y|$.
 - f) Tích xy đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
 - g) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong parabol $y = -1 + 5x^2$.
 - h) Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
 - i) Độ dài đoạn thẳng OM bằng $\sqrt{58}$ với $M(x; y)$, O là gốc tọa độ.
 - j) $\frac{y+1}{x} - \frac{x+2}{y} = -\frac{17}{10}$.
 - k) Điểm $M(x; y)$ nằm trong lòng parabol $y = x^2$.
 - l) Điểm $M(x; y)$ nằm về phía dưới đường thẳng $y = \frac{5}{2}$.
 - m) Biểu thức $S = 3y^4 - 4y^2 + 8x + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 50. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - y = -3 \\ \frac{1}{2}x - y = 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = -\frac{3}{2}$.
- Tìm tất cả các giá trị m để hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ đã cho luôn luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$.
- Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm $(x; y)$ sao cho
 - $\frac{x}{y} + 2 = \frac{m}{5}$?
 - $5x - 2y = 5$.
 - $\frac{3x+1}{y} - \frac{2y+1}{x} = \frac{49}{4}$.
 - $3x^2 + 2y^2 = 50$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ II (không kể biên).
 - Điểm $M(x; y)$ cách gốc tọa độ một khoảng ngắn nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $x = y^2 - 5y + 2$.
 - Tích xy nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $N = x^2 - 5y^2$ nhận giá trị lớn nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường elippse $(E): \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Bài toán 51. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 \\ 2x + (m-1)y = 6 \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình trên với $m = \frac{3}{2}$.
- Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm, vô nghiệm, vô số nghiệm ?
- Với giá trị nào thì hệ có nghiệm dạng $(2-m; 3m-1)$.
- Khi hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$, hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với tham số m .
- Tìm giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho
 - $x \geq y$.
 - $3x - y > m$.
 - x và y đều không vượt quá 1.
 - Biểu thức $S = (x^2 - y^2)(3x - y + 1)$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $2x - 3y = 7$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x-y} + \frac{3}{y+1} = \frac{1}{2}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ hai của mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x; y)$ cách gốc tọa độ O một khoảng bằng 3.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm giữa hai điểm $A(2; 3)$ và $B(5; 6)$.
 - $\frac{2}{y^5} + \frac{3}{3x-8} \geq 5$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường elippse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Bài toán 52. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax - 2y = 1 \end{cases}$ (a là tham số thực).

- Giải hệ phương trình đã cho khi $a = 3$.
- Giải và biện luận hệ phương trình trên theo a .
- Chứng minh rằng hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị của m . Khi đó hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc tham số a .
- Chứng minh khi hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ khác 0 ta có hệ thức $\frac{2-x}{y} = \frac{3+2y-x}{y+x}$.
- Tìm giá trị của a để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho
 - $|x| = 5|y|$.
 - $3y + 18x = 31$.
 - $x > 4y$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{5}(a^2 + 2)$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ hai của mặt phẳng tọa độ.
 - Tích xy đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $A(2;1)$, $B(3;2)$ tạo thành một tam giác cân tại M .
- Tìm số nguyên a lớn nhất để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $xy < 0$.

Bài toán 53. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - my = m^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 2, 5$.
- Giải và biện luận hệ phương trình trên theo tham số thực m .
- Tìm giá trị nguyên m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với x và y đều là số nguyên.
- Xác định m để hệ có nghiệm $(x;y)$ sao cho
 - $4x - y = 7$.
 - $6x - 5y > \sqrt{2}$.
 - $\begin{cases} y \geq 3 \\ x \geq -5 \end{cases}$
 - Điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng $d: y = x\sqrt{3} - 1$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{xy} = 6$.
 - $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$.
 - Biểu thức $S = xy + (x+y)^4$ nhận giá trị lớn nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ thuộc đường cong $(C): y = 2 - x^2 - x^3 - x^4$.
 - Biểu thức $Z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2011$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $N(2;0)$, $P(4;0)$ tạo thành một tam giác cân tại M .
 - Điểm $M(x;y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $H(4;3)$ và $K(-2; -1)$.
 - Điểm $M(x;y)$ và ba điểm $A(2;4)$, $B(3;5)$, $C(2;2)$ tạo thành một hình bình hành.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{18} = 1$.

Bài toán 55. Cho hệ phương trình $\begin{cases} a^2x - y = -7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ (a là tham số thực).

- Giải hệ phương trình khi $a = \frac{2}{5}$.
- Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với mọi giá trị của a , đồng thời điểm $M(x; y)$ luôn nằm trong góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
- Gọi nghiệm của hệ phương trình là $(x; y)$. Tìm các giá trị của a để
 - $x + y = 5$.
 - $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $6x + y = -11$.
 - $x + y < 2$.
 - $M(x; y)$ nằm bên dưới đường thẳng $y = 7$.
 - $M(x; y)$ nằm trên đường cong $y = x^3 - 2x$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{6}$.
 - Biểu thức $S = y^4 - 7y^2 + 8x + 16$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Độ dài đoạn thẳng OM bằng $\sqrt{10}$, với $M(x; y)$ và O là gốc tọa độ.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung gấp sáu lần khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành.
- Với giá trị nào của a thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà x và y đều lớn hơn $\frac{1}{3}$.
- Tìm giá trị nguyên a để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x và y đều là số nguyên.

Bài toán 56. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 + 2m \\ mx + y = (m+1)^2 \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình với $m = \frac{2}{3}$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $4x + y = 3\sqrt{2}$.
 - $2x^2 = 5y - 3$.
 - $\sqrt{y} + y = x + 3m$.
 - $\sqrt{x+y} = 3m - 1$.
 - $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+1} = \sqrt{3}$.
 - Biểu thức $S = x^2 + y^2 + 4xy$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm bên phải đường thẳng $d: x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong (C): $y = x^3 + 2x - 2$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{2}$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành bằng ba lần khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung.

Bài toán 57. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = 1 + m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

1. Giải hệ phương trình với m thỏa mãn $\sqrt{m} + \sqrt{2m-1} = 2$.
2. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
3. Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ với x và y đều nguyên.
4. Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện

a) $3x + y = \frac{4}{2m-3}$.

b) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng $x + y = 17$.

c) Điểm $M(x;y)$ nằm phía bên trái đường thẳng $\Delta: x = 6$.

d) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn (C) tâm O , bán kính bằng 1.

e) Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung.

Bài toán 58. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 2my = m + 1 \\ x + (m+1)y = 2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

1. Giải hệ phương trình với $m = 4$.
2. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
3. Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$, điểm M có tọa độ $(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.
4. Tìm giá trị của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho

a) $3x - y = 3$.

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = -\frac{2}{3}$.

c) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{y+3} \leq 1$.

d) $\sqrt{x+y+3m} = m+1$.

e) Điểm $M(x;y)$ nằm bên trái đường thẳng $x = -\sqrt{7}$.

f) Điểm $M(x;y)$ thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.

g) Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $N(2;3)$, $P(2;7)$ lập thành một tam giác.

h) Biểu thức $S = 2x^2 + xy + y^2 + x + 2y + 1$ nhận giá trị nhỏ nhất.

i) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $y = 1 - \sqrt{x}$.

j) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Bài toán 59. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

1. Giải hệ phương trình với $m = 2$.
2. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
3. Trong trường hợp hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$, chứng tỏ rằng điểm M có tọa độ $(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.
4. Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn

a) $4x - 2y = \sqrt{5}$.

b) $x + 6y = \frac{7m+2}{m+2}$.

c) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $x - y = 1$.

- d) $5x > y + 2$.
- e) $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{6}{5}$.
- f) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{xy} = \frac{\sqrt{7}}{2y^2 - y}$.
- g) Điểm $M(x;y)$ có tổng khoảng cách đến hai trục tọa độ bằng 1.
- h) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- i) Điểm $M(x;y)$ cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\sqrt{34}$.
- j) Biểu thức $T = y^2 - 3x^2$ đạt giá trị lớn nhất.
- k) Biểu thức $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2y-1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- l) Biểu thức $S = \frac{x^2 + x + 2y + 2}{2(x^2 + 1) - (2y - 1)^2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
- m) Điểm $M(x;y)$ là trung điểm của đoạn thẳng ON với điểm $N(4;3)$, O là gốc tọa độ.

5. Tìm giá trị nguyên của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho x và y là các số nguyên dương.

Bài toán 60. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình với $m = 8$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$.
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + y = 6m$.
 - $x = m^3 + m - 4$.
 - $2x^3 \leq y - 3$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9m}{x(2-x^2)}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $d: x + y = -3$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $(P): y = x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Biểu thức $P = 4x + y + 7$ nhận giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $S = (x^2 + y^2 - 1)^4 - 2y + x$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt[4]{x(2-x^2)}}$.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(1;2)$, $B(3;6)$ lập thành một tam giác.
- Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ trong đó y đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 61. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x + 1 = m(y+3) \\ 2x = y + m + 5 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình với $m = 4$.
- Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn

- a) $2x(x+3)+y=4$.
 - b) $3x-y \geq 2011$.
 - c) $x^2+7y^2=32$.
 - d) $\frac{y}{x+2}+\frac{x+3}{y}=31$.
 - e) $\frac{x}{y} > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 - f) Độ dài đoạn thẳng OM bằng 3, với O là gốc tọa độ.
 - g) Biểu thức $P=x^2+y^2+3x+y+1$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - h) Tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.
 - i) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R=2\sqrt{2}$.
 - j) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường cong $(C): y=9x^3-4$.
 - k) Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $A(2;4)$, $B(1008;2016)$ lập thành một tam giác.
 - l) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai điểm $C(1;0)$, $D(9;0)$.
4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét hình vuông (V) có tâm O , hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 18. Xét trường hợp $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ ban đầu, tồn tại hay không điểm $M(x;y)$ nằm trên biên hoặc miền trong của hình vuông (V) ?

Bài toán 62. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx+y=3 \\ y+m^2x=m^2+2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

1. Giải hệ phương trình với $m=3$.
2. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
3. Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $3x-2y=5$.
 - b) $2x > y-1$.
 - c) $|x+2|=y+4$.
 - d) Điểm $M(x;y)$ có hoành độ dương.
 - e) Điểm $M(x;y)$ nằm bên trái đường thẳng $y=5$.
 - f) Điểm $M(x;y)$ nằm phía trên đường thẳng $y=\sqrt{3}$.
 - g) Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $C(1;2)$, $D(4;8)$ lập thành một tam giác.
 - h) Điểm $M(x;y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB với $A(4;2)$ và $B(3;2)$.
4. Tồn tại hay không giá trị m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho điểm $M(x;y)$ nằm giữa hai điểm $E(2;3)$ và $F(4;5)$.
5. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên dương.

Bài toán 63. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ 2x-y=m+5 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

1. Giải hệ phương trình với $m=-1$.
2. Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
3. Trong trường hợp hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$, chứng tỏ rằng điểm M có tọa độ $(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.
4. Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $3x-2y=7$.
 - b) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng $(\Delta): x-y=5$.

- c) $2x > y + \sqrt{3}$.
- d) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} = \frac{5}{4}$.
- e) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ II.
- f) Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
- g) Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $(\Delta): 3x + 7y = 11$.
- h) $x^2 + y^2 = 16$.
- i) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng $2\sqrt{2}$.
- j) Biểu thức $S = x^2 + xy + 2y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- k) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường parabol $(P): y = 3x^2$.
- l) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $y = x^3 + 7x - 11$.
- m) Điểm $M(x;y)$ nằm giữa hai điểm $A(1;-3)$ và $B(2;-2)$.
- n) Biểu thức $S = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{y^2 - 2y + 5}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- o) Biểu thức $P = x^2 - 3y^2 + 10$ nhận giá trị lớn nhất.
- p) Biểu thức $Q = x + 2y - \sqrt{2(x^2 + 4y^2)} + 3\sqrt{y - x + 5}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 64. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 3 \end{cases}$ (m là tham số thực).

1. Giải hệ phương trình với $m = 3$.
2. Chứng minh nếu hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thì điểm $M(x;y)$ thuộc một đường thẳng (d) cố định. Viết phương trình đường thẳng (d) .
3. Tìm giá trị nguyên của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho x, y là các số nguyên âm.
4. Xác định giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $2x - 5y = 2$.
 - b) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.
 - c) $x + 2y = \frac{m^3 + 4m}{m + 2}$.
 - d) $4x - y > 4 + \sqrt{2}$.
 - e) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - f) Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = 2x^2 - x - 1$.
 - g) Điểm $M(x;y)$ nằm trên ellipse $(E): \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{\frac{27}{2}} = 1$.
 - h) $\frac{1}{2x-y} + \frac{y}{2y-x} = \frac{17}{10}$.
 - i) Điểm $M(x;y)$ cùng hai điểm $A(2;4)$, $B(3;5)$ tạo thành một tam giác.
 - j) Điểm $M(x;y)$ và ba điểm $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(3;6)$ thẳng hàng.
 - k) Điểm $M(x;y)$ cách gốc tọa độ O một khoảng ngắn nhất.
 - l) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - m) Biểu thức $S = (y+1)^2 \sqrt{9-x^2}$ đạt giá trị lớn nhất.
 - n) $\left(\frac{1-2y}{x-1}\right)^3 + \left(\frac{3-2x}{y}\right)^3 = 3m$.

Bài toán 65. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ y - x = -m \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 3$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $y = \sqrt{3}x - 5$.
 - $y = 6\sqrt{2}x^2 + 9x$.
 - $\frac{x+3}{y} + \frac{y+2}{x+2} = 4$.
 - $\sqrt{3-x} + \sqrt{y+3} = 4$.
 - $x^2 + 4x\sqrt{y} + 3y = 0$.
 - Các số x và y là hai số nghịch đảo của nhau.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = 4x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $A(3;5)$, $B(1;11)$ lập thành ba điểm thẳng hàng.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía trong (tính cả biên) hình tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{17}$.
 - Điểm $M(x;y)$ và điểm $(0;-4)$ nằm cùng trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường phân giác góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét hình vuông (V) có tâm O , hai đường chéo của (V) nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 8. Xét trường hợp $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ ban đầu, tìm tất cả các điểm $M(x;y)$ nằm trên biên hoặc miền trong của hình vuông (V) .

Bài toán 66. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 5x + (m-2)y = m \\ (m+3)x + (m+3)y = 2m \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình với $m = 6$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo m .
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $3x^2 + 4y = 7x\sqrt{y}$.
 - $4x - 3y < \frac{2m+1}{m+3}$.
 - $3x + 2y \leq \sqrt{2}$.
 - $\frac{3x}{y+1} + \frac{y+1}{3x} = 2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $2x - y = 4$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $y = 2m$.
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.

Bài toán 67. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 5$.
- Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$, chứng minh rằng điểm $M(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Hãy tìm đường thẳng cố định đó.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho
 - $4x - y = 5$.
 - $x - y = m$.

- c) $5x^2 - y^2 + 3x = 8$.
- d) $\frac{1}{2x+1} - \frac{2}{3y+1} = -\frac{1}{7}$.
- e) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ III của hệ trục tọa độ.
- f) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- g) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ II.
- h) $3x^2 - 4xy + y^2 = 0$.
- i) Biểu thức $S = x^2 + 4y^2 + 9$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- j) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $y = 16x^5 - 1$.
- k) Biểu thức $P = x^4 - 2x^2 - 23x - y + 12$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- l) Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(2;5)$, $B(3;7)$ lập thành một tam giác.
- m) Biểu thức $Q = (y+1)\sqrt{1-x^2}$ nhận giá trị lớn nhất.

Bài toán 68. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - 5y - 7 = 0 \\ 3mx + 5y = 4m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình với $m = 4$.
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó $x = 4$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Với giá trị nguyên nào của m thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là số nguyên.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $4x - y = \frac{m+5}{3m+2}$.
 - $3x - 5y > 2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = \frac{4x^2 - 7}{5}$.
 - $\frac{3}{2x+3y} + \frac{2}{3x+2y} = 0,3$.
 - $x^2 - \sqrt{3x-2} = 5(y+1)$.
 - Biểu thức $T = (y^2 + 4x - 5)(4x - 10y - 15)$ nhận giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $S = x^4 - x^2 - 5y + 8$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành và trục tung có giá trị bằng nhau.
- Với giá trị nào của m thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho hình tròn tâm O , bán kính OM có diện tích lớn nhất, trong đó O là gốc tọa độ và $M(x;y)$.

Bài toán 69. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - 2y = 2m + 7, \\ x + my = m + 1. \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình khi $m = \frac{1}{2}$.
- Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của m . Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với tham số m .
- Xác định tất cả các giá trị m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn

- a) $x + 2y = \frac{4m^2 - 1}{m^2 + 2}$.
- b) $x \geq 1; y \leq -\frac{7}{2}$.
- c) $\frac{2y+7}{x-2} + \frac{x-1}{1-y} = 2$.
- d) $(m+1)x + (m-2)y = 11m^2$.
- e) $x + 3y = \frac{34}{3}$.
- f) Biểu thức $K = x + y$ nhận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).

Bài toán 70. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y - x = 10m + 5 \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình đã cho trong trường hợp $m = -1$.
- Giải và biện luận hệ phương trình trên.
- Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho
 - $x = 3$.
 - $x = m; y = m + \frac{7}{3}$.
 - $5x - y = 10$.
 - $\frac{1}{x+2} + \frac{y+2}{x+3} = \frac{19}{12}$.
 - $x \geq 5; y \leq 1$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ III.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong $(C): y = 2x^2 + x$.
 - Biểu thức $P = x^2 + 2y + 6$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $S = \sqrt{1-2x} + \sqrt{6-y}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
 - $x^2 + y - 2 = 2\sqrt{4x-3}$.
 - Độ dài đoạn thẳng OM bằng $\sqrt{10}$ với $M(x; y)$, O là gốc tọa độ.

Bài toán 71. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay = 2, \\ ax - 2y = 1. \end{cases}$ (I); với a là tham số thực.

- Giải hệ phương trình trên với $a = -3$.
- Chứng minh rằng với mọi a , hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai biến x và y sao cho hệ thức này độc lập với tham số a .
- Tìm a để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $3x - y = \frac{16}{3}$.
 - $x > 0; y > 0$.
 - $(a+1)x + (a-2)y = 4a^3$.
 - $(1-a)x + (a+2)y = \frac{3a+1}{2a^2+1}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ II.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm hoàn toàn dưới trục hoành.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.

h) Điểm $M(x;y)$ cách trục hoành một khoảng bằng $\frac{1}{3}$.

i) $(5x-3)^2 + 4x = 2\sqrt{5x-2} + ay$.

j) $\left(\frac{2-x}{y}\right)^3 + \left(\frac{1+2y}{x}\right)^3 = 2$.

Bài toán 72. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 5, \\ 2x + 3my = 7. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình với $m = 3$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị m , hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai biến x và y sao cho hệ thức này độc lập với tham số m .
- Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x > 0; y < 0$.
 - $3x = 2y$.
 - $2x + y \geq \frac{37m^3 + 4}{3m^2 + 2}$.
 - $(m+2)x + (3m-1)y = 12m^4$.
 - $(m-2)x = (3m+1)y - 2m^5$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành và trục tung bằng nhau.
 - $\left(\frac{y+5}{x}\right)^3 + \left(\frac{7-2x}{3y}\right)^3 = 16$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ III trong mặt phẳng tọa độ Oxy.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà x và y đều là số nguyên.

Bài toán 73. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3, \\ 4x + my = 6. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 1$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Tìm m để hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $3x - 2y = 4$.
 - $x > 1; y < 0$.
 - $2x - 3y > 4$.
 - $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{y+4} = \frac{1}{2}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - $(m+4)x + (m+1)y = 9m^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(3;6)$ lập thành một tam giác.
 - $(m-4)x + (1-m)y + 3m^3 = 0$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{5}$.
 - Biểu thức $S = 2x(99 + \sqrt{101 - y^2})$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên hình vuông (V) biểu diễn bởi phương trình $|x| + |y| = 4$.

5. Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(x;y)$ trên trục hoành, chứng minh rằng $\sin \widehat{MOH} + \cos \widehat{MOH} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.
6. Tìm giá trị nguyên của m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà x và y đều là số nguyên.

Bài toán 74. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m+1)x + my = 2m-1, \\ mx - y = m^2 - 2. \end{cases} \quad (\text{I}); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m=1$.
- Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị m . Khi đó, hãy tìm mối liên hệ giữa hai biến x và y không phụ thuộc vào m .
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $3x-5y=7$.
 - $\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ -5 \leq y \leq -3 \end{cases}$
 - $8x-y > 4m-\sqrt{2}$.
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - $\frac{1}{x+3} + \frac{2}{y+8} = \frac{1}{2}$.
 - Biểu thức $P=2x^2+3y^2+xy+x+y$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Tích xy đạt giá trị lớn nhất.
 - $(2m+1)x + (m-1)y = 9(m^2-1)$.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với điểm $N(-4;0)$ và gốc tọa độ O tạo thành tam giác OMN cân tại M .
 - Độ dài đoạn thẳng OM bằng $\sqrt{13}$ với $M(x;y)$, O là gốc tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường elip $(E): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong lòng parabol $(P): y=x^2$.

Bài toán 75. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 4, \\ x - my = 1. \end{cases} \quad (\text{I}); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m=1$.
- Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị m .
- Tồn tại hay không giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm $(x;y)$ trong đó x và y đều là số nguyên.
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x+y = \frac{8}{m^2+1}$.
 - $4x > y$.
 - $4x-5y = \frac{5}{2}$.
 - $(m+1)x + (1-m)y = 5m^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía trên trục hoành.
 - $(m-1)x + (m+1)y = 3\sqrt{m}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm bên trái đường thẳng $x = \frac{9}{5}$.

- h) Biểu thức $P = x + 4y$ đạt giá trị lớn nhất.
- i) $\left(\frac{4-y}{x}\right)^3 + \left(\frac{x-1}{y}\right) = 2$.
- j) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- k) Biểu thức $Q = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).

Bài toán 76. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + 3y = m, \\ x + y = m + 1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho khi $m = 4$.
- Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm $(x;y)$ trong đó $y = m - 2$.
- Tìm m để hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $5x - 2y = 3$.
 - $2x - 3y > \frac{4}{2m-3}$.
 - $(2m+1)x + 4y = 3m^2$.
 - $(2m-1)x + 2y = m^5$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ II.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành.
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - $3 \cdot \left(\frac{3y}{1-2x}\right)^3 + x + y = 5$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{m+1}$.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $P(1;3)$, $Q(2;5)$ tạo thành một tam giác.
 - Đường thẳng OM vuông góc với đường $(d): y = 3x + 1$, trong đó $M(x;y)$, O là gốc tọa độ.

Bài toán 77. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ (m+1)x + y = 2. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) khi $m = 0, 5$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Tìm m để hệ có vô số nghiệm.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $4x - 5y = 6$.
 - $3x - y > 4$.
 - $x + 10y \leq \frac{8}{3m+1}$.
 - $\frac{1}{x+2} + \frac{x}{3y+8} = \frac{14}{33}$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{6y} = \frac{4}{10-3x}$.
 - $x \leq 2; y > 1$.
 - Điểm $M(x;y)$ có hoành độ bằng 12.
 - Điểm $M(x;y)$ có tung độ lớn hơn 5.

- i) Điểm $M(x;y)$ và điểm $N(2;3)$ cách đều trục tung.
- j) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $(\Delta): y = -x + 4$.
- k) Điểm $M(x;y)$ nằm trên phía bên trên trục hoành.
- l) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- m) Điểm $M(x;y)$ nằm trên biên của hình vuông (V) , trong đó (V) có hai đường chéo nằm trên hai trục tọa độ và (V) có diện tích bằng 2.

Bài toán 78. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 1, \\ 4x + my = 2. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

1. Giải hệ phương trình (I) khi $m = 2$.
2. Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
3. Tìm m để hệ (I) có số nghiệm theo thứ tự: Vô nghiệm; Vô số nghiệm; Có nghiệm duy nhất.
4. Khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, chứng minh rằng điểm $M(x;y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.
5. Tìm giá trị của tham số m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $5x - 3y = 7$.
 - b) $2x - y > 5$.
 - c) $5x + 2my = \frac{m+10}{m+2}$.
 - d) $\frac{1}{x+4} + \frac{6}{y+5} = 1\frac{2}{35}$.
 - e) $\frac{x^2 + 3xy + 5y^2}{x^2 + 4y^2} = \frac{m+5}{17}$.
 - f) $(m+4)x + (m+1)y = 3\sqrt{m}$.
 - g) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng $(d): x - y = 1$.
 - h) Điểm $M(x;y)$ thuộc parabol $(P): y = x^2$.
 - i) Điểm $M(x;y)$ nằm phía bên trái trục tung.
 - j) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - k) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường cong $x^3 + 8y = 17$.
 - l) Biểu thức $S = x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 8$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 79. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + y = 1, \\ mx + (1-3m)y = -1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

1. Giải hệ phương trình với $m = 4$.
2. Giải và biện luận hệ phương trình (I) theo tham số m .
3. Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất thỏa mãn hệ thức
 - a) $x + 2y = \frac{2}{6m-1}$.
 - b) $x + y = \frac{4}{5}$.
 - c) $3mx + (2-3m)y = m^3 - 5m$.
 - d) $mx = 2x^3 - 3my$.
 - e) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $(\Delta): y = 4x$.
 - f) Điểm $M(x;y)$ nằm phía bên phải trục tung.

- g) Điểm $M(x;y)$ có tung độ lớn hơn 4.
 h) Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(2;5)$, $B(4;10)$ tạo thành ba điểm thẳng hàng.
 i) Điểm $M(x;y)$ có hoành độ lớn hơn 0,2.
 j) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 k) $\left(\frac{1-y}{2x}\right)^3 + \left(\frac{y+1}{3y-x}\right)^3 = m$.

Bài toán 80. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + my = m + 1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 4$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Chứng minh hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị của m , đồng thời điểm $M(x;y)$ nằm trên một đường thẳng cố định.
- Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $6x - y = 5$.
 - $4x - 3y > 2$.
 - $\begin{cases} x \geq 4 \\ y \leq 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 4 \leq x \leq 7 \\ 5 \leq y \leq 6 \end{cases}$
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{2x-1}$.
 - $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3y^2} = \frac{9}{x^2 + 6y^2}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $(d): y = 3x + 4$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(C): y = x^3 - 5x^2 - 1$.
 - Biểu thức $P = (x - y + 3)^2 + x^2 + y^2 + x$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ có tổng khoảng cách đến hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 1.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(E): x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{73}{4}$.
- Tồn tại hay không các giá trị m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{2(x^2 + y^2)} + \sqrt{5x^2 + x} \leq y + |x + y|$.
- Tồn tại hay không các giá trị m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn bất đẳng thức $\left(\frac{y}{2-x}\right)^4 + \left(\frac{x-1}{1-y}\right)^4 > 3m^8 + 1$.

Bài toán 81. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 - 4m, \\ mx + y = 3m + 1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 4$.
- Chứng minh rằng hệ phương trình (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị của m , đồng thời điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn

- a) $x + y = 4$.
- b) $3x + y = 6$.
- c) Điểm $M(x;y)$ có hoành độ lớn hơn 1.
- d) Điểm $M(x;y)$ và gốc tọa độ cùng nằm trong nửa mặt phẳng, bờ là đường thẳng $y = 3$.
- e) Biểu thức $S = x + y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
- f) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $x + 2y = 7$.
- g) $\left(\frac{x-2}{y-4}\right)^5 + \left(\frac{1-y}{x-3}\right)^5 > 2$.

Bài toán 82. Mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc; Thành phố Vĩnh Yên; Tỉnh Vĩnh Phúc; Năm học 2016 – 2017.

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m+1)x - 2y = -1, \\ x + my = 5. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

1. Giải hệ phương trình đã cho với $m = 2$.
2. Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
3. Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn

- a) $x + y = \frac{20}{3}$.
- b) $3x - y > 4$.
- c) Điểm $M(x;y)$ có hoành độ nhỏ hơn 2,25.
- d) Biểu thức $5x + y$ đạt giá trị lớn nhất.
- e) $(m+2)x + (m-2)y > 4m^3$.
- f) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{4}{2x+3y}$.
- g) Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
- h) $mx = (m+2)y - 6\sqrt{m-1}$.
- i) Điểm $M(x;y)$ và điểm $N(1;0)$ nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $y = \frac{11}{4}$.
- j) $\left(\frac{2y-1}{x} - 1\right)^3 + \frac{5-x}{y} > 2(\sqrt{2}+1)$.

Bài toán 83. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1, \\ 2x + my = 3. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

1. Giải hệ phương trình đã cho với $m = 4$.
2. Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
3. Tìm số nguyên m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là số nguyên.
4. Khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, chứng minh rằng điểm $M(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định với mọi giá trị của m .
5. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $10x - 3y = 5$.
 - b) $7x - 2y > \frac{1}{2}$.
 - c) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng (d): $3x + 4y = \frac{1}{2}$.

- d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2x-1}$.
- e) Điểm $M(x;y)$ nằm trong nửa mặt phẳng phía trên, bờ là đường thẳng $y = x$.
- f) Biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- g) Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $(P): y = -2x^2$.
- h) Biểu thức $P = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 - 2y + 5}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- i) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường cong $(C): y = \frac{1}{x^3} - 1$.
- j) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
- k) $\left(\frac{1-2y}{x-1}\right)^5 + \frac{3-2x}{y} > 2$.

Bài toán 84. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1, \\ mx - 3my = 2m + 3. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 4$.
- Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
- Tìm số nguyên m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là số nguyên.
- Xác định giá trị của tham số m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $9x - 5y = 8$.
 - $x + 3y = \frac{2}{m}$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 7$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $2x - y = 5m$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía dưới trục hoành.
 - Tổng khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến hai trục tọa độ bằng 4.
 - $\left(\frac{1-x}{y}\right)^3 + \frac{3}{x-3y-2} > m^3 + 2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 5.

Bài toán 85. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 4$.
- Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
- Xác định giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $3x - y = 4$.
 - $x^2 + y^2 = 29$.
 - $x^3 + x + 2y = 9$.
 - $x > y + 2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $3x + 2y = 5$.
 - Biểu thức $S = \frac{x^2 - 3x + 2y + 4}{(x-1)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{3-2y} = 1$.

- h) Biểu thức $P = 3x^4 - 16x^2 - 40y + 51$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 i) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
 j) Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(1;3)$, $B(2;7)$ tạo thành một tam giác.
 k) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai điểm $C(5;0)$ và $D(7;0)$.
 l) Điểm $M(x;y)$ chia trong đoạn thẳng PQ theo tỷ số $1:2$, trong đó $P(10;1)$ và $Q(0;3)$.
 m) Điểm $M(x;y)$ có tổng khoảng cách đến hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất.
4. Tìm số nguyên dương m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là số thực dương.

Bài toán 86. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 3y = m + 5, \\ 3x + my = 3m - 1. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 2$.
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm $x = -3; y = -1$.
- Giải và biện luận hệ đã cho theo tham số m .
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm $(x;y)$, trong đó x và y đều là các số nguyên.
- Xác định giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - x và y đều là số âm.
 - $x + y > 9m - 5$.
 - $6x - y = 5$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $d: y - 3x = 4$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{x^2 + 10x - 2m}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong khoảng giữa hai đường thẳng $x = 2; x = 4$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính bằng 2.
 - $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$
 - Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.
 - Biểu thức $D = xy - 1$ đạt giá trị lớn nhất.
 - $|y^3 - x^3| = 8$.
 - Điểm $M(x;y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $A(6;1)$ và $B(2;3)$.
 - Biểu thức $S = \frac{y+x-3}{x^2+x+4}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).

Bài toán 87. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 2m + 1, \\ 2x - y = m - 1. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 2$.
- Chứng minh rằng hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị m , đồng thời điểm $M(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi. Tìm đường thẳng đó.
- Xác định giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $x + y = 11$.
 - $\frac{y}{x+1} + \frac{y+1}{x} = 6$.
 - $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.
 - $5x - 4y > 2m$.
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $A(1;5)$, $B(3;7)$ thẳng hàng.
 - Biểu thức $S = x^2 + 2y - 8$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- g) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{y+3} \leq 1$.
- h) Điểm $M(x;y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $C(4;0)$ và $D(0;6)$.
- i) $\sqrt{3y+3} = 2x-1$.
- j) Điểm $M(x;y)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 2\sqrt{3} - 1$.
- k) Điểm $M(x;y)$ di động trên đường tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{13}$.

Bài toán 88. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1, \\ mx - y = -m. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 2$.
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm $x = 0; y = 1$.
- Chứng minh rằng hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị của m . Tìm biểu thức liên hệ giữa hai biến x và y độc lập với tham số m .
- Xác định m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $x < 1; y > 1$.
 - $4x + y = 1$.
 - $x + 3y = \frac{9m-2}{m^2+1}$.
 - Điểm $M(x;y)$ có tung độ lớn hơn 1.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(2;4)$ và $B(4;8)$ tạo thành một tam giác.
 - $x + 6y \leq \frac{9}{m^2+1}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ Oxy .
 - Biểu thức $S = x + y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
 - $\left(\frac{1-x}{y}\right)^3 + \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^3 < 16$.
 - Điểm $M(x;y)$ chia trong đoạn thẳng ON theo tỷ số $1:1$, trong đó $N(2;0)$ và O là gốc tọa độ.

Bài toán 89. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = m + 1, \\ 2x + my = 3. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = -2$.
- Tìm m để hệ (I) có nghiệm $x = 0; y = -1$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo m .
- Khi hệ (I) nghiệm duy nhất $(x;y)$, tìm biểu thức liên hệ giữa x và y độc lập với m .
- Xác định m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $11x - 2y = 6$.
 - $6x - y > 2$.
 - Điểm $M(x;y)$ thuộc đường phân giác của góc phần tư III (trong mặt phẳng tọa độ).
 - $x > 0; y > 0$.
 - $x + 5y \leq \frac{m^2+8}{m+2}$.
 - $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+5} = \frac{7}{12}$.
 - Biểu thức $Q = (x - y + 2)^2 + 2x^2 + 3y^2 + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(1;4)$ và $B(2;5)$ tạo thành một tam giác.

- i) Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
- j) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $y = x^2 - 4x - 1$.
- k) Điểm $M(x;y)$ cách gốc tọa độ một khoảng $d = \sqrt{41}$.
- l) Tam giác MNP là tam giác cân tại M , trong đó $N(5;0)$, $P(7;2)$ và M có tọa độ $(x;y)$.

Bài toán 90. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = m + 2, \\ x + my = m. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

1. Giải hệ phương trình đã cho với $m = -2$.
2. Tìm m để hệ (I) có nghiệm $(x;y)$, trong đó x thỏa mãn $x^3 + x = 10$.
3. Giải và biện luận hệ (I) theo m .
4. Khi hệ (I) nghiệm duy nhất $(x;y)$, chứng minh rằng điểm $M(x;y)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định, tìm phương trình đường thẳng đó.
5. Xác định m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $4x + 2y = 11$.
 - b) $5x - 7y \leq 6$.
 - c) $\frac{1}{x} + \frac{7}{y} = \frac{23}{6}$.
 - d) $\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 5 \end{cases}$
 - e) Điểm $M(x;y)$ nằm trên tia Ox (không tính gốc O).
 - f) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng $x + 2y = 7$.
 - g) Điểm $M(x;y)$ và gốc O cùng nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $(\Delta): x - y = 5$.
 - h) Biểu thức $S = 4x^2 + y^2 + xy - 7$ đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất ấy.
 - i) Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = \frac{2x^2}{9}$.
 - j) Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $N(6;0)$ và $P(8;4)$ lập thành tam giác MNP cân tại M .
 - k) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm O , bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Bài toán 91. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0, \\ mx - y = m + 1. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

1. Giải hệ phương trình đã cho với $m = -2$.
2. Tìm m để hệ (I) có nghiệm $x = 0; y = -1$.
3. Giải và biện luận hệ (I) theo m . Tìm hệ thức độc lập giữa x và y độc lập với m (trong trường hợp hệ (I) có nghiệm duy nhất).
4. Tìm giá trị nguyên của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà x và y đều là số nguyên.
5. Xác định m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - a) $3x - 7y = -2$.
 - b) $5x - y > 1$.
 - c) $\frac{1}{x} + \frac{3}{y+2} = \frac{4x-1}{8x^5-x}$.
 - d) Điểm $M(x;y)$ có tung độ thuộc khoảng $(1;3)$.
 - e) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $(\Delta): 2x + y = 5$.
 - f) Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $(P): y = x^2$.
 - g) Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $B(2;4)$, $C(5;10)$ hợp thành ba điểm thẳng hàng.

- h) Biểu thức $B = x^2 - 5xy + 12y^2$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 i) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.
 j) $(x-2)^2 = \sqrt{5y+1}$.
 k) Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $D(3;0)$ và $E(5;0)$ hợp thành tam giác MDE cân tại M .

Bài toán 92. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x+2y=2m, \\ 2x+3y=7m^2-3m. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = -2$.
- Tìm giá trị của tham số m để hệ có nghiệm $(x;y)$ trong đó $x = 2; y = 0$.
- Chứng minh rằng hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị của m . Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với tham số m .
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $5x + y = 10$.
 - $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$
 - $3x + 7y = 9m$.
 - Điểm $M(x;y)$ có hoành độ thuộc khoảng $(0;2)$.
 - Biểu thức $S = x + y + 10$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $P = x - y + 7$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
 - $7(x+2y)^2 - 14x - 24y = m\sqrt{3} - 1$.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(5;5)$, $B(-4;-4)$ lập thành một tam giác không suy biến.

Bài toán 93. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x - y = 2, \\ x + (m+1)y = 1. \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình (I) với $m = 5$.
- Tìm tất cả các giá trị m để (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $x = 5$.
 - $x + 3y = 4$.
 - $9x^2 + y^2 = 13$.
 - $x^3 + x + y = 8$.
 - $\frac{y}{x+2} + \frac{x}{y+2} = \frac{17}{6}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía trên trục hoành.
 - Điểm $M(x;y)$ có tung độ lớn hơn 5.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong parabol $(C): y = -x^2 - 6$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục hoành bằng 10 lần khoảng cách từ điểm $M(x;y)$ đến trục tung.
 - Biểu thức $S = x(5x+1) - y^2$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $A(4;0)$ và $B(-2;4)$.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $C(-1;0)$ và $D(5;0)$ hợp thành tam giác MCD cân tại M .
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm O , bán kính $R = 2\sqrt{10}$.

Bài toán 94. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + ay = 5, \\ ax + 2y = 2a + 1. \end{cases}$ (I); a là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) với $a = 3$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số a .
- Tìm tất cả các giá trị a để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $3x + 2y = 7$.
 - $2x > y$.
 - $x + 2y = \frac{1}{a+2}$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{5}{y} = \frac{6x-2}{x^2-19x+1}$.
 - Điểm $M(x;y)$ có tung độ thuộc khoảng $(2;5)$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên trục tung.
 - Biểu thức $S = x^4 + 4x^2 - 12y + 21$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(2;5)$, $B(3;7)$ lập thành ba điểm thẳng hàng.
 - Điểm $M(x;y)$ chia trong đoạn thẳng PQ theo tỷ số $2:3$ với $P(1;-3)$ và $Q(6;7)$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên trục đối xứng d của đoạn thẳng CD với $C(1;2)$, $D(7;8)$.
- Tìm giá trị nguyên của a để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho x và y đều là số nguyên.

Bài toán 95. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2m, \\ x - my = 1 + m. \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ (I) với $m = 6$.
- Giải và biện luận hệ phương trình (I) theo m .
- Chứng minh rằng khi $m \neq -1$, hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ đồng thời điểm $M(x;y)$ và điểm $N(2;0)$ nằm trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường phân giác góc phần tư thứ II.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $3x - y = 5$.
 - $2x + y > \frac{6}{m+1}$.
 - $\begin{cases} x \geq 6 \\ y \leq -7 \end{cases}$
 - $\frac{1}{x+1} + \frac{5}{y+1} + \frac{19}{4} = 0$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $(d): y = 3x + 5$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường cong $(C): y = 1 - 5x - x^3$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ là tâm đối xứng của hai điểm $A(4;2)$ và $B(-1;-3)$.
 - Điểm $M(x;y)$ có tổng khoảng cách đến hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - x và y là các nghiệm của phương trình bậc hai ẩn $t: t^2 - t + 5m = 0$.
 - x là số lớn nhất thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} x + a + z = 1, \\ x^2 + 2a^2 + 3z^2 = 4. \end{cases}$
 - Biểu thức $S = \frac{4x^2 - 3y + 4}{4x^2 + 3y - 2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).

Bài toán 96. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x + y = m, \\ x + (m-1)y = 2. \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ (I) với $m = -2$.
- Giải và biện luận hệ phương trình (I) theo m .
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $5x - 9y = 8$.
 - $2x^2 - 7y = 1$.
 - $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{7}{10}$.
 - $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $y = 5x^2 - 43$.
 - Biểu thức $S = x^2 + y^2 + 6x + 2$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $A(2;5)$, $B(3;7)$ lập thành một tam giác không suy biến.
 - Độ dài đoạn thẳng OM bằng 5, với $M(x;y)$ và O là gốc tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ chia trong đoạn thẳng OH theo tỉ lệ $1:2$ với O là gốc tọa độ và $H(3;6)$.
 - Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $C(-5;0)$, $D(-1;4)$ hợp thành tam giác MCD cân tại M .
- Chứng minh rằng khi m khác 0, hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$, trong đó điểm $M(x;y)$ thuộc một đường thẳng cố định.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho biểu thức $P = \frac{2x-3y}{x+y}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Bài toán 97. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - 2y = m, \\ x + my = 2m - 1. \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ (I) với $m = -2$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo m .
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $5x + y = 14,4$.
 - $x + 6y = \frac{m+9}{3m+2}$.
 - $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.
 - $x^2 - m + 3 = 2y + \sqrt{4x-3}$.
 - Điểm $M(x;y)$ có hoành độ lớn hơn 0,8; tung độ nhỏ hơn 0,4.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ IV của mặt phẳng tọa độ.
 - Độ dài đoạn thẳng OM ngắn nhất, với $M(x;y)$ và O là gốc tọa độ.
 - $4x + (m-2)y = \sqrt{9m^2 - 5m}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm phía trên đường thẳng $d: y = \frac{5m-3}{2}$.
 - $5(3x-2y)^3 + \frac{x+1}{2-y} > 6$.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(1;2)$, $B(5;10)$ hợp thành một tam giác không suy biến.
 - $2x - (m+2)y = \sqrt[3]{1-m}$.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ trong đó x và y đều là các số nguyên.

Bài toán 98. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = 3, \\ 3x + my = 4. \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ phương trình (I) với $m = -2$.
- Giải và biện luận hệ phương trình (I) theo tham số m . Chứng minh rằng hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với mọi giá trị của m .
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn
 - $2x + y = \frac{17}{7}$.
 - $3x - y = \frac{4m}{m^2 + 6}$.
 - $|x| = |y - 3|$.
 - Điểm $M(x; y)$ có hoành độ lớn hơn $\frac{5}{4}$.
 - Khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục hoành gấp 5 lần khoảng cách từ điểm $M(x; y)$ đến trục tung.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
 - $x + y > \frac{6}{7}$.
 - $(m + 3)x + (m - 2)y = 7m^3$.
 - Điểm $M(x; y)$ và hai điểm $A(2; 4)$, $B(3; 6)$ lập thành một tam giác không suy biến.
 - $(m - 3)x - (m + 2)y = 6m^2 - 7m$.

Bài toán 99. Mở rộng và phát triển câu 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; Đại học Sư phạm Hà Nội; Quận Xuân Thủy; Quận Cầu Giấy; Thủ đô Hà Nội; Năm học 2015 – 2016; Ngày thi 02.06.2015.

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 - 4m, \\ mx + y = 3m + 1. \end{cases}$ (I); m là tham số thực.

- Giải hệ (I) với $m = 2$.
- Chứng minh rằng hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với mọi giá trị của m . Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ.
 - Chứng minh đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$.
 - Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho
 - $x > y$.
 - $x + 4y = \frac{9 - m}{m^2 + 1}$.
 - $x + y > \frac{5m + 7}{m^2 + 1}$.
 - $|x - y| = 2$.
 - Điểm $M(x; y)$ có hoành độ nhỏ hơn 1.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Điểm $M(x; y)$ và hai điểm $A(2; 8)$, $B(3; 12)$ lập thành một tam giác không suy biến.
 - $4 \cdot \left(\frac{x - 2}{y - 4} \right)^3 = \left(\frac{1 - y}{x - 3} \right)$.

Bài toán 100. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - y = -m \\ (1 - m^2)x + 2my = 1 + m^2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = -4$.
- Chứng tỏ hệ phương trình đã cho có nghiệm với mọi giá trị của m .
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x + 3y = \frac{m-5}{m^2+1}$.
 - $2x - 5y > \frac{1}{m^2+1}$.
 - $5x - y = -\frac{19}{2}$.
 - Điểm $M(x; y)$ có hoành độ lớn hơn $-1,5$.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trong cung phần thứ III của mặt phẳng tọa độ Oxy.
 - Biểu thức $P = x + y$ nhận giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có).
 - $(1 + m - m^2)x + (2m - 1)y = 5m^2 - 4m + 1$.
 - $(m^2 + m - 1)x - (2m + 1)y = 6m^2 - 7m - 1$.
 - Điểm $M(x; y)$ cùng với hai điểm $A(1; 1)$, $B(4; 4)$ lập thành một tam giác không suy biến.

Bài toán 101. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + my = -3, \\ (1 - m)x + y = 0. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực}.$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 2$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện
 - $4x + 3y = 12$.
 - $x < 0; y < 0$.
 - $x + y = \frac{9}{m^2} - 1$.
 - $3x - 2y > -\frac{9}{4}$.
 - Điểm $M(x; y)$ có tung độ lớn hơn $\frac{2}{3}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm về bên phải của đường thẳng $x = 4$.
 - Biểu thức $F = x + 2y + 1$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $T = 2x - y$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - $x + (m + 1)y = -3m^3$.
 - $(2m - 1)x + (m - 1)y = -3m^5$.
 - Điểm $M(x; y)$ cùng với hai điểm $A(1; 5)$, $B(2; 10)$ lập thành ba điểm thẳng hàng.
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{m^2}{5m - 2}$.
 - $\frac{18}{(x + y)^2} + \left(1 - \frac{y}{x}\right)^2 = 3m^3$.

Bài toán 102. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = 1, \\ 2mx + m(m-1)y = 3. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 2$.
- Giải và biện luận hệ phương trình (I) theo tham số m .
- Tìm giá trị của tham số m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn
 - $x > 0; y > 0$.
 - $5x + y = \frac{5m^2 - 22m + 3}{6m}$.
 - Điểm $M(x; y)$ có hoành độ nhỏ hơn 5.
 - Điểm $M(x; y)$ có tung độ lớn hơn $-0,5$.
 - $(2m+1)x + m^2y = 2m^3$.
 - $(2m-1)x + m(m-2)y = 2\sqrt{m}$.
 - $m(m-1)y + \frac{1-x}{y} = 3$.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.

Bài toán 103. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 3m, \\ mx - (m+1)y = 2m + 2. \end{cases} \quad (I); \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 4$.
- Giải và biện luận hệ phương trình (I) theo tham số m .
- Chứng minh hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với mọi giá trị của m , đồng thời điểm $M(x; y)$ nằm trên một đường thẳng cố định.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn
 - $x > 0; y > 0$.
 - $x = 5y$.
 - $5x - 3y = 7$.
 - $6x - y > \sqrt{3}$.
 - $\frac{5}{x} + \frac{3}{y+5} = \frac{64}{33}$.
 - Biểu thức $S = xy$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên parabol $(P): y = x^2$.
 - $x^2 - 7x + 2y + 11 = \sqrt{6x - 5}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $d: 5x - \sqrt{3}y = 6 + 2\sqrt{3}$.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ II (trong mặt phẳng tọa độ).
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Điểm $M(x; y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{17}$.
 - Điểm $M(x; y)$ cùng với hai điểm $A(1; 5), B(3; 15)$ lập thành ba điểm thẳng hàng.
 - Biểu thức $T = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{y^2 - 12y + 40}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 104. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 2m^2 - 3m, \\ x + 2y = 2m^2 - 5m. \end{cases} \quad (I); m \text{ là tham số thực.}$$

- Giải hệ (I) với $m = -2$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo m .

3. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
- $x + y = 8m$.
 - $\begin{cases} y \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$
 - $3x - 2y > 5m$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên parabol $(P): y = 5x^2$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
 - Biểu thức $P = x + y + 9$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Hai biến x và y là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn u , tham số $m: u^2 - 8u + m^3 - 3m^2 = 0$.
 - Biểu thức $S = 2x^2 + 3y + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(1;2), B(3;6)$ lập thành ba điểm thẳng hàng.
 - $(m+1)x + 3y = 9m^2 - 10m$.
 - Biểu thức $T = \frac{y+3}{x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 104. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = m - 2, \\ (2m-1)x + (m+1)y = 2m + 2. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 3$.
- Giải và biện luận hệ (I) theo tham số m .
- Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $4x - y = \frac{4m^2 - 8m - 22}{m^2 - 3m + 2}$.
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường thẳng $(d): x = 2y$.
 - Điểm $M(x;y)$ có hoành độ lớn hơn -6 .
 - Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ.
 - Điểm $M(x;y)$ không nằm trên đường thẳng $(\Delta): x = y + 4$.
 - $x + y = \frac{4}{5}$.
 - Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(1;6), B(3;18)$ lập thành ba điểm thẳng hàng.
 - Biểu thức $S = x + y$ nhận giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có).
 - Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - $(3m-1)x + (m+3)y \leq 3m^3$.
 - $(m-1)x + (m-1)y = 4(m+4)^3$.

Bài toán 105. Cho hệ phương trình $\begin{cases} m(x-1) + y + 1 = 0 \\ x + my + 3(1-m) = 0 \end{cases}$ (m là tham số thực).

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = -4$.
- Tìm giá trị của m để hệ đã cho vô nghiệm; vô số nghiệm; có nghiệm duy nhất?
- Khi hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$, tìm mối liên hệ giữa hai biến x và y không phụ thuộc vào tham số m .
- Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn
 - $8x - y = \frac{1}{m+1}$.

- b) $x + 2y > 2$.
- c) $x + y = 5$.
- d) $5x - y > \sqrt{3} - 1$.
- e) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 - 3y + 6}{(y-1)(y-3)}$.
- f) Điểm $M(x;y)$ thuộc parabol $(P): y = 2x^2$.
- g) Điểm $M(x;y)$ thuộc đường cong $(C): y = x^4 - 7x + 2$.
- h) Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{34}$.
- i) Biểu thức $S = x(x+2) - 3y^2 + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- j) Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm $A(1;5)$ và $B(2;2)$ lập thành một tam giác không suy biến.
- k) Đường thẳng OM vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ, trong đó M có tọa độ $(x;y)$.
- l) Biểu thức $T = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{y^2 - 2y + 2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- m) Biểu thức $P = x^6 - 54x^3 + x^2 - 6y + 11$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 106. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 3 - 6m, \\ mx + y = 6m + 3. \end{cases}$ (I); với m là tham số thực.

1. Giải hệ (I) với $m = 2$.
2. Chứng minh rằng hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m .
 - a) Chứng minh đẳng thức $2(x_0^2 + y_0^2) - 18(x_0 + y_0) + 45 = 0$.
 - b) Chứng minh điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho
 - a) $x + 4y = \frac{9-m}{m^2+1}$.
 - b) $x + y > \frac{5m+7}{m^2+1}$.
 - c) $|x - y| = 2$.
 - d) Điểm $M(x;y)$ có hoành độ nhỏ hơn 3.
 - e) Điểm $M(x;y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - f) Điểm $M(x;y)$ và hai điểm $A(2;8)$, $B(3;12)$ lập thành một tam giác không suy biến.
 - g) $(m+1)x + (1-m)y = 6m^3$.
 - h) $(m-1)x + (m+1)y > 6m^2$.
 - i) $\left(\frac{x-3}{y-6}\right)^4 > 8 \cdot \left(\frac{3-y}{x-6}\right)$.

Bài toán 107. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2my = 3 - 8m, \\ 2mx + y = 8m + 3. \end{cases}$ $(x; y; m \in \mathbb{R})$ (I); m là tham số.

1. Giải hệ phương trình đã cho với $m = 4$.
2. Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
3. Chứng minh rằng hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ với mọi giá trị của m . Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ.
 - a) Chứng minh đẳng thức $2(x_0^2 + y_0^2) + 45 = 24(x_0 + y_0)$.

- b) Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho
- $x = 9y$.
 - $x - y > \frac{4}{5}$.
 - Điểm $M(x; y)$ có hoành độ nhỏ hơn 9,5.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Điểm $M(x; y)$ và hai điểm $A(1; 6)$, $B(2; 12)$ lập thành một tam giác không suy biến.
 - $(2m+1)x + (1-2m)y = 6m^3$.
 - $(2m-1)x + (2m+1)y > 4m^2$.
 - $\left(\frac{x-3}{y-4}\right)^3 = 5 \cdot \left(\frac{3-y}{x-4}\right)^2$.

Bài toán 108. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - my = 4 - 3m, \\ mx + 2y = 8m + 6. \end{cases} \quad (x; y; m \in \mathbb{R}) \quad (I); m \text{ là tham số.}$

- Giải hệ phương trình đã cho với $m = 4$.
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số m .
- Chứng minh rằng hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với mọi giá trị của m . Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ.
 - Chứng minh đẳng thức $(x_0 - 5)^2 + (y_0 - 3)^2 = 36$.
 - Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hệ có nghiệm $(x; y)$ đều là số nguyên dương.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho
 - $x = 9y$.
 - $x + y = 11,8$.
 - Điểm $M(x; y)$ có tung độ nhỏ hơn 6,4.
 - Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ.
 - Điểm $M(x; y)$ và hai điểm $A(1; 2)$, $B(2; 4)$ lập thành một tam giác không suy biến.
 - $(m+2)x + (2-m)y = 6(m+2)^2$.
 - $(m+2)x + (2-m)y > 19$.
 - $(m-2)x + (m+2)y = 4m^3 + 2$.
 - $\left(\frac{x-2}{y-3}\right)^3 = 2016 \cdot \left(\frac{3-y}{x-8}\right)^2$.

-----HẾT-----

III. LỜI KẾT.

Trong chương trình lớp 7 THCS chúng ta đã được làm quen với hệ trục tọa độ trong mặt phẳng, với hàm số $y = ax$ và đồ thị của nó. Lên lớp 9 THCS, sách giáo khoa Toán hiện hành đã đề cập sâu hơn khái niệm hàm số, hàm số đơn điệu (đồng biến, nghịch biến), khái niệm hàm số bậc nhất và đồ thị của nó, khái niệm hệ số góc của đường thẳng, vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, tuy số lượng bài tập khá nhiều, đa dạng và phong phú nhưng tất cả đều là những nội dung hết sức cơ bản, dễ thao tác, thực hành. Hệ phương trình bậc nhất là hệ phương trình đơn giản nhất bao gồm hai phương trình bậc nhất, được giải bằng nhiều phương pháp như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đồ thị - hình học, phương pháp đặt ẩn phụ. Xét riêng đối với việc giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất, chúng ta ưu tiên phương pháp thế, bởi vì các biến x và y gắn với tham số, nếu cộng đại số thông thường phải nhân thêm tham số, vô tình làm phức tạp hóa bài toán, bởi vì phải xét trường hợp tham số bằng 0, khác 0 trước khi biến đổi. Bản chất của việc giải, biện luận hệ phương trình bậc nhất chính là biện luận vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, tất nhiên là kèm theo định lượng nghiệm $M(x;y)$ là giao điểm của hai đường thẳng. Do vậy, như đã trình bày trong mục II, ngoài việc nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn một hệ thức đơn giản nào đó, hay một bất đẳng thức nào đó, nếu tự giác tìm tòi, đào sâu suy nghĩ, vận dụng và liên hệ thì chúng ta có thể phát triển lên nhiều lớp bài toán mới mẻ như

- Hệ thức, bất đẳng thức chứa phân thức.
- Hệ thức, bất đẳng thức chứa tham số.
- Hệ thức, bất đẳng thức chứa căn thức.
- Hệ thức liên hệ giữa hai biến độc lập với tham số.
- Hệ thức phát triển từ việc cô lập tham số.
- Hệ thức phát triển từ việc cộng đại số hai phương trình của hệ ban đầu.
- Biện luận giá trị nhỏ nhất của một biểu thức.
- Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức (nếu có).
- Hai biến x và y là nghiệm của phương trình bậc hai ẩn nào đó, tham số m .

Với kiến thức sơ đẳng về hàm số bậc nhất, đồ thị hàm số bậc nhất (đường thẳng), hàm số bậc hai đơn giản và đồ thị hàm số bậc hai đơn giản (parabol $y = ax^2$), đường cong, đường tròn, đường elip, chúng ta có thể phát triển lên rất nhiều lớp bài toán được mạnh mẽ từ điểm $M(x;y)$ như

- Điểm $M(x;y)$ nằm trên một đường thẳng nào đó.
- Điểm $M(x;y)$ nằm trên một đường phân giác cung phần tư lượng góc nào đó.
- Điểm $M(x;y)$ nằm trong góc phần tư lượng góc nào đó.
- Điểm $M(x;y)$ có hoành độ hoặc tung độ nằm trong một khoảng nào đó.
- Điểm $M(x;y)$ nằm trên một đường cong parabol nào đó.
- Điểm $M(x;y)$ nằm trên một đường cong bất kỳ nào đó.
- Điểm $M(x;y)$ nằm trên một đường tròn có tâm và bán kính xác định.
- Điểm $M(x;y)$ nằm phía trong, phía ngoài của hình tròn có tâm và bán kính xác định.
- Điểm $M(x;y)$ có khoảng cách đến một điểm, một đường thẳng cho trước nhận giá trị cho trước.
- Điểm $M(x;y)$ cùng với một cơ sở điểm nào đó thẳng hàng.
- Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm nào đó hợp thành một tam giác không suy biến.
- Điểm $M(x;y)$ có tọa độ nguyên (với điều kiện tham số nguyên).
- Điểm $M(x;y)$ chia trong, chia ngoài một đoạn thẳng theo tỷ lệ xác định.
- Điểm $M(x;y)$ cùng với hai điểm nào đó hợp thành một tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông,...
- Điểm $M(x;y)$ nằm trên một hình vuông, hình thoi, hình thang,... cho trước.

Đối với lớp bài toán gắn với điểm $M(x;y)$, cách đơn giản nhất và hữu hiệu nhất chính là tìm hệ thức liên hệ giữa hai biến độc lập với tham số, đây là một bước bắt buộc, bước đệm để đơn giản hóa những biểu thức chứa tham số m . Trong một số trường hợp, nếu không tìm được hệ thức này, việc tiến triển yêu cầu bài

toán thậm chí đi vào ngõ cụt. Rời xa mái trường THCS, chập chững bước vào THPT các bạn học sinh sẽ được tiếp cận với các kiến thức về vector với các phép toán và tọa độ, tích vô hướng của hai vector và ứng dụng, hệ thức lượng trong tam giác thường, hệ thức lượng trong đường tròn hay phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, đi sâu nghiên cứu đường thẳng, đường tròn, đường elip, đường parabol tổng quát, hypebol với muôn hình vạn trạng – tức là gần mọi thứ hình phẳng đã học dưới cấp THCS vào hệ trục tọa độ, và tìm các đặc điểm, yếu tố, tính chất dựa trên các phép tính về tọa độ, nội dung này sẽ được nâng cao hết mức kết hợp kỹ năng vẽ hình phụ, chứng minh đặc tính, là nội dung thường niên trong kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng và kỳ THPT Quốc gia khi đã rời mái trường THPT. Trong tài liệu này, tác giả đã cố gắng sưu tầm, chọn lọc, khai thác, liên hệ và mở rộng hết mức trong tầm nhìn còn hạn hẹp của bản thân, hy vọng nó sẽ là tài liệu tham khảo bổ ích, lý thú, chuyên sâu, với mong muốn góp phần nhỏ bé vào phong trào học tập hàm số và đồ thị cấp THCS còn rất yếu, cũng như đặt nền tảng tư duy hàm số, tư duy hình học giải tích cho các em học sinh nhỏ tuổi trước khi chính thức bước vào cấp THPT.

Tài liệu này được khởi động viết tháng 07/2016 và hoàn thành tháng 12 năm 2016, giai đoạn mà báo chí và các phương tiện truyền thông chính thống đang đăng tải nhiều thông tin về tình trạng tham ô, tham nhũng, chạy chức, chạy quyền, sai phạm lớn, sai phạm nhỏ, thua lỗ, điều chuyển công tác “đúng quy trình”, bổ nhiệm cán bộ theo kiểu “tìm người nhà”, thay vì “tìm người tài”, kèm theo rất nhiều vấn đề nhức nhối, khiến nhân dân hoang mang, niềm tin giảm sút...

Xin nêu đơn cử

- ❖ Nguyên Bí thư Tỉnh ủy Tỉnh Hà Tĩnh Võ Kim Cự, Nguyên Trưởng ban Quản lý Khu Kinh tế Vũng Áng cấp phép theo kiểu “Tiền trạm hậu tẩu” cho Công ty TNHH Hưng Nghiệp Formosa của Vùng lãnh thổ Đài Loan đầu tư trong vòng 70 năm (một thời gian khá “ít”), trong vòng chưa đến 8 năm đã thải chất thải bừa bãi, gây nên ô nhiễm môi trường nghiêm trọng, tạo ra tình trạng cá biển chết hàng loạt tại vùng biển các tỉnh Hà Tĩnh, Quảng Bình, Quảng Trị, Thừa Thiên Huế, làm thiệt hại nghiêm trọng về mọi phương diện cho đồng bào và đất nước. Đáp lại báo chí, đại diện Formosa ung dung thừa nhận công ty dung axit để súc rửa đường ống, nhưng thừa thien không thông báo chính quyền địa phương vì “không biết quy định này”. Quả thực hết sức trắng trợn, ầu cũng phải vì họ không phải đồng bào mình. Tổng Bí thư Ban chấp hành Trung ương Đảng Cộng Sản Việt Nam Nguyễn Phú Trọng đương nhiệm đã từng thẳng thắn: “ Có ý kiến nói sao làm chậm. Nhưng đây là đấu tranh chứ không phải là việc thương lượng. Đấu tranh để buộc người có tội nhận lỗi, cúi đầu xin lỗi, hứa phải thay đổi đây chuyên, hứa không tái phạm. Nhận đền bù cho chúng ta 500 triệu USD”.
- ❖ Nguyên Phó chủ tịch Ủy ban nhân dân Tỉnh Hậu Giang, Nguyên Chủ tịch Hội đồng Quản trị Công ty Xây lắp dầu khí Việt Nam (PVC) Trịnh Xuân Thanh cùng một số đồng nghiệp, trong thời gian quản lý PVC giai đoạn 2011 – 2013 đã buông lỏng quản lý, kiểm tra, giám sát, làm trái các quy định về quản lý kinh tế, để xảy ra sai phạm, làm thua lỗ, thất thoát 3300 tỷ đồng của nhà nước. Ngoài ra, “quy trình” giới thiệu, tiếp nhận, bổ nhiệm vào vị trí Tỉnh ủy viên, Phó chủ tịch Ủy ban Nhân dân Tỉnh Hậu Giang của ông có nhiều vấn đề, kèm theo thực tế ông được đưa đón bằng xe tư Lexus LX570 nhưng gắn biển số xanh công vụ 95A – 0699 thuộc sở hữu của Phòng Kỹ thuật Hậu cần Công an Tỉnh Hậu Giang là sai nguyên tắc, tạo nên hình ảnh sai, gây dư luận xấu trong quần chúng nhân dân. Tổng Bí thư Ban chấp hành Trung ương Đảng Cộng Sản Việt Nam Nguyễn Phú Trọng nói: “Gần đây chúng ta có làm tiếp một số vụ được dư luận quan tâm, trong đó vụ Trịnh Xuân Thanh chỉ là một ví dụ thôi. Còn liên quan đến nhiều thứ lắm. Chúng ta làm từng bước, chắc chắn, hiệu quả. Có những việc tôi chưa tiện nói trước. Chúng tôi đã nói nhiều lần rồi, là có bước đi chắc chắn, chặt chẽ, thận trọng, hiệu quả và phải giữ cho được cái ổn định để phát triển đất nước. Sờ dĩ như vậy là sau vụ này nó lại liên quan đến vụ khác”.

Trên đây chỉ là hai trong số rất nhiều vụ lùm xùm không đáng có, không nên có, là điển hình cho tình trạng gian lận, tham ô, tham nhũng, làm trái trong một bộ phận quan chức, cán bộ thoái hóa, biến chất, đạo đức

xuống cấp hiện nay. Như Tổng Bí thư Nguyễn Phú Trọng từng giải bày khi tiếp xúc cử tri Thủ đô Hà Nội ngày 06.08.2016: “Đây là lĩnh vực rất là quan trọng nhưng cũng vô cùng khó khăn phức tạp. Liên quan đến lợi ích, danh dự của mỗi con người, mỗi đơn vị nên không dễ tí nào. Lợi ích chẳng chịt nên rất là khó khăn. Nhưng Đảng và Nhà nước quyết tâm làm để trong sạch bộ máy, nếu không thì gay go”. Rõ ràng, để có nền tảng để quyết tâm được, cần một hệ thống chính trị trong sạch, vững mạnh, cần những con người tài năng, quyết đoán, dứt khoát, mạnh mẽ, cộng thêm tư chất nhân hậu, khoan dung nhưng không nhân nhượng, liêm chính nhưng không nhu nhược, cần kiệm, chí công vô tư, hơn nữa phải dám nghĩ, dám làm, dám nhận, dám phản biện và dám sửa sai.

“Có những cái sai không thể sửa được. Chấp vả gượng ép càng làm sai thêm. Chỉ có cách là đừng bao giờ sai nữa, hoặc là phải bù lại bằng một việc đúng khác”

(Hồn Trương Ba, da hàng thịt – Lưu Quang Vũ, 1981).

Nhận ra cái sai, sửa sai, bù lại bằng những việc làm đúng, bù lại bằng việc đạt được những tiến bộ vượt bậc về văn hóa, pháp luật, đạo đức, lễ nghĩa, khoa học, kỹ thuật mà hiện nay đất nước chưa vươn tới, đó phải là những con người xã hội chủ nghĩa thực thụ, những con người đó trưởng thành từ các em học sinh, từ thế hệ mai sau, nếu được nuôi dưỡng, đào tạo và vun đắp đúng cách. Trong mỗi cảnh cuộc công nghiệp hóa, hiện đại hóa, sự phát triển vượt bậc về khoa học, công nghệ, kinh tế, giáo dục, an ninh quốc phòng,... như hiện nay, những bài toán đơn giản, dù được làm cẩn thận, đúng quy trình thì vẫn chỉ là bước tiền đề, nền tảng, nếu cứ như thế mãi, chúng ta chỉ phát triển ở mức trung bình, bởi vì không có tính cải tiến, bứt phá, sáng tạo, thói quen này, tinh thần này ăn sâu gốc rễ từ bậc tiểu học sẽ rất nguy hiểm khi lên các lớp cao hơn. “Trăm hay không hay bằng tay quen”, tác giả mong muốn các thầy cô và bạn đọc có thể khai mở, phát triển – truyền đạt hơn nữa, các bạn học sinh cố gắng thử sức hết khả năng, các em học sinh hãy học tập hăng say, chuyên cần lao động, kết hợp trau dồi đạo đức, trau dồi bản lĩnh chính trị vững vàng, khả năng phân biệt đúng sai và sửa chữa lỗi lầm, ngay từ những bài toán nhỏ này thôi, để không bị lúng túng, bỡ ngỡ, dễ dàng thiên biến vạn hóa với khoa học, với đời sống, với những khó khăn nội tại của đất nước. Các phương pháp, kỹ thuật cơ bản đã được các thế hệ đi trước đúc kết và tận tụy truyền đạt cho thế hệ tương lai, các bạn hoàn toàn đủ khả năng kế thừa, phát huy hết mức và sáng tạo không ngừng, chuẩn bị đủ hành trang nắm bắt khoa học kỹ thuật, trở thành những nhà khoa học, nhà quản lý giỏi, năng động hay chuyên gia an ninh, quốc phòng, trở thành rường cột liêm chính của quốc gia, đưa đất nước ngày càng mở rộng, phát triển vững bền, phồn vinh, minh bạch, và hiển nhiên những bài toán trong các kỳ thi nhất định không thể là rào cản, mà là cơ hội thử sức, cơ hội khẳng định quá trình, cơ hội khẳng định kiến thức, minh chứng sáng ngời cho tinh thần học tập, tinh thần ái quốc được bộc lộ trong tương lai !

Thành phố Thái Bình, Tỉnh Thái Bình.

Ngày 01 tháng 12 năm 2016

Thân ái.

IV. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huỳnh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 1;2;3;4.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.*
Lê Hoàng Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*

- Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
23. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. *23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.*
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. *Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.*
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. *Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. *Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.*
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. *Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.*
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuấn
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.*
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. *9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. *Toán nâng cao Đại số và Giải tích 12.*
Nguyễn Xuân Liêm – Hoàng Chính Bảo ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 1999.
32. *15 chủ đề thường gặp trong các kỳ thi THCS và tuyển sinh lớp 10 ; Môn Toán.*
Nguyễn Đức Hoàng – Nguyễn Sơn Hà ; NXB Đại học Sư phạm ; 2009.
33. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
34. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*
Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
35. *Khai thác và phát triển một số bài toán Trung học cơ sở ; Tập 1, 2.*
Nguyễn Tam Sơn – Phạm Thị Lệ Hằng ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2012.
36. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
37. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Môn Toán.*
Hà Nghĩa Anh – Nguyễn Thúy Mùi – Huỳnh Kỳ Tranh;
NXB Đại học Quốc gia Hà Nội ; 2006
38. *Ôn thi vào lớp 10 THPT Chuyên; Môn Toán.*
Đoãn Minh Cường – Trịnh Hoài Dương
– Trần Văn Khải – Đỗ Thanh Sơn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2013.
39. *Tài liệu hướng dẫn ôn thi vào lớp 10 Môn Toán.*
Phạm Văn Thạo (chủ biên) ; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2013.
40. *Ôn tập thi vào lớp 10 ; Môn Toán.*
Phan Doãn Thoại – Trịnh Thúy Hằng – Lại Thị Thanh Hương
– Mai Công Mẫn – Hoàng Xuân Vinh; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2008.
41. *Ôn thi vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho học sinh tỉnh Thái Bình).*
Dương Văn Thanh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
42. *Tài liệu chuyên toán THCS; Toán 9; Tập 1: Đại số.*
Vũ Hữu Bình – Phạm Thị Bạch Ngọc – Đàm Văn Nhi; NXB Giáo dục Việt Nam; 2012.
43. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.*
44. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.*
45. *Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.*
46. *Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.*

47. *Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).*
48. *Các tạp chí toán học:* Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
49. *Các diễn đàn toán học:* Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathsscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
50. *Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...*



THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI
