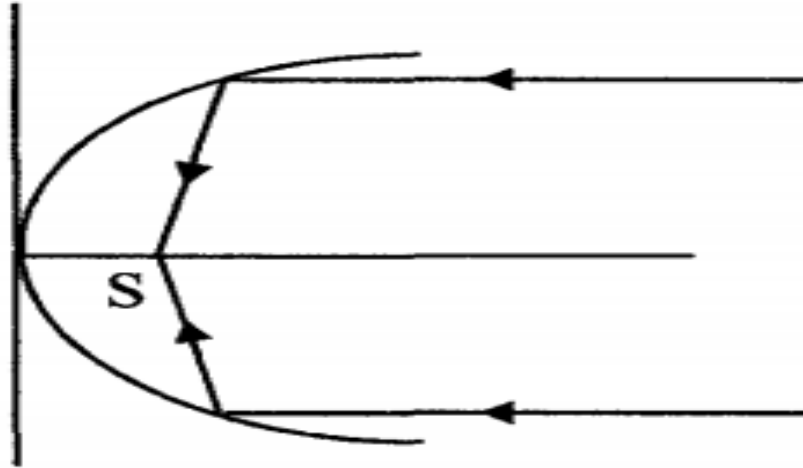


TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG



CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ (HỆ TRUNG HỌC CƠ SỞ)

BÀI TẬP HÀM SỐ BẬC HAI ĐƠN GIẢN (PARABOLA THCS)

TRUNG ĐOÀN NGỌC HÒI – QUÂN ĐOÀN HẢI QUÂN

[TÀI LIỆU PHỤC VỤ KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT, LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN]

CHỦ ĐẠO: PARABOLA ĐƠN GIẢN VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN.

- SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ BẬC HAI.
- VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI ĐƠN GIẢN (PARABOLA ĐƠN GIẢN).
- BIỆN LUẬN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOLA.
- MỘT SỐ BÀI TOÁN GẮN KẾT YẾU TỐ HÌNH HỌC.
- BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THÀNH PHỐ THÁI BÌNH – MÙA THU 2015

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*“Đánh cho để dài tóc,
Đánh cho để đen răng,
Đánh cho nó chích luân bất phản,
Đánh cho nó phiến giáp bất hoàn,
Đánh cho sử tri nam quốc anh hùng chi hữu chủ.”*

Hịch ra trận – Quang Trung Hoàng đế Đại phá Thanh quân; 1789.

CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ (HỆ TRUNG HỌC CƠ SỞ)**BÀI TẬP HÀM SỐ BẬC NHẤT (ĐƯỜNG THẲNG)****TRUNG ĐOÀN NGỌC HÒI – QUÂN ĐOÀN HẢI QUÂN**

Trong khuôn khổ Toán học sơ cấp nói chung và Đại số phổ thông nói riêng, Hàm số và Đồ thị là dạng toán cơ bản nhưng thú vị, có phạm vi trải rộng, phong phú, liên hệ chặt chẽ với nhiều bộ phận khác của toán học sơ cấp cũng như toán học hiện đại.

Tại Việt Nam, hệ phương trình, nội dung hàm số và đồ thị là một bộ phận hữu cơ, quan trọng, được phổ biến giảng dạy chính thức trong chương trình sách giáo khoa Toán bước đầu là lớp 7, tiếp sau là các lớp 9, 10, 11, 12 song song với các khối lượng kiến thức liên quan. Các kỹ năng đối với hàm số, đồ thị được luyện tập một cách đều đặn, bài bản và hệ thống sẽ rất hữu ích, không chỉ trong bộ môn Toán mà còn phục vụ đắc lực cho các môn khoa học tự nhiên khác như hóa học, vật lý, địa lý, sinh học,.... Đối với chương trình Đại số lớp 9 THCS hiện hành, hàm số và đồ thị giữ vai trò chính yếu trong Đề thi kiểm tra chất lượng học kỳ, Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT hệ đại trà và hệ THPT Chuyên. Đối với các lớp cao hơn, nội dung này sẽ được mở rộng trở thành kiến thức chính yếu trong chương trình Đại số - Giải tích xuyên suốt các lớp 10, 12, bao gồm hàm số bậc cao và bài toán hình học giải tích, một bài toán mang tính phân loại cao trong kỳ thi tuyển sinh đại học – cao đẳng, kỳ thi THPT Quốc gia hàng năm, một kỳ thi đầy cam go, kịch tính và bất ngờ, nó lại là một câu rất được quan tâm của các bạn học sinh, phụ huynh, các thầy cô, giới chuyên môn và đông đảo bạn đọc yêu Toán.

Trong phạm vi hàm số và đồ thị, tài liệu này tác giả tập trung trình bày một lớp các bài toán khảo sát sự biến thiên, vẽ đồ thị hàm số bậc hai đơn giản (tức là dạng parabol có đỉnh là gốc tọa độ O) hay còn gọi là đồ thị hàm số $y = ax^2$, vấn đề vị trí tương đối giữa parabol và đường thẳng, một số bài toán gắn kết yếu tố lượng giác, hình học giải tích. Như đã nói ở trên, mục đích khoa học chính của tài liệu nhằm phục vụ cho quá trình dạy và học, kiểm tra, kỳ thi tuyển sinh lớp 10 THPT, sau nữa làm nền tảng cho tư duy hàm số, tư duy hình học giải tích ở cấp THPT mai sau, ngoài ra còn mang tính mở rộng, đào sâu, hướng đến mong muốn bạn đọc nghiên cứu đầy đủ về đường thẳng, tăng cường sự sáng tạo, đột phá, phát huy hơn nữa trong toán học và các ứng dụng trong hàng loạt các môn khoa học tự nhiên.

I. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. Kỹ thuật nhân, chia đơn thức, đa thức, hằng đẳng thức.
2. Nắm vững các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.
3. Nắm vững các phương pháp giải, biện luận phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc cao.
4. Sử dụng thành thạo các ký hiệu toán học, logic (ký hiệu hội, tuyển, kéo theo, tương đương).
5. Kiến thức nền tảng về mặt phẳng tọa độ, hàm số bậc nhất, đường thẳng.
6. Kiến thức nền tảng về hệ số góc của đường thẳng, công thức độ dài, hệ thức lượng trong tam giác vuông, công thức lượng giác, đường tròn, hàm số bậc hai parabol, phương trình nghiệm nguyên.
7. Kiến thức nền tảng về ước lượng – đánh giá, hàm số - đồ thị, bất đẳng thức – cực trị.

II. MỘT SỐ BÀI TẬP ĐIỂN HÌNH.**Bài toán 1.** Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$ (a là tham số thực khác 0).

1. Xét $a=1$, tính $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) - f(1)$.
2. Với $a=3$, tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số và so sánh $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3})$.
3. Tìm a để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(-1;2)$. Vẽ đồ thị với a vừa tìm được.
4. Trong trường hợp $a=1$.
 - a) Tìm điểm M và N có hoành độ lần lượt bằng 1 và 2 nằm trên đồ thị.
 - b) Tìm tọa độ các giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng $y = 4x - 3$.
 - c) Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 2mx + m$.
 - d) Với giá trị nào của m thì d có phương trình $y = 2x + 3 - m$ cắt đồ thị hàm số trên tại hai điểm phân biệt? Hai điểm đó có thể thuộc cùng phần tư thứ hai được hay không? Vì sao?

Bài toán 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ cho parabol (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đườngthẳng chứa tham số $d: y = (m-1)x + \frac{1}{2}$ (m là tham số thực).

1. Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một mặt phẳng tọa độ trong trường hợp $m=4$.
2. Tìm giá trị của m để đường thẳng d
 - a) Đi qua điểm $(4;3)$.
 - b) Song song với đường thẳng $y = 3mx - 5$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x - 7$.
 - d) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 2.
3. Chứng tỏ đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .
4. Tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .
5. Tìm giá trị của m để (P) tiếp xúc với d . Tìm tọa độ tiếp điểm.
6. Với giá trị nào của m thì (P) cắt d tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn
 - a) $x_1 + x_2 = 7x_1x_2$.
 - b) $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} = 2$.
 - c) $x_1^2 + x_2^2 - 9x_1x_2 = 4$.
 - d) $(x_1+1)(x_2+1) = 12$.
 - e) Biểu thức $S = (x_1^2+4)(x_2^2+9)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
7. Chứng minh rằng nếu parabol (P) cắt đường thẳng d thì luôn tồn tại một giao điểm nào đó có hoành độ x_0 thỏa mãn điều kiện $|x_0| \leq 1$.

Bài toán 3. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Thái Bình; Thành phố Thái Bình; Tỉnh Thái Bình; Năm học 2009 – 2010.Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m-1)x - m^2 + m$ (với m là tham số thực).

1. Tìm m để đường thẳng d đi qua điểm $M(2;7)$.

2. Tìm m để đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có hoành độ nhỏ hơn -2 .
3. Với giá trị nào của m thì đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Song song với đường thẳng $y = 5mx - 7$.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - 6$.
 - c) Song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.
4. Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
5. Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho
 - a) $2x_1 - 3x_2 = 5$.
 - b) $x_1^2 - x_2^2 = 23$.
 - c) $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 1} = 2$.
 - d) $|x_1^3 - x_2^3| = 1$
6. Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2 sao cho
 - a) $y_1 + y_2 = 2m^2 - 4$.
 - b) $y_1 + y_2 = 13$.
 - c) $y_1 y_2 = 6(m^2 - m)$.

Bài toán 4. Mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2009 – 2010.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (k-1)x + 4$ (k là tham số).

1. Tìm giá trị của k sao cho
 - a) Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = (2k-3)x + 8 - k$.
 - b) Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x + 6 - k$.
 - c) Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 3.
 - d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là lớn nhất.
2. Tìm các điểm M có hoành độ bằng 4 và thuộc parabol (P) .
3. Khi $k = -2$; hãy tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) .
4. Chứng minh rằng với bất kỳ giá trị nào của k thì đường thẳng d luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.
5. Chứng minh rằng với mọi k , luôn tồn tại một giao điểm nào đó của parabol (P) và đường thẳng d có hoành độ x_0 thỏa mãn điều kiện $|x_0| \leq 2$.
6. Gọi x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) . Tìm k sao cho
 - a) $x_1 + x_2 > 6x_1 x_2 - 9$.
 - b) $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 \leq 13$.
 - c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq k - 1$.
7. Gọi y_1, y_2 là các tung độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) .
 - a) Tìm k sao cho $y_1 + y_2 = y_1 y_2$.
 - b) Tìm k để $\left| \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right| \leq \frac{\sqrt{17}}{4}$.

Bài toán 5. Mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2007 – 2008.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2(m-1)x - m^2 + 2m$.

Trong đó m là tham số thực, O là gốc tọa độ.

1. Tìm m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua gốc tọa độ O.
 - b) Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - c) Song song với đường thẳng $y = (3m-2)x + m$.
 - d) Cắt trục tung tại điểm có tung độ không vượt quá 1.
 - e) Đi qua điểm K nằm trên (P), K có hoành độ bằng 6.
2. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và (P) khi $m = 3$.
3. Tìm m sao cho (P) và d cắt nhau tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 và tung độ y_1, y_2 thỏa mãn
 - a) $y_1 + y_2 < 4$.
 - b) $|y_1 - y_2| = 8$
 - c) Biểu thức $S = y_1 + y_2 + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - d) $y_1 - 2y_2 = 8$.
 - e) Biểu thức $P = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + |m-3|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
4. Tìm trên parabol (P) điểm $Q(x;y)$ thỏa mãn $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.
5. Tìm trên parabol (P) điểm $M(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $3y - 5x + 6 = 2x\sqrt{x+y-3}$.
6. Tồn tại hay không điểm $N(x;y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn hệ thức $5x - (\sqrt{y} + 3)\sqrt{2x-1} - 1 = 0$?

Bài toán 6. Mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2004 – 2005.

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = 2x^2$; một đường thẳng d có hệ số góc bằng m và đi qua điểm $I(0;2)$.

1. Viết phương trình đường thẳng d .
2. Tìm m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Song song với đường thẳng $y = \left(3m - \frac{1}{2}\right)x + 4$.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = -mx - 9$.
 - c) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5.
 - d) Đi qua điểm E có hoành độ bằng 3, E thuộc (P).
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích không nhỏ hơn 2.
3. Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B .
4. Gọi hoành độ của A và B là x_1, x_2 .
 - a) Tìm khoảng giá trị của m để $2(x_1 + x_2) \leq 5x_1x_2 - 6$.
 - b) Tìm giá trị của m sao cho $x_1 - 3x_2 = 4$.
 - c) Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| \geq 2$.
 - d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1^2 + x_2^2$.
 - e) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = (x_1^2 + 9)(x_2^2 + 1)$.
 - f) Chứng minh rằng ít nhất một trong hai hoành độ có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1.

5. Gọi tung độ hai giao điểm của (P) với d là y_1, y_2 .
 - a) Tìm m để tồn tại hệ thức $y_1^2 + y_2^2 = y_1 y_2 + 36$.
 - b) Tìm tất cả các giá trị m để $y_1 = 16y_2$.
 - c) Xác định m sao cho $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} < 3$.
6. Trong trường hợp $m=1$, xét điểm $C(1;0)$. Khi đó hãy tìm tọa độ điểm D trên đường thẳng d sao cho tổng độ dài $BD + OD$ đạt giá trị nhỏ nhất.
7. Tìm tọa độ điểm $M(x;y)$ nằm trên (P) sao cho $2x^2(\sqrt{x+1} - \sqrt{3x}) + y = 4x^3$.
8. Tìm tọa độ điểm $N(x;y)$ trên (P) thỏa mãn hệ thức

$$1019x^2 + 18y^4 + 1007z^2 = 30xy^2 + 6y^2z + 2008zx.$$

Bài toán 7. Mở rộng và phát triển bài III; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Thái Bình; Thành phố Thái Bình; Tỉnh Thái Bình; Năm học 2005 – 2006.

Cho các hàm số $y = x^2$ (P) và $y = 2(m+1)x - m + 2$ (d) (m là tham số).

1. Vẽ đồ thị (P) .
2. Tìm giá trị của m sao cho
 - a) Đường thẳng (d) không đi qua điểm $(4;1)$.
 - b) Đường thẳng (d) đi qua điểm có hoành độ bằng 1, điểm này nằm trên (P) .
 - c) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = (m^2 + 3)x - m$.
 - d) Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ không vượt quá 0,5.
 - e) Đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ số hai cạnh góc vuông là 1:4.
3. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .
4. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) .
 - a) Tìm m sao cho $x_1 + x_2 \geq 10x_1x_2 + 5$.
 - b) Tìm giá trị của m sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 7m + 8$.
 - c) Tìm giá trị m để $\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} = -\frac{1}{2}$.
 - d) Tìm m sao cho $x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m - 2 = 9m^2$.
 - e) Hãy tìm m để biểu thức $B = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
5. Gọi tung độ hai giao điểm của (P) với (d) là y_1, y_2 .
 - a) Tìm m sao cho $y_1 = 4y_2$.
 - b) Tìm m sao cho $(y_1 - 1)(y_2 - 1) = -3$.
 - c) Tìm tất cả giá trị của m để $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 18$.
 - d) Tìm m để biểu thức $C = y_1 + y_2 - y_1y_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
6. Tìm tọa độ các điểm $M(x;y)$ nằm trên (P) thỏa mãn đẳng thức $4x + y + 5 = 2\sqrt{2x+3}$.
7. Tìm tọa độ các điểm $R(x;y)$ trên (P) sao cho $\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} = \sqrt{x^2 - 8x + 24}$.
8. Tồn tại hay không điểm $Q(x;y)$ thuộc (P) thỏa mãn $(x^2 + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2y$?
9. Điểm $N(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Khi đó (P) và (d) có thể cắt nhau tại bao nhiêu điểm nguyên là tối đa?

Bài toán 8. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2003 – 2004.

Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) và đường thẳng $d: y = 2(a-2)x - \frac{1}{2}a^2$ (a là tham số thực).

1. Tìm a để
 - a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(0; -8)$.
 - b) Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = (5a-1)x - a$.
 - c) Đường thẳng d vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - d) Đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn -2 .
2. Khi a thay đổi, hãy xét số giao điểm của (P) và d tùy theo giá trị của a .
3. Tìm a để (P) cắt d tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn
 - a) $x_1 + x_2 = x_1x_2 - 2$.
 - b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -4$.
 - c) $x_1^2 + x_2^2 = \frac{17}{8}$.
 - d) $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 8 - 9a$.
4. Gọi tung độ các giao điểm của (P) và d là y_1, y_2 .
 - a) Tìm a sao cho $y_1 + y_2 = 16 - \frac{1}{2}a^2$.
 - b) Tìm a để $\sqrt{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}} = \frac{4\sqrt{2}}{a^2}$.
 - c) Tìm a sao cho biểu thức $S = y_1 + y_2 + 5a$ đạt giá trị nhỏ nhất.
5. Tìm trên (P) những điểm có khoảng cách đến gốc tọa độ $O(0;0)$ bằng $\sqrt{3}$.
6. Tồn tại hay không điểm $B(x;y)$ nằm trên (P) thỏa mãn $\left(x + \sqrt{x^2 + 2015}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2015}\right) = 2015$?
7. Tìm trên parabol (P) tọa độ điểm $C(x;y)$ thỏa mãn $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} + 8x = \frac{y}{2} + 18$.

Bài toán 9. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2002 – 2003.

Cho hàm số $y = f(x) = x + m$ có đồ thị là đường thẳng (d) , m là tham số, O là gốc tọa độ.

1. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d :
 - a) Đi qua điểm $A(1;2003)$.
 - b) Không đi qua điểm $B(-6;2)$
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{m}x + 9$.
 - d) Song song với đường thẳng $\Delta: x - y + 3 = 0$.
 - e) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $\frac{1}{2}m^2$.
 - f) Tiếp xúc với đường tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{2}$.
 - g) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.
 - h) Tiếp xúc với parabol $(P): y = -\frac{1}{4}x^2$.

2. Xét $a = \frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}}$; $b = \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$. Chứng minh rằng $f(a) > f(b)$.
3. Với $m = 4$, tìm tọa độ điểm $C(x; y)$ trên đường thẳng d sao cho $|y - 2007|^{2004} + |x - 2004|^{2003} = 1$.
4. Xét hàm số $y = |x - 1| + |x - 2|$ có đồ thị (H) .
 - a) Vẽ đồ thị (H) .
 - b) Biện luận theo tham số m số giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (H) .
5. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt parabol (P) $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho
 - a) $x_1 + x_2 = 10x_1x_2 - 7m$.
 - b) $x_1^2 + x_2^2 > 8$.
 - c) $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{1}{5}$.

Bài toán 10. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2012 – 2013.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$ (m là tham số thực).

1. Tìm giá trị của m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $(4; 11)$.
 - b) Không đi qua điểm $(3; 2)$.
 - c) Song song với đường thẳng $y = (4m - 6)x + 7 - m$.
 - d) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{2}{9}x + 3k$.
 - e) Đồng quy với hai đường thẳng $y = x$; $y = 2x - 1$.
 - f) Cắt đường thẳng $y = 6x + 9$ tại điểm M nằm trên parabol (P) .
2. Xét trường hợp $m = -3$.
 - a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d khi đó.
 - b) Tìm tọa độ điểm $N(x; y)$ trên đường thẳng d có hoành độ $x = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$.
3. Tìm m để d cắt (P) tại một điểm duy nhất.
4. Cho hai điểm $A(-2; m), B(1; n)$. Tìm m, n để A thuộc (P) và B thuộc d .
5. Trong trường hợp parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm có tọa độ $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.
 - a) Tìm giá trị m để $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2$.
 - b) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 6x_1x_2 + m - 4$.
 - c) Tìm giá trị của m sao cho $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} = -\frac{7}{8}$.
 - d) Tìm m sao cho $y_1 + y_2 = 2x_1x_2 - 8(x_1 + x_2)$.
 - e) Tìm tất cả các giá trị m sao cho $y_1^2 + y_2^2 = 8$.
 - f) Tìm m sao cho $x_1y_1 + x_2y_2 = \frac{m + 33}{4}$.
 - g) Tìm m sao cho biểu thức $S = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}$ đạt giá trị lớn nhất.
 - h) Chứng minh rằng ít nhất một trong hai hoành độ có giá trị tuyệt đối không vượt quá $\sqrt{2}$.

6. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng d . Tìm m để độ dài đoạn OH lớn nhất.
7. Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $\frac{9}{y} + 1 = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}}$.
8. Tìm m để đường thẳng d đi qua điểm $T(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $(x^2 + 1)(y^2 + 4)(z^2 + 9) = 48xyz$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$).
9. Giả sử tồn tại điểm $L(x; y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x(4 - y)}$. So sánh độ dài đoạn thẳng OL và $\sqrt{19}$.
10. Có bao nhiêu điểm $J(x; y)$ nằm trên (P) thỏa mãn hệ thức $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$?

Bài toán 11. Mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2013 – 2014.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $d: y = mx + m + 5$.

1. Tìm giá trị của m sao cho
 - a) Đường thẳng d đi qua điểm C thuộc (P) , P có hoành độ bằng 2.
 - b) Đường thẳng d không đi qua điểm $(4; -2)$.
 - c) Đường thẳng d vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - d) Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \left(\frac{m}{3} - 2\right)x - 6$.
 - e) Đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $\sqrt{15}$.
 - f) Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.
2. Xét hai điểm $D(2; m)$, $E(-3; n)$. Tìm m và n để $D \in (P)$, $E \in d$.
3. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d khi $m = -5$.
4. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì:
 - a) Đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định, tìm tọa độ điểm đó.
 - b) Đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
5. Trong trường hợp parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm có tọa độ $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$.
 - a) Tìm m sao cho $x_1 + x_2 + x_1x_2 = m^3 - 2$.
 - b) Tìm m sao cho $x_1^2 + x_2^2 > 4x_1x_2 - 20$.
 - c) Tìm m sao cho $x_1^2 + 2mx_2 - 2m - 10 = 2|m|$.
 - d) Tìm giá trị m để $y_1 + y_2 = y_1y_2 - 15$.
 - e) Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = |x_1 - x_2|$.
 - f) Tìm giá trị m thỏa mãn $y_1 + y_2 \leq x_1x_2 + 20$.
 - g) Tìm giá trị nguyên của m để biểu thức $T = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$ nhận giá trị nguyên.
6. Tìm hai điểm phân biệt A, B thuộc parabol (P) sao cho A đối xứng với B qua điểm $M(-1; 5)$.
7. Tìm giá trị của m để đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn tâm O , bán kính $R = 3\sqrt{2}$.
8. Tìm tọa độ điểm $N(x; y)$ trên parabol (P) có hoành độ $x = \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$.
9. Tìm tọa độ điểm $S(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3 + x + 2y + 1} = 1 + \sqrt{4y^2 - 1}$.
10. Điểm $N(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Khi đó (P) và (d) có thể cắt nhau tại bao nhiêu điểm nguyên là tối đa?

Bài toán 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = mx + 1$ (m là tham số thực).

- Với giá trị nào của m thì
 - Đường thẳng d có hướng đi lên ?
 - Đường thẳng d đi qua điểm $(4;3)$.
 - Đường thẳng d không đi qua điểm $(-4;1)$.
 - Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -4x + 10$.
 - Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = (8m - 3)x + 6$.
 - Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.
- Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và d khi $m = -2$.
- Chứng tỏ với mọi giá trị của m , (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt phân biệt A và B .
- Giả sử A, B có tọa độ $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.
 - Chứng tỏ A và B không thuộc trục Oy.
 - Tìm m sao cho $x_1 + x_2 = 8x_1x_2 - 11$.
 - Tìm m sao cho $4(x_1^2 + x_2^2) > 7x_1x_2 + 9$.
 - Tìm tất cả các giá trị của m để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > x_1 + x_2 + 8$.
 - Tìm giá trị của m sao cho $y_1 + y_2 = y_1y_2 + 2m$.
 - Tìm giá trị của m sao cho $y_1 - y_2 = 2m$.
 - Tìm giá trị của m sao cho $y_1 + y_2 = m^3 + 2$.
 - Chứng minh rằng ít nhất một trong hai hoành độ có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1.
- Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.
- Tìm tọa độ điểm $M(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $y = \sqrt{x^3 - y} + \sqrt{y - x}$.
- Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $\sqrt{\frac{x^2 + 4y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{3}} = x + 2y$.
- Điểm $N(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Khi đó (P) và (d) có thể cắt nhau tại bao nhiêu điểm nguyên là tối đa ?

Bài toán 13. Mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2011 – 2012.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = ax + 3$.

- Tìm a để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - Không đi qua điểm $(2;5)$.
 - Song song với đường thẳng $y = (1 - 5a)x - \frac{a}{2}$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{a^2}{8}x - 4$.
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 7.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có tỷ lệ các cạnh là $3:4:5$.
 - Tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. Tìm tọa độ điểm $S(x; y)$ trên (P) biết S có hoành độ $x = \sqrt{5} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.
3. Trong trường hợp $a = 1$, vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ.
4. Chứng minh rằng (P) luôn cắt d tại hai điểm phân biệt.
5. Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của d và (P) .
 - a) Tìm a sao cho $3(x_1 + x_2) > 11x_1x_2 - 5$.
 - b) Tìm a sao cho $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = 9(a + 2)$.
 - c) Tìm a để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{a-6}{3}$.
 - d) Tìm a để hoành độ điểm này gấp 5 lần hoành độ điểm kia.
 - e) Tìm a sao cho biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + 3(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - f) Tìm tất cả giá trị của a sao cho $x_1 + 2x_2 = 3$.
 - g) Chứng minh rằng ít nhất một trong hai hoành độ có giá trị tuyệt đối không vượt quá $\sqrt{3}$.
6. Gọi tung độ các giao điểm của (P) và d là y_1, y_2 . Tìm giá trị của a sao cho
 - a) $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \leq 1$.
 - b) $(y_1 - 1)(y_2 - 1) = -5$.
 - c) $(y_1 + y_2)^2 - (y_1y_2)^2 = 19$.
 - d) Biểu thức $Q = (x_1^2 - 9)(x_2^2 - 1)$ đạt giá trị lớn nhất.
7. Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ nằm trên (P) sao cho $\sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2y - x - 2$.
8. Điểm $N(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Khi đó (P) và (d) có thể cắt nhau tại bao nhiêu điểm nguyên là tối đa?
9. Tìm tất cả các điểm L có tọa độ $(x; y)$ nằm trên (P) sao cho $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + 4x\sqrt{2x} \geq xy + 10$.

Bài toán 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = 2ax - 3a + 5$ (a là tham số thực).

1. Tìm giá trị của a để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $K(1; -9)$.
 - b) Song song với đường thẳng $y = 4x + 9$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{2}{5}x + 5k - 1$.
 - d) Cắt đường thẳng $y = 3x - 2$ tại điểm có hoành độ bằng 1.
 - e) Tạo với tia Ox một góc tù.
 - f) Tạo với tia Oy một góc tù.
2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của a , d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
3. Gọi hoành độ hai giao điểm của (P) với d là x_1, x_2 . Tìm giá trị a sao cho
 - a) $x_1 + x_2 = 4x_1x_2 - 5$.
 - b) $2x_1 + x_2 = 0$.
 - c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 - 2a$.
 - d) Biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- e) $|x_1 - x_2| = 10$.
- f) Hai giao điểm cùng nằm trong góc phần tư thứ nhất.
4. Gọi tung độ các giao điểm của (P) và d là y_1, y_2 . Tìm giá trị của a sao cho
- a) $y_1 + y_2 = y_1 y_2 - 15$.
- b) $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{2}{5}$.
- c) Biểu thức $Q = \frac{y_1 + y_2}{a^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- d) $y_1^2 + y_2^2 = 2(3a - 5)^2$.
5. Với giá trị nào của a thì (P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung ?
6. Xác định a để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của đường thẳng $x = 1$?
7. Tìm giá trị của a để đường thẳng d đồng quy với hai đường thẳng $y = 6x - 1$; $y = 4x - 3$.
8. Tìm a sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là lớn nhất.
9. Xét đường tròn (C) với tâm O , bán kính $R = 1$. Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng d cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài $l = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
10. Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $18x^2 - 2x - \frac{17}{3} + 9\sqrt{x - \frac{1}{3}} = 0$.
11. Điểm $N(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Khi đó (P) và (d) có thể cắt nhau tại bao nhiêu điểm nguyên là tối đa ?

Bài toán 15. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho đường thẳng $d: y = 2x + m$ và parabol $(P): y = x^2$.

1. Với giá trị nào của m thì đường thẳng d thỏa mãn
- a) Đi qua điểm $M(2; 9)$.
- b) Song song với đường thẳng $y = (3m - 2)x + 4$.
- c) Vuông góc với đường thẳng $y = \left(m^2 - \frac{3}{2}\right)x - 3$.
- d) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $3m - 5$.
- e) Cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\sqrt{5}$.
- f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 13.
2. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 3$.
3. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của m , trên parabol (P) luôn có hai điểm nằm trên d .
4. Tìm m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
- a) $x_1 + x_2 = 5x_1 x_2 - 4$.
- b) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} = -\frac{5}{6}$.
- c) $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 x_2 = 24m$.
- d) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{14}{5}$.
- e) $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3} + 2 = 0$.

$$f) \left| \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right| = \frac{8}{m^2}.$$

$$g) y_1 + y_2 = y_1 y_2 + 5.$$

$$h) \text{ Biểu thức } P = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

i) A và B nằm về hai phía của trục tung.

5. Xác định m để parabol (P) , đường thẳng d và đường thẳng $y = 4x - 4$ đồng quy tại một điểm.

6. Tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ nằm trên (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{y+2} + \sqrt{8x-8y+7} = x+1$.

7. Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $K(a; b)$ thỏa mãn $(b - 2a\sqrt{b} + 2a^2 - 4a + 5)(b + 7) = 3 + 4\sqrt{b}$.

Điểm $K(a; b)$ có nằm trên parabol (P) hay không? Tại sao?

Bài toán 16. Mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; Đại học Sư phạm Hà Nội; Quận Cầu Giấy; Thủ đô Hà Nội; Năm học 2012 – 2013; Ngày thi 06.06.2012.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = mx - m - 2$ (m là tham số thực).

1. Tìm giá trị của m sao cho

a) Đường thẳng d đi qua điểm $(2; -7)$.

b) Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = (4 - 5m)x + \sqrt{m}$.

c) Đường thẳng d vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

d) Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn $\sqrt{3}$.

e) Đường thẳng d tạo với tia Oy một góc $\alpha > 90^\circ$.

2. Giả sử đường thẳng d cắt trục tung và trục hoành theo thứ tự tại A và B (không trùng gốc tọa độ O).

Tìm tất cả các giá trị của m để

a) Tam giác OAB có tỷ lệ độ dài các cạnh là 3:4:5.

b) Tam giác OAB có diện tích bằng 4,5.

c) $\widehat{OBA} > 60^\circ$.

d) Tam giác OAB có độ dài chiều cao kẻ từ O đạt giá trị lớn nhất.

3. Tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ mà đường thẳng d không thể đi qua với mọi giá trị của m .

4. Tìm tọa độ giao điểm của (P) với d khi $m = -2$.

5. Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 .

a) Tìm giá trị m để $x_1 + x_2 = \frac{1}{x_1 x_2} - \frac{2}{3}$.

b) Tìm giá trị m để $x_1^2 + x_2^2 = 4 + 3m^3$.

c) Tìm m thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - 5} + \frac{1}{x_2 - 5} = \frac{1}{5}$.

d) Tìm m để $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$.

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \sqrt[4]{x_1 - x_2}$.

a) Tìm m để hai điểm A, B nằm cùng phía đối với trục tung.

b) Tìm m để ít nhất một điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-2; 4)$.

6. Điểm $N(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Khi đó (P) và (d) có thể cắt nhau tại bao nhiêu điểm nguyên là tối đa?

Bài toán 17. Mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; Đại học Sư phạm Hà Nội; Quận Cầu Giấy; Thủ đô Hà Nội; Năm học 2011 – 2012.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = mx - m^2 + 3$ (m là tham số thực).

- Tìm giá trị của m để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm A thuộc (P) , A có hoành độ bằng $\sqrt{3}$.
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 .
 - Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - Song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(1;4)$, $(2;5)$.
 - Tạo với tia Ox một góc nhọn.
- Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 .
- Khi $m=1$, tìm tọa độ các giao điểm M, N của đường thẳng d với parabol (P) . Tính độ dài đường cao OH của tam giác OMN (H là chân đường cao).
- Với giá trị nào của m thì x_1, x_2 tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$?
- Tìm m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = -5$.
 - $x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 \geq 19$.
 - $\frac{1}{2x_1-1} + \frac{1}{2x_2-1} = 0,8$.
 - $x_1^3 + x_2^3 = 7$.
 - $y_1 + y_2 = y_1y_2 - 3$.
 - $(y_1 + y_2)x_1x_2 + 10 = 0$.
 - Hai điểm A và B cùng nằm phía bên phải của trục tung.
- Tồn tại hay không giá trị của m để (P) cắt d tại hai điểm A, B nằm khác phía đối với đường $x=2$?
- Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $K(a;b)$ thỏa mãn đẳng thức $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{2-a}}{3} = \frac{b^2+1}{b^2+b+1}$.
Điểm $K(a;b)$ có nằm trên parabol (P) hay không? Giải thích.
- Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ trên parabol (P) sao cho $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-y} = 4$.

Bài toán 18. Mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; Đại học Sư phạm Hà Nội; Quận Cầu Giấy; Thủ đô Hà Nội; Năm học 2013 – 2014.

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -mx + \frac{1}{2m^2}$ (tham số $m \neq 0$).

- Tìm giá trị của m để
 - Đường thẳng d đi qua điểm $(0;1)$.
 - Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = 2x + \frac{1}{2}$.
 - Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 4m$.
 - Đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 1.

2. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d trong trường hợp $m=1$.
3. Chứng minh rằng với mỗi $m \neq 0$, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt, đồng thời hai điểm này nằm về hai phía của trục tung.
4. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của d và (P) .
 - a) Tìm m để $x_1 + x_2 = 5m^2 - 4$.
 - b) Tìm m sao cho $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -2$.
 - c) Tìm giá trị của m sao cho $S = x_1^2 + x_2^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - d) Xác định m sao cho $y_1 + y_2 + x_1 x_2 = 3m^2 - \frac{3}{2}$.
 - e) Tìm tất cả các giá trị m sao cho $y_1 + y_2 = \sqrt{2 - \frac{1}{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}}$.
 - f) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = y_1^2 + y_2^2$.
5. Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $K(a; b)$ thỏa mãn đẳng thức

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{9-c^2} + c\sqrt{10-c^2} = 10 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Điểm $K(a; b)$ có nằm trên parabol (P) hay không? Giải thích.

6. Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $\sqrt{2x-1} = x^3 - 2y + 2x$.
7. Điểm $N(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Chứng minh rằng (P) và d không thể có giao điểm là điểm nguyên.

Bài toán 19. Mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; Đại học Sư phạm Hà Nội; Quận Cầu Giấy; Thủ đô Hà Nội; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -\frac{2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3}$ (với O là gốc tọa độ, m là tham số).

1. Tìm tất cả các giá trị của m để
 - a) Đường thẳng d đi qua điểm $(3; 2)$.
 - b) Đường thẳng d đi qua điểm A thuộc (P) , A có tung độ bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 - c) Đường thẳng d song song với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - d) Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $(3; 1)$ và $(2; 4)$.
 - e) Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 5.
 - f) Đường thẳng d tạo với tia Oy một góc nhọn.
2. Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m , đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.
3. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (P) và d .
 - a) Tìm m để $x_1 + x_2 > 5x_1 x_2 - 9m$.
 - b) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 6x_1 x_2 + \frac{28}{9}$.
 - c) Tìm m sao cho $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{2}{3}$.
 - d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{3}x_1 x_2$.
 - e) Đặt $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 - x$. Chứng minh đẳng thức $f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^3$.

4. Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $\sqrt{2y-1} + x\sqrt{2x-1} = y$.
5. Điểm $N(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Xét điểm nguyên $N(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức $9x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x + 2y - 35 = 0$.
 - a) Tìm tất cả các điểm nguyên $N(x;y)$.
 - b) Những điểm $N(x;y)$ nào nằm trên parabol (P) ?

Bài toán 20. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 4; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Gia Lai; Năm học 2009 – 2010.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng d chứa tham số $y = 2(m-1)x - m + 3$ (m là tham số thực).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ parabol (P) .
2. Tìm m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $(1; -4)$.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x - \sqrt{13}$.
 - c) Song song với đường thẳng $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{3}$.
 - d) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 5.
 - e) Tạo với tia Ox một góc nhọn.
 - f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 0,5.
 - g) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ độ dài các cạnh là $4:5:\sqrt{41}$.
3. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m .
4. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm A, B của (P) và d . Tìm giá trị của m sao cho
 - a) $x_1 + x_2 = 5x_1x_2 - \frac{1}{2}$.
 - b) $4(x_1 + x_2) = 6x_1x_2 - \sqrt{2}$.
 - c) Biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -m$.
 - e) $\frac{1}{x_1 - 6} + \frac{1}{x_2 - 6} = \frac{1}{6}$.
 - f) A, B nằm về hai phía của trục hoành.
 - g) A và B đối xứng nhau qua điểm $I(2;8)$.
5. Tìm tất cả các giá trị m để d cắt (P) tại hai điểm A, B nằm cùng một phía đối với trục tung. Khi đó hai điểm A, B nằm về bên trái hay bên phải trục tung?
6. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $E(-1;5)$, chắn parabol (P) theo một dây cung (X) sao cho E là trung điểm của (X) .
7. Điểm $N(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Khi đó (P) và (d) có thể cắt nhau tại bao nhiêu điểm nguyên là tối đa?
8. Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ nằm trên parabol (P) khi $y + x + 3 = 4x\sqrt{x+3}$.
9. Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $K(a;b)$ với a, b thỏa mãn đẳng thức

$$2(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a+1)(b+1)(ab+1).$$

Điểm $K(a;b)$ có nằm trên parabol (P) hay không? Giải thích.

Bài toán 21. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 5; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Gia Lai; Năm học 2009 – 2010.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 1$; m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ parabol (P) .
2. Tìm m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $(3;10)$.
 - b) Đi qua điểm A thuộc (P) , A có hoành độ bằng $\sqrt{3}$.
 - c) Song song với đường thẳng $y = (3 - 5m)x - \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 - d) Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}} + 2m$.
 - e) Tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$:
 - a) d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B .
 - b) Diện tích tam giác AOB không nhỏ hơn $|m+1|\sqrt{2}$.
4. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của d và (P) .
 - a) Tìm m sao cho $x_1 + x_2 = 4x_1x_2 - \frac{1}{2}m$.
 - b) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 = 29$.
 - c) Tìm m thỏa mãn $\frac{1}{2x_1-3} + \frac{1}{2x_2-3} = \frac{2}{3}$.
 - d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2)$.
 - e) Tìm m sao cho $y_1 + y_2 = y_1y_2 + x_1x_2 - 29$.
 - f) Tìm m sao cho $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 3m$.
 - g) Chứng minh rằng ít nhất một trong hai điểm có giá trị tuyệt đối hoành độ không vượt quá 2.
5. Tìm tọa độ điểm $D(x;y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn $x + \sqrt{2-4y} = x^2 + \frac{1}{4y}$.
6. Tìm tọa độ điểm $E(x;y)$ thuộc parabol (P) có hoành độ x thỏa mãn

$$x = \min \left\{ \sqrt{\frac{a+b}{ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{ca}} - \sqrt{\frac{2}{a}} - \sqrt{\frac{2}{b}} - \sqrt{\frac{2}{c}} \right\}.$$
7. Điểm $N(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Khi đó (P) và (d) có thể cắt nhau tại bao nhiêu điểm nguyên là tối đa?
8. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $L(1;12)$, chắn parabol (P) theo một dây cung (X) sao cho L là trung điểm của (X) .
9. Tìm tọa độ hai điểm U, V thuộc parabol (P) sao cho U và V nhận điểm $I(0;4)$ làm tâm đối xứng.
10. Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $K(a;b)$ với a, b thỏa mãn đẳng thức

$$a^2 + a - 4b + \sqrt{a^2 + 5b} = 5\sqrt{b}.$$

Điểm $K(a;b)$ có nằm trên parabol (P) hay không? Giải thích.

Bài toán 22. Mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Thái Bình; Thành phố Thái Bình; Tỉnh Thái Bình; Năm học 2011 – 2012.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-1)x + 3(4-m)$ (O là gốc tọa độ, m là tham số).

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm giá trị của m sao cho đường thẳng (d) thỏa mãn
 - Đi qua điểm $(-5;1)$.
 - Đi qua điểm K thuộc (P) , K có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{3-x}{\sqrt{5}} - \sqrt{m}$.
 - Song song với đường thẳng $y = \frac{2mx-1}{\sqrt{3}} - 2$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ không vượt quá 6.
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương.
- Gọi M, N lần lượt là các giao điểm không trùng gốc O của (d) với trục tung và trục hoành.
 - Tìm m sao cho tam giác OMN có diện tích bằng 18.
 - Tìm m để tam giác OMN có tỷ lệ độ dài các cạnh là $4:7:\sqrt{65}$.
 - Tìm m để $\widehat{OMN} > 30^\circ$.
 - Tìm m để tam giác OMN có độ dài chiều cao kẻ từ O đạt giá trị lớn nhất.
- Xét hai điểm $D(1;m), E(n;6)$. Tìm m và n để E thuộc (P) và E thuộc (d) .
- Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = -2$.
- Chứng minh rằng, với mọi giá trị của m , (d) và (P) luôn có ít nhất một điểm chung.
- Tìm điều kiện của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn
 - Hoành độ điểm này gấp đôi hoành độ điểm kia.
 - Hai điểm có hoành độ lớn hơn 2.
 - $2x_1 - 3x_2 = 4$.
 - $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} = \frac{1}{5}$.
 - Biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $Q = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $-3 < x_1 - x_2 \leq 3$.
 - $y_1 + y_2 + 119 = y_1y_2$.
 - $y_1 + y_2 = \sqrt{81-n} + \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{R})$.
 - Biểu thức $R = 2(x_1^2x_2 + x_2^2x_1) - y_1y_2$ đạt giá trị lớn nhất.
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $L(2;5)$, Δ chắn parabol (P) theo một dây cung (Z) sao cho L là trung điểm của (Z) .
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đường thẳng $y = 4x - 1$ tại điểm $J(x;y)$ sao cho biểu thức $S = y^2 - 8x^2 + 7x$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Chứng minh rằng có ba điểm $K(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $\sqrt{x^2 + 4x - 5} + \sqrt{9 - x} = \sqrt{y + 3x + 4}$.
- Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $L(a;b)$ thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{a-8} + \sqrt{10-a} = b^2 - 18b + 83$.
Điểm L có nằm trên parabol (P) hay không? Tại sao?

Bài toán 23. Liên hệ, kết hợp, Mở rộng và phát triển các bài toán

- ❖ Câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2006 – 2007.
- ❖ Câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Ngoại ngữ; Đại học Quốc gia Hà Nội; Quận Cầu Giấy; Thủ đô Hà Nội; Năm học 2000 – 2001.
- ❖ Bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Khối THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; Đại học Sư phạm Hà Nội; Quận Cầu Giấy; Thủ đô Hà Nội; Năm học 2009 – 2010.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: y = x + 2$ và parabol $(P): y = x^2$.

1. Tìm tọa độ điểm trên đường thẳng d có hoành độ bằng $\sqrt{3}$.
2. Tìm tọa độ điểm $H(x; y)$ thuộc đường thẳng d sao cho biểu thức $P = x^2 + 4y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
3. Xác định tọa độ hai giao điểm A và B của (d) với (P) .
4. Cho điểm M thuộc (P) có hoành độ là m (với $-1 \leq m \leq 2$). Chứng minh rằng $S_{MAB} \leq \frac{27}{8}$.
(S_{MAB} là diện tích của tam giác MAB).
5. Tìm phương trình đường thẳng đi qua điểm $I(0; 1)$ và cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho $MN = 2\sqrt{10}$.
6. Xét đường thẳng $\Delta: y = mx + 1$.
 - a) Tìm m để đường thẳng Δ đi qua điểm L nằm trên P , L có hoành độ bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
 - b) Chứng minh đường thẳng Δ luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .
 - c) Gọi $P(x_1; y_1), Q(x_2; y_2)$ là các giao điểm của Δ và (P) .
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1)$.
7. Tìm tất cả các giá trị của m để parabol (P) cắt đường cong $(C): y = 5x^2 - m$ tại điểm $L(x; y)$ sao cho biểu thức $S = y^2 - 4xy + 8x + 20$ đạt giá trị nhỏ nhất.
8. Tìm tất cả các điểm $K(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{y - x + 1}{y + x + 1} = |x + 1| + \sqrt{2015}|x - 1| + |x - 2|.$$
9. Tìm tọa độ hai điểm phân biệt U, V thuộc (P) sao cho hai điểm đó nhận $L\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.
10. Tìm tọa độ hai điểm phân biệt E, F thuộc parabol (P) thỏa mãn điều kiện: Điểm $I(0; 3)$ chia trong đoạn thẳng EF theo tỷ lệ $\frac{IE}{IF} = \frac{1}{3}$.

Bài toán 23. Mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi kiểm tra chất lượng học kỳ II; Môn Toán; Lớp 9; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2010 – 2011.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = kx - k - 2$.

1. Tìm giá trị của k sao cho
 - a) Đường thẳng d đi qua điểm $(3; 1)$.
 - b) Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
 - c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2$.

- d) Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương.
 e) Đường thẳng d cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 0,8.
 f) Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 9,5.
 g) Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ độ dài các cạnh là $1:2:\sqrt{5}$.
2. Tìm tọa độ điểm cố định $C(x;y)$ mà đường thẳng d luôn đi qua với mọi giá trị của m .
 3. Tìm khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .
 4. Tìm k để (P) và (d) cùng đi qua gốc tọa độ.
 5. Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi k thay đổi.
 6. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các giao điểm A, B của (P) và (d) .
 - a) Tìm k để $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{1}{2}$.
 - b) Tìm k sao cho $x_1 - x_2 = 4k$.
 - c) Tìm k sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 9k + 12$.
 - d) Với giá trị nào của k thì $\frac{1}{x_1 - 6} + \frac{1}{x_2 - 6} > \frac{1}{6}$?
 - e) Xác định k để biểu thức $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.
 - f) Tìm k để tung độ điểm này bằng 4 lần tung độ điểm kia.
 - g) Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng AB .
 7. Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng d cắt đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - 1$ tại điểm $K(x;y)$ sao cho biểu thức $S = x^2 + 3y^2 + 4x + 5y$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 8. Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng d cắt đường cong $y = x^2 - 3x + 1$ tại điểm $L(x;y)$ sao cho tỷ số $T = \frac{y+2}{x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 9. Tìm tọa độ điểm $D(x;y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\frac{3x+3}{\sqrt{x}} + \frac{2x^2}{y} = \frac{x+1}{\sqrt{1-x-2y}}$.
 10. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$ cắt parabol (P) theo một dây cung UV sao cho U và V nhận I làm tâm đối xứng.
 11. Tìm tọa độ hai điểm M, N thuộc parabol (P) sao cho điểm $Z\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ chia trong đoạn thẳng MN theo tỷ lệ $ZM : ZN = 1 : 3$.
 12. Xét các điểm P và Q nằm trên parabol (P) , P có hoành độ bằng -1 , Q có hoành độ bằng 2 . Tìm tọa độ điểm R nằm trên cung parabol $\widehat{PQ}$ sao cho tam giác PQR có diện tích bằng 3 .

Bài toán 24. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Khối THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; Đại học Sư phạm Hà Nội; Quận Cầu Giấy; Thủ đô Hà Nội; Năm học 2007 – 2008.

Cho các hàm số $y = x^2, y = -x + 2$.

1. Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$.
2. Tìm tọa độ điểm C trên đồ thị hàm số $y = -x + 2$ biết C có hoành độ bằng 2 .
3. Viết phương trình đường thẳng đi qua $(3;5)$ đồng thời vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2$.
4. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đồ thị hai hàm số đã cho và tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB , biết rằng A có hoành độ dương.

5. Xác định tọa độ của điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$ sao cho tam giác AMB cân tại M .
6. Xét các điểm P và Q nằm trên parabol (P) , P có hoành độ bằng -1 , Q có hoành độ bằng 2 . Tìm tọa độ điểm R nằm trên cung parabol $\widehat{PQ}$ sao cho tam giác PQR có diện tích bằng $\frac{15}{8}$.
7. Đặt $f(x) = y = x^2$. Cho a là số thực thỏa mãn $a^2 - 4a + 1 = 0$, tính $f\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right)$.
8. Tìm tọa độ hai điểm E, F thuộc parabol $y = x^2$ sao cho E và F đối xứng nhau qua điểm $I(2;5)$.
9. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $K(0;8)$ và cắt parabol (P) theo dây cung CD sao cho điểm K chia trong đoạn thẳng CD theo tỷ số $1:2$.
10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét điểm $L(a;b)$ thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} a > 0, b > 0, c > 0 \\ abc = 1 \\ (a+b)(b+c)(c+a) \leq 2(1+a+b+c) \end{cases}$$

Hỏi điểm $L(a;b)$ có thuộc parabol (P) hay không? Tại sao?

11. Xét các điểm U, V nằm trên parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4 . Xét điểm T thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{UV}$ (tức là $-2 \leq x_T \leq 4$). Gọi U', V', T' tương ứng là hình chiếu vuông góc của U, V, T trên trục hoành.
 - a) Tìm tọa độ các điểm U', V', T' .
 - b) Tính diện tích các tứ giác $UVV'U', UTT'U', TVV'T'$.
 - c) Tìm tọa độ điểm T sao cho tam giác UVT có diện tích lớn nhất.

Bài toán 25. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Thái Bình; Thành phố Thái Bình; Tỉnh Thái Bình; Năm học 2016 – 2017.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x - m + 3$. (m là tham số, $m \in \mathbb{R}$).

1. Tìm giá trị của m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $(8; -10)$.
 - b) Không đi qua điểm $(-3; 5)$.
 - c) Song song với đường thẳng $y = 2x + 3m - \sqrt{2}$.
 - d) Vuông góc với đường thẳng $2y = -mx + \sqrt{5}$.
 - e) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.
 - f) Hợp thành với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.
 - g) Tiếp xúc với đường tròn tâm O , bán kính $R = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
2. Tìm m để parabol (P) và đường thẳng d cùng đi qua điểm có hoành độ là 1.
3. Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt A và B sao cho
 - a) Hoành độ điểm này gấp đôi hoành độ điểm kia.
 - b) Tung độ điểm này gấp 9 lần tung độ điểm kia.
 - c) Tổng bình phương hai hoành độ bằng 5.
 - d) Tổng nghịch đảo hai hoành độ bằng -1 .
 - e) Tổng bình phương hai hoành độ bằng 10.
 - f) Tổng bình phương hai tung độ bằng 56.
 - g) Tổng lập phương hai hoành độ bằng 20.

4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $(2;3)$ và tiếp xúc với parabol (P) .
5. Xét các điểm U, V nằm trên parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4 . Tìm tọa độ điểm T thuộc cung parabol $\widehat{UV}$ sao cho tam giác UVT có diện tích bằng 27 .
6. Tìm tọa độ điểm $K(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho $\sqrt{x(3x-1)} - \sqrt{y-x} = 2\sqrt{y}$.
7. Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $L(m;n)$ với m và n nguyên dương sao cho
$$n^2 + 3n + 4 = 2 \cdot 7^m.$$
Có bao nhiêu điểm L nằm trên parabol (P) thỏa mãn hệ thức trên.
8. Tìm tọa độ hai điểm C, D nằm trên (P) sao cho C và D đối xứng với nhau qua điểm $M(-1;10)$.
9. Tìm tọa độ điểm E trên parabol (P) và điểm F trên đường thẳng $\Delta: y = x - 2$ sao cho độ dài đoạn thẳng EF đạt giá trị nhỏ nhất.
10. Xét đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$. Ký hiệu (C) là phần đồ thị hàm số nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt (C) tại điểm $J(x;y)$ sao cho biểu thức $S = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x^4 - 3x^2 + 3x}{x^2 + y^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 26. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình; Năm học 2016 – 2017.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x + m^2 + 2m$. (m là tham số, $m \in \mathbb{R}$).

1. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $I(1;3)$.
 - b) Không đi qua gốc tọa độ.
 - c) Cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn 3.
 - d) Song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x + 3$.
 - e) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + 5n$.
 - f) Đồng quy với hai đường thẳng $d_1: y = x + 9; d_2: y = 3x + 7$.
2. Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt A, B .
3. Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm A, B .
 - a) Tìm m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 > 2016$.
 - b) Tìm m để $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 9m - 2$.
 - c) Tìm m thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -0,25$.
 - d) Tìm m để $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3} + 1 = 0$.
 - e) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2$.
4. Viết phương trình tiếp tuyến của (P) biết tiếp tuyến đi qua điểm $E(3;5)$.
5. Xét điểm G nằm trên tia Oy (G không trùng gốc tọa độ). Tồn tại bao nhiêu tiếp tuyến của parabol (P) đi qua điểm G ?
6. Tìm tọa độ hai điểm C, D nằm trên (P) sao cho C và D nhận điểm $(1;5)$ làm tâm đối xứng.
7. Tìm tọa độ điểm E trên parabol (P) và điểm F trên đường thẳng $y = x - 3$ sao cho độ dài đoạn thẳng EF đạt giá trị nhỏ nhất.
8. Xét các điểm U, V nằm trên parabol (P) có hoành độ lần lượt là -4 và 6 . Tìm tọa độ điểm T thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{UV}$ sao cho tam giác UVT có diện tích bằng 32 .

Bài toán 27. Mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thủ đô Hà Nội; Năm học 2010 – 2011.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = mx - 1$.

- Vẽ parabol (P).
- Tìm giá trị của m để
 - Đường thẳng d đi qua điểm $(4;1)$.
 - Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
 - Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = (5m - 2)x + 5$.
 - Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.
 - Đường thẳng d đồng quy với hai đường thẳng $y = 3x - 2$; $y = 5x - 1$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.
- Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P).
 - Tìm m để $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 x_2 = 3$.
 - Tìm m sao cho $x_1 + x_2 - 10x_1 x_2 = 12$.
 - Tìm m thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 x_2 = 13$.
 - Tìm m để $\frac{2}{x_1 - 1} + \frac{2}{x_2 - 1} = 5$.
 - Với giá trị nào của m thì $x_1^3 - x_2^3 = 2$.
 - Với giá trị nào của m thì $x_1^2 = 16x_2^2$.
 - Chứng minh ít nhất một trong hai giao điểm có giá trị tuyệt đối hoành độ không vượt quá 1.
- Gọi y_1, y_2 là tung độ các giao điểm của đường thẳng (d) và (P).
 - Tìm m sao cho $y_1 + y_2 = 6x_1 x_2 - 9$.
 - Tìm giá trị của m sao cho $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = -11$.
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (y_1 + 1)(y_2 + 9)$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $(4;6)$ và tiếp xúc với (P).
- Tìm tọa độ hai điểm C, D nằm trên parabol (P) sao cho C và D nhận điểm I $(2;20)$ là tâm đối xứng.
- Tìm tọa độ hai điểm E, F nằm trên parabol (P) sao cho điểm K $(0;2)$ chia trong đoạn thẳng EF theo tỷ số 1:2.
- Xét các điểm P và Q nằm trên parabol (P), P có hoành độ bằng -2 , Q có hoành độ bằng 4.
 - Tìm điểm R nằm trên cung parabol nhỏ $\widehat{PQ}$ sao cho tam giác PQR có diện tích bằng 15.
 - Tìm điểm R nằm trên cung parabol nhỏ $\widehat{PQ}$ sao cho tam giác PQR có diện tích lớn nhất.
- Điểm $N(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và d cắt nhau tại các điểm nguyên. Tìm tất cả các giao điểm nguyên của (P) và d .
- Xét điểm G nằm trên tia Oy, G không trùng gốc tọa độ. Chứng minh rằng không tồn tại tiếp tuyến nào của (P) đi qua G.
- Tìm tọa độ điểm E trên parabol (P) và điểm F trên đường thẳng $y = x - 4$ sao cho độ dài đoạn thẳng EF đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tất cả các điểm L $(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $4y + 12x\sqrt{1+x} = 27(1+x)$.

Bài toán 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng $d: y = bx + c$.

1. Tìm điều kiện của b và c sao cho
 - a) Đường thẳng d đi qua hai điểm $M(2;3)$, $N(4;1)$.
 - b) Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = b^2x - 8c + 1$.
 - c) Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -8b^2x + 10c$.
 - d) Đường thẳng d cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại điểm có hoành độ bằng 3.
 - e) Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 5.
2. Tìm giá trị của a biết parabol (P) đi qua điểm $A(-2;2)$.
3. Với giá trị a vừa tìm được, hãy tìm b và c sao cho
 - a) Đường thẳng d đi qua điểm $B(0;-2)$ và tiếp xúc với (P).
 - b) Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 3 và 4.
 - c) Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.
4. Trong trường hợp $a = \frac{1}{2}; b^2 - c = 3$. Hãy tìm b để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho
 - a) A và B có tổng nghịch đảo các hoành độ bằng -2 .
 - b) A và B có tổng các tung độ bằng 30.
 - c) A và B cùng thuộc góc phần tư thứ hai.

Bài toán 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + m^2$ (m là tham số thực).

1. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $M(2;5)$.
 - b) Đi qua điểm $N(m;3m^2)$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = (4 - \sqrt{m})x - 8$.
 - d) Cắt đường phân giác góc phần tư thứ hai tại điểm có tung độ bằng 4.
2. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d) trong trường hợp $m = 2\sqrt{2}$.
3. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung với mọi giá trị m khác 0.
4. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $x_1 + x_2 = 6x_1x_2 + 10$.
 - b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2m$.
 - c) $(x_1 + 5)(x_2 + 5) > \sqrt{y_1y_2}$.
 - d) $y_1 + y_2 = y_1y_2 + 4$.
 - e) $(y_1 - 2)(y_2 - 2) = 3m^4 - 4$.
5. Tồn tại hay không tiếp tuyến của (P) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $K(3;2)$.
6. Xác định tọa độ hai điểm C, D nằm trên parabol (P) sao cho C và D nhận điểm $I\left(\frac{5}{2}; \frac{17}{2}\right)$ là tâm đối xứng.
7. Tìm tọa độ hai điểm E, F nằm trên parabol (P) sao cho điểm $T(3;13)$ chia trong đoạn thẳng EF theo tỷ số 2:3.
8. Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $|x^3 + 7y - 11x - 6| + |x^3 - 12y - 5x + 3| = 18y - 2x - 13$.

Bài toán 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho ba điểm $A(-\sqrt{3}; 6), B(1; 0), C(2; 8)$.

Điểm A nằm trên parabol (P) có phương trình $y = ax^2$; a là tham số thực.

- Xác định a và vẽ (P) với a tìm được.
- Giả sử d là đường thẳng đi qua hai điểm B và C.
 - Lập phương trình đường thẳng d.
 - Tính diện tích của tam giác OBC.
 - Xét vị trí tương đối giữa thẳng d và parabol (P).
 - Lập phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ và song song với d.
- Tồn tại hay không tiếp tuyến của (P) mà tiếp tuyến đó đi qua C?
- Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng $y = 2x - m$ tại hai điểm $H(x_1; y_1), K(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện
 - Hai điểm đều có hoành độ lớn hơn 1.
 - Hai điểm đều có hoành độ nhỏ hơn 2.
 - $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4}{m} - x_1 x_2$.
 - $\frac{x_1}{x_2 - 3} + \frac{x_2}{x_1 - 3} = 6$.
 - $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} > 1$.
 - $|x_1 - x_2| = 5$.
 - $x_1^2 + x_2^2 \leq 6x_1 x_2 + m^2 - 1$.
 - $(y_1 - 1)(y_2 - 1) = 1$.
 - Biểu thức $S = (y_1 + 2)(y_2 + 2) + 3m + 7$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Độ dài đoạn thẳng HK bằng $2\sqrt{5}$.
- Giả sử M và N là các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng $\Delta: y = \frac{7}{2}x - 3$. Tính diện tích của tam giác OMN.
- Thiết lập đường thẳng đi qua điểm T(5;41) sao cho đường thẳng này cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt I, J trong đó T là trung điểm đoạn thẳng IJ.

Bài toán 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: y = m - 2x$ và parabol (P): $y = x^2$.

- Vẽ parabol (P).
- Tìm giá trị của m để đường thẳng d song song với đường thẳng $y = 3m^2 - 2x$.
- Tìm giá trị của m để đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4,5.
- Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt đường thẳng $y = -2x + 9$ tại điểm có tung độ bằng 11.
- Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d đồng quy với hai đường thẳng sau

$$d_1: 3x - 2y = 6; \quad d_2: 6x - 7y = 1.$$
- Trong trường hợp $m = 3$:
 - Xác định tọa độ các giao điểm A, B của (P) và d. Tính độ dài đoạn thẳng AB.
 - Lập phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.
- Tìm m để (P) và d tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Tìm m để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt $H(x_1; y_1), K(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện
 - $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} = 7$.

- b) $\frac{x_1}{x_2 - 3} + \frac{x_2}{x_1 - 3} = 3$.
- c) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = 9$.
- d) $x_1^2 + x_2^2 = 16x_1x_2 + 9m$.
- e) $x_1 < x_2 < -\frac{1}{3}$.
- f) $y_1 + y_2 = 6y_1y_2 - 3$.
- g) $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 13$.
- h) $(y_1 + 5)(y_2 + 5) = 5y_1y_2 - 7$.
- i) $|y_1 - y_2| = 2\sqrt{2}$.

9. Giả sử M và N là hai điểm nằm trên (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 3 . Tính diện tích tam giác OMN .
10. Xác định tọa độ hai điểm H, K trên parabol (P) sao cho H và K đối xứng nhau qua điểm $E(2;5)$.
11. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $G(3;13)$ cắt parabol (P) tại hai điểm U, V sao cho G là trung điểm của đoạn thẳng UV . Tính diện tích tam giác VUO .
12. Xác định tất cả các giá trị m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt P và Q sao cho độ dài đoạn thẳng PQ nhỏ nhất.

Bài toán 32. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và các đường thẳng $d: y = 2x + 3$; $\Delta: y = 2mx - 3m + 2$; m là tham số thực.

- Giả sử M và N là hai điểm nằm trên d có hoành độ lần lượt là 2 và 4 . Tính độ dài đoạn thẳng MN .
- Tính diện tích của tam giác tạo bởi đường thẳng d với hai trục tọa độ.
- Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .
- Với giá trị nào của m thì đường thẳng d :
 - Vuông góc với đường thẳng $l: y = mx - 3m + 2$.
 - Song song với đường thẳng $y = (m^2 - 2)x + 9$.
 - Cắt đường thẳng $y = 4x - m$ tại điểm có tung độ bằng 2 .
 - Cắt đường thẳng Δ tại điểm có hoành độ bằng 4 .
 - Đồng quy với hai đường thẳng $\Delta, 5x - 3y + 1 = 0$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $S(1;4)$ và song song với d .
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $G(2;5)$ và vuông góc với d .
- Chứng minh rằng d và (P) có hai điểm chung phân biệt A và B . Tìm tọa độ hai giao điểm A, B và diện tích tam giác OAB .
- Tìm giá trị của m để parabol (P) cắt đường thẳng Δ tại hai điểm $H(x_1; y_1), K(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 - 4$.
 - Hai giao điểm đều có hoành độ dương.
 - Hai giao điểm nằm khác phía đối với trục tung.
 - Hai giao điểm đều có hoành độ lớn hơn 1 .
 - $x_1 < 5 < x_2$.
 - H và K nằm khác phía đối với đường thẳng $x = 4$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{5}$.

$$h) \frac{1}{2x_1 - 3} + \frac{1}{2x_2 - 3} = -2m^2.$$

$$i) (3x_1 + 5)(3x_2 + 5) = 8x_1^2 x_2^2 - 223.$$

$$j) (y_1 + 3)(y_2 + 3) = 10.$$

$$k) \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{74}{169}.$$

$$l) y_1 + y_2 + 3y_1 y_2 = 4x_1 x_2.$$

9. Gọi J là điểm nằm trên d , J có hoành độ bằng 5. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm J và tiếp xúc với parabol (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.

10. Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $x + 4\sqrt{7-x} = 4\sqrt{x-1} + \sqrt{(7-x)(x-1)} + \frac{y}{x^2}$.

11. Giả sử M và N là hai điểm nằm trên (P) có hoành độ lần lượt là 1 và 5. Tính diện tích của tam giác OMN .

12. Giả sử U và V là hai điểm nằm trên (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 3 .

a) Tìm tọa độ điểm R thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{UV}$ sao cho tam giác UVR có diện tích bằng 2.

b) Tìm tọa độ điểm R thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{UV}$ sao cho tam giác UVR có diện tích lớn nhất.

c) Tìm tọa độ điểm R thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{UV}$ sao cho khoảng cách từ R đến đường thẳng UV đạt giá trị lớn nhất.

14. Điểm $E(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Giả sử tồn tại các giá trị nguyên m sao cho (P) và Δ cắt nhau tại các điểm nguyên. Tìm tất cả các giao điểm nguyên của (P) và Δ .

Bài toán 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho đường thẳng $d: y = 2x - m + 1$ và parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ (m là tham số thực).

1. Tìm giá trị của tham số m để:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $Z(-1; 3)$.

b) Đường thẳng d cắt đường phân giác góc phần tư thứ II tại điểm có tung độ bằng 9.

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: y = 2x - 5m^2 + 1$.

d) Đường thẳng d cắt đoạn thẳng UV với $U(4; 0)$, $V(12; 0)$.

e) Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $0,25m$.

f) Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = \frac{3}{\sqrt{5}}$ tại hai điểm phân biệt.

2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $(5; 2)$ và tiếp xúc với parabol (P) .

3. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) trong trường hợp $m = 1$.

4. Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ sao cho

$$a) x_1(x_2 - 6) + x_2(x_1 - 6) = 19.$$

$$b) x_1(4x_2 - x_1) + x_2(5x_2 - x_1) = 19.$$

$$c) |x_1 - x_2| = \sqrt{7}.$$

$$d) \frac{1}{x_1 - 8} + \frac{1}{x_2 - 8} = 8.$$

$$e) x_1^2 - x_2^2 = 12m - 4.$$

$$f) x_1 x_2 (y_1 + y_2) + 48 = 0.$$

- g) $(y_1 + 5)(y_2 + 5) = 9x_1x_2 + 8y_1y_2$.
- h) $6(x_1^2 + x_2^2) = 7x_1x_2 - y_1y_2 + 7$.
- i) $y_1^2 + y_2^2 = 8$.
- j) A và B đối xứng với nhau qua điểm $C(2;2,5)$.
- k) Độ dài đoạn thẳng AB bằng $2\sqrt{5}$.
5. Giả sử đường thẳng $y = \frac{3}{2}x - 1$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt X, Y . Tính diện tích của tam giác OXY .
6. Giả sử đường thẳng $y = x + \frac{3}{2}$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N . Tìm tọa độ điểm Q trên cung parabol nhỏ $\widehat{MN}$ sao cho diện tích tam giác MQN đạt giá trị lớn nhất.
7. Tìm tọa độ điểm E trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng $x + y + 2 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất.
8. Tìm tọa độ điểm H trên parabol (P) và điểm K trên đường thẳng $x + y + 5 = 0$ sao cho độ dài đoạn thẳng HK đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2)$, d có hệ số góc k khác 0 .

- Vẽ parabol (P) .
- Lập phương trình đường thẳng d theo tham số k .
- Tìm giá trị của tham số k sao cho
 - Đường thẳng d đi qua điểm $S(2;9)$.
 - Đường thẳng d cắt đường thẳng $y = 2x$ tại điểm có hoành độ bằng 2 .
 - Đường thẳng d hợp với tia Ox một góc nhọn.
 - Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ tại hai điểm P và Q sao cho tam giác OPQ vuông cân.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị k khác 0 , đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B .
- Gọi x_1, x_2 theo thứ tự là hoành độ của A và B .
 - Chứng tỏ rằng: $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 2$.
 - Tìm k sao cho $3x_1 - 2x_2 = 1$.
 - Tìm k để các hoành độ đều lớn hơn 2 .
 - Tìm k để A và B đều nằm phía bên phải trục tung.
 - Tìm k sao cho $S = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Tìm k sao cho $\frac{1}{x_1 - 5} + \frac{1}{x_2 - 5} = \frac{-7}{11x_1x_2}$.
 - Tìm k để $x_1^2 + x_2^2 > 7x_1x_2 + 9k - 2$.
 - Tìm k để $x_1^2 + x_2^2 - 10x_1x_2 = (3x_1 + 2)(3x_2 + 2)$.
 - Tìm k để độ dài đoạn thẳng AB bằng $2\sqrt{5}$.
- Gọi y_1, y_2 theo thứ tự là tung độ của A và B . Tìm k để
 - $y_1^2 + y_2^2 = 16$.
 - $y_1 + y_2 + 28 = 10y_1y_2$.
 - $(y_1 - 6)(y_2 - 6) + 5 > 0$.
 - $S = y_1 + y_2 + y_1y_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

7. Giả sử M và N là các điểm nằm trên parabol có hoành độ lần lượt là -1 và 5 .
 - a) Tính diện tích tam giác OMN .
 - b) Viết phương trình tiếp tuyến của (P) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng MN .
 - c) Tìm tọa độ điểm Q trên cung parabol nhỏ $\widehat{MN}$ sao cho độ dài đường cao hạ từ Q của tam giác MQN đạt giá trị lớn nhất.
8. Tìm tọa độ điểm Z trên (P) để độ dài đoạn thẳng ZT nhỏ nhất, trong đó $T(1;0)$.
9. Giả sử H và K là các điểm nằm trên parabol có hoành độ lần lượt là 1 và 5 . Tính diện tích của tam giác OHK .
10. Tìm điểm J thuộc (P) sao cho tiếp tuyến của (P) tại J song song với đường thẳng $x + y + 6 = 0$.
11. Tìm tất cả các điểm $L(x;y)$ trên (P) thỏa mãn đẳng thức $4x + y + 2 = 7\sqrt{3x - 2}$.

Bài toán 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx - m^2 + 5$; m là tham số thực.

1. Tìm giá trị của tham số m để
 - a) Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = m^3x - 10$.
 - b) Đường thẳng d vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - c) Đường thẳng d đi qua điểm M thuộc (P) có hoành độ bằng 2 .
 - d) Đường thẳng d có hướng đi lên và tạo với trục Ox một góc $\alpha = 45^\circ$.
 - e) Parabol (P) và đường thẳng d tiếp xúc nhau.
2. Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 6$.
 - b) $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 11$.
 - c) $6(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 = 13$.
 - d) A và B nằm phía bên phải đường thẳng $x = 2$.
 - e) $2x_1 - 3x_2 = 4$.
 - f) $7x_1 - 2x_2 = 3$.
 - g) $x_1 > x_2 > 5$.
 - h) $|x_1 - x_2| = \sqrt{10}$.
 - i) $x_1^2 + mx_2 + m^2 - 5 = 4m^3$.
 - j) $y_1 + y_2 = 10$.
 - k) $y_1 - y_2 = 6m$.
 - l) $y_1 + y_2 + 19x_1x_2 = y_1y_2 + 61$.
3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt và một trong hai điểm đó có tọa độ là số nguyên.
4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $K(0; -4)$ và tiếp xúc với parabol (P) .
5. Xét điểm $I(0;1)$, tìm tọa độ điểm L trên parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng LI ngắn nhất.
6. Giả sử điểm E di động trên parabol (P) . Tìm tập hợp (quỹ tích) trung điểm F của đoạn thẳng OE .
7. Giả sử M và N là các điểm nằm trên parabol có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Tìm tọa độ điểm Q trên cung parabol nhỏ $\widehat{MN}$ sao cho tam giác MQN có diện tích lớn nhất.
8. Tồn tại hay không ba điểm X, Y, Z trên parabol (P) thỏa mãn (XYZ) là tam giác đều?
9. Trên parabol (P) lấy ba điểm có hoành độ lần lượt a, b, c thỏa mãn $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$.
 Tính giá trị của biểu thức $S = (a+b+1)(b+c+1)(c+a+1)$.

Bài toán 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số: $\Delta: y = (2k+1)x - k^2 + 1$.

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm các điểm A và B thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là 1 và 2.
- Tìm giá trị của tham số k để:
 - Đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ.
 - Đường thẳng Δ không đi qua điểm $(-1; 6)$.
 - Đường thẳng Δ song song với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - Đường thẳng Δ cắt đường thẳng $y = 5x - 3$ tại điểm hoành độ bằng 1.
 - Đường thẳng Δ cắt đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm.
 - Đường thẳng Δ có hướng đi lên và hợp với trục hoành một góc $\gamma = 60^\circ$.
- Xác định k để đường thẳng Δ và parabol (P) tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Xác định k để parabol (P) cắt đường thẳng Δ tại hai điểm có hoành độ $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 - x_2 = 3$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 10$.
 - $3x_1 - x_2 = 24$.
 - Hai giao điểm nằm về hai phía của trục tung.
 - $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} = 5$.
 - $|x_1 - x_2| = \sqrt{13}$.
 - Hai giao điểm nằm khác phía đối với đường thẳng $x = 2$.
 - $(x_1 - x_2)^2 = 13(x_1 + x_2) + y_1 + y_2$.
 - $x_1 < 0 < x_2; x_2 > |x_1|$.
 - $y_1 + y_2 = 10y_1y_2 + 9$.
 - $y_1 + y_2 = 5y_1y_2 + 9x_1x_2 + 9$.
 - $y_1^2 + y_2^2 = 81$.
 - $x_1^2 + (2k+1)x_2 + k^2 = y_1 + y_2 - 1$.
- Parabol (P) cắt đường thẳng $y = 3x - 2$ tại hai điểm phân biệt I, J . Tính diện tích tam giác OIJ .
- Tìm tọa độ hai điểm C, D trên parabol (P) sao cho C, D nhận điểm $Q\left(\frac{11}{2}; \frac{73}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $L\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ cắt parabol tại hai điểm E, F sao cho L là trung điểm của đoạn thẳng EF .
- Tồn tại hay không ba điểm X, Y, Z, T trên parabol (P) thỏa mãn $(XYZT)$ là hình vuông?
- Giả sử M và N là các điểm nằm trên parabol có hoành độ lần lượt là -1 và 7 . Tìm tọa độ điểm Q trên cung parabol nhỏ $\widehat{MN}$ sao cho tam giác MQN có diện tích lớn nhất.
- Tìm tọa độ điểm H trên parabol (P) và điểm K trên đường thẳng $x + 2y + 6 = 0$ sao cho độ dài đoạn thẳng HK đạt giá trị nhỏ nhất.
- Viết phương trình đường thẳng qua điểm $S(1; 3)$ cắt parabol (P) theo một dây cung trong đó điểm S chia trong độ dài dây cung theo tỷ số $1:2$.

Bài toán 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng

chứa tham số: $d: y = mx - \frac{3}{2}m - 1$.

- Vẽ đồ thị (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ trong trường hợp $m = 2$.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng $y = 3x - 2$.
- Tìm giá trị của tham số m sao cho
 - Đường thẳng d đi qua điểm T (6;2m).
 - Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.
 - Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6,25.
 - Đường thẳng d tạo với trục hoành một góc φ thỏa mãn $\cot \varphi = 1$.
- Chứng minh rằng có hai đường thẳng thuộc họ đường thẳng d tiếp xúc với parabol (P); đồng thời hai đường thẳng này vuông góc với nhau.
- Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm có hoành độ $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 + x_2 = 8x_1x_2 - 10$.
 - $5(x_1 + x_2)^2 = 6x_1x_2 - 10$.
 - $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3} = 3$.
 - $3x_1 - x_2 = 4$.
 - A, B nằm về hai phía của trục tung.
 - $|x_1 - x_2| = \sqrt{17}$.
 - $x_1 > x_2 > 2$.
 - A, B nằm về hai phía của đường thẳng $x = 3$.
 - $y_1 + y_2 = 19$.
 - $y_1 + y_2 = 4y_1y_2 + x_1x_2$.
- Xét điểm C (0;1) và đường thẳng $\Delta: y = -1$. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc parabol. Chứng minh rằng MC bằng khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ .
- Xét hai điểm E, F thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4.
 - Tính diện tích của tam giác OEF.
 - Tìm tọa độ điểm K thuộc cung nhỏ parabol $\widehat{EF}$ sao cho tam giác EKF có diện tích lớn nhất.
- Tìm tọa độ điểm H (x;y) trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = x^4 - 4y - 2x + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
- Tìm tọa độ điểm X thuộc parabol (P) và điểm Y thuộc đường thẳng $x + y + 7 = 0$ sao cho đoạn thẳng XY ngắn nhất.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường cong (C): $y = x^4 - 3x^2$.
- Viết phương trình đường thẳng l đi qua điểm Q (2;5) và cắt parabol (P) theo một dây cung nhận điểm Q là trung điểm.
- Giả sử tồn tại hai đường thẳng đi qua điểm I (0;1) cắt parabol (P) theo thứ tự tại $A_1, B_1 - A_2, B_2$.
Chứng minh rằng $\frac{1}{IA_1} + \frac{1}{IB_1} = \frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} = 1$ và $\frac{1}{\sqrt{IA_1 \cdot IA_2}} + \frac{1}{\sqrt{IB_1 \cdot IB_2}} \leq 1$.
- Xét hai điểm U (0;1) và V (2b;-1), với b là tham số thực. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng UV tiếp xúc với parabol (P).

Bài toán 38. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 4; Đề thi tuyển sinh lớp 10; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2016 – 2017.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $\Delta: y = 2mx - m + 2$; m là tham số thực.

- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng Δ :
 - Đi qua điểm (4;2).
 - Cắt tia Ox.
 - Cắt đường thẳng $y = 5x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1.
 - Cùng với hai đường thẳng $2x - 3y + 1 = 0$; $4x - 5y + 1 = 0$ đồng quy.
 - Có hướng đi lên và tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.
 - Cắt trục hoành tại điểm M; với M thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 1.
- Cho $m = 1$. Tìm tọa độ giao điểm M, N của (P) và Δ . Tính diện tích tam giác MON.
- Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm có hoành độ $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 + x_2 = 10x_1x_2 - 3$.
 - $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 - 9$.
 - $(x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq x_1 + x_2$.
 - $(x_1 + 4)(x_2 + 4) = 19x_1^2 + 19x_2^2$.
 - $(x_1 - 4)(x_2 - 4) = (3x_1 + 1)(3x_2 + 1)$.
 - $\frac{1}{2x_1 - 5} + \frac{1}{2x_2 - 5} = 3$.
 - Biểu thức $S = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $(1 + x_1)(2 - x_2) + (1 + x_2)(2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2$.
 - $y_1 + y_2 = 5y_1y_2 + 8$.
 - Biểu thức $T = x_1 + x_2 + y_1y_2 + 5(y_1 + y_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm U thuộc parabol (P) sao cho tiếp tuyến của parabol (P) tại U song song với đường thẳng $y = 4x + 5$.
- Tìm tọa độ điểm L (x;y) thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $S = x^4 + 2y - 8x + 10$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm T (x;y) thuộc parabol (P) sao cho biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có): $\frac{2x + y + 2}{y + 1}$.
- Xét hai điểm E, F thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4. Tìm tọa độ điểm G thuộc cung parabol nhỏ (EF) sao cho khoảng cách từ điểm G đến đường thẳng EF đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
- Chứng minh đường thẳng $y = kx + 1$ luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt H, K, đồng thời có đúng một điểm M thuộc đường thẳng $y = -1$ thỏa mãn đồng thời: MK tiếp xúc với (P) và MK vuông góc với MH.
- Giả sử góc vuông $\widehat{uIv} = 90^\circ$ di động sao cho hai cạnh của nó luôn tiếp xúc với parabol (P). Chứng minh rằng đỉnh I của góc luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
- Xét đường thẳng d: $y = x + 8$, xác định độ dài cạnh hình vuông ABCD biết hai đỉnh A và B thuộc đường thẳng d và hai đỉnh C, D thuộc parabol (P).
- Xét hai điểm M(-1;1) và N(1;1). Giả sử hai dây cung AB và CD đều khác MN, đi qua trung điểm I của MN, AC cắt MN tại P, BD cắt MN tại Q tương ứng. Chứng minh $IP = IQ$.

Bài toán 39. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 4; Đề thi tuyển sinh lớp 10; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2015 – 2016.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số

$$\Delta: y = mx - m + 2.$$

1. Vẽ đồ thị (P) trên hệ trục tọa độ.
2. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và Δ trong trường hợp $m = 2$.
3. Tìm giá trị của m để đường thẳng Δ thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm T thuộc trục tung, T có tung độ bằng 4.
 - b) Đi qua điểm Z thuộc parabol (P) , Z có hoành độ bằng 3.
 - c) Cắt đường thẳng $y = 4x - 2$ tại điểm có hoành độ bằng 4.
 - d) Song song với đường thẳng $y = (2m - 1)x - 4m^2 + 2$.
 - e) Vuông góc với đường thẳng $y = -m^2x + 6m - 1$.
 - f) Tạo với tia Ox một góc $\alpha = 60^\circ$.
 - g) Tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - h) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.
4. Chứng minh rằng (P) và Δ luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$. Tìm giá trị của m để
 - a) $x_A + x_B = 4x_A x_B - 8$.
 - b) $\frac{1}{x_A} + \frac{1}{x_B} = m$.
 - c) $\frac{1}{x_A - 4} + \frac{1}{x_B - 4} = -\frac{7}{13}$.
 - d) $\frac{x_A}{x_A - 7} + \frac{x_B}{x_B - 7} = -\frac{1}{39}$.
 - e) $|x_A - x_B|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - f) $\frac{x_A^2 - 2}{x_A - 1} \cdot \frac{x_B^2 - 2}{x_B - 1} = 4$.
 - g) $y_A + y_B > 4$.
 - h) A và B đều có hoành độ lớn hơn 1.
 - i) $y_A + y_B + 1 = 2(x_A + x_B)$.
 - j) $x_A + x_B = x_A x_B + y_A + y_B - 8$.
 - k) $S = y_A + y_B + 10x_A x_B$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - l) Độ dài đoạn thẳng AB ngắn nhất.
5. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$, các tiếp tuyến kẻ từ M đến parabol (P) vuông góc với nhau.
6. Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $2y - 7x + 6 = \sqrt{4x - 3}$.
7. Tìm tọa độ điểm $J(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $Q = y^2 - 12\sqrt{3}x + 11$ nhận giá trị nhỏ nhất.
8. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng $x + y + 10 = 0$ và điểm K thuộc parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng HK ngắn nhất.

Bài toán 40. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT chuyên Thái Bình; Thị xã Thái Bình; Tỉnh Thái Bình; Năm học 2001 – 2002.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = (m-10)x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = mx - 10$; với m là tham số thực khác 10.

1. Tìm điều kiện của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Song song với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = -3x + 10$.
 - c) Cắt đường thẳng $y = -10x + m$ tại điểm có hoành độ bằng -10 .
 - d) Tạo với hai trục tọa độ tam giác có tỷ lệ hai cạnh góc vuông bằng 4.
 - e) Không cắt đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = 5\sqrt{2}$.
 - f) Đồng quy với hai đường thẳng $y = 3x - 4; y = 6x - 1$.
2. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d với $m = \sqrt{3} - 1$.
3. Chứng minh parabol (P) và đường thẳng d luôn có điểm chung với mọi giá trị của m .
4. Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại một điểm có hoành độ bằng -5 .
5. Chứng minh rằng (P) và Δ luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Tìm giá trị của m để
 - a) $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 3$.
 - b) $x_1^2 + x_2^2 = 14$.
 - c) $x_2 + 4x_1 = 9$.
 - d) $10x_1 - x_2 > 1$.
 - e) $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} = 3$.
 - f) $\frac{1}{x_1} - \frac{2}{x_2} = 3$.
 - g) Hai hoành độ đều lớn hơn 0,4.
 - h) $x_1(1 + 3x_2) + x_1^2 = 8$.
 - i) Hai điểm A, B nằm về hai phía của đường thẳng $x = 3$.
 - j) $\frac{x_2 + 2}{x_1 + 1} - \frac{x_1 + 3}{x_2 - 4} = 1$.
 - k) $x_1^3 - x_2^3 = -7$.
6. Trong trường hợp $m = 12$.
 - a) Tìm tọa độ điểm M (x;y) thuộc parabol (P) thỏa mãn điều kiện hoành độ gấp 4 lần tung độ.
 - b) Tìm tọa độ điểm N (x;y) thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $S = \frac{1}{4}y^2 - 20\sqrt{5}x + 25$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - c) Xét hai điểm E, F thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4 . Tìm tọa độ điểm G thuộc cung parabol nhỏ (EF) sao cho khoảng cách từ điểm G đến đường thẳng EF đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
 - d) Tìm tọa độ điểm U thuộc parabol (P) sao cho tiếp tuyến của parabol (P) tại U song song với đường thẳng $y = 4x + 5$.
 - e) Tìm tọa độ điểm T (x;y) thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $6x^3 - 6y + 7x = \sqrt{2x - 1}$.

Bài toán 41. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT chuyên Thái Bình; Thành phố Thái Bình; Năm học 2007 – 2008.

Trong mặt phẳng Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = (m-3)x^2$ và đường thẳng d: $y = 5x + 2$ (m là tham số thực khác 3).

1. Tìm m để parabol (P) đi qua điểm (3;9).
2. Tìm tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng d với hai trục tọa độ và tính diện tích của tam giác OAB.
3. Tính số đo góc nhọn tạo bởi đường thẳng d và trục tung.
4. Tìm điều kiện của k để đường thẳng d song song với đường thẳng $y = (5k-2)x + 6$.
5. Chứng minh đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = \frac{2}{\sqrt{26}}$.
6. Tìm giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d cho khi $m = 2$.
7. Tìm điều kiện của m để parabol (P) và d có điểm chung.
8. Xác định giá trị của tham số m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai nghiệm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 sao cho
 - a) Một điểm có hoành độ bằng 1.
 - b) $x_1 = 2x_2$.
 - c) $\frac{1}{x_1-4} + \frac{1}{x_2-4} = 7$.
 - d) Điểm này có hoành độ gấp 5 lần hoành độ điểm kia.
 - e) $x_1 + x_2 = x_1x_2 + \frac{1}{m-3}$.
 - f) $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^3 + \frac{133}{8} = m^3$.
 - g) $(m-3)x_1^2 + 5x_2 = 4m^2 + 2$.
 - h) $x_1 > 1; x_2 > 2$.
9. Chứng minh rằng khi (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thì ta luôn thiết lập được một hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 mà không chứa m .
10. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại các điểm có tọa độ đều là số nguyên.
11. Trong trường hợp $m = 4$.
 - a) Xác định tọa độ điểm L ($x; y$) trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = x^4 - 24\sqrt{6}x + 24$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - b) Xác định tọa độ điểm K ($x; y$) trên (P) thỏa mãn $y - 7x + 8 = 2\sqrt{9x-8}$.
 - c) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm I (4;25) cắt parabol (P) theo dây cung HK sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng HK.

Bài toán 42. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 1; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; Thành phố Vĩnh Long; Tỉnh Vĩnh Long; Năm học 2007 – 2008.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = 2(m-1)x - 2m + 5$; với m là tham số thực.

- Tìm giá trị của m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm $X(1;3)$.
 - Cắt đường thẳng $y = 3x - 2$ tại điểm có hoành độ bằng 4.
 - Song song với đường thẳng $y = 5mx - 19$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 4$.
 - Hợp với tia Ox một góc lớn hơn 60° .
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 0,25.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = 1$.
- Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 với mọi giá trị của m .
- Tìm giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1^2 + x_2^2 = 14$.
 - $x_1 + 2x_2 = m$.
 - $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{2x_2 - 3} = 1$.
 - $5x_1 + 3x_2 = 10x_1x_2 - 4$.
 - A và B nằm về hai phía của trục tung.
 - $(x_1 + 4)(x_2 + 4) + x_1(x_2 - 3) + x_2(x_1 - 3) = 5$.
 - $x_1 > 4 > x_2$.
 - $y_1 + y_2 = 10$.
 - Biểu thức $S = 2y_1 + 3y_2 - 4x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $2y_1 + 3y_2 = 4y_1y_2 + 5x_1x_2$.
 - $x_1^2 - 2(m-1)x_2 + 2m - 5 = 9m^2$.
 - $(2y_1 + 5)(4y_2 + 5) < 27$.
- Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $(x + \sqrt{y+3})(y + \sqrt{x^4+3}) = 3$.
- Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có)?
- Xét hai điểm M và N thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2 .
 - Tìm điểm Q thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{MN}$ sao cho tam giác MQN có diện tích bằng $\frac{27}{8}$.
 - Tìm điểm Q thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{MN}$ sao cho tam giác MQN có diện tích lớn nhất.
- Xét hai điểm D, E thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 4 . Tìm tọa độ điểm F thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{DE}$ sao cho khoảng cách từ F đến đường thẳng DE lớn nhất.

Bài toán 43. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 1; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; Thành phố Vĩnh Long; Tỉnh Vĩnh Long; Năm học 2007 – 2008.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = 2(m-2)x - m + 2$; với m là tham số thực.

- Tìm giá trị của m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm G thuộc (P) , G có tung độ bằng 4.
 - Song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(4;6)$ và $(5;1)$.
 - Cắt đường thẳng $y = 6x - 1$.
 - Vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ III.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $1:2:\sqrt{5}$.
 - Tiếp xúc với parabol (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Tìm giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{4}$.
 - $x_1 > 1 > x_2$.
 - $|x_1 - x_2| = 3$.
 - $2x_1 - x_2 = m$.
 - $2x_1^2 = x_1 + x_2 + 2x_2^2$.
 - $(x_1 + x_2 - 2x_1x_2)^3 + x_1x_2 = 5$.
 - $x_1 + x_2 = 4x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$.
 - $y_1 + y_2 = 3y_1y_2 - 1$.
 - $y_1 + y_2 > 6x_1x_2 + 5(x_1 + x_2)$.
 - A và B nằm về hai phía của đường thẳng $x = 2$.
- Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $y = 6x + 7$ và tiếp xúc với parabol (P) .
- Viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = 5x + 3$ và tiếp xúc với parabol (P) .
- Từ điểm $Q(0; -4)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến parabol (P) ?
- Tồn tại hay không điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn hệ thức
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases}$$
- Tìm tọa độ điểm $Z(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức
$$\sqrt{y - \frac{7}{y}} + \sqrt{x - \frac{7}{y}} = x$$
.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $C(3; 13)$ và cắt parabol (P) theo dây cung DE thỏa mãn điều kiện $DE = 2CE$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $J(2; 5)$ và cắt parabol theo một dây cung HK có độ dài bằng $2\sqrt{17}$.
- Giả sử góc vuông $\widehat{uIv} = 90^\circ$ di động sao cho hai cạnh của nó luôn tiếp xúc với parabol (P) . Chứng minh rằng đỉnh I của góc luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
- Xét đường thẳng $d: y = x + 8$, xác định độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ biết hai đỉnh A và B thuộc đường thẳng d và hai đỉnh C, D thuộc parabol (P) .
- Tìm tọa độ tất cả các điểm $T(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho $x^2 - 2x\sqrt{2y-1} + 2y = 1$.

Bài toán 44. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; Thành phố Vĩnh Long; Tỉnh Vĩnh Long; Năm học 2005 – 2006.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng chứa tham

$$\text{số } d: y = (m-1)x + \frac{3-m}{2}.$$

1. Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $(4;3)$.
 - b) Song song với đường thẳng $y = 4x - 2$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = 6x - 9$.
 - d) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 2.
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ giữa cạnh lớn nhất và nhỏ nhất là $\sqrt{26}:1$.
 - f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 0,25.
2. Chứng tỏ rằng parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .
3. Tìm giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{3}$.
 - b) $|x_1 - x_2| \leq \sqrt{13}$.
 - c) $\frac{1}{2x_1 - 5} + \frac{1}{2x_2 - 5} = 3$.
 - d) $x_1 + 3x_2 = m$.
 - e) $x_1 > 3 > x_2$.
 - f) $x_1 \leq x_2 \leq 4$.
 - g) $(3x_1 + 2)(3x_2 + 2) = 10x_1x_2 - 13$.
 - h) A và B nằm về hai phía của đường thẳng $x = 4$.
 - i) Biểu thức $S = 5(y_1 + y_2) + y_1y_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - j) $x_1^2 + 2(m-1)x_2 + m - 3 = 9m^2$.
4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $J(0; -4)$ và tiếp xúc với (P) .
5. Xác định tọa độ điểm $M(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = 12y^2 - 4\sqrt{5}x^3 + 30$ đạt giá trị nhỏ nhất.
6. Xác định tọa độ điểm $N(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{\frac{2y+3}{x}} = \frac{2y+7}{2(x+1)}$.
7. Điểm $X(x; y)$ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Tìm giá trị của m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm nguyên phân biệt.
8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $I(2; 2,5)$, cắt parabol (P) theo dây cung CD sao cho I là tâm đối xứng của C và D .
9. Giả sử H và K lần lượt là các điểm nằm trên parabol (P) có hoành độ lần lượt là -3 và 5 .
 - a) Tính diện tích của tam giác OHK .
 - b) Tìm tọa độ điểm T trên cung parabol nhỏ (HK) sao cho khoảng cách từ T đến đường thẳng HK nhận giá trị lớn nhất.

Bài toán 45. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 1; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi; Thành phố Hải Dương; Tỉnh Hải Dương; Năm học 2003 – 2004.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = 5mx + 4m$.

1. Tìm điều kiện của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm G thuộc parabol (P), G có hoành độ bằng 5.
 - b) Cắt đường thẳng $y = 4x - 3$ tại điểm có hoành độ bằng 2.
 - c) Song song với đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - d) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 10$.
 - e) Tạo với tia Ox một góc $\alpha = 60^\circ$.
 - f) Cắt hai trục tọa độ Ox, Oy theo thứ tự tại X, Y sao cho $OX = 3OY$.
2. Tìm điều kiện của m để parabol (P) tiếp xúc với đường thẳng d . Tìm tọa độ tiếp điểm.
3. Khi parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
 - a) Chứng minh rằng $x_1^2 + 5mx_2 - 4m > 0$.
 - b) Tìm giá trị của m để $x_1 < 3 < x_2$.
 - c) Tìm m sao cho $|x_1 - x_2| \leq \sqrt{41}$.
 - d) Tìm m để $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} = 5$.
 - e) Tìm m để hoành độ điểm này gấp ba lần hoành độ điểm kia.
 - f) Tìm m để $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = m^3 + 19m$.
 - g) Tìm giá trị của m để $x_1^2 + 5mx_2 - 4m = 9m^2$.
 - h) Tìm m để A và B nằm bên phải đường thẳng $x = \frac{2}{3}$.
 - i) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để x_1, x_2 là các số nguyên.
 - j) Xác định m để biểu thức $A = \frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 + 12m} + \frac{x_2^2 + 5mx_1 + 12m}{m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - k) Tìm giá trị của m để $y_1 + y_2 = y_1 y_2 + 17$.
 - l) Tìm m sao cho $x_1 x_2 (y_1 + y_2) = -132$.
4. Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $5y - 2x + 1 = (4x - 1)\sqrt{y + 1}$.
5. Tìm tất cả các điểm $H(x; y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn bất đẳng thức $5x^3 + y - 2x + 1 \leq 5y\sqrt{2x - 1}$.
6. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $(5; 1)$ và tiếp xúc với parabol (P).
7. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ II và tiếp xúc với parabol (P).
8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $E(5; 41)$ và cắt parabol (P) theo dây cung CD sao cho E là trung điểm của đoạn thẳng CD .
9. Xét hai điểm M và N nằm trên parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4 . Tính diện tích của tam giác MNQ với $Q(1; 2)$.
9. Tìm tọa độ điểm S thuộc đường thẳng $x + y + 9 = 0$ và điểm T thuộc parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng ST ngắn nhất.

Bài toán 46. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 1; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi vào trường chuyên); Đề thi chính thức; Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc; Thành phố Vĩnh Yên; Tỉnh Vĩnh Phúc; Năm học 2007 – 2008.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng chứa tham

$$\text{số } d: y = (m-1)x - m + \frac{3}{2}.$$

1. Tìm giá trị của m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm (3;1).
 - b) Song song với đường thẳng $y = 5x - 4$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 4$.
 - d) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 0,25.
2. Tìm giao điểm của (P) và d khi $m = 1$.
3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) Một trong hai điểm có hoành độ bằng 3.
 - b) A và B nằm về hai phía của trục tung.
 - c) Hoành độ điểm này bằng bình phương hoành độ điểm kia.
 - d) $x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m = 7$.
 - e) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.
 - f) $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3} = 1$.
 - g) $\frac{1}{5x_1 - 3} + \frac{1}{4x_2 - 3} = 1$.
 - h) $x_1 > 4 > x_2$.
 - i) $2x_1 + x_2 = 10$.
 - j) $|2x_1 - 3x_2| \leq 5$.
 - k) $3|x_1| + 4|x_2| \leq 5$.
 - l) $(x_1 - 4)(x_1 + x_2 - 9) > 0$.
 - m) $y_1 + 2y_2 = 99$.
 - n) Biểu thức $S = 2y_1^2 + 3y_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - o) x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 4.
4. Trong trường hợp parabol (P) cắt đường thẳng $y = kx + \frac{1}{2}$ tại hai điểm phân biệt M và N. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng MN.
5. Tìm tọa độ điểm L (x;y) trên parabol (P) thỏa mãn $2y + 5x + 6 = 2\sqrt{3x + 4}$.
6. Tìm tọa độ điểm K (x;y) nằm trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = y^2 - 6\sqrt{6}x + 23$ đạt giá trị nhỏ nhất.
7. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại các điểm có tọa độ đều là số nguyên.

Bài toán 47. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 2.3; Đề thi tốt nghiệp THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu; 2004 – 2005.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số m : $d: y = (3m-1)x - 2m^2 + m$; m là tham số thực.

- Tính diện tích của tam giác tạo bởi đường thẳng d với parabol (P) khi $m = 1$.
- Tính góc tạo bởi đường thẳng d với trục tung khi $m = 2$.
- Tìm m để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - Đi qua điểm $(1; m)$.
 - Cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng 2.
 - Song song với đường thẳng $y = 7x - 1$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{5}$.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = \frac{1}{2}$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - $|x_1 - x_2| \leq 10$.
 - $x_1 < -1 < x_2$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$.
 - $3x_1 + 4x_2 = 10$.
 - $\frac{1}{x_1 - 5} + \frac{1}{x_2 + 6} = 2$.
 - A và B đều có hoành độ dương.
 - $x_1^2 = 9x_2^2$.
 - $x_2^2 + (3m-1)x_1 + 2m^2 - m = 9$.
 - Biểu thức $S = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $y_1 + y_2 = m^3 + 1$.
 - Độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{26}$.
 - A và B nằm về hai phía của đường thẳng $y = 4$.
 - $y_1 = mx_1 + (m+1)x_2$.
 - $S = 2y_1 + 3y_2 + 4x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Viết phương trình tiếp tuyến của (P) biết tiếp tuyến đi qua điểm $(0; -5)$.
- Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = \frac{4x+3}{y+1}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
- Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} 2\sqrt{y-x^3+y^2} \leq (x+y)^2, \\ \sqrt{1-(x+y)^2} = 1-x. \end{cases}$$
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $D(4; 25)$ và cắt parabol (P) tại điểm E, F sao cho D là trung điểm của đoạn thẳng EF .

Bài toán 48. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 1.2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2009 – 2010.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = 2mx + 16 - 5m^2$; m là tham số thực.

1. Tìm điều kiện của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Song song với đường thẳng $y = 4x - 6$.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + 12$.
 - c) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-5,5$.
 - d) Cắt trục tung tại điểm có hoành độ dương.
 - e) Đồng quy với hai đường thẳng $3x - 2y = 5; 5x - 4y + 1 = 0$.
2. Gọi x_1, x_2 là hoành độ của các giao điểm của (P) và d trong trường hợp chúng giao nhau.
 - a) Tìm m để hai giao điểm nằm về hai phía của trục tung.
 - b) Tìm m để hai giao điểm đều có hoành độ dương.
 - c) Tìm m sao cho $x_1 + x_2 = x_1 x_2 + 13$.
 - d) Tìm m sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.
 - e) Tìm tất cả giá trị nguyên của m để hai hoành độ đều là số nguyên.
 - f) Tìm giá trị của tham số m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{26}$.
 - g) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 - 6x_1 x_2$.
 - h) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17)$.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (P) biết tiếp tuyến đi qua điểm $(0; -6)$.
4. Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng $y = \frac{8x - m^2 - 1}{8}$ tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$.
5. Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = \frac{4x + 3}{y + 1}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
6. Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $2\sqrt{(x + 2)^3} = 6x + 3y - x^3$.
7. Giả sử tồn tại hai đường thẳng đi qua điểm $I(0; 1)$ cắt parabol (P) theo thứ tự tại $A_1, B_1 - A_2, B_2$.
 Chứng minh rằng $\frac{1}{IA_1} + \frac{1}{IB_1} = \frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} = 1$ và $\frac{1}{\sqrt{IA_1 \cdot IA_2}} + \frac{1}{\sqrt{IB_1 \cdot IB_2}} \leq 1$.
8. Trên parabol (P) lấy ba điểm có hoành độ lần lượt a, b, c thỏa mãn $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$.
 Tính giá trị của biểu thức $S = (a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1)$.
9. Xét ba điểm A, B, C thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là x_A, x_B, x_C thỏa mãn đồng thời
 - A, B, C nằm trong góc phần tư thứ nhất và khác gốc O.
 - $x_A + x_B + x_C = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{x_A}{1 + y_B} + \frac{x_B}{1 + y_C} + \frac{x_C}{1 + y_A} \geq \frac{3}{2}$.

Bài toán 49. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Vĩnh Phúc ; Năm học 2004 – 2005.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d chứa tham số có dạng: $y = -4mx - 3m^2 - 2m + 1$.

1. Vẽ parabol (P).
2. Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm (4;1).
 - b) Cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng 1.
 - c) Song song với đường thẳng $y = -5x + m + 1$.
 - d) Vuông góc với đường thẳng $3x - 5y + \sqrt{6} = 0$.
 - e) Cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.
3. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = 0$.
4. Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d luôn có ít nhất một điểm chung.
5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) $x_1 + x_2 + 4x_1x_2 = 204$.
 - b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{16}{55}$.
 - c) $2x_1 - 5x_2 = 8$.
 - d) $|x_1 - x_2| = 2$.
 - e) $|x_2 - 3x_1| = m$.
 - f) $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{2}{x_2} = 2$.
 - g) $6 > x_1 > x_2 > -5$.
 - h) Biểu thức $P = x_1^2 + 3x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - i) x_1, x_2 là độ dài hai cạnh AB, AC của tam giác ABC có diện tích bằng 10 đồng thời thỏa mãn điều kiện $\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{3}$.
 - j) $y_1 + y_2 > 2$.
 - k) $2y_1 + 3y_2 = 4x_1 + 5x_2$.
 - l) Biểu thức $S = 2y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_1 - 5y_2 + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.
6. Tìm trên parabol (P) các điểm L (x;y) thỏa mãn đẳng thức $(y - 4x + 11)(z^4 - 8z^2 + 21) = 35$.
7. Xác định tọa độ điểm K (x;y) trên parabol (P) thỏa mãn $\sqrt{y + 2x - 15} - \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x - 3}$.
8. Tìm tọa độ điểm H (x;y) trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = \sqrt[4]{1 - 2x} + \sqrt[4]{1 + 2x} + \sqrt[4]{1 - 4y}$ đạt giá trị lớn nhất.
9. Tìm k để parabol (P) cắt đường thẳng $y = 3x - k$ theo một dây cung có độ dài bằng $\sqrt{10}$.
10. Xét ba điểm A, B, C thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là x_A, x_B, x_C thỏa mãn đồng thời
 - A, B, C nằm trong góc phần tư thứ nhất.
 - $x_A + x_B + x_C = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{y_A}{x_A + 2x_B} + \frac{y_B}{x_B + 2y_C} + \frac{y_C}{x_C + 2x_A}$.

Bài toán 50. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 1; Đề thi tuyển sinh 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường Phổ thông Năng khiếu; Đại học Khoa học Tự nhiên; Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2004 – 2005.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d chứa tham số có dạng $y = (m+1)x - 2m$; với m là tham số thực.

1. Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm (4;2).
 - b) Song song với đường thẳng $y = 8x + 10$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 12$.
 - d) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 2.
 - e) Hợp với tia Oy một góc $\alpha = 60^\circ$.
 - f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.
 - g) Tiếp xúc với đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) $x_1^2 + x_2^2 = 6x_1x_2$.
 - b) Hoành độ điểm này bằng bốn lần hoành độ điểm kia.
 - c) $x_2^2 + (m+1)x_1 + 2m = 9$.
 - d) $x_1 < 4 < x_2$.
 - e) $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = 5$.
 - f) x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5.
 - g) x_1, x_2 là độ dài hai cạnh AB, AC của tam giác ABC với diện tích tam giác ABC bằng 10 và $\sin \widehat{ABC} = \frac{1}{5}$.
 - h) $(y_1 + 4)(y_2 + 4) = 10y_1y_2 - 3$.
 - i) $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_1y_2 - 10}$.
3. Tìm tọa độ điểm K (x;y) trên parabol (P) sao cho $y - 2x = 4(x - 3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$.
4. Tìm tọa độ điểm L (x;y) trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = \sqrt{y-x+1} + \sqrt{y+x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
5. Tồn tại hay không điểm H (x;y) trên parabol (P) thỏa mãn bất đẳng thức $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \geq xy$?
6. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm T (6;61) và cắt parabol (P) theo một dây cung sao cho T là trung điểm của dây cung đó.
7. Gọi A, B, C là ba điểm thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là $a; b; a+b$. Chứng minh đường thẳng OC song song với đường thẳng AB.
8. Xét hai đường thẳng $d_1: y = 4x + 5; d_2: y = 4x + k$. Đường thẳng d_1 cắt parabol (P) tại hai điểm C, D. Tìm giá trị của k để đường thẳng d_2 cắt parabol (P) tại hai điểm E, F sao cho tứ giác tạo bởi bốn điểm C, D, E, F có diện tích bằng 6.

Bài toán 51. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 1; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2002 – 2003.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol và đường thẳng chứa tham số

$$(P): y = (2m - 1)x^2; \quad d: y = 2mx - 1 \quad \left(m \neq \frac{1}{2}\right).$$

- Vẽ parabol (P) trong trường hợp $m = 2$.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d trong trường hợp $m = 3$.
- Xác định giá trị của m sao cho
 - Đường thẳng d đi qua điểm (5;3).
 - Đường thẳng d vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = -10x + 23$.
 - Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 4.
 - Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền là $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
 - Đường thẳng d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 0,25.
 - Cắt đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = 1$ theo một dây cung có độ dài $l = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - Ít nhất một trong hai hoành độ giao điểm thuộc khoảng $(-1; 0)$.
 - $x_1 + x_2 + 10x_1x_2 = 6$.
 - $x_1^3 + 3x_2^3 = 4$.
 - $|x_1^2 - x_2^2| = 1$.
 - $x_1 - 4x_2 = 4$.
 - $(2m - 1)x_1^2 - 2mx_1 + 1 = 4m^2$.
 - $x_1^2 = 5x_2^2 + 1$.
 - $x_1 \in [2; 4], x_2 \in [3; 5]$.
 - M và N nằm trong khoảng giữa hai đường thẳng $x = 4; x = 5m - 2$.
 - x_1, x_2 là độ dài 2 cạnh AB, AC của tam giác nhọn ABC có diện tích bằng 10 và $\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - $y_1 + 4y_2 = 10$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{y_2} = 3$.
 - $(y_1 + 2)(y_2 + 3) = 6y_1y_2 - 4x_1x_2$.
- Trong trường hợp $m = 1$.
 - Tìm điểm K (x;y) thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{y - 2x} + \sqrt{y - 7x} = \sqrt{y - 23x}$.
 - Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng $\Delta: y = mx + 3$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.
 - Tìm tọa độ điểm X (x;y) thuộc parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng XY ngắn nhất, trong đó Y (1;0).

Bài toán 52. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 4; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bình Dương; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng d chứa tham số $d: y = 2(m-1)x - 2m + 5$.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 2$.
- Tìm giá trị của tham số m sao cho
 - Đường thẳng d đi qua điểm $(5;9)$.
 - Cắt đường thẳng $y = 3x - 5$ tại điểm có hoành độ bằng 2.
 - Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \frac{3x-1}{2}$.
 - Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x + 9$.
 - Đường thẳng cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 1,5.
 - Đường thẳng d trùng với đường thẳng $y = 4mx - 8$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , parabol (P) và đường thẳng d luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 + x_2 = 5x_1x_2 - 4$.
 - M và N nằm về hai phía của trục tung.
 - M và N nằm cùng phía đối với trục tung.
 - $x_1^2 + x_2^2 \leq 6x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) - 5$.
 - $x_1 - 2x_2 = 3$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{x_1 + x_2}$.
 - $x_1^2 + 2(m-1)x_2 + 2m - 5 = 4m^2$.
 - Biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
 - $y_1 + y_2 = (3x_1 + m)(3x_2 + m) + 9m$.
 - Biểu thức $T = 10x_1x_2 - (5 + y_1)(5 + y_2)$ nhận giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $B = (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2 + 4(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Xét điểm $G(1;0)$. Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại E và F sao cho diện tích tam giác OFG gấp đôi diện tích tam giác OEF .
- Tìm tọa độ điểm $K(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $\sqrt{4y+2x+3} - 2\sqrt{y+1} = 4x-2$.
- Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn bất đẳng thức $y - 6x + 26 \leq 6\sqrt{2x+1}$.
- Xét ba điểm A, B, C thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là x_A, x_B, x_C . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{y_A}{y_A - x_A + 1} + \frac{y_B}{y_B - x_B + 1} + \frac{y_C}{y_C - x_C + 1}$.
- Tìm n để parabol (P) cắt đường thẳng $y = x + n$ tại hai điểm phân biệt C, D . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD , chứng minh rằng khi đó điểm I di động trên một đường thẳng cố định.
- Xét hai điểm X, Y thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là -3 và 5 . Tìm tọa độ điểm Z thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{XY}$ sao cho diện tích tam giác XYZ đạt giá trị lớn nhất.
- Viết phương trình đường thẳng l đi qua điểm $J(-2;20)$ và cắt parabol (P) theo một dây cung PQ sao cho J chia đoạn thẳng PQ theo tỷ lệ $JP:JQ = 1:10$.

Bài toán 53. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 4 ; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2009 – 2010.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d chứa tham số: $y = (5m - 1)x - 6m^2 + 2m$.

- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua gốc tọa độ.
 - Có hệ số góc nhỏ hơn 5 và không trùng với hai trục tọa độ.
 - Có hướng đi lên.
 - Cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt.
 - Tạo với tia Oy một góc $\alpha = 45^\circ$.
 - Song song với đường thẳng $y = 4\sqrt{m}x + 2n - 7$.
 - Vuông góc với đường thẳng $2x + 7y + 5m = 0$.
- Tìm giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d trong trường hợp $m = -3$.
- Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d luôn có ít nhất một điểm chung với mọi giá trị m .
- Khi parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
 - Tìm tất cả các giá trị của m để $2x_1 - 3x_2 = 1$.
 - Tìm giá trị của m để $x_1^2 + (5m - 1)x_2 + 6m^2 - 2m = 25$.
 - Tìm giá trị của m để $|x_1 - x_2| = 2$.
 - Tìm m để M và N nằm về hai phía của đường thẳng $x = \frac{5}{2}$.
 - Tìm m để M và N đều có hoành độ nằm trong khoảng $(3; 10)$.
 - Tìm m để $\frac{1}{x_1} - 3x_2 = 14$.
 - Tồn tại hay không giá trị m sao cho $\sqrt{x_1} + \sqrt{m} = 2\sqrt{x_2}$?
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1 + 4x_2$.
 - Tìm m để $4y_1 + 5y_2 = 6x_1 + 7x_2$.
 - Tìm m để M và N nằm về hai phía của đường thẳng $y = 4$.
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y_1 + 2y_2 + 3x_1(4x_2 + 5)$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $D(2; 5)$ và chắn parabol (P) theo một dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{17}$.
- Tìm tọa độ điểm $A(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $y + \sqrt[3]{x^4 - y} = 2x + 1$.
- Tìm tọa độ tất cả các điểm $B(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn bất đẳng thức

$$x\sqrt{y - x + 1} + 2\sqrt{1 + 3x} \geq y + x + 3.$$
- Tìm tọa độ điểm $X(x; y)$ trên nhánh phải parabol (P) sao cho biểu thức $S = x(y - 48)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Xét ba điểm A, B, C thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là x_A, x_B, x_C . Phản biện bất đẳng thức sau đây $3(x_A + x_B + x_C)^2 \leq (y_A + 2)(y_B + 2)(y_C + 2)$.
- Xét điểm $Y(x; y)$ thuộc parabol (P). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$K = \sqrt{2x - y} + \sqrt{2x - y + 3}.$$

Bài toán 54. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi dự bị; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bình Định; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d chứa tham

số có dạng: $y = (m-1)x + \frac{3-m}{2}$; m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P).
- Xét hai điểm A, B thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4 . Tính độ dài chiều cao hạ từ O của tam giác OAB .
- Xác định giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm J thuộc parabol (P), J có hoành độ bằng 5 .
 - Song song với đường thẳng $y = (3m-2)x + n - 2$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{m}{2}x + \sqrt{5}$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 5 .
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 2 .
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{12}$.
 - Cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm $Z(x; y)$ sao cho $T = x^2 + 2y + 4xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $y = mx + 2$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt X, Y sao cho tam giác OXY có diện tích bằng $2\sqrt{5}$.
- Biết rằng đường thẳng $y = x + 4$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt C, D . Tìm tọa độ điểm E nằm trên cung parabol nhỏ $\widehat{CD}$ để tam giác CDE có diện tích lớn nhất.
- Chứng minh parabol (P) và đường thẳng d luôn có hai điểm chung phân biệt với mọi giá trị của m .
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$.
 - $x_1^2 + x_2^2 = 34$.
 - $x_1 - x_2 = 2(m-1)$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{6}$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$.
 - $x_1^2 + x_2^2 \leq 6$.
 - $x_1^2 + 2(m+1)x_2 + 3m + 2 = 3m^2$.
 - Độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $(y_1 + 5)(y_2 + 5) = 8x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 11$.
 - $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{2}{5}$.
- Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $Q = 64y^2 - 8x + 10$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $L(3; 5)$ và cắt (P) theo dây cung HK sao cho L là trung điểm của đoạn thẳng HK .

Bài toán 55. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 3b; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Lạng Sơn; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = 2x + m + 3$; với m là tham số thực.

- Xét các điểm $X(1; m)$ và $Y(4; n)$. Tìm m và n để X thuộc (P) và Y thuộc d .
- Tìm tất cả các giá trị của m và n sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại điểm có hoành độ bằng 10.
 - Song song với đường thẳng $y = 3mx + 6n - 10$.
 - Vuông góc với đường thẳng $3y = -2mx + \sqrt{6}$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 4m.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 10.
 - Cắt đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{5}$ theo một dây cung có độ dài bằng $\sqrt{2}$.
 - Cắt đường thẳng $y = 3x - 4$ tại điểm $K(x; y)$ sao cho biểu thức $S = x^2 + y^2 - 4x + 9$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 - x_2 = 10$.
 - $x_1^3 - x_2 = 8$.
 - $\frac{1}{x_2 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} = 6$.
 - $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{6}$.
 - $\frac{1}{x_1 + x_2 + 2} + \frac{1}{x_1 x_2} = 3$.
 - M và N nằm cùng phía đối với trục tung.
 - $x_1^2 + 2x_2 - m + 3 = m^2$.
 - $(x_1^2 + 2x_2 - m + 3)(x_2^2 + 2x_2 - m + 3) = m - 3$.
 - M và N cùng nằm trong góc phần tư thứ nhất, không kể biên.
 - M và N nằm khác phía đối với đường thẳng $x = 3$.
 - $y_1 + y_2 = 2(x_1 - x_2)^2 + 7x_1 x_2$.
 - $(3y_1 + 2)(3y_2 + 2) = 4x_1 x_2 - 5$.
- Xét hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thuộc nhánh phải của parabol (P) . Chứng minh rằng khi biểu thức $S = x_A x_B (y_A + y_B)$ đạt giá trị lớn nhất thì A và B trùng nhau.
- Xét hai điểm $H(a; b), K(c; d)$ nằm trên parabol (P) sao cho $ac = 1$. Chứng minh $b + d \geq a + c$.
- Tìm tất cả các điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $\sqrt{10 - 4y} = \frac{5 - 2x}{2x - 1}$.
- Tìm điểm $K(x_0; y_0)$ trên parabol (P) khi x_0 là số thực lớn nhất trong các số x thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7. \end{cases}$$
- Xét điểm $G(x; y)$ thuộc nhánh phải của parabol (P) . Tìm x và y sao cho biểu thức $S = y - 3x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 56. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu I ; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT ; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Bắc Ninh; Thành phố Bắc Ninh; Tỉnh Bắc Ninh; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng: $d: y = -2mx + 2m + 6$; m thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 1$.
- Xét điểm $X(1; m)$ và $Y(2; n)$. Tìm m và n để X thuộc (P) và Y thuộc d .
- Tìm giá trị của tham số m và n sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm Z nằm trên (P), Z có hoành độ bằng 2.
 - Cắt đường phân giác góc phần tư thứ IV tại điểm có tung độ lớn hơn 4.
 - Cắt trục hoành tại một điểm nằm giữa hai điểm (3;0) và (5;0).
 - Song song với đường thẳng $y = (3m - 1)x + 7n$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + 4n - 9$.
 - Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là dài nhất.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 16.
- Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d luôn có hai điểm chung phân biệt với mọi giá trị của tham số m .
- Khi parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.

Tìm giá trị của m sao cho

- $x_1 - x_2 = 2m - 2$.
 - $x_1 - 4x_2 = 4$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} - \frac{15}{4}$.
 - $\frac{1}{3x_1 - 7} + \frac{1}{3x_2 - 7} = 4$.
 - M và N nằm về hai phía của trục tung.
 - $x_1^2 - 2mx_2 - 2m - 6 = \frac{9}{4}m^4$.
 - M và N nằm cùng phía với đường thẳng $x = 5$.
 - $(x_1^2 - 2mx_2 - 2m - 6)(x_2^2 - 2mx_1 - 2m - 6) > 1$.
 - $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $B = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $(y_1 + 2)(y_2 + 2) = x_1^2(3 - x_2^2) + x_2^2(3 - 4x_1^2)$.
 - Biểu thức $T = (y_1 - 2mx_2)(y_2 - 2mx_1)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $\sqrt{y + x + 2} = \frac{3y + 3x + 2}{3x + 1}$.
 - Tìm điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = 2x + \sqrt{2 - y} + \sqrt[4]{2 - x^2 y}$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Tìm tọa độ hai điểm A, B nằm trên (P) sao cho A và B đối xứng nhau qua điểm $C(7; 85)$.
 - Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm (3;9) và tiếp xúc với nhánh phải của parabol (P).
 - Tìm điểm $K(x_0; y_0)$ trên parabol (P) khi x_0 là số thực lớn nhất trong các số x thỏa mãn hệ thức

$$x + y + z = 5; x^2 + y^2 + z^2 = 11.$$

Bài toán 57. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu 2.1 ; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Đồng Nai; Năm học 2008 – 2009.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = 3x - m$.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 2$. Tìm tọa độ hai đồ thị bằng phép tính.
- Tìm giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm X nằm trên (P) , X có hoành độ bằng 3.
 - Song song với đường thẳng $y = 4m^2x - 2m + 4$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{(m-5)x+7}{3} + \sqrt{2}$.
 - Cắt đường phân giác góc phần tư thứ III tại điểm có hoành độ lớn hơn 10.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 10.
- Khi parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - Tìm giá trị m để $x_1^3 - x_2 = 7$.
 - Tìm m sao cho $\sqrt{x_2 + 2} = x_1 + 1$.
 - Tìm m để hai giao điểm đều có hoành độ dương.
 - Tìm giá trị của m sao cho $x_1^2 + 3x_2 + m = m^4$.
 - Tìm m để hoành độ điểm này gấp 3 lần hoành độ điểm kia.
 - Tìm giá trị của m sao cho $\frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = \frac{2}{5}$.
 - Tìm m để tung độ điểm này gấp 4 lần tung độ điểm kia.
 - Tính giá trị của biểu thức $P = x_1^3x_2 - x_1x_2^3$ theo m .
 - Tìm m sao cho $y_1 + y_2 = 10y_1y_2 + 4x_1 + 4x_2$.
 - Tìm giá trị của m để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = y_1y_2 + 5$.
 - Tìm m thỏa mãn $x_1^2 + 3x_2 = 6(y_1 + y_2) + 19m - 2017$.
 - Tìm tất cả các giá trị m sao cho $(2y_1 + 7)(2y_2 + 7) + (3x_1 + 1)(3x_2 + 1) = 5x_1x_2$.
- Xác định m để (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh AB, AC của tam giác ABC với độ dài chiều cao AH (H thuộc cạnh BC) bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đường thẳng $y = 2x - 4$ tại điểm $K(x; y)$ sao cho biểu thức $S = 5x^2 + 4y^2$ đạt giá trị bé nhất.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đồ thị hàm số $y = 7\sqrt{3x-2} - 4x - 2$.
- Tìm tọa độ điểm $Y(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2y+x+1} + \sqrt{y-x+1} = 3x$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $K(2; 5)$ và cắt parabol (P) theo một dây cung nhận điểm K làm trung điểm.
- Chứng minh rằng đường thẳng $\Delta: y = 4x - 3$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt P, Q . Tính diện tích tam giác OPQ .
- Tìm tọa độ điểm $Z(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $T = 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{3-\sqrt{y}}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài toán 58. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài III ; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hà Nội; Năm học 2009 – 2010.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng d chứa tham số như sau: $y = 2(m+1)x - m^2 - 2$; m là tham số thực.

1. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm X thuộc đường phân giác góc phần tư thứ nhất, X có hoành độ bằng 1.
 - b) Song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(6;2)$ và $(7;1)$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $3x - 2y + 5\sqrt{5} = 0$.
 - d) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có tỷ lệ hai cạnh góc vuông là 1:4.
 - e) Tạo với tia Oy một góc $\alpha = 60^\circ$.
2. Tìm tọa độ điểm $K(x;y)$ trên parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng OK bằng $2\sqrt{5}$.
3. Tìm tọa độ điểm $H(x;y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = y^2 + 8\sqrt{2}x + 30$ đạt giá trị nhỏ nhất.
4. Đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt P, Q . Tìm tọa độ điểm R thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{PQ}$ sao cho tam giác PQR có diện tích lớn nhất.
5. Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ nằm trên nhánh phải parabol (P) thỏa mãn đẳng thức

$$(x+6)\sqrt{x+3} = 8x^3 + 12y + 3x - 9.$$
6. Tìm tọa độ điểm $J(x;y)$ nằm trên nhánh phải parabol (P) thỏa mãn bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} + \sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq 2(x + y).$$
7. Tìm tọa độ hai điểm E, F trên parabol (P) sao cho E và F đối xứng nhau qua điểm $(4;10)$.
8. Giả sử x_0 là số thực lớn nhất trong các số x thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ xy + yz + xz = 5. \end{cases}$$

Xét điểm $Z(x_0; y_0) \in (P)$. Tính độ dài đoạn thẳng OZ .

9. Xét ba điểm thuộc parabol (P) có hoành độ thuộc đoạn $[-1;3]$, tổng các hoành độ bằng 5. Tìm giá trị lớn nhất đối với tổng bình phương hoành độ ba điểm đó.
10. Giả sử C và D có hoành độ lần lượt là c, d thỏa mãn đồng thời
 - C và D là hai điểm nằm trên parabol (P) .
 - $c \geq 4; c + d \geq 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y_C + y_D$.

11. Tìm giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) Một trong hai điểm có hoành độ bằng 2.
 - b) $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
 - c) A và B đều có hoành độ dương.
 - d) $x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m^2 + 2 = m^4$.
 - e) $x_1 - 2x_2 = 3$.
 - f) Nghiệm này bằng 5 lần nghiệm kia.
 - g) $|x_1 - x_2| = 3$.
 - h) x_1, x_2 tương ứng là độ dài các hình chiếu BH, CH của tam giác ABC (H thuộc cạnh BC), trong đó độ dài đường cao AH bằng 3.
 - i) Tung độ điểm này gấp 16 lần tung độ điểm kia.
 - j) $2(y_1 + y_2) = 9x_1x_2 + 6(x_1 + x_2) - 5$.

Bài toán 59. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 1; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn; Thành phố Nha Trang; Tỉnh Khánh Hòa; Năm học 2005 – 2006; Khóa ngày 21.06.2005.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số $d: y = 2(m-1)x - m + 5$; m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 2$.
- Xét các điểm $U(3;m)$ và $V(n;4)$. Tìm m và n để U thuộc (P) và V thuộc d .
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm T thuộc (P) , T có hoành độ bằng 3.
 - Song song với đường thẳng $y = 2(m^3 - 1)x + 7m$.
 - Vuông góc với đường thẳng $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{3} = 0$.
 - Cắt đường phân giác góc phần tư thứ II tại điểm có tung độ bằng 6.
 - Cắt đoạn thẳng OZ với $Z(2;10)$.
 - Đồng quy với hai đường thẳng $2x - y + 3 = 0$; $3x - 7y + 2 = 0$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ hơn 0,1.
 - Cắt đường phân giác góc phần tư thứ III tại điểm $T(x;y)$ sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $P = \sqrt{y^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 2y + 2}$.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d khi m thỏa mãn $m^2 - 2mn + 2n^2 - 2n + 1 = 0$, n là số thực.
- Chứng minh parabol (P) và đường thẳng d luôn có hai điểm chung phân biệt với mọi giá trị của m .
- Khi parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - Tìm m để một trong hai điểm có hoành độ bằng -1.
 - Tìm m để hai điểm nằm khác phía với trục tung.
 - Tìm giá trị m sao cho $x_1 - 3x_2 = 4$.
 - Tìm m sao cho $x_1^2 + 2(m-1)x_2 + m - 5 = 36m^2$.
 - Tìm giá trị của m để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$.
 - Tìm m để hoành độ hai điểm đều thuộc khoảng $(0;2)$.
 - Tìm m để $\sqrt{y_1 + 2(m-1)x_2 + m - 5} = |x_1 - x_2|$.
 - Tìm giá trị m để $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = m$.
 - Tìm giá trị tham số m để $[x_1^2 + 2(m-1)x_2 + m - 5][x_2^2 + 2(m-1)x_1 + m - 5] > 8$.
 - Với giá trị nào của m thì biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
 - Tìm m để biểu thức $(4y_1 + 1)(4y_2 + 1) - 4x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Tìm m sao cho $(y_1 + 5)(y_2 + 5) = 10y_1y_2 - 1$.
- Tìm tọa độ điểm $P(x;y)$ trên parabol (P) sao cho $\sqrt{3y + 3x} + \sqrt{x - y} = 2x + 1$.
- Tìm tọa độ các giao điểm của parabol (P) với đường cong $(C): y = x^3 + 2x^2 + 7x - 9$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $Q(1; -7)$ và tiếp xúc với nhánh phải của parabol (P) .
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường tròn tâm O, bán kính $R = 2\sqrt{5}$.
- Giả sử A, B, C là ba điểm thuộc nhánh phải của (P) , không tính gốc tọa độ. Chứng minh

$$\frac{y_A - y_C}{x_B + x_C} + \frac{y_B - y_A}{x_C + x_A} + \frac{y_C - y_B}{x_A + x_B} \geq 0.$$

Bài toán 60. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi vào trường chuyên); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Quốc học; Thành phố Huế; Tỉnh Thừa Thiên Huế; Năm học 1998 – 1999.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = 6x - m$, m là tham số thực.

1. Vẽ parabol (P) .
2. Tính góc tạo bởi đường thẳng d với chiều dương trục Ox .
3. Tìm giá trị của tham số m và n để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $(4;1)$.
 - b) Song song với đường thẳng $y = (6-n)x + 8m$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = -nx + \sqrt{3}$.
 - d) Cắt tia Oy .
 - e) Cắt đoạn thẳng LH với $L(2;2)$, $H(0;8)$.
 - f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ hơn 6.
 - g) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $R = \frac{\sqrt{37}}{2}$.
 - h) Đi qua điểm K thuộc (P) , K có hoành độ lớn hơn 4.
4. Tìm tọa độ các giao điểm P, Q của (P) và d khi $m = 4$. Tính diện tích tam giác OPQ .
5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $x_1^3 - x_2 = 7$.
 - b) $x_1^3 + 3x_1 - x_2 = 2$.
 - c) $x_1^2 + 3x_2 + \frac{m}{2} = 2m^2$.
 - d) M và N nằm về hai phía của trục tung.
 - e) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3$.
 - f) M và N đều có hoành độ nhỏ hơn 2.
 - g) $x_1 > \frac{1}{2} > x_2$.
 - h) M và N đối xứng với nhau qua điểm $\left(\frac{3}{2}; 5\right)$.
 - i) $x_1 \in [0; 5], x_2 \in [0; 5]$.
 - j) $x_1 - x_2 > 3$.
 - k) $y_1 + y_2 + (5y_1 + 2)(5y_2 + 2) > 6x_1x_2$.
 - l) $(3y_1 + 2)(3y_2 + 2) = x_1^2(3 - x_2^2) + x_1^2(3 - 5x_2^2)$.
6. Tìm tọa độ điểm $E(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn điều kiện $2\sqrt{(2x+7)^3} = y + 18x + 14$.
7. Tìm tọa độ điểm $F(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2-\frac{y}{2}}$ đạt giá trị lớn nhất.
8. Viết phương trình đường thẳng (l) đi qua điểm $\left(\frac{3}{2}; 5\right)$, cắt (P) tại hai điểm C, D sao cho $G\left(1; \frac{10}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác OCD .

Bài toán 61. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 4; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 1$.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = -3$.
- Tìm giá trị của m để đường thẳng d thỏa mãn
 - Song song với đường thẳng $y = m^2x + 4m - 5$.
 - Vuông góc với đường thẳng $3x - 2\sqrt{2}y + 1 = 0$.
 - Tạo với tia Oy một góc $\alpha = 30^\circ$.
 - Cắt đoạn thẳng PQ với $P(1;7)$ và $Q(-1;-5)$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 13.
 - Tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp $r = \frac{\sqrt{17}}{8}$.
- Chứng minh rằng, với mọi giá trị của tham số m , parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt nằm khác phía đối với trục tung.
- Giả sử (P) và d luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - Tìm m để tổng bình phương hai hoành độ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$.
 - Tìm m để $x_1^3 x_2 = -1$.
 - Chứng minh rằng ít nhất một trong hai điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn $|x_0| \leq 1$.
 - Tìm m để $x_1^2 + mx_2 - 1 = 9m^2 - 8m$.
 - Tìm tất cả các giá trị m để $x_1 + x_2 = 2$.
 - Tìm m để M và N đều nằm về một phía của đường thẳng $x = 3$.
 - Tìm m để $P = (x_1^2 + 2)(x_2^2 + 4)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Tìm giá trị của m sao cho $S = (y_1 + 3)(y_2 + 3) + 7(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Tìm giá trị của m để $\frac{1}{y_1 + 4} + \frac{1}{y_2 + 4} = \frac{2}{5}$.
 - Tìm giá trị của m để $y_1 - y_2 = 4mx_1 x_2$.
 - Tìm m để độ dài đoạn thẳng MN bằng $\sqrt{130}$.
 - Với giá trị nào của m thì độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất?
- Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $\frac{4x}{4y - 8x + 7} + \frac{3x}{4y - 10x + 7} = 1$.
- Điểm $(x; y)$ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Với z là số nguyên dương, tồn tại hay không điểm nguyên $Z(x; y)$ trên nhánh phải của parabol (P) thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = 3.$$
- Tồn tại hay không điểm $L(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn $x^5 = y^2 + xy + y + x + 2$?
- Biết rằng parabol (P) cắt đường thẳng $y = 2x + 15$ tại hai điểm phân biệt C và D . Tìm tọa độ điểm E trên cung parabol nhỏ $\widehat{CD}$ sao cho tam giác CDE có diện tích lớn nhất.

Bài toán 62. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi môn chuyên Khoa học Tự nhiên); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn; Thành phố Nha Trang; Tỉnh Khánh Hòa; Năm học 2000 – 2001.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-2)x - m - 1$ với m là tham số thực, O là gốc tọa độ.

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d khi $m = -1$.
- Xác định giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - Cắt đường phân giác góc phần tư thứ IV tại điểm có tung độ bằng 3.
 - Song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(4;7)$ và $(-4;9)$.
 - Đồng quy với hai đường thẳng $2x - 3y + 1 = 0; 6x - y + 4 = 0$.
 - Vuông góc với đường trung tuyến kẻ từ O của tam giác OPQ với $P(8;0), Q(0;6)$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $2:3:\sqrt{13}$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.
 - Cắt đoạn thẳng UV với $U(3;4), V(-1;-6)$.
- Tìm điều kiện của tham số m để parabol (P) và đường thẳng d có điểm chung.
- Khi (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - Tìm m để M và N nằm khác phía đối với trục tung.
 - Tìm m sao cho $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2(x_1^2 + x_2^2)$.
 - Tìm m để M và N nằm cùng phía đối với đường thẳng $x = 5$.
 - Tìm m để $\frac{x_1 + x_2}{3} > 5x_1x_2 + 7$.
 - Tìm m để $\frac{1}{2x_1 - 1} + \frac{1}{2x_2 - 1} = \frac{1}{2}$.
 - Tìm m thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 3$.
 - Tìm m sao cho $x_1^2 + 2(m-2)x_2 + m + 1 = 9m^2$.
 - Tìm các giá trị của m để $x_1(1-2x_2) + x_2(1-2x_1) = m^2$.
 - Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2$.
 - Tìm giá trị của m sao cho $x_1(5-3x_2) + x_2(5-2x_1) = 2\sqrt{5m-25}$.
 - Tìm m để $(2y_1+1)(2y_2+1) = 33$.
 - Xác định giá trị m sao cho $y_1 + y_2 = \frac{5}{2}(x_1 + x_2) + 6x_1x_2$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P) tại điểm $T(2;4)$.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) với đường cong $y = 6x^3 + 6x^2\sqrt{2x-1} + 2x - 1$.
- Tìm tọa độ điểm $K(x;y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = y^2 - 40\sqrt{10}x + 50$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Xét các điểm $C(-\sqrt{6};0), D(\sqrt{6};0)$. Tìm tọa độ điểm $E(x;y)$ trên parabol (P) sao cho tam giác CDE vuông tại E .
- Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ sao cho khoảng cách từ điểm L đến đường thẳng $\Delta: x - y - 7 = 0$ nhận giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
- Xét các điểm $X(9;0), Y(9;2)$. Tìm tọa độ điểm $Z(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho tam giác XYZ là tam giác cân tại Z .

Bài toán 63. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 2 ; Đề thi tốt nghiệp Trung học cơ sở ; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Khánh Hòa; Năm học 2000 – 2001; Khóa ngày 29.05.2001. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 10x + m - 20$, với m là tham số thực, O là gốc tọa độ.

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm giá trị của m và n để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm $(5;1)$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = -nx + 9m - 6$.
 - Song song với đường thẳng $y = (3n - 7)x + \sqrt{2}$.
 - Cắt đoạn thẳng PQ với $P(2;8)$, $Q(0;12)$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác bằng 10.
 - Đồng quy với ba đường thẳng $2x - 3y + 1 = 0$; $3x - 4y + 1 = 0$; $4x - 7y + 3 = 0$.
 - Tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{101}$.
- Chứng minh rằng nếu (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì luôn có một điểm nằm bên phải của trục tung.
- Tìm giá trị của m để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 - x_2 = 4$.
 - $x_1^3 = x_2$.
 - $x_1^5 - x_2 = -8$.
 - $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} = 3$.
 - $x_1^2 + 10x_2 = m^2 + m - 20$.
 - $(2x_1 + 1)^2 + (2x_2 + 1)^2 = 7m + 8$.
 - $(4x_1 + 7)(4x_2 + 7) = 6x_1x_2 - 13$.
 - $\sqrt{x_1^2 + 10x_2 - m + 20} = m^3 + m$.
 - $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1x_2} = 7$.
 - Biểu thức $S = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1x_2}$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $T = |x_1| + |x_2| + |x_1x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $(5y_1 - 4)(5y_2 - 4) + 4y_1(1 - y_2) + 4y_2(3 - y_1) = 9104$.
 - $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 4 - \frac{3}{x_1x_2}$.
- Tìm giá trị của m để đường thẳng d đã cho cắt đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại điểm $(x;y)$ sao cho biểu thức $R = 2x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 10$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P) biết tiếp tuyến đi qua điểm $(1;-8)$.
- Tìm tọa độ hai điểm C, D thuộc (P) sao cho C và D đối xứng nhau qua điểm $E(4;17)$.
- Tìm điểm $G(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $X = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-5}$ đạt giá trị lớn nhất.
- Xét hai điểm ôn tại hay không $J(x;y)$ trên parabol (P) sao cho tam giác IJK cân tại J ?
- Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $Y = 2x + \sqrt{-y-8x-11}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.
- Tìm tọa độ điểm $H(x;y)$ trên parabol (P) sao cho $\sqrt{y+4x+13} - \sqrt{y+2x+5} = \sqrt{2}$.

Bài toán 64. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 4; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Đà Nẵng; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = m^2 - 2(m-2)x$ với O là gốc tọa độ, m là tham số.

1. Tìm giá trị của m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $(1; -m^2)$.
 - b) Cắt đường thẳng $y = x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 3.
 - c) Song song với đường thẳng $3x - \sqrt{5}y + 4 = \sqrt{2}$.
 - d) Vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $(3; 1)$ và $(9; 4)$.
 - e) Cắt đường thẳng $y = 5x - 2$ tại một điểm R , R nằm trên đường thẳng $y = 9x - 6$.
 - f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có tỷ lệ các cạnh là $3:7:\sqrt{58}$.
2. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) với đường thẳng d trong trường hợp $m = 0$.
3. Tồn tại hay không giá trị m để (P) cắt d tại điểm có hoành độ bằng 1?
4. Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .
5. Xét trường hợp parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$, trong đó $x_1 < x_2$.
 - a) Tìm m sao cho $x_1 + x_2 = 9x_1x_2 + 11$.
 - b) Với giá trị nào của m thì $4(x_1 + x_2) = (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 - 6$?
 - c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = |x_1 - x_2|$.
 - d) Tìm m để $x_1 < 2 < x_2$.
 - e) Tìm giá trị m sao cho $x_1 - x_2 = 2m + 6$.
 - f) Tìm m để M và N đều nằm cùng phía đối với đường thẳng $x = 3$.
 - g) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $|x_1| - |x_2| = 6$.
 - h) Tìm m sao cho $x_1^2 - 2(m-2)x_2 - m^2 = 9$.
 - i) Với giá trị nào của m thì $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7m+6}{m^2}$?
 - j) Tìm biểu thức liên hệ giữa hai hoành độ không phụ thuộc vào tham số m .
 - k) Xác định giá trị m sao cho $y_1 + y_2 = 4x_1x_2 + 10$.
 - l) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = y_1y_2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 15$.
6. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường cong $y = x^2 - 5x + 1$.
7. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P) tại điểm G thuộc (P) , G có tung độ bằng 9.
8. Tìm tọa độ điểm $F(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4y-1} = 1$.
9. Tìm tọa độ điểm $E(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho khoảng cách từ E đến đường thẳng $y = 2x - 3$ đạt giá trị lớn nhất.
10. Tìm điểm $P(x; y)$ thuộc parabol (P) và điểm Q trên đường tròn (C) tâm $J(0; -4)$, bán kính $R = 2$ sao cho độ dài đoạn thẳng PQ ngắn nhất.
11. Tìm tọa độ điểm $H(x; y)$ thuộc parabol (P) và điểm K trên đường tròn (C) tâm $J(4; -4)$, bán kính $r = \sqrt{5}$ sao cho độ dài đoạn thẳng HK ngắn nhất.
12. Xét hai điểm U, V phân biệt nằm trên parabol (P) có hoành độ lần lượt là $a, 2\sqrt{a-1}$. Ký hiệu c và d tương ứng là khoảng cách từ U và V đến trục hoành. Hãy so sánh c và d .
13. Xét điểm X thuộc (P) , X có hoành độ $x_X = \sin \alpha$. Tìm giá trị lớn nhất cho biểu thức $Y = x_X + y_X$.

Bài toán 65. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 2.2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Quảng Ngãi; Năm học 2014 – 2015.

Trong hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (3m+1)x - 2m^2 - m + 1$ với O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

1. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d với $m = -1$.
2. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -20 .
 - b) Đi qua điểm $(-1;0)$ nhưng không đi qua điểm $(1;2)$.
 - c) Song song với đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - d) Vuông góc với tiếp tuyến của (P) , tiếp tuyến này đi qua gốc tọa độ.
 - e) Tiếp xúc với parabol $y = 2x^2$ tại điểm có tung độ bằng 2 .
 - f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $\sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5}$.
 - g) Cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại điểm $Z(x;y)$ sao cho $x^2 + y^2 - 14x + 15$ đạt giá trị nhỏ nhất.
3. Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại một điểm có hoành độ bằng 2 . Tìm giao điểm còn lại.
4. Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .
5. Xét trường hợp parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$,
 - a) Tìm m sao cho $x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 17$.
 - b) Tìm giá trị của m để $(x_1 - x_2)^2 \leq 5x_1x_2 - 2$.
 - c) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai hoành độ độc lập với m .
 - d) Tìm m sao cho $x_1 - x_2 = m$.
 - e) Với giá trị nào của m thì $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3} = 2$?
 - f) Tìm giá trị m để $x_1(x_1 + 2) + x_2(x_2 + 2) = 8x_1x_2 + 13$.
 - g) Tìm m sao cho biểu thức $|x_1 - x_2|$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - h) Tìm m để tồn tại hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 5$.
 - i) Tìm m để biểu thức $B = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.
 - j) Tìm m để $\sqrt{x_1^2 + (3m+1)x + 2m^2 + m - 1} = 2m - 3$.
 - k) Tìm m thỏa mãn $y_1 + y_2 > 4x_1x_2 + 8m + 7$.
6. Tìm tất cả các điểm $L(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho L cách đều hai trục tọa độ.
7. Xét điểm B thuộc parabol (P) , B có hoành độ bằng -2 . Tìm tọa độ điểm C thuộc (P) sao cho tam giác BOC vuông tại O.
8. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $F(0;3)$ và cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt D, E sao cho $DE = 4DF$.
9. Tìm tọa độ điểm $A(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức

$$(\sqrt{y+x+1} + \sqrt{4y+x+1})(\sqrt{5y+1} - \sqrt{2y+1}) = 3x^2.$$
10. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường elipssse (E) có phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
11. Giả sử X và Y là các điểm thuộc nhánh phải của (P) có hoành độ lần lượt x và y sao cho

$$\frac{x}{1+x} + \frac{3y}{1+y} = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $J = xy^3$.

Bài toán 66. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 7; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Tây Ninh; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+1)x - m + 4$ với O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

1. Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 3$.
2. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = 4x - 3$ và parabol (P) .
3. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Không đi qua gốc tọa độ.
 - b) Cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt.
 - c) Đi qua điểm K thuộc đường phân giác góc phần tư thứ nhất, K có tung độ bằng 4.
 - d) Song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(4;1)$ và $(-6;3)$.
 - e) Vuông góc với đường thẳng $3x - 8\sqrt{2}y + 1 = 0$.
 - f) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d đạt giá trị lớn nhất.
 - g) Tạo với tia Oy một góc $\alpha = 60^\circ$.

h) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{3\sqrt{17}}{8}$.

4. Chứng minh parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .
5. Tìm giá trị của m để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho

- a) $x_1 + 2x_2 = 3$.
- b) $4x_1 - x_2 = 2m + 3$.
- c) Các hoành độ đều lớn hơn 1 hoặc đều nhỏ hơn 1.
- d) $x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) > 4m - 9$.
- e) Biểu thức $A = |x_1 - x_2|^3$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- f) Hoành độ điểm này gấp ba lần hoành độ điểm kia.
- g) $x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m - 4 = m^2$.
- h) $\sqrt{x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m - 4} > |3m - 2|$.
- i) $\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} = 4$.
- j) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{3m - 1}$.
- k) $y_1 + y_2 = 4x_1x_2 + 6y_1y_2 - 68$.
- l) $y_1y_2 + x_1x_2 = 3|m - 4|\sqrt{m + 1}$.
- m) $(3y_1 + 5)(3y_2 + 5) - y_1y_2 = (x_1 - x_2)^2 + 375$.

6. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $(1; -15)$ và tiếp xúc với parabol (P) .
7. Gọi A và B là các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng $y = x + 6$. Tìm tọa độ điểm C nằm trên parabol (P) sao cho tam giác ABC cân tại C .
8. Xét hai điểm $D(-3;0)$ và $E(0;3)$. Tìm tọa độ điểm F thuộc parabol (P) sao cho tam giác DEF vuông tại F .
9. Xét ba điểm P, Q, R thuộc parabol (P) có hoành độ thuộc đoạn $[0;2]$ sao cho tổng các hoành độ bằng 3. Chứng minh rằng $3 \leq y_A + y_B + y_C \leq 5$.

10. Tìm tọa độ điểm $G(x; y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{x+3} = \frac{xy + 3y + 9x}{3y + x + 3}$.

Bài toán 67. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Phú Thọ; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m+1)x - m^2$ với O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm $(2;5)$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn -9 .
 - Song song với đường thẳng $y = (10m-5)x + 6$.
 - Vuông góc với đường thẳng $3x - \sqrt{5}y + 7 = 0$.
 - Tạo với đường thẳng $y = 3m - 1$ một góc $\alpha = 60^\circ$.
 - Cắt đường thẳng $y = 3x - 2$ tại điểm $(x;y)$ mà biểu thức $y^2 + (x-6)^2 + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = 1$.
- Giả sử P và Q là hai điểm nằm trên parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 5 . Tìm tọa độ điểm R thuộc trục hoành sao cho P, Q, R thẳng hàng.
- Với giá trị nào của m thì parabol (P) tiếp xúc với parabol (P) ? Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Khi parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 , hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m .
- Tìm giá trị của m để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1^2 + x_2^2 = 6x_1x_2 + 7(x_1 + x_2) = -6$.
 - $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} = 1$.
 - $x_1 - x_2 = 2m - 1$.
 - $|x_1 - x_2| = 9$.
 - Biểu thức $P = x_1x_2 + x_1 + x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $x_1 > 3 > x_2$.
 - $x_1 > x_2 > 2$.
 - $x_1^2 + (2m+1)x_2 + m^2 = 9$.
 - $\sqrt{x_1^2 + (2m+1)x_2 + m^2} = |3m-2|$.
 - $3y_1 + 3y_2 - 2 = 5x_1x_2 + (x_1 - x_2)^2$.
 - $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{7}{m}$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của (P) biết tiếp tuyến đi qua điểm $(1; -24)$.
- Tìm tọa độ điểm $H(x;y)$ trên parabol (P) sao cho $\sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2y - x - 2$.
- Giả sử a và b là hoành độ các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng $y = 2x + 4$. Tính tổng các lũy thừa bậc 7 của a và b .
- Xét hai điểm $D(3;2), E(4;3)$. Tìm tọa độ điểm F trên parabol (P) sao cho tam giác DEF cân tại F .
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường tròn (C) có tâm $(0; -4)$, bán kính $R = 5$.
- Xét điểm $L(u;v)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $v + v^2 + u^3 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = v - uv + 2u^3$.
- Tìm tọa độ hai điểm A và B trên parabol (P) sao cho $AC = 3CB$ trong đó $C(4;19)$.

Bài toán 68. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hưng Yên; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x - m - 3$, với O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

1. Vẽ parabol (P) và đường thẳng d khi $m = 2$.
2. Tìm giá trị của tham số m và n để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Đi qua trung điểm của đoạn thẳng OX với $X(4;2)$.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = mx + 2n$.
 - c) Song song với đường thẳng $y = -mx + 4n - 9$.
 - d) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn hơn 8.
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \sqrt{5}$.
 - f) Cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại điểm $K(x;y)$ sao cho $S = \frac{xy - x - y + 2011}{y^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
3. Tìm giá trị của m để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) $x_1 - x_2 = 13$.
 - b) M và N nằm khác phía đối với trục Oy.
 - c) $x_1^3 - x_2 = 0$.
 - d) $x_1^3 + x_2^2 + 8x_1 = 9 + x_2$.
 - e) $x_1^3 + x_2^3 = 8$.
 - f) M, N và điểm $(2017; 2018)$ tạo thành ba điểm thẳng hàng.
 - g) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{8}{9}x_1x_2$.
 - h) $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2 + 2} = 3$.
 - i) M và N nằm cùng phía đối với đường thẳng $x = 3$.
 - j) $x_1^2 + 2x_2 + m + 3 = \frac{4}{9}m^2$.
 - k) $(x_2^2 + 2x_1 + m + 3)(x_1^2 + 2x_2 + m + 3) > m^2$.
 - l) $(y_1 + 4)(y_2 + 4) = (x_1 - x_2 + 1)(x_2 - x_1 + 5) + 167$.
 - m) $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} > \frac{17}{64}$.
 - n) $5(x_2^2 + 2x_1 + m + 3)(x_1^2 + 2x_2 + m + 3) = m^2$.
4. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $(1; 0,75)$ và tiếp xúc với parabol (P) .
5. Tìm tọa độ điểm $H(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho $|2x - 1| + |2x + 1| = |y - 1| + 1$.
6. Xét điểm $L(x;y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $y + y^2 - xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = y^2 + y^4 - y^3$.
7. Xét hai điểm $U(0;1)$ và $V(2b;-1)$, với b là tham số thực. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng UV tiếp xúc với parabol (P) .
8. Xét hai điểm $D(3 + \sqrt{17}; 0), D(3 - \sqrt{17}; 0)$. Tìm tọa độ điểm F thuộc parabol (P) sao cho tam giác DEF vuông tại F .

Bài toán 69. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu II; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Quảng Ninh; Năm học 2012 – 2013; Khóa ngày 28.06.2012.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = ax + 2$, với O là gốc tọa độ, a là tham số thực.

1. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d với $a = 1$.
2. Tìm giá trị của tham số a sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm G nằm trên (P) , G có tung độ bằng 9.
 - b) Song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(0;0)$ và $(5;6)$.
 - c) Vuông góc với trung tuyến AD của tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(5;1)$.
 - d) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $3:8:\sqrt{73}$.
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.
 - f) Đồng quy với hai đường thẳng $y = 7x - 2$; $y = 8x - 5$.
 - g) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{2}$.
3. Tìm a để parabol (P) cắt đường thẳng d tại một điểm có hoành độ bằng 4.
4. Chứng minh parabol (P) và đường thẳng d luôn có hai giao điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung với mọi giá trị của a .
5. Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d luôn có giao điểm với hoành độ x_0 nào đó thỏa mãn bất đẳng thức $|x_0| \geq \sqrt{2}$.
6. Tìm giá trị của a để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) $2x_1 - x_2 = 5$.
 - b) $x_1^2 + ax_2 - 2 = 9a^4$.
 - c) $x_1^4 + x_2^4 = 8$.
 - d) M và N đều có hoành độ nhỏ hơn 2.
 - e) $x_1 - x_2 = 5a$.
 - f) $\frac{x_2}{x_1 - 3} + \frac{x_1}{x_2 - 3} = -\frac{1}{4}$.
 - g) $(x_1^2 + ax_2 - 2)(x_2^2 + ax_1 - 2) \leq 2a^4 - 1$.
 - h) Biểu thức $N = x_1^2 + (x_1 + 2)(x_2 + 2) + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất.
 - i) Biểu thức $P = (x_1^2 + 4)(x_2^2 + 9)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - j) $(3y_1 - 1)(3y_2 - 1) = x_1x_2 + (x_1 - x_2)^2 + 15$.
 - k) $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} > a$.
 - l) Tung độ điểm này gấp 16 lần tung độ điểm kia.
 - m) $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{\sqrt{a^2 + 36} - 2}{4}$.
7. Tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường cong $y = x^3 + x^2 - 12x + 16$.
8. Xét hai điểm E và F có hoành độ lần lượt là u và v đều thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{u+v}{y_E - uv + y_F}$.
9. Tìm tọa độ các điểm H, K lần lượt thuộc parabol (P) và đường thẳng $y = x - 9$ sao cho độ dài đoạn thẳng HK là ngắn nhất.

Bài toán 70. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 11; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Lâm Đồng; Năm học 2012 – 2013; Khóa ngày 26.06.2012.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-2)x + 3m^2 - 2$, với O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 1$.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol và đường thẳng khi $m = 2$.
- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm $(1; -1)$.
 - Song song với đường phân giác góc phần tư thứ IV.
 - Tạo với đường thẳng đi qua hai điểm $(4; 2)$, $(7; 3)$ một góc $\alpha = 90^\circ$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 1.
 - Cắt trục tung tại điểm K , K nằm trên đoạn thẳng OH với $H(0; 10)$.
 - Tạo với đường thẳng $x = 6\sqrt{2}$ một góc $\alpha = 45^\circ$.
 - Tạo với đường thẳng $y = 7\sqrt{3}$ một góc $\beta = 60^\circ$.
 - Cắt đường thẳng $y = x + 26$ tại điểm $J(x; y)$ sao cho biểu thức $Q = (x + y)^2 - 224x + 4xy + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d luôn có hai điểm chung phân biệt với mọi giá trị m .
- Tìm giá trị của m để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 + x_2 = 5x_1x_2 - 10$.
 - $x_1 - x_2 = 2m + 1$.
 - $x_1^2 - x_2^2 = 5(m - 2)$.
 - M và N nằm trên nhánh phải của (P) .
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$.
 - $\frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3} = 2$.
 - M và N nằm bên phải đường thẳng $x = 1$.
 - $x_1(2 - x_2) + x_2(2 - x_1) = -2$.
 - Biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $x_1^2 + 2(m - 2)x_2 - 3m^2 + 2 = 4(m - 2)^4$.
 - $\sqrt{x_1^2 + 2(m - 2)x_2 - 3m^2 + 2} = |3m - 7|$.
 - $y_1 + y_2 = 5x_1x_2 - 6x_1 - 6x_2 + 8$.
 - Biểu thức $T = \sqrt{y_1 + y_2} - 8(x_1 + x_2) + 10m^2 + 40$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm $A(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $\sqrt{2x - 1} + y - 3x + 1 = 0$.
- Chứng minh parabol (P) và đường cong $y = x^7 - x^6 + 7x - 6$ chỉ có duy nhất một điểm chung.
- Tìm tọa độ điểm $B(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $Z = \frac{y + 2x - 1}{y - 2x + 3}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
- Xét hai điểm $C(4; 0)$, $D(6; 4)$, tìm tọa độ điểm E trên parabol (P) sao cho tam giác CDE cân tại E .
- Xét điểm $U(6; 3)$, tìm tọa độ điểm V thuộc parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng UV nhận giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài toán 71. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Kiên Giang; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 4x - 4m - 3$, trong đó O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

1. Tìm giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 2.
 - b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ thuộc khoảng (2;5).
 - c) Song song với đường thẳng $y = 4x - 2m - 5$.
 - d) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{m}x + 7$.
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{16}$.
 - f) Cắt đường thẳng $y = 3x + 5$ tại một điểm nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ IV.
 - g) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{3\sqrt{17}}{8}$.
 - h) Cắt đường thẳng $y = x + 3$ tại điểm $R(x; y)$ sao cho biểu thức $S = x^2 + 2y^2 + 3xy + 4x + 5y + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.
2. Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại điểm có hoành độ bằng 2. Tìm tọa độ giao điểm thứ hai.
3. Giả sử (P) cắt đường thẳng d tại điểm X có hoành độ bằng 3 và cắt trục hoành tại điểm Y. Tìm độ dài đoạn thẳng XY.
4. Tìm giá trị của m để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 4(x_1 + x_2)$.
 - b) $x_1 - x_2 = 6$.
 - c) $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{3}$.
 - d) $\frac{1}{3x_1 + 5} + \frac{1}{3x_2 + 5} = \frac{2}{7}$.
 - e) $x_1^5 - x_2 = -2$.
 - f) $x_1^3 + x_1^2 + 4x_1 = 2x_2$.
 - g) $x_1^2 + 4x_2 + 4m + 3 = 9m^2$.
 - h) Biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị là 9.
 - i) $y_1 + y_2 + y_1y_2 = 9x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 12$.
 - j) $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{2m - 5}{(4m + 3)^2}$.
 - k) $(6y_1 - 1)(6y_2 - 1) = 4y_1y_2 + 5x_1 + 5x_2$.
5. Tìm tọa độ điểm H(x; y) trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $4y - 2x + 1 = 3x\sqrt{2x - 1}$.
6. Tìm tọa độ hai điểm D, E thuộc parabol (P) sao cho D và E đối xứng với nhau qua điểm F(4;17).
7. Tìm tọa độ điểm K(x; y) thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $T = (x^2 - 2x + 3)(y^4 - 2y^2 + 6)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
8. Tìm tọa độ điểm K(x; y) nằm trên parabol (P) sao cho biểu thức $S = y^2 - 6\sqrt{6}x + 23$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 72. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Nghệ An; Năm học 2012 – 2013; Khóa ngày 24.06.2012.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x - m^2 + 6$, trong đó O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ với $m = 3$.
- Tìm giá trị của tham số m và n để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm $(1;4)$.
 - Cắt đường thẳng $y = x + 4$ tại điểm có tung độ bằng 6.
 - Song song với đường thẳng $y = 3mx - n$.
 - Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ IV.
 - Tạo với đường thẳng $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ một góc $\alpha = 45^\circ$.
 - Cắt trục tung tại điểm A , A nằm trong đoạn thẳng OB với $B(0;5)$.
- Chứng minh parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .
- Tìm giá trị của m để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - Một trong hai điểm có hoành độ bằng 3.
 - $x_1^2 + x_2^2 = 16$.
 - Một trong hai điểm có hoành độ bằng $2m$.
 - $\frac{1}{2x_1 - 3} + \frac{1}{2x_2 - 3} = \frac{6}{11}$.
 - M và N đều nằm trên nhánh phải của (P) .
 - $x_1 - x_2 = 2m + 6$.
 - $x_1 > x_2 > 4$.
 - $x_1^2 + 2(m-1)x_2 + m^2 = 15$.
 - Biểu thức $K = x_1^2 + x_2^2$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - $\sqrt{x_1^2 + 2(m-1)x_2 + m^2} = |3m - 1|$.
 - $[x_2^2 + 2(m-1)x_2 + m^2 - 6](m-1) \leq 24$.
 - $y_1 + y_2 = 4x_1x_2 + x_1 + x_2$.
 - $x_1y_2 + x_2y_1 + 10(m-1) = 0$.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường elipipse $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- Điểm $(x;y)$ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số để các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d đều là điểm nguyên.
- Tìm tọa độ điểm $P(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $x^3 + y + 5x + 1 = 2(x+3)\sqrt{2x-1}$.
- Tìm tọa độ điểm $Q(x;y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $f(x;y) = \frac{y - (x-4y)^2}{y(1+4y)}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có).
- Tìm tất cả các giá trị của tham số n để parabol (P) cắt đường thẳng $y = x + 2n$ tại điểm $T(x;y)$ sao cho biểu thức $T = \frac{y + 4x\sqrt{2} + 3}{1+y}$ nhận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có).
- Tìm tọa độ điểm R thuộc parabol (P) và điểm S thuộc đường thẳng $\Delta: y = 3x - 10$ sao cho độ dài đoạn thẳng RS ngắn nhất.

Bài toán 73. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Phú Thọ; Năm học 2012 – 2013; Khóa ngày 26.06.2012.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-3)x + 1$, trong đó O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ với $m = 1$.
- Tìm giá trị của tham số m và n để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm $(-4; 2)$.
 - Cắt tia Ox.
 - Cắt đường phân giác góc phần tư thứ III tại điểm có tung độ bằng 4.
 - Song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(3; 1)$ và $(-5; 7)$.
 - Vuông góc với đường thẳng $2x - 5y + 4 = 0$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $2:3:\sqrt{13}$.
 - Tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{17}}$.
- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại điểm $K(x; y)$ sao cho biểu thức $S = x^2 + (2y - 3)^2 + 4xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Chứng minh parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .
- Chứng minh parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt, trong đó một điểm có hoành độ x_0 nào đó thỏa mãn $|x_0| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Tìm giá trị của m để parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - $5(x_1 + x_2) > 4x_1x_2 + 6$.
 - $x_1^2 + x_2^2 = 6$.
 - $x_1^2 + 2(m-3)x_2 - 1 = 9m^2$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$.
 - Độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất.
 - $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} \geq -\frac{12}{31}$.
 - $x_1 - 2x_2 = 3$.
 - $x_1y_2 + x_2y_1 > \sqrt{2}$.
 - $(2y_1 + 7)(2y_2 + 7) = 4x_1x_2 - 5$.
 - Biểu thức $A = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.
 - Biểu thức $B = x_1y_2 + x_2y_1 + 4(y_1 + y_2) - y_1y_2$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - $\sqrt{x_1^2 + 2(m-3)x_2 - 1} = 7|m-3| - 11$.
- Tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $S = 16y^2 - 8x + 7$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm $E(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $xy + (5x - 6)\sqrt{4x - 3} = 0$.
- Điểm $(x; y)$ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số để các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d đều là điểm nguyên.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường ellipse: $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Bài toán 74. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 5.a; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2003 – 2004.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = -2mx - m^2 + 2$, trong đó O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một mặt phẳng khi $m = 1$.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = 0$.
- Tìm giá trị của m và n để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm $(1; -1)$.
 - Song song với đường thẳng $2x - 3y + \sqrt{5} = 0$.
 - Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn 1.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $2:9:\sqrt{85}$.
 - Tạo với đường thẳng $y = \sqrt{2017} + \sqrt{2016}$ một góc $\alpha = 60^\circ$.
 - Cắt đường thẳng $y = x + 4$ tại điểm $F(x; y)$ sao cho biểu thức $x^2 + 2y^2 + xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Trong trường hợp parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - Tìm m để một trong hai điểm có hoành độ bằng 2.
 - Tìm m để ít nhất một trong hai giao điểm nằm trên nhánh phải (P) .
 - Tìm hệ thức liên hệ giữa hai hoành độ độc lập với m .
 - Với giá trị nào của m thì hai giao điểm đều có hoành độ lớn hơn 4.
 - Tìm m sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.
 - Tìm giá trị m sao cho $x_1 + x_2 - 4x_1x_2 = 1$.
 - Tìm m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 = 5$.
 - Tìm giá trị của m sao cho $2x_1^2 - 2mx_2 + m^2 - 2 = m^4$.
 - Với giá trị nào của m thì $\sqrt{2x_1^2 - 2mx_2 + m^2 - 2} = |3m - 1|$.
 - Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$.
 - Tìm m để $y_1 + y_2 + (x_1 - x_2)^2 = 2x_1x_2 - 10$.
 - Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và cắt parabol theo một dây cung có độ dài bằng $\sqrt{5}$.
- Điểm $(x; y)$ được gọi là điểm nguyên khi x và y đều là các số nguyên. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số để các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d đều là điểm nguyên.
- Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn điều kiện $9x + \frac{1}{2}y + 20 \leq 2\sqrt{3x + 10}$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $G(2; 10)$ và cắt parabol (P) theo dây cung DE sao cho đoạn thẳng DE nhận G làm trung điểm.
- Tìm tọa độ điểm $H(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn điều kiện $\sqrt{\frac{1}{2}y + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.
- Tính khoảng cách ngắn nhất giữa parabol (P) và đường thẳng $y = -x - 5$.
- Xét hai điểm $A(4; 0), B(10; 2)$. Tìm tọa độ điểm C trên parabol (P) sao cho tam giác ABC cân tại C .
- Tìm điểm $T(x; y)$ trên nhánh phải parabol (P) sao cho biểu thức $S = x + \sqrt{\frac{y}{2} + \frac{8}{x}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 75. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 3; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Phòng Giáo dục và Đào tạo Thị xã Hà Đông; Tỉnh Hà Tây; 2003 – 2004.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x - 2m^2 + 3m - 1$, trong đó O là gốc tọa độ, m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) .
- Trong trường hợp $m = \frac{1}{2}$:
 - Tính góc tạo bởi đường thẳng d với chiều dương trục tung.
 - Tìm tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng d với parabol (P) .
 - Tìm tọa độ điểm C trên đường thẳng $y = 3x - 8$ sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Tìm giá trị của m và n để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - Đi qua điểm $(1; -1)$.
 - Song song với đường thẳng $y = 3x - 2$.
 - Song song với đường thẳng $2x - 3y + n = 4$.
 - Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn -1 .
 - Vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $(1;4)$ và $(2;7)$.
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $1:3:\sqrt{10}$.
- Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d có điểm chung khi $0 \leq m \leq 1$.
- Trong trường hợp parabol (P) và d cắt nhau tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - Tìm m để một trong hai điểm có hoành độ bằng 2.
 - Tìm m để M và N nằm khác phía đối với trục tung.
 - Chứng minh $|x_1 + x_2 + x_1x_2| \leq \frac{9}{8}$.
 - Tìm m để M và N đều nằm trên nhánh trái của (P) .
 - Tìm giá trị của m sao cho $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 5$.
 - Tìm m để $x_1^2 + 2(m-1)x_2 + 2m^2 - 3m + 1 = m^2$.
 - Tìm m để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7m^2 - 2}{2m^2 - 3m + 1}$.
 - Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.
 - Tìm giá trị của m để $y_1 + y_2 + 19 = 9x_1x_2 + x_1(3 - x_2) + x_2(3 - x_1)$.
- Tìm tọa độ điểm $P(x_0; y_0)$ nằm trên parabol (P) , trong đó x_0 là số nhỏ nhất trong các số x thỏa mãn

$$\begin{cases} xb + bc + cx = 1 \\ x^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases}$$
- Tìm tất cả các điểm $Q(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $(x+4)^2 - 6\sqrt{xy+3x} = 13$.
- Tìm tọa độ hai điểm U, V nằm trên parabol (P) sao cho U và V đối xứng với nhau qua điểm $R(1;5)$.
- Xét hai điểm D, E nằm trên parabol (P) , D và E có hoành độ lần lượt là -2 và 4 . Tìm tọa độ điểm F thuộc trục hoành sao cho tam giác DEF cân tại F .
- Tìm tọa độ điểm $G(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $T = 2\sqrt{y+1} + \sqrt{8y-36x+49}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm $S(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $y^2 + 12 = 8x\sqrt{2}$.

Bài toán 76. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 4 ; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT ; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Khánh Hòa; Năm học 2003 – 2004; Khóa ngày 09.07.2004.

Trong mặt phẳng với tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = -2(m+1)x - m^2 - 4m - 3$, trong đó O là gốc tọa độ, m là tham số thực với m là tham số thực.

1. Vẽ parabol (P) .
2. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = -1$.
3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Đi qua điểm $(1; -12)$.
 - b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.
 - c) Song song với đường thẳng $4y = 6x - 10$.
 - d) Vuông góc với đường thẳng $4x + y - 2 = 0$.
 - e) Tạo với đường thẳng $y = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ một góc $\alpha = 60^\circ$.
 - f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh góc vuông là $2:5:\sqrt{29}$.
 - g) Cắt đường thẳng $y = x - 18$ tại điểm $Z(x; y)$ sao cho biểu thức $H = \sqrt{3-x} + \sqrt{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất.
4. Tìm m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng 2.
5. Khi parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$:
 - a) Tìm m để $x_1 + x_2 = 4x_1x_2 - 1$.
 - b) Tìm m để hai giao điểm đều có hoành độ dương.
 - c) Tìm m để $2x_1^2 - 2(m+1)x_2 + 4m + 3 = 3m^2$.
 - d) Với giá trị nào của m thì $\sqrt{2x_1^2 - 2(m+1)x_2 + m^2 + 4m + 3} = |1 - m|$?
 - e) Tìm m để $x_1 > 2 > x_2$.
 - f) Tìm m sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{3}$.
 - g) Tìm tất cả các giá trị m sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 6(x_1 + x_2) - 4$.
 - h) Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = 3(x_1 + x_2) + 10$.
 - i) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 + 7(x_1 + x_2) - 10x_1x_2$.
 - j) Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |x_1 + x_2 + 5m|$.
 - k) Tìm giá trị tham số m sao cho $y_1 + y_2 = 3x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) - 5$.
 - l) Xác định tham số m để $x_1y_2 + x_2y_1 = 7(m+1)^3$.
6. Tìm tọa độ điểm $Y(x; y)$ trên parabol (P) có hoành độ $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.
12. Tìm tọa độ tất cả các điểm $G(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $T = \frac{x^2 - 6x + y + 14}{y + 5}$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có).
7. Xét điểm $X(x; y)$ thuộc parabol (P) có hoành độ $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Chứng minh rằng tung độ y của X nằm trong khoảng $(648; 722)$.
8. Tìm tất cả các điểm $A(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{4x-1} + \sqrt{2y-1} \leq 1$.
9. Xét hai điểm U, V nằm trên parabol (P) có hoành độ tương ứng là -3 và 5 . Tìm tọa độ điểm T trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất sao cho tam giác UVT cân tại T .

Bài toán 77. Mở rộng và phát triển câu 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường Trung học thực hành; Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh; Quận 5; Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2015 – 2016.

Trong mặt phẳng với tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $D: y = \frac{1}{2}x + m^2$, trong đó O là gốc tọa độ, m là tham số thực với m là tham số thực.

1. Vẽ parabol (P) .
2. Cho $M(1; m)$ và $N(2; n)$. Tìm m và n để M thuộc (P) và N thuộc (D) .
3. Cho $m = \sqrt{2}$. Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng bằng phép toán.
4. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (D) thỏa mãn
 - a) Song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - 3m$.
 - b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 100.
 - c) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 32.
 - d) Cắt đoạn thẳng OP với $P(0; 4)$.
5. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , parabol (P) và đường thẳng (D) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
6. Đồ thị parabol (P) bao gồm nhánh trái và nhánh phải. Gọi hai giao điểm phân biệt của parabol (P) với đường thẳng (D) là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
 - a) Chứng minh A và B thuộc hai nhánh khác nhau của (P) .
 - b) Giả sử B thuộc nhánh phải của (P) , so sánh các khoảng cách từ A và B đến trục tung.
7. Tìm m để (P) và (D) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) Một trong hai điểm A, B có hoành độ bằng 3.
 - b) $x_1 + x_2 - 5x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 + 1$.
 - c) $\frac{1}{x_1 + 4} + \frac{1}{x_2 + 4} = \frac{8}{15}$.
 - d) $x_1^3 + 3x_1 - x_2 = 39$.
 - e) $x_1^4 + x_2^4 = 82$.
 - f) $\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{3x_2 + 4} = \frac{14}{13}$.
 - g) $\sqrt{x_1 - x_2} + \sqrt{x_2 + 2} = 3$.
 - h) $x_1^2 + 2x_2 - 4m^2 = 4m^4$.
 - i) $y_1 - y_2 = 2$.
 - j) $y_1 - y_2 + x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 = 9$.
 - k) Biểu thức $S = y_1 + y_2 + 4x_1x_2 - m$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - l) Biểu thức $T = |x_1 - x_2|(m^2 + 3)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
8. Tìm tọa độ điểm $M(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho điểm M cách đều hai trục tọa độ.
9. Xét hai điểm C, D thuộc parabol (P) có hoành độ tương ứng là $-a$ và b , a và b là các số thực dương. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để tam giác COD vuông tại O.
10. Xét hai điểm H, K thuộc parabol (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 8 . Tìm tọa độ điểm T thuộc trục tung sao cho $HTKO$ là tứ giác nội tiếp.

Bài toán 78. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m-1)x - m^2 + m + 6$, trong đó m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = 2$.
- Với giá trị nào của m thì (P) cắt d tại gốc tọa độ? Tìm giao điểm thứ hai.
- Tìm giá trị của tham số m và n để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm $(1;7)$.
 - Song song với đường phân giác của góc phần tư thứ IV.
 - Vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + n - 9 = 0$.
 - Vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $(3;1)$ và $(4;9)$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có một góc nhọn $\alpha = 30^\circ$.
- Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m . Tìm mối liên hệ giữa hai hoành độ giao điểm, mối quan hệ này độc lập với tham số m .
- Giả sử (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, chứng minh biểu thức $T = |x_1 - x_2|$ có giá trị không đổi.
- Xác định giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 + 2x_2 = 5m + 6$.
 - $(2x_1 - 1)(2x_2 - 3) = 9$.
 - Hoành độ điểm này gấp rưỡi hoành độ điểm kia.
 - $|x_1^3 - x_2^3| = 35$.
 - A và B đều có hoành độ nhỏ hơn 3.
 - $x_1^2 - 3x_2^2 = 9x_1 - 2x_1x_2 + 10x_2 + 1$.
 - $-5 < x_1 < x_2 < 5$.
 - $-2 < x_1 < x_2 - 3 < 5 - 2m$.
 - $\sqrt{x_2^2 + (2m-1)x_1 + m^2 - m - 6} = |4m - 3|$.
 - $y_1 - y_2 = 7x_1$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{|y_1 - y_2|}{m^2 - m - 6}$.
 - Biểu thức $S = 2(y_1 + y_2) + 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Biểu thức $K = |x_1^3 - x_2^3|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Có bao nhiêu điểm $Q(x; y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức sau

$$x(3y+1) = (9x-5)\sqrt{3x-2} \quad ?$$
- Tìm tọa độ tất cả các điểm $M(x; y)$ (M khác gốc tọa độ) nằm trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ M đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ M đến trục tung.
- Tìm tất cả các điểm $N(x; y)$ trên parabol (P) sao cho biểu thức $Z = \sqrt{y-10x+74} - \sqrt{y+2x+2}$ đạt giá trị lớn nhất.
- Xét hai điểm C, D nằm trên (P) ; C và D có hoành độ tương ứng là $-a$ và b , a và b là các số thực dương. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để tam giác COD vuông tại O .
- Xét hai điểm H, K nằm trên (P) có hoành độ tương ứng là -4 và $0,25$. Tìm tọa độ tất cả các điểm T trên trục tung sao cho tứ giác $OHTK$ là tứ giác nội tiếp.

Bài toán 79. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x + m + 3$, với m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) .
- Khi $m = -3$, tìm tọa độ hai giao điểm của parabol (P) với đường thẳng d . Tính khoảng cách giữa hai điểm đó.
- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm X , X thuộc (P) và có hoành độ bằng 3.
 - Vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm $(4;2)$ và $(-5;1)$.
 - Song song với trục hoành.
 - Cắt đường phân giác góc phần tư thứ III tại điểm có tung độ bằng 4.
 - Cắt đoạn thẳng OY với $Y(0;7)$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có góc $\alpha = 30^\circ$.
 - Cắt đường thẳng $y = 3x - 2$ tại $Z(x;y)$ thỏa mãn biểu thức $K = 6xy + x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m .
- Xác định giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - Một trong hai điểm có hoành độ bằng 3.
 - $x_1 + x_2 = 5x_1x_2 + 10m - 3$.
 - Hai nghiệm cùng âm.
 - $5(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = 6$.
 - $2x_1 + 3x_2 = 9$.
 - Hai điểm đều có hoành độ nhỏ hơn 3.
 - $\frac{1}{x_1 + 4} + \frac{1}{x_2 + 4} = 4$.
 - $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$.
 - $x_1^2 + 2(m-1)x_2 - m - 3 = \frac{\sqrt{m-1}}{2}$.
 - $x_1^3 + x_1^3 + x_1x_2 = -4$.
 - Tung độ điểm này gấp 9 lần tung độ điểm kia.
 - Biểu thức $S = 6(y_1 + y_2) - 5x_1x_2 + x_1 + x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $(3y_1 + 1)(3y_2 + 1) = x_1^2(1 - 2x_2^2) + x_2^2(1 - 3x_1^2)$.
 - Biểu thức $T = \sqrt{x_1^2 + 2(m-1)x_2 - m - 3} + |2m - 9|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Có bao nhiêu điểm $Q(x;y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $x(6+y) = (2x+5)\sqrt{2x-1}$.
- Tìm tọa độ tất cả các điểm $M(x;y)$ (M khác gốc tọa độ) nằm trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ M đến trục hoành gấp 5 lần khoảng cách từ M đến trục tung.
- Xét hai điểm H, K nằm trên (P) có hoành độ tương ứng là -8 và $0,125$.
 - Chứng minh tam giác HKO vuông.
 - Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HKO .
 - Tìm tọa độ tất cả các điểm T trên trục tung sao cho tứ giác $OHTK$ là tứ giác nội tiếp.
- Tìm tất cả các điểm $P(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn $2 - y = \sqrt{2 - x}$.
- Điểm $C(x;y)$ được gọi là điểm nguyên nếu x và y đều là các số nguyên. Tìm tất cả các điểm nguyên $(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn bất đẳng thức $\frac{\sqrt{51-2x-y}}{1-x} < 1$.

Bài toán 80. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+1)x - 4m$ với m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm Z thuộc (P) , Z có hoành độ bằng 5.
 - Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - Song song với đoạn thẳng XY với $X(1;3)$, $Y(-5;2)$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ thuộc đoạn $[2;9]$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{16}{3}$.
 - Cắt đường thẳng $y = 4x - 3$ tại điểm $T(x;y)$ sao cho ba điểm T , $U(4;2)$, $V(7;3)$ tạo thành ba điểm thẳng hàng.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $2:5:\sqrt{29}$.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d khi $m = -3$.
- Biện luận theo tham số m giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d .
- Xác định giá trị của tham số m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ sao cho
 - Một trong hai điểm có hoành độ bằng $m-1$.
 - $x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)x_1x_2 = 4$.
 - Hai giao điểm nằm khác phía đối với trục tung.
 - $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) \leq 6$.
 - A và B đều có hoành độ lớn hơn 1.
 - $x_1 < 5 < x_2$.
 - $4(x_1^2 + x_2^2) - 3(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)^2 = 66$.
 - $|x_1^3 + x_2^3| = 16$.
 - $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2\sqrt{2}$.
 - Tung độ điểm này gấp 25 lần tung độ điểm kia.
 - $\frac{1}{x_1} + 2x_2 = \frac{25}{6}$.
 - $\sqrt{2x_1 - x_2} + \sqrt{x_2 - 3} = 1$.
 - Biểu thức $S = y_1 + 2y_2 + 3x_2 + 4x_2 + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $(2y_1 + 1)(3y_2 + 1) = 4x_1x_2 + 5x_1y_2$.
 - Biểu thức $Q = 10 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.
 - Biểu thức $T = \frac{1}{y_1} + \frac{2}{y_2} - \left(\frac{3}{x_1} + \frac{4}{x_2}\right) + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm giá trị nguyên của m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.
- Tìm hai điểm M, N nằm trên parabol (P) sao cho M và N đối xứng với nhau qua điểm $Q(-1;10)$.
- Tìm tọa độ các điểm $D(x;y)$ trên parabol (P) thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-y} \geq 3$.
- Tìm tọa độ tất cả các điểm $E(x;y)$ trên parabol (P) sao cho $(x+2)\sqrt{y+1} + (x-2)\sqrt{x+y+1} = x$.

Bài toán 81. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2(m+2)x + 4m + 12$ với m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 0$.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng d khi $m = 5$.
- Tìm giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm X , X thuộc (P) , X có hoành độ bằng -3 .
 - Vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + 5 = 0$.
 - Song song với đường thẳng đi qua O và điểm $Y(4;2)$.
 - Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d bằng $\frac{12}{\sqrt{17}}$.
 - Cắt đoạn thẳng UV với $U(1;1)$, $V(3;5)$.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $3:5:\sqrt{34}$.
- Tìm tọa độ điểm Z cố định mà đường thẳng d luôn luôn đi qua với mọi giá trị của m , từ đó tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , đường thẳng d và parabol (P) luôn có điểm chung.
- Tìm giá trị của m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm M và N với $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện
 - $x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 = 104$.
 - $|x_1 - x_2| = 8$.
 - $x_1 = x_2^2$.
 - $|x_1^3 - x_2^3| = 19$.
 - $2x_1 = x_2 + 14$.
 - M và N nằm khác phía đối với đường thẳng $x = 5$.
 - Tung độ điểm này gấp 4 lần tung độ điểm kia.
 - $-3 < x_1 < x_2 < 4$.
 - M và N nằm trong khoảng giữa trục Oy và đường thẳng $x = 4$.
 - Biểu thức $F = x_1^2 + 2x_2^2$ đạt giá trị bé nhất.
 - $\sqrt{x_1^2 - 2(m+2)x_2 - 4m - 12} = x_1 + 2x_2$.
 - M và N nằm trong khoảng giữa trục hoành và đường thẳng $y = 9$.
 - $y_1 + y_2 = 6y_1y_2 - x_2 + 156$.
 - Biểu thức $S = y_1y_2 + x_1x_2 + x_1 + y_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ tất cả các điểm $Q(x; y)$ (Q khác gốc tọa độ) nằm trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ M đến trục hoành bằng khoảng cách từ Q đến đường thẳng $x = 2$.
- Tìm tọa độ điểm C thuộc (P) sao cho C cách đều hai điểm $A(4;0)$, $B\left(-\frac{8}{5}; \frac{14}{5}\right)$.
- Tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $xy - 4y + 5x = 2\sqrt{x-1}$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $\left(1; \frac{3}{4}\right)$ và tiếp xúc với parabol (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Xét hai điểm $E(1;1)$, $F(3;9)$. Tìm tọa độ điểm G thuộc (P) sao cho tam giác EFG vuông tại E .
- Xét ba điểm K, I, J trong đó $K(1;1)$, I và J nằm trên (P) ; I và J có hoành độ tương ứng là $-a$ và b , a và b là các số thực dương. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để tam giác IKJ vuông tại K .

Bài toán 82. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+1)x - m + 4$ với m là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 0$.
- Tìm giá trị của m để parabol (P) và đường thẳng d cùng đi qua điểm $X(1;n)$, n là hằng số thực.
- Tìm giá trị tham số m sao cho đường thẳng d thỏa mãn
 - Đi qua điểm cố định của đường thẳng $y = (n-2)x + 3n - 9; n \in \mathbb{R}$.
 - Vuông góc với đường thẳng $2x - 3y + 6 = 0$.
 - Song song với đường thẳng $10x - y + 16 = 0$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 13.
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{24}$.
- Chứng minh parabol (P) luôn cắt đường thẳng d với mọi giá trị của m .
- Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai giao điểm M và N với tọa độ $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện
 - Một trong hai giao điểm có hoành độ bằng 2.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{8}$.
 - M và N đều nằm trong góc phần tư thứ nhất.
 - $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) \leq 2$.
 - Biểu thức $Q = 3x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$ nhận giá trị nhỏ nhất.
 - $|x_1 - x_2| \leq 2\sqrt{17}$.
 - Ít nhất một trong hai giao điểm nằm bên phải trục tung.
 - $x_1 > 3 > x_2$.
 - Biểu thức $S = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - M và N nằm trong khoảng hai đường thẳng $x = 3; x = 5$.
 - $y_1 - y_2 = 4(m^2 - 1)$.
 - $y_1 + y_2 + 82 < 5y_1y_2 + x_1(3 - x_2) + x_2(3 - x_1)$.
 - $(3y_1 + 2)(3y_2 + 2) = 6x_1x_2 - 10$.
 - Biểu thức $R = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $D(1;9)$ và cắt parabol (P) theo dây cung EF sao cho độ dài đoạn thẳng DF gấp đôi độ dài đoạn thẳng DE .
- Tìm tọa độ tất cả các điểm $H(x;y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{x-y} + \sqrt{y-x} = x+1$.
- Tìm giá trị nguyên của tham số m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức $S = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$ nhận giá trị nguyên.
- Chứng minh rằng có đúng hai điểm $K(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $T = \sqrt{2y^2 - 6x + 5y + 11} + \sqrt{x^3 + 3y^2 + 6x^2 + 2x + 4}$.

Bài toán 83. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx + 6m + 9$ với m là tham số thực.

1. Tìm tọa độ của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = 4$.
2. Tìm giá trị của tham số m và n để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) (P) và d cùng đi qua điểm X nào đó có hoành độ bằng 2.
 - b) Song song với đường thẳng $3x - 5y + n = 0; n \in \mathbb{R}$.
 - c) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 5m.
 - d) Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 4n - 1; n \in \mathbb{R}$.
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 56,25.
3. Tìm khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .
4. Xét hai điểm $A(0;4)$, $B(-1;0)$. Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm C sao cho diện tích tam giác OAC gấp bốn lần diện tích tam giác OAB .
5. Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d luôn có điểm chung với mọi giá trị của m .
6. Xác định m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn
 - a) $x_1^2 + x_2^2 = 13$.
 - b) $4(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 5$.
 - c) M và N đều có tung độ lớn hơn 4.
 - d) $\frac{1}{2x_1 - 3} + \frac{1}{2x_2 - 3} > \frac{2}{3}$.
 - e) $4x_1 - 3x_2 = 3$.
 - f) M và N cùng nằm trong góc phần tư thứ II.
 - g) $|x_1 - x_2| + 3x_1 - x_2 \leq 4$.
 - h) $-4 < x_1 < 1 < x_2 < 5$.
 - i) $\frac{1}{x_1 - x_2 + 1} + 3x_1 + x_2 = 6$.
 - j) Biểu thức $K = (x_1 - x_2)^2 + 3x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - k) Độ dài đoạn thẳng MN bằng $8\sqrt{5}$.
 - l) Biểu thức $F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3y_1 + 4y_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - m) $|x_1 - 2| + x_2 = y_1 + y_2$.
 - n) $x_1^2 + 2mx_2 - 6m - 9 = y_2$.
 - o) Biểu thức $S = \frac{1}{y_1} + \frac{2}{y_2} - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2}\right) + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất.
7. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $(1; -3)$ và tiếp xúc với parabol (P) .
8. Xét điểm $E\left(2; \frac{1}{2}\right)$, tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ sao cho độ dài đoạn thẳng DE nhận giá trị nhỏ nhất.
9. Tìm tọa độ điểm $F(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $x(y+1) = (3x+1)\sqrt{3x-1}$.
10. Tìm tọa độ điểm $G(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $T = \sqrt{y-6x+10} + \sqrt{y-4x+13}$ nhận giá trị nhỏ nhất.
11. Giả sử đường thẳng $y = -4x + 5$ cắt parabol (P) tại hai điểm H, K . Tìm tọa độ trọng tâm J của tam giác HKO .

Bài toán 84. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $\Delta: y = nx - m^2 + 9$.

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và Δ trong trường hợp $n = 2; m = 1$.
- Tìm giá trị của m và n để đường thẳng Δ thỏa mãn điều kiện
 - Song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.
 - Vuông góc với đường thẳng $3y = 2x - 7$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn -5 .
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ các cạnh là $3:8:\sqrt{73}$.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa m và n để đường thẳng đã cho chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.
- Tìm điều kiện của m và n để Δ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng 6.
- Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $y = x + 6$ đồng thời tiếp xúc parabol (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Trong trường hợp $n = 2$; xác định các giá trị của m để (P) và đường thẳng Δ cắt nhau tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho
 - A và B nằm về hai phía của trục tung.
 - Ít nhất một trong hai điểm có hoành độ dương.
 - A và B đều có hoành độ lớn hơn 0,5.
 - $x_1 + x_2 = 6x_1x_2 + 19$.
 - $x_1^2 + x_2^2 + 5(x_1 + x_2) = 6x_1x_2 + 19$.
 - $x_1^3 = x_2 + 8$.
 - $\frac{1}{x_1 - 4} + \frac{1}{x_2 - 4} = -2$.
 - $y_1 + y_2 > 10$.
- Xét hai điểm $P(2; 0), Q(0; -4)$. Tìm giá trị của m để đường thẳng d đã cho cắt trục tung tại điểm R sao cho diện tích tam giác OAR gấp 4 lần diện tích tam giác OAQ .
- Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $S = x^4 - 8\sqrt{2}x + 10$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm $J(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $y - 4x + 6 = \sqrt{5x - 6}$.
- Tìm tọa độ các điểm $K(x; y)$ trên parabol (P) có hoành độ gấp hai lần tung độ.
- Tìm tọa độ các điểm $T(x; y)$ trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ T đến trục hoành gấp 4 lần khoảng cách từ T đến trục tung.
- Tìm giá trị của k để parabol (P) cắt đường thẳng $y = x + k$ tại hai điểm M, N và cắt trục hoành tại điểm T thỏa mãn đồng thời các điều kiện
 - M có hoành độ nhỏ hơn.
 - Tam giác MOT có diện tích bằng k .

Bài toán 85. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $\Delta: y = mx + n$.

- Vẽ parabol (P) .
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) với Δ trong trường hợp $m = 4; n = -3$.
- Tìm điều kiện của m và n sao cho đường thẳng Δ thỏa mãn điều kiện
 - Có hệ số góc lớn hơn 10.
 - Song song với đường thẳng $y = \frac{2}{3}x + 4m - 9$.

- c) Đi qua hai điểm $(4;2)$ và $(-5;1)$.
 - d) Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ IV.
 - e) Cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn $3n^2 - 2$.
 - f) Tạo với chiều dương trục tung một góc $\alpha = 60^\circ$.
4. Trong trường hợp $n = 0$.
- a) Tìm m để (P) và Δ cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.
 - b) Tìm m để (P) và Δ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.
 - c) Tìm m để (P) và Δ cắt nhau tại hai điểm mà khoảng cách giữa hai điểm này bằng $\sqrt{6}$.
5. Với $n = 1 - m$. Tìm m để (P) và Δ cắt nhau tại hai điểm C, D sao cho $CD = \sqrt{3}$.
6. Với $m + n = 2$. Hãy tìm khoảng cách lớn nhất từ điểm $M(6;1)$ đến đường thẳng Δ .
7. Tìm tọa độ điểm $A(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho $\sqrt{5y - 6x - 4} = 2x - 2$.
8. Tìm tọa độ điểm $B(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho khoảng cách từ B đến trục tung gấp 5 lần khoảng cách từ B đến trục hoành.
9. Tìm tọa độ điểm $L(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $\frac{3x+3}{\sqrt{x}} \leq 4 + \frac{x+1}{\sqrt{y-x+1}}$.
10. Xét hai điểm $E(3;1), F(1;0)$. Tìm tọa độ điểm G thuộc parabol (P) sao cho tam giác EFG là tam giác vuông tại G .
11. Giả sử đường thẳng $y = 6x - 5$ cắt parabol (P) tại hai điểm U, V . Tìm tọa độ điểm E sao cho E là chân đường phân giác OT của tam giác OUV .
12. Xét điểm $K\left(3; \frac{15}{4}\right)$. Tìm tọa độ điểm $H(x;y)$ thuộc (P) sao cho độ dài đoạn thẳng HK đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
13. Tìm tất cả các điểm $J(x;y)$ thuộc (P) thỏa mãn đẳng thức $y^2 + 3(3x - 2)^2 = 4(3y - 2x)\sqrt{3x - 2}$.

Bài toán 86. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = -4x^2$ và đường thẳng $d: y = -2mx + m - 1$; m là tham số thực.

1. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Cùng với (P) đi qua điểm có hoành độ bằng 1.
 - b) Cắt đường thẳng $l: 2x - y + 1 = 0$ tại một điểm thuộc trục tung.
 - c) Song song với đường thẳng $2x - 7y + 2m - 1 = 0$.
 - d) Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ II.
 - e) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $4m - 5$.
 - f) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
 - g) Cắt đường phân giác góc phần tư thứ IV tại điểm $Q(x;y)$ sao cho $T = (x - 2)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
2. Tìm m để (P) và d cùng đi qua điểm M có hoành độ bằng -1 .
3. Trong trường hợp (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
 - a) Tìm giá trị m để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{6}$.
 - b) Tìm m để $|x_1| - |x_2| = 5$.
 - c) Tìm m để $-2 < x_1 < x_2 < 1$.
 - d) Tìm giá trị m sao cho $x_1 + 3x_2 = 9$.

- e) Tìm m sao cho $x_1 > x_2 + 8$.
 - f) Tìm m để $|x_1 - y_2| = 2$.
 - g) Tìm giá trị tham số m sao cho $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3} = 5$.
 - h) Chứng minh rằng $y_1 + y_2 < 7(x_1 + x_2)$.
 - i) Tìm m sao cho $x_1 = |x_2^2 - 1| + 5$.
 - j) Với giá trị nào của m thì $\sqrt{2x_1} + \sqrt{3x_2} = 2$?
 - k) Xác định m để hai điểm A, B cách đều đường thẳng $y = x + 0,25$.
 - l) Với giá trị nào của m thì $x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 - x_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất ?
 - m) Xác định m để A và B đều nằm trên nhánh phải của (P) .
 - n) Biểu thức $S = (4y_1 + 1)(4y_2 + 1) - 8(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - o) Tìm m sao cho A và B cách đều gốc tọa độ.
4. Viết phương trình đường thẳng song song với đường phân giác góc phần tư thứ III và tiếp xúc với parabol (P) .
 5. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) với đường cong $(C): y = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x - 2$.
 6. Tính độ dài dây cung tạo bởi parabol (P) và đường thẳng $y = -5x + 1$.

Bài toán 87. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và các điểm $A(1;4), B(1;1), C(2;0)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k, k là tham số thực.

1. Tìm tọa độ của điểm $D(x;y)$ trên (P) thỏa mãn điều kiện
 - a) D có hoành độ $x = \sqrt{2}$.
 - b) D có tung độ bằng 25.
 - c) D có tung độ và hoành độ bằng nhau.
2. Lập phương trình đường thẳng d theo tham số k .
3. Tìm giá trị của k để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Đi qua điểm $(4;6)$.
 - b) Song song với đường thẳng $y = (8k - 1)x + 8$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $2x - 3y + \sqrt{2} = 0$.
 - d) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{3}$ (đơn vị diện tích).
 - f) Hợp với chiều dương trục tung một góc α sao cho $\cot \alpha = 10$.
4. Trong trường hợp đường thẳng d cắt tia Ox và Oy tại hai điểm phân biệt B, C , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $OB + OC$.
5. Khi $k = 2$, tính khoảng cách giữa đường thẳng d và đường thẳng $y = 2x + 10$.
6. Chứng minh parabol (P) và đường thẳng d luôn có hai điểm chung phân biệt.
7. Tìm k để (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn
 - a) M và N cách đều hai trục tọa độ.
 - b) $3(y_1 + y_2) - 6x_1x_2 = 5(x_1 + x_2) = 48$.
 - c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{k - 4}{9k}$.
 - d) Biểu thức $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- e) Tổng các tung độ của M và N đạt giá trị nhỏ nhất.
- f) $\frac{AM}{AN} = 2$ (trong đó M có hoành độ âm; N có hoành độ dương).
8. Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt (P) tại hai điểm E và F phân biệt sao cho tam giác OEF có diện tích bằng 3.
9. Gọi l là đường thẳng đi qua C và song song với đường thẳng OB . Chứng minh rằng l cắt (P) tại hai điểm phân biệt P, Q . Tính diện tích tam giác BPQ .
10. Tìm tọa độ điểm $G(x; y)$ trên parabol (P) sao cho G cách đều hai điểm $H(-2; 0)$ và $K(0; 4)$.
11. Gọi Y và Z là các giao điểm của (P) và đường thẳng $\lambda: y = 2 - x$ (trong đó Y có hoành độ dương). Tìm tọa độ điểm X thuộc (P) sao cho tam giác XYZ cân tại X .
12. Với giá trị nào của m thì parabol (P) cắt đường thẳng $d: y = mx - m + 1$ theo một dây cung có độ dài bằng $\sqrt{3}$?
13. Tìm tọa độ hai điểm U, V nằm trên parabol (P) thỏa mãn U và V đối xứng với nhau qua đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$.

Bài toán 88. Mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi ban Khoa học Tự nhiên); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam và THPT Chu Văn An; Thành phố Hà Nội; Năm học 2005 – 2006.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = ax^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = 2x - a^2$ (với a là tham số thực dương).

- Tìm a để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - Song song với đường thẳng $y = 2x + 5a$.
 - Vuông góc với đường thẳng $y = 3ax - 9$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn -9 .
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.
- Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $S(7; 5)$ và song song với Oy . Tính tan của góc tạo bởi Δ và d .
- Tìm a để parabol (P) đi qua điểm $M(1; 4)$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d với a vừa tìm được.
- Tìm điều kiện của a để parabol cắt đường thẳng d tại hai điểm A và B khác nhau. Chứng minh rằng khi đó A và B nằm về phía bên phải trục tung.
- Gọi hai giao điểm của (P) với d là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x_1 + x_2 + x_1x_2 + 6a$.
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức $R = \frac{2}{x_1 + x_2} + \frac{3}{1 + x_1x_2}$.
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{4}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1x_2}$.
- Xét trường hợp $a = 1$. Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng $y = (m - 2)x - 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $B = (2 - x_1^2)(8 - x_2^2)$ đạt giá trị lớn nhất.
- Xét trường hợp $a = 0,5$.
 - Tìm giá trị của m để parabol (P) cắt đường thẳng $mx - y + 1 = 0$ tại hai điểm phân biệt P, Q sao cho tam giác OPQ có diện tích bằng 1,5.
 - Xét hai điểm M và N có hoành độ lần lượt là -2 và 1 . Lập phương trình đường thẳng d song song với (MN) và cắt (P) tại một điểm duy nhất.

Bài toán 89. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $I(0;2)$, $M(m;0)$, m là tham số thực khác 0.

1. Tìm tọa độ điểm $D(x;y)$ nằm trên parabol (P) sao cho
 - a) D có tung độ bằng 8.
 - b) D cách đều hai trục tọa độ.
 - c) Khoảng cách từ D đến trục hoành gấp 3 lần khoảng cách từ D đến trục tung.
2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm M và I theo tham số m .
3. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B nằm về hai phía đối với trục hoành với mọi m khác 0.
4. Trong trường hợp (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
 - a) Tìm m sao cho $x_1 + x_2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 132$.
 - b) Với giá trị nào của m thì $x_1^3 = -4x_2$?
 - c) Tìm m để $T = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{3m^2 + 4m + 1}{m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - d) Biểu thức $K = \frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - e) Tìm m sao cho $x_1^2 - \frac{4}{m}x_2 + (x_1 + x_2 - 1)^4 = 4$.
 - f) Chứng minh rằng tồn tại một giao điểm có hoành độ $|x_0| > \sqrt{3}$.
 - g) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = (x_1^2 - 9)(x_2^2 - 16)$.
 - h) Tìm m để $S = |x_1 + x_2 + m|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - i) Chứng minh bất đẳng thức $AB > 4$.
5. Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành Ox. Chứng minh IHK là tam giác vuông.
6. Giả sử đường thẳng $y = x + \frac{3}{2}$ cắt parabol (P) tại hai điểm U, V .
 - a) Tìm tọa độ điểm R trong cung parabol nhỏ $\widehat{UV}$ sao cho tam giác UVR có diện tích lớn nhất.
 - b) Tìm tọa độ điểm T thuộc trục hoành sao cho tổng độ dài $TU + TV$ đạt giá trị nhỏ nhất.
7. Tìm tọa độ điểm $C(x;y)$ thuộc parabol (P) sao cho $x = 1 + 6\sqrt[3]{2y + 14x + 49} - 12\sqrt[3]{x + 7}$.
8. Vẽ parabol (P) và đồ thị hàm số $y = -|x|$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ giao điểm hai đồ thị bằng phép toán.
9. Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = x + 3m - 1$ cắt trục hoành tại điểm N sao cho hai tam giác IMO và INO thỏa mãn điều kiện
 - a) Có diện tích bằng nhau.
 - b) Đồng dạng theo tỷ số $k = 3$ theo thứ tự $IMO - INO$.
10. Tồn tại hay không hai điểm X và Y thuộc parabol (P) sao cho tam giác OXY là tam giác vuông cân tại O?

Bài toán 90. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và các điểm $A(1;4)$, $B(-1;1)$.

1. Xét đường thẳng d đi qua B và có hệ số góc bằng 1. Tìm tọa độ giao điểm thứ hai của d và (P) . Chứng minh tam giác OAB là tam giác vuông cân và tính diện tích tam giác này.

2. Xét đường thẳng Δ đi qua A và có hệ số góc k . Tìm giá trị của tham số k sao cho Δ cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 5.
 - a) Δ vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ III.
 - b) Δ cắt (P) tại điểm có tung độ bằng 1.
 - c) Δ cắt (P) tại hai điểm C và D mà độ dài CD ngắn nhất.
3. Tìm tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho tổng độ dài $EA + EB$ đạt giá trị nhỏ nhất.
4. Xét đường thẳng $d: y = 2mx - 6$. Trong trường hợp parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 .
 - a) Tìm m để: $x_1^2 + 2mx_2 = 17$.
 - b) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(x_1^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x_2^2 + \frac{9}{2}\right)$.
5. Tìm điểm $M(x; y)$ thuộc parabol (P) có tọa độ thỏa mãn $2x + y = 3\sqrt{xy}$.
6. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
7. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABO và tính diện tích tam giác ABO .
8. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác AOC có diện tích bằng 10.

Bài toán 91. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = 3mx - 3m + 2$; m là tham số thực.

1. Vẽ parabol (P) .
2. Xét hai điểm $A(m-n; n), B(1; 2-n)$. Tìm m và n để $A \in (P), B \in d$.
3. Tìm điểm cố định C mà đường thẳng d luôn luôn đi qua với mọi giá trị của m .
4. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Cắt trục tung tại một điểm nằm về phía trên trục hoành.
 - b) Tạo với hai trục tọa độ Ox, Oy một tam giác vuông có tỷ lệ giữa độ dài cạnh góc vuông nào đó với độ dài cạnh huyền là $3:5$.
 - c) Cắt trục tung tại điểm có tung độ thuộc đoạn $[4; 7]$.
 - d) Cắt đường phân giác góc phần tư thứ hai của mặt phẳng tọa độ tại điểm $X(x; y)$ sao cho biểu thức $S = 4x^2 + xy + y^2 + 6x + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
5. Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .
6. Tìm tất cả giá trị của m để (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn
 - a) $x_1 + x_2 = 6x_1x_2 - 7$.
 - b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_1x_2} - 5$.
 - c) $x_1^2 + x_2^2 = 4$.
 - d) M và N nằm về hai phía của trục tung.
 - e) $x_1 - 3x_2 = 4m$.
 - f) $MN = 2\sqrt{17}$.
 - g) Biểu thức $K = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - h) $y_1 + y_2 + 4y_1y_2 < 6x_1x_2 + 8$.
 - i) M và N đều có hoành độ lớn hơn 3.
 - j) OMN là tam giác đều.
 - k) $\widehat{OMN} < 90^\circ$.

7. Giả sử $y = 2x^2 = f(x)$. Không tính giá trị biểu thức, chứng minh rằng

$$f\left(f\left(\sqrt{2017} - \sqrt{2016}\right)\right) < f\left(f\left(\sqrt{2016} - \sqrt{2015}\right)\right).$$

8. Tìm trên parabol (P) các điểm có hoành độ gấp hai lần tung độ.
9. Viết phương trình đường thẳng song song với đường phân giác góc phần tư thứ II và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 . Tìm tọa độ giao điểm còn lại.
10. Viết phương trình đường thẳng song song với đường phân giác góc phần tư thứ III và tiếp xúc với parabol (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.
11. Gọi E là điểm thuộc parabol (P) có hoành độ bằng -2 ; F và G theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng $y = 4x + 6$ và (P) . Biết F có hoành độ âm, G có hoành độ dương. Vẽ hình bình hành $EFGH$.
 - a) Xác định tọa độ điểm H .
 - b) Điểm H có thuộc parabol (P) hay không? Vì sao?

Bài toán 92. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm $A(0;1), B(1;3)$, d là đường thẳng đi qua B và có hệ số góc k , k là tham số thực.

1. Lập phương trình đường thẳng AB .
2. Tính diện tích của tam giác tạo bởi đường thẳng AB với hai trục tọa độ.
3. Thiết lập phương trình đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AB và tiếp xúc với (P) .
4. Chứng minh rằng qua điểm A có duy nhất một đường thẳng cắt (P) tại hai điểm phân biệt mà khoảng cách giữa hai điểm đó bằng 2.
5. Lập phương trình đường thẳng d và chứng minh (P) cắt d tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số k .
6. Tìm giá trị của k để đường thẳng d cắt đoạn thẳng OZ với $Z(4;0)$.
7. Tìm tất cả các giá trị của k để (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn
 - a) M và N nằm khác phía đối với trục tung.
 - b) $x_1 + x_2 - 5x_1x_2 = 10$.
 - c) Tung độ điểm này gấp 16 lần tung độ điểm kia.
 - d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{7}{x_1x_2} = 8$.
 - e) Biểu thức $P = |x_1 - x_2|^3$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - f) $2x_1 - 3x_2 = 4$.
 - g) M và N đều có hoành độ lớn hơn 2.
 - h) Biểu thức $S = (3y_1 + 2)(3y_2 + 2) - 5x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - i) $x_1 < 4 < x_2$.
 - j) Độ dài đoạn thẳng MN bằng $3\sqrt{10}$.
8. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục hoành sao tổng độ dài $PA + PB$ đạt giá trị nhỏ nhất.
9. Tìm tọa độ điểm $G(x; y)$ thuộc parabol (P) để tam giác ABG cân tại G .
10. Tìm tọa độ điểm $J(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng AJ ngắn nhất.
11. Xét đường tròn (ω) đường kính AB , đường thẳng Δ là tiếp tuyến đi qua O của đường tròn (ω) . Tìm tọa độ tiếp điểm của (ω) và Δ .
12. Giả dụ C và D là hai điểm nằm trên (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Gọi F là điểm nằm trên CD và có hoành độ bằng 1. Tìm điểm E trên parabol sao cho EF là đường phân giác của góc CED .
13. Tìm tọa độ điểm $K(x; y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức

$$\sqrt{y + 4x + 3} + \sqrt{x + y} = \sqrt{3y + 4x + 1}.$$

Bài toán 93. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = ax - a$; a là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $a = 2$.
- Tìm a để (P) và d cùng đi qua điểm có hoành độ bằng 3.
- Tìm giá trị của a để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - Song song với đường thẳng $\Delta: y = (a^2 - 3a)x + 2a$.
 - Vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.
 - Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn $7a - 3$.
 - Đồng quy với hai đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0; x - 5y + 6 = 0$.
 - Cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại điểm $C(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy + 6y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{3}{\sqrt{10}}$.
 - Cắt đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{4}{\sqrt{17}}$ tại hai điểm phân biệt.

4. Tìm tất cả các giá trị của a để d cắt (P) tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện

- $x_1 + x_2 + 8 = 8x_1x_2 + a^2$.
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1 + x_2 > 2a^2$.
- $x_1 - 3x_2 = 5$.
- Tung độ điểm này gấp 4 lần điểm kia.
- $|x_1 - x_2| \geq \sqrt{5}$.
- M và N đều có hoành độ nhỏ hơn 2.
- $(3x_1 + 1)(3x_2 + 1) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 7$.
- M và N nằm khác phía đối với đường thẳng $x = 4$.
- $\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = 1$.
- $(2y_1 + 3)(2y_2 + 3) = 7(x_1 + x_2) + 33$.
- $\sqrt{x_1^2 + ax + a} = |3a - 5|$.
- Biểu thức $S = \sqrt{x_1^2 + ax + a} + \sqrt{x_2^2 + ax + a} + 2|10 - a|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- Tính diện tích tam giác OAB với A, B là giao điểm của parabol (P) với đường thẳng $y = -x + 6$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $(0; -6)$ và tiếp xúc với parabol (P) .
- Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ L đến trục hoành gấp hai lần khoảng cách từ L đến trục tung.
- Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $y = -x + 2$ và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 .
- Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng $\Delta: y = 4mx - 4m + 1$ tại hai điểm H, K sao cho $OH \cdot OK = 2$?
- Xét hình vuông (V) tâm O, độ dài cạnh bằng $\sqrt{2}$, hai đường chéo nằm trên hai trục tọa độ. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) với hình vuông (V) .
- Xác định các điểm P và Q thuộc parabol (P) sao cho OPQ là tam giác đều nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Bài toán 94. Cho hai hàm số $y = mx + m^2 + \frac{9}{4}$ (1) và $y = f(x) = (1 + 4m^2)x^2$ (2); với m là tham số thực.

1. Xác định khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số (2).
2. Chứng minh rằng đồ thị hàm số (2) luôn nằm phía trên trục hoành.
3. Tìm giá trị của m thì đồ thị hai hàm số đã cho cùng đi qua điểm $S(-1; 2)$? Với giá trị m tìm được, hãy xác định tọa độ giao điểm thứ hai của hai đồ thị đó.
4. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đồ thị hàm số (2) luôn là một parabol (P), đồng thời đồ thị hàm số (1) không thể đi qua đỉnh của (P).
5. Tìm giá trị của m để hàm số (1) đồng biến.
6. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) thỏa mãn
 - a) Song song với đường thẳng $y = 3x - 10$.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 4$.
 - c) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
 - d) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 1,75.

7. Trong trường hợp $m = 0$, xét các số a, b, c thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} ab + bc + ca = 2013abc, \\ 2013(a + b + c) = 1. \end{cases}$$

Tính $f(a^{2013} + b^{2013} + c^{2013})$.

8. Trong trường hợp $m = 0$, tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ trên đồ thị hàm số (2) thỏa mãn bất phương trình
$$\sqrt{2y - 2x + 5} + \sqrt{2y - 4x + 4} \leq \sqrt{13}.$$

Bài toán 95. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Ngoại ngữ; Đại học Ngoại ngữ; Đại học Quốc gia Hà Nội; Năm học 2014 – 2015.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = 3(m + 1)x - 2m^2 - 5m - 2$; m là tham số thực.

1. Tính độ dài đoạn thẳng OX biết X nằm (P), X có hoành độ bằng -5 .
2. Giả sử P, Q là các giao điểm của parabol (P) với đường thẳng $y = 5x - 6$. Tìm độ dài đường cao hạ từ O của tam giác OPQ .
3. Xác định giá trị tham số m để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Đi qua điểm Y nằm trên (P), Y có hoành độ bằng 1.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = 6x + 5$.
 - c) Song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(1; -3)$ và $(-2; 1)$.
 - d) Tạo với chiều dương trục tung một góc $\alpha = 60^\circ$.
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có tỷ lệ các cạnh là $4 : 7 : \sqrt{65}$.
 - f) Cắt trục hoành tại điểm hoành độ nhỏ hơn 1,5.
4. Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d luôn có giao điểm chung với mọi giá trị của m .
5. Tìm giá trị m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai nghiệm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2|$.
6. Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) Một trong các giao điểm có hoành độ bằng 3.
 - b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$.
 - c) Ít nhất một trong hai giao điểm nằm bên trái trục tung.

- d) $x_1 + 4x_2 = 5m$.
- e) M và N đều nằm trong góc phần tư thứ nhất.
- f) $2x_1 - x_2 = |m|$.
- g) Tung độ điểm này bằng bình phương tung độ điểm kia.
- h) $|x_1 - x_2| = 5$.
- i) $y_1 + y_2 = x_1x_2 + 3$.
- j) $|x_1^2 - x_2^2| \leq 3$.
- k) $x_1 \leq x_2 - 5$.
- l) Biểu thức $T = 2y_1 + 3y_2 + 4x_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- m) $|3x_1 - 2x_2| = x_1$.
- n) $\frac{1}{x_1 + 2} = \frac{3}{x_2 + 4}$.
- o) Biểu thức $P = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4y_1 + 5y_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- p) $x_1^2 + 3(m+1)x_2 + 5m + 2 = 34m^2$.

7. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $(1; -15)$ và tiếp xúc với parabol (P) .
8. Tìm tọa độ điểm H trên parabol (P) và điểm K trên đường thẳng $y = 2x - 7$ sao cho khoảng cách giữa H và K ngắn nhất.
9. Tìm giá trị của m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$, trong đó hoành độ của một trong hai giao điểm gấp đôi hoành độ một trong các giao điểm của parabol (P) với đường thẳng $\Delta: y = x + 4m^2 - 6m + 2$.
10. Tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2y + 3x + 1} + \sqrt{1 - 3x} = 2\sqrt{y + 1}$.
11. Tìm tọa độ hai điểm A, B thuộc (P) sao cho A đối xứng với B qua điểm $C(2; 13)$.
12. Xét hai điểm $E(1; 4)$ và $F(3; 8)$, I là trung điểm của đoạn thẳng EF . Tìm tọa độ điểm G thuộc parabol (P) sao cho GI là phân giác của góc $\widehat{EGF}$.

Bài toán 96. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Khánh Hòa; Năm học 2011 – 2012; Khóa ngày 29.06.2011.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = (m+1)x - 3(m-2)$; m là tham số thực.

1. Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $m = 2$.
2. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường phân giác góc phần tư thứ II.
3. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = -3$.
4. Xác định giá trị của m sao cho đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Đi qua trung điểm của đoạn thẳng OX với $X(2; 4)$.
 - b) Song song với đường thẳng $y = -5x + 3$.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $2x - 7y + 2 = 0$.
 - d) Cắt đường phân giác góc phần tư thứ III tại điểm có tung độ bằng 2.
 - e) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tỷ lệ giữa độ dài cạnh nhỏ nhất và độ dài cạnh lớn nhất là $1:\sqrt{5}$.
 - f) Cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn $-10m$.
 - g) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ hơn 2,25 (đơn vị diện tích).
 - h) Cắt đường thẳng $2x - 3y + 1 = 0$ tại điểm $Y(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $OM = \sqrt{2}$.

5. Tìm điểm cố định mà đường thẳng d luôn luôn đi qua với mọi giá trị của m , từ đó tìm giá trị m để đường thẳng d cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.
6. Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng d với mọi giá trị m , trong đó có ít nhất một giao điểm có hoành độ dương.
7. Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện
 - a) $3(x_1 + x_2) = 4x_1x_2 - 5$.
 - b) M và N đều nằm trong góc phần tư thứ nhất.
 - c) $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7m + 19$.
 - d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$.
 - e) M và N đều có hoành độ trong khoảng $(1; 5)$.
 - f) $|x_1 - x_2| = 3$.
 - g) $|x_2 - 2y_2| = 5$.
 - h) $x_2^2 + (m+1)x_1 + 3(m-2) = 4x_1^2$.
 - i) $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2 + 2} = 3$.
 - j) Tung độ điểm này hơn tung độ điểm kia 7 đơn vị độ dài.
 - k) $|3x_1 - 4x_2| = 5$.
 - l) $y_1 + 2y_2 = 4x_1 - x_2$.
 - m) $x_1^3 + x_2^3 \geq 35$.
 - n) Biểu thức $S = 3x_1 - 2x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.
 - o) $\sqrt{x_2^2 + (m+1)x_1 + 3(m-2)} = (m+1)^3$.

8. Khi parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{x_2^2 + (m+1)x_1 + 3(m-2)} + \sqrt{x_1^2 + (m+1)x_2 + 3(m-2)} > m - \sqrt{2017}.$$

9. Tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho tiếp tuyến của parabol tại D vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 4$.
10. Viết phương trình đường thẳng song song với đường phân giác góc phần tư thứ II và cắt parabol (P) tại điểm có tung độ bằng 4.
11. Tìm tọa độ điểm $Z(x; y)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $4xy + 4y - 5x + 9 = 4\sqrt{16x+8}$.
12. Đường thẳng $y = 2x + 8$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ điểm C thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{AB}$ sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 27 (đơn vị diện tích).
13. Tìm tọa độ điểm $Q(x; y)$ nằm trên parabol (P) sao cho biểu thức $T = 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} - 16\sqrt{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
14. Xét điểm $K\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$. Tìm tọa độ điểm $H(x; y)$ trên parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng HK là ngắn nhất.
15. Xét điểm E thuộc đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$, chứng tỏ rằng hai tiếp tuyến của parabol (P) được từ E vuông góc với nhau.

Bài toán 97. Chuyển thể, mở rộng và phát triển bài 2.2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Quảng Nam; Năm học 2011 – 2012; Khóa ngày 30.06.2011.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = mx - m + 1$; m là tham số thực.

1. Tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn
 - a) Cách đều hai gốc tọa độ.
 - b) Tung độ gấp 3 lần hoành độ.
 - c) Nằm trên đường thẳng $y = 3x - 2$.
 - d) Nằm trên đường cong $y = x^3 + x^2 - 3x + 2$.
2. Xác định giá trị của m và n để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Song song với đường thẳng $y = 4x + 9n - 10$.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $2y - \sqrt{2}x + 4 = 0$.
 - c) Đi qua điểm K thuộc đường cong $y = x^4 - 2$, K có hoành độ bằng 2.
 - d) Chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn thẳng bằng nhau.
 - e) Cắt đoạn thẳng OH với $H(0; 10)$.
 - f) Cắt đường thẳng $2x - 3y + 2 = 0$ tại điểm $L(x; y)$ thỏa mãn $T = x - y - xy$ đạt giá trị lớn nhất.
3. Tìm tọa độ điểm cố định mà đường thẳng d luôn luôn đi qua với mọi giá trị của m , từ đó tìm khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến đường thẳng d .
4. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $Q(2; 8)$ và cắt parabol (P) theo một dây cung EF có độ dài bằng $25\sqrt{2}$.
5. Chứng minh rằng đường thẳng d và parabol (P) luôn có điểm chung với mọi giá trị của m , trong đó có ít nhất một giao điểm có hoành độ dương.
6. Tìm m để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - a) $x_1 + x_2 = 6x_1x_2 - \frac{1}{2}$.
 - b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$.
 - c) Tung độ điểm này hơn tung độ điểm kia 10 đơn vị.
 - d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2011}$.
 - e) $\sqrt{x_1^2 + mx_2 + m - 1} = 3m - 1$.
 - f) $-1 < x_1 < x_2 < 6$.
 - g) M và N nằm giữa trục hoành và đường thẳng $y = 4$.
 - h) $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{2}{x_2 - 3} = 4$.
 - i) $x_1 > 5; x_2 < 2$.
 - j) Biểu thức $A = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - k) $(2y_1 + 3)(2y_2 + 3) + 5x_1x_2 = 4(x_1 + x_2)$.
 - l) Biểu thức $P = (x_1 + m)(x_2 + 2m) + 3y_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - m) $(x_1^2 + mx_2 + m - 1)(x_2^2 + mx_1 + m - 1) = 2017m^3$.
 - n) Biểu thức $M = (x_1^2 + 2)(x_2^2 + 3)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 98. Chuyên thể, mở rộng và phát triển bài 2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bắc Giang; Năm học 2001 – 2002; Ngày thi 03.07.2001.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = 2(a-1)x - 2a + 5$; với a là tham số thực.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ khi $a = 2$. Tìm tọa độ giao điểm hai đồ thị bằng phép tính.
- Tìm tất cả các giá trị của a và b để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - Đi qua điểm Y nằm trên đường cong $y = x^3 + x + 4$, Y có tung độ bằng 6.
 - Song song với đường thẳng $y = 6x + b - 10$.
 - Vuông góc với đường thẳng $x + y + \sqrt{2} = 0$.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn 11.
 - Đồng quy với hai đường thẳng $x + y = 6$; $2x + 3y = 10$.
 - Cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA = 4OB$.
 - Cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - Cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm $X(x; y)$ nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$.
- Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d luôn có điểm chung với mọi giá trị a .
- Tìm a để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai giao điểm nằm cùng phía đối với trục tung. Khi đó hai giao điểm nằm trong góc phần tư nào?
- Tìm a để parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ sao cho
 - $x_1 + x_2 = 2x_1x_2 + 5$.
 - M và N nằm khác phía đối với đường thẳng $x = 1$.
 - $x_1^2 + x_2^2 + 11x_1x_2 + 7 = a$.
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -a$.
 - Tung độ điểm này bằng bình phương tung độ điểm kia.
 - $\frac{1}{2x_1 - 1} + \frac{1}{2x_2 - 1} = -\frac{a}{7}$.
 - Biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $x_1^2 + 2(a-1)x_2 + 2a - 5 = 4(a-1)^3$.
 - $x_1^2 + 2(a-1)x_2 + 2a - 5 > 0$.
 - Biểu thức $B = |x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $y_1 + y_2 + (3y_1 - 1)(3y_2 - 1) = 5x_1x_2$.
 - $y_1 - 3y_2 > 1$.
 - $[x_1^2 + 2(a-1)x_2 + 2a - 5][x_2^2 + 2(a-1)x_1 + 2a - 5] < 16$.
 - $x_1 \geq x_2 \geq 1$.
- Giả sử D và E là hai giao điểm của đường thẳng $y = 4x + 12$ với parabol (P), D có hoành độ nhỏ hơn. Xét tam giác ODE với các đường cao OF, DG, EH . Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác FGH .
- Xét điểm $K\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$, tìm tọa độ điểm T trên parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng KT bằng $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Bài toán 99. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Đợt 1; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bắc Giang; Năm học 2004 – 2005; Ngày thi 01.07.2004.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = 2mx - m^2 + m - 1$ với m là tham số thực.

1. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Song song với đường thẳng $y = (7m - 2)x - 1$.
 - b) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$.
 - c) Đi qua điểm $P(3;5)$.
 - d) Cắt trục hoành tại điểm Q có hoành độ dương.
2. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d khi $m = 1$.
3. Với giá trị nào của m thì parabol (P) và đường thẳng d tiếp xúc với nhau? Tìm tọa độ tiếp điểm với m vừa tìm được.
4. Chứng minh rằng nếu parabol (P) cắt đường thẳng d thì giao điểm đó luôn nằm bên phải trục tung.
5. Trong trường hợp parabol (P) cắt đường thẳng tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - a) Tìm m thỏa mãn $x_1 + x_2 = 5x_1x_2 - 11$.
 - b) Tìm m sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 15$.
 - c) Tìm m để $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = 2m^3 + m - 1$.
 - d) Tìm giá trị m sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2$.
 - e) Với giá trị nào của m thì $(x_1^2 + 2mx_2 + m^2 - m + 1)(x_2^2 + 2mx_1 + m^2 - m + 1) = m^3$?
 - f) Tìm m để tung độ điểm này gấp 16 lần tung độ điểm kia.
 - g) Tìm m để $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 10m - 1$.
 - h) Tìm giá trị m sao cho $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 4$.
 - i) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai hoành độ độc lập với tham số m .
 - j) Tìm m sao cho $x_1^2 + 2mx_2 + m^2 - m + 1 = 9m$.
 - k) Tìm m để $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + x_1x_2 - 3$.
 - l) Tìm m để hoành độ điểm này bằng 4 lần hoành độ điểm kia.
 - m) Tìm m để biểu thức $T = x_1 + x_2 + 4x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - n) Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 6(x_1 + x_2) + 5$ nhận giá trị nhỏ nhất.
6. Tìm tọa độ điểm $J(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho J cách đều hai trục tọa độ.
7. Xét điểm A thuộc parabol (P) , A có hoành độ bằng -4 . Tìm tọa độ điểm B thuộc parabol (P) sao cho tam giác AOB nhận trung điểm I của AB làm tâm đường tròn ngoại tiếp.
8. Xét điểm $C(-14;1)$, tìm tọa độ điểm D trên parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng CD ngắn nhất.
9. Xét điểm $E(10;4)$, tìm tọa độ điểm F trên parabol (P) sao cho tam giác OEF cân tại F .
10. Tìm tọa độ điểm $G(x; y)$ nằm trên parabol (P) thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{y}}$.
11. Xét hai điểm H và K thuộc parabol (P) , H và K có hoành độ lần lượt là -8 và $0,125$. Tìm tọa độ điểm T thuộc trục tung sao cho bốn điểm H, K, T, O cùng thuộc một đường tròn.
12. Tìm tọa độ điểm $L(x; y)$ thuộc parabol (P) sao cho biểu thức $S = 2x^4 - y^2 - 24\sqrt{6}x + 10$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

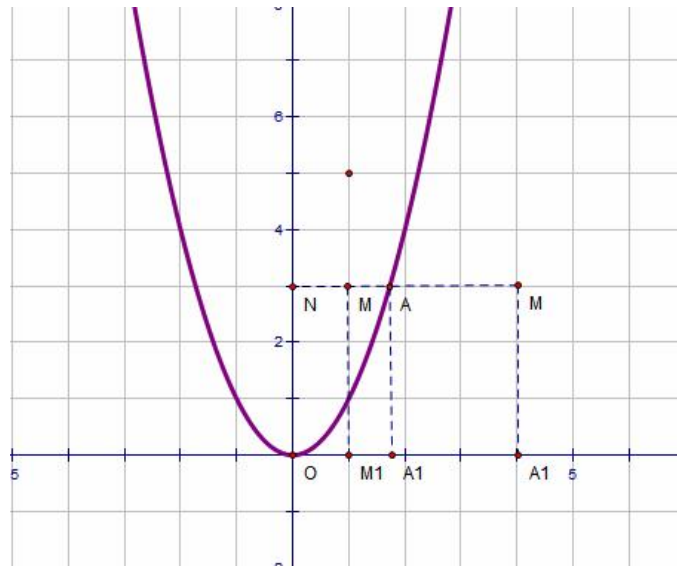
Bài toán 100. Chuyên thể, mở rộng và phát triển câu câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Đợt 2; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bắc Giang; Năm học 2004 – 2005; Ngày thi 02.07.2004.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = (k+1)x - k$ với k là tham số thực.

1. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) với đường thẳng d với $k = 5$.
2. Tìm k để parabol (P) cắt đường thẳng d tại điểm có hoành độ bằng 5.
3. Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng d thỏa mãn
 - a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 2.
 - b) Song song với đường thẳng $y = (5k-2)x + 4k^3$.
 - c) Cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại U, V sao cho $OU = 3OV$.
 - d) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1,6.
 - e) Cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.
 - f) Cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại điểm $L(x; y)$ sao cho biểu thức $D = x^4 - 7x^2 + x + y + 30$ đạt giá trị nhỏ nhất.
4. Tìm tọa độ điểm $J(x; y)$ thuộc parabol (P) có tung độ gấp hai lần hoành độ.
5. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $S(3; 25)$ và cắt parabol (P) theo dây cung PQ sao cho S là trung điểm của dây cung PQ .
6. Xét điểm A thuộc parabol (P) có hoành độ bằng $-\sqrt{13}$. Tìm tọa độ điểm B thuộc parabol (P) sao cho tam giác AOB vuông tại B .
7. Xét điểm C thuộc parabol (P) có hoành độ bằng -4 . Tìm tọa độ điểm D thuộc parabol (P) sao cho tam giác COD vuông tại O.
8. Xét điểm H thuộc nhánh trái của parabol (P) , H có tung độ bằng 36.
 - a) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng OH .
 - b) Tìm tọa độ điểm K nằm trên parabol (P) sao cho tam giác OHK nhận KI là phân giác trong của góc $\widehat{OKH}$.
9. Chứng minh rằng parabol (P) và đường thẳng d với mọi giá trị của tham số k .
10. Trong trường hợp đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - a) Tìm k để M và N đều nằm trong góc phần tư thứ nhất.
 - b) Tìm k thỏa mãn đẳng thức $x_1 + x_2 + 1 = \frac{3}{x_1 x_2}$.
 - c) Tìm k để tung độ điểm này hơn tung độ điểm kia 1 đơn vị.
 - d) Tìm k sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \sqrt{3}$.
 - e) Hãy tính k để $A = x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2 + 2005$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
 - f) Tìm k để $\frac{2}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 4$.
 - g) Tìm giá trị của k để $y_1 = |2x_2 - 1|$.
 - h) Tìm k để $T = y_1 + y_2 + 4y_1 y_2 + x_1 + x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - i) Tìm k sao cho $x_1^2 + (k+1)x_2 + k = x_2^2$.
 - j) Tìm giá trị của k để biểu thức $S = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1 + 4x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - k) Tồn tại hay không giá trị của k để hai hoành độ đều nằm ngoài khoảng $\left(3; \frac{k}{2} - 3\right)$?

Bài toán 101. Chuyển thể, mở rộng và phát triển câu câu 3; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán; Đề thi dự bị; Đợt 1; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bắc Giang; Năm học 2004 – 2005; Ngày thi 01.07.2004. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, O là gốc tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng chứa tham số có dạng $d: y = 2mx - m^2 + m - 3$; với m là tham số thực.

1. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d thỏa mãn điều kiện
 - a) Đi qua điểm A thuộc (P) , A có hoành độ bằng 3.
 - b) Song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.
 - c) Vuông góc với đường thẳng $y = 4x - \frac{1}{2}$.
 - d) Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
 - e) Cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn -3 .
 - f) Cắt đường thẳng $y = 5x - 6$ tại điểm $B(x; y)$ sao cho biểu thức $S = x^2 + 7x - y + 10$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
2. Đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt P, Q . Tìm tọa độ điểm R thuộc cung parabol nhỏ $\widehat{PQ}$ sao cho tam giác PQR có diện tích lớn nhất.
3. Tìm đường thẳng đi qua điểm $(1; -8)$ và tiếp xúc với parabol (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.
4. Tìm tọa độ hai điểm E, F trên parabol (P) sao cho E và F đối xứng nhau qua điểm $(4; 10)$.
5. Tìm tọa độ điểm $P(x; y)$ trên parabol (P) sao cho $\sqrt{3y + 3x} + \sqrt{x - y} = 2x + 1$.
6. Xét điểm C thuộc parabol (P) có hoành độ bằng $-2\sqrt{5}$. Tìm tọa độ điểm D thuộc parabol (P) sao cho tam giác COD vuông tại D .
7. Tìm tọa độ các giao điểm của parabol (P) với đường cong $(C): y = x^3 + 2x^2 + 7x - 9$.
8. Xét hai điểm H và K thuộc parabol (P) , H và K có hoành độ lần lượt là -10 và $0,1$. Tìm tọa độ điểm T thuộc trục tung sao cho bốn điểm H, K, T, O cùng thuộc một đường tròn.
9. Trong trường hợp đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
 - a) Tìm m để M và N trùng nhau.
 - b) Chứng minh rằng hai điểm M và N luôn nằm trên cùng một nhánh của (P) .
 - c) Tìm giá trị m sao cho $3(x_1 + x_2) = x_1x_2 + 3m$.
 - d) Tìm m để một trong hai hoành độ giao điểm bằng 1.
 - e) Tìm m sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$.
 - f) Tìm m để $\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} = \frac{6}{11}$.
 - g) Tìm m thỏa mãn $x_1^2 + 2mx_2 + m^2 - m + 3 = 4m^3$.
 - h) Khi nào thì M và N nằm khác phía đối với đường thẳng $x = 2$.
 - i) Tìm m sao cho $x_1 > x_2 \geq 2$.
 - j) Tìm tất cả giá trị m để hiệu hai hoành độ bằng $2m$.
 - k) Tìm m để $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$.
 - l) Biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 - 10m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - m) Tìm giá trị m để $y_1 + y_2 = 4x_1x_2 + 3(x_1 + x_2)$.
 - n) Tìm m sao cho biểu thức $A = (2x_2 - 1)x_1 + (2x_1 - 1)x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - o) Với giá trị nào của m thì $\sqrt{x_1^2 + 2mx_2 + m^2 - m + 3} = |m - 9|$?



Không giảm tính tổng quát, xét (P) nằm phía trên trục hoành.

Đường thẳng đi qua $M(a; b), b > 0$ song song với Ox cắt trục Oy tại $N(0; b)$, cắt parabol (P) tại $A(\pm\sqrt{b}; b)$.

Nếu M nằm trong lòng parabol (P) thì $MN < AN \Rightarrow |a| < |\sqrt{b}| \Rightarrow a^2 < b$. Điều ngược lại là đúng.

Nếu M nằm phía ngoài parabol (P) thì $MN > AN \Rightarrow |a| > |\sqrt{b}| \Rightarrow a^2 > b$. Điều ngược lại là đúng.

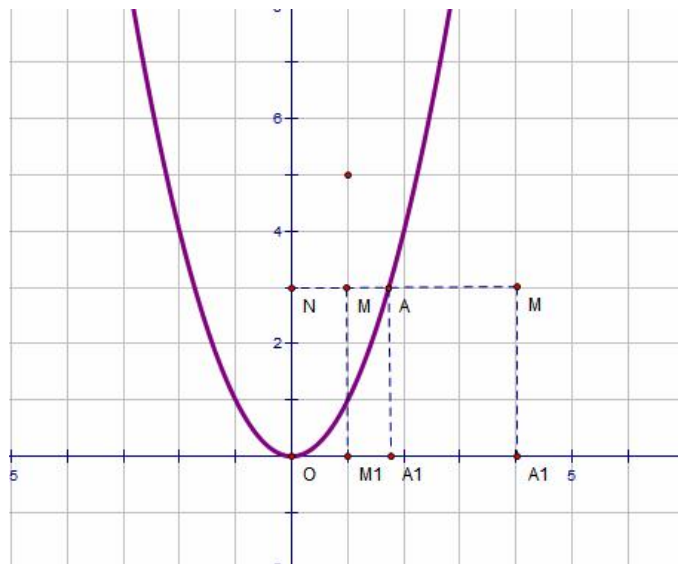
Kết luận : $x^2 < y \Leftrightarrow M$ nằm trong lòng (P) và $x^2 > y \Leftrightarrow M$ nằm phía ngoài (P) .

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huỳnh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 1;2;3;4.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.*
Lê Hoàng Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*
Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.

23. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. *23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.*
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. *Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.*
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. *Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. *Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.*
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. *Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.*
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuấn
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.*
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. *9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. *Toán nâng cao Đại số và Giải tích 12.*
Nguyễn Xuân Liêm – Hoàng Chính Bảo ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 1999.
32. *15 chủ đề thường gặp trong các kỳ thi THCS và tuyển sinh lớp 10 ; Môn Toán.*
Nguyễn Đức Hoàng – Nguyễn Sơn Hà ; NXB Đại học Sư phạm ; 2009.
33. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
34. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*
Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
35. *Khai thác và phát triển một số bài toán Trung học cơ sở ; Tập 1, 2.*
Nguyễn Tam Sơn – Phạm Thị Lệ Hằng ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2012.
36. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
37. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Môn Toán.*
Hà Nghĩa Anh – Nguyễn Thúy Mùi – Huỳnh Kỳ Tranh;
NXB Đại học Quốc gia Hà Nội ; 2006
38. *Ôn thi vào lớp 10 THPT Chuyên; Môn Toán.*
Đoãn Minh Cường – Trịnh Hoài Dương
– Trần Văn Khải – Đỗ Thanh Sơn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2013.
39. *Tài liệu hướng dẫn ôn thi vào lớp 10 Môn Toán.*
Phạm Văn Thạo (chủ biên) ; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2013.
40. *Ôn tập thi vào lớp 10 ; Môn Toán.*
Phan Doãn Thoại – Trịnh Thúy Hằng – Lại Thị Thanh Hương
– Mai Công Mẫn – Hoàng Xuân Vinh; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2008.
41. *Ôn thi vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho học sinh tỉnh Thái Bình).*
Dương Văn Thanh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
42. *Tài liệu chuyên toán THCS; Toán 9; Tập 1: Đại số.*
Vũ Hữu Bình – Phạm Thị Bạch Ngọc – Đàm Văn Nhi; NXB Giáo dục Việt Nam; 2012.
43. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.*
44. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.*
45. *Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.*
46. *Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.*
47. *Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).*

48. **Các tạp chí toán học:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
49. **Các diễn đàn toán học:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
50. **Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...**



Không giảm tính tổng quát, xét (P) nằm phía trên trục hoành.

Đường thẳng đi qua $M(a; b), b > 0$ song song với Ox cắt trục Oy tại $N(0; b)$, cắt parabol (P) tại $A(\pm\sqrt{b}; b)$.

Nếu M nằm trong lòng parabol (P) thì $MN < AN \Rightarrow |a| < |\sqrt{b}| \Rightarrow a^2 < b$. Điều ngược lại là đúng.

Nếu M nằm phía ngoài parabol (P) thì $MN > AN \Rightarrow |a| > |\sqrt{b}| \Rightarrow a^2 > b$. Điều ngược lại là đúng.

Kết luận : $x^2 < y \Leftrightarrow M$ nằm trong lòng (P) và $x^2 > y \Leftrightarrow M$ nằm phía ngoài (P) .



THÂN THỂ TẠI NGỰC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỰC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI
